



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

**Una propuesta didáctica para promover el razonamiento
variacional-covariacional en estudiantes de secundaria
con apoyo de la tecnología digital**

Tesis que presenta:

Helen Mariel Pérez Martínez

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

Ciudad de México

agosto, 2022

Agradecimientos

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por brindarme el apoyo económico para llevar a cabo esta investigación y mis estudios de maestría.

Helen Mariel Pérez Martínez
No. CVU: 1107703

Agradecimientos

Doy gracias a **Dios** por darme salud y sabiduría para poder llevar a cabo mis estudios de maestría. Permitiéndome emprender una increíble aventura en un nuevo país, y a su vez conocer personas extraordinarias que me apoyaron tanto en lo académico como en lo personal.

A mi madre Adriana y a mi padre Ignacio, por apoyarme incondicionalmente en cada sueño que he tenido, por brindarme sus consejos y amor, sin ellos no hubiese sido posible cada uno de mis logros. Sus esfuerzos por sacarme adelante a pesar de los obstáculos de la vida, los recordare siempre. Papi te dedico este logro más hasta el cielo. Los amo.

A mis hermanos... Norman, Percy y Kenny por sus consejos, por cada palabra de ánimo, por su amor, por siempre estar al pendiente de mí y por su apoyo en esos momentos difíciles.

A mi familia... abuelos, primos y tíos por alegrarse y compartir cada uno de mis logros, y brindarme su amor.

Al Dr. Cuevas, por brindarme ese voto de confianza y aceptarme como una de sus estudiantes en el Cinvestav, gracias por cada consejo y asesoría a lo largo de la maestría, para mi beneficio académico y personal.

A mis profesores... La Dra. Claudia Acuña, la Dra. Gisela Montiel, la Dra. Rosa María Farfán, al Dr. Francisco Cordero y al Dr. Ricardo Cantoral por compartir con nosotros sus conocimientos, por motivarnos día a día y por crear entornos de discusión y reflexión. Gracias por contribuir en mi formación académica.

A mis sinodales, por sus reflexiones. Gracias al Dr. Francisco Cordero y al Dr. Hugo Mejía.

A mis compañeros de generación, por cada momento de reflexión en nuestros seminarios, por cada momento compartido que nos permitió conocernos a pesar de las circunstancias de la pandemia. Les deseo de todo corazón el mejor de los éxitos en cada proyecto que emprendan.

En especial quiero agradecer a mis amigos Noé, Rodil y Tati por estar en todo momento para mí, por cada risa, por cada consejo, por cada actividad que realizamos juntos, por esas palabras de ánimo, por sus cuidados y reflexiones de vida. Gracias infinitas.

A mis compañeros y amigos académicos... Fabi, Sofi, José, Ricardo, Victor e Israel por cada retroalimentación, momentos de discusión, palabras de ánimo y apoyo en nuestros trabajos. Y en especial quiero agradecer a Erasmo por sus explicaciones y retroalimentaciones, por apoyarme en cada etapa de este proceso, por brindarme su amistad y apoyo en cada momento feliz o triste.

A mis amigos de toda una vida Claudette, Susana, Luis y Nanci ustedes son mi otra familia, agradezco por sus ánimos, por estar en todo momento para mí, por su apoyo incondicional y por cada momento compartido.

A mis amigos Rosi, Stheven, Juli, Leti, al Dr. Rene, Karen, Kiara por cada uno de sus consejos, por apoyarme desde un principio en este proceso de mi maestría, por darme ánimos en esos momentos difíciles.

A todos mis colegas y amigos hondureños, por cada momento compartido, por cada consejo y reflexión, por su apoyo ante diferentes circunstancias que nos surgen al estar en un país distinto al nuestro, gracias por su amistad.

Y muchas gracias a **todos los amigos de distintos países**, Honduras, México, Colombia y Cuba, por brindarme su amistad, su apoyo incondicional, por creer en mí y darme siempre ánimos.

A todos ustedes, gracias por todo.

Índice

Agradecimientos	II
Agradecimientos	III
Índice	V
Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
Resumen.....	X
ABSTRACT.....	XI
Introducción	XII
Capítulo I. Problemática y antecedentes	1
1.1 Problemática	1
1.2 Antecedentes	7
1.2.1 Antecedentes en reportes de investigación.....	7
1.2.2 Antecedentes en libros de texto	12
1.3 Objetivos de la investigación.....	21
1.4 Preguntas de Investigación	22
1.5 Hipótesis de la propuesta:.....	22
Capítulo II. Marco Teórico.....	23
2.1 Investigación de diseño	23
2.1.1 Tipos de investigación de diseño	25
2.1.2 Características de la Investigación de Diseño Educativo.....	26
2.2 Investigación Basada en Diseño	28
2.2.1 Fases de la Investigación Basada en Diseño.....	30
2.3 Trayectoria hipotética de aprendizaje	34
2.4 Pensamiento variacional	38
2.5 Razonamiento covariacional	40
2.6 Didáctica Cuevas y Pluvinage	43
Capítulo III. Metodología.....	46
3.1 Fase 1: Preparación y diseño.....	46
3.1.1 Prueba piloto	46
3.1.2 Descripción y objetivo de las actividades.....	47
3.1.3 Una adaptación de los niveles de covariación	50
3.1.4 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre la Variación.....	52

3.2 Fase 2: Experimento de enseñanza.....	62
3.2.1 Puesta en marcha de las actividades	62
Capítulo IV: Resultados y Análisis retrospectivo	64
<i>Capítulo V: Discusión y conclusiones</i>	101
5.1 Respuestas a las preguntas de investigación.	101
5.1.1 Primera pregunta de investigación	101
5.1.2 Segunda pregunta de investigación	104
5.2 Conclusiones.....	108
Capítulo VI: Continuidad para el trabajo doctoral	111
6.1 Introducción	111
6.2 Antecedentes y problemática	113
6.3 Objetivo y pregunta de investigación	115
6.4 Enfoque teórico.....	115
6.5 Aspectos metodológicos	115
6.5.1 Intervención didáctica	115
6.5.2 Tipo de investigación.....	116
6.5.3 Diseño de actividades.....	117
6.5.4 Evaluación de actividades	119
6.5.5 Uso de la tecnología	120
6.6 Cronograma.....	120
Capítulo VII. Referencias	123
Capítulo VIII: Anexos	i
8.1 Actividad #1.....	i
8.2 Actividad 2/ Parte 1.....	v
8.3 Actividad 2/ Parte 2.....	ix
8.4 Actividad #3.....	x
8.5 Actividad #4.....	xiv
8.6 Análisis de la secuencia didáctica por cada estudiante	xxi
8.7 Porcentaje de logro de los comportamientos de las AM por cada estudiante.....	lxvii
8.8 Informe completo de investigación aceptado por el PME-NA 44 del 2022	lxxv
Introducción	lxxv
Marco referencial.....	lxxvi
Pensamiento variacional	lxxvi

Didáctica Cuevas y Pluvinage	lxxvii
Objetivo.....	lxxvii
Pregunta de investigación	lxxvii
Metodología.....	lxxvii
Fase 1: Preparación y diseño.....	lxxvii
Fase 2: Experimento de enseñanza.....	lxxix
Resultados	lxxix
Actividad #1:.....	lxxx
Actividad #2-parte 1 y 2:	lxxx
Actividad #3 y #4:	lxxx
Discusión y conclusiones.....	lxxxiii
Agradecimientos	lxxxiii
Referencias.....	lxxxiv

Índice de figuras

Figura 1: Relación ente variación, covariación y función.....	4
Figura 2: Unidad 3 – Las funciones y algunas de sus aplicaciones.....	13
Figura 3: Unidad 3 Lección 13 Diferenciar ecuaciones y funciones.....	14
Figura 4: índice- Secuencias didácticas	15
Figura 5: Secuencia 3 Variación I	16
Figura 6: Secuencia 19 Funciones y ecuaciones II.....	17
Figura 7: índice- Ruta de aprendizaje	17
Figura 8: Lección 11 Gráficas de movimiento y de llenado de recipiente	18
Figura 9: Lección 11 Gráficas de movimiento y de llenado de recipientes.....	19
Figura 10: Lección 12 La expresión algebraica de una función cuadrática.....	20
Figura 11: Diagrama que ilustra como el engrane IBD mueve el engrane THA que a su vez mueve el engrane de la didáctica	23
Figura 12: Ciclo de investigación de diseño de acuerdo con Bakker (2018).....	31
Figura 13: Ciclo de enseñanza de las matemáticas.....	36
Figura 14: Articulación de la THA y los ciclos de diseño de la IBD	37
Figura 15: Teleférico #1, velocidad constante	48
Figura 16: Teleférico #2, comparar dos velocidades constantes.....	49
Figura 17: Teleférico #3, cambio de la velocidad cuando va en subida la cabina	50
Figura 18: Teleférico #4, cambio de la velocidad cuando va de bajada la cabina	50

Figura 19: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1-apartado 1 de identificar en una tabla cuando una magnitud varia o se mantiene constante	65
Figura 20: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #2- apartado 1 de identificar en una tabla cuando una magnitud varia o se mantiene constante	66
Figura 21: Actividad #1 y #2 apartado 1 - estudiante D_7.....	66
Figura 22: Actividad #1 y #2 apartado 1 - estudiante D_11.....	67
Figura 23: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #3- apartados “C-E” de identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración).....	68
Figura 24: Actividad # 3 y # 4 - estudiante B_8.....	69
Figura 25: Actividad # 3 y # 4 - estudiante D_5	69
Figura 26: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #4- apartados “B-C” de identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración).....	70
Figura 27: Actividad #1 y #4 del estudiante D_1.....	71
Figura 28: Actividad #1 y #4 del estudiante D_6.....	71
Figura 29: Actividad #1 y #4 del estudiante D_8.....	72
Figura 30: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1 y #4 de identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en constante, variable o parámetro.	73
Figura 31: Actividad #1- apartado F	74
Figura 32: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1- apartado F.....	74
Figura 33: Porcentaje de logro de los estudiantes que contestaron a la actividad #2- apartados” I- K”	75
Figura 34: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante B_1.....	76
Figura 35: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante B_3.....	77
Figura 36: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante D_1	77
Figura 37: Actividad #3- apartado H	78
Figura 38: Actividad #4- apartado K.....	78
Figura 39: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #3- apartado H y actividad #4- apartado K.....	79
Figura 40: Respuesta de los estudiantes a la actividad #1- apartados G-I.....	80
Figura 41: Respuesta de los estudiantes a la actividad #2- apartados L-P	81
Figura 42: Respuesta de los estudiantes a la actividad #4- apartado L	83
Figura 43: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #1.....	84
Figura 44: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #2.....	84
Figura 45: Respuestas a la actividad #1- por el estudiante B_4.....	85
Figura 46: Respuestas a la actividad #1- por el estudiante B_13	85
Figura 47: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante D_5	86
Figura 48: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante B_13	86
Figura 49: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante B_6.....	87
Figura 50: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #3.....	88

Figura 51: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #4.....	88
Figura 52: Respuesta a la actividad #3- por el estudiante B_6	88
Figura 53: Porcentaje de logro de los estudiantes en las actividades #2 parte 2 y actividad #4.....	89
Figura 54: Respuesta de los estudiantes a la actividad #2-apartados T-V.....	90
Figura 55: Actividad #2- parte 2, apartados 5 y 6	91
Figura 56: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #2 parte 2	92
Figura 57: Respuesta de los estudiantes a la actividad.....	93
Figura 58: Porcentaje de logro de las respuestas de los estudiantes a la actividad #3 y #4	95
Figura 59: Porcentaje de logro de los estudiantes en la actividad #4, apartados “D-G”	96
Figura 60: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado G.....	97
Figura 61: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado H.....	97
Figura 62: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado I.....	97
Figura 63: Actividad #4- apartados 6- 11.....	98
Figura 64: Respuestas de los estudiantes a la actividad #4- apartados 6-10.....	99
Figura 65: Porcentaje de logro de los comportamientos de la AM esperada	102
Figura 66: Porcentaje de los estudiantes de los 21 estudiantes de tercero de secundaria	102
Figura 67: Avances de los comportamientos en los estudiantes que lograron el N1.....	103
Figura 68: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM1	103
Figura 69: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM2- pero que si lograron el N1	103
Figura 70: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM2- pero que solo lograron algunos comportamientos de la AM1.....	103
Figura 71: Avances de los comportamientos en los estudiantes que lograron el N2.....	104

Índice de tablas

Tabla 1: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación	41
Tabla 2: Niveles del razonamiento covariacional	42
Tabla 3: Descriptores de las acciones mentales utilizados para la evaluación, una realizado una adaptación de los niveles de covariación propuestos por Carlson et al. (2002).....	50
Tabla 4: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación	117

Resumen

En este estudio presentamos el desarrollo de una investigación sobre la promoción del pensamiento variacional en estudiantes de tercero de secundaria en México entre las edades de 14-15 años, el estudio consiste en el diseño y la aplicación de una secuencia de actividades didácticas que simulan de forma virtual una situación real. Las actividades se organizan mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje con apoyo de la tecnología digital y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage. Las actividades se evaluaron de acuerdo con los niveles de covariación propuestos por Carlson y colegas, categorizando los logros y las dificultades de los estudiantes para cada nivel de comprensión. Los resultados muestran que las actividades favorecen el progreso de los estudiantes al transitar de la situación de contexto hacia las diversas representaciones logrando establecer la relación entre las variables e identificar su dependencia funcional.

Palabras clave: Educación Secundaria, Tecnología, pensamiento variacional, trayectoria hipotética de aprendizaje, niveles de covariación.

ABSTRACT

In this study, we present the development of an investigation on the promotion of variational thinking in third-year high school students in Mexico between the ages of 14-15 years. The study consists of designing and applying a sequence of didactic activities that simulate a real situation virtually. The activities are organized through a hypothetical learning trajectory supported by digital technology and elements of Cuevas-Pluvinage didactics. The activities were evaluated according to the levels of covariation proposed by Carlson and colleagues, categorizing students' achievements and difficulties for each level of understanding. The results show that the activities favor the students' progress as they move from the context situation to the different representations, establishing the relationship between the variables and identifying their functional dependence.

Key words: Secondary Education, Technology, variational thinking, hypothetical learning trajectory, covariation levels.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo promover en los estudiantes de tercero de secundaria el pensamiento variacional como antecedente al concepto de función, el cual servirá como modelo para el estudio de la variación y la covariación. Para el desarrollo del presente trabajo de investigación hemos diseñado y elaborado cuatro actividades didácticas las cuales contienen el diseño y construcción de cuatro entornos didácticos virtuales interactivos (EDVI) desarrollados en el software de geometría dinámica GeoGebra, cada entorno viene acompañado con sus respectivas hojas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG), con los cuales y mediante la interacción se abordan acciones mentales ligadas al reconocimiento de las variables y las relaciones entre ellas.

Las actividades didácticas fueron organizadas mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y cada actividad se diseñó bajo el marco teórico de un constructivismo social, Simon (1995) utilizando elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage. Para poder medir el avance en el pensamiento variacional empleamos la propuesta de los niveles de covariación de Carlson et al (2002). Este proyecto de investigación se aplicó a estudiantes de tercero de secundaria en México entre las edades de 14-15 años de forma presencial en un lapso de cuatro sesiones trabajadas en el salón de cómputo y la asignación de una tarea de casa.

La organización de la presente tesis se compone de los siguientes capítulos:

- ∞ Capítulo uno: Se presenta la problemática de investigación y la exposición de los antecedentes en reportes de investigación y libros de textos sobre las dificultades que se presentan en el tratamiento que se da alrededor de los procesos de variación-covariación, como etapa previa al aprendizaje del concepto de función. También en este capítulo se plantean los objetivos y preguntas de investigación.

- ∞ Capítulo dos: Se presenta el marco teórico el cual contiene los elementos teóricos cognitivos y matemáticos para el desarrollo de nuestro trabajo de investigación. Se inicia describiendo los tres ejes principales que delinear la teoría y que dan soporte al proyecto de investigación. El primer eje que se presenta es sobre la Investigación Basada en el Diseño, consecutivamente se describen los elementos de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje y los niveles de covariación propuestos por Carlson y colegas (2002) como segundo eje y se concluye con la descripción del tercer eje, los principios que conforman el marco didáctico Cuevas-Pluvinage
- ∞ Capítulo tres: en este capítulo se describe la metodología empleada para el desarrollo del proyecto, explicando cómo se llevaron a cabo las primeras dos fases de la Investigación Basada en el Diseño. En la primera fase se reporta el diseño de las actividades didácticas, es decir, la descripción de: las hojas de exploración y aprendizaje guiado y de los entornos didácticos virtuales interactivos. Además, se describe la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje a partir de los niveles de covariación. En la segunda fase se describe la experiencia al momento de llevar a cabo la intervención didáctica de nuestro proyecto.
- ∞ Capítulo cuatro: Se presenta la tercera fase de la Investigación Basada en el Diseño, los resultados y el análisis retrospectivo de los mismos.
- ∞ Capítulo cinco: Se presentan las conclusiones del presente trabajo de investigación y se da respuesta a las preguntas de investigación.
- ∞ Capítulo seis: Se presentan las prospectivas o trabajos a futuro- capítulo adicional para el futuro estudio de doctorado.
- ∞ Capítulo siete: Se presentas las referencias.
- ∞ Capítulo ocho: Se presentan los anexos.

Capítulo I. Problemática y antecedentes

1.1 Problemática

Los conceptos de variación, covariación y función son fundamentales en el desarrollo de la matemática escolar y sus aplicaciones en la vida diaria (Cantoral et al, 2005; Cuevas y Pluvinage, 2019). Además, dichos conceptos están íntimamente relacionados y la falta de comprensión de alguno de ellos debilita la comprensión de los otros.

En esta investigación, nos centramos en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de secundaria; por esta razón diseñamos una secuencia de actividades desde un enfoque variacional-covariacional, lo cual nos permitirá abordar gradualmente el problema de variación y covariación.

En este apartado se describirán algunos de los problemas que se han presentado en la variación y cómo estos repercuten en la enseñanza y aprendizaje del concepto de covariación y a su vez en el de función, y viceversa. De igual forma se describirá cómo el contexto y el empleo de distintas formas de representación juegan un papel muy importante dentro de estos conceptos al momento de abordarlos.

Diversas investigaciones en educación matemática (Cantoral et al., 2005; Carlson et al., 2003; Ramos y Jiménez, 2014) señalan que uno de los conceptos más importantes en la enseñanza elemental del cálculo es el concepto de variación, puesto que es el antecedente natural para conceptos como función, derivada y todos los procesos que tienen que ver con la optimización. Sin embargo, la variación ha resultado ser un concepto complejo tanto en su enseñanza como en su aprendizaje.

También se ha reportado que los estudiantes presentan errores vinculados al reconocimiento de la variación y relación de dependencia entre variables (Ávila, 2018; M. Carlson et al., 2002), esto debido a que se suelen proponer situaciones

donde se realizan análisis de situaciones aparentemente dinámicas, pero con una visión estática por parte de los estudiantes, ya que esas situaciones solo se limitan a análisis de gráficos y tablas ya propuestos por algún material impreso, sin darle la oportunidad al estudiante de experimentar, recolectar información e interpretar la variación en diferentes situaciones. De acuerdo con Vasco (2003):

Un pensamiento variacional, es una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.6)

Acorde a lo anterior y dado que la variación es un concepto fundamental dentro de la enseñanza elemental del cálculo, sería oportuno empezar a estimular en el estudiante un pensamiento variacional, el cual se llega a articular con el razonamiento covariacional.

Sin embargo, debido a la íntima relación entre variación y covariación no resulta extraño esperar que la covariación también signifique un problema para los estudiantes, de acuerdo con lo que han reportado (M. Carlson et al., 2002; García, 2016; Thompson, P. W., y Carlson, 2017), donde señalan que el concepto de covariación entre variables también nos conduce al concepto de función, debido a que la relación de covariación con frecuencia se expresa como una relación funcional, y que a pesar de estar presente desde el álgebra elemental hasta el cálculo, también se presenta como un tema que es fuente de dificultad para los estudiantes. Lo anterior, debido a que no logran percibir y relacionar los patrones que surgen entre las cantidades involucradas en las diferentes situaciones matemáticas que se les presentan. Incluso hay estudios, como el de (Aldon y Panero, 2020), que han reportado casos donde la interpretación de la situación matemática propuesta al

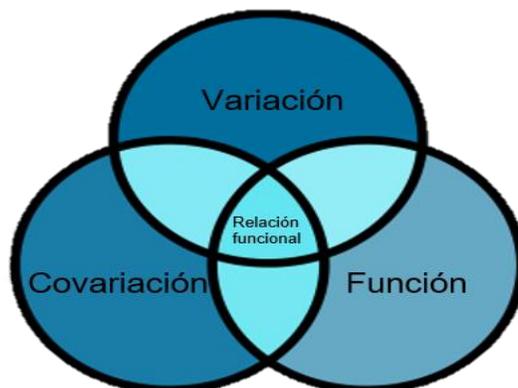
analizar las variables implicadas, los estudiantes confunden la forma de una gráfica con la trayectoria de un objeto en movimiento, de lo cual se infiere una falta de claridad en el significado de las variables involucradas en el plano cartesiano y en la interpretación de las representaciones gráficas del movimiento.

Por otro lado, se ha encontrado que los estudiantes suelen presentar ideas erróneas al establecer relaciones funcionales, dado que, al no tener claro la covariación entre variables, pueden mostrar una tendencia a sobregeneralizar la linealidad en contextos no lineales. Esta idea de sobregeneralizar la linealidad, ha sido atendida por diferentes investigaciones, principalmente por De Bock et al. (2002 y 2007). Freudenthal (1983) advierte que, a causa de la creciente familiaridad y experiencia con los modelos lineales, junto con la simplicidad intrínseca y la autoevidencia de estos, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano, haciendo que esto sea un grave inconveniente, dado a que puede llevar a los estudiantes a la seducción de tratar cada relación numérica como si fuera lineal. Una tendencia que a veces se denomina "ilusión de linealidad". Lo cual provoca que los estudiantes extiendan la idea de linealidad a situaciones donde sus representaciones, tanto gráfica como simbólica, difieren de un comportamiento lineal.

Es claro hasta este punto, que algunas de las propiedades más importantes de las funciones reales son la variación y la covariación, definidas por la regla de correspondencia. Y es también, el concepto de función un problema para su comprensión según lo reportado en (M. Carlson et al., 2002; García, 2016; Thompson, P. W., y Carlson, 2017) , debido precisamente a que los subconceptos que contiene, tales como parámetro, variable dependiente, variable independiente, constantes y el concepto implícito de variación.

Los conceptos de variación, covariación y función ofrecen problemas de comprensión desde la educación elemental dada a su relación.

Figura 1: Relación ente variación, covariación y función



Fuente: Elaboración propia

Otros trabajos, como los de (Ronau et al., 2014; Vargas Alejo et al., 2016) han documentado que muchos estudiantes tienen dificultades para comprender el concepto de función y que tales dificultades generan ideas erróneas sobre el concepto, por lo cual sugieren que es primordial que los estudiantes, confronten sus razonamientos erróneos lo antes posible, ya que sólo causarán más problemas a medida que los estudiantes empiecen a operar con funciones, ya sea al momento de analizarlas en busca de covariación y al momento de querer representarlas de diferentes formas.

En este sentido, Cuevas y Pluvillage (2013) mencionan que el caso del concepto de función, se apoya fundamentalmente en el conocimiento aritmético y/o algebraico del estudiante y poco en la intuición geométrica y visual, esto posiblemente debido a la dificultad para representar en el papel o el pizarrón un número suficientemente grande de ejemplos que den significado geométrico a los contenidos del cálculo y el álgebra involucrada en ellos, por lo que haría falta rescatar el desarrollo del cálculo

mediante problemas de cambio y variación surgidos de problemas en contexto, los cuales ayudarán a reforzar la intuición.

Hasta el momento, se ha hecho notorio que los contextos y las formas de representación, pueden llegar a jugar un papel muy importante en el desarrollo de estos tres conceptos. Esto debido a que el uso de representaciones (tabular, gráfica, simbólica) están presentes al momento de establecer relaciones funcionales. Sin embargo, son muy pocas las que se logran emplear y a articular, para tratar de modelar un problema, y así comprender qué describen y qué significados representan. Por lo que algunas investigaciones, como la de Vargas Alejo et al. (2016), mencionan que para que los estudiantes logren comprender el concepto de función es necesario relacionen e integren todos los registros de representación asociados, además, que comprendan qué es lo que tienen en común. En nuestro caso, consideramos que al instanciar el concepto de variación en diversos registros de representación y visualizar simultáneamente los efectos que se produce en uno de ellos, en los otros, se promueve la articulación y con ellos se contribuye a una mejor comprensión; lo cual es acorde al modelo didáctico Cuevas-Pluvinage (2003)

En consecuencia, es importante que los estudiantes aprendan a utilizar representaciones de manera fluida y en múltiples medios, así como desarrollar habilidades para operar con símbolos. Considerando la importancia del manejo de diversas representaciones para la construcción de un concepto. En tal sentido, Duval (2006), menciona:

La mayoría de los profesores están de acuerdo en que es importante que los estudiantes usen tanto símbolos como figuras, representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones y contextos, es decir exponerlos a varias posibles representaciones al mismo tiempo. (159)

Por tal motivo, diversos estudios, como Estévez et al (2015) recomiendan que la enseñanza del concepto de variación debe darse en diversos contextos; pues al presentarle al estudiante problemas situacionales reales que se adapten a los objetivos propuestos, este podría llegar a alcanzar el concepto matemático esperado. No obstante, estos contextos deben contar con ciertas características que posibiliten el alcance de dichos objetivos, pues, así como lo menciona Hitt y Dufour (2021) “las características del entorno que pueden contribuir al desarrollo de la comprensión conceptual incluyen, entre otras, los enfoques de los profesores, los tipos de tareas que se dan a los alumnos y el uso de una variedad de representaciones” (p.13).

Sin embargo, el enfrentar a los estudiantes a diferentes contextos sigue siendo un gran reto, debido a que algunos estudios han utilizado a la modelización matemática para estimular la aparición de ideas sobre el tema a estudiar, en una situación de la vida real. Sin embargo, esto puede ser un gran reto para los estudiantes, ya que combinar la modelización con el uso de sistemas de representación, no es nada sencillo realizar, tal como lo manifiestan Carlson et al (2002) en investigaciones recientes acerca de la comprensión sobre el tema de funciones, han documentado que estudiantes de nivel de pregrado, académicamente talentosos tienen dificultad para emplear diferentes formas de representación en relaciones funcionales de situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable.

A pesar de lo descrito, autores como Ávila (2018) mencionan que: “Se observa la necesidad de establecer actividades en el aula de clases, en las que se planteen alternativas escolares que promuevan el reconocimiento de la variación en situaciones en las cuales el concepto de función está presente”(p198).

En vista a ello, se indagará acerca de la forma en cómo algunas investigaciones han abordado el pensamiento variacional y el razonamiento covariacional a partir del

concepto de función, el cual solo sirvió como modelo para el estudio de la variación-covariación, al presentarse en diversas situaciones y formas de representación.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes en reportes de investigación

En este apartado se describen y analizan algunos reportes de investigación que abordan problemáticas relacionadas con la variación y la covariación, así como su articulación con el concepto de función; el cual sirve como modelo para el estudio de la variación. Este estudio se realiza con el objetivo de observar cómo estos enfoques se han ido trabajando con el paso de los años hasta la actualidad, rescatando posturas de cómo se produce la comprensión acerca de la variación y la covariación en experiencias de enseñanza donde el concepto de función este presente. De igual forma describimos qué hallazgos se obtuvieron a partir de trabajar con estos enfoques y qué datos ayudan a abrir paso a nuevas propuestas de investigación.

Un trabajo representativo es el de Confrey y Smith (1995), quienes llevaron a cabo un estudio acerca de las funciones exponenciales y logarítmicas, a partir de un enfoque de covariación de las funciones que apoyase a una construcción de la función exponencial basada en un isomorfismo entre las estructuras de reparto y de recuento. La postura que los autores toman acerca de covariación en su investigación está orientada a que la covariación es una descripción de menor formalidad y generalidad que el concepto de función. Es menos formal porque permite realizar descripciones cualitativas, es decir, describir cómo varía una cantidad en relación con otra. Como resultado de este enfoque, observaron repetidamente que los alumnos construyen su imagen de una función como la coordinación de dos columnas de datos. Es decir, no sólo pueden describir un patrón de valores con una sola columna, sino que además pueden coordinar los valores en

dos columnas diferentes para responder preguntas sobre la situación. Por ejemplo, si una columna aumenta en 2 y la otra en 6, asocian un cambio de 1 a un cambio de 3 e insertan el valor correspondiente. Los autores muestran que la interpretación de tablas de valores, la búsqueda y descripción de patrones de valores, son comportamientos que están asociados a un enfoque covariacional.

Estos comportamientos se complementan con la postura que Saldanha y Thompson (1998), quienes mencionan que el concepto de covariación involucra propiedades como: “la identificación de dos conjuntos de datos, la coordinación de dos patrones de datos para formar asociaciones entre patrones crecientes, decrecientes y constantes, la vinculación de dos patrones de datos para establecer conexiones específicas entre los valores de los datos, y la generalización de la vinculación para predecir valores de datos desconocidos” (nuestra traducción, p.1). Para estos autores pensar en la covariación implica la coordinación de secuencias, la cual puede encajar bien con el empleo de modelos numéricos para presentar los estados sucesivos de una variación.

Es por ello que investigaciones como la de (Reséndiz, 2010) destacan el papel de este modelo de representación en la noción de la variación. Su investigación se centra en el papel de las explicaciones de tres profesores en la clase de matemáticas del primer semestre de ingeniería, atendiendo como objetivo principal localizar y analizar, cómo se desarrolla la noción de variación en situaciones de enseñanza, al momento de explicar los conceptos de función y derivada. Para ello, se realizó un estudio del profesor y el discurso en la interacción social que se realizaba en el aula. Reportando que en las explicaciones que dan los profesores, la noción de variación puede apreciarse en el modelo numérico cuando emplean la tabulación, en el modelo de la representación geométrica al construir gráficas, en el modelo algebraico, en el modelo de la comparación a/b y en el modelo del lenguaje natural;

identificando las expresiones verbales que el estudiante emplea al hacer referencia a situaciones cotidianas. Además, estas representaciones influyen en el profesor, en la elección de su estrategia de enseñanza, en donde el saber que entra en el aula se transforma o modifica.

Reséndiz concluye que la noción de variación se apoya fuertemente en la variación numérica dado que el modelo más socorrido fue el de la tabla de valores. También indica que estos recursos no forman parte de lo que usualmente se considera como el contenido matemático a enseñar, sino son los recursos con los que se apoya el profesor para poder explicar el concepto.

Por otro lado, Johnson (2012) amplía la investigación existente al indagar sobre el razonamiento numérico y no numérico, y sobre las cantidades covariantes que intervienen en la tasa de cambio mediante tareas que implican múltiples representaciones de cantidades covariantes. La postura que el autor toma sobre covariación es influenciada por autores como (Clement, 1989 y Carlson et al., 2002), de quienes rescata dos percepciones de covariación: la primera que puede percibirse como estática -cuando las cantidades de una cantidad se asocian con las de otra-, y la segunda, dinámica -cuando los cambios en una cantidad se asocian con los cambios en otra-. De acuerdo con esto, toma la idea de que una covariación estática se considera menos avanzada que la que implica una covariación dinámica. Lo que lo condujo a que su estudio se centrara en tres tareas: el cambio de plaza, la temperatura alta típica y el llenado de botellas; en las cuales incorpora representaciones dinámicas y estáticas de cantidades covariantes, con cantidades que varían a ritmos constantes y variables. Esta parte del uso de las representaciones lo lleva a cabo ya que rescata que las tareas matemáticas que incorporan múltiples tipos de representaciones de la tasa de cambio que ofrecen a los estudiantes la

oportunidad de recurrir a ideas informales e intuitivas sobre la tasa de cambio para investigar y razonar sobre tasas de cambio constantes y variables.

La idea de recurrir a ideas informales e intuitivas se complementa con lo anteriormente mencionado en (Confrey, J. y Smith, 1995), con respecto a que la covariación es una descripción más informal y general de un concepto de función.

Esta práctica de recurrir a tareas matemáticas en contextos de covariación que incorporen diversos tipos de representación también ha sido llevada a cabo por investigadores como Maury et al. (2012), cuya investigación consistió en la aplicación de tareas elaboradas para el desarrollo del pensamiento variacional, las cuales iban incrementándose en complejidad, y mediadas, por las fases de orientación, ejecución y control. Trabajaron con 31 docentes y 48 estudiantes de la asignatura de matemática de los dos cursos del 5° grado, donde el grupo control y el experimental fueron escogidos al azar. Los sistemas numéricos empleados para la resolución de los ejercicios y problemas fueron los números naturales y las fracciones y se utilizaron 13 horas clases, además se utilizaron secuencias numéricas y de figuras para el desarrollo del pensamiento variacional. En general, los autores señalan que se observó como los estudiantes presentan un cierto avance en la resolución de las tareas presentadas, desde la deducción de patrones de variación hasta la elaboración de modelos, aunque en ésta última todavía presentan pequeñas dificultades. En vista a ello los autores recomiendan que la aplicación de un sistema de tareas se debe diseñar no solo en base a los estándares básicos de competencia del área de Matemáticas y el programa del grado a trabajar, sino también contextualizarlo con el enfoque aplicado (enfoque variacional) y las características del currículo atendiendo a los principios y criterios que soportan el sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional, estos principios y criterios pueden ser diseñados tomando en cuenta las directrices que se plantean en los lineamientos

curriculares . También recomiendan diseñar un sistema de tareas interactivo que pueda subirse a una plataforma para trabajo on-line con predominancia sincrónica, es decir el estudiante tendrá la oportunidad de interactuar y aprender en el momento con su profesor y compañeros.

En relación a la idea de diseño de sistemas de tareas, creemos que la postura de (Trejo et al., 2021) influenciados por la de Thompson y Carlson (2017), podría ser tomada en cuenta dado que ellos consideran que es necesario desarrollar en los estudiantes la habilidad de reconocer funciones desde un razonamiento covariacional cuantitativo que involucra el reconocimiento de patrones de crecimiento que aporten a la determinación de una expresión algebraica y construyan nuevos significados de la continuidad de funciones, permitiendo que el estudiante se anime a pensar en el cambio entre variables y a no solo tener una perspectiva de correspondencia que fomente una imagen de función restringida.

En concordancia con los estudios presentados, se observaron dificultades por parte de los estudiantes en la comprensión y deducción de patrones de variación, así como en la elaboración de modelos a partir del análisis de situaciones de covariación. También destacamos la importancia de realizar un trabajo que promueva el razonamiento covariacional, desde una percepción de covariación dinámica, donde los estudiantes puedan comprender porque los cambios en una cantidad se asocian con los cambios en otra, apoyándose del uso de diferentes formas de representación como medio de validación.

1.2.2 Antecedentes en libros de texto

Para este apartado se realizó un breve análisis de los libros de textos de matemáticas para la Educación Secundaria en México, los cuáles, son utilizados en las escuelas públicas y privadas del país, en las modalidades abierta y presencial.

Los libros de texto se analizaron con el objeto de conocer el tratamiento que se da alrededor de los procesos de variación-covariación, como etapa previa al aprendizaje del concepto de función.

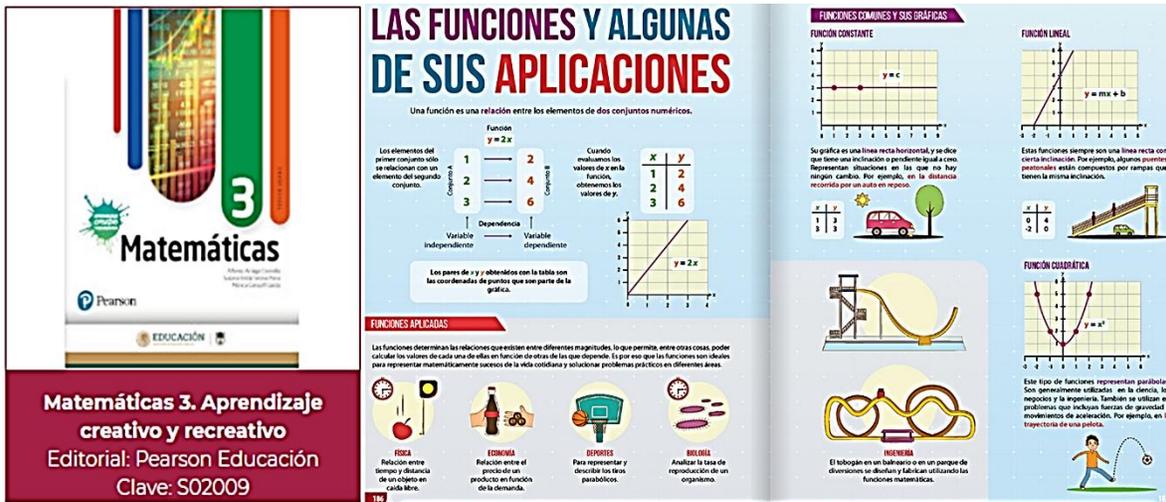
En la página oficial de CONALITEG se muestran 13 libros de texto, de los cuales hemos seleccionado aleatoriamente 6. En todos ellos y de acuerdo con el programa oficial (SEP, 2017) En el tercer año en la sección Número, Algebra y Variación se propone como aprendizaje esperado lo siguiente:

“Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos” (p.180)

Primer análisis

De acuerdo con ello, en los libros analizados, algunos dan a conocer de forma inmediata el concepto de función (ver Figura 2), mostrando ejemplos tanto ilustrativos como gráficos de funciones y algunas de sus aplicaciones.

Figura 2: Unidad 3 – Las funciones y algunas de sus aplicaciones



Fuente: consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021-2022 de México, p.186-187

Las actividades que se abordan en las lecciones posteriores sobre función consisten en la resolución de problemas de aplicación, donde los estudiantes deben plantear una ecuación que ayude a averiguar el valor de una incógnita, y a partir de esa expresión algebraica, se le solicita al estudiante que discrimine qué elementos de la ecuación puede tomar para convertirla en una función (ver Figura 3).

Notamos que la secuencia que se le presenta al estudiante sobre función en este caso, va encaminada de la siguiente manera: a que escriban la expresión algebraica de la función esperada, luego a partir de esa expresión se les pide que completen una tabla para dar respuesta a una pregunta en específico, por último, se les pide que grafiquen los valores obtenidos de la tabla, sin analizar como las variables involucradas están relacionándose (covariando), y entender el porqué de los cambios que sufre la variable de salida con respecto a los cambios en el valor de entrada.

Figura 3: Unidad 3 Lección 13 Diferenciar ecuaciones y funciones

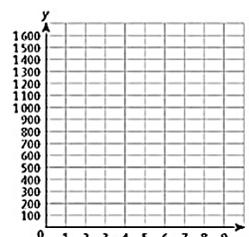
Actividad 7 Lucy toma clases particulares de matemáticas con el profesor Moisés. El costo por las asesorías es de \$970 por cinco horas, más un pago de \$120 para el material. Ella necesita saber el precio por hora para pedirle el dinero a su papá. Ayúdenla a averiguarlo a partir de las siguientes preguntas.

- a) Lucy conoce el precio por cinco horas, así que planteó una ecuación que le ayudará a saber el precio por hora. ¿Cuál es la ecuación que resolvió?
- b) ¿Cuánto pagaría?
- c) Sin embargo, Lucy sólo necesita dos horas de clase. ¿Cómo puede determinar el precio de las asesorías sólo con el número de horas?

- d) Escriban la expresión algebraica, en función de las horas, que indica el precio por el número de horas de asesoría que Lucy tome.
- e) ¿Qué diferencia que encuentras entre ambas expresiones algebraicas?
- f) ¿Cómo tomas los elementos de la ecuación para convertirla en una función?
- g) Para enseñarle los precios a su papá, Lucy hizo la siguiente tabla con los precios hasta ocho horas. Ayúdenle a completarla.

Horas de clase (h)	1	2		5	6	
Costo (\$)	194		582	776		1358

- h) Lucy olvidó decirle a su papá que había una cuota extra por el material. Agregando esto al costo que debe pagar por las asesorías, ¿cuánto debe pagar por tres y por cinco horas?
- i) Revisen las respuestas del inciso anterior para hallar la función que representa el costo total de las asesorías, incluyendo el costo del material.
- j) Utilicen la tabla del inciso g para elaborar la gráfica en el siguiente plano cartesiano. Deben representar el costo de la asesoría en función del tiempo. Coloquen las variables en el eje correspondiente.



- k) Expliquen las ventajas de que Lucy haya propuesto una función para hallar el costo de asesorías.

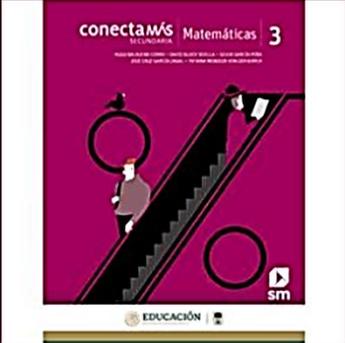
Fuente: Matemáticas 3. Aprendizaje creativo y recreativo consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.192-193

Vemos que la articulación entre variación-covariación y función no se ha dado, lo cual nos lleva a realizar un segundo análisis respecto a esta relación.

Segundo análisis

En los siguientes libros, el tratamiento que hacen es que presentan el concepto de variación antes o después del concepto de función, pero no llegan a articularlo con él, (ver **Figura 4**) este caso nos muestra que el concepto de función se trabaja aislado al de variación, ya que su secuencia no es contigua.

Figura 4: índice- Secuencias didácticas

 <p>Matemáticas 3. Secundaria. Conecta Más Editorial: SM Ediciones Clave: S02011</p>	<p>Secuencia 3</p> <p>Variación I</p> <p>Aprendizaje esperado: analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.</p>		<p>Secuencia 13</p> <p>Funciones y ecuaciones I</p> <p>Aprendizaje esperado: diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.</p>																										
	<table border="1"> <tr> <td>Lección</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>7</td> <td>En pocas palabras</td> <td>24</td> </tr> <tr> <td></td> <td>8</td> <td>La forma del reloj</td> <td>26</td> </tr> <tr> <td></td> <td>9</td> <td>¡No vayas tan rápido!</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td></td> <td>10</td> <td>¡Qué rápido crecen!</td> <td>30</td> </tr> </table>	Lección					7	En pocas palabras	24		8	La forma del reloj	26		9	¡No vayas tan rápido!	28		10	¡Qué rápido crecen!	30	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>45</td> <td>¿Iguales o diferentes?</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>Lección</td> <td>46</td> <td>Expresiones algebraicas equivalentes, funciones y ecuaciones</td> <td>102</td> </tr> </table>		45	¿Iguales o diferentes?	100	Lección	46	Expresiones algebraicas equivalentes, funciones y ecuaciones
Lección																													
	7	En pocas palabras	24																										
	8	La forma del reloj	26																										
	9	¡No vayas tan rápido!	28																										
	10	¡Qué rápido crecen!	30																										
	45	¿Iguales o diferentes?	100																										
Lección	46	Expresiones algebraicas equivalentes, funciones y ecuaciones	102																										

Fuente: consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.8

Una de las formas en que el libro de texto anterior aborda variación es a partir de un problema inicial, en el cual se requiere de un análisis tabular y la identificación del gráfico que satisfaga la relación presentada en la tabla. También se le presentan expresiones algebraicas o fórmula como se indica en el libro de texto, con la intención de que los estudiantes puedan identificar si la expresión satisface a la representación gráfica que modela a la situación planteada (ver **Figura 5**).

Figura 5: Secuencia 3 Variación I

Lección 9. ¡No vayas tan rápido!

Individual

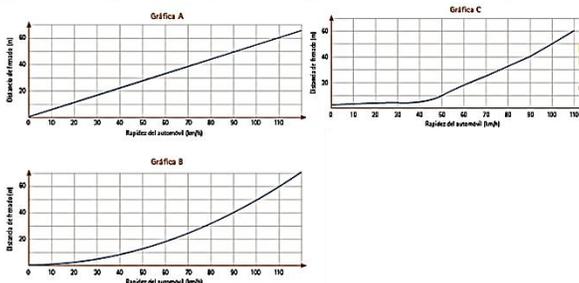
1. Un automóvil avanza a 20 kilómetros por hora. Si se atraviesa un peatón y el conductor debe frenar rápido, la distancia que recorre el automóvil desde que se pisa el freno hasta que se detiene el vehículo es de 2 m.

- a) ¿Cuántos metros imaginas que se necesitan para frenar si el automóvil va a 40 km/h? _____
 ¿Y a 60 km/h? _____
 ¿Y a 100 km/h? _____

b) La siguiente tabla muestra las distancias reales que recorre un automóvil, antes de detenerse, según qué tan rápido va. Usa estos datos para revisar tus respuestas del inciso anterior y explica en tu cuaderno si consideras que son correctas o no, y por qué.

Rapidez del automóvil (km/h)	30	50	70	90	100	110
Distancia necesaria para detenerse al frenar (m)	4.5	12.5	24.5	40.5	50	60.5

c) ¿Cuál de las siguientes tres gráficas corresponde a la relación entre rapidez



2. Considera que d representa la distancia de frenado y r , la rapidez del automóvil. Responde en tu cuaderno.

- a) Cuando r crece al doble o al triple, ¿ d también crece al doble o al triple?
 b) ¿La relación entre d y r es de proporcionalidad?
 c) ¿La expresión algebraica que relaciona ambas cantidades podría ser de la forma $d = ar$?

3. Si r representa la rapidez del automóvil en kilómetros por hora y d la distancia de frenado en metros, entonces:

$$d = \frac{r^2}{200}$$

Usa la fórmula anterior para completar la tabla.

Rapidez del automóvil (km/h)	20	30	40	50	60	100	140	200
Distancia de frenado (m)	2							

Valida tus respuestas de la tabla con tus compañeros. Después, comenten la información del recuadro y úsela para validar sus respuestas de toda la lección.

Fuente: Matemáticas 3. Secundaria. Conecta Más consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.28- 29

Y es justamente en esta parte donde notamos que las gráficas con las que han estado trabajando; leído, construido e interpretado al momento de abordarse con el tema de función, no refuerzan esa idea de relación funcional o relación de dependencia entre dos variables, ya que no se promueve a que los estudiantes identifiquen que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento haciendo uso de diferentes formas de representación. Pues el tratamiento que en este caso el libro de texto presenta sobre función es que los estudiantes puedan diferenciar las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones (ver Figura 6).

Figura 6: Secuencia 19 Funciones y ecuaciones II

19

Secuencia

Funciones y ecuaciones II

Lección 65. El rectángulo

Aprenderás a:
diferenciar las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.

Tarea

$A = 100 \text{ m}^2$
 $P = 41 \text{ m}$

DESCUBRO MÁS
¿Cuál es el área máxima que puede tener un rectángulo cuyo perímetro mide 41 m?
¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) en ese caso?

1. Trabaja con un compañero. Determinen las dimensiones (largo y ancho) de un terreno rectangular que tiene un perímetro de 41 m y cuya área es 100 m².

- ¿Qué tan difícil fue hacerlo? ¿Pensaron que haya otra forma más fácil de lograrlo?

2. El problema anterior puede resolverse mediante una ecuación de segundo grado. Respondan para analizar cómo se hace.

a) Si el perímetro del rectángulo es 41 m, ¿cuánto suman la medida del largo más la del ancho? _____

b) Consideren que x representa la medida del ancho del terreno. Subrayen la expresión que representa el largo del terreno en términos de x .

- $x + 20.5$ • $x - 20.5$ • $20.5 - x$ • $-20.5 - x$

c) Subrayen la ecuación que permite calcular el área del terreno.

- $x(20.5 - x) = 100$ • $x(x - 20.5) = 100$
- $x + (x - 20.5) = 100$ • $x - (20.5 - x) = 100$

d) Subrayen la ecuación de segundo grado equivalente a la que eligieron.

- $x^2 - 20.5x - 100 = 0$ • $-x^2 + 20.5x - 100 = 0$
- $2x - 20.5x - 100 = 0$ • $2x + 20.5x - 100 = 0$

e) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación anterior? _____

3. Completen la tabla para determinar el área de algunos rectángulos con perímetro de 41 m.

Ancho (m)	Largo (m)	Perímetro fijo (m)	Área (m ²)
1	20.5 - 1 = 19.5	41	19.5
2	20.5 - 2 = 18.5	41	
3		41	
4	16.5	41	66
5		41	
6		41	
7		41	
8		41	
x		41	

4. Considera ahora un terreno rectangular con perímetro de 52 metros.

a) ¿Cuál es la mayor área que puede tener el terreno? _____

b) Considera que la literal x representa la medida del ancho del terreno y la literal y , su área. Subraya la expresión que sirve para calcular el área a partir de las medidas del largo y del ancho.

- $y = x(x + 26)$ • $y = x(x - 26)$
- $y = x(26 - x)$ • $y = x(-26 - x)$

c) Completa la tabla para determinar el área de algunos rectángulos con perímetro de 52 metros.

Ancho (m)	Largo (m)	Perímetro fijo (m)	Área (m ²)
1	26 - 1 = 25	52	25
2		52	
5		52	
8		52	
10		52	
12		52	
13		52	
14		52	
x		52	

d) En la tabla anterior, hay un rectángulo cuya área es la menor de todas. ¿Cuáles son sus medidas? _____

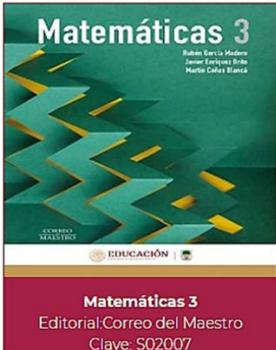
Valida tus respuestas de esta lección con tus compañeros. Comenten cómo obtuvieron sus resultados y analicen en grupo la información del recuadro.

Fuente: Matemáticas 3. Secundaria. Conecta Más consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.140- 141

Tercer análisis

Por otro lado, al analizar otros libros de texto, encontramos que se lleva a cabo una articulación entre variación y función, como se puede observar en el siguiente caso (ver Figura 7)

Figura 7: Índice- Ruta de aprendizaje

 <p>Matemáticas 3 Editorial Correo del Maestro Clave: S02007</p>	<p>2° MÓDULO Ruta de aprendizaje</p> <p>90 92</p>
	<p>EJE Número, algebra y variación</p>
	<p>TEMA Funciones</p>
	<p>LECCIÓN 11 Gráficas de movimiento y de llenado de recipientes Identifico y comparo gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.</p> <p>94</p>
	<p>LECCIÓN 12 La expresión algebraica de una función cuadrática Analizo y determino las características de una gráfica que modela una función cuadrática: ubicación del vértice, eje de simetría, mediante la representación algebraica y gráfica. Uso de expresiones algebraicas del tipo: $y = ax^2 + bx + c$ y del tipo $y = a(x - d)^2$ para determinar las características de la variación.</p> <p>102</p>
<p>LECCIÓN 13 Gráficas con diferente variación Represento tabular, gráfica y algebraicamente una función cuadrática y la comparo con otro tipo de variación.</p> <p>110</p>	

Fuente: consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.10

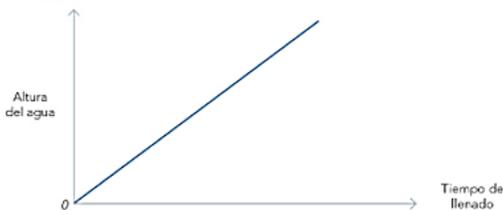
La forma en como abordan el concepto de función desde un enfoque variacional-covariacional consiste en que los estudiantes identifiquen la relación de dos variables a partir de una situación representada de forma gráfica, y una vez que se familiaricen con las variables involucradas en la representación gráfica se les solicita que, imaginen que tienen tres recipientes los cuales se llenan con llaves iguales que dejan pasar la misma cantidad de agua y a partir de ello se les indica que deben identificar la gráfica que corresponda a la situación del llenado de cada recipiente (ver **Figura 8**). Esta situación podría también no ser efectiva para la comprensión de la covariación debido a que el estudiante no es quien construye el modelo.

Figura 8: Lección 11 Gráficas de movimiento y de llenado de recipiente

I. Represento en el plano cartesiano diferentes situaciones relacionadas con el tiempo.

I. Imagina que tienes un tanque cilíndrico y realizas lo que se indica.

- Si este tanque se llenara con un flujo constante de agua a través de una llave, ¿el nivel del agua ascendería de manera uniforme con el tiempo, o no? Explica por qué.
- La relación constante entre dos variables, en este caso el tiempo y la altura que alcanza el agua en el recipiente, se representa con una línea recta en el plano cartesiano.



TOMO NOTA

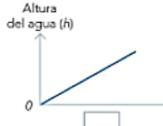
Recuerda que la capacidad de un cilindro depende del radio e indica cuánto puede contener. Se mide en litros o mililitros, mientras que el volumen es el espacio que ocupa el cilindro. La fórmula del volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$, donde $\pi = 3.1416$, r es el radio y h , la altura del cilindro.

b. Imagina ahora que tienes tres tanques como los que se muestran en las siguientes figuras, los cuales se llenan con llaves iguales que dejan pasar la misma cantidad de agua.

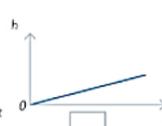




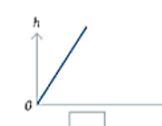
- ¿Cuál tiene más capacidad?
- ¿Cuál se llenará primero y cuál al final? Explica.
- ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde al llenado de cada tanque? Indica tu respuesta en los recuadros con el número romano que corresponda a la figura.



□



□



□

 Comparte tus respuestas con un integrante del grupo y verifiquen si éstas coinciden. Lleguen a acuerdos.

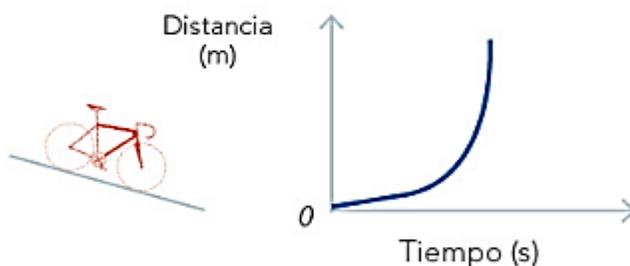
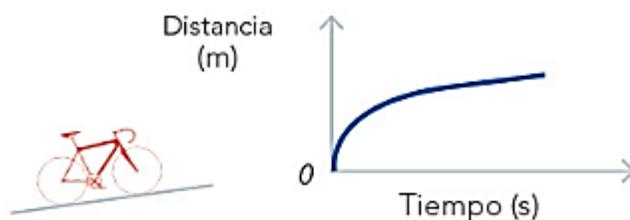
 Continúa actividad.

Fuente: Matemáticas 3. consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.95

En otros ejercicios subsiguientes el estudiante debe trabajar con el análisis de gráficas que representen situaciones las cuales tiene que imaginar que el objeto está en movimiento y a partir de ello dar una justificación del porqué cree que la gráfica se comporta de esa forma, si el objeto se mueve de cierta forma en particular (ver **Figura 9**).

Figura 9: Lección 11 Gráficas de movimiento y de llenado de recipientes

- a. Cuando nos movemos en bicicleta por una superficie inclinada, nos sentimos frenados si la recorremos cuesta arriba. En este caso la gráfica de nuestro recorrido será una curva hacia abajo, como la siguiente:



- ¿Por qué consideras que la gráfica tiene esa forma? Argumenta tu respuesta.
- b. Y cuando andamos en bicicleta por una superficie inclinada nos sentimos empujados si la recorremos cuesta abajo. En este caso la gráfica también será una curva, pero hacia arriba:
- ¿Por qué consideras que la gráfica tiene esa forma? Argumenta tu respuesta.

Fuente: Matemáticas 3. consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.99

La estructura que sigue el libro de texto da a entender que esta secuencia de ejercicios permite abrir paso a que los estudiantes vayan conociendo y familiarizándose con

términos como: eje de las abscisas, eje de las ordenadas, par ordenado, para así dar paso a la definición de función como la relación entre dos variables. Donde un valor está en función de otro si el valor del primero depende del valor del segundo (ver **Figura 10**).

Figura 10: Lección 12 La expresión algebraica de una función cuadrática

TOMO NOTA

Una **función** es la relación entre dos variables. Decimos que **un valor está en función de otro** si el valor del primero depende del valor del segundo. Si el valor que varía es x , entonces la regla de dependencia sobre los valores de x .

En el caso de la actividad 2, cada valor de x es restado en dos unidades para posteriormente elevar el resultado al cuadrado y obtener así un nuevo valor, es decir $y = (x - 2)^2$.

Es posible hacer uso de otra variable (y) para registrar la variación del resultado del cálculo de la función:

$y = (x - 2)^2$. En este caso se dice que y está en función de x .

Fuente: Matemáticas 3. consultado en CONALITEG.org, Ciclo Escolar 2021 – 2022 de México, p.104

A pesar de que estos libros de textos trabajan la variación-covariación ligados al concepto de función, su limitante resulta en que las cantidades que se les proporciona al estudiante y con las cuales ellos trabajan son cantidades estáticas, lo cual limita al estudiante a que pueda percatarse de forma intuitiva como las cantidades están variando o manteniéndose constante, incluso como se describió anteriormente los estudiantes deben imaginar el movimiento o el llenado de ciertos objetos limitándose a solo analizar gráficos o tablas de datos ya brindados sin que

puedan percibir la covariación de estas cantidad de forma dinámica y extraer el como una cantidad puede cambiar en relación a otra cantidad.

Es por ello que nuestra propuesta didáctica considera el trabajar desde un inicio con datos dinámicos dentro de un escenario virtual didáctico interactivo que le permita al estudiante el ir familiarizándose con términos de variación y el comprender que significa cuando una cantidad está “variando” o manteniéndose “constante” en determinados momentos y a su vez que puedan percibir la relación funcional entre las cantidades con las cuales están trabajando a través de diferentes formas de representación, ya que acorde con (Heather L. Johnson, 2012) la idea de que una covariación estática se considera menos avanzada que la que implica una covariación dinámica.

1.3 Objetivos de la investigación

El objetivo de este estudio es el diseño de una secuencia didáctica que promueva el razonamiento variacional-covariacional en estudiantes de secundaria (14-15 años), como antecedente al concepto de función.

Para lograrlo se proponen actividades en entornos didácticos digitales, los cuales aborden acciones mentales que estén ligados al reconocimiento de las variables y las relaciones entre ellas.

También, se pretende identificar qué nivel de covariación logran alcanzar los estudiantes al interactuar con modelos matemáticos que le permitan interpretar, predecir, describir y explicar situaciones de funciones tanto lineales como no lineales, observando sus propiedades y características. De esta manera, podremos indagar acerca de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al resolver tareas que impliquen identificar el tipo de variación que presenta una magnitud y, posteriormente, establecer relaciones funcionales entre pares de magnitudes. Lo

anterior, nos permitirá categorizarlas y asociarlas a cada nivel de covariación.

1.4 Preguntas de Investigación

Para encaminarnos hacia nuestro objetivo se plantean las siguientes preguntas:

¿Qué niveles de razonamiento covariacional logran alcanzar estudiantes de secundaria al resolver tareas de situaciones de covariación apoyadas en entornos digitales?

¿Qué dificultades se les presentan a estudiantes de secundaria cuando atienden las relaciones entre variables y su dependencia en contextos de variación-covariación?

En general, observamos que en los textos no se presenta un tratamiento previo, con tareas de variación-covariación, como antecedente para aprender al concepto de función. En este sentido, tenemos la siguiente hipótesis.

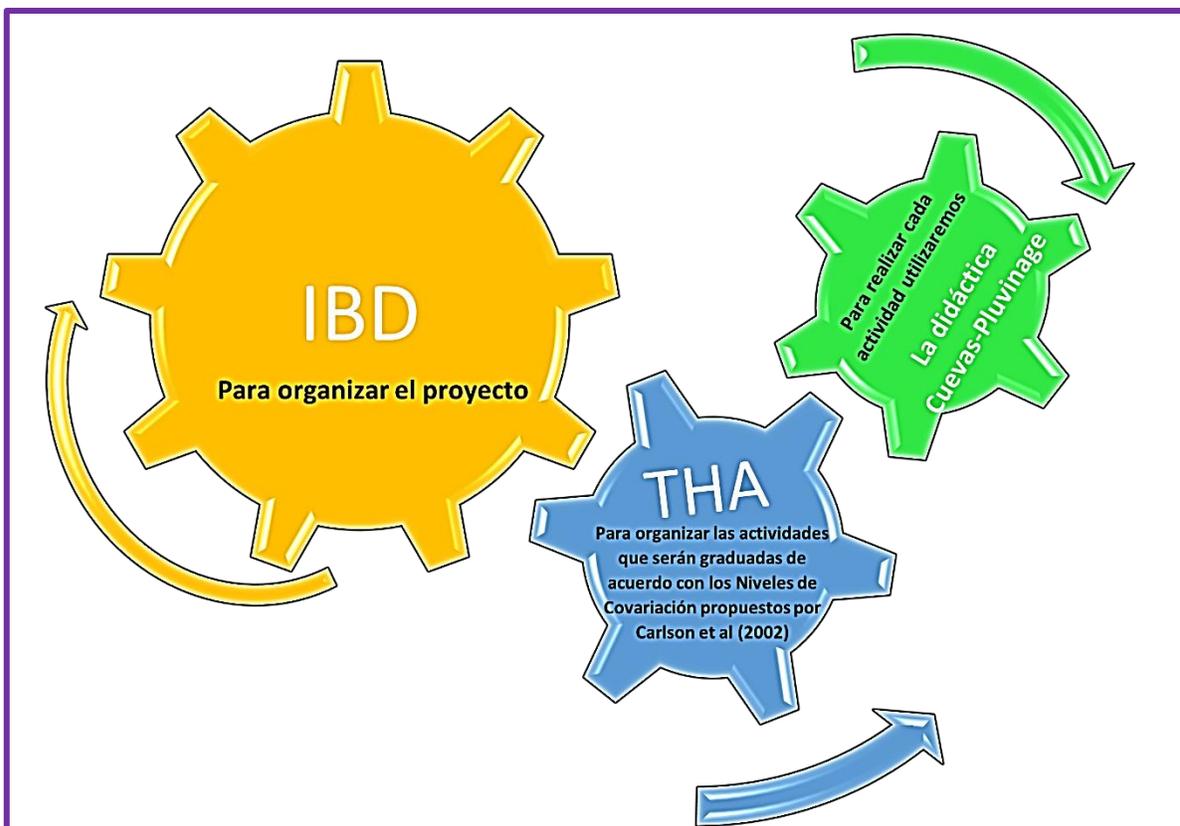
1.5 Hipótesis de la propuesta:

Tenemos la hipótesis de que plantear a los estudiantes actividades didácticas que estimulen su razonamiento covariacional puede servir de base cognitiva para que los estudiantes comprendan el concepto de función. El alcance de este trabajo consiste en observar si la secuencia didáctica diseñada ayuda a los estudiantes a promover su razonamiento covariacional, para evaluar tal progreso, nos valdremos de los niveles de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002). Por otro lado, consideramos que el empleo de la tecnología digital serviría como apoyo para que los estudiantes puedan apreciar de forma dinámica el tipo de variación que están presentando las magnitudes presentes en el fenómeno del movimiento de un objeto y a su vez poder establecer posibles relaciones funcionales entre pares de magnitudes.

Capítulo II. Marco Teórico

En este apartado consideramos pertinente distribuir el marco teórico en tres ejes principales que delinear la teoría que, da soporte a este proyecto, el primero hace referencia a la Investigación Basada en Diseño (IBD), el segundo a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) y el tercero a la Didáctica de Cuevas-Pluvinage (C&P).

Figura 11: Diagrama que ilustra como el engrane IBD mueve el engrane THA que a su vez mueve el engrane de la didáctica



Fuente: Elaboración propia

2.1 Investigación de diseño

La investigación de diseño educativo o internacionalmente conocida como *Educational Design Research* en la literatura, es un enfoque metodológico para la investigación que ha sido utilizada como una forma de etiqueta común para familias

de enfoques de investigación relacionados, con ciertas variaciones internas en sus objetivos y características. Dado que el diseño, los experimentos de diseño, el desarrollo y la parte formativa son parte de algunos de estos enfoques.

Para nuestro estudio adoptamos la concepción de investigación de diseño de Mintrop (2016), quien menciona que: “un diseño de intervención que consiste en una secuencia de actividades que juntas o en combinación intervienen en los conocimientos, creencias, disposiciones o rutinas con el fin de impulsar un nuevo aprendizaje que conduzca a nuevas prácticas” (p. 133, nuestra traducción).

De acuerdo con la concepción anterior, es claro que llevar a cabo un diseño va más allá de redactar y planificar una secuencia de actividades, para el concepto matemático en estudio,

El propósito del desarrollo del diseño es descubrir un conjunto de herramientas materiales, tareas, estructuras organizativas y cualquier otra actividad que sea aptos para poner en marcha un proceso de aprendizaje que mejore un problema focal de la práctica. Este conjunto es la intervención, el producto final de un determinado esfuerzo de desarrollo del diseño. (Mintrop, 2016, p. 219, nuestra traducción)

Dado lo anterior, algunos investigadores, como (Bakker, 2018) han llegado a definir a la investigación de diseño en educación, como “una investigación en la que el diseño de nuevos materiales educativos (por ejemplo, herramientas informáticas, actividades de aprendizaje o un programa de desarrollo profesional) es una parte crucial de la investigación” (p.3) por otro lado Plomp (2010) la define como:

el estudio sistemático del diseño, el desarrollo y la evaluación de intervenciones como programas, estrategias y materiales de enseñanza-aprendizaje, productos y sistemas, como soluciones a dichos problemas, que también tiene como objetivo

avanzar en el conocimiento de las características de estas intervenciones y los procesos para diseñarlas y desarrollarlas (p. 9, nuestra traducción).

2.1.1 Tipos de investigación de diseño

De acuerdo a lo anterior Plomp (2010) describe que acorde al propósito que se dé a la investigación de diseño, se puede distinguir dos tipos de investigación: estudios de desarrollo y estudios de validación

En el caso de los estudios de desarrollo, el objetivo de la investigación sobre el diseño educativo es desarrollar soluciones basadas en la investigación para problemas complejos de la práctica educativa. Este tipo de investigación de diseño se define como el análisis sistemático, el diseño y la evaluación de las intervenciones educativas con el doble objetivo de generar soluciones basadas en la investigación para problemas complejos de la práctica educativa, y avanzar en el conocimiento de las características de estas intervenciones y de los procesos de diseño y desarrollo de estas.

Por otro lado, en los estudios de validación el objetivo de la investigación de diseño es el desarrollo de una teoría, y este tipo de investigación de diseño se define como el estudio de intervenciones educativas (como procesos de aprendizaje, entornos de aprendizaje y similares) con el fin de desarrollar o validar teorías sobre dichos procesos y cómo pueden ser diseñados. (p.16, nuestra traducción)

En términos generales, estos dos estudios engloban la esencia de una investigación de diseño, ya que se trata de abordar métodos y medios los cuales permitan la formulación y la toma de decisiones, al momento de diseñar, crear, desarrollar y validar intervenciones educativas innovadoras, que den paso a la búsqueda de posibles soluciones a problemas que fueron percibidos e investigados en el salón de

clase, esto en lo que respecta al estudio de desarrollo, ya por el lado de validación, se trata de extrapolar estos procesos de intervención innovadores y comprobar si las teorías resultantes de estos procesos, pueden darse en otros entornos con características similares.

Para nuestra investigación, tomamos en cuenta ambos estudios el de desarrollo y validación, en vista que se hace uso de los conceptos de variación y covariación los cuales presentan una problemática para los estudiantes, como se describió en el primer capítulo, y como alternativa a su solución se llevó a cabo el diseño de actividades que incluyen Entornos Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) y Hojas de Exploración y Aprendizaje Guiado (HEAG) los cuales fueron desarrollados bajo los principios de la didáctica Cuevas-Pluvinage (C&P) (se describirá en la sección 2.6); organizadas por una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (se describirá en la sección 2.3) la cual es sometida a una validación mediante una adaptación de los niveles de covariación de Carlson et al (2002). Comparada, al final, con los resultados obtenidos por los estudiantes en cada paso de la THA, esto con el fin de poder retroalimentar y de ser necesario, reestructurar la investigación para una nueva intervención educativa; la cual pueda ser replicada en nuevos contextos con características similares.

2.1.2 Características de la Investigación de Diseño Educativo

Algunos investigadores que han aportado a la investigación de diseño, como Van den Akker et al (2006) y Bakker (2018) rescatan cinco características pertinentes a estos tipos de investigación, independientemente a cuál sea su objetivo, cabe mencionar que como lo señalan Confrey y Maloney (2015) al ser citados en Bakker (2018), estas cinco características no tienen que cumplirse necesariamente todas.

∞ **Intervencionista:** la investigación tiene como objetivo diseñar una intervención en el mundo real, donde se produce algún tipo de aprendizaje;

dado que, en muchos enfoques de investigación, el cambio y la comprensión de una situación están separados. Sin embargo, en la investigación del diseño se entrelazan de acuerdo con la siguiente idea: si quieres cambiar algo tienes que entenderlo, y si quieres entender algo tienes que cambiarlo (Bakker, 2004).

∞ **Iterativa:** la investigación incorpora un enfoque cíclico de diseño, evaluación y revisión; dada su naturaleza cíclica en ocasiones se refutan múltiples conjeturas sobre el aprendizaje y se pueden generar y probar conjeturas alternativas. Los ciclos suelen constar de las siguientes fases:

- ∞ fase de preparación y diseño
- ∞ experimento de enseñanza y
- ∞ análisis retrospectivo.

Los resultados de dicho análisis retrospectivo suelen alimentar un nuevo ciclo. Así mismo dentro de la investigación de diseño los cambios de los materiales y las ideas teóricas pueden tener lugar durante un experimento de enseñanza o una serie de experimentos de enseñanza, donde los investigadores del diseño acogen la variación inesperada para ver la solidez de sus ideas y diseños (independientemente de la cuestión de hasta qué punto es realmente posible el control en entornos naturalistas).

∞ **Orientado al proceso:** se evita un modelo de caja negra de medición de entradas y salidas, y se centra en la comprensión y la mejora de las intervenciones; dado que tiene componentes prospectivos y reflexivos que no se separan en la formulación de hipótesis antes y después de la aplicación de un diseño.

∞ **Orientado a la utilidad:** el mérito de un diseño se mide, en parte, por su practicidad para los usuarios en contextos reales;

∞ **Orientado a la teoría:** el diseño se basa (al menos en parte) en propuestas teóricas y las pruebas de campo del diseño contribuyen a la construcción de la teoría. La teoría generada a partir de la investigación del diseño suele ser humilde en el sentido de que se desarrolla para un ámbito específico, por ejemplo, dentro de la enseñanza de la historia. Sin embargo, debe ser lo suficientemente general como para poder aplicarse en diferentes contextos, como las aulas de otras escuelas en otros países. En estos casos se puede hablar de transferibilidad.

Nuestro estudio, rescata cuatro de las cinco características antes mencionadas. Intervencionista, dado que se lleva a cabo en un aula, con estudiantes de tercero de secundaria (14-15 años). Es iterativa y orientada al proceso dado que nuestras hojas de exploración guiada, nuestros escenarios virtuales y la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, tuvieron modificaciones durante el proceso, también nuestra puesta en escena de las actividades fue en base a las tres fases antes mencionadas: preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo. Y es orientada a la utilidad ya que nos proporciona información en cuanto a las ventajas y desventajas que fueron surgiendo de él, así como también el conocer su aporte a la comunidad de matemática educativa.

2.2 Investigación Basada en Diseño

La investigación Basada en Diseño (IBD) o conocida internacionalmente como (Design-Based Research, DBR), es una metodología perteneciente a la familia de Investigación de diseño, el cual se centra en el desarrollo de soluciones a problemas complejos.

Anderson y Shattuck (2012) rescatan que la IBD es una metodología que hace hincapié en la necesidad de construir una teoría y desarrollar principios de diseño (principios prácticos de diseño, patrones y/o teorización fundamentada) que guíen,

informen y mejoren tanto la práctica como la investigación en contextos educativos. Estos principios pueden ayudarnos a entender y ajustar tanto el contexto como las intervenciones para potenciar el aprendizaje. Así mismo las intervenciones educativas dan lugar a una mejora de la investigación, dado que los resultados obtenidos ofrecen abundantes pistas sobre la puesta en marcha de los diseños y del contexto de la práctica.

Por otro lado, para Bakker (2018) la IBD tiene como objetivo producir conocimientos prácticos que puedan utilizarse para alcanzar algún objetivo educativo a través del diseño. Es decir, permite el desarrollo de soluciones basadas en la investigación para problemas complejos de la práctica educativa, así como el desarrollo y la validación de teorías sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Por su parte, Molina et al (2011) menciona que el objetivo de la IBD va ligado a “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación” (p.76)

La IBD al ser un estudio de diseño, también cuenta con las cinco características anteriormente descritas en la sección 2.1.2, intervencionista, iterativa, orientado al proceso, orientado a la utilidad y orientado a la teoría.

El poseer estas características pueden significar un reto para los investigadores, debido que durante la organización del proyecto de investigación y su puesta en marcha, se debe llevar a cabo todo el tiempo un análisis retrospectivo de ello con el fin de mejorar la investigación. De acuerdo con Anderson y Shattuck (2012),

las intervenciones basadas en el diseño rara vez, o nunca, se diseñan e implementan a la perfección, por lo que siempre hay espacio para mejorar el

diseño y la evaluación posterior. Esta evolución a través de múltiples iteraciones es uno de los retos de la metodología, ya que es difícil saber cuándo (o si alguna vez) se completa el programa de investigación (p.17, nuestra traducción).

En términos generales podemos inferir que la investigación basada en diseño nos proporciona casos de estudio, ya que, al ser cíclica, brinda información para llegar a retroalimentar y rediseñar investigaciones, proponiendo innovaciones de enseñanza novedosas y cada vez más inclinadas a involucrar como apoyo las tecnologías digitales. La investigación basada en el diseño se propone crear nuevas líneas de estudio, que eventualmente lleguen a teorías o reformas curriculares y de enseñanza, las cuales puedan ser aplicadas de forma global a diferentes tipos de contextos. Para ello la IBD incita a llevar a cabo experiencias de enseñanza en los centros educativos, donde se haga uso de métodos mixtos, de los cuales se pueden llegar a implementar una gran variedad de herramientas y técnicas de investigación, eligiéndolos acorde a la necesidad que presenta la investigación.

2.2.1 Fases de la Investigación Basada en Diseño

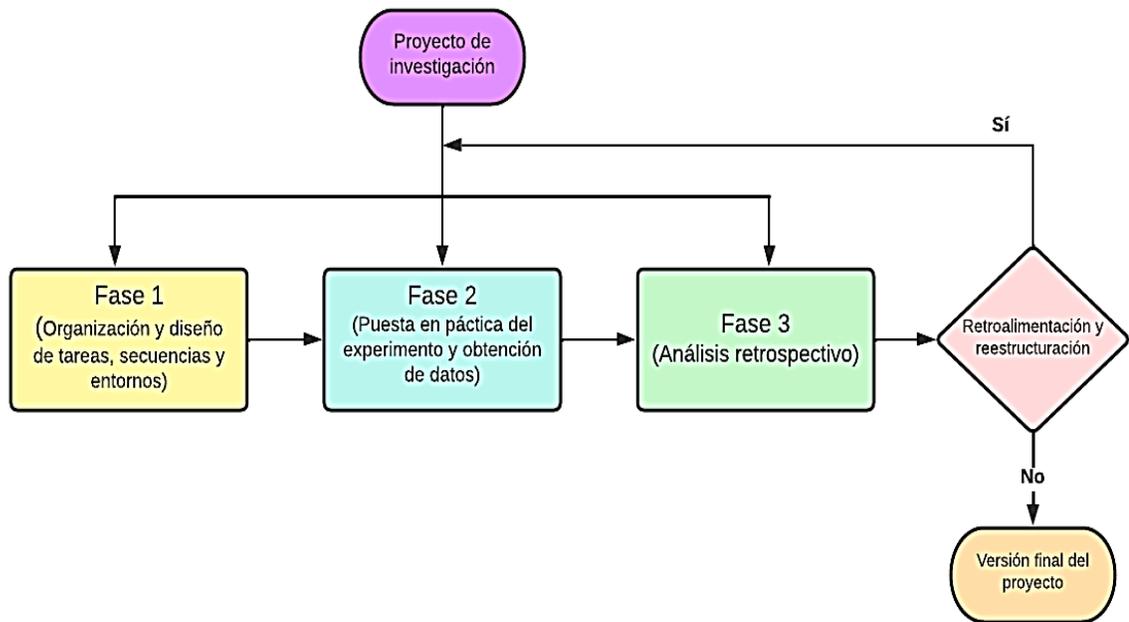
La IBD al ser cíclica, permite el rediseño de las intervenciones educativas de la investigación, acorde a las variables que dieron luz para ser modificadas.

De acuerdo con Bakker (2018) al ser esta investigación de carácter iterativa, dentro de sus ciclos pueden comprenderse las siguientes fases:

- ∞ Fase 1: preparación y diseño
- ∞ Fase 2: experimento de enseñanza y
- ∞ Fase 3: análisis retrospectivo.

Este proceso puede representarse con el siguiente diagrama:

Figura 12: Ciclo de investigación de diseño de acuerdo con Bakker (2018)



Fuente: Elaboración propia

A continuación, se describe cada una de las fases y sus implicaciones según las posturas de Plomp (2013) y Bakker (2018):

∞ Fase 1: Preparación y diseño

Es en esta fase donde se comienza a desarrollar, formular y bosquejar las primeras estructuras del diseño de la versión preliminar del proyecto de investigación

Asimismo, Bakker (2018), menciona que es en esta primera fase donde se decide qué es lo que se pretende diseñar -tareas, secuencias, entornos de aprendizaje; y el tipo de conocimiento que se quiere generar, además de poder formular una THA (se describirá en la sección 2.3), la cual proporciona una gran ventaja, ya que obliga al investigador a ser lo más explícito posible sobre su aportación teórica, sus experiencias prácticas, valores y objetivos. Cabe mencionar que el investigador puede utilizar todo el material que tiene

a su alcance incluidos los conocimientos teóricos y la experiencia práctica con la enseñanza y el diseño.

Dentro del diseño del proyecto de investigación, los objetivos juegan un papel fundamental, ya que sirven como guía para marcar el rumbo que se le dará al proyecto, en este sentido, Plomp (2013) menciona que el equipo de investigación tiene que analizar los objetivos desde un punto de vista disciplinario, para establecer cuáles son los objetivos más relevantes o útiles. Lo anterior con el fin de tener claro cuál es su intención teórica de inicio y cuáles son los fines de instrucción (enseñanza-aprendizaje), a los que se aspira llegar y por qué.

∞ **Fase 2: experimento de enseñanza**

La segunda fase consiste en la puesta en marcha la versión preliminar del proyecto de investigación, es decir llevara a cabo los ensayos con la población a estudiar, ya sea en parejas, grupos pequeños o salones de clase enteras.

Para algunos autores, como Bakker (2018) la implementación de una THA en esta fase, sirve de guía para la puesta en práctica del ensayo o del experimento de enseñanza, además de orientar la recogida de datos sobre los fenómenos en los que está más interesados indagar.

La recopilación de datos suele incluir el trabajo desarrollado por los estudiantes de las actividades planteadas en el diseño, así como entrevistas, grabaciones de audio o vídeo de los debates de toda la clase con los estudiantes y los profesores, los cuales son puntos clave para el análisis de los resultados, y estos a su vez son relevantes para la THA.

Durante un experimento de enseñanza, los investigadores y los profesores utilizan las actividades y los tipos de instrucción que parecen más apropiados en ese momento. Las observaciones de una lección y los argumentos teóricos

de múltiples fuentes pueden influir en lo que se hace en la siguiente sesión o lección.

∞ Fase 3: Análisis retrospectivo

En esta fase el objetivo de los análisis dependerá de la intención teórica del experimento de enseñanza, donde necesariamente deberá pasar por un proceso iterativo de análisis de todo el conjunto de datos obtenidos en la fase 2. Plomp (2013), menciona que uno de los retos de esta fase consiste en analizar el amplio conjunto de datos de forma sistemática, documentando todas las fases del proceso de análisis, incluyendo la parte de refinar y refutar las conjeturas hechas en la primera fase.

Esta parte de refinar y refutar conjeturas puede estar ligado al querer validar trayectorias de aprendizaje, que fueron planteadas para la organización del proyecto de investigación. Pues si el investigador en el transcurso de las fases de la IBD ha venido trabajando con la implementación de una THA, es en esta tercera etapa que debe de realizar un análisis, donde se comparara a la THA con la TRA, en nuestro caso, por la naturaleza del trabajo, no llevaremos a cabo esta comparación, sino que realizaremos en nuestro análisis una comparación de la THA con los resultados obtenidos de la intervención con los estudiantes al desarrollar cada una de las actividades contempladas en el proyecto de investigación.

El análisis de ambas trayectorias alude a la comprensión de los motivos por los que se produce o no un determinado aprendizaje pues acorde con Bakker (2018), esta comprensión ayuda a mejorar la THA en ciclos posteriores de investigación de diseño. Este proceso iterativo permite al investigador mejorar el poder predictivo de la THA en los siguientes experimentos de enseñanza. Una THA elaborada incluiría supuestos sobre el aprendizaje

potencial de los estudiantes y sobre cómo el profesor apoyaría los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

2.3 Trayectoria hipotética de aprendizaje

La Trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), conocida internacionalmente como *The Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) puede ser concebida como una herramienta para la planificación y organización de las actividades de instrucción a desarrollar en el salón de clase.

En 1995, Martin Simon introdujo la idea de un ciclo de enseñanza de las matemáticas, donde contempla como parte de su modelo iterativo a la trayectoria hipotética de aprendizaje, para el diseño de la instrucción matemática. Ya que esta muestra sobre la base de evidencia empírica, el proceso que un profesor sigue para la toma de decisiones sobre el diseño del proyecto de enseñanza, con la finalidad de promover el aprendizaje en los estudiantes.

Para Simon (1995) el objetivo de aprendizaje del profesor proporciona una dirección para una THA, dado que marca una posible ruta para el profesor sobre el camino que podría seguir el aprendizaje. Es hipotética porque la trayectoria real de aprendizaje no se puede conocer de antemano. Esta además proporciona al profesor una justificación para elegir un proyecto educativo en particular; ya que permite que se tomen decisiones de diseño basadas en una mejor suposición de cómo procederá el aprendizaje. Así mismo, Bakker (2018) menciona que con ayuda de la THA los profesores pueden anticipar el progreso de los estudiantes desde ciertos puntos de partida hasta los resultados esperados. Debido a que durante y después de la clase, el profesor evalúa lo que aprenden los alumnos y comprueba si es necesario realizar ajustes en el plan inicial, lo cual alimenta su conocimiento sobre los conocimientos

matemáticos de sus estudiantes, y el ciclo puede comenzar de nuevo con un plan revisado o nuevo.

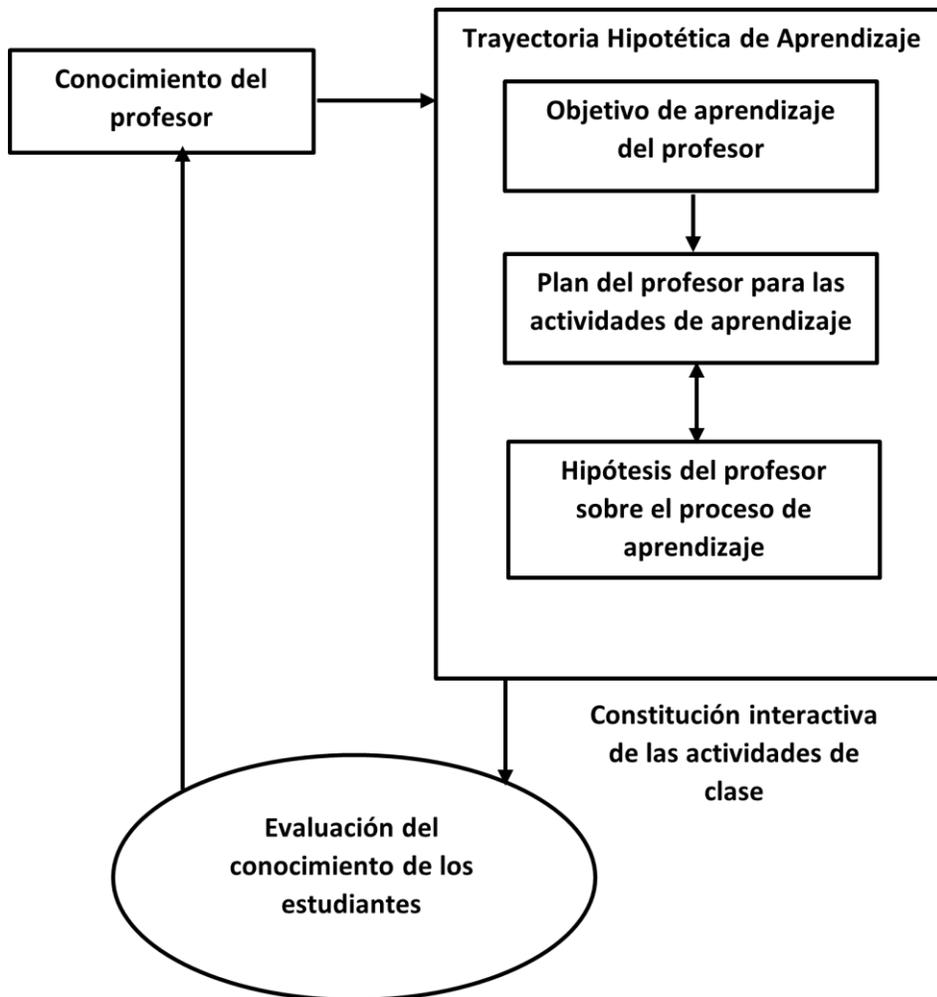
Observamos que la THA está formada por tres componentes esenciales:

- ∞ Los objetivos de aprendizaje que definirán la dirección que se le dará al proyecto de investigación.
- ∞ Las actividades de aprendizaje, diseñadas y organizadas con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje.
- ∞ Y el proceso hipotético de aprendizaje -una predicción de cómo evolucionará el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje planteadas.

Estos componentes pretenden resaltar la importancia de que, al momento de organizar un proyecto de investigación a partir de una THA, es necesario tener en mente un objetivo y una justificación para las decisiones de enseñanza, acorde a las hipótesis planteadas para el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, recordando siempre que estas pueden ir modificándose en el transcurso de su aplicación, lo cual obliga al investigador a modificar sistemáticamente cada objetivo e hipótesis planteadas en la THA, para futuras intervenciones.

En vista a lo anterior, Simon (1995) nos subraya que la creación y la modificación continua de la trayectoria hipotética de aprendizaje es la pieza central del modelo que se esquematiza. Por lo cual el siguiente diagrama (ver **Figura 13**) nos presenta los principales elementos del ciclo de enseñanza de las matemáticas, incluyendo aquellos que componen la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Figura 13: Ciclo de enseñanza de las matemáticas



Fuente: Simón, 1995, p.136, nuestra traducción

Simon y Tzur, (2004) mencionan que mientras que el objetivo del profesor para el aprendizaje de los alumnos proporciona una dirección para los demás elementos de la THA, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos son interdependientes, por lo que la selección de las tareas se hace en función de las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje; y las hipótesis del proceso de aprendizaje se basan en las tareas. En este constructo subyacen las características siguientes:

1. La generación de un THA se basa en la comprensión de los conocimientos actuales de los alumnos implicados.

2. Una THA es un vehículo para planificar el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos.

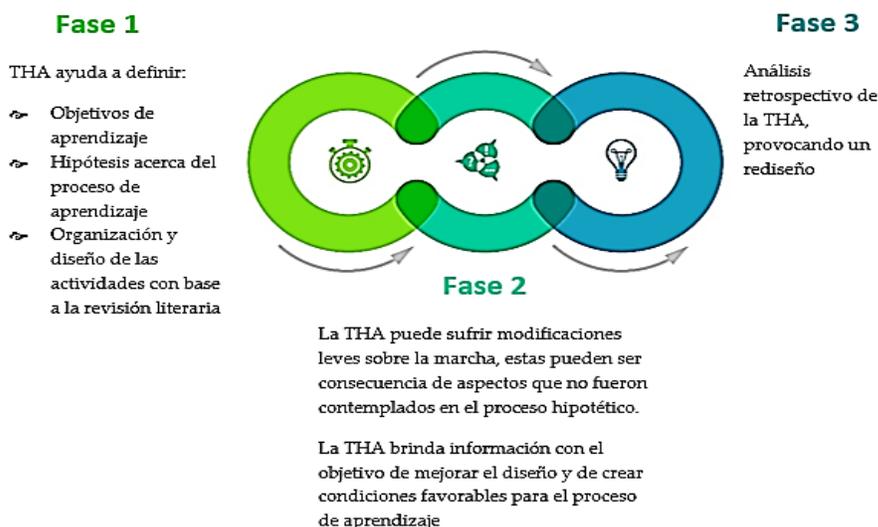
3. Las tareas matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares y son, por lo tanto, una parte clave del proceso de instrucción.

4. Debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso el profesor participa regularmente en la modificación de todos los aspectos de la THA. (p.93, nuestra traducción)

Los componentes y características de la THA pueden articularse con las fases anteriormente descritas en la sección 2.2.1 de la IBD, pues acorde con Bakker (2018) la THA tiene funciones metodológicas útiles, las cuales pueden estar en las distintas fases de los ciclos de diseño (ver **Figura 14**).

Convirtiéndola en una herramienta fundamental de diseño en cada una de las fases.

Figura 14: Articulación de la THA y los ciclos de diseño de la IBD



Fuente: Elaboración propia

2.4 Pensamiento variacional

Diversas investigaciones (Cantoral y Farfán 1998; Vasco 2003; Cabezas y Mendoza 2016), han conceptualizado al pensamiento variacional como una forma dinámica de pensamiento, que incluye la formulación de estrategias y formas de razonamiento covariacional, procurando el desarrollo de estructuras cognitivas que permitan el identificar, analizar e interpretar situaciones de variación. Uno de sus propósitos ha sido articular la investigación y las prácticas sociales, a través de contextos relacionados con el cambio, dándole vida en los sistemas de enseñanza

De acuerdo con Cabezas y Mendoza, (2016), pensar variacionalmente consiste en un proceso mental activo que conduce a la comprensión y a la visualización de modelos mentales de situaciones que involucren a la variación, permitiendo que se desarrollen las capacidades de emplear, interpretar y analizar de forma dinámica las diferentes formas de representación para poder determinar la relación que hay entre ellas.

El pensamiento variacional y su interrelación con las diferentes formas de representación ayuda a que el fenómeno de la variación pueda ser observado y analizado, por medio de modelos numéricos, algebraicos, tabulares, gráficos, verbales. La articulación de este pensamiento con los modelos matemáticos, permiten que el estudiante desarrolle de manera gradual capacidades para identificar patrones, reconocer y representar relaciones funcionales en diversos contextos. La variación que está presente en estos contextos puede concebirse como la percepción de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se llegan a visualizar en ciertos procesos, en los que se involucre diversas relaciones entre magnitudes.

Para este estudio, se han considerado los conceptos de variable, constante y parámetro, las cuales describiremos a continuación acorde a la postura que toman Thompson, P. W., y Carlson (2017) de ellas:

Las magnitudes que se han observado en diferentes contextos de variación cada una puede determinar un significado diferente; uno de ellos corresponde a si el estudiante se percata que la cantidad en observación tiene un valor el cual no varía nunca, entonces para él, esta magnitud tiene el significado de una *constante*. Pero si el estudiante observa que la cantidad tiene un valor que puede cambiar de un ajuste a otro, pero no varía dentro de un ajuste, esta magnitud, para él, tiene el significado de un *parámetro*. Por otro lado, si el estudiante prevé que el valor de la cantidad varía dentro de un ajuste, entonces, para él, la magnitud tiene el significado de una *variable*.

Estos tres conceptos llegan a jugar un papel fundamental, dentro de los contextos y las HEAG propuestos para nuestro estudio, ya que el estudiante tendrá que identificar el papel que juega cada dato dentro del contexto planteado para poder determinar relaciones funcionales entre ellos, haciendo uso de diferentes formas de representación que modelen a la situación.

Es por ello que Moore y Carlson (2012) reportan la importancia del pensamiento variacional y el razonamiento covariacional para la capacidad de los estudiantes de modelar situaciones dinámicas, la postura que adoptamos con respecto al pensamiento variacional corresponde a la de Maury et al (2012), la cual se complementa con la de Moore y Carlson, ya que conciben a este pensamiento como “la capacidad de identificar fenómenos de variación y cambio, para interpretarlos, describirlos, cuantificarlos, modelarlos, transformarlos y predecir sus consecuencias” (p.8). Desarrollar el pensamiento variacional permite a los estudiantes identificar de forma intuitiva fenómenos de variación y cambio; siendo

capaces de modelarlos y transformarlos, lo que favorecerá a desarrollar procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

Considerando que el estudio tiene como parte de su trayectoria de aprendizaje involucrar el análisis de la coordinación y la relación funcional entre variables, Asumimos como uno de sus ejes centrales *el razonamiento covariacional* el cual se describirá a continuación:

2.5 Razonamiento covariacional

El razonamiento covariacional es definido por Carlson et al. (2003) como: “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.124).

Estas actividades cognitivas permiten al estudiante recoger, procesar y construir nueva información a partir de su interacción, percepción y comprensión del entorno en el que se encuentra envuelto, logrando que tenga un rol activo en el proceso de aprendizaje. Durante la adquisición de conocimiento, el tratamiento de la información y el razonamiento de la información al interactuar con situaciones de covariación, el estudiante va presentando ciertos comportamientos los cuales para nuestra investigación requeriremos de su clasificación, para ello se implementará las *acciones mentales* (AM) propuestas por Carlson et al (2002):

estas acciones mentales proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes participan en tareas de covariación; sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, en relación con una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales presentes mientras responde a esa tarea (p. 356, nuestra traducción)

A continuación, se describen las acciones mentales presentes en el razonamiento covariacional con su propuesta a los comportamientos esperados para cada AM:

Tabla 1: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la

dirección de las concavidades son correctos).

Fuente: Carlson et al., 2003, p. 128

La adquisición de las AM permite que el estudiante pueda ser clasificado en niveles de razonamiento covariacional, evidenciando su desarrollo en cada AM, ya que para determinar que un estudiante a alcanzado cierto nivel, este debe sustentar que ha desarrollado la AM del nivel y todas las anteriores a él. Ejemplo: mencionar que un estudiante ha alcanzado el Nivel 3 de razonamiento covariacional, implica que ha desarrollado las acciones mentales AM1, AM2 y AM3.

El marco conceptual para la covariación contiene cinco niveles distintos de desarrollo los cuales se describen a continuación:

Tabla 2: Niveles del razonamiento covariacional

Nivel de razonamiento	Nombre	Comportamiento
Nivel 1 (N1)	Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)
Nivel 2 (N2)	Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3)	Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4)	Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio

		promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5)	Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Fuente: Carlson et al., 2003, p.129

En nuestro estudio las acciones mentales se contemplan para la graduación de las actividades en nuestras HEAG, estas actividades se evalúan de acuerdo con los niveles de covariación propuestos por Carlson y colegas, categorizando los logros y las dificultades de los estudiantes para cada nivel de comprensión.

2.6 Didáctica Cuevas y Pluvínage

Se considera la implementación de este marco didáctico debido a que establece una ingeniería didáctica para la planeación de un programa de matemáticas en un nivel post-elemental; proponiendo principios didácticos que guían el diseño de tareas; por ejemplo, iniciar las actividades mediante un problema conceptualmente rico y de interés para el estudiante, en donde sea él quién lo resuelva, y una vez resuelto el

problema se debe verificar su respuesta. Permitiendo al estudiante ser un agente de acción y conduciéndolo de manera gradual hacia el concepto matemático.

Los principios considerados acorde a Cuevas y Pluinage (2003) se describen a continuación:

- ✎ Es esencial que el estudiante esté siempre **desarrollando una acción**. El estudiante, mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, debe construir o llegar al concepto matemático deseado.
- ✎ Cuando se introduzca un concepto se debe **partir de un problema de contexto** que cause interés en el estudiante. Este problema puede generar subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada lleve al estudiante a definir el concepto matemático deseado. Nunca debemos introducir un concepto mediante su definición formal.
- ✎ Una vez resuelto el problema planteado, el estudiante debe **validar sus resultados**, verificando que tengan un sentido lógico.
- ✎ Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo mediante la resolución de un determinado problema. Es necesario **descomponer o dividir este problema en subproblemas** que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requerirá para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, el cual mediante ejercicios gradualmente dosificados nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta.
- ✎ Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la **operación inversa**.

☞ Cada vez que se enseñe un determinado concepto de matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajemos el concepto (si es posible) en los **diversos registros de representación**, propios del concepto

El primer y segundo principio va acorde con el diseño e implementación de los escenarios EDVI y las HEAG, donde se incluyen contextos de variación en los cuales el estudiante estará interactuando y siendo un agente de acción de su aprendizaje.

Se emplea el cuarto principio, dado que nuestras actividades son graduadas por las acciones mentales de covariación, partiendo de tareas que involucran comportamientos de la primera acción hasta tareas que involucran comportamientos de la última acción mental esperada, la secuencia de estas actividades permite observar la evolución de los estudiantes con respecto a los comportamientos que van desarrollando de las acciones mentales al momento de interactuar con los escenarios virtuales en GeoGebra y al desarrollar las actividades de las HEAG.

El quinto y el sexto principio (operación inversa e implementación de formas de representación) se complementan dado que para el diseño de nuestras hojas de exploración se implementan diversas formas de representación para que el estudiante pueda identificar, establecer e analizar diversas relaciones funcionales a partir de contextos de covariación y a su vez ver la relación que hay entre ellos, dando paso al tercer principio de validación, donde podrán comparar sus primeras ideas intuitivas de relaciones funcionales con las que van generando sobre el proceso, al interactuar con los escenarios y con las HEAG.

Capítulo III. Metodología

Este estudio se desarrolla mediante una investigación en diseño (IBD) propuesta por (Bakker, 2018), en la cual se lleva a cabo las fases de preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo, su implementación se describirá en los siguientes apartados. Para el diseño de nuestra secuencia de actividades, utilizamos una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage.

3.1 Fase 1: Preparación y diseño

3.1.1 Prueba piloto

La prueba piloto se llevó a cabo con dos estudiantes de secundaria del segundo y tercer año, lo que permitió introducir mejoras al diseño de las actividades y escenarios de GeoGebra, para finalizar con una versión definitiva, la cual fuese la base para la toma de datos de nuestra investigación, con los estudiantes de tercero de secundaria de la escuela Secundaria Técnica No.38 “Ricardo Flores Magón”.

Algunos aspectos que se tomaron en cuenta al momento de realizar el cambio fueron:

- Mejoras en el léxico, redacción de algunas preguntas e instrucciones que causaban confusión en los estudiantes.
- Se le añadieron nuevas preguntas las cuales ayudasen a tener una mejor secuencia de las actividades.
- Se considero el tiempo en que los estudiantes llevaban a cabo cada una de las actividades, para la toma de decisión de acortar o extender el número de sesiones.
- Se modificaron tablas y planos (escalas), con el objetivo de que los estudiantes pudiesen tener una mejor visualización de las gráficas al momento de graficar.

- Se modificaron los escenarios de GeoGebra, al encontrarnos con errores (estéticos y matemáticos) al momento en que los estudiantes interactuaban con él.

3.1.2 Descripción y objetivo de las actividades

La aplicación se dividió en cuatro sesiones, en donde cada sesión contaba con hojas de exploración y aprendizaje guiado y con escenarios didácticos virtuales interactivos, los cuales están centrados en cubrir las primeras tres acciones mentales Carlson et al (2002) los cuales nos permitirán analizar los comportamientos que presentan los estudiantes al desarrollar actividades en situaciones de covariación. Nos centramos solo en los primeros tres niveles de covariación dado que nuestro objetivo es observar la variación y la covariación, como antecedente para la función., y aunque el programa de estudio de tercero de secundaria de la SEP (2017) aborda de manera implícita el concepto de razón de cambio (lo cual es acorde al cuarto nivel de covariación) , esta no se define formalmente, por lo que consideramos que basar la propuesta en los tres primeros niveles es lo más adecuado, según el nivel educativo.

El contexto que se utilizó para llevar a cabo cada actividad consistió, en el análisis del movimiento de cabinas en un teleférico en diferentes tramos del recorrido.

A continuación, describiremos el objetivo de cada actividad:

Actividad#1

(ver anexo 8.1):

Para esta actividad se consideró la AM1, en donde se toma en cuenta la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra, es

Figura 15: Teleférico #1, velocidad constante



Fuente: *Elaboración propia*

decir que para este caso se observara que el estudiante pase por un proceso en donde primero trate de identificar las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno (en nuestro caso el teleférico): constantes, parámetros y variables, luego una vez que hayan identificado que magnitudes variaban o se mantenían constantes, se espera que los estudiantes traten de coordinar formas de relacionar dichas magnitudes en una relación de dependencia usando diferentes formas de representación. La actividad #1 cuenta con un Escenario didáctico virtual interactivo al cual podrá ingresar a través del siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/pmjgfx6c>

Actividad #2- parte 1:
(Ver anexo 8.2)

En esta actividad se toma en cuenta la acción mental dos (AM2), en la que se considera la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable; es decir, se observa si puede identificar la dirección del cambio, si este presenta un crecimiento o un decrecimiento en el valor de salida, mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. La actividad #2- parte 1 cuenta con un Escenario didáctico virtual interactivo al cual podrá ingresar a través del siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/dmj2zycy>

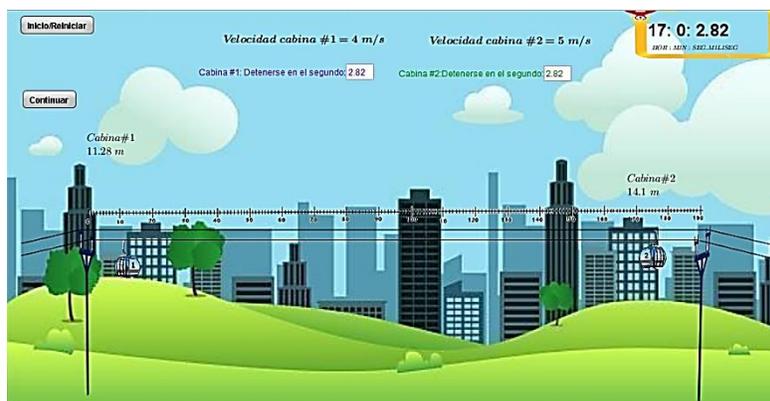
Actividad #2-parte 2
(ver anexo 8.3):

En esta actividad consideramos el cuarto principio de la didáctica Cuevas-Pluvinage: intentar en lo posible, cada vez que se realicen

operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.

Se implementa esta actividad con el fin de poder observar si los estudiantes, al proporcionarles una representación gráfica, pueden presentar comportamientos de la AM1 (coordinación de las dos variables) y comportamientos de la AM2 (identificar que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento)

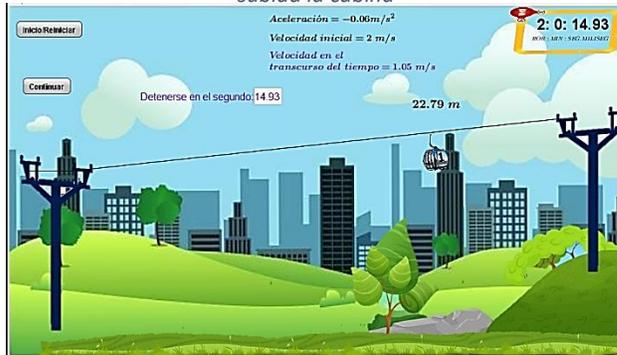
Figura 16: Teleférico #2, comparar dos velocidades constantes



Fuente: Elaboración propia

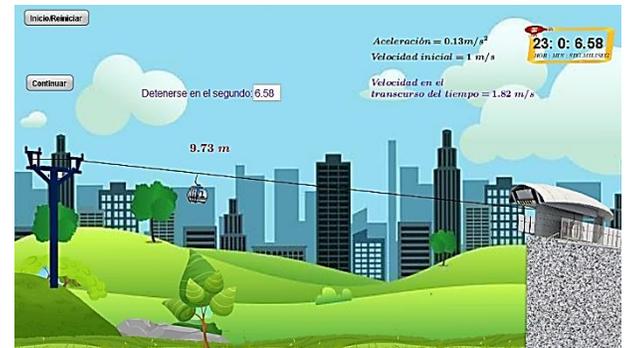
Actividad #3 (ver anexo 8.4) y actividad #4 (ver anexo 8.5):

Figura 17: Teleférico #3, cambio de la velocidad cuando va en subida la cabina



Fuente: Elaboración propia

Figura 18: Teleférico #4, cambio de la velocidad cuando va de bajada la cabina



Fuente: Elaboración propia

Estas actividades se enfocan en la acción mental tres (AM3), en la cuantificación del cambio. Se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio en la variable dependiente. En este caso, el estudiante debe identificar el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grande) o desacelerado (cada vez más pequeño). La actividad #3 y #4 cuentan con un Escenario didáctico virtual interactivo al cual podrá ingresar a través de los siguientes enlaces respectivamente: <https://www.geogebra.org/m/sqwkuand> y <https://www.geogebra.org/m/jtba2xtz>

3.1.3 Una adaptación de los niveles de covariación

Para el contexto particular de este estudio hemos realizado una adaptación de los niveles de covariación propuestos por Carlson et al. (2002), los descriptores correspondientes se muestran a continuación:

Tabla 3: Descriptores de las acciones mentales utilizados para la evaluación, una realizado una adaptación de los niveles de covariación propuestos por Carlson et al. (2002)

Nivel	Descripción	Comportamiento
Nivel 1 (N1) La Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden	En este caso el estudiante debe identificar las diferentes magnitudes involucradas en el contexto del teleférico (tiempo-horas, tiempo-segundos,

	sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)	distancia, velocidad, altura) tipificando, las magnitudes que intervienen, en: constante, parámetro o variable. Una vez que identifique qué magnitudes varían o cuáles se mantienen constantes, el estudiante debe establecer una relación funcional que involucre a las magnitudes mediante diferentes formas de representación (simbólica, tabular o gráfica), los cuales modelan la situación del recorrido de una cabina en un tramo del teleférico.
Nivel 2 (N2) La Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.	Además de que el estudiante muestre el Nivel 1, deberá identificar la dirección del cambio; i.e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo). Al analizar las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo. Posteriormente debe identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento.
Nivel 3 (N3) Cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales	El estudiante identifica que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos. Considerando qué magnitudes hacen que se comporten de esa manera y su forma de comportarse (en nuestro caso que consideren que está pasando con la aceleración y la velocidad en ese momento)

identificadas como
AM1, AM2 y AM3 son
sustentadas por las
imágenes de N3.

Fuente: Elaboración propia

3.1.4 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje sobre la Variación

La trayectoria de aprendizaje que presentamos en esta sección se diseñó con el propósito de desarrollar en los estudiantes los primeros tres niveles de covariación mediante la realización de actividades. Por lo tanto, los objetivos de aprendizaje que describiremos para cada actividad están basados en nuestra adaptación de las primeras tres acciones mentales propuestas por Carlson et al (2002). Asimismo, proponemos los procesos hipotéticos de aprendizaje con base en los comportamientos de dichas acciones mentales.

THA de la AM1-parte 1.

- 1. Objetivo de aprendizaje:** Identificar los tipos de variación de las magnitudes de: distancia, tiempo, velocidad, aceleración y altura.

1.1 Actividades de aprendizaje: Los estudiantes observarán en el escenario #1 del teleférico, la variación que presentan los textos dinámicos asociados a características del movimiento de una cabina, que aparecen cuando se da clic a los botones: [*dame una velocidad y hora*], [*play*], [*pausa y continuar*]. De igual forma los estudiantes observarán en el escenario #2 el movimiento de dos cabinas y en los textos dinámicos cuando existe un cambio en la velocidad. (Para consultar los escenarios ir a los enlaces <https://www.geogebra.org/m/pmjgfx6c> y <https://www.geogebra.org/m/dmj2zycy>)

1.1 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que el estudiante identifique que, en los textos dinámicos de velocidad, hora, segundos y distancia, el comportamiento de estas magnitudes este variando o manteniéndose constante.

También se espera que el estudiante se vaya familiarizando con términos de que varía o que es constante. Por último, se espera que una vez que el estudiante haya realizado un ajuste (elegir con qué velocidad trabajar) puedan determinar que magnitudes estuvieron variando todo el tiempo, cuales se mantuvieron constante o cuales cambiaron en cierto momento y luego se mantuvieron constantes. La dificultad aumenta un poco debido a que en el primer escenario solo se cuenta con una velocidad, pero ya en el segundo escenario los estudiantes deben observar y analizar dos velocidades e identificar que está cambiando en ellas en relación con las otras magnitudes.

1.2 Actividades de aprendizaje:

Los estudiantes en la actividad #1, apartado 1 deberán completar una tabla indicando si la magnitud observada en los textos dinámicos del escenario #1 varía o es constante.

De igual forma para la actividad #2 apartado 1, los estudiantes deberán completar una tabla con nuevas magnitudes proporcionadas por la simulación del movimiento de dos cabinas en el escenario #2, seleccionando si esa magnitud varía o es constante acorde a lo observado en los textos dinámicos.

(Para consultar las actividades ver anexo 8.1 y 8.2)

1.2 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan identificar la diferencia entre lo que varía y lo que se mantiene constante, también se espera que se familiaricen con esos dos términos.

1.3 Actividades de aprendizaje:

El estudiante observara que cambios está presentando la velocidad cuando se involucra una nueva magnitud (aceleración) en el escenario del teleférico, en el momento cuando la cabina va de subida por el teleférico (escenario #3 y actividad #3 – apartados “C- E”) y cuando va de bajada a la estación del teleférico (escenario #4 y actividad #4, apartado “B-C”).

1.3 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que el estudiante identifique que el incorporar una nueva magnitud (aceleración) al contexto del teleférico, esta influirá en los cambios de variación de otras magnitudes como la velocidad.

1.4 Actividades de aprendizaje:

Los estudiantes clasifican en una tabla las magnitudes de: velocidad, altura, distancia, tiempo, aceleración, trabajadas desde el escenario 1 al 4 acorde a su tipo de variación. (Para consultar la actividad #1 apartados “M-N” y actividad #4 apartados “T” y “U” ver anexos 8.1 y 8.5)

1.4 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes al trabajar con magnitudes dinámicas puedan identificar y clasificar sin mucha complejidad cada magnitud según su tipo de variación en constante, variable y parámetro

THA de la AM1-parte 2

2. **objetivo de aprendizaje:** Establecen relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia, tiempo, velocidad y aceleración.

2.1 Actividades de aprendizaje:

En la actividad #1 apartado F consiste en el análisis de la simulación del recorrido de una cabina, ya en la segunda actividad apartados "I-K" en el análisis de dos cabinas, en estas actividades el estudiante deberá graficar o elegir acorde a su intuición, la gráfica que corresponda al movimiento de la cabina (involucrando las magnitudes de distancia y tiempo, cuando la velocidad es constante).

(Para consultar las actividades ver anexo 8.1 y 8.2)

2.1 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes establezcan una relación funcional entre distancia y tiempo del movimiento de la cabina y no se dejen guiar por la trayectoria que realiza la cabina a lo largo del teleférico.

2.2 Actividades de aprendizaje:

Los estudiantes analizan el movimiento de una cabina en un determinado tiempo, identificando de forma específica que está ocurriendo con su velocidad y distancia, si esta cambia o no y porqué. También los estudiantes encuentran valores para determinadas magnitudes (Estas actividades están dosificadas por lo cual su nivel de dificultad va de menor a mayor, analizando en la actividad #1 apartados "A-E" una cabina en su trayecto de forma horizontal, luego en la actividad #2 apartados "A-H" se analizan dos cabinas, luego se analiza a una cabina en subida en la

actividad #3 apartados “F” y “G” y por último una cabina en bajada en la actividad #4 apartado “J”)

(Para consultar las actividades ver anexo 8.1, 8.2, 8.4 y 8.5)

2.2 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que el estudiante pueda familiarizarse poco a poco de la relación que existe entre algunas magnitudes de forma particular y empezar a establecer relaciones funcionales de forma simbólica de dichas magnitudes.

2.3 Actividades de aprendizaje:

El estudiante grafica o elige acorde a su intuición una gráfica que corresponda al movimiento de la cabina (involucrando las magnitudes de distancia y tiempo, cuando la velocidad varía en todo momento), cuando está va de subida (actividad #3 apartado “H”) o cuando va de bajada (actividad #4 apartado “K”).

2.3 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que el estudiante establezca una relación funcional entre distancia y tiempo, teniendo presente que la velocidad varia en todo momento y que pueda identificar que el comportamiento de la gráfica ya no es lineal.

2.4 Actividades de aprendizaje:

Recolectar de forma tabular los datos de velocidad, distancia y tiempo de la cabina 1 en la primera actividad en los apartados “G-I” al moverse a lo largo del teleférico cuando la velocidad es constante. De igual manera se espera recolectar de forma tabular ese tipo de datos, pero ahora para dos cabinas, en la segunda actividad en los apartados “L-P”, cuando la velocidad es constante.

Recolectar de forma tabular los datos de distancia y tiempo cuando la velocidad varía en todo momento de la cabina 1 al moverse a lo largo del teleférico, cuando va de bajada (actividad #3, apartado "I") y cuando va de subida (actividad #4, apartado "L")

2.4 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

En la primera y segunda actividad se espera que los estudiantes puedan observar de forma general la relación que hay entre los datos que recolectó de forma tabular de distancia con respecto al tiempo y la velocidad de la cabina con respecto al tiempo e identificar si hay algún patrón entre ellos.

En la tercera y cuarta actividad se espera que los estudiantes puedan comparar e interpretar de forma general que cambios está sufriendo la velocidad cuando la aceleración es negativa o positiva y de igual forma establecer la relación entre distancia y tiempo.

2.5 Actividades de aprendizaje:

Los estudiantes grafican el movimiento de una cabina en la actividad #1 apartados "J" y "K", relacionando los datos obtenidos de la tabla de distancia y tiempo, con velocidad constante, de igual forma para la actividad #2 apartados "Q-S" con la variante de que se trabaja con dos cabinas.

Luego, los estudiantes grafican el movimiento de la cabina, relacionando los datos obtenidos de la tabla de distancia y tiempo, con velocidad variable en la actividad #3 apartados "J-K" y actividad #4 apartado "M".

2.5 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

En la primera y segunda actividad se espera que el estudiante pueda comparar su primera gráfica (respecto a su intuición) con la nueva gráfica obtenida de los datos

que fueron tomados de la tabla y establecer las diferencias y similitudes que pudieron encontrar de esa comparación.

En la tercera y cuarta actividad se espera que el estudiante pueda identificar que la forma de la gráfica no se comporta de forma lineal debido a que la velocidad no es constante.

2.6 Actividades de aprendizaje:

Operación inversa: los estudiantes analizan la gráfica proporcionada y responden a los incisos que tratan acerca de encontrar los valores de las magnitudes de distancia y tiempo solicitadas, las cuales si son visibles en la representación gráfica. Para el análisis de gráficas al estudiante se le presentan dos casos: las gráficas lineales, cuando la velocidad es constante (actividad #2- parte 2, apartados 1-4) y cuando las gráficas no son lineales, cuando la velocidad varía (actividad #4, apartados 1-5)

2.6 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan interpretar gráficos y a su vez poder determinar en qué momento en específico la cabina se encuentra en cierta posición y a su vez determinar la distancia recorrida.

THA de la AM2

3. Objetivo de aprendizaje: Identifica patrones de crecimiento en las relaciones funcionales de las magnitudes de distancia y tiempo.

3.1 Actividades de aprendizaje:

En la actividad #2, apartados "T" y "U", los estudiantes observan y analizan la gráfica proporcionada, para indicar que distancia existe de un punto a otro,

determinando el patrón lineal creciente entre puntos. Y en el apartado “V” el estudiante determinara a partir de patrones de aumento que gráfica crece o decrece más rápido.

3.1 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan ir reconociendo ciertos patrones lineales crecientes en la distancia que hay entre puntos, a partir del análisis gráfico. También se espera que los estudiantes vayan familiarizándose con los términos de “crece o decrece”

3.2 Actividades de aprendizaje:

Operación inversa: En la actividad #2 parte 2, apartados 5 y 6 los estudiantes observan y analizan las gráficas lineales proporcionada y a partir de ellas determinan en que posición se encuentra la cabina 1 y 2 en un tiempo determinado que no sea visible de forma gráfica.

3.2 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan extrapolar y predecir la distancia que recorrerá la cabina en un determinado momento, el cual no es visible de forma gráfica.

3.3 Actividades de aprendizaje:

Operación inversa: en la actividad #2 parte 2, apartados 7-11, los estudiantes observan y analizan el recorrido de la cabina de forma gráfica tratando de extrapolar valores de distancia no visibles en un tiempo determinado, y a su vez describir el patrón de crecimiento de cada gráfica.

3.3 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes a partir de extrapolar valores puedan describir patrones de aumento, considerando los cambios de crecimiento o decrecimiento de la distancia de distancia a partir de los cambios de los valores de tiempo y así poder determinar que gráfica crece o decrece más rápido en comparación a la otra.

THA de la AM3

4. objetivo de aprendizaje: Interpretan el comportamiento de una magnitud a partir de los cambios que sufre otra magnitud en un intervalo dado.

4.1 Actividades de aprendizaje: Encontrar la diferencia de las distancias recorridas en determinados intervalos de tiempo, cuando la velocidad es variable o constante, cuando la cabina va de subida (actividad #3, apartados "L" y "M") y cuando va de bajada (actividad #4, Apartados "N" y "O").

4.1 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan identificar de forma tabular que la diferencia entre las distancias se mantiene constante en distintos intervalos de tiempo, si la velocidad de la cabina es constante en todo el recorrido.

De igual forma se espera que ellos puedan identificar de forma tabular que la diferencia entre las distancias es variable en distintos intervalos de tiempo, si la velocidad de la cabina cambia en todo el recorrido.

4.2 Actividades de aprendizaje:

El estudiante observa en el escenario #4 que cambios está sufriendo la aceleración de la cabina en determinados intervalos de tiempo. (Actividad #4, apartados "D-G")

4.2 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes a partir de la observación de la simulación del comportamiento de la cabina en el teleférico y de los textos dinámicos, puedan identificar y comparar que la aceleración de la cabina está variando en determinados intervalos de tiempo. Y asociar que cuando una cabina va en bajada y su velocidad disminuye es porque lleva una aceleración negativa.

4.3 Actividades de aprendizaje:

Explorar y analizar en la actividad #4, apartados "G-I" los textos dinámicos presentados en el escenario #4 respecto a la aceleración y la velocidad en el transcurso del tiempo, cuando la cabina va en bajada.

4.3 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan identificar que cuando la aceleración es negativa la velocidad decrece, pero cuando es positiva la velocidad crece y cuando es cero la velocidad es la misma.

4.4 Actividades de aprendizaje:

Operación inversa: en la actividad #4, apartados 6-10 los estudiantes analizarán la representación gráfica de la distancia de dos cabinas en el teleférico con respecto al tiempo, con velocidad variable.

4.4 Hipótesis sobre el proceso de aprendizaje:

Se espera que los estudiantes puedan identificar de forma gráfica la distancia que existe de un punto a otro en diferentes intervalos de tiempo.

3.2 Fase 2: Experimento de enseñanza

La investigación se llevó a cabo con 56 estudiantes (14-15 años) de tercero de secundaria de la escuela Secundaria Técnica No.38 “Ricardo Flores Magón” en México, de los cuales sólo 21 completaron las cuatro actividades. Cada estudiante contaba con una computadora, hojas impresas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG) y escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI). La THA está conformada por cuatro actividades, las cuales corresponden a cuatro sesiones de 50 minutos cada una, al finalizar cada sesión los estudiantes entregaban las HEAG y se discutían grupalmente sus respuestas.

Los estudiantes de tercero de secundaria de la Secundaria Técnica No.38 “Ricardo Flores Magón” acorde al plan de estudio de la SEP, presentaban como antecedentes los temas de construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y el análisis de sus propiedades, también los estudiantes conocían el plano cartesiano y sabían ubicar puntos en él. Cabe mencionar que nuestra propuesta didáctica fue aplicada antes de que los estudiantes vieran el tema de función lineal función lineal.

3.2.1 Puesta en marcha de las actividades

Aplicación de los instrumentos en el aula de cómputo.

La situación didáctica que modelo nuestro proceso de enseñanza-aprendizaje durante nuestra aplicación, así como lo plantea Brousseau (1997) definió un contrato didáctico; en el cual se estuvo colaborando con un asistente de investigación y el profesor encargado de los grupos.

El rol que llevo a cabo cada miembro del equipo fue el siguiente:

El profesor fue un observador activo con respecto a las actividades, se involucraba en la aplicación solo al momento de abordar alguna duda en particular de los

estudiantes, con respecto a una pregunta o instrucción de las hojas de exploración o al manejo del escenario en GeoGebra, también brindo su apoyo en la instalación del Software y los escenarios en los ordenadores.

El asistente de investigación que apoyo a nuestra aplicación, su rol consistió en la entrega de las actividades impresas a los estudiantes, en la instalación de los escenarios de GeoGebra en cada uno de los ordenadores y en atender a las dudas propuestas por los estudiantes.

El investigador titular dirigió cada una de las sesiones, brindando orientación de la secuencia que se estaría llevando a cabo en cada actividad y al momento de interactuar con los escenarios, para ello se brindó un espacio para que los estudiantes se familiarizaran con el applet de GeoGebra y el escenario propuesto; y así pudiesen explorar cada función que representaba cada comando. Se hizo uso de un proyector como medio de apoyo al momento de dar las explicaciones.

Cabe mencionar que se presentó una situación inesperada con la implementación de los EDVI debido a que los equipos de cómputo no contaban, temporalmente, con servicio de internet. Por lo que los escenarios se instalaron de manera individual en cada ordenador. Lo cual causo que los escenarios se distorsionaran en algunos monitores, también al no ser una versión en línea los estudiantes podían modificar con el scroll del mouse la función zoom, inconvenientes que se te tuvieron que corregir sobre la marcha de las intervenciones didácticas.

Capítulo IV: Resultados y Análisis retrospectivo

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de la comparación entre los procesos hipotéticos de aprendizaje de la THA (ver sección 3.1.4) y los comportamientos de las primeras tres acciones mentales logradas por los estudiantes. Para el análisis retrospectivo de los datos se consultaron las respuestas de los estudiantes a las hojas de exploración y aprendizaje guiado.

1.1 Comportamientos alcanzados en las actividades 1.1 de la THA de la AM1- parte 1

En la presente sección describiremos los logros alcanzados por los estudiantes, asociados al comportamiento de “identificar las diferentes magnitudes involucradas en el contexto del teleférico (tiempo-horas, tiempo-segundos, distancia, velocidad, altura)” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 1.1)

Los escenarios al ser secuenciales permitieron que los estudiantes se familiarizarán gradualmente con cada una de las herramientas de durante el desarrollo de las actividades en el proceso de instrumentación de cada uno de los EDVI, por lo que los estudiantes no presentaron dificultades para descubrir que acciones representaba cada botón, cajas de entrada y textos dinámicos, y al momento de escribir las magnitudes observadas en las hojas de exploración guiadas.

Además, durante las actividades los estudiantes emplearon un lenguaje (vocabulario) que no usaban al principio como: “variación”, “varia=cambia”, “se mantiene= constante”.

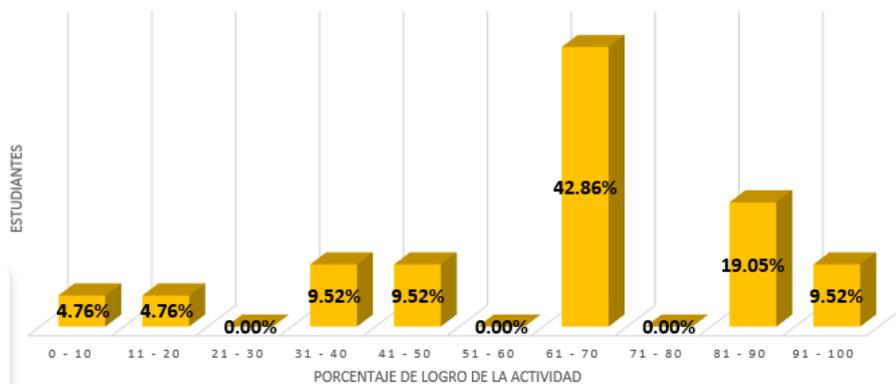
.....

1.2 Comportamientos alcanzados en las actividades 1.2 de la THA de la AM1- parte 1

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “identificar cuando una magnitud varía o se mantiene constante” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 1.2)

En el intervalo del 41-70 del *porcentaje de logro* de la actividad #1- apartado 1, el 52.38% de los estudiantes muestra cierta noción, pero no en su totalidad de identificar la diferencia cuando una magnitud está variando o manteniéndose constante, sin embargo, en el intervalo de 71-100 el 28.57% de los estudiantes identifican con mayor claridad cuando una magnitud está variando o manteniéndose constante. (ver **Figura 19**)

Figura 19: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1-apartado 1 de identificar en una tabla cuando una magnitud varía o se mantiene constante

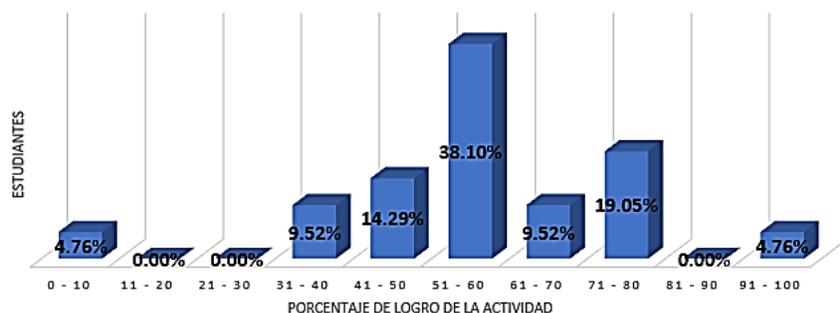


Fuente: Elaboración propia

En la actividad #2 analizamos la evolución de los estudiantes con respecto al comportamiento de identificar cuando una magnitud varía o se mantiene constante. Y se observa que en el intervalo del 41-70 del porcentaje de logro hay un avance con el 61.91 % de los estudiantes que presentan indicios de lograr el comportamiento de identificar cuando una magnitud varía o se mantiene constante; y para el caso del

intervalo de 71-100 del porcentaje de logro el 23.81% de los estudiantes identifican de forma satisfactoria cuando una magnitud varía (ver **Figura 19** **Figura 20**) alcanzando el comportamiento esperado de la AM1.

Figura 20: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #2- apartado 1 de identificar en una tabla cuando una magnitud varía o se mantiene constante



Fuente: Elaboración propia

Algunos ejemplos de la evolución que presentaron algunos estudiantes respecto al comportamiento de identificar que magnitud varía o se mantiene constante puede verse reflejado en los siguientes ejemplos, cabe mencionar que las magnitudes que se espera que el estudiante identifique como *magnitudes que varían* son: tiempo, posición y velocidad, las demás presentan un comportamiento constante (ver **Figura 21** y **Figura 22**)

Figura 21: Actividad #1 y #2 apartado 1 - estudiante D_7

ACTIVIDAD 1

1. Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.

La longitud total del cable del teleférico.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante

ACTIVIDAD 2/ Parte 1

Ingrese al siguiente escenario → <https://www.geogebra.org/m/dmj2rvsv>

1. Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.

La longitud total de los cables del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #2.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #2 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante

Fuente: respuestas del estudiante D_7

Figura 22: Actividad #1 y #2 apartado 1 - estudiante D_11

ACTIVIDAD 1

1. Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.

La longitud total del cable del teleférico.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante

ACTIVIDAD 2/ Parte 1

Ingrese al siguiente escenario → <https://www.kocosebra.org/m/dm/zrxy>

1. Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.

La longitud total de los cables del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #2.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #2.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #2 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante

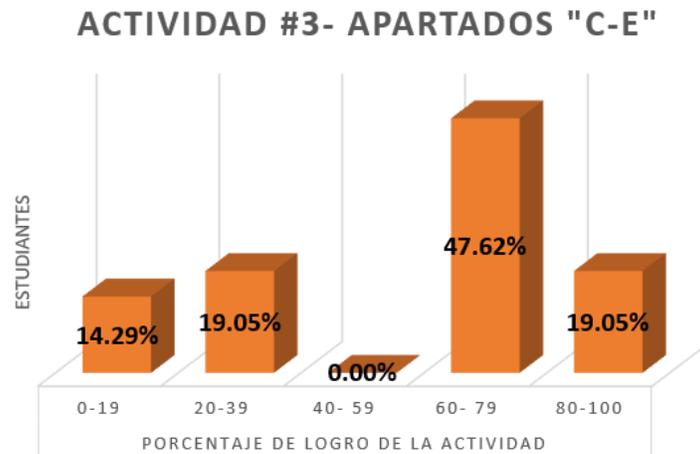
Fuente: respuestas del estudiante D_11

1.3 Comportamientos alcanzados en las actividades 1.3 de la THA de la AM1- parte 1

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración) al contexto del teleférico” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 1.3)

Los estudiantes no presentaron dificultad en identificar que en los nuevos escenarios #3 y #4 se presentaban nuevas magnitudes como la *aceleración* y la *velocidad en el transcurso del tiempo*, el familiarizarse con esas magnitudes no represento ningún problema para los estudiantes, sin embargo, represento cierta dificultad para los estudiantes el identificar que el incorporar una nueva magnitud (aceleración) influía en los cambios de variación de otras magnitudes como ser la velocidad (ver **Figura 23**). Notamos que solo el 19.05% de los estudiantes presenta de forma satisfactoria el comportamiento de identificar que magnitud varía o se mantiene constante después de incorporar una nueva magnitud al contexto, el resto de los estudiantes presentan cierta noción de este comportamiento, pero no en su totalidad.

Figura 23: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #3- apartados "C-E" de identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración)



Fuente: Elaboración propia

A continuación, presentamos algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes a la actividad #3 cuando la cabina va pasando por el poste y luego de subida por el teleférico y ejemplos de las respuestas a la actividad #4 cuando la cabina pasa por el poste y luego cuando va de bajada por el teleférico (aceleración positiva).

Cabe mencionar que cuando la cabina pasa por el poste lleva una aceleración cero y una velocidad constante, luego una vez que la cabina va de subida o de bajada su aceleración ha cambiado y ahora la velocidad de la cabina está variando (ver **Figura 24** y **Figura 25**)

Figura 24: Actividad # 3 y # 4 - estudiante B_8

Actividad #3

C. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?

Varía Constante

D. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?

Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé

E. ¿Qué pasa con la velocidad de la cabina #1, cuando se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico?

Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay velocidad No sé

Actividad #4

B. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?

Varía Constante

C. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a la estación por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?

Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé

Fuente: respuestas del estudiante B_8

Figura 25: Actividad # 3 y # 4 - estudiante D_5

Actividad #3

C. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?

Varía Constante

D. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?

Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé

E. ¿Qué pasa con la velocidad de la cabina #1, cuando se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico?

Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay velocidad No sé

Actividad #4

B. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?

Varía Constante

C. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a la estación por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?

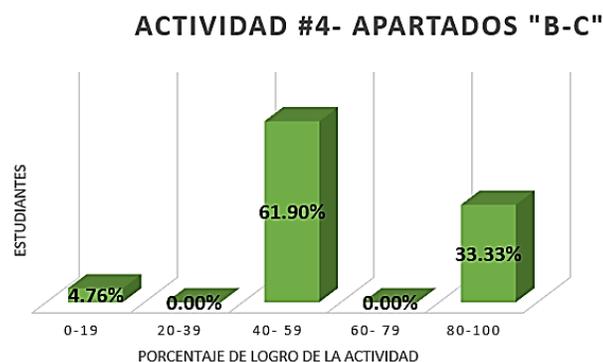
Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé

Fuente: respuestas del estudiante D_5

En la actividad #4 se ve un pequeño avance por parte de los estudiantes con respecto al comportamiento de identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración) (ver Figura 26), notamos que el 33.33% de los estudiantes desarrollaron dicho comportamiento de forma

satisfactoria, y el 61.90% presenta cierta noción del comportamiento dado que presentan dificultades con identificar cuando una magnitud varía.

Figura 26: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #4- apartados "B-C" de identificar que magnitud varía o se mantiene constante luego de incorporar una nueva magnitud (aceleración)



Fuente: Elaboración propia

.....

1.4 Comportamientos alcanzados en las actividades 1.4 de la THA de la AM1- parte 1

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de "identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en constante, variable o parámetro" de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 1.4)

Con respecto a este comportamiento de identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en constante, variable y parámetro, algunos estudiantes presentaron problemas en identificar que las magnitudes de velocidad y tiempo-hora en la actividad #1 y las magnitudes de velocidad inicial y aceleración en la actividad #4 presentan un cambio distinto de variación, es decir que su valor cambia de un ajuste a otro, pero no varía dentro de ese ajuste, lo que asociamos a parámetro. Los estudiantes al no poder identificar este tipo de variación no pueden asociar a que la magnitud tenga el significado de parámetro, dificultándole la tarea de poder

clasificar las magnitudes en variable, constante o parámetro. Algunos ejemplos respecto a esta dificultad se pueden apreciar en los casos de los estudiantes D_1, D_6 y D_8.

En la Figura 27 Figura 27: Actividad #1 y #4 del estudiante D_1

- M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos
- N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos

T. De las siguientes unidades de medida, selecciona aquellas que consideras que son **VARIABLES** (cambia en todo momento), **CONSTANTES** (no cambia en ningún momento) y cuales son **PARÁMETROS** (es decir que cambia en un momento, pero luego se mantiene constante y no vuelve a cambiar)

Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico		
Variables	Constantes	Parámetros
Tiempo Distancia Aceleración	altura de poste velocidad inicial velocidad del transcurso la longitud	

y Figura 28 se puede observar que los estudiantes en el apartado T, dejan en blanco la columna de *parámetro*, dado que asocian a la magnitud de velocidad inicial al significado de constante y al de la aceleración en la de variable. De igual forma para el apartado M y N, los estudiantes confunden el tipo de variación de las magnitudes velocidad y tiempo-segundos, asociando a la velocidad al tipo de variación: *Variable* y a la magnitud de tiempo-segundos al tipo de variación: *parámetro*.

Figura 27: Actividad #1 y #4 del estudiante D_1

- M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos
- N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos

T. De las siguientes unidades de medida, selecciona aquellas que consideras que son **VARIABLES** (cambia en todo momento), **CONSTANTES** (no cambia en ningún momento) y cuales son **PARÁMETROS** (es decir que cambia en un momento, pero luego se mantiene constante y no vuelve a cambiar)

Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico		
Variables	Constantes	Parámetros
Tiempo Distancia Aceleración	altura de poste velocidad inicial velocidad del transcurso la longitud	

Fuente: respuestas del estudiante D_1

Figura 28: Actividad #1 y #4 del estudiante D_6

- M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos
- N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos

T. De las siguientes unidades de medida, selecciona aquellas que consideras que son **VARIABLES** (cambia en todo momento), **CONSTANTES** (no cambia en ningún momento) y cuales son **PARÁMETROS** (es decir que cambia en un momento, pero luego se mantiene constante y no vuelve a cambiar)

Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico		
VARIABLES	CONSTANTES	PARÁMETROS
Tiempo	velocidad inicial	
Distancia	Altura del poste	
Aceleración	La longitud total del cable	
Velocidad en el transcurso del tiempo		

Fuente: respuestas del estudiante D_6

Sin embargo, algunos estudiantes presentaron una evolución de la actividad #1 a la actividad #4 al tratar de clasificar a las magnitudes acorde a su tipo de variación, como el caso del estudiante D_8 (ver Figura 29), donde mostro mejoras en identificar que magnitudes presentaban el tipo de variación: parámetro. Podemos observar que en el apartado N el estudiante no pudo identificar que las magnitudes de velocidad y tiempo-hora estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constantes, lo que asociamos a parámetro. Pero en el apartado T el estudiante D_8 ya comienza a identificar de forma satisfactoria que magnitudes se comportan como parámetro, constante o variable.

Figura 29: Actividad #1 y #4 del estudiante D_8

- M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos
- N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)
- Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
- tiempo-segundos

T. De las siguientes unidades de medida, selecciona aquellas que consideras que son **VARIABLES** (cambia en todo momento), **CONSTANTES** (no cambia en ningún momento) y cuales son **PARÁMETROS** (es decir que cambia en un momento, pero luego se mantiene constante y no vuelve a cambiar)

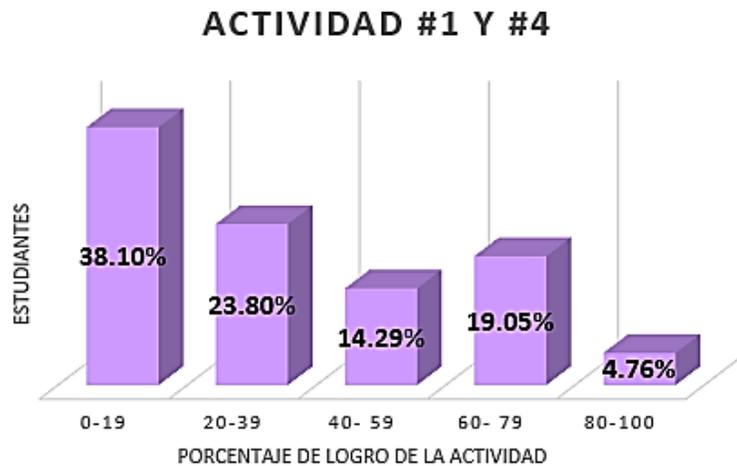
Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico		
VARIABLES	CONSTANTES	PARÁMETROS
tiempo	Altura de poste	Velocidad inicial
Distancia	Aceleración	
Velocidad en el transcurso del tiempo	La longitud total del cable del teleférico	

Fuente: respuestas del estudiante D_8

En general podemos mencionar que el comportamiento de identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en constante, variable o parámetro representa una dificultad para los estudiantes, dado que el 33.34% de los estudiantes

en el intervalo de 40- 79 presentan cierta noción del comportamiento, pero solo el 4.76% de los estudiantes desarrollaron dicho comportamiento de forma satisfactoria (ver **Figura 30**)

Figura 30: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1 y #4 de identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en constante, variable o parámetro.



Fuente: Elaboración propia

.....

.....

2.1 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.1 de la THA de la AM1- parte 2

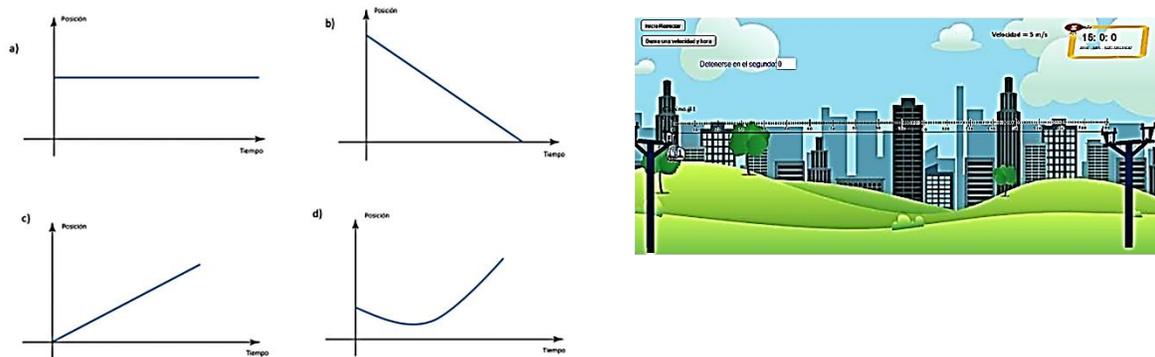
En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “establecer una relación funcional entre las magnitudes de distancia y tiempo del movimiento de la cabina, a partir del análisis de la simulación del recorrido de la cabina” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.1)

En la actividad #1- apartado F los estudiantes deben seleccionar acorde a su intuición, la gráfica que corresponda al movimiento de la cabina (involucrando las magnitudes de posición y tiempo, cuando la velocidad es constante) y para este

apartado se le proponen cuatro gráficas, como se muestran a continuación (ver **Figura 31**)

Figura 31: Actividad #1- apartado F

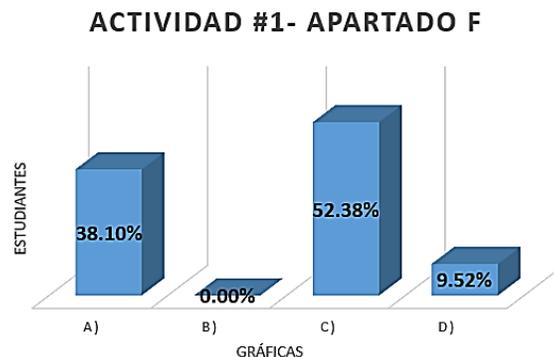
F. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1, durante esa hora correspondiente.



Fuente: Elaboración propia

Las respuestas marcadas por los estudiantes a este apartado nos muestran que el 38.10% de los estudiantes seleccionaron la gráfica a), confundiendo la forma de la gráfica con la trayectoria de la cabina en movimiento, presentando problemas en la interpretación de las representaciones gráficas del movimiento. Sin embargo, el 52.38% que seleccionaron la gráfica c) estableciendo una covariación entre las magnitudes de posición y tiempo del movimiento de la cabina, a partir de su análisis de la simulación del recorrido de la cabina, donde el punto de referencia de la cabina es a partir del poste ubicado al lado izquierdo del escenario. (ver **Figura 32**)

Figura 32: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #1- apartado F



En la actividad #2- apartados “I-K” la actividad consistió en que los estudiantes debían de graficar cómo ellos creían que se comportaba el movimiento de la cabina #1 y #2, durante un tiempo determinado, pero ahora con las magnitudes de distancia y tiempo. Respecto a esta actividad hubo un avance del 19.05% de los estudiantes que presentaron mejoras en el desarrollo al comportamiento de establecer relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo del movimiento de la cabina, a partir de su análisis a la simulación del recorrido de dos cabinas, dado que ahora el 57.14% de los estudiantes tienen claridad en el significado de las magnitudes involucradas en el plano cartesiano (ver **Figura 33**)

Figura 33: Porcentaje de logro de los estudiantes que contestaron a la actividad #2- apartados “I-K”



2.2 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.2 de la THA de la AM1- parte 2

En la presente sección describiremos el desarrollo que presentaron los estudiantes al comportamiento de “establecer de forma particular relaciones funcionales simbólicas entre las magnitudes de distancia y tiempo del movimiento de la cabina en el teleférico” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.2)

Los estudiantes no presentaron dificultad en establecer de forma particular relaciones funcionales entre determinadas magnitudes, dado que como se mostró en el análisis retrospectivo de las actividades 1.1 y 1.3 de la THA de la AM1-parte 1 los estudiantes no presentaron dificultad en identificar las diferentes magnitudes involucradas en el contexto del teleférico (tiempo, distancia, velocidad, altura, aceleración) por lo que lograron relacionar las magnitudes de distancia y tiempo, velocidad y tiempo sin ningún problema. A continuación, se presentarán ejemplos de las respuestas de algunos estudiantes (ver **Figura 34**, **Figura 35** y **Figura 36**)

Figura 34: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante B_1

<p>2. Cuando la cabina #1 se mueve, escribe lo que observas:</p> <p>¿A qué hora la cabina #1 comienza su recorrido? <u>8:00:00</u></p> <p>A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1? <u>7.5 m/s</u></p> <p>B. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #1? (en m) <u>192.16</u></p> <p>C. ¿Cuánto tiempo tardó la cabina #1 en recorrer los primeros 60 metros? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (E)) <input checked="" type="checkbox"/> 8 s <input type="checkbox"/> 12 s <input type="checkbox"/> 6.5 s <input type="checkbox"/> 13 s <input type="checkbox"/> 24 s <input type="checkbox"/> No sé</p> <p>D. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado hasta el momento? <input type="checkbox"/> Sí <input checked="" type="checkbox"/> No</p> <p>E. ¿En qué segundo la cabina llega a recorrer los 100m? <input checked="" type="checkbox"/> 13.3 s <input type="checkbox"/> 10 s <input type="checkbox"/> 40 s <input type="checkbox"/> 3 s <input type="checkbox"/> 20 s <input type="checkbox"/> No sé</p> <p>F. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1, durante esa hora correspondiente.</p>	<p>1. Observa el movimiento de las cabinas y responde lo siguiente:</p> <p>A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1? <u>9 m/s</u> ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #2? <u>5 m/s</u></p> <p>B. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer la cabina #1 en el cable del Teleférico que va de poste a poste? (en m) <u>191.36 m</u></p> <p>C. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #2? (en m) <u>190.4 m</u></p> <p>D. ¿Qué cabina crees que llegará primero al poste contrario? Y ¿Por qué? <u>Cabina #1 Cabina #2 avanza más m/s que la cabina #2</u></p> <p>E. ¿A partir de qué segundo la cabina #1 supera los 50 m? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (E)) <input type="checkbox"/> 3 s <input type="checkbox"/> 12 s <input checked="" type="checkbox"/> 6 s <input type="checkbox"/> 13 s <input type="checkbox"/> 11 s <input type="checkbox"/> No sé</p> <p>F. ¿A partir de qué segundo la cabina #2 supera los 50 m? <input type="checkbox"/> 7 s <input checked="" type="checkbox"/> 11.5 s <input type="checkbox"/> 6 s <input type="checkbox"/> 7.5 s <input type="checkbox"/> 3 s <input type="checkbox"/> No sé</p> <p>G. Después de que cada cabina inicie su recorrido, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que las cabinas se encuentren en la misma posición, es decir, una enfrente de la otra? <u>13.5 s</u></p> <p>H. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado en algún momento? <input type="checkbox"/> Sí <input checked="" type="checkbox"/> No</p> <p>I. ¿La velocidad de la cabina #2, ha cambiado en algún momento? <input type="checkbox"/> Sí <input checked="" type="checkbox"/> No</p>
---	--

Fuente: respuestas del estudiante B_1

Figura 35: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante B_3

2. Cuando la cabina #1 se mueve, escribe lo que observas:
 ¿A qué hora la cabina #1 comienza su recorrido?
15

A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1?
5 m/s

B. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #1? (en m)
191.07 m

C. ¿Cuánto tiempo tardó la cabina #1 en recorrer los primeros 60 metros? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (□))
 8 s 12 s 6.5 s 13 s 24 s No sé

D. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado hasta el momento?
 Sí No

E. ¿En qué segundo la cabina llega a recorrer los 100m?
 13.3 s 10 s 40 s 3 s 20 s No sé

F. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1, d esa hora correspondiente.

1. Observa el movimiento de las cabinas y responde lo siguiente:
 A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1? 9 m/s
 ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #2? 7.5 m/s
 B. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer la cabina #1 en el cable del Teleférico que va de poste a poste? (en m) 193.32 m
 C. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #2? (en m) 199.7 m
 D. ¿Qué cabina crees que llegará primero al poste contrario? Y ¿Por qué?
 Cabina #1 Cabina #2 por que viene mayor velocidad
 E. ¿A partir de qué segundo la cabina #1 supera los 50 m? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (□))
 3 s 12 s 6 s 13 s 11 s No sé
 F. ¿A partir de qué segundo la cabina #2 supera los 50 m?
 7 s 11.5 s 6 s 7.5 s 3 s No sé
 G. Después de que cada cabina inicie su recorrido, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que las cabinas se encuentren en la misma posición, es decir, una enfrente de la otra?
11.4 m
 H. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado en algún momento?
 Sí No
 I. ¿La velocidad de la cabina #2, ha cambiado en algún momento?
 Sí No

Fuente: respuestas del estudiante B_3

Figura 36: Actividades de establecer relaciones funcionales de forma simbólica por el estudiante D_1

2. Cuando la cabina #1 se mueve, escribe lo que observas:
 ¿A qué hora la cabina #1 comienza su recorrido?
9:0:0

A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1?
57 s

B. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #1? (en m)
190 m

C. ¿Cuánto tiempo tardó la cabina #1 en recorrer los primeros 60 metros? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (□))
 8 s 12 s 6.5 s 13 s 24 s No sé

D. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado hasta el momento?
 Sí No

E. ¿En qué segundo la cabina llega a recorrer los 100m?
 13.3 s 10 s 40 s 3 s 20 s No sé

F. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1, dur esa hora correspondiente.

1. Observa el movimiento de las cabinas y responde lo siguiente:
 A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1? 9 m/s
 ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #2? 5 m/s
 B. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer la cabina #1 en el cable del Teleférico que va de poste a poste? (en m) 190 m
 C. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #2? (en m) 190.4 m
 D. ¿Qué cabina crees que llegará primero al poste contrario? Y ¿Por qué?
 Cabina #1 Cabina #2 por que se velocidad es mas alta a de la cabina #2
 E. ¿A partir de qué segundo la cabina #1 supera los 50 m? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (□))
 3 s 12 s 6 s 13 s 11 s No sé
 F. ¿A partir de qué segundo la cabina #2 supera los 50 m?
 7 s 11.5 s 6 s 7.5 s 3 s No sé
 G. Después de que cada cabina inicie su recorrido, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que las cabinas se encuentren en la misma posición, es decir, una enfrente de la otra?
13.0
 H. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado en algún momento?
 Sí No
 I. ¿La velocidad de la cabina #2, ha cambiado en algún momento?
 Sí No

Fuente: respuestas del estudiante D_1

2.3 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.3 de la THA de la AM1-parte

2

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de "establecer una relación funcional entre las magnitudes de distancia y tiempo del movimiento de la cabina, a partir del análisis de la simulación del recorrido de la cabina, cuando la velocidad es variable" de la AM1, obtenidos

mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.3)

En la actividad #3- apartado H y actividad #4- apartado K los estudiantes deben seleccionar acorde a su intuición, la gráfica que corresponda al movimiento de la cabina (involucrando las magnitudes de posición y tiempo, cuando la velocidad es variable, y donde el punto de referencia de la cabina es a partir del poste ubicado al lado izquierdo del escenario) y para este apartado se le proponen cuatro gráficas, como se muestran a continuación (ver **Figura 37** y **Figura 38**)

Figura 37: Actividad #3- apartado H

H. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1 de poste a poste, durante esa hora correspondiente.

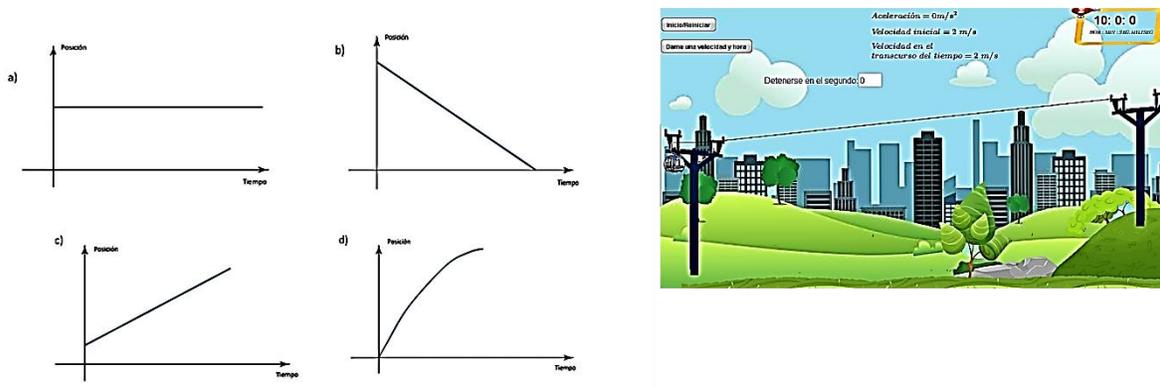
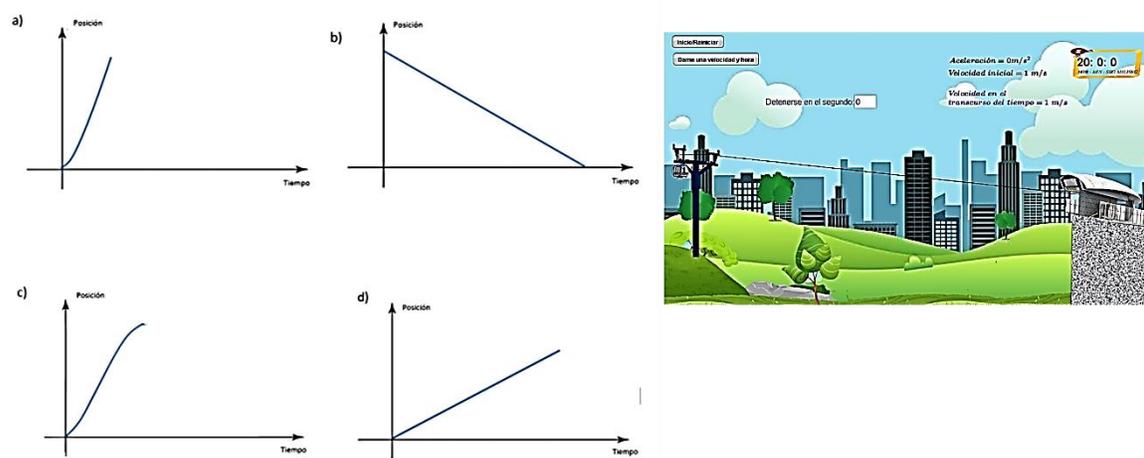


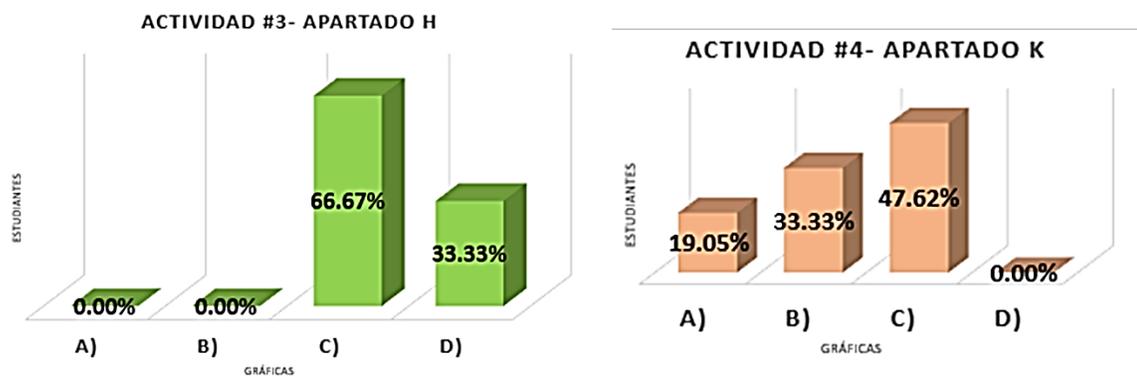
Figura 38: Actividad #4- apartado K

K. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1 de poste a poste, durante esa hora correspondiente.



Las respuestas marcadas por los estudiantes a los apartado H (ver **Figura 39**) el 66.67 % de los estudiantes seleccionaron la gráfica c), (confundiendo la forma de la gráfica con la trayectoria de la cabina en movimiento, presentando problemas en la interpretación de las representaciones gráficas del movimiento. Y en el apartado K un gran porcentaje seleccionaron la gráfica b) (ver **Figura 39**) confundiendo aún al objeto en movimiento con su gráfica, presentando de esta forma problemas con la interpretación de gráficas de objetos en movimiento con velocidad variable.

Figura 39: Porcentaje de los estudiantes que contestaron a la actividad #3- apartado H y actividad #4- apartado K



Fuente: Elaboración propia

2.4 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.4 de la THA de la AM1- parte 2

En la presente sección describiremos el desarrollo que presentaron los estudiantes al comportamiento de “establecer relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia, tiempo, velocidad de forma tabular” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.4)

El 100% de los estudiantes no presentaron problemas con respecto al comportamiento de establecer relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia, tiempo, velocidad de forma tabular. Dado que la recolección de datos de, distancia y tiempo no represento una dificultad para los estudiantes.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes justificando la relación que ellos observan de las magnitudes de tiempo-velocidad y tiempo-distancia en las tablas de datos (ver **Figura 40**).

Figura 40: Respuesta de los estudiantes a la actividad #1- apartados G-I

Actividad #1

G. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 7.5 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo (segundos)	Distancia recorrida en metros (m)
7.5 m/s	1	0.75 m
7.5 m/s	2	1.5 m
7.5 m/s	3	2.25 m
7.5 m/s	4	3.0 m
7.5 m/s	5	3.75 m
7.5 m/s	6	4.5 m
7.5 m/s	7	5.25 m

H. ¿Qué le está pasando a la velocidad, cuándo el tiempo va aumentando?
No cambia la velocidad es la misma

I. ¿Qué le está pasando a la distancia, cuándo el tiempo va aumentando?
Aumenta cada segundo 7.5 m

Fuente: respuestas del estudiante B_4

G. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 5 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo (segundos)	Distancia recorrida en metros (m)
5	1	5 m
5	2	10 m
5	3	15 m
5	4	20 m
5	5	25 m
5	6	30 m
5	7	35 m

H. ¿Qué le está pasando a la velocidad, cuándo el tiempo va aumentando?
La velocidad no aumenta pero si aumentan los s de 1 en 1 la distancia aumento de 5 en 5 m

I. ¿Qué le está pasando a la distancia, cuándo el tiempo va aumentando?
La distancia aumenta de 5 m en 5 m

Fuente: respuestas del estudiante B_5

G. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 6 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo (segundos)	Distancia recorrida en metros (m)
6 m/s	1	6 m
6 m/s	2	12 m
6 m/s	3	18 m
6 m/s	4	24 m
6 m/s	5	30 m
6 m/s	6	36 m
6 m/s	7	42 m

H. ¿Qué le está pasando a la velocidad, cuándo el tiempo va aumentando?
La velocidad sigue siendo la misma

I. ¿Qué le está pasando a la distancia, cuándo el tiempo va aumentando?
va aumentando de 6 en 6

Fuente: respuestas del estudiante D_1

G. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 5 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo (segundos)	Distancia recorrida en metros (m)
5	1	5 m
5	2	10 m
5	3	15 m
5	4	20 m
5	5	25 m
5	6	30 m
5	7	35 m

H. ¿Qué le está pasando a la velocidad, cuándo el tiempo va aumentando?
Es constante (sigue siendo la misma)

I. ¿Qué le está pasando a la distancia, cuándo el tiempo va aumentando?
Es variable (aumenta)

Fuente: respuestas del estudiante B_8

Podemos observar que algunos de los estudiantes comienzan a emplear en su vocabulario los términos de constante y variable al momento de justificar algunas relaciones funcionales entre magnitudes como ser el caso del estudiante B_8.

Otros estudiantes observan patrones entre las magnitudes cuando estas están covariando, como ser el caso del estudiante B_4, que describe que la distancia aumenta 7.5m por segundo, o como los estudiantes B_5 y D_1, al relacionar que cuando el tiempo aumenta de 1 en 1 la distancia también aumenta, pero esta lo hace de 5 en 5, y de igual forma establecen relaciones funcionales con la velocidad describiendo que sigue siendo la misma a pesar de que el tiempo aumenta de 1 en 1. De igual forma podemos observar para la actividad #2 que algunos estudiantes describen que la magnitud de la velocidad no ha cambiado (es constante) cuando el tiempo aumenta, y que la distancia se vuelve variable, es decir que está aumentando cuando el tiempo también lo hace, estas descripciones las interpretamos como una forma de justificar por parte de los estudiantes las relaciones funcionales que ellos observan de tiempo-distancia, tiempo-velocidad, pero ahora para el llenado y el análisis de dos tablas (ver **Figura 41**)

Figura 41: Respuesta de los estudiantes a la actividad #2- apartados L-P

Actividad #2

L. Con la cabina #1 y #2 en movimiento y una velocidad inicial de 9 m/s y 5 m/s respectivamente, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
9	1	9 m
9	2	18 m
9	3	27 m
9	4	36 m
9	5	45 m
9	6	54 m
9	7	63 m

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
5	1	5 m
5	2	10 m
5	3	15 m
5	4	20 m
5	5	25 m
5	6	30 m
5	7	35 m

M. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
Aumenta 9 m por cada segundo

N. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
va aumentando la distancia

O. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
avanza 5 m por cada segundo

P. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
aumenta la distancia

Fuente: respuestas del estudiante B_4

L. Con la cabina #1 y #2 en movimiento y una velocidad inicial de 9 m/s y 5 m/s respectivamente, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
	1	9
	2	18
	3	27
	4	36
	5	45
	6	54
	7	63

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
	1	5
	2	10
	3	15
	4	20
	5	25
	6	30
	7	35

M. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
Aumenta un mayor recorrido

N. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
tiene mayor distancia

O. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
1 en 1

P. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
va aumentando la distancia

Fuente: respuestas del estudiante B_5

Cabina #1			Cabina #2		
Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
5	1	5 m	7.5	1	7.5
5	2	10 m	7.5 m/s	2	15 m
5	3	15	7.5	3	22.5
5	4	20	7.5	4	30
5	5	25	7.5	5	37.5
5	6	30	7.5	6	45
5	7	35	7.5	7	52.5

- M. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
sigue en 5 no
- N. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
aumenta la distancia
- O. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
no
- P. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
va aumentando la distancia

Fuente: respuestas del estudiante D_2

- L. Con la cabina #1 y #2 en movimiento y una velocidad inicial de 4 m/s y 5 m/s respectivamente, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Cabina #1			Cabina #2		
Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
A: 4	1	4 m	U: 5	1	5 m
B: 4	2	8 m	I: 5	2	10 m
C: 4	3	12 m	J: 5	3	15 m
D: 4	4	16 m	K: 5	4	20 m
E: 4	5	20 m	L: 5	5	25 m
F: 4	6	24 m	M: 5	6	30 m
G: 4	7	28 m	N: 5	7	35 m

- M. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
sigue siendo constante
- N. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?
se vuelve variable
- O. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
sigue siendo constante
- P. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?
se vuelve variable

Fuente: respuestas del estudiante B_8

Para las actividades #3 y #4 algunos estudiantes describieron los cambios que sufre la velocidad cuando la aceleración es distinta de cero, notaron que para el caso cuando la cabina va de bajada a la estación, la velocidad ya no se mantiene constante y que ahora va aumentando o variando, incluso tratan de encontrar un patrón de aumento en la velocidad por cada dos segundos (ver **Figura 42**). Notamos que los estudiantes no presentan dificultad con el comportamiento de establecer relaciones funcionales de forma tabular

Figura 42: Respuesta de los estudiantes a la actividad #4- apartado L

L. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 1 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0	0	0
1.13	1	1.09
1.25	2	2.34
1.5	4	5.27
1.75	6	8.68
2	8	12.43
2.25	10	16.38
2.5	12	20.37
2.75	14	24.24
3	16	27.83
3.25	18	31
...
3.75	22	35.6
4	24	36.85
4.25	26	37.32

La aumentando

Vo aumentando de .25

Fuente: respuestas del estudiante B_4

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0	0	0
1.13	1	1.09
1.25	2	2.34
1.5	4	5.27
1.75	6	8.68
2	8	12.43
2.25	10	16.38
2.5	12	20.37
2.75	14	24.24
3	16	27.83
3.25	18	31
...
3.75	22	35.6
4	24	36.85
4.25	26	37.32

Fuente: respuestas del estudiante B_9

Actividad #4

L. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 1 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0	0	0
1.13	1	1.09
1.25	2	2.34
1.5	4	5.27
1.75	6	8.68
2	8	12.43
2.25	10	16.38
2.5	12	20.37
2.75	14	24.24
3	16	27.83
3.25	18	31
...
3.75	22	35.6
4	24	36.85
4.25	26	37.32

aumenta

Fuente: respuestas del estudiante B_3

L. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 1 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0	0	0
1.13	1	1.09
1.25	2	2.34
1.5	4	5.27
1.75	6	8.68
2	8	12.43
2.25	10	16.38
2.5	12	20.37
2.75	14	24.24
3	16	27.83
3.25	18	31
...
3.75	22	35.6
4	24	36.85
4.25	26	37.32

Variable

Aumenta 0.25

Fuente: respuestas del estudiante B_8

2.5 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.5 de la THA de la AM1- parte 2

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “establecer relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo de forma gráfica,” de la AM1, obtenidos mediante la comparación

de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.5)

En los siguientes gráficos podemos observar las dificultades y la evolución que los estudiantes presentan con respecto a establecer relaciones funcionales de forma gráfica.

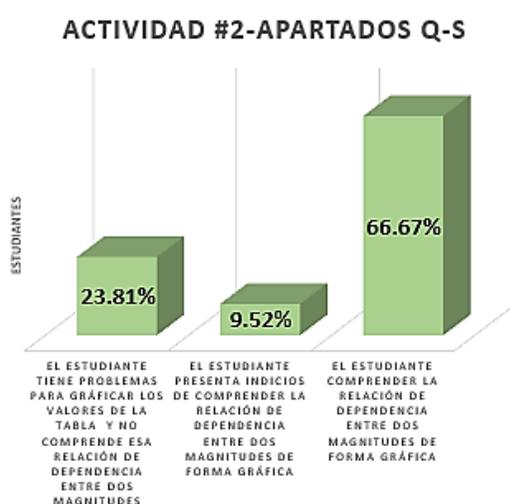
En la **Figura 43** y **Figura 44** se puede observar que son pocos los estudiantes que tienen problema con el comportamiento de: establecer y comprender la relación de dependencia entre las magnitudes de tiempo y distancia. Pues menos del 30% de los estudiantes no presento indicios del comportamiento al menos hasta la actividad #2.

Figura 43: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #1



Fuente: Elaboración propia

Figura 44: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #2



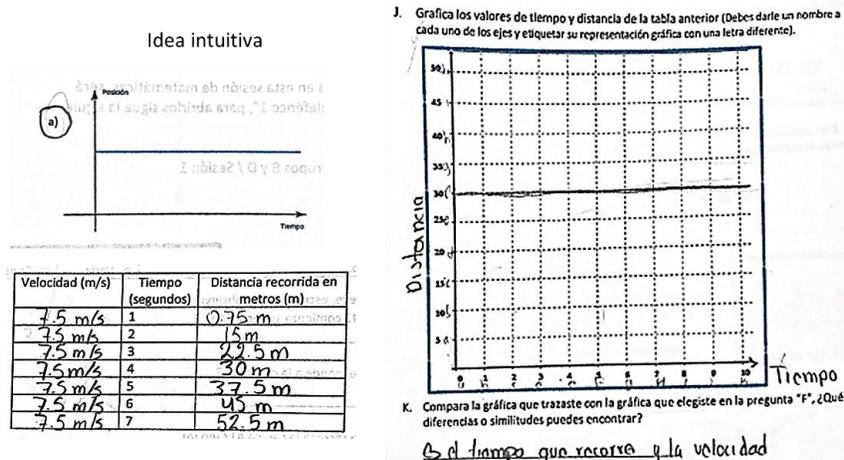
Fuente: Elaboración propia

A pesar de ser pocos los estudiantes que presentan esta dificultad, trataremos de dar a conocer cuáles fueron las dificultades más comunes entre este grupo de estudiantes en lo que respecta al desarrollo de este comportamiento.

Una de las dificultades que se encontró ante este comportamiento, es que algunos de los estudiantes a pesar de contar con los datos de forma tabular, no podían graficar los puntos, y en consecuencia no podían establecer una relación de

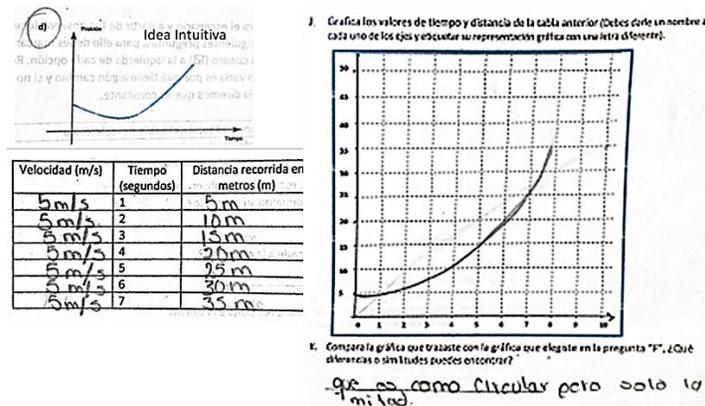
dependencia entre las magnitudes de tiempo y distancia; en su lugar, confundieron la gráfica de tiempo-distancia con una línea recta horizontal que semeja los cables del teleférico por donde se mueve la cabina (ver **Figura 45** y **Figura 46**)

Figura 45: Respuestas a la actividad #1- por el estudiante B_4



Fuente: respuestas del estudiante B_4

Figura 46: Respuestas a la actividad #1- por el estudiante B_13



Fuente: respuestas del estudiante B_13

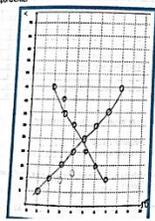
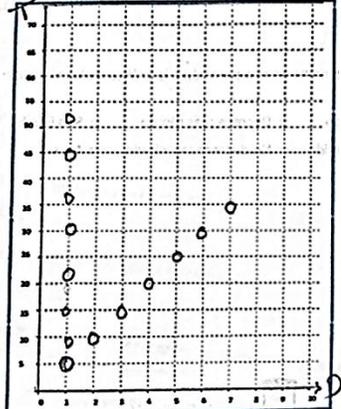
Otra dificultad detectada en otro grupo de estudiantes corresponde a la de graficar los valores de distancia y tiempo de dos tablas diferentes en un solo plano cartesiano; algunos de los estudiantes logran graficar los valores de una tabla, pero ya al graficar los valores de la segunda tabla ellos no tienen claro a donde colocarlos en el plano cartesiano, incluso uno de los estudiantes (D_5) describió que para él "es más

comprensible solo una" de las gráficas (ver **Figura 47**: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante D_5 **Figura 47**).

Figura 47: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante D_5

Q. Grafica los valores de tiempo y distancia de las tablas anteriores. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).

Idea intuitiva

Cabina #1			Cabina #2		
Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
5	1	5 m	7.5	1	7.5
5	2	10 m	7.5	2	15
5	3	15	7.5	3	22.5
5	4	20	7.5	4	30
5	5	25	7.5	5	37.5
5	6	30	7.5	6	45
5	7	35	7.5	7	52.5

R. Compara las gráficas que trazaste con las gráficas que elaboro en la pregunta "I", ¿Qué diferencias o similitudes puedes encontrar?

que algunas son rectas y otras no son

S. Ahora compara la gráfica de la cabina #1 con la gráfica de la cabina #2, ¿Qué puedes observar, que diferencias o similitudes puedes encontrar?

es mas comprensible solo una

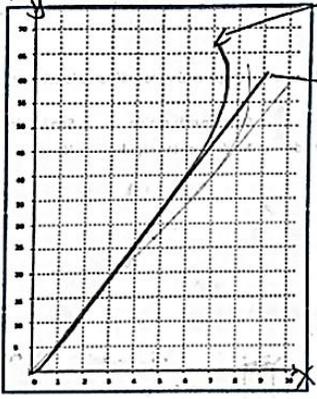
Fuente: respuestas del estudiante D_5

Y en el caso de los estudiantes B_13 y B_6, donde se detectó que no pueden graficar los puntos de las tablas, no lograron graficar ninguna de las tablas en el plano cartesiano, y en consecuencia no lograron establecer la relación de dependencia entre las magnitudes de tiempo y distancia (ver

Figura 48 y Figura 49).

Figura 48: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante B_13

Q. Grafica los valores de tiempo y distancia de las tablas anteriores. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).



Cabina #1			Cabina #2		
Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
5 m	1	5 m	10 m	1	10 m
5 m	2	10 m	10 m	2	20 m
5 m	3	15 m	10 m	3	30 m
5 m	4	20 m	10 m	4	40 m
5 m	5	25 m	10 m	5	50 m
5 m	6	30 m	10 m	6	60 m
5 m	7	35 m	10 m	7	70 m

R. Compara las gráficas que trazaste con las gráficas que elaboro en la pregunta "I", ¿Qué diferencias o similitudes puedes encontrar?

que se un parejas pero solo una se desbia.

S. Ahora compara la gráfica de la cabina #1 con la gráfica de la cabina #2, ¿Qué puedes observar, que diferencias o similitudes puedes encontrar?

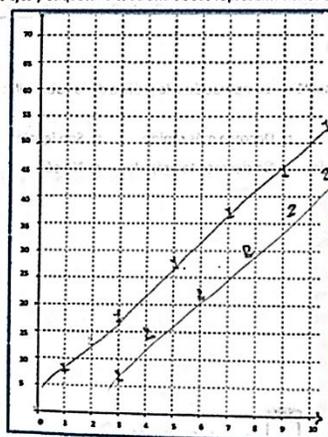
que una se la recta y la otra solo se desbia poro.

Fuente: respuestas del estudiante B_13

Figura 49: Respuestas a la actividad #2- por el estudiante B_6

Cabina #1			Cabina #2		
Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)	Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0,1	1	4,19	5	1	5
0,1	2	10	5	2	10
0,1	3	2,7	5	3	15
0,1	4	2,1	5	4	20
0,1	5	2,5	5	5	25
0,1	6	6,1	5	6	30
0,1	7	1,2	5	7	35

Q. Grafica los valores de tiempo y distancia de las tablas anteriores. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).



Fuente: respuestas del estudiante B_6

Sin embargo, ya en las actividades #3 y #4 se puede notar la evolución por parte de los estudiantes en el desarrollo del comportamiento. Dado que la dificultad de graficar puntos en el plano cartesiano y a su vez de comprender la relación de dependencia entre las magnitudes de tiempo y distancia, su porcentaje decreció y en su lugar aumento el porcentaje de estudiantes que comprenden la relación de dependencia entre dos magnitudes de forma gráfica (ver **Figura 50** y **Figura 51**). Un ejemplo de la actividad #3 puede verse en la **Figura 52**.

Figura 50: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #3



Fuente: Elaboración propia

Figura 51: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #4

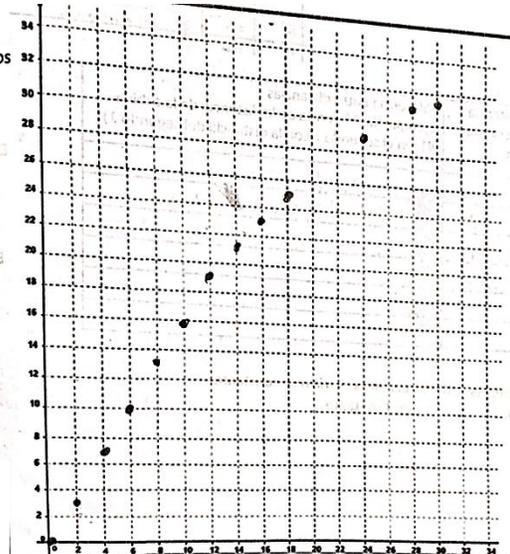


Fuente: Elaboración propia

Figura 52: Respuesta a la actividad #3- por el estudiante B_6

I. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de 2 m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
2 m/s	0	0
1.82 m/s	2	3.63
1.64 m/s	4	7.26
1.46	6	10.89
1.29	8	14.52
1.11	10	18.15
0.93	12	21.78
0.75	14	25.41
0.57	16	29.04
0.39	18	32.67
0.21	20	36.30
0.03	22	39.93
0.00	24	43.56
0.00	26	47.19
0.00	28	50.82
0.00	30	54.45



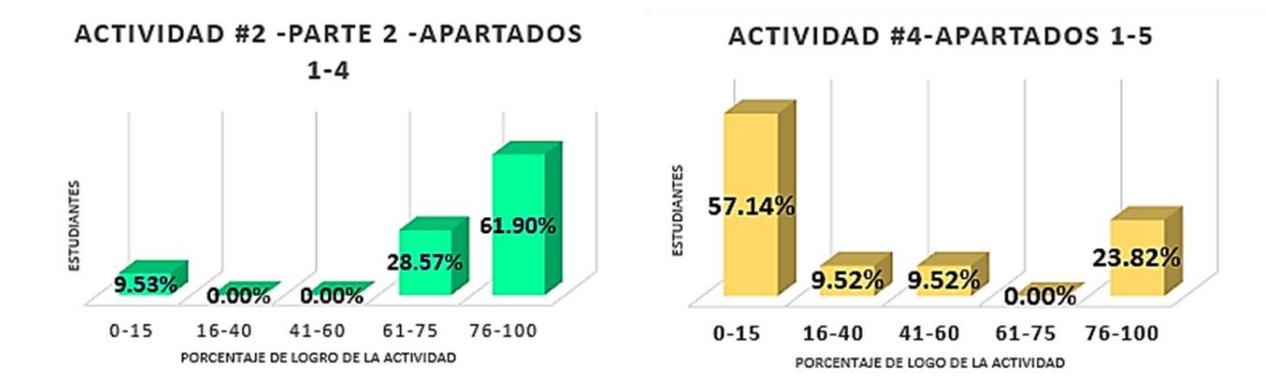
Fuente: respuestas del estudiante B_6

2.6 Comportamientos alcanzados en las actividades 2.6 de la THA de la AM1- parte 2

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “Interpretar gráficos y determinar los valores de las magnitudes solicitadas” de la AM1, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 2.6)

Los estudiantes presentaron mayor dificultad al interpretar gráficos de situaciones no lineales, repercutiendo en que no pudieran encontrar los valores de las magnitudes de distancia y tiempo solicitadas en las hojas de exploración. Esto puede verse reflejado en los siguientes gráficos (ver **Figura 53**) donde los estudiantes presentan un retroceso al pasar de interpretar graficas de situaciones lineales al interpretar gráficas de situaciones no lineales, con ello dificultándoles encontrar los valores de las magnitudes solicitadas.

Figura 53: Porcentaje de logro de los estudiantes en las actividades #2 parte 2 y actividad #4



Fuente: Elaboración propia

3.1 Comportamientos alcanzados en las actividades 3.1 de la THA de la AM2

Figura 54: Respuesta de los estudiantes a la actividad #2- apartados T-V

Estudiante	Velocidad de la cabina #1 y #2	Actividad 2- apartados T-V	Comparación de la gráfica 1 con la 2
D_1	9 y 5	No logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
D_5	5 y 7.5	Presenta cierta noción	Crece más rápido
D_6	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	No crece tan rápido
D_7	5 y 7.5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	No decrece tan rápido
D_8	5 y 7.5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Decrece más rápido
D_10	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_1	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_2	5 y 7.5	No comprendió	No decrece tan rápido
B_3	9 y 7.5	No logro encontrar el patrón lineal creciente	*
B_4	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	No decrece tan rápido
B_5	9 y 5	No logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_6	9 y 5	Presenta cierta noción	Son iguales
B_7	9 y 7.5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_8	4 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	no decrece tan rápido
B_9	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_11	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido
B_12	9 y 5	Logro encontrar el patrón lineal creciente	No se
B_13	10 y 5	No logro encontrar el patrón lineal creciente	Crece más rápido

Fuente: Elaboración propia

En la presente sección describiremos el desarrollo que presentaron los estudiantes a los comportamientos de “reconocer el patrón lineal creciente en la distancia que hay entre puntos, a partir del análisis gráfico, además de familiarizarse con los términos de “crece y decrece” de la AM2, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 3.1)

Podemos observar que solo 12 de los 21 estudiantes pudo encontrar el patrón lineal creciente y dos de ellos presentan cierta noción de encontrar el patrón (ver **Figura 54**). Una de las dificultades que se pudo observar en los estudiantes con respecto al desarrollo de este comportamiento de encontrar el patrón lineal creciente, corresponde a la dificultad de interpretación de gráficas y al de graficar puntos en el plano cartesiano dado que no pudieron obtener la gráfica correspondiente.

También podemos observar que algunos de los estudiantes van familiarizándose empleando bien los términos de “crece” o “decrece”.

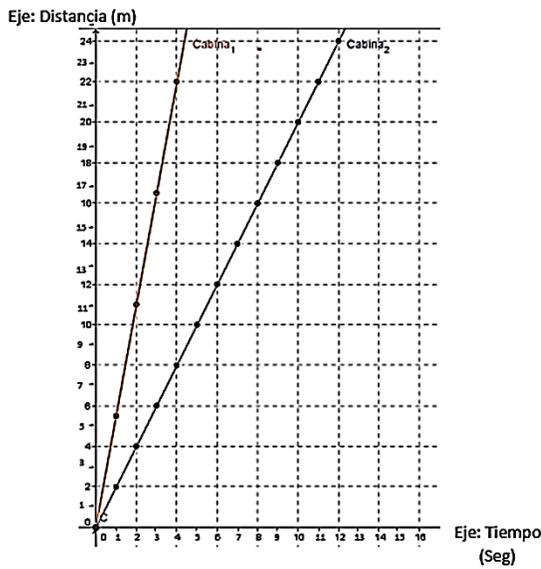
.....

3.2 Comportamientos alcanzados en las actividades 3.2 de la THA de la AM2

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “extrapolar valores de magnitudes a partir del análisis de gráficas” de la AM2, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 3.2)

Las preguntas que se abordaron respecto a este comportamiento de la AM2 se muestran a continuación (ver **Figura 55**):

Figura 55: Actividad #2- parte 2, apartados 5 y 6



- 5.- ¿En qué posición se encontraría la cabina #1 al transcurrir 9 segundos? R: _____
- 6.- ¿En qué posición se encontraría la cabina #2 al transcurrir 17 segundos? R: _____

Fuente: Elaboración propia

Podemos observar que un gran porcentaje de los estudiantes presentan la dificultad de extrapolar valores a partir del análisis de gráficas (ver **Figura 56**). Algunos estudiantes no pudieron desarrollar este comportamiento debido a que se limitaban a visualizar los valores presentes en la representación gráfica.

Figura 56: Porcentaje de logro de los estudiantes a la actividad #2 parte 2



Fuente: Elaboración propia

3.3 Comportamientos alcanzados en las actividades 3.3 de la THA de la AM2

En la presente sección describiremos el desarrollo que presentaron los estudiantes a los comportamientos de “Describir el patrón lineal creciente en a partir del análisis gráfico y la extrapolación de valores” de la AM2, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 3.3. En las secciones anteriores pudimos notar que los estudiantes presentaban dificultad en extrapolar valores a partir del análisis gráfico y en encontrar patrones lineales crecientes, dificultades que aún se pueden observar en este apartado (ver

Figura 57).

actividad #2 parte 2, apartados 7 y 11			
Estudiante	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	Razón por la que no logra extrapolar
D_1	No logra extrapolar valores	No logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
D_5	No logra extrapolar valores	No logra describir el patrón	
D_6	No logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
D_7	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
D_8	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
D_10	presenta cierta noción	No logra describir el patrón	
D_11	No logra extrapolar valores	presenta cierta noción	
D_13	presenta cierta noción	Logra describir el patrón	
D_15	No logra extrapolar valores	No logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
E_1	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_2	No logra extrapolar valores	No logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
E_3	No logra extrapolar valores	Presenta cierta noción	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
E_4	No logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
E_5	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_6	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_7	Logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_8	No logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica
E_9	No logra extrapolar valores	Presenta cierta noción	
E_11	No logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_12	No logra extrapolar valores	Logra describir el patrón	
E_13	No logra extrapolar valores	No logra describir el patrón	Se limita a los valores visibles de la representación gráfica

Figura 57: Respuesta de los estudiantes a la actividad #2 parte 2- apartados 7 y 11

Por otro lado, algunos de los estudiantes que sí identifican el patrón lineal creciente no logran encontrar los valores para magnitudes que no son visibles en la gráfica. Por lo que estos estudiantes no progresaron hacia el desarrollo del comportamiento de poder encontrar los valores intermedios propuestos en el gráfico y los valores fuera de esos puntos.

Fuente: Elaboración propia

.....

4.1 Comportamientos alcanzados en las actividades 4.1 de la THA de la AM3

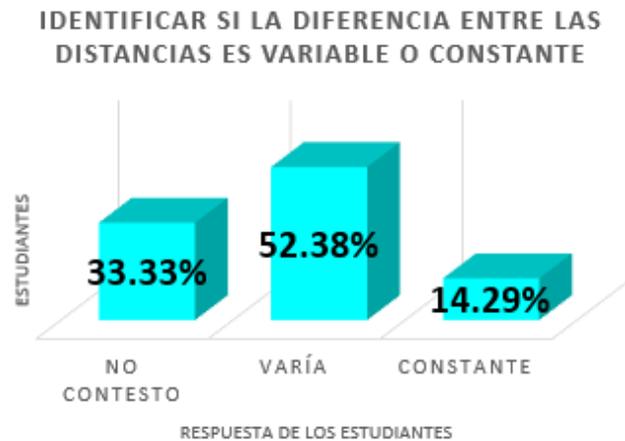
En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “puedan identificar de forma tabular que la diferencia entre las distancias es variable en distintos intervalos de tiempo, si la velocidad de la cabina cambia en todo momento” de la AM3, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4-apartado 3.2)

Con respecto a las respuestas obtenidos por parte de los estudiantes a las actividades que comprenden este comportamiento, se detalla que el 33% de los estudiantes no lograron encontrar de forma tabular la diferencia de las distancias recorridas en determinados intervalos de tiempo. Por lo que llevo a que no pudieran identificar que esa diferencia entre distancias es variable y esto debido a que la velocidad que se está empleando es variable.

Por otro lado, el 66.67% de los estudiantes que, si logro encontrar la diferencia de las distancias recorridas en determinados intervalos de tiempo, solo el 52.38% pudo identificar que su diferencia es variable, dada que la velocidad empleada es variable

(ver **Figura 58**). Podemos observar que los estudiantes aún presentan cierta dificultad con los términos de varía y constante.

Figura 58: Porcentaje de logro de las respuestas de los estudiantes a la actividad #3 y #4



Fuente: Elaboración propia

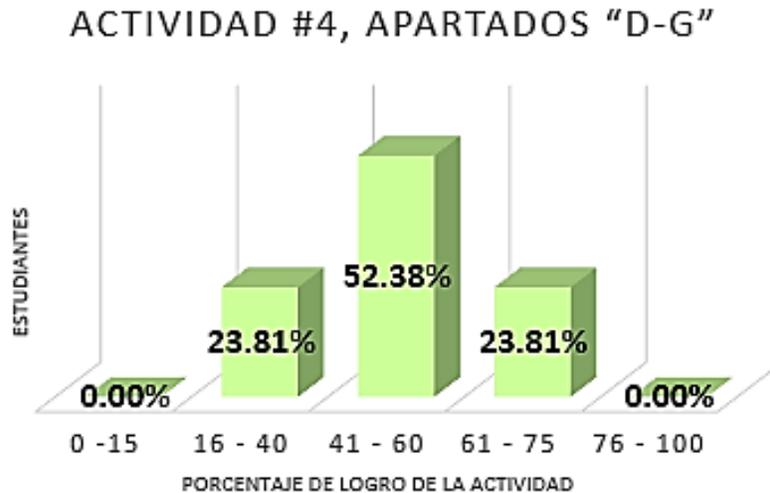
.....

4.2 Comportamientos alcanzados en las actividades 4.2 de la THA de la AM3

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de “identificar y comparar que en determinados intervalos de tiempo una magnitud (aceleración) está presentando cambios en sus valores” de la AM3, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 4.2)

En la **Figura 59** podemos observar que son muy pocos los estudiantes que alcanzan el porcentaje de logro de 61-76 (noción alta) con respecto a este comportamiento de identificar que los valores de la magnitud de aceleración están cambiando en determinados intervalos de tiempo, desafortunadamente no se encontraron indicios de que algún estudiante lograra desarrollar en su totalidad el comportamiento anterior, por lo que consideramos que sería conveniente proponer otras actividades en donde los estudiantes analicen los cambios de valor de distintas magnitudes en determinados intervalos de tiempo.

Figura 59: Porcentaje de logro de los estudiantes en la actividad #4, apartados "D-G"



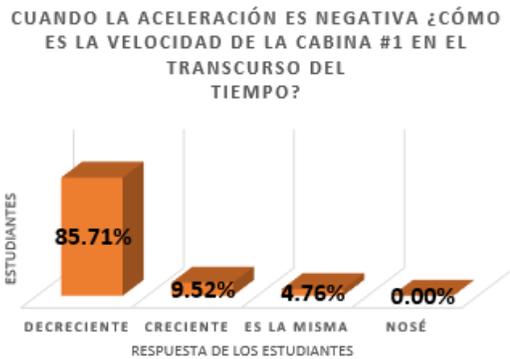
Fuente: Elaboración propia

4.3 Comportamientos alcanzados en las actividades 4.3 de la THA de la AM3

En la presente sección describiremos los porcentajes de logro asociados al comportamiento de "identificar que cuando la aceleración es negativa la velocidad decrece, pero cuando es positiva la velocidad crece y cuando es cero la velocidad es la misma" de la AM3, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 4.3)

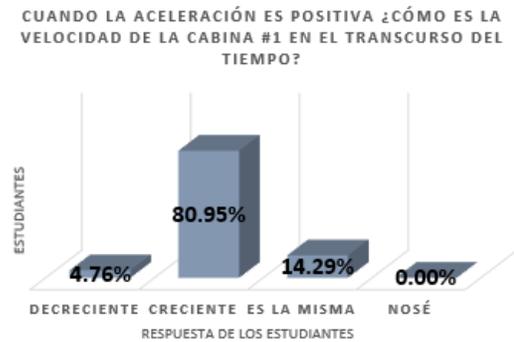
Las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes a la actividad #4 apartados G-I pueden observarse en las siguientes figuras (ver Figura 60, Figura 61 y Figura 62):

Figura 60: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado G



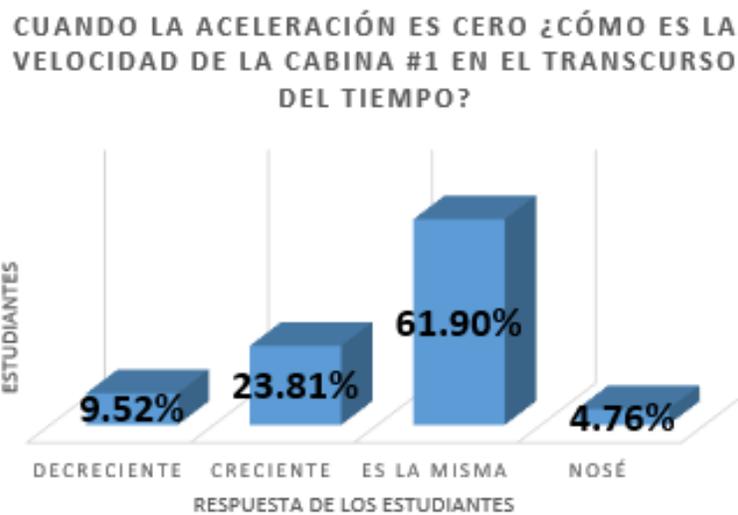
Fuente: Elaboración propia

Figura 61: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado H



Fuente: Elaboración propia

Figura 62: Respuesta de los estudiantes a la actividad#4- apartado I



Fuente: Elaboración propia

Podemos notar que un buen porcentaje de los estudiantes pudieron identificar de forma eficiente los cambios que presenta los valores de velocidad en determinados intervalos, cuando la magnitud de aceleración cambia su valor. Lo que nos lleva a considerar que los estudiantes lograron desarrollar este comportamiento.

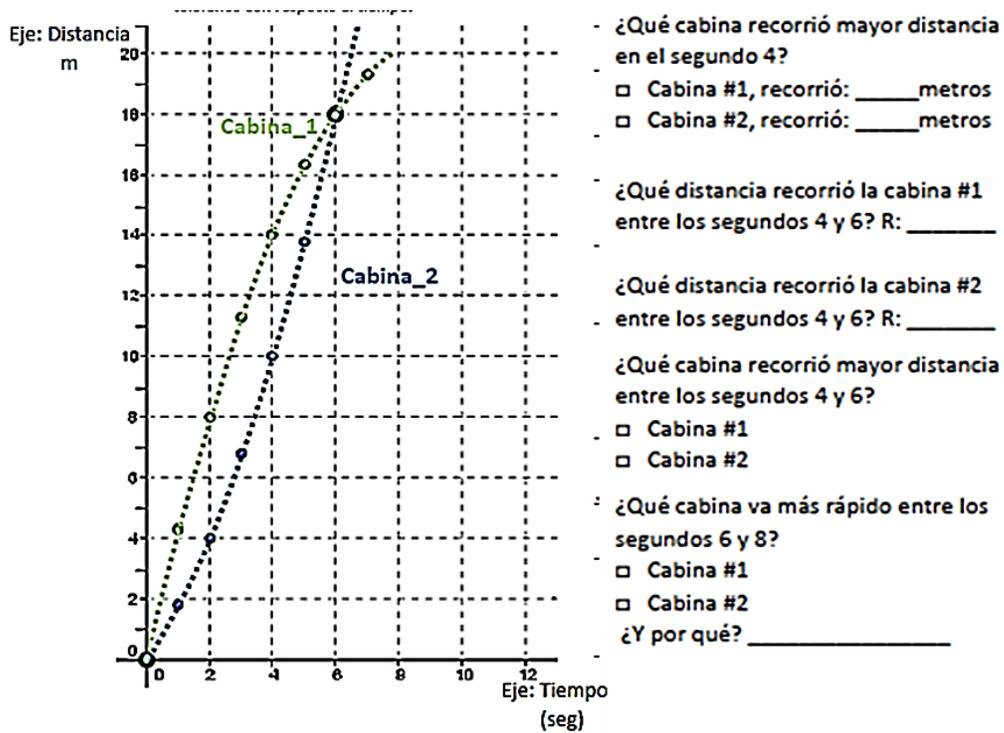
4.4 Comportamientos alcanzados en las actividades 4.4 de la THA de la AM3

En la presente sección describiremos el desarrollo que presentaron los estudiantes a los comportamientos de “identificar de forma gráfica la distancia que

existe de un punto a otro en diferentes intervalos de tiempo” de la AM3, obtenidos mediante la comparación de los procesos hipotéticos de aprendizaje de nuestra THA (consultar el apartado 3.1.4- apartado 4.4)

En la **Figura 64** podemos observar las respuestas de un grupo de estudiantes a los apartados 6- 11 de la actividad #4 (ver **Figura 63**), los recuadros pintados en color verde, indica que la respuesta del estudiante es correcta.

Figura 63: Actividad #4- apartados 6- 11



Fuente: Elaboración propia

Figura 64: Respuestas de los estudiantes a la actividad #4- apartados 6-10

Actividad #4, apartados "6-10"						
Estudiante	6	7	8	9	10	
D_1	Elige el último valor de la gráfica---21 y 18	Elige solo el valor del segundo segundo del intervalo---18	Elige solo el valor del segundo segundo del intervalo---14	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico
D_5	No completo	Elige un punto que esté en medio del intervalo---16	Elige el punto medio de la gráfica---14	Cabina #2	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_6	14 y 10--- elige cabina #1	Elige un punto que esté en medio del intervalo---13.9	Elige el punto medio de la gráfica---16.2	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_7	14 y 10--- elige cabina #1	Elige un punto que esté en medio del intervalo---16.2	Elige el punto medio de la gráfica---13.9	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_8	14 y 10--- elige cabina #1	Encuentra los valores de los extremos del intervalo pero no encuentra la distancia	Encuentra los valores de los extremos del intervalo pero no encuentra la distancia	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_10	No logra identificar los valores de las distancias	8	4	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_11	No logra identificar el valor de una distancia	Elige solo el valor del segundo segundo del intervalo---18	Elige solo el valor del primer segundo del intervalo---10	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_13	14 y 10--- elige cabina #1	Elige un punto que esté en medio del intervalo---16.2	Elige el punto medio de la gráfica---13.9	Cabina #1	Cabina #1	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
D_15	No completo	No comprendio lo que se le pedia	No comprendio lo que se le pedia	Cabina #1	Cabina #2	problema en interpretar el gráfico en determinados intervalos
B_1	14 y 10--- elige cabina #1	No completo	No completo	No completo	No completo	

Fuente: Elaboración propia

Podemos observar que los estudiantes continúan presentando dificultades con la interpretación de gráficas, específicamente cuando debe analizar e interpretar datos en determinados intervalos, también algunos estudiantes presentan dificultad con

encontrar la longitud de un intervalo, por lo que consideramos que las tareas que involucran este análisis de graficas no lineales, fueron insuficientes para lograr que los estudiantes desarrollaran este comportamiento de la acción mental tres.

Capítulo V: Discusión y conclusiones

La presente investigación ha tenido como propósito promover el razonamiento variacional-covariacional en estudiantes de secundaria (14-15 años), como antecedente al concepto de función permitiendo a su vez dar cuenta de los niveles de covariación alcanzados por los estudiantes y sus dificultades presentadas al interactuar con nuestra secuencia de actividades didácticas. Estas actividades se desarrollaron en forma presencial, después de un largo periodo de confinamiento sanitario, lo cual es desde luego una variable a considerar.

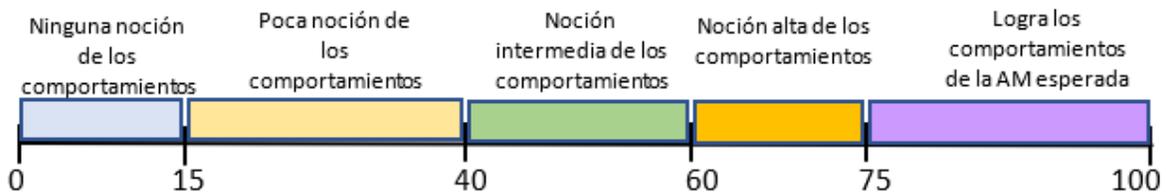
5.1 Respuestas a las preguntas de investigación.

5.1.1 Primera pregunta de investigación

¿Qué niveles de razonamiento covariacional logran alcanzar estudiantes de secundaria al resolver tareas de situaciones de covariación apoyadas en entornos digitales?

Para fines de claridad en la comunicación de nuestros resultados, consideramos establecer una taxonomía para las diversas respuestas de los estudiantes que nos permita detallar el esquema de nuestra escala del porcentaje de logro de comportamientos, la cual nos brinda información sobre la evolución en los comportamientos de las acciones mentales por parte de los estudiantes y a su vez observar si el estudiante logra alcanzar el nivel de covariación esperado (ver **Figura 65**). La escala surge a partir de la lectura de los trabajos de Gutiérrez et al (1991) sobre los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele y de la lectura de la tesis de maestría de Islas (2020).

Figura 65: Porcentaje de logro de los comportamientos de la AM esperada



Fuente: Elaboración propia

El análisis retrospectivo de cada estudiante donde se evalúa su evolución con respecto a los comportamientos esperados en cada acción mental puede encontrarse en el apartado de Anexos sección 8.6

A partir de ese análisis de los 21 estudiantes que desarrollaron nuestra secuencia de actividades didácticas podemos concluir lo siguiente:

Figura 66: Porcentaje de los estudiantes de los 21 estudiantes de tercero de secundaria



Fuente: Elaboración propia

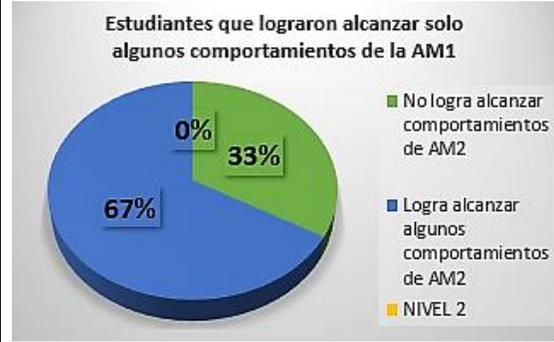
Del 71% de los estudiantes que lograron el nivel 1 se concluye lo siguiente:	Del 29% de los estudiantes que lograron alcanzar algunos comportamientos de AM1 se concluye lo siguiente:
--	---

Figura 67: Avances de los comportamientos en los estudiantes que lograron el N1



Fuente: Elaboración propia

Figura 68: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM1



Fuente: Elaboración propia

El 7% de los estudiantes que no lograron alcanzar comportamientos de la AM2, tampoco lograron desarrollar comportamientos de la AM3

El 33% de los estudiantes que no lograron alcanzar comportamientos de la AM2, tampoco lograron desarrollar comportamientos de la AM3

Del 66% de los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos de los comportamientos de la AM2 se concluye lo siguiente:

Del 67% de los estudiantes que lograron alcanzar solo algunos de los comportamientos de la AM2 se concluye lo siguiente:

Figura 69: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM2- pero que si lograron el N1



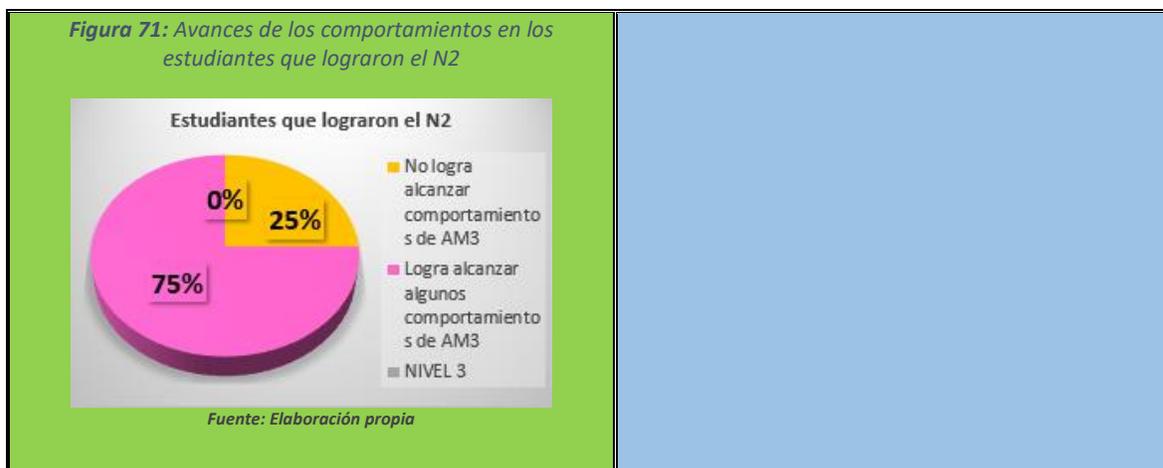
Fuente: Elaboración propia

Figura 70: Avances de los comportamientos en los estudiantes que solo lograron alcanzar algunos comportamientos de la AM2- pero que solo lograron algunos comportamientos de la AM1



Fuente: Elaboración propia

Del 27% de los estudiantes que si lograron alcanzar el Nivel 2 se concluye lo siguiente:



En el análisis retrospectivo se observaron dificultades que se presentaron a lo largo de las actividades con respecto a algunos comportamientos de las AM, uno de los casos corresponde al de la AM3, dado que no se encontraron muchos indicios en los estudiantes con respecto a comportamientos de poder establecer la cantidad de cambio en una variable con respecto a cambios de la otra variable en determinados intervalos, por esta razón, los estudiantes no pudieron avanzar al nivel 3. Estas dificultades encontradas dan paso a contestar a nuestra segunda pregunta de investigación.

5.1.2 Segunda pregunta de investigación

¿Qué dificultades se les presentan a estudiantes de secundaria cuando atienden las relaciones entre variables y su dependencia en contextos de variación y covariación?

Las dificultades a las que se enfrentaron los estudiantes al resolver tareas que implicaron el identificar el tipo de variación que presenta una magnitud y, posteriormente, establecer relaciones funcionales entre pares de magnitudes, lo cual nos permite categorizarlas y asociarlas a cada nivel de covariación:

Dificultades que se presentaron en los comportamientos de la AM1 que obstaculizaron el avance al N1 de covariación

- ∞ En el desarrollo de nuestra intervención didáctica se detectó la dificultad con respecto al desarrollo del comportamiento de identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en: constante, variable y parámetro. Nuestra propuesta tenía la intención de que los estudiantes se apropiaran de los términos: variable y constante, se logró que los estudiantes incluyeran en su vocabulario los términos de “variación”, “varia=cambia”, “se mantiene= constante”. Sin embargo, nuestra propuesta no ayudó a que los estudiantes tuvieran mejoras en identificar el significado de parámetro a ciertas magnitudes.
- ∞ La articulación y el cambio entre las diferentes formas de representación: tabular y gráfica, ha sido reportado como una dificultad enfrentada por los estudiantes en Peralta y Soto (2003), dificultad que también se hizo notoria en nuestra intervención didáctica con actividades empleadas desde un enfoque variacional-covariacional, reflejando que algunos de los estudiantes a pesar de contar con datos de forma tabular, no pudieron graficar los puntos, y en consecuencia no pudieron establecer una relación de dependencia entre pares de magnitudes. Es decir, no sabían graficar puntos en un plano cartesiano.
- ∞ Algunos de los estudiantes confundieron la forma de la gráfica con la trayectoria del objeto en movimiento; en nuestro caso, dibujaron la gráfica de tiempo-distancia con una línea recta horizontal o diagonal, lo cual asemeja a la posición de los cables del teleférico por donde se mueve la cabina. La dificultad anterior se liga al problema de confusión entre el objeto y su representación. Se concluye una falta de claridad en el significado de las variables involucradas en el plano cartesiano y en la interpretación de las

representaciones gráficas del movimiento.

**Dificultades que se presentaron en los comportamientos de la AM2 que
obstaculizaron el avance al N2 de covariación**

- ∞ Consideramos que el prerrequisito de graficar puntos en el plano cartesiano influye en la interpretación de gráficas, comportamiento que en algunas investigaciones como la de Merhar et al (2009) se ha reportado como dificultad para el estudiantado. Esta dificultad también la detectamos en nuestra secuencia de actividades didácticas, precisamente en las actividades de operación inversa, donde el estudiante debe analizar las gráficas que se le presentan.
- ∞ Observamos que algunos estudiantes presentan dificultades para encontrar el patrón lineal de covariación a partir de la representación gráfica. En general, algunos de los estudiantes que sí identifican el patrón lineal creciente no logran encontrar los valores para magnitudes que no son visibles en la gráfica. Por lo que estos estudiantes no progresaron hacia esa acción mental sobre encontrar valores intermedios y fuera de los puntos propuestos en la gráfica. Estos estudiantes no lograron hacer predicciones porque únicamente se limitaban a visualizar los valores presentes en la representación gráfica.

**Dificultades que se presentaron en los comportamientos de la AM3 que
obstaculizaron el avance al N3 de covariación**

- ∞ La principal dificultad encontrada en esta acción mental es que los estudiantes no identifican la covariación entre dos variables cuando la situación no es lineal. Lo cual se observó cuando algunos estudiantes no pudieron atender el cambio que tiene la variable dependiente (distancia) cuando cambia la variable independiente (tiempo), en intervalos de

velocidad variable. Una dificultad mayor fue identificar puntos del movimiento, mediante interpolación. Se concluye que la complejidad para observar los cambios no lineales es mucho más compleja que analizar los cambios en las situaciones lineales.

∞ De igual forma, consideramos que las tareas que involucraban la operación, inversa, es decir, describir las características del movimiento a partir de la representación gráfica, fueron insuficientes para lograr que los estudiantes desarrollaran comportamientos de la acción mental tres. Por lo cual, se requiere un rediseño de actividades que se enfoquen en los siguientes aspectos:

- Proponer una actividad en donde se les enseñe al estudiante a graficar puntos en el plano cartesiano.
- Proponer más actividades en donde el estudiante tenga que graficar más de una función en un solo plano cartesiano.
- Llevar a cabo actividades en donde se le dé al estudiante una introducción a intervalo en la recta real y su longitud.

Anteriormente se describieron los logros y algunas de las dificultades observadas en los estudiantes respecto a las AM, pero para fines de esta investigación también consideramos apropiado rescatar algunas *actividades que permitieron identificar que los estudiantes tuvieron un proceso de aprendizaje:*

Las actividades fueron pensadas en forma de una secuencia, donde se iba aumentando un poco la dificultad de algunos de los apartados de estas actividades, permitiendo así observar la evolución de los estudiantes con respecto a algunos objetos matemáticos.

- Una evolución que se pudo observar en algunos de los estudiantes fue respecto al comportamiento de “identificar la diferencia entre lo que varía y lo que se mantiene constante, esperando que se familiarizarán con esos dos términos”. Se logró que los estudiantes incluyeran en su vocabulario los términos de “variación”, “varia=cambia”, “se mantiene= constante” (ver figura 40 G).
- Otra evolución que se pudo observar en algunos estudiantes es con respecto al comportamiento de “identificar y clasificar las magnitudes según su tipo de variación en: constante, variable y parámetro”. Algunos de esos estudiantes lograron identificar y clasificar la diferencia al menos entre las magnitudes de variable y constante y parcialmente la de parámetro (ver figura 29).
- Algunos estudiantes también evolucionaron con respecto a ubicar y graficar puntos en el plano cartesiano (ver figura 49 y 52)

5.2 Conclusiones

La implementación de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) como metodología de investigación sirvió como guía para el diseño y desarrollo de nuestra propuesta didáctica. Así como la THA que permitió organizar nuestras actividades a partir de la graduación de las acciones mentales de los niveles de covariación propuestos por Carlson et al (2002) y elementos de la didáctica Cuevas-Pluinage para la elaboración de las actividades, permitiéndonos observar la evolución de los comportamientos de las AM de los 21 estudiantes de tercero de secundaria al interactuar con los EDVI, haciendo uso de HEAG.

El diseño de una THA además de ayudarnos a organizar nuestras actividades nos permitió llevar a cabo un análisis retrospectivo de nuestros procesos hipotéticos con

los resultados obtenidos por parte de los estudiantes en la secuencia didáctica; el análisis nos brindó información acerca de las dificultades que los estudiantes presentaron durante el desarrollo de los comportamientos de las acciones mentales, los cuales representaron un obstáculo para poder alcanzar algunos de los niveles de covariación.

Este análisis también nos permitió saber en qué puntos de nuestra propuesta didáctica debemos de centrarnos para poder llevar a cabo un rediseño de nuestra secuencia de actividades didácticas y de nuestra trayectoria hipotética; proponiendo actividades con apoyo de la tecnología que afronten las dificultades encontradas en nuestro primer ciclo de investigación de diseño, detallada en los párrafos siguientes, con el fin de promover el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento covariacional.

Cabe mencionar que la inclusión de entornos didácticos virtuales interactivos sirvió como un medio de articulación entre las diferentes formas de representación, los cuales permitieron apreciar de forma dinámica el tipo de variación que estaban presentando las magnitudes en el fenómeno del movimiento de un objeto y a su vez poder establecer posibles relaciones funcionales entre pares de magnitudes. Además, se puede rescatar que durante el desarrollo de las actividades el proceso de instrumentación de cada uno de los EDVI no presentó dificultad en los estudiantes para descubrir que acciones representaban cada botón, cajas de entrada y textos dinámicos.

Este trabajo fue enviado al PME-NA 44 del 2022 como informe completo de investigación siendo aceptado y se presentará en noviembre del año en curso (Para ver una versión del informe aceptado, ver anexo 8.8)

En el siguiente capítulo plantearemos las ideas y líneas de investigación que dan continuidad a este trabajo y que pretendemos desarrollar en una investigación doctoral.

Capítulo VI: Continuidad para el trabajo doctoral

6.1 Introducción

El proyecto de doctorado dará continuidad a nuestro trabajo de maestría, mediante el rediseño de nuestra secuencia de actividades didácticas y de nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje; proponiendo actividades que afronten las dificultades encontradas en nuestro primer ciclo de investigación de diseño, con el fin de promover el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento covariacional de Carlson et al (2002).

El objetivo de nuestra propuesta de maestría consistió en observar la variación y la covariación, como antecedente para el concepto de función en estudiantes de secundaria (14-15 años), por lo que desarrollamos un diseño de actividades en contexto que pone énfasis en la distinción entre variable (dependiente e independiente), constante y parámetro. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de experimentar, en un contexto real mediante la simulación de un teleférico, las relaciones entre estos conceptos al identificar e interpretar los patrones de cambio en la razón de cambio velocidad. No obstante, de acuerdo con nuestro marco teórico, en general, los estudiantes no han logrado desarrollar los comportamientos de las acciones mentales del nivel 3 de covariación; lo cual nos sugiere que enfoquemos nuestra atención en que desarrollen el sentido y el significado del cambio entre las magnitudes involucradas en las tareas.

Desde esa perspectiva, en el estudio doctoral se busca lograr que los estudiantes consigan un sentido sólido de la covariación entre variables, pero centrándonos en la interpretación del cambio, lo cual nos conduce hacia el cuarto nivel de covariación, la interpretación de la razón de cambio.

En resumen, nuestra investigación de maestría nos mostró que un problema a resolver, previo al concepto de función es la interpretación del cambio, el cual de acuerdo con Thomson (1998) es necesario para razonar dinámicamente. Además, se describió que los estudiantes con los cuales realizamos la actividad no lograron alcanzar el nivel 3 (cuantificar los cambios en las variables), debido a fuertes deficiencias en sus prerrequisitos matemáticos, y muy posiblemente debido a la situación de la pandemia.

No obstante, con la intención de avanzar en el estudio, en doctorado diseñaremos y añadiremos actividades didácticas con el fin de establecer los prerrequisitos y además intentaremos que los estudiantes alcancen el cuarto nivel de covariación del marco de Carlson et al (2002) en el cual los estudiantes comprenden la razón de cambio promedio.

Por tal motivo, para nuestro rediseño de actividades contemplamos redireccionar nuestra intervención didáctica a actividades donde el estudiante identifique la covariación como una razón de cambio, relacionándola con el concepto de pendiente, si la relación es lineal, y en caso contrario, identifique las características y la utilidad de la razón de cambio promedio en relaciones no lineales. Por lo tanto, para dar continuidad a nuestro trabajo queremos profundizar en el estudio de los comportamientos de las acciones mentales necesarias para comprender el concepto de razón de cambio.

En el siguiente apartado describiremos los antecedentes respecto a la relación entre covariación y razón de cambio, vinculándola con el plan de estudios para secundaria de la SEP (2017). También plantearemos los objetivos y el enfoque teórico metodológico con el que pretendemos dar respuesta a nuestra pregunta de investigación.

6.2 Antecedentes y problemática

En la actualidad, la introducción del concepto de función es común en los currículos de secundaria, de acuerdo con lo recomendado por la literatura y los estándares de matemáticas, los cuales apoyan el desarrollo del pensamiento funcional temprano y la identificación de patrones de cambio en fenómenos de variación (NCTM, 2000; Sfard, 1992; Carlson, 1998; Carlson et al., 2002). Particularmente, los estándares de NCTM (2000) recomiendan que los estudiantes sean capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y de comprender e interpretar expresiones que involucren tasas de cambio. Si bien es cierto que, en el currículo oficial de México contempla el concepto de función, no se hace hincapié en el comportamiento de cambio covariacional de las funciones. Las investigaciones señalan que los estudiantes entran a los niveles superiores con una comprensión escasa de las funciones y que el problema que subyacente a esta situación, es un pobre desarrollo del razonamiento covariacional, es decir, la interpretación del efecto que tiene el cambio en una variable que depende de otra (Cuevas y Pluinage, 2019; Carlson, 1998; Carlson et al., 2002) E incluso, en esta investigación hemos reportado las dificultades que, en nuestra intervención, se generaron alrededor de lo que es una variable, una constante y un parámetro; en este sentido, en nuestra revisión del currículo SEP (2017) se pretende que los estudiantes aprendan el concepto de función sin desarrollar estos conceptos y sin fortalecer sus relaciones con actividades de covariación.

El concepto de razón o tasa de cambio está presente en el pensamiento funcional y, por lo tanto, es transversal a diversas áreas de estudio, tanto en matemáticas como en otras disciplinas (Johnson, 2015) Una idea sólida de la tasa de cambio implica comprender y atender la relación operativa entre dos o más cantidades que cambian, lo cual, de acuerdo con nuestros resultados y nuestra revisión de literatura, no es

tarea sencilla para los estudiantes de secundaria (por ejemplo, (Confrey, J. y Smith, 1995). En este estudio nos proponemos afrontar este problema y en su continuidad nos proponemos también cuantificar la razón de cambio que, de acuerdo con Johnson (2015), su complejidad radica en cuantificar una cantidad intensiva, que depende de dos magnitudes de diferentes espacios de medida. Por ejemplo, un problema clásico en la investigación es el llenado de recipientes con un líquido, si una tarea consiste en medir la altura del líquido o el volumen ocupado por el líquido no representa una gran dificultad para los estudiantes, sin embargo, si la tarea trata de cuantificar cómo cambia el volumen del líquido con respecto a la altura del añade un nivel de dificultad y de acciones mentales que van más allá de solo identificar la covariación entre dos variables (Johnson, 2012; Ramos y Jiménez, 2014). Carlson et al. (2002), identifican a esta habilidad como fundamental para el razonamiento covariacional, particularmente al hacer referencia a las acciones mentales del cuarto nivel de covariación.

Para nuestro estudio doctoral, el principal reto es que los estudiantes interpreten el significado y la utilidad de la razón de cambio promedio en contextos de variación no uniforme, por lo que se propondrán contextos de comportamientos no lineales que favorezcan dicha interpretación, como pueden ser las funciones exponenciales, en contextos de crecimiento o decaimiento exponencial. No obstante, nuestro objetivo no es que los estudiantes comprendan y utilicen la razón de cambio, sino que la interpreten como agente que representa a la pendiente en las funciones lineales y como herramienta para inferir comportamientos crecientes o decrecientes en las funciones no lineales.

6.3 Objetivo y pregunta de investigación

¿Qué dificultades presentan los estudiantes de secundaria, en el desarrollo de comportamientos del nivel 4, que podrían obstaculizar su progreso para desarrollar los comportamientos del nivel 5 (razón de cambio instantánea)? Lo cual nos dará elementos para indagar, profundizar y proponer ideas que aporten respecto a los comportamientos necesarios en los estudiantes para comprender la razón de cambio instantánea.

6.4 Enfoque teórico

El enfoque teórico empleado para este segundo momento de investigación se apoya en el descrito en el cuerpo de la tesis, del cual rescatamos el empleo de una Investigación Basada en el Diseño (IBD) como metodología de investigación, la cual nos servirá de guía para el rediseño y desarrollo de nuestra segunda propuesta didáctica. También rescatamos el empleo de una THA la cual será rediseñada, haciendo que ahora la organización de nuestras actividades este enfocada en alcanzar el nivel cuatro de covariación del marco de Carlson et al (2002) donde el estudiante comprenda la razón de cambio promedio. Por último, se considera que estas actividades serán graduadas por las acciones mentales propias de cada nivel y elaboradas por los elementos de la didáctica Cuevas y Pluinage (2003).

6.5 Aspectos metodológicos

6.5.1 Intervención didáctica

Para nuestra segunda intervención didáctica se planea trabajar con estudiantes de secundaria (14-15 años).

Las actividades serán acorde con el plan educativo nacional del nivel de secundaria, analizado previamente. La intervención didáctica estará a cargo del investigador titular y del profesor en turno.

Para llevar a cabo nuestras actividades didácticas haremos uso de hojas de exploración y aprendizaje guiado, ordenadores o celulares y de entornos didácticos virtuales interactivos.

Los datos de nuestras actividades podrán obtenerse mediante: las hojas de exploración y aprendizaje guiado, entrevistas, capturas de video, fotografías. Se realizará una triangulación de datos entre las observaciones obtenidas.

6.5.2 Tipo de investigación

El estudio será cualitativo, con un enfoque de investigación basada en diseño (IBD) la cual comprende cinco características rescatadas por Van den Akker et al (2006) y Bakker (2018) las cuales son pertinentes a estos tipos de investigación, de las cuales rescataremos cuatro para nuestra investigación:

Intervencionista: la investigación tiene como objetivo diseñar una intervención en el mundo real.

Iterativa: la investigación incorpora un enfoque cíclico de diseño, evaluación y revisión. Los ciclos suelen constar de las siguientes fases:

- ☞ fase de preparación y diseño
- ☞ experimento de enseñanza y
- ☞ análisis retrospectivo.

Orientado al proceso: se centra en la comprensión y la mejora de las intervenciones didácticas.

Orientado a la utilidad: nos proporciona información en cuanto a las ventajas y desventajas que fueron surgiendo de nuestro proyecto, así como también el conocer su aporte a la comunidad de matemática educativa.

En vista que nuestra investigación rescata la característica de ser iterativa, nosotros llevaremos a cabo las siguientes fases propuestas por Bakker (2018) :

- ∞ **Fase 1: preparación y diseño;** en esta fase llevaremos a cabo el rediseño de nuestra secuencia de actividades didácticas y el rediseño de nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje.
- ∞ **Fase 2: experimento de enseñanza;** la investigación incorporará un pre-test, el cual nos permita Ahondar en los prerrequisitos matemáticos, un experimento piloto, la experiencia didáctica, un post-test, obtención de datos para responder pregunta de investigación.
- ∞ **Fase 3: análisis retrospectivo;** obtención de datos a partir de la comparación de nuestra THA con los resultados logrados por loes estudiantes, los cuales nos permitirán responder a pregunta de investigación.

6.5.3 *Diseño de actividades*

Nuestras actividades didácticas se diseñaran en base a las acciones mentales del marco propuesto por Carlson et al (2002):

Tabla 4: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de

		salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Fuente: Carlson et al., 2003, p. 128

Y a su vez estas actividades se elaboran bajo los elementos de la didáctica Cuevas y Pluvinage (2003) los cuales se enlistan a continuación:

- ☞ Es esencial que el estudiante esté siempre **desarrollando una acción**. El estudiante, mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, debe construir o llegar al concepto matemático deseado.
- ☞ Cuando se introduzca un concepto se debe **partir de un problema de contexto** que cause interés en el estudiante. Este problema puede generar subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada lleve al

estudiante a definir el concepto matemático deseado. Nunca debemos introducir un concepto mediante su definición formal.

- ✂ Una vez resuelto el problema planteado, el estudiante debe **validar sus resultados**, verificando que tengan un sentido lógico.
- ✂ Cuando se trate de enseñar un determinado tema o concepto matemático complejo mediante la resolución de un determinado problema. Es necesario **descomponer o dividir este problema en subproblemas** que representen las operaciones parciales que lo constituyen y anotar todas las operaciones y conceptos que resulten de este análisis y que el estudiante requerirá para resolver el problema inicial. Generar así un plan de acción, el cual mediante ejercicios gradualmente dosificados nos lleven en forma coordinada y coherente a la consecución de la meta.
- ✂ Intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la **operación inversa**.
- ✂ Cada vez que se enseñe un determinado concepto de matemáticas, en un cierto registro de representación semiótica, trabajemos el concepto (si es posible) en los **diversos registros de representación**, propios del concepto.

6.5.4 Evaluación de actividades

La evaluación de las actividades se realizará cualitativamente mediante un análisis retrospectivo y de acuerdo con la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Bakker (2018) menciona que con ayuda de la THA los profesores pueden anticipar el progreso de los estudiantes desde ciertos puntos de partida hasta los resultados esperados. La THA está compuesta por tres componentes propuestos por Simon(1995):

- Objetivos de aprendizaje
- Actividades de aprendizaje

- Aprendizaje hipotético de los estudiantes

Al finalizar cada intervención se analizarán los datos y se compararán con los procesos hipotéticos de la trayectoria de aprendizaje.

6.5.5 Uso de la tecnología

Se tratará de utilizar la tecnología en cada intervención. Por ejemplo, en el pretest podría ser hacerse uso del Software Coorcar (Coordenadas cartesianas) para ahondar en algunos de los prerrequisitos matemáticos.

También se planea hacer uso de Entornos Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) donde se llevarán a cabo simulaciones de contextos reales.

También se hará empleo de ordenadores o celulares que permitan la puesta en marcha de nuestros EDVI.

6.6 Cronograma

Para el desarrollo de la futura investigación proponemos el siguiente cronograma de actividades:

Primer semestre:

- Asistencia a seminarios de doctorado.
- Se analizarán con mayor detalle las referencias enlistadas en la bibliografía,
- Se realizará un análisis detallado de una selección de libros de texto más frecuentemente usados en los cursos de matemáticas en el tercer año de secundaria.
- Se realizará una lectura reflexiva y crítica para la consolidación y ampliación del marco teórico basado en las investigaciones más influyentes en el razonamiento covariacional (Thompson, P. W., y Carlson (2017) y en la THA.

- Se realizará el primer plan didáctico con base en la metodología de la investigación de diseño y los marcos didácticos Cuevas Pluvinage y en los niveles de covariación de Carlson et al (2002)
- Se realizará el diseño de la trayectoria de aprendizaje hipotética.

Segundo semestre:

- Asistencia a seminarios de doctorado.
- Se iniciará la escritura de los capítulos: antecedentes y marco teórico de la investigación.
- Se aplicará el pretest, una prueba piloto y el primer ciclo de la investigación basada en diseño.
- Se llevará a cabo el análisis retrospectivo del primer ciclo de la investigación.
- Se iniciará la creación de entornos didácticos que estimulen el desarrollo del razonamiento proporcional.

Tercer semestre:

- Asistencia a seminarios de doctorado.
- Se concluirá la escritura del capítulo de antecedentes.
- Iniciaremos con la escritura del capítulo de metodología.
- Se diseñarán las actividades correspondientes al segundo ciclo de la investigación de diseño.
- Se iniciará la escritura de un artículo de investigación que reportará lo hallado en el primer ciclo de investigación.

Cuarto semestre:

- Asistencia a seminarios de doctorado.
- Se aplicará el segundo ciclo de la investigación basada en diseño.
- Análisis retrospectivo del segundo ciclo de la investigación.

- Se continuará la creación de entornos didácticos que apoyen en el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes.
- Examen predoctoral

Quinto semestre:

- Realizar las modificaciones sobre las sugerencias dadas por el jurado en el examen predoctoral.
- Llevar a cabo la última intervención didáctica de la investigación de diseño con base en las trayectorias de aprendizaje observadas y analizadas en los primeros dos ciclos de investigación.

Sexto semestre:

- Se aplicarán y analizarán los resultados obtenidos del tercer y último ciclo de la investigación de diseño.
- Se compararán y se analizarán a profundidad las trayectorias de aprendizaje de los tres ciclos de la investigación de diseño.
- Escritura de un artículo en una revista de prestigio internacional.

Séptimo semestre:

- Se buscará presentar el trabajo en congresos nacionales e internacionales.
- Revisión final de Tesis.

Octavo semestre:

- Examen doctoral.

Capítulo VII. Referencias

- Aldon, G., & Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed? *ZDM*, 52(7), 1333–1348. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01172-8>
- Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research. *Educational Researcher*, 41(1), 16–25. <https://doi.org/10.3102/0013189X11428813>
- Ávila, P. (2018). *Razonamiento covariacional a través del software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática - Funes - Universidad de los Andes*. <http://funes.uniandes.edu.co/14396/>
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*, 9(6), 13–26. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003>
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42(14).
- Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). *Socioepistemología de la Predicción*. <http://funes.uniandes.edu.co/5968/>
- Carlson, Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos. *EMA*, 8(2), 121–156.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In A. H. Schoenfeld, J. J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *CBMS Issues in mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education III*, 7, 114–162.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.
- Cuevas, C. A., & Pluvinage, F. (2013). Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo. *Cinvestav-IPN*, 4, 57–82. http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
- Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d action pratique, elements d une ingenierie d enseignement des mathematiques. . . In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 273–293.
- Cuevas, & Pluvinage. (2019). Revisitando la noción de función real. *El Cálculo y Su Enseñanza, Enseñanza de Las Ciencias y La Matemática*, 13, 19–35.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.
- Estévez, M. A. B., Cruz, J. H. R., Ortiz, D. M. N., & Bohórquez, L. Á. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes

- para profesor de matemáticas - Dialnet. *AIEM*, 7, 73–93.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5672146>
- García, J. J. (2016). *Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo - Funes - Universidad de los Andes*.
<http://funes.uniandes.edu.co/11429/>
- Gutiérrez, A., Jaime, A., Fortuny, J. M., Gutierrez, A., & Fortuny, J. M. (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237. <https://doi.org/10.2307/749076>
- Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education*, 53(3), 635–647. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x>
- Islas. (2020). *Una Transposición Histórica, Mediada por la Didáctica Cuevas Pluvinage y el Modelo de Van Hiele para Introducir el Concepto de Semejanza de Triángulos en el Nivel Básico*.
- Johnson, Heather L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 313–330. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001>
- Johnson, Heather Lynn. (2015). Secondary Students’ Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 64–90. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946>
- Maury, E., Palmezano, G., & Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, 10(1), 7–16.
- Merhar, V. K., Planinsic, G., & Cepic, M. (2009). Sketching graphs—an efficient way of probing students’ conceptions. *European Journal of Physics*, 30(1), 163–175. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/1/017>
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas. Enseñanza de Las Ciencias*, 29(1), 75–88.
- Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students’ images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 48–59. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.001>
- Peralta, J., & Soto, L. (2003). Dificultades para articular los registros, gráfico, algebraico, tabular: el caso de la función lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 721–727.
- Plomp, T. (2010). *Educational design research: An introduction*. In T. Plomp & N. M. Nieveen (Eds.) *An introduction to educational design research* (Enshede (Ed.); The Nether).
- Plomp, T. (2013). (2013). *Educational design research: An introduction*. Educational design research.
- Ramos, L. I., & Jiménez, J. R. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El Cálculo Y Su Enseñanza*, 5, 107–124.
- Reséndiz, E. (2010). El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de

- variación. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, RELIME*, 13, 99–112.
- Ronau, R., Meyer, D., Crites, T., & Dougherty, B. (2014). Putting Essential Understanding of Functions into Practice in Grades 9-12 - National Council of Teachers of Mathematics. In *Reston, VA: NCTM*. <https://www.nctm.org/store/Products/Putting-Essential-Understanding-of-Functions-into-Practice-in-Grades-9-12/>
- Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education-North America*. Raleigh, NC.
- SEP. (2017). *Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación*. Matemáticas.Educación Secundaria. México. <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf%0A>
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification: The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* Association of. *MAA*, 25., 59–84.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2
- Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for Research in Mathematics Education*., 421–456.
- Trejo, M., Ferrari, M., & Martínez, G. (2021). Covariación logarítmico-exponencial en profesores de matemáticas en formación. *Educación Matemática*, 33(1), 41–70. <https://doi.org/10.24844/EM3301.02>
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.). (2006). *Educational Design Research*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203088364>
- Vargas Alejo, V., Víctor Reyes Rodríguez, A., & Cristóbal Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación Cycles of understanding about the concepts of function and variation. *Educación Matemática*, 28(2), 2016.
- Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Pibid.Mat.Ufrgs.Br*. http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf



Capítulo VIII: Anexos

8.1 Actividad #1

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional



Gracias por tu ayuda al completar las siguientes actividades, tus respuestas serán de gran valor, te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Por ello te pido que conteste de manera individual, sin ayuda alguna.

Nombre: _____ Fecha: _____

Nombre de la institución: _____ Hora de Inicio: _____

Instrucciones: Para realizar la actividad que se presenta en esta sesión de matemáticas, será necesario utilizar el escenario de Geogebra llamado "teleférico 1", para abrirlos sigue la siguiente ruta en el explorador de Windows:

Mis documentos/Tercer Grado Grupos B y D / Sesión 1

ACTIVIDAD 1

- Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.



La longitud total del cable del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante

- Cuando la cabina #1 se mueve, escribe lo que observas:

¿A qué hora la cabina #1 comienza su recorrido?

- ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1?

B. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #1? (en m)

C. ¿Cuánto tiempo tardó la cabina #1 en recorrer los primeros 60 metros? (Selecciona tu respuesta marcando con una “✓” en el cuadrado (☑))

- 8 s 12 s 6.5 s 13 s 24 s No sé

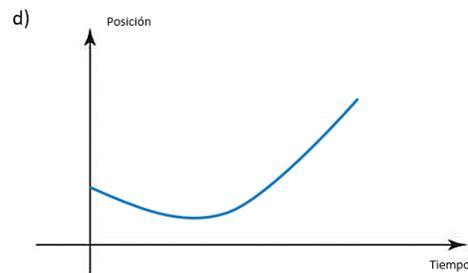
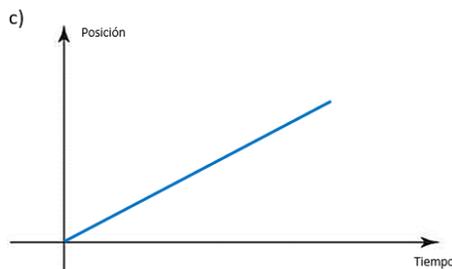
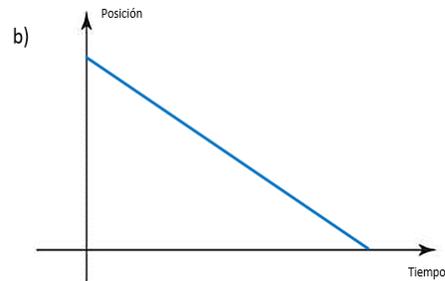
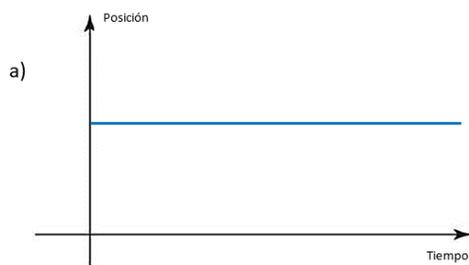
D. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado hasta el momento?

- Si No

E. ¿En qué segundo la cabina llega a recorrer los 100m?

- 13.3 s 10 s 40 s 3 s 20 s No sé

F. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1, durante esa hora correspondiente.



G. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de _____ m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

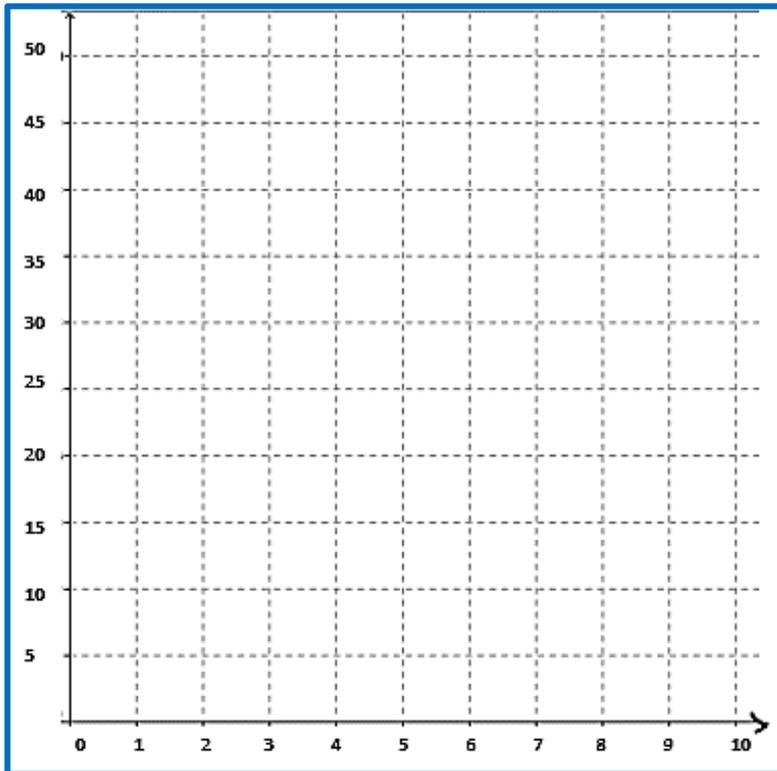
Velocidad (m/s)	Tiempo (segundos)	Distancia recorrida en metros (m)
	1	
	2	
	3	
	4	

	5	
	6	
	7	

H. ¿Qué le está pasando a la velocidad, cuándo el tiempo va aumentando?

I. ¿Qué le está pasando a la distancia, cuándo el tiempo va aumentando?

J. Grafica los valores de tiempo y distancia de la tabla anterior (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar su representación gráfica con una letra diferente).



K. Compara la gráfica que trazaste con la gráfica que elegiste en la pregunta “F”, ¿Qué diferencias o similitudes puedes encontrar?

L. ¿Qué valores consideras que son necesarias, para poder realizar la representación del recorrido de la cabina #1, durante esa hora correspondiente? Y ¿Por qué?

- Velocidad y tiempo
 - Distancia y tiempo
 - Altura y tiempo
 - Tamaño de la cabina y distancia
-

M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)

- Velocidad
- tiempo-hora
- distancia
- altura
- tamaño de la cabina
- No sé
- tiempo-segundos

N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)

- Velocidad
- tiempo-hora
- distancia
- altura
- tamaño de la cabina
- No sé
- tiempo-segundos



Hora de finalización: _____



8.2 Actividad 2/ Parte 1

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional



Gracias por tu ayuda al completar las siguientes actividades, tus respuestas serán de gran valor, te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Por ello te pido que contestes de manera individual, sin ayuda alguna.

Nombre: _____ Fecha: _____

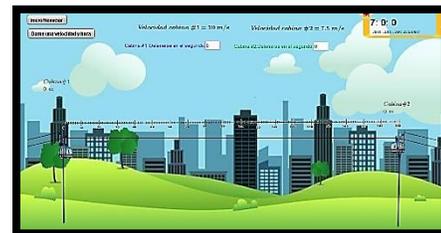
Nombre de la institución: _____ Hora de Inicio: _____

ACTIVIDAD 2/ Parte 1

Ingrese al siguiente escenario ----->

<https://www.geogebra.org/m/dmj2zycv>

1. Explora el escenario y a partir de tus observaciones responde a las siguientes preguntas, para ello debes marcar con una "✓" el cuadro (☑) a la izquierda de cada opción. Recuerda que si algo varía es por qué tiene algún cambio y si no varía o cambia diremos que es constante.



La longitud total de los cables del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #2 cuando se va moviendo.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante

1. Observa el movimiento de las cabinas y responde lo siguiente:

A. ¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #1? _____
¿Qué velocidad le corresponde a la cabina #2? _____

B. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer la cabina #1 en el cable del Teleférico que va de poste a poste? (en m) _____

C. ¿Qué distancia máxima recorre la cabina #2? (en m) _____

D. ¿Qué cabina crees que llegará primero al poste contrario? Y ¿Por qué?

Cabina #1 Cabina #2 _____

O. ¿A partir de qué segundo la cabina #1 supera los 50 m? (Selecciona tu respuesta marcando con una "✓" en el cuadrado (☑))

3 s 12 s 6 s 13 s 11 s No sé

E. ¿A partir de qué segundo la cabina #2 supera los 50 m?

7 s 11.5 s 6 s 7.5 s 3 s No sé

F. Después de que cada cabina inicie su recorrido, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que las cabinas se encuentren en la misma posición, es decir, una enfrente de la otra?

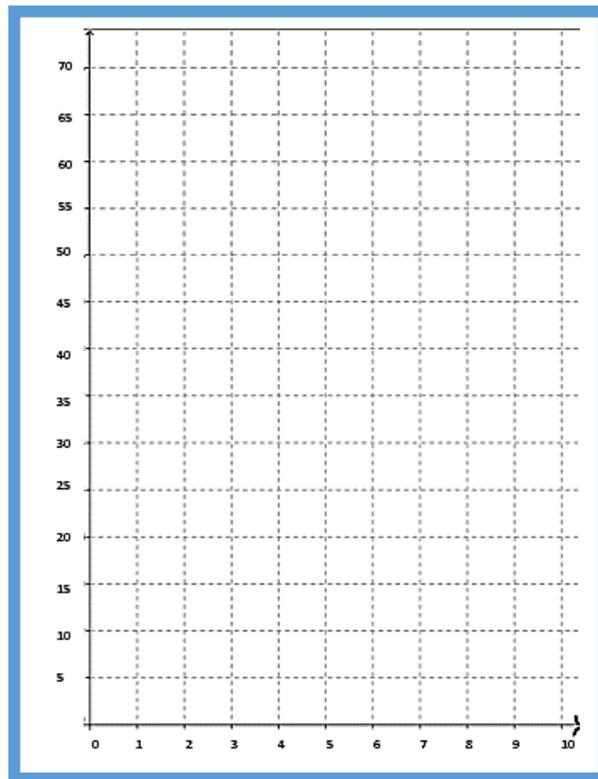
G. ¿La velocidad de la cabina #1, ha cambiado en algún momento?

Si No

H. ¿La velocidad de la cabina #2, ha cambiado en algún momento?

Si No

I. Grafica cómo crees que se comporta el movimiento de la cabina #1 y #2, durante esa hora correspondiente.



J. ¿Qué forma tiene la gráfica que representa el movimiento de la cabina #1?

- K. ¿Qué forma tiene la gráfica que representa el movimiento de la cabina #2?
- L. Con la cabina #1 y #2 en movimiento y una velocidad inicial de _____ m/s y _____ m/s respectivamente, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Cabina #1

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	

Cabina #2

Velocidad (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	

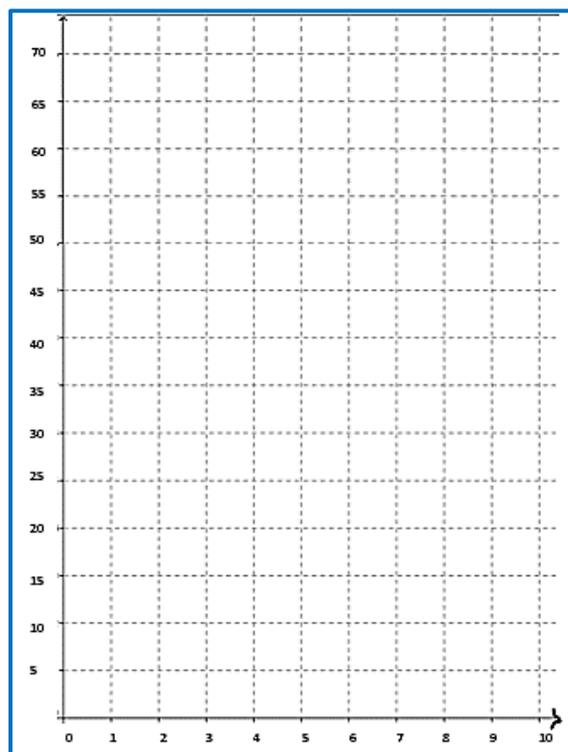
M. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?

N. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #1, cuándo el tiempo va aumentando?

O. ¿Qué le está pasando a la velocidad de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?

P. ¿Qué pasa con la distancia de la cabina #2, cuándo el tiempo va aumentando?

Q. Grafica los valores de tiempo y distancia de las tablas anteriores. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).



R. Compara las gráficas que trazaste con las gráficas que elaboro en la pregunta “1”, ¿Qué diferencias o similitudes puedes encontrar?

S. Ahora compara la gráfica de la cabina #1 con la gráfica de la cabina #2, ¿Qué puedes observar, que diferencias o similitudes puedes encontrar?

T. En la gráfica de la cabina #1

¿De cuánto fue el aumento (en metros) del: punto 1 al punto 2: _____m

Punto 2 al Punto3: _____m

Punto 3 al Punto4: _____m

• •

• •

• •

Punto 8 al punto 9: _____m ?

U. En la gráfica de la cabina #2

¿De cuánto fue el aumento (en metros) del: punto 1 al punto 2: _____m

Punto 2 al Punto3: _____m

Punto 3 al Punto4: _____m

• •

• •

• •

Punto 8 al punto 9: _____m ?

V. La gráfica de la cabina #1 en comparación a la gráfica de la cabina #2:

Crece más rápido Decece más rápido Son iguales

No crece tan rápido No decece tan rápido No sé



Hora de finalización: _____

8.3 Actividad 2/ Parte 2

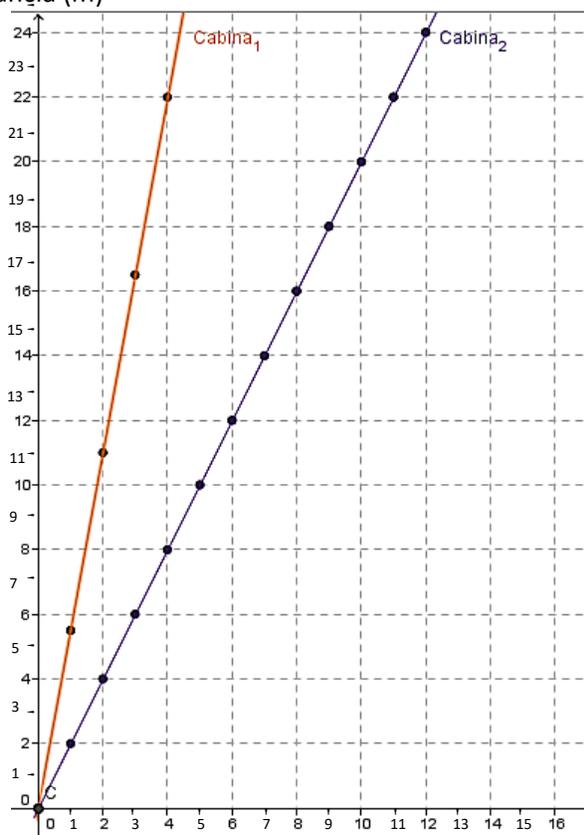
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Nombre: _____ Fecha: _____

Nombre de la institución: _____ Hora de Inicio: _____

W. La siguiente representación gráfica indica la distancia de la cabina #1 y la cabina #2 en el teleférico con respecto al tiempo.

Eje: Distancia (m)



Eje: Tiempo (Seg)

- ¿En qué posición se encuentra la cabina #2 al transcurrir 2 segundos? R: _____
- ¿En qué segundo la cabina #1 llega a la posición 16.5m? R: _____
- ¿En qué segundo la cabina #2 llega a la posición 18m? R: _____
- ¿En qué posición se encuentra la cabina #1 al transcurrir 4 segundos? R: _____
- ¿En qué posición se encontraría la cabina #1 al transcurrir 9 segundos? R: _____
- ¿En qué posición se encontraría la cabina #2 al transcurrir 17 segundos? R: _____

- ¿Qué cabina recorrió mayor distancia en el segundo 4?

- Cabina #1, recorrió: _____ metros
- Cabina #2, recorrió: _____ metros

- ¿Qué cabina recorrió mayor distancia en el segundo 15?

- Cabina #1, recorrió: _____ metros
- Cabina #2, recorrió: _____ metros

- ¿Cree que en cierto momento la distancia de la cabina #2 sea mayor a la distancia de la cabina #1?

- Si No

¿Por qué? _____

- En la gráfica naranja ¿Qué patrón encuentras en las distancias recorridas en metros de la cabina #1?

- En la gráfica morada ¿Qué patrón encuentras en las distancias recorridas en metros de la cabina #2?



Hora de finalización: _____

8.4 Actividad #3

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Gracias por tu ayuda al completar las siguientes actividades, tus respuestas serán de gran valor, te recordamos que toda la información que proporciones será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Por ello te pido que conteste de manera individual, sin ayuda alguna.

Nombre: _____ Fecha: _____

Nombre de la institución: _____ Hora de Inicio: _____

Instrucciones: Para realizar la actividad que se presenta en esta sesión de matemáticas, será necesario utilizar el escenario de Geogebra llamado “teleférico 3”, para abrirlos sigue la siguiente ruta en el explorador de Windows:

Mis documentos/Tercer Grado Grupos B y D / Sesión 3

ACTIVIDAD 3



- A. ¿Qué velocidad inicial lleva la cabina #1?

- B. ¿Qué aceleración lleva cuando está pasando por el poste?
(Selecciona tu respuesta marcando con una “✓” en el cuadrado (☑))
- 1 m/s² 0.06 m/s² 0 m/s² -0.06 m/s²
- C. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?
- Varía Constante
- D. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?
- Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé
- E. ¿Qué pasa con la velocidad de la cabina #1, cuando se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico?
- Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay velocidad No sé

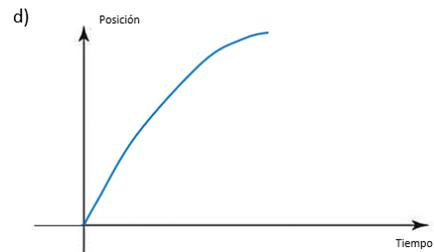
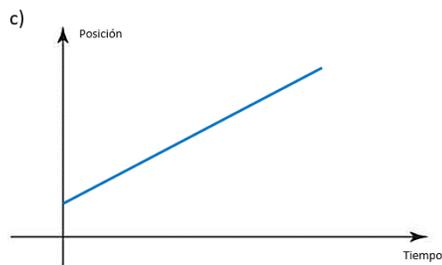
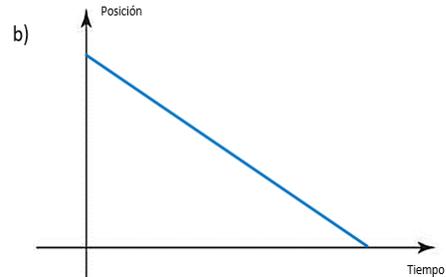
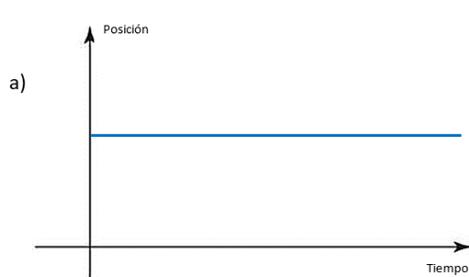
F. ¿Cuánto tiempo tardó la cabina #1 en recorrer los primeros 25.6 m?

- 8 s 12 s 6.6 s 13 s 11.23 s No sé

G. ¿En cuánto tiempo la cabina #1 concluye con el recorrido?

- 13 s 12 s 18s 17s No sé otro (especifique) _____

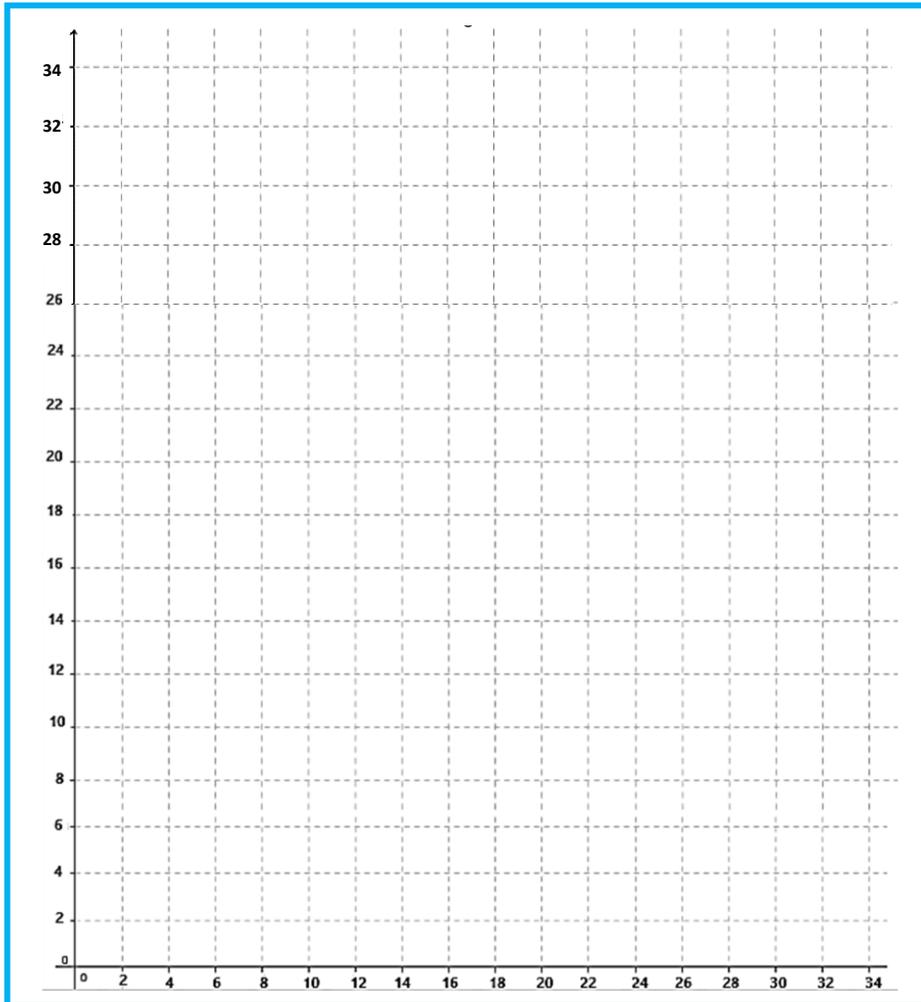
H. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1 de poste a poste, durante esa hora correspondiente.



I. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de _____ m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
	0	
	2	
	4	
	6	
	8	
	10	
	12	
	14	
	16	
	18	
.	.	.
.	.	.
.	.	.
	24	
	28	

- J. Grafica los valores de tiempo y distancia de la tabla anterior. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).



- K. Compara. Tu elección de la gráfica de la pregunta “H”, con la gráfica anterior, ¿Qué diferencias o similitudes puedes encontrar?

L. Completa la siguiente tabla:

EJEMPLO:

Segundo	Distancia recorrida	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
14	32.9	 $2.73 = (35.63 - 32.9)$
15	35.63	

Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
0		
2		
4		
6		
8		
10		

M. ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante?

Varía

Constante



Hora de finalización: _____

8.5 Actividad #4

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Gracias por tu ayuda al completar las siguientes actividades, tus respuestas serán de gran valor, te recordamos que toda la información que proporcionas será utilizada únicamente para conocer cómo se trata el tema. Por ello te pido que contestes de manera individual, sin ayuda alguna.

Nombre: _____ Fecha: _____

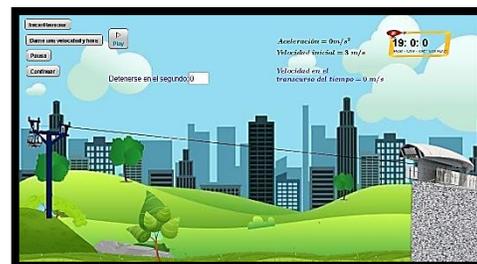
Nombre de la institución: _____ Hora de Inicio: _____

Instrucciones: Para realizar la actividad que se presenta en esta sesión de matemáticas, será necesario utilizar el escenario de Geogebra llamado “teleférico 4”, para abrirlos sigue la siguiente ruta en el explorador de Windows:

Mis documentos/Tercer Grado Grupos B y D / Sesión 4

Actividad 4

- A. ¿Qué aceleración lleva cuando está pasando por el poste?
(Selecciona tu respuesta marcando con una “✓” en el cuadrado (☑))
- 1 m/s^2 0.125 m/s^2 0 m/s^2 -0.125 m/s^2
- B. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?
- Varía Constante
- C. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a la estación por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?
- Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé
- D. Cuando va de bajada la cabina #1, hasta el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
- Positiva Negativa Cero No sé
- E. Cuando va de bajada la cabina #1, después el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
- Positiva Negativa Cero No sé
- F. Cuando va pasando por el poste la cabina #1, ¿cómo es su aceleración?:
- Positiva Negativa Cero No sé
- G. Cuando iba de subida la cabina #1, recuerdas ¿cómo era su aceleración?:
- Positiva Negativa Cero No sé



G. Cuando la aceleración es **negativa**, ¿cómo es la velocidad de la cabina #1 en el transcurso del tiempo?:

- Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

H. Cuando la aceleración es **positiva**, ¿cómo es la velocidad de la cabina #1 en el transcurso del tiempo?:

- Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

I. Cuando la aceleración es **cero**, ¿cómo es la velocidad en el transcurso del tiempo?:

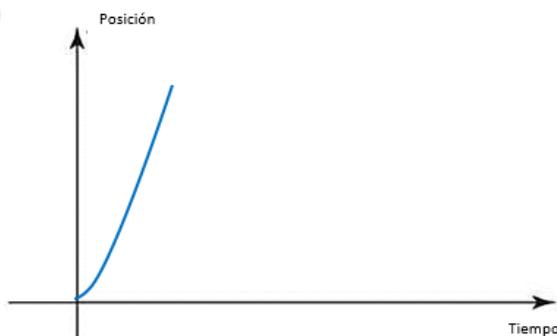
- Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

J. ¿En cuánto tiempo la cabina #1 concluye con el recorrido?

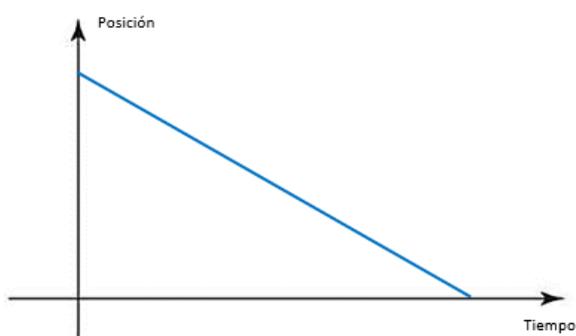
- 13 s 12 s 18s 17s No sé otro (especifique) _____

K. Selecciona la gráfica que creas que corresponde al movimiento de la cabina #1 de poste a poste, durante esa hora correspondiente.

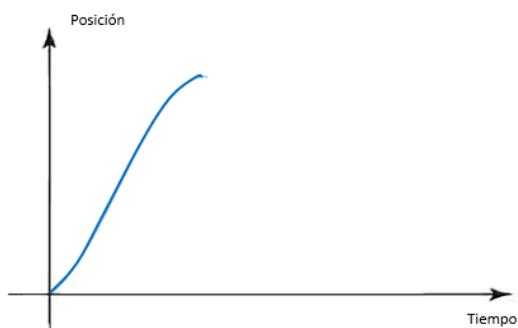
a)



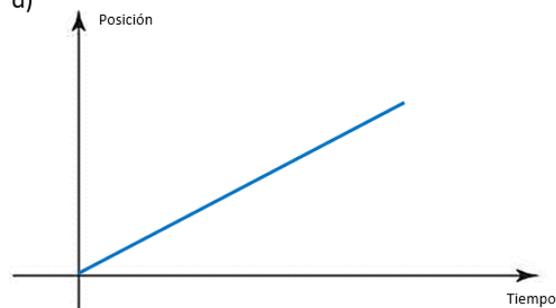
b)



c)



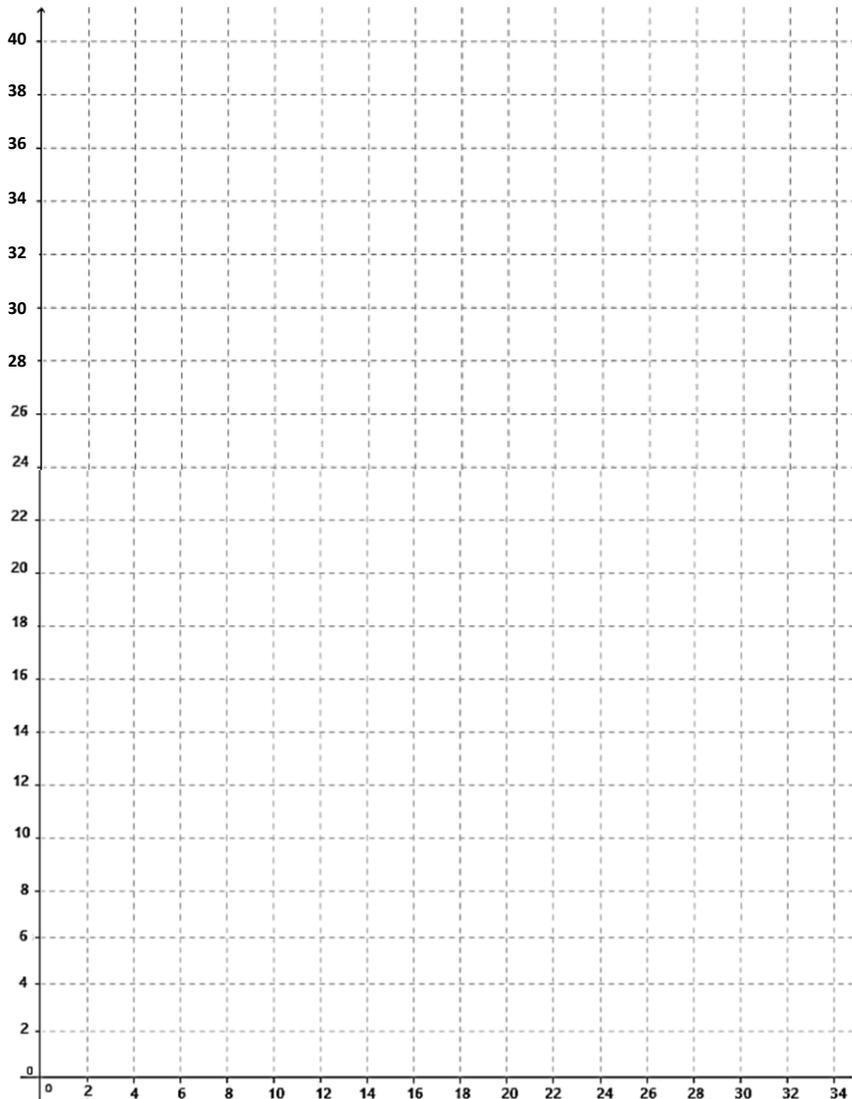
d)



- L. Con la cabina #1 en movimiento y una velocidad inicial de _____ m/s, llena los cuadros vacíos de la siguiente tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo Segundo	Distancia recorrida en metros (m)
0	0	0
1.13	1	1.09
1.25	2	2.34
1.5	4	5.27
1.75	6	
2	8	
2.25	10	16.38
	12	20.37
	14	24.24
	16	27.83
	18	31
.	.	.
.	.	.
.	.	.
	22	35.6
	24	
	26	

M. Grafica los valores de tiempo y distancia de la tabla anterior. (Debes darle un nombre a cada uno de los ejes y etiquetar a cada una de sus representaciones con una letra distinta).



N. Completa la siguiente tabla:

EJEMPLO:

Velocidad en el transcurso del tiempo	Segundo	Distancia recorrida	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
0.7 m/s	14	32.9	 $2.73 = (35.63 - 32.9)$
0.75 m/s	15	35.63	

Completa la siguiente tabla

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
	0	0	
	2	2.34	
	4	5.27	
	6	8.68	
	8	12.43	
	10	16.38	
	12	20.37	
	14	24.24	
	16	27.83	
	18	31	

a) ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante?

- Varía Constante

O. Recordemos la actividad 1, y la tabla de la pregunta h), completa la tabla:

Velocidad en el transcurso del tiempo (m/s)	Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 1 con la distancia del segundo 2)
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		

P. ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante?

- Varía Constante.

Q. A qué se debe que la diferencia entre las distancias sea constante:

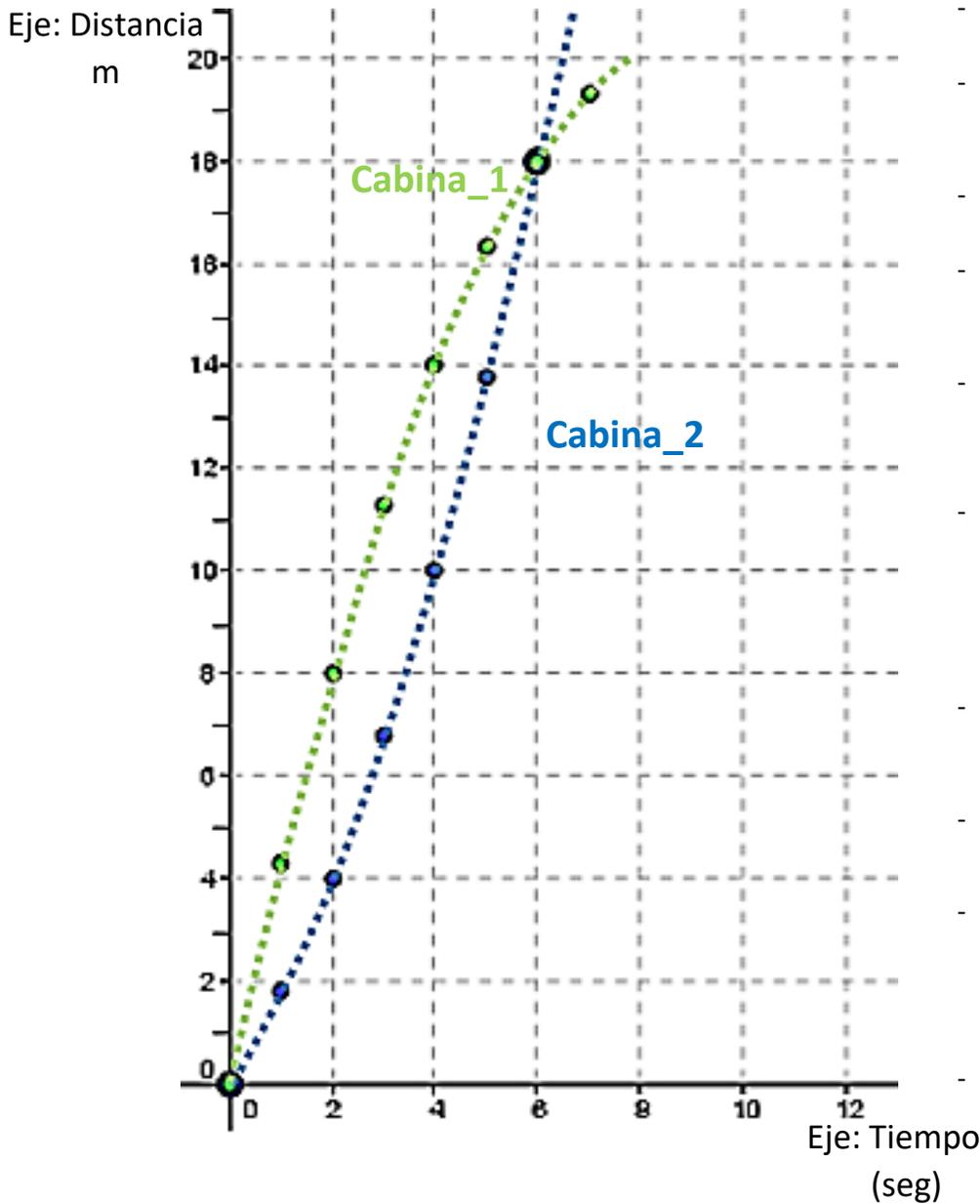
- A que la velocidad sea la misma en todo momento.

- A que la velocidad cambie en todo momento.
- A que la velocidad sea cero en todo momento.

R. A qué se debe que la diferencia entre las distancias varíe:

- A que la velocidad sea la misma en todo momento.
- A que la velocidad cambie en todo momento.
- A que la velocidad sea cero en todo momento.

S. La siguiente representación gráfica indica la distancia de la cabina #1 y la cabina #2 en el teleférico con respecto al tiempo.



- ¿En qué segundo la cabina #1 llega a la posición 11.3m ? R: _____
- ¿En qué posición se encuentra la cabina #1 al transcurrir 2 segundos? R: _____
- ¿En qué segundo la cabina #2 llega a la posición 6.8 m? R: _____
- ¿En qué posición se encuentra la cabina #2 al transcurrir 5 segundos? R: _____
- ¿En qué segundo, tanto la cabina #1 y la cabina #2 recorren la misma distancia? R: _____
- ¿Qué cabina recorrió mayor distancia en el segundo 4?
 - Cabina #1, recorrió: _____ metros
 - Cabina #2, recorrió: _____ metros
- ¿Qué distancia recorrió la cabina #1 entre los segundos 4 y 6? R: _____
- ¿Qué distancia recorrió la cabina #2 entre los segundos 4 y 6? R: _____
- ¿Qué cabina recorrió mayor distancia entre los segundos 4 y 6?
 - Cabina #1
 - Cabina #2
- ¿Qué cabina va más rápido entre los segundos 6 y 8?
 - Cabina #1
 - Cabina #2
 ¿Y por qué? _____

- T. De las siguientes unidades de medida, selecciona aquellas que consideras que son **VARIABLES** (cambia en todo momento), **CONSTANTES** (no cambia en ningún momento) y cuales son **PARÁMETROS** (es decir que cambia en un momento, pero luego se mantiene constante y no vuelve a cambiar)

Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico

Variables	Constantes	Parámetros

- U. De las variables anteriores, relaciona cuales consideras que depende de otra variable y escribe de cual dependen.

Variable independiente		Variable dependiente (que cambia porque hay otra variable que la hace cambiar)
	←-Depende de	

Las gráficas que han leído, interpretado y construido son una **relación funcional** o **relación de dependencia** que hay entre dos variables. A este tipo de relación se le llama **función** porque a cada valor asignado a la **variable independiente** le corresponde un único valor de la otra variable, la cual es dependiente de la primera



Hora de finalización: _____

8.6 Análisis de la secuencia didáctica por cada estudiante

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_1	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✗	✗	NA	✗	✓
			De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	Al tabular y graficar no presenta complejidad, y ya presenta indicios de tener claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas		De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)
		Establece relaciones funcionales			✓		
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Tiene cierta noción, pero no en su totalidad --ver apartados L-N	✓	NA	Aún tiene cierta noción, pero no en su totalidad (Ver D-F)	✗
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	✗	NA	✗
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones	NA	✗	✗	NA	✗

		funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento					
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crecer o decrece	NA	✓	✗ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	✗	✗
	Conclusión		No alcanza el N1	No alcanza el N1 y N2	No alcanza el N1 y N2		Presenta indicios del N1, pero no alcanza el nivel N2 y N3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_5	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✗	✗	NA	✓	✓
			Puede establecer relaciones funcionales de forma simbólica, sin embargo, al extraer los datos y al relacionarlos de forma tabular tiene problemas, por lo tanto, su representación gráfica es acorde a esos datos, pero no presenta problemas al colocar puntos en el plano. sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	Mejoro al establecer relaciones de forma tabular, sin embargo, aún presenta dificultades al graficar y al tener claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas. ----Ver Q		Aún presenta problemas en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado H (se dejó guiar por la trayectoria)	Aún presenta problemas en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado K (se dejó guiar por la trayectoria)
		Establece relaciones funcionales			✗		
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✗	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios	NA	NA	✗	NA	✗

		en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores					
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad--ver U	x	NA	x
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento--Y usa términos de crecer o decrece	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad--ver D y V	x Y NA	NA	x
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	x
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	x	x
	Conclusión		No logra alcanzar el N1	No logra alcanzar el N1 y N2	No logra alcanzar el N1 y N2		Presenta indicios del N1, pero no alcanza el nivel N2 y N3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_6	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Tiene noción, pero no en su totalidad	Tiene noción, pero no en su totalidad	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	x	NA	x
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	✓
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	Tiene noción, pero no en su totalidad	✓ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓

	identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta noción	x
Conclusión		Presenta indicios de superar el N1		Presenta indicios de superar el N1 e indicios para el N2	Supera el N1, presenta indicios del N2	Supera el N1, presenta muy buenos indicios de superar el N2 e presenta algunos comportamientos de M3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_7	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	x	✓	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)-- - extrapolar esos valores	NA	NA	✓	NA	✓
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	✓

		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento- - Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta noción	✘
	Conclusión		Presenta indicios de superar el N1	Supero el N1, y presenta muy buenos indicios de alcanzar N2	Logra alcanzar el N1 y N2	Logra alcanzar el N1,N2 y presenta indicios de AM3	Logra alcanzar el N1,N2 y presenta indicios de AM3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_8	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	presenta indicios	presenta indicios	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	presenta indicios	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	✓	NA	✓
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	✓

		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	presenta indicios	✓ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	presenta indicios	✗
	Conclusión		presenta indicios de superar el N1	presenta indicios de superar el N1 y tiene algunos comportamientos de AM2		Supera N1 y presenta indicios de superar el N2	Logra alcanzar el N1,N2 y presenta indicios de AM3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_10	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Tiene noción, pero no en su totalidad	Tiene noción, pero no en su totalidad	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la	En la parte gráfica presenta noción de lo que significa cada eje. Sin embargo, solo gráfica el comportamiento del	✓	✓	Presenta noción, pero no en su totalidad

			interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	movimiento de la cabina 1.			
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	NA	✗
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	✓
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia	NA	NA	NA	✗	Presenta indicios, pero no en su totalidad

	entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos					
Conclusión		No logra alcanzar el N1	Presenta indicios de lograr N1 y N2	Presenta indicios de lograr N1 y N2		Logra alcanzar N1 y presenta indicios de superar N2. Y presenta comportamientos de la AM3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_11	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	✓	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓, Sin embargo, los valores obtenidos no fueron los esperados, pero tiene indicios de identificar el significado de los ejes en la parte gráfica. En las demás representaciones no tuvo ninguna dificultad de establecer una relación funcional	No tiene claro el significado de los ejes. Y tuvo problemas al graficar	Al parecer hizo uso del escenario de GeoGebra para establecer las relaciones funcionales	Aún no identifica el significado de cada eje	Aún no identifica el significado de cada eje
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)- -- extrapolar esos valores	NA	NA	✗	NA	✗
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✗	NA	✗
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	Presenta indicios, pero no en su totalidad	NA	✗

	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	x
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	x	x
Conclusión			Presenta indicios de superar el N1	Presenta indicios de superar el N1.	Presenta indicios de superar el N1.		Logra el N1

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_13	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Presenta indicios, pero no en su totalidad	Presenta indicios, pero no en su totalidad	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	Presenta indicios, pero no en su totalidad

	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)---extrapolar esos valores	NA	NA	Presenta indicios	NA	Presenta indicios
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	Presenta indicios	NA	Presenta indicios
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓	NA	✗
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✗
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios	✗

	Conclusión	Presenta indicios de superar el N1	Presenta indicios de superar el N1 y tiene comportamientos de AM2	Presenta indicios de superar el N1 y tiene comportamientos de AM2	Presenta indicios de superar el N1 y tiene comportamientos de AM2	Superar el N1 y tiene comportamientos de AM2
--	------------	------------------------------------	---	---	---	--

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
D_15	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Tiene noción, pero no en su totalidad	Tiene noción, pero no en su totalidad	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	✓	✓	✓	De forma tabular y al momento de graficar no presenta ningún problema, sin embargo, no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica - -Ver apartado K (se dejó guiar por la trayectoria)
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta indicios, pero no en su totalidad	Presenta indicios, pero no en su totalidad	NA	✓	Presenta indicios, pero no en su totalidad

	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)---extrapolar esos valores	NA	NA	x	NA	x
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	x	NA	x
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	x	NA	x
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	x
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	x	x
	Conclusión		Presenta comportamientos de la AM1	Presenta comportamientos de la AM1 y AM2	Presenta comportamientos de la AM1 y AM2		Supera N1

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_1	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	✓	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta cierta noción del tipo de variación que está teniendo las magnitudes, pero en lo que respecta al comportamiento de una magnitud al momento de realizar un ajuste (parámetro) tiene dificultad para identificarlo	✓	NA	✓	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	✓	NA	✓

		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	✓
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	✓
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✗
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta cierta noción	Presenta algunos indicios pero no en su totalidad.
	Conclusión		Presenta muy buenos indicios de superar el N1, sin embargo, seguiremos observando su evolución en las otras actividades	Logra N1 y N2 hasta el momento, pero seguiremos observando su evolución en las siguientes actividades	Logra N1 y N2 hasta el momento, pero seguiremos observando su evolución en las siguientes actividades	Sigue mostrando el N1 y N2	Logra el N1 y N2, y presenta algunos indicios de AM3

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2-parte 1	Actividad #2-parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_2	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	Al parecer se confunde un poco cuando varía y es constante cuando analiza dos cabinas a la vez	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	De forma tabular y al momento de graficar presenta comportamientos de establecer relaciones funcionales, sin embargo, debe de reforzarlos, por otro lado, el estudiante no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica -- Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	El estudiante presenta indicios de relacionar las magnitudes de distancia y tiempo, sin embargo, aún debe de reforzarlas	✓	El estudiante presenta indicios de relacionar las magnitudes de distancia y tiempo, sin embargo, aún debe de reforzarlas	Presenta mejoras en establecer relaciones funcionales de forma gráfica.
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✓	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	No completo la actividad

	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)-- - extrapolar esos valores	NA	NA	✗	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✗ ver apartados T y U	✗	NA	No completo la actividad
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- - Y usa términos de crece o decrece	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad, Ver apartados "S" y "V"	Presenta indicios de identificar que gráfica crece más rápido que la otra, presenta una justificación al respecto ver apartado 9	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	No completo la actividad

				No logra alcanzar el N1, pero presenta algunos comportamientos de AM1	No logra alcanzar el N1 y N2, pero presenta algunos comportamientos de AM1 y AM2	No logra alcanzar el N1 y N2, pero presenta algunos comportamientos de AM1 y AM2	No logra alcanzar el N1 y N2, pero presenta algunos comportamientos de AM1 y AM2	No logra alcanzar el N1 y N2, pero presenta algunos comportamientos de AM1 y AM2
	Conclusión							

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_3	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	Al parecer se confunde un poco cuando varía y es constante cuando analiza dos cabinas a la vez	NA	Al parecer aún tiene problemas en identificar cuando una magnitud varía y cuando se mantiene constante	✓ el estudiante logró superar este comportamiento
		Establece relaciones funcionales	✓	✓ Presenta cierta dificultad al momento de graficar los datos de dos tablas distintas.	✓	En la representación gráfica del apartado F el estudiante se dejó guiar por la trayectoria que realizaba la cabina, y no completo el apartado J donde debía de graficar los datos recolectados de forma tabular de distancia y tiempo cuando la velocidad variaba.	El estudiante al establecer relaciones funcionales de forma tabular y gráfica presenta un gran avance, envista que empieza a no dejarse guiar por la trayectoria que realiza la cabina para poder seleccionar la gráfica que represente el movimiento de la cabina

							considerando las magnitudes de distancia y tiempo. (Ver apartado K)	
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta cierta noción del tipo de variación que está teniendo las magnitudes, pero en lo que respecta al comportamiento de una magnitud al momento de variar en todo momento presenta dificultad	✓	NA	NA	No completo el apartado	
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)---extrapolar esos valores		NA	x	NA	No completo el apartado	
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento		NA	No completo la actividad	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad	NA	En el apartado I, el estudiante comienza a identificar que la velocidad en el transcurso de la cabina va aumentando a medida que avanza el tiempo.

		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	No completo la actividad	✓ y NA	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA		No completo la actividad
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	✘	No completo la actividad
	Conclusión		Presenta comportamientos de la AM1, pero no en su totalidad	Presenta comportamientos de la AM1, pero no en su totalidad	Presenta comportamientos de la AM1, pero no en su totalidad	Presenta comportamientos de la AM1, pero no en su totalidad	El estudiante logra alcanzar el N1

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_4	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Presenta indicios, pero no en su totalidad	Aún presenta problemas con identificar cuando una magnitud es variable o constante	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	De forma simbólica y tabular el estudiante no presenta dificultad al establecer relaciones funcionales entre variables sin embargo no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	El estudiante no presenta problemas para establecer relaciones funcionales de forma simbólica y tabular, sin embargo, en el apartado "Q" en donde se le solicita que debe graficar los valores de tiempo y distancia, presento problemas debido a que ambos ejes los	Presenta indicios, pero no en su totalidad de extraer los datos de la gráfica.	Muestra mejorías al establecer relaciones funcionales de forma gráfica	✓

				utiliza como distancia, sin establecer una relación entre distancia y tiempo.			
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✓	NA	✓	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)---extrapolar esos valores	NA	NA	✗ identifica el patrón de crecimiento sin embargo no logra extrapolar	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	No completo la actividad
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho	NA	✓	✓ Y NA	NA	No completo la actividad

		comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece					
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad	No completo la actividad
	Conclusión		El estudiante presenta algunos comportamientos de la AM1	Presenta indicios de superar el N1 Y N2	Presenta indicios de superar el N1 Y N2	Presenta indicios de superar el N1 Y N2	Logra el N1 y presenta comportamientos de AM2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_5	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Presenta indicios, pero no en su totalidad	Presenta indicios, pero no en su totalidad	NA	✓	✓

		Establece relaciones funcionales	✓	✓ pero solo gráfico para una cabina	✓	✓ no completo el apartado "K"	El estudiante al seleccionar la gráfica que modela a la situación presentada del teleférico se dejó guiar por la trayectoria que hace la cabina, en lugar de tratar de comprender qué relación hay entre las magnitudes.
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta dificultad en identificar que magnitudes cambian después de realizar un ajuste (parámetros)	✓	NA	✓	No completo la actividad
AM2		deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	A pesar de encontrar el patrón de aumento el estudiante no logra extrapolar valores, que no son visibles	NA	No completo la actividad

					de forma gráfica		
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad, dado que confundió la diferencia de aumento de punto a punto ...con la distancia recorrida hasta ese punto	✓	NA	No completo la actividad
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	No completo la actividad

	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	No completo la actividad
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	No completo la actividad
	Conclusión		Presenta indicios de superar el N1	Presenta indicios de superar el N1 y N2	Presenta indicios de superar el N1 y N2	Logra el N1 y presenta comportamientos de AM2	Logra el N1 y presenta comportamientos de AM2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_6	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✗	✗	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✓

		Establece relaciones funcionales	✓	Presenta problemas en establecer de forma gráfica relaciones funcionales	✓	Presento un avance al graficar datos.	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✗	✗	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	✓	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✓	NA	No completo la actividad

		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✘	✓ Y NA	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	Presenta indicios, pero no en su totalidad
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	✘	No completo la actividad
	Conclusión		Presenta algunos comportamientos de AM1	Presenta algunos comportamientos de AM1	Presenta comportamientos de superar N1 Y N2	Presenta comportamientos de superar N1 Y N2	Presenta comportamientos de superar N1 Y N2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_7	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	✓ considera que el tiempo es constante	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta cierta dificultad en identificar que magnitudes presentan un cambio distinto de variación, luego de emplear un ajuste (identificar que magnitudes son parámetros)	✓	NA	✓	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	✓	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de	NA	✓	✓	NA	No completo la actividad

		distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento					
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✘
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios	✘
	Conclusión		Presenta indicios de superar el N1	Supera el N1 y presenta comportamientos de AM2	Supera el N1 y N2	Supera el N1 y N2	Supera el N1 y N2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_8	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓ considera a la posición como una magnitud que se mantiene constante	✓ considera a la posición como una magnitud que se mantiene constante	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓ se dejó guiar por la trayectoria que realiza la cabina	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	A pesar de encontrar el patrón de aumento no logra extrapolar valores	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--	NA	✓	✓	NA	No completo la actividad

		encontrar el patrón de crecimiento					
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✓ Y NA	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	x
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios	No completo la actividad
	Conclusión		Logra el N1	Logra el N1 y presenta comportamientos de N2	Logra el N1 y presenta comportamientos de N2	Logra el N1 y presenta comportamientos de N2	Logra el N1 y presenta comportamientos de N2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_9	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	Presenta indicios, pero no en su totalidad	✗	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	De forma tabular y al momento de graficar presenta comportamientos de establecer relaciones funcionales, sin embargo, debe de reforzarlos, por otro lado el estudiante no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)	✓	✓	✓ aún sigue teniendo problemas con abstraer la forma de la gráfica ya que aún se deja guiar por la trayectoria que realiza la cabina en el teleférico	✓ aún sigue teniendo problemas con abstraer la forma de la gráfica ya que aún se deja guiar por la trayectoria que realiza la cabina en el teleférico

		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Tiene problemas con identificar que magnitudes presentan el tipo de variación-parámetro	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad	NA	✓	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)- -- extrapolar esos valores	NA	NA	✘	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad	NA	No completo la actividad

		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	✗ Y NA	NA	No completo la actividad
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	Presenta indicios	✗
	Conclusión		Presenta comportamientos de AM1	Presenta comportamientos de AM1 y AM2			

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_11	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✓	✓ aunque considero que el tiempo es constante	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	✓	✓ La gráfica que bosquejo en el apartado I, hace referencia a la trayectoria que siguió la cabina, en lugar de una gráfica que hiciera referencia al comportamiento de la cabina cuando va en movimiento, respecto a distancia y tiempo.	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	✓	✓	NA	✓	No completo la actividad

	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	A pesar de encontrar el patrón de aumento no logra extrapolar valores	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	No completo la actividad
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	✓	× Y NA	NA	✓

	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✓
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	✘	No completo la actividad
	Conclusión		Logra el N1	Logra N1 y presenta comportamientos de AM2			

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_12	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	<p>✓ Considera el tiempo como una magnitud constante</p> <p>De forma simbólica y tabular el estudiante no presenta dificultad al establecer relaciones funcionales entre variables sin embargo no tiene claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas, dado que no puede abstraer la forma de la gráfica --Ver apartado F (se dejó guiar por la trayectoria)</p>	<p>✓ Considera la posición como una magnitud constante</p>	NA	✓	✓
		Establece relaciones funcionales	<p>(se dejó guiar por la trayectoria)</p> <p>Presenta cierta dificultad en identificar que magnitudes presentan un cambio distinto de variación, luego de emplear un ajuste</p>	✓	✓	✓	✓
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	(identificar que magnitudes son parámetros)	✓	NA	✓	No completo la actividad

AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	Presenta cierta noción	NA	No completo la actividad
	las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	✓	✓	NA	No completo la actividad
	identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o decrece	NA	Presenta cierta noción	✓ Y NA	NA	No completo la actividad
AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se	NA	NA	NA	NA	✓

comporten de cierta forma en determinados intervalos

identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos

Conclusión

NA

Presenta comportamientos de la AM1

NA
Supera el N1 y presenta comportamientos de AM2

NA
Supera el N1 y presenta comportamientos de AM2

Presenta cierta noción
Supera el N1 y presenta comportamientos de AM2

No completo la actividad
Supera el N1 y presenta comportamientos de AM2

Estudiante	AM	Comportamientos	Actividad #1	Actividad #2- parte 1	Actividad #2- parte 2	Actividad #3	Actividad #4
B_13	AM1	Identificar magnitudes	✓	✓	NA	✓	✓
		Identifica cuando varía o es constante	✗	Presenta cierta noción	NA	Presenta cierta noción	Presenta cierta noción
		Establece relaciones funcionales	El estudiante de forma gráfica presenta problemas y no comprende esa relación de dependencia	El estudiante de forma gráfica presenta problemas y no comprende esa relación de dependencia	✓	El estudiante de forma gráfica presenta problemas y no comprende esa relación de dependencia	Presenta cierta mejoría al graficar puntos de los datos obtenidos de forma tabular.

			entre dos magnitudes	entre dos magnitudes		entre dos magnitudes	
		Identifica el tipo de variación de las magnitudes	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad.	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad.	NA	Presenta cierta noción, pero no en su totalidad.	No completo la actividad
	AM2	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	NA	NA	x	NA	No completo la actividad
		las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	NA	x	x	NA	No completo la actividad
		identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa	NA	x	x Y NA	NA	No completo la actividad

		términos de crece o decrece					
	AM3	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	NA	NA	NA	NA	✘
		identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos	NA	NA	NA	✘	No completo la actividad
	Conclusión		Presenta algunos comportamientos de la AM1				

8.7 Porcentaje de logro de los comportamientos de las AM por cada estudiante

Estudiante	Identificar magnitudes	Identifica cuando varía o es constante	Establece relaciones funcionales			Identifica el tipo de variación de las magnitudes	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolar esos valores	las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo--encontrar el patrón de crecimiento	identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento--Y usa términos de crece o decrece	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos
			Simbólica	tabular	gráfica						
D_1	100%	25%	100%	100%	40%	25%	0%	0%	67%	100%	0%
D_5	100%	50%	100%	75%	20%	75%	0%	0%	0%	0%	0%
D_6	100%	75%	100%	100%	100%	100%	0%	100%	67%	100%	0%
D_7	100%	75%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	0%
D_8	100%	75%	100%	100%	100%	88%	100%	100%	67%	100%	0%
D_10	100%	75%	100%	100%	60%	100%	0%	100%	100%	100%	0%
D_11	100%	100%	100%	100%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%
D_13	100%	75%	100%	100%	100%	75%	25%	33%	67%	0%	0%
D_15	100%	75%	100%	100%	60%	50%	0%	33%	33%	0%	0%

Estudiante	Identificar magnitudes	Identifica cuando varía o es constante	Establece relaciones funcionales			Identifica el tipo de variación de las magnitudes	deberá identificar la dirección del cambio; i. e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo)--- extrapolando esos valores	las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo-- encontrar el patrón de crecimiento	identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento-- Y usa términos de crece o	Identifica que ciertas magnitudes influyen en otras y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos	identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos
			Simbólica	tabular	gráfica						
B_1	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	50.00%	100.00%	100.00%	100.00%	0.00%	25.00%
B_2	100.00%	75.00%	100.00%	100.00%	25.00%	37.50%	0.00%	0.00%	25.00%	100.00%	0.00%
B_3	100.00%	75.00%	100.00%	100.00%	60.00%	41.67%	0.00%	12.50%	33.33%	0.00%	0.00%
B_4	100.00%	57.14%	100.00%	100.00%	50.00%	66.67%	0.00%	66.67%	66.67%	12.50%	12.50%
B_5	100.00%	57.14%	100.00%	100.00%	70.00%	50.00%	0.00%	40.00%	66.67%	0.00%	12.50%
B_6	100.00%	12.50%	100.00%	100.00%	65.00%	12.50%	50.00%	37.50%	33.33%	12.50%	0.00%
B_7	100.00%	87.50%	100.00%	100.00%	100.00%	50.00%	65.00%	83.33%	83.33%	0.00%	0.00%
B_8	100.00%	62.50%	100.00%	100.00%	80.00%	75.00%	0.00%	66.67%	66.67%	0.00%	0.00%
B_9	100.00%	50.00%	100.00%	100.00%	60.00%	37.50%	0.00%	25.00%	33.33%	12.50%	0.00%
B_11	100.00%	87.50%	100.00%	100.00%	90.00%	75.00%	0.00%	66.67%	66.67%	100.00%	0.00%
B_12	100.00%	75.00%	100.00%	100.00%	80.00%	62.50%	12.50%	66.67%	33.33%	100.00%	0.00%
B_13	100.00%	37.50%	100.00%	100.00%	40.00%	37.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante D_1	65%	0%	22%	0%	50%	0%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante D_5	70%		0%	0%	0%	0%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante D_6	96%	96%	56%	0%	50%	0%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante D_7	96%	96%	100%	100%	50%	0%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante D_8	94%	94%	89%	89%	50%	0%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante D_10	89%	89%	67%		50%	

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante D_11	83%	83%	0%		0%	

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante D_13	92%	92%	42%		0%	

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante D_15	81%	81%	22%		0%	

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_1	91.67%	91.67%	100.00%	100.00%	12.50%	0.00%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_2	72.92%		8.33%	0%	50.00%	0%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_3	79.44%	79.44%	15.28%	0.00%	0.00%	0.00%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_4	78.97%	78.97%	44.44%	0.00%	12.50%	0.00%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_5	79.52%	79.52%	35.56%	0%		0%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_6	65.00%	0.00%	40.28%	0.00%	6.25%	0.00%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_7	89.58%	83.75%	77.22%	55.56%	0.00%	0.00%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante B_8	86.25%	86.25%	44.44%		0.00%	0%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante B_9	74.58%	0.00%	19.44%	0.00%	6.25%	0.00%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante B_11	92.08%	92.08%	44.44%	0.00%	50.00%	0.00%

	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante						
Estudiante B_12	86.25%	86.25%	37.50%	0.00%	50.00%	0.00%

Estudiante	Algunos comportamientos de AM1	Nivel 1	Algunos comportamientos de AM2	Nivel 2	Algunos comportamientos de AM3	Nivel 3
Estudiante B_13	69.17%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

8.8 Informe completo de investigación aceptado por el PME- NA 44 del 2022

PROMOVIENDO EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON APOYO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Helen Mariel Pérez Martínez
Cinvestav-IPN
helen.perez@cinvestav.mx

Carlos A. Cuevas-Vallejo
Cinvestav-IPN
ccuevas@cinvestav.mx

Erasmus Islas Ortiz
Cinvestav-IPN
erasmo.islas@cinvestav.mx

José Orozco-Santiago
Benemérita Universidad
Autónoma de Puebla
jose.orozco@cfm.buap.mx

En este artículo presentamos el desarrollo de una investigación sobre la promoción del razonamiento covariacional en estudiantes de secundaria (14-15 años) en México. El estudio consiste en el diseño y la aplicación de una secuencia de actividades didácticas que simulan de forma virtual una situación real. Las actividades se organizan mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje con apoyo de la tecnología digital y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage. Las actividades se evaluaron de acuerdo con los niveles de covariación propuestos por Carlson y colegas, categorizando los logros y las dificultades de los estudiantes para cada nivel de comprensión. Los resultados muestran que las actividades favorecen el progreso de los estudiantes al transitar de la situación de contexto hacia las diversas representaciones logrando establecer la relación entre las variables e identificar su dependencia funcional.

Palabras clave: Educación Secundaria, Tecnología, Álgebra y pensamiento algebraico.

Introducción

El pensamiento variacional ha sido interpretado como una forma de modelación de la covariación entre cantidades y magnitudes, de acuerdo con Vasco (2003):

una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6)

En diversas investigaciones (Carlson et al. 2002; García, 2016; Tompson y Carlson, 2017), se ha encontrado que el concepto de covariación entre variables conduce al concepto de función, debido a que la relación de covariación con frecuencia se expresa como una relación funcional. A pesar de estar presente desde el álgebra elemental hasta el cálculo, sigue siendo un tema que es una fuente de dificultades para los estudiantes; lo anterior debido a que no logran percibir y relacionar los patrones que surgen entre las cantidades involucradas en las diferentes situaciones matemáticas que se les presentan. Incluso hay estudios, como el de Aldon y Panero (2020), que

han reportado casos donde la interpretación de la situación matemática propuesta al analizar las variables implicadas, los estudiantes confunden una gráfica con la trayectoria de un objeto en movimiento, de lo cual se infiere una falta de claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas.

Dada esa problemática, algunos estudios, como el de Vasco (2006), recomiendan que la enseñanza de la variación debe darse en una diversidad de contextos que representen para el estudiante problemas situacionales reales, que se adapten a los objetivos de aprendizaje propuestos y conduzcan al concepto de función. Sin embargo, estos contextos deben contar con ciertas características que posibiliten el alcance de dichos objetivos, tal como lo menciona Hitt (2021), las características del entorno que pueden contribuir al desarrollo de la comprensión conceptual incluyen los enfoques de los profesores, los tipos de tareas que se dan a los alumnos y el uso de una variedad de representaciones.

Por su parte, Ávila (2018) advierte de la importancia del pensamiento variacional para el concepto de función real, ya que “se observa la necesidad de establecer actividades en el aula de clases, en las que se planteen alternativas escolares que promuevan el reconocimiento de la variación en situaciones en las cuales el concepto de función está presente” (p. 198).

En nuestro estudio abordamos actividades desde un enfoque variacional-covariacional con el apoyo de la tecnología digital. En los estándares del NCTM (2000) se menciona que la tecnología enriquece la gama y la calidad de las investigaciones, ya que permite ver las ideas matemáticas desde múltiples perspectivas. El aprendizaje de los alumnos se ve favorecido por la retroalimentación que la tecnología proporciona, además ofrece a los profesores opciones para adaptar la enseñanza a las necesidades especiales de los alumnos.

Marco referencial

Pensamiento variacional

Dado que Moore y Carlson (2012) reportan la importancia del razonamiento variacional y covariacional para la capacidad de los estudiantes de modelar situaciones dinámicas, la postura que adoptamos con respecto al pensamiento variacional corresponde a la de Maury y colegas (2012), la cual se complementa con la de Moore y Carlson, ya que conciben a este pensamiento como la capacidad de identificar fenómenos de variación y cambio, para interpretarlos, describirlos, cuantificarlos, modelarlos, transformarlos y predecir sus consecuencias. Desarrollar el pensamiento variacional permite a los estudiantes identificar de manera natural fenómenos de variación y cambio; y que sean capaces de modelarlos y transformarlos, lo que contribuirá a desarrollar procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

Considerando que el estudio tiene como parte de su trayectoria de aprendizaje involucrar el análisis de la coordinación y la relación funcional entre variables, Asumimos como uno de sus ejes centrales *el razonamiento covariacional* el cual es definido por Carlson et al. (2002) como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p.357).

La propuesta de Carlson y colegas consiste en el marco de las acciones mentales, el cual proporciona una taxonomía para clasificar y analizar los comportamientos de los estudiantes al abordar actividades de covariación. De acuerdo con los autores, son cinco niveles de desarrollo;

sin embargo, para los fines de esta investigación y considerando el nivel académico, las actividades se diseñaron de acuerdo con los tres primeros niveles: Nivel 1 (N1), Coordinación; Nivel 2 (N2), Dirección y Nivel 3 (N3), Coordinación Cuantitativa. Estos niveles se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas en imágenes.

Didáctica Cuevas y Pluvinage

Se considera la implementación de este marco didáctico dado que establece una ingeniería didáctica para la planeación de un programa de matemáticas en un nivel post-elemental; proponiendo principios didácticos que guían el diseño de tareas; por ejemplo, iniciar las actividades mediante un problema conceptualmente rico y de interés para el estudiante, en donde sea él quien lo resuelva, y una vez resuelto el problema se debe verificar su respuesta. Permitiendo al estudiante ser un agente de acción y conduciéndolo de manera gradual hacia el concepto matemático (Cuevas y Pluvinage, 2003).

Objetivo

Nuestro objetivo es el diseño de una secuencia didáctica que promueva la comprensión de los procesos de variación-covariación, como antecedente para el concepto de función en estudiantes de secundaria (14-15 años). Para lograrlo se proponen actividades en entornos didácticos digitales, los cuales abordan acciones mentales que estén ligados al reconocimiento de las variables y las relaciones entre ellas. Por medio de estas actividades se pretende identificar qué nivel de covariación logran alcanzar los estudiantes al interactuar con modelos matemáticos que le permitan interpretar, predecir, describir y explicar situaciones de funciones, tanto lineales como no lineales. De esta manera, podremos indagar acerca de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, categorizándolas y asociándolas a cada nivel de covariación.

Pregunta de investigación

¿Qué niveles de razonamiento covariacional logran alcanzar los estudiantes al interactuar con los escenarios diseñados para situaciones de covariación de funciones lineales y no lineales?

Metodología

Este estudio se desarrolla mediante una investigación basada en diseño (IBD) propuesta por (Bakker, 2018), la cual consiste en las fases de preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis de resultados. Para el diseño de la secuencia de actividades, utilizamos una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage.

Fase 1: Preparación y diseño

El papel de juega la tecnología en este estudio es como medio de apoyo para la simulación de nuestro contexto de variación y covariación. El contexto que se utiliza para llevar a cabo cada actividad consiste en simular el trayecto de un teleférico, en donde se le solicita al estudiante analizar el movimiento de las cabinas en distintos tramos del recorrido.

A continuación, describimos el objetivo de cada actividad:

Actividad #1. Para esta actividad se toma en cuenta la acción mental uno (AM1), considerando la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra, es decir, en este caso se atiende si el estudiante transita por un proceso en donde primero trate de identificar las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno: constantes, parámetros y variables. Una vez que han

identificado cuáles magnitudes varían y cuáles se mantienen constantes, se espera que los estudiantes establezcan una relación funcional que involucre a las magnitudes mediante diferentes formas de representación (simbólica, tabular y gráfica) (ver figura 1a).

Actividad #2 parte 1. En esta actividad se toma en cuenta la acción mental dos (AM2), en la que se considera la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable; es decir, se observa si puede identificar la dirección del cambio, si este presenta un crecimiento o un decrecimiento en el valor de salida, mientras se consideran los cambios en el valor de entrada (ver figura 1b).

Actividad #2-parte 2. En esta actividad consideramos el cuarto principio de la didáctica Cuevas-Pluvilage: intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.

Se implementa esta actividad con el fin de poder observar si los estudiantes, al proporcionarles una representación gráfica, pueden presentar comportamientos de la AM1 (coordinación de las dos variables) y comportamientos de la AM2 (identificar que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento)

Actividad #3 y #4. Estas actividades se enfocan en la acción mental tres (AM3), en la cuantificación del cambio. Se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio en la variable dependiente. En este caso, el estudiante debe identificar el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grande) o desacelerado (cada vez más pequeño) (ver figura 1c y 1d).

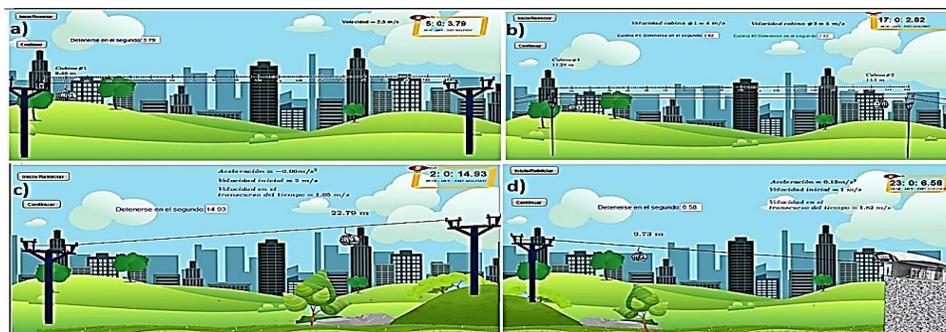


Figura 1. Escenarios empleados en cada actividad

Para el contexto de este estudio realizamos una adaptación de los niveles de covariación de Carlson et al. (2002), los descriptores correspondientes se muestran a continuación.

Tabla1. Descriptores de las acciones mentales utilizados para la evaluación

Nivel	Descripción	Comportamiento
Nivel 1 (N1) La Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental	El estudiante identifica diferentes magnitudes involucradas en el contexto del teleférico (tiempo-horas, tiempo-segundos, distancia, velocidad, altura), clasificándolas en constante, parámetro o

	de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)	variable. Una vez que identifica qué magnitudes varían y cuáles se mantienen constantes, el estudiante establece una relación funcional que las involucra mediante distintas formas de representación (simbólica, tabular o gráfica), las cuales modelan el recorrido de una cabina en un tramo del teleférico.
Nivel 2 (N2) La Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.	Además de que el estudiante muestre el Nivel 1, debe identificar la dirección del cambio; i.e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo). Al analizar las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo. Posteriormente debe identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento.
Nivel 3 (N3) Cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.	El estudiante identifica que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos. Considerando qué magnitudes hacen que se comporten de esa manera y su forma de comportarse (en nuestro caso que consideren que está pasando con la aceleración y la velocidad en ese momento).

Fase 2: Experimento de enseñanza

La investigación se realizó con 56 estudiantes (14-15 años) en dos grupos en México. De los cuales consideramos 21 estudiantes, que fueron los que completaron todas las actividades. Cada estudiante contaba con una computadora, hojas impresas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG), y escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI). La THA está conformada por cuatro actividades, las cuales corresponden a cuatro sesiones de 50 minutos cada una, al finalizar cada sesión los estudiantes entregaban las HEAG y se discutían grupalmente sus respuestas.

Resultados

En este artículo presentamos los resultados de un estudiante con el seudónimo de Kenny, el cual fue seleccionado aleatoriamente de la muestra y nos enfocaremos en hacer una evaluación detallada de su evolución en los niveles de covariación durante las actividades presentadas. El caso de Kenny es un ejemplo de cómo se llevó a cabo el análisis para cada estudiante, reportar los resultados de los 21 estudiantes corresponde a un trabajo posterior a este informe.

Actividad #1:

En esta primera actividad, Kenny logró parcialmente alcanzar el nivel 1 (AM1), debido a que no logró identificar que la magnitud del cable no varía (ver figura 2a), también mostraba dificultades para identificar qué tipo de variación presentaban algunas magnitudes (ver figura 2b)

En lo que respecta al comportamiento de establecer una relación funcional de forma simbólica, tabular y gráfica, no presenta dificultad.

a)

La longitud total del cable del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante

b)

L. ¿Qué valores consideras que son necesarias, para poder realizar la representación del recorrido de la cabina #1, durante esa hora correspondiente? Y ¿Por qué?

Velocidad y tiempo Distancia y tiempo
 Altura y tiempo Tamaño de la cabina y distancia
Por que son las mas importantes para esto

M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)

Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
 tiempo-segundos

N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)

Velocidad tiempo-hora distancia altura tamaño de la cabina No sé
 tiempo-segundos

Figura 2. Respuesta de Kenny a la actividad #1

Actividad #2-parte 1 y 2:

Kenny presenta pequeñas mejoras en el comportamiento de la AM1, al identificar cuáles magnitudes varían o cuáles se mantienen constantes (ver figura 3a). También presenta un progreso en identificar magnitudes según su tipo de variación. El comportamiento de establecer una relación funcional haciendo uso de diferentes formas de representación aún sigue presente, sin embargo, notamos que al solicitarle que tratara de abstraer la forma de la gráfica del comportamiento del fenómeno que estaba observando (el movimiento de dos cabinas durante su recorrido por el teleférico), Kenny opta por colocar puntos en el plano cartesiano (ver figura 3b), lo cual muestra que precisó de valores para poder realizar esa representación gráfica. Por lo tanto, Kenny ha mostrado indicios de lograr el nivel 1.

a)

La longitud total de los cables del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #2.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	<input checked="" type="checkbox"/> Varía	<input type="checkbox"/> Constante
La posición que tiene la cabina #2 cuando se va moviendo.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #2.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
Los soportes del teleférico.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante
El tamaño de la cabina #1.	<input type="checkbox"/> Varía	<input checked="" type="checkbox"/> Constante

b)

I. Grafica cómo crees que se comporta el movimiento de la cabina #1 y #2, durante esa hora correspondiente.

J. ¿Qué forma tiene la gráfica que representa el movimiento de la cabina #1?
de forma recta

K. ¿Qué forma tiene la gráfica que representa el movimiento de la cabina #2?
de forma curvada

Figura 3. Respuesta de Kenny a la actividad #2-parte 1

Con respecto a los comportamientos de la AM2, notamos que Kenny logra extrapolar y predecir la distancia que recorrerá la cabina en un determinado momento, el cual no es visible de forma gráfica (ver figura 4b, apartado b_1). En las actividades #2-parte 1, apartado T y U (ver figura 4a) y en la actividad #2-parte 2 (ver figura 4c), Kenny logra identificar el patrón de crecimiento con el apoyo de las gráficas, confirmamos lo anterior a pesar de que en el ítem C_1 (ver figura 4c) invierte el orden de las respuestas. Por lo mostrado en las preguntas b_1 y b_2 (figura 4b) es claro que solo tuvo una confusión al intercambiar la línea entre cabina #1 y cabina #2.

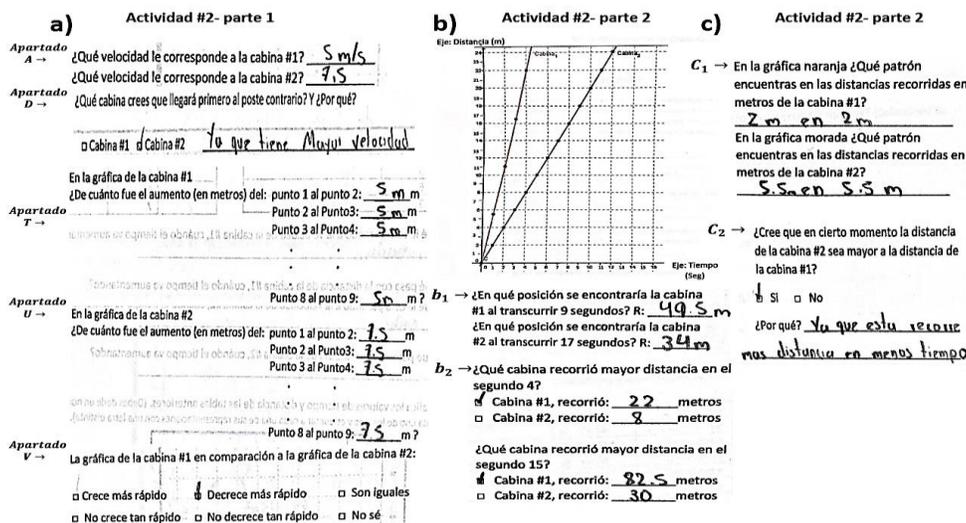


Figura 4. Respuesta de Kenny a la actividad #2-parte 1 y 2

Considerando la confusión de Kenny en la línea de la respuesta C_1 (ver figura 4c), consideramos como correcta la respuesta C_2 (ver figura 4c), puesto que es secuencial con la respuesta C_1 , por lo tanto, se observa que tanto la figura 4a como la figura 4c avalan que Kenny identifica que una de las magnitudes hace que otra presente cambios de aumento o disminución (ver figura 4a - apartados A y D y 4c-apartado C_2).

Kenny presenta dificultades al tratar de seleccionar el comportamiento de una gráfica, ya que, comprobamos que Kenny no reconoce los términos “crece o decrece más rápido” (ver figura 4a, apartado V). Podemos concluir en esta etapa que Kenny, presenta indicios de poder alcanzar el Nivel 2.

Actividad #3 y #4:

La evolución que ha tenido Kenny con respecto a los comportamientos previos que presentaban dificultad en la AM1, se puede observar la actividad #3 apartados C, D y E (ver figura 5a), donde pudo identificar correctamente el tipo de variación que presentaban ciertas magnitudes en determinados momentos del recorrido de la cabina, también observamos en la actividad #4 (ver figura 5b), que Kenny presenta un comportamiento que le permite identificar las magnitudes y clasificarlas en: constante, parámetro o variable; e incluso logra determinar que variables son dependientes de otras.

a)

C. La velocidad de la cabina #1, cuando está pasando por el poste, varía o es constante?
 Varía Constante

D. Cuando la cabina #1 se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico, ¿qué le pasa a su aceleración?
 Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay aceleración No sé

E. ¿Qué pasa con la velocidad de la cabina #1, cuando se va moviendo de poste a poste por el cable del teleférico?
 Cambió Es la misma Varía en todo momento No hay velocidad No sé

b)

Altura del poste, Tiempo, Velocidad inicial, Distancia, Aceleración, Velocidad en el transcurso del tiempo, La longitud total del cable del teleférico

Variables	Constantes	Parámetros
tiempo Distancia velocidad en el transcurso del tiempo	Altura de poste Aceleración La longitud total del cable del teleférico	Velocidad inicial

U. De las variables anteriores, relaciona cuales consideras que depende de otra variable y escribe de cual dependen.

Variable independiente	Variable dependiente (que cambia porque hay otra variable que la hace cambiar)
tiempo	← Depende de Distancia Velocidad

Figura 5: Respuesta de Kenny a la actividad #3 y #4

Otro Progreso de Kenny con respecto a los comportamientos de AM2 es que demuestra estar más familiarizado con las expresiones “crece o decrece” y lo que implica cada una de ellas (ver figura 6a). Cabe destacar que aún sigue manteniendo los demás comportamientos de la AM2, anteriormente descritos en los resultados de la Actividad #2-parte 1y 2 (ver figura 6b)

a)

G. Cuando la aceleración es negativa, ¿cómo es la velocidad de la cabina #1 en el transcurso del tiempo?
 Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

H. Cuando la aceleración es positiva, ¿cómo es la velocidad de la cabina #1 en el transcurso del tiempo?
 Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

I. Cuando la aceleración es cero, ¿cómo es la velocidad en el transcurso del tiempo?
 Creciente Decreciente Es la misma (no cambia) No sé

b)

¿Qué cabina recorrió mayor distancia en el segundo 4?
 Cabina #1, recorrió: 14 metros
 Cabina #2, recorrió: 10 metros

Figura 6: Respuesta de Kenny a la actividad #4

Con todo lo expresado anteriormente podemos afirmar que Kenny presenta los comportamientos necesarios de AM1 y AM2 para poder ubicarlo en el Nivel 2 de covariación.

Durante el análisis no encontramos que Kenny alcanzara el Nivel 3, a pesar de presentar ciertos comportamientos que le permiten identificar que ciertas magnitudes influyen en otras, y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos (ver figura 7a y 7b), no logró identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos (ver figura 7c).

a) A qué se debe que la diferencia entre las distancias varíe:

A que la velocidad sea la misma en todo momento.

A que la velocidad cambie en todo momento.

A que la velocidad sea cero en todo momento.

b) D. Cuando va de bajada la cabina #1, hasta el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
 Positiva Negativa Cero No sé

E. Cuando va de bajada la cabina #1, después el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
 Positiva Negativa Cero No sé

F. Cuando va pasando por el poste la cabina #1, ¿cómo es su aceleración?:
 Positiva Negativa Cero No sé

G. Cuando iba de subida la cabina #1, recuerda ¿cómo era su aceleración?:
 Positiva Negativa Cero No sé

c)

Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
0	0	3.27
2	2.87	7.49 - 3.87 = 3.62
4	7.49	10.86 - 7.49 = 3.37
6	10.86	13.97 - 10.86 = 3.11
8	13.97	16.83 - 13.97 = 2.86
10	16.83	16.83

M. ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante?
 Varía Constante

¿Qué distancia recorrió la cabina #1 entre los segundos 4 y 6? R: 10 y 18

¿Qué distancia recorrió la cabina #2 entre los segundos 4 y 6? R: 10 y 18

¿Qué cabina recorrió mayor distancia entre los segundos 4 y 6?
 Cabina #1
 Cabina #2

¿Qué cabina va más rápido entre los segundos 6 y 8?
 Cabina #1
 Cabina #2

¿Y por qué? Porque tiene un mentado más numeros

Figura 7: Respuesta de Kenny a la actividad #4

Discusión y conclusiones

Durante el análisis se observaron dificultades que se presentaron en Kenny a lo largo de las actividades con respecto a algunos comportamientos de las AM, tal es el caso de la AM3, dado que no se encontraron indicios contundentes de poder coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra variable en determinados intervalos, el estudiante no pudo avanzar hacia el nivel 3 de covariación. Estas dificultades y su evolución de comportamientos de cada AM, nos permitieron determinar que el estudiante logró alcanzar el nivel 2 de covariación. De forma general de los 21 estudiantes solo el 71% logro alcanzar el N1 y de ese grupo solo el 24% logro el N2 con lo cual damos respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Cabe mencionar que las actividades se desarrollaron de forma presencial después de un largo periodo de confinamiento sanitario, lo cual es una variable a considerar. Sin embargo, el proceso de instrumentación de los EDVI no presentó dificultad en los estudiantes al descubrir las acciones ejecutadas por cada botón, casillas de entrada y textos dinámicos.

Los resultados de esta investigación en proceso son alentadores, ya que el desarrollo de las actividades permitió observar la evolución de los comportamientos de las AM de Kenny al interactuar con los EDVIs, haciendo uso de HEAG, estas AM se diseñaron de forma graduada, comparando y analizando sus mejorías con respecto a algunos comportamientos que, al inicio de la primera actividad representaban un obstáculo para él. Nuestra investigación sigue en desarrollo y consideramos estas observaciones para proyectar el rediseño de actividades y de la trayectoria de aprendizaje hacia un segundo ciclo de investigación.

Agradecimientos

A Conacyt y a Cinvestav-IPN por financiar el proyecto de investigación

Referencias

- Aldon, G., y Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed? *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1333–1348. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01172-8>.
- Avila, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la Variación lineal y cuadrática. Tesis de Maestría. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events A framework and a study. *EMA*, 8 (2), 121-156. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Cuevas, C., y Pluinage, F. (2003). Les projets d action pratique, elements d une ingenierie denseignement des mathematiques. . . In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 273–293
- García, J. (2016). Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo (Doctoral dissertation), Universidad de Medellín.
- Hitt, F., y Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. *ZDM - Mathematics Education*, 53(3), 635–647. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x>
- Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S., Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria, *Escenarios*, 10(1), 7-16 (2012)
- Moore, K., y Carlson, M. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 48–59. doi:10.1016/j.jmathb.2011.09.001
- National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Simon, M. A. (1995). *Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vasco, C.. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM– Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau, 9, 2009-2010.