



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**“Tránsito desde la Resolución de Problemas hasta la  
Modelización en estudiantes de Honduras”**

T E S I S

Que presenta:

NOÉ FERNANDO AGUILAR PERDOMO

para obtener el Grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS

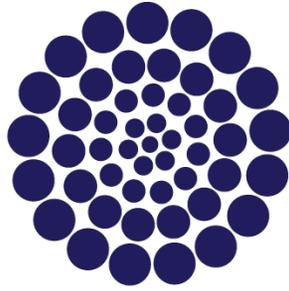
EN LA ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de la Tesis:

DRA. CLAUDIA MARGARITA ACUÑA SOTO

## **Dedicatoria:**

*A mi hijo Leo; mi amor Karla;  
mis padres Jorge Aguilar y Reyna Perdomo;  
mi Tía Suyapa Perdomo;  
y mis hermanos Gilberto, Jorge, Reina, Misael y Allan.*



**CONACYT**

*Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado para llevar a cabo esta investigación, promoviendo con ello el desarrollo científico de México y Latinoamérica.

Noé Fernando Aguilar Perdomo

CVU: 1089194

## AGRADECIMIENTOS

A *mi familia*: A mi hijo *Leonardo Gael* y a *mi amor Karla Martínez*, quienes con su paciencia y amor me dieron la fuerza que necesité para realizar mis estudios de maestría; a *mis padres, Jorge y Reyna* por su apoyo y amor permanente; a mi *Tía Suyapa* quien a lo largo de mi vida me ha demostrado lo mucho que me ama; a *mis hermanos*, que siempre me han apoyado y cuidado de mi familia en mi ausencia y a *mi primo, Fernando* por compartir muchas experiencias en esta vida.

A *mi suegra Daysi* y a *mi cuñado Cristian*: Por cuidar a Leo y a Karla cuando no he estado en Honduras, mi gratitud siempre con Ustedes.

A *mis amigos*: que siempre han estado para mí en los momentos más importantes de mi vida, *Gabi, Nahun, David, Fabián, Tahiry, Elmer, Samuel, Simons, Digna, Rubén, Ita y Manuel*, a Ustedes gracias.

A la *comunidad hondureña* de Matemática Educativa en el Cinvestav: por el apoyo recibido en México, por esos buenos momentos que hemos compartido y por ser mi otra familia, especialmente a *Sharon, Helen, Rodil y Tatiana*.

A *mis amigos: Luis Miguel, Jimmy y Alejandra*, por motivarme a venir a México y ayudarme en todo el proceso.

A *mis hermanos académicos*: Por la amistad que me han brindado y por todos esos domingos de discusión académica que fortalecieron mi proyecto de investigación, especialmente a *Kike, Fabi, Sharon, Vero y Jimmy*.

Finalmente, mi más sincero agradecimiento a *mi asesora: la Dra. Claudia Acuña*, quien me dio la oportunidad de iniciar este proyecto, por creer en mí, por su tiempo y apoyo en cada momento de mi maestría.

A todos, ¡GRACIAS

# ÍNDICE

ÍNDICE.....	I
ÍNDICE DE TABLAS.....	III
ÍNDICE DE FIGURAS.....	IV
RESUMEN.....	VI
ABSTRACT .....	VII
INTRODUCCIÓN GENERAL.....	VIII
<b>1. ANTECEDENTES .....</b>	<b>1</b>
1.1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.2. POSTURA EDUCATIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	2
1.2.1. <i>Introducción</i> .....	2
1.2.2. <i>Posturas sobre lo que significa un problema</i> .....	3
1.2.3. <i>Aspectos teóricos de la Resolución de Problemas</i> .....	6
1.2.4. <i>Enfoque del NCTM sobre Resolución de Problemas</i> .....	11
1.2.5. <i>Enfoque de PISA sobre Resolución de Problemas</i> .....	13
1.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN HONDURAS .....	21
1.3.1. <i>Introducción</i> .....	21
1.3.2. <i>Sobre los problemas en los libros de texto</i> .....	21
<b>2. MARCO REFERENCIAL .....</b>	<b>28</b>
2.1. INTRODUCCIÓN .....	28
2.2. MODELIZACIÓN .....	29
2.2.1. <i>Introducción</i> .....	29
2.2.2. <i>Tránsito entre el Mundo Real y el Mundo de las Matemáticas</i> .....	29
2.2.3. <i>La competencia de modelización</i> .....	33
2.2.4. <i>Sobre los ciclos de Modelización</i> .....	35
2.3. POSTURA EN ESTA INVESTIGACIÓN SOBRE EL VÍNCULO ENTRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA MODELIZACIÓN .....	40
2.3.1. <i>Introducción</i> .....	40
2.3.2. <i>Puntos de contacto entre la modelización y resolución de problemas</i> .....	40
2.4. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN .....	47
2.5. HIPÓTESIS DE TRABAJO O CONDICIONES INICIALES .....	47
2.6. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN .....	48
2.7. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN .....	48

<b>3. METODOLOGÍA .....</b>	<b>49</b>
3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN .....	49
3.2. MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN .....	49
3.2.1. <i>Sobre los participantes</i> .....	50
3.2.2. <i>Sobre la obtención de los datos</i> .....	53
3.3. DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS DE LAS ACTIVIDADES.....	57
3.3.1. <i>Sobre los cuestionarios</i> .....	57
3.3.1.1. Pre-test .....	58
3.3.1.2. Test.....	63
3.3.2. <i>Sobre las entrevistas</i> .....	67
<b>4. RESULTADOS Y ANÁLISIS .....</b>	<b>70</b>
4.1. INTRODUCCIÓN .....	70
4.2. ANTES DE CADA ENTREVISTA-INTERVENCIÓN .....	70
4.2.1. <i>Sobre el pre-test</i> .....	70
4.2.1.1. Sobre la detección de la información relevante de la situación.....	71
4.2.1.2. Sobre la organización de la información.....	74
4.2.1.3. Sobre los procesos de validación.....	76
4.2.2. <i>Sobre el test</i> .....	81
4.3. ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS-INTERVENCIÓN .....	87
4.3.1. <i>Sobre el pre-test</i> .....	88
4.3.2. <i>Sobre el test</i> .....	99
4.3.2.1. Resultados de la entrevista-intervención con E1 .....	99
4.3.2.2. Resultados de la entrevista-intervención con E2 .....	109
<b>5. CONCLUSIONES .....</b>	<b>118</b>
5.1. INTRODUCCIÓN .....	118
5.2. CONCLUSIONES SOBRE LA INVESTIGACIÓN .....	118
5.3. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN .....	122
5.3.1. <i>Primera pregunta de investigación</i> .....	122
5.3.2. <i>Segunda pregunta de investigación</i> .....	122
<b>6. CAPÍTULO ADICIONAL PARA OPTAR POR EL INGRESO AL DOCTORADO .....</b>	<b>124</b>
6.1. INTRODUCCIÓN .....	124
6.2. ANTECEDENTES.....	124
6.3. MARCO REFERENCIAL.....	126
6.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN PARA UN ESTUDIO DE DOCTORADO .....	128
6.5. METODOLOGÍA.....	129
6.6. CONSIDERACIONES FINALES.....	130

<b>7. REFERENCIAS .....</b>	<b>132</b>
<b>8. ANEXOS.....</b>	<b>i</b>
8.1. ANEXO 1: CUESTIONARIOS APLICADOS.....	i
8.1.1. Pre-test.....	i
8.1.2. Test .....	i
8.2. ANEXO 2: TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS.....	i
8.2.1. Sesión 1: E1 .....	i
8.2.2. Sesión 3: E1 .....	i
8.2.3. Sesión 1: E2 .....	i
8.2.4. Sesión 2: E2 .....	i
8.2.5. Sesión 3: E2 .....	ii
8.3. ANEXO 3: SOLUCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS.....	ii
8.3.1. Pre-test: E1 .....	ii
<b>Pre-test E1 .....</b>	<b>ii</b>
8.3.2. Pre-test: E2 .....	xv
<b>Pre-test E2 .....</b>	<b>xv</b>
8.3.3. Test: E2 .....	xxvi
<b>Test E2 .....</b>	<b>xxvi</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1:</b> Pregunta 1 Trastorno del colapso de las colonias de abejas .....	17
<b>Tabla 2:</b> Preguntas 2, 3 y 4 Trastorno del colapso de las colonias de abejas .....	18
<b>Tabla 3:</b> Pregunta 5 Trastorno del colapso de las colonias de abejas .....	19
<b>Tabla 4:</b> Subcompetencias de la modelización según el ciclo de Blum y Borromeo Ferri (2009).....	39
<b>Tabla 5:</b> Comparación de habilidades promovidas por la resolución de problemas y la modelización.....	41
<b>Tabla 6:</b> Puntos de contacto entre el ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009) y la resolución de problemas de Honduras .....	44
<b>Tabla 7:</b> Enlaces de los cuestionarios aplicados en GeoGebra .....	54
<b>Tabla 8:</b> Enlaces de los archivos de audio y video de las entrevistas-intervención .....	54
<b>Tabla 9:</b> Enlaces de las transcripciones .....	57
<b>Tabla 10:</b> Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 1 del pre-test.....	71
<b>Tabla 11:</b> Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 2 del pre-test.....	72
<b>Tabla 12:</b> Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 3.....	73
<b>Tabla 13:</b> Respuestas a la pregunta 2 de la Actividad 2 del pre-test .....	74

<b>Tabla 14:</b> Respuestas de la pregunta 5 de la Actividad 2.....	76
<b>Tabla 15:</b> Comprobación de las tres condiciones en un número .....	77
<b>Tabla 16:</b> Respuestas de la pregunta 5 y 6 de la Actividad 3.....	78
<b>Tabla 17:</b> Respuestas a la variación propuesta para la Actividad 3 .....	80
<b>Tabla 18:</b> Respuestas a la pregunta 1 de la actividad 3 del test.....	82
<b>Tabla 19:</b> Respuestas a la pregunta 3 del test.....	83
<b>Tabla 20:</b> Respuestas de la pregunta 7 de la actividad 3 del test .....	84
<b>Tabla 21:</b> Respuestas a la pregunta 8 de la actividad 3 del test.....	85
<b>Tabla 22:</b> Cronograma de actividades .....	131

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Ciclo de resolución de problemas de Blum y Borromeo Ferri (2009) .....	9
<b>Figura 2:</b> Reactivo de matemáticas PISA 2003 .....	15
<i>Figura 3:</i> <i>Reactivo de ciencias PISA 2015: Trastorno del colapso de las colonias de abejas</i> 16	
<b>Figura 4:</b> Unidad 2 Variables y expresiones Clase 1 Expresión algebraica .....	23
<b>Figura 5:</b> Desarrollo de la clase Expresión algebraica.....	23
<b>Figura 6:</b> Unidad 6 Razón, proporcionalidad y porcentaje Clase 13 Aplicación de la proporcionalidad .....	26
<b>Figura 7:</b> Desarrollo de la clase Aplicación de la proporcionalidad.....	26
<b>Figura 8:</b> Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007).....	36
<b>Figura 9:</b> Ciclo de resolución de problemas de Blum y Borromeo Ferri (2009) .....	38
<b>Figura 10:</b> Ruta metodológica de la investigación.....	53
<b>Figura 11:</b> Actividad 1 del pre-test .....	58
<b>Figura 12:</b> Actividad 2 del pre-test .....	59
<b>Figura 13:</b> Actividad 3 del pre-test .....	60
<b>Figura 14:</b> Actividad 4 del pre-test .....	61
<b>Figura 15:</b> Actividad 1 del test.....	63
<b>Figura 16:</b> Actividad 2 del test.....	64
<b>Figura 17:</b> Actividad 3 del test.....	65
<b>Figura 18:</b> Pregunta 7 de la Actividad 3 del test .....	66
<b>Figura 19:</b> Respuestas de la pregunta 3 y 4 de la Actividad 2 .....	75
<b>Figura 20:</b> Lista de números posibles que propone E2 .....	79
<b>Figura 21:</b> Actividad 3 del test.....	82
<b>Figura 22:</b> Respuestas de E2 a la pregunta 11 de la actividad 3 del test .....	86

<b>Figura 23:</b> Respuestas de E1 a la pregunta 8 de la actividad 3 del test después de la entrevista-intervención.....	100
<b>Figura 24:</b> Gráficas de los modelos que construyó E1 .....	101
<b>Figura 25:</b> Tabla construida por E1 para organizar la información de las gráficas de los modelos para el gasto total .....	103
<b>Figura 26:</b> Respuestas de E1 a la pregunta final: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible en cada estación?.....	108
<b>Figura 27:</b> Respuestas de E2 a la pregunta 8 de la actividad 3 del test después de la entrevista-intervención.....	111
<b>Figura 28:</b> Gráficas de los modelos que construyó E2 .....	111
<b>Figura 29:</b> Respuestas de E2 a la pregunta final: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible es cada estación? .....	116
<b>Figura 30:</b> Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007) .....	126

## RESUMEN

Consideramos que los enfoques de la *Resolución de Problemas* y la *Modelización* tienen nexos cognitivos, por lo que, con la presente investigación nos planteamos identificar las relaciones entre ambas perspectivas educativas. Respecto a la resolución de problemas consideramos una aproximación clásica, debido a que es en la que se apoya la enseñanza en la República de Honduras, que es nuestro lugar de investigación. Para lo cual perfilamos puntos de contacto entre estas propuestas, lo que nos proporcionó una base para indagar la forma en la cual puede darse el tránsito entre ellas. Con ese objetivo propusimos dos cuestionarios en línea, en el primero que es el pre-test, planteamos actividades sobre resolución de problemas para identificar las habilidades con las que cuentan los participantes de este estudio, en el segundo cuestionario, el test, presentamos actividades de modelización, para conocer cómo se da el tránsito. Después de la implementación de cada cuestionario realizamos entrevistas-intervención de manera individual con cada participante. En esta investigación participaron dos estudiantes de sexo femenino y de excelencia en la clase de matemáticas, donde ambas presentaron distintos estilos cognitivos. Encontramos que: los puntos de contacto propuestos son necesarios, pero no son suficientes para un tránsito exitoso entre los enfoques mencionados, debido a que los problemas de modelización no invitaron, necesariamente, a las estudiantes a desarrollar actividades de verificación de los procedimientos ni de validación de los resultados. De manera que, a partir de la actividad conjunta de tipo metacognitivo con el investigador, fue posible desarrollar actividades de corrección y ampliación del significado de los modelos propuestos, por ello consideramos que deben estar disponibles para lograr el tránsito, permitiendo la variabilidad que muestre al estudiante el modelo como recurso general para resolver cierto tipo de problemas.

## **ABSTRACT**

We consider that the approaches of Problem Solving and Modeling have cognitive links, therefore, with the present research we intend to identify the relationships between both educational perspectives. With respect to problem solving, we consider a classical approach, since it is the one on which teaching in the Republic of Honduras, which is our research site, is based. For this purpose, we outlined points of contact between these proposals, which provided us with a basis for investigating the way in which the transition between them can take place. With this objective in mind, we proposed two online questionnaires: in the first, the pre-test, we proposed problem-solving activities to identify the skills of the participants in this study; in the second questionnaire, the test, we presented modeling activities to find out how the transition occurs. After the implementation of each questionnaire, we conducted individual intervention interviews with each participant. Two female students of excellence in mathematics class participated in this research, where both presented different cognitive styles. We found that: the proposed points of contact are necessary, but they are not sufficient for a successful transition between the mentioned approaches, because the modeling problems did not necessarily invite the students to develop activities of verification of the procedures or validation of the results. So, from the joint activity of metacognitive type with the researcher, it was possible to develop activities of correction and extension of the meaning of the proposed models, therefore we consider that they must be available to achieve the transit, allowing the variability that shows the student the model as a general resource to solve certain type of problems.

## INTRODUCCIÓN GENERAL

Las propuestas didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática reflejan las inquietudes de los interesados en esta actividad, en la que se incluyen concepciones filosóficas, psicológicas y hasta históricas y sociológicas.

En esta investigación pretendemos enfrentar el paso entre dos enfoques que han sido significativos en la actualidad, la llamada *resolución de problemas* y la *modelización* en sus formatos más tradicionales, que es como han estado presentes en los salones de clase de nuestros países, como es el caso de la República de Honduras que es la locación en donde desarrollamos nuestra investigación.

Considerando que en Honduras se ha venido trabajado con base en la resolución de problemas, pero en donde ya hay signos de que la modelización la remplazará como paradigma educativo, como podemos apreciar en el diseño de materiales y libros de texto en algunas escuelas. Por lo anterior, creemos que es útil anticipar este proceso, revisando qué de la resolución de problemas puede ser útil para apoyar los objetivos generales de la modelización y de qué manera sería posible hacer ese tránsito de manera eficiente.

Luego de un análisis de los constructos de estas propuestas en sus versiones clásicas, hemos propuesto tres puntos de contacto que prometen ser útiles en el tránsito entre ambas propuestas, estos son los siguientes: 1. Detección de la información relevante de la situación, 2. Organización de la información y 3. El desarrollo de procesos de verificación de los procedimientos y validación de los resultados.

Para tener evidencias de la posibilidad del tránsito mencionado, hemos trabajado con dos estudiantes del sexo femenino de 15 años con antecedentes de excelencia en la clase de matemáticas.

Las actividades se llevaron a cabo vía internet por medio de un pre-test, un test y entrevistas-intervención. Con el pre-test nos interesaba observar si las estudiantes desarrollaban las habilidades generales asociadas a los puntos de contacto. En el Test se abordaron problemas en donde las estudiantes debían resolver actividades consideradas en el terreno de la modelización que en los términos de Niss et al. (2007) se refieren a:

la capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, de traducirlos a las matemáticas y de interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada, así como la capacidad de analizar o comparar modelos dados investigando los supuestos que se hacen, comprobando las propiedades y el alcance de un modelo dado. (p. 12, traducción propia)

Finalmente, en la entrevista-intervención retomamos las preguntas incompletas o erróneas para repensarlas y propiciar una reflexión que les permitió observar las posibles variaciones a los problemas originales, lo que las llevó a considerar soluciones del mismo problema, tomando en cuenta las condiciones cambiantes que podrían dar cuenta de un modelo como estructura general para resolver cierto tipo de problemas.

Además, encontramos que los puntos de contacto que proponemos entre las dos propuestas de enseñanza, son necesarios para el tránsito entre ellas, pero no suficientes, ya que el desarrollo de actividades de modelización, apoyadas en problemas que incluían varias soluciones, se requirió de la participación del

investigador para propiciar una reflexión metacognitiva que subrayara las posibles variaciones de los problemas y sus relaciones particulares, que estructuralmente se resuelven de manera general, dando oportunidad a experiencias ligadas a la toma de decisiones que podría dar elementos para enfatizar la potencia resolutoria de los modelos.

En lo relativo a la ampliación de esta investigación a lo largo del doctorado, nos proponemos estudiar más ampliamente tres dimensiones que parecen ser relevantes en la transición entre paradigmas educativos:

1. El papel de los *estilos cognitivos* de los estudiantes (Krutetskii, 1976), que parecieran tener un peso importante en las estrategias que usaron las estudiantes para desarrollar los requerimientos de la modelización, de los que destacamos las formas particulares para: 1. Detectar y organizar la información, 2. Explicar y socializar los resultados y 3. Validar sus procedimientos y su enfoque.
2. El papel de las *actividades metacognitivas* que permitieron a las estudiantes, dar sentido, no sólo a las estrategias para interpretar y usar los modelos asociados, sino que también a los problemas contextuales.
3. Una aproximación a la modelización que se apoya en la fortaleza que representa contar con la formulación del *modelo matemático como estructura* asociada a una gran variedad de problemas que tienen nexos estructurales, de manera que la variación de las condiciones posibilita, por un lado, la justificación de la pertinencia del modelo para resolver cierto tipo de problemas, por el otro considerar su carácter predictivo mediante la obtención de los nuevos resultados.

# 1. ANTECEDENTES

## 1.1. INTRODUCCIÓN

El propósito de la siguiente investigación es indagar, cómo es posible hacer transitar a un estudiante desde una instrucción basada en la resolución de problemas, hasta la introducción de actividades de modelización matemática, bajo el supuesto de que existen entre estas dos propuestas puntos de contacto, así como establecer aquellas habilidades que se verían favorecidas en este tránsito.

En la primera parte de los antecedentes, vamos a presentar algunos elementos de la literatura sobre la resolución de problemas, para ofrecer un panorama teórico de los contenidos y de los recursos que, en principio, deberían estar presentes en la instrucción de los estudiantes que han estudiado desde este punto de vista. Haremos especial mención sobre el “plan de soluciones” de Blum y Borromeo Ferri (2009) que, desde nuestro punto de vista, podría proporcionar conexiones para un vínculo entre la resolución de problemas y la modelización.

Además, revisamos los planteamientos e inclinaciones de algunas organizaciones educativas, como ser el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) y PISA (Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos), ya que se caracterizan por establecer elementos que sirven como guía para la enseñanza de la matemática, en las que detectamos una postura de transición.

Después, identificamos la postura sobre resolución de problemas presente en la enseñanza de la matemática en la República de Honduras, que es el sitio en donde realizamos este trabajo, así como las habilidades que estarían desarrollando, en principio, los estudiantes de este sistema educativo. Para realizar esta tarea revisaremos los libros de texto oficiales de Honduras, ya que son los materiales con

los que cuentan los estudiantes que participarán en este estudio y son fundamento básico para sus profesores.

## **1.2. POSTURA EDUCATIVA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

### ***1.2.1. Introducción***

La revisión de algunas formulaciones sobre la Resolución de Problemas permitió presentar un panorama teórico que permite establecer cuáles son las características generales que tendría un estudiante que ha sido formado bajo esta línea.

En este sentido, consideramos que es importante poder describir los elementos que debería tener una actividad matemática para que pueda considerarse como un problema, categoría básica en esta postura, para ello, revisamos las aportaciones de algunos autores sobre el tema y proponemos una caracterización de lo que sería un problema para los objetivos de esta investigación.

Los aspectos clásicos sobre la resolución de problemas se encuentran en Polya (1989) y Schoenfeld (1985), pero también hicimos uso de una versión más actualizada en la propuesta de Blum y Borromeo Ferri (2009), que, desde nuestro punto de vista, contiene planteamientos que la acercan a los objetivos particulares de la modelización matemática, de manera que es posible establecer una conexión.

Posteriormente, para mostrar antecedentes sobre el interés del tránsito entre paradigmas revisaremos los elementos de la resolución de problemas que proponen tanto el NCTM, como PISA, debido a que primero son un referente importante para los desarrolladores de los currículos de algunos países, que en nuestro caso se refiere al de la República de Honduras, que es el entorno en el que vamos a desarrollar esta investigación y en segundo por su postura, que a nuestro entender, tiene una evolución que deja ver que ya no basta con establecer la estrategia para resolver el

problema, sino se pretende dar sentido al mismo, donde esto significa: asociar la matemática del problema con las condiciones particulares de este, mediante un acercamiento a lo que actualmente se ha dado en llamar *colocarlo en contexto*.

Para abordar los temas mencionados, iniciaremos con una breve observación sobre lo que significa un problema desde esta perspectiva.

### ***1.2.2. Posturas sobre lo que significa un problema***

Un asunto que ha sido central en la investigación de la educación matemática ha sido el de responder a la pregunta: ¿Qué es un problema?, responderla es un acto de toma postura, que resulta clave porque, es alrededor de ella que se organiza la educación matemática, así como las estrategias para llevarla a cabo, de manera que enseguida abordaremos esta cuestión, primero revisando algunas formulaciones, para luego establecer nuestra posición de principio.

En esta dirección, Schoenfeld (2013) define a la Resolución de problemas como “el intento de alcanzar algún resultado, cuando no existía un método conocido (para el individuo que intentaba alcanzarlo) para lograrlo” (p. 10, traducción propia). En este enunciado identificamos dos supuestos de lo que caracteriza a un problema, 1. El individuo no conoce de antemano el método requerido para dar solución, pero si debe de estar en condiciones de poder resolverlo y 2. La determinación de que depende del individuo si este es o no un problema, lo que nos indica que no todos los problemas que planteamos lo son realmente para todas las personas.

Otro punto de vista de lo que sería un problema es: “una situación que es diferente de un ejercicio en que el solucionador de problemas no tiene un procedimiento o algoritmo que le lleve con seguridad a una solución” (Kantowski, 1981, p. 113, traducción propia). Podemos observar que esta formulación se relaciona con la primera característica de un problema, identificada anteriormente, lo cual

consideramos que nos acerca a la idea que ha dado en llamarse zona de desarrollo próximo formulada por Vygotsky, quién nos dice que: “la diferencia entre el nivel de las tareas resueltas que pueden realizarse con la orientación y la ayuda del adulto y el nivel de las tareas resueltas de forma independiente es la zona de desarrollo próximo” (Vygotsky, 1982, p. 117, traducción propia), en otras palabras esta se refiere a la distancia entre lo que sabe el estudiante y lo que podría saber, que puede ser logrado con la adecuada dirección del profesor, lo que nos plantea la tarea de no sólo observar ¿qué sabe el estudiante?, sino sus posibilidades de superar la distancia que hay hasta el nuevo conocimiento con participación del profesor, que puede jugar un papel fundamental para poder dar este salto.

Respecto a la característica de la idoneidad del problema, Mason nos dice que: “lo que la gente entiende por problema, varía” (2015, p. 58, traducción propia) lo que debería provocar una mirada más detallada cuando proponemos problemas, verificando si este planteamiento se trata de un reto matemático adecuado o no para los sujetos en cuestión.

En relación con los tipos de actividades vinculadas a los problemas, Polya (1989) hace una clasificación de acuerdo con las habilidades necesarias para dar solución a una problemática planteada:

- a) Una regla en las narices, cuando el problema puede resolverse simplemente aplicando un algoritmo recién presentado.
- b) Aplicación con alguna elección, cuando se debe seleccionar el algoritmo adecuado entre otros previamente estudiados.
- c) Elección de una combinación, cuando para llegar a la solución hay que combinar adecuadamente algunos de los algoritmos aprendidos anteriormente.

- d) Acercarse al nivel de investigación, cuando se requiere la elaboración de un nuevo algoritmo.

En el primer punto, la atención está dirigida a la comprensión de la situación, mientras que la segunda y tercera, Polya se refiere no sólo al problema, sino a la elección que hace el estudiante de los algoritmos necesarios para enfrentarlos y su uso en una situación problemática, lo que sería un factor agregado a esta actividad y a la propia problemática. En la última descripción, el nivel y tipo de acercamiento a la problemática lo perfila como un reto del que no se tienen de antemano los elementos para ser resuelto. Por lo anterior, podemos ver que un problema puede tener distintos niveles de exigencia asociados a su solución e interpretación.

Un problema, desde nuestro punto de vista, en la óptica de la resolución de problemas, debería ayudar al estudiante a superar su particular zona de desarrollo próximo, incentivando más que la aplicación de un algoritmo o procedimiento, encontrando en el un reto, es decir acercarlo al llamado nivel de investigación, en el sentido de Polya (1989).

Otro atributo que ayuda a completar nuestra idea sobre lo que debe ser un problema es que este promueva en el estudiante las actividades de validación y de interpretación de los resultados, permitiéndole ir construyendo una opinión con respecto a lo que significa la solución asociada al problema, actividad que podría apuntar en el terreno de la actividad metacognitiva pensada como el proceso de la reflexión sobre la actividad de resolver el problema, así como de su pertinencia.

Considerando que el significado de lo que es un problema puede tener diferentes interpretaciones pasaremos a revisar algunos elementos teóricos sobre la resolución de problemas que enmarcan esta postura didáctica, los cuales son una de las bases del fundamento de este trabajo.

### *1.2.3. Aspectos teóricos de la Resolución de Problemas*

En este apartado, presentaremos algunos elementos teóricos sobre la postura conocida en educación matemática como resolución de problemas, revisaremos las propuestas de Polya (1989), Schoenfeld (1985) y Blum y Borromeo Ferri (2009) en sus producciones que consideramos clásicas.

En la época en que surge esta postura, la enseñanza de la matemática enfrentaba la necesidad de reorganizar su aprendizaje, había entonces un interés particular para dotarla de herramientas que le permitieran a los estudiantes replicar básicamente la actividad que realiza un matemático; este es el momento en que se presenta una formulación propuesta por Polya (1989) en su libro "How to solve it". Este autor propone que la educación matemática aborde la tarea de enseñar a resolver un problema, para lo que se necesita desarrollar los siguientes pasos: "I. Comprender el problema, II. Concebir un plan, III. Ejecución del plan y IV. Examinar la solución obtenida" (p. 17).

La propuesta pretende recuperar el espíritu de los matemáticos cuando enfrentan problemáticas, pero que planteados como indicaciones generales podrían apoyar el aprendizaje de la matemática centrada en la resolución de problemas, espíritu que inspiró a la enseñanza de la matemática durante muchos años.

Estas actividades debían ser introducidas en los currículums de gran parte del mundo y estar organizadas de manera que el estudiante pueda, por un lado, utilizar sus recursos con el objeto de organizar la información y manipular estrategias que ya conoce con el fin de resolver el problema, lo que estaría enriqueciéndolas en lo relativo a sus posibilidades estratégicas y por el otro, verificar no sólo sus resultados, sino también el planteamiento utilizado para llegar a la solución, aspectos que permitirían que el estudiante amplíe la gama de posibilidades de solución. En el caso

de que la solución no cumpla con los requisitos del problema, el estudiante podría retomar el proceso de solución considerando otro punto de vista, en este caso hablamos de un ciclo de resolución de problema. En todos los casos, el objetivo se dirige a proveer a los estudiantes de esquemas que les permitan enfrentar problemas con un protocolo establecido. En ese sentido, la naturaleza iterativa de la resolución de problemas podría ofrecer al estudiante recursos de motivación, estratégicos, de retroalimentación y de mayor control sobre las actividades que están desarrollando al enfrentar un problema, punto a destacar y que nos interesa en esta investigación. Cabe mencionar que este esquema puede ser prometedor si se cuenta con el beneplácito y la participación del estudiante.

Por su parte, Schoenfeld (1985) quien se ha destacado por establecer puntos de vista sobre este tema, describe y añade un momento adicional a la propuesta de Polya (1989), que consiste en la explicación, por parte del estudiante, del proceso de resolución de un problema, lo que requiere de una mirada amplia sobre todo el proceso y no sólo sobre los elementos involucrados, sino que incluye las motivaciones de la elección de la estrategia usada.

Tenemos que Schoenfeld (1985) integra esa actividad en su propuesta sobre la resolución de problemas, en donde reorganiza y sugiere los siguientes momentos, al decir de (Greefrath, 2015):

- Comprensión del problema: reformularlo con las propias palabras de los estudiantes
- Elección de un enfoque: describir los supuestos y planificar los cálculos futuros
- Realización: realizar cálculos y manipulaciones
- Explicación de los resultados

- Comprobación: comprobar los resultados, los cálculos y el enfoque. (p. 177, traducción propia)

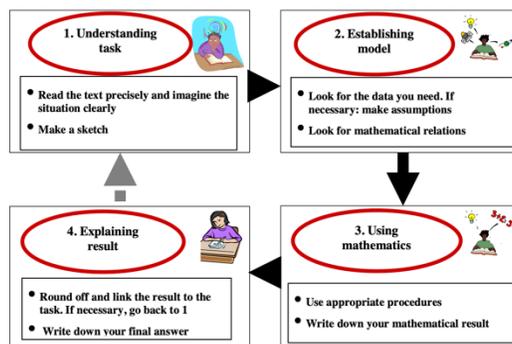
Al seguir esta propuesta, el estudiante podría estar, en principio, en condiciones tanto de poder resolver los problemas, como de adquirir habilidades que le permitan explicar sus resultados y establecer normas para la adecuada resolución, lo cual lo coloca en el terreno de la metacognición, que se relaciona con el "seguimiento y control" de sus acciones (Schoenfeld, 2016, p. 2, traducción propia), haciendo referencia a las habilidades de autorregulación que eventualmente le ayudarían a tener una mayor conciencia de sus procedimientos, así como de la dirección de estos, lo que posibilita que el estudiante esté en condiciones de darse cuenta de que, eventualmente, habría entre ellos alguno que no se ajuste a su razonamiento o que incluso sea incorrecto.

La propuesta sobre la actividad de la metacognición ha sido motivo de distintas investigaciones, por ejemplo, Sengul y Katranci (2012) nos dicen que: "la metacognición, que significa pensar sobre el pensamiento, generalmente abarca varias habilidades interrelacionadas entre el pensamiento y el aprendizaje, los cuales son el pensamiento crítico, el reflexivo, la resolución de problemas y la toma de decisiones" (p. 2178, traducción propia), a partir de esta propuesta podemos notar que la metacognición podría ser tan compleja como la resolución de problemas, debido a la cantidad y al tipo de habilidades que es necesario desarrollar en los estudiantes y que ésta se desplaza desde algunas ideas sencillas como seguir un procedimiento y corroborarlo, hasta el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo sobre el desarrollo del problema y sobre situaciones que sean retadoras. En lo referente a la toma de decisiones es necesario que el estudiante no sólo resuelva el problema, sino que éste pueda observar las condiciones bajo las cuales el problema

es resuelto, lo que podría permitir un acercamiento a la modelización, incluyendo particularmente las variaciones en las condiciones de los problemas.

Mientras que, en lo referente a las propuestas de procesos de resolución de problemas, distintos investigadores han recurrido a esquemas o ciclos en los que determinan los pasos a seguir en el proceso de solución, en particular Blum y Borromeo Ferri (2009) proponen una formulación para resolver problemas, de la que destacan cuatro actividades que consisten en: “1. Comprender la tarea, 2. Establecer el modelo, 3. Usar las matemáticas y 4. Explicar el resultado” (p. 54, traducción propia). Esta propuesta está basada en ciclos de modelización, como las de otros autores, por tal razón están organizadas de manera que el estudiante, luego de adquirir cierta experiencia, podría seguir su propia ruta para resolver el problema planteado, con la salvedad de que el proceso se detiene hasta que la solución tiene las características esperadas.

*Figura 1: Ciclo de resolución de problemas de Blum y Borromeo Ferri (2009)*



Tomado de: Blum y Borromeo Ferri (2009, p. 54)

De manera general consideramos que, al utilizar esta propuesta donde la formulación propone establecer un modelo y no la construcción de un plan para resolver el problema, sugiere que los estudiantes deberían poner más atención a las condiciones del problema enfrentado que a la identificación solamente de las

heurísticas y estrategias de solución involucradas, lo que lo acerca al terreno de la matematización y al control de la problemática, sin que esto signifique que estas estrategias puedan o no ser utilizadas cuando el estudiante construya su modelo. Siguiendo esta formulación, los estudiantes podrían tener un acercamiento tanto a la resolución de problemas como a la modelización matemática, porque en ambas posturas se requiere de establecer las condiciones de los problemas, aunque con diferentes enfoques y propósitos.

En la propuesta de Blum y Borromeo Ferri (2009), respecto a la actividad de explicar el resultado, el estudiante no se limita únicamente a verificar sus resultados y procedimientos, sino, que cuando estos son explicados, él puede tomar el control del proceso de solución, lo que podría provocar un cambio en el valor epistémico de sus afirmaciones, en el sentido de Duval (2016): “El significado de una proposición está determinado con respecto a varias dimensiones: una dimensión semántica a través de su contenido, una dimensión de conocimiento a través de su valor epistémico (obvio, probable, absurdo, irreal, posible, necesario, etc.)” (p. 97). Esto va desde las convicciones necesarias y puestas en funcionamiento para dar solución a un problema, hasta la de aclarar en qué condiciones este es resuelto, y es en esta situación que el estudiante puede adquirir recursos de análisis y valorar la importancia de que su respuesta sea coherente y válida en los términos del problema abordado.

Otro punto importante que busca esta propuesta es el desarrollo de un pensamiento crítico, debido a que el estudiante puede adueñarse de su propio trabajo y ser capaz de identificar que 1. Su explicación sea correcta, pero además que 2. Esta es lo suficientemente clara como para que sea entendida por los demás, lo que podría propiciar la reflexión sobre las condiciones del problema enfrentado.

Desde nuestro punto de vista, esta propuesta se encuentra cercana, tanto a la resolución de problemas, cómo a la modelización matemática, vínculo epistemológico que es una hipótesis de trabajo de la presente investigación.

El ciclo propuesto por Blum y Borromeo Ferri (2009, p. 54) es de especial interés para nosotros, debido a que podría servir como base para investigar bajo qué condiciones las habilidades relacionadas a: 1. La instrucción sobre resolución de problemas, 2. La organización de la información y 3. El uso de distintas estrategias, son utilizadas por los estudiantes cuando se plantean las exigencias de la modelización y cómo estas permitirían el tránsito a la modelización, particularmente apoyados en la validación, la toma de decisiones y la reflexión sobre la pertinencia de los procedimientos usados en los problemas planteados, actividad que se desarrolla en el terreno de la metacognición.

Conociendo algunas posturas clásicas sobre la investigación en resolución de problemas, pasaremos a revisar los enfoques realizados por algunas instituciones educativas que declaran desarrollar esta propuesta didáctica y que consideramos que incluyen aspectos cercanos a la modelización.

#### ***1.2.4. Enfoque del NCTM sobre Resolución de Problemas***

En el año 2000 el NCTM publica su libro *Principles and Standards for School Mathematics*, en el cual se presentan los principios y estándares para la instrucción matemática que rigen las actividades escolares de Estados Unidos en lo relativo a los contenidos y los objetivos establecidos en este país, esta mirada se ha venido perfilando como una referencia importante en las tendencias actuales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En esa dirección, esta organización define un *estándar* como: “descripciones acerca del conocimiento matemático que los estudiantes deben conocer, comprender y usar adecuadamente una vez que han

finalizado la escuela” (NCTM, 2000, p. 2), estos estándares han sido clasificados en dos tipos: 1. Estándares de contenido y 2. Estándares de proceso, en donde el primero compete a los estudiantes y el segundo a los profesores.

Entre los estándares de contenido tenemos los contenidos usuales de todas las escuelas estadounidenses: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y probabilidad. Estos describen explícitamente los ejes de contenido que los estudiantes deben aprender en la escuela y que les servirán en su vida fuera de esta, mientras que los estándares de proceso se clasifican en: Resolución de problemas, Razonamiento y demostración, Comunicación, Conexiones y Representación, siendo éstos los procesos que los profesores deben promover para que los estudiantes apliquen, en su vida fuera de la escuela, los conocimientos descritos en los estándares de contenido.

De esta propuesta, recuperamos que la resolución de problemas podría ser uno de los medios para lograr esto, que según el NCTM (2000) “al resolver problemas matemáticos, los estudiantes adquieren formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad, y confianza al enfrentar situaciones nuevas los cuales les servirán fuera de la clase” (p. 5), de esta manera, se reconoce que la resolución de problemas puede ser una opción adecuada para orientar una educación matemática que vaya más allá del entorno escolar.

En esta aproximación, podemos identificar un aspecto que es muy importante y que sirve como guía en su propuesta, éste es que la enseñanza de las matemáticas debe ser más que aprender ciertos contenidos, debería de proveer a los estudiantes, las habilidades necesarias para que puedan usar esos conocimientos en su vida fuera de la escuela, es por ello que actualmente están interesados en incluir aproximaciones que permitan que los estudiantes se enfrenten a situaciones, en donde sea necesario desarrollar actividades que vayan más allá de la aplicación de los contenidos

escolares. Este interés los acerca a los objetivos de la modelización, particularmente cuando se incorpora lo que se ha dado en llamar problemas en contexto.

Enseguida pasaremos a comentar otra propuesta que incluye aspectos de la resolución de problemas como base para su proyecto de evaluación sobre la alfabetización matemática en un entorno internacional.

### *1.2.5. Enfoque de PISA sobre Resolución de Problemas*

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos PISA, por sus siglas en inglés, es un proyecto de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos OCDE (2004b), que tiene como objetivo evaluar el “rendimiento acumulado de los sistemas educativos en una edad en la que la escolarización es obligatoria, la prueba se centra en jóvenes de 15 años” (p. 18).

Pese a esta declaración, la participación de este proyecto se ha venido transformando en una forma de evaluación que va más allá de calificar a un grupo de estudiantes, ya que la prueba también evalúa indirectamente el sistema educativo de los países participantes, en aspectos como los objetivos generales sobre la educación y la funcionalidad de las habilidades que desarrollan los estudiantes que lo cursan, aunado a esto, los resultados de esta evaluación pueden tener un impacto en las políticas educativas de estos países, debido a que, en general, es deseable que los estudiantes desarrollen las habilidades relacionadas a la competencia matemática que plantea PISA.

Este programa evalúa tres tipos de habilidades: 1. Competencia lectora, 2. Competencia matemática y 3. Competencia científica, debido a que las consideran cómo útiles para la vida adulta. Esta evaluación se realiza cada tres años y cada prueba se centra en una de las tres habilidades, lo cual corresponde a un 66% de la prueba, por ejemplo, en el primer ciclo de evaluaciones que comenzó en el año 2000,

el foco de atención de la prueba estaba en la competencia lectora, en 2003 en la competencia matemática, con énfasis en la resolución de problemas y en 2006 en la competencia científica.

En su declaración, PISA nos advierte que la evaluación que realizan no está orientada a verificar contenidos, sino a determinar las habilidades y el nivel de competencia que poseen los estudiantes cuando están por terminar su educación obligatoria, lo que hace que la prueba adquiera un carácter general y no se contextualice al currículo de alguno de estos países, ni que se evalúen sólo los aspectos que comparten los currículos de los países participantes.

En lo que respecta a la competencia matemática, PISA declara que “no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque, lógicamente, debe incluirlos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos” (OCDE, 2004b, p. 28). Esto ofrece indicios sobre las características de los reactivos que aparecen en estas pruebas, entre ellas podemos suponer que estos deben ser de carácter transversal al conocimiento matemático que podrían tener los estudiantes a la edad de 15 años, además, deben representar situaciones que no se resuelvan únicamente con la aplicación de un algoritmo y exigen a los estudiantes interpretar, tanto la información matemática, como el contexto de la situación.

Específicamente estas habilidades a evaluar “incluyen el empleo del lenguaje matemático, la construcción de modelos matemáticos y las destrezas de solución de problemas” (OCDE, 2004b, p. 21), de donde podemos notar que en su propuesta, PISA al igual que el NCTM hace énfasis en la resolución de problemas y en el uso de las matemáticas en contextos en donde los conocimientos de otras áreas podrían jugar un papel importante para establecer las pautas para que los estudiantes cuando ya estén fuera del sistema educativo puedan ser capaces de utilizar estas

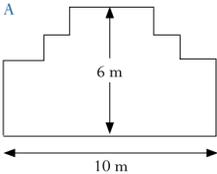
habilidades para resolver diferentes problemáticas, de esta manera, vemos que PISA de cierta forma estaría sugiriendo a los países poner énfasis en estos aspectos y que sus sistemas educativos estén orientados a fortalecerlos en la dirección de propuestas cercanas a la modelización, en particular en los casos en los que se hace uso de problemas contextuales.

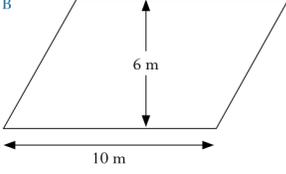
Para conocer de manera más amplia lo que PISA propone como competencia matemática, vamos a revisar algunas de las preguntas que aparecen en exámenes propuestos en campañas anteriores, con el objetivo de identificar 1. La propuesta educativa sobre resolución de problemas y 2. El papel que juegan tanto la organización de la información, así como el uso de estrategias en la solución de los reactivos, aspectos que podrían estar cerca de la postura de la modelización.

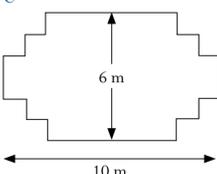
El primer reactivo que presentamos es el siguiente:

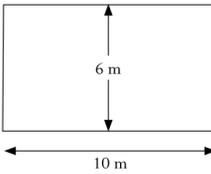
*Figura 2: Reactivo de matemáticas PISA 2003*

Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín.

A 

B 

C 

D 

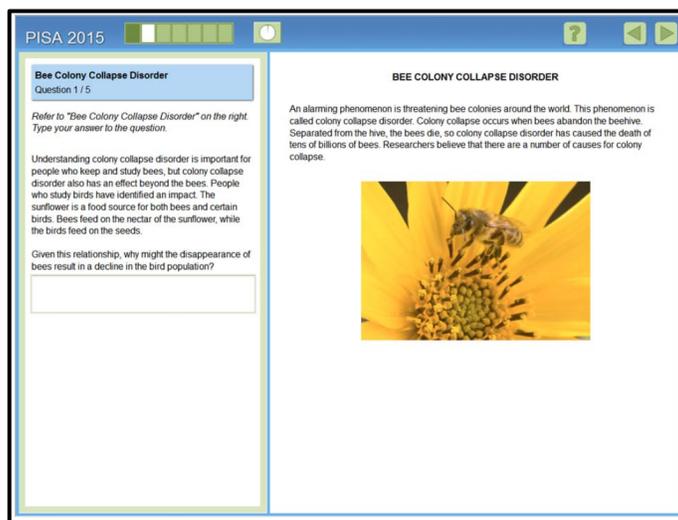
Encierra en un círculo "Sí" o "No" para cada diseño, dependiendo de si se puede realizar con la cerca de 32 metros.

Tomado de: OCDE (2004a, p.52)

Los diseñadores comentan que solamente la respuesta B es incorrecta, lo que supone que los estudiantes deberían considerar dos tipos de información: 1. La numérica y 2. La que visualmente aparece en el dibujo, pero el recurso estratégico que los estudiantes deben de poner en funcionamiento para resolver correctamente este reactivo se refiere a la compensación de distancias y cantidades numéricas, estrategia que no es enfatizada escolarmente como relevante, pero que en este caso es la que permite identificar la información y compararla para resolver el problema.

El siguiente reactivo que mostramos consta de 5 preguntas y requiere de una adecuada interpretación. Estas preguntas son presentadas al estudiante utilizando el siguiente formato:

*Figura 3: Reactivo de ciencias PISA 2015: Trastorno del colapso de las colonias de abejas*



Tomado de: OECD (2015, p.7)

Las primeras 4 preguntas se presentan en la columna izquierda y el contexto para responderlas en la columna derecha.

*Tabla 1: Pregunta 1 Trastorno del colapso de las colonias de abejas*

Nº	Pregunta	Contexto
1	<p>Consulte "Trastorno de colapso de las colonias de abejas" a la derecha. Escriba su respuesta a la pregunta.</p> <p>Entender el trastorno del colapso de las colonias es importante para las personas que mantienen un estudio de las abejas, pero el trastorno del colapso de las colonias también tiene un efecto más allá de las abejas. Las personas que estudian las aves han identificado un impacto. El girasol es una fuente de alimento tanto para las abejas como para ciertas aves. Las abejas se alimentan del néctar del girasol, mientras que las aves se alimentan de las semillas.</p> <p>Dada esta relación, ¿por qué la desaparición de las abejas podría provocar un descenso de la población de aves?</p>	<p>Trastorno del colapso de las colonias de abejas</p> <p>Un fenómeno alarmante amenaza a las colonias de abejas en todo el mundo. Este fenómeno se llama Trastorno de Colapso de las Colonias. El colapso de la colonia se produce cuando las abejas abandonan la colmena. Separadas de la colmena, las abejas mueren, por lo que el trastorno del colapso de la colonia ha causado la muerte de decenas de miles de millones de abejas. Los investigadores creen que hay varias causas del colapso de las colonias.</p> 

Tomado de: Adaptación del formato presentado en PISA 2015

A pesar de que el reactivo evalúa la competencia científica y no la matemática, en él se pueden identificar algunos aspectos que consideramos de interés, debido a que se deben utilizar características tanto de la resolución de problemas como de la modelización, específicamente podemos hacer énfasis en la organización de la información, la toma de decisiones y la interpretación de un modelo a partir de la lectura de unas gráficas.

Con la primera pregunta, notamos que se espera que el estudiante logre plantear algunas hipótesis, las cuales deberían estar fundamentadas en la información y en el contexto del reactivo, así como en su conocimiento general, en este caso sobre las abejas, sirviendo cómo un recurso de motivación para que se involucre en la solución de la problemática.

Tabla 2: Preguntas 2, 3 y 4 Trastorno del colapso de las colonias de abejas

Nº	Pregunta	Contexto																																
2	<p>Consulte "Exposición al imidacloprid" a la derecha. Seleccione de los menús desplegables para completar la frase.</p> <p>Describa el experimento de los investigadores completando la siguiente frase. Los investigadores probaron el efecto de _____ en _____</p> <p>Las opciones son:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• colapso de las colonias de abejas</li> <li>• concentración de imidacloprid en los alimentos</li> <li>• inmunidad de las abejas al imidacloprid</li> </ul>	<p>Trastorno del colapso de las colonias de abejas Exposición al imidacloprid</p> <p>Los científicos creen que las causas del colapso de las colonias son múltiples. Una de las posibles causas es el insecticida imidacloprid, que puede hacer que las abejas pierdan el sentido de la orientación cuando están fuera de la colmena.</p> <p>Los investigadores comprobaron si la exposición al imidacloprid provoca el colapso de las colonias. En una serie de colmenas, añadieron el insecticida a la comida de las abejas durante tres semanas. Diferentes colmenas fueron expuestas a distintas concentraciones del insecticida, medidas en microgramos de insecticida por kilo de alimento !"#%\$#&amp;. Algunas colmenas no fueron expuestas a ningún insecticida.</p>																																
3	<p>Consulte "Exposición al imidacloprid" a la derecha. Haga clic en una opción para responder a la pregunta.</p> <p>¿Cuál de las siguientes conclusiones coincide con los resultados mostrados en el gráfico?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Las colonias expuestas a una mayor concentración de imidacloprid tienden a colapsar antes.</li> <li>• Las colonias expuestas al imidacloprid se colapsan a las 10 semanas de la exposición.</li> <li>• La exposición al imidacloprid en concentraciones inferiores a 20 "#%\$# no obstaculiza las colonias.</li> </ul> <p>Las colonias expuestas al imidacloprid no pueden sobrevivir más de 14 semanas.</p>	<p>Ninguna de las colonias se derrumbó inmediatamente después de la exposición al insecticida. Sin embargo, en la semana 14, algunas colmenas habían sido abandonadas. El siguiente gráfico registra los resultados observados:</p>																																
4	<p>Consulte "Exposición al imidacloprid" a la derecha. Escriba su respuesta a la pregunta.</p> <p>Observe el resultado en la semana 20 para las colmenas que los investigadores no expusieron al imidacloprid !('"#%\$#&amp;.</p> <p>¿Qué indica sobre las causas del colapso entre las colonias estudiadas?</p>	<table border="1"> <caption>Datos del gráfico: Porcentaje de colonias colapsadas vs. Número de semanas</caption> <thead> <tr> <th>Número de semanas</th> <th>0 µg/kg</th> <th>20 µg/kg</th> <th>400 µg/kg</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10</td> <td>0%</td> <td>0%</td> <td>0%</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>0%</td> <td>0%</td> <td>0%</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>0%</td> <td>25%</td> <td>50%</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>0%</td> <td>25%</td> <td>50%</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>0%</td> <td>25%</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>25%</td> <td>75%</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>22</td> <td>25%</td> <td>100%</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table>	Número de semanas	0 µg/kg	20 µg/kg	400 µg/kg	10	0%	0%	0%	12	0%	0%	0%	14	0%	25%	50%	16	0%	25%	50%	18	0%	25%	100%	20	25%	75%	100%	22	25%	100%	100%
Número de semanas	0 µg/kg	20 µg/kg	400 µg/kg																															
10	0%	0%	0%																															
12	0%	0%	0%																															
14	0%	25%	50%																															
16	0%	25%	50%																															
18	0%	25%	100%																															
20	25%	75%	100%																															
22	25%	100%	100%																															

Tomado de: Adaptación del formato presentado en PISA 2015

Para responder a la segunda, tercera y cuarta pregunta, los estudiantes deben de leer el contexto de la columna derecha en donde la información matemática se ofrece de manera gráfica y la información contextual que apoya la lectura. Si bien es cierto, las preguntas no están encaminadas a la creación del modelo, pero sí en la dirección de interpretarlo e identificar su relación con el contexto.

En este problema identificamos que deben ser usadas las habilidades 1. De detección y organización de la información, 2. Lectura de gráficos, 3. Interpretación del modelo y 4. La capacidad de generar hipótesis a partir de cierta información, lo que acercaría a los estudiantes a considerar no sólo la solución, sino también en qué condiciones es resuelto el problema.

*Tabla 3: Pregunta 5 Trastorno del colapso de las colonias de abejas*

Nº	Pregunta
5	<p>Los científicos han propuesto dos causas adicionales para el trastorno del colapso de las colonias:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Un virus que infecta y mata a las abejas.</li> <li>• Una mosca parásita que pone sus huevos en el abdomen de las abejas.</li> </ul> <p>¿Cuál de los siguientes hallazgos apoya la afirmación de que las abejas mueren a causa de un virus?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se encontraron huevos de otro organismo en las colmenas.</li> <li>• Se encontraron insecticidas dentro de las células de las abejas.</li> <li>• Se encontró ADN no apícola dentro de las células de las abejas.</li> <li>• Se encontraron abejas muertas en las colmenas.</li> </ul>

Tomado de: Adaptación del formato presentado en PISA 2015

Con la última pregunta, se requiere que el estudiante sea capaz de conectar una conclusión con su posible hipótesis y de esta manera poder identificar el nivel de consistencia entre el uso de información y la obtención de conclusiones que estén fundamentadas en los datos, lo que provoca una reflexión sobre el problema y sus alcances.

Después de revisar estos reactivos, podemos identificar que la propuesta de PISA ya muestra un interés por incluir problemas de los llamados contextuales, donde la

actividad se complementa con la toma de decisiones, lectura de gráficos e interpretación de un modelo, lo cual ya no está estrictamente dentro los objetivos generales de la resolución de problemas, lo que además puede verse en su declaración sobre lo que es la solución de un problema:

La solución de problemas se evalúa teniendo en cuenta los puntos siguientes:

- El tipo de problema, que engloba los procesos de solución de problemas, entre ellos la toma de decisiones, el análisis y diseño de sistemas y la detección y solución de problemas, aplicados en un contexto de problema específico, normalmente alejado del escenario de la clase y del currículum escolar y que se adentra en la vida personal, el trabajo y el ocio, o la comunidad y la sociedad.
- Los procesos de solución de problemas, que conllevan la comprensión de la naturaleza del problema, su descripción, representación, resolución, reflexión y comunicación de los resultados.
- Las situaciones o contextos de problemas, extraídos de escenarios de la vida real de los alumnos y en los que se inscriben los distintos tipos de problemas.

(OCDE, 2004b, p. 22)

De lo anterior, enfatizamos que ya existe en PISA un interés en el carácter de los problemas en lo relativo a: 1. La toma de decisiones, 2. El análisis y diseño de sistemas, 3. La detección y solución de problemas, que conllevan la comprensión de la naturaleza del problema y finalmente, 4. Las situaciones o contextos de los

problemas. Lo anterior nos plantea un acercamiento a algunos de los objetivos de la modelización, en particular en lo relativo a vincular el quehacer escolar con el entorno personal y de la vida adulta.

Debido a que los estudiantes con los que hemos trabajado estudian en Honduras, enseguida mencionaremos los aspectos de la resolución de problemas que aparecen en los libros de este país.

### **1.3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN HONDURAS**

#### ***1.3.1. Introducción***

Debido a que pretendemos desarrollar esta investigación en el contexto de la educación matemática impartida en la República de Honduras, donde, desde el año 2003 se estableció a la resolución de problemas como base general para la enseñanza de la matemática, analizamos los contenidos de los libros de texto disponibles, para poder conocer los recursos propuestos a los estudiantes en esta dirección.

#### ***1.3.2. Sobre los problemas en los libros de texto***

En la enseñanza básica de Honduras se propone como metodología de enseñanza a la resolución de problemas. En el Diseño del Currículo Nacional Básico de Honduras (DCNB) consideran a la matemática como “una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas medias necesarias para resolver problemas” (S.E., 2003, p. 427). Además, mencionan que la forma más indicada para ejecutar este propósito es realizar aplicaciones en la vida cotidiana, aprovechando la naturaleza y el entorno social y cultural en el que se desenvuelven los estudiantes, para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este estudio revisamos los libros de texto elaborados en 2018 por la Secretaría de Educación de Honduras, a través del Proyecto de Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática (PROMETAM Fase III).

Para este estudio, tomamos como base la Guía del Maestro, material exclusivo para los profesores, ya que en este documento se incluyen los contenidos del Libro del Estudiante, que es el material con el que cuentan los estudiantes, así como la programación anual de los contenidos, los objetivos académicos de cada grado, el desarrollo de cada clase y los esquemas de estructuración de la pizarra, que se les conoce como plan de pizarra y que es establecido institucionalmente.

Para analizar el alcance de estos materiales, en relación con la resolución de problemas, vamos a identificar qué elementos de esta postura están presentes en los problemas y en la estructura de su solución, con apego en lo declarado en el apartado anterior. Todo esto con el fin de establecer hasta donde los estudiantes han experimentado este tipo de enseñanza y qué habilidades, de manera general, deben estar presentes.

En la guía del maestro, identificamos que, en la primera clase de cada tema, el desarrollo propuesto del problema muestra de manera explícita elementos en la dirección de la resolución de problemas, estructura que luego no es sistemáticamente retomada a lo largo de las lecciones.

Para mostrar el acercamiento a esta postura y la estructura de la solución de los problemas, presentamos el desarrollo de dos problemas, que recuperan, de manera general, el espíritu de estos materiales.

El primer problema mostrado corresponde a la primera clase de la unidad *variables y expresiones* del séptimo grado (12 años) y con él se pretende introducir a los

estudiantes a la traducción de una situación específica al lenguaje algebraico. A continuación, presentamos el problema como aparece en el libro de texto.

*Figura 4: Unidad 2 Variables y expresiones Clase 1 Expresión algebraica*

**Ejemplo 1.1**

Se van a formar varias mesas unidas una después de otra.

Se tiene una mesa como la siguiente  en la que se pueden sentar 6 personas.

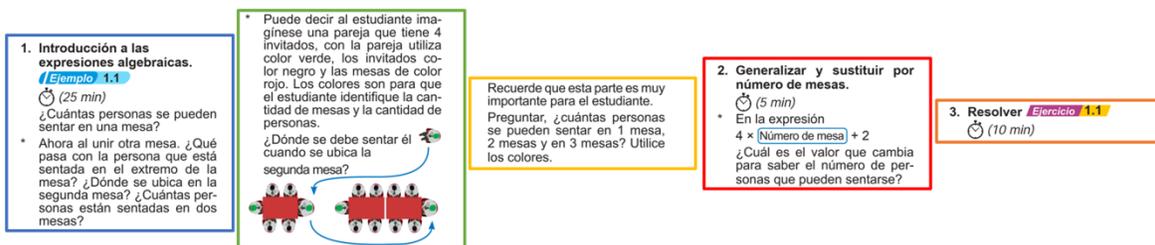
Si se unen varias mesas una después de otra, ¿Cuántas personas pueden sentarse en 1, 2 y 3 mesas?

Tomado de PROMETAM Guía del maestro 7° Honduras, p. 54

En la Figura 5 se muestra el desarrollo de la clase propuesta a los profesores, la cual se divide en tres grandes momentos para resolver el problema que se refiere a la cantidad de personas que pueden sentarse alrededor de algunas mesas. El primer momento, que es llamado: Introducción a las expresiones algebraicas cuenta con una duración de 25 minutos, mientras que el segundo: Generalizar y sustituir por el número de mesas con una duración de 5 minutos y el tercero: Resolver, con una duración de 10 minutos.

Pasamos a comentar el desarrollo de la clase, para identificar la estructura y los elementos de la resolución de problemas que están interviniendo.

*Figura 5: Desarrollo de la clase Expresión algebraica*



Tomado de: PROMETAM Guía del maestro 7° Honduras, p. 54

Al observar el desarrollo propuesto de la clase, podemos identificar las actividades relacionadas a algunos momentos de la resolución del problemas:

- La parte encerrada en el cuadro azul se relaciona con la comprensión del problema. Con las preguntas propuestas, se espera que los estudiantes detecten la información relevante para resolver el problema, ellos deben apoyarse en su percepción visual de la situación para que identifiquen el papel de las personas que se encuentran sentadas en los extremos de la mesa, punto que será clave al momento de generalizar.
- En el cuadro de color verde podemos identificar elementos en la dirección del establecimiento de la estrategia de solución, que se relaciona con el uso de colores para reconocer los elementos que intervienen en la solución. El estudiante al utilizarla podría pensar en una configuración que le permita diseñar un plan para establecer una solución general al problema. Además, que al observar la posición de las personas que se encuentran sentadas en los extremos, el estudiante se podría dar cuenta de que, al agregar una mesa, la cantidad de personas que pueden sentarse es constante, es decir, que por cada mesa que se agrega pueden sentarse 4 personas más, este hecho ayuda a organizar la información, así como a sentar las bases para la generalización a partir de procesos inductivos.
- Con las preguntas indicadas en el cuadro de color amarillo, se procede a resolver el problema. Consideramos que para llegar hasta este momento, los profesores deben tener un grado de seguridad de que los estudiantes conocen y comprenden la estrategia que se necesita para responder las preguntas, este no es un paso que se realiza de manera automática, porque aun conociendo la estrategia, su ejecución puede no ser fácil, ya que incluye la construcción de una expresión general para predecir la cantidad de personas que pueden

sentarse de acuerdo a esa configuración a partir de conocer el número de mesas.

- En los cuadros tanto de color rojo como anaranjado, podemos reconocer que los elementos relacionados con la visión retrospectiva se encuentran en la dirección de generalizar y conocer qué cantidad es la que cambia (cuadro rojo), así como de poner en funcionamiento la regla encontrada (cuadro anaranjado), más que en verificar los resultados o el procedimiento, en este caso, esta actividad debería ser promovida por el profesor, ya que institucionalmente no se hace.

Luego del análisis de este problema, podemos identificar que a los profesores se les propone una estructura de clase que considera algunos de los elementos de la resolución de problemas, como son la detección y organización de la información relevante, el reconocimiento y uso de la estrategia adecuada para la solución, aunque en lo relacionado con la validación no se establecen elementos que le sugieran a los estudiantes verificar en cada momento, tanto su razonamiento como sus procedimientos, lo que haría que tomaran conciencia de las condiciones que debe cumplir esta solución.

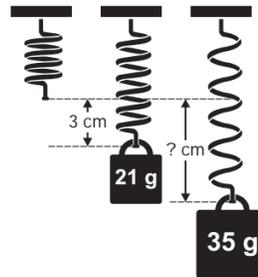
A continuación, presentamos otro problema, el cual no corresponde a la primera clase de su unidad. Se pretende que tome el formato del anterior, pero ya no hay un tratamiento que establezca los momentos que fueron desarrollados en el ejemplo que antes hemos mencionado, proceso que queda en manos del profesor.

Figura 6: Unidad 6 Razón, proporcionalidad y porcentaje Clase 13 Aplicación de la proporcionalidad

**Ejemplo 4.2**

El largo de extensión  $y$  de un resorte y el peso  $x$  son directamente proporcionales. Un resorte se extiende 3 cm cuando se cuelga un objeto que pesa 21 g.

- Encuentre la constante de proporcionalidad  $a$ .
- ¿Cuántos cm se extiende el resorte si se cuelga un objeto que pesa 35 g?



Tomado de: PROMETAM Guía del maestro 7° Honduras, p. 171

En el enunciado de este ejemplo vemos que desde un inicio el estudiante podría saber que las cantidades son directamente proporcionales, además que, en clases anteriores, ya han encontrado la constante de proporcionalidad, así como uno de los valores desconocidos en una proporción, lo que reduce el nivel de complejidad del ejemplo y puede ser que para algunos estudiantes este ya no sea un problema, sino un ejercicio de aplicación, en el sentido mencionado en esta investigación.

Figura 7: Desarrollo de la clase Aplicación de la proporcionalidad

1. Resolver problemas aplicando la proporcionalidad directa. **Ejemplo 4.2**

⌚ (15 min)

- \* ¿Qué magnitud es directamente proporcional a quién? ¿el peso  $x$  del objeto que se cuelga es directamente proporcional al largo de extensión  $y$  del resorte? ¿o es al contrario? ¿con qué fórmula se expresa la proporcionalidad directa entre  $x$  y  $y$ ?, teniendo los valores de  $x$  y  $y$ , ¿cómo se encuentra el valor de la constante de proporcionalidad  $a$ ?
- \* Si se tiene la fórmula para la proporcionalidad directa  $y = \frac{1}{7}x$ , y el peso  $x = 35$ , ¿cómo se encuentra el valor de  $y$ ?

Tomado de: PROMETAM Guía del maestro 7° Honduras, p. 171

Del desarrollo mostrado, podemos notar que la estructura de la solución del problema ya no enfatiza los distintos momentos de la resolución de problemas, como el comentado inicialmente, hecho que generalmente se ve en los problemas que no corresponden a la primera clase de cada unidad, es posible que esto se deba

a que los desarrolladores de los libros de texto suponen que los profesores deben incluirlas para organizar su clase, lo que no necesariamente sucede y que repercute en que la instrucción en esta modalidad es adquirida superficialmente.

De manera general, en estos antecedentes hemos hecho mención de algunos aspectos que establecen que hay posturas didácticas sobre la resolución de problemas, tanto de investigadores como de instituciones interesadas en la enseñanza de la matemática, que apuntan hacia la inclusión de actividades cognitivas que incluyan: 1. La detección de la información relevante, 2. La organización de la información, 3. La validación y explicación de los resultados, así como el uso de recursos como gráficas o esquemas, la interpretación de modelos, incluso la de generar hipótesis a partir de cierta información.

En el caso de los contenidos enseñados a los estudiantes de Honduras, bajo la perspectiva de la resolución de problemas, podemos comentar que tienen una experiencia básica respecto a la detección y organización de la información, uso de recursos matemáticos elementales y poca experiencia en procesos de validación, instrucción que no es desarrollada consistentemente a lo largo de los cursos.

A continuación, presentamos los aspectos relativos a la modelización matemática, así como los elementos que desde la teoría podrían ser considerados un vínculo entre la resolución de problemas y la modelización.

## 2. MARCO REFERENCIAL

### 2.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, identificamos los elementos teóricos que intervienen en la resolución de problemas, así como las habilidades que podrían estar desarrollando los estudiantes de Honduras. Además, estuvimos detectando la dirección que estaría tomando la educación matemática, según organizaciones como el NCTM y PISA. Las posturas actuales de estas organizaciones apuntan a que los estudiantes ya no sólo deben tener habilidades relativas a la resolución de problemas, en el caso de PISA consideran que: “el ciclo de modelización es un aspecto central de la concepción de PISA de los alumnos como solucionadores activos de problemas” (OCDE, 2019, p. 76, traducción propia). Esto nos indica, según su opinión, que los estudiantes deberían de tener una enseñanza en dónde puedan detectar situaciones que sean susceptibles de ser descritas usando la matemática y un tratamiento sobre los elementos que identificamos que forman parte del ciclo de modelización.

En el primer apartado de esta sección, revisamos algunos de los aspectos relacionados con la modelización en general, de los que identificamos a la competencia de modelización, en donde se describen las habilidades que podrían adquirir los estudiantes que son formados bajo este enfoque. Luego, analizamos algunos de los ciclos de modelización, de los que destacan el de Blum y Leiß (2007) y el de Blum y Borromeo Ferri (2009), dado que nos han parecido especialmente útiles.

En el segundo apartado, presentamos los elementos que, de manera general, consideramos que podrían establecer un vínculo entre la resolución de problemas y la modelización y que será la base de nuestra aproximación.

## 2.2. MODELIZACIÓN

### 2.2.1. *Introducción*

Examinaremos algunas posturas sobre la modelización en la educación matemática, sus condiciones y características, con el objeto de contar con un panorama que nos permita considerar los avances actuales, además, de fortalecer la idea original que se refiere a establecer los puntos de contacto, entre la resolución de problemas y la modelización, para enriquecer el aprendizaje de la matemática escolar.

En un segundo momento mencionamos algunas de las propuestas que sobre modelización se han desarrollado, las que con frecuencia toman la forma de ciclos, de las cuales tomaremos a una como referencia principal para esta investigación.

### 2.2.2. *Tránsito entre el Mundo Real y el Mundo de las Matemáticas*

Como elemento de partida tenemos la idea de modelo matemático, que según Trigueros (2009): “aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales” (p. 76). De lo anterior podemos ver que los modelos matemáticos son estructuras que pueden servir como base para hacer inferencias sobre el mundo real, lo que implica un proceso de abstracción, que en el sentido de Hershkowitz et al. (2001) entendemos que: “La abstracción es una actividad de reorganización vertical de las matemáticas previamente construidas en una nueva estructura matemática” (p. 207, traducción propia). De manera que, los modelos matemáticos son acercamientos sintéticos de la realidad por lo que son útiles por sí mismos, en particular porque son una versión matematizada de esta, lo que nos proporciona un objeto de estudio vinculado al mundo real.

La actividad de diseñar e interpretar modelos matemáticos parece proporcionar un entorno adecuado para la educación, debido a la riqueza que podría aportar a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como la justificación ideológica de su pertinencia educativa, por lo que es de nuestro interés investigar los aspectos relacionados con la construcción de estos modelos con fines educativos.

Uno de los primeros acercamientos que distingue la diferencia entre la construcción de un modelo matemático y el proceso de matematización, es el que proponen Blum y Niss (1991) quienes opinan que:

Si bien la matematización es el proceso desde el modelo real hasta las matemáticas, usamos el término modelado o construcción de modelos para referirnos a todo el proceso, que conduce desde la situación del problema real original hasta un modelo matemático. El proceso de modelado no solo produce una imagen simplificada sino verdadera de alguna parte de una realidad preexistente. (p. 39, traducción propia)

A este proceso de modelado, como indican Blum y Niss (1991), le estaremos llamando modelización matemática. Otro acercamiento a este proceso es el que hace Blum y Borromeo Ferri (2009) quienes nos dicen que: (es el) “proceso de la traducción entre el mundo real y la matemática en ambas direcciones” (p. 45, traducción propia). Abundando en esta dirección también tenemos que: “el aspecto crucial del modelado matemático es, por lo tanto, la transición entre el mundo extra matemático y las matemáticas para resolver un problema de la vida real” (Hankeln, 2020, p. 210, traducción propia).

Para abordar los aspectos relativos al tránsito entre el mundo real (MR) y el mundo de las matemáticas (MM) consideramos que los modelos matemáticos sirven como vínculo entre estos dos mundos y en particular porqué consideran las condiciones

del MR, lo que nos permite hacer suposiciones sobre estas condiciones para poder explicar y predecir la evolución del fenómeno en el contexto del MM.

En la producción académica, identificamos dos posturas relacionadas con el tratamiento de la matemática y los problemas contextuales, una enfatiza a la modelización apoyada por la visión desde el MR al MM y la otra en el sentido contrario, esto es desde el MM al MR, en este sentido la conexión de una a otra hace una importante diferencia en los objetivos que se plantean en un sentido o en el otro.

En el primer caso, cuando nos movemos desde el MR en la dirección al MM, con la intención de interpretar los fenómenos desde esta aproximación, se dice que se desarrolla la modelización, pero si tomamos la ruta de movernos desde el MM en dirección al MR entonces, estaríamos hablando de las aplicaciones, como menciona Blum (2002).

Como apreciamos, en el acercamiento desde el MR hacia el MM la inspección, la reflexión, la formulación y la identificación de las variables relevantes, así como su organización, son habilidades necesarias para que el estudiante tenga herramientas para interpretar los fenómenos del mundo real y su posible matematización.

En contraste, en la aproximación desde el MM hacia el MR al estudiante se le proponen situaciones del MR que son “accesibles a un tratamiento matemático y para las que existen modelos matemáticos correspondientes” (Blum, 2002, p. 154, traducción propia). A partir de esto, identificamos que el objetivo está encaminado a obtener los resultados matemáticos dado un modelo particular con condiciones ya establecidas, así como la interpretación y validación de estos resultados matemáticos, en torno al modelo matemático y a la situación contextual, lo que podría provocar una mejora en el tratamiento procedimental en general.

Vemos que en el sentido desde el MR hacia el MM el estudiante debe realizar un proceso de abstracción de alguna situación específica en el MR, para luego poder describirla en términos de la matemática, tarea que suele llevar tiempo y un proceso que incluye cierta madurez, por lo que uno de los factores a considerar es el tiempo necesario para el desarrollo de estas actividades, lo que podría ser una limitante para los fines institucionales.

Por su parte, en el tratamiento desde el MM hacia el MR, el estudiante no requiere del proceso de matematización, actividad que se considera importante por los beneficios instruccionales que aporta, sino del conocimiento de que existen diferentes modelos matemáticos que corresponden a ciertos fenómenos y de la adecuada adaptación de estos modelos a las condiciones particulares del fenómeno en cuestión, con esto, el estudiante también podría dar sentido a la utilidad de la matemática.

Las actividades desarrolladas en un sentido y en el otro, proponen acercamientos diferentes, tanto didáctica como cognitivamente, por lo que es necesario discriminarlas en tanto que los resultados obtenidos al ponerlas en funcionamiento tienen beneficios distintos.

Por un lado, consideramos que es importante acercar la enseñanza de la matemática a los problemas que se le presentan a los estudiantes en su vida extra-clase, pero somos conscientes de que esta puede ser una tarea muy compleja, lo que requiere de gran cuidado para llevar a cabo una instrucción con esta visión y por otro lado, creemos que se deben incluir problemáticas que aun no reflejando la realidad, si permitan que los estudiantes adquieran los recursos matemáticos potencialmente necesarios para estudiar esa realidad.

Independientemente de estas posturas, la modelización se ha vinculado al uso de los llamados problemas en contexto, de lo que podemos decir que adquieren distintos objetivos en cada caso, pero en todos ellos se acepta el tratamiento de problemas que incluyan algunos elementos del mundo real.

### *2.2.3. La competencia de modelización*

Para desarrollar una aproximación a problemáticas cercanas a la realidad, observamos que la modelización podría ser uno de los medios adecuados, debido a que los estudiantes podrían adquirir las habilidades que se ven promovidas por este acercamiento a la matemática, las cuales se describen a partir de la definición de la competencia de modelización matemática que proponen Niss et al. (2007), quienes comentan que:

La competencia de modelización matemática se refiere a la capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o supuestos relevantes en una situación dada del mundo real, de traducirlos a las matemáticas y de interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada, así como la capacidad de analizar o comparar modelos dados investigando los supuestos que se hacen, comprobando las propiedades y el alcance de un modelo dado. (p. 12, traducción propia)

Al observar esta descripción, nos damos cuenta de que, para adquirir la competencia de modelización, se requiere que los estudiantes desarrollen las capacidades individuales que la conforman, de manera que, es posible que cuando estos se enfrenten a tareas de modelización algunas de estas capacidades no estén desarrolladas adecuadamente o incluso pueden no estar desarrolladas, por lo que es

importante constatar que estas capacidades están presentes para el correcto desempeño de las actividades de modelización propuestas.

La experiencia en aula sobre la modelización, así como la matematización de la realidad tiene particularidades, como expresan Blum y Leiß (2007) quienes comentan que: “la lectura de un texto y la comprensión tanto de la situación como del problema son una barrera cognitiva considerable para los estudiantes” (p. 228, traducción propia) lo que enfatiza que esta actividad no es una tarea que se realiza de manera automática y que existen elementos tanto dentro como de afuera de la matemática que podrían significar una barrera para los estudiantes cuando realizan una tarea de este tipo.

Considerando lo antes dicho, en este trabajo estudiaremos la modelización matemática desde una perspectiva cognitiva, en acuerdo con la siguiente propuesta: “Las perspectivas cognitivas ponen en primer plano la forma en que el pensamiento de los estudiantes conduce al modelo, al tiempo que sirven de base para los objetivos pedagógicos o curriculares” (Czocher, 2018, p. 138, traducción propia).

A partir de esta óptica, enfocamos nuestra atención en algunas estructuras que esquematizan y describen el proceso de modelización, replicando estrategias ideales que deberían estar siendo desarrolladas, en consonancia con Borromeo Ferri (2006), quien dice que: “la descripción de las fases del proceso de modelización es normativa y se considera una forma ideal de modelización” (p. 91, traducción propia) por lo que se requiere de un proceso de acercamiento paulatino, para que los estudiantes puedan adquirir la lógica estructural que subyace a este proceso y así poder enfrentarse a problemas que incluyan elementos del mundo real y que estén en la dirección de construir modelos.

A continuación, describiremos algunas propuestas para incorporar la modelización al aula de clases, las cuales inician con el planteamiento de ciertas estructuras que les llaman ciclos de modelización, los que comentaremos enseguida.

#### *2.2.4. Sobre los ciclos de Modelización*

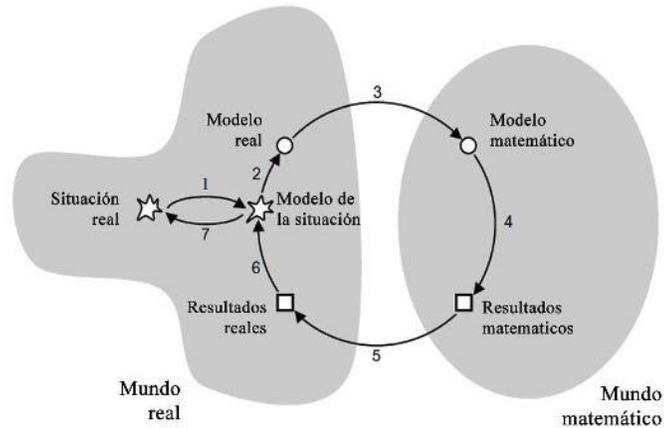
Las posturas relativas a la modelización con frecuencia son planteadas a través estructuras llamadas ciclos, por lo que mencionamos algunos de ellos para establecer sus características, sus focos de atención y las actividades propuestas que podrían estar realizando los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea de este tipo.

Sabemos que la elección del ciclo conveniente tiene gran importancia, debido a que equilibra las necesidades con las condiciones de la educación del lugar en donde se pondrá en funcionamiento, por lo que se requiere de un proceso de análisis de estos ciclos y de sus aportaciones.

Además, los distintos momentos que conforman los ciclos de modelización ayudan al estudiante y al profesor a identificar las características de cada fase del modelado y los objetivos de este, tanto en cada momento como de conjunto, viéndolo como un proceso que no se restringe a la matematización de una situación y que incluye actividades que desarrollan habilidades de análisis, trabajo matemático y de validación bajo condiciones particulares, dando cuenta de los beneficios que se tendrían al hacer uso de este acercamiento en la clase de matemáticas.

Luego del análisis de algunas de estas formulaciones, encontramos una de las primeras, la que consideramos de fundamento y que mostramos en la Figura 8. Este ciclo de modelización es planteado por Blum y Leiß (2007) en donde se proponen siete pasos para desarrollar una actividad de modelización en la escuela:

*Figura 8: Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007)*



Tomado de: Blum y Leiß, (2007, p. 225)

En este ciclo se consideran seis fases que son: Situación real, Modelo de la Situación, Modelo real, Modelo matemático, Resultados matemáticos y Resultados reales. En dónde tenemos que, para poder avanzar en cada una de ellas, necesitamos realizar siete procesos de transición que en el esquema se identifican por flechas que recorren de una fase a otra. Estos procesos de transición son: 1. Entendiendo la situación real, 2. Simplificando y estructurando la situación modelo, 3. Construyendo el modelo matemático, 4. Resolviendo el modelo matemático, 5. Interpretando los resultados en el contexto del modelo, 6. Validando los resultados con el modelo de la situación y 7. Validando los resultados con la situación real y presentarlos.

Las fases y los procesos de transición antes mencionados forman un ciclo continuo, esto significa que: si algún aspecto de la modelización no es logrado adecuadamente por el estudiante que realiza la actividad, éste debe regresar a un momento anterior para que pueda verificar porqué sucede esto y poder modificar su esquema de solución para luego reanudar el ciclo considerando las modificaciones realizadas.

Observamos que la formulación de los ciclos tiene un doble propósito, por un lado, se establecen las actividades que se deben desarrollar secuencialmente, sin embargo,

el proceso de aprendizaje no puede ser dirigido estrictamente por la secuencia, por lo que se explicitan los requisitos necesarios para lograr el desarrollo ideal en cada fase. El otro propósito se relaciona con la circulación, que incluye elementos de validación en todo momento, esto significa que los estudiantes no sólo estarían realizando actividades de este tipo en los procesos 6 y 7 de transición, sino en cualquier transición que vaya de una fase a otra.

Dentro de las propuestas de la modelización, existen otras versiones de los ciclos, véase por ejemplo (Villarreal et al., 2018, p. 331), en donde se agregan aspectos como la obtención experimental de los datos y la validación del modelo, contrastación de los resultados teóricos con los experimentales, aspectos que este autor considera importantes para ciertas áreas del conocimiento, lo que a nuestro parecer amplía los requisitos para llevar a cabo una introducción de la modelización, debido a que este acercamiento podría distraer al estudiante del objetivo del aprendizaje de la matemática.

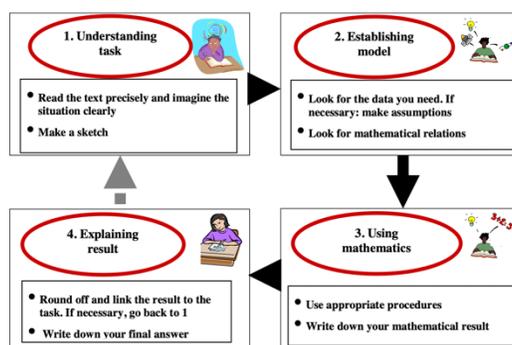
También podemos mencionar el ciclo propuesto por (Greefrath, 2018). Con este ciclo se pretende que las actividades de modelización partan del MR y en dirección al MM agregando recursos de la tecnología, de donde se obtienen resultados computacionales que se comparan tanto con los resultados matemáticos como con los datos reales del fenómeno en cuestión, lo que produce una versión de la modelización apoyada en el análisis de distintos tipos de datos. Esta postura pretende una visión amplia y actualizada, sin embargo, dista de la modelización que es posible en los salones de clase elementales.

Los ciclos de modelización mencionados anteriormente se plantean con al menos 6 puntos de desarrollo que se consideran adecuados para una aproximación del proceso de modelización en la educación, sin embargo, en las condiciones actuales de algunos de nuestros países tomaría mucho tiempo desarrollar todo el proceso a

partir de estas propuestas, así como una inversión de recursos en aspectos diferentes a los de las matemáticas, por lo que deberíamos considerar versiones más simplificadas que aún mantengan el espíritu de la modelización, para no quedar al margen de sus beneficios.

Planteándonos la importancia de proporcionar a los estudiantes experiencias de modelización matemática, pese a las condiciones de recursos y tiempo, es que hemos considerado ciclos más cortos que contienen los aspectos sustanciales que harían posible este tipo de acercamiento, por ello nos proponemos hacer uso del ciclo propuesto por Blum y Borromeo Ferri (2009), antes mencionado, debido a que es en este ciclo donde encontramos que se consideran todos los elementos para el desarrollo eficiente de la introducción de la modelización a los salones de clase, además de ser el más versátil y por tanto con mayores posibilidades de poner en funcionamiento en clase, modelo que ya hemos presentado y que repetimos enseguida:

*Figura 9: Ciclo de resolución de problemas de Blum y Borromeo Ferri (2009)*



Tomado de: Blum y Borromeo Ferri (2009, p. 54)

Esta propuesta está formada por cuatro fases, como antes hemos mencionado, que son: 1. Comprender la tarea, 2. Estableciendo el modelo, 3. Usando las matemáticas y 4. Explicación del resultado, de las que en la Tabla 4 identificaremos las subcompetencias que intervienen, en este sentido, Greefrath (2015) comenta la

definición de subcompetencia de la modelización que MaaB (2006) propone, en los siguientes términos: “la capacidad de ejecutar cada paso individual del ciclo de modelización, puede considerarse una subcompetencia de la modelización” (p. 174, traducción propia). De manera que, desde nuestro punto de vista, las consideraremos como subcompetencias necesarias para la modelización y que pasamos a puntualizar.

*Tabla 4: Subcompetencias de la modelización según el ciclo de Blum y Borromeo Ferri (2009)*

<b>Subcompetencias del ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009)</b>
<b>Comprensión de la tarea:</b> Detección de la información relevante de la situación del MR. Toma de decisiones en relación con los supuestos que se pueden hacer con esa información. Elaboración de esquemas que representen la situación del MR.
<b>Estableciendo el modelo:</b> Organización de la información. Búsqueda de patrones y relaciones matemáticas para realizar el proceso de construcción del modelo.
<b>Usando las matemáticas:</b> Se relaciona con el buen manejo de la matemática necesaria para resolver la problemática asociada a los modelos.
<b>Explicando el resultado:</b> Redacción de la solución, esto es, los estudiantes podrían interpretar la solución y tomar el control sobre esta.

Fuente: Elaboración propia

Aunque en el ciclo de Blum y Borromeo Ferri (2009) no se explicitan actividades de validación, consideramos al igual que Czocher (2018) que: “la validación es responsable de la naturaleza iterativa del modelado” (p. 137, traducción propia). Por lo que al organizar las actividades utilizando la estructura de ciclo, suponemos que implícitamente se incluyen este tipo de actividades y en caso contrario, nosotros consideramos que este aspecto es fundamental para desarrollar la modelización, por lo que lo debemos incluir. Podemos observar que la organización de las subcompetencias mencionadas, que aparecen en este ciclo son propuestas de manera similar a las actividades que comúnmente se realizan en una tarea planteada en el estilo de la resolución de problemas.

En el siguiente apartado establecemos nuestra postura respecto a la relación que existe entre la resolución de problemas y la modelización, la cual fundamenta los objetivos de esta investigación.

## **2.3. POSTURA EN ESTA INVESTIGACIÓN SOBRE EL VÍNCULO ENTRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA MODELIZACIÓN**

### ***2.3.1. Introducción***

Dado que nuestro objetivo de estudio se refiere a la posible transición entre una enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas y una que se apoya en la modelización, vamos a establecer, desde nuestro punto de vista, los puntos de contacto entre ambas propuestas, así como nuestra postura sobre la modelización entre las posiciones del MR y el MM como referencia obligada.

### ***2.3.2. Puntos de contacto entre la modelización y resolución de problemas***

Como hemos visto en secciones anteriores, uno de nuestros intereses es conocer cuáles son los puntos de contacto entre la resolución de problemas y la modelización, así como identificar las condiciones que podrían permitir el tránsito desde una postura a la otra para beneficiar el aprendizaje de la matemática.

En la Tabla 5 mencionamos las habilidades individuales consideradas en cada propuesta, de las que identificamos los puntos que potencialmente podrían permitir, desde nuestro punto de vista, el contacto entre ambas posturas.

*Tabla 5: Comparación de habilidades promovidas por la resolución de problemas y la modelización*

<b>Resolución de problemas</b>	<b>Modelización</b>
Reconocimiento de la estructura de los problemas para identificar las estrategias y elementos claves para resolverlos.	Reconocimiento de situaciones del MR que podrían ser descritas utilizando la matemática.
Detección de la información relevante.	Identificación de las variables de una situación del MR y la relación que existe entre ellas.
Organización de la información.	Desarrollo de procesos de selección de las variables para determinar cuáles se van a considerar en la construcción del modelo.
Planteamiento y uso de estrategias para la solución de los problemas.	Construcción del modelo matemático que describa la situación.
Desarrollo de procesos de validación tanto de las operaciones como del enfoque utilizado.	Comparación de los resultados del modelo matemático con los datos del MR y presentación los resultados.
Generalización de las estrategias y la posible aplicación a otros problemas.	Lectura, verificación y alcance de los modelos.

Fuente: Elaboración propia

Lo primero que podemos identificar es que en la resolución de problemas la estructura que es relevante se relaciona con el reconocimiento de las estrategias para resolver los problemas, mientras que en la modelización es necesario identificar problemáticas en el MR y formularlas como un problema para resolverlo mediante la construcción de un modelo. Pese a estas diferencias estructurales, encontramos que las habilidades relacionadas con: 1. La detección de la información relevante de la situación, 2. La organización de la información y 3. El desarrollo de procesos de validación, son los puntos de contacto entre ambas posturas.

Además, identificamos que el vínculo podría estar condicionado, debido a que el enfoque que se le da a estas habilidades en la resolución de problemas y en la modelización es ciertamente diferente, pero que esta diferencia podría ser amortiguada si consideramos la participación del profesor como promotor de una reflexión del tipo metacognitivo.

Con el desarrollo de procesos metacognitivos, entendemos que: 1. Los estudiantes validen constantemente, tanto los aspectos operativos, como los estratégicos del

proceso de modelización, así como de las soluciones y 2. Que al estar enterados de que su procedimiento debe ser coherente y válido, puedan tomar mayor control sobre todo el proceso de conjunto, así como de su compromiso en el proceso de solución.

Consideramos que la participación del profesor para este tránsito es fundamental, debido a que este es un reto tanto cognitivo como matemático, es por ello que pensamos que los profesores deberían de estar bien informados con respecto a los elementos que intervienen en el proceso de modelización para apoyar a los estudiantes en el desarrollo de actividades en este sentido, así como sugieren Blum y Leiß (2007):

Otra característica importante fue darse cuenta durante las lecciones de lo imperativo que es que los profesores tengan un conocimiento detallado e íntimo del ciclo de modelización, tanto como una base sólida para los diagnósticos como una fuente rica de intervenciones de apoyo. (p. 230, traducción propia)

En la misma dirección, tenemos que: “Los profesores tienen que saber cómo apoyar las estrategias adecuadas de los alumnos para resolver tareas de modelado” (Blum y Borromeo Ferri, 2009, p. 54, traducción propia). De esto, podemos darnos cuenta de que el profesor no sólo debe conocer los ciclos de modelización, sino que debe poseer una amplia gama de estrategias que apoyen la construcción de modelos.

En el caso de nuestra investigación, los estudiantes que participarían han sido expuestos a una instrucción basada en la resolución de problemas que inicialmente incluye lo identificado en los libros de texto, como antes hemos mencionado, por lo que suponemos que han tenido experiencias que les permitirían abordar los

problemas haciendo uso de las siguientes habilidades que están presentes en la resolución de problemas tratada en Honduras, como las siguientes:

- La detección de aspectos relevantes de la tarea,
- Organización de la información,
- Planteamiento y uso de estrategias para la solución de los problemas, y en menor medida
- La adquisición de herramientas relacionadas a los procesos de validación y aplicación a problemas afines.

Cada uno de los puntos anteriores podríamos considerarlos como subcompetencias de la resolución de problemas y que podrían ser puestos en práctica, por los estudiantes, a través de un tratamiento metacognitivo del problema tratado y de sus soluciones.

En este trabajo, vamos a considerar: 1. Las subcompetencias de la resolución de problemas en el contexto de Honduras y 2. El ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009), como base de la aproximación a la modelización y 3. Los puntos de contacto entre estos dos acercamientos, que antes hemos mencionado y de esta manera podemos contar con un panorama para verificar la certeza de nuestra hipótesis de investigación, mediante la puesta en marcha de actividades diseñadas con el propósito de propiciar el tránsito entre las propuestas didácticas mencionadas.

Con base en lo anterior vamos a apuntar las relaciones ente el ciclo elegido y las habilidades, que, en principio, tienen los estudiantes de Honduras en concordancia con lo detectado en los libros de texto.

*Tabla 6: Puntos de contacto entre el ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009) y la resolución de problemas de Honduras*

<b>Habilidades según las etapas del ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009)</b>	<b>Habilidades que identificamos en el enfoque de resolución de problemas de Honduras</b>
<b>Comprensión de la tarea:</b> Detección de la información relevante de la situación del MR.	Los estudiantes cuentan con experiencias que les permitirían poder detectar la información relevante de los problemas, en contextos que no siempre se relacionan con el MR.
<b>Estableciendo el modelo:</b> Organización de la información, búsqueda de patrones y relaciones matemáticas para realizar procesos de generalización.	Organizan la información y en menor medida, plantean el uso de estrategias para abordar una problemática, identificando patrones y generalizando.
<b>Usando las matemáticas:</b> Se relaciona con el buen manejo de la matemática que se necesita para resolver los modelos.	En principio deben conocer la matemática que curricularmente se les presenta.
<b>Explicando el resultado:</b> Redacción de la solución, con esto nos referimos a que, a través de este proceso, los estudiantes podrían interpretar la solución y tomar un control sobre esta.	Institucionalmente, en menor medida sugieren el uso de habilidades de validación operativa en el desarrollo de los problemas.

Fuente: Elaboración propia

De esta tabla, podemos reconocer que, entre estos dos acercamientos, los puntos de contacto aparecen, pero con intencionalidad y en un nivel distinto, por lo que se requiere de un tratamiento adecuado para que se logre el tránsito. Sin embargo, creemos que, si hay un dominio suficiente de las habilidades consideradas como puntos de contacto, se podría lograr exitosa transición entre ambos enfoques.

Por su lado, el ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009) se orienta a modelar situaciones que se encuentran en el MR, pero en la enseñanza básica de Honduras no identificamos problemas de este tipo, sino problemas que han sido adaptados, presentando contextos que vendrían siendo una simplificación de la realidad y que ocasionalmente se les califica como artificiales.

Al respecto del carácter de los problemas usados en las clases de Honduras, creemos que para desarrollar un aprendizaje que ponga en funcionamiento las ventajas de los problemas en contexto y los objetivos de la modelización, en lo relativo a vincular

al problema con un modelo, es posible utilizar incluso problemas como los llamados artificiales, siempre que permitan desarrollar las habilidades de modelización antes mencionadas, que en el caso de la enseñanza en Honduras tienen por objetivo enfrentar al estudiante a situaciones que pueden ser decodificadas estructuralmente mediante un patrón y que darán como resultado una relación algebraica que prediga un proceso.

En nuestro estudio, vamos a considerar a la modelización desde una perspectiva que se ubica en un punto intermedio en el tránsito que va desde el MR hacia el MM o viceversa, esta no se refiere a poner en funcionamiento los dos procedimientos alternativamente, sino que toman aspectos de fundamento de ambas posturas que se desarrollan interconectadas en ciclos de aprendizaje más cortos y con objetivos particulares que mencionamos enseguida.

Consideramos, que el proceso de modelización debe permitir que el estudiante sea un actor directo del proceso de interpretación matemática de un fenómeno con la participación del profesor como un catalizador, quien puede contribuir al desarrollo de una forma ampliada de la validación, por lo que deberían ponerse en funcionamiento actividades como las siguientes:

1. Que el estudiante enfrente el proceso de modelización completamente, en el ciclo mencionado, lo que requiere el desarrollo de habilidades de detección de las variables relevantes en el fenómeno, su matematización y particularmente su validación.
2. En otro momento, se debe validar el modelo a partir del contraste entre los resultados matemáticos y los datos contextuales, actividad que acompañada de una reflexión pueden permitir que el estudiante perciba la razón y necesidad de la validación, así como de la pertinencia de la solución.

3. Finalmente, en este momento se pretende que el estudiante tenga la oportunidad de observar el fenómeno de variación de las condiciones del modelo, teniendo como punto de partida la solución del modelo y su pertinencia lo que enfatiza el carácter del mecanismo de solución como un modelo que puede ser la base para la solución de otros problemas.

En el último momento (3), nos referimos a que el estudiante, en un primer acercamiento, después de resolver un “modelo base”, se encuentre en posibilidades de inspeccionar algunas de las condiciones del fenómeno, con el objetivo de poder entender el efecto de las variaciones de las condiciones y ampliar el problema a situaciones que se encuentren cercanas a las que se describen con el modelo base (que llamaremos en este trabajo variaciones del modelo), de manera que el estudiante vea al modelo cómo un esquema matemático con cierta organización y lógica, ligado a la realidad del problema de manera directa, al mismo tiempo que es un organismo que puede ser alterado y de este modo creemos que podemos contribuir a que el estudiante acepte a la matemática como una herramienta para interpretar la realidad, además, el estudiante podría estar en condiciones de poder hacer consideraciones que den pie a un cambio en el modelo a partir de su análisis y observaciones lo que se puede producir en la esfera de la metacognición.

Como pudimos observar, el acercamiento que haremos a la modelización podría considerar el uso de problemas que no necesariamente sean un reflejo de la realidad, pero que con un acercamiento progresivo que sigue las actividades propuestas en los ciclos de modelización, los estudiantes podrían adquirir, tanto la estructura lógica requerida como las habilidades que se ven promovidas a través de la modelización.

Por lo anterior, plantearemos el objetivo de la investigación, las condiciones iniciales y la hipótesis de esta investigación y finalmente las preguntas que responderemos en esta investigación.

#### **2.4. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN**

Pretendemos conocer la forma cómo las habilidades desarrolladas en una aproximación de resolución de problemas, impartidas tanto curricular como extra curricularmente en Honduras, podrían servir como base para una introducción a la modelización matemática escolar. Por lo que se requiere determinar los puntos de contacto entre ambas propuestas, de manera que se pueda respaldar el proceso desde una propuesta didáctica a la otra, sin dejar de considerar la participación del profesor para apoyar este proceso, tomando como base un acercamiento metacognitivo de verificación de los procesos y validación de los resultados.

#### **2.5. HIPÓTESIS DE TRABAJO O CONDICIONES INICIALES**

En nuestro estudio vamos a considerar que, para realizar el tránsito desde la resolución de problemas hacia la modelización, es necesario que los estudiantes de Honduras hayan tenido experiencias que les permitan: 1. Detectar la información relevante del problema, 2. Organizar la información y 3. Desarrollar procesos de verificación de los procedimientos y validación de los resultados. Además, que este tránsito puede ser inhibido si no se consideran las siguientes condiciones: 1. El desarrollo de procesos metacognitivos sobre la verificación del proceso y los resultados, 2. La participación del profesor como promotor de los procesos metacognitivos y 3. Secuencias didácticas que recuperen el uso de las habilidades asociadas a los puntos de contacto para generar una propuesta didáctica de transición.

## **2.6. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN**

1. Los estudiantes estarán en condiciones de transitar a un enfoque basado en la modelización si se proponen secuencias didácticas que aprovechen dosificadamente las habilidades de: 1. Detección de la información relevante, 2. Organización de esta información y 3. Uso sistemático de la validación de los procedimientos y de los resultados, apoyadas por recursos metacognitivos promovidos por los profesores.
2. La validación de las soluciones de los problemas asociados a *modelos base* que son susceptibles de variación, pueden proporcionar a los estudiantes una idea de lo que significa un modelo que justifica el estudio de la modelización, proceso que requiere de la participación promotora del profesor.

## **2.7. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

1. ¿De qué manera la secuencia didáctica aprovecha las habilidades reconocidas como puntos de contacto y posibilita la transición hacia la modelización?
2. ¿De qué manera el uso de la validación y la variación promovida por el profesor permite que el estudiante adquiera elementos para la modelización?

Enseguida discutimos los aspectos relacionados con la metodología que utilizamos en este estudio.

## **3. METODOLOGÍA**

### **3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN**

Desarrollamos una investigación bajo el enfoque cualitativo participativo, la cual se estructuró en un estudio de caso, donde participaron dos estudiantes hondureñas con diferentes habilidades sobre resolución de problemas. Esto para conocer la forma cómo las competencias y habilidades sobre resolución de problemas impartidas, tanto curricularmente como extra curricularmente en Honduras, podrían servir como base para una introducción de la modelización matemática escolar y cómo es el proceso de tránsito desde una propuesta didáctica a la otra.

El estudio se apoyó en datos que se obtuvieron de la aplicación de dos cuestionarios en línea a través de la plataforma de GeoGebra, éstos fueron realizado de manera individual con cada participante. Después de la resolución de cada cuestionario, el investigador procedió a revisar las respuestas, para luego realizar dos entrevistas-intervención individuales a través de la plataforma zoom, las que se realizaron correspondientemente después de cada cuestionario y en dónde se tuvo la oportunidad de reflexionar conjuntamente sobre las respuestas y de esta manera poder respaldar la solución en los casos en que fuese necesario, al mismo tiempo que se desarrollaron actividades de validación de los problemas que incluían variaciones en las condiciones de los problemas, con el objeto de identificar un modelo asociado a un conjunto de problemas.

### **3.2. MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN**

Para lograr los objetivos de nuestra investigación nos apoyamos en diferentes tipos de instrumentos que fueron trabajados vía internet, estos son:

- A. Cuestionario Pre-test, a partir de este se identificaron las habilidades sobre resolución de problemas que poseen los estudiantes que participaron en el estudio.
- B. Entrevista-Intervención correspondiente al pre-test, en ella se profundizaron sobre los aspectos importantes identificados en el pre-test, en particular, si se encuentran presentes las habilidades de los puntos de contacto, antes mencionados, en particular las estrategias utilizadas, las formas de validación, las conclusiones y las anticipaciones sobre los resultados de las actividades.
- C. Cuestionario Test, este instrumento tuvo la finalidad de identificar cómo los antecedentes sobre resolución de problemas podrían permitir que los estudiantes puedan realizar actividades de modelización, como fundamento de la hipótesis inicial que establece que la instrucción sobre resolución de problemas podría promover habilidades que puedan ser útiles para la modelización a través de un procesamiento adecuado.
- D. Entrevista-Intervención test, con ella se discutieron los aspectos relevantes del test, en donde se identificó el papel que jugó la fuente de la información, tablas o gráficos, para la elaboración del modelo y la toma de decisiones y así como para poder establecer las condiciones que podrían permitir el tránsito.

En la siguiente sección se describen las características de los participantes.

### ***3.2.1. Sobre los participantes***

En la sección de antecedentes reportamos que los estudiantes que han sido expuestos a una metodología de enseñanza basada en resolución de problemas han tenido experiencias que les permitirían abordar los problemas matemáticos haciendo uso de estructuras apoyadas por esa postura, que son: la detección de la información relevante de la tarea, el planteamiento de estrategias para la solución

de los problemas, la organización de la información, la identificación de la estrategia adecuada para resolver el problema planteado y en menor medida la adquisición de herramientas relacionadas a los procesos de validación y la aplicación extendida del problema.

Al mismo tiempo, consideramos que plantear a los estudiantes actividades cercanas a la modelización permite estar en sintonía con las exigencias actuales. En esta dirección, nos dimos a la tarea de identificar su presencia en los libros de texto oficiales en donde encontramos que no se incluyen actividades de este tipo, aspecto importante para la actual investigación, que pretende observar cómo los estudiantes que han sido instruidos con diferentes niveles de profundidad sobre la resolución de problemas pueden abordar la perspectiva de la modelización, por lo que vamos a considerar dos tipos de estudiantes, que consisten en aquellos que: 1. Han tenido experiencia extracurricular en resolución de problemas, por ejemplo, entrenamientos para participar en olimpiadas matemáticas y 2. Estudiantes que su única instrucción ha sido la que recibieron curricularmente en la clase de matemáticas.

Ambos tipos de estudiantes pertenecen a instituciones educativas públicas, que en su formación han utilizado los libros de texto oficiales de Honduras que analizamos en los antecedentes y su experiencia mínima sobre resolución de problemas es la que aparece en estos libros de texto.

A continuación, se describen las condiciones particulares de los estudiantes que participaron en el estudio.

**Caso 1:** Estudiantes con experiencia extracurricular sobre resolución de problemas.

Para este estudio, se consideró a una estudiante de 15 años que cursaba el noveno grado. Nos referiremos a ella como la estudiante 1 (E1) y cuenta con los siguientes antecedentes:

- Cronológicamente debería estar cursando el octavo grado, pero debido a sus capacidades realizó exámenes de todas las asignaturas y sus resultados le permitieron pasar de séptimo a noveno grado.
- En los dos años anteriores al estudio, participó en la Olimpiada Hondureña de Matemáticas (OHM) que es la competencia más importante de Honduras de este tipo, teniendo reconocimientos por su participación.

La participante fue seleccionada para esta investigación debido a que tenía experiencia extracurricular en resolución de problemas, lo que permitiría conocer cómo los estudiantes con estas características podrían hacer la transición hacia la modelización.

**Caso 2:** Estudiantes que han recibido la instrucción normal en resolución de problemas.

Para este estudio se consideró a una estudiante de 15 años que cursaba el noveno grado. Nos referiremos a ella como la estudiante 2 (E2) y cuenta con los siguientes antecedentes:

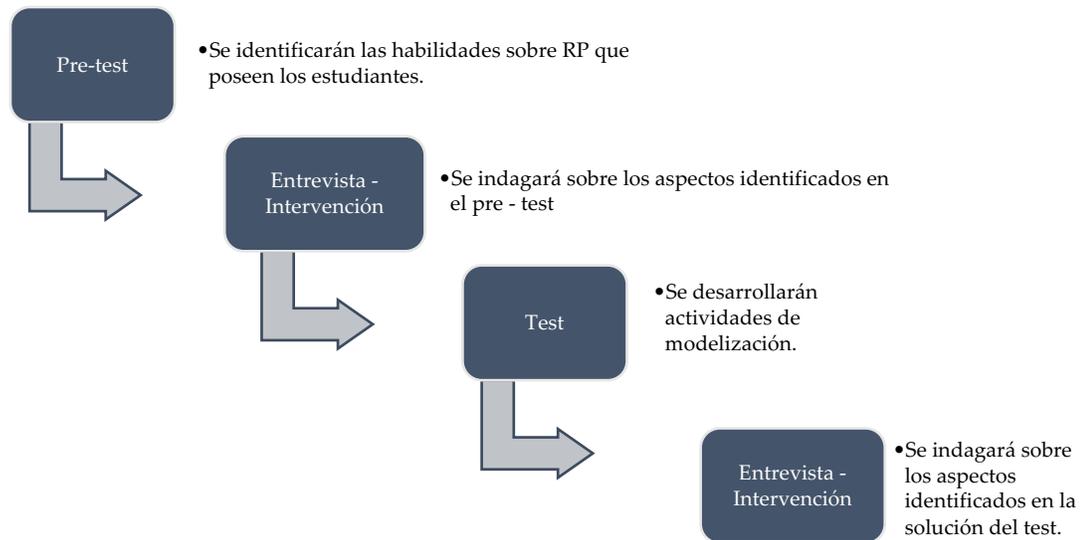
- Ha cursado todos los grados de manera normal.
- Sus calificaciones en matemáticas se encuentran en un rango de 91 a 100.

En la siguiente sección se detalla el proceso que se llevó a cabo para obtener los datos.

### 3.2.2. Sobre la obtención de los datos

Los datos obtenidos son de índole distinta y se pretende llevar a cabo un proceso del siguiente tipo:

*Figura 10: Ruta metodológica de la investigación*



Fuente: Elaboración propia

Para llevar a cabo este proceso enfrentamos algunas condiciones particulares, que son:

- El experimento se desarrolló en condiciones de emergencia sanitaria por la pandemia del covid-19, por lo que hicimos uso de cuestionarios en línea (pre-test y test) y como medio para obtener las respuestas de los participantes por escrito se utilizó la plataforma GeoGebra classroom.
- Posterior a la solución de cada cuestionario se realizó una entrevista-intervención utilizando la plataforma zoom, con el fin de profundizar sobre sus producciones, esta plataforma permitió grabar la entrevista, lo cual ofreció como producto archivos que contiene la videograbación y el audio de las entrevistas.

Para recopilar las respuestas de los participantes se creó una clase en GeoGebra classroom, en esa plataforma las respuestas se guardan automáticamente, además, que tiene la ventaja de que se puede visualizar el proceso de solución de los estudiantes en tiempo real. A partir de los datos ofrecidos en cada cuestionario se plantearon las preguntas que orientaron cada entrevista-intervención.

Los cuestionarios se encuentran alojados en los siguientes enlaces:

*Tabla 7: Enlaces de los cuestionarios aplicados en GeoGebra*

Cuestionario	Enlace
Pre – test	<a href="https://www.geogebra.org/classroom/dn2c5hzu">https://www.geogebra.org/classroom/dn2c5hzu</a>
Test	<a href="https://www.geogebra.org/classroom/hny4pmjm">https://www.geogebra.org/classroom/hny4pmjm</a>

Fuente: Elaboración propia

Los archivos de video y de audio correspondientes a las entrevistas-intervención se encuentran en los siguientes enlaces:

*Tabla 8: Enlaces de los archivos de audio y video de las entrevistas-intervención*

Entrevista-intervención	Enlace
Correspondiente al pre-test	<a href="https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EqHNEyAhqqRLnVoH3AguFLcBZmA91mQYcRSR3xc9Bhk5Vw?e=bHJRw8">https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EqHNEyAhqqRLnVoH3AguFLcBZmA91mQYcRSR3xc9Bhk5Vw?e=bHJRw8</a>
Correspondiente a test	<a href="https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EjId5Hi1bUFGptZGx3o1TcUBFMBSdBhubcqk5i4Wee9Kgw?e=sHePb5">https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EjId5Hi1bUFGptZGx3o1TcUBFMBSdBhubcqk5i4Wee9Kgw?e=sHePb5</a>

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se describe la secuencia que se realizó en el pre-test y la entrevista correspondiente al pre-test

1. Se agradeció la participación en el estudio, luego se solicitó el permiso correspondiente al manejo de la información proporcionada, atendiendo a las normas éticas sobre la información y la disponibilidad de los datos proporcionados.

2. Para el uso de los applets, se realizó un tutorial para explicar las funciones de GeoGebra necesarias para responder cada actividad.
3. Las participantes desarrollaron el pre-test a largo de dos días. En el primero resolvieron las actividades 1 y 2 mientras que el segundo, resolvieron las actividades 3 y 4, lo que tomó aproximadamente una hora en resolver las actividades cada día.
4. Las estudiantes resolvieron las actividades de manera individual, sin ayuda del profesor.

El tipo de preguntas realizadas en el pre-test, que versaba sobre resolución de problemas, tenían como objetivo que las participantes pudieran evidenciar el nivel de desarrollo de las habilidades que consideramos como puntos de contacto, para ello, se incluyeron diferentes tipos de ítems mediante preguntas directas, llenado de tablas y ubicación de puntos y gráficas en el plano.

Las habilidades sobre resolución de problemas que nos interesaba detectar en este cuestionario y que se presentan de manera paralela en los puntos de contacto que hemos propuesto son: 1. Extracción y organización de la información, 2. Uso de la información, 3. Planteamiento y ejecución de estrategias, 4. Validación de estrategias y verificación de los procedimientos y 5. Explicación del proceso y de los resultados.

La entrevista-intervención correspondiente al pre-test se realizó 3 días después de que las estudiantes concluyeran el cuestionario, con una duración de aproximadamente una hora y se realizaron sesiones individuales con cada una.

20 días después de realizar la entrevista-intervención correspondiente al pre-test se les pidió a los participantes que realizaran el test, el cual tuvo la siguiente secuencia:

1. A los participantes se le agradeció por participar en el estudio, al mismo tiempo se solicitaron los permisos correspondientes al manejo de la

información que proporcionaron, esto en atención a las normas éticas sobre la información y la disponibilidad de los datos proporcionados.

2. Dadas las características de los applets utilizados, previo a la solución de las actividades se realizó un tutorial para explicar las funciones de GeoGebra que necesitarían para responder las actividades.
3. Los participantes desarrollaron las actividades del test a largo de dos días. El primer día resolvieron las actividades 1 y 2 mientras que el segundo día resolvieron la actividad 3, que describiremos más adelante, el primer día tardaron aproximadamente 30 minutos en completar las actividades correspondientes mientras que el segundo día tardaron aproximadamente una hora en completar la actividad 3.

Las preguntas realizadas en el test ponen en funcionamiento habilidades sobre modelización mediante un problema que admite variaciones en su solución, a través de preguntas directas, llenado de tablas y ubicación de gráficas en el plano.

Las habilidades sobre modelización que nos interesó detectar en este cuestionario son las siguientes: 1. Extracción y organización de la información, 2. Procesos de toma de decisiones, 3. Matematización de la información, 4. Interpretación de los resultados matemáticos, 5. Procesos de validación, 6. Presentación y explicación de los resultados y 7. El uso de la fuente de la información para tomar decisiones, ya sean tablas o gráficos.

La entrevista-intervención correspondiente al test se realizó 3 días después de que las participantes concluyeran el cuestionario. La entrevista duró aproximadamente una hora y se realizó de manera individual.

Las transcripciones de las entrevistas-intervención se realizaron sobre los audios y videos generados por zoom y se encuentran en las siguientes direcciones:

*Tabla 9: Enlaces de las transcripciones*

Entrevista-intervención	Enlace
Correspondiente al pre-test	<a href="https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/ElfFZ7XMEFZMo84_6pJPGSgBPIYy1tn56KI9H7OMJpmUNA?e=qXrsRm">https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/ElfFZ7XMEFZMo84_6pJPGSgBPIYy1tn56KI9H7OMJpmUNA?e=qXrsRm</a>
Correspondiente a test	<a href="https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EizjSZ2pzc9JoZzSV2y2jGABPWlaUUzkA5MwOMs7HC3grg?e=Xpnt5b">https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:f/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EizjSZ2pzc9JoZzSV2y2jGABPWlaUUzkA5MwOMs7HC3grg?e=Xpnt5b</a>

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta la descripción y los objetivos propuestos para cada uno de los recursos utilizados para obtener los datos de nuestra investigación.

### **3.3. DESCRIPCIÓN Y OBJETIVOS DE LAS ACTIVIDADES**

#### **3.3.1. Sobre los cuestionarios**

Como mencionamos anteriormente, los cuestionarios que utilizamos, tanto el pre-test como el test estaban organizados por las siguientes secciones:

1. **Agradecimiento y permisos:** Esta sección tenía como objetivo recuperar los permisos de las estudiantes sobre su participación en el llenado del cuestionario y en la entrevista-intervención.
2. **Breve tutorial del uso de GeoGebra:** Se les explicó a las participantes las herramientas de: Lápiz, ubicar de puntos en el plano, graficar expresiones algebraicas en el plano, llenado de tablas, escribir texto y acercar y alejar una gráfica en el plano para cambiar la imagen.
3. **Actividades:** En esta sección se encuentran las actividades que utilizamos para identificar las habilidades de las participantes. Cada actividad está organizada por preguntas. El pre-test se organiza en 4 actividades, mientras que el test en 3.

Enseguida pasaremos a comentar las preguntas y sus objetivos:

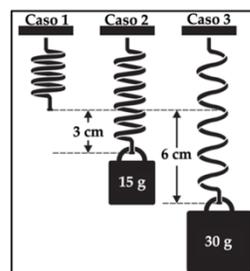
### 3.3.1.1. Pre-test

#### Actividad 1

En la Figura 11 se muestra el enunciado de la actividad 1. Esta consta de 12 preguntas con el objetivo de identificar la manera en cómo las estudiantes: 1. Detectan y utilizan la información relevante, 2. Escriben relaciones algebraicas y 3. Emplean formas de validación.

Figura 11: Actividad 1 del pre-test

En la figura se muestra un resorte que soporta hasta 60 g de peso sin que pierda su forma. A este resorte se le cuelgan algunos objetos de diferente peso. Observe que en el caso 1 todavía no se ha colgado algún objeto.



Tomado de: Pre-test GeoGebra

Nuestro foco de atención en las preguntas 1, 2 y 3 fue el reconocimiento de la información importante, lo cual tomó la forma de: Explore la imagen y comente sus observaciones, para identificar que existe una relación de proporcionalidad entre las cantidades y la condición particular del resorte, la que trata sobre el peso máximo que se le puede colgar.

El objetivo principal de las preguntas 4, 5, 6 y 7 es reconocer la forma en como construyen la expresión algebraica que describe a la relación de proporcionalidad que existe entre el peso que se le cuelga al resorte y la cantidad de centímetros que se estira, para luego construir su gráfica en la pregunta 8.

Con las preguntas 9, 10, y 11 se exploran formas de validación, las que consisten en comprobar si algunos datos cumplen o no con la relación de proporcionalidad, a

partir de: 1. verificar si éstos se ubican sobre la recta que describe la relación de proporcionalidad y 2. Utilizar la relación multiplicativa de la proporcionalidad.

En la pregunta 12 se piden algunas conclusiones sobre la actividad 1, para conocer cómo explican sus resultados y las consideraciones en las que se apoyan.

## Actividad 2

Esta actividad se organiza en 5 preguntas, que tienen la intención de conocer cómo las estudiantes: 1. Identifican la información relevante, 2. Organizan la información, 3. Plantean y utilizan estrategias y 4. Explican la solución y su enfoque para obtenerla.

En la Figura 12 mostramos el enunciado de la actividad 2 del pre-test.

*Figura 12: Actividad 2 del pre-test*

En la dulcería de un cine se ofrecen los siguientes combos:

Combo #1	Combo #2
	
L. 83.00	L. 242.00

Tomado de: Pre-test GeoGebra

Al igual que en la actividad 1, el reconocimiento de la información relevante y cómo esta se organiza, toma la forma de: Explore la imagen y comente sus observaciones (pregunta 1) y ¿Qué datos se ofrecen en la figura? (pregunta 2), a partir de estas preguntas se puede rescatar, por un lado, cuál es la información relevante, ya sea numérica como pictórica y por el otro, conocer la configuración de la situación.

El objetivo principal de las preguntas 3 y 4, es determinar la estrategia utilizada, esta puede ser enfatizada o no curricularmente, lo que daría indicios de los recursos con

los que cuentan las participantes. Para conocer el precio de un refresco y de una caja de palomitas, se puede utilizar: 1. Un sistema de ecuaciones lineales o 2. La estrategia que consiste en duplicar el combo #1 y comparar con el #2, para encontrar a partir de la diferencia el precio de un refresco.

Con la pregunta 5, se pretende colocar a las estudiantes en una situación en la que tengan la necesidad de ofrecer una explicación que recupere los elementos claves de la estrategia utilizada, de manera que estas instrucciones puedan ser entendidas por los demás.

### **Actividad 3**

El objetivo principal es conocer las estructuras de validación que pueden emerger de la solución de esta actividad, así como el uso simultáneo de varias condiciones.

Esta actividad se organiza en 6 preguntas y enseguida mostramos su enunciado.

*Figura 13: Actividad 3 del pre-test*

Sea  $n$  un número de la forma  $abcd$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son los dígitos del número  $n$ .

Encontremos todos los números  $n$  que cumplen las siguientes condiciones:

**Condición 1:**  $4000 \leq n < 6000$

**Condición 2:**  $n$  es múltiplo de 5

**Condición 3:**  $3 \leq b < c \leq d$

Tomado de: Pre-test GeoGebra

La pregunta 1 que dice: Describa cada condición con sus propias palabras, ofrece a las participantes herramientas de interpretación, debido a que cuando los estudiantes pueden explicar una situación en sus propias palabras, esto puede ser un indicador del tipo interpretación que hacen de la misma. Así mismo, la manera en que se presentan las condiciones mediante desigualdades también puede representar un reto para las participantes.

Un aspecto que hemos considerado de interés es conocer el tipo de estimación que puedan proporcionar las participantes, por lo que la pregunta 2 está en esa dirección y dice: Sin resolver la actividad, ¿cree que haya muchos números que cumplan estas condiciones al mismo tiempo?

Con la pregunta 3 exploramos la validación usada, el cual consiste en verificar que números de una lista cumplen o no con las tres condiciones al mismo tiempo.

Al poner en funcionamiento la interpretación y uso simultáneo de las tres condiciones, ya se puede solicitar la lista completa de los números que las cumplen, lo que se recupera con la pregunta 4 y 5.

Con la pregunta 6 exploramos una variación del problema, la que consiste en sumar una cantidad a los números que cumplen las tres condiciones al mismo tiempo, para confirmar la propiedad de cerradura, es decir, que la respuesta también pertenece a la lista, lo que ofrece oportunidades importantes de reflexión que pueden abundar en un tratamiento metacognitivo.

#### Actividad 4

En la Figura 14 se muestra el enunciado de la actividad 4, el objetivo principal es construir una expresión algebraica que describa el patrón asociado a la sucesión de los números que aparecen en la tabla.

*Figura 14: Actividad 4 del pre-test*

Los primeros dos números de una sucesión son 1 y 2.  
Cada término que sigue es la suma de todos los números de la sucesión anteriores a él.  
Se presentan algunas preguntas, para responder observe la tabla:

Posición	Término
1	<b>1</b>
2	<b>2</b>
3	<b>1 + 2 = 3</b>
4	<b>1 + 2 + 3 = 6</b>
5	<b>1 + 2 + 3 + 6 = 12</b>
⋮	⋮
20	¿?
⋮	⋮
<i>n</i>	¿?

## Tomado de: Pre-test GeoGebra

Esta actividad se organiza en 6 preguntas, las que describiremos enseguida:

Con las preguntas 1 y 2, se pretende conocer si la organización de la información permite obtener los elementos que siguen en la sucesión, para luego describir en la pregunta 3 ese comportamiento, lo que podría ser una base para la construcción de una expresión general.

La pregunta 4, que consiste en encontrar el término que estaría en la posición 20, podría crear la necesidad de utilizar un procedimiento que reduzca, tanto el trabajo procedimental, como el tiempo necesario para encontrar ese valor.

En la pregunta 5 se solicita la construcción de la expresión final, en este punto de la actividad se podrían tener elementos que lo permitan, pero esperamos que puedan identificar y describir la secuencia que siguen los números. Aspecto que sería una base para la construcción de modelos.

Con la pregunta 6 esperamos que escriban algunas observaciones o aspectos de la tarea que pueden ser relevantes, en consonancia con una actividad de tipo metacognitivo.

De manera general, podemos observar que al implementar estas actividades podemos verificar si las estudiantes poseen o no las condiciones que inicialmente hemos planteado, las que se relacionan con el desarrollo de las habilidades descritas en los puntos de contacto, que son: 1. Detección de la información relevante de la situación, 2. Organización de la información y 3. Desarrollo de procesos de verificación de los procedimientos y validación de las respuestas.

En el siguiente apartado describiremos las actividades correspondientes al test.

### 3.3.1.2. Test

#### Actividad 1

Esta actividad está formada por 3 preguntas, con las que se intenta conocer los elementos que intervienen en el proceso de reflexión sobre el problema planteado, estos, pueden estar influenciados por los datos proporcionados o incluso por la percepción personal del estudiante, debido a que las problemáticas son susceptibles de ser interpretados de forma distinta, en particular, cuando solicitamos pensar en la conveniencia personal frente a la situación, lo que será comentado en el apartado de resultados.

*Figura 15: Actividad 1 del test*

Una agencia de turismo ofrece tres opciones de pago para contratar un paquete turístico a Roatán por tres días y dos noches, las opciones de pago son las siguientes:

Opción 1	Opción 2	Opción 3
1 sólo pago de \$200	6 pagos de \$36 cada uno	12 pagos de \$19 cada uno

Tomado de: Test GeoGebra

Con la pregunta 1 se solicita el precio total de cada paquete turístico y con la pregunta 2 la diferencia con respecto a la opción 1, para ofrecer recursos que desde la matemática puedan intervenir en el proceso de toma de decisiones.

Con la pregunta 3, se pretende confrontar al proceso de toma de decisiones con las motivaciones personales de las participantes, lo que permitiría poder observar y reflexionar sobre los elementos que valoran al escoger una de las opciones de pago.

#### Actividad 2

El propósito de esta actividad es abundar en el proceso de opinión de las participantes, fundamentada en la organización de la información y en los

resultados matemáticos que puedan obtener, pero moderada por las características particulares de ellas.

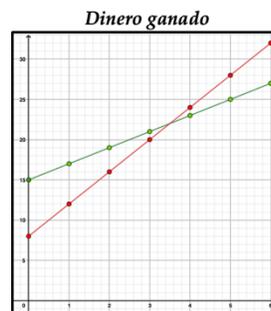
*Figura 16: Actividad 2 del test*

Una empresa de ventas ofrece dos opciones de pago a sus empleados:

**Opción A:** Pago inicial de \$15 más \$2 extra por hora.

**Opción B:** Pago inicial de \$8 más \$2 de comisión por objeto vendido.

Dos empleados, Sergio y Raúl, están interesados en las dos formas de pago. Sergio decide tomar la opción A, mientras que Raúl se interesa por la opción B, dado que él piensa que puede vender 2 artículos cada hora. En la imagen, se muestra la gráfica que representa la ganancia de Sergio (verde) y la gráfica que representa la ganancia de Raúl (rojo) dada su expectativa a lo largo del día.



*El eje horizontal representa el tiempo en horas y el eje vertical representa el dinero ganado hasta ese momento.*

Tomado de: Test GeoGebra

Con la pregunta 1, nos interesa conocer cómo la lectura de gráficos y el llenado de tablas permite recuperar la información relevante de los modelos propuestos, los que consideran la expectativa de venta de Raúl.

Con las siguientes preguntas se explora la manera en que las convicciones personales y los resultados matemáticos, podrían ser un recurso para establecer conclusiones sobre la problemática. Sabemos que estas consideraciones podrían proporcionar resultados distintos, aspecto que promueve la reflexión y por consiguiente mayor responsabilidad sobre las decisiones que se puedan tomar.

Este tipo de tratamiento podría ofrecer recursos matemáticos para: 1. Tomar decisiones considerando los resultados matemáticos, pero que pueden ser modificados si los participantes se ven involucrados y 2. Estrategias de solución a problemáticas que se encuentre cercanas a la de esta actividad.

### Actividad 3

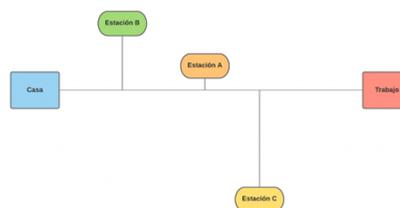
Con esta actividad, se pretende conocer de qué manera las estudiantes enfrentan una tarea de modelización cuando hacen uso de: 1. La extracción de la información relevante, 2. La organización de la información, 3. La construcción de modelos y 4. Procesos de validación, para identificar cómo los puntos de contacto propician el tránsito hacia la modelización.

En la siguiente figura, mostramos el enunciado de la actividad 3, la que se presenta a través de 12 preguntas, que discutiremos enseguida.

*Figura 17: Actividad 3 del test*

Su profesor le pide ayuda para poder decidir dónde comprar combustible, se sabe que la **estación A** se encuentra en la ruta normal de su casa al trabajo y está vendiendo combustible esta semana a \$ 1 por litro, mientras que la **estación B**, que está a 6 km de su ruta normal, está vendiendo combustible a \$ 0.95 por litro. La **estación C** vende el combustible más barato, a \$ 0.90 por litro, pero está a 9 km fuera de su ruta. Suponga que el automóvil de su profesor rinde 12 kilómetros por litro (km/l).  
Responda las siguientes preguntas:

*Diagrama que representa la ubicación de las estaciones de combustible*



Tomado de: Test GeoGebra

La pregunta 1 dice: Sin realizar algún cálculo, ¿en qué estación le conviene a su profesor comprar el combustible? ¿por qué?, con esto queremos conocer de qué manera la estimación podría permitir establecer un punto de partida para el desarrollo de la actividad.

Como antes hemos mencionado, la extracción y la organización de la información relevante, son dos de los tres puntos de contacto que proponemos, en esta dirección, con las preguntas 2 y 3 queremos observar cómo estas habilidades se ponen en funcionamiento para completar una tabla, la que recupera los siguientes parámetros: 1. El costo de combustible, 2. El gasto de combustible y 3. El costo por recorrido, para cada estación. Al conocer esta información, las estudiantes podrían tener elementos

para establecer en qué estación conviene comprar combustible de acuerdo con cada uno de los parámetros, aspecto que consideramos en las preguntas 4, 5 y 6.

Con la pregunta 7, que consiste en el llenado de la tabla que se muestra en la Figura 18, se pretende que las estudiantes puedan identificar, a partir de los casos particulares, 1. El comportamiento del gasto total cuando se compra combustible en una de las estaciones y 2. La opción que es más económica de acuerdo con la cantidad de combustible que se compra.

Con esta pregunta se intenta recuperar elementos de la organización de la información.

*Figura 18: Pregunta 7 de la Actividad 3 del test*

Cantidad de litros comprados	Dinero pagado	Costo por recorrido	Gasto total
10			
20			
30			
40			
x			

Tomado de: Test GeoGebra

Con la información obtenida en la pregunta 7, las estudiantes podrían: 1. Escribir un modelo para el gasto total (pregunta 8) y 2. Darse cuenta de que no siempre puede ser conveniente comprar combustible en la misma estación (pregunta 9). Estas preguntas pueden generar un conflicto interno en las estudiantes, dado que en el desarrollo de la actividad pueden notar que existen condiciones particulares para que el gasto total sea mínimo.

La pregunta 10 permite recuperar las gráficas del modelo para el gasto total, que incluye el pago por el combustible comprado y el dinero que se gasta en desplazarse a cada estación.

La adecuada lectura de estos gráficos podría ofrecer a las estudiantes elementos que les permitirían establecer las condiciones bajo las cuales es conveniente comprar combustible en cada estación, aspecto que se aborda en la pregunta 11. Con esta pregunta se indaga sobre la cantidad de combustible que se debe de comprar en cada estación para conocer los escenarios en dónde es más o menos económico comprar combustible, esto por cada estación.

Con la pregunta 12, que dice: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible es cada estación? se recupera la información obtenida a partir de la pregunta 11, esto para establecer los casos en que es conveniente comprar combustible en cada estación.

Como hemos visto, con este cuestionario se pretender conocer cómo: 1. La extracción de la información relevante, 2. La organización de la información, 3. La construcción de modelos y 4. Los procesos de verificación de los procedimientos y validación de los resultados, permiten que las estudiantes puedan desarrollar actividades que incluyen características propias de la modelización, así como conocer los elementos que podrían ser un reto al momento de enfrentar este tipo de tareas.

En el siguiente apartado describiremos el escenario de las entrevistas.

### ***3.3.2. Sobre las entrevistas***

A continuación, presentaremos la descripción de las entrevistas-intervención que realizamos en este trabajo, ambas se realizaron 3 días después de haber completado cada cuestionario y de manera individual con cada estudiante. La entrevista

correspondiente al pre-test se realizó en una sesión (sesión 1), mientras que la que correspondía al test en dos sesiones (sesión 2 y 3).

El objetivo de las entrevistas-intervención era profundizar en la discusión sobre las habilidades que intervinieron en el desarrollo de los cuestionarios, así como propiciar en las estudiantes una reflexión metacognitiva, que podría tener dos funciones: La primera en la dirección de lograr una explicación del procedimiento, lo que puede provocar en las estudiantes una necesidad de certeza sobre los argumentos que ofrecen cuando comunican su solución y la segunda, puede ser desarrollada a manera de auto validación.

Previo a cada entrevista, se revisó cada cuestionario para conocer las respuestas de las estudiantes y poder establecer la dirección que se seguiría. Primero, nos fijamos en las estrategias que habían utilizado, luego, en las actividades que lograron completar correctamente, por último, en las respuestas incompletas o incorrectas, para poder generar un espacio de discusión y de reflexión sobre sus producciones.

Además, se creó una clase nueva en GeoGebra, en donde las estudiantes pudieron colocar, en los casos que consideraron necesario, nuevas respuestas. También se programaron las sesiones en zoom que permite grabar la sesión y como producto de la grabación, esta plataforma genera dos tipos de archivo, uno con el audio y otro con el video, los que se utilizaron para la transcripción y el análisis de las producciones de las estudiantes.

Después de la revisión de los cuestionarios y de la selección de los aspectos identificados para promover la discusión, se realizó de manera individual cada entrevista. En la primera parte, se agradeció por la participación en el estudio y se solicitó el permiso para participar y poder grabar la sesión. En la segunda parte, la discusión giró en torno a identificar la manera cómo detectan y organizan la

información que para ellas fue relevante, así como para conocer en sus propias palabras las estrategias que utilizaron. Por último, se discutieron las respuestas incompletas o incorrectas, en donde se promovió la reflexión metacognitiva para poder superar las dificultades que generaron los cuestionarios y poder completarlos bajo sus esquemas particulares de solución, esta situación se aprovechó para hacer modificaciones a las condiciones del problema.

En el siguiente apartado, presentaremos el análisis y la discusión de los datos que se obtuvieron a partir de: 1. Las respuestas presentadas en los cuestionarios, 2. El video de las entrevistas-intervención y 3. La transcripción del audio de las entrevistas-intervención.

## 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección realizaremos el análisis de los cuestionarios y de las entrevistas-intervención. Primero, discutiremos sobre el desarrollo del pre-test y del test en el momento previo a cada entrevista, para establecer el tipo de producciones que realizan las estudiantes sin intervención del investigador. En un segundo momento, presentaremos lo relativo a cada entrevista-intervención, considerando las nuevas producciones que realizaron las participantes junto con el investigador.

### 4.2. ANTES DE CADA ENTREVISTA-INTERVENCIÓN

#### 4.2.1. *Sobre el pre-test*

En la sección de antecedentes describimos la experiencia mínima sobre resolución de problemas que tendrían los estudiantes que han sido formados en el sistema educativo de Honduras, las que se relacionan con: 1. La organización de la información, 2. Uso de recursos matemáticos elementales y 3. Poca experiencia en procesos de validación. Por lo que, en este apartado vamos a presentar el análisis de las actividades del pre-test que recuperen, de manera general, el trabajo de las participantes. Donde nuestro foco de atención estará en identificar las habilidades asociadas a: 1. Detectar la información relevante de la situación, 2. Organizar la información y 3. Desarrollar procesos de validación, que poseen las estudiantes que participaron en este estudio.

Además, sabemos que, la estudiante 1 cuenta con experiencia en olimpiadas de matemáticas, mientras que la estudiante 2 no tiene esta experiencia y para referirnos a ellas utilizaremos las etiquetas de E1 y E2, respectivamente.

A continuación, presentaremos el análisis y los resultados de los fragmentos de las actividades del pre-test, en donde consideramos que se detecta la presencia de las habilidades ligadas a los puntos de contacto que antes hemos mencionado.

#### 4.2.1.1. *Sobre la detección de la información relevante de la situación*

Para identificar los elementos sobre la detección de la información relevante, vamos a considerar dos indicadores, que son: 1. La selección de los datos importantes del problema, lo que sería una aproximación elemental a la problemática planteada y 2. La explicación sobre la situación del problema en las propias palabras de las estudiantes, lo que implica un esfuerzo por dar sentido a los datos. Estos recursos apuntan en la dirección de conocer el grado de comprensión inicial que podrían hacer de los problemas.

Enseguida, pasaremos a describir los momentos de las actividades en donde podemos observar la extracción de la información relevante. Iniciaremos con la pregunta 1 de la actividad 1.

**Tabla 10:** *Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 1 del pre-test*

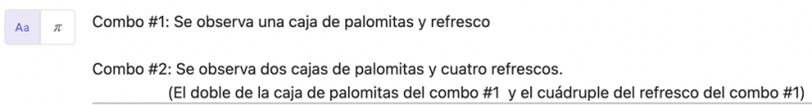
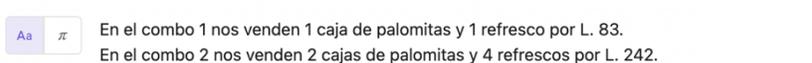
E1	<p>Tarea 7: Pregunta 1</p> <p>Explore la imagen y comente sus observaciones.</p> <p> Caso 1: El resorte no tiene ningún peso y no se ha estirado.            Caso 2: Al resorte se le colocó 15 g y se alargó 3 cm más que el Caso 1.            Caso 3: Al resorte se le colocó 30 g (el doble del peso que se colocó al Caso 2), se alargó 6 cm más que el Caso 1 y se alargó el doble del Caso 2.</p>
E2	<p>Tarea 7: Pregunta 1</p> <p>Explore la imagen y comente sus observaciones.</p> <p> Se podría decir que cada 15 g de peso que se añade al resorte este aumentará su tamaño por 3 cm. Entonces, en el caso 1 el resorte está en su tamaño y forma original, en el caso 2 se le agregan 15 g de peso y aumenta 3 cm de su tamaño. En el caso 3 se agregan 15 g más de peso, siendo ahora 30 g, por lo que aumenta el tamaño del resorte 3 cm, obteniendo en total 6 cm más de tamaño con respecto a su tamaño original.</p>

En la Tabla 10 mostramos las respuestas que corresponden a la pregunta 1, donde observamos que las estudiantes reconocen la información significativa, lo que les permite establecer relaciones de comparación entre las cantidades, pero en distintos niveles. Por un lado, E1 reconoce que el caso 3 corresponde al doble del caso 2, estableciendo una relación de comparación que podríamos llamar local, es decir, que

solo se comparan dos casos entre sí (el caso 3 es el doble que el caso 2). Mientras que E2, de principio establece la *razón* entre las cantidades, siendo esto una descripción más general de la situación. Estos acercamientos ofrecen maneras distintas de rescatar la información relevante del problema, lo que es un indicador de la comprensión particular que hacen de este y de los recursos que podrían utilizar en su solución.

Sobre el momento de la actividad 2 que corresponde a la detección de la información relevante, presentamos en la Tabla 11 las respuestas a la pregunta 1.

**Tabla 11:** Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 2 del pre-test

Tarea 23: Pregunta 1	
Explore la imagen y comente sus observaciones:	
E1	
Tarea 23: Pregunta 1	
Explore la imagen y comente sus observaciones:	
E2	

De esto observamos que ambas estudiantes recuperan los datos del problema. Por un lado, E1 reconoce relaciones de proporcionalidad entre los objetos que aparecen en los combos, pero no rescata el valor total de cada combo, porque para ella en ese momento de la solución probablemente no sea importante hacerlo. Mientras que E2 se enfoca en la composición de los combos y extrae toda la información numérica. Estas diferencias en la manera cómo se detecta la información relevante, parecen estar ligadas directamente a las posibles estrategias que utilizarán las estudiantes.

De la actividad 3, recuperamos las respuestas a la pregunta 1, donde consideramos los aspectos relativos al segundo indicador relacionado con la extracción de la información relevante, que consiste en solicitar a las estudiantes que describan las 3

condiciones del problema utilizando sus propias palabras, sus respuestas se presentan en la siguiente tabla:

*Tabla 12: Respuestas de la pregunta 1 de la Actividad 3*

E1	<b>Condición 1:</b> 4000 tiene que ser menor o igual a $n$ y $n$ debe ser menor que 6000, es decir que <b>los numero n están entre 4000 a 6000</b>
	<b>Condición 2:</b> El número $n$ tiene que ser múltiplo de 5, es decir que <b>el numero n tiene que terminar en 0 o en 5</b>
	<b>Condición 3:</b> 3 debe ser menor o igual a $b$ , el dígito $b$ tiene que ser menor que $c$ , y el dígito $c$ tiene que ser menor o igual a $d$
E2	<b>Condición 1:</b> Se nos dice que los números $n$ , son todos aquellos números mayores o iguales a 4000 y menores a 6000
	<b>Condición 2:</b> Se nos dice que los números $n$ , son todos aquellos números que se pueden multiplicar por 5, si estos números contienen a 5 varias veces o si <b>estos números terminan en 5 o 0</b>
	<b>Condición 3:</b> Se nos dice que los números $n$ , son todos los números que <b>su segundo dígito (<math>b</math>), es mayor o igual a 3 y que su tercer dígito (<math>c</math>) es mayor a su segundo dígito (<math>b</math>) y que su cuarto dígito (<math>d</math>) es mayor o igual a su tercer dígito (<math>c</math>)</b>

De las respuestas, podemos notar que las estudiantes no sólo rescatan la información relevante de las condiciones (extractos de color rojo), sino que nos señalan que esta información se transforma cuando la codifican en su lenguaje, esto ha sido un indicador relevante sobre la comprensión del problema.

Otro aspecto importante, se observa cuando E2 describe la condición 3 (color azul), donde rescata la relación que existe entre cada letra y su posición, lo que es de gran utilidad al resolver esta actividad porque le permite contar con un instrumento de información organizado.

A partir de los elementos descritos, podemos observar que: reconocer la información relevante no es una tarea que todos los estudiantes realizan de la misma manera. Notamos que cada una parece tener ciertas tendencias particulares, como es el caso de E1, que frecuentemente tiende a establecer comparaciones entre los datos de los problemas, lo que es un indicador del tipo de relaciones que son de su interés, debido a que con este tipo de relaciones ella tiene un mejor manejo del problema, lo

que adiciona un factor de bienestar en su trabajo. En el caso de E2 se imponen los recursos adquiridos en el salón de clase, con los que también se identifica y que tienen que ver con establecer relaciones de correspondencia en la información, generando confort sobre sus producciones.

Además, identificamos otro aspecto que interviene en la comprensión, este es la codificación de la información en las propias palabras de los estudiantes, cuando esta actividad se desarrolla, gran parte del uso que pueden darle a la información se verá asociado al discurso que establezcan. En el caso de E1, la codificación se sustentó en la lectura de las condiciones a través de la desigualdad que cumplían los números involucrados, mientras que E2 estableció relaciones entre las letras y las condiciones, lo que le permite discriminar números directamente.

#### 4.2.1.2. Sobre la organización de la información

Este aspecto se identifica cuando los estudiantes organizan la información en estructuras que podrían favorecer el uso de ciertas estrategias. Para observar este fenómeno utilizaremos las preguntas 2, 3 y 4 de la actividad 2.

Con la pregunta 2, se pretende conocer qué datos podrían considerar las estudiantes para la solución y de qué manera los organizan, lo que mostramos enseguida.

*Tabla 13: Respuestas a la pregunta 2 de la Actividad 2 del pre-test*

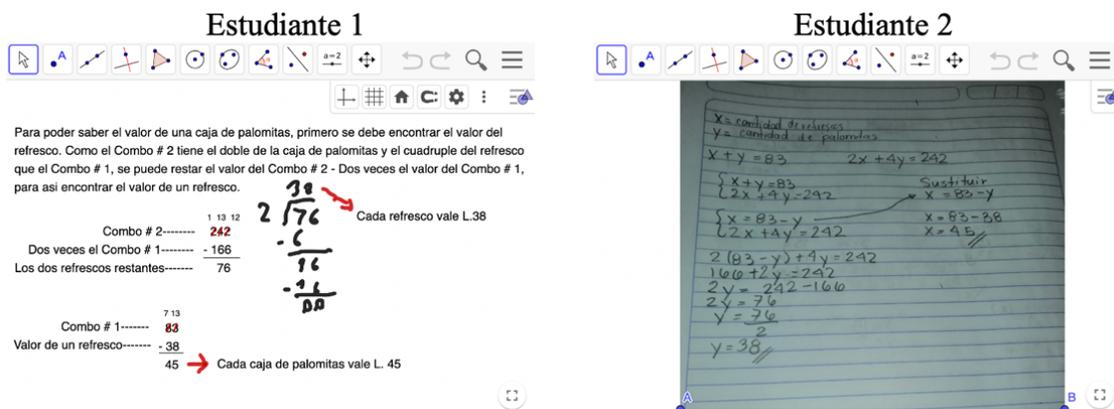
<b>E1</b>	<p>Tarea 24: Pregunta 2</p> <p>¿Qué datos se ofrecen en la figura?</p> <p> <input type="text" value="Aa"/> <input type="text" value="π"/>           Por una caja de palomitas y por un refresco el precio es de L. 83 y por dos cajas de palomitas y por cuatro refrescos el precio es de L. 242         </p>
<b>E2</b>	<p>Tarea 24: Pregunta 2</p> <p>¿Qué datos se ofrecen en la figura?</p> <p> <input type="text" value="Aa"/> <input type="text" value="π"/>           X= Cantidad de refrescos            Y= Cantidad de palomitas         </p> <p style="text-align: center;"> <math>x+y=83</math>  <math>2x+4y=242</math> </p>

En esta tarea, E1 describe la composición de los combos incorporando las relaciones numéricas que aparecen en el problema, pero aún no muestra los elementos que nos

permitan conocer cuál es la estrategia que utilizará, aunque en la respuesta a la pregunta 1 (considerada en el apartado anterior) identifica relaciones de compensación entre los objetos de los combos. Por su parte, E2 deja expresada su estrategia al organizar la información utilizando un sistema de ecuaciones lineales.

En la Figura 19, mostramos los procedimientos usados por las estudiantes para responder a las preguntas 3 y 4, de donde podemos identificar la estrategia que utilizaron para resolver el problema.

Figura 19: Respuestas de la pregunta 3 y 4 de la Actividad 2



Tomado de: Pre-test GeoGebra

Los antecedentes de las estudiantes explican la diferencia de los enfoques utilizados. Cuando E1 identifica la relación de comparación por compensación, reconoce una heurística que consiste en duplicar el combo #1 para obtener el combo #2, dándose cuenta de que al hacer esto habrá un excedente, en este caso son dos refrescos. En sus palabras se refiere a: “el valor del Combo #2 – Dos veces el valor del Combo #1, para así encontrar el valor de un refresco”. Este reconocimiento le permite resolver la actividad utilizando una estrategia que no es enfatizada curricularmente. Por otra parte, en el trabajo que realiza E2 reconocemos el uso de una estrategia que es enfatizada curricularmente, esta es construir un sistema de ecuaciones lineales, pero cuando la aplica no etiqueta adecuadamente las variables y esto no le permitió

encontrar los valores correctos. Este aspecto no tiene repercusión en la elección de la estrategia, pero si en los resultados, situación que se retoma y discute en la entrevista.

Con este ejemplo, podemos observar que la gama de estrategias que pueden utilizar las estudiantes podría depender de: 1. Los aspectos que consideran importantes cuando identifican la información relevante del problema y 2. Los antecedentes particulares de cada una.

#### 4.2.1.3. *Sobre los procesos de validación*

Para abordar los aspectos relativos a los procesos de validación, vamos a considerar las preguntas de las actividades que incluyan elementos que se relacionan con: 1. La explicación del enfoque utilizado, 2. La verificación de alguna propiedad y 3. La variación de las condiciones de los problemas.

Con la pregunta 5 de la actividad 2, pretendíamos identificar las actividades de metacognición que podrían estar realizando las estudiantes y que se refieren a las reflexiones sobre las sugerencias que le harían a otro estudiante para resolver esta actividad utilizando sus enfoques particulares, en la Tabla 14 mostramos sus respuestas.

*Tabla 14: Respuestas de la pregunta 5 de la Actividad 2*

---

	<b>Tarea 29: Pregunta 5</b>
	Si tuviera que explicar este problema a otro estudiante, ¿Qué sugerencias le daría para que pueda resolverlo?
<b>E1</b>	 Que primero debe encontrar el valor del refresco y luego el valor de la caja de palomitas.
<hr/>	
	<b>Tarea 29: Pregunta 5</b>
	Si tuviera que explicar este problema a otro estudiante, ¿Qué sugerencias le daría para que pueda resolverlo?
<b>E2</b>	 Le diría que usara un sistema de ecuaciones de 2 variables para resolver el problema, ya que en esta situación es la mejor forma de hacerlo y que lo resuelva por cualquiera de los métodos, ya sea sustitución o eliminación.

---

En esta etapa y previo a la entrevista, la sugerencia que ofrece E1 no proporciona los elementos claves para que otra persona pueda resolver el problema utilizando su estrategia, lo que pareciera mostrar una tendencia a hacer uso de una auto explicación, ya que para ella estos elementos ya están codificados y por tanto deberían ser entendidos por los demás. Por su parte, E2 propone un método para resolver el problema formulando un sistema de ecuaciones lineales, pero no explica cómo construir las ecuaciones de las que se obtiene la solución. Ambas explicaciones carecen de los puntos importantes que podrían ayudar a otra persona a replicar sus estrategias, lo que nos muestra que no están en condiciones de hacer un trabajo metacognitivo sobre sus soluciones.

En la pregunta 3 de la actividad 3 se presenta una lista de números, donde las estudiantes deben de determinar cuáles de ellos cumplen o no con las tres condiciones al mismo tiempo y a su vez, deben ofrecer una explicación para cada caso. En la tabla siguiente, mostramos uno de los casos que recupera, de manera general, la forma en que las estudiantes verifican si un número cumple o no con las tres condiciones propuestas.

*Tabla 15: Comprobación de las tres condiciones en un número*

¿El número 4445 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?	
E1	 No, aunque cumpla la condición 1 y la condición 2, pero no cumple la condición 3, porque el dígito b tiene que ser menor que el dígito c, no puede ser igual a c
¿El número 4445 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?	
E2	 No no cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 1 siendo menor que 6000, cumple también con la condición 2 al ser múltiplo de 5, sin embargo, no cumple con la condición 3 por el valor de sus dígitos.

La validación propuesta por E1 hace mención de que se cumplen las primeras dos condiciones y en su explicación detalla el aspecto que no se cumple. Por su parte E2, sólo menciona que se cumplen las primeras dos condiciones y explica por qué, pero no hay una explicación para el caso que no cumple, la condición 3.

Cuando las estudiantes conocen la estructura de los números que cumplen con las tres condiciones podrían estar en condiciones de encontrarlos a todos. Este aspecto se aborda con la pregunta 5 y 6 de la actividad 3.

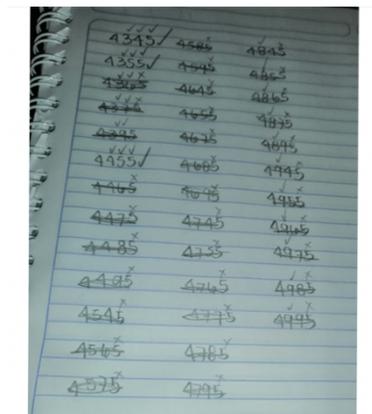
A continuación, mostramos la lista de números que propone cada estudiante y las razones que consideran para mencionar que esos son todos los que cumplen con las 3 condiciones.

**Tabla 16:** Respuestas de la pregunta 5 y 6 de la Actividad 3

E1	<p>Tarea 41: Pregunta 5</p> <p>Escriba todos los números que cumplen todas las condiciones al mismo tiempo.</p> <p>Aa π 4455 4345 5455 5345</p>
	<p>Tarea 42: Pregunta 6</p> <p>¿Porqué está seguro que sólo esos números cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo?</p> <p>Aa π Porque esos números se encuentran entre 4000 a 6000, son múltiplos de 5 y, 3 es menor o igual a b, el dígito b es menor que c, y el dígito c es menor o igual a d</p>
E2	<p>Tarea 41: Pregunta 5</p> <p>Escriba todos los números que cumplen todas las condiciones al mismo tiempo.</p> <p>Aa π 4345, 4355, 4455, 5345, 5355, 5455.</p>
	<p>Tarea 42: Pregunta 6</p> <p>¿Porqué está seguro que sólo esos números cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo?</p> <p>Aa π Estoy segura que cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo, ya que hice una lista con los números posibles que cumplan con la condición 1 y 2 y luego solo verifiqué que estos cumplieran la condición 3.</p>

La lista de números que proponen E1 no está completa, a pesar de conocer las condiciones y haberlas puesto en funcionamiento, esto se relaciona con la no persistencia en el proceso de validación que realizó. Mientras que E2, si encuentra la lista completa y la organiza de manera particular (de forma ascendente), además menciona que hizo una lista con los números posibles, dándonos la oportunidad de poder observar el proceso de validación que llevó a cabo. Enseguida mostramos su método de validación.

Figura 20: Lista de números posibles que propone E2



Tomado de: Pre-test GeoGebra

De la lista propuesta, podemos observar el proceso que realizó E2 para descartar los números que no cumplen con las tres condiciones. En la imagen identificamos dos tipos de marcas, las que están sobre los números y que se refieren a las condiciones que estos estarían cumpliendo y las otras se encuentran al lado de cada número y se asocian al cumplimiento de todas las condiciones. Además, podemos notar que E2 sólo verificó las condiciones para los dígitos b, c y d, dándose cuenta de que podía hacer variar el primer dígito, debido a que sabe que los números que cumplen sólo pueden iniciar en 4 o en 5. Esto muestra que el proceso de validación que realizó fue más fino que en el caso de E1, ya que se apropió de las condiciones y las usó para diferenciar las soluciones, lo que le permitió encontrar la lista completa.

Con la última pregunta de la actividad 3, abordamos el aspecto que se relaciona con la variación de las condiciones del problema, en dónde sugerimos sumarle 5 a cada número de la lista, para saber si el resultado también estaría en lista.

**Tabla 17: Respuestas a la variación propuesta para la Actividad 3**

---

Si a un número que cumple todas las condiciones al mismo tiempo le sumamos 5, ¿el resultado también cumpliría con toda tiempo?

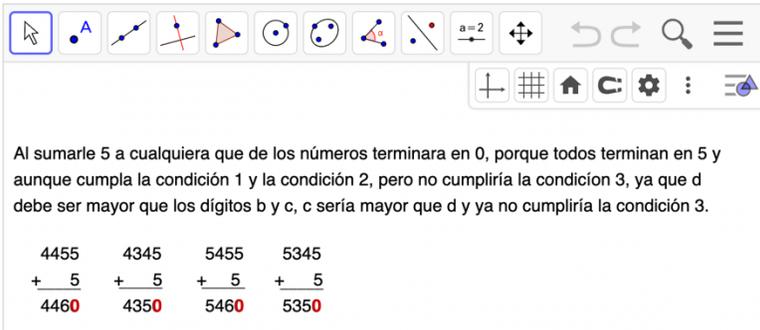
**Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.**

Aa  $\pi$  No, porque terminaría en 0 y no cumpliría la condición 3, ya que d debe ser mayor que los dígitos b y c, c sería la condición 3

---

**Tarea 44**

E1



Al sumarle 5 a cualquiera que de los números terminara en 0, porque todos terminan en 5 y aunque cumpla la condición 1 y la condición 2, pero no cumpliría la condición 3, ya que d debe ser mayor que los dígitos b y c, c sería mayor que d y ya no cumpliría la condición 3.

4455	4345	5455	5345
+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
4460	4350	5460	5350

---

Si a un número que cumple todas las condiciones al mismo tiempo le sumamos 5, ¿el resultado también cumpliría con todas las condiciones al mismo tiempo?

**Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.**

Aa  $\pi$  No, el resultado no cumpliría con todas las condiciones al mismo tiempo.

---

La explicación que las estudiantes ofrecen muestra distintos niveles de detalle. Observamos que E1 escribe las operaciones que realizó, mostrando más elementos para concluir que estos nuevos números no cumplirían con la condición 3. Mientras que E2, solo menciona que esos nuevos números no cumplen con las condiciones, pero en su explicación no escribe las condiciones que no se estarían cumpliendo.

Vemos que los procesos de validación que realizan las estudiantes tienen distintos objetivos, lo que nos indica que los recursos para validar que ponen en funcionamiento pueden estar ligados con las formas particulares de dar sentido a los problemas. E1 se caracteriza por ofrecer más detalles sobre los procedimientos que realiza, además, notamos que el proceso de validación que efectúa no es muy cuidadoso debido a una forma de sobre estimación de su trabajo, ya que no comprueba sus respuestas. Por su parte E2, en algunos casos realizó un proceso de validación más fino, lo que le permitió acertar con más frecuencia.

De manera general, con los resultados obtenidos con el pretest, podemos decir que ambas estudiantes tienen instaladas las habilidades asociadas a los puntos de contacto entre la resolución de problemas y la modelización, pero con enfoques distintos.

Tenemos que E1 se distingue por: 1. Encontrar relaciones de comparación cuando extrae la información relevante en los problemas planteados, 2. Organizar esta información utilizando estrategias que no son enfatizadas curricularmente, de las que logra con frecuencia buenos resultados, 3. Ofrecer más detalles en sus explicaciones y 4. Por realizar procesos de validación menos cuidadosos.

En el caso de E2, se caracteriza por: 1. Extraer adecuadamente la información relevante, 2. Utilizar con soltura estrategias enfatizadas curricularmente, 3. Ofrecer menos detalles en sus explicaciones y 4. Realizar procesos de validación más finos.

A continuación, presentaremos los elementos importantes que pusieron en funcionamiento las estudiantes cuando resolvieron las actividades correspondientes al test, que trata sobre problemas que consideran elementos de la modelización.

#### *4.2.2. Sobre el test*

En este apartado presentaremos los resultados, así como el análisis correspondiente al test, donde nuestra atención estará centrada en conocer cómo las estudiantes se enfrentaron a una tarea de modelización y cómo las habilidades asociadas a los puntos de contacto, declarados en este trabajo, se pusieron en funcionamiento para realizarlas.

En la sección del marco referencial proponemos los puntos de contacto entre el ciclo de modelización de Blum y Borromeo Ferri (2009) y la resolución de problemas de Honduras, donde consideramos que el establecimiento del modelo se relaciona con la organización de la información y con el uso de estrategias.

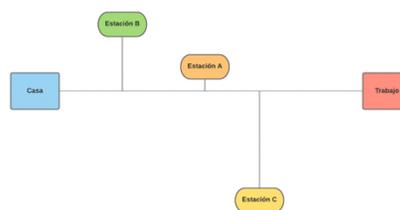
A continuación, mostraremos el trabajo que las estudiantes realizaron al responder a las preguntas de la actividad 3 del test, para observar la producción que realizan de manera individual y poder establecer hasta qué punto sus habilidades les permiten enfrentar tareas de modelización.

La actividad 3 del test se plantea a través del siguiente contexto y seguidamente mostraremos sus producciones.

**Figura 21:** Actividad 3 del test

Su profesor le pide ayuda para poder decidir dónde comprar combustible, se sabe que la **estación A** se encuentra en la ruta normal de su casa al trabajo y está vendiendo combustible esta semana a \$ 1 por litro, mientras que la **estación B**, que está a 6 km de su ruta normal, está vendiendo combustible a \$ 0.95 por litro. La **estación C** vende el combustible más barato, a \$ 0.90 por litro, pero está a 9 km fuera de su ruta. Suponga que el automóvil de su profesor rinde 12 kilómetros por litro (km/l).  
Responda las siguientes preguntas:

**Diagrama que representa la ubicación de las estaciones de combustible**



Tomado de: Test GeoGebra

Cómo punto de partida para el desarrollo de esta actividad, consideramos preguntar a las estudiantes por la estación en que conviene comprar combustible. De la lectura directa del problema ellas conocen el precio del combustible en cada estación y la distancia que se debe recorrer para llegar a cada una. En la Tabla 18 se muestran sus respuestas.

**Tabla 18:** Respuestas a la pregunta 1 de la actividad 3 del test

Tarea 21: Pregunta 1	
E1	Sin realizar algún cálculo, ¿en qué estación le conviene a su profesor comprar el combustible? ¿por qué?
	<input type="text" value="Aa"/> <input type="text" value="π"/> La Estación A, por que se encuentra en la ruta normal de su casa al trabajo y no recorrería km extra
Tarea 21: Pregunta 1	
E2	Sin realizar algún cálculo, ¿en qué estación le conviene a su profesor comprar el combustible? ¿por qué?
	<input type="text" value="Aa"/> <input type="text" value="π"/> Considero que le conviene mas la estacion A, ya que esta en su ruta normal, por lo que no conducirá más kilómetros de lo necesario, gastando menos combustible.

En estas respuestas podemos ver que ambas estudiantes consideran que la estación A es la más conveniente y hacen referencia a la distancia que hay que recorrer, pero

E2 menciona que de esa manera se gastaría menos combustible, considerando que el gasto de combustible es un elemento importante por considerar al momento de tomar una decisión, debido a que está asociado a un costo adicional.

En lo relativo a la extracción de la información, en la pregunta 3 las estudiantes deben completar una tabla a partir de los datos del problema.

*Tabla 19: Respuestas a la pregunta 3 del test*

	Estacion	Costo de combustible	Gasto de combustible	Costo por recorrido
E1	A	\$1	0 litros	0 km
	B	\$0.95	1 litro	12 km en ida y regreso
	C	\$0.90	1 litro y 3/4	16 km en ida y regreso
	Estacion	Costo de combustible	Gasto de combustible	Costo por recorrido
E2	A	\$1	0 litros de combustible	\$0
	B	\$0.95	1/2 litro de combustible	\$6
	C	\$0.90	3/4 litro de combustible	\$8

Las respuestas sobre el procesamiento de la información fueron diversas, ya que una parte de esta se obtiene directamente, pero en algunas columnas esta información debe ser procesada. Observamos que E1 no realiza los cálculos correspondientes al costo por recorrido, lo que podría significar que no comprende la tarea, además, menciona que para llegar a la estación C se deben recorrer 16 km en total, siendo 18 la cantidad correcta, por lo tanto, el gasto de combustible que propone para esta estación tampoco es correcto. Mientras que E2, no reconoce la tarea correspondiente al costo por recorrido. Esto pudo suceder porque las estudiantes no comprendieron adecuadamente la tarea. Este aspecto se retoma y discute en la entrevista.

En la pregunta 7 se aborda la organización de la información relevante, donde las estudiantes deben de completar 3 tablas (una para cada estación) con el objetivo de establecer un modelo para el gasto total.

Con esta pregunta, se espera que las estudiantes al completar los datos de la tabla puedan darse cuenta de los elementos que se consideran para escribir una expresión algebraica que describa de manera general el gasto total de combustible, por lo que al final de la tabla se introduce una incógnita.

*Tabla 20: Respuestas de la pregunta 7 de la actividad 3 del test*

	Cantidad de litros comprados	Dinero pagado	Costo por recorrido	Gasto total
E1	10	\$9	1 litro y 3/4	\$9
	20	\$18	1 litro y 3/4	\$18
	30	\$27	1 litro y 3/4	\$27
	40	\$36	1 litro y 3/4	\$36
	x	$X * 0.90$	1 litro y 3/4	$X * 0.90$
	Cantidad de litros comprados	Dinero pagado	Costo por recorrido	Gasto total
E2	10	\$9	\$8	\$17
	20	\$18	\$8	\$26
	30	\$27	\$8	\$35
	40	\$36	\$8	\$44
	x	\$0.90	\$8	\$122

Con respecto al dinero pagado por el combustible comprado, ambas estudiantes calculan correctamente estas cantidades, pero E1 establece una expresión general para este caso, que es  $X * 0.90$ . Mientras que E2 solo escribe el precio del combustible en la estación C. Este aspecto es de mucha importancia al momento de construir los modelos y jugará un papel importante en la discusión con el investigador.

Una consideración muy importante fue la que hicieron en la columna del costo por recorrido, a pesar de haber recuperado de manera incorrecta esta información, ambas se dieron cuenta de que esa cantidad es constante y no depende de la cantidad de combustible que se compre.

En relación con el gasto total, E1 solo transcribe la información de la columna del dinero pagado, ya que en el costo por recorrido consideró distancias y estas no se pueden sumar con el dinero pagado. Por su parte, E2 se da cuenta de que: Gasto total ( Dinero pagado ) costo por recorrido, pero al no calcular de manera correcta el costo por recorrido, los resultados para el gasto total no son correctos y para el caso general, la estudiante suma todos los valores anteriores.

De esto podemos notar que, a pesar de recuperar la información relevante, no lograron procesarla adecuadamente, lo que no les permitió construir las expresiones que describen el gasto total.

Con la pregunta 8 se solicita escribir una expresión que represente el gasto total para cada estación, con el objetivo de desarrollar el proceso de matematización del problema.

*Tabla 21: Respuestas a la pregunta 8 de la actividad 3 del test*

	Estación A X Cantidad de litros de combustible que se compran 1 El precio de cada litro de combustible Expresión: $X * 1$	Estación B X Cantidad de litros de combustibles que se compran 0.95 El precio de cada litro de combustible Expresión: $X * 0.95$	Estación C X Cantidad de litros de combustible que se compran 0.90 El precio de cada litro de combustible Expresión: $X * 0.90$
E2	Estación A: $100x=100y$	Estación B: $100x=120y$	Estación C: $100x=122y$

A partir de estas respuestas, nos damos cuenta de que la explicación que ofrece E1 da más detalles sobre los elementos que consideró para escribir sus expresiones. Mientras que E2 presenta tres expresiones, pero no describe lo que para ella significan, al respecto podemos observar una igualdad que considera la suma de los valores obtenidos para el gasto total en los casos particulares.

Es importante mencionar que E1 no contestó las preguntas siguientes, pero en la entrevista-intervención fueron completadas. En adelante sólo mostraremos el trabajo realizado por E2.

En la pregunta 11 se plantea la siguiente situación: Suponga que el tanque de combustible del vehículo de su profesor tiene una capacidad de 40 litros, de lo que debían de responder las siguientes preguntas:

*Figura 22: Respuestas de E2 a la pregunta 11 de la actividad 3 del test*

¿Cual es la cantidad de combustible que se puede comprar en la estación A de modo que esta sea la opción <b>más económica</b> ?	¿Para qué cantidades de combustible resulta <b>menos económico</b> comprar en la estación A?	¿Cual es la cantidad de combustible que se puede comprar en la estación B de modo que esta sea la opción <b>más económica</b> ?	¿Para qué cantidades de combustible resulta <b>menos económico</b> comprar en la estación B?
Serían 25 litros de combustible	Para las cantidades menores a 25 litros y las mayores a 25.	30 litros de combustible	Para las cantidades menores a 25 litros y las mayores a 25.
¿Cual es la cantidad de combustible que se puede comprar en la estación C de modo que esta sea la opción <b>más económica</b> ?	¿Para qué cantidades de combustible resulta <b>menos económico</b> comprar en la estación C?		
31 litros de combustible			

Tomado de: Test GeoGebra

Sospechamos que el recurso que E2 utilizó para obtener la información mostrada en la Figura 22 fueron las tablas que completó en la pregunta 7. Donde después de analizar los datos de la columna que corresponde al dinero pagado, pudo observar que para ciertas cantidades de combustible era conveniente comprar en distintas estaciones. Aunque el análisis que utilizó no fue del todo correcto, da indicios de los recursos que utiliza para poder concluir, en este caso las tablas.

Del desarrollo de esta actividad, podemos decir que, a pesar de detectar y organizar la información relevante, las estudiantes no realizaron procesos continuos de validación. En el caso de E1, observamos que presentó errores que pudieron prevenirse si hubiera verificado sus respuestas con los datos que el problema ofrece de manera directa. Mientras que E2, a pesar de no obtener un modelo que le permitiera rescatar más información sobre la situación, utilizó las tablas para poder concluir sobre los casos en que cada estación era la opción más económica, de su trabajo notamos que aprovechó los pocos recursos con los que contaba.

De manera general, podemos concluir que poseer las habilidades asociadas a los puntos de contacto, declarados en este trabajo, requieren de identificar y procesar adecuadamente la información relevante para proceder a su matematización, esta condición es necesaria, pero no suficiente para poder realizar un tránsito hacia la modelización.

En las entrevistas-intervención retomaremos los aspectos que representaron un reto para las estudiantes en el tratamiento de la información, para ofrecer un espacio de reflexión apoyada en actividades metacognitivas sobre sus producciones, donde, junto con el investigador, puedan superarlos y así poder identificar los elementos que hacen falta para que ambas puedan realizar tareas que las acerquen a la modelización en los términos antes mencionados.

### **4.3. ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS-INTERVENCIÓN**

A partir del trabajo realizado en el test, consideramos que, para poder hacer el tránsito hacia la modelización, no basta con adquirir las habilidades sobre resolución de problemas asociadas a los puntos de contacto declarados en este trabajo, debido a que resolver correctamente o incluso detectar estrategias exitosas, no impulsa a las estudiantes a profundizar en la validación que se encuentra más allá de sus resultados inmediatos.

En esta sección abordamos los resultados obtenidos de las entrevistas-intervención que realizamos con las estudiantes, las que se apoyaron en las respuestas correctas, incorrectas e incompletas, tanto del pre-test como del test para promover una reflexión. En particular, en esta sección nuestro foco de atención estará en identificar las actividades que podrían ser reconocidas como un acercamiento a la modelización, además de mostrar cómo el investigador promovió la necesidad del

desarrollo de procesos metacognitivos que les permitieran reflexionar sobre sus producciones.

#### **4.3.1. Sobre el pre-test**

En los resultados del pre-test, previo a las entrevistas-intervención, las estudiantes mostraron diferentes enfoques en la forma como abordaron los problemas. Además, pudimos notar que los recursos sobre resolución de problemas que pusieron en marcha dependieron de los elementos que consideraron importantes al extraer la información de los problemas y de sus antecedentes y visiones particulares.

A continuación, presentaremos algunos fragmentos de cada entrevista-intervención correspondiente al pre-test y que se realizó en una sesión, que le llamaremos sesión 1, en dónde la discusión con cada estudiante ofreció más detalles de las estrategias que utilizaron y sobre los procesos de metacognición que promovió el investigador para poder, por un lado, obtener una explicación clara de los procedimientos de las estudiantes que les permitiera tener más control sobre sus acciones y estrategias, por el otro, realizar procesos de validación que van más allá de verificar sus resultados inmediatos, lo que les ayudará a obtener soluciones adecuadas para dichos problemas.

Iniciaremos nuestra discusión comentando los aspectos relevantes identificados cuando discutimos la actividad 2 del pre-test.

En el Fragmento 1, correspondiente a la actividad 2 del pre-test, mostramos un momento de la entrevista, dónde se le pide a E1 que mencione *en qué se fijó para resolver el problema utilizando esa estrategia*, a lo que ella responde:

##### ***Fragmento 1: Entrevista-intervención Actividad 2 del pre-test Sesión 1, E1***

(161) **E1:** Bueno, porque como el combo 1 traía una caja de palomitas y un refresco, y el combo 2 me trae dos palomitas, que era el doble del de combo 1 y el cuádruple de los refrescos, entonces pensé yo, bueno, ... puedo completar, es decir pues, ... que multipliqué la cantidad

del precio que costó, ... los 83 lempiras que es la caja y el refresco, para más o menos ir completando.

(162) **I:** Ok, ¿cómo es eso de completar?

(163) **E1:** Es decir, el valor, pues, ... de una caja de palomitas, que al duplicarlo ya me quedan dos cajas de palomitas y los refrescos, ... me restarían dos refrescos del combo, se multiplica dos veces el combo, para ir como, no sé cómo explicarlo, a veces no entiendo a mi lógica, pero a veces me resulta pensar así

(164) **I:** Yo la entiendo, vamos bien.

(165) **E1:** Entonces, para completar más o menos, lo que era, más o menos, para lograr a una igualdad entre el combo 1 y el combo 2.

(166) **I:** Ok, Usted dice que duplicó el combo 1 y lo comparó con el combo 2.

(167) **E1:** Sí y al restarlo, me quedaron los dos refrescos.

(168) **I:** Le quedaban los refrescos, entonces al restarlo, ¿usted podría obtener qué...?

(169) **E1:** El valor de un refresco, porque a lo que queda como al restarle, ya solo me quedaron dos refrescos y la respuesta que tenía sería dividirla entre 2, porque eran los dos refrescos que me sobraban.

(170) **I:** Ok, Excelente, divide entre 2 porque eran los dos refrescos que le sobraban. Entonces, ... ahora ya sabiendo eso, ... ¿cómo le diría a un compañero suyo? Puedes pensar en esto, ¿cómo lo haría? ¿En qué cosas le pediría que piense él para que pueda resolver la actividad?

(171) **E1:** Que mire, ... que intente comparar el combo 1 con el combo 2, para que pueda ver una relación entre el y hacer un procedimiento un poco ya más corto, intentar ya duplicar el combo 1 para poder encontrar ya la cantidad.

(172) **I:** ¿Cuál cantidad?

(173) **E1:** La de los refrescos ... para el caso que yo utilicé que, primero para poder encontrar el valor de las palomitas, primero tuve que encontrar el valor de refresco.

De lo anterior, observamos que E1 se da cuenta de que: explicar su procedimiento puede ser una tarea compleja (*línea 163 - S1 E1*) que implica ordenar sus ideas de manera que puedan ser transmitidas con claridad.

A partir de las preguntas planteadas por el investigador: (¿cómo es eso de completar?) E1 a largo de la discusión, logra explicar su estrategia. Además, podemos notar que el investigador, a través de sus preguntas: (¿podría obtener qué ... ¿En qué cosas le pediría que piense él para que pueda resolver la actividad? ... ¿Cuál cantidad?) empuja a E1 para que pueda aclarar sus ideas y sea capaz de poder explicar su enfoque. Este tipo de acercamientos, a través de un diálogo continuo con el profesor con la intención de que desarrollen una autoexigencia sobre su producción, permite que los estudiantes puedan establecer un esquema mental que

les proporcione los recursos necesarios para que ordenen sus ideas y expliquen sus procedimientos y enfoque.

Cuando discutimos con E2 la actividad 2 del pre-test, se le planteó la siguiente pregunta: *¿qué elementos del problema le permitieron pensar en un sistema de ecuaciones?* ella respondió:

***Fragmento 2: Entrevista-intervención Actividad 2 del pre-test Sesión 1, E2***

- (106) **E2:** Me di cuenta (de) que podíamos hacer un sistema de ecuaciones de 2 variables y resolverlo rápido...
- (107) **E2:** Me fijé que, ... para empezar... que había dos situaciones... dos situaciones diferentes, pero que implicaban las mismas variables. Entonces, si nos organizamos por variables, tenemos a ) por un lado y a \* por el otro, entonces ) podría representar una de las cosas que nos venden, en este caso, las palomitas, así como lo puse ahí y el otro sería la cantidad de refrescos ... porque nos están vendiendo una cantidad determinada de cada cosa por un precio específico. Entonces, llegué ... entonces, vi que se podían hacer dos... dos ecuaciones distintas y hacerlas en un sistema.

En el diálogo que mostramos, observamos que E2 ya reconoce una estrategia de solución, la que es enfatizada curricularmente, esto le proporciona mucha seguridad sobre el enfoque que utiliza para resolver el problema, ya que anteriormente lo ha utilizado y sabe que funciona.

Cuando el investigador le pide a E2 que explique la estrategia que utilizó para resolver la actividad 2 del pre-test, ella tiene una duda y en el transcurso de su explicación, se da cuenta de que no había construido las ecuaciones en función de las etiquetas que había elegido para las variables (*línea 150 – S1 E2*), como vemos en el siguiente diálogo:

***Fragmento 3: Entrevista-intervención Actividad 2 del pre-test Sesión 1, E2***

- (150) **E2:** Pero... ahora sí tengo una duda, no sé si lo resolví bien porque, es que dice que 38 vendría siendo el precio de las palomitas porque... creo que las... las ecuaciones que hice si estaban bien, que serían ) + \* , -. y tenemos que ) son la cantidad de refrescos, un refresco y una palomita, es la primera. La segunda es / ) + 0\* , /0/ . Estaría siendo la del segundo combo, 2... x... así, ahí está el error
- (151) **I:** Pero ¿cómo podríamos corregir ese error?
- (152) **E2:** Sería 0) + / \*

La duda en la explicación de E2 produjo la necesidad de verificar los procedimientos usados, permitiéndole tener un planteamiento consistente con la interpretación inicial (*línea 152 – S1 E2*). En algunos casos, la certeza sobre un método puede provocar que el estudiante se resista al cambio o a la explicitación de su estrategia, como sucedió en el caso de la estudiante E2, quien a partir de las preguntas desarrolló un diálogo interno para establecer un proceso de validación más fino que el desarrollado inicialmente, ya que el error que presentó se encontraba en el proceso de construcción de las ecuaciones, esto es, en la consistencia de las etiquetas que utilizó para las variables y no en el enfoque. De esto, podemos decir que colocar a los estudiantes en la situación donde deben explicar sus procedimientos, podría provocar en ellos la necesidad de realizar tareas de validación para obtener respuestas que sean consistentes con sus estrategias, actividad propicia para el trabajo con modelos que deben justificar la estructura del problema.

Ahora discutiremos lo relativo a la parte de la entrevista-intervención correspondiente a la actividad 3 del pre-test.

Para esta actividad, el objetivo principal es conocer las estructuras de validación que pueden emerger de la solución de esta, así como el uso simultáneo de varias condiciones sobre el problema.

En la pregunta 3 de esta actividad se proponen una lista de números y se les pide a las estudiantes que verifiquen cuáles de ellos cumplen o no con las condiciones. En el diálogo con E1, identificamos lo que ella entiende por validación.

***Fragmento 4:** Entrevista-intervención Actividad 3 del pre-test Sesión 1, E1*

(222) **I:** Con lo dicho anteriormente, ¿cree que este número (5544) funciona? ¿Por qué?

(223) **E1:** No, porque ya no cumplirá (la) condición 2, porque tiene que ser múltiplo de 5 y 4 no es múltiplo de 5.

(224) **I:** Ok

(225) **E1:** Cualquier número que termine en 4 no (es) tiene múltiplo de 5.

- (226) **I:** Solo se fijó en ese detalle y no verdad, no cumplen, excelente, cuando usted realizó esta actividad, ¿Usted verificó los resultados o no los verificó?
- (227) **E1:** Sí, lo verifiqué
- (228) **I:** Bien, excelente, entonces ¿podríamos decir que usted hizo una tarea de verificación de cada una de las respuestas que Usted colocó?
- (229) **E1:** Sí, se podría decir
- (230) **I:** ¿Qué tanto verificó? ¿una vez, dos veces?
- (231) **E1:** Lo dice dos veces.
- (232) **I:** Dos veces.
- (233) **E1:** Leí cada actividad dos veces.

La intervención del investigador se centra nuevamente en preguntas que empujen a la estudiante en la dirección de aclarar sus procedimientos (¿cree que este número (5544) funciona? ¿Por qué? ... ¿Usted verificó los resultados o no los verificó? ...). Además, se le preguntó a E1: ¿Qué tanto verificó? ¿una vez, dos veces? (línea 230 – S1 E1) Ella responde que lo hizo dos veces (línea 231 – S1 E1) y luego aclara que leyó cada actividad dos veces (línea 233 – S1 E1), de lo que podemos advertir que para E1, validar es leer una actividad con cuidado. Esto se relaciona con lo identificado en el pre-test, antes de la entrevista-intervención, donde notamos que los procesos de validación que realizó no fueron muy finos, en parte por su exceso de autoconfianza y comodidad con el tipo de estrategias que utiliza.

Continuando con los diálogos con E1 tenemos el siguiente fragmento:

***Fragmento 5:** Entrevista-intervención Actividad 3 del pre-test Sesión 1, E1*

- (241) **I:** Por ejemplo, en el caso dos (4345). ¿Cómo me quedaría si le sumó 10?
- (242) **E1:** Quedaría 4355.
- (243) **I:** ¿Podría ser igual C y D?
- (244) **E1:** Me parece que sí, me dice que D puede ser igual o mayor, me parece, igual o mayor que C
- (245) **I:** Y cumpliría ese valor entonces.
- (246) **E1:** En este caso, si ... sí lo cumpliría este caso.
- (247) **I:** Sí lo cumpliría el número 4355, vamos a ver si lo colocó.
- (248) **E1:** Aquí está, aquí está.
- (249) **I:** 4355, ¿dónde está?
- (250) **E1:** 4000.
- (251) **I:** Sí, porque estamos en este caso (4355)
- (252) **E1:** OK, 4355 no lo coloqué.

- (253) I: No lo colocó, pero si cumple para usted. Verifiquemos las condiciones. El número puede escribirlo ahí en algún lado de su cuaderno. 4355, ... verifiquemos que cumple la condición 1, ¿si cumple las condiciones?, no sé.
- (254) I: ¿Cómo haría esa validación usted para saber si ese número cumple o no? ¿Qué haría?
- (255) E1: Bueno, en ese caso sí cumpliría la condición 1, porque los números N están en medio de 4000 y 6000 entonces cumpliría la condición 1. Ya la condición 2 si la cumple porque termina en 5 y es un múltiplo de 5.
- (256) I: Ok
- (257) E1: Y la condición 3, ya me tocaría separar, escribir aquí, escribir los dígitos, los dígitos B, C y D para ver si cumple la relación.
- (258) I: OK, usted me dice si la cumple o no.
- (259) E1: Si cumpliría la relación. Aquí sí cumpliría la relación.
- (265) E1: Y también sería, ... me faltó de 5355 también, me faltan dos números.

En este momento de la entrevista-intervención, abordamos la variación a las condiciones del problema donde el investigador plantea las siguientes preguntas: ¿Cómo me quedaría si le sumó 10? ... ¿si cumple las condiciones? Lo que provoca que la estudiante conteste de manera que valida el proceso (*línea 255 – S1 E1*), lo que permite una reflexión metacognitiva que expresa de la siguiente manera: “Y la condición 3, ya me tocaría separar, escribir aquí, escribir los dígitos, los dígitos B, C y D para ver si cumple la relación” (*línea 257 – S1 E1*). Con esto E1 se dio cuenta de que ese número no aparecía en la lista final que escribió, debido a que no consideró los casos en donde el tercer y el cuarto dígito son iguales y en la (*línea 265 – S1 E1*) recupera esa idea y menciona que le faltó el número 5355, completando adecuadamente la actividad. En este diálogo observamos que las preguntas que pueden hacer los profesores además de ir en la dirección de que los estudiantes aclaren sus ideas, también podrían motivar el uso de procesos de validación para que ellos se den cuenta por sí mismos cuando un resultado no es correcto o incluso cuando su respuesta no está completa.

En el caso de E2, mostramos la explicación que ofrece sobre la estrategia que utilizó, ya que resolvió adecuadamente esta actividad.

**Fragmento 6:** Entrevista-intervención Actividad 3 del pre-test Sesión 1, E2

- (202) I: ¿Cómo llegó a este orden?

- (203) **E2:** Bien, lo que hice en sí fue la forma en que en que lo resolví, anoté ... bueno, en mi cuaderno utilicé y puse la lista de las posibles respuestas, analicé que 0 no podría ser porque no cumpliría la tercera parte, ... de los números terminados en 0 no podrían ser, porque no, ... no cumplían con la tercera parte de la tercera condición, es decir, con la condición de d.
- (204) **I:** Usted me dice que los múltiplos de 5, ... me dijo que terminaban en 5 o 0, por lo tanto d.
- (205) **E2:** Entonces, por lo tanto, tomé solo los que terminaban en 5 y entonces empecé con 4,345 ese fue el primero que encontré.
- (206) **I:** Porque encontró, ... porqué ese primero ... ese número, porque si es bien curioso este orden la verdad, y me gustaría saber por qué ese orden.
- (207) **E2:** Si, lo que hice fue, ... como decían los mayores o iguales a 3, pero si ponía como primer dígito 3 no iba a caber dentro de la primera condición ... entonces me fui por 4, entonces el primer dígito que puse fue 4, luego es como que formé el número tomando cada una de las condiciones, luego me fui por la segunda condición, bueno, ya sabemos que es múltiplo de 5, así que eso estaba bien, tenía que terminar el número en 5, entonces también me fui con la segunda parte de la tercera condición que me decían que ... el tercer dígito tendría que ser mayor a su segundo dígito, entonces el ...
- (208) **I:** Ya tenía cuatro y 3 y al final tenía 5.
- (209) **E2:** Exacto, entonces ya solo me encontró un mayor o igual a ... permítame, la condición 3 ... si, mayor o igual a su tercer dígito ... el d, entonces, así fue como lo resolví y luego encontré más que todo el patrón, porque iba analizando 4345 4355 así, de 10 en 10, pero luego me di cuenta que no, no todos iban a cumplir, entonces iba eliminando y al final encontré ... solo lo probé con 4000 porque con 5000 iba a ser lo mismo, entonces me dio 4345, 4355 4460 y perdón 4455, entonces de ahí solo lo puse con 5000 y me salieron los 6 dígitos ... creo que solo eso sabían, según mis, ... mi cálculo.
- (210) **I:** Si solo estos hay, usted los escribió ... osea, este orden que tiene acá fue el orden en el que los encontró.
- (211) **E2:** Exacto, así es. Porque hice una lista con los números 4345 de 10 en 10 entonces iba tachando los números y en sí solo verificando que cumplieran la tercera condición porque ya había cumplido las dos condiciones primeras al seleccionar la lista de números ... entonces ya sólo me quedó probar la tercera condición y encontré los 3 de 4000 y solo agregué los otros 3 de 5000.

Podemos observar que E2 tiene clara la estrategia que utilizó para resolver este problema, que consiste en formar los números a partir de las condiciones. De la (*línea 207 – S1 E2*) podemos extraer el siguiente diálogo: “entonces me fui por 4, entonces el primer dígito que puse fue 4, luego es como que formé el número tomando cada una de las condiciones, luego me fui por la segunda condición, bueno, ya sabemos que es múltiplo de 5, así que eso estaba bien, tenía que terminar el número en 5”. Esta idea le permite reducir considerablemente la cantidad de los posibles números que cumplen con las tres condiciones. Primero las aplicó para los dígitos a y d (*línea 205 y 207 – S1 E2*), teniendo las opciones, que podemos interpretar de la siguiente

manera, como 4bc5 o 5bc5, “tomé solo los que terminaban en 5 y entonces empecé con 4345 ese fue el primero que encontré” y por último aplicó la condición 3 para obtener los valores de b y c: “la condición 3 ... si, mayor o igual a su tercer dígito ... el d, entonces, así fue como lo resolví y luego encontré más que todo el patrón” (*línea 209 – S1 E2*).

Pero en la (*línea 209 – S1 E2*) de la entrevista menciona: “porque iba analizando 4345, 4355 así, de 10 en 10, pero luego me di cuenta que no, ... no todos iban a cumplir, ... entonces iba eliminando y al final encontré ... solo lo probé con 4000 porque con 5000 iba a ser lo mismo, entonces me dio 4345, 4355 4460 y perdón, 4455, entonces de ahí sólo lo puse con 5000 y me salieron los 6 dígitos” En ese momento, ella explica cómo fue modificando su estrategia para encontrar todos los números que cumplen con las condiciones, aspecto que le permitió resolver adecuadamente el problema producto de la posibilidad de hacer una reflexión sobre la forma cómo fue adecuando su estrategia, lo que abunda en la producción de un proceso metacognitivo.

Observamos que la validación de la que hicieron uso las estudiantes requirió de un proceso metacognitivo, donde el manejo simultáneo de las 3 condiciones les permitió encontrar todos los números que cumplen las condiciones al mismo tiempo.

Ahora, vamos a considerar los aspectos de las entrevistas-intervención correspondientes a la actividad 4, iniciando nuevamente con E1.

Previo a la entrevista-intervención, E1 no logra encontrar una expresión para describir de manera general la secuencia de números que se le plantea, sólo explica que el número de la posición \* ) + se puede obtener multiplicando por dos el

número de la posición \* . Ahora se le propone encontrar una expresión general para esta relación.

*Fragmento 7: Entrevista-intervención Actividad 4 del pre-test Sesión 1, E1*

- (295) I: Bien, ¿cree usted que se podría encontrar alguna expresión para poder explicar eso?
- (296) E1: Sí, tiene que haber ahí ... algo, algo más porque estar multiplicando por dos, por dos, ya es un poco más complicado, tiene que haber algo ahí, que no noté
- (297) I: Cree que podría trabajarlo, esto (encontrar la expresión)
- (298) E1: Sí
- (299) I: Tómese unos 3 minutos para ver qué encuentra. No es necesario que lo resuelva, por así decirlo, ... la expresión, sino que trate de hacer algunos procedimientos para ver qué más encuentras
- (300) E1: Tal vez se descompone en factores.
- (301) I: No, usted pruebe y me dice si encuentra alguna relación, aquí voy a estar.

La experiencia que tiene E1, le permite darse cuenta de que existe una expresión que predice la secuencia, pero reflexiona y menciona: “tiene que haber algo ahí, que no noté” (línea 296 – S1 E1). La sugerencia de que trabaje en una expresión general provoca que piense en una estrategia y se da cuenta de que puede descomponer en factores los números de la secuencia, ya que sabe que los números involucrados se construyen a partir de multiplicar por dos (línea 296 – S1 E1). La selección de esa estrategia, acompañada de las preguntas del profesor le permiten construir la expresión general. El proceso que siguió es aplicar esa estrategia a los casos conocidos para poder identificar, tanto los elementos que cambian, así como los que no lo hacen.

En el siguiente fragmento mostramos este proceso:

*Fragmento 8: Entrevista-intervención Actividad 4 del pre-test Sesión 1, E1*

- (317) I: Exacto, ya identificó un patrón. ¿Qué identifica? ¿Qué sucede en ese patrón? ¿Qué elementos hay? ¿Hay elementos que cambian? ¿Hay elementos que se mantienen igual siempre? ¿Qué sucede con ese patrón? ¿Cómo explicaría usted ese patrón?
- (318) E1: Con el término ... se le va agregando un exponente más al ... al dos.
- (319) I: Al dos ajá, el 3 qué le sucede, ¿cambia, le agregamos algo?
- (320) E1: El 3 siempre está ... el ... el dos elevado por un exponente siempre va a ir multiplicado por 3.
- (321) I: Por 3. ¿Qué relación observa entre el exponente y la posición? usted me dijo que el 6 era 2 por 3, el número 6, ¿en qué posición estaba?

- (322) E1: Está en la posición 3.  
 (323) I: ¿El 6?  
 (324) E1: Ve ... el 6 está en la posición cuatro  
 ...  
 (353) I: Ok, ¿qué hizo para obtener esa expresión? ¿Cuál es la idea que tiene?  
 (354) E1: Quité las primeras 3 posiciones  
 (355) I: Las primeras 3 posiciones ... ahora para el 20, ¿cuál sería entonces?  
 (356) E1: Sería ... se va a poner ... que 2 elevado a la 20 menos 3, el 20, el exponente 20, menos 3,  
 ... Por 3  
 (357) I: Ok, 2 elevado a la 20 por 3, Excelente  
 (358) E1: Me queda 2 elevado a la 17  
 (359) I: Dos elevado a la 17 ¿por?  
 (360) E1: Porque quité las primeras 3 posiciones  
 (361) I: Excelente y ¿si tuviera la posición 1?  
 (362) E1: Sería 2 elevado a la 1 menos 3, por 3

Las preguntas del investigador: (¿Hay elementos que cambian? ... ¿Hay elementos que se mantienen igual siempre?) (línea 317 – S1 E1) le permitieron a E1 observar estos elementos cuando aplicó la estrategia de descomponer los números de la secuencia que ya conocía en factores.

Cuando E1 nota que: “El 3 siempre está ... el ... el dos elevado por un exponente siempre va a ir multiplicado por 3” (línea 320 – S1 E1) la discusión avanza en la dirección de poder encontrar una expresión algebraica a partir del proceso inductivo que realizó.

En la discusión, las preguntas que hace el investigador: (¿Qué hizo para obtener esa expresión? ... ¿Cuál es la idea que tiene? ... ¿Cuál sería entonces? ... ¿por? ...) impulsaron el análisis que E1 realizaba, logrando que tuviera más claridad sobre la aplicación de su estrategia y cuando se le pregunta: ¿si tuviera la posición \* ? (línea 361 – S1 E1). Ella menciona cuál es la expresión algebraica que describe la secuencia de esta actividad: “Sería 2 elevado a la n menos 3, por 3” (línea 362 – S1 E1).

En el caso de E2, la discusión le ayudó a pensar en la estrategia que resolvía el problema. El investigador le sugirió que se fijara en ciertos elementos para que pudiera encontrar la expresión general.

*Fragmento 9: Entrevista-intervención Actividad 4 del pre-test Sesión 1, E2*

(413) I: ya utilizando la potencia, ¿qué cambia y qué no cambia?

(414) E2: Creo que es ... si falta algo ... al final es ... 3 por 2 ... a la n menos 3.

(415) I: Ajá

(416) E2: Porque 3 por 2 ... si ... 3 por 2 no cambia.

Al preguntar por los elementos que cambian y los que no (*línea 413 – S1 E2*), la estudiante nota que en su propuesta le faltaba algo, logrando encontrar la expresión correcta que describe la secuencia (*línea 414 – S1 E2*).

Observamos cómo las estudiantes responden de manera distinta a la indicación de observar lo que varía a diferencia de lo que no lo hace, al mismo tiempo vemos la potencialidad de proponer preguntas que permitan que el estudiante desarrolle una reflexión sobre sus estrategias, ya que favorece el uso de la validación, lo que crea un mayor sentido de confianza y certeza sobre sus estrategias y procedimientos.

De estas entrevistas-intervención, podemos decir que el profesor, a partir del desarrollo de procesos metacognitivos y de las preguntas que realiza, puede propiciar en los estudiantes un diálogo que les permita superar su zona de desarrollo próximo particular, propiciando la creación de esquemas mentales para usar los recursos necesarios y ordenar sus ideas a través de la sugerencia de explicar sus procedimientos y enfoques, dándose cuenta de que, en algunos casos pueden realizar tareas de validación que van más allá de verificar sus resultados inmediatos, las que podrían ayudarles a mejorar la solución de los problemas y proporcionar una mirada más amplia sobre la variedad de problemas que se resuelven con los recursos presentes, lo que luego puede ser aplicado a la idea de modelo.

### 4.3.2. *Sobre el test*

En este cuestionario se incluyeron tres actividades que consideran algunos elementos de la modelización. En esta sección vamos a discutir los diálogos correspondientes a la actividad 3, ya que estos nos ofrecen un mejor panorama sobre los recursos que las estudiantes junto con el investigador pusieron en funcionamiento para superar los retos que esta actividad les presentó.

Para efectos de comunicar los resultados, nos vamos a referir a la primera sesión de la entrevista-intervención correspondiente al test, como sesión 2 y a la segunda sesión de esta como sesión 3.

A continuación, presentaremos algunos fragmentos que corresponden a la discusión que el investigador realizó con E1 y luego, trataremos el caso de E2.

#### 4.3.2.1. *Resultados de la entrevista-intervención con E1*

Previo a la entrevista-intervención, E1 no respondió a todas las preguntas de la actividad 3 del test. Pero en el trabajo que realizó, observamos que los modelos que escribió se encuentran cercanos a los que describen el gasto total por comprar combustible en cada estación, lo que, en principio podría ofrecerle la información necesaria para poder identificar las situaciones en donde era conveniente comprar combustible en cada estación, aspecto que E1 no llevó a cabo.

Anteriormente E1 no había interpretado adecuadamente lo que significa *costo por recorrido*, a lo que el investigador le pidió que lo pensara como el dinero que se gasta por ir y venir a cada estación. Después de esa aclaración E1 se da cuenta de lo que faltaba en los modelos que había propuesto.

En el Fragmento 10, mostramos la explicación que E1 ofrece para encontrar el gasto total por comprar combustible, en este caso para la estación C.

**Fragmento 10:** Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E1

- (199)I: Si se fija que ... para obtener el gasto total, ¿qué hacemos?
- (200)E1: La cantidad de combustible lo multiplicamos por el precio, que es 0.90 y le agregamos el costo por el recorrido que es 1.35 en la en el caso de la estación C
- (201)I: Bien, muchas gracias. Ahora, si se fija ya ...esta parte usted me escribió en la pregunta 8 ... yo le pido que escriba la expresión que represente el gasto total. Usted escribió ... por comprar esta cantidad de combustible ... ¿cree usted que es necesario que le agreguemos algo a estas expresiones o las dejamos así como están? En las que usted había escrito anteriormente [ ] 2 34 2 ( ~~5~~74) 2 ( ~~5~~( ]
- (202)E1: Es neserio sumarle la cantidad que gastamos por el recorrido que realizamos.
- (203)I: Bien, entonces en la pregunta 8 en el nuevo ... en el nuevo cuestionario que está completando, si puede agregarme esas expresiones, por favor.
- (204)E1: Ok

En la (línea 201 – S3 E1) notamos que a partir de la pregunta (¿cree usted que es necesario que le agreguemos algo a estas expresiones [las escritas antes de la entrevista-intervención] o las dejamos, así como están?), E1 comenta lo que se debe agregar a sus modelos iniciales, en este caso: “sumarle la cantidad que gastamos por el recorrido” (línea 202 – S3 E1). En la siguiente figura mostramos los nuevos modelos que propone E1.

**Figura 23:** Respuestas de E1 a la pregunta 8 de la actividad 3 del test después de la entrevista-intervención

Estación A:  
 $x * 1$

Estación B:  
 $x * 0.95 + 0.95$

Estación C:  
 $x * 0.90 + 1.35$

Tomado de: Test GeoGebra

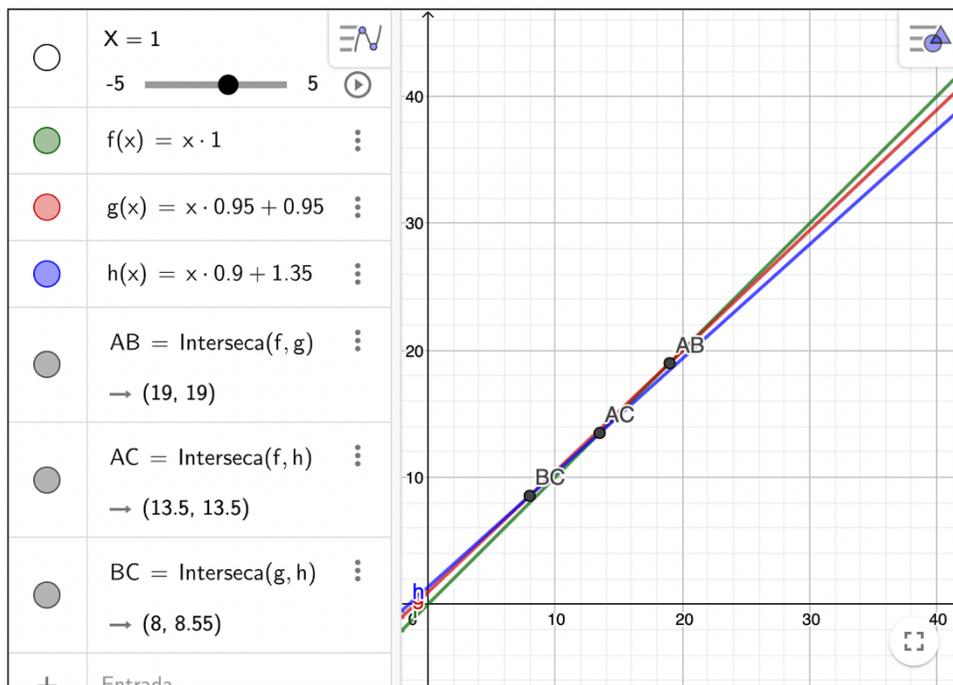
Del desarrollo para responder a la pregunta 8 del test, podemos decir que no interpretar adecuadamente una instrucción, es otro tipo de obstáculos que puede estar apareciendo en estas actividades, el cual se puede solventar con la ayuda del profesor, quien podría cambiar la instrucción por una que sea entendible para los estudiantes.

Anteriormente, E1 no graficó los modelos que encontró, ni los interpretó para obtener los resultados de la actividad, pero en la entrevista-intervención, después

de construir adecuadamente los modelos logró graficarlos, lo que vemos a continuación.

Figura 24: Gráficas de los modelos que construyó E1

Tarea 37



Después de graficar los nuevos modelos que E1 encontró, pasamos a la interpretación o lectura de las gráficas, lo que mostramos enseguida.

**Fragmento 11:** Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E1

- (240) **I:** Por ejemplo, aquí [cerca del origen] ¿qué significa que la gráfica roja esté arriba?, que el ... perdón ... qué el azul esté arriba, qué la roja esté abajo y qué la verde esté (más) abajo, ¿qué significará eso para usted?
- (241) **E1:** En cuál se gasta más ... en la estación C (azul) se gasta más, la B que es la roja es intermedio, no se gasta ni mucho ni muy poquito, es intermedio y de la estación A, que es la verde es la que se gasta menos.
- (242) **I:** Ok, pero si se fija, si yo hago esto [desplazar el gráfico hacia la derecha para visualizar ampliamente] ¿qué sucede? mire más arriba.
- (243) **E1:** La estación A sube.
- (244) **I:** Le pregunto, ¿se mantiene la tendencia?
- (245) **E1:** No
- (246) **I:** ¿Qué sucede?
- (247) **E1:** La estación A va aumentando.

Las preguntas del investigador: ¿qué significa que la gráfica esté arriba? (*línea 240 – S3 E1*) ... si yo hago esto ¿qué sucede? (*línea 242 – S3 E1*) ... ¿se mantiene la tendencia? (*línea 244 – S3 E1*) ... ¿Qué sucede? (*línea 246 – S3 E1*), empujan a la estudiante a hacer un análisis de las gráficas, para darse cuenta de la información que ofrece la posición de cada gráfica, notando que la tendencia no se mantiene, es decir que la estación A no siempre es la opción más económica lo que incrementa su visión del proceso.

Este tipo de análisis ofrece mucha información sobre el gasto total que se hace cuando se compra combustible en cada estación, lo que le permite a la estudiante poder recuperarla para que pueda decidir sobre las condiciones en que cada estación es la opción más económica.

En otro momento, el investigador le propone a E1 fijarse en las intersecciones de las rectas, ya que en esos puntos sucede un cambio en la tendencia, es decir, que las rectas cambian de posición, la que estaba abajo ahora está arriba y viceversa.

Conociendo esta información y el análisis gráfico, E1 construye junto al investigador una tabla que recupera la información de las gráficas, donde notamos 4 regiones en donde hay tendencias diferentes, la que se muestra enseguida:

*Figura 25: Tabla construida por E1 para organizar la información de las gráficas de los modelos para el gasto total*



Tomado de: Test GeoGebra

Cuando E1 construye la tabla anterior, se da cuenta de que para ciertas cantidades de combustible existe una estación que es la opción más económica, notamos también que su tabla tiene carácter de diagrama, ya que la posición de las letras informa sobre la posición de las rectas en la gráfica, lo que economiza la interpretación y que a nuestro juicio coloca esta producción en la línea divisoria entre la resolución de problemas y la modelización.

A continuación, presentamos un diálogo en donde mostramos el tipo de preguntas que realiza el investigador, para que E1 pueda expresar las condiciones donde cada estación es la mejor opción de compra.

**Fragmento 12:** Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E1

(358) **I:** Ahora vamos a la siguiente pregunta. ¿Cuál es la cantidad de combustible o la máxima cantidad de combustible ... o entre qué intervalo de combustible resulta que la estación B sea la más económica? ¿Se da ese caso? Por ejemplo.

(359) **E1:** Hasta ...

(360) **I:** O ¿de cuánto a cuánto? O ¿de tantos litros a tantos litros? También podría ver ¿dónde la opción B es más económica?

(361) **E1:** Es más económica ... de 13, ... [Hace una pausa y observa la tabla] no, aquí sale más cara ... B nunca ... nunca es la más barata, B está arriba o está en ... la de 19 a 40 litros es intermedio.

(362)I: Entonces, coloquemos eso ... eso que dijo usted B nunca es la más económica

(363)E1: B nunca es la más económica

Las preguntas: ¿Cuál es la cantidad de combustible o la máxima cantidad de combustible ... o entre qué intervalo de combustible resulta que la estación B sea la más económica? (*línea 358 – S3 E1*) ... ¿de cuánto a cuánto? (*línea 360 – S3 E1*), le permiten a la estudiante establecer las condiciones donde cada estación es la opción más económica, en este caso la estación B.

Observamos que las sugerencias y las preguntas que hace el investigador fueron elementos claves para que E1 pudiera notar la información relevante que ofrecen los gráficos, además de la producción particular de E1 que incluyó aspectos de la modelización, esto nos indica que el papel del profesor es muy importante cuando los estudiantes son llevados a situaciones que son nuevas para ellos y que están en su zona de desarrollo próximo.

En el siguiente fragmento se le propone a E1 la siguiente variación de la situación: *Piense que el único recurso que tiene el profesor para poder decidir a qué estación es conveniente ir, es el medidor de combustible de su vehículo. A partir de esto se le pide que explore las condiciones, de acuerdo con el medidor de combustible, donde es más conveniente comprar combustible.*

*Fragmento 13: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E1*

(388)I: Entonces, pensando en eso ... en cuartos, es decir, si le hace falta,  $1/4$  yo pienso que vaya a tal estación, si le hacen falta  $2/4$  yo pienso que vaya a tal estación, si le hacen falta  $3/4$  yo pienso que debería de ir a tal estación. Sí definitivamente está el tanque vacío ... es mucho mejor ir a tal estación, vamos a pensar en eso. ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible en cada estación? En la estación A, ¿para qué caso cree usted? ¿Cuántos cuartos le deben de faltar para decir, me resulta mejor ir a la estación A?

(389)E1: Tendría que faltarle  $1/4$ .

(390)I:  $1/4$  ... ¿porqué  $1/4$  y no  $2/4$ ? Por ejemplo.

(391)E1: También podría ser  $2/4$ , porque A es la más barata de 8 a 13.5, aunque no le quedaría el tanque lleno.

(392)I: OK, A es la estación más barata de 8 a 13.5 ¿segura?

(393)E1: Ahhh ... de 0 a ... de 0 a 13.5.

(394)I: 13.5, pero si se fija, le faltan  $2/4$ . ¿Cuánto es  $2/4$ ? ¿Cuánto le falta?

(395) E1: Son 20.

(396) I: Son 20 litros y en ese caso, ¿qué sucede con 20 litros?

(397) E1: Que sale más económica de la estación C

(398) I: La estación C, entonces no podríamos decir  $2/4$ , ¿verdad? Entonces, podemos escribir algo como si le hace falta  $1/4$  del tanque, pues, resulta ...aquí está la estación A, en qué casos ... si le hace falta  $1/4$ , por ejemplo

(399) E1: Si le hace falta  $1/4$ , es conveniente, es mejor ... es mejor y sale más barato ... es conveniente comprar combustible en la estación A

(400) I: Excelente

(401) E1: Lo escribo acá [en el cuestionario]

Con las preguntas: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible en cada estación? (*línea 388 – S3 E1*) ... ¿Cuántos cuartos le deben de faltar para decir: me resulta mejor ir a la estación A? (*línea 388 – S3 E1*), se le plantea a E1 la situación en donde debe pensar en cuartos y no en la cantidad exacta de litros, como el caso de la tabla de la Figura 25, a lo que responde: “Tendría que faltarle  $1/4$ ” (*línea 389 – S3 E1*), pero el investigador cambia la pregunta: ... ¿porqué  $1/4$  y no  $2/4$ ? (*línea 390 – S3 E1*) Inicialmente, E1 había considerado que, para llenar medio tanque, la opción A era la opción más económica, pero con las preguntas: ¿Cuánto es  $2/4$ ? ... ¿Cuánto le falta? (*línea 394 – S3 E1*), E1 se percata de que en esa situación la estación C es una mejor opción, comentando lo siguiente: “Si le hace falta  $1/4$ , es conveniente, es mejor ... es mejor y sale más barato ... es conveniente comprar combustible en la estación A” (*línea 399 – S3 E1*).

Este tipo de diálogos, en donde se plantean variaciones a los problemas, sirven como una herramienta para que los estudiantes puedan tener mayor control sobre la información que conocen, lo que es un factor muy importante cuando se les coloca en situaciones desconocidas. Además, vemos que las preguntas que los profesores puedan hacer juegan un papel muy importante, ya que los estudiantes no siempre pueden manejar mucha información al mismo tiempo, como en este caso que eran: 3 gráficas y 4 regiones diferentes.

En el siguiente fragmento mostramos el diálogo final, donde E1 nos comenta cuales son las respuestas del problema.

*Fragmento 14: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E1*

- (442)I: Otra pregunta, que nos quedamos con la opción verdad A o ¿qué le diría a su profesor?
- (443)E1: Todo depende de la cantidad de combustible que vaya a comprar.
- (444)I: Entonces, ¿podríamos decir que este problema tiene respuesta única?
- (445)E1: No, tiene dos respuestas
- (446)I: Ok, ajá, ¿cuáles son?
- (447)E1: Si compra de 0 a 13.5 litros es conveniente comprar en la estación A, pero si compra de 13.5 a 40 litros, es conveniente, la estación C
- (448)I: Es conveniente la estación C ... y definitivamente, ¿qué estación no le recomendaría?
- (449)E1: La B porque nunca es la más barata.
- (450)I: Nunca es la más barata ahora. Bien excelente, ahora otra pregunta, para sacar todas las conclusiones, ¿qué se le hizo más fácil? Ver la gráfica o ver los datos en la tabla que usted obtuvo, ¿qué resulta más fácil para usted?
- (451)E1: Para sacar los datos en ... de ... de cuál estación es la más barata, dependiendo de los litros que se compre, sale mejor en una gráfica, pero hay que localizar los puntos de intersección de las rectas.
- (452)I: Entonces, usted viendo la gráfica, viendo solo el plano cartesiano con las 3 gráficas y los puntos de intersección, usted podría decir ... veo que, si es más fácil, mejor ir a esta o mejor ir a esta otra, no me conviene ir a esta otra o tener esos datos en una tabla. ¿Cuál le gustaría más? ¿Cuál opción cree usted que es más ... fácil?, podríamos decir.
- (453)E1: Si ya se sacan los datos ... los datos se tienen una tabla, es más fácil, ya que en la gráfica hay que ir analizando los datos ... hay que ir viendo .... en la tabla ya están dados y en una gráfica que hay que ir analizando cada uno de los puntos que pasa ahí, que no pasa.
- (454)I: Imagine que si usted tuvo la tabla, le tocó ir a ver la gráfica o ¿sólo se quedó con los datos de la tabla? O ¿estuvo yendo y viniendo en ese momento? De lo que recuerda que usted dice
- (455)E1: Sí, estuve yendo y viniendo para los datos, porque, aunque los anoté yo, pero si no lo hubiera anotado, me ... me hubiera tocado estar viendo la gráfica.

En este diálogo, observamos dos momentos el primero relacionado con las respuestas del problema y el segundo, con el recurso que E1 utilizó para poder obtener las conclusiones que hizo sobre la actividad (tabla que aparece en la Figura 25).

Anteriormente, E1 había comentado que le sugeriría a su profesor que compre combustible en la estación A. En la entrevista-intervención, se le pregunta nuevamente sobre la estación que es la opción más económica, pero conociendo la información que extrajo de los modelos, las preguntas son las siguientes: ¿qué le

diría a su profesor? (*línea 442 – S3 E1*), ella responde: “Todo depende de la cantidad de combustible que vaya a comprar” (*línea 443 – S3 E1*), dándose cuenta que el problema no tiene una sola respuesta, entonces, se le pregunta: ¿cuáles son (esas respuestas)? (*línea 446 – S3 E1*), a lo que ella nos comenta: “Si compra de 0 a 13.5 litros es conveniente comprar en la estación A, pero si compra de 13.5 a 40 litros, es conveniente, la estación C” (*línea 447 – S3 E1*), la cual es una respuesta clara y sencilla, lo que nos indica que logró organizar adecuadamente toda la información que recuperó de los modelos diagramáticos.

Abordando el segundo momento del diálogo, le consultamos sobre el recurso que le ayudó a recuperar toda la información de manera sintetizada, ella nos comenta: “Si ya se sacan los datos ... los datos se tienen (en) una tabla, es más fácil, ya que en la gráfica hay que ir analizando los datos ... hay que ir viendo .... en la tabla ya están dados y en una gráfica que hay que ir analizando cada uno de los puntos que pasa ahí, que no pasa” (*línea 453 – S3 E1*) Esto nos muestra el proceso que realizó para recuperar y sintetizar la información, que consistió en analizar las gráficas y construir la tabla a partir de la acción de ir y venir a las gráficas: “Sí, estuve yendo y viniendo para los datos, porque, aunque los anoté yo, pero si no lo hubiera anotado, me ... me hubiera tocado estar viendo la gráfica”. (*línea 455 – S3 E1*). En este momento nos damos cuenta de que el uso de las tablas es un recurso muy importante cuando los estudiantes enfrentan situaciones en donde se tiene bastante información, la que no puede ser manejada de manera simultánea.

En la siguiente figura mostramos la respuesta final de E1.

*Figura 26: Respuestas de E1 a la pregunta final: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible en cada estación?*

Tarea 41  
Estación A:  
  Si le falta 1/4 para llenar el tanque de combustible , es mejor comprar en la estación A

Tarea 42  
Estación B:  
  No hay ningún caso, ya que el precio de la estación B nunca es el más barato

Tarea 43  
Estación C:  
  Si le falta 13.5 a 40 litros, no puede ir cuando el carro solo necesite 1/4 para completar el tanque de combustible

Tomado de: Test GeoGebra

De manera general, podemos decir que las habilidades del tipo holístico de E1 sobre resolución de problemas fueron necesarias, pero no suficientes cuando se enfrenta a situaciones que integran elementos de la modelización, pese a tener producciones diagramáticas, en este caso, la creación de modelos, lectura de gráficas, reflexión sobre la información y la toma de decisiones. Además, observamos que las actividades metacognitivas y de validación que pueden promover los profesores fueron de gran importancia, ya que a partir de ellas los estudiantes encuentran un espacio donde pueden reflexionar sobre sus producciones y dar sentido al problema dando oportunidad a la presentación del modelo como una estructura general para resolver problemas ligados.

De esta entrevista-intervención rescatamos que las preguntas que realizó el investigador le permitieron a E1 poder acercarse de manera progresiva a la solución ampliada, lo que implicó un trabajo de reflexión entre ambos, siendo esta la condición lo que permitió que E1 realizara el tránsito hacia el desarrollo de ciertos aspectos de la modelización.

#### 4.3.2.2. *Resultados de la entrevista-intervención con E2*

Del trabajo que realizó E2 previo a la entrevista-intervención, recuperamos que ella no formuló los modelos que le facilitarían obtener la información relevante de la situación, pero que a partir de la lectura de las tablas que consideran los casos particulares para la compra de combustible, pudo obtener información que le permitió establecer distintos casos en donde el gasto total es menor para algunas estaciones. Por lo que en este apartado discutiremos sobre las producciones que realizaron E2 y el investigador para desarrollar una tarea de modelización.

Iniciamos la discusión presentando un apartado en donde se discute sobre el *costo por recorrido*, dicho aspecto no le permitió a E2 obtener correctamente los modelos que explican el gasto de combustible para cada estación, lo que mostramos en el siguiente diálogo:

##### *Fragmento 15: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 2, E2*

- (123) **I:** Pero estos 6 dólares y estos 8 dólares, ¿cómo los obtuvo? Porque si me da curiosidad saber cómo obtuvo esos valores.
- (124) **E2:** Si no me equivoco, lo que hice fue multiplicar el costo de combustible por el gasto de combustible.
- (125) **I:** Mmm pero, si multiplico 0.95 por medio litro ¿le da 6 esa multiplicación?
- (126) **E2:** Si, no ... no da, tiene razón.
- (127) **I:** Mmm, pero sí sabe que ... ya me dijo que tiene que ser el costo de combustible por el gasto de combustible ... me da el dinero que yo gasté por el recorrido.
- (128) **E2:** Sí

Antes de la entrevista-intervención E2 escribió que el costo por recorrido era de 0, 6 y 8 dólares para las estaciones A, B y C respectivamente, lo que no corresponde a los valores correctos, pero si fue un elemento a considerar en la entrevista-intervención, a lo que se le pregunta: ¿cómo los obtuvo? ... (línea 123 – S2 E2) y ella responde: “Si no me equivoco, lo que hice fue multiplicar el costo de combustible por el gasto de combustible” (línea 124 – S2 E2). Su explicación es correcta, pero a pesar de ello, no calculó adecuadamente esos valores, entonces le investigador le pregunta: pero, si multiplico 0.95 por medio litro ¿le da 6 esa multiplicación? ... (línea 123 – S2 E2), en

ese momento ella duda de las operaciones que realizó y se da cuenta de que no fueron correctas: “Si, no ... no da, tiene razón” (línea 126 – S2 E2), de esto podemos notar que E2 conocía las operaciones que debía de realizar, pero que al momento de realizarlas no se percató de que los valores que obtuvo no eran correctos. De nuevo identificamos que la claridad sobre un enfoque provoca mucha seguridad en los estudiantes, lo que se ve reflejado en la falta de validación.

De la intervención del investigador, E2 se da cuenta de que debe de corregir los valores que obtuvo para el costo por recorrido, lo que conduce la plática en la dirección de obtener los modelos para el gasto total. En el siguiente apartado mostramos el proceso de generalización que se realizó:

*Fragmento 16: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 2, E2*

(199)I: Sólo tenemos una ) cantidad ... ¿cuánto pagó si compró ) litros de combustible? ¿cuánto dinero pagó por esa cantidad? ¿qué haría? ¿qué estamos haciendo para encontrar la cantidad de dinero que se paga?

(200)E2: Estamos multiplicando el gasto ... lo cual ... lo que nos cuesta el combustible por la cantidad que queremos comprar.

(201)I: Entonces, aquí [en la fila que corresponde a ) litros] ¿cuánto dinero? ... ¿cuántos dólares pagaríamos por comprar ) 'litros de combustible? una cantidad de )

(202)E2: 3) dólares

(203)I: Entonces colocamos en la ... en esta nueva [en el nuevo cuestionario] colocamos ) dólares.

La pregunta: ¿qué estamos haciendo para encontrar la cantidad de dinero que se paga? (línea 199 – S2 E2) permite que E2 nos explique lo que hizo para encontrar la cantidad que se paga por comprar combustible para los casos particulares, donde ella nos comenta: “Estamos multiplicando el gasto ... lo cual ... lo que nos cuesta el combustible por la cantidad que queremos comprar” (línea 200 – S2 E2), el investigador al darse cuenta de que ella tiene claro lo que se estaba haciendo, le plantea el caso general: ¿cuántos dólares pagaríamos por comprar " litros de combustible? ... (línea 201 – S2 E2), en ese momento E2 da el salto y pasa de los casos particulares al general (línea 202 – S2 E2). Este tipo de preguntas podrían ser un detonante en los estudiantes, ya que apoyan los procesos de generalización que se

quieren realizar, en el caso de E2, le permitieron pasar de los casos aritméticos al algebraico, de manera inductiva.

De manera similar se escribieron los modelos del gasto total para las demás estaciones de combustible. En la siguiente figura mostramos los modelos que ella propone:

*Figura 27: Respuestas de E2 a la pregunta 8 de la actividad 3 del test después de la entrevista-intervención*

Estación A:  
 $x + 0$

Estación B:  
 $0.95x + 0.95$

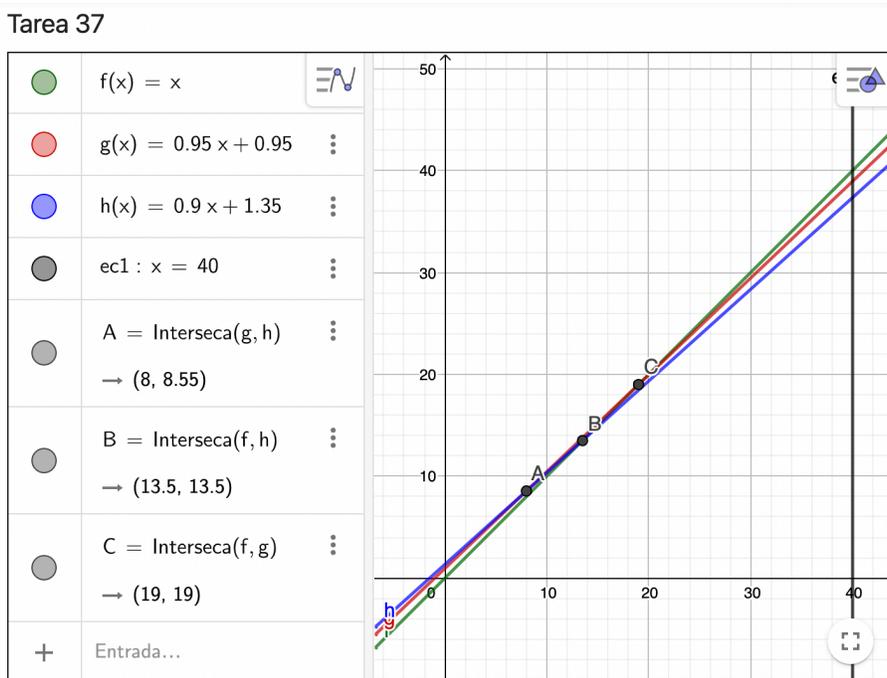
Estación C:  
 $0.90x + 1.35$

Tomado de: Test GeoGebra

En los modelos que E2 escribe, aún vemos la huella del proceso que realizó para construirlos, para la estación A vemos que escribe " ) \$", dando cuenta de que lo obtuvo a partir de sumar el dinero pagado y el costo por recorrido.

Después de la construcción de los modelos, el investigador le pide a E2 que los grafique, obteniendo lo siguiente.

*Figura 28: Gráficas de los modelos que construyó E2*



En el siguiente fragmento mostramos la secuencia que realizó el investigador para que E2 pudiera leer adecuadamente los gráficos, con el objetivo de recuperar la información relevante.

*Fragmento 17: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 2, E2*

- (308) **I:** Podemos hacernos algunas preguntas en esta región [de 0 a 4], ¿en qué estación sale más conveniente comprar?, ¿en cuál resulta menos conveniente comprar? En cuál ... ¿Cuál anda ahí por ... por en medio al momento de comprar?, es decir, que no está tan caro ni tan barato. ¿Qué identifica en relación a esas preguntas en esta región de 0 a 4 litros de combustible?
- (309) **E2:** No estoy segura, pero creo que en este caso ... entre más ... si ponemos puntos entre más suben los puntos, entre están más altos menos cuesta.
- (310) **I:** Ok, por ejemplo, ¿qué significaría este punto (4, 4)? ... ¿qué significaría?
- (311) **E2:** Que por cuatro por 4 litros de combustible que compre voy a pagar 4 dólares.
- (312) **I:** OK, digamos que este es (4, 5), digamos este que está aquí para la estación C ¿Qué significaría este punto?
- (313) **E2:** Que por 4 litros que compre voy a pagar 5 dólares, el gasto total.
- (314) **I:** ¿Cuál es más económico entonces, C o A?
- (315) **E2:** A
- (316) **I:** A, ok ¿y en la B? Digamos que es como ... 4.8, sería el punto (4, 4.8)
- (317) **E2:** Vendría siendo casi lo mismo, pagando casi lo mismo por .... Si redondeamos serían 5 dólares por 4 litros
- (318) **I:** Entonces, ¿en qué estación conviene comprar en esta región?
- (319) **E2:** En este caso, en la estación A ... en esa región.
- (320) **I:** En la estación A OK.

El investigador propone analizar la región de 0 a 4, para conocer la estación más conveniente y la menos conveniente, a lo que propone las siguientes preguntas: ¿en qué estación sale más conveniente comprar? ... ¿en cuál resulta menos conveniente comprar? En cuál ... ¿Cuál anda ahí por ... por en medio al momento de comprar? ... (línea 308 – S2 E2). E2 expresa: “No estoy segura, pero creo que en este caso ... entre más ... si ponemos puntos entre más suben los puntos, entre están más altos menos cuesta” (línea 309 – S2 E2). De lo que podemos rescatar que para E2 la gráfica que se encuentra más arriba es la que representa el gasto menor, lo que no es correcto. El investigador le propone analizar casos particulares para que ella se dé cuenta de que la gráfica que se encuentra más abajo representa el gasto menor. Luego del análisis de estos casos particulares, el investigador pregunta: Entonces,

¿en qué estación conviene comprar en esta región? (línea 309 – S2 E2), a lo que E2 responde: “En este caso, en la estación A ... en esa región” (línea 310 – S2 E2). En este caso la intervención del investigador provocó que E2 se fijara en los aspectos relevantes de la situación, para que ella pudiera recuperar esa estrategia cuando analizara las demás regiones en dónde se encontraban las gráficas.

Luego de conocer los elementos que nos interesaba analizar de las gráficas, E2 junto al investigador identifican que el gráfico se puede analizar a partir de 4 regiones (De 0 a 8, de 8 a 13.5, de 13.5 a 19 y de 19 a 40) que es donde encontramos tendencias diferentes. En el siguiente fragmento mostramos cómo E2 reconoce que existen estas regiones y de qué manera podemos encontrarlas de manera precisa.

*Fragmento 18: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 2, E2*

- (350) **I:** ¿Qué tendríamos que hacer con este gráfico para poder responder estas preguntas? ...  
¿En quién nos tendríamos que fijar?
- (351) **E2:** En donde se interceptan (intersecan) las ... las 3 gráficas ... donde se cortan.
- (352) **I:** Donde se cortan si se fija, ¿se cortan todas? o ¿cómo se van cortando?
- (353) **E2:** En el primer caso ... en el primer corte ... es entre la gráfica B y C.
- (354) **I:** Mmm... ¿por aquí verdad? [alrededor del punto (8, 8)]
- (355) **E2:** Si en ... como en 8.

La pregunta del investigador: ¿En quién nos tendríamos que fijar? (línea 350 – S2 E2) nos permite conocer si E2 ha identificado la información relevante para poder encontrar de manera precisa las regiones que nos interesa analizar. En su respuesta: “En donde se interceptan (intersecan) las ... las 3 gráficas ... donde se cortan” (línea 351 – S2 E2) podemos identificar que reconoce que en las intersecciones sucede algo importante, un cambio en la tendencia del gasto mínimo y que por eso es importante identificar esos valores.

Después de conocer los aspectos relevantes de las gráficas, se le explica a la estudiante la forma en cómo puede obtener de manera precisa los puntos en donde ocurren las intersecciones, se le muestra la herramienta *Interseca* de GeoGebra y se le pide que para la siguiente sesión pueda encontrar las intersecciones y las

respuestas que hacen falta de la actividad, concluyendo de esta manera la sesión 2 de la entrevista-intervención correspondiente al test.

Al inicio de la sesión 3, se le pide a E2 que explique los procedimientos que realizó para obtener las respuestas de las preguntas 11 y 12, que tratan sobre identificar las condiciones dónde cada estación era la opción más económica. En el siguiente fragmento mostramos su explicación:

*Fragmento 19: Entrevista-intervención Actividad 3 del test Sesión 3, E2*

- (1) **I:** Bien, buenas tardes. [E2], espero que se encuentre muy bien. El día de hoy vamos a comenzar con la segunda parte de la entrevista correspondiente al test. Voy a comenzar a compartir pantalla. Bien, en este momento vamos a checar lo que usted trabajó el día de ayer y nos quedamos en esta parte [análisis gráfico]. Por ejemplo, veo que usted respondió a las preguntas. Entonces lo voy a hacer algunas preguntas en relación a esas respuestas. ¿De dónde obtuvo la información para poder responder cada una de estas preguntas? No sé si me podrías explicar el proceso por favor.
- (2) **E2:** La obtuve analizando las gráficas. En la en la gráfica de ... bueno acá del ... en el plano de GeoGebra, lo que hice fue introducir las 3 ecuaciones, por decirlo así, que representan el gasto total de cada una de las estaciones de combustible, ... de gasolina y luego hice intersecciones en donde se cruzaban las líneas. Ah, ya luego, después solo me quedó, analizarlas donde ... de dónde a dónde iban esas intersecciones para poder contestar las preguntas de las tablas de abajo [Pregunta 11].
- (3) **I:** Ok, por ejemplo, ... pero veo que encontró estas intersecciones y aquí están los valores. El primero es (8, 8.55). El otro es (13.5, 13.5), y el otro es (19,19). Creo que usted lo utilizó como 19, 8 y 14, lo redondeó, digamos sí, o lo aproximó.
- (4) **E2:** Si, lo que iba haciendo era ir moviendo la gráfica desde ... desde el inicio, que vendría siendo bueno ... cero, en este caso ... Ehh... me iba moviendo hacia arriba y veía en qué momento se cruzaban las líneas, por ejemplo, en la primera va de 0 a 8 y no ... y vemos que la que menos nos conviene es la C. Pero en este caso la que más nos conviene es la A y así sucesivamente iba, pero la A nos conviene hasta tal punto, hasta el punto B [(13.5, 13.5)], que vendría siendo como 14 y así iba lo mismo, por eso es que dice de 0 a 14 litros es la cantidad más económica.
- (5) **I:** Ajá para la opción A.
- (6) **E2:** Exacto y vemos después que a partir de los 14 a la gráfica de la A. Mmm paa ... en este caso, disminuyendo, pero eso nos quiere decir que en esta posición es menos económica.
- (7) **I:** Por ejemplo, en esta región [de 14 a 40] usted me dice que de 14 ...
- (8) **E2:** A 40, hasta el final.
- (9) **I:** Entonces, ¿en qué se fijó usted para poder decir que desde 14 ... ya me dijo que de cero a 14 usted se fijó que era ... lo ... más económica [estación A], pero ¿cómo sabemos que es la opción más económica?, solo estamos viendo la gráfica y luego me dice usted que de 14 a 40, es la opción ... es en dónde la estación A se vuelve la opción menos económica.
- (10) **E2:** Sí, me fijé más que todo en la posición de las líneas, en este caso en la distancia que hay entre ellas, mientras más bajo esté es más económica, mientras más alto, menos económica.

Entonces tenemos que A es desde 14, que vendría siendo el punto B [(13.5, 13.5)] hasta 40, que sería en adelante y no es que está ... es en su parte la opción menos económica entre esos litros, pero está entre un nivel intermedio.

(11) **I:** Ok

(12) **E2:** y hasta el final y lo mismo ya con la otra. En el caso de B y C

(13) **I:** Entonces, podríamos decir que se fijó en la posición de las gráficas, quien estaba más abajo me dice que es la opción más económica en esa región. La que está más arriba es la opción ...

(14) **E2:** Sí, es la opción menos económica

El investigador le pide a E2 que explique el proceso que realizó y le plantea la siguiente pregunta: ¿De dónde obtuvo la información para poder responder cada una de estas preguntas? (*línea 1 – S3 E2*). A lo que ella responde: “La obtuve analizando las gráficas. En la en la gráfica de ... bueno acá del ... en el plano de GeoGebra, lo que hice fue introducir las 3 ecuaciones, por decirlo así, que representan el gasto total de cada una de las estaciones de combustible, ... de gasolina y luego hice intersecciones en donde se cruzaban las líneas. Ah, ya luego, después solo me quedó, analizarlas donde ... de dónde a dónde iban esas intersecciones para poder contestar las preguntas de las tablas de abajo [Pregunta 11]” (*línea 2 – S3 E2*), de ese extracto podemos identificar que E2 conoce bien la estrategia que está utilizando, ya que su explicación es lo suficientemente clara para ser entendida. Además, notamos que al conocer donde ocurren las intersecciones E2 identifica las regiones que se deben analizar: “de donde a donde, iban esas intersecciones” (*línea 2 – S3 E2*). Ella continuó con su explicación: “veía en qué momento se cruzaban las líneas, por ejemplo, en la primera va de 0 a 8 y no ... y vemos que la que menos nos conviene es la C. Pero en este caso la que más nos conviene es la A y así sucesivamente iba, pero la A nos conviene hasta tal punto, hasta el punto B [(13.5, 13.5)], que vendría siendo como 14 y así iba lo mismo, por eso es que dice de 0 a 14 litros es la cantidad más económica.” (*línea 4 – S3 E2*), de esa manera E2 logra analizar las gráficas y obtiene las respuestas adecuadas para el problema, cuyo recurso principal para la lectura de las gráficas fue: “mientras más

bajo esté es más económica, mientras más alto, menos económica" (línea 10 – S3 E2) logrando una apreciación sintética y correcta del gráfico.

Hemos observado que promover en los estudiantes este tipo de lectura de gráficos resulta ser un recurso que dé paso a una síntesis, lo que facilita recuperar de manera rápida la información relevante. En este caso, observar la posición de las gráficas fue de mucha utilidad, porque al darse cuenta de que la gráfica que está más arriba es la que representa el gasto mayor de dinero, E2 puede fácilmente obtener las conclusiones del problema.

Enseguida mostramos las respuestas finales de E2:

*Figura 29: Respuestas de E2 a la pregunta final: ¿Para qué casos es conveniente comprar combustible es cada estación?*

#### Tarea 41

Estación A:



-Si se quiere llenar el tanque de gasolina, sin desviarse de la ruta normal, recorriendo menos kilómetros.  
-Si se quiere comprar 14 o menos litros de gasolina

#### Tarea 42

Estación B:



-Si se quiere comprar gasolina a un precio intermedio, pero desviandonos de la ruta normal.  
-Si se quiere comprar un aproximado de 19 a 40 litros de gasolina.

#### Tarea 43

Estación C:



-Si se quiere llenar por completo el tanque de gasolina, siendo esta estación la opción mas economica.  
-Si se quiere comprar 14 o más litros de gasolina (hasta los 40 litros).

Tomado de: Test GeoGebra

De manera general, podemos decir que las habilidades sobre resolución de problemas de E2 no fueron suficientes para realizar el tránsito hacia la modelización en la primera etapa, pero sí necesarias, ya que le permitieron, junto con la intervención del investigador, identificar la información relevante del problema, así como organizarla sistémicamente. Además, notamos que, en su trabajo, E2 constantemente realizó tareas de validación, que en algunos casos fue sugerida por

el investigador, ya que la seguridad que tenía sobre algunos procedimientos no le permitió darse cuenta de sus errores, pese a que su enfoque era correcto.

Observamos que este tipo de actividades podrían acercar la postura didáctica de la modelización a los salones de clase en dónde los estudiantes cuentan con una formación básica sobre resolución de problemas, pero advertimos que el papel que juegan los profesores es muy importante, ya que con sus preguntas pueden orientar adecuadamente el proceso de tránsito.

## **5. CONCLUSIONES**

### **5.1. INTRODUCCIÓN**

Con esta investigación, pretendemos conocer la forma cómo las habilidades desarrolladas en una aproximación de resolución de problemas podrían servir como base para una introducción a la modelización matemática escolar, por lo que se requirió determinar los puntos de contacto entre ambas propuestas, de manera que, se pueda respaldar el proceso desde una propuesta didáctica a la otra, tomando como base los diferentes procesos de validación que puedan realizar los estudiantes.

Para desarrollar este trabajo, propusimos un cuestionario en la dirección de la resolución de problemas para conocer cuáles son las habilidades que los estudiantes poseen en este sentido y en otro momento, un segundo cuestionario que incluía actividades que considera aspectos relativos a la modelización. Además, realizamos entrevistas-intervención, en las que discutimos sobre sus producciones correctas, incompletas e incorrectas, para conocer los retos que las actividades les plantearon y que junto con el investigador pudieron superar. Del análisis de todos estos recursos podemos plantear las siguientes conclusiones.

### **5.2. CONCLUSIONES SOBRE LA INVESTIGACIÓN**

En esta investigación, mediante un análisis de ambas propuestas didácticas, encontramos que las habilidades asociadas a: 1. La detección de la información relevante de la situación, 2. La organización de la información y 3. El desarrollo de procesos de validación, podrían ser los puntos de contacto entre la resolución de problemas y la modelización, ya que la resolución de problemas enfatiza las habilidades antes mencionadas y que luego pueden ser aprovechadas en la modelización.

Sin embargo, en este estudio, encontramos que transitar desde la resolución de problemas hacia un enfoque basado en la modelización resultó ser una tarea más compleja de lo que esperábamos. De los resultados podemos notar que las estudiantes no lograron realizar la tarea de modelización de manera individual, lo que nos indica que las habilidades asociadas a los puntos de contacto, antes mencionados, no fueron suficientes, pero sí necesarias, para llevar a cabo dicha transición. Esto nos indicó que hay más elementos que debemos considerar cuando enfrentamos a estudiantes a situaciones de transición.

Al recuperar de manera general la secuencia didáctica correspondiente a la actividad de modelización, podemos observar que esta toma como base las habilidades adquiridas bajo el enfoque de resolución de problemas, pero que, con la adecuada gestión del investigador, las habilidades también pasaron por un proceso de transición, adecuándose a las exigencias de la modelización a través de un acercamiento progresivo a la solución. Este tratamiento posibilitó que en cierto momento de la entrevista-intervención las estudiantes pudieran adquirir autonomía en los procesos de validación que realizaban, que apoyados por procesos metacognitivos permitieron la evolución de las habilidades de las estudiantes, logrando transitar hacia la modelización.

Otro aspecto que resultó de mucha importancia, fueron los cambios en las condiciones del problema, lo que hizo que las estudiantes evidenciaran diversas formas de pensamiento adecuándolas a los intereses de la modelización.

Pudimos observar que la gama de estrategias que pueden utilizar los estudiantes podría estar ligada a: 1. Los aspectos que consideran importantes cuando identifican la información relevante del problema y de 2. Los antecedentes e inclinaciones particulares de cada estudiante, lo que se ve reflejado en las diferentes maneras de

resolver los problemas y que, en este caso, identificamos como un acercamiento holístico y uno analítico, en el sentido de Krutetskii (1976).

En este sentido, identificamos otro aspecto que interviene en la comprensión de los problemas, que es la codificación de la información en las propias palabras de los estudiantes y cuando esta actividad se desarrolla, gran parte del uso que pueden darle a la información se verá asociado al tipo de discurso que establezcan en la dirección de revisar y validar sus afirmaciones, lo que propicia un examen metacognitivo de sus producciones y por tanto, los coloca en una posición de observación general de los métodos empleados, lo que puede ser aprovechado por la modelización.

Además, observamos que cuando los estudiantes tienen certeza sobre una estrategia, se genera confianza en ellos, la que podría provocar que se resistan al cambio o incluso a realizar procesos de validación que vayan más allá de verificar sus resultados inmediatos, pero al mismo tiempo que defiendan su postura frente al profesor, lo que provoca un mayor compromiso por parte del estudiante y además permite observar sus argumentos en sus propias palabras.

Para modificar esta resistencia, el papel que juegan los profesores es muy importante, ya que al promover actividades en dónde los estudiantes se encuentren en el terreno de explicar sus procedimientos, no sólo estarían estimulando la aclaración de sus ideas, si no que recurrirían a procesos de validación pertinente.

Otro elemento que provocó este tránsito fue la reflexión que el investigador promovió en las estudiantes, ya que al orientar los procesos de: 1. Generalización inductiva, 2. Lectura de gráficos, 3. Variación de las condiciones de los problemas y 4. Validación del problema, ellas pudieron darse cuenta de los elementos más

relevantes para la resolución de los problemas, permitiéndoles construir soluciones adecuadas.

De manera general, podemos decir que este estudio encontró que: realizar un tránsito entre la resolución de problemas y la modelización es un proceso muy complejo y que para enfrentarlo se deben considerar los elementos siguientes:

1. Promover en los estudiantes la adquisición de las habilidades asociadas a los puntos de contacto mencionados, ya que son una base necesaria para realizar la transición.
2. Presentar secuencias didácticas que, en primer lugar, recuperen el uso de las habilidades antes mencionadas y en segundo lugar, promuevan el uso de recursos como el llenado de tablas, lectura de gráficos, procesos autónomos de validación y variación en las condiciones de los problemas.
3. Gestión de la secuencia por parte del profesor, esto implica que este debe estar en condiciones de promover en los estudiantes una reflexión sobre sus producciones, la que a través del uso de recursos metacognitivos los estudiantes podrían darse cuenta de los elementos determinantes en los problemas, ya sea a través de la constante promoción de tareas de validación o de la sugerencia del uso de esquemas y recursos gráficos para obtener soluciones ampliadas en situaciones de variación de condiciones o de la propuesta de problemas que admitan más de una solución correcta.

### **5.3. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

#### **5.3.1. Primera pregunta de investigación**

*¿De qué manera la secuencia didáctica aprovecha las habilidades reconocidas como puntos de contacto y posibilita la transición hacia la modelización?*

En principio la secuencia está diseñada para recuperar el uso de las habilidades asociadas a los puntos de contacto, pero cuando las estudiantes la desarrollaron de manera individual no lograron completarla, lo que nos indica que realizar la transición es un proceso que debemos observar con mayor cuidado.

En la entrevista-intervención, el investigador aprovechó las características de la secuencia proponiendo variaciones a las condiciones del problema, esto para realizar una reflexión del tipo metacognitivo donde podía conducir las habilidades de las estudiantes para que estas se pudieran transformar y así poder construir los modelos asociados al problema planteado, para luego interpretarlos, logrando así una transición tanto en los enfoques, como en las habilidades.

#### **5.3.2. Segunda pregunta de investigación**

*¿De qué manera el uso de la validación y la variación promovida por el profesor permite que el estudiante adquiera elementos para la modelización?*

La sugerencia sobre el uso constante de procesos de validación permitió que las estudiantes tuvieran un mayor control sobre sus producciones, apropiándose de las condiciones y de la información relevante de los problemas, permitiéndoles identificar un conjunto más amplio de estrategias, que en principio podrían favorecer, tanto los procesos de generalización, como los de su interpretación. En este caso, esos procesos de validación sirven como base cuando se plantean variaciones en las condiciones de los problemas, de ahí la importancia de proponer

problemas de modelización en secuencias didácticas adecuadas que promuevan en los estudiantes tanto una autonomía en los procesos de validación que realizan, como la admisión de variaciones en las condiciones del problema sin tener que reestructurarlo drásticamente.

## 6. CAPÍTULO ADICIONAL PARA OPTAR POR EL INGRESO AL DOCTORADO

### 6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentaremos algunos elementos que surgieron de la investigación desarrollada en la tesis de maestría y que dan pie a futuras investigaciones. Estos nos permiten considerar la posibilidad de indagar sobre la forma cómo la variación en las condiciones de los problemas admite la aplicación del modelo que es construido para resolver nuevos problemas, de ahí la ventaja estructural del modelo, del que los estudiantes podrían reconocer su estructura.

### 6.2. ANTECEDENTES

En el trabajo de maestría, con el objeto de producir un tránsito hacia *la modelización* en estudiantes con antecedentes de *resolución de problemas*, identificamos que las habilidades sobre: 1. Detección de la información relevante de la situación, 2. Organización matemática de esta información y 3. El desarrollo de procesos de verificación de procedimientos y validación de los resultados, son los puntos de contacto que nuestra investigación perfiló como necesarios, para que este tránsito se dé.

Además, encontramos que estas habilidades son una condición necesaria, pero no suficiente para propiciar este tránsito, ya que consideramos que se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones: 1. El desarrollo de procesos metacognitivos sobre procedimientos y estrategias usadas por los estudiantes y 2. La participación del profesor como promotor de la discusión apoyada en el uso de problemas sobre modelos que admitan variaciones en sus condiciones, debido a que fueron estas dos condiciones las que posibilitaron este tránsito. Esto también sugiere que pudiera

haber otras habilidades que deberían ser consideradas para provocar el tránsito mencionado, lo que abre una posible línea de investigación futura.

De las condiciones propuestas, identificamos que el papel que juegan las actividades metacognitivas es un elemento clave para reconocer la estructura del modelo a partir de la variación de las condiciones del problema y así promover que los estudiantes los consideren como estructuras generales que podrían ser utilizados para resolver cierto tipo de problemas.

En el caso de la investigación de maestría, esta variación tomó la forma de proponer nuevas preguntas de las ya planteadas a las estudiantes, con las que ellas se dieron cuenta de que, una vez establecido el modelo como recurso de trabajo, podían utilizarlos para dar solución a situaciones distintas de la original, por lo que proponemos que una vez que los estudiantes detecten al modelo como recurso de solución, se recurra a la variación de las condiciones de los problemas planteados, lo que amerita una nueva y más amplia investigación.

De esta manera pretendemos proponer una aproximación a la modelización considerando al modelo en su aspecto como entidad estructural, en donde se le enfatice como una estructura general que resuelve problemas relacionados, por lo que la variación de las condiciones será un aspecto relevante en este acercamiento.

Otro aspecto importante, que emergió de la discusión de los resultados fue el de considerar el papel de los *estilos cognitivos* de los estudiantes, originalmente propuestos por Krutetskii (1976), que en el transcurso de la investigación parecieron tener un peso importante en el desarrollo de toda la actividad y en especial en la elaboración de las estructuras cognitivas, así como en la construcción de significados, en particular detectamos que se pueden presentar distintos estilos cognitivos entre los estudiantes que se inician en la modelización, estructuras que se

pusieron de manifiesto en actividades como: 1. Detectar y organizar la información, 2. Explicar y socializar los resultados y 3. Validar sus procedimientos y su enfoque.

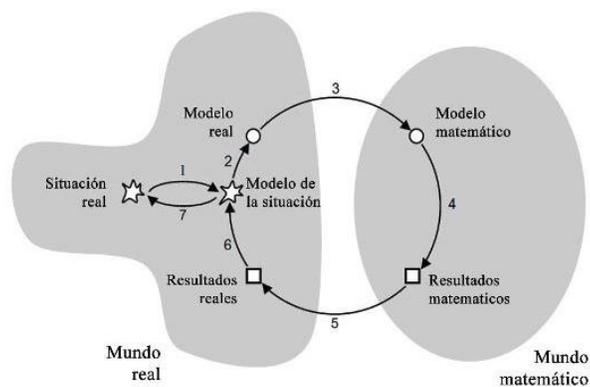
Otro interés que podría tomar cuerpo en una futura investigación es: conocer si las diferencias cognitivas presentes en los estudiantes afectan de manera sustancial las actividades metacognitivas requeridas para la modelización, de ser así ¿de qué manera lo hacen y cómo manejarlas para que se puede acceder a procesos metacognitivos?

En el siguiente apartado, presentamos los elementos teóricos que consideramos necesarios, en principio, para realizar un trabajo doctoral.

### 6.3. MARCO REFERENCIAL

En este trabajo doctoral, nos interesa conocer de qué manera la variación del problema propuesto por el profesor, permite que los estudiantes construyan la idea de modelo considerado como estructura general para la solución de ciertos problemas y para fundamentar este trabajo vamos a considerar a la modelización desde una perspectiva cognitiva, con base en el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß, (2007, p. 225) y que mostramos enseguida:

*Figura 30: Ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007)*



Tomado de: Blum y Leiß, (2007, p. 225)

Consideramos que este ciclo de modelización admite la variación del problema y que cumple con el objetivo de presentar al modelo como estructura general, lo que se puede lograr luego de que los estudiantes obtengan los resultados del modelo y tengan que validarlos e interpretarlos, el profesor podría cambiar las condiciones del problema para impulsar a los estudiantes a apreciar la propiedad estructural de la modelización asociada a la resolución de cierto tipo de problemas que tienen como base al modelo ya construido.

En el caso de la investigación de maestría en donde encontramos que E1 utiliza dos estilos cognitivos donde domina el verbal-imaginativo sobre el holístico-analítico, mientras que E2 hace uso fundamentalmente del holístico-analítico, (Pitta-Pantazi y Christou, 2009), lo que dio por resultados distintos tratamientos para desarrollar las tareas de modelización. Por ello pretendemos estudiar el efecto que tienen los distintos estilos cognitivos que los estudiantes ponen en funcionamiento cuando realizan tareas como las que hemos venido planteando. Consideramos que estas diferencias en los estilos cognitivos de los estudiantes podrían ser un elemento por considerar cuando se les proponen actividades de modelización, ya que el desarrollo de los puntos de contacto que proponemos depende de los estilos cognitivos con los que cuentan los estudiantes en el proceso de tránsito, por lo que estaremos investigando los resultados que están disponibles relativos a este tema.

Otra línea de investigación que surge de la investigación desarrollada, es profundizar en los efectos que puede provocar, no sólo un investigador frente a estudiantes individuales, sino de un profesor frente a un grupo, llevando a cabo estrategias de variación de problemas y procesos metacognitivos de validación.

En el siguiente apartado mostramos las preguntas de investigación que surgieron del trabajo realizado en la tesis de maestría y que pretendemos desarrollar a lo largo del doctorado.

#### 6.4. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN PARA UN ESTUDIO DE DOCTORADO

En la investigación de maestría también encontramos que las participantes mostraron, de distintas maneras, un dominio sobre los requisitos que consideramos como puntos de contacto, debido a que sólo percibían los problemas asociados a una solución particular, lo que las colocaba como buenas candidatas para desarrollar potencialmente a una actividad de modelización, sin embargo no fue hasta que el profesor intervino con una estrategia de variación sobre las condiciones de los problemas, que las estudiantes se dieron cuenta de que no sólo se trataba de resolver un problema y que las variaciones les hacían ver que estaba asociado a una serie de problemas de los que podían anticipar su solución, bajo el conocimiento del funcionamiento del modelo inicial al que estaremos llamando *modelo estructural*, lo que pone de relieve la posibilidad de presentar al modelo como una estructura general para las soluciones de un conjunto específico de problemas, que se puede asociar a lo que llamamos el problema ampliado mediante variaciones.

Este resultado nos propone indagar:

1. ¿De qué manera el profesor podría propiciar la idea de modelo matemático a partir de las variaciones del modelo estructural?
2. ¿Qué tipo de problemas permiten la variación de sus condiciones para perfilar la idea de modelo estructural y de cómo trabaja este?
3. ¿Qué papel tienen los puntos de contacto detectados en la resolución de problemas cuando abordamos un acercamiento a la modelización que de sentido al *modelo estructural* cuando este se formula con base en la variación de las condiciones de un problema propicio?

4. ¿El *modelo estructural* como instrumento para resolver cierto tipo de problemas podría ser utilizado para dar sentido a problemas en contexto? De ser así ¿de qué manera podría ser?

## 6.5. METODOLOGÍA

Para desarrollar este trabajo de investigación vamos a considerar una metodología del tipo cualitativo interpretativo, de acuerdo con Leavy (2014) que describe que se caracteriza por los procesos inductivos que se pueden promover para generar conocimiento.

Debido a la naturaleza de las preguntas de investigación, nos interesa trabajar con estudiantes que se encuentren cursando el último año de bachillerato, debido que tenemos la hipótesis que estos cuenta con una mayor experiencia sobre el aprendizaje basado en la resolución de problemas y también con elementos que les permitan sustentar y justificar sus producciones, en ese sentido proponemos inicialmente las siguientes etapas:

1. Aplicar un cuestionario para poder identificar las habilidades sobre resolución de problemas que poseen y verificar si cuentan con las habilidades asociadas a los puntos de contacto que hemos identificado.
2. Realizar entrevistas-intervención que tendrá como objetivos: 1. Identificar los estilos cognitivos que poseen que poseen los estudiantes, 2. Establecer habilidades operativas, como la verificación de los procedimientos y la validación de los resultados y 3. Identificar las habilidades discursivas de nuestra muestra, puestas en funcionamiento para la justificación y la sustentación de sus producciones.
3. Aplicar un cuestionario sobre modelización que considere problemas que permitan la variación en las condiciones y que sean adaptables para

desarrollar actividades metacognitivas que les permitan percibir la generalidad del modelo con base en problemas que admitan variaciones para adoptar lo que llamamos un *modelo estructural* asociado a una categoría de problemas.

4. Realizar una entrevista-intervención para conocer, en primer lugar, de qué manera los estudiantes enfrentan tareas de modelización y, en segundo lugar, proponer nuevos problemas que se resuelvan utilizando los modelos ya construidos, para fomentar la idea de modelo como recurso estructural para la solución de problemas asociados.

Pretendemos realizar la toma de datos a partir de cuestionarios realizados en GeoGebra Classroom, ya que el tipo de herramientas que ofrece podrían ser de utilidad para resolver las actividades y para contar con datos que recuperen las producciones escritas. Además, las entrevistas-intervención se realizarán de manera individual utilizando zoom, debido a que permite grabar la sesión y compartir la imagen de la pantalla, en este caso la de los estudiantes que en particular puede proporcionar una relación más cercana entre el estudiante y el investigador.

## **6.6. CONSIDERACIONES FINALES**

Para llevar a cabo esta investigación, que consideraría 1. La caracterización de los estilos cognitivos de los estudiantes, 2. Las habilidades asociadas a los puntos de contacto, antes mencionados, así como el desarrollo de las habilidades cognitivas asociadas a la verificación de los procedimientos y la validación de los resultados y 3. La variación en las condiciones de los problemas como justificación de un *modelo estructural*, por lo que nos interesa cumplir los siguientes objetivos:

1. Identificar problemas de modelización que admitan la variación en sus condiciones para construir la idea de *modelo estructural*.

2. Determinar las habilidades sobre resolución de problemas, argumentación y matematización que poseen los estudiantes que participarán en este estudio.
3. Establecer los estilos cognitivos de los estudiantes que participarán en este estudio.
4. Establecer la forma cómo los estilos cognitivos afectan los puntos de contacto y finalmente a la conformación de un *modelo estructural*.

A continuación, presentamos el cronograma de las actividades que pretendemos realizar durante el doctorado.

*Tabla 22: Cronograma de actividades*

Cronograma de actividades									
	Año		2		3		4		
	Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Asistencia a seminarios									
Revisión de la literatura para ampliar el marco teórico									
Diseño de actividades									
Estancia doctoral									
Aplicación de una prueba piloto y su análisis									
Examen predoctoral									
Adecuación de la prueba piloto y aplicación del instrumento final									
Análisis de los resultados obtenidos con el instrumento final									
Escritura de la versión final de la tesis doctoral									
Examen doctoral									

## 7. REFERENCIAS

- Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education—Discussion document. *Educational studies in mathematics*, 51 (1), 149-171.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). Deal with modelling problems. *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics-ICTMA*, 12, 222-231.
- Blum, W. y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1 (1), 45-58.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process?. *Educational Studies in Mathematics*, 99 (2), 137-159.
- Duval, R. (2016). *El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modelling. *In Mathematical modelling in education research and practice* (pp. 173-183). Springer, Cham.
- Greefrath, G., Hertleif, C., y Siller, H. S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50 (1), 233-244.

- Hankeln, C. (2020). Mathematical modeling in Germany and France: a comparison of students' modeling processes. *Educational Studies in Mathematics*, 103 (2), 209-229.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education* 32, 195-222.
- Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. *Mathematics education research: Implications for the 80's*, 111-26.
- krutetskii, v. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The university of Chicago Press.
- Leavy, P. (2014). *The Oxford handbook of qualitative research*. Oxford University Press, USA.
- Mason, J. (2015). When Is a Problem? Contribution in Honour of Jeremy Kilpatrick. In *Pursuing Excellence in Mathematics Education* (pp. 55-69). Springer, Cham.
- NCTM (2000). Principles, NCTM (2000). standards for school mathematics, NCTM. Reston, VA.
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). Springer.
- OCDE (2004a). Informe, PISA (2003). Aprender para el Mundo de Mañana. *Madrid. Santillana*.
- OCDE (2004b). Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.
- OECD (2015), PISA, O. (2015). Released Field Trial: Cognitive Items.

- OECD (2019), PISA 2018 Assessment and Analytical Framework, PISA, OECD Publishing, Paris.
- Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (1), 5-26.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (decimoquinta reimpresión). Editorial Trillas.
- Secretaría de Educación (S.E.). (2003) *Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica de Honduras*. Tegucigalpa, Honduras.
- Secretaría de Educación (S.E.). (2018) *Guía del Maestro 7º grado*. Tegucigalpa, Honduras. PROMETAM Fase III.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1), 9-34.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196 (2), 1-38.
- Sengul, S., y Katranci, Y. (2012). Metacognitive aspects of solving function problems. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 2178-2182.
- Trigueros M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9 (46), 75-87.
- Villarreal, M. E., Esteley, C. B., y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM*, 50 (1), 327-341.

Vygotsky, L. S. (1982). Om barnets psykiske udvikling [On the child's psychic development]. *Copenhagen: Nyt Nordisk (as cited in Hedegaard, 1990).*

## 8. ANEXOS

### 8.1. ANEXO 1: CUESTIONARIOS APLICADOS

#### 8.1.1. *Pre-test*

El cuestionario se encuentra en la siguiente dirección:

<https://www.geogebra.org/m/wuwqywpv>

#### 8.1.2. *Test*

El cuestionario se encuentra en la siguiente dirección:

<https://www.geogebra.org/m/r4qtddhn>

### 8.2. ANEXO 2: TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS

#### 8.2.1. *Sesión 1: E1*

La transcripción se encuentra en la siguiente dirección: [https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe\\_aguilar\\_cinvestav\\_mx/EecRhN\\_15hZFjNpXRSf6deEBXHV4ipEFmBBqYWIW88YKeg?e=xpjseG](https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EecRhN_15hZFjNpXRSf6deEBXHV4ipEFmBBqYWIW88YKeg?e=xpjseG)

#### 8.2.2. *Sesión 3: E1*

La transcripción se encuentra en la siguiente dirección: [https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe\\_aguilar\\_cinvestav\\_mx/EZk9S75dpcxEgLCChIWRwkEBCDK90EOLtbkCRMzzz6sj8Q?e=df3cyW](https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EZk9S75dpcxEgLCChIWRwkEBCDK90EOLtbkCRMzzz6sj8Q?e=df3cyW)

#### 8.2.3. *Sesión 1: E2*

La transcripción se encuentra en la siguiente dirección: [https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe\\_aguilar\\_cinvestav\\_mx/ERdQ1FXakitJtvqzxy26Q\\_cBWZspbvipUHmsXwp7rb6yog?e=LSt3kk](https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/ERdQ1FXakitJtvqzxy26Q_cBWZspbvipUHmsXwp7rb6yog?e=LSt3kk)

#### 8.2.4. *Sesión 2: E2*

La transcripción se encuentra en la siguiente dirección: [https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe\\_aguilar\\_cinvestav\\_mx/EXIBkLxGmoRA19n9DKh5jnoB8faOZSlyFpzcoGxUAev0-w?e=rPONB1](https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EXIBkLxGmoRA19n9DKh5jnoB8faOZSlyFpzcoGxUAev0-w?e=rPONB1)

### 8.2.5. Sesión 3: E2

La transcripción se encuentra en la siguiente dirección: [https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe\\_aguilar\\_cinvestav\\_mx/EclhPLm5BWtKn8tk4d29LgBW61MKaQWrtgpeA4zjTPAwg?e=8RB96f](https://cinvestav365-my.sharepoint.com/:w:/g/personal/noe_aguilar_cinvestav_mx/EclhPLm5BWtKn8tk4d29LgBW61MKaQWrtgpeA4zjTPAwg?e=8RB96f)

## 8.3. ANEXO 3: SOLUCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS

### 8.3.1. Pre-test: E1

## Pre-test E1

Enseguida mostramos las respuestas de E1 ofrecidas en el pre-test.

### Agradecimiento y permisos

#### Agradecimiento

Muchas gracias por tu ayuda al completar este cuestionario, tus respuestas serán muy valiosas y no te preocupés si creés que no son correctas, te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Enseguida te solicitaré algunos permisos con relación al uso de la información que proporciones.

#### Tarea 1: Pregunta 1

¿Estás de acuerdo de participar en este estudio?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No

#### Tarea 2: Pregunta 2

Una vez finalizado el cuestionario, nos reuniremos a través de zoom para platicar sobre tus respuestas, ¿estás de acuerdo de participar en una entrevista?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No

#### Tarea 3: Pregunta 3

En caso de participar en la entrevista, ¿está de acuerdo de que esta sea grabada?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No  
C  No aplica

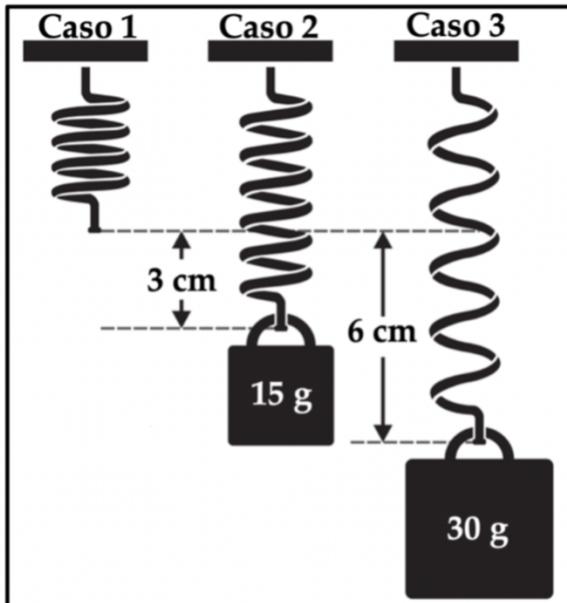
## Actividad 1

En la figura se muestra un resorte que soporta hasta 60 g de peso sin que pierda su forma.

A este resorte se le cuelgan algunos objetos de diferente peso.

Observe que en el caso 1 todavía no se ha colgado algún objeto.

Figura 1: Resorte con distintos pesos



### Tarea 7: Pregunta 1

Explore la imagen y comente sus observaciones.

- Aa  $\pi$  Caso 1: El resorte no tiene ningún peso y no se ha estirado.  
Caso 2: Al resorte se le colocó 15 g y se alargó 3 cm más que el Caso 1.  
Caso 3: Al resorte se le colocó 30 g (el doble del peso que se colocó al Caso 2), se alargó 6 cm más que el Caso 1 y se alargó el doble del Caso 2.

### Tarea 8: Pregunta 2

¿Qué le sucede al resorte cuando se le cuelga un objeto con un peso mayor a 60 g?

- Aa  $\pi$  Pierde su forma y toma la forma de una línea

### Pregunta 3

¿Cuántos centímetros se estira el resorte en cada caso de la Figura 1?

### Tarea 9

Caso 1 (0 g):

Aa π No se estira nada

---

### Tarea 10

Caso 2 (15 g):

Aa π Se estira 3 cm

---

### Tarea 11

Caso 3 (30 g):

Aa π Se estira 6 cm

---

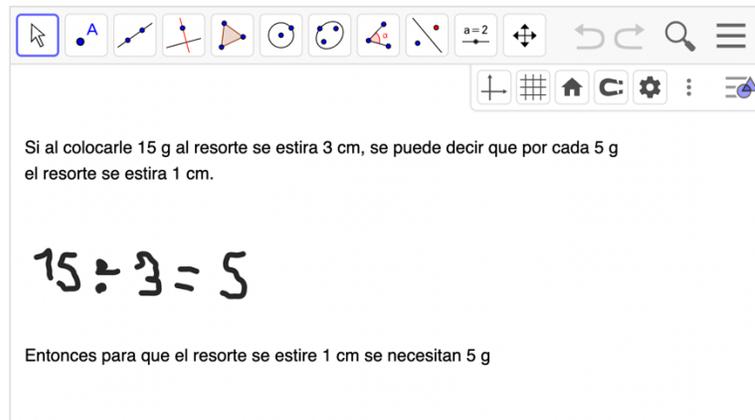
### Tarea 12: Pregunta 4

Para estirar este resorte 1 cm, ¿Cuántos gramos debemos colgar de el?

Aa π Debemos colocar 5 g

---

### Tarea 13



Si al colocarle 15 g al resorte se estira 3 cm, se puede decir que por cada 5 g el resorte se estira 1 cm.

$$15 \div 3 = 5$$

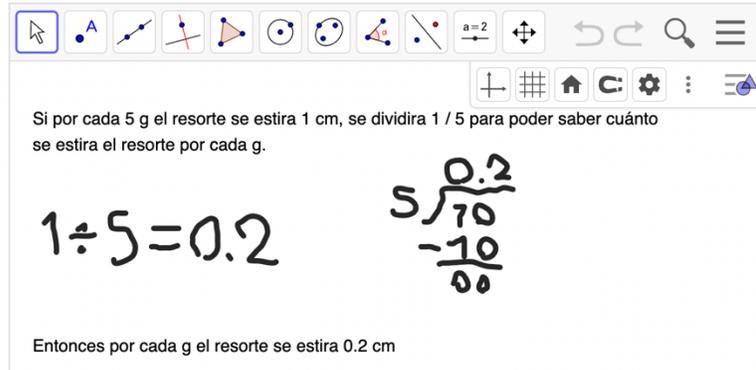
Entonces para que el resorte se estire 1 cm se necesitan 5 g

### Tarea 14: Pregunta 5

Si colgamos 1 gramo, ¿Cuántos centímetros se estira el resorte?

Aa π Se estira 0.2 cm

### Tarea 15



Si por cada 5 g el resorte se estira 1 cm, se dividira 1 / 5 para poder saber cuánto se estira el resorte por cada g.

$$1 \div 5 = 0.2$$
$$\begin{array}{r} 0.2 \\ 5 \overline{) 1.0} \\ \underline{-10} \\ 00 \end{array}$$

Entonces por cada g el resorte se estira 0.2 cm

### Tarea 16: Pregunta 6

¿Encuentre una relación entre el número de gramos y los centímetros estirados? ¿Cuál será esta?

Aa π Por cada g que se añade el resorte se estira 0.2 cm

### Pregunta 7

Con la información obtenida anteriormente, complete la siguiente tabla:

### Tarea 17



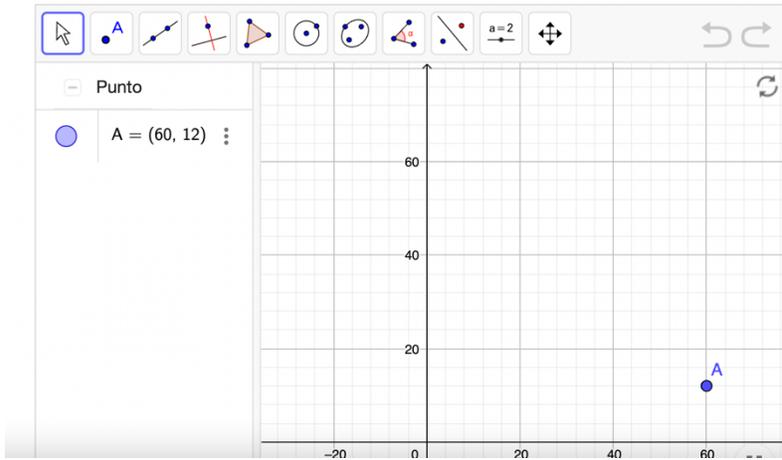
Gramos (x)	Centímetros (y)
10	2
17	3.4
33	6.6
52	10.4
x	y

### Pregunta 8

Suponiendo que a este resorte se le puede colgar un peso de hasta 60 g, grafique la relación que existe entre el número de gramos colgados y centímetros estirados.

*El eje horizontal representa los gramos y el eje vertical representa los centímetros.*

### Tarea 18



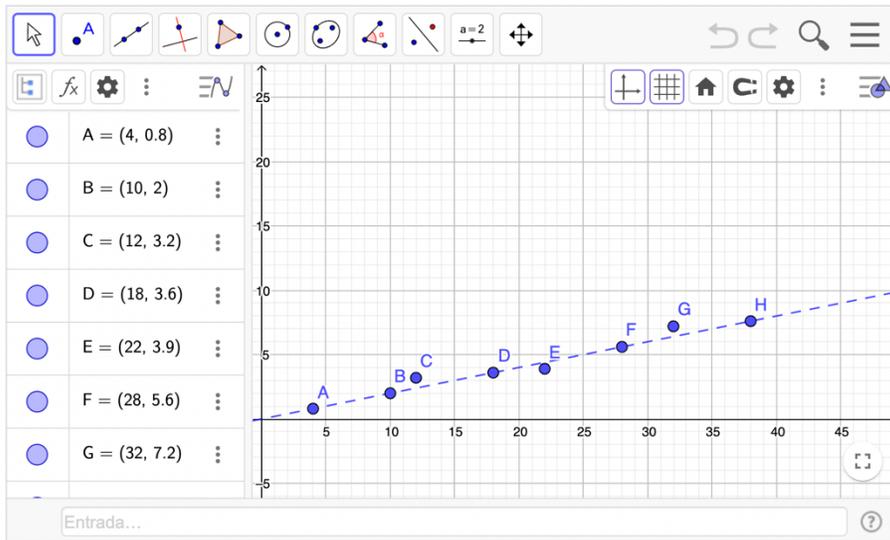
### Pregunta 9

Un estudiante utilizó el resorte de la figura 1, le colgó algunos pesos y obtuvo los datos que se muestran en la siguiente tabla. Ubique cada punto escribiendo (*gramos, centímetros*).

*El eje horizontal representa los gramos y el eje vertical representa los centímetros.*

Gramos ( $x$ )	Centímetros ( $y$ )
4	0.8
10	2
12	3.2
18	3.6
22	3.9
28	5.6
32	7.2
38	7.6

### Tarea 19



### Tarea 20: Pregunta 10.

¿Todos los puntos de la tabla anterior cumplen con la relación que existe entre el número de gramos y los centímetros estirados? ¿Cuales no?

Aa  π No

C, E, y G

### Tarea 21: Pregunta 11.

¿Qué sucede con los datos de la tabla que no cumplen con esta relación? ¿Tienen algo en común?

Aa  π Se salen de la trayectoria planteada en el cartesiano

Si, que ninguno de esos están correctos

### Tarea 22: Pregunta 12.

Escriba una conclusión sobre la actividad.

Aa  π A medida que se le agregaba un g el resorte se estiraba

## Actividad 2

### Problema:

En la dulcería de un cine se ofrecen los siguientes combos:

Combo #1	Combo #2
	
L. 83.00	L. 242.00

### Tarea 23: Pregunta 1

Explore la imagen y comente sus observaciones:



Combo #1: Se observa una caja de palomitas y refresco

Combo #2: Se observa dos cajas de palomitas y cuatro refrescos.

(El doble de la caja de palomitas del combo #1 y el cuádruple del refresco del combo #1)

### Tarea 24: Pregunta 2

¿Qué datos se ofrecen en la figura?



Por una caja de palomitas y por un refresco el precio es de L. 83 y por dos cajas de palomitas y por cuatro refrescos el precio es de L. 242

### Tarea 25: Pregunta 3

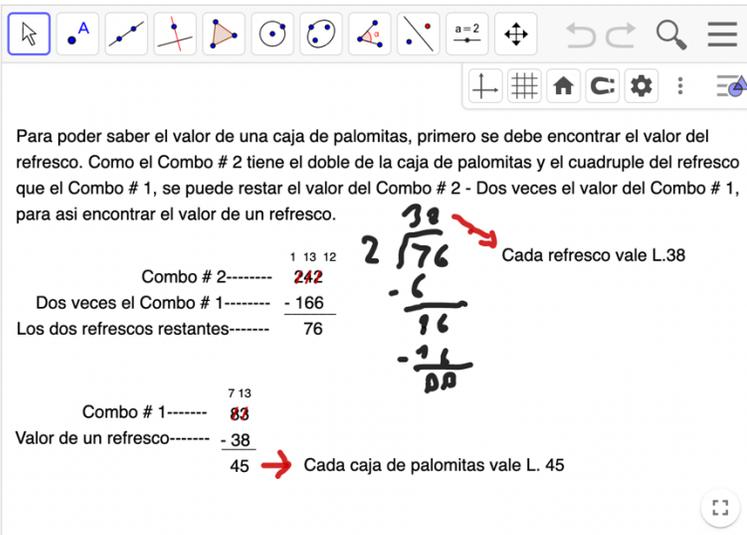
Con la información anterior, ¿Cuál es el precio de una caja de palomitas?

**Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.**

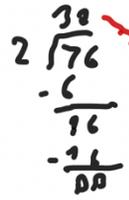


El precio de una caja de palomitas es de L. 45

### Tarea 26



Para poder saber el valor de una caja de palomitas, primero se debe encontrar el valor del refresco. Como el Combo # 2 tiene el doble de la caja de palomitas y el cuádruple del refresco que el Combo # 1, se puede restar el valor del Combo # 2 - Dos veces el valor del Combo # 1, para así encontrar el valor de un refresco.

Combo # 2-----	1 13 12	242		Cada refresco vale L.38
Dos veces el Combo # 1-----		- 166		
Los dos refrescos restantes-----		76		

Combo # 1-----	7 13	83		Cada caja de palomitas vale L. 45
Valor de un refresco-----		- 38		

### Tarea 27: Pregunta 4

¿Cuál es el precio de un refresco?

Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.

Aa π El precio de un refresco es de L. 38

### Tarea 28

En la tarea 26, se necesitó encontrar primero el valor del refresco, para poder encontrar el valor de una caja de palomitas.

Combo # 2-----	<sup>1 13 12</sup> 242
Dos veces el Combo # 1-----	- 166
Los dos refrescos restantes-----	76

$2 \overline{) 76}$   
- 6  
16  
- 16  
00

El valor de cada refresco es de L. 38

### Tarea 29: Pregunta 5

Si tuviera que explicar este problema a otro estudiante, ¿Qué sugerencias le daría para que pueda resolverlo?

Aa π Que primero debe encontrar el valor del refresco y luego el valor de la caja de palomitas.

### Tarea 30

Para poder saber el valor de una caja de palomitas, primero se debe encontrar el valor del refresco. Como el Combo # 2 tiene el doble de la caja de palomitas y el cuádruple del refresco que el Combo # 1, se puede restar el valor del Combo # 2 - Dos veces el valor del Combo # 1, para así encontrar el valor de un refresco.

Combo # 2-----	<sup>1 13 12</sup> 242
Dos veces el Combo # 1-----	- 166
Los dos refrescos restantes-----	76

$2 \overline{) 76}$   
- 6  
16  
- 16  
00

Cada refresco vale L. 38

Combo # 1-----	<sup>7 13</sup> 83
Valor de un refresco-----	- 38
	45

Cada caja de palomitas vale L. 45

A B

## Actividad 3

Sea  $n$  un número de la forma  $abcd$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son los dígitos del número  $n$ .

Encontremos todos los números  $n$  que cumplen las siguientes condiciones:

**Condición 1:**  $4000 \leq n < 6000$

**Condición 2:**  $n$  es múltiplo de 5

**Condición 3:**  $3 \leq b < c \leq d$

### Pregunta 1

Con sus propias palabras describa cada condición:

### Tarea 31

**Condición 1:**

 4000 tiene que ser menor o igual a  $n$  y  $n$  debe ser menor que 6000, es decir que los numero  $n$  están entre 4000 a 6000.

### Tarea 32

**Condición 2:**

 El número  $n$  tiene que ser múltiplo de 5, es decir que el numero  $n$  tiene que terminar en 0 o en 5

### Tarea 33

**Condición 3:**

 3 debe ser menor o igual a  $b$ , el dígito  $b$  tiene que ser menor que  $c$ , y el dígito  $c$  tiene que ser menor o igual a  $d$ .

### Tarea 34: Pregunta 2

Sin resolver la actividad, ¿cree que hayan muchos números que cumplan estas condiciones al mismo tiempo?

 No, porque con la condición 1 se restringen algunos numero ya que 4000 debe ser menor o igual a  $n$  y  $n$  debe ser menor que 6000, luego con la condición 2 se eliminan algunos números ya que obligatoriamente deben terminar en 0 o 5 para que se múltiplo de 5, y ya con la condición 3 se reduce mucho por que los dígitos de  $n$  debe cumplir que 3 debe ser menor o igual a  $b$ , el dígito  $b$  tiene que ser menor que  $c$ , y el dígito  $c$  tiene que ser menor o igual a  $d$ .

### Pregunta 3

Dados los siguientes números, responda las preguntas.

#### Tarea 35

¿El número 6455 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo?¿por qué?

No, porque no cumple con la condición 1, ya que n es un numero que esta entre 4000 a 6000, en el momento que no cumpla una condición ya no es el numero que se busca

---

#### Tarea 36

¿El número 5450 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo?¿por qué?

No, aunque cumpla la condición 1 y la condición 5, pero no cumple la condición 3, porque n debe terminar en 5 para que se pueda cumplir todas la condiciones

---

#### Tarea 37

¿El número 4445 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo?¿por qué?

No, aunque cumpla la condición 1 y la condición 2, pero no cumple la condición 3, porque el dígito b tiene que ser menor que el dígito c, no puede ser igual a c

---

#### Tarea 38

¿El número 5345 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo?¿por qué?

Si, porque cumple la condición 1, la condición 2 y la condición 3 ya que cada dígito cumple con ella.

---

#### Tarea 39

¿El número 6335 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo?¿por qué?

No, porque no cumple con la condición 1, ya que n es menor que 6000

---

#### Tarea 40: Pregunta 4

Escriba un número que cumple las tres condiciones al mismo tiempo, diferente a los encontrados anteriormente.

5544

---

### Tarea 41: Pregunta 5

Escriba todos los números que cumplen todas las condiciones al mismo tiempo.

Aa  $\pi$  4455  
4345  
5455  
5345

### Tarea 42: Pregunta 6

¿Porqué está seguro que sólo esos números cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo?

Aa  $\pi$  Porque esos números se encuentran entre 4000 a 6000, son múltiplos de 5 y, 3 es menor o igual a b, el dígito b es menor que c, y el dígito c es menor o igual a d

### Tarea 43: Pregunta 6

Si a un número que cumple todas las condiciones al mismo tiempo le sumamos 5, ¿el resultado también cumpliría con todas las condiciones al mismo tiempo?

**Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.**

Aa  $\pi$  No, porque terminaría en 0 y no cumpliría la condición 3, ya que d debe ser mayor que los dígitos b y c, c sería mayor que d y ya no cumpliría la condición 3

### Tarea 44

Al sumarle 5 a cualquiera que de los números terminara en 0, porque todos terminan en 5 y aunque cumpla la condición 1 y la condición 2, pero no cumpliría la condición 3, ya que d debe ser mayor que los dígitos b y c, c sería mayor que d y ya no cumpliría la condición 3.

4455	4345	5455	5345
+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
4460	4350	5460	5350

Entrada...

## Actividad 4

### Problema

Los primeros dos números de una sucesión son 1 y 2. Si cada término que sigue es la suma de todos los números anteriores a él. Se presentan algunas preguntas, para responder observe la tabla:

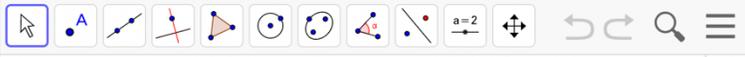
Posición	Término
1	1
2	2
3	$1 + 2 = 3$
4	$1 + 2 + 3 = 6$
5	$1 + 2 + 3 + 6 = 12$
⋮	⋮
20	¿?
⋮	⋮
$n$	¿?

### Tarea 45: Pregunta 1

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 6?

Aa  $\pi$  El valor del término que está en la posición 6 es 24

### Tarea 46



Se notó que el siguiente término será el doble que el término anterior, porque la suma se sigue repitiendo y le añade el término anterior.

A si que, como el siguiente termino será el doble que el término anterior.

Si el término que se encuentra en posición es 12, entonces el término que se encuentra en la posición 6 es 24.

## Pregunta 2

Con la información anterior, complete la siguiente tabla

### Tarea 47

Posicion	operaciones	Termino
7	$1+2+3+6+12+24=48$	48
8	$1+2+3+6+12+24+48=96$	96
9	$1+2+3+6+12+24+48+96=192$	192
10	$1+2+3+6+12+24+48+96+192=384$	384
11	$1+2+3+6+12+24+48+96+192+384=768$	768

### Tarea 48: Pregunta 3

Explique cómo crecen los números que siguen la sucesión.

Se nota que el numero de abajo es doble que el numero de arriba

### Tarea 49: Pregunta 4

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 20?

393216

### Tarea 51: Pregunta 5

De manera general, ¿Cuál es el término que está en la posición  $n$  ?

$2(n-1)$

### Tarea 53: Pregunta 6

Escriba algunas observaciones sobre el problema.

Se noto que el siguiente termino seria el doble que el termino anterior.

### 8.3.2. Pre-test: E2

## Pre-test E2

Enseguida mostramos las respuestas de E2 ofrecidas en el pre-test.

### Agradecimiento y permisos

#### Agradecimiento

Muchas gracias por tu ayuda al completar este cuestionario, tus respuestas serán muy valiosas y no te preocupés si creés que no son correctas, te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Enseguida te solicitaré algunos permisos con relación al uso de la información que proporciones.

#### Tarea 1: Pregunta 1

¿Estás de acuerdo de participar en este estudio?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No

#### Tarea 2: Pregunta 2

Una vez finalizado el cuestionario, nos reuniremos a través de zoom para platicar sobre tus respuestas, ¿estás de acuerdo de participar en una entrevista?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No

#### Tarea 3: Pregunta 3

En caso de participar en la entrevista, ¿estás de acuerdo de que esta sea grabada?

Marca todas las que correspondan

- A  Si  
B  No  
C  No aplica

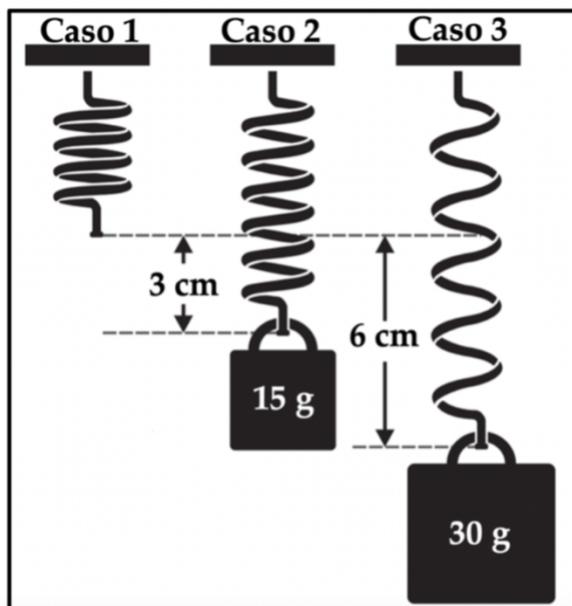
### Actividad 1

En la figura se muestra un resorte que soporta hasta 60 g de peso sin que pierda su forma.

A este resorte se le cuelgan algunos objetos de diferente peso.

Observe que en el caso 1 todavía no se ha colgado algún objeto.

Figura 1: Resorte con distintos pesos



#### Tarea 7: Pregunta 1

Explore la imagen y comente sus observaciones.

Aa  $\pi$  Se podría decir que cada 15 g de peso que se añade al resorte este aumentara su tamaño por 3 cm. Entonces, en el caso 1 el resorte está en su tamaño y forma original, en el caso 2 se le agregan 15 g de peso y aumenta 3 cm de su tamaño. En el caso 3 se agregan 15 g más de peso, siendo ahora 30 g, por lo que aumenta el tamaño del resorte 3 cm, obteniendo en total 6 cm más de tamaño con respecto a su tamaño original.

#### Tarea 8: Pregunta 2

¿Qué le sucede al resorte cuando se le cuelga un objeto con un peso mayor a 60 g?

Aa  $\pi$  El resorte terminaría perdiendo completamente su forma, ya que soporta nada más hasta los 60 g de peso sin que esta se modifique. Incluso, podría ser posible que el resorte no soporte tanto peso y termine rompiéndose, o puede que solo se estire hasta su máximo tamaño.

#### Pregunta 3

¿Cuántos centímetros se estira el resorte en cada caso de la Figura 1?

#### Tarea 9

Caso 1 (0 g):

Aa  $\pi$  0 cm. El resorte permanece en su forma y tamaño original.

#### Tarea 10

Caso 2 (15 g):

Aa  $\pi$  Se estira 3 cm con respecto al caso 1.

#### Tarea 11

Caso 3 (30 g):

Aa  $\pi$  Se estira 6 cm con respecto al caso 1, es decir 3 cm más que en el caso 2.

### Tarea 12: Pregunta 4

Para estirar este resorte 1 cm, ¿Cuántos gramos debemos colgar de él?

Aa π Debemos colgar 5 gramos.

### Tarea 13

$$\frac{15g}{3\text{ cm}} = \frac{5g}{1\text{ cm}} = 5g$$

### Tarea 14: Pregunta 5

Si colgamos 1 gramo, ¿Cuántos centímetros se estira el resorte?

Aa π Se estirara 0.2 cm

### Tarea 15

$$\frac{1}{5} = 0.2\text{ cm}$$

### Tarea 16: Pregunta 6

¿Encuentre una relación entre el número de gramos y los centímetros estirados? ¿Cuál será esta?

Aa  $\pi$  La relación entre gramos y centímetros estirados es de  $0.2x$

### Pregunta 7

Con la información obtenida anteriormente, complete la siguiente tabla:

### Tarea 17

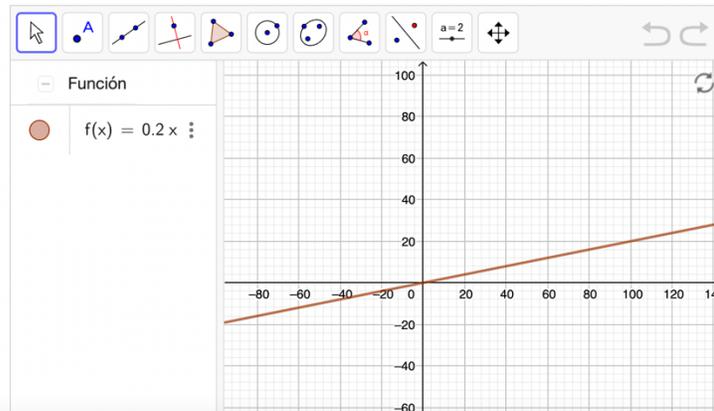
Gramos (x)	Centímetros (y)
10	2
17	3.4
1.32	6.6
52	10.4
x	0.2

### Pregunta 8

Suponiendo que a este resorte se le puede colgar un peso de hasta 60 g, grafique la relación que existe entre el número de gramos colgados y centímetros estirados.

**El eje horizontal representa los gramos y el eje vertical representa los centímetros.**

### Tarea 18



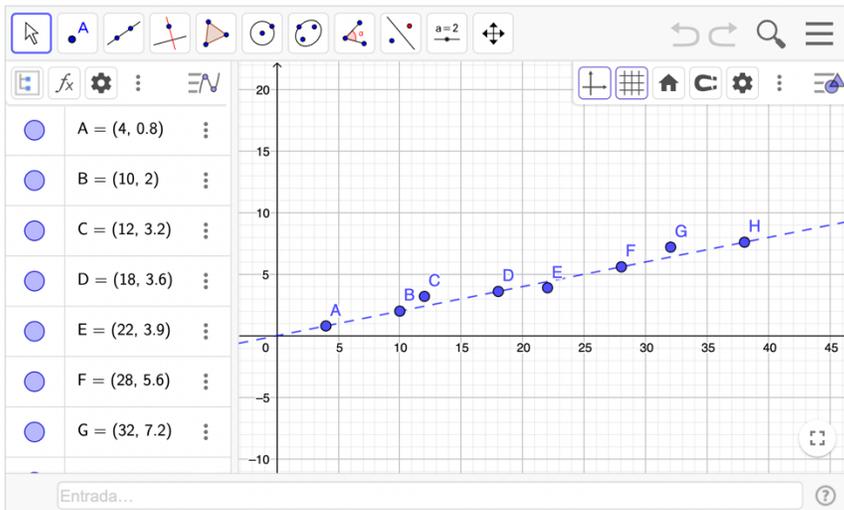
### Pregunta 9

Un estudiante utilizó el resorte de la figura 1, le colgó algunos pesos y obtuvo los datos que se muestran en la siguiente tabla. Ubique cada punto escribiendo (*gramos, centímetros*).

El eje horizontal representa los gramos y el eje vertical representa los centímetros.

Gramos (x)	Centímetros (y)
4	0.8
10	2
12	3.2
18	3.6
22	3.9
28	5.6
32	7.2
38	7.6

### Tarea 19



### Tarea 20: Pregunta 10.

¿Todos los puntos de la tabla anterior cumplen con la relación que existe entre el número de gramos y los centímetros estirados? ¿Cuales no?

Aa π No, no todos cumplen con la relación, estos son el punto C(12, 3.2), E(22, 3.9), G(32, 7.2)

### Tarea 21: Pregunta 11.

¿Qué sucede con los datos de la tabla que no cumplen con esta relación? ¿Tienen algo en común?

Aa π Los datos que no cumplen con esta relación son los puntos C, E y G y lo que sucede es que quedan fuera de la gráfica.

### Tarea 22: Pregunta 12.

Escriba una conclusión sobre la actividad.

Aa π Podemos concluir que entre más peso se va agregando al resorte, su tamaño irá aumentando, por lo que su forma también.

## Actividad 2

Problema:

En la dulcería de un cine se ofrecen los siguientes combos:

Combo #1	Combo #2
	
L. 83.00	L. 242.00

### Tarea 23: Pregunta 1

Explore la imagen y comente sus observaciones:

- Aa  $\pi$  En el combo 1 nos venden 1 caja de palomitas y 1 refresco por L. 83.  
En el combo 2 nos venden 2 cajas de palomitas y 4 refrescos por L. 242.

### Tarea 24: Pregunta 2

¿Qué datos se ofrecen en la figura?

- Aa  $\pi$  X= Cantidad de refrescos  
Y= Cantidad de palomitas

$$x+y=83$$
$$2x+4y=242$$

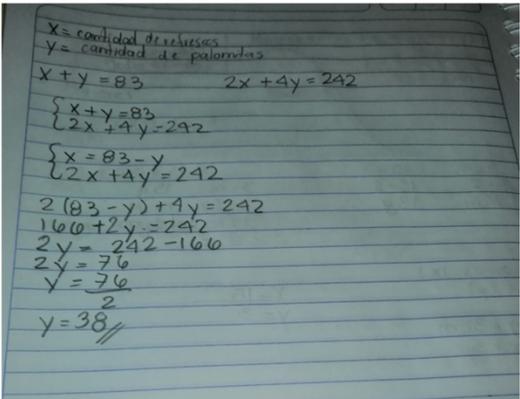
### Tarea 25: Pregunta 3

Con la información anterior, ¿Cuál es el precio de una caja de palomitas?

Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.

- Aa  $\pi$  y= 38  
El precio de una caja de palomitas es de 38 lempiras.

### Tarea 26



The image shows a handwritten solution for the system of equations:

$$\begin{cases} x+y=83 \\ 2x+4y=242 \end{cases}$$

The student uses the elimination method:

$$\begin{cases} x+y=83 \\ 2x+4y=242 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=83-y \\ 2x+4y=242 \end{cases}$$
$$2(83-y)+4y=242$$
$$166+2y=242$$
$$2y=242-166$$
$$2y=76$$
$$y=\frac{76}{2}$$
$$y=38$$

### Tarea 27: Pregunta 4

¿Cuál es el precio de un refresco?

Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.

Aa  $\pi$  x=45  
El precio de un refresco es de 45 lempiras.

### Tarea 28

A screenshot of a digital workspace showing a handwritten solution for a system of linear equations. The workspace includes a toolbar with various drawing and editing tools. The handwritten work is as follows:

$$\begin{aligned} x &= \text{cantidad de refrescos} \\ y &= \text{cantidad de palomitas} \\ x + y &= 83 & 2x + 4y &= 242 \end{aligned}$$
$$\begin{cases} x + y = 83 \\ 2x + 4y = 242 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sustituir} \\ x = 83 - y \\ x = 83 - 38 \\ x = 45 \end{array}$$
$$\begin{aligned} 2(83 - y) + 4y &= 242 \\ 166 + 2y &= 242 \\ 2y &= 242 - 166 \\ 2y &= 76 \\ y &= \frac{76}{2} \\ y &= 38 \end{aligned}$$

### Tarea 29: Pregunta 5

Si tuviera que explicar este problema a otro estudiante, ¿Qué sugerencias le daría para que pueda resolverlo?

Aa  $\pi$  Le diría que usara un sistema de ecuaciones de 2 variables para resolver el problema, ya que en esta situación es la mejor forma de hacerlo y que lo resuelva por cualquiera de los métodos, ya sea sustitución o eliminación.

## Actividad 3

Sea  $n$  un número de la forma  $abcd$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son los dígitos del número  $n$ .

Encontremos todos los números  $n$  que cumplen las siguientes condiciones:

**Condición 1:**  $4000 \leq n < 6000$

**Condición 2:**  $n$  es múltiplo de 5

**Condición 3:**  $3 \leq b < c \leq d$

### Pregunta 1

Con sus propias palabras describa cada condición:

### Tarea 31

**Condición 1:**

  Se nos dice que los números  $n$ , son todos aquellos números mayores o iguales a 4000 y menores a 6000

### Tarea 32

**Condición 2:**

  Se nos dice que los números  $n$ , son todos aquellos números que se pueden multiplicar por 5, si estos números contienen a 5 varias veces o si estos números terminan en 5 o 0.

### Tarea 33

**Condición 3:**

  Se nos dice que los números  $n$ , son todos los números que su segundo dígito ( $b$ ), es mayor o igual a 3 y que su tercer dígito ( $c$ ) es mayor a su segundo dígito ( $b$ ) y que su cuarto dígito ( $d$ ) es mayor o igual a su tercer dígito ( $c$ ).

### Tarea 34: Pregunta 2

Sin resolver la actividad, ¿cree que hayan muchos números que cumplan estas condiciones al mismo tiempo?

  No, no creo que haya muchos números que cumplan las 3 condiciones al mismo tiempo.

### Pregunta 3

Dados los siguientes números, responda las preguntas.

### Tarea 35

¿El número 6455 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?

  No, no cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 2, siendo un múltiplo de 5, cumple con la condición 3, pero no cumple la condición 1 al ser un dígito mayor que 6000.

### Tarea 36

¿El número 5450 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?

  No no cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 1 al ser menor que 6000, cumple también con la condición 2 al ser múltiplo de 5, sin embargo, no cumple con la condición 3 por el valor de sus dígitos.

### Tarea 37

¿El número 4445 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?

  No no cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 1 siendo menor que 6000, cumple también con la condición 2 al ser múltiplo de 5, sin embargo, no cumple con la condición 3 por el valor de sus dígitos.

### Tarea 38

¿El número 5345 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?

Aa π Si, si cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 1 siendo menor que 6000, cumple también con la condición 2 al ser múltiplo de 5, y cumple con la condición 3 por el valor de sus dígitos.

### Tarea 39

¿El número 6335 cumple con las tres condiciones al mismo tiempo? ¿por qué?

Aa π No, no cumple con las tres condiciones al mismo tiempo, ya que cumple con la condición 2, siendo un múltiplo de 5, pero no cumple la condición 1 al ser un dígito mayor que 6000, al igual que no cumple con la condición 3 por el valor de sus dígitos.

### Tarea 40: Pregunta 4

Escriba un número que cumple las tres condiciones al mismo tiempo, diferente a los encontrados anteriormente.

Aa π 4345: es mayor que 4000 y menor que 6000, es múltiplo de 5 y cumple con la condición 3.

### Tarea 41: Pregunta 5

Escriba todos los números que cumplen todas las condiciones al mismo tiempo.

Aa π 4345, 4355, 4455, 5345, 5355, 5455.

### Tarea 42: Pregunta 6

¿Porqué está seguro que sólo esos números cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo?

Aa π Estoy segura que cumplen con todas las condiciones al mismo tiempo, ya que hice una lista con los números posibles que cumplían con la condición 1 y 2 y luego solo verifique que estos cumplieran la condición 3.

### Tarea 43: Pregunta 6

Si a un número que cumple todas las condiciones al mismo tiempo le sumamos 5, ¿el resultado también cumpliría con todas las condiciones al mismo tiempo?

**Puede utilizar el espacio de abajo para realizar anotaciones.**

Aa π No, el resultado no cumpliría con todas las condiciones al mismo tiempo.

### Tarea 44

The image shows a handwritten list of numbers in a notebook, organized in a grid. The numbers are: 4345, 4355, 4455, 4545, 4645, 4745, 4845, 4945, 5345, 5355, 5455. Some numbers have checkmarks next to them. To the right of the list, there are two calculations:  $4455 + 5 = 4460$  and  $5345 + 5 = 5350$ . The notebook has a toolbar at the top with various drawing tools and a search icon.

## Actividad 4

### Problema

Los primeros dos números de una sucesión son 1 y 2. Si cada término que sigue es la suma de todos los números anteriores a él. Se presentan algunas preguntas, para responder observe la tabla:

Posición	Término
1	<b>1</b>
2	<b>2</b>
3	<b>1 + 2 = 3</b>
4	<b>1 + 2 + 3 = 6</b>
5	<b>1 + 2 + 3 + 6 = 12</b>
⋮	⋮
20	<b>¿?</b>
⋮	⋮
<i>n</i>	<b>¿?</b>

### Tarea 45: Pregunta 1

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 6?

Aa π 24

### Tarea 46

$1 + 2 + 3 + 6 + 12 = 24$

### Pregunta 2

Con la información anterior, complete la siguiente tabla

### Tarea 47

Posición	operaciones	Termino
7	$1+2+3+6+12+24=48$	48
8	$1+2+3+6+12+24+48=96$	96
9	$1+2+3+6+12+24+48+96=192$	192
10	$1+2+3+6+12+24+48+96+192=384$	384
11	$1+2+3+12+24+48+96+192+384=768$	768

### Tarea 48: Pregunta 3

Explique cómo crecen los números que siguen la sucesión.

Aa  $\pi$  Los números crecen sumándole al último dígito esa misma cifra, es decir el doble, si tenemos como último dígito el número 3 a este le sumaremos 3 y nos daría como resultado 6, y 3 es la mitad de 6, y así sucesivamente.

---

### Tarea 49: Pregunta 4

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 20?

Aa  $\pi$  393,216

---

### Tarea 50

A digital workspace with a toolbar at the top containing icons for selection, text, drawing, and navigation. The workspace contains the following handwritten calculation:

$$1+2+3+6+12+24+48+96+192+384+768+1,536+3,072+6,144+12,288+24,576$$
$$+49,152+98,304+196,608= 393,216$$

There is a zoom-in icon in the bottom right corner of the workspace.

### Tarea 51: Pregunta 5

De manera general, ¿Cuál es el término que está en la posición  $n$ ?

Aa  $\pi$  El término general sería 2.

---

### Tarea 52

A digital workspace with a toolbar at the top. The workspace contains the following handwritten formula:

$$\frac{n}{2} \quad \text{ó} \quad n+n$$

There is a zoom-in icon in the bottom right corner of the workspace.

### Tarea 53: Pregunta 6

Escriba algunas observaciones sobre el problema.

Aa  $\pi$  Todos los dígitos en esa sucesión son números pares, es decir tienen mitad.  
La sucesión del problema es infinita.

---

### 8.3.3. Test: E2

## Test E2

A continuación, mostramos las respuestas que E2 junto con el investigador ofrecieron en el test, en la entrevista-intervención.

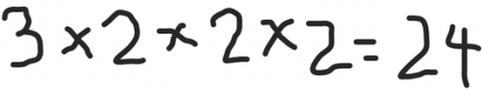
### Actividad 4

#### Tarea 45: Pregunta 1

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 6?

Aa  $\pi$  24

#### Tarea 46

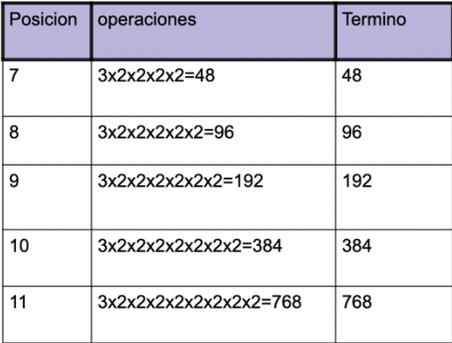


A digital drawing application interface showing a handwritten mathematical expression:  $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ . The interface includes a toolbar with various drawing tools like a pencil, eraser, and selection tools, and a search icon.

#### Pregunta 2

Con la información anterior, complete la siguiente tabla

#### Tarea 47



A digital drawing application interface showing a table with 3 columns: Posicion, operaciones, and Termino. The table contains 5 rows of data. The interface includes a toolbar with various drawing tools like a pencil, eraser, and selection tools, and a search icon.

Posicion	operaciones	Termino
7	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$	48
8	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$	96
9	$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$	192
10	$3 \times 2 = 384$	384
11	$3 \times 2 = 768$	768

¿Cuál es el valor del término que está en la posición 20?

Aa  $\pi$  Ingresar aquí tu respuesta...

#### Tarea 50



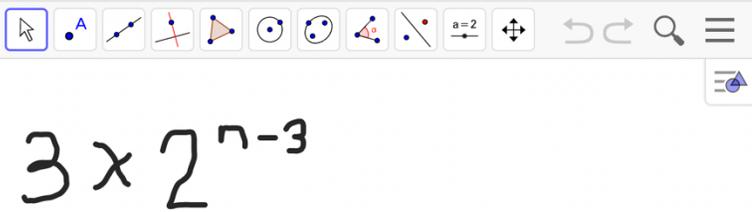
A digital workspace interface for Tarea 50. At the top, there is a toolbar with various drawing and editing tools, including a selection tool, a text tool (labeled 'A'), a line tool, a circle tool, a triangle tool, a square tool, a rectangle tool, a circle with center tool, a circle with radius tool, a line with slope tool (labeled 'a=2'), a zoom tool, and a refresh tool. Below the toolbar, the handwritten expression  $3 \times 2^n$  is displayed in the center of the workspace.

#### Tarea 51: Pregunta 5

De manera general, ¿Cuál es el término que está en la posición  $n$  ?

Aa  $\pi$  Ingresar aquí tu respuesta...

#### Tarea 52



A digital workspace interface for Tarea 52. At the top, there is a toolbar with various drawing and editing tools, including a selection tool, a text tool (labeled 'A'), a line tool, a circle tool, a triangle tool, a square tool, a rectangle tool, a circle with center tool, a circle with radius tool, a line with slope tool (labeled 'a=2'), a zoom tool, and a refresh tool. Below the toolbar, the handwritten expression  $3 \times 2^{n-3}$  is displayed in the center of the workspace.