



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Unidad Zacatenco**

**Departamento de Control Automático**

**Controladores dinámicos para sistemas  
distribuidos enteros y fraccionales.**

**TESIS**

Que presenta

**Juan Pablo Flores Flores**

Para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

en la Especialidad de

**Control Automático**

**Director de la Tesis:**

**Dr. Rafael Martínez Guerra**

Ciudad de México

Agosto, 2022



*Para mi familia,  
porque todo lo bueno que hay en mí, se lo debo a ustedes.*

*Para mis mentores y amigos,  
que con sus historias y experiencias me inspiran a seguir.*

*Para ustedes, los que ya no están,  
que su recuerdo y enseñanzas continúen guiando mi camino.*

*Para ti,  
porque con tu amor me has devuelto la alegría y ambición.*



# Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado, necesario para realizar los estudios de Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Control Automático.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), así como al Departamento de Control Automático, por aportar los recursos y las instalaciones necesarias para continuar con mi desarrollo profesional.

A mi asesor Dr. Rafael Martínez Guerra por su tiempo y esfuerzo. Pero sobre todo, por sus valiosas enseñanzas y constante supervisión.

A los Doctores Guillermo Fernández Anaya, Jesús Morales Valdez, Wen Yu y Carlos Fernando Aguilar Ibáñez, por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo, así como sus valiosos comentarios y observaciones.



# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de Control y sistemas distribuidos . . . . .	1
1.2. Sincronización de sistemas dinámicos . . . . .	2
1.3. Breve descripción del Cálculo Fraccional . . . . .	3
1.4. Objetivos y contribución principal . . . . .	4
1.5. Contenido del trabajo de tesis . . . . .	5
<b>2. Observador PI de orden reducido.</b>	<b>7</b>
2.1. CAO y sistemas no diferencialmente planos . . . . .	7
2.2. Planteamiento del Problema . . . . .	10
2.2.1. Diseño del observador PI . . . . .	10
2.3. Implementación del observador PI . . . . .	13
2.3.1. Observador PI y sistema lineal . . . . .	13
2.3.2. Observador PI y sistema de Chua . . . . .	15
2.3.3. Observador PI y sistema no lineal . . . . .	18
2.4. Estimación de población asintomática . . . . .	25
2.4.1. Modelo epidemiológico A-SIR . . . . .	25
2.4.2. Observador PI y modelo A-SIR . . . . .	26
2.4.3. Ruido ambiental en modelo A-SIR . . . . .	28
2.4.4. Estimación considerando la solución numérica del modelo A-SIR	29
2.4.5. Estimación considerando datos reportados en la Ciudad de México	33
<b>3. Observador de Alta Ganancia de orden fraccional.</b>	<b>39</b>
3.1. Nociones fundamentales de cálculo fraccional . . . . .	39
3.2. Diseño de un observador de alta ganancia . . . . .	42
3.3. Aplicación a un Biorreactor y resultados . . . . .	48
<b>4. Control dinámico distribuido para sistemas PDE de orden entero.</b>	<b>61</b>
4.1. Diseño del controlador dinámico distribuido . . . . .	62
4.2. Estabilidad del error de sincronización . . . . .	66
4.3. SG de sistemas PDE de orden entero . . . . .	68

4.3.1.	SG de sistemas Brusselator . . . . .	68
4.3.2.	SG de sistemas Gray-Scott . . . . .	76
<b>5.</b>	<b>Multi-sincronización para sistemas PDE de orden entero.</b>	<b>83</b>
5.1.	Familia de controladores dinámicos . . . . .	83
5.2.	MSG de múltiples aeronaves flexibles . . . . .	93
5.3.	MSG de aeronaves flexibles: Simulaciones y resultados . . . . .	98
<b>6.</b>	<b>Control dinámico distribuido fraccional para sistemas PDE de orden fraccional.</b>	<b>101</b>
6.1.	Nociones adicionales de cálculo fraccional . . . . .	101
6.2.	Controlador dinámico distribuido fraccional . . . . .	103
6.3.	Ejemplos de Sincronización Generalizada Fraccional . . . . .	107
6.3.1.	SGF de dos sistemas Schnakenberg fraccionales . . . . .	108
6.3.2.	SFG para difusión anómala . . . . .	110
<b>7.</b>	<b>Observador de Punto Fijo para sistemas discretos</b>	<b>121</b>
7.1.	Preliminares para el observador de Punto Fijo . . . . .	122
7.1.1.	Una secuencia finita de la salida . . . . .	122
7.1.2.	Problema de iteración de punto fijo . . . . .	123
7.2.	Diseño del Observador de Punto Fijo . . . . .	125
7.2.1.	Esquema de convergencia acelerada por método de $\Delta^2$ -Aitken	128
7.2.2.	Esquema de convergencia acelerada por método de Steffensen	133
7.2.3.	Criterio de finalización del método iterativo . . . . .	134
7.3.	Implementación del observador de Punto Fijo . . . . .	136
7.3.1.	Sistema de Chua y observador de Punto Fijo . . . . .	136
7.3.2.	Sistema de Chua y observador de Newton . . . . .	137
7.3.3.	Resultados numéricos del observador de Punto Fijo . . . . .	138
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>145</b>
<b>A.</b>	<b>Productos de investigación</b>	<b>147</b>



# Índice de figuras

2.1. Sistema lineal y observador PI . . . . .	15
2.2. Sistema de Chua. Atractor del sistema . . . . .	18
2.3. Sistema de Chua. Estimación de las variables de estado . . . . .	19
2.4. Sistema de Chua. Error de estimación obtenido por el observador PI.	20
2.5. Estimaciones para la nave espacial en descenso . . . . .	23
2.6. Nave espacial en descenso: (a) estimación de incertidumbre . . . . .	24
2.7. Evolución natural de las poblaciones del modelo A-SIR . . . . .	30
2.8. Estimación de la diferentes poblaciones sin ruido . . . . .	31
2.9. Errores de estimación sin ruido . . . . .	32
2.10. Estimación de la diferentes poblaciones con ruido . . . . .	34
2.11. Errores de estimación con ruido . . . . .	35
2.12. Datos reportados en Ciudad de México durante la pandemia COVID-19	36
2.13. Estimaciones obtenidas por el observador PI con datos oficiales . . . .	37
3.1. Biorreactor con diferentes órdenes de derivación . . . . .	51
3.2. Estimaciones obtenidas con diferentes valor de ganancia y con ruido aditivo en la salida . . . . .	52
3.3. Error de estimación con $\alpha = 0.9$ , $\theta = 15$ y ruido aditivo de medición.	53
3.4. Estimaciones con diferentes valores de ganancia y sin ruido de medición	54
3.5. Error de estimación con $\alpha = 0.9$ , $\theta = 20$ y sin ruido de medición. . .	55
3.6. Estimaciones con diferentes valores de ganancia, ruido de medición y orden entero . . . . .	56
3.7. Error de estimación con $\alpha = 1$ , $\theta = 15$ y ruido de medición. . . . .	57
3.8. Estimaciones con diferentes valores de ganancia, sin ruido de medición y orden entero . . . . .	58
3.9. Error de estimación con $\alpha = 1$ , $\theta = 20$ y sin ruido de medición. . . . .	59
4.1. (a) Concentración de activador y (b) concentración de inhibidor del sistema Brusselator maestro . . . . .	69
4.2. (a) Concentración de activador y (b) concentración de inhibidor del sistema Brusselator esclavo . . . . .	70
4.3. Sincronización de los sistemas Brusselator: concentración del activador	72
4.4. Sincronización de los sistemas Brusselator: concentración del inhibidor	73

4.5.	Sincronización de los sistemas Brusselator: error de sincronización . .	74
4.6.	Señales de control para la sincronización de los sistemas Brusselator .	75
4.7.	(a) Concentración de sustrato y (b) concentración de activador del sistema Gray-Scott maestro . . . . .	77
4.8.	(a) Concentración de sustrato y (b) concentración de activador del sistema Gray-Scott esclavo . . . . .	78
4.9.	Sincronización de los sistemas Gray-Scott: concentración de sustrato	79
4.10.	Sincronización de los sistemas Gray-Scott: concentración de activador	80
4.11.	Sincronización de los sistemas Gray-Scott: error de sincronización . .	81
4.12.	Señales de control para la sincronización de los sistemas Brusselator .	82
5.1.	Interacción entre los sistemas PDE de las familias esclava y maestra .	86
5.2.	Sistema pivote-viga. . . . .	93
5.3.	Interacción de las familias maestra y esclava de aeronaves flexibles . .	95
5.4.	MSG de la aeronave maestra 1 y las aeronaves esclavas 1 y 2. . . . .	99
5.5.	MSG de la aeronave maestra 2 y las aeronaves esclavas 3,4 y 5. . . . .	99
6.1.	(a) Concentración de activador y (b) concentración de sustrato del sistema Schnakenberg maestro . . . . .	113
6.2.	(a) Concentración de activador y (b) concentración de sustrato del sistema Schnakenberg esclavo . . . . .	114
6.3.	SGF de los sistemas Schnakenberg. Concentraciones de activador . . .	115
6.4.	SGF de los sistemas Schnakenberg. Concentraciones de sustrato . .	116
6.5.	SGF de los sistemas Schnakenberg: Error de sincronización . . . . .	117
6.6.	SGF de los sistemas Schnakenberg: señales del control . . . . .	118
6.7.	(a) Transferencia de humedad y (b) transferencia de calor sin acción del control . . . . .	119
6.8.	(a) Transferencia de humedad y (b) transferencia de calor con acción del control . . . . .	120
7.1.	Procedimiento del método de $\Delta^2$ -Aitken . . . . .	131
7.2.	Procedimiento del método de Steffensen. . . . .	134
7.3.	Sistema de Chua modificado: estimaciones . . . . .	141
7.4.	Sistema de Chua modificado: error de estimación . . . . .	142
7.5.	Convergencia de las secuencias generadas por los métodos iterativos .	144

# Resumen

En este trabajo de tesis se propone una serie de controladores dinámicos distribuidos para sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales de orden entero y fraccional. Se busca resolver el problema de sincronización de sistemas distribuidos, y en particular, se estudia el problema de sincronización generalizada. La metodología empleada consiste en obtener una representación canónica, generada por un elemento primitivo diferencial. Dicha representación del sistema permite diseñar de forma natural un controlador de tipo dinámico. En el caso de los sistemas de orden fraccional, se consideran únicamente aquellos cuya derivada fraccional es con respecto a la variable temporal y que está definida en el sentido de Caputo. También se estudia un problema más complejo de sincronización, el problema de sincronización de múltiples sistemas distribuidos, esto es, se estudia el problema de multi-sincronización generalizada. Por otro lado, tomando en cuenta que el fenómeno de sincronización y la estimación de estados ocurren simultáneamente, en este trabajo de tesis también se presenta un par de observadores de estado para sistemas no lineales de orden entero y fraccional. Finalmente, como aportación adicional, se presenta un observador de Punto Fijo para sistemas en tiempo discreto. La intención de este último observador es servir como una primera aproximación para una futura implementación en sistemas distribuidos, dado que para estos últimos suele ser muy común recurrir a métodos de discretización para su simulación.



# Abstract

In this thesis is presented a series of distributed dynamic controllers for systems governed by partial differential equations of integer and fractional order. This work aims to solve the synchronization problem of distributed systems, and in particular, studies the generalized synchronization problem. The methodology used consists of obtaining a canonical representation, generated by a differential primitive element. This representation of the system allows to naturally design a dynamic type controller. The fractional order systems that are considered in this work are only those whose fractional derivative is with respect to the time variable and which is defined in the Caputo sense. A more complex synchronization problem is also studied, that is, the synchronization problem of multiple distributed systems, therefore, the generalized multi-synchronization problem is studied. On the other hand, taking into account that the synchronization phenomenon and the state estimation occur simultaneously, in this thesis, a pair of state observers for nonlinear systems of integer and fractional order are also presented. Finally, as an additional contribution, a Fixed Point observer for discrete-time systems is presented. This observer is presented as a first approximation for a future implementation in distributed systems, since for the latter it is very common to resort to discretization methods for their simulation.



# Capítulo 1

## Introducción

La vasta mayoría de fenómenos naturales son en realidad *sistemas distribuidos*, esto es, sistemas gobernados por *ecuaciones diferenciales parciales* (PDE por sus siglas en inglés). Esta clase de sistemas, conocidos comúnmente como sistemas PDE, evolucionan en un espacio de dimensión infinita, por lo tanto, para simplificar su análisis, simulación e implementación, muchos investigadores recurren a aproximaciones discretas mediante el uso de técnicas tales como el método de diferencias finitas. Entre otras cosas, lo anterior permite compensar la limitada capacidad de procesamiento de algunos ordenadores, no obstante, también da lugar a que se pierdan importantes propiedades que el dominio infinito es capaz de preservar. Algunas de estas propiedades son la capacidad de representar de manera exacta las incertidumbres del sistema o bien evaluar con facilidad el error de modelado [68, 75]. Por tal motivo, estudiar un sistema distribuido sin recurrir a tales aproximaciones sigue siendo de gran interés en la actualidad.

### 1.1. Teoría de Control y sistemas distribuidos

En la actualidad, el estudio de sistemas distribuidos ha cobrado una gran relevancia, sobre todo desde un punto de vista tecnológico. Esto ocurre principalmente al continuo desarrollo de vehículos autónomos y manipuladores con propiedades flexibles. Si bien la concepción de esta clase de dispositivos no es nueva, su desarrollo se ha visto fortalecido en los últimos años gracias a los llamados materiales inteligentes. Esta clase de materiales han permitido fabricar prototipos con menor consumo energético, tiempos de respuesta más cortos, menor peso y con un mayor rango de movilidad [102, 40, 89, 103]. Dado que esta clase de sistemas también requieren de algoritmos de control para su correcto funcionamiento y automatización, resulta interesante su estudio desde la perspectiva de la teoría de control.

Pese a su importancia, el diseño de controladores para sistemas distribuidos aún no es tan extenso como lo es para sistemas de dimensión finita. Algunos trabajos recientes

son [60], donde un control adaptativo es utilizado para el problema de seguimiento de trayectoria de sistemas basados en PDE's. Para el diseño de tal controlador, el sistema es aproximado a un sistema de mayor orden y gobernado por *ecuaciones diferenciales ordinarias* (ODE por sus siglas en inglés). La aproximación se realiza mediante un método de interpolación polinomial. Por otro lado, en [94] se propone un controlador integral para sistemas PDE y cuya estabilidad es probada mediante funcionales de Lyapunov. A su vez, el problema de estabilización de sistemas PDE-ODE acoplados es tratado en [88]. Como solución, los autores sugieren un control  $H_\infty$  cuyo análisis de estabilidad depende de una desigualdad integral parcial lineal. Mientras que en [5] se presenta un control por realimentación de estado para la estabilización de sistemas PDE con retardo. Dicho controlador es diseñado a partir de la técnica de *backstepping*. Finalmente, un control por realimentación de salida para redes neuronales acopladas se presenta en [92]. La principal característica de estas redes neuronales es que modelan un proceso de reacción-difusión.

Los estudios anteriormente mencionados se caracterizan por estar basados en la *geometría diferencial* o el *cálculo de variaciones*. Estas teorías involucran herramientas matemáticas complejas, y sobre todo, requieren de mucho esfuerzo computacional. Para reducir este nivel de complejidad, y por lo tanto hacer más accesible el diseño de controladores para sistemas distribuidos, una excelente alternativa es el *Álgebra Diferencial*. La misma permite obtener la solución de un problema de control no lineal mediante una expresión polinomial diferencial de los estados conocidos, la entrada y las derivadas con respecto al tiempo de estas. Además, existe evidencia de que este enfoque diferencial algebraico permite reducir el costo computacional [90, 1].

Entre las diferentes herramientas del álgebra diferencial, una de particular interés es la existencia del llamado *elemento primitivo diferencial*. Este concepto es particularmente útil para el diseño de observadores y leyes de control [64, 65]. Generalmente, el elemento primitivo diferencial es elegido como una combinación lineal de las variables conocidas de un sistema dado, y a su vez es clave para hallar de forma natural una transformación, misma que conduce a una forma canónica del sistema en cuestión. En este trabajo de tesis en específico, se muestra como este proceso, aplicado a sistemas distribuidos, facilita el diseño de un *control dinámico distribuido*.

## 1.2. Sincronización de sistemas dinámicos

La *sincronización* es un fenómeno históricamente olvidado, pero que en la actualidad recibe gran atención y posee amplias aplicaciones en disciplinas tales como sistemas financieros, vehículos autónomos y comunicaciones seguras [44, 39, 107]. La forma más simple de sincronización entre dos sistemas dinámicos consiste en el seguimiento de la trayectoria de uno por parte del otro debido a la existencia de una *señal de acoplamiento* entre ellos, es decir, estos sistemas presentan el mismo comportamiento después de un tiempo y gracias a la existencia de una señal entre ellos, misma que puede ser externa o generada por alguno de estos sistemas. Por lo tanto, se dice que



el problema de sincronización idéntica consiste en diseñar una señal de acoplamiento que permita que las trayectorias de los sistemas sean iguales.

El fenómeno de sincronización recibe especial atención cuando se trata de sincronizar sistemas dinámicos con comportamiento caótico. Esta clase de sistemas no lineales se caracterizan por un comportamiento aparentemente aleatorio y una alta sensibilidad ante las condiciones iniciales, pese a tratarse de modelos determinísticos. Debido a estas características, la trayectoria de dos sistemas caóticos pueden fácilmente divergir una de otra, de tal manera que durante mucho tiempo se pensó que sincronizar dos sistemas caóticos era imposible. No obstante, ésto cambió cuando se comprobó su viabilidad a finales de la década de los 90 [80].

Típicamente, cuando se trata un problema de sincronización, se considera un *esquema maestro-esclavo*. Se trata de una configuración donde existe una señal de acoplamiento bidireccional tal que uno de los sistemas siga el comportamiento del otro. Al primero de estos sistemas se le conoce como sistema esclavo, y al segundo como maestro. Debido a esto, dentro del contexto de teoría de control, es inevitable pensar en el problema de sincronización como un *problema de seguimiento de trayectoria*, con la diferencia de que la trayectoria a seguir es generada por un sistema dinámico.

Adicionalmente, es posible hablar de distintos tipos de sincronización. Entre las más comunes están la *Sincronización Completa* o *Idéntica*, *Sincronización de Fase* y *Sincronización Generalizada*. La última de estas destaca por considerar el problema de sincronización de sistemas dinámicos estructuralmente diferentes. Esto se consigue a través de una transformación, tal que en un espacio de coordenadas transformadas, las trayectorias de estado de los sistemas son idénticas. Si bien la sincronización generalizada destaca para sincronizar sistemas distintos, no se limita a estos, pues también es posible definirla para sistemas idénticos, ya que en este caso, la transformación en cuestión se reduce a una identidad.

Por último, otra cuestión a señalar es la ambigüedad con la que se define el concepto de sincronización, esto es, las definiciones existentes hacen referencia a dos o más sistemas dinámicos, pero no especifican como deben ser estos sistemas. De tal manera que, considerando una configuración maestro-esclavo, algunos investigadores han sugerido la posibilidad de considerar al sistema esclavo como un observador de estados. Bajo esta premisa, resulta ser que el bien conocido *problema de observación* o *estimación de estados* puede resolverse junto con el problema de sincronización de manera simultánea [74].

### 1.3. Breve descripción del Cálculo Fraccional

En 1695, Leibnitz, por sugerencia de L'Hopital, se cuestionó que sucedía cuando el orden de derivación de una función era un número no entero [52]. A raíz de este cuestionamiento surgió el *cálculo fraccional*. Entonces, el cálculo fraccional es la disciplina matemática encargada de estudiar integrales y derivadas de orden arbitrario.

Cabe señalar que muchas definiciones y conceptos presentes en cálculo clásico, pueden ser recuperadas de aquellas existentes en el cálculo fraccional, cuando el orden de la derivada o integral es reemplazada por un número entero.

Si bien en un inicio el cálculo fraccional despertó gran interés, especialmente entre los grandes matemáticos de la primera mitad del siglo 19 [54, 84, 28, 51, 10], no fue hasta la segunda mitad del siglo 20 que las primeras implementaciones prácticas del este llegaron [12, 76, 36]. Esto se debió principalmente a que las derivadas de orden fraccional, a diferencia de las de orden entero, carecen de una interpretación física y/o geométrica concreta, pese a que se han llevado a cabo múltiples esfuerzos por resolver este inconveniente [85, 61, 82].

En la actualidad, los modelos de orden fraccional son ampliamente utilizados para describir fenómenos anómalos como el comportamiento viscoelástico [48, 6], difusión y propagación de ondas en medios porosos [34, 104] y el comportamiento mecánico de algunos polímeros y tejidos orgánicos, como el tejido cerebral [98, 7]. Adicionalmente, el cálculo fraccional es una excelente herramienta para hallar la solución analítica de sistemas distribuidos. El más claro ejemplo de lo anterior está en la mecánica de fluidos, donde sistemas de ecuaciones parciales diferenciales, que comúnmente requieren un extenuante procedimiento, pueden resolverse con gran facilidad haciendo uso de derivadas parciales de orden fraccional con respecto a la variable temporal [50].

Por otro lado, si bien por regla general simular sistemas de orden fraccional puede resultar complicado, en el caso específico de sistemas distribuidos, presentan ventajas con respecto a su contraparte de orden entero. Los métodos más utilizados para simular sistemas distribuidos de orden fraccional son: *Método de Aproximaciones de Padé* [97], *Método Variacional Iterativo* [41] y *Nuevo Método Iterativo* [42, 32]. Todos estos métodos presentan dos grandes ventajas: 1) A diferencia del método de diferencias finitas (comúnmente utilizado para sistemas distribuidos de orden entero), no involucran ningún tipo de mallado (discretización), pues todos ellos consisten en un proceso iterativo construido a partir de funcionales, y 2) ninguno hace uso de las condiciones de frontera. Debido a estas propiedades, los métodos de simulación de sistemas distribuidos de orden fraccional presentan un menor gasto computacional.

## 1.4. Objetivos y contribución principal

El presente trabajo de tesis se halla en la intersección entre sistemas distribuidos, tanto de orden fraccional como entero, y el problema de sincronización generalizada. Por tal motivo, el objetivo general de este trabajo es el diseño de controladores dinámicos distribuidos para resolver el problema de sincronización de sistemas distribuidos de orden entero y fraccional.

A su vez, los objetivos particulares son:

- 1) Simplificar el proceso de diseño de controladores para sistemas gobernados por

ecuaciones parciales diferenciales.

- 2) Estudiar la estabilidad de los controladores propuestos mediante enfoques que hagan menos compleja y, por lo tanto, más accesible su implementación numérica.
- 3) Extender el problema de sincronización generalizada para el caso donde intervienen múltiples sistemas distribuidos, i.e., cuando existen familias de sistemas.
- 4) Probar la efectividad de los diferentes algoritmos propuestos mediante simulaciones.

Por otro lado, dado que es posible considerar que el problema de estimación de estados y el de sincronización pueden resolverse simultáneamente, además se incluye el siguiente objetivo particular:

- 5) Diseño de algoritmos de observación de estados para sistemas de orden entero y fraccional.

## 1.5. Contenido del trabajo de tesis

Este trabajo de tesis consta de siete capítulos, además de este, los cuales están organizados de la siguiente manera: en los primeros capítulos de este trabajo de tesis se presentan algoritmos para la observación de estados. En particular, el Capítulo 2 presenta un observador Proporcional-Integral de orden reducido, mientras que en el Capítulo 3 se diseña un observador de alta ganancia para sistemas de orden fraccional, por lo tanto, algunos conceptos de cálculo fraccional son presentados. Posteriormente, en el Capítulo 4 se presenta un control dinámico distribuido para la sincronización generalizada de sistemas PDE de orden entero. La base de este capítulo es el *elemento primitivo diferencial parcial*. Por tal motivo, en este capítulo se introduce la gran mayoría de definiciones relacionadas con álgebra diferencial, necesarias para el diseño del controlador. En el Capítulo 5, se trata un problema más complejo donde intervienen múltiples sistemas distribuidos. Para ello, los sistemas son agrupados en dos familias, una familia de sistemas maestros y otra de esclavos. Este procedimiento se traduce en un problema de multi-sincronización generalizada, tal que para su resolución, se presenta no uno, sino una familia de controladores dinámicos distribuidos. En el Capítulo 6, se trata el problema de sincronización generalizada para sistemas PDE de orden fraccional, de tal manera que se incluyen más conceptos de cálculo fraccional, mismos que permiten el diseño de un controlador dinámico distribuido de orden fraccional. A continuación, en el Capítulo 7, se presenta un observador de Punto Fijo para sistemas en tiempo discreto, cuya intención es se una primera aproximación para un posible trabajo a futuro para sistemas distribuidos, mismos que para los cuales suele utilizarse técnicas de discretización. Finalmente, las conclusiones y trabajo a futuro de este trabajo de tesis, se presentan en el Capítulo 8.



# Capítulo 2

## Observador PI de orden reducido.

Una desventaja de muchos esquemas de control es la necesidad de conocer total o parcialmente las variables de estado y parámetros del sistema. No obstante, en la práctica no siempre es posible, ya sea por limitaciones económicas o tecnológicas. Por lo tanto, el desarrollo de algoritmos para la estimación de dichas variables es crucial.

Por otro lado, considerando que los problemas de estimación de estados y de sincronización pueden resolverse simultáneamente [74], en este y el subsecuente capítulo se presenta un par de observadores de estado para sistemas no lineales de orden entero y fraccional.

Particularmente, en este capítulo se propone un observador de estados Proporcional Integral (PI) de orden reducido para una clase de sistemas conocidos como *no diferencialmente planos* [64]. Esta clase de sistemas se caracterizan por no satisfacer la propiedad de *platitude diferencial*, es decir, poseen al menos una variable de estado y/o entrada que no satisface una ecuación algebraica diferencial de su salida.

El aspecto fundamental para el diseño de dicho observador es la llamada *condición algebraica de observabilidad* (CAO). La CAO es un concepto similar a la propiedad de observabilidad, bien conocida dentro de teoría de control, pero definida en el contexto del álgebra diferencial [49, 63]. Esta condición se satisface cuando todas las variables desconocidas de un sistema son *algebraicamente observables*, es decir, satisfacen un polinomio diferencial de la salida.

### 2.1. CAO y sistemas no diferencialmente planos

Antes de introducir el observador PI de orden reducido, considere las siguientes definiciones.

**Definición 2.1.** Sean  $K$  y  $L$  campos diferenciales, esto es, campos dotados de una operación derivada. Un elemento  $x \in L$  se denomina diferencialmente algebraico

sobre  $K$  si satisface una ecuación polinomial diferencial  $P(x, \dot{x}, \dots, x^{(\alpha)}) = 0$  con coeficientes en  $K$ .

En lo subsecuente, se considera  $K = \mathbb{R}$ . Para ejemplificar la definición anterior, se presentan los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.1.** Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}P(x_1) &= y - x_1 = 0 \\ P(x_2) &= \dot{y} - x_2 - u = 0\end{aligned}$$

con coeficientes  $u, y, \dot{y} \in \mathbb{R} \langle u, y \rangle$ .

**Ejemplo 2.2.** Considere el siguiente sistema bilineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= ux_1 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}P(x_1) &= y - x_1 = 0 \\ P(x_2) &= \dot{y} - ux_2 = 0\end{aligned}$$

con coeficientes  $u, y, \dot{y} \in \mathbb{R} \langle u, y \rangle$ .

**Ejemplo 2.3.** Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ux_2x_1 \\ \dot{x}_2 &= ux_1 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}P(x_1) &= y - x_1 = 0 \\ P(x_2) &= \dot{y} - ux_2y = 0\end{aligned}$$

cuyos coeficientes  $u, y, \dot{y} \in \mathbb{R} \langle u, y \rangle$ .

Observe que en los tres ejemplos anteriores,  $\mathbb{R} \langle u, y \rangle$  denota el campo diferencial generado por el campo  $\mathbb{R}$  y los conjuntos de cantidades diferenciales  $u = \{u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots\}$  y  $y = \{y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots\}$ .

Por otro lado, note que en todos los sistemas,  $x \in \mathbb{R}^2$  satisface una ecuación polinomial diferencial cuyos coeficientes pertenecen a  $\mathbb{R} \langle u, y \rangle$ . Por lo tanto, en los tres casos  $x$  es diferencialmente algebraica.

**Definición 2.2.** Una variable de estado  $x_i$  de un sistema dinámico es algebraicamente observable si satisface un polinomio diferencial de las variables conocidas, esto es,  $P(x_i) = 0$  con coeficientes en  $\mathbb{R} \langle u, y \rangle$ . Si todas las variables de estado de dicho sistema dinámico son algebraicamente observables, se dice que el sistema satisface la condición algebraica de observabilidad (CAO).

**Definición 2.3.** Un sistema dinámico es no diferencialmente plano si alguna de sus variables es no diferencialmente algebraica. Esto es, la ecuación polinomial diferencial  $P(x_i, u_i) = 0$ , con coeficientes en  $\mathbb{R} \langle y \rangle$ , no se satisface. De lo contrario, el sistema se dice ser diferencialmente plano.

**Ejemplo 2.4.** Considere el siguiente sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

De donde se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}P(x_1) &= y - x_1 = 0 \\ P(x_2) &= \sigma(x_2 - y) - \dot{y} = 0 \\ P(x_3) &= y(x_3 - \rho + 1) + \dot{y} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\ddot{y}}{\sigma} = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, se dice que el sistema es diferencialmente plano. Por otro lado, considere ahora una salida diferente, e.g., sea  $y = x_2$ . En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}P(x_1, \dot{x}_1) &= \dot{x}_1 - \sigma(y - x_1) = 0 \\ P(x_2) &= y - x_2 = 0 \\ P(x_1, x_3, \dot{x}_3) &= \dot{x}_3 + \beta x_3 - y x_1 = 0\end{aligned}$$

Entonces, el sistema es no diferencialmente plano con esta salida en particular.

Note la relación entre la plitud diferencial de un sistema y la CAO. Esto es, en un sistema no diferencialmente plano, la CAO no se satisface. En consecuencia, parece no ser posible diseñar un observador para esta clase de sistemas. No obstante, es posible definir una variable auxiliar tal que la CAO se cumpla, tal y como se ve a continuación.

## 2.2. Planteamiento del Problema

Considere el siguiente sistema dinámico cuyo vector de estados es parcialmente conocido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  es el vector de estados del sistema,  $F$  es una función analítica, y  $h$  es un polinomio de sus argumentos. Las variables  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  y  $y \in \mathbb{R}$  son la entrada y la salida del sistema, respectivamente.

Para conocer el vector de estados en su totalidad, considere la siguiente variable auxiliar  $\eta(x)$ , misma que se define en función de las variables del sistema. De esta manera, el sistema (2.1) puede ser expresado como una inmersión [22], i.e.:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, \eta, u) \\ \dot{\eta}(x) &= \Omega(x) \\ y(t) &= h(x)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Observe que dado el sistema (2.2), el problema original de observación consiste ahora en un problema de estimación de  $\eta(x)$ . Por otro lado, en este nuevo problema, dependiendo de como se define  $\eta$ , las variables de interés pueden ser obtenidas posteriormente de forma directa o indirecta a partir de la estimación  $\hat{\eta}$ . Adicionalmente, si  $\eta$  se define como  $\eta = [\eta_1, \dots, \eta_\mu]$ , entonces se requiere de un banco de observadores, es decir, diseñar un observador para cada variable auxiliar.

### 2.2.1. Diseño del observador PI

Considere las siguientes hipótesis:

- H1.  $\eta(x)$  es algebraicamente observable.
- H2.  $\Omega(x)$  está acotada, esto es,  $\|\Omega(x)\| \leq N$ , con  $0 < N < \infty$ .
- H3.  $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$  son funciones reales.

Ahora, se propone el siguiente observador PI de orden reducido

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= k_p(\eta - \hat{\eta}) + \hat{\eta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_1 &= k_i(\eta - \hat{\eta})\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde  $\hat{\eta}$  es el estimado de  $\eta$  y  $\hat{\eta}_1$  es la parte integral del observador. Por otro lado, sea el error de estimación

$$e = \eta - \hat{\eta}\tag{2.4}$$



**Teorema 2.1.** *Suponga que las hipótesis H1-H3 se satisfacen. Entonces, el sistema (2.3) es un observador PI de orden reducido para el sistema (2.2), y cuyo error de estimación  $e$  es UUA (uniforme y últimamente acotado).*

*Demostración.* El sistema (2.3) es equivalente a

$$\dot{\hat{\eta}} = k_p e_1 + k_i e_2 \quad (2.5)$$

donde  $e_1 = \eta - \hat{\eta}$  y  $\dot{e}_2 = e_1$ . Sea  $E$  el siguiente vector

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La derivada de  $E$  es

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \begin{pmatrix} \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} \\ e_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega - k_p e_1 - k_i e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} k_p & k_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

o en forma matricial

$$\dot{E} = -KE + \bar{\Omega} \quad (2.8)$$

Donde  $E$  es tal que sus valores característicos son reales. Ahora, considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(E) = E^T E \quad (2.9)$$

La derivada de  $V(E)$  a lo largo de las trayectorias de (2.8) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(E) &= \dot{E}^T E + E^T \dot{E} \\ &= 2E^T \dot{E} \\ &= 2E^T (-KE + \bar{\Omega}) \\ &= -2E^T KE + 2E^T \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Recordando la desigualdad de Rayleigh, sabemos que

$$\lambda_{\min}(K) \|E\|^2 \leq \|E\|_K^2 \leq \lambda_{\max}(K) \|E\|^2 \quad (2.11)$$

Tal que, el primer término de  $\dot{V}(E)$  está acotado por

$$-2E^T KE \leq -2\lambda_{\min}(K) \|E\|^2 \quad (2.12)$$

Por otro lado, dado que se asume que H2 se satisface,  $\bar{\Omega}$  está acotada. De tal manera que

$$\|2E^T\bar{\Omega}\| \leq 2N\|E\|_K \leq 2N\sqrt{\lambda_{max}(K)}\|E\| \quad (2.13)$$

Por lo tanto, se concluye que  $\dot{V}(E)$  satisface

$$\dot{V}(E) \leq -2\lambda_{min}(K)\|E\|^2 + 2N\sqrt{\lambda_{max}(K)}\|E\| \quad (2.14)$$

Finalmente, haciendo uso del Teorema de acotación última uniforme [23] se tiene que  $E(t)$  está uniforme y últimamente acotado para cualquier condición inicial  $E(0)$ . Además,  $E(t)$  permanece en el conjunto compacto  $B_\delta = \{E : \|E\| \leq \delta, \delta > 0\}$ , con

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(K)}{\lambda_{min}(K)}} \left( \frac{2N\sqrt{\lambda_{max}(K)}}{\lambda_{min}(K)} \right) > 0 \quad (2.15)$$

□

Analizando la expresión (2.15), es posible concluir que  $\delta > 0$  solo si  $\lambda_{min}(K) > 0$ , y obviamente si  $\lambda_{max}(K) > 0$ . Estos criterios no permiten hallar las ganancias del observador  $k_p$  y  $k_i$ .

Por otro lado, en ocasiones, las derivadas de la salida pueden aparecer en el polinomio algebraico diferencial, dependiendo de la elección de la variable auxiliar  $\eta$ . Dado que no se dispone de dichas derivadas, se propone el uso de variables artificiales.

**Lema 2.1.** *Si la variable auxiliar  $\eta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \mu\}$ , para el sistema (2.2), satisface H1 y puede expresarse como*

$$\eta_i = a_i\dot{y} + b_i(u, y) \quad (2.16)$$

donde  $a_i$  es constante y  $b_i(u, y)$  es una función acotada. Entonces, existen las funciones  $\gamma_{1_i}$  y  $\gamma_{2_i} \in C^1$  tales que el observador PI de orden reducido (2.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{1_i} &= -k_{p_i}\gamma_{1_i} + \gamma_{2_i} + k_{p_i} [b_i(u, y) - k_{p_i}a_i y] + k_{i_i}a_i y, & \gamma_{1_i}(0) &= \gamma_{1_{i_0}} \\ \dot{\gamma}_{2_i} &= -k_{i_i}\gamma_{1_i} + k_{i_i} [b_i(u, y) - k_{p_i}a_i y], & \gamma_{2_i}(0) &= \gamma_{2_{i_0}} \\ \hat{\eta}_i &= \gamma_{1_i} + k_{p_i}a_i y \\ \hat{\eta}_{1_i} &= \gamma_{2_i} + k_{i_i}a_i y \end{aligned} \quad (2.17)$$

*Demostración.* Considere el observador PI de orden reducido

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_i &= k_{p_i}(\eta_i - \hat{\eta}_i) + \hat{\eta}_{1_i} \\ \dot{\hat{\eta}}_{1_i} &= k_{i_i}(\eta_i - \hat{\eta}_i) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $\hat{\eta}_{1_i}$  es la parte integral del observador PI. Substituyendo (2.16) en (2.18), se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}}_i &= k_{p_i}(a_i\dot{y} + b_i(u, y) - \hat{\eta}_i) + \hat{\eta}_{1_i} \\ \dot{\hat{\eta}}_{1_i} &= k_{i_i}(a_i\dot{y} + b_i(u, y) - \hat{\eta}_i)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Es posible definir las variables artificiales  $\gamma_{1_i}$  y  $\gamma_{2_i} \in C^1$  como

$$\begin{aligned}\gamma_{1_i} &= \hat{\eta}_i - k_{p_i}a_i y \\ \gamma_{2_i} &= \hat{\eta}_{1_i} - k_{i_i}a_i y\end{aligned}\quad (2.20)$$

cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{1_i} &= \dot{\hat{\eta}}_i - k_{p_i}a_i\dot{y} \\ \dot{\gamma}_{2_i} &= \dot{\hat{\eta}}_{1_i} - k_{i_i}a_i\dot{y}\end{aligned}\quad (2.21)$$

De (2.19),(2.20) y (2.21) se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{1_i} &= -k_{p_i}\gamma_{1_i} + \gamma_{2_i} + k_{p_i}[b_i(u, y) - k_{p_i}a_i y] + k_{i_i}a_i y, & \gamma_{1_i}(0) &= \gamma_{1_i_0} \\ \dot{\gamma}_{2_i} &= -k_{i_i}\gamma_{1_i} + k_{i_i}[b_i(u, y) - k_{p_i}a_i y], & \gamma_{2_i}(0) &= \gamma_{2_i_0}\end{aligned}\quad (2.22)$$

□

## 2.3. Implementación del observador PI

En esta sección se ejemplifica la implementación del observador PI mediante diferentes sistemas.

### 2.3.1. Observador PI y sistema lineal

Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= u + f \\ y &= x_2\end{aligned}\quad (2.23)$$

donde  $u$  es conocida y  $f$  es una variable desconocida. El sistema (2.23) es no diferencialmente plano dado que

$$\begin{aligned}P(\dot{x}_1) &= \dot{x}_1 - u = 0 \\ P(x_2) &= x_2 - y = 0 \\ P(f) &= u + f - \dot{y} = 0\end{aligned}\quad (2.24)$$

Ahora, el sistema lineal puede expresarse como la siguiente inmersión

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= u + f \\ \dot{f} &= \Omega(x_1, x_2) \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{2.25}$$

Así, el observador PI está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{\hat{f}} &= k_p(f - \hat{f}) + \hat{f}_1 \\ \dot{\hat{f}}_1 &= k_i(f - \hat{f})\end{aligned}\tag{2.26}$$

donde  $\hat{f}$  es el estimado de  $f$  y  $\hat{f}_1$  representa la parte integral del observador PI. Note que  $f$  satisface H1, tal que  $f = \dot{y} - u$ , y suponga que  $\dot{f}$  está acotada (H2). Entonces, substituyendo en (2.26) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{f}} &= k_p(\dot{y} - u - \hat{f}) + \hat{f}_1 \\ \dot{\hat{f}}_1 &= k_i(\dot{y} - u - \hat{f})\end{aligned}\tag{2.27}$$

Dado que no se dispone de  $\dot{y}$ , considere las siguientes variables artificiales que satisfacen H3

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \hat{f} - k_p y \\ \gamma_2 &= \hat{f}_1 - k_i y\end{aligned}\tag{2.28}$$

Derivando estas variables y substituyendo  $\hat{f}$  y  $\hat{f}_1$  se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= -k_p(u + \gamma_1 + k_p y) + \gamma_2 + k_i y \\ \dot{\gamma}_2 &= -k_i u - k_i(\gamma_1 + k_p y)\end{aligned}\tag{2.29}$$

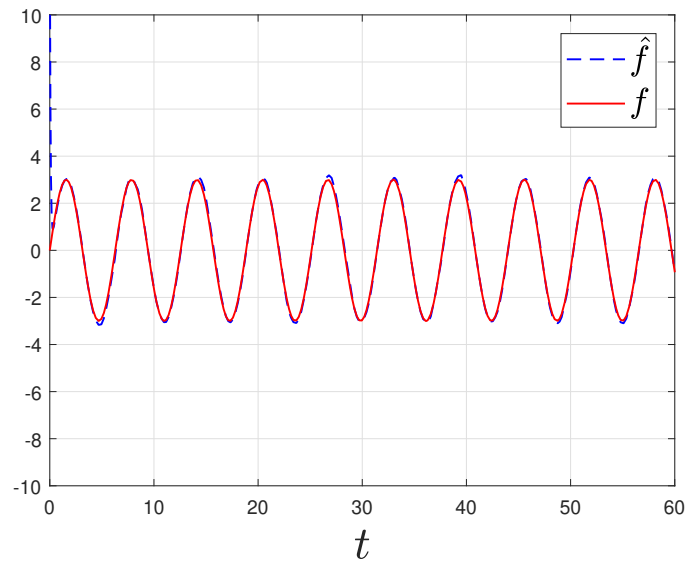
Esto es, la dinámica de interés puede ser estimada a partir de las variables artificiales. Por lo tanto, el observador PI de orden reducido está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= -k_p \gamma_1 + \gamma_2 - k_p(u + k_p y) + k_i y, & \gamma_1(0) &= \gamma_{10} \\ \dot{\gamma}_2 &= -k_i \gamma_1 - k_i(u + k_p y), & \gamma_2(0) &= \gamma_{20} \\ \hat{f} &= \gamma_1 + k_p y \\ \hat{f}_1 &= \gamma_2 + k_i y\end{aligned}\tag{2.30}$$

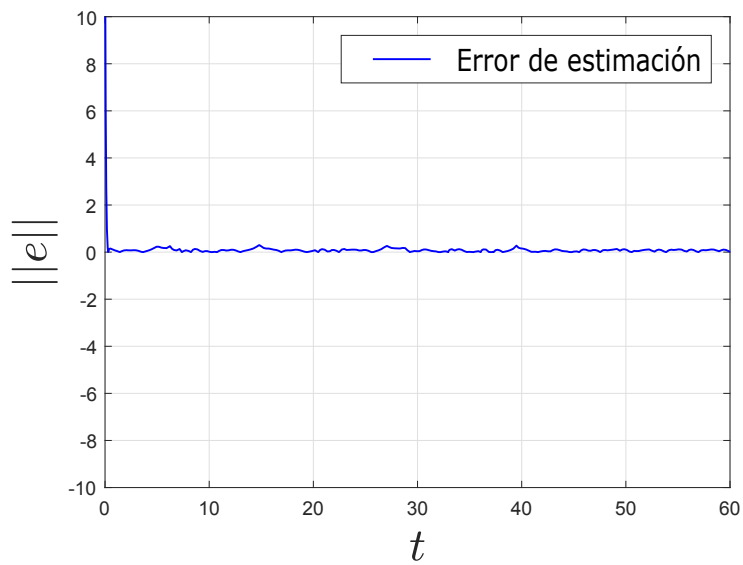
Considere ahora las siguientes condiciones iniciales:  $\gamma_1(0) = 0$  y  $\gamma_2(0) = 0$ , junto con  $u = 2 \sin(\pi t)$  y  $f = 3 \sin(\pi t)$ . Mientras que las ganancias del observador PI de orden reducido son  $k_i = 15$  y  $k_p = 8$ . Así, los resultados obtenidos son presentados en la Figura 2.1

### 2.3.2. Observador PI y sistema de Chua

Considere ahora el sistema de Chua. Este sistema describe un circuito eléctrico con comportamiento caótico y es descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones diferen-



(a)



(b)

Figura 2.1: Sistema lineal y observador PI. (a) Estimación de  $f$  y (b) error de estimación.

ciales no lineales

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1 - m_0x_1 - x_1^3m_1) \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -bx_2 \\
 y &= x_2
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde  $a, b, m_0$  y  $m_1$  son constantes del sistema. Las variables  $x_1$  y  $x_2$  representan el voltaje en los capacitores y  $x_3$  es la corriente eléctrica en el inductor.

Es fácil probar que el sistema (2.31) es no diferencialmente plano. Esto es

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_3) &= x_1 - \dot{y} - y + x_3 = 0 \\
 P(x_2) &= x_2 - y = 0 \\
 P(\dot{x}_3) &= \dot{x}_3 + by = 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Ahora, defina la siguiente variable auxiliar

$$\eta = x_1 + x_3 = \dot{y} + y \tag{2.33}$$

la cual satisface H1. Por lo tanto, el sistema (2.31) se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1 - m_0x_1 - x_1^3m_1) \\
 \dot{x}_2 &= -x_2 + \eta \\
 \dot{x}_3 &= -bx_2 \\
 \dot{\eta} &= \Omega(x_1, x_3) \\
 y &= x_2
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dado que la dinámica del sistema de Chua está acotada por ser un sistema caótico,  $\Omega(x_1, x_3)$  satisface H2. De tal manera que se propone

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\eta}} &= k_p(\dot{y} + y - \hat{\eta}) + \hat{\eta}_1 \\
 \dot{\hat{\eta}}_1 &= k_i(\dot{y} + y - \hat{\eta})
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para prescindir de  $\dot{y}$ , sean las siguientes variables artificiales

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \hat{\eta} - k_p y \\
 \gamma_2 &= \hat{\eta}_1 - k_i y
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_1 &= k_p(y - \gamma_1 - k_p y) + \gamma_2 + k_i y \\
 \dot{\gamma}_2 &= k_i(y - \gamma_1 - k_p y)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Así, el observador PI de orden reducido está dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_1 &= -k_p\gamma_1 + \gamma_2 + k_p(y - k_p y) + k_i y, & \gamma_1(0) &= \gamma_{1_0} \\
 \dot{\gamma}_2 &= -k_i\gamma_1 + k_i(y - k_p y), & \gamma_2(0) &= \gamma_{2_0} \\
 \hat{\eta} &= \gamma_1 + k_p y \\
 \hat{\eta}_1 &= \gamma_2 + k_i y
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Es posible utilizar  $\hat{\eta}$  para obtener el valor de las variables de interés  $x_1$  y  $x_3$  de la siguiente manera. De la expresión (2.33) se obtienen las siguientes relaciones

$$\hat{\eta} = \hat{x}_1 + x_3 \tag{2.39}$$

y

$$\dot{y} = \hat{\eta} - y \tag{2.40}$$

Derivando (2.39), se tiene

$$\dot{\hat{\eta}} = \dot{\hat{x}}_1 + \dot{x}_3 = \dot{\hat{x}}_1 - by \tag{2.41}$$

Por otro lado

$$\hat{\eta} = \gamma_1 + k_p y \tag{2.42}$$

tal que

$$\dot{\hat{\eta}} = \dot{\gamma}_1 + k_p \dot{y} \tag{2.43}$$

De (2.41) y (2.43), se obtiene

$$\dot{\hat{x}}_1 = \dot{\gamma}_1 + k_p \dot{y} + by \tag{2.44}$$

Substituyendo  $\dot{\gamma}_1$ , de (2.38) y (2.40), en (2.44), se tiene que

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_p\gamma_1 + \gamma_2 + k_p(y - k_p y) + k_i y + k_p(\hat{\eta} - y) + by \tag{2.45}$$

Entonces, substituyendo (2.42) en (2.45) y simplificando, resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}_1 &= \gamma_2 + k_i y + by \\
 &= \hat{\eta}_1 + by
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

La ecuación (2.46) puede resolverse utilizando el método de Euler, esto es

$$\hat{x}_1(t+1) = \hat{x}_1(t) + h[\hat{\eta}_1(t) + by(t)], \quad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{1_0} \tag{2.47}$$

Finalmente, de (2.39) se tiene que

$$\hat{x}_3 = \hat{\eta} - \hat{x}_1 \quad (2.48)$$

De tal manera que es posible obtener la estimación de las variables de interés. Para visualizar la efectividad del observador PI, considere los siguientes parámetros para el sistema de Chua:  $a = 9.5$ ,  $b = 100/7$ ,  $m_0 = -8/7$  y  $m_1 = 4/63$ , así como las siguientes condiciones iniciales:  $x_0 = (0.2, 0.2, 0.2)$ . Por otro lado, considere  $\gamma_1(0) = 0$ ,  $\gamma_2(0) = 0$  y  $\hat{x}_1(0) = 0$ , junto con las ganancias  $k_i = 150$  y  $k_p = 25$ . Los resultados pueden ser observados en las Figuras 2.2-2.4.

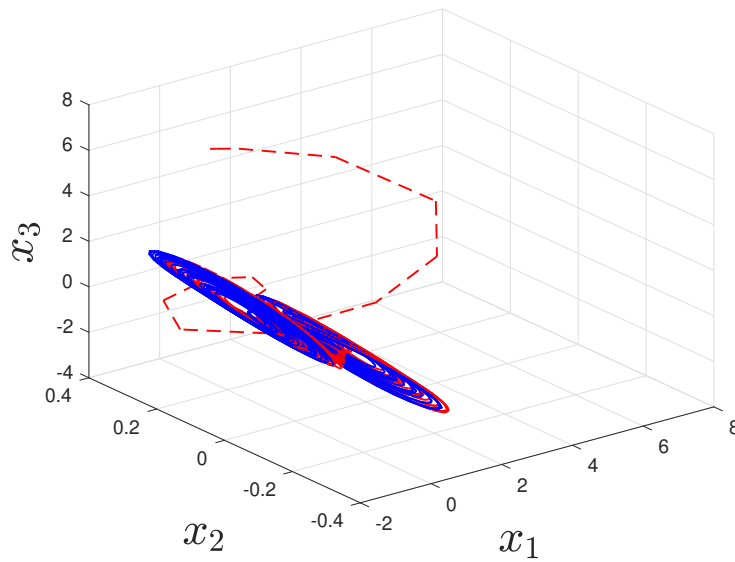


Figura 2.2: Sistema de Chua. Atractor del sistema (línea continua) y estimaciones del observador PI (línea punteada).

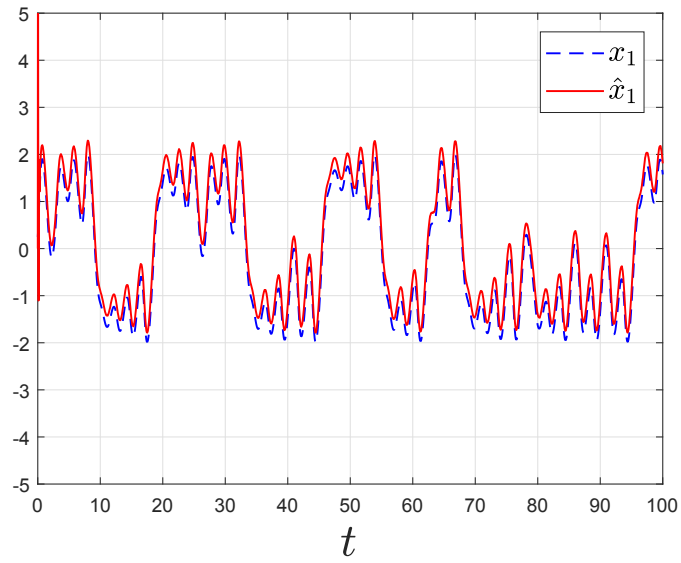
La Figura 2.2 ilustra de la mejor manera como se lleva a cabo la resolución simultánea de los problemas de sincronización y estimación de estados. Note como la trayectoria de estado del observador PI converge a la del sistema de Chua, de tal manera que ambos evolucionan dentro del mismo atractor caótico.

### 2.3.3. Observador PI y sistema no lineal

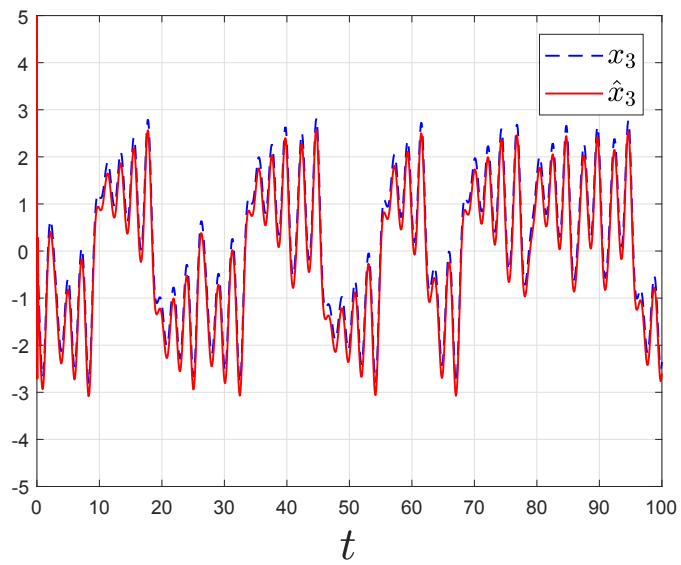
Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{\sigma \alpha u}{x_3} \\ \dot{x}_3 &= -\sigma u - f \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (2.49)$$





(a)



(b)

Figura 2.3: Sistema de Chua. Estimación de las variables de estado (a)  $x_1$  y (b)  $x_3$ .

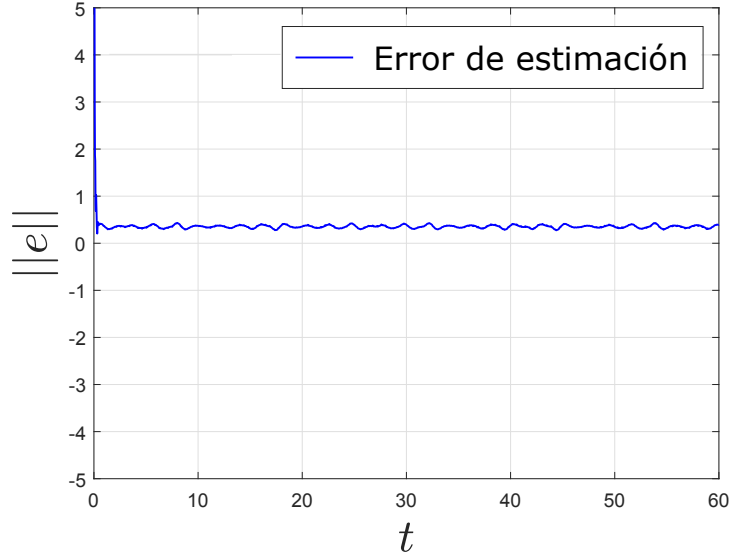


Figura 2.4: Sistema de Chua. Error de estimación obtenido por el observador PI.

Este sistema corresponde al movimiento y pérdida de masa de una nave espacial que se encuentra aterrizando verticalmente en la superficie de un planeta. El modelo considera la ausencia de resistencia atmosférica y denota la aceleración gravitacional del planeta con  $g$ .

Las variables  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son la posición vertical, la velocidad de descenso y la masa de la aeronave, respectivamente. La variable  $u$  es una señal de control,  $\sigma$  es la velocidad relativa de expulsión de los gases y  $\alpha$  es una constante positiva tal que  $\sigma\alpha$  es el desplazamiento máximo de la palanca de aceleración del motor. La variable  $f$  es una incertidumbre que necesita ser observada.

Es fácil notar que este sistema es no diferencialmente plano, esto es

$$\begin{aligned}
 P(x_1) &= x_1 - y = 0 \\
 P(x_2) &= x_2 - \dot{y} = 0 \\
 P(x_3, \dot{x}_3) &= (\ddot{y} - g)x_3 - (\dot{x}_3 + f)\alpha = 0
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Es posible expresar el sistema (2.49) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= g - \frac{\sigma\alpha u}{x_3} \\
 \dot{x}_3 &= -\sigma u - f \\
 \dot{f} &= \Omega(x_1, x_2, x_3) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Suponga que  $\Omega$  es acotada, tal que H2 se satisface. Por otro lado,  $f$  satisface H1, ya que

$$(f + \sigma u)(\ddot{y} - g)^2 + \sigma \alpha u y^{(3)} = 0 \quad (2.52)$$

Para estimar  $f$ , considere

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}} &= k_{pf}(f - \hat{f}) + \hat{f}_1 \\ \dot{\hat{f}}_1 &= k_{if}(f - \hat{f}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Substituyendo (2.52), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}} &= -k_{pf} \left( \sigma u + \frac{\sigma \alpha u y^{(3)}}{(\ddot{y} - g)^2} + \hat{f} \right) + \hat{f}_1 \\ \dot{\hat{f}}_1 &= -k_{if} \left( \sigma u + \frac{\sigma \alpha u y^{(3)}}{(\ddot{y} - g)^2} + \hat{f} \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para prescindir de  $y^{(3)}$  y  $\ddot{y}$ , es posible aproximarlas como  $y^{(3)} \approx \ddot{\hat{x}}_2$  y  $\ddot{y} = \dot{\hat{x}}_2$ . De tal manera que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{f}} &= -k_{pf} \left( \sigma u + \frac{\sigma \alpha u \ddot{\hat{x}}_2}{(\dot{\hat{x}}_2 - g)^2} + \hat{f} \right) + \hat{f}_1 \\ \dot{\hat{f}}_1 &= -k_{if} \left( \sigma u + \frac{\sigma \alpha u \ddot{\hat{x}}_2}{(\dot{\hat{x}}_2 - g)^2} + \hat{f} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sean  $\gamma_{1f}$  y  $\gamma_{2f}$  variables artificiales que satisfacen H3

$$\begin{aligned} \gamma_{1f} &= \hat{f} - k_{pf} \frac{\sigma \alpha u}{\dot{\hat{x}}_2 - g} \\ \gamma_{2f} &= \hat{f}_1 - k_{if} \frac{\sigma \alpha u}{\dot{\hat{x}}_2 - g} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Cuyas derivadas son

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{1f} &= \dot{\hat{f}} + k_{pf} \ddot{\hat{x}}_2 \frac{\sigma \alpha u}{(\dot{\hat{x}}_2 - g)^2} \\ \dot{\gamma}_{2f} &= \dot{\hat{f}}_1 + k_{if} \ddot{\hat{x}}_2 \frac{\sigma \alpha u}{(\dot{\hat{x}}_2 - g)^2} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Substituyendo (2.55) y (2.56) en (2.57) se tiene que el observador PI está dado por

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{1_f} &= -k_{pf} \left( \sigma u + \gamma_{1_f} + k_{pf} \frac{\sigma \alpha u}{\hat{x}_2 - g} \right) + \gamma_{2_f} + k_{if} \frac{\sigma \alpha u}{\hat{x}_2 - g}, & \gamma_{1_f}(0) &= \gamma_{1_f0} \\
\dot{\gamma}_{2_f} &= -k_{if} \left( \sigma u + \gamma_{1_f} + k_{pf} \frac{\sigma \alpha u}{\hat{x}_2 - g} \right), & \gamma_{2_f}(0) &= \gamma_{2_f0} \\
\hat{f} &= \gamma_{1_f} + k_{pf} \frac{\sigma \alpha u}{\hat{x}_2 - g} \\
\hat{f}_1 &= \gamma_{2_f} + k_{if} \frac{\sigma \alpha u}{\hat{x}_2 - g}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Como (2.58) involucra la variable  $\hat{x}_2$ , es necesario realizar una estimación adicional. Para ello, considere el siguiente observador PI

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_2 &= k_{px_2}(\dot{y} - \hat{x}_2) + \hat{x}_{2_1} \\
\dot{\hat{x}}_{2_1} &= k_{ix_2}(\dot{y} - \hat{x}_2)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

donde  $x_2 = \dot{y}$ . Ahora, considere las siguientes variables artificiales

$$\begin{aligned}
\gamma_{1_{x_2}} &= \hat{x}_2 - k_{px_2}y \\
\gamma_{2_{x_2}} &= \hat{x}_{2_1} - k_{ix_2}y
\end{aligned} \tag{2.60}$$

cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{1_{x_2}} &= \dot{\hat{x}}_2 - k_{px_2}\dot{y} \\
\dot{\gamma}_{2_{x_2}} &= \dot{\hat{x}}_{2_1} - k_{ix_2}\dot{y}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Por lo tanto, substituyendo (2.59) y (2.60) en (2.61) se tiene

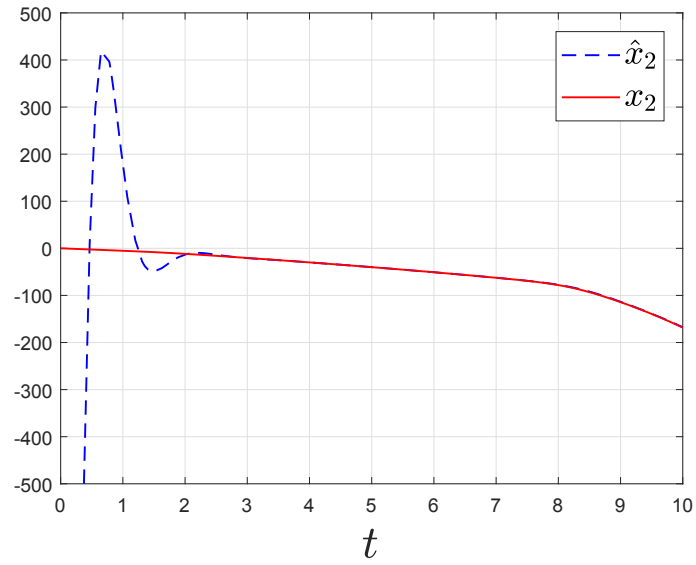
$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{1_{x_2}} &= -k_{px_2}(\gamma_{1_{x_2}} + k_{px_2}y) + \gamma_{2_{x_2}} + k_{ix_2}y, & \gamma_{1_{x_2}}(0) &= \gamma_{1_{x_2}0} \\
\dot{\gamma}_{2_{x_2}} &= -k_{ix_2}(\gamma_{1_{x_2}} + k_{px_2}y), & \gamma_{2_{x_2}}(0) &= \gamma_{2_{x_2}0} \\
\hat{x}_2 &= \gamma_{1_{x_2}} + k_{px_2}y \\
\hat{x}_{2_1} &= \gamma_{2_{x_2}} + k_{ix_2}y
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Note que  $\dot{y} \approx \hat{x}_2$ . Entonces, de (2.61) se tiene

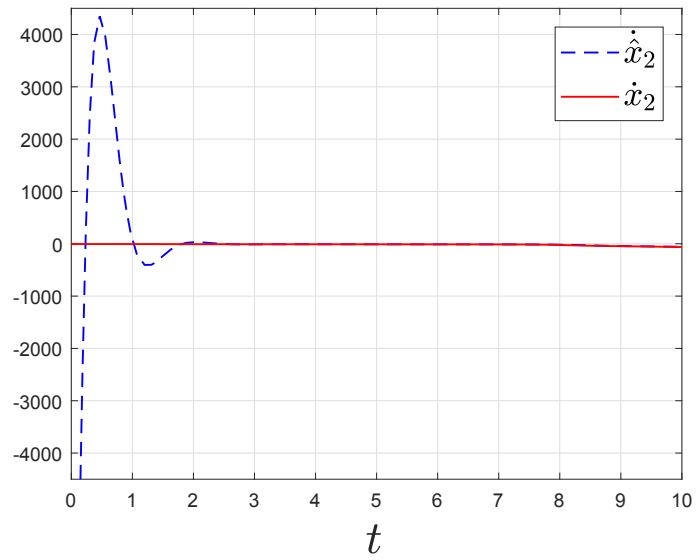
$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_{px_2}(\gamma_{1_{x_2}} + k_{px_2}y) + \gamma_{2_{x_2}} + k_{ix_2}y + k_{px_2}\hat{x}_2 \tag{2.63}$$

Así,  $\hat{x}_2$  puede ser obtenida y por lo tanto también la variable de interés  $f$ . Note además que las expresiones (2.58), (2.62) y (2.63) constituyen un banco de observadores para el sistema (2.51).

Ahora, considere  $g = 1.63m/s^2$ ,  $\sigma = 50kg/s$ ,  $\alpha = 200m/s$ . Las condiciones iniciales fueron:  $x_0 = (-700, 0, 1500)$ . A su vez, sean  $\gamma_{1_{x_2}}(0) = 0$ ,  $\gamma_{2_{x_2}}(0) = 0$ ,  $\gamma_{1_f}(0)$  y  $\gamma_{2_f}(0) = 0$ . Mientras las ganancias del observador son  $k_{pf} = 49$ ,  $k_{if} = 700$ ,  $k_{px_2} = 6$  y  $k_{ix_2} = 25$ , junto con una señal de control  $u = 1$  y una incertidumbre dada por  $f = \exp(6 \sin(t))$ . Los resultados correspondientes pueden observarse en las Figuras 2.5 y 2.6.

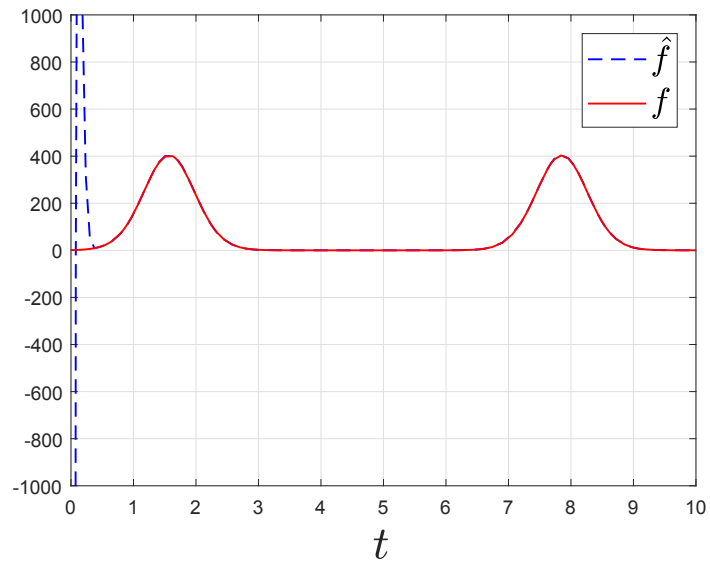


(a)

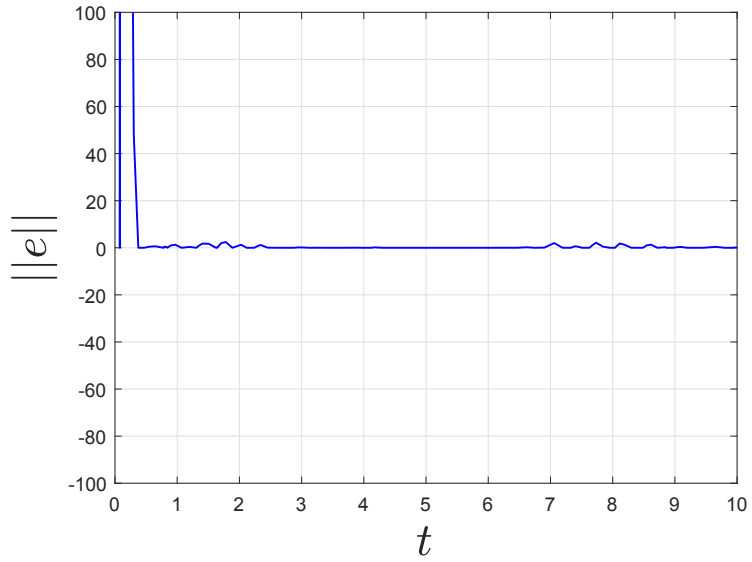


(b)

Figura 2.5: Estimaciones para la nave espacial en descenso. (a) Velocidad de descenso  $x_2$  y (b) estimación de  $\dot{x}_2$ .



(a)



(b)

Figura 2.6: Nave espacial en descenso: (a) estimación de incertidumbre y (b) error de estimación.

## 2.4. Estimación de población asintomática durante la Pandemia COVID-19

La pandemia generada por el virus *SARS-CoV-2* puso en apuros el sistema de salud de todas las naciones. Para enfrentar esta situación, se pusieron en marcha diferentes medidas de contención y monitoreo. Una de estas estrategias fueron las campañas masivas de testeo, cuya finalidad era recabar información y tomar decisiones con base a esta. Sin embargo, debido a sus condiciones sociales, médicas y económicas, una gran cantidad de países fueron incapaces de llevar a cabo este tipo de medidas [9]. Para solventar esta situación, muchos expertos sugirieron hacer uso de modelos matemáticos para estudiar y tratar de predecir el curso de la pandemia, tales como el clásico modelo *SIR* (*Susceptibles-Infected-Removed*). En esta sección, se considera el modelo epidemiológico *A-SIR* (*Asintomáticos-Susceptibles-Infected-Removed*) y se implementa el observador PI de orden reducido para estimar la población de individuos asintomáticos.

### 2.4.1. Modelo epidemiológico A-SIR

Una de las principales características de la pandemia COVID-19 es una fuerte presencia de individuos asintomáticos. Estos individuos representan un serio peligro, pues son igualmente infecciosos y permanecen sin detectar [8, 29, 108]. Por lo tanto, es clave contar con alguna estimación de esta población. De tal manera que considere el siguiente modelo A-SIR [30]:

$$\begin{aligned}
 \dot{s}(t) &= -\beta s(t) [a(t) + i(t)], \\
 \dot{i}(t) &= \rho\beta s(t) [a(t) + i(t)] - \gamma i(t), \\
 \dot{a}(t) &= (1 - \rho)\beta s(t) [a(t) + i(t)] - \nu a(t), \\
 \dot{r}(t) &= \gamma i(t) + \nu a(t), \\
 y(t) &= i(t),
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

donde  $s(t)$  y  $r(t)$  representan las poblaciones normalizadas de individuos susceptibles y removidos (recuperados y/o fallecidos), respectivamente. La población de individuos infectados se divide en sintomáticos  $i(t)$  y asintomáticos  $a(t)$ . En este caso, la salida del sistema  $y(t)$  está dada por aquellos individuos sintomáticos, mismos que normalmente son reportados a las autoridades. El parámetro  $\beta > 0$  representa la tasa de transmisión de la enfermedad, y esta dado por  $\beta = \delta\tau/N$ , donde  $\delta$  es número de contactos promedio que tiene cada individuo infectado con aquellos que son susceptibles,  $\tau$  es la fracción de contactos que resultan en contagio y  $N$  es la población total. Las tasas de recuperación, es decir, el tiempo promedio entre la infección y su posterior recuperación/fallecimiento, de los individuos sintomáticos y asintomáticos son  $\gamma^{-1}$  y  $\nu^{-1}$ , con  $\gamma > 0$ ,  $\nu > 0$ , respectivamente. Mientras que  $\rho > 0$  representa la fracción de individuos infectados que son sintomáticos.

Una característica del modelo A-SIR es que asume una inmunidad permanente de los individuos recuperados, así como una población constante (sin nacimientos o muertes naturales). Debido a esto último, se tiene que

$$s(t) + i(t) + a(t) + r(t) = 1, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.65)$$

### 2.4.2. Observador PI y modelo A-SIR

Siguiendo la metodología previamente establecida, sea  $\eta(x)$  tal que

$$\eta(x) = \beta s(t) [a(t) + i(t)] \quad (2.66)$$

Note que la elección de  $\eta(x)$  coincide con la dinámica de la población susceptible pero con signo opuesto. Esta elección es particularmente útil, pues interviene en el resto de dinámicas poblacionales del modelo A-SIR. De tal manera que el modelo A-SIR puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -\eta(x), \\ \dot{i}(t) &= \rho\eta(x) - \gamma i(t), \\ \dot{a}(t) &= (1 - \rho)\eta(x) - \nu a(t), \\ \dot{\eta}(x) &= \Omega(x), \\ \dot{r}(t) &= \gamma i(t) + \nu a(t), \\ y(t) &= i(t), \end{aligned} \quad (2.67)$$

Claramente,  $\eta(x)$  satisface la CAO ya que

$$\eta = \frac{1}{\rho} (\dot{y} + \gamma y), \quad \rho \neq 0 \quad (2.68)$$

Ahora, se tiene que el observador PI de orden reducido para este problema está dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= \kappa_p \left[ \frac{1}{\rho} (\dot{y} + \gamma y) - \hat{\eta} \right] + \kappa_i \hat{\eta}_1, \\ \dot{\hat{\eta}}_1 &= \frac{1}{\rho} (\dot{y} + \gamma y) - \hat{\eta} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dado que la derivada de la salida aparece en las expresiones anteriores, se definen las siguientes variables artificiales:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\eta} - \frac{\kappa_p}{\rho} y, \\ \alpha_2 &= \hat{\eta}_1 - \frac{\kappa_i}{\rho} y, \end{aligned} \quad (2.70)$$



cuyas derivadas son

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \dot{\hat{\eta}} - \frac{\kappa_p}{\rho} \dot{y}, \\ \dot{\alpha}_2 &= \dot{\hat{\eta}}_1 - \frac{\kappa_i}{\rho} \dot{y},\end{aligned}\tag{2.71}$$

De tal manera que se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \frac{\kappa_p}{\rho} \gamma y - \kappa_p \hat{\eta} + \hat{\eta}_1, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\kappa_i}{\rho} \gamma y - \kappa_i \hat{\eta}\end{aligned}\tag{2.72}$$

Así, considerando (2.70), y después de alguna manipulación algebraica, las expresiones en (2.72) son

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -\kappa_p \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{y}{\rho} (\kappa_i + \kappa_p \gamma - \kappa_p^2), \\ \dot{\alpha}_2 &= -\kappa_i \alpha_1 + \frac{\kappa_i}{\rho} y (\gamma - \kappa_p),\end{aligned}\tag{2.73}$$

Por lo tanto, el observador PI de orden reducido es:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -\kappa_p \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{y}{\rho} (\kappa_i + \kappa_p \gamma - \kappa_p^2), & \alpha_{1_0} &= \alpha_1(0), \\ \dot{\alpha}_2 &= -\kappa_i \alpha_1 + \frac{\kappa_i}{\rho} y (\gamma - \kappa_p), & \alpha_{2_0} &= \alpha_2(0), \\ \hat{\eta} &= \alpha_1 + \frac{\kappa_p}{\rho} y, \\ \hat{\eta}_1 &= \alpha_2 + \frac{\kappa_i}{\rho} y\end{aligned}\tag{2.74}$$

Mientras que las poblaciones pueden ser estimadas como

$$\hat{s}(t) = - \int_0^t \hat{\eta}(x(\tau)) d\tau,\tag{2.75}$$

$$\hat{a}(t) = \frac{\hat{\eta}(x)}{\beta \hat{s}(t)} - y, \quad \hat{s}(t) \neq 0\tag{2.76}$$

$$\hat{r}(t) = 1 - y(t) - \hat{a}(t) - \hat{s}(t)\tag{2.77}$$

Antes de continuar, considere que para este problema particular, los errores de estimación de las diferentes poblaciones se definen como  $\tilde{s}(t) = s(t) - \hat{s}(t)$ ,  $\tilde{a}(t) = a(t) - \hat{a}(t)$  y  $\tilde{r}(t) = r(t) - \hat{r}(t)$ .

### 2.4.3. Ruido ambiental en modelo A-SIR

Dado que existe evidencia de que la pandemia COVID-19 es altamente influenciada por fluctuaciones ambientales [43, 95], dando como resultado mediciones inadecuadas, en lo siguiente, considere la expresión [106]

$$\omega g(t) = \omega \beta s(t) [a(t) + i(t)]^{1/2}, \quad (2.78)$$

donde  $\omega$  es un número aleatorio de una distribución uniforme con valores entre 0 y 1, i.e.,  $\omega \in (0, 1)$ . Por otro lado,  $g(t)$  es una función analítica cuya derivada es acotada. Así, considere que la salida del sistema está influenciada por (2.78), i.e.,

$$y(t) = i(t) + \omega g(t), \quad (2.79)$$

Note que  $\omega g(t)$  es un término que no se desvanece y de hecho, crece conforme el número de infectados incrementa. Por tanto, asuma lo siguiente

H4. El término de ruido aditivo está acotado, i.e.,  $|\omega g(t)| \leq M$ .

**Teorema 2.2.** *Si H1-H4 se cumplen, el sistema (2.69) es un observador PI de orden reducido para la dinámica desconocida de (2.67) pero con salida (2.79), y cuyo error de estimación es uniforme y últimamente acotado.*

*Demostración.* Expresé la salida del sistema (2.79) como  $y(t) = y_1(t) + \omega g(t)$ . Entonces, de H1 se tiene que la variable auxiliar se puede elegir como una suma de dos polinomios diferenciales, i.e.:

$$\eta = P_1(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(\mu_1)}) + \omega P_2(g, \dot{g}, \dots, g^{(\mu_2)}), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{N}, \quad (2.80)$$

donde  $P_1 \in C^{\mu_1}$  y  $P_2 \in C^{\mu_2}$ . Ahora, la derivada con respecto al tiempo de  $\eta$  es

$$\dot{\eta} = \Omega(x(t)) + \omega \Psi(t) \quad (2.81)$$

Note que a diferencia de  $\Omega$ ,  $\Psi$  depende únicamente de la variable temporal, pues la misma es un polinomio diferencial de  $g$  y sus derivadas. Ahora, dado que  $e = \eta - \hat{\eta}$ , se tiene que la dinámica del error de estimación es

$$\dot{e} = \Omega(x) - \kappa_p e - \kappa_i \hat{\eta}_1 + \omega \Psi(t), \quad (2.82)$$

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = e \quad (2.83)$$

o en forma matricial

$$\dot{E} = -KE + \bar{\Omega} + \omega \bar{\Psi}, \quad (2.84)$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_p & \kappa_i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e \\ \hat{\eta}_1 \end{pmatrix}, \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la función candidata de Lyapunov

$$V(E) = E^T E \quad (2.85)$$

se tiene que la derivada de la misma a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{V}(E) &= \dot{E}^T E + E^T \dot{E} \\ &= 2E^T \dot{E} \\ &= -2E^T K E + 2E^T \bar{\Omega} + 2E^T \omega \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Por la desigualdad de Rayleigh y dado que

$$\begin{aligned} \|2E^T \bar{\Omega}\| &\leq 2N \|E\|_K = 2N \sqrt{\lambda_{\max}(K)} \|E\|, \\ \|2E^T \omega \bar{\Psi}\| &\leq 2M \|E\|_K = 2M \sqrt{\lambda_{\max}(K)} \|E\| \end{aligned}$$

se tiene que

$$\dot{V}(E) \leq -2\lambda_{\min}(K) \|E\|^2 + 2(N + M) \sqrt{\lambda_{\max}(K)} \|E\| \quad (2.87)$$

Así, aplicando el teorema de acotación última uniforme, se tiene que  $E(t)$  es uniforme últimamente acotado para toda condición inicial  $E(0)$ . Además,  $E(t)$  permanece en el conjunto compacto  $B_{\bar{\delta}} = \{E : \|E\| \leq \bar{\delta}, \bar{\delta} > 0\}$ , donde

$$\bar{\delta} = \left( \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)} \right)^{1/2} \left( \frac{2(N + M) (\lambda_{\max}(K))^{1/2}}{\lambda_{\min}(K)} \right) > 0. \quad (2.88)$$

Por tanto, el error de estimación del observador PI también es uniforme últimamente acotado cuando existe ruido en la salida del sistema.  $\square$

#### 2.4.4. Estimación considerando la solución numérica del modelo A-SIR

A continuación se presentan los resultados obtenidos cuando el observador PI utiliza la solución numérica del modelo A-SIR. A modo de comparación, note que los resultados también incluyen el desempeño del observador cuando la acción integral no existe, i.e.,  $\kappa_i = 0$ , así como los resultados obtenidos por un observador de Luenberger. Por otro lado, se consideran dos casos, con y sin ruido ambiental.

##### CASO 1: Estimación sin ruido.

Los parámetros utilizados para simular el modelo A-SIR se presentan en la tabla 2.1.

Los parámetros  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\nu$  en la Tabla 2.1 son estimaciones estadísticas realizadas para la Ciudad de México. Por otro lado,  $\rho$  corresponde a un valor inferido de un

Descripción del parámetro/Referencia	Símbolo	Valor
Tasa de transmisión [83]	$\beta$	0.46
Fracción de infectados sintomáticos [91]	$\rho$	0.15
Tasa de recuperación de sintomáticos ( $\text{days}^{-1}$ ) [83]	$\gamma$	1/4.86
Tasa de recuperación de asintomáticos ( $\text{days}^{-1}$ ) [83]	$\nu$	1/4.86

Cuadro 2.1: Parámetros modelo A-SIR.

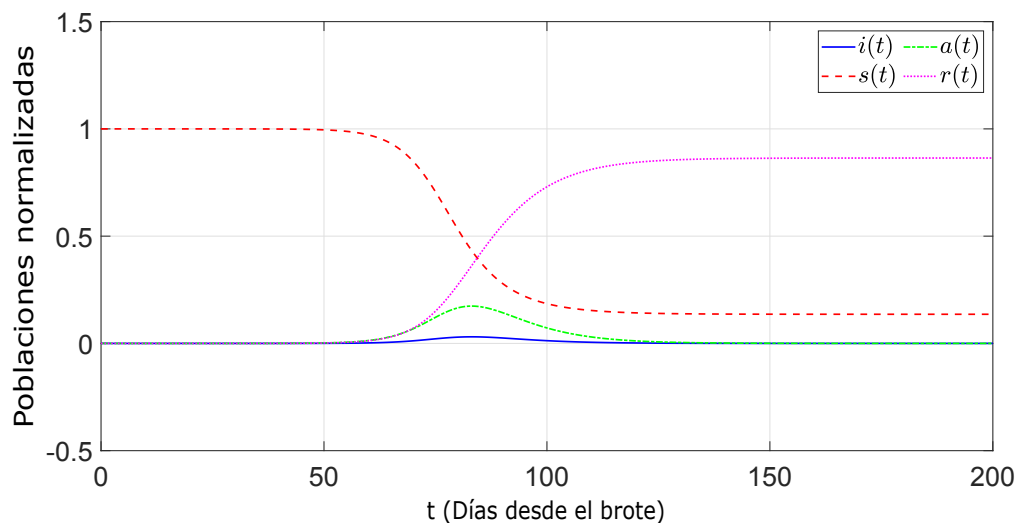


Figura 2.7: Evolución natural de las poblaciones del modelo A-SIR considerando datos relacionados con la Ciudad de México y el virus SARS-CoV-2.

estudio serológico realizado en la ciudad de Nueva York. La simulación del modelo A-SIR considera las condiciones iniciales  $i(0) = 1/N$ ,  $a(0) = 1/N$ ,  $r(0) = 0$  y  $s(0) = 1 - i(0) - a(0)$ . En la Figura 2.7 se observa la evolución de las distintas poblaciones del modelo A-SIR.

La Tabla 2.2 muestra las distintas condiciones iniciales utilizadas, así como las ganancias correspondientes. Note que en el caso del observador sin acción integral (Observador Proporcional), la ganancia  $\kappa_p$  es denotada simplemente como  $\kappa$ . La ganancia del observador de Luenberger es denotada por  $L$  [59].

En la Figura 2.8 se pueden observar las estimaciones realizadas por cada uno de los observadores, así como los errores de estimación correspondientes a cada población (Figura 2.9).

### CASO 2: Estimación con ruido.

Considere ahora que los observadores utilizan la solución numérica del modelo A-SIR pero con ruido aditivo. En este escenario se omite el observador de Luenberger, dado que el mismo no es apropiado para esta clase de escenario. Los parámetros utilizados

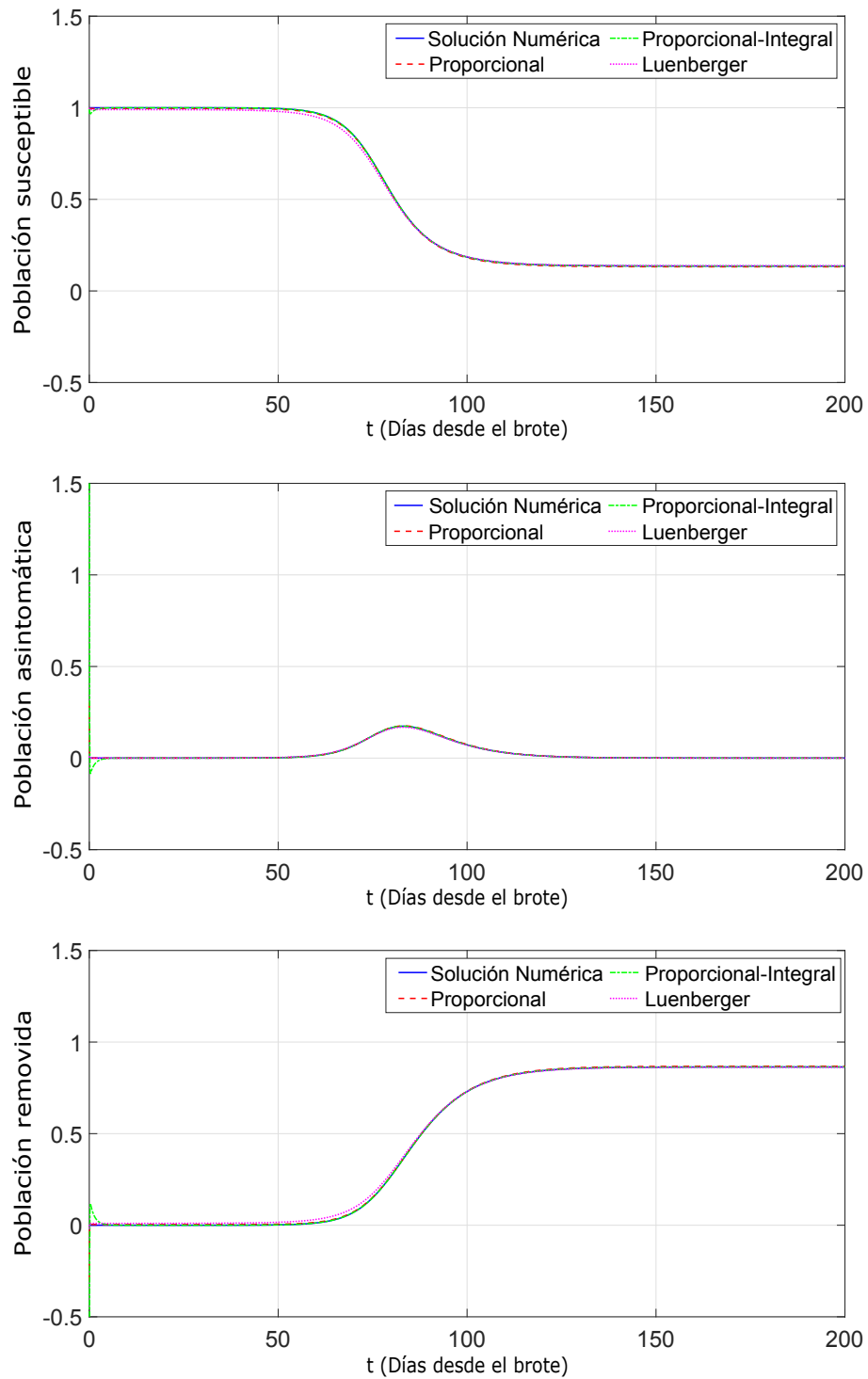


Figura 2.8: Estimación de la diferentes poblaciones sin ruido y considerando la solución numérica del modelo A-SIR.

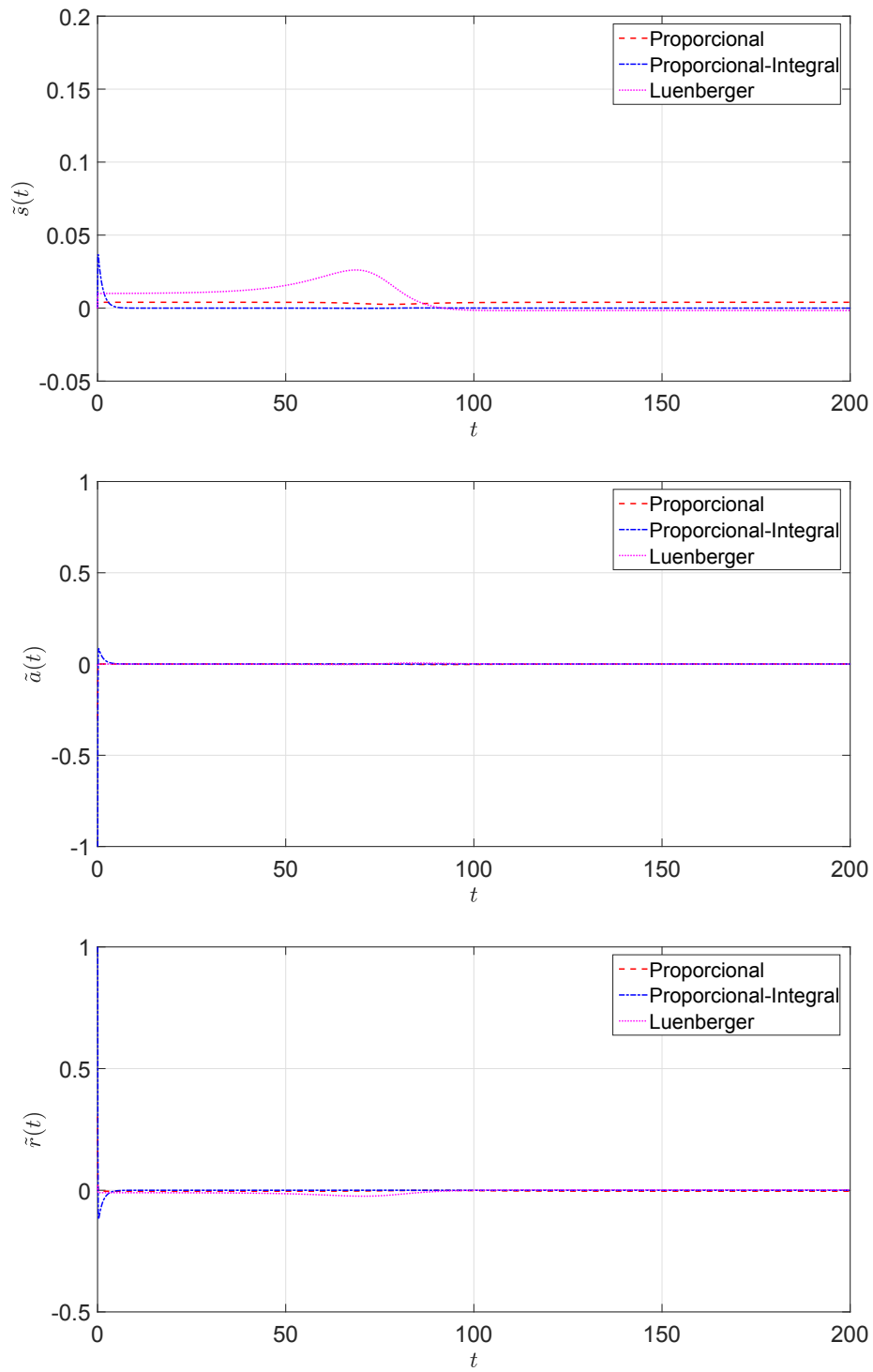


Figura 2.9: Errores de estimación sin ruido de la diferentes poblaciones y considerando la solución numérica del modelo A-SIR.

Proporcional	Proporcional-Integral	Luenberger
$\alpha(0) = 0.1$	$\alpha_1(0) = 1$	$\hat{i}(0) = 1/N$
$\eta(0) = 1$	$\alpha_2(0) = 0$	$\hat{a}(0) = 1/N$
$\kappa = 25$	$\eta(0) = 1$	$\hat{r}(0) = 0$
	$\kappa_p = 25$	$\hat{s}(0) = 1 - i(0) - a(0)$
	$\kappa_i = 20$	$L = 250$

Cuadro 2.2: Condiciones iniciales.

son los mismos, excepto las ganancias, las cuales son  $\kappa = 50$ ,  $\kappa_p = 1.4$  y  $\kappa_i = 0.8$ , respectivamente.

En la Figura 2.10 se observan las estimaciones considerando ruido. Note como las estimaciones obtenidas se ven afectadas por el incremento del ruido aditivo (mayor número de infectados). También observe como el observador PI atenúa el ruido, comparado con el observador Proporcional. Por otro lado, los errores de estimación correspondiente se observan en la Figura 2.11.

### 2.4.5. Estimación considerando datos reportados en la Ciudad de México

Considere ahora datos oficiales reportados por las autoridades sanitarias de la Ciudad de México, mismos que corresponden al periodo comprendido entre febrero 22 de 2020 y marzo 13 de 2021 [33].

Dado que la media de pruebas COVID realizadas es baja (alrededor de 0.29 pruebas por mil habitantes [79]), se considera que todos los casos reportados corresponden a casos sintomáticos. En la Figura 2.12 se observan los casos reportados en la Ciudad de México. Note que a diferencia de la evolución natural del modelo A-SIR (Figura 2.7), se aprecian olas de contagio debido a las diferentes acciones tomadas por las autoridades (confinamientos y restricciones de movilidad). Además, observe que los datos reportados presentan ruido. Para suavizar la curva de datos reportados y emular así un caso sin ruido, se aplica una media móvil.

Las estimaciones obtenidas por el observador PI con los datos reportados se observan en la Figura 2.13. Las condiciones iniciales utilizadas son las mismas que las de la tabla 2.2, además de  $\kappa_p = 100$  y  $\kappa_i = 50$ . Note que en este caso, las poblaciones no son normalizadas, es decir, se muestran considerando la población total de la Ciudad de México ( $N = 9,209,944$  [45]). Las estimaciones con los datos originales se presentan con líneas discontinuas, mientras que los datos con la curva suavizada se presentan en línea continua.

Debido a que en este caso particular no se dispone de información sobre la evolución de las poblaciones de individuos susceptibles, removidos o asintomáticos, no es posible comparar de forma directa los estimados obtenidos, y por lo tanto, tener algún

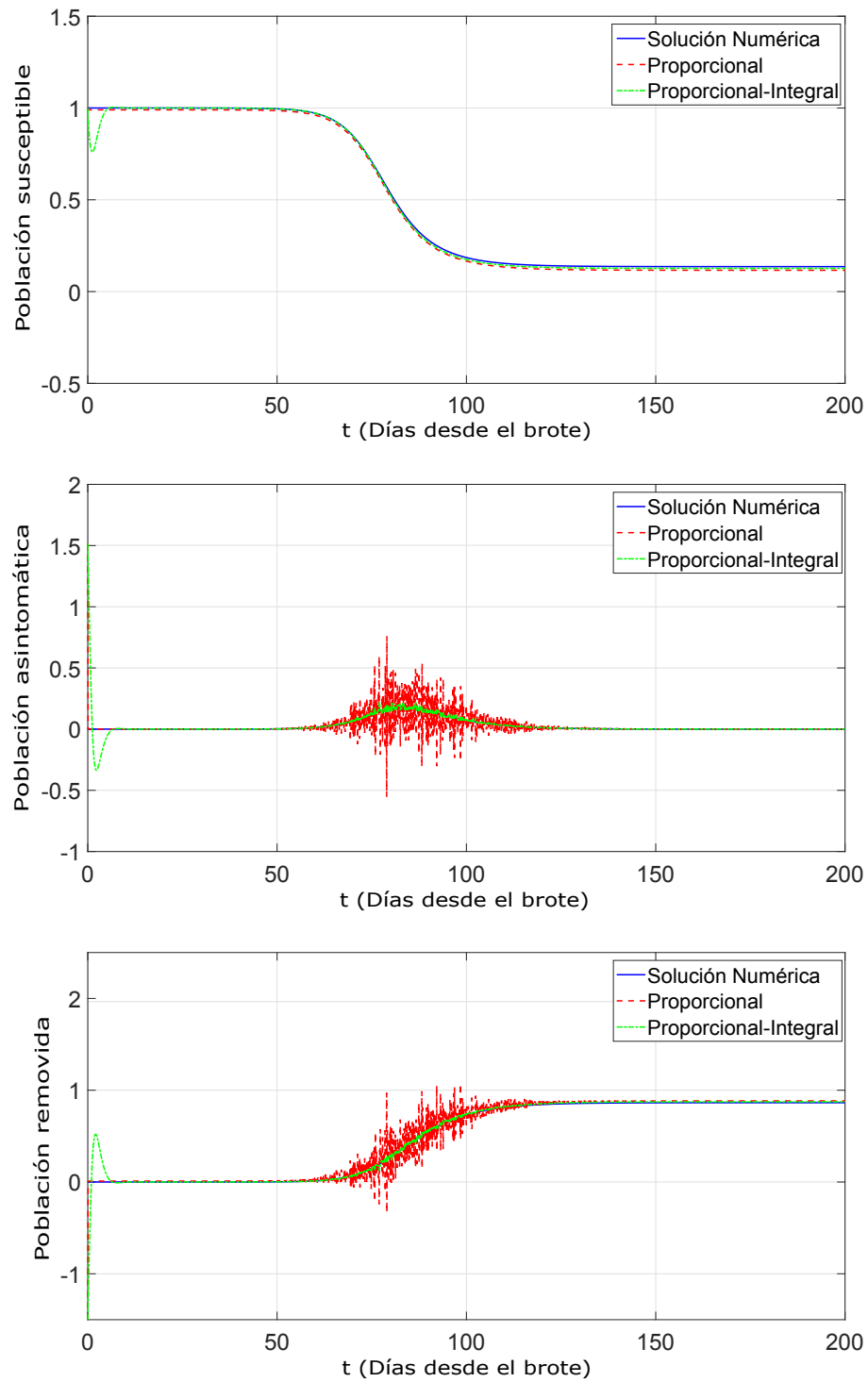


Figura 2.10: Estimación de la diferentes poblaciones con ruido y considerando la solución numérica del modelo A-SIR.



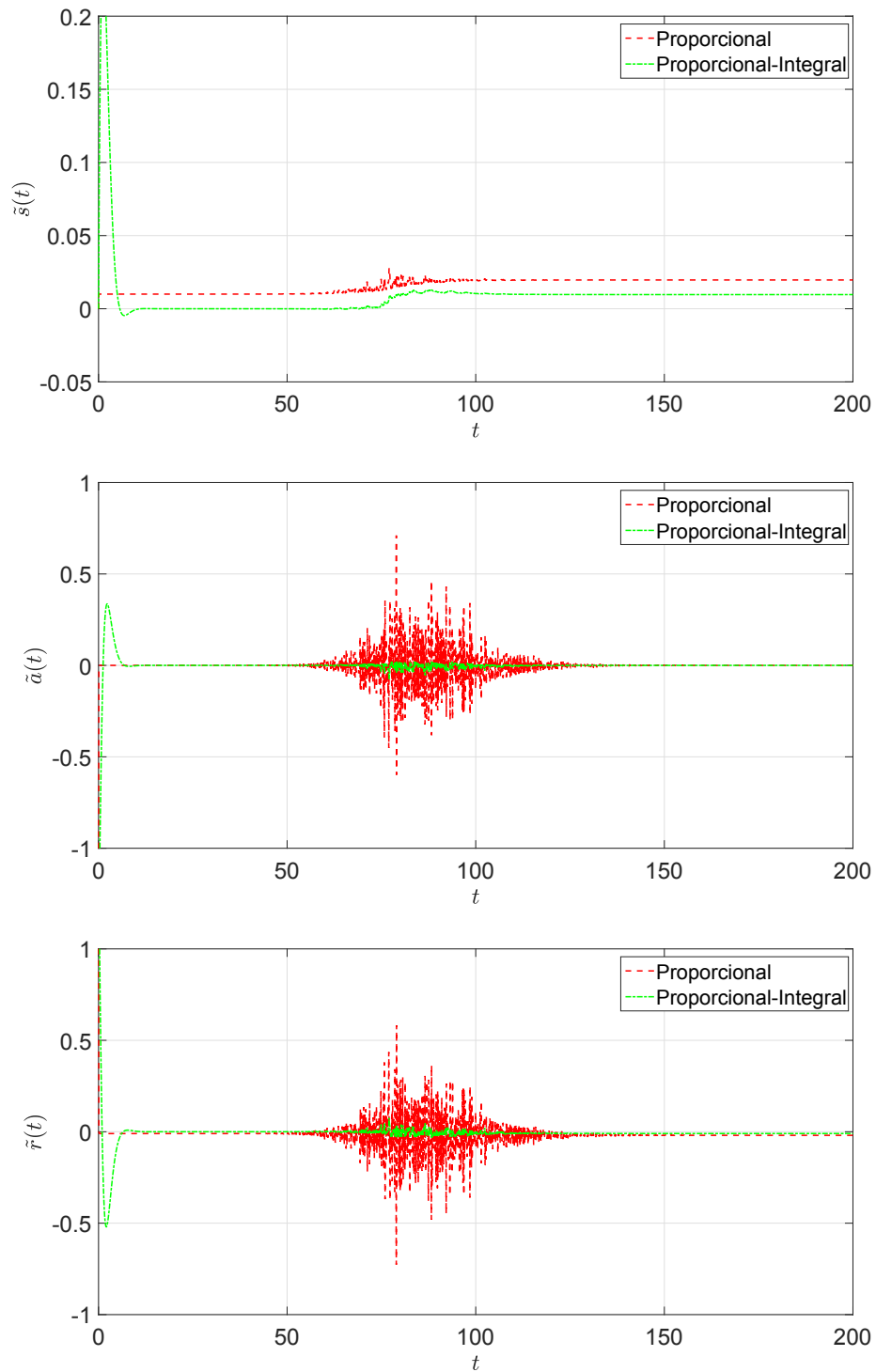


Figura 2.11: Errores de estimación con ruido de la diferentes poblaciones y considerando la solución numérica del modelo A-SIR.

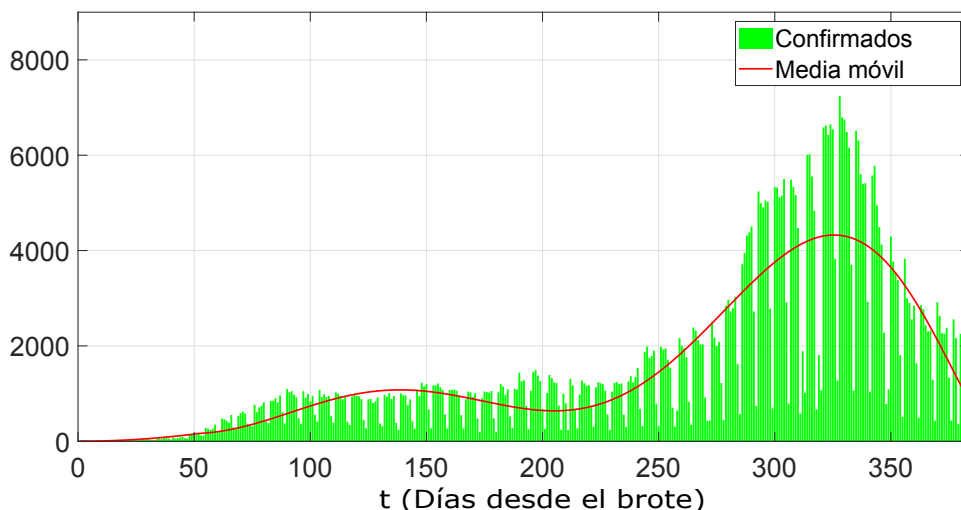


Figura 2.12: Datos reportados en Ciudad de México durante la pandemia COVID-19 entre febrero 22 de 2020 y marzo 13 de 2021.

indicio de si dichas estimaciones son correctas. No obstante, se dispone de información respecto al número de fallecidos en la Ciudad de México hasta marzo 13 de 2021 (29,047 desde el inicio de la pandemia), así como del número de casos reportados acumulados (583,698) [33]. Por otro lado, se conoce la tasa de mortalidad estimada del virus (proporción entre número de fallecidos y número de casos confirmados), misma que es de 4.98% [46]. Además, considerando que la fracción de individuos sintomáticos es de 0.15, es posible multiplicar el número de fallecidos por el factor  $f = (100/\mathcal{M}) * (100/15)$ , donde  $\mathcal{M}$  es la tasa de mortalidad.

La curvas resultantes, considerando diferentes tasas de mortalidad, se observan en la Figura 2.13.c. Note que la curva estimada de individuos removidos se ajusta con la curva proyectada considerando una tasa de mortalidad de 4.98%, al menos durante los últimos 50 días. Esto puede considerarse como un indicativo de que las estimaciones obtenidas son correctas, considerando claro que la tasa de mortalidad es variable. En el caso específico de la Ciudad de México, esta osciló entre el 12.4% (junio 2020) y el 9% (marzo 2021).

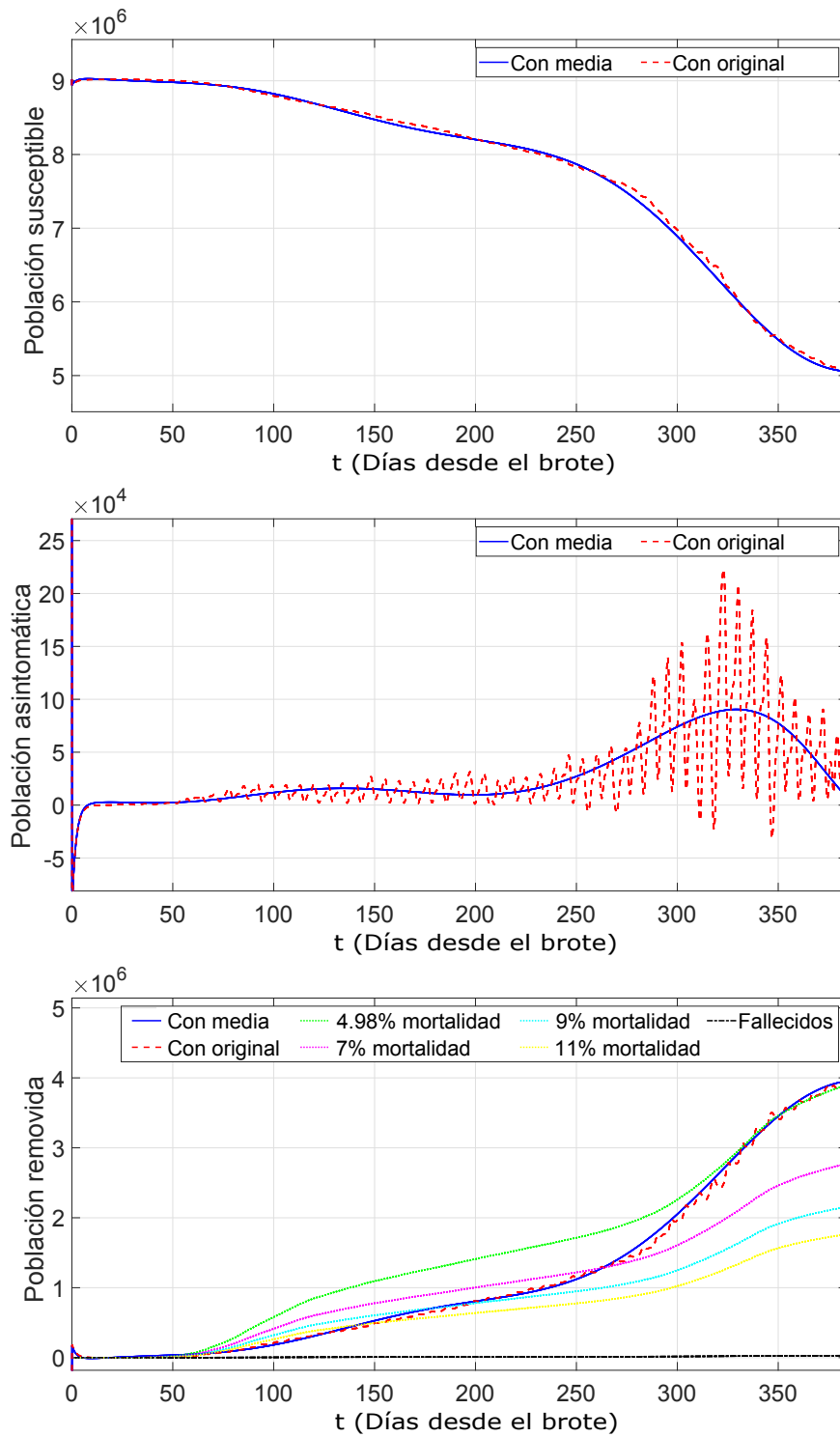


Figura 2.13: Estimaciones obtenidas por el observador PI con datos oficiales, Ciudad de México.



# Capítulo 3

## Observador de Alta Ganancia de orden fraccional.

Un tipo de observadores para sistemas no lineales que presenta gran robustez contra perturbaciones externas y ruido de medición, son los *observadores de alta ganancia* [66, 63]. Este tipo de observadores fueron introducidos por primera vez a principios de la década de los 90 [14, 31]. Además de su robustez, presentan una rápida convergencia al valor estimado, misma que, a diferencia de otros observadores, depende de un único parámetro.

Debido a sus excelentes resultados, esta clase de observadores ha sido ampliamente aplicada a sistemas de orden entero [47, 55, 57], no obstante, ha sido poco explorada e implementada en el caso fraccional [62, 27].

En este capítulo se presenta un *Observador de Alta Ganancia* para sistemas no lineales de orden fraccional con dinámicas no modeladas y que presentan ruido en la salida. El observador de estados presentado es *globalmente Mittag-Leffler acotado*, es decir, su error de estimación es uniformemente acotado y converge asintóticamente a un conjunto compacto atractivo.

### 3.1. Nociones fundamentales de cálculo fraccional

El cálculo fraccional es una generalización del cálculo clásico, no obstante, a diferencia del último, en la literatura es posible hallar distintas formas de definir una derivada de orden no entero  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entre las diferentes definiciones existentes, las más conocidas y utilizadas son la de Riemann–Liouville, la derivada de Caputo, la de Grünwald–Letnikov y la definición de Atangana–Baleanu [81, 69, 86].

Cada una de estas definiciones presenta particularidades, y su utilidad depende en gran medida de la formulación del problema que se está tratando. En este capítulo se hará uso de la derivada fraccional de Caputo. El principal motivo de esta decisión,

es que a diferencia del resto, admite condiciones iniciales y de frontera clásicas, es decir, dadas por derivadas de orden entero. Esta propiedad es particularmente útil, pues permite interpretar con facilidad el significado de dichas condiciones.

Por simplicidad, se denotará la derivada de Caputo de orden fraccional  $\alpha$  solo como  $D^\alpha$ .

**Definición 3.1.** [81] Sea  $\beta$  real positivo. La función

$$E_\beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\beta + 1)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

siempre que sea convergente, se conoce como función Mittag-Leffler.

Ahora, para introducir las siguientes definiciones, considere antes un sistema de orden fraccional dado por

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (3.2)$$

donde  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , y  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua a trozos en  $t$  y Lipschitz con respecto a  $x$ .

**Definición 3.2.** [23] El sistema no lineal de orden fraccional (3.2) se dice uniformemente acotado si para algún  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| \leq \delta, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

para toda condición inicial  $x(0)$ .

**Definición 3.3.** [99] Si existe una función positiva definida, radialmente no acotada  $V(t, x(t))$ , una función continua no negativa  $G(t, x(t))$ , y constantes positivas  $l > 0$  y  $\gamma > 0$  tal que para cualquier solución  $x(t)$  de (3.2), se tiene que

$$V(t, x(t)) - l \leq [G(0, x(0))] E_\alpha(-\gamma t^\alpha), \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

tal que el sistema (3.2) se dice ser globalmente Mittag-Leffler atractivo con respecto a  $V(t, x(t))$ , y el conjunto compacto  $\Omega = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid V(t, x(t)) \leq l\}$  se conoce como el conjunto compacto globalmente atractivo Mittag-Leffler del sistema (3.2).

**Definición 3.4.** [99] Si el sistema (3.2) es uniformemente acotado y globalmente Mittag-Leffler atractivo, entonces se dice que está globalmente Mittag-Leffler acotado.

**Teorema 3.1.** [53] Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema (3.2) y  $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable y Lipschitz con respecto a  $x$  tal que

$$\beta_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \beta_2 \|x\|^{ab} \quad (3.5)$$

y

$$D^\alpha V(t, x(t)) \leq -\beta_3 \|x\|^{ab}, \quad (3.6)$$

donde  $t \geq 0$  y  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, b$  son constantes positivas arbitrarias. Entonces,  $x = 0$  es globalmente Mittag-Leffler estable.

□

Note que la Definición 3.4 y el Teorema 3.1 están estrechamente relacionados. Esto es, si la solución  $x(t)$  del sistema (3.2) es globalmente Mittag-Leffler estable, entonces  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por otro lado, si el sistema (3.2) es globalmente Mittag-Leffler acotado, entonces existe un conjunto compacto atractivo al cual la solución  $x(t)$  converge asintóticamente y por lo tanto, es uniformemente ultimamente acotado.

**Lema 3.1.** [56] Sea  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  un vector de funciones diferenciables,  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces, para cualquier  $t \geq 0$ , la siguiente desigualdad se satisface

$$\frac{1}{2} D^\alpha [x^T(t) P x(t)] \leq x^T(t) P D^\alpha x(t), \quad (3.7)$$

con  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P = P^T > 0$ .

□

**Lema 3.2.** [19] Sea  $V(t)$  una función continua en  $[0, \infty)$  tal que

$$D^\alpha V(t) \leq \gamma V(t),$$

con  $0 < \alpha < 1$  y constante  $\gamma$ . Entonces

$$V(t) \leq V(0) E_\alpha(\gamma t^\alpha), \quad t \geq 0.$$

□

**Lema 3.3.** Para  $a > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , la siguiente desigualdad se satisface

$$-ax^2 + xy \leq -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2a}y^2.$$

*Demostración.* Se sabe que para cualquier  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $(ax - y)^2 \geq 0$ . Entonces, multiplicando por  $-\frac{1}{2a}$ , con  $a > 0$ , se tiene que

$$-\frac{1}{2}ax^2 + xy - \frac{1}{2a}y^2 = -ax^2 + \frac{1}{2}ax^2 + xy - \frac{1}{2a}y^2 \leq 0. \quad (3.8)$$

□

## 3.2. Diseño de un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado

Considere ahora el siguiente sistema no lineal de orden fraccional:

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + \phi(x(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t) + \varpi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema, el cual es parcialmente conocido,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  es un vector de entradas,  $y \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varpi$  es un término de ruido aditivo en la medición y  $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función no lineal localmente Lipschitz con respecto a  $x$ . Este último término representa la dinámica no modelada del sistema.

Adicionalmente, suponga que el término de ruido aditivo  $\varpi$  está acotado, i.e., existe una constante positiva  $\bar{M}$  tal que  $\|\varpi\| \leq \bar{M}$ .

Se desea estimar las variables no conocidas del sistema (3.9) (variables de estado y dinámica no modelada). Por lo tanto, se propone un observador de alta ganancia que es globalmente Mittag-Leffler acotado.

Considere el siguiente sistema aumentado de (3.9)

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + \phi(x, u), \\ D^\alpha x_*(t) &= Cx(t) + \varpi, \\ D^\alpha \phi(x, u) &= \Theta(x, u), \\ y_*(t) &= x_*(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $y_*(t) \in \mathbb{R}$ . Note que la salida de este nuevo sistema no depende directamente del ruido de medición y que  $\phi$  se trata como una nueva variable de estado. Entonces, el sistema (3.10) se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D^\alpha X(t) &= \mathcal{A}X(t) + \Phi(X, u) + \mathcal{W}, \\ y_*(t) &= \mathcal{C}X(t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

con

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_*(t) \\ \phi(x, u) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & I_n \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(X, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta(x, u) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varpi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = [0 \ 1 \ 0], \quad (3.12)$$

donde  $I_n$  es una matriz identidad  $n$ -dimensional. Note que  $X(t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(2n+1) \times (2n+1)}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n+1}$  y  $\mathcal{C}^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$ .



El sistema aumentado (3.10) hace que el ruido de medición sea parte de la variable  $x_*$ , i.e., es ahora una perturbación de estado. En consecuencia, el ruido se ve sujeto a una acción integral fraccional al hallar la solución del sistema aumentado, debido a esto, tal perturbación es atenuada, proporcionando robustez al observador de alta ganancia.

Entonces, se propone el siguiente observador fraccional de alta ganancia para el sistema (3.11):

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{X}(t) &= \mathcal{A}\hat{X}(t) + \Phi(\hat{X}, u) + S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T \left( y_*(t) - \mathcal{C}\hat{X}(t) \right), \\ \hat{y}_*(t) &= \mathcal{C}\hat{X}(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\hat{X}(t) = [\hat{x}(t), \hat{x}_*(t), \phi(\hat{x}, u)]^T \in \mathbb{R}^{2n+1}$  es la estimación de  $X$  y la matriz  $S_\theta$  es conocida como la *matriz de alta ganancia*. Además, la matriz  $S_\theta = S_\theta^T > 0$  es solución de la siguiente ecuación algebraica de Riccati

$$\theta S_\theta(t) + \mathcal{A}^T S_\theta(t) + S_\theta(t)\mathcal{A} = \mathcal{C}^T \mathcal{C}, \quad S_\theta(0) = S_{\theta_0}, \quad (3.14)$$

con  $\theta > 0$ . La matriz de alta ganancia  $S_\theta$  se define como

$$(S_\theta)_{i,j} = \nu_{i,j} \frac{(-1)^{i+j}}{\theta^{i+j-1}},$$

donde  $\nu_{i,j}$  es un coeficiente binomial dado por

$$\nu_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1}.$$

Defina ahora el error de estimación del sistema aumentado como  $\mathcal{E}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ . Entonces, de (3.11) y (3.13) se tiene que la dinámica del error de estimación es

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathcal{E}(t) &= \mathcal{A}X(t) + \Phi(X, u) + \mathcal{W} - \mathcal{A}\hat{X}(t) - \Phi(\hat{X}, u) - S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T \left( \mathcal{C}X(t) - \mathcal{C}\hat{X}(t) \right) \\ &= [\mathcal{A} - S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T \mathcal{C}] \mathcal{E}(t) + \mathcal{R}(\mathcal{E}, u) + \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\mathcal{R}(\mathcal{E}, u) = \Phi(\hat{X} + \mathcal{E}, u) - \Phi(\hat{X}, u)$ . Por otro lado, denote  $\|x\|_{S_\theta}^2 = x^T S_\theta x$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, si  $\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)$  es diferenciable, se tiene que  $\|\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\|_{S_\theta} \leq L\|\mathcal{E}\|_{S_\theta}$ , para algún  $L > 0$ .

De tal manera, que se establece el siguiente teorema, el cual demuestra que el sistema (3.13) es un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado, i.e., un observador cuyo error de estimación es uniformemente acotado y converge a un conjunto compacto atractivo.

**Teorema 3.2.** *El sistema (3.13) es un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado para el sistema (3.11), cuyo error de estimación  $\mathcal{E}(t)$  converge asintóticamente y permanece en el conjunto compacto  $B_o = \{\mathcal{E}(t) \mid \|\mathcal{E}(t)\| \leq b, b > 0\}$ , con*

$$b = \left[ \left( \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \|\mathcal{E}(0)\|^2 - \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right) E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right]^{1/2},$$

donde  $\theta > 0$ ,  $\gamma = \theta - 2L > 0$  and  $\mu = \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2}$ .

*Demostración.* Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\mathcal{E}(t)) = \mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{E}(t) = \|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2, \quad V(0) = 0. \quad (3.16)$$

Entonces, a partir del Lema 3.1 y de la expresión (3.15), se tiene que

$$\begin{aligned} D^\alpha V(\mathcal{E}(t)) &\leq 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta D^\alpha \mathcal{E}(t), \\ &\leq 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{A} \mathcal{E}(t) - 2\mathcal{E}^T(t) \mathcal{C}^T \mathcal{C} \mathcal{E}(t) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\mathcal{E}, u) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por otro lado, de la ecuación algebraica de Riccati (3.14), se sabe que

$$2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{A} \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}^T(t) \mathcal{C}^T \mathcal{C} \mathcal{E}(t) - \theta \mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{E}(t), \quad (3.18)$$

entonces, substituyendo (3.18) en (3.17) se tiene

$$\begin{aligned} D^\alpha V(\mathcal{E}(t)) &\leq -\theta \mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}^T(t) \mathcal{C}^T \mathcal{C} \mathcal{E}(t) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\mathcal{E}, u) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{W}, \\ &\leq -\theta \mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{E}(t) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\mathcal{E}, u) + 2\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ahora, para hallar una cota superior para (3.19) considere lo siguiente: Dado que  $S_\theta = S_\theta^T > 0$ , es posible aplicar la descomposición de Cholesky, i.e.,  $S_\theta = MM^T$ , donde  $M$  es una matriz triangular superior con  $M_{i,j} > 0$  para  $i = j$ . Entonces, considerando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para el segundo término se tiene que

$$\|\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\| = \|\mathcal{E}^T(t) MM^T \mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\| \leq \|\mathcal{E}^T(t) M\| \|M^T \mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\|. \quad (3.20)$$

Se sigue que

$$\|\mathcal{E}^T(t) M\| = (\mathcal{E}^T(t) MM^T \mathcal{E}(t))^{1/2} = (\mathcal{E}^T(t) S_\theta \mathcal{E}(t))^{1/2} = \|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta} \quad (3.21)$$

y

$$\begin{aligned} \|M^T \mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\| &= (\mathcal{R}^T(\mathcal{E}, u) MM^T \mathcal{R}(\mathcal{E}, u))^{1/2} = (\mathcal{R}^T(\mathcal{E}, u) S_\theta \mathcal{R}(\mathcal{E}, u))^{1/2} \\ &= \|\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\|_{S_\theta}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

por lo tanto  $\|\mathcal{E}^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\| \leq \|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}\|\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\|_{S_\theta}$ . Ahora, ya que  $R(\mathcal{E}, u)$  es diferenciable, se tiene que

$$\|R(\mathcal{E}, u)\|_{S_\theta} \leq L\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}, \quad (3.23)$$

tal que

$$\|\mathcal{E}^T(t)S_\theta\mathcal{R}(\mathcal{E}, u)\| \leq L\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2. \quad (3.24)$$

Por otro lado, para el tercer término, considere que

$$\|\mathcal{E}^T(t)S_\theta\mathcal{W}\| = \|\mathcal{E}^T(t)MM^T\mathcal{W}\| \leq \|\mathcal{E}^T(t)M\|\|M^T\mathcal{W}\|, \quad (3.25)$$

de donde se tiene que

$$\|\mathcal{E}^T(t)M\| = (\mathcal{E}^T(t)MM^T\mathcal{E}(t))^{1/2} = (\mathcal{E}^T(t)S_\theta\mathcal{E}(t))^{1/2} = \|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta} \quad (3.26)$$

y

$$\|M^T\mathcal{W}\| = (\mathcal{W}^TMM^T\mathcal{W})^{1/2} = (\mathcal{W}^TS_\theta\mathcal{W})^{1/2} = \|\mathcal{W}\|_{S_\theta}. \quad (3.27)$$

Ya que  $\varpi$  es acotada, entonces  $\|\mathcal{W}\|_{S_\theta} \leq \bar{M}$ , tal que

$$\|\mathcal{E}^T(t)S_\theta\mathcal{W}\| \leq \bar{M}\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto, (3.19) permanece acotada y satisface

$$\begin{aligned} D^\alpha V(\mathcal{E}(t)) &\leq -\theta\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M}\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta} \\ &\leq -\gamma\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M}\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $\gamma = \theta - 2L$ . Sea  $\theta > 2L$  tal que  $\gamma > 0$ . Entonces, a partir del Lema 3.3, se tiene

$$\begin{aligned} D^\alpha V(\mathcal{E}(t)) &\leq -\frac{1}{2}\gamma\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + \frac{1}{2\gamma}(2\bar{M})^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}\gamma V(\mathcal{E}(t)) + \frac{2\bar{M}^2}{\gamma}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

i.e.,

$$D^\alpha \left( V(\mathcal{E}(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right) \leq -\frac{1}{2}\gamma \left( V(\mathcal{E}(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right). \quad (3.31)$$

Así, del Lema 3.2 sigue que

$$V(\mathcal{E}(t)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \leq \left[ V(\mathcal{E}(0)) - \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2} \right] E_\alpha \left( -\frac{1}{2}\gamma t^\alpha \right), \quad (3.32)$$

i.e., el sistema (3.13) es globalmente Mittag-Leffler atractivo, cuyo conjunto compacto globalmente Mittag-Leffler atractivo es

$$\Omega_o = \{ \mathcal{E}(t) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid V(\mathcal{E}(t)) \leq \mu \}, \quad (3.33)$$

donde  $\mu = \frac{4\bar{M}^2}{\gamma^2}$ . Más aún, considerando la desigualdad de Rayleigh-Ritz, se tiene que

$$\lambda_{\min}(S_\theta) \|\mathcal{E}(t)\|^2 \leq V(\mathcal{E}(t)) \leq \lambda_{\max}(S_\theta) \|\mathcal{E}(t)\|^2 \quad (3.34)$$

Además, de la expresión (3.32) se tiene

$$\lambda_{\min}(S_\theta) \|\mathcal{E}(t)\|^2 \leq V(\mathcal{E}(t)) \leq [V(\mathcal{E}(0)) - \mu] E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \mu \quad (3.35)$$

Y, considerando nuevamente la desigualdad de Rayleigh-Ritz, i.e.,

$$[V(\mathcal{E}(0)) - \mu] E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \mu \leq (\lambda_{\max}(S_\theta) \|\mathcal{E}(0)\|^2 - \mu) E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \mu \quad (3.36)$$

tal que

$$\lambda_{\min}(S_\theta) \|\mathcal{E}(t)\|^2 \leq V(\mathcal{E}(t)) \leq (\lambda_{\max}(S_\theta) \|\mathcal{E}(0)\|^2 - \mu) E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \mu, \quad (3.37)$$

Por lo tanto

$$\|\mathcal{E}(t)\| \leq \left[ \left( \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \|\mathcal{E}(0)\|^2 - \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right) E_\alpha \left( -\frac{1}{2} \gamma t^\alpha \right) + \frac{\mu}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right]^{1/2} = b, \quad (3.38)$$

i.e., para cualquier condición inicial  $\mathcal{E}(0)$ , el error de estimación es uniformemente acotado y permanece en el conjunto compacto  $B_o = \{ \mathcal{E}(t) \mid \|\mathcal{E}(t)\| \leq b, b > 0 \}$ . Por lo tanto, se concluye que el sistema (3.13) es un observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado.  $\square$

Note en la expresión (3.38) que la tasa de convergencia de la estimación es igual a  $\theta - 2L$ , esto es, mientras más grande sea el valor de  $\theta$ , la velocidad de convergencia incrementa. No obstante, también cabe señalar que un valor demasiado grande de  $\theta$  puede generar una amplificación del ruido de medición.

**Corolario 3.1.** *Si el ruido aditivo de medición es  $\varpi = 0$ , entonces el sistema (3.13) es un observador de alta ganancia Mittag-Leffler estable para el sistema (3.11) y su error de estimación satisface*

$$\|\mathcal{E}(t)\| \leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \right]^{1/2} \|\mathcal{E}(0)\|,$$

donde  $\theta > 0$  y  $\gamma = \theta - 2L > 0$ .

*Demostración.* Considere la misma función candidata de Lyapunov de la prueba anterior

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\mathcal{E}(t)\|^2 \leq V(\mathcal{E}(t)) = \|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 \leq \lambda_{\max}(S_\theta)\|\mathcal{E}(t)\|^2 \quad (3.39)$$

Siguiendo el mismo análisis, se tiene

$$D^\alpha V(\mathcal{E}(t)) \leq -\theta\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 = -\gamma\lambda_{\min}(S_\theta)\|\mathcal{E}(t)\|^2, \quad (3.40)$$

donde  $\gamma = \theta - 2L > 0$ . Así, las condiciones (3.5) y (3.6) del Teorema 3.1 se satisfacen, i.e., el punto de equilibrio  $\mathcal{E} = 0$  del observador de alta ganancia (3.13) es Mittag-Leffler estable. Más aún, a partir del Lema 3.2 y de la desigualdad de Rayleigh-Ritz, se tiene que

$$\lambda_{\min}(S_\theta)\|\mathcal{E}(t)\|^2 \leq V(\mathcal{E}(t)) \leq V(\mathcal{E}(0))E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \leq \lambda_{\max}(S_\theta)\|\mathcal{E}(0)\|^2 E_\alpha(-\gamma t^\alpha). \quad (3.41)$$

Por lo tanto, el error de estimación satisface

$$\|\mathcal{E}(t)\| \leq \left[ \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \right]^{1/2} \|\mathcal{E}(0)\|. \quad (3.42)$$

□

**Corolario 3.2.** *Si el orden de derivación es  $\alpha = 1$ , entonces (3.13) es un observador de alta ganancia uniformemente últimamente acotado para el sistema (3.11), cuyo error de estimación satisface*

$$\|\mathcal{E}(t)\| \leq \left( \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right)^{1/2} \left( \frac{2\bar{M}\sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}}{\gamma\lambda_{\min}(S_\theta)} \right), \quad (3.43)$$

donde  $\theta > 0$  y  $\gamma = \theta - 2L > 0$ .

*Demostración.* Considere la misma función candidata de Lyapunov de la prueba anterior y siga un análisis similar. Por lo tanto, se tiene

$$\dot{V}(\mathcal{E}(t)) \leq -\theta\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2L\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2 + 2\bar{M}\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}, \quad (3.44)$$

Así, de la desigualdad de Rayleigh-Ritz se obtiene

$$\dot{V}(\mathcal{E}(t)) \leq -(\theta - 2L)\lambda_{\min}(S_\theta)\|\mathcal{E}(t)\|^2 + 2\bar{M}\sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}\|\mathcal{E}(t)\|. \quad (3.45)$$

Luego, aplicando el Teorema de última cota uniforme [23], se tiene que si  $\gamma = \theta - 2L > 0$ , con  $\theta > 0$ , entonces  $\mathcal{E}(t)$  es uniformemente últimamente acotado para cualquier  $\mathcal{E}(0)$ , y permanece en el conjunto compacto  $B_{o_1} = \{\mathcal{E}(t) \mid \|\mathcal{E}(t)\| \leq b_1, b_1 > 0\}$ , donde

$$b_1 = \left( \frac{\lambda_{\max}(S_\theta)}{\lambda_{\min}(S_\theta)} \right)^{1/2} \left( \frac{2\bar{M}\sqrt{\lambda_{\max}(S_\theta)}}{\gamma\lambda_{\min}(S_\theta)} \right). \quad (3.46)$$

□

**Corolario 3.3.** Si  $\alpha = 1$  y el ruido de medición es  $\varpi = 0$ . Entonces, (3.13) es un observador de alta ganancia exponencialmente estable para el sistema (3.11), con  $\theta > 2L$ .

*Demostración.* Dado que  $\varpi = 0$ , a partir de (3.44), donde  $\bar{M} = 0$ , se tiene que

$$\dot{V}(\mathcal{E}(t)) \leq -(\theta - 2L)\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta}^2, \quad (3.47)$$

por lo tanto, se sigue que

$$\|\mathcal{E}(t)\|_{S_\theta} \leq \|\mathcal{E}(0)\|_{S_\theta} e^{-\left(\frac{\theta}{2} - L\right)t}, \quad (3.48)$$

tal que, si  $\theta > 2L$ , entonces el error de estimación decae exponencialmente a cero. □

### 3.3. Aplicación a un Biorreactor y resultados

Para ejemplificar la implementación del observador propuesto en este capítulo y más aún, validar su efectividad, considere el siguiente modelo de reactor bioquímico de agitación continua de orden fraccional [96]:

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= -ax_1(t) + g(x)x_1(t), & x_1(0) &= x_{10}, & x_2(0) &= x_{20}, \\ D^\alpha x_2(t) &= a(b - x_2(t)) - h(x), \\ y(t) &= x_1(t) + \varpi. \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde las constantes  $a > 0$  y  $b > 0$  son la tasa de dilución y la concentración de sustrato en la entrada del biorreactor, respectivamente. Las variables de estado  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  representan las concentraciones de biomasa y sustrato, mientras que

$$g(x) = \frac{0.3x_2}{1.75 + x_2}, \quad Y_d = 0.01 + 0.03x_2, \quad h(x) = \frac{g(x)}{Y_d}x_1.$$

donde  $Y_d$  es un coeficiente de rendimiento (conocido) y  $g(x)$  es la tasa de crecimiento específico. El término de ruido aditivo en la medición  $\varpi$  está acotado, i.e.,  $\|\varpi\| \leq \bar{M}$ . Por otro lado, el término  $h(x)$  es la velocidad de reacción. Note que en este ejemplo, los términos  $g(x)$  y  $h(x)$  representan dinámicas no modeladas del sistema.

El sistema (3.49) es equivalente al siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned}
D^\alpha x_1(t) &= -ax_1(t) + g(x)x_1, & x_1(0) &= x_{1_0}, & x_2(0) &= x_{2_0}, \\
D^\alpha x_2(t) &= a(b - x_2(t)) - h(x), \\
D^\alpha x_*(t) &= x_1(t) + \varpi, \\
D^\alpha \phi_1(x) &= \Theta_1(x), \\
D^\alpha \phi_2(x) &= \Theta_2(x), \\
y_*(t) &= x_*(t),
\end{aligned} \tag{3.50}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
D^\alpha X(t) &= \mathcal{A}X(t) + \Phi(X) + \mathcal{W}, \\
y_*(t) &= \mathcal{C}X(t),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

donde

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_*(t) \\ \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Theta_1(x) \\ \Theta_2(x) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{W} = [0 \ 0 \ \varpi \ 0 \ 0]^T, \quad \mathcal{C} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

con  $\phi_1(x) = g(x)x_1$  y  $\phi_2(x) = ab - h(x)$ . Por lo tanto, el observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado para el sistema (3.51) está dado por

$$\begin{aligned}
D^\alpha \hat{X}(t) &= \mathcal{A}\hat{X}(t) + \Phi(\hat{X}) + S_\theta^{-1}\mathcal{C}^T \left( y_*(t) - \mathcal{C}\hat{X}(t) \right), \\
y_*(t) &= \mathcal{C}\hat{X}(t),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde

$$S_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} & -\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{\theta^3} & -\frac{1}{\theta^4} & \frac{1}{\theta^5} \\ -\frac{1}{\theta^2} & \frac{2}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{4}{\theta^5} & -\frac{5}{\theta^6} \\ \frac{1}{\theta^3} & -\frac{3}{\theta^4} & \frac{6}{\theta^5} & -\frac{10}{\theta^6} & \frac{15}{\theta^7} \\ -\frac{1}{\theta^4} & \frac{4}{\theta^5} & -\frac{10}{\theta^6} & \frac{20}{\theta^7} & -\frac{35}{\theta^8} \\ \frac{1}{\theta^5} & -\frac{5}{\theta^6} & \frac{15}{\theta^7} & -\frac{35}{\theta^8} & \frac{70}{\theta^9} \end{bmatrix}.$$

Ahora, para la simulación numérica, considere los siguientes parámetros para el sistema:  $a = 0.12 \text{ h}^{-1}$  y  $b = 35 \text{ g/l}$ , junto con las condiciones iniciales  $x_1(0) = 4 \text{ g/l}$  y  $x_2(0) = 36 \text{ g/l}$ .

Para ilustrar los diferentes corolarios presentados, se consideran diferentes órdenes de derivación, así como también la ausencia de ruido de medición.

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento de biorreactor con diferentes órdenes de derivación. Observe como el orden de derivación influye en gran medida en el comportamiento del sistema.

Por otro lado, para el observador de alta ganancia, considere las siguientes condiciones iniciales:  $\hat{x}_1(0) = 0$  and  $\hat{x}_2(0) = 0$ . A su vez, cuando sea el caso, el ruido de medición es tal que  $\|\varpi\| \leq 1$ .

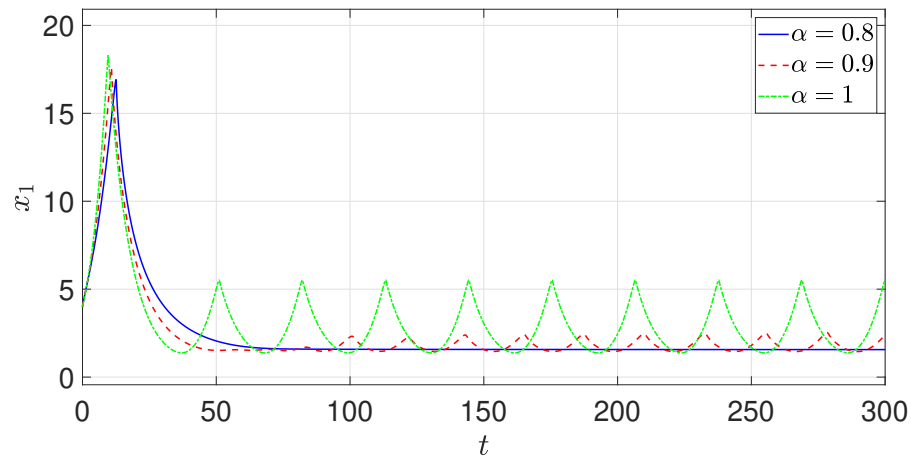
Las estimaciones obtenidas por el observador de alta ganancia considerando la presencia de ruido de medición y una dinámica fraccional se observan en la Figura 3.2. Note como la velocidad de convergencia incrementa conforme  $\theta$  crece. El erro de estimación, considerando  $\theta = 15$  se observa en la Figura 3.3. Note como el error de estimación efectivamente es globalmente Mittag-Leffler acotado (Teorema 3.2).

En la Figura 3.4 se muestran las estimaciones obtenidas sin ruido de medición y con orden de derivación fraccional. Por otro lado, en la Figura 3.5 se observa el error de estimación correspondiente a cuando  $\theta = 20$ . Note como el observador de alta ganancia es Mittag-Leffler estable (Corolario 3.1), dado que el error de estimación converge asintóticamente a cero.

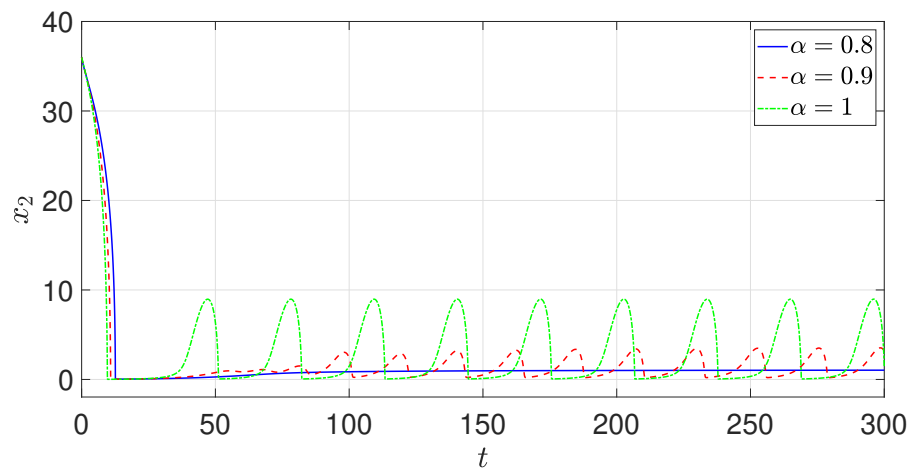
Ahora, considere un sistema de orden entero, i.e.,  $\alpha = 1$ , sujeto a ruido de medición. En la Figura 3.6 se observan las estimaciones obtenidas para este escenario. A su vez, el error de estimación correspondiente se presenta en la Figura 3.7. En este caso, el observador de alta ganancia es últimamente uniformemente acotado (Corolario 3.2).

Finalmente, cuando el orden de derivación es entero y no hay ruido de medición, las estimaciones obtenidas son las mostradas en la Figura 3.8. El error de estimación correspondiente se presenta en la Figura 3.9. En este escenario, el observador de alta ganancia es exponencialmente estable (Corolario 3.3).

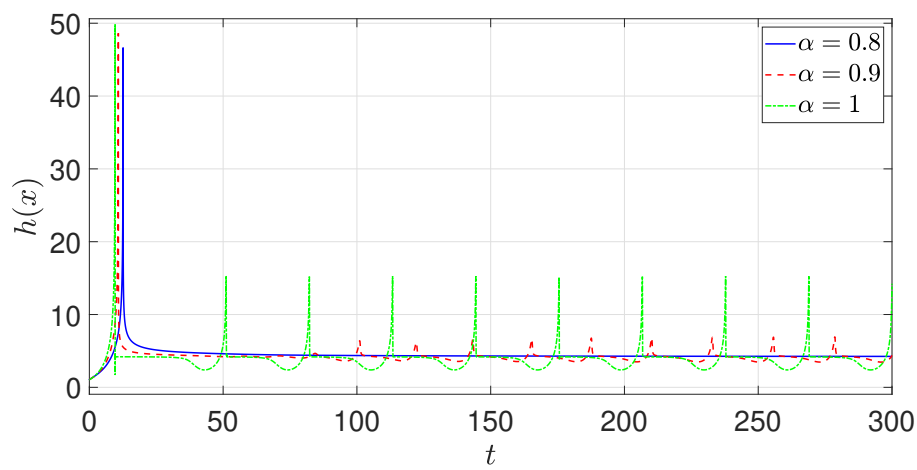




(a)

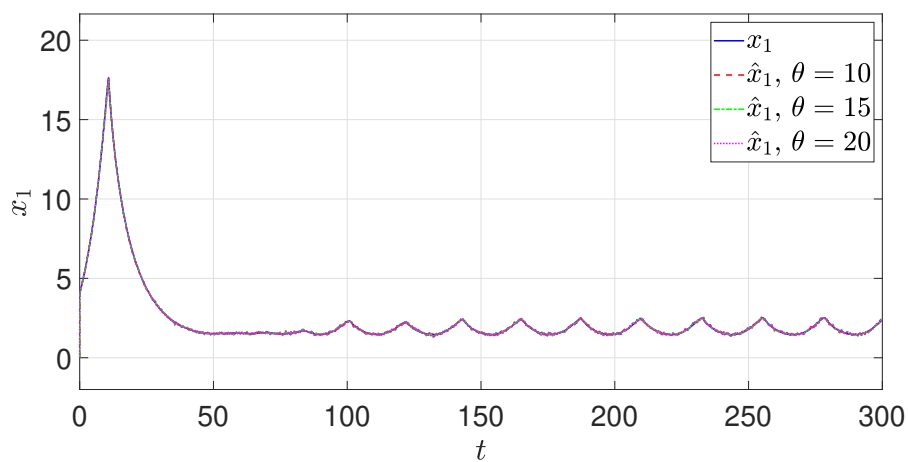


(b)

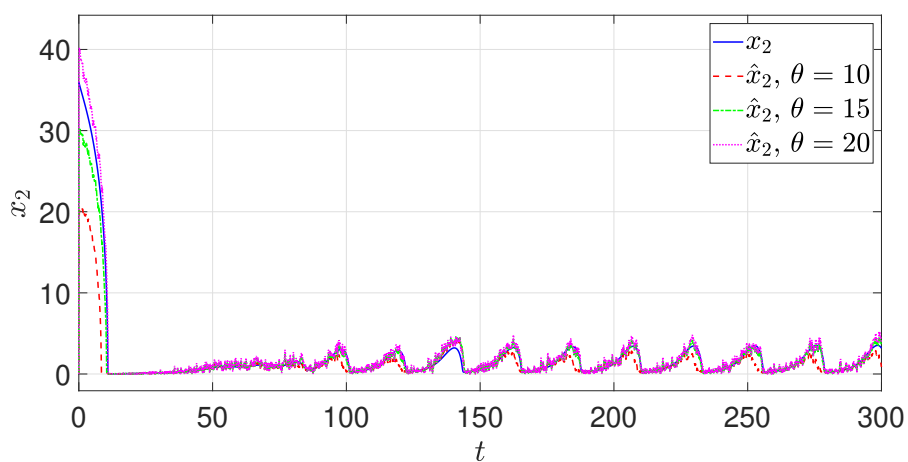


(c)

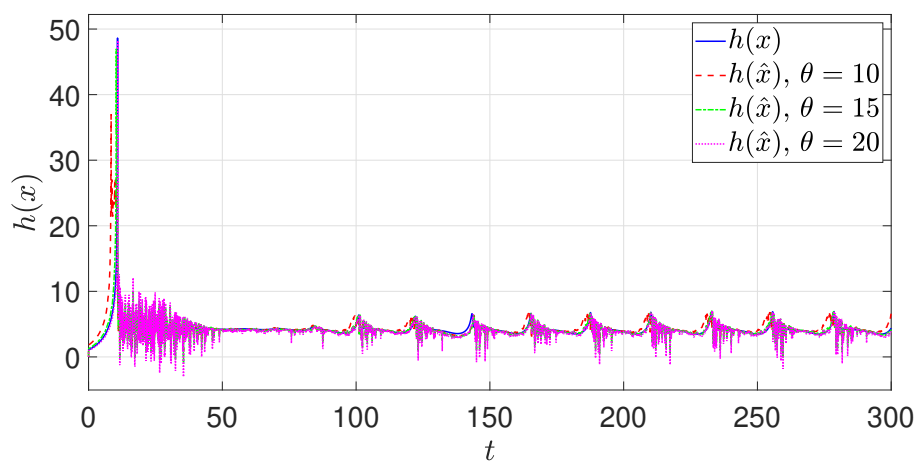
Figura 3.1: Biorreactor con diferentes órdenes de derivación: (a) concentración de biomasa, (b) concentración de sustrato y (c) velocidad de reacción.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.2: Estimaciones obtenidas con diferentes valor de ganancia y con ruido aditivo en la salida: (a) concentración de biomasa, (b) concentración de substrato y (c) velocidad de reacción. Orden de derivación  $\alpha = 0.9$ .

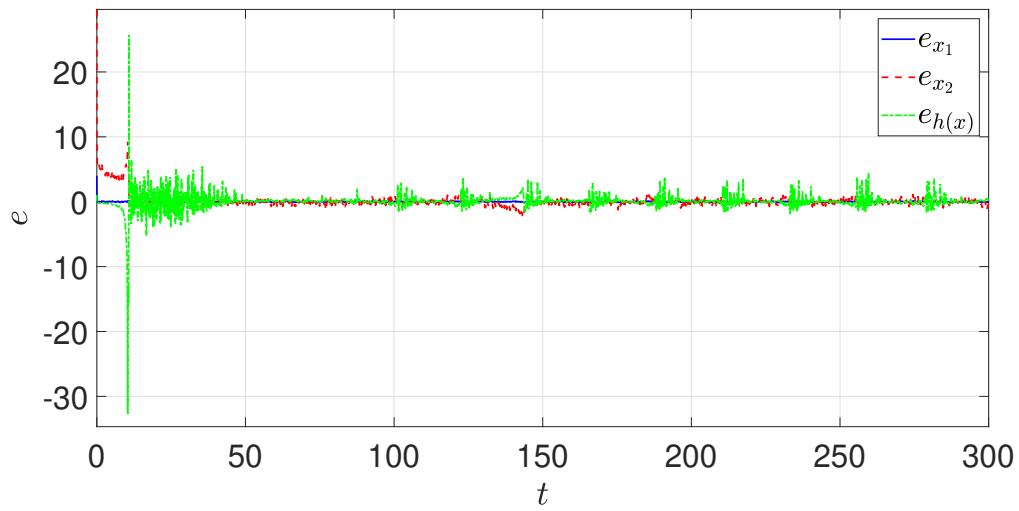
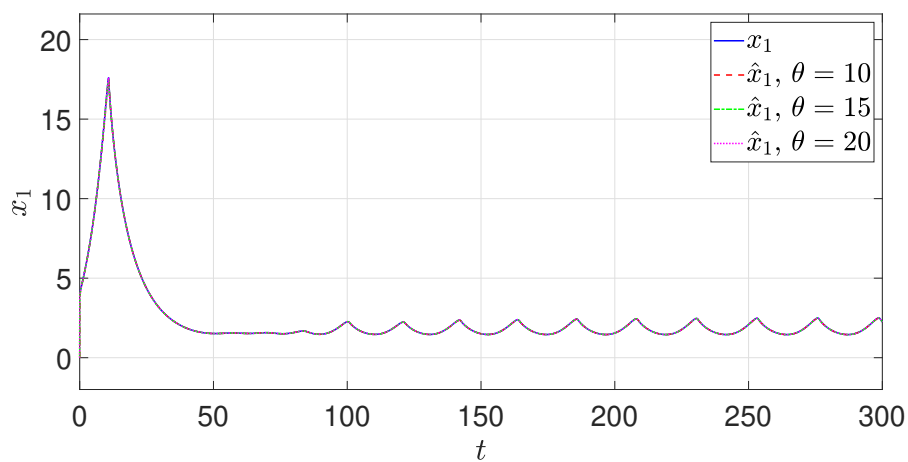
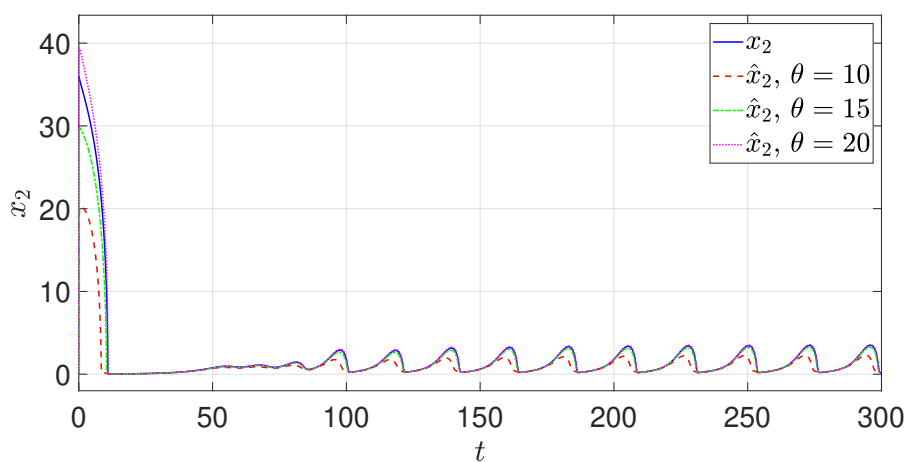


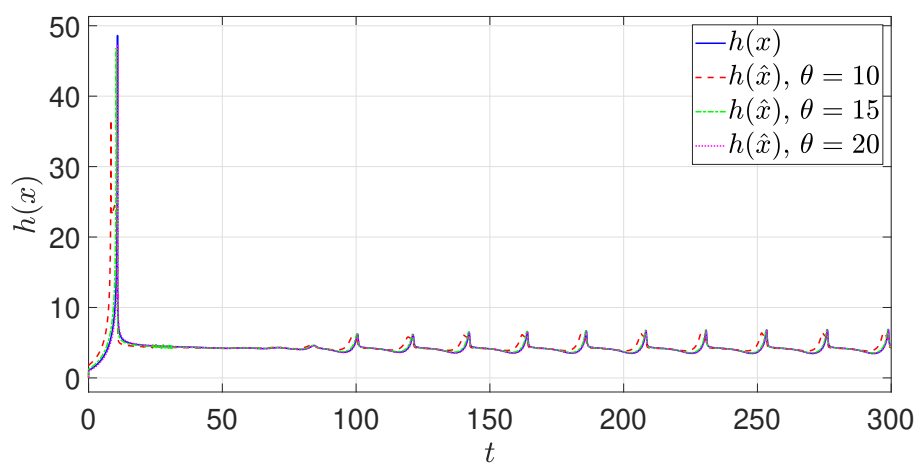
Figura 3.3: Error de estimación con  $\alpha = 0.9$ ,  $\theta = 15$  y ruido aditivo de medición.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4: Estimaciones con diferentes valores de ganancia y sin ruido de medición: (a) concentración de biomasa, (b) concentración de sustrato y (c) velocidad de reacción. Orden de derivación  $\alpha = 0.9$ .

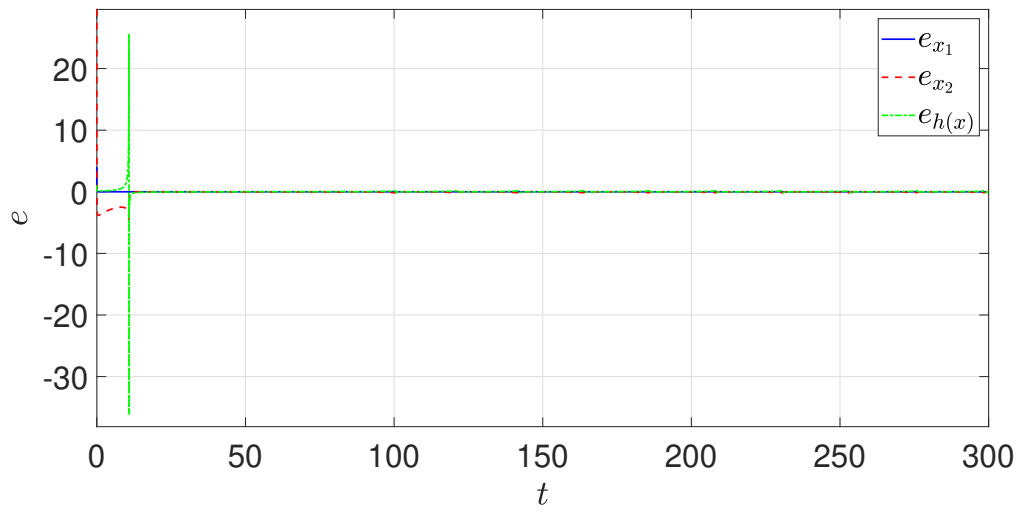
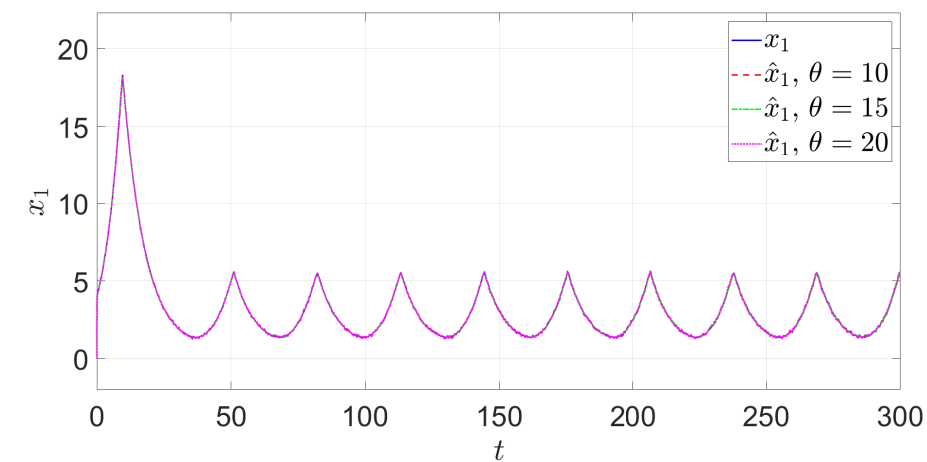
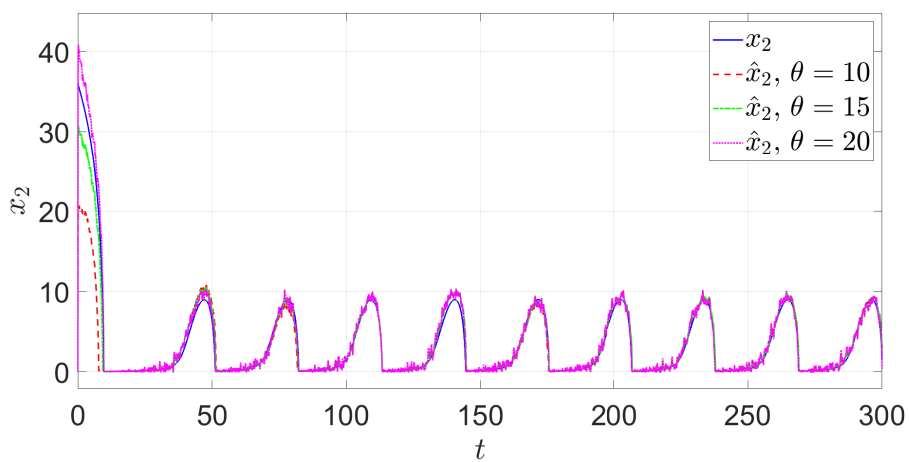


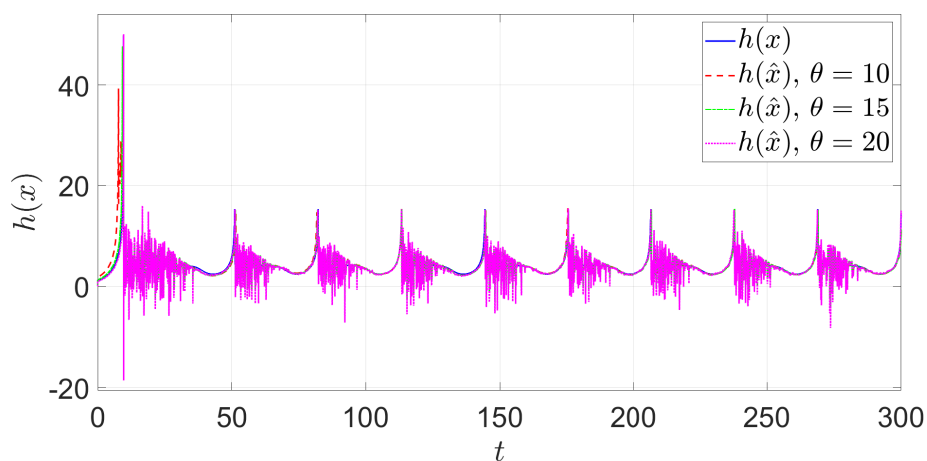
Figura 3.5: Error de estimación con  $\alpha = 0.9$ ,  $\theta = 20$  y sin ruido de medición.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.6: Estimaciones con diferentes valores de ganancia, ruido de medición y orden entero: (a) concentración de biomasa, (b) concentración de sustrato y (c) velocidad de reacción.

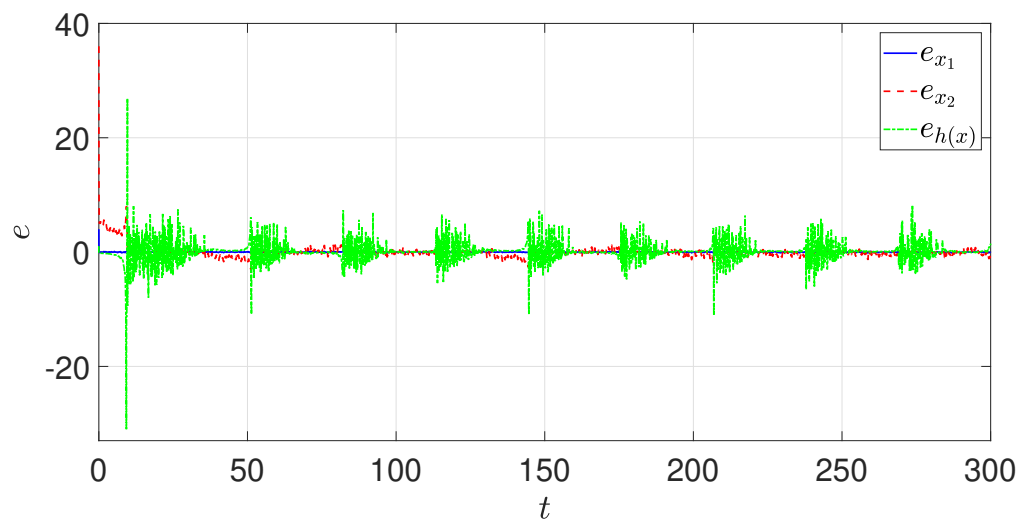
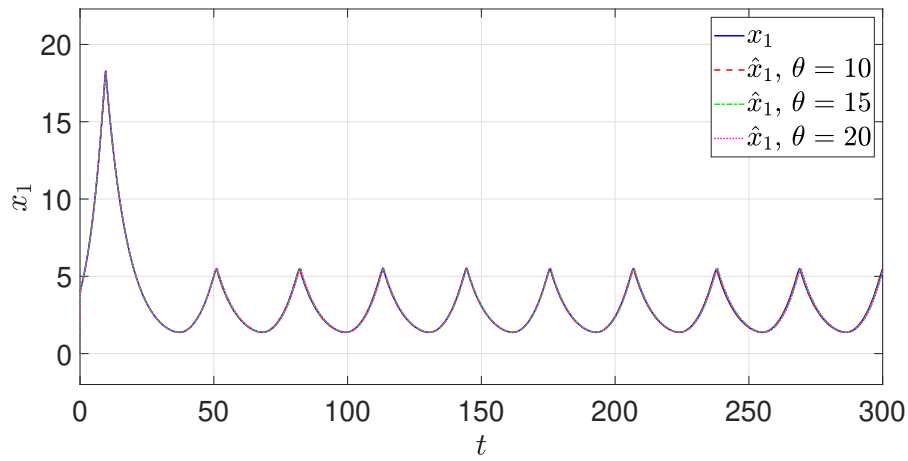
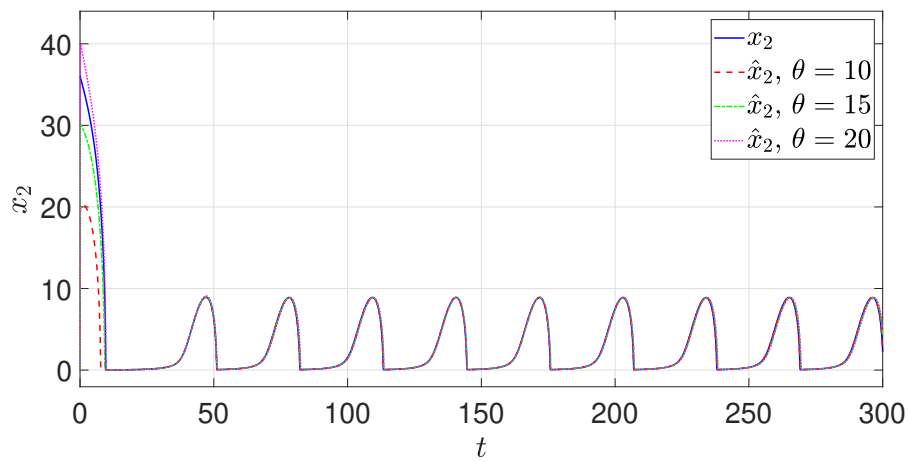


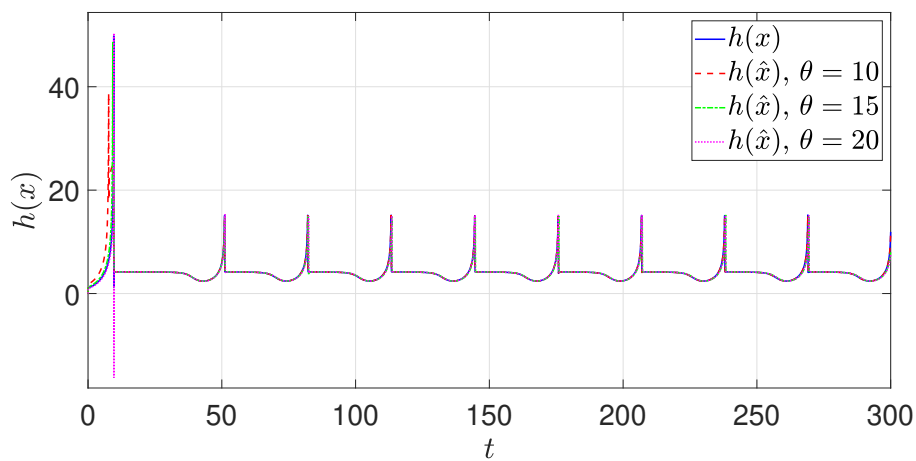
Figura 3.7: Error de estimación con  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 15$  y ruido de medición.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.8: Estimaciones con diferentes valores de ganancia, sin ruido de medición y orden entero: (a) concentración de biomasa, (b) concentración de sustrato y (c) velocidad de reacción.



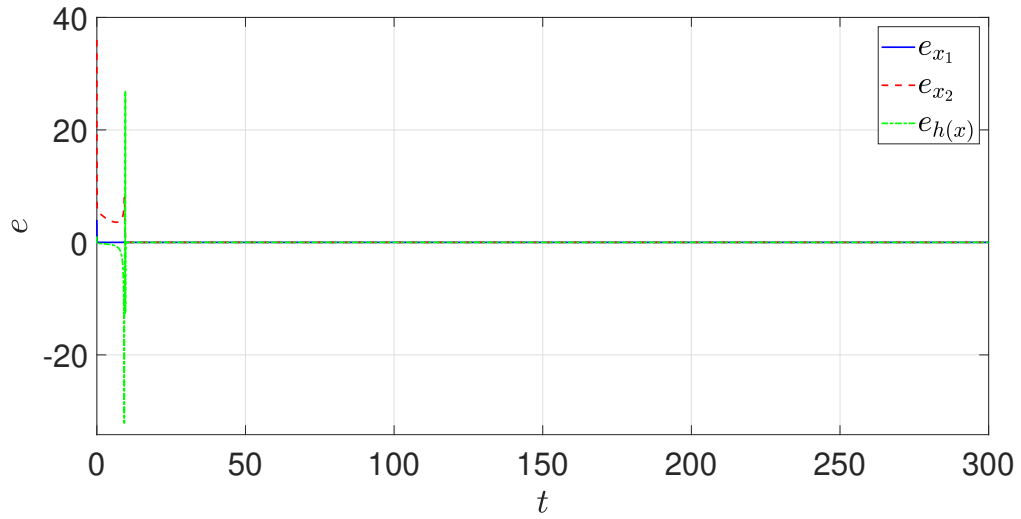


Figura 3.9: Error de estimación con  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 20$  y sin ruido de medición.



# Capítulo 4

## Control dinámico distribuido para sistemas PDE de orden entero.

En este capítulo se presenta un control dinámico distribuido para la sincronización de sistemas dinámicos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales de orden entero (*sistemas PDE* por sus siglas en inglés). El diseño del controlador se realiza considerando un enfoque algebraico diferencial. De tal manera que solo es necesario el uso de herramientas algebraicas, evitando así la geometría diferencial y el cálculo de variaciones, enfoques comúnmente utilizados para resolver problemas con PDE's. Con lo anterior, además de simplificar el proceso de diseño y el análisis de estabilidad, es posible reducir el esfuerzo computacional de las simulaciones correspondientes [90, 1].

El concepto clave para el diseño del controlador será el *elemento primitivo diferencial parcial*. Este elemento tiene la particularidad de siempre existir, pues se construye como una combinación lineal de las variables de estado medibles y las entradas conocidas, y cuyos coeficientes pertenecen a un *campo diferencial parcial*.

La idea general consistirá en construir un elemento primitivo diferencial parcial para cada sistema PDE. A continuación, con cada uno de estos se genera una transformación o mapeo que permite obtener una forma canónica del sistema PDE correspondiente. Tal representación es conocida como *Forma Canónica de Observabilidad Generalizada* (FCOG). Posteriormente, dichas representaciones serán utilizadas para compensar las no linealidades y estabilizar el sistema en lazo cerrado mediante una cadena de integradores, constituyendo esta última el controlador dinámico distribuido.

Dos aspectos a resaltar son: 1) debido a la implementación de una transformación de coordenadas, la metodología de diseño conduce a un problema de *Sincronización Generalizada* (SG); 2) dado que los sistemas PDE son sistemas que evolucionan en un espacio de Hilbert de dimensión infinita, para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se utilizarán la *teoría de semi-grupos* y la *teoría espectral* para sistemas

de dimensión infinita. El uso de estas teorías es particularmente útil para hallar criterios de estabilidad sencillos, a diferencia de métodos más comunes como el de Lyapunov o Lyapunov-Krasovskii, mismos que necesitan hallar funcionales o resolver desigualdades lineales matriciales.

## 4.1. Diseño del controlador dinámico distribuido

En primer lugar, considere la siguiente notación:  $\dot{*} = \frac{\partial *}{\partial t}$ ,  $\ddot{*} = \frac{\partial^2 *}{\partial t^2}$ , etc., junto con  $*_x = \frac{\partial *}{\partial x}$ ,  $*_{xx} = \frac{\partial^2 *}{\partial x^2}$ , etc.

Ahora, considere el siguiente problema: Dados dos sistemas PDE de orden entero, se busca sincronizar a los mismos, es decir, hacer que las trayectorias de estado de uno sigan a las del otro. Para ello, se diseñará un control dinámico distribuido.

El primer sistema PDE, llamado *sistema maestro*, está dado por:

$$\Sigma_m := \begin{cases} \dot{\mu}(t, z) &= F_m(\mu, u_m), \quad \mu \in \mathbb{R}^{n_m}, \quad z \in [z_a, z_b] \\ y_m(z, t) &= h_m(\mu) \end{cases}$$

donde  $\mu(z_a, t) = a(t)$ ,  $\mu(z_b, t) = b(t)$ ,  $\mu(z, 0) = \mu_0$  y  $t \in [0, T]$ . Por otro lado, el segundo sistema es nombrado como *sistema esclavo* y es descrito por:

$$\Sigma_s := \begin{cases} \dot{\nu}(t, z) &= F_s(\nu, u_s), \quad \nu \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad z \in [z_c, z_d] \\ y_s(z, t) &= h_s(\nu) \end{cases}$$

con  $\nu(z_c, t) = c(t)$ ,  $\nu(z_d, t) = d(t)$ ,  $\nu(z, 0) = \nu_0$  y  $t \in [0, T]$ . En donde  $\mathbb{R}^{n_m}$  y  $\mathbb{R}^{n_s}$  son los espacios de estado  $n$  dimensionales de los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. A su vez,  $F_m$  y  $F_s$  son funciones no lineales, mientras que las funciones  $h_m$  y  $h_s$  son analíticas.

Para resolver este problema, se aplicará un enfoque diferencial algebraico, partiendo del hecho de que cada uno de los sistemas PDE anteriores puede considerarse como una dinámica representada por una *extensión de campos diferenciales parciales*.

**Definición 4.1.** Sea  $\Delta = \{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$  un conjunto finito. Un campo  $K$  provisto del conjunto  $\Delta$  es un campo diferencial parcial, denotado como  $(K, \Delta)$ , si  $\partial_1, \dots, \partial_n$  son operadores diferenciales parciales  $\partial_i : K \rightarrow K$  tales que

- 1)  $c\partial_i(a + b) = c\partial_i(a) + c\partial_i(b)$
- 2)  $\partial_i(ab) = \partial_i(a)b + a\partial_i(b)$

Para todo  $a, b, c \in K$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 4.2.** Sean  $(L, \Delta_L)$  y  $(K, \Delta_K)$  campos diferenciales parciales, donde  $\Delta_L = \{\partial_1^L, \dots, \partial_n^L\}$  y  $\Delta_K = \{\partial_1^K, \dots, \partial_n^K\}$ . Una extensión de campo  $L/K$  es una extensión de campo diferencial parcial, denotada como  $(L, \Delta_L)/(K, \Delta_K)$ , si  $K \subset L$  y si  $\partial_i^K|_L =$

$\partial_i^L$ ,  $1 \leq i \leq n$ , es decir, si toda regla de derivación en  $K$  obedece a las reglas de derivación en  $L$ .

Por simplicidad, a partir de este punto, un campo diferencial parcial  $(K, \Delta)$  será denotado solo como  $K$ .

**Definición 4.3.** Sea  $a \in L$ , se dice que es un elemento parcial diferencialmente algebraico en  $K$  si satisface una ecuación algebraica diferencial parcial, i.e.,

$$P(a, \partial a, \dots, \partial^{(\gamma)} a) = 0$$

con coeficientes en  $K$  y para algún orden de derivación  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ . Si todo elemento de  $L$  satisface esta condición, entonces la extensión de campo diferencial parcial  $L/K$  es parcial diferencialmente algebraica.

**Definición 4.4.** Sea  $K \langle u, y \rangle / K \langle u \rangle$  parcial diferencialmente algebraica, y sean  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  y  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  conjuntos de cantidades diferenciales parciales finitas. Entonces, la extensión de campo diferencial parcial  $K \langle u, y \rangle / K \langle u \rangle$  define un sistema PDE con entrada  $u$ , salida  $y$  y cantidades diferenciales parciales finitas de estas.

Note que en la Definición 4.4,  $K \langle u \rangle$  denota el campo diferencial parcial generado por el campo  $K$  y el conjunto de cantidades diferenciales parciales finitas de  $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ .

**Definición 4.5.** Un elemento  $\bar{y} \in L$  es un elemento primitivo diferencial parcial de la extensión de campo diferencial parcial  $L/K$  si  $\bar{y}$  y  $K$  generan diferencialmente a  $L$ , i.e.  $K \langle \bar{y} \rangle = L$ .

A partir de las Definiciones 4.3 y 4.4, se tiene que un sistema PDE puede expresarse como:

$$P(\bar{y}, \partial \bar{y}, \dots, \partial^{(n)} \bar{y}, u, \partial u, \dots, \partial^{(n)} u) = 0 \quad (4.1)$$

Sea  $n$  el entero mínimo tal que  $\partial^{(n)} \bar{y}$  es analíticamente dependiente de

$$(\bar{y}, \partial \bar{y}, \dots, \partial^{(n-1)} \bar{y})$$

Entonces, el sistema (4.1) puede resolverse localmente como

$$\partial^{(n)} \bar{y} = \mathcal{L}(\bar{y}, \dots, \partial^{(n-1)} \bar{y}, u, \dots, \partial^{(n-1)} u) + \partial^{(n)} u \quad (4.2)$$

Sea ahora  $\xi_i = \partial^{(i-1)} \bar{y}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , donde  $n$  es conocido como *índice de observabilidad*

*algebraica*. Entonces, el sistema (4.1) puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\partial\xi_1 &= \xi_2 \\
\partial\xi_2 &= \xi_3 \\
&\vdots \\
\partial\xi_{n-1} &= \xi_n \\
\partial\xi_n &= \mathcal{L}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u, \dots, \partial^{(n-1)}u) + \partial^{(n)}u \\
y &= \xi_1
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La representación (4.3) es la Forma Canónica de Observabilidad Generalizada (FCOG) del sistema (4.1).

De vuelta al problema original, considere que los sistemas maestro y esclavo son transformables a una FCOG. De tal manera que se tiene la siguiente definición.

**Definición 4.6.** Sean los sistemas  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  transformables a una FCOG. Se dice que están en un estado de Sincronización Generalizada (SG) si existe un elemento primitivo diferencial parcial que genere la transformación  $H_{ms} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ , con  $H_{ms} = \Phi_m^{-1} \circ \Phi_s$ , una variedad algebraica  $M = \{(\nu, \mu) | \mu = H_{ms}(\nu)\}$  y un conjunto compacto  $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ ,  $M \subset B$ , tal que toda trayectoria de estado con condiciones iniciales en  $B$  se aproxime a  $M$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Es decir, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(\nu) - \mu\| = 0. \tag{4.4}$$

En la definición anterior, las transformaciones  $\Phi_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$  y  $\Phi_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$  son tales que  $\Phi_m(\mu) = \delta$  y  $\Phi_s(\nu) = \eta$ , donde  $\mathbb{R}^{n_c}$  es un espacio de estados de coordenadas transformadas, el cual es común de ambos sistemas. Así, los vectores  $\delta$  y  $\eta$  son los vectores de estado en estas coordenadas transformadas. Por lo tanto, la condición (4.4) es equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_m(\mu) - \Phi_s(\nu)\| = 0. \tag{4.5}$$

Para obtener las transformaciones  $\Phi_m$  y  $\Phi_s$  considere los siguientes elementos primitivos diferenciales parciales, dados como una combinación lineal de las variables de estado medibles y las entradas. El elemento primitivo diferencial parcial del sistema maestro se elige como

$$\bar{y}_m = \sum_i \alpha_i \mu_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \langle u \rangle$$

y para el sistema esclavo

$$\bar{y}_s = \sum_i \beta_i \nu_i + \sum_j \gamma_j u_j, \quad \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{R} \langle u \rangle$$

Utilizando las derivadas parciales con respecto al tiempo de cada uno de los elementos primitivos diferenciales parciales, es posible construir las transformaciones  $\Phi_m$  y  $\Phi_s$  de la siguiente manera:

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} \bar{y}_m \\ \dot{\bar{y}}_m \\ \vdots \\ \bar{y}_m^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} \bar{y}_s \\ \dot{\bar{y}}_s \\ \vdots \\ \bar{y}_s^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

La primera transformación permite expresar el sistema maestro de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_j &= \delta_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{\delta}_n &= \mathcal{L}_m(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \end{aligned} \quad (4.6)$$

y con la segunda transformación, el sistema esclavo es

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \eta_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{\eta}_n &= \mathcal{L}_s(\nu_1, \dots, \nu_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) + u^{(n)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sea  $e(z, t) = \delta - \eta$  el *error de sincronización*, donde  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ . Por lo tanto, de (4.6) y (4.7) se obtiene que la dinámica del error de sincronización está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= e_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{e}_n &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u^{(n)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se propone  $u^{(n)} = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s + \sum_{i=1}^n \kappa_i e_i$ , con  $\kappa_i > 0$ , de tal manera que se obtiene el siguiente sistema extendido:

$$\begin{aligned} \dot{e}_j &= e_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{e}_n &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_n, \\ \dot{u}_j &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ \dot{u}_n &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s + \sum_{i=1}^n \kappa_i e_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \dot{u}$ ,  $\dots$ ,  $u_n = u^{(n-1)}$ .

## 4.2. Estabilidad del error de sincronización

El control dinámico distribuido (4.9) es una cadena finita de integradores que en lazo cerrado conduce al siguiente sistema PDE lineal

$$\dot{e} = \mathcal{A}e \quad (4.10)$$

Para analizar la estabilidad del sistema (4.10) es posible recurrir a las teorías espectral y de semi-grupos para sistemas de dimensión infinita. Considere el siguiente conjunto de definiciones, mismas que son explicadas con mayor detalle en [73, 11].

Dado un sistema del tipo (4.10), donde  $\mathcal{A}$  es un operador lineal en un espacio de Hilbert  $E$ , su solución está dada por

$$e(t) = S(t)e_0$$

Esta solución evoluciona en un espacio de Hilbert de dimensión infinita y depende de las condiciones iniciales  $e(0) = e_0$  y el semi-grupo fuertemente continuo  $S(t)$ .

**Definición 4.7.** [73, 11]. Una familia de operadores acotados  $S(t)$ ,  $t \geq 0$ , en un espacio de Hilbert  $E$  es un semi-grupo fuertemente continuo si

- 1)  $S(0) = I$
- 2)  $S(t)S(s) = S(t+s)$
- 3)  $\lim_{s \rightarrow t} \|S(s)e - S(t)e\| = 0$

Para cualquier  $e \in E$  y para todo  $t, s \geq 0$ .

**Definición 4.8.** [73, 11]. El semi-grupo  $S(t)$  es exponencialmente estable si existen  $\infty > M \geq 1$  y  $\alpha > 0$  tales que  $\|S(t)\| \leq M \exp(-\alpha t)$  para todo  $t \geq 0$ .

**Definición 4.9.** [73, 11]. El sistema PDE lineal (4.10) es exponencialmente estable si el operador lineal  $\mathcal{A}$  genera un semi-grupo exponencialmente estable.

**Definición 4.10.** [73, 11]. Un operador lineal  $\mathcal{A}$  en un espacio de Hilbert  $E$  genera un semi-grupo fuertemente continuo que satisface  $\|S(t)\| \leq M \exp(-\alpha t)$  si y sólo si  $\mathcal{A}$  es cerrado, densamente definido y si  $\operatorname{Re}(\lambda) < -\alpha$  para toda  $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ , donde  $\sigma(\mathcal{A})$  denota el espectro de  $\mathcal{A}$ .

Note que la estabilidad exponencial de un semi-grupo depende principalmente del parámetro  $\alpha$ . Sin embargo, hallar este parámetro puede resultar complicado, de tal manera que considere la siguiente relación [11]:

$$r(S(t)) = \exp(\alpha_0 t)$$

donde  $\alpha_0$  y  $r(S(t))$  se conocen como *cota de crecimiento* y *radio espectral* del semi-grupo, respectivamente. Estas variables están definidas de la siguiente manera.



**Definición 4.11.** [11]. La cota de crecimiento de un semi-grupo fuertemente continuo es

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha : \|S(t)\| \leq M(\alpha) \exp(\alpha t), M(\alpha) < \infty, \forall t \geq 0 \}$$

**Definición 4.12.** [11]. El radio espectral del semi-grupo  $S(t)$  en  $t$  es

$$r(S(t)) = \sup \{ |\Lambda| : \Lambda \in \sigma(S(t)) \}, \quad \sigma(S(t)) \setminus \{0\} = \{ \exp(\lambda t) : \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \}$$

donde  $\sigma(S(t))$  es el espectro del semi-grupo.

Observe que cuando  $Re(\lambda) \leq -\alpha_0 < 0$ , para toda  $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ ,  $r(S(t)) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , i.e., existe una  $\alpha$  tal que el semi-grupo fuertemente continuo es exponencialmente estable y, por lo tanto el sistema lineal PDE (4.10) también es exponencialmente estable.

Así, retomando el problema original, el operador  $\mathcal{A}$  del sistema en lazo cerrado es de la siguiente forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 & \dots & -\kappa_{n-1} & -\kappa_n \end{pmatrix}$$

Note que la matriz  $\mathcal{A}$  es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert. Tal operador genera el semi-grupo definido por la familia  $\{\exp(\mathcal{A}t)\}$ , donde

$$\exp(\mathcal{A}t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{A}t)^k}{k!}$$

La familia  $\{\exp(\mathcal{A}t)\}$  es un semi-grupo fuertemente continuo, ya que satisface

$$\exp(\mathcal{A}(0)) = I, \quad \exp(\mathcal{A}(t+s)) = \exp(\mathcal{A}t) \exp(\mathcal{A}s), \forall t, s \geq 0$$

Finalmente, se tiene que la Definición 4.6 se satisface si  $r(\{\exp(\mathcal{A}t)\}) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , i.e., el sistema lineal PDE (4.10) es exponencialmente estable. De tal manera que, partiendo de todos los argumentos anteriores, se establece el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.** Los sistemas  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  están en un estado de SG si existe un control dinámico distribuido tal que el error de sincronización  $e = \delta - \eta$  satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t, z)\| = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(\nu) - \mu\| = 0$$

□

### 4.3. SG de sistemas PDE de orden entero

Para ejemplificar la efectividad del controlador dinámico distribuido, se presentan dos ejemplos de SG de sistemas PDE. En el primer caso, se sincronizan dos sistemas *Brusselator*, mientras que en el segundo se consideran dos sistemas *Gray-Scott*. Ambos son sistemas de reacción-difusión que describen como cambia la concentración de sustancias involucradas en una reacción química. Se trata de reacciones químicas autocatalíticas, esto es, involucran dos sustancias químicas, donde una de ellas induce y controla la reacción química en sí. Otra característica de estos sistemas es que presentan un comportamiento caótico, es decir, presentan un comportamiento completamente diferente dependiendo de sus condiciones iniciales.

#### 4.3.1. SG de sistemas Brusselator

El sistema Brusselator fue desarrollado en 1960 con la idea de estudiar oscilaciones y la inestabilidad en reacciones químicas [25]. Se trata de uno de los modelos de reacción-difusión más simples y está gobernado por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned}\dot{X}(z, t) &= A - (B + 1)X + X^2Y + D_X X_{zz} \\ \dot{Y}(z, t) &= BX - X^2Y + D_Y Y_{zz}\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde las variables de estado  $X$  y  $Y$  denotan las concentraciones de activador e inhibidor, respectivamente. Las variables  $D_X$  y  $D_Y$  son constantes de difusión, mientras que  $A$  y  $B$  son la tasa de alimentación y la velocidad de reacción, respectivamente.

Ahora, considere el siguiente sistema maestro:

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_1 &= A_m - (B_m + 1)\mu_1 + \mu_1^2\mu_2 + D_{\mu_1}\mu_{1zz} \\ \dot{\mu}_2 &= B_m\mu_1 - \mu_1^2\mu_2 + D_{\mu_2}\mu_{2zz} \\ y_m &= \mu_1\end{aligned}\quad (4.12)$$

y el siguiente sistema esclavo:

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_1 &= A_s - (B_s + 1)\nu_1 + \nu_1^2\nu_2 + D_{\nu_1}\nu_{1zz} \\ \dot{\nu}_2 &= B_s\nu_1 - \nu_1^2\nu_2 + D_{\nu_2}\nu_{2zz} \\ y_s &= \nu_1\end{aligned}\quad (4.13)$$

Como se mencionó, el sistema Brusselator es altamente sensible a las condiciones iniciales, tal que en las Figuras 4.1 y 4.2 es posible apreciar el comportamiento de los sistemas maestro y esclavo, mismos que parten de condiciones iniciales aleatorias y en consecuencia presentan un comportamiento totalmente distinto entre sí, pese a poseer los mismos parámetros.

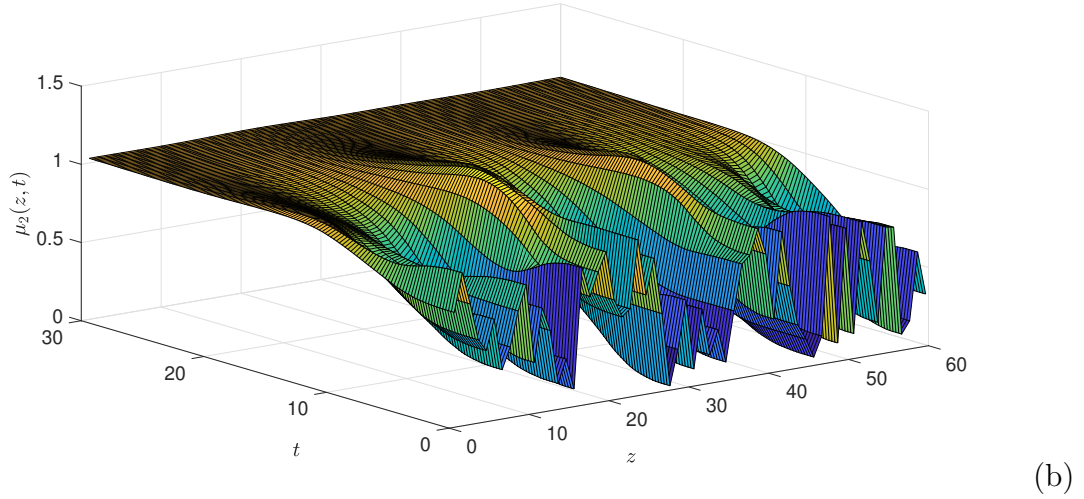
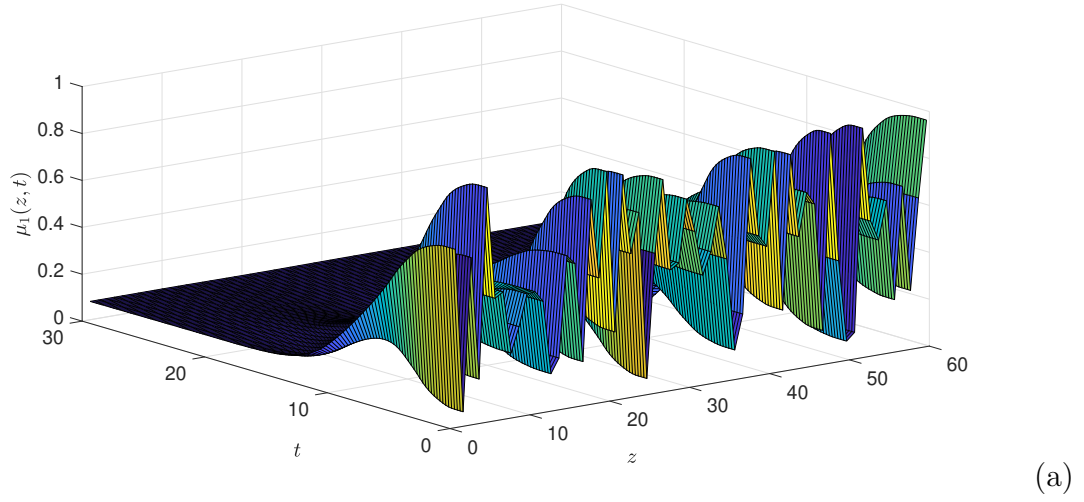


Figura 4.1: (a) Concentración de activador y (b) concentración de inhibidor del sistema Brusselator maestro, con tasa de alimentación  $A_m = 0.09$ , velocidad de reacción  $B_m = -0.01$  y constantes de difusión  $D_{\mu_1} = 0.63$  y  $D_{\mu_2} = 0.8$ .

Ahora, sea  $y_m = \delta_1 = \mu_1$  el elemento primitivo diferencial parcial para el sistema maestro, tal que se genera la siguiente transformación

$$\Phi_m(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dot{\mu}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

tal que con esta, el sistema (4.12) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= [2\mu_1\mu_2 - (B_m + 1)]\dot{\mu}_1 + \mu_1^2\dot{\mu}_2 + D_{\mu_1}\dot{\mu}_{1zz} \\ &= \mathcal{L}_m(\mu) \end{aligned} \quad (4.15)$$

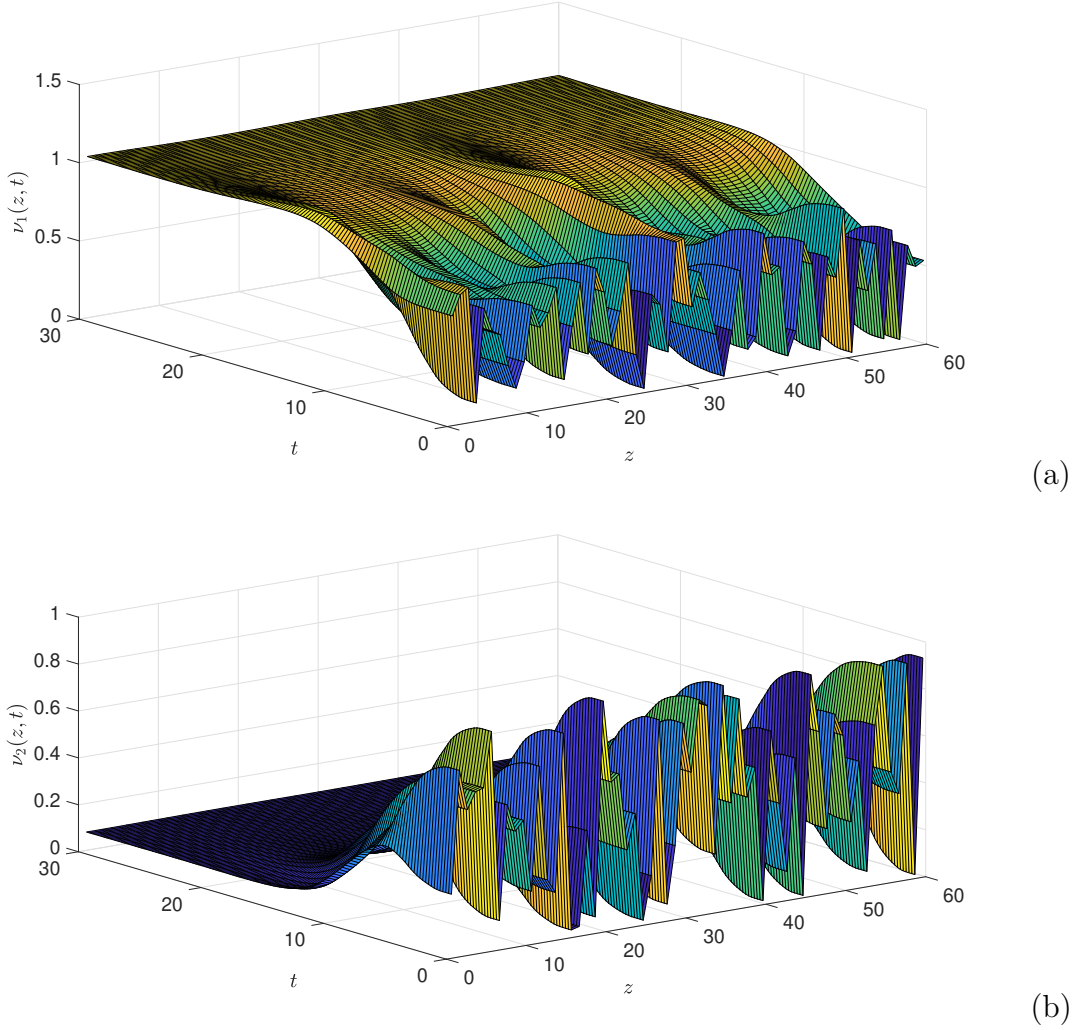


Figura 4.2: (a) Concentración de activador y (b) concentración de inhibidor del sistema Brusselator esclavo, con tasa de alimentación  $A_s = 0.09$ , velocidad de reacción  $B_s = -0.01$  y constantes de difusión  $D_{\nu_1} = 0.63$  y  $D_{\nu_2} = 0.8$ .

Por otro lado, sea  $y_s + u_s = \eta_1 = \nu_1 + u_1$  el elemento primitivo diferencial parcial para el sistema (4.13), tal que la transformación

$$\Phi_s(\nu) = \begin{pmatrix} \nu_1 + u_1 \\ \dot{\nu}_1 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

permite representar el sistema esclavo como

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= [2\nu_1\nu_2 - (B_s + 1)]\dot{\nu}_1 + \nu_1^2\dot{\nu}_2 + D_{\nu_1}\dot{\nu}_{1zz} + u_3 \\ &= \mathcal{L}_s(\nu) + u_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Luego, a partir de (4.15) y (4.17) se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_3\end{aligned}\tag{4.18}$$

Por lo tanto, el control dinámico distribuido para la SG de los sistemas (4.12) y (4.13) esta dado por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s - u_3 \\ \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_3 = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_s + \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2\end{aligned}\tag{4.19}$$

El sistema en lazo cerrado es

$$\dot{e} = \mathcal{A}e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}\tag{4.20}$$

donde el espectro de la matriz  $\mathcal{A}$  es

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \left\{ -\frac{1}{2} \left( \kappa_2 + \sqrt{-4\kappa_1 + \kappa_2^2} \right), -\frac{1}{2} \left( \kappa_2 - \sqrt{-4\kappa_1 + \kappa_2^2} \right) \right\}$$

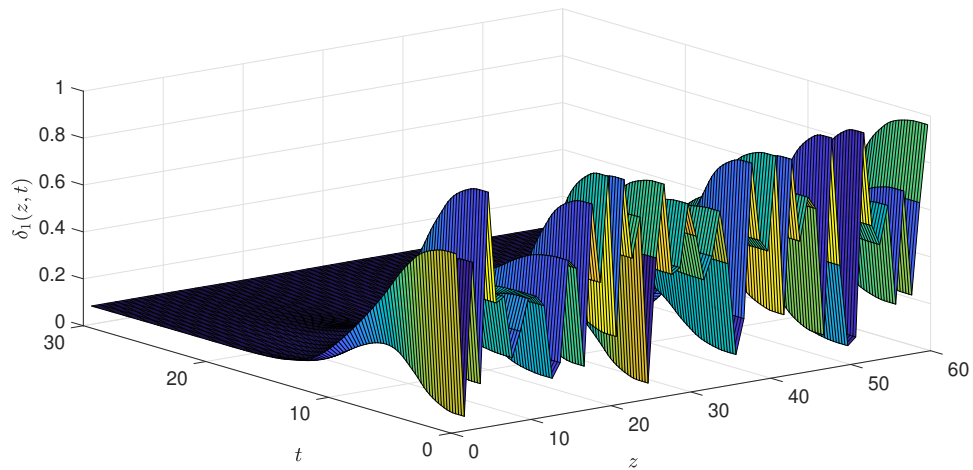
y en consecuencia, el radio espectral del semi-grupo generado por  $\mathcal{A}$  es

$$r(\{\exp(\mathcal{A}t)\}) = \sup \{ |\exp(\lambda_1 t)|, |\exp(\lambda_2 t)| \}$$

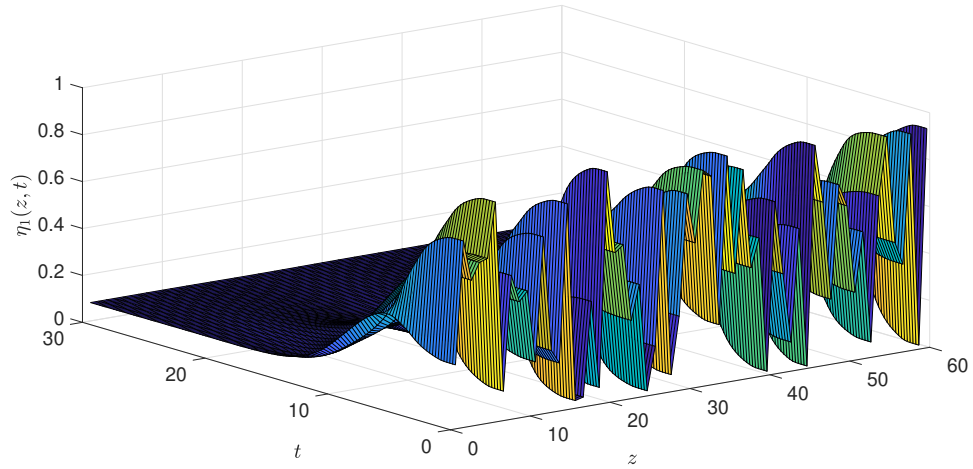
Note que para  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  se tiene que  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$ , por lo tanto  $r(\{\exp(\mathcal{A}t)\}) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto es, para  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ , el sistema (4.20) es exponencialmente estable y los sistemas PDE se sincronizan.

Para la simulación de este ejemplo, el espacio coordinado de los sistemas es discretizado mediante un esquema de diferencias finitas [100]. Ambos sistemas poseen los mismos parámetros, no obstante parten de condiciones iniciales aleatorias. Los parámetros son  $A_m = A_s = 0.09$ ,  $B_m = B_s = -0.01$ ,  $D_{\mu 1} = D_{\nu 1} = 0.63$  y  $D_{\mu 2} = D_{\nu 2} = 0.8$ . Las ganancias para el control dinámico distribuido son  $\kappa_1 = 30$  y  $\kappa_2 = 10$ .

En las Figuras 4.3 y 4.4 es posible observar como las concentraciones de activador e inhibidor son idénticas después de un tiempo, esto es, se sincronizan en el espacio de nuevas coordenadas. Hecho que se ve reflejado en la Figura 4.5, donde se muestra como el error de sincronización en cada punto del espacio coordinado discretizado converge a cero. Finalmente, la Figura 4.6 muestra las señales de control correspondientes.

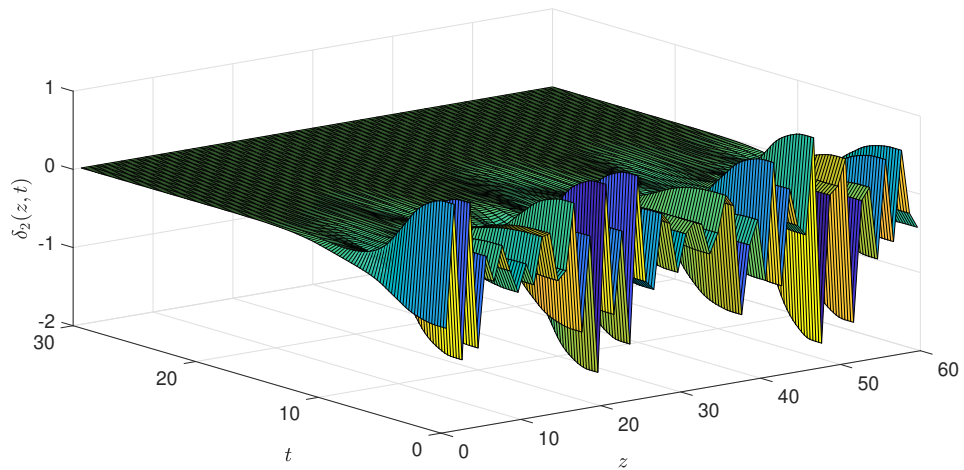


(a)

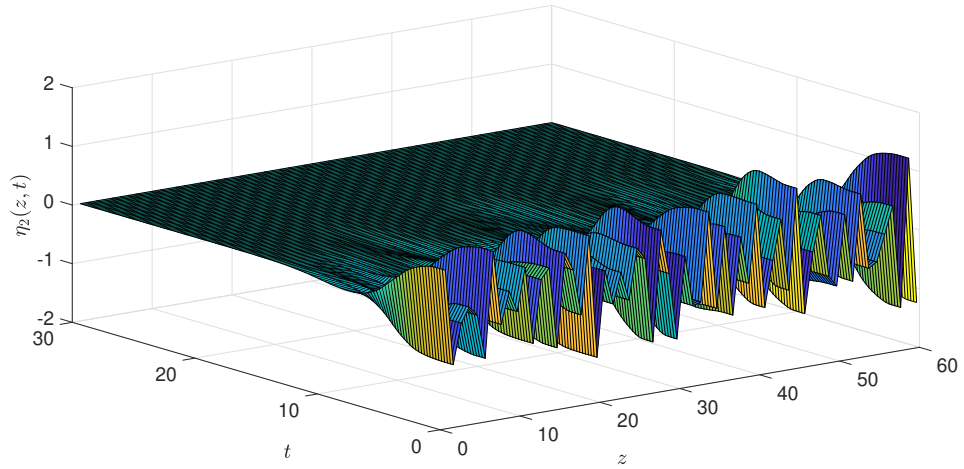


(b)

Figura 4.3: Sincronización de los sistemas Brusselator: concentración del activador, (a) sistema maestro y (b) sistema esclavo.



(a)



(b)

Figura 4.4: Sincronización de los sistemas Brusselator: concentración del inhibidor, (a) sistema maestro y (b) sistema esclavo.

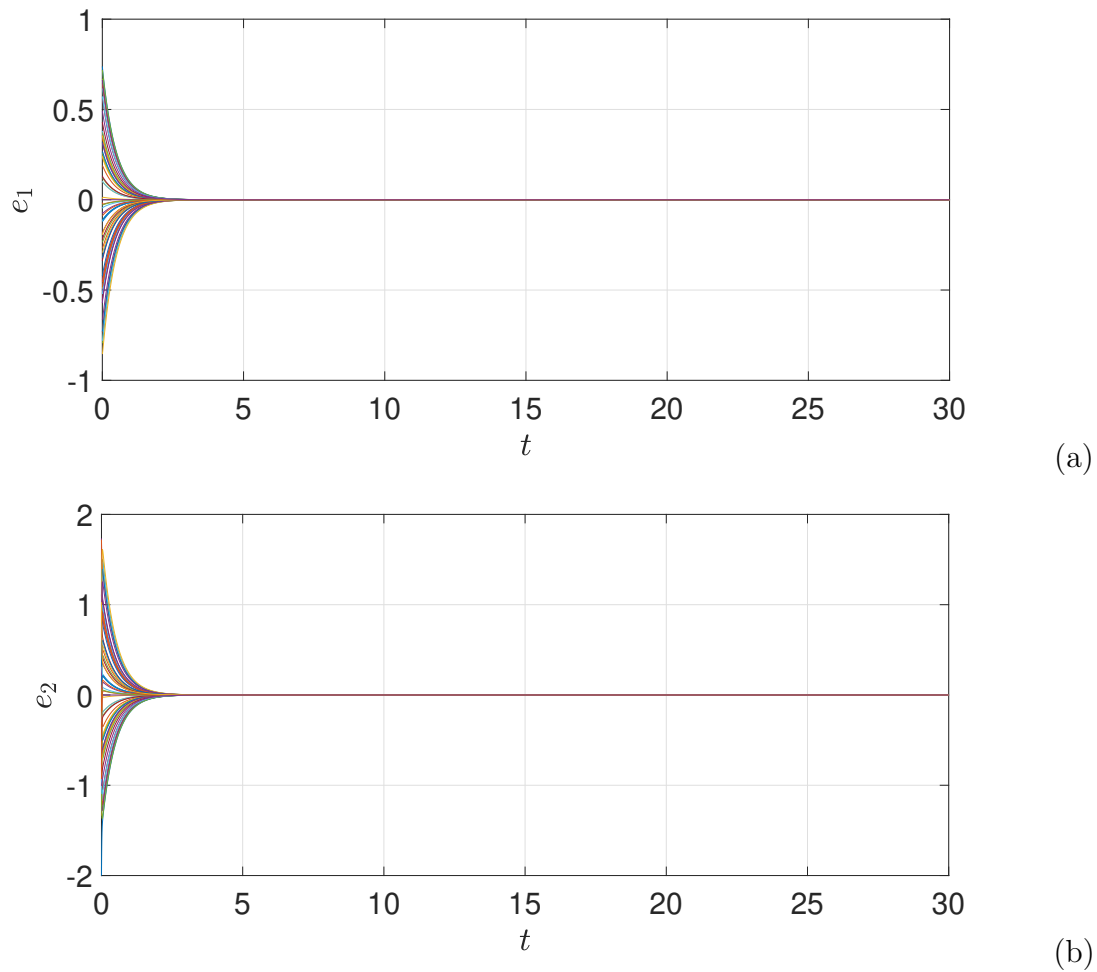
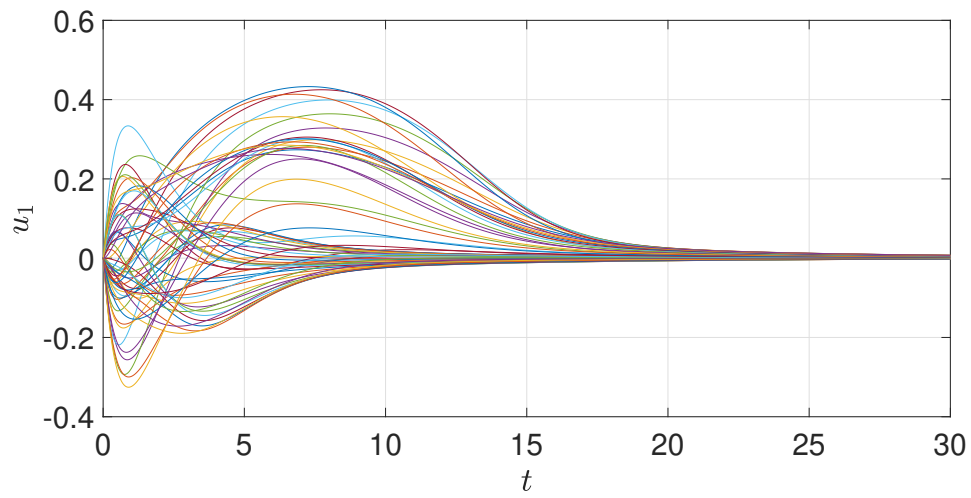
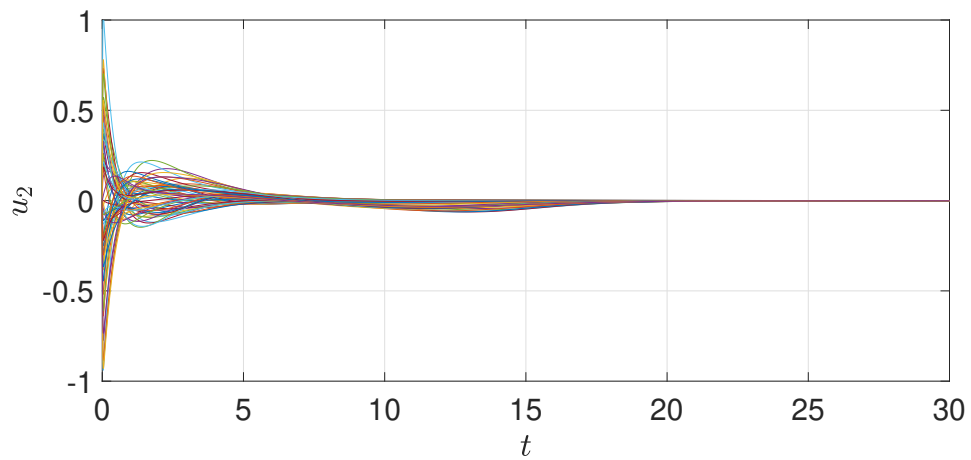


Figura 4.5: Sincronización de los sistemas Brusselator: error de sincronización en cada punto del espacio discretizado, (a) activador e (b) inhibidor.

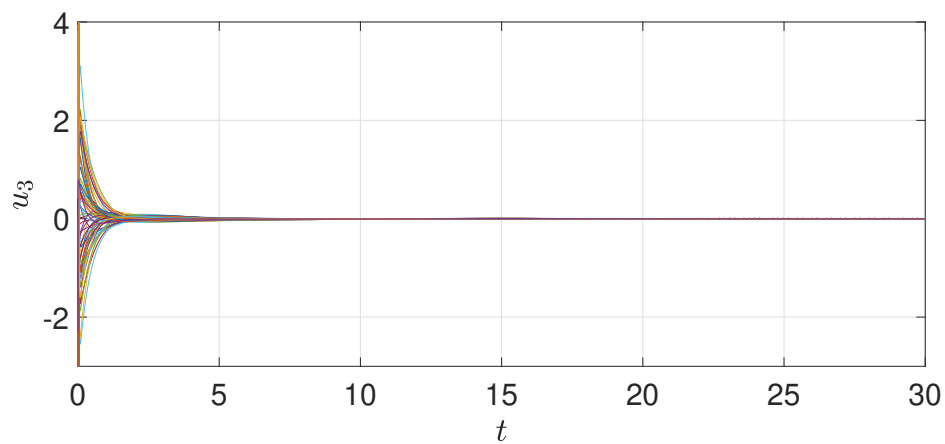




(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: Señales de control para la sincronización de los sistemas Brusselator en cada punto del espacio coordenado discretizado.

### 4.3.2. SG de sistemas Gray-Scott

Considere ahora el sistema Gray-Scott [35]. Además de su alta sensibilidad a las condiciones iniciales, este sistema presenta diferentes patrones espaciales-temporales dependiendo de sus parámetros. Las ecuaciones diferenciales parciales que modelan este sistema son:

$$\begin{aligned}\dot{X}(z, t) &= A(1 - X) - XY^2 + D_X X_{zz} \\ \dot{Y}(z, t) &= XY^2 - (A + B)Y + D_Y Y_{zz}\end{aligned}\quad (4.21)$$

donde las variables de estado  $X$  y  $Y$  representan las concentraciones de sustrato y activador. La variable  $A$  es la tasa de alimentación y  $B$  la velocidad de reacción. Las constantes de difusión del sistema son  $D_X$  y  $D_Y$ .

Ahora, considere dos sistemas Gray-Scott systems. El primer sistema (maestro) es

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_1 &= A_m(1 - \mu_1) - \mu_1\mu_2^2 + D_{\mu_1}\mu_{1zz} \\ \dot{\mu}_2 &= \mu_1\mu_2^2 - (A_m + B_m)\mu_2 + D_{\mu_2}\mu_{2zz} \\ y_m &= \mu_1\end{aligned}\quad (4.22)$$

mientras que el sistema esclavo es

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_1 &= A_s(1 - \nu_1) - \nu_1\nu_2^2 + D_{\nu_1}\nu_{1zz} \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_1\nu_2^2 - (A_s + B_s)\nu_2 + D_{\nu_2}\nu_{2zz} \\ y_s &= \nu_1\end{aligned}\quad (4.23)$$

En las Figuras 4.7 y 4.8 es posible observar el comportamiento de los sistemas esclavo y maestro, respectivamente. Además de partir de condiciones iniciales aleatorias, los parámetros de ambos sistemas son diferentes. Como resultado, es posible observar patrones espacio-temporales completamente distintos [26].

De forma similar al ejemplo anterior, sean  $y_m = \mu_1$  y  $y_s + u_s = \nu_1 + u_1$  elementos primitivos diferenciales parciales para los sistemas maestro y esclavo, respectivamente, tal que pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= D_{\mu_1}\dot{\mu}_{1zz} - (\mu_2^2 + A_m)\dot{\mu}_1 - 2\mu_1\mu_2\dot{\mu}_2 \\ &= \Psi_m(\mu)\end{aligned}\quad (4.24)$$

y como

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= D_{\nu_1}\dot{\nu}_{1zz} - (\nu_2^2 + A_s)\dot{\nu}_1 - 2\nu_1\nu_2\dot{\nu}_2 + u_3 \\ &= \Psi_s(\nu) + u_3\end{aligned}\quad (4.25)$$

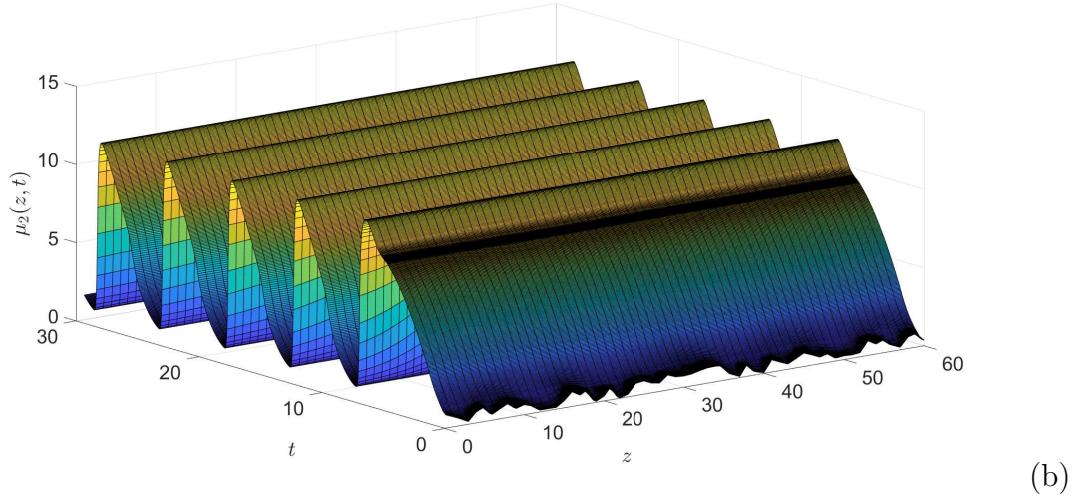
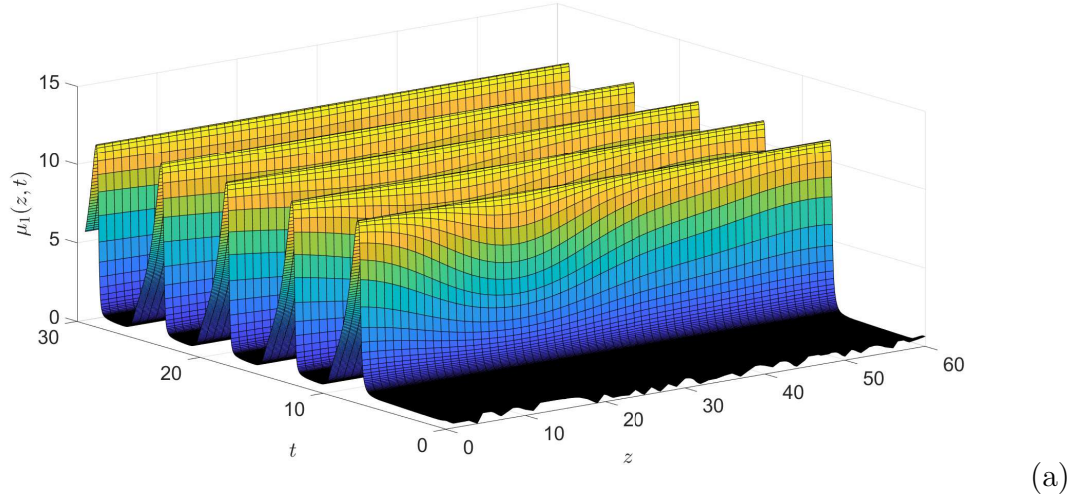


Figura 4.7: (a) Concentración de substrato y (b) concentración de activador del sistema Gray-Scott maestro. Condiciones iniciales aleatorias, tasa de alimentación  $A_m = 2.5$ , velocidad de reacción  $B_m = 9$  y constantes de difusión  $D_{\mu_1} = 7$  y  $D_{\mu_2} = 10$ .

Así, a partir de (4.24) y (4.25) se obtiene que el control dinámico distribuido es

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= \Psi_m - \Psi_s - u_3 \\
 \dot{u}_1 &= u_2 \\
 \dot{u}_2 &= u_3 = \Psi_m - \Psi_s + \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

De tal manera que el sistema en lazo cerrado resultante es  $\dot{e} = \mathcal{A}e$ , donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 \end{pmatrix}$$

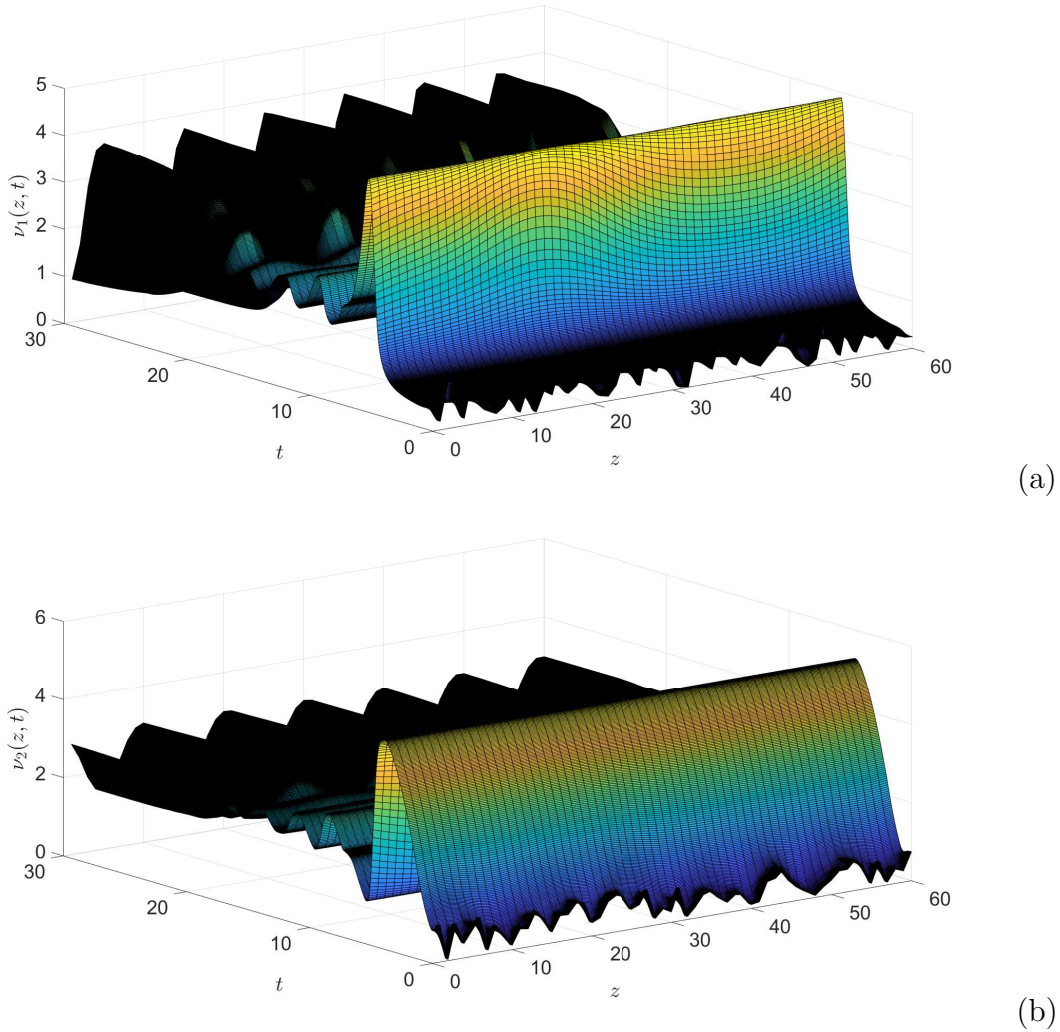


Figura 4.8: (a) Concentración de sustrato y (b) concentración de activador del sistema Gray-Scott esclavo. Condiciones iniciales aleatorias, tasa de alimentación  $A_s = 2$ , velocidad de reacción  $B_s = 4.8$  y constantes de difusión  $D_{v_1} = 2$  y  $D_{v_2} = 10$ .

Y al igual que el ejemplo anterior, los sistemas Gray-Scott maestro y esclavo se sincronizan si  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ .

Para la simulación numérica de este ejemplo, se consideran condiciones iniciales aleatorias junto con los siguientes parámetros:  $A_m = 2.5$ ,  $B_m = 9$ ,  $D_{\mu_1} = 7$ ,  $D_{\mu_2} = 10$ ,  $A_s = 2$ ,  $B_s = 4.8$ ,  $D_{v_1} = 2$  y  $D_{v_2} = 10$ . A su vez, las ganancias del controlador dinámico distribuido son  $\kappa_1 = 100$  y  $\kappa_2 = 50$ .

En las Figuras 4.9 y 4.10 se observa como las concentraciones de sustrato y activador se sincronizan, en consecuencia, el error de sincronización tiende a cero (Figura 4.11). Por otro lado, en la Figura 4.12 se muestran las señales del control dinámico distribuido.

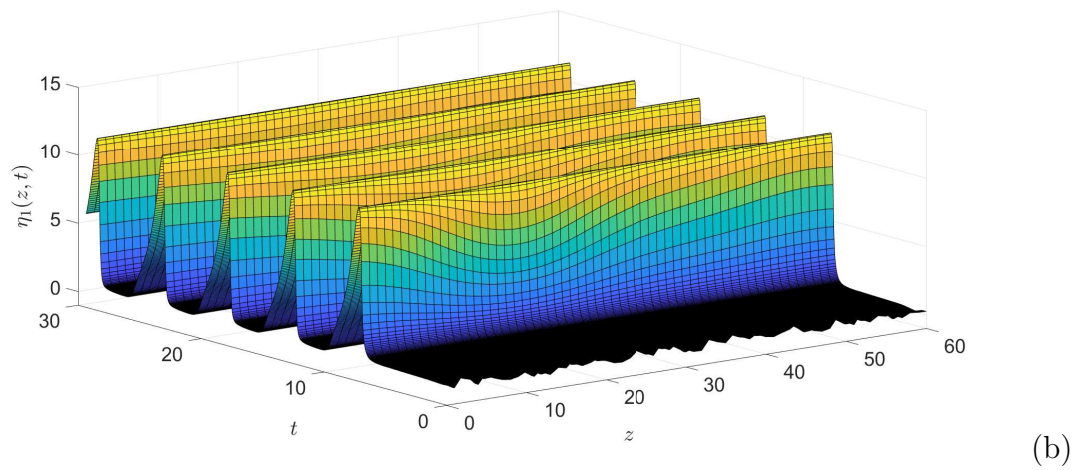
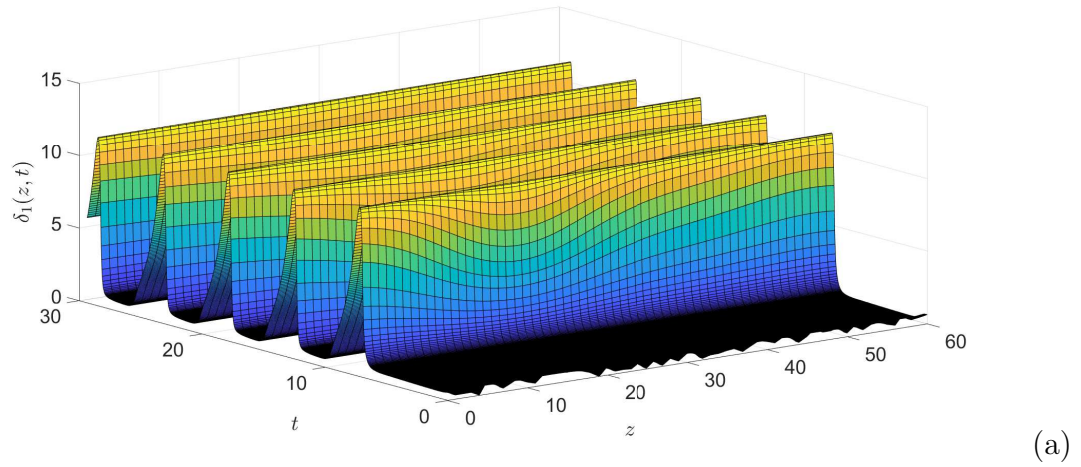
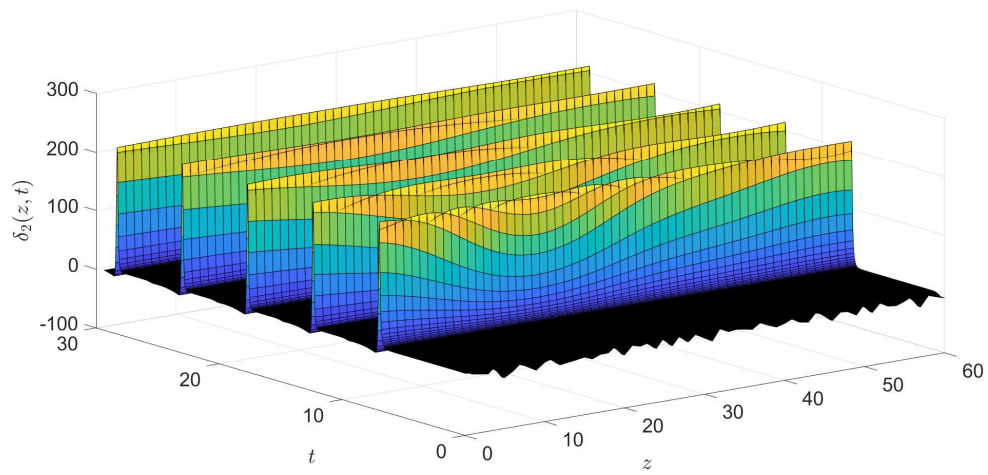
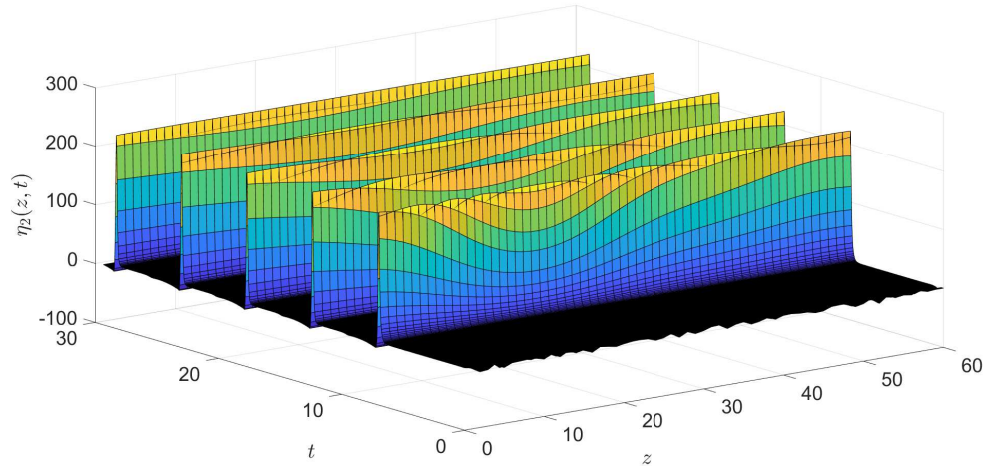


Figura 4.9: Sincronización de los sistemas Gray-Scott: concentración de sustrato, (a) sistema maestro y (b) sistema esclavo.

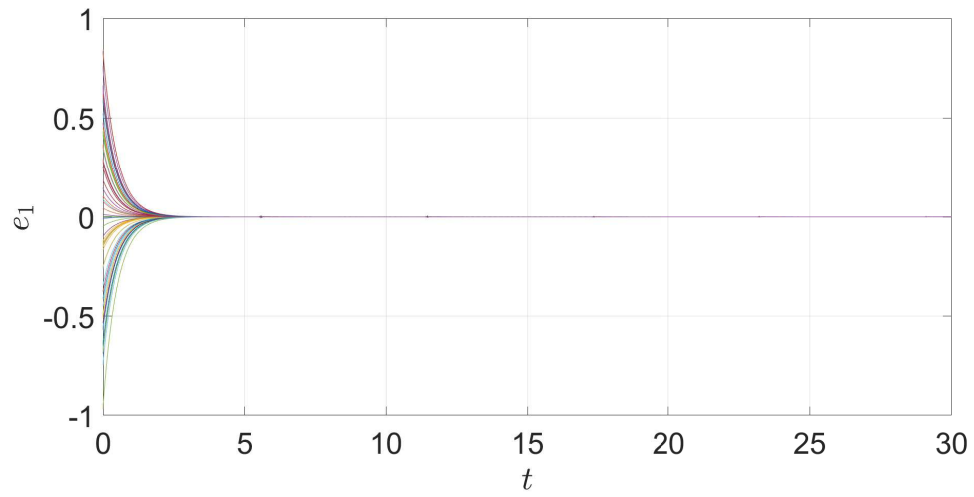


(a)

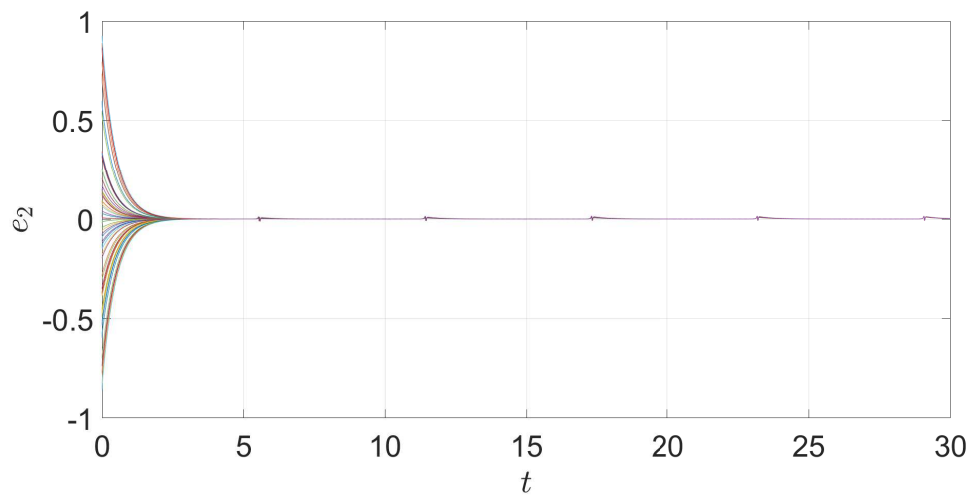


(b)

Figura 4.10: Sincronización de los sistemas Gray-Scott: concentración de activador, (a) sistema maestro y (b) sistema esclavo.



(a)



(b)

Figura 4.11: Sincronización de los sistemas Gray-Scott: error de sincronización en cada punto del espacio coordinado discretizado, (a) substrato y (b) activador.

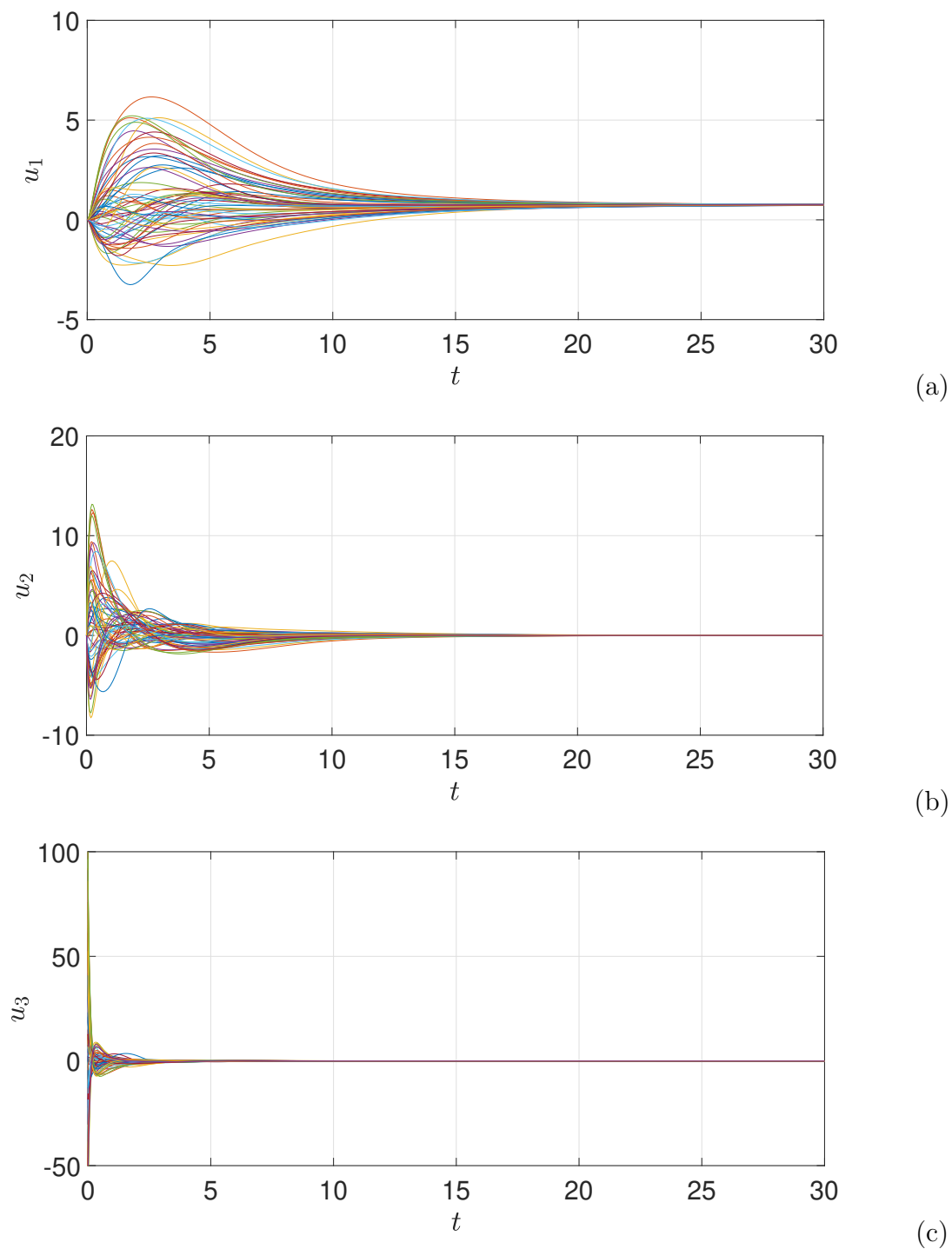


Figura 4.12: Señales de control para la sincronización de los sistemas Brusselator en cada punto del espacio coordenado discretizado.



# Capítulo 5

## Multi-sincronización para sistemas PDE de orden entero.

En este capítulo se presenta una familia de controladores dinámicos distribuidos para el problema de SG de un conjunto de sistemas PDE de orden entero, es decir, se trata del problema de *Multi-Sincronización Generalizada* (MSG). El método de diseño es una generalización de lo presentado en el Capítulo 4, esto es, a partir de una familia de transformaciones se halla la FCOG de cada uno de los sistemas PDE. Dichas formas canónicas conforman la llamada *Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Multi Salida* (FCOGM) y permiten diseñar de forma natural una familia de controladores dinámicos distribuidos.

### 5.1. Familia de controladores dinámicos

Considerando las Definiciones 4.3 y 4.4, sea ahora la siguiente expresión, una familia de sistemas PDE de orden entero:

$$P_j (y_j, \partial y_j, \dots, \partial^{n_j-1} y_j, \partial^{n_j} y_j, u_j, \partial u_j, \dots, \partial^{\gamma_j-1} u_j, \partial^{\gamma_j} u_j) = 0 \quad (5.1)$$

donde  $1 \leq j \leq p$ ,  $p$  es el número de sistemas que conforman la familia, y  $n_j \geq 0$  es el mínimo entero tal que  $\partial^{n_j} y_j$  sea analíticamente dependiente de  $(y_j, \partial y_j, \dots, \partial^{n_j-1} y_j)$ . Así, de forma análoga al capítulo anterior, cada expresión en (5.1) puede resolverse localmente como

$$\partial^{n_j} y_j = \mathcal{L}_j (y_j, \partial y_j, \dots, \partial^{n_j-1} y_j, u_j, \partial u_j, \dots, \partial^{\gamma_j-1} u_j) + \partial^{\gamma_j} u_j$$

Sean  $\delta_i^{n_j} = \partial^{i-l} y_j$ ,  $l = 1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1$ ;  $1 \leq i \leq \sum_{1 \leq j \leq p} n_j = n$  donde el índice  $j$  se refiere al  $j$ -ésimo sistema y  $n_j$  son los índices de observabilidad algebraica [65, 64], mismo que coincide con la dimensión de su sistema.

Entonces, es posible expresar la familia de  $p$  sistemas PDE (5.1) como

$$\begin{aligned}
\partial\delta_1^{n_1} &= \delta_2^{n_1} \\
\partial\delta_2^{n_1} &= \delta_3^{n_1} \\
&\vdots \\
\partial\delta_{n_1-1}^{n_1} &= \delta_{n_1}^{n_1} \\
\partial\delta_{n_1}^{n_1} &= \mathcal{L}_1(\delta_1^{n_1}, \delta_2^{n_1}, \dots, \delta_{n_1}^{n_1}, u_1, \partial u_1, \dots, \partial^{\gamma_1-1} u_1) + \partial^{\gamma_1} u_1 \\
\partial\delta_{n_1+1}^{n_2} &= \delta_{n_1+2}^{n_2} \\
\partial\delta_{n_1+2}^{n_2} &= \delta_{n_1+3}^{n_2} \\
&\vdots \\
\partial\delta_{n_1+n_2-1}^{n_2} &= \delta_{n_1+n_2}^{n_2} \\
\partial\delta_{n_1+n_2}^{n_2} &= \mathcal{L}_2(\delta_{n_1+1}^{n_2}, \delta_{n_1+2}^{n_2}, \dots, \delta_{n_1+n_2}^{n_2}, u_2, \partial u_2, \dots, \partial^{\gamma_2-1} u_2) + \partial^{\gamma_2} u_2 \\
&\vdots \\
\partial\delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+1}^{n_p} &= \delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+2}^{n_p} \\
\partial\delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+2}^{n_p} &= \delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+3}^{n_p} \\
&\vdots \\
\partial\delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p-1}^{n_p} &= \delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p} \\
\partial\delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p} &= \mathcal{L}_p(\delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+1}^{n_p}, \dots, \delta_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}+n_p}^{n_p}, u_p, \\
&\quad \partial u_p, \dots, \partial^{\gamma_p-1} u_p) + \partial^{\gamma_p} u_p \\
y_i &= \delta_l^{n_j}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

La representación (5.2) es en realidad un conjunto de formas canónicas que constituyen la llamada Forma Canónica de Obseabilidad Generalizada Multi-salida (FCOGM) de la familia de sistemas PDE (5.1). La FCOGM puede expresarse de forma compacta como

$$\begin{aligned}
\partial\delta &= \mathcal{A}\delta + \Phi(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p) + \bar{\mathcal{U}}(\partial^{\gamma_1} u_1, \dots, \partial^{\gamma_p} u_p) \\
\mathcal{Y} &= \mathcal{C}\delta
\end{aligned} \tag{5.3}$$

donde  $\delta, \Phi, \bar{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^p$ , con

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathcal{L}_1) \\ \phi_2(\mathcal{L}_2) \\ \vdots \\ \phi_p(\mathcal{L}_p) \end{pmatrix},$$

$$\phi_j(\mathcal{L}_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_j(\delta_{n_1+\dots+n_{j-1}+1}^{n_j}, \dots, \delta_{n_1+\dots+n_j}^{n_j} + u_j + \dots + \partial^{\gamma_j-1} u_j) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{U}}(\partial^{\gamma_1} u_1, \dots, \partial^{\gamma_p} u_p) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_1(\partial^{\gamma_1} u_1) \\ \bar{\mathcal{U}}_2(\partial^{\gamma_2} u_2) \\ \vdots \\ \bar{\mathcal{U}}_p(\partial^{\gamma_p} u_p) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{U}}_j(\partial^{\gamma_j} u_j) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \partial^{\gamma_j} u_j \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_p \end{pmatrix}, \quad C_j = (1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Considere ahora el siguiente problema: En un conjunto de sistemas PDE de orden entero, existen dos subconjuntos de sistemas. Se busca que, de forma simultánea, cada sistema del primer subconjunto se sincronice con alguno de los sistemas del segundo subconjunto. En otras palabras, existe una familia de sistemas esclavos y una familia de sistemas maestros. Para resolver este problema, se presenta ahora no uno, sino una familia de controladores dinámicos distribuidos.

Sea la *familia maestra* dada por:

$$\Sigma_m := \begin{cases} \dot{x}_{m_\mu}(t, z) = F_{m_\mu}(x_{m_\mu}, u_{m_\mu}), & x_{m_\mu} \in \mathbb{R}^{n_{m_\mu}}, \quad z \in [z_a, z_b] \\ y_{m_\mu}(z, t) = h_{m_\mu}(x_{m_\mu}) \end{cases}$$

con  $x_{m_\mu}(z_a, t) = a(t)$ ,  $x_{m_\mu}(z_b, t) = b(t)$ ,  $x_{m_\mu}(z, 0) = x_{m_\mu 0}$  y  $t \in [0, T]$ . Por otro lado, la *familia esclava* es:

$$\Sigma_s := \begin{cases} \dot{x}_{s_\nu}(t, z) = F_{s_\nu}(x_{s_\nu}, u_{s_\nu}), & x_{s_\nu} \in \mathbb{R}^{n_{s_\nu}}, \quad z \in [z_c, z_d] \\ y_{s_\nu}(z, t) = h_{s_\nu}(x_{s_\nu}) \end{cases}$$

con  $x_{s_\nu}(z_c, t) = c(t)$ ,  $x_{s_\nu}(z_d, t) = d(t)$ ,  $x_{s_\nu}(z, 0) = x_{s_\nu 0}$  y  $t \in [0, T]$ .  $F_{m_\mu}$  y  $F_{s_\nu}$  son polinomios de sus argumentos y las funciones  $h_{m_\mu}$  y  $h_{s_\nu}$  son analíticas. Los índices  $\mu$  y  $\nu$  son tales que  $1 \leq \nu \leq p - 1$ ,  $1 \leq \mu \leq p - \nu$ . Lo anterior nos indica que consideramos que todo sistema de la familia esclava puede asociarse con un único sistema de la familia maestra. Por el contrario, un sistema de la familia maestra puede estar asociado con uno o más sistemas de la familia esclava, tal y como se muestra en la Figura 5.1.

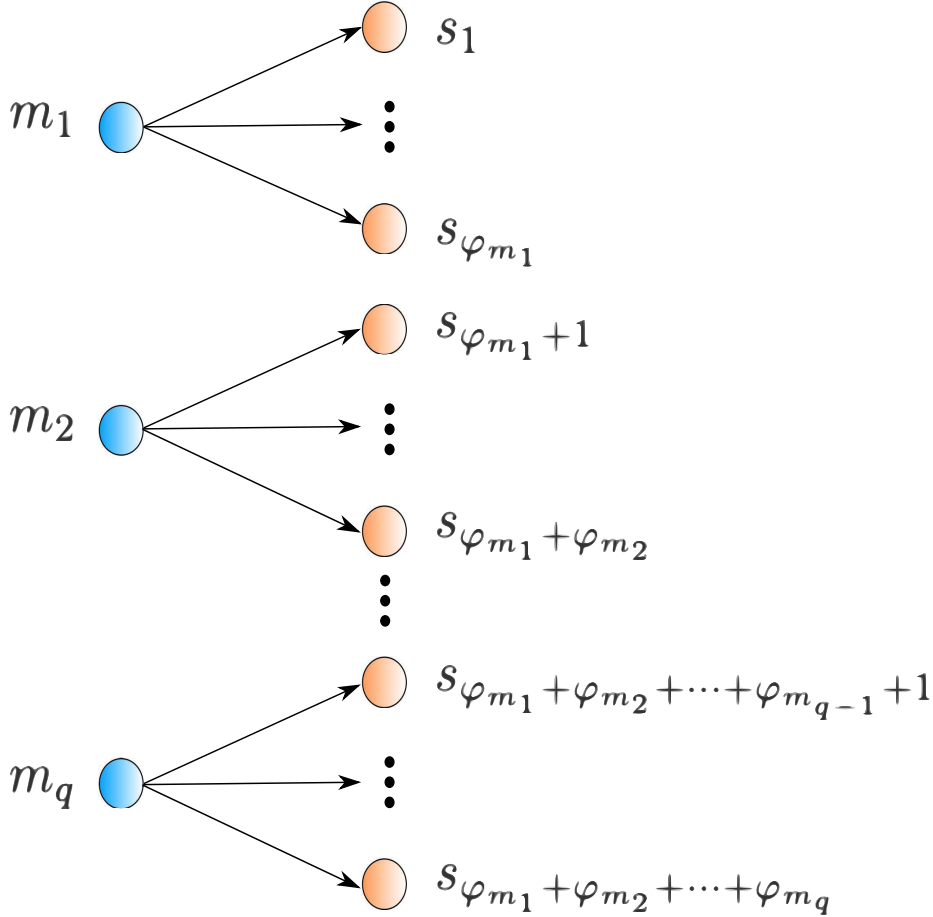


Figura 5.1: Interacción entre los sistema PDE de las familias esclava y maestra. Los subíndices  $\varphi_{m_i}$  denotan el número de sistemas de la familia esclava asociado con el  $i$ -ésimo sistema de la familia maestra, denotado como  $m_i$ .

**Definición 5.1.** Sean  $X_m = (x_{m_1}, \dots, x_{m_{n_m}}) \in \mathbb{R}^{n_m}$  y  $X_s = (x_{s_1}, \dots, x_{s_{n_s}}) \in \mathbb{R}^{n_s}$  familias de vectores de estado de la familia maestra y esclava respectivamente. Las familias  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  se dicen estar en un estado de Multi-Sincronización Generalizada (MSG) si existen una familia de elementos primitivos diferenciales que genere una familia de transformaciones  $H : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$ , con  $H = \Psi_m^{-1} \circ \Psi_s$ , una variedad algebraica  $M = \{(X_s, X_m) | X_m = H(X_s)\}$  y un conjunto compacto  $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ ,  $M \subset B$ , tal que todo conjunto de trayectorias de estas familias de sistemas distribuidos

con condiciones iniciales en  $B$  se aproxime a  $M$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, las familias maestra y esclava están en un estado de MSG si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H(X_s) - X_m\| = 0. \quad (5.4)$$

Al igual que en la SG, las familias de transformaciones  $\Psi_m$  y  $\Psi_s$  llevan a sus respectivas familias de vectores de estado a un espacio de estado común, es decir,  $\Psi_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$  y  $\Psi_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$ . Por lo tanto, de manera análoga tenemos que la condición (5.4) es equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Psi_m(X_m) - \Psi_s(X_s)\| = 0. \quad (5.5)$$

**Teorema 5.1.** *Si las familias de sistemas distribuidos  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  son transformables a una FCOGM, entonces existe una familia de controladores dinámicos tales que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Psi_m(X_m) - \Psi_s(X_s)\| = 0$ , i.e., las familias  $\Sigma_m$  y  $\Sigma_s$  alcanzan un estado de MSG.*

*Demostración.* Considere que la familia maestra está conformada por “ $q$ ” sistemas y que la familia esclava por “ $r$ ” sistemas. Ahora, defina la siguiente familia de elementos primitivos diferenciales parciales para la familia maestra

$$y_{m_j} = \sum_{i=n_m-n_{m_j}+1}^{n_m} \beta_i x_{i,m_j} = \delta_l^{n_{m_j}}, \quad 1 \leq j \leq q,$$

$$1 \leq i \leq \sum_{1 \leq j \leq q} n_{m_j} = n_m,$$

$$l = 1, n_{m_1} + 1, \dots, n_{m_1} + n_{m_2} + \dots + n_{m_{q-1}} + 1$$

a su vez, para la familia esclava se tiene

$$y_{s_j} = \sum_{i=n_s-n_{s_j}+1}^{n_s} \beta_i x_{i,m_j} + \sum_k \zeta_k u_{k,s_j} = \delta_l^{n_{s_j}}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

$$1 \leq i \leq \sum_{1 \leq j \leq r} n_{s_j} = n_s,$$

$$l = 1, n_{s_1} + 1, \dots, n_{s_1} + n_{s_2} + \dots + n_{s_{r-1}} + 1$$

donde  $\beta_i$  y  $\zeta_k$  son elementos de sus respectivas extensiones de campo diferencial parcial. Estas familias de elementos primitivos diferenciales parciales, junto con sus derivadas temporales, permiten generar las siguientes familias de transformaciones

para las familias maestra y esclava, respectivamente.

$$\Psi_m = \begin{pmatrix} y_{m_1} \\ \dot{y}_{m_1} \\ \vdots \\ y_{m_1}^{(n_{m_1}-1)} \\ y_{m_2} \\ \dot{y}_{m_2} \\ \vdots \\ y_{m_2}^{(n_{m_2}-1)} \\ \vdots \\ y_{m_q} \\ \dot{y}_{m_q} \\ \vdots \\ y_{m_q}^{(n_{m_q}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1^{n_{m_1}} \\ \delta_2^{n_{m_1}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{m_1}}^{n_{m_1}} \\ \delta_{n_{m_1}+1}^{n_{m_2}} \\ \delta_{n_{m_1}+2}^{n_{m_2}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{m_1}+n_{m_2}+\dots+n_{m_{q-1}}+1}^{n_{m_q}} \\ \delta_{n_{m_1}+n_{m_2}+\dots+n_{m_{q-1}}+2}^{n_{m_q}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{m_1}+n_{m_2}+\dots+n_{m_q}}^{n_{m_q}} \end{pmatrix}$$

y

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} y_{s_1} \\ \dot{y}_{s_1} \\ \vdots \\ y_{s_1}^{(n_{s_1}-1)} \\ y_{s_2} \\ \dot{y}_{s_2} \\ \vdots \\ y_{s_2}^{(n_{s_2}-1)} \\ \vdots \\ y_{s_r} \\ \dot{y}_{s_r} \\ \vdots \\ y_{s_r}^{(n_{s_r}-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1^{n_{s_1}} \\ \delta_2^{n_{s_1}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} \\ \delta_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}} \\ \delta_{n_{s_1}+2}^{n_{s_2}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{s_1}+n_{s_2}+\dots+n_{s_{r-1}}+1}^{n_{s_r}} \\ \delta_{n_{s_1}+n_{s_2}+\dots+n_{s_{r-1}}+2}^{n_{s_r}} \\ \vdots \\ \delta_{n_{s_1}+n_{s_2}+\dots+n_{s_r}}^{n_{s_r}} \end{pmatrix}$$

Utilizando la familia de transformaciones  $\Psi_m$ , la familia  $\Sigma_m$  se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_i^{n_{m_1}} &= \delta_{i+1}^{n_{m_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{m_1} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{m_1}}^{n_{m_1}} &= \mathcal{L}_{m_1}(\delta_1^{n_{m_1}}, \dots, \delta_{n_{m_1}}^{n_{m_1}}) \\
\dot{\delta}_i^{n_{m_2}} &= \delta_{i+1}^{n_{m_2}}, \quad n_{m_1} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + n_{m_2} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}} &= \mathcal{L}_{m_2}(\delta_{n_{m_1}+1}^{n_{m_2}}, \dots, \delta_{n_{m_1}+n_{m_2}}^{n_{m_2}}) \\
&\vdots \\
\dot{\delta}_i^{n_{m_q}} &= \delta_{i+1}^{n_{m_q}}, \quad n_{m_1} + \dots + n_{m_{q-1}} + 1 \leq i \leq n_{m_1} + \dots + n_{m_q} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{m_1}+\dots+n_{m_q}}^{n_{m_q}} &= \mathcal{L}_{m_q}(\delta_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{q-1}}+1}^{n_{m_q}}, \dots, \delta_{n_{m_1}+\dots+n_{m_q}}^{n_{m_q}}) \\
y_{m_j} &= \delta_l^{n_{m_j}}, \quad l = 1, n_{m_1} + 1, \dots, n_{m_1} + n_{m_2} + \dots + n_{m_{q-1}} + 1
\end{aligned} \tag{5.6}$$

A su vez, la forma compacta de la familia (5.6) es

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}'_m &= \mathcal{A}'_m \delta'_m + \Phi'_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) \\
\mathcal{Y}'_m &= \mathcal{C}'_m \delta'_m,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

cuya familia de vectores de estado, denotada como  $\delta'_m$ , es

$$\delta'_m = \left( \delta_1^{n_{m_1}} \quad \dots \quad \delta_{n_{m_1}}^{n_{m_1}} \quad \dots \quad \delta_{n_{m_1}+\dots+n_{m_{q-1}}+1}^{n_{m_q}} \quad \dots \quad \delta_{n_{m_1}+\dots+n_{m_q}}^{n_{m_q}} \right)^T$$

Por otro lado, para la familia  $\Sigma_s$  es posible realizar exactamente lo mismo, esto es

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_i^{n_{s_1}} &= \delta_{i+1}^{n_{s_1}}, \quad 1 \leq i \leq n_{s_1} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} &= \mathcal{L}_{s_1}(\delta_1^{n_{s_1}}, \dots, \delta_{n_{s_1}}^{n_{s_1}}, u_{s_1}, \dot{u}_{s_1}, \dots, u_{s_1}^{(\gamma_{s_1}-1)}) + u_{s_1}^{(\gamma_{s_1})} \\
\dot{\delta}_i^{n_{s_2}} &= \delta_{i+1}^{n_{s_2}}, \quad n_{s_1} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + n_{s_2} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}} &= \mathcal{L}_{s_2}(\delta_{n_{s_1}+1}^{n_{s_2}}, \dots, \delta_{n_{s_1}+n_{s_2}}^{n_{s_2}}, u_{s_2}, \dot{u}_{s_2}, \dots, u_{s_2}^{(\gamma_{s_2}-1)}) + u_{s_2}^{(\gamma_{s_2})} \\
&\vdots \\
\dot{\delta}_i^{n_{s_r}} &= \delta_{i+1}^{n_{s_r}}, \quad n_{s_1} + \dots + n_{s_{r-1}} + 1 \leq i \leq n_{s_1} + \dots + n_{s_r} - 1 \\
\dot{\delta}_{n_{s_1}+\dots+n_{s_r}}^{n_{s_r}} &= \mathcal{L}_{s_r}(\delta_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r-1}}+1}^{n_{s_r}}, \dots, \delta_{n_{s_1}+\dots+n_{s_r}}^{n_{s_r}}, u_{s_r}, \dot{u}_{s_r}, \dots, u_{s_r}^{(\gamma_{s_r}-1)}) \\
&\quad + u_{s_r}^{(\gamma_{s_r})} \\
y_{s_j} &= \delta_l^{n_{s_j}}, \quad l = 1, n_{s_1} + 1, \dots, n_{s_1} + n_{s_2} + \dots + n_{s_{r-1}} + 1
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Tal que, (5.8) en su forma compacta es

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}'_s &= \mathcal{A}'_s \delta'_s + \Phi'_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_r}) + \bar{\mathcal{U}}(u_{s_1}^{(\gamma_{s_1})}, u_{s_2}^{(\gamma_{s_2})}, \dots, u_{s_r}^{(\gamma_{s_r})}) \\
\mathcal{Y}'_s &= \mathcal{C}'_s \delta'_s
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde  $\delta_s$  denota la familia esclava de vectores de estado, la cual es

$$\delta_s = \left( \delta_1^{n_{s_1}} \quad \dots \quad \delta_{n_{s_1}}^{n_{s_1}} \quad \dots \quad \delta_{n_{s_1}+\dots+n_{s_{r-1}}+1}^{n_{s_r}} \quad \dots \quad \delta_{n_{s_1}+\dots+n_{s_r}}^{n_{s_r}} \right)^T$$

Para continuar con la prueba, es necesario definir el error de sincronización, mismo que en esta ocasión será la diferencia entre las familias maestra y esclava de vectores de estado. Sin embargo, note que es plausible un escenario donde la familia esclava esté compuesta por un mayor número de sistemas que la familia maestra ( $q < r$ ). Este escenario implicaría una discordancia en las dimensiones de las familias de vectores de estado. Para resolver esta problemática y más aún, para modelar la interacción entre las familias de sistemas PDE, se propone la siguiente transformación:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1r} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{q1} & F_{q2} & \dots & F_{qr} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_s},$$

donde  $F_{ij} = I$  si el  $i$ -ésimo sistema maestro interactúa con el  $j$ -ésimo sistema esclavo. De lo contrario  $F_{ij} = 0$ . Al aplicar la transformación  $F$  a (5.7), se tiene

$$\begin{aligned} F\dot{\delta}'_m &= F\mathcal{A}'_m\delta'_m + F\Phi'_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) \\ F\mathcal{Y}'_m &= F\mathcal{C}'_m\delta'_m, \end{aligned}$$

así, después de algunas manipulaciones algebraicas, la forma compacta (5.7) es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_m &= \mathcal{A}_m\delta_m + \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) \\ \mathcal{Y}_m &= \mathcal{C}_m\delta_m, \end{aligned} \tag{5.10}$$

con  $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_s = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_s = \mathcal{C}$ ,

$$\delta_m = \underbrace{(\delta_{m_1} \quad \dots \quad \delta_{m_1})}_{\varphi_{m_1} \text{ veces}} \underbrace{(\delta_{m_2} \quad \dots \quad \delta_{m_2})}_{\varphi_{m_2} \text{ veces}} \quad \dots \quad \underbrace{(\delta_{m_q} \quad \dots \quad \delta_{m_q})}_{\varphi_{m_q} \text{ veces}}^T,$$

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) &= \underbrace{(\phi_{m_1}(\mathcal{L}_{m_1}) \quad \dots \quad \phi_{m_1}(\mathcal{L}_{m_1}))}_{\varphi_{m_1} \text{ veces}} \quad \dots \\ &\quad \dots \quad \underbrace{(\phi_{m_q}(\mathcal{L}_{m_q}) \quad \dots \quad \phi_{m_q}(\mathcal{L}_{m_q}))}_{\varphi_{m_q} \text{ veces}}^T, \end{aligned}$$

Donde  $\delta_{m_j}$ ,  $1 \leq j \leq q$  es el vector de estado del  $j$ -ésimo sistema maestro. Los índices  $\varphi_j$  denotan el número de sistemas de la familia esclava asociados con el  $j$ -ésimo



sistema de la familia maestra. Estos índices son tales que  $\varphi_{m_1} + \varphi_{m_2} + \dots + \varphi_{m_q} = n_s$ . Entonces, el error de sincronización es

$$e_\delta = \delta_m - \delta_s \quad (5.11)$$

Tal que de (5.9) y (5.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{e}_\delta &= \mathcal{A}e_\delta + \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) - \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_r}) \\ &\quad - \bar{\mathcal{U}}(u_{s_1}^{(\gamma_{s_1})}, u_{s_2}^{(\gamma_{s_2})}, \dots, u_{s_r}^{(\gamma_{s_r})}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ahora, sea  $\bar{\mathcal{U}} = \Phi_m - \Phi_s + \mathcal{K}e_\delta$ , con

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_r \end{pmatrix}, \quad K_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{1,j} & k_{2,j} & \dots & k_{n_{s_j},j} \end{pmatrix},$$

$$1 \leq j \leq r.$$

Por lo tanto, la familia de controladores dinámicos para la MSG de las familias esclava y maestra está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_\delta &= \mathcal{A}e_\delta + \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) - \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_r}) \\ &\quad - \bar{\mathcal{U}}(u_{s_1}^{(\gamma_{s_1})}, u_{s_2}^{(\gamma_{s_2})}, \dots, u_{s_r}^{(\gamma_{s_r})}) \\ \dot{\mathcal{U}} &= \mathcal{M}\mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}} \\ \bar{\mathcal{U}} &= \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \dots, \mathcal{L}_{m_q}) - \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_r}) + \mathcal{K}e_\delta \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{s_1} \\ \mathcal{U}_{s_2} \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{s_r} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{s_j} = \begin{pmatrix} u_{s_j} \\ \dot{u}_{s_j} \\ \vdots \\ u_{s_j}^{(\gamma_{s_j}-1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_r \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Note que (5.13) es un sistema extendido y la familia de controladores dinámicos distribuidos está dada por la cadena de integradores  $\mathcal{U}$ . Al utilizar esta familia de controladores dinámicos distribuidos, se obtiene el siguiente lazo cerrado

$$\dot{e}_\delta = (\mathcal{A} - \mathcal{K})e_\delta = \bar{\mathcal{A}}e_\delta \quad (5.14)$$

Donde  $\bar{\mathcal{A}}$  es

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{A}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{A}}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\mathcal{A}}_r \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{A}}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} & -k_{3,j} & \dots & -k_{n_{s_j},j} \end{pmatrix},$$

$$1 \leq j \leq r.$$

Haciendo uso de las teorías espectral y de semi-grupos, note que el operador  $\bar{\mathcal{A}}$  es lineal y genera un semi-grupo fuertemente continuo  $\exp(\bar{\mathcal{A}}t)$ . El operador  $\bar{\mathcal{A}}$  es en realidad una matriz diagonal a bloques.

Recordando que para una matriz  $\bar{\mathcal{A}} = \text{diag}(\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_2, \dots, \bar{\mathcal{A}}_r)$ , donde  $\bar{\mathcal{A}}_i$  son matrices cuadradas, el espectro es [18]

$$\sigma(\bar{\mathcal{A}}) = \bigcup_{i=1}^r \sigma(\bar{\mathcal{A}}_i)$$

entonces, el espectro es

$$\sigma(\bar{\mathcal{A}}) = \bigcup_{j=1}^r \sigma(\bar{\mathcal{A}}_j) = \left\{ \lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \dots, \lambda_{n_{s_j},j} \right\},$$

Ahora, dado que el radio espectral del semi-grupo es

$$r(\exp(\bar{\mathcal{A}}t)) = \sup \left\{ |\exp(\lambda_{1,j})|, |\exp(\lambda_{2,j})|, \dots, |\exp(\lambda_{n_{s_j},j})| \right\}, \quad 1 \leq j \leq r$$

se concluye, que la solución de (5.14) es estable cuando  $Re(\lambda_{1,j}) < 0$ ,  $Re(\lambda_{2,j}) < 0, \dots$ ,  $Re(\lambda_{n_{s_j},j}) < 0$  para  $1 \leq j \leq r$ . Esto es,  $r(\exp(\bar{\mathcal{A}}t)) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, las familias de sistemas PDE alcanzan un estado de MSG y se concluye la prueba.  $\square$

## 5.2. MSG de múltiples aeronaves flexibles

Para ejemplificar la efectividad de la familia de controladores dinámicos distribuidos, considere un conjunto de aeronaves flexibles (con apéndice/cuerpo flexible). Se busca llevar a cabo el seguimiento del ángulo de actuación (ángulo de cabeceo) de una determinada aeronave por parte del resto. Este es un problema de sistemas multi-agentes (MAS) muy común, mismo que, considerando la metodología presentada aquí, puede ser tratado como un problema de MSG.

Considere que cada aeronave flexible puede ser modelada como un sistema pivote-viga, tal como se muestra en la Figura 5.2. La longitud de la viga es  $L$  y está empotrada con el pivote de radio  $R$ , cuyo ángulo de rotación (ángulo de actuación) es  $\theta$ . Notemos que la viga es en realidad un sistema con un número infinito de grados de libertad. Por lo tanto, el modelo matemático correspondiente es una ecuación diferencial parcial. Adicionalmente, asumiremos que el pivote no sufre ningún tipo de deformación. Por lo tanto  $\omega(x, t)$  es la deformación a lo largo de la viga. La variable  $u$  representa la acción de un actuador que hace rotar a la viga. De acuerdo con [103], la ecuación diferencial parcial correspondiente, así como sus respectivas condiciones de frontera son

$$\begin{aligned}
 \rho \ddot{P}(x, t) &= -EI \omega_{xxxx}(x, t) \\
 I_h \ddot{\theta}(t) &= EI \omega_{xx}(0, t) + u \\
 \omega_{xxx}(L, t) &= 0 \\
 \omega_{xx}(L, t) &= 0 \\
 \omega_x(0, t) &= 0 \\
 \omega(0, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

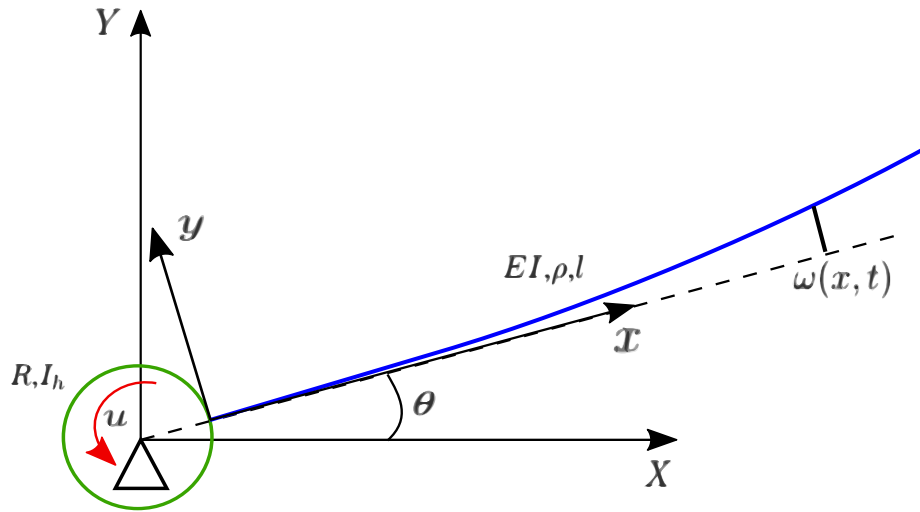


Figura 5.2: Sistema pivote-viga.

Donde  $P(x, t)$  es la posición local de  $x$  con respecto a marco inercial XY, esto es,  $P(x, t) = x\theta(t) + \omega(x, t)$ . Las constantes  $\rho$ ,  $EI$  y  $L$  son la densidad lineal, la rigidez y la longitud de la viga, respectivamente.  $I_h$  es la inercia rotacional del pivote.

Ahora, considere dos familias de aeronaves flexibles, donde cada aeronave es descrita por el modelo (5.15). Suponga que la familia maestra esta conformada por dos aeronaves y la familia esclava por cinco. Estas familias son denotadas como

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{P}_{m_\mu}(x, t) &= -EI\omega_{m_\mu xxx}(x, t) \\
I_h \ddot{\theta}_{m_\mu}(t) &= EI\omega_{m_\mu xx}(0, t) \\
\omega_{m_\mu xxx}(L, t) &= 0 \\
\omega_{m_\mu xx}(L, t) &= 0 \\
\omega_{m_\mu x}(0, t) &= 0 \\
\omega_{m_\mu}(0, t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.16}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho \ddot{P}_{s_\nu}(x, t) &= -EI\omega_{s_\nu xxx}(x, t) \\
I_h \ddot{\theta}_{s_\nu}(t) &= EI\omega_{s_\nu xx}(0, t) + u_{s_\nu} \\
\omega_{s_\nu xxx}(L, t) &= 0 \\
\omega_{s_\nu xx}(L, t) &= 0 \\
\omega_{s_\nu x}(0, t) &= 0 \\
\omega_{s_\nu}(0, t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

La interacción de las familias maestra y esclava se muestra en la Figura 5.3. Se busca que el ángulo de actuación  $\theta_{s_\nu}$  de cada aeronave esclava sea igual al de la aeronave maestra correspondiente  $\theta_{m_\mu}$ . Se asume que es posible medir  $\theta$  de cada aeronave.

Considere las siguientes familias de elementos primitivos diferenciales parciales para las familias maestra y esclava, respectivamente:

$$y_{m_\mu} = \{\delta_1^{m_1}, \delta_3^{m_2}\} = \{\theta_{m_1}, \theta_{m_2}\}$$

y

$$\begin{aligned}
y_{s_\nu} &= \{\delta_1^{s_1}, \delta_3^{s_2}, \delta_5^{s_3}, \delta_7^{s_4}, \delta_9^{s_5}\} \\
&= \{\theta_{s_1} + u_1^{s_1}, \theta_{s_2} + u_1^{s_2}, \theta_{s_3} + u_1^{s_3}, \theta_{s_4} + u_1^{s_4}, \theta_{s_5} + u_1^{s_5}\},
\end{aligned}$$

donde  $u_1^{s_\nu} = u_{s_\nu}$ . De tal modo que la familia maestra se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_1^{m_1} &= \delta_2^{m_1} \\
\dot{\delta}_2^{m_1} &= \mathcal{L}_{m_1}(\delta_1^{m_1}, \delta_2^{m_1}) \\
\dot{\delta}_3^{m_2} &= \delta_4^{m_2} \\
\dot{\delta}_4^{m_2} &= \mathcal{L}_{m_2}(\delta_3^{m_2}, \delta_4^{m_2}) \\
y_{m_\mu} &= \delta_l^{m_\mu}, \quad l = 1, 3
\end{aligned} \tag{5.18}$$

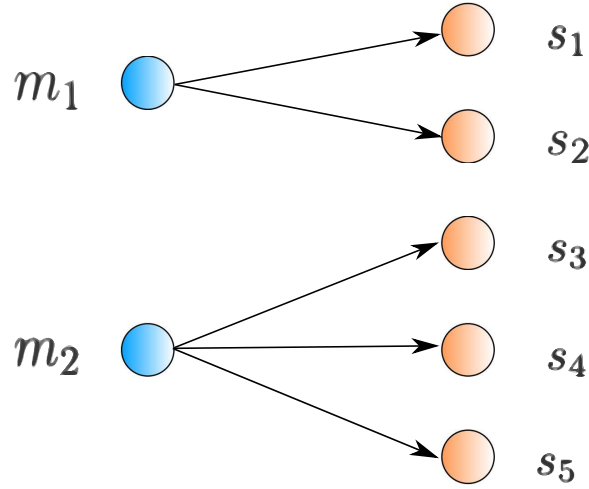


Figura 5.3: Interacción de las familias maestra y esclava de aeronaves flexibles.

donde  $\mathcal{L}_{m_\mu} = EI\omega_{m_\mu xx}(0, t)/I_h$ . A su vez, la familia esclava es

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_1^{s_1} &= \delta_2^{s_1} \\
 \dot{\delta}_2^{s_1} &= \mathcal{L}_{s_1}(\delta_1^{s_1}, \delta_2^{s_1}, u_1^{s_1}, u_2^{s_1}) + u_3^{s_1} \\
 \dot{\delta}_3^{s_2} &= \delta_4^{s_2} \\
 \dot{\delta}_4^{s_2} &= \mathcal{L}_{s_2}(\delta_3^{s_2}, \delta_4^{s_2}, u_1^{s_2}, u_2^{s_2}) + u_3^{s_2} \\
 \dot{\delta}_5^{s_3} &= \delta_6^{s_3} \\
 \dot{\delta}_6^{s_3} &= \mathcal{L}_{s_3}(\delta_5^{s_3}, \delta_6^{s_3}, u_1^{s_3}, u_2^{s_3}) + u_3^{s_3} \\
 \dot{\delta}_7^{s_4} &= \delta_8^{s_4} \\
 \dot{\delta}_8^{s_4} &= \mathcal{L}_{s_4}(\delta_7^{s_4}, \delta_8^{s_4}, u_1^{s_4}, u_2^{s_4}) + u_3^{s_4} \\
 \dot{\delta}_9^{s_5} &= \delta_{10}^{s_5} \\
 \dot{\delta}_{10}^{s_5} &= \mathcal{L}_{s_5}(\delta_9^{s_5}, \delta_{10}^{s_5}, u_1^{s_5}, u_2^{s_5}) + u_3^{s_5} \\
 y_{s_\nu} &= \delta_l^{s_\nu}, \quad l = 1, 3, 5, 7, 9.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

con  $\mathcal{L}_{s_\nu} = (EI\omega_{m_\mu xx}(0, t) + u_{s_\nu})/I_h$ ,  $u_2^{s_\nu} = \dot{u}_1^{s_\nu}$  and  $u_3^{s_\nu} = \dot{u}_2^{s_\nu}$ . Dado que hay un mayor número de aeronaves esclavas, se define la transformación  $F$ . Observando la Figura 5.3, fácilmente es posible determinar que

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Por lo tanto, la familia 5.18 es equivalente a

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_m &= \mathcal{A}\delta_m + \Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \mathcal{L}_{m_2}) \\
 \mathcal{Y}_m &= \mathcal{C}\delta_m,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

con

$$\delta_m = \left( \delta_1^{m_1} \ \delta_2^{m_1} \ \delta_1^{m_1} \ \delta_2^{m_1} \ \delta_3^{m_2} \ \delta_4^{m_2} \ \delta_3^{m_2} \ \delta_4^{m_2} \ \delta_3^{m_2} \ \delta_4^{m_2} \right)^T,$$

$$\Phi_m(\mathcal{L}_{m_1}, \mathcal{L}_{m_2}) = \begin{pmatrix} \phi_{m_1}(\mathcal{L}_{m_1}) \\ \phi_{m_1}(\mathcal{L}_{m_1}) \\ \phi_{m_2}(\mathcal{L}_{m_2}) \\ \phi_{m_2}(\mathcal{L}_{m_2}) \\ \phi_{m_2}(\mathcal{L}_{m_2}) \end{pmatrix}, \quad \phi_{m_j}(\mathcal{L}_{m_j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{L}_{m_j}(\delta_{2j-1}^{n_{m_j}}, \delta_{2j}^{n_{m_j}}) \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2.$

Note que en la familia de vectores de estado  $\delta_m$  aparece dos veces el vector de estado del primer sistema maestro. Esto se debe a que dicho sistema interactúa con dos aeronaves de la familia esclava. Ocurre lo mismo con el segundo sistema maestro.

Por su parte, la familia (5.19) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_s &= \mathcal{A}\delta_s + \Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \mathcal{L}_{s_2}, \mathcal{L}_{s_3}, \mathcal{L}_{s_4}, \mathcal{L}_{s_5}) + \bar{\mathcal{U}}, \\ \mathcal{Y}_s &= \mathcal{C}\delta_s, \end{aligned} \tag{5.21}$$

con

$$\delta^s = \left( \delta_1^{s_1} \ \delta_2^{s_1} \ \delta_3^{s_2} \ \delta_4^{s_2} \ \delta_5^{s_3} \ \delta_6^{s_3} \ \delta_7^{s_4} \ \delta_8^{s_4} \ \delta_9^{s_5} \ \delta_{10}^{s_5} \right)^T$$

$$\Phi_s(\mathcal{L}_{s_1}, \dots, \mathcal{L}_{s_5}) = \begin{pmatrix} \phi_{s_1}(\mathcal{L}_{s_1}) \\ \phi_{s_2}(\mathcal{L}_{s_2}) \\ \phi_{s_3}(\mathcal{L}_{s_3}) \\ \phi_{s_4}(\mathcal{L}_{s_4}) \\ \phi_{s_5}(\mathcal{L}_{s_5}) \end{pmatrix},$$

$$\phi_{s_j}(\mathcal{L}_{s_j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{L}_{s_j}(\delta_{2j-1}^{n_{s_j}}, \delta_{2j}^{n_{s_j}}, u_1^{n_{s_j}}, u_2^{n_{s_j}}) \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{U}}(u_3^{n_{s_1}}, \dots, u_3^{n_{s_5}}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_{s_1}(u_3^{n_{s_1}}) \\ \bar{\mathcal{U}}_{s_2}(u_3^{n_{s_2}}) \\ \bar{\mathcal{U}}_{s_3}(u_3^{n_{s_3}}) \\ \bar{\mathcal{U}}_{s_4}(u_3^{n_{s_4}}) \\ \bar{\mathcal{U}}_{s_5}(u_3^{n_{s_5}}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{U}}_{s_j}(u_3^{n_{s_j}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_3^{n_{s_j}} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

Para ambas familias, se tiene que las matrices  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_s = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}, \quad C_j = (1 \ 0), \quad 1 \leq j \leq 5.$$

Por lo tanto, de (5.20) y (5.21) se tiene que la familia de controladores dinámicos distribuidos es

$$\begin{aligned} \dot{e}_\delta &= \mathcal{A}e_\delta + \Phi_m - \Phi_s - \bar{\mathcal{U}} \\ \dot{\mathcal{U}} &= \mathcal{M}\mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}} \\ \bar{\mathcal{U}} &= \Phi_m - \Phi_s + \mathcal{K}e_\delta \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{s_1} \\ \mathcal{U}_{s_2} \\ \mathcal{U}_{s_3} \\ \mathcal{U}_{s_4} \\ \mathcal{U}_{s_5} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{s_j} = \begin{pmatrix} u_1^{n_{s_j}} \\ u_2^{n_{s_j}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \end{pmatrix}, \quad M_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

Finalmente, en lazo cerrado se tiene que  $\dot{e}^\delta = \bar{\mathcal{A}}e^\delta$  con

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{A}}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{A}}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{A}}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{A}}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{A}}_5 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_{1,j} & -k_{2,j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

El espectro  $\bar{\mathcal{A}}$  está dado por

$$\sigma(\bar{\mathcal{A}}) = \bigcup_{j=1}^5 \sigma(\bar{\mathcal{A}}_j) = \{\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}\},$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{1,j} &= -\frac{1}{2} \left( k_{2,j} + \sqrt{-4k_{1,j} + k_{2,j}^2} \right), \\ \lambda_{2,j} &= -\frac{1}{2} \left( k_{2,j} - \sqrt{-4k_{1,j} + k_{2,j}^2} \right), \quad 1 \leq j \leq 5. \end{aligned}$$

Tal que (5.14) es estable si  $k_{1,j} > 0$  y  $k_{2,j} > 0$  dado que  $Re(\lambda_{1,j}) < 0$  y  $Re(\lambda_{2,j}) < 0$  para  $1 \leq j \leq 5$ . Es decir,  $r(\exp(\bar{\mathcal{A}}t)) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, las familias de aeronaves flexibles alcanzan un estado de MSG, o en otras palabras, el ángulo de actuación de las aeronaves esclavas coincide con el de su aeronave maestra correspondiente.

### 5.3. MSG de aeronaves flexibles: Simulaciones y resultados

Para la simulación del ejemplo anterior, considere las siguientes ganancias para la familia de controladores dinámicos distribuidos  $k_{1,i} = k_{2,i} = 100$ , para  $i = 1, \dots, 5$ . Por otro lado, se toman los parámetros y condiciones iniciales utilizados mostrados en las Tablas 5.1 y 5.2.

Longitud de la viga	5	<i>m</i>
Rigidez de la viga	0.8	<i>Nm<sup>2</sup></i>
Densidad lineal de la viga	0.02	<i>kg/m</i>
Radio del pivote	1	<i>m</i>
Inercia rotacional del pivote	0.5	<i>kgm<sup>2</sup></i>

Cuadro 5.1: Parámetros del sistema

$\theta_{m_1} = 0$	<i>rad</i>	$\theta_{m_2} = 1$	<i>rad</i>
$\theta_{s_1}(0) = 0.3$	<i>rad</i>	$\theta_{s_2}(0) = 0.2$	<i>rad</i>
$\theta_{s_3}(0) = 0.2$	<i>rad</i>	$\theta_{s_4}(0) = 0.4$	<i>rad</i>
$\theta_{s_5}(0) = 0.6$	<i>rad</i>		

Cuadro 5.2: Condiciones iniciales

Observe que los ángulos de actuación de los sistemas maestros se consideran fijos. Por otro lado, en las Figuras 5.4 y 5.5 se aprecia como el ángulo de actuación de todas las aeronaves de la familia esclava alcanza el de su correspondiente sistema maestro. Por lo tanto, las familias maestra y esclava efectivamente están en un estado de MSG.



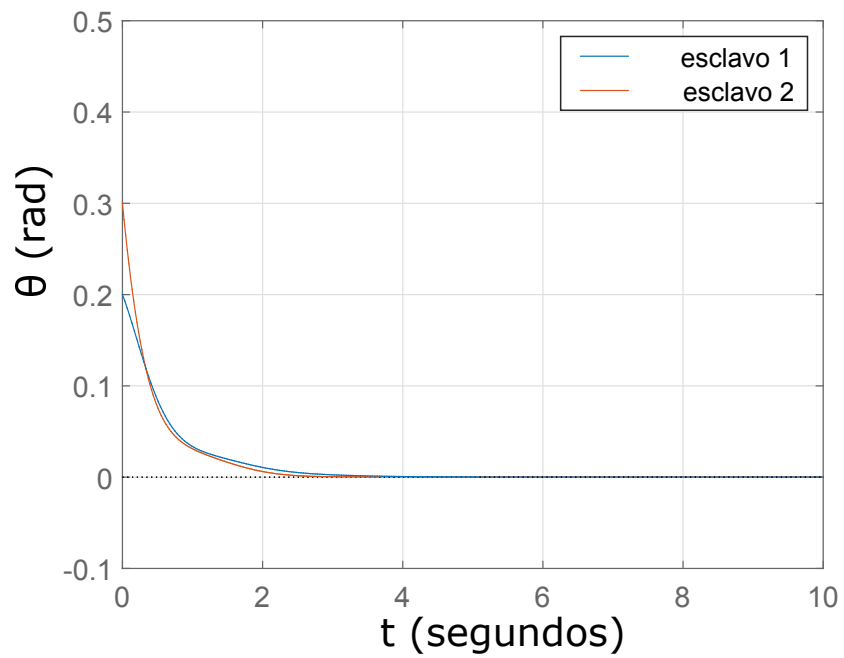


Figura 5.4: MSG de la aeronave maestra 1 y las aeronaves esclavas 1 y 2.

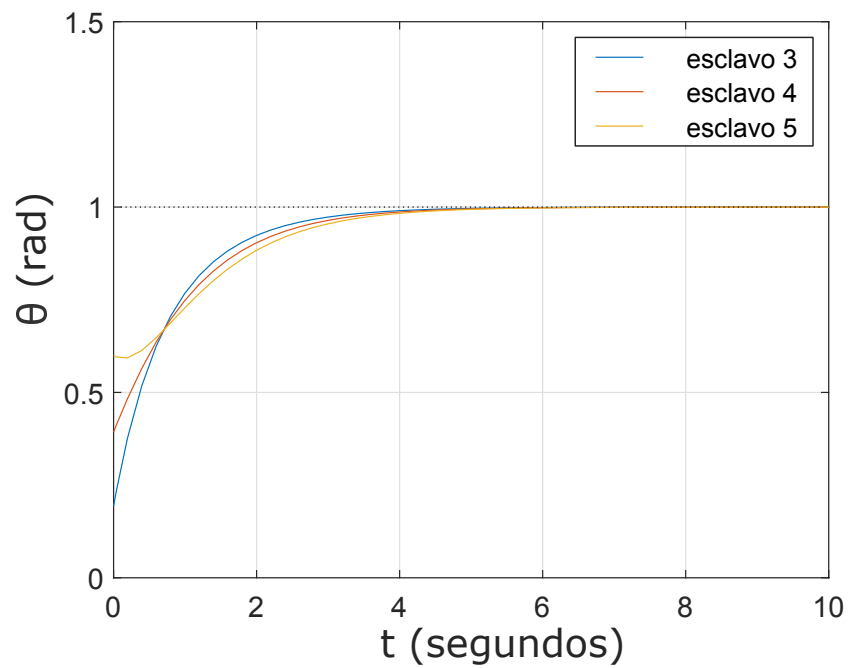


Figura 5.5: MSG de la aeronave maestra 2 y las aeronaves esclavas 3,4 y 5.



# Capítulo 6

## Control dinámico distribuido fraccional para sistemas PDE de orden fraccional.

En este capítulo se aborda el problema de sincronización para *sistemas PDE de orden fraccional*. Es importante recalcar que la clase de sistemas PDE considerados en este capítulo son conmensurados y poseen un orden de derivación fraccional con respecto al tiempo, no obstante, todas aquellas posibles derivadas parciales con respecto a las coordenadas espaciales son de orden entero.

Para llevar a cabo la sincronización de esta clase de sistemas, se presentará un *controlador dinámico distribuido de orden fraccional*. El análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado se lleva a cabo haciendo uso del criterio de estabilidad establecido por Matignon, un resultado ampliamente conocido para sistemas de orden fraccional.

### 6.1. Nociones adicionales de cálculo fraccional

En un capítulo anterior se introdujeron algunas nociones básicas de cálculo fraccional. No obstante, para el diseño de un controlador dinámico distribuido de orden fraccional, se presentan las siguientes definiciones adicionales.

**Definición 6.1.** [86] Una función real  $f(t)$ ,  $t > 0$ , se encuentra en el espacio  $C_\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  si existe un número real  $\rho > \mu$ , tal que  $f(t) = t^\rho f_1(t)$ , donde  $f_1(t) \in C[0, \infty)$ , y se dice que pertenece al espacio  $C_\mu^\eta$  si y solo si  $f^{(\eta)} \in C_\mu$ ,  $\eta \in \mathbb{N}$ .

**Definición 6.2.** [81] La integral fraccional de Riemann–Liouville de orden  $\alpha \geq 0$  de

una función  $f \in C_\mu$ ,  $\mu \geq -1$  se define como

$$\begin{aligned} J^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, t > 0 \\ J^0 f(t) &= f(t). \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

es la función gama.

Una explicación detallada de la función gama, así como sus diferentes propiedades, se puede hallar en [4]. A continuación, se introducen algunas propiedades útiles para este trabajo de la integral fraccional de Riemann-Liouville.

Para  $f \in C_\mu$ ,  $\mu \geq -1$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$  y  $\gamma > -1$ :

$$1a) \quad J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t),$$

$$2a) \quad J^\alpha J^\beta f(t) = J^\beta J^\alpha f(t),$$

$$3a) \quad J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}.$$

Estas propiedades y otras pueden ser encontradas en [81]. A continuación se presenta la derivada fraccional de Caputo [17].

**Definición 6.3.** [81] La derivada fraccional de  $f(t)$  en el sentido de Caputo se define como

$$D_C^\alpha f(t) = J^{\eta-\alpha} D^\eta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\eta-\alpha-1} f^{(\eta)}(\tau) d\tau, \quad (6.2)$$

para  $\eta - 1 < \alpha \leq \eta$ ,  $\eta \in \mathbb{N}$ ,  $t > 0$ ,  $f \in C_{-1}^\eta$ . Donde  $f^{(\eta)}(t) = \frac{d^\eta}{dt^\eta} f(t)$ .

Las siguientes, son algunas propiedades de la derivada fraccional de Caputo.

Si  $\eta - 1 < \alpha \leq \eta$ ,  $\eta \in \mathbb{N}$  y  $f \in C_\mu^\eta$ ,  $\mu \geq -1$ , entonces

$$1b) \quad D_C^\alpha J^\alpha f(t) = f(t),$$

$$2b) \quad J^\alpha D_C^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{\eta-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0,$$

$$3b) \quad D_C^\alpha (f(t) + g(t)) = D_C^\alpha f(t) + D_C^\alpha g(t),$$

$$4b) D_C^\alpha (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^{\alpha-k} f(t)) g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left[ (f(t)g(t))^{(k)}(0) \right],$$

5b)  $D_C^\alpha a = 0$  para  $a$  constante.

De manera análoga a la Definición 6.3, es posible definir la derivada parcial de orden fraccional en el sentido de Caputo, esto es:

**Definición 6.4.** [70] Sea  $\nu(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función causal del tiempo, i.e.,  $\nu(x, t) = 0$  para  $t < 0$ , y sea  $\eta$  el entero más próximo y mayor a  $\alpha$ . La derivada parcial de Caputo de orden  $\alpha$  con respecto al tiempo de  $\nu(x, t)$  está dada por

$$\begin{aligned} D_{Ct}^\alpha \nu(x, t) &= \frac{\partial^\alpha \nu(x, t)}{\partial t^\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\eta-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\eta-\alpha-1} \frac{\partial^\eta \nu(x, \tau)}{\partial \tau^\eta} d\tau, \\ \text{si } \eta - 1 < \alpha < \eta, \\ \frac{\partial^\eta \nu(x, t)}{\partial t^\eta}, & \text{si } \alpha = \eta \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.3)$$

En las subsecuentes secciones, por simplicidad, la derivada parcial de Caputo de orden fraccional con respecto al tiempo será llamada simplemente como derivada de Caputo.

## 6.2. Controlador dinámico distribuido fraccional

A continuación se presenta un controlador dinámico distribuido de orden fraccional para resolver el problema de sincronización de sistemas PDE de orden fraccional. El diseño del controlador dinámico parte de una forma canónica, la llamada *Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Fraccional* (FCOGF). Para la obtención de la FCOGF, considere los siguientes aspectos.

Defina el operador secuencial:

$$\mathcal{D}^{(r\alpha)} \nu(x, t) = \underbrace{D_{Ct}^\alpha D_{Ct}^\alpha \dots D_{Ct}^\alpha}_{r\text{-veces}} \nu(x, t), \quad r \in \mathbb{N}, \quad (6.4)$$

i.e., la derivada de Caputo de orden  $\alpha > 0$  es aplicada secuencialmente  $r$  veces a  $\nu(x, t)$ . Note que si  $r = 1$  entonces  $\mathcal{D}^{(\alpha)} \nu(x, t) = D_{Ct}^\alpha \nu(x, t) = \frac{\partial^\alpha \nu(x, t)}{\partial t^\alpha}$ .

De tal manera que un sistema PDE de orden fraccional puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} V(x, t) &= R[x]V(x, t) + Q(x, t, u), \quad x \in [0, L], \\ y(x, t) &= h(V, u), \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $V(x, t) = [\nu_1(x, t), \nu_2(x, t), \dots, \nu_n(x, t)]^T$  es el vector de estados,  $y(x, t) \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema y  $u(x, t)$  su señal de entrada. El operador  $R[x]$  es un operador

diferencial de orden entero con respecto a  $x$  de dimensiones adecuadas. Las funciones  $h(\cdot)$  y  $Q(\cdot)$  son continuas.

La solución del sistema (6.5) puede ser aproximada mediante el *Método Iterativo Variacional* (MIV). De tal manera que la solución aproximada está dada por:

$$V_{k+1}(x, t) = V_k(x, t) - J_t^\alpha [ \mathcal{D}^{(\alpha)} V_k(x, t) - R[x]V_k(x, t) - Q(x, t, u) ] \quad (6.6)$$

donde  $J_t^\alpha$  es la integral de Riemann-Liouville de orden fraccional con respecto a  $t$ . A su vez, la condición inicial  $V_0(x, t)$  puede ser utilizada como primera aproximación del método [21, 41].

**Definición 6.5.** [64] Una variable de estado  $\nu_i(x, t)$  es fraccional algebraicamente observable si es función de las primeras  $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$  derivadas fraccionales secuenciales de la salida  $y$  y la entrada  $u$ , respectivamente, i.e.,

$$\nu_i = \phi_i (y, \mathcal{D}^{(\alpha)} y, \mathcal{D}^{(2\alpha)} y, \dots, \mathcal{D}^{(r_1\alpha)} y, u, \mathcal{D}^{(\alpha)} u, \mathcal{D}^{(2\alpha)} u, \dots, \mathcal{D}^{(r_2\alpha)} u) \quad (6.7)$$

Sea  $n \geq 0$  el mínimo entero tal que  $\mathcal{D}^{(n\alpha)} y$  es analíticamente dependiente de

$$\{y, \mathcal{D}^{(\alpha)} y, \mathcal{D}^{(2\alpha)} y, \dots, \mathcal{D}^{([n-1]\alpha)} y\}$$

tal que se obtiene el siguiente sistema

$$H (y, \mathcal{D}^{(\alpha)} y, \dots, \mathcal{D}^{([n-1]\alpha)} y, \mathcal{D}^{(n\alpha)} y, u, \mathcal{D}^{(\alpha)} u, \dots, \mathcal{D}^{([\varphi-1]\alpha)} u, \mathcal{D}^{(\varphi\alpha)} u) = 0, \quad (6.8)$$

El sistema (6.8) puede resolverse localmente como

$$\mathcal{D}^{(n\alpha)} y = \mathcal{L} (y, \mathcal{D}^{(\alpha)} y, \dots, \mathcal{D}^{([n-1]\alpha)} y, u, \mathcal{D}^{(\alpha)} u, \dots, \mathcal{D}^{([\varphi-1]\alpha)} u) + \mathcal{D}^{(\varphi\alpha)} u, \quad (6.9)$$

donde el entero  $\varphi \geq 0$ . Ahora, considere el siguiente cambio de variable  $z_i = \mathcal{D}^{([i-1]\alpha)} y$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que se obtiene la siguiente representación del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} z_1 &= z_2 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{n-1} &= z_n \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_n &= \mathcal{L} (z_1, z_2, \dots, z_n, u, \mathcal{D}^{(\alpha)} u, \dots, \mathcal{D}^{([\varphi-1]\alpha)} u) + \mathcal{D}^{(\varphi\alpha)} u \\ \bar{y} &= z_1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde  $\bar{y}$  es la salida del sistema y  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$  es el nuevo vector de estado. La representación anterior es la llamada Forma Canónica de Observabilidad Generalizada Fraccional (FCOGF) y es el ingrediente clave para la construcción del controlador dinámico distribuido fraccional.

Ahora, considere dos sistemas PDE de orden fraccional. El llamado sistema maestro está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}V(x, t) &= R_m[x]V(x, t) + Q_m(x, t, u_m), \quad x \in [0, L], \\ y_m(x, t) &= h_m(V, u_m),\end{aligned}\tag{6.11}$$

donde  $V(x, t) \in \mathbb{R}^{n_m}$ . Por otro lado, el sistema esclavo es:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}W(x, t) &= R_s[x]W(x, t) + Q_s(x, t, u_s), \quad x \in [0, L], \\ y_s(x, t) &= h_s(W, u_s),\end{aligned}\tag{6.12}$$

con  $W(x, t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ .

**Definición 6.6.** *El sistema maestro (6.11) y el sistema esclavo (6.12) se dicen estar en un estado de Sincronización Generalizada Fraccional (SGF) si existe un cambio de variable que genere la transformación  $H_{ms} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_m}$  con  $H_{ms} = \Phi_s^{-1} \circ \Phi_m$ , una variedad algebraica  $M = \{(W, V) | V = H_{ms}(W)\}$  y un conjunto compacto  $B \subset \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_m}$ , con  $M \subset B$ , tal que todas las trayectorias de estado con condiciones iniciales en  $B$  se aproximen a  $M$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , i.e., si*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H_{ms}(W) - V\| = 0.\tag{6.13}$$

Las transformaciones  $\Phi_m : \mathbb{R}^{n_m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi_s : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^n$  poseen un espacio de estados común, i.e.,  $\Phi_m(V) = Z_m \in \mathbb{R}^n$  y  $\Phi_s(W) = Z_s \in \mathbb{R}^n$ . Además, estas pueden ser halladas mediante un cambio de variable, la cual puede definirse como:

$$z = \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j u_j, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}.\tag{6.14}$$

**Teorema 6.1.** *Sean los sistemas (6.11) y (6.12) transformables a una FCOGF. Entonces existe un controlador dinámico distribuido fraccional tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Z_m - Z_s\| = 0,\tag{6.15}$$

donde  $Z_m = [z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}]^T$  y  $Z_s = [z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}]^T$  son las trayectorias de estado en las nuevas coordenadas de los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. Con  $z_{m_i} = \mathcal{D}^{([i-1]\alpha)}y_m$  y  $z_{s_i} = \mathcal{D}^{([i-1]\alpha)}(y_s + u_s)$ , para  $1 \leq i \leq n$ .

*Demostración.* Sean los cambios de variable

$$z_{m_1} = y_m,\tag{6.16}$$

y

$$z_{s_1} = y_s + u_s.\tag{6.17}$$

para los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. Entonces, es posible generar las siguientes transformaciones de coordenadas:

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} z_{m_1} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{m_1} \\ \mathcal{D}^{(2\alpha)} z_{m_1} \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{([n-1]\alpha)} z_{m_1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_s = \begin{bmatrix} z_{s_1} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{s_1} \\ \mathcal{D}^{(2\alpha)} z_{s_1} \\ \vdots \\ \mathcal{D}^{([n-1]\alpha)} z_{s_1} \end{bmatrix},$$

Así, la FCOGF del sistema maestro (6.11) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{m_j} &= z_{m_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{m_n} &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}), \end{aligned} \quad (6.18)$$

y la del sistema esclavo (6.12) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{s_j} &= z_{s_{j+1}}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{s_n} &= \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}, u_s, \mathcal{D}^{(\alpha)} u_s, \dots, \mathcal{D}^{([\gamma-1]\alpha)} u_s) + \mathcal{D}^{(\gamma\alpha)} u_s \end{aligned} \quad (6.19)$$

Sea  $e = Z_m - Z_s$  el error de sincronización, y considere a su vez la siguiente notación  $u_1 = u_s, u_2 = \mathcal{D}^{(\alpha)} u_s, \dots, u_\gamma = \mathcal{D}^{([\gamma-1]\alpha)} u_s$ . Entonces, a partir de (6.18) y (6.19) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} e_j &= e_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} e_n &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\gamma \end{aligned} \quad (6.20)$$

De tal manera que se propone el siguiente control dinámico distribuido de orden fraccional para sincronizar los sistemas PDE fraccionales:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} u_j &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq \gamma-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\gamma &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + \kappa e \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde  $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n]^T$ . Por lo tanto, la dinámica del error de sincronización está dada por el siguiente sistema aumentado:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} e_j &= e_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} e_n &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) - \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\gamma, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} u_j &= u_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq \gamma-1, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} u_\gamma &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_n}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, \dots, z_{s_n}, u_1, u_2, \dots, u_\gamma) + \kappa e \end{aligned} \quad (6.22)$$



Así, el sistema en lazo cerrado está dado por el siguiente sistema PDE de orden fraccional:

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}e = Ae, \quad (6.23)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 & -\kappa_3 & \dots & -\kappa_{n-1} & -\kappa_n \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Para determinar la estabilidad del sistema anterior, considere el resultado de estabilidad obtenido por Matignon [67], i.e., el sistema PDE de orden fraccional (6.23) es asintóticamente estable si se satisface que:

$$|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Note que el espectro de  $A$ , denotado por  $\text{spec}(A)$ , es el conjunto finito

$$\bar{\lambda} = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

donde  $\lambda_i$  es un eigenvalor de la matriz  $A$ . Por lo tanto, el sistema (6.23) será asintóticamente estable si las ganancias del controlador dinámico distribuido de orden fraccional  $\kappa_i$  son tales que para todo  $\lambda_i$  se tiene

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

□

### 6.3. Ejemplos de Sincronización Generalizada Fraccional

En esta sección, se ejemplifica la metodología de diseño del controlador dinámico distribuido fraccional presentado en la sección anterior. Se presentan además los resultados numéricos obtenidos para validar su efectividad.

### 6.3.1. SGF de dos sistemas Schnakenberg fraccionales

El sistema Schnakenberg es un sistema de reacción-difusión simple, ocasionalmente descrito también como un modelo de *substracción-reducción*. Este sistema describe las oscilaciones presentes en el fenómeno de glucólisis (conversión de glucosa en energía) [87]. La versión fraccional de este modelo es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}\nu_1(x,t) &= \frac{\partial^2\nu_1(x,t)}{\partial x^2} + a_m - \nu_1(x,t) + \nu_1^2(x,t)\nu_2(x,t), \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}\nu_2(x,t) &= d_m \frac{\partial^2\nu_2(x,t)}{\partial x^2} + b_m - \nu_1^2(x,t)\nu_2(x,t), \\ y_m &= \nu_1(x,t).\end{aligned}\tag{6.25}$$

Considere que el sistema (6.25) es el sistema maestro, por consiguiente, se considera un segundo sistema de Schnakenberg como sistema esclavo, el cual es:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}\omega_1(x,t) &= \frac{\partial^2\omega_1(x,t)}{\partial x^2} + a_s - \omega_1(x,t) + \omega_1^2(x,t)\omega_2(x,t), \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}\omega_2(x,t) &= d_s \frac{\partial^2\omega_2(x,t)}{\partial x^2} + b_s - \omega_1^2(x,t)\omega_2(x,t), \\ y_s &= \omega_1(x,t).\end{aligned}\tag{6.26}$$

donde  $\nu_1$ ,  $\omega_1$  son las concentraciones del activador y  $\nu_2$ ,  $\omega_2$  las del sustrato de los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. Las constantes  $a_m, a_s$  y  $b_m, b_s$  son las tasas de velocidad de la reacción y  $d_m = d_{m_1}/d_{m_2}$ ,  $d_s = d_{s_1}/d_{s_2}$  son coeficientes de difusión.

Ahora, sean  $z_{m_1} = y_m$  y  $z_{s_1} = y_s + u_1$  los cambios de variable para los sistemas maestro y esclavo, respectivamente. Así, podemos generar las siguientes transformaciones:

$$\Phi_m = \begin{pmatrix} z_{m_1} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}z_{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_m \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}y_m \end{pmatrix}\tag{6.27}$$

y

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} z_{s_1} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}z_{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_s + u_1 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}y_s + u_2 \end{pmatrix}.\tag{6.28}$$

Tal que el sistema (6.25) puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}z_{m_1} &= z_{m_2} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}z_{m_2} &= L_{m_1} + L_{m_2} + L_{m_3} = \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}),\end{aligned}\tag{6.29}$$

donde

$$\begin{aligned} L_{m_1} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial^3 \nu_1(x,t)}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau, \\ L_{m_2} &= \nu_1(x,t) - \nu_1^2(x,t) \nu_2(x,t) - \frac{\partial^2 \nu_1(x,t)}{\partial x^2} - a_m, \\ L_{m_3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^{\alpha-k} \nu_1^2) \nu_2^{(k)} - \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} (\nu_1^2 \nu_2)(x,0). \end{aligned}$$

Por otro lado, la FCOGF del sistema esclavo (6.26) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{s_1} &= z_{s_2} \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} z_{s_2} &= L_{s_1} + L_{s_2} + L_{s_3} + \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2 = \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, u_1, u_2) + \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2, \end{aligned} \quad (6.30)$$

donde

$$\begin{aligned} L_{s_1} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial^3 \omega_1(x,t)}{\partial x^2 \partial \tau} d\tau, \\ L_{s_2} &= \omega_1(x,t) - \omega_1^2(x,t) \omega_2(x,t) - \frac{\partial^2 \omega_1(x,t)}{\partial x^2} - a_s, \\ L_{s_3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (D^{\alpha-k} \omega_1^2) \omega_2^{(k)} - \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} (\omega_1^2 \omega_2)(x,0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\alpha)} e_1 &= e_2 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} e_2 &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, u_1, u_2) - \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} u_1 &= u_2 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2 &= \mathcal{L}_m(z_{m_1}, z_{m_2}) - \mathcal{L}_s(z_{s_1}, z_{s_2}, u_1, u_2) + \kappa e, \end{aligned} \quad (6.31)$$

con  $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2]^T$ . De tal manera que el sistema en lazo cerrado es:

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} e = Ae, \quad (6.32)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable si las ganancias  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son tales que

$$\left| \arg \left( -\frac{1}{2} \left( \kappa_2 \pm \sqrt{\kappa_2^2 - 4\kappa_1} \right) \right) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

Para la simulación numérica de este ejemplo, se discretiza el espacio coordenado tal y como se hizo para los ejemplos de capítulos anteriores. Además, considere  $\kappa_1 = 70$  y  $\kappa_2 = 50$ , junto con los parámetros  $a_m = 0.1$ ,  $b_m = 0.9$ ,  $d_m = 0.25$ ,  $a_s = 0.3$ ,  $b_s = 0.5$  y  $d_s = 0.15$ . Por otro lado, las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned}\nu_1(x, 0) &= \sin(x), & \nu_2(x, 0) &= \cos(x). \\ \omega_1(x, 0) &= e^{1/x}, & \omega_2(x, 0) &= \sin(x) + \cos(x).\end{aligned}$$

Así, utilizando el MIV, se tiene que la solución aproximada del sistema está dada por

$$\begin{aligned}\nu_{1_{k+1}}(x, t) &= \nu_{1_k}(x, t) - J_t^\alpha \left[ \mathcal{D}^{(\alpha)} \nu_{1_k}(x, t) - \frac{\partial^2 \nu_{1_k}(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - a_m + \nu_{1_k}(x, t) - \nu_{1_k}^2(x, t) \nu_{2_k}(x, t) \right], \\ \nu_{2_{k+1}}(x, t) &= \nu_{2_k}(x, t) - J_t^\alpha \left[ \mathcal{D}^{(\alpha)} \nu_{2_k}(x, t) - d_m \frac{\partial^2 \nu_{2_k}(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - b_m + \nu_{1_k}^2(x, t) \nu_{2_k}(x, t) \right],\end{aligned}$$

donde  $\nu_{1_0}(x, t) = \sin(x)$  y  $\nu_{2_0}(x, t) = \cos(x)$ , así como

$$\begin{aligned}\omega_{1_{k+1}}(x, t) &= \omega_{1_k}(x, t) - J_t^\alpha \left[ \mathcal{D}^{(\alpha)} \omega_{1_k}(x, t) - \frac{\partial^2 \omega_{1_k}(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - a_s + \omega_{1_k}(x, t) - \omega_{1_k}^2(x, t) \omega_{2_k}(x, t) \right], \\ \omega_{2_{k+1}}(x, t) &= \omega_{2_k}(x, t) - J_t^\alpha \left[ \mathcal{D}^{(\alpha)} \omega_{2_k}(x, t) - d_s \frac{\partial^2 \omega_{2_k}(x, t)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. - b_s + \omega_{1_k}^2(x, t) \omega_{2_k}(x, t) \right],\end{aligned}$$

Recordando que se utilizan las condiciones iniciales como primera aproximación, i.e.,  $\omega_{1_0}(x, t) = e^{1/x}$  y  $\omega_{2_0}(x, t) = \sin(x) + \cos(x)$ . Estas iteraciones pueden ser fácilmente calculadas haciendo uso de un software de cálculo simbólico. Por otro lado, se considera que el orden fraccional del sistema es  $\alpha = 1/2$ .

En las Figuras 6.1 y 6.2 es posible observar el comportamiento de ambos sistemas Schnakenberg cuando el controlador dinámico distribuido fraccional no es implementado. Por otro lado observe como en las Figuras 6.3 y 6.4 el comportamiento de dichos sistemas, en las coordenadas transformadas, es idéntico debido al uso del controlador, i.e., estos sistemas están en un estado de SGF. La Figura 6.5 apoya esta afirmación, pues en ella es claro que el error de sincronización para ambas concentraciones tiende a cero a lo largo de todo el espacio coordenado discretizado. Finalmente, en la Figura 6.6 se observan las señales de control.

### 6.3.2. SFG para difusión anómala

La transferencia de calor y humedad en un medio poroso, tal como el concreto, es un fenómeno del tipo *anómalo*. Esto es, las partículas fluyen más lento de lo normal

de una región de alta concentración a otra de baja. Este tipo de comportamiento no puede ser descrito por modelos tradicionales, es decir, de orden entero. Por el contrario, se ha hallado que los modelos fraccionales se ajustan mucho mejor a los resultados experimentales [101, 20]. Así, considere ahora un sistema de advección-difusión dado por el siguiente par de ecuaciones diferenciales parciales fraccionales acopladas:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}\nu_1(x,t) &= -a_{11}\frac{\partial\nu_1(x,t)}{\partial x} + d_{11}\frac{\partial^2\nu_1(x,t)}{\partial x^2}, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}\nu_2(x,t) &= -a_{22}\frac{\partial\nu_2(x,t)}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial^2\nu_2(x,t)}{\partial x^2} - a_{21}\frac{\partial\nu_1(x,t)}{\partial x} + d_{21}\frac{\partial^2\nu_1(x,t)}{\partial x^2}, \\ y &= \nu_1(x,t).\end{aligned}\tag{6.34}$$

donde  $\nu_1(x,t) = P/P^0$  y  $\nu_2(x,t) = T/T^0$ . Las variables  $P$  y  $T$  son las presiones de vapor y la temperatura, respectivamente. Las constantes  $P^0$  y  $T^0$  son variables ambientales de referencia. Las constantes  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{21}$ ,  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  y  $d_{21}$  son parámetros adimensionales que describen las propiedades del material (para más detalles se puede consultar [13]).

Ahora, considere un problema de sincronización donde el sistema maestro es sustituido por un perfil de humedad predefinido. Considere el siguiente perfil de humedad  $r(x) = x^3/3 + 0.1$ , mismo que corresponde con un perfil seco (sin transferencia de calor). Así, el sistema esclavo es dado por (6.34) y para el cual se elige  $z_1 = y + u_1$ , tal que se obtiene la siguiente transformación de coordenadas:

$$\phi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + u_1 \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}y + u_2 \end{pmatrix}\tag{6.35}$$

Por lo tanto, el sistema (6.34) se puede expresar como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}z_1 &= z_2, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}z_2 &= \mathcal{L}(z_1 + z_2) + \mathcal{D}^{(\alpha)}u_2,\end{aligned}\tag{6.36}$$

donde  $\mathcal{L}(z_1, z_2) = \mathcal{D}^{(2\alpha)}z_1$ . Luego, dado que el error de sincronización es en este caso  $e = r - z$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(\alpha)}e_1 &= e_2, \\ \mathcal{D}^{(\alpha)}e_2 &= \mathcal{D}^{(\alpha)}r - \mathcal{L}(z_1, z_2) - \mathcal{D}^{(\alpha)}u_2\end{aligned}\tag{6.37}$$

De tal forma que se propone  $\mathcal{D}^{(\alpha)}u_2 = D^{(\alpha)}r - \mathcal{L}(z_1, z_2) + \kappa e$ , donde  $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2]^T$ . Así, el control dinámico distribuido de orden fraccional está dado por la siguiente

expresión

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^{(\alpha)} e_1 &= e_2, \\
 \mathcal{D}^{(\alpha)} e_2 &= \mathcal{D}^{(\alpha)} r - \mathcal{L}(z_1, z_2) - \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2, \\
 \mathcal{D}^{(\alpha)} u_1 &= u_2, \\
 \mathcal{D}^{(\alpha)} u_2 &= \mathcal{D}^{(\alpha)} r - \mathcal{L}(z_1, z_2) + \kappa e
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

el cual conduce al siguiente sistema en lazo cerrado

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} e = Ae, \tag{6.39}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa_1 & -\kappa_2 \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

Por tanto, el sistema es asintóticamente estable si  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son tales que

$$\left| \arg \left( -\frac{1}{2} \left( \kappa_2 \pm \sqrt{\kappa_2^2 - 4\kappa_1} \right) \right) \right| > \frac{\alpha\pi}{2}$$

A continuación, sean  $a_{11} = 0.02$ ,  $a_{22} = 0.03$ ,  $a_{21} = 0.01$ ,  $d_{11} = 0.09$ ,  $d_{22} = 0.07$  y  $d_{21} = 0.03$ . Además, considere las condiciones iniciales  $\nu_1(x, 0) = \nu_2(x, 0) = 0$ . De tal manera que en la Figura 6.7 se observa el comportamiento del sistema cuando el control dinámico distribuido fraccional no actúa sobre este, mientras que en la Figura 6.8 se aprecia como con acción del controlador la referencia es seguida.

Note como con este ejemplo, así como el de MSG de aeronaves flexibles del capítulo anterior, se demuestra que el problema de SG efectivamente puede reducirse a un problema de seguimiento de trayectoria.

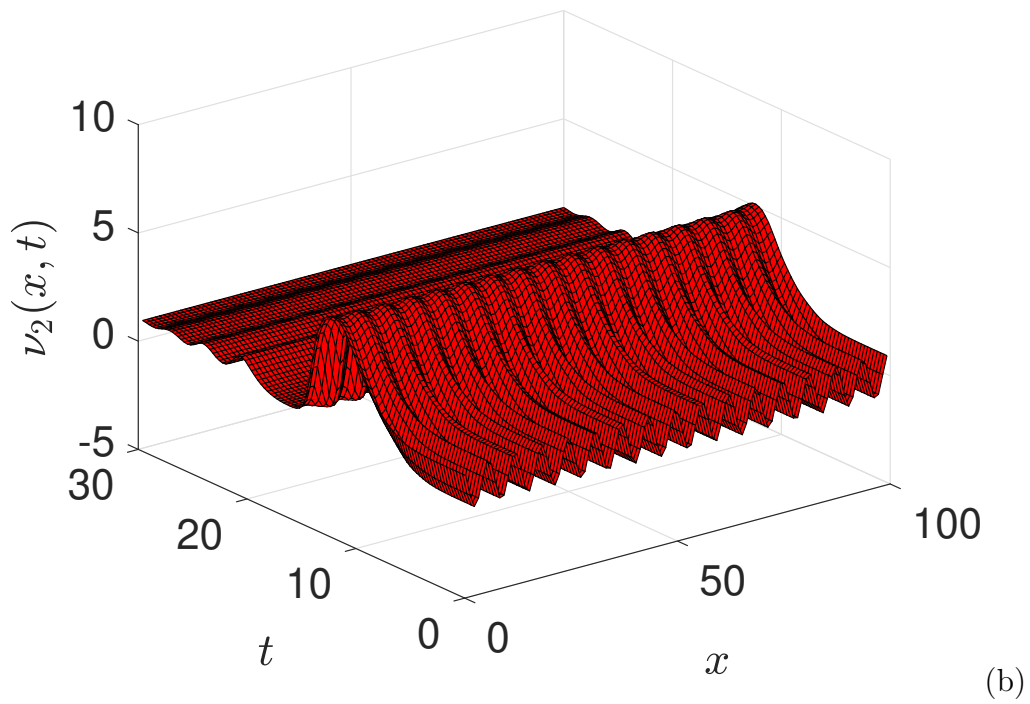
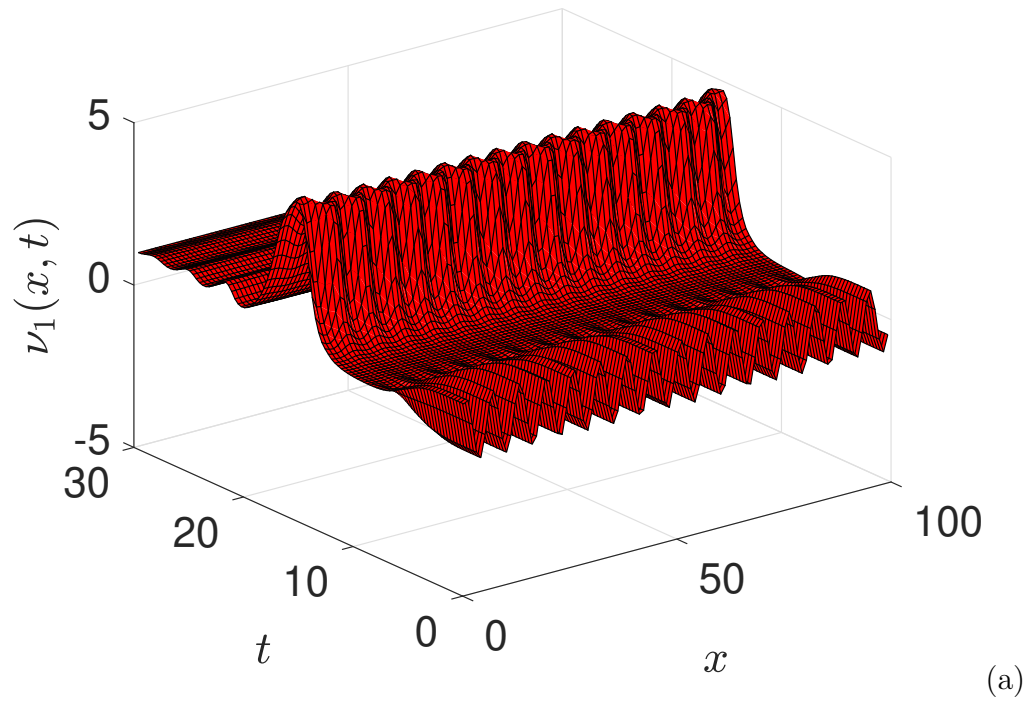


Figura 6.1: (a) Concentración de activador y (b) concentración de substrato del sistema Schnakenberg maestro.

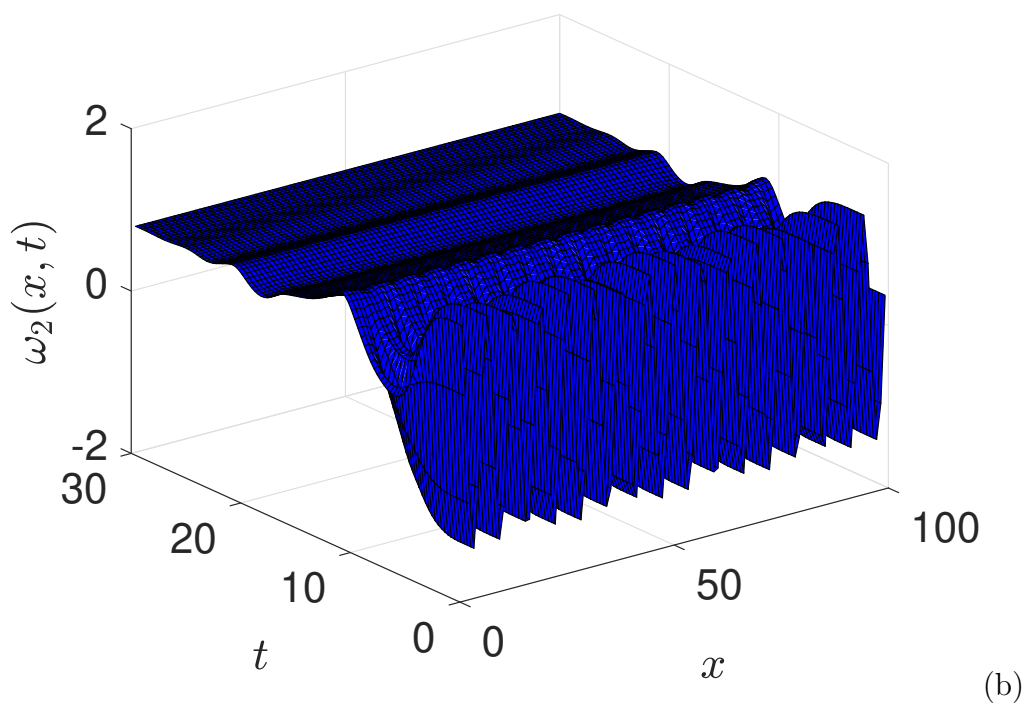
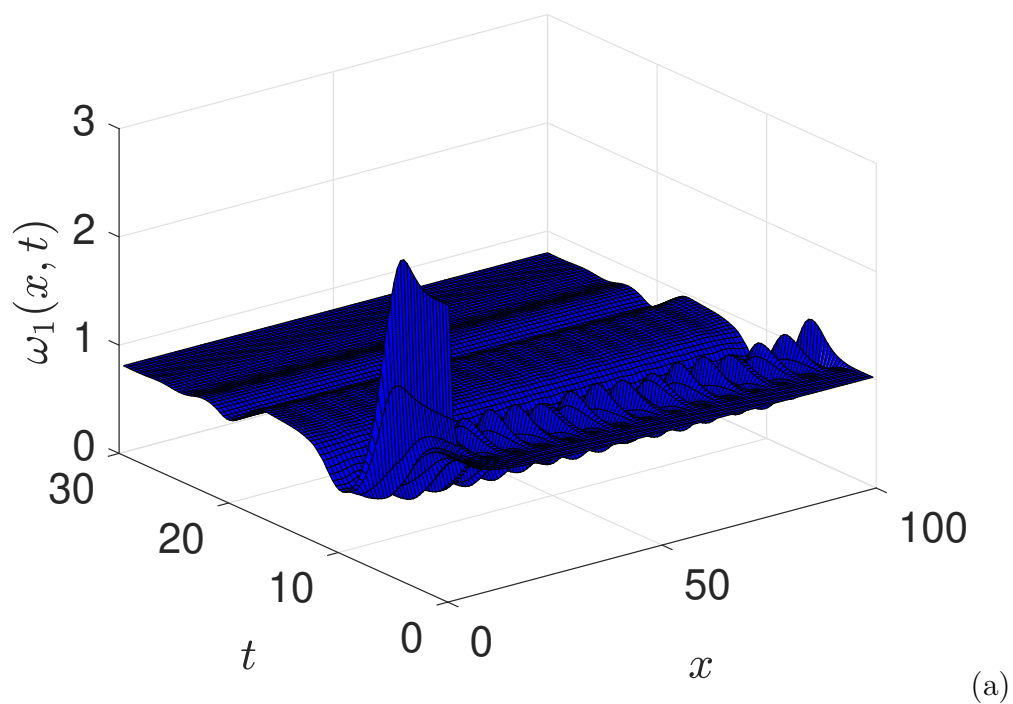


Figura 6.2: (a) Concentración de activador y (b) concentración de substrato del sistema Schnakenberg esclavo.



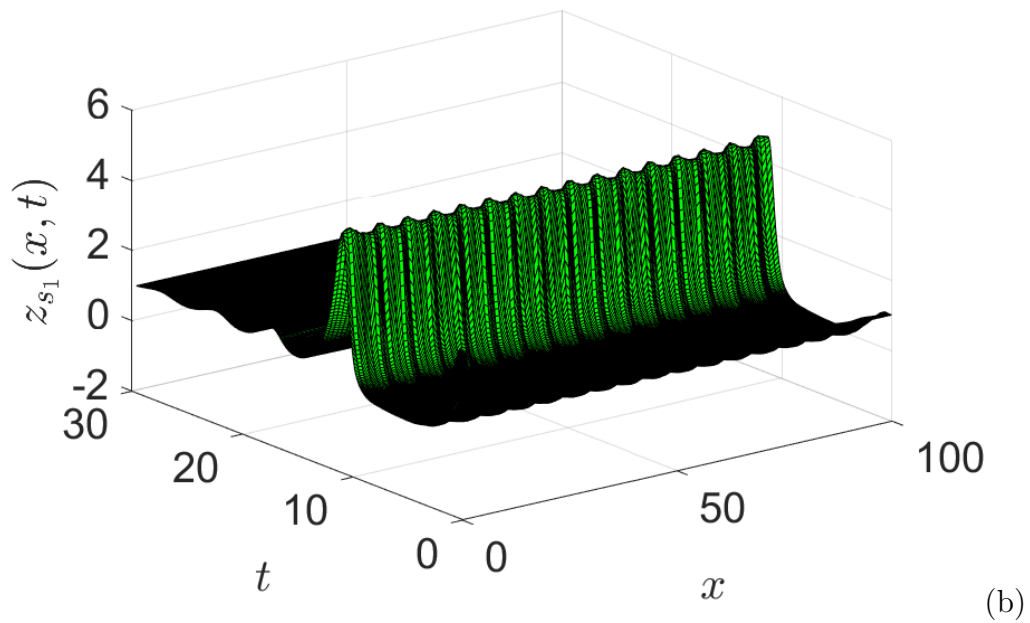
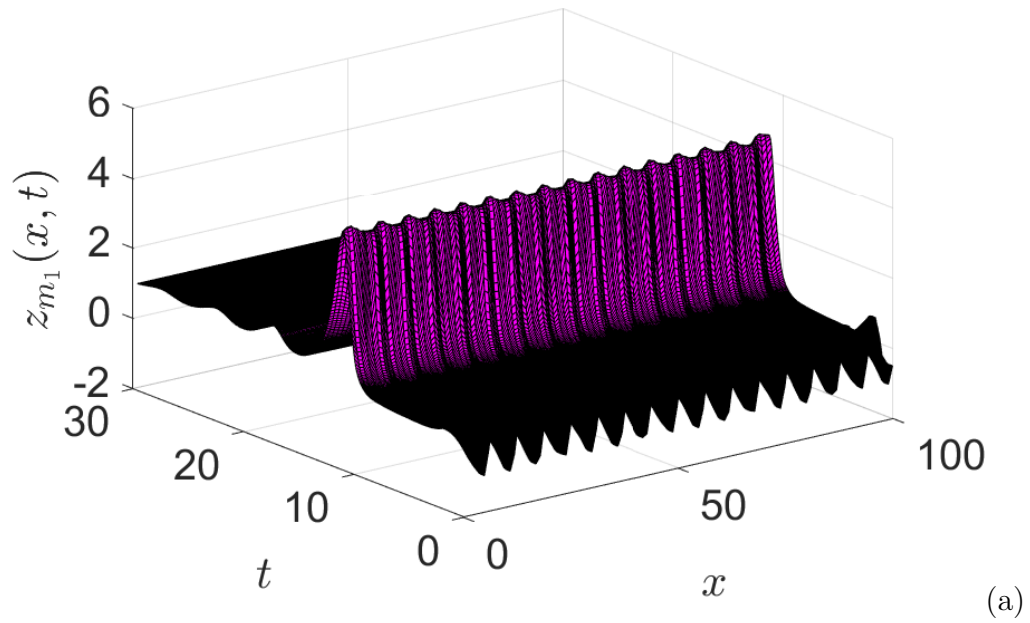


Figura 6.3: SGF de los sistemas Schnakenberg. Concentraciones de activador de los sistemas (a) maestro y (b) esclavo.

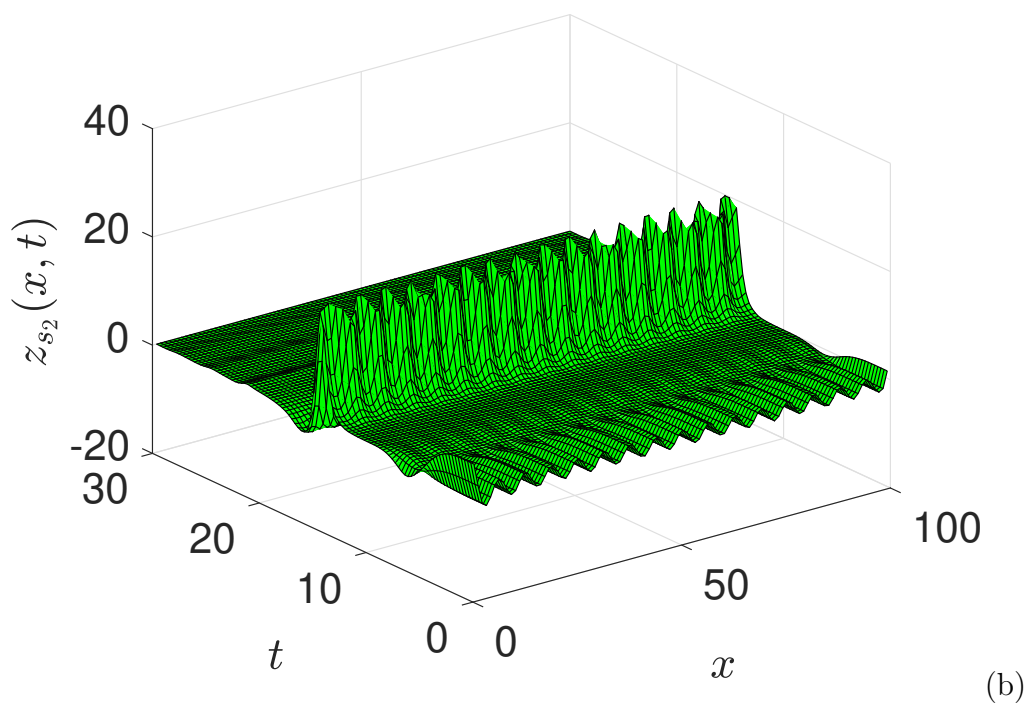
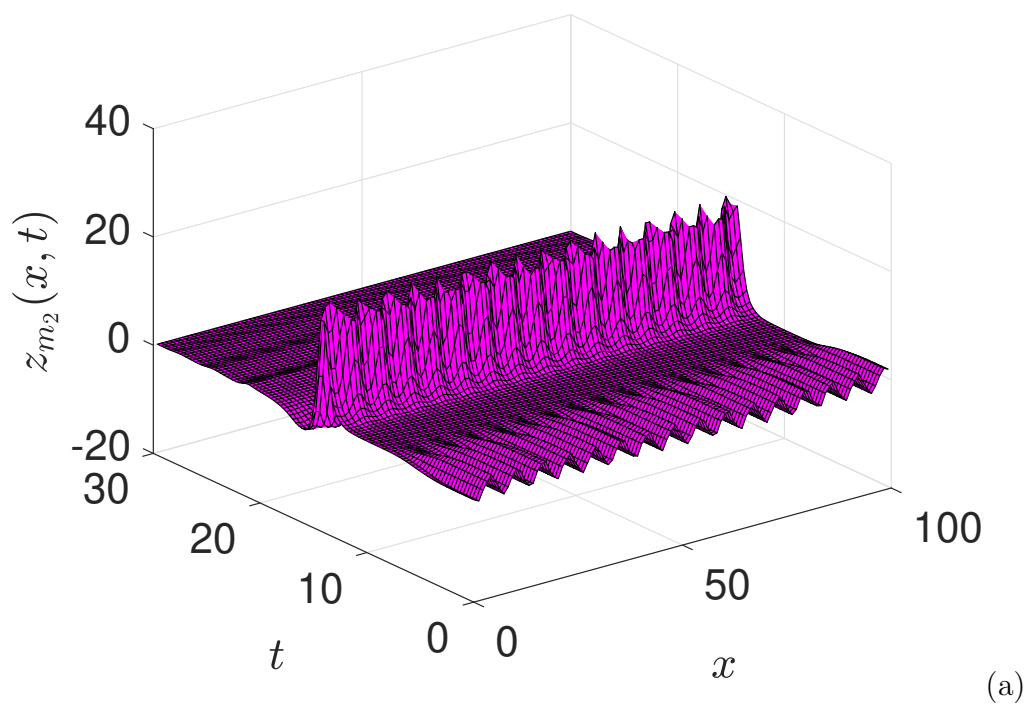
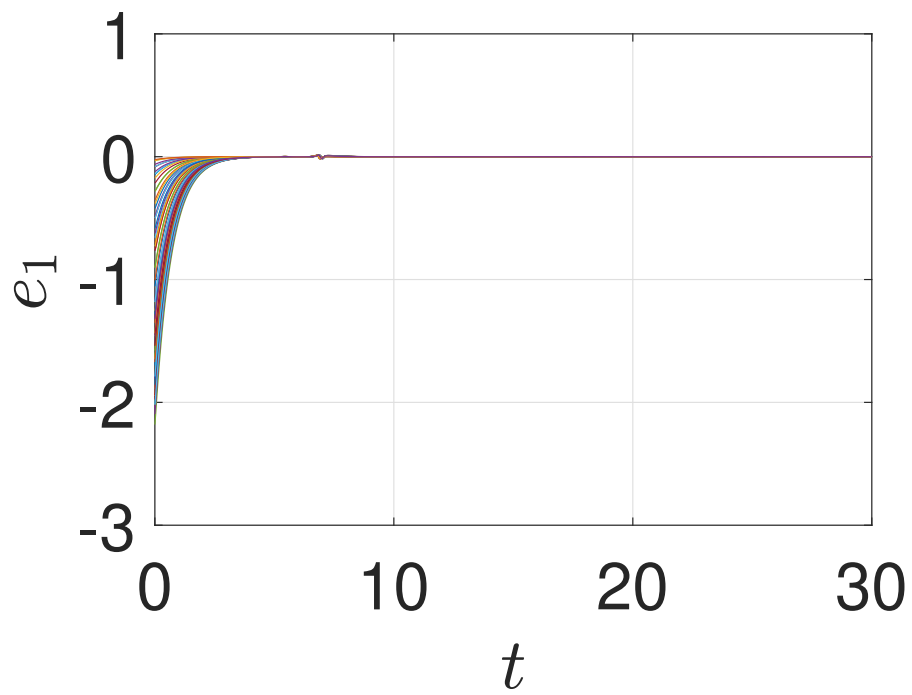
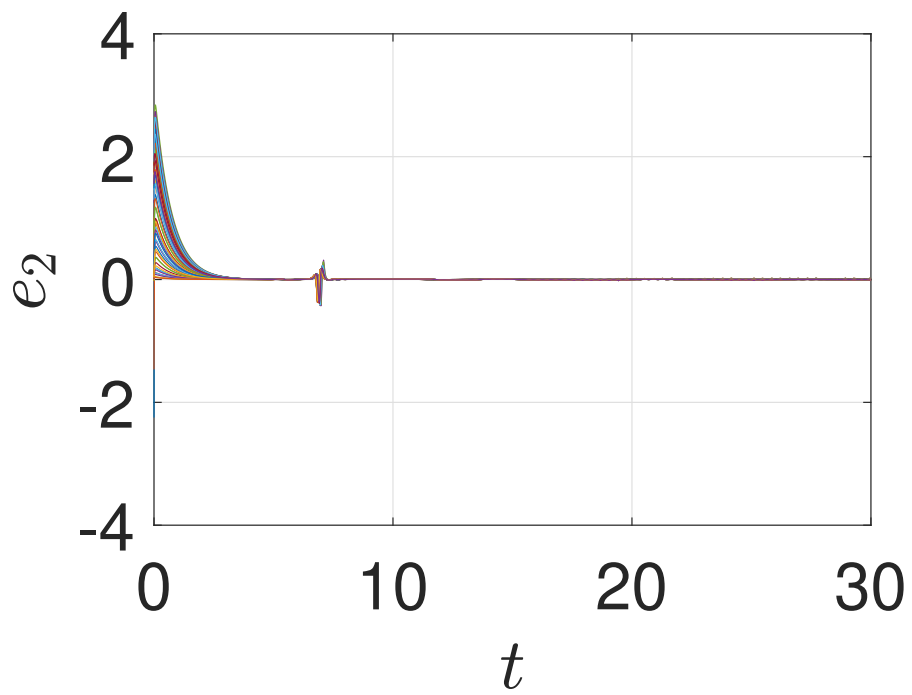


Figura 6.4: SGF de los sistemas Schnakenberg. Concentraciones de substrato de los sistemas (a) maestro y (b) esclavo.

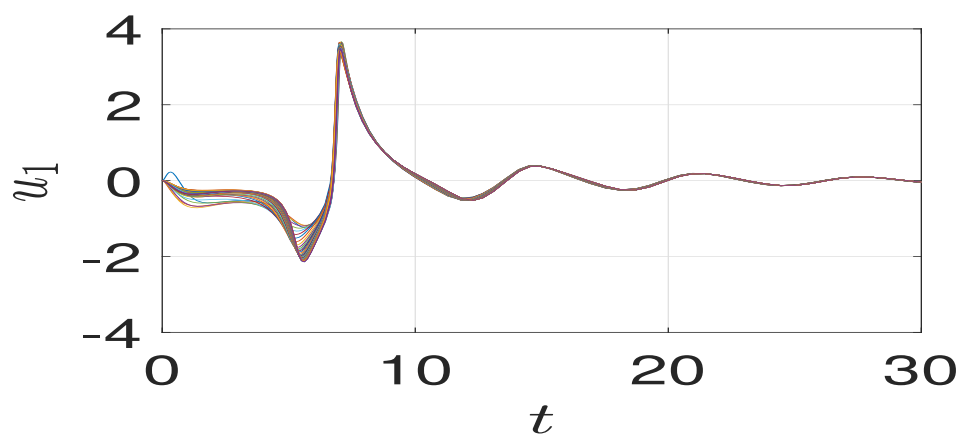


(a)

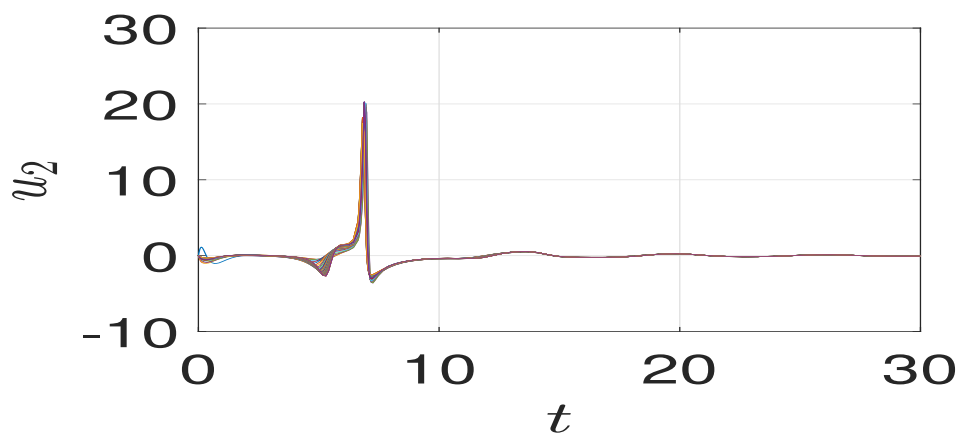


(b)

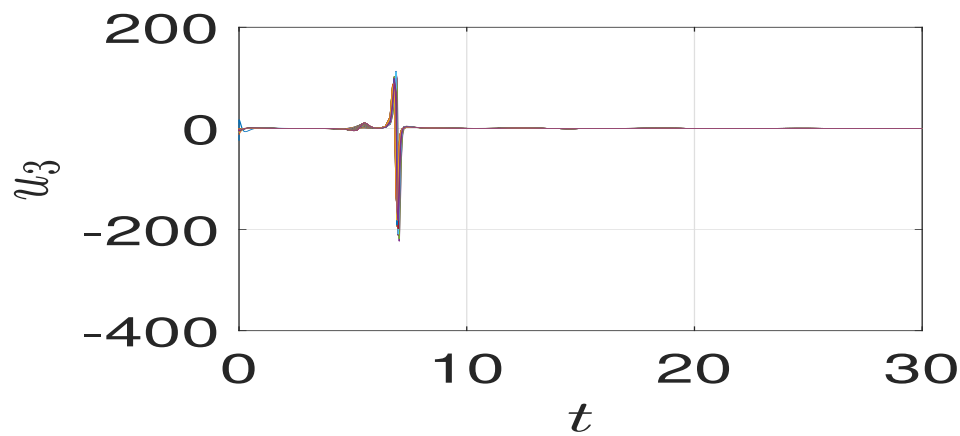
Figura 6.5: SGF de los sistemas Schnakenberg: Error de sincronización.



(a)

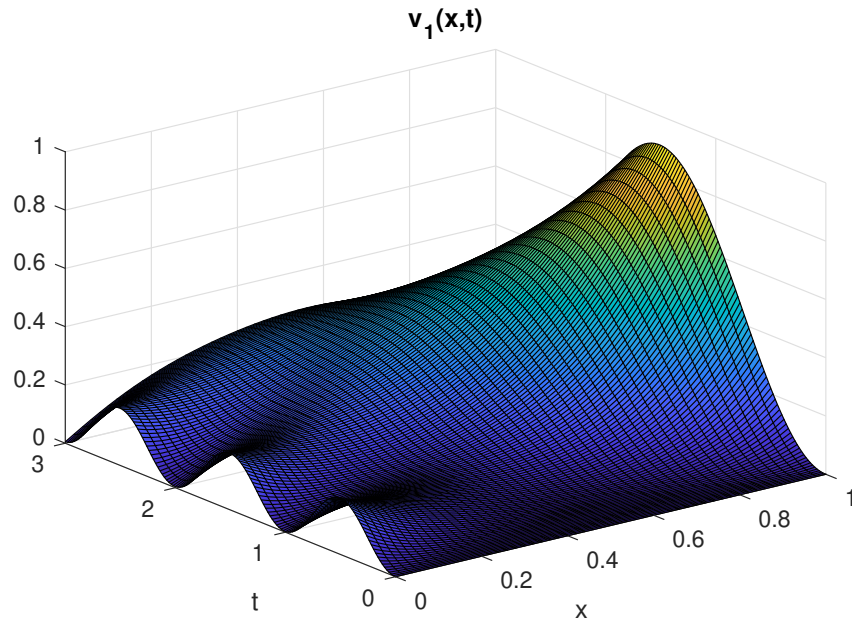


(b)

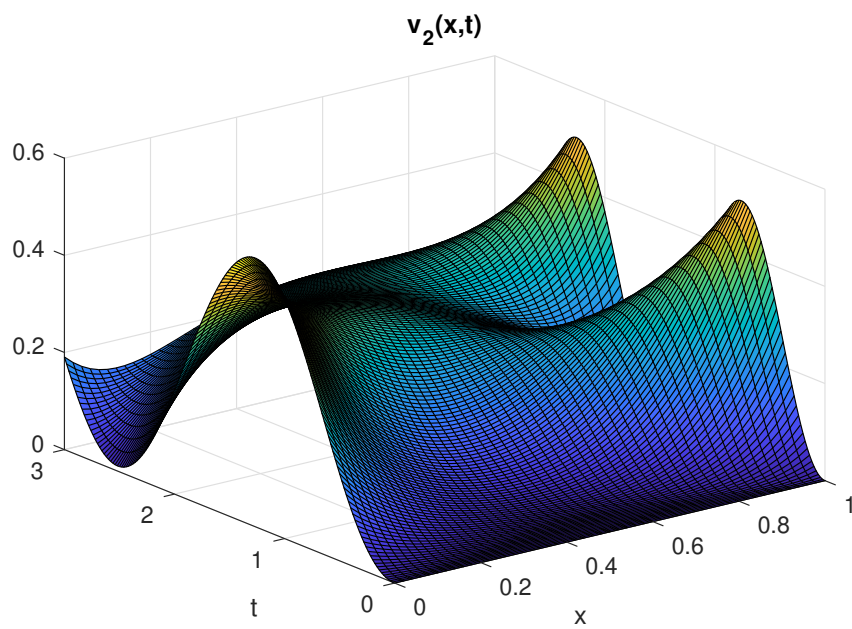


(c)

Figura 6.6: SGF de los sistemas Schnakenberg: señales del control dinámico distribuido fraccional.



(a)



(b)

Figura 6.7: (a) Transferencia de humedad y (b) transferencia de calor sin acción del control dinámico distribuido fraccional.

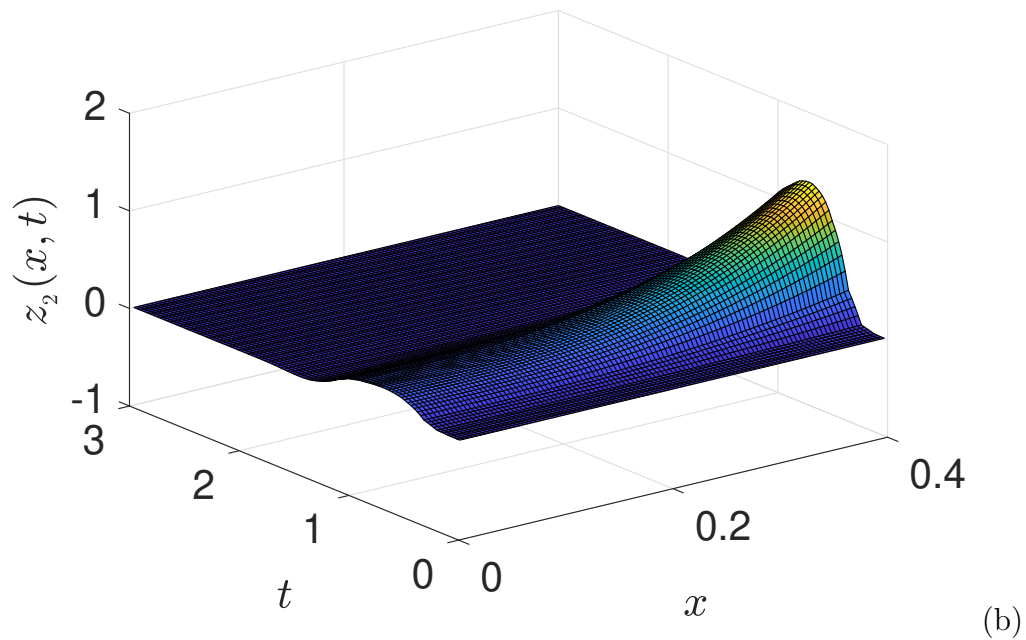
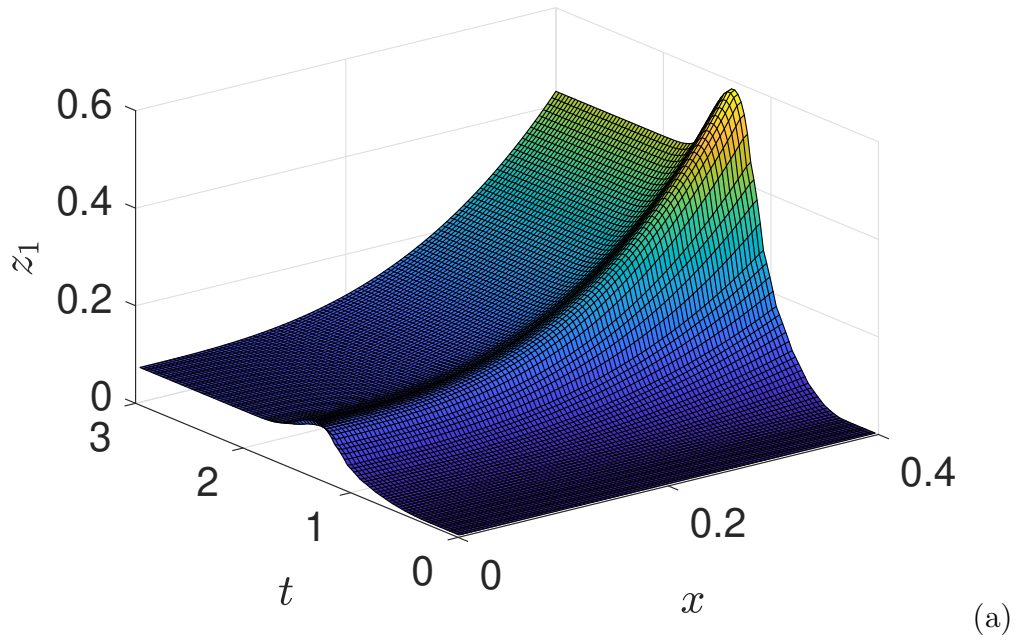


Figura 6.8: (a) Transferencia de humedad y (b) transferencia de calor con acción del control dinámico distribuido fraccional.

# Capítulo 7

## Observador de Punto Fijo para sistemas discretos

Si bien, en este trabajo de tesis se ha trabajado con sistemas distribuidos sin recurrir a ninguna aproximación, es una realidad que una práctica muy común es la utilización de técnicas de discretización en este tipo de sistemas. Por lo tanto, inspirados por una posible futura aplicación, en este capítulo se presenta un observador basado en el teorema de punto fijo para sistemas en tiempo discreto.

Como se ha mencionado, la idea fundamental de un observador es estimar las variables de estado desconocidas a partir de las mediciones disponibles. No obstante, en la práctica, dichas mediciones son en tiempo discreto. Por tal motivo, es común hallar observadores diseñados para *sistemas en tiempo discreto*, tales como observadores de Luenberger [15, 38] u observadores de modos deslizantes en tiempo discreto [24, 105].

Como sabemos, el tipo de observadores mencionados anteriormente, constan de una copia exacta del sistema. Por otro lado, una idea interesante es tratar el problema de estimación para sistemas en tiempo discreto como un conjunto de problemas de inversión consecutivos, esto es, considerar un sistema de ecuaciones para cada instante de tiempo y resolver progresivamente los mismos. En particular, Grizzle y Moraal [37] propusieron hacer uso del método iterativo de Newton y llamaron a este algoritmo como *Observador de Newton*. La idea de este observador es, partiendo de una aproximación inicial, iterar lo suficiente hasta hallar la solución del sistema en el instante específico dado. Posteriormente, la solución hallada es utilizada como primera aproximación del próximo problema de inversión [72, 37].

En este apéndice, se incluye un observador para sistemas en tiempo discreto. El mismo está inspirado en el observador de Newton y es nombrado como *Observador de Punto Fijo*. La idea principal del observador propuesto es prescindir del Jacobiano y la matriz inversa del sistema, mismos que son constantemente calculados en el observador de Newton. En otras palabras, el observador de Punto Fijo busca ser

más eficiente computacionalmente. Por otro lado, dada que el método de Punto Fijo requiere más iteraciones para converger a la solución, se implementa un esquema de convergencia acelerada basado en el *método de Aitken*.

## 7.1. Preliminares para el observador de Punto Fijo

Como se ha mencionado, las mediciones realizadas durante un experimento son discretas, y para diseñar un observador de estados, es necesario disponer de un modelo exacto del sistema en tiempo discreto. No obstante, en la gran mayoría de ocasiones, solo se dispone de un modelo continuo. Una opción es hacer uso de un método de discretización para obtener un modelo aproximado [3, 71, 58]. Una vez que se dispone de un modelo en tiempo discreto, es posible hallar una *secuencia finita de la salida* del sistema, a partir de la cual se construye el observador presentado en este apéndice.

### 7.1.1. Una secuencia finita de la salida

Considere el siguiente sistema no lineal en tiempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathcal{F}(x), \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  y  $h$  es una función analítica. Por simplicidad, a partir de ahora asuma que  $p = 1$ . Además, considere un tiempo de muestreo  $T > 0$  y sea  $f(t, x_0)$  solución del sistema (7.1) con condición inicial  $x_0$ . Entonces, el sistema  $T$ -muestreado de (7.1) esta dado por

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(T, x_k), \\ y_k &= h(x_k)\end{aligned}\tag{7.2}$$

donde  $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})^T$  es el vector de estados en tiempo discreto en el instante  $k$  y  $y_k$  es la salida del sistema correspondiente.

Ahora, sea  $\delta$  un operador de retraso tal que  $\delta\varphi_k = \varphi_{k-1}$ , y sea  $\delta^{-1}$  el operador de adelanto correspondiente. Por lo tanto  $\delta^{-\mu}\varphi_k = \varphi_{k+\mu}$  y de manera similar  $\delta^{\mu}\varphi_k = \varphi_{k-\mu}$  para cualquier  $\mu > 0$ . La expresión  $\hat{\delta}^{\mu}\varphi_k$  define la colección  $\hat{\delta}^{\mu}\varphi_k = \{\delta\varphi_k, \dots, \delta^{\mu}\varphi_k\}$ . Por otro lado,  $\hat{\delta}^{-\mu}\varphi_k$  denota la colección  $\hat{\delta}^{-\mu}\varphi_k = \{\varphi_k, \delta^{-1}\varphi_k, \dots, \delta^{-\mu}\varphi_k\}$ . Evidentemente,  $\delta^0 = \hat{\delta}^0 = 1$  y  $\hat{\delta}^1 = \delta$ .

Note que el sistema (7.2) es equivalente a  $x_k = \delta f(x_k) = f(\delta x_k) = f(x_{k-1})$  y  $\delta x_{k+1} = x_k = f(x_{k-1})$ . Adicionalmente,  $x_{k-1} = f(x_{k-2}) = f(\delta x_{k-1}) = f(\delta^2 x_k)$  y de la misma manera,  $x_k = f(f(\delta^2 x_k))$ . De tal manera que la expresión  $f^{\mu}(\delta^{\mu} x_k)$  para  $\mu > 0$  es inmediata a partir de la recursión

$$\begin{aligned}f^i(\delta^i x_k) &= f(f^{i-1}(\delta^i x_k)) \\ f^1(\delta x_k) &= f(\delta x_k)\end{aligned}$$



para algún  $i \in \mathbb{N}$ . Note que los operadores  $\delta$  y  $\hat{\delta}$  satisfacen la siguiente relación:  $\delta^i \hat{\delta}^{-i} \varphi_k = \{\varphi_k, \hat{\delta}^i \varphi_k\}$  ya que  $\delta^i \{\varphi_k, \delta^{-1} \varphi_k, \dots, \delta^{-i} \varphi_k\} = \{\delta^i \varphi_k, \delta^{i-1} \varphi_k, \dots, \delta \varphi_k, \varphi_k\}$ . Entonces, la evolución del vector de estados puede ser expresada como la siguiente secuencia

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \delta^{-1} x_k = f(x_k), \\ x_{k+2} &= \delta^{-2} x_k = f(f(x_k)), \\ &\vdots \\ x_{k+i} &= \delta^{-i} x_k = f(f^{i-1}(x_k)) \end{aligned} \quad (7.3)$$

más aún, considerando (7.3) en forma iterativa, se tiene que

$$\begin{aligned} x_k &= \delta f(x_k) = f(\delta x_k), \\ x_k &= f(\delta(f(\delta x_k))) = f(f(\delta^2 x_k)), \\ &\vdots \\ x_k &= f(f^{i-1}(\delta^i x_k)) \end{aligned} \quad (7.4)$$

De manera similar, es posible definir la siguiente secuencia finita de la señal de salida

$$\begin{aligned} y_k &= h(x_k) = h(f^0(x_k)), \\ y_{k+1} &= \delta^{-1}(h(x_k)) = h(f(x_k)), \\ y_{k+2} &= \delta^{-1} h(f(x_k)) = h(f^2(x_k)), \\ &\vdots \\ y_{k+i} &= h(f^i(x_k)) \end{aligned} \quad (7.5)$$

la cual puede expresarse como

$$Y_{[k, k+i]} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_k) \\ h(f(x_k)) \\ \vdots \\ h(f^i(x_k)) \end{bmatrix} = H(x_k) \quad (7.6)$$

La expresión (7.6) es clave para el posterior diseño del observador de Punto Fijo.

### 7.1.2. Problema de iteración de punto fijo

En análisis numérico, las raíces de un sistema de ecuaciones no lineales pueden ser aproximadas a través de un algoritmo iterativo, tal como el método de Newton, el de Whittaker, el de Halley, etc. No obstante, estos algoritmos son computacionalmente costosos, pues involucran derivadas y matrices inversas.

Una alternativa es el *método de iteración de punto fijo* o de *aproximaciones sucesivas*. En pocas palabras, este método consiste en expresar un sistema de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$  como  $x = G(x)$ , e.g., con  $G(x) = x + aF(x)$ . Posteriormente, se define un método iterativo tal que  $x^{(l+1)} = G(x^{(l)})$ , donde  $l \in \mathbb{N}$  y  $x^{(i)}$  es la  $i$ -ésima aproximación o iteración de  $x$ .

El proceso de iteración mencionado se repite para  $l \geq 0$  hasta hallar un valor  $p$  que satisface  $G(p) = p$ , es decir, un punto fijo. De tal manera que la solución del sistema de ecuaciones no lineales es  $p$ , i.e.,  $F(p) = 0$ .

**Definición 7.1.** [16] Una función  $G(x)$  de  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  tiene un punto fijo en  $p \in D$  si  $G(p) = p$ .

**Teorema 7.1.** [16] Sea

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

para algún conjunto de constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Suponga que  $G$  es una función continua de  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $G(x) \in D$  para cualquier  $x \in D$ . Entonces,  $G$  tiene un punto fijo en  $D$ . Suponga además que  $G$  tiene derivadas parciales continuas y que existe una constante  $|K| < 1$  tal que

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq K, \quad \forall x \in D,$$

para cualquier  $j = 1, 2, \dots, n$  y toda función  $g_i$ , componente de  $G$ . Entonces, la secuencia  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ , con condición inicial arbitraria  $x^{(0)} \in D$ , y generada por

$$x^{(l+1)} = G(x^{(l)}), \quad l \in \mathbb{N},$$

converge a un único punto fijo  $p \in D$  y

$$\|x^{(l)} - p\| \leq \frac{K^l}{1 - K} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

□

Note que la condición que deben satisfacer las derivadas parciales, implica que  $G$  es una contracción en  $D$ . Esta es una consecuencia inmediata del teorema de valor medio y mayores detalles pueden hallarse en [77].

**Definición 7.2.** [78] La secuencia  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  se dice converger linealmente a  $p$  a una razón de  $\rho \in (0, 1)$  si existe una constante  $c > 0$  tal que

$$\|x^{(l)} - p\| \leq c\rho^l, \quad \forall l \in \mathbb{N} \tag{7.7}$$

## 7.2. Diseño del Observador de Punto Fijo

Suponga que el vector de estados  $x_k$  del sistema (7.2) es parcialmente conocido para cada instante  $k$ . Para conocer por completo el vector de estados, se propone el observador de Punto Fijo. Por lo tanto, considere la representación (7.6) de la señal de salida, así como las siguientes suposiciones:

- A1. El sistema T-muestreado (7.2) es observable para las condiciones de muestreo de la salida y obedece el Teorema en [2], i.e., existe  $T_0 > 0$  tal que el sistema es observable para todo  $T \leq T_0$ .
- A2. Las  $n - 1$  mediciones previas al instante  $k$  son almacenadas, i.e.,  $y_{k-n+1}, y_{k-n+2}, \dots, y_{k-1}$  están disponibles.

Ahora, sea  $Y_{[k-n+1,k]}$  el vector de  $n$  mediciones consecutivas desde el instante  $k - n + 1$  al instante  $k$ , i.e.,  $Y_{[k-n+1,k]} = [y_{k-n+1}, y_{k-n+2}, \dots, y_k]^T$ . Así, considerando la representación (7.6) es posible obtener lo siguiente

$$Y_{[k-n+1,k]} = \begin{bmatrix} y_{k-n+1} \\ y_{k-n+2} \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_{k-n+1}) \\ h(f(x_{k-n+1})) \\ \vdots \\ h(f^{n-1}(x_{k-n+1})) \end{bmatrix} = H(x_{k-n+1}) \quad (7.8)$$

A partir de la expresión anterior, se tiene el siguiente problema de búsqueda de raíces

$$F(x_{k-n+1}) = Y_{[k-n+1,k]} - H(x_{k-n+1}) = 0 \quad (7.9)$$

Por lo tanto, para resolver dicho problema, exprese (7.9) como

$$Y_{[k-n+1,k]} - H(x_{k-n+1}) + x_{k-n+1} - x_{k-n+1} = 0 \quad (7.10)$$

tal que

$$x_{k-n+1} = x_{k-n+1} + Y_{[k-n+1,k]} - H(x_{k-n+1}) = G(x_{k-n+1}) \quad (7.11)$$

De momento, suponga que (7.11) tiene solución  $x_{k-n+1}^* \in D$ . Por lo tanto, dada una condición o aproximación inicial  $x_{k-n+1}^{(0)} \in D$ , todas las posteriores aproximaciones iteradas  $x_{k-n+1}^{(l)} \in D$  y a su vez convergen al punto fijo  $x_{k-n+1}^*$  (Theorem 7.1), i.e.,

$$x_{k-n+1}^* = \lim_{l \rightarrow \infty} x_{k-n+1}^{(l+1)} = \lim_{l \rightarrow \infty} G(x_{k-n+1}^{(l)}) = G\left(\lim_{l \rightarrow \infty} x_{k-n+1}^{(l)}\right) = G(x_{k-n+1}^*) \quad (7.12)$$

donde los valores iterados  $x_{k-n+1}^{(l)}$  son generados por el siguiente método iterativo

$$x_{k-n+1}^{(l+1)} = x_{k-n+1}^{(l)} + Y_{[k-n+1,k]} - H(x_{k-n+1}^{(l)}), \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.13)$$

Bajo la serie de suposiciones anteriores, note que cada valor en la secuencia  $\left\{x_{k-n+1}^{(l)}\right\}_{l=0}^{\infty}$ , incluyendo  $x_{k-n+1}^*$ , es una aproximación de la solución del problema (7.9). En otras palabras, estos valores son en realidad estimaciones del vector de estados real  $x_{k-n+1}$ .

Para estar en concordancia con la notación utilizada en teoría de control, denote el método iterativo como (7.13) como

$$\hat{x}_{k-n+1}^{(l+1)} = \hat{x}_{k-n+1}^{(l)} + Y_{[k-n+1,k]} - H(\hat{x}_{k-n+1}^{(l)}), \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.14)$$

y el punto fijo como  $\hat{x}_{k-n+1}^*$ .

Por otro lado, dado que  $\hat{x}_{k-n+1}^*$  corresponde con la estimación en el instante  $k-n+1$ , para obtener la estimación del instante  $k$ , es necesario propagar la solución de método iterativo  $n-1$  pasos hacia delante, i.e.,

$$\hat{x}_k = f^{n-1}(\hat{x}_{k-n+1}^*) \quad (7.15)$$

Note que el problema de búsqueda de raíces (7.9) debe resolverse para cada instante. Por lo tanto, se tiene que el observador de Punto Fijo descompone el problema de estimación en un conjunto de problemas de punto fijo consecutivos, i.e., un problema para cada instante de tiempo. Así, se establece el siguiente teorema.

**Teorema 7.2.** *Si el método iterativo (7.14) satisface las condiciones del Teorema 7.1, entonces, para cualquier instante  $k$ , la secuencia  $\left\{\hat{x}_{k-n+1}^{(l)}\right\}_{l=0}^{\infty}$  converge a  $\hat{x}_{k-n+1}^*$ , solución del problema de búsqueda de raíces (7.9). En otras palabras, la expresión (7.14) es un observador de estados de Punto Fijo para el sistema no lineal en tiempo discreto (7.2).*

*Demostración.* Considere un instante de tiempo en específico  $k$ . Entonces, dado que  $h$  es analítica, la función  $G(\hat{x}_{k-n+1}) = \hat{x}_{k-n+1} + Y_{[k-n+1,k]} - H(\hat{x}_{k-n+1})$  es continua. Por otro lado, de acuerdo al Teorema 7.1 se tiene que  $G(\hat{x}_{k-n+1}) \in D$  para toda  $\hat{x}_{k-n+1} \in D$ . Más aún,  $G$  es una contracción tal que

$$\begin{aligned} \|G(\hat{x}_{k-n+1}^{(i)}) - G(\hat{x}_{k-n+1}^{(j)})\| &\leq K \|\hat{x}_{k-n+1}^{(i)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(j)}\|, \\ &\forall \hat{x}_{k-n+1}^{(i)}, \hat{x}_{k-n+1}^{(j)} \in D, i \neq j \end{aligned} \quad (7.16)$$

con  $|K| < 1$ . Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l+1)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l)}\| &= \|G(\hat{x}_{k-n+1}^{(l)}) - G(\hat{x}_{k-n+1}^{(l-1)})\| \\ &\leq K \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l-1)}\| \end{aligned} \quad (7.17)$$

Así, por inducción

$$\|\hat{x}_{k-n+1}^{(l+c)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l+c-1)}\| \leq K \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l+c-1)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l+c-2)}\| \leq \dots \leq K^c \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l-1)}\| \quad (7.18)$$

para toda  $c \geq 1$  y  $l \geq 0$ . Posteriormente,

$$\sum_{i=1}^c \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l+i)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l+i-1)}\| \leq (K^c + K^{c-1} + \dots + K) \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l-1)}\| \quad (7.19)$$

tal que

$$\|\hat{x}_{k-n+1}^{(l+c)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(l)}\| \leq (K^c + K^{c-1} + \dots + K) K^{l-1} \|\hat{x}_{k-n+1}^{(1)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(0)}\| \quad (7.20)$$

De tal manera que se prueba que  $\{\hat{x}_{k-n+1}^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  es una secuencia de Cauchy y por lo tanto, tiene un límite, tal que  $\lim_{l \rightarrow \infty} G(\hat{x}_{k-n+1}^{(l)}) = G(\hat{x}_{k-n+1}^*) = \hat{x}_{k-n+1}^*$ . Entonces, si  $c \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\|\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{x}_{k-n+1}^*\| \leq \frac{K^l}{1-K} \|\hat{x}_{k-n+1}^{(1)} - \hat{x}_{k-n+1}^{(0)}\| \quad (7.21)$$

Si  $l \rightarrow \infty$ , entonces  $\frac{K^l}{1-K} \rightarrow 0$ , y por lo tanto, la secuencia converge a un punto fijo. Más aún, es posible probar que  $\hat{x}_{k-n+1}^*$  es único. Para ello, suponga que  $\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} \rightarrow \hat{x}_{k-n+1}^*$  y  $\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} \rightarrow \hat{z}_{k-n+1}^*$  conforme  $l \rightarrow \infty$ . De tal manera que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{k-n+1}^* - \hat{z}_{k-n+1}^*\| &= \|\hat{x}_{k-n+1}^* - \hat{x}_{k-n+1}^{(l)} + \hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{z}_{k-n+1}^*\| \\ &\leq \|\hat{x}_{k-n+1}^* - \hat{x}_{k-n+1}^{(l)}\| + \|\hat{x}_{k-n+1}^{(l)} - \hat{z}_{k-n+1}^*\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

tal que  $\hat{x}_{k-n+1}^* = \hat{z}_{k-n+1}^*$ , i.e., el punto fijo es único  $\square$

Note que la función  $G$  es una contracción si  $\hat{x}_{k-n+1}^{(0)}$  está lo suficientemente cerca del punto fijo  $\hat{x}_{k-n+1}^*$ , y en general, si

$$\left| \frac{\partial g_i(\hat{x}_{k-n+1})}{\partial \hat{x}_{k,j}} \right| \leq K, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7.23)$$

Por otro lado, resuelto el problema de búsqueda de raíces en el instante dado, es posible utilizar como aproximación inicial para el instante siguiente a  $\hat{x}_{k-n+2}^{(0)} = \hat{x}_{k-n+1}^*$ . La lógica detrás de esta elección se basa en que  $\hat{x}_{k-n+1}^*$  y la solución del siguiente conjunto de ecuaciones  $\hat{x}_{k-n+2}$  pertenecen a la trayectoria de estado del sistema en tiempo discreto (7.2), y por lo tanto, es razonable pensar que  $\hat{x}_{k-n+1}$  está lo suficientemente cerca para que  $G$  sea una contracción.

En una sección posterior, por simplicidad se denotará  $\hat{x}_{k-n+1}^{(i)}$  como  $\omega_k^{(i)}$  y  $Y_{[k-n+1,k]}$  simplemente como  $Y_k$ , tal que la expresión (7.14) es:

$$\omega_k^{(l+1)} = \omega_k^{(l)} + Y_k - H(\omega_k^{(l)}), \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.24)$$

donde  $\omega_k^{(i)} = \left( \mathbf{w}_{1,k}^{(i)}, \mathbf{w}_{2,k}^{(i)}, \dots, \mathbf{w}_{n,k}^{(i)} \right)^T$ . Esta decisión se realiza para evitar confusión durante la simulación numérica.

### 7.2.1. Esquema de convergencia acelerada por método de $\Delta^2$ -Aitken

Si bien la principal ventaja del método de iteración de punto fijo es un menor costo computacional, un inconveniente es su baja velocidad de convergencia. A diferencia del método de Newton (con convergencia de tipo cuadrática), el método de punto fijo presenta una convergencia lineal. Por lo tanto, para acelerar su convergencia, se propone utilizar el método  $\Delta^2$ -Aitken.

Considere el siguiente método iterativo

$$x^{(l+1)} = G(x^{(l)}), \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.25)$$

Suponga que (7.25) genera una secuencia convergente  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  y que la función de iteración  $G$  satisface las condiciones del Teorema 7.1. Entonces, defina el *error de convergencia* como

$$e^{(l)} = x^{(l)} - p \quad (7.26)$$

donde  $p$  es un punto fijo. Asuma que el método iterativo converge geoméricamente, i.e.,

$$e^{(l+1)} = \mathbb{K}e^{(l)}, \quad |\mathbb{K}| < 1 \quad (7.27)$$

tal que

$$\frac{e^{(l+2)}}{e^{(l+1)}} = \frac{e^{(l+1)}}{e^{(l)}} \quad (7.28)$$

entonces, se tiene

$$\frac{x^{(l+2)} - p}{x^{(l+1)} - p} = \frac{x^{(l+1)} - p}{x^{(l)} - p} \quad (7.29)$$

y expandiendo términos, se obtiene que

$$\begin{aligned} (x^{(l+2)} - p)(x^{(l)} - p) &= (x^{(l+1)} - p)^2 \\ x^{(l+2)}x^{(l)} - px^{(l+2)} - px^{(l)} + p^2 &= (x^{(l+1)})^2 - 2px^{(l+1)} + p^2 \\ 2x^{(l+1)}p - x^{(l+2)}p - x^{(l)}p &= (x^{(l+1)})^2 - x^{(l+2)}x^{(l)} \\ p(2x^{(l+1)} - x^{(l+2)} - x^{(l)}) &= (x^{(l+1)})^2 - x^{(l+2)}x^{(l)} \end{aligned}$$

esto es

$$p = \frac{x^{(l+2)}x^{(l)} - (x^{(l+1)})^2}{x^{(l+2)} - 2x^{(l+1)} + x^{(l)}} \quad (7.30)$$

o equivalentemente

$$p = x^{(l)} - \frac{(x^{(l+1)} - x^{(l)})^2}{x^{(l+2)} - 2x^{(l+1)} + x^{(l)}} \quad (7.31)$$

Observe que con convergencia geométrica, el valor de  $p$  puede obtenerse con solo tres valores consecutivos de la secuencia  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ . Sin embargo, muchos métodos, incluido el de punto fijo, presentan una convergencia de tipo lineal. Por lo tanto, considere el siguiente tipo de convergencia

$$e^{(l+1)} = \bar{K}e^{(l)}, \quad \bar{K} = \mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.32)$$

Claramente, la secuencia  $\{e^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  converge linealmente a cero si y solo si  $|\bar{K}| < 1$ . Por lo tanto, la secuencia  $\bar{\delta}^{(l)}$  debe ser tal que tienda a cero conforme  $l \rightarrow \infty$ . Ya que  $0 < 1 - \mathbb{K} < 1$ , existe  $\bar{\delta}^{(l)}$  tal que

$$0 \leq \bar{\delta}^{(l)} < 1 - \mathbb{K} < 1, \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad (7.33)$$

Lo anterior debido a la propiedad Arquimediana. Así, sea  $\bar{\delta}^{(l)}$  tal que

$$\bar{\delta}^{(l)} = \frac{1 - \mathbb{K}}{\bar{c}^l}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.34)$$

con constante  $\bar{c} > 1$ . Evidentemente,  $\bar{\delta}^{(l)} \rightarrow 0$  conforme  $l \rightarrow \infty$ . Por otro lado, de acuerdo a la Definición 7.2, se tiene que  $x^{(l)}$  converge al punto fijo  $p$  (o  $e^{(l)}$  a cero) si

$$\|x^{(l)} - p\| = \|e^{(l)}\| \leq c\rho^l, \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad (7.35)$$

con  $c > 0$  y  $0 < \rho < 1$ . Sea  $\rho = 1 - \mathbb{K}$ , tal que

$$\|e^{(l)}\| \leq c(1 - \mathbb{K})^l \quad (7.36)$$

o equivalentemente

$$\|\bar{K}e^{(l)}\| \leq c(1 - \mathbb{K})^{l+1} \quad (7.37)$$

i.e.,

$$\left\| \left( \mathbb{K} + \frac{1 - \mathbb{K}}{\bar{c}^l} \right) e^{(l)} \right\| \leq c(1 - \mathbb{K})^{l+1} \quad (7.38)$$

Por simplicidad, sea  $\bar{c} = c$ , tal que

$$\left\| \left( \mathbb{K} + \frac{1 - \mathbb{K}}{c^l} \right) e^{(l)} \right\| \leq c(1 - \mathbb{K})^{l+1} = \varepsilon^{(l)} \quad (7.39)$$

Entonces, la secuencia  $\varepsilon^{(l)}$  es suficientemente grande para toda  $l \in \mathbb{N}$ , si  $c \gg 1$ . Por lo tanto, se tiene que la convergencia lineal se satisface si  $|\mathbb{K}| \gg \bar{\delta}^{(l)}$ .

□

Note que, debido a que  $\bar{\delta}^{(l)}$  converge a cero, para algún  $l_1 > l \in \mathbb{N}$  suficientemente grande se tiene que  $\bar{K} = \mathbb{K}$ . Por lo tanto, la expresión (7.28) es válida y la prueba del esquema de convergencia puede continuar de la misma manera.

Ahora, se espera que las cantidades

$$z^{(l)} = x^{(l)} - \frac{(x^{(l+1)} - x^{(l)})^2}{x^{(l+2)} - 2x^{(l+1)} + x^{(l)}} \quad (7.40)$$

estén más cerca de  $p$  que  $x^{(l)}$ . La expresión (7.40) puede simplificarse con ayuda del siguiente operador

$$\Delta x^{(l)} = x^{(l+1)} - x^{(l)}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.41)$$

tal que

$$\begin{aligned} \Delta^2 x^{(l)} &= \Delta(\Delta x^{(l)}) \\ &= \Delta(x^{(l+1)} - x^{(l)}) \\ &= \Delta x^{(l+1)} - \Delta x^{(l)} \\ &= (x^{(l+2)} - x^{(l+1)}) - (x^{(l+1)} - x^{(l)}) \\ &= x^{(l+2)} - 2x^{(l+1)} + x^{(l)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión (7.40) es equivalente a

$$z^{(l)} = x^{(l)} - \frac{(\Delta x^{(l)})^2}{\Delta^2 x^{(l)}}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (7.42)$$

La expresión anterior es conocida como el *método de  $\Delta^2$ -Aitken*, y la aplicación del mismo es ilustrada en la Figura 7.1. Ahora, considere las siguientes suposiciones:

- $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  es una secuencia que converge a  $p$
- $\{z^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  es la secuencia generada por el método iterativo (7.42)

Defina las siguientes variables

$$e^{(l)} = x^{(l)} - p \quad (7.43)$$

y

$$\tau^{(l)} = z^{(l)} - p \quad (7.44)$$

Mas aún, suponga que

$$e^{(l+1)} = \bar{K}e^{(l)} = (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)})e^{(l)} \neq 0, \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad (7.45)$$



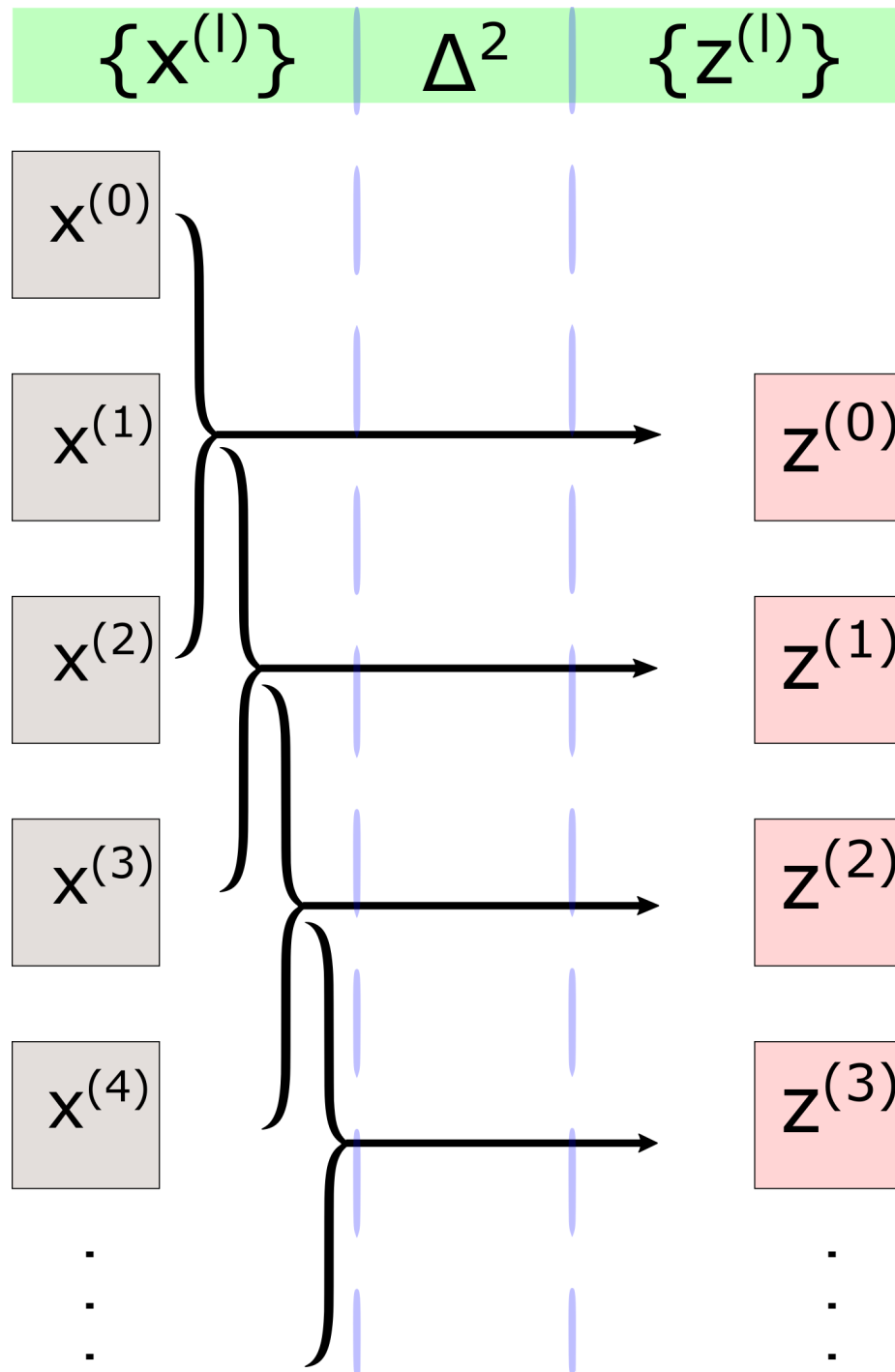


Figura 7.1: Procedimiento del método de  $\Delta^2$ -Aitken: la secuencia  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  es utilizada para obtener una segunda secuencia  $\{z^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ , tal que la velocidad de convergencia incremente.

donde  $|\bar{K}| < 1$  y  $\bar{\delta}^{(l)} \rightarrow 0$  conforme  $l \rightarrow \infty$ .

Entonces, el siguiente resultado asegura que el método de  $\Delta^2$ -Aitken incrementa la velocidad de convergencia del tipo lineal del método iterativo.

**Teorema 7.3.** *La secuencia  $\{z^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  converge más rápido que la secuencia  $\{x^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ , en el sentido*

$$\frac{\tau^{(l)}}{e^{(l)}} = \frac{z^{(l)} - p}{x^{(l)} - p} \rightarrow 0 \quad \text{as } l \rightarrow \infty \quad (7.46)$$

*Demostración.* A partir de (7.43) y (7.44), se tiene que

$$x^{(l)} = e^{(l)} + p \quad (7.47)$$

y

$$z^{(l)} = \tau^{(l)} + p = x^{(l)} - \frac{(\bar{\delta}^{(l)}x^{(l)})^2}{\Delta^2 x^{(l)}} \quad (7.48)$$

$$= x^{(l)} - \frac{(x^{(l+1)} - x^{(l)})^2}{x^{(l+2)} - 2x^{(l+1)} + x^{(l)}} \quad (7.49)$$

Entonces, substituyendo (7.47) en (7.48) se obtiene

$$z^{(l)} = e^{(l)} + p - \frac{(e^{(l+1)} - e^{(l)})^2}{e^{(l+2)} - 2e^{(l+1)} + e^{(l)}} \quad (7.50)$$

tal que

$$\tau^{(l)} = e^{(l)} - \frac{(e^{(l+1)} - e^{(l)})^2}{e^{(l+2)} - 2e^{(l+1)} + e^{(l)}} \quad (7.51)$$

Por otro lado

$$e^{(l+1)} - e^{(l)} = (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)})e^{(l)} - e^{(l)} = [(\mathbb{K} - 1) + \bar{\delta}^{(l)}] e^{(l)} \quad (7.52)$$

por lo tanto, se tiene

$$e^{(l+2)} - 2e^{(l+1)} + e^{(l)} = (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l+1)})e^{(l+1)} - 2(\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)})e^{(l)} + e^{(l)} \quad (7.53)$$

Entonces, dado que  $e^{(l+1)} = (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)})e^{(l)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} e^{(l+2)} - 2e^{(l+1)} + e^{(l)} &= (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l+1)}) (\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)}) e^{(l)} - 2(\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l)}) e^{(l)} + e^{(l)} \\ &= [\mathbb{K}^2 + \bar{\delta}^{(l)}\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l+1)}\mathbb{K} + \bar{\delta}^{(l+1)}\bar{\delta}^{(l)} - 2\mathbb{K} - 2\bar{\delta}^{(l)} + 1] e^{(l)} \\ &= [(\mathbb{K} - 1)^2 + \mathbb{K}(\bar{\delta}^{(l)} + \bar{\delta}^{(l+1)}) + \bar{\delta}^{(l+1)}\bar{\delta}^{(l)} - 2\bar{\delta}^{(l)}] e^{(l)} \\ &= [(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}] e^{(l)} \end{aligned} \quad (7.54)$$

donde  $\lambda^{(l)} = \mathbb{K}(\bar{\delta}^{(l)} + \bar{\delta}^{(l+1)}) + \bar{\delta}^{(l+1)}\bar{\delta}^{(l)} - 2\bar{\delta}^{(l)}$  y satisface

$$\lambda^{(l)} \rightarrow 0 \quad \text{as } l \rightarrow \infty$$

Substituyendo (7.52) y (7.54) en (7.51), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \tau^{(l)} &= e^{(l)} - \frac{[(\mathbb{K} - 1) + \bar{\delta}^{(l)}]^2 (e^{(l)})^2}{[(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}] e^{(l)}} \\ &= e^{(l)} - \frac{[(\mathbb{K} - 1) + \bar{\delta}^{(l)}]^2}{(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}} e^{(l)} \\ &= \frac{[(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)} - (\mathbb{K} - 1)^2 - 2\bar{\delta}^{(l)}(\mathbb{K} - 1) - (\bar{\delta}^{(l)})^2] e^{(l)}}{(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}} \end{aligned} \quad (7.55)$$

esto es

$$\tau^{(l)} = \frac{\lambda^{(l)} - 2\bar{\delta}^{(l)}(\mathbb{K} - 1) - (\bar{\delta}^{(l)})^2}{(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}} e^{(l)} \quad (7.56)$$

tal que

$$\frac{\tau^{(l)}}{e^{(l)}} = \frac{\lambda^{(l)} - 2\bar{\delta}^{(l)}(\mathbb{K} - 1) - (\bar{\delta}^{(l)})^2}{(\mathbb{K} - 1)^2 + \lambda^{(l)}} \rightarrow 0 \quad \text{as } l \rightarrow \infty \quad (7.57)$$

Por lo tanto, la expresión (7.57) implica que  $\{\tau^{(l)}\}_{l=0}^{\infty} \rightarrow 0$  sucede más rápido que  $\{e^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$ .  $\square$

### 7.2.2. Esquema de convergencia acelerada por método de Steffensen

En la prueba anterior, es posible notar que si  $\bar{\delta}^{(l)}$  es tal que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{\delta}^{(l+1)}}{\bar{\delta}^{(l)}} = \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , entonces la convergencia de la secuencia  $\{z^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$  puede acelerarse aún más mediante otra aplicación del método de  $\Delta^2$ -Aitken. Por lo tanto, se propone implementar el método de Steffensen.

En primer lugar, note que por practicidad, en esta subsección el subíndice  $i$  de  $x_i^{(j)}$  denota que la secuencia de tres elementos consecutivos  $\{x_i^{(j)}\}_{j=0}^2$  fue generada después de aplicar  $i - 1$  veces el método de  $\Delta^2$ -Aitken.

Luego, dada una aproximación inicial  $x_1^{(0)}$ , se calculan dos valores adicionales mediante el método iterativo (7.25), i.e., se obtiene la secuencia de tres elementos  $\{x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}\}$ . Posteriormente, el método de  $\Delta^2$ -Aitken se aplica, tal que

$$x_2^{(0)} = x_1^{(0)} - \frac{(x_1^{(1)} - x_1^{(0)})^2}{x_1^{(2)} - 2x_1^{(1)} + x_1^{(0)}} \quad (7.58)$$

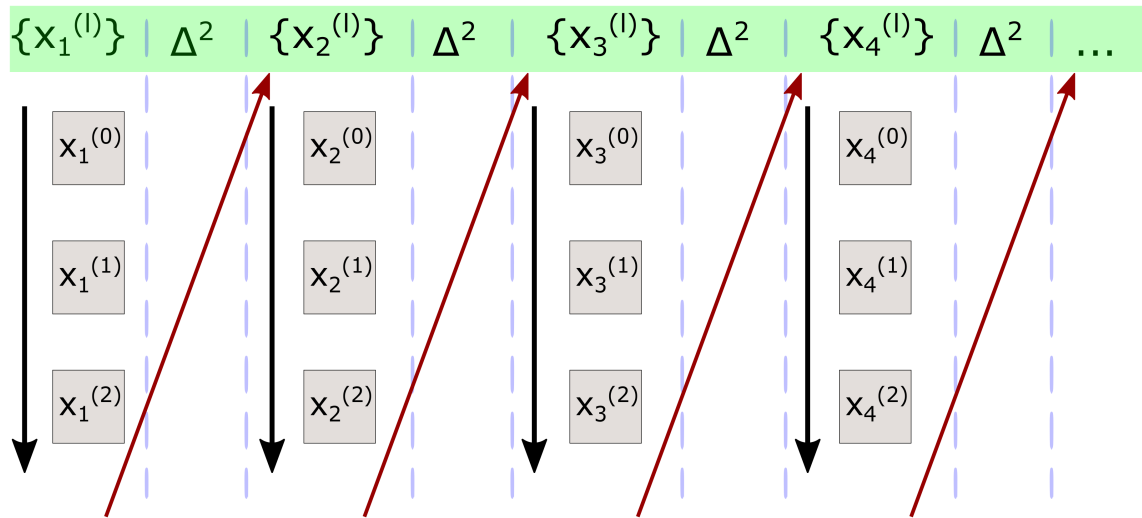


Figura 7.2: Procedimiento del método de Steffensen.

A continuación, el valor  $x_2^{(0)}$  es utilizado como una nueva aproximación, tal que dos nuevos valores son obtenidos, i.e.,

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= G(x_2^{(0)}), \\ x_2^{(2)} &= G(x_2^{(1)}), \end{aligned}$$

y el método de Aitken es aplicado nuevamente

$$x_3^{(0)} = x_2^{(0)} - \frac{(x_2^{(1)} - x_2^{(0)})^2}{x_2^{(2)} - 2x_2^{(1)} + x_2^{(0)}} \quad (7.59)$$

De tal manera que este proceso se repite hasta converger al punto fijo. La Figura 7.2 ilustra gráficamente el proceso anteriormente descrito.

### 7.2.3. Criterio de finalización del método iterativo

Note que hasta ahora no se ha especificado un número máximo de iteraciones, es decir, el método iterativo (7.24) puede continuar indefinidamente. Para evitar iteraciones innecesarias, se propone implementar un criterio para finalizar el proceso iterativo.

Sea  $G : [a, b] \rightarrow [a, b]$  una función Lipschitz con constante de Lipschitz  $L$ ,  $0 \leq L < 1$  y considere el método iterativo (7.25) con punto fijo  $p$ , tal que

$$|x^{(l+q)} - p| = |G(x^{(l+q-1)}) - G(p)| \leq L |x^{(l+q-1)} - p| \quad (7.60)$$

i.e.,

$$L |x^{(l+q-1)} - p| = L |G(x^{(l+q-2)}) - G(p)| \leq L^2 |x^{(l+q-2)} - p| \quad (7.61)$$

por lo tanto, recursivamente se tiene que

$$|x^{(l+q)} - p| \leq L^q |x^{(l)} - p| \quad (7.62)$$

Así, si  $G'(p) \neq 0$ , el número de iteraciones necesarias para reducir el error de convergencia por un factor de  $10^{-\bar{m}}$  satisface que

$$L^q \leq 10^{-\bar{m}} \quad (7.63)$$

tal que

$$q \leq \frac{\bar{m}}{\log_{10} \left( \frac{1}{L} \right)} \quad (7.64)$$

Adicionalmente, es posible establecer un segundo criterio basándose en la siguiente observación:

Sea  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$|x^{(l+1)} - x^{(l)}| \leq (1 - L) \varepsilon \quad (7.65)$$

por lo tanto

$$|x^{(l)} - p| \leq \varepsilon \quad (7.66)$$

La prueba de esto es inmediata dado que

$$\begin{aligned} |x^{(l)} - p| &= |x^{(l)} - G(x^{(l)}) + G(x^{(l)}) - p| \\ &\leq |x^{(l)} - x^{(l+1)}| + L |x^{(l)} - p| \end{aligned} \quad (7.67)$$

i.e.,

$$|x^{(l)} - p| (1 - L) \leq |x^{(l)} - x^{(l+1)}| \quad (7.68)$$

Entonces, como  $0 \leq L < 1 \Rightarrow (1 - L) > 0$ , se tiene que

$$|x^{(l)} - p| \leq \frac{1}{1 - L} |x^{(l+1)} - x^{(l)}| \leq \frac{1}{1 - L} (1 - L) \varepsilon = \varepsilon \quad (7.69)$$

Por otro lado, dado que el error de convergencia tiende monótonamente a cero, se tiene

$$|x^{(l+1)} - p| = |G(x^{(l)}) - G(p)| \leq L |x^{(l)} - p| < |x^{(l)} - p| \quad (7.70)$$

por lo tanto, la iteración previa posee un error de convergencia mayor que la iteración actual

□

Basado en lo anterior, es posible establecer lo siguiente

$$|x^{(l+1)} - x^{(l)}| = |G(x^{(l)}) - G(x^{(l-1)})| \leq L |x^{(l)} - x^{(l-1)}| < |x^{(l)} - x^{(l-1)}| \quad (7.71)$$

Ahora, debido a errores de redondeo, puede suceder que

$$|x^{(l+1)} - x^{(l)}| \geq |x^{(l)} - x^{(l-1)}| \quad (7.72)$$

para alguna  $l$ . En tal escenario, el método debe ser detenido. En general, el método iterativo se detendrá cuando

$$|x^{(l)} - x^{(l-1)}| < 10^{-\bar{m}} \quad (7.73)$$

### 7.3. Implementación del observador de Punto Fijo

A continuación, para mostrar la efectividad del observador de Punto Fijo, considere el siguiente sistema de Chua modificado [93]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha \left[ x_2(t) + b \sin \left( \frac{\pi x_1(t)}{2a} + d \right) \right] \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\beta x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (7.74)$$

donde el vector de estados es  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ . Mientras que los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$  y  $d$  son valores constantes. Para obtener una versión en tiempo discreto del sistema de Chua modificado, considere el esquema de discretización de diferencias finitas hacia adelante, tal que el sistema  $T$ -muestreado es:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \alpha T \left[ x_{2,k} + b \sin \left( \frac{\pi x_{1,k}}{2a} + d \right) \right] = f_1(x_k) \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T (x_{1,k} - x_{2,k} + x_{3,k}) = f_2(x_k) \\ x_{3,k+1} &= x_{3,k} - \beta T x_{2,k} = f_3(x_k) \\ y_k &= x_{1,k} \end{aligned} \quad (7.75)$$

con  $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})^T$ .

#### 7.3.1. Sistema de Chua y observador de Punto Fijo

Dado que la dimensión del sistema es  $n = 3$ , se tiene que

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \quad (7.76)$$

y por otro lado

$$H(x_{k-2}) = \left[ \begin{array}{c} x_{1,k-2} \\ x_{1,k-2} + \alpha T \left[ x_{2,k-2} + b \sin \left( \frac{\pi x_{1,k-2}}{2a} + d \right) \right] \\ x_{1,k-2} + \alpha T \left[ x_{2,k-2} + b \sin \left( \frac{\pi x_{1,k-2}}{2a} + d \right) \right] \\ + \alpha T \left\{ x_{2,k-2} + T \left[ x_{1,k-2} - x_{2,k-2} + x_{3,k-2} \right] \right\} \\ + b \sin \left( \frac{\pi}{2a} \left\{ x_{1,k-2} + \alpha T \left[ x_{2,k-2} + b \sin \left( \frac{\pi x_{1,k-2}}{2a} + d \right) \right] \right\} + d \right) \end{array} \right] \quad (7.77)$$

Entonces, considerando la expresión (7.24) del observador de Punto Fijo, se tiene que

$$\begin{aligned} \omega_k^{(l+1)} &= \omega_k^{(l)} + Y_k - H(\omega_k^{(l)}) = G(\omega_k^{(l)}) \\ &= \begin{bmatrix} w_{1,k}^{(l)} \\ w_{2,k}^{(l)} \\ w_{3,k}^{(l)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \\ &- \left[ \begin{array}{c} w_{1,k}^{(l)} \\ w_{1,k}^{(l)} + \alpha T \left[ w_{2,k}^{(l)} + b \sin \left( \frac{\pi w_{1,k}^{(l)}}{2a} + d \right) \right] \\ w_{1,k}^{(l)} + \alpha T \left[ w_{2,k}^{(l)} + b \sin \left( \frac{\pi w_{1,k}^{(l)}}{2a} + d \right) \right] \\ + \alpha T \left\{ w_{2,k}^{(l)} + T \left[ w_{1,k}^{(l)} - w_{2,k}^{(l)} + w_{3,k}^{(l)} \right] \right\} \\ + b \sin \left( \frac{\pi}{2a} \left\{ w_{1,k}^{(l)} + \alpha T \left[ w_{2,k}^{(l)} + b \sin \left( \frac{\pi w_{1,k}^{(l)}}{2a} + d \right) \right] \right\} + d \right) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7.78)$$

donde

$$G(\omega_k^{(i)}) = \left[ g_1(\omega_k^{(i)}), g_2(\omega_k^{(i)}), g_3(\omega_k^{(i)}) \right]^T \quad (7.79)$$

Ahora, para garantizar que el método iterativo del observador converja, es necesario analizar las derivadas parciales de  $G$ , tal que el valor absoluto de cada una sea menor a 1, i.e., para que  $G$  sea una contracción.

En particular, para este ejemplo con el sistema de Chua modificado, se tiene que el tiempo de muestreo debe ser tal que

$$T \in \left( 0, \frac{2}{\alpha} \right) \quad (7.80)$$

### 7.3.2. Sistema de Chua y observador de Newton

Para propósitos de comparación, el observador de Newton también es utilizado. Más detalles de l método de diseño de este observador pueden hallarse en [37]. El mimos,

requiere de la matriz Jacobina de  $H$ , la cual es

$$\frac{\partial H(\omega_k^{(i)})}{\partial \omega_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{H}_{2,1} & \alpha T & 0 \\ \bar{H}_{3,1} & \bar{H}_{3,2} & \alpha T^2 \end{bmatrix} \quad (7.81)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{H}_{2,1} &= 1 + \frac{\alpha T b \pi}{2a} \cos \left( \frac{\pi \mathbf{w}_{1,k}^{(i)}}{2a} + d \right) \\ \bar{H}_{3,1} &= \bar{H}_{2,1} + \alpha T^2 + \left[ \frac{\alpha T \pi b}{2a} + \frac{\alpha^2 T^2 b^2 \pi^2}{4a^2} \cos \left( \frac{\pi \mathbf{w}_{1,k}^{(i)}}{2a} + d \right) \right] C \\ \bar{H}_{3,2} &= 2\alpha T - \alpha T^2 + \frac{\alpha^2 T^2 b \pi}{2a} C \end{aligned}$$

y donde

$$C = \cos \left( \frac{\pi}{2a} \left\{ \mathbf{w}_{1,k}^{(i)} + \alpha T \left[ \mathbf{w}_{2,k}^{(i)} + b \sin \left( \frac{\pi \mathbf{w}_{1,k}^{(i)}}{2a} + d \right) \right] \right\} + d \right)$$

Por lo tanto, el observador de Newton está dado por

$$\omega_k^{(l+1)} = \omega_k^{(l)} + \left[ \frac{\partial H(\omega_k^{(l)})}{\partial \omega_k} \right]^{-1} \left[ Y_k - H(\omega_k^{(l)}) \right] \quad (7.82)$$

para  $l = 0, 1, 2, \dots, r-1$  y con  $Y_k$  y  $H(\omega_k^{(l)})$  iguales a como están definidas para el observador de Punto Fijo. Note que la estimación en el instante de tiempo  $k$  es

$$\hat{x}_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,k} \\ \hat{x}_{2,k} \\ \hat{x}_{3,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^2 \left( \mathbf{w}_{1,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{2,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{3,k}^{(r)} \right) \\ f_2^2 \left( \mathbf{w}_{1,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{2,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{3,k}^{(r)} \right) \\ f_3^2 \left( \mathbf{w}_{1,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{2,k}^{(r)}, \mathbf{w}_{3,k}^{(r)} \right) \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

### 7.3.3. Resultados numéricos del observador de Punto Fijo

Los resultados obtenidos por el observador de Punto Fijo son comparados con los del observador de Newton, así como con los de observadores más convencionales, tales como el observador no lineal de Luenberger para sistemas en tiempo discreto, y un observador de modos deslizantes.

Considere los siguientes parámetros para el sistema de Chua modificado:  $\alpha = 10.82$ ,  $\beta = 14.286$ ,  $a = 1.3$ ,  $b = 0.11$  y  $d = 1$ . Por otro lado, el tiempo de muestreo se fija como  $T = 0.05$ .



Para el observador de Punto Fijo se considera  $\omega_0^{(0)} = [5, 10, -5]^T$  como aproximación inicial y  $\bar{m} = 10^{-5}$  como criterio de finalización del método iterativo. Para el observador de Newton se considera la misma aproximación inicial.

Por otro lado, el observador de Luenberger implementado es

$$\begin{aligned} {}_L\hat{x}_{k+1} &= f({}_L\hat{x}_k) + \bar{L}(y_k - {}_L\hat{y}_k) \\ {}_L\hat{y}_k &= {}_L\hat{x}_{1,k} \end{aligned} \quad (7.84)$$

donde  ${}_L\hat{x}_k$  y  ${}_L\hat{y}_k$  son el vector de estados estimado y la salida del observador de Luenberger, respectivamente.  $\bar{L} \in \mathbb{R}^3$  es la ganancia del observador, misma que se elige como  $\bar{L} = [0.5, 0.4, 0.2]^T$ . Las condiciones iniciales del observador son  ${}_L\hat{x}_0 = [5, 10, -5]^T$ .

A su vez, el observador de modos deslizantes es

$$\begin{aligned} {}_{SM}\hat{x}_{k+1} &= f({}_{SM}\hat{x}_k) + Q(y_k - {}_{SM}\hat{y}_k) + S(k) \\ {}_{SM}\hat{y}_k &= {}_{SM}\hat{x}_{1,k} \end{aligned} \quad (7.85)$$

donde  ${}_{SM}\hat{x}_k$  y  ${}_{SM}\hat{y}_k$  son el vector de estados y la salida del observador, respectivamente.  $Q \in \mathbb{R}^3$  es un vector de ganancias y  $S(k)$  es una función de saturación definida como

$$S(k) = R \quad \text{sat} \left( \frac{y_k - {}_{SM}\hat{y}_k}{\gamma} \right) \quad (7.86)$$

con  $R = [r_1, r_2, r_3]^T$ ,  $r_1 > 0, r_2 > 0, r_3 > 0$  y  $\gamma > 0$ . Para el observador de modos deslizantes se utiliza  $Q = [0.1, 0.2, 0.1]^T$ ,  $R = [4.1, 2.1, 3.9]^T$  y  $\gamma = 10$ . Mientras que sus respectivas condiciones iniciales son  ${}_{SL}\hat{x}_0 = [5, 10, -5]^T$ .

En la Figura 7.3 se pueden observar las estimaciones realizadas por cada uno de los observadores. Note como las estimaciones de los observadores de Punto Fijo y Newton se aproximan a los valores reales de forma prácticamente inmediata, esto es, carecen de un tiempo de establecimiento. Lo anterior sucede debido al método iterativo que cada uno de ellos implementa.

Por otro lado, en la Figura 7.4 se presentan los errores de estimación de cada observador, mismo que es definido como la diferencia entre el valor real y el valor estimado ( $e_k = x_k - \hat{x}_k$ ). Para analizar con mayor claridad esta Figura, considere el *error cuadrático medio* (ECM):

$$ECM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_i - \hat{x}_i)^2 \quad (7.87)$$

donde  $M$  es el número total de pasos de tiempo considerados en la simulación. Al

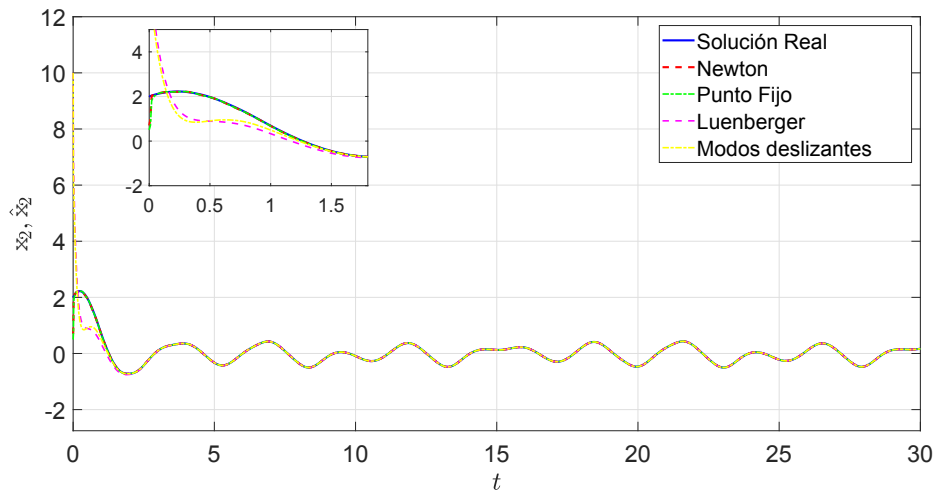
calcular el ECM de cada observador, se tiene que

Observador de Punto Fijo:	$ECM = 0.0165$
Observador de Newton:	$ECM = 0.0180$
Observador de Luenberger:	$ECM = 0.3335$
Observador de Modos Deslizantes:	$ECM = 0.3025$

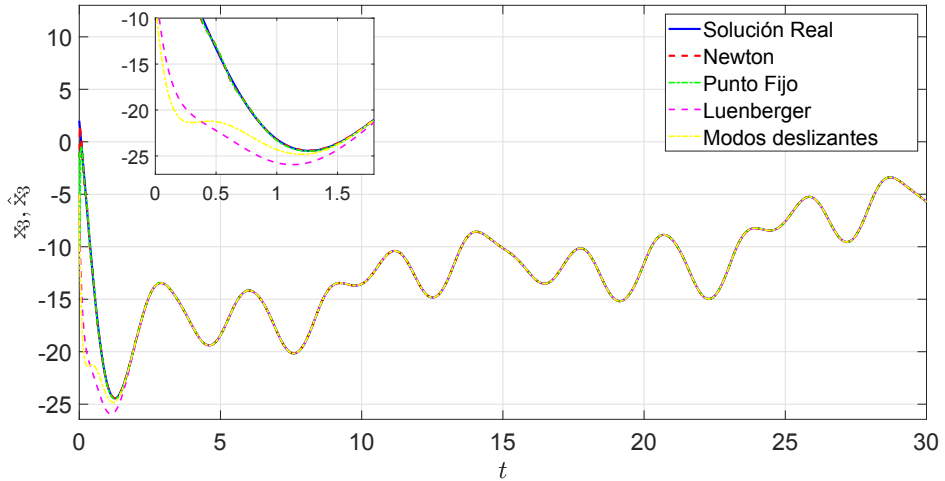
Por lo tanto, concluimos que el observador de Punto Fijo presenta un mejor desempeño. Finalmente, en la Figura 7.5 se observa la convergencia de las secuencias generadas en el instante  $k = 3$  por los métodos iterativos del observador de Newton y el observador de Punto Fijo. La línea roja representa la secuencia  $\left\{ \mathbf{w}_{2,k}^{(l)} \right\}_{l=0}^{\infty}$ , mientras que la línea verde corresponde a  $\left\{ \mathbf{w}_{3,k}^{(l)} \right\}_{l=0}^{\infty}$ . Cabe señalar que se presentan las secuencias generadas por el observador de Punto Fijo con y sin esquemas de convergencia acelerada.

Note que todas las secuencias convergen al punto fijo  $[y_k, 2.1428, -0.1648]^T$ , pero en un número diferente de iteraciones. Claramente, el observador de Punto Fijo con convergencia acelerada por método de Steffensen convergen más rápidamente (42 iteraciones), que con solo método de Aitken (139 iteraciones) o sin esquema de convergencia acelerada (284 iteraciones).

Si bien el observador de Newton requiere apenas tres iteraciones, al calcular el tiempo de cómputo de ambos observadores, encontramos que el del observador de Punto Fijo es menor 0.040140 segundos frente a los 0.250582 segundo del observador de Newton, gracias a que el primero evita cálculos complejos, como el Jacobiano y su inversa.

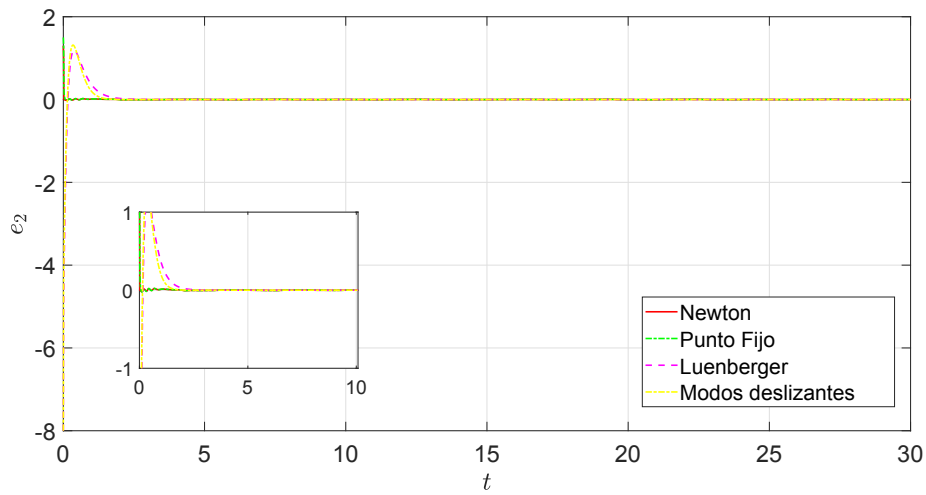


(a)

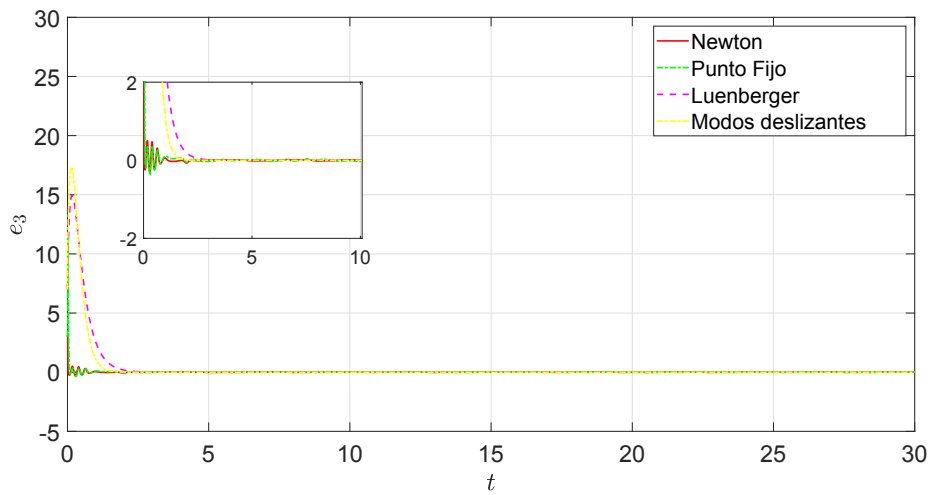


(b)

Figura 7.3: Sistema de Chua modificado: estimaciones obtenidas por los diferentes observadores para (a)  $\hat{x}_2$  y (b)  $\hat{x}_3$ .

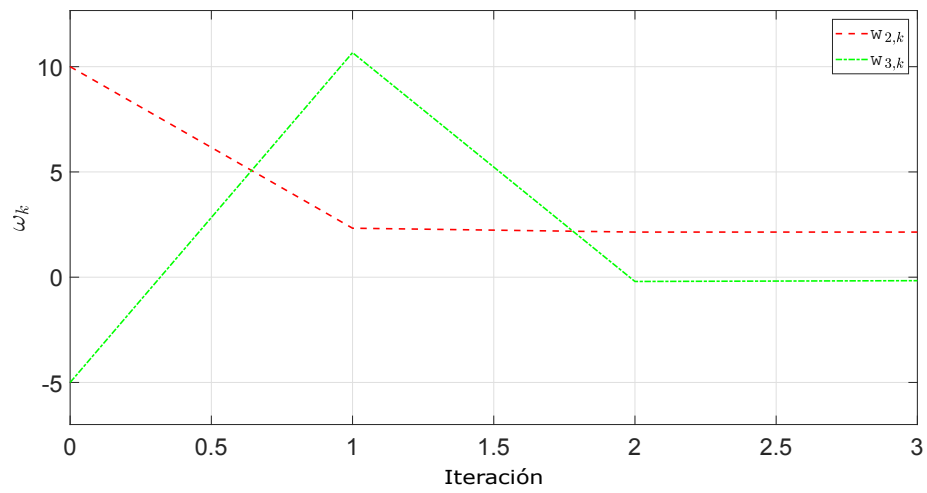


(a)

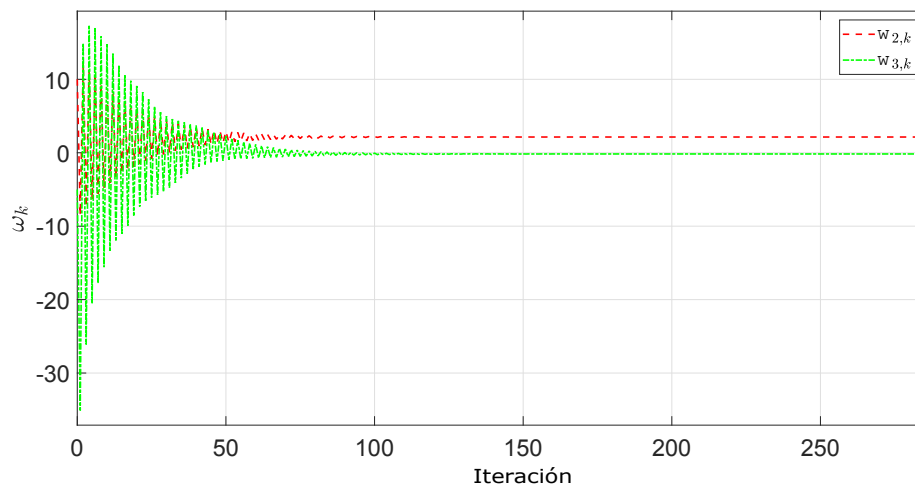


(b)

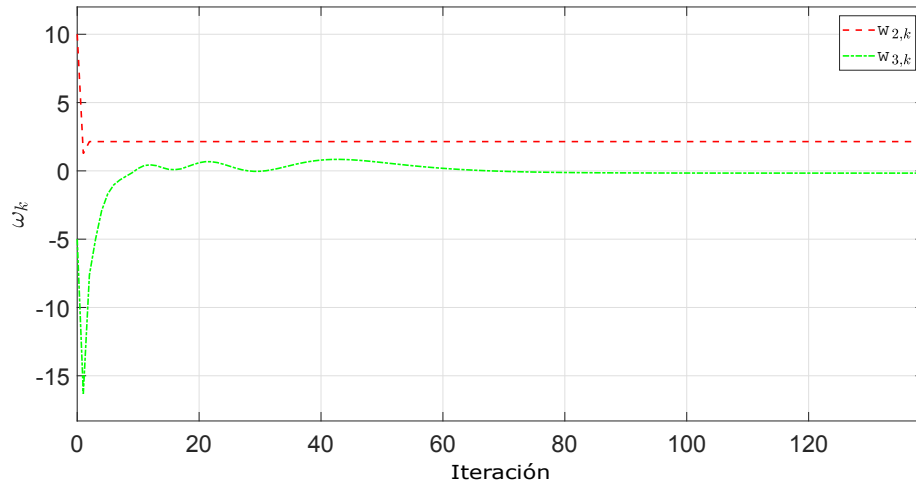
Figura 7.4: Sistema de Chua modificado: error de estimación obtenido por los diferentes observadores para (a)  $e_2 = x_{2,k} - \hat{x}_{2,k}$  y (b)  $e_3 = x_{3,k} - \hat{x}_{3,k}$ .



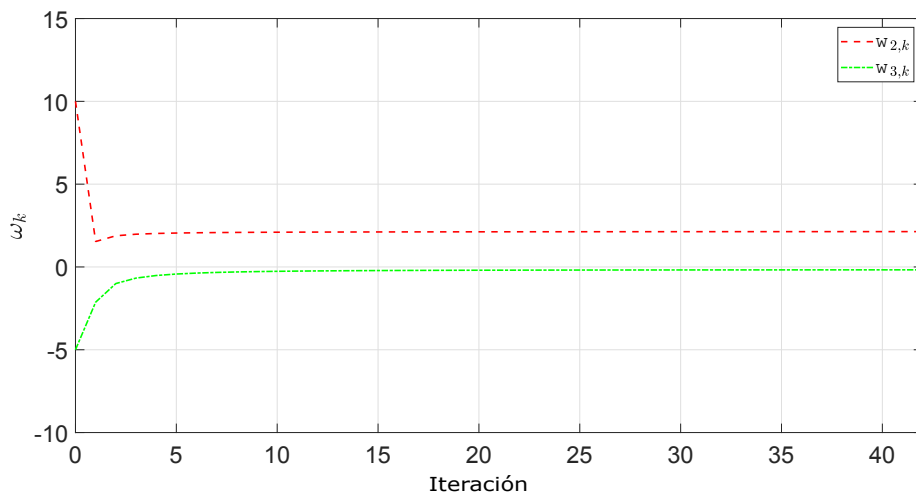
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.5: Convergencia de las secuencias generadas por los métodos iterativos en el instante  $k = 3$ : (a) Observador de Newton, (b) Observador de Punto Fijo sin esquema de convergencia acelerada, (c) Observador de Punto Fijo con convergencia acelerada por método de  $\Delta^2$ -Aitken y (d) Observador de Punto Fijo con convergencia acelerada por método de Steffensen.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo de tesis, uno de los tópicos fundamentales es el problema de sincronización. Dado que este y el problema de observación de estados se resuelven simultáneamente, en los primeros capítulos se presentaron algoritmos de estimación. El primero de estos algoritmos es el llamado observador Proporcional-Integral de orden reducido. En el capítulo 2 se demostró que el mismo es capaz de resolver el problema de estimación para una clase especial de sistemas dinámicos conocidos como sistemas no diferencialmente planos. Una particularidad de este primer observador es que no requiere de una copia exacta del sistema y además, es un observador no redundante, esto es, el algoritmo estima únicamente aquellas variables de estado desconocidas. Más aún, se probó que este observador es tolerante a ruidos de medición.

Un segundo algoritmo de estimación para sistemas de orden fraccional, denominado como observador de alta ganancia, fue presentado en el Capítulo 3. Se comprobó que el error de estimación de este observador es globalmente Mittag-Leffler acotado, es decir, el error converge asintóticamente a un conjunto compacto atractivo. Debido a la forma en que se diseña este observador, el mismo es efectivo aún en la presencia de ruido de medición y/o dinámicas no modeladas. Se mostró también como el observador de alta ganancia globalmente Mittag-Leffler acotado, se reduce a un observador Mittag-Leffler acotado, a un observador uniformemente últimamente acotado o a un observador exponencialmente convergente cuando el orden de derivación fraccional es entero y/o el ruido de medición no existe, respectivamente.

Posteriormente, a partir del Capítulo 4 se ha presentado una serie de controladores dinámicos distribuidos para la sincronización generalizada de sistemas PDE de orden entero y fraccional. Es decir, mediante un algoritmo de control dado como una cadena de integradores y en un espacio de coordenadas transformadas, es posible conseguir que un sistema PDE, denominado como esclavo, tenga un comportamiento idéntico al de un segundo sistema PDE, conocido como maestro.

A través de diferentes ejemplos y sus correspondientes resultados numéricos, se corroboró la efectividad de los controladores dinámicos distribuidos. Además, gracias al

enfoque utilizado para el diseño de tales observadores, es posible prescindir de herramientas matemáticas complejas pertenecientes a la geometría diferencial o el cálculo de variaciones. Una contribución importante de este trabajo de tesis es la utilización de la teoría espectral y la teoría de semi-grupos para sistemas de dimensión infinita en el análisis de estabilidad de los sistemas PDE de orden entero en lazo cerrado. Este enfoque de análisis evita el uso de los bien conocidos métodos de Lyapunov y Lyapunov-Krasivskii, mismos que requieren hallar funcionales adecuadas o resolver desigualdades lineales matriciales. En lugar de estos métodos, el enfoque presentado aquí conduce a criterios de estabilidad simples. Por otro lado, un resultado interesante es el hecho de que la bien conocida condición de Matignon sobrevive para sistemas PDE de orden fraccional.

Más aún, se abordó un problema de sincronización más complejo, esto es, el problema de sincronización de múltiples sistemas PDE. Para resolver este problema, se extendieron los resultados previamente obtenidos, en consecuencia, se presenta un problema de multi-sincronización generalizada para sistemas PDE, donde en lugar de un control dinámico distribuido, se diseña una familia de controladores dinámicos distribuidos. La prueba relacionada a este capítulo hace uso de herramientas algebraicas simples, tal que pese a la complejidad del problema tratado, su análisis de estabilidad continúa siendo simple y por tanto accesible.

Finalmente, en el Capítulo 7 se introduce un observador de Punto Fijo para sistemas en tiempo discreto. La gran ventaja de este observador es que prescinde de cálculos numéricos complejos, tales como la constante evaluación y cómputo de la inversa de una matriz Jacobiana. Como resultado, este algoritmo es computacionalmente eficiente y por lo tanto, prometedor para cuestiones aplicadas.

Como trabajo futuro de esta tesis se plantean tres direcciones principales: 1) En este trabajo se hallaron criterios únicamente para asegurar la estabilidad de los diversos controladores dinámicos distribuidos, por lo tanto, para un futuro se plantea hallar criterios para la selección de ganancias óptimas del controlador. Por otro lado, es necesario investigar la robustez del control frente a ruidos de medición e incertidumbre paramétrica; 2) la derivada de orden fraccional considerada en este trabajo de tesis fue la derivada de Caputo. Esta decisión se tomó considerando que la misma permite utilizar condiciones iniciales físicamente interpretables. Sin embargo, la utilización de derivadas con kernels no singulares representa un tópico potencialmente interesante que se plantea explorar en un futuro; 3) El análisis de estabilidad para sistemas PDE consideró familias de operadores lineales cuya forma es dada por la FCOG y la FCOGF, respectivamente. No obstante, es muy probable que dichas familias sean muchas más amplias, tal que el análisis de estabilidad podría extenderse; y 4) Los observadores presentados en este trabajo de tesis se implementaron únicamente a sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos algoritmos serán tomados como punto de partida para futuras implementaciones en sistemas PDE.



# Apéndice A

## Productos de investigación

### Artículos publicados en revistas internacionales

- A1 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Dynamical distributed control and synchronization”, *Nonlinear Dynamics*, 103 (2): p.p. 1663–1679, 2021. Springer.
- A2 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Dynamical distributed controller for the synchronization problem of integer and fractional order partial differential equation systems”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2021. SAGE Publications.
- A3 Rafael Martínez-Guerra & Juan Pablo Flores-Flores, “An algorithm for the robust estimation of the COVID-19 pandemic’s population by considering undetected individuals”, *Applied Mathematics and Computation*, 405, 2021. Elsevier.
- A4 Rafael Martínez-Guerra & Juan Pablo Flores-Flores & Arturo Govea-Vargas, “A globally Mittag-Leffler bounded High-Gain observer for systems with unknown dynamics and noisy measurements”, *ISA transactions*, 2021. Elsevier.
- A5 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “PI observer design for a class of nondifferentially flat systems”, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 29 (4), 2019.

### Artículos de congreso

- B1 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Generalized Multi-synchronization of the attitude angle for flexible aircraft”, *Conferencia: 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Praga, República Checa, 2020.
- B2 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “A Dynamic Controller for PDE-Based Systems”, *Conferencia: 7th International Conference on Control*,

Mechatronics and Automation (ICCMA), Delf, Países Bajos, 2019.

- B3 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Synchronization for a class of nondifferentially flat chaotic systems by means of a PI Observer”, Conferencia: 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Ciudad de México, México, 2018
- B4 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Sincronización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales mediante un controlador dinámico”, Conferencia: Congreso Nacional de Control Automático 2019, Puebla, México, 2019.
- B5 Juan Pablo Flores-Flores & Rafael Martínez-Guerra, “Sincronización de una clase de sistemas caóticos no diferencialmente planos mediante un observador PI”, Conferencia: Congreso Nacional de Control Automático 2018, San Luis Potosí, México, 2018.

### **Libro**

- C1 Rafael Martínez-Guerra & Juan Javier Montesinos-García & Juan Pablo Flores-Flores, “Encryption and decryption algorithms for plain text and images using fractional calculus with real-time applications: Secure communications in integer and fractional order nonlinear systems through synchronization of chaotic systems”. Aceptado para su publicación por Editorial Springer.

### **Artículos sometidos**

- D1 Rafael Martínez-Guerra & Juan Pablo Flores-Flores, “An Estimator of Fixed-Point”. Sometido para su publicación en Junio del 2022.
- D2 Lorenz Josue Oliva-González & Rafael Martínez-Guerra & Juan Pablo Flores-Flores, “A fractional PI observer for incommensurate fractional order systems under parametric uncertainties”. Sometido para su publicación en Junio del 2022.

# Bibliografía

- [1] H. S. Alinezhad, M. H. Yamchi, and R. M. Esfanjani. Robust synchronization of networked manipulators using distributed dynamic  $H_\infty$  controllers. *ISA transactions*, 83:239–247, 2018.
- [2] S. Ammar and J.-C. Vivalda. On the preservation of observability under sampling. *Systems & control letters*, 52(1):7–15, 2004.
- [3] M. Arcak and D. Nešić. Nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1):13–18, 2005.
- [4] E. Artin. *The gamma function*. Courier Dover Publications, 2015.
- [5] J. Auriol, F. Di Meglio, and F. Bribiesca-Argomedo. Delay robust state feedback stabilization of an underactuated network of two interconnected PDE systems. In *2019 American Control Conference (ACC)*, pages 593–599. IEEE, 2019.
- [6] R. L. Bagley and P. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27(3):201–210, 1983.
- [7] Y. Bai, L. Huo, Y. Zhang, J. Liu, H. Shao, C. Wu, and Z. Guo. A spatial fractional diffusion model for predicting the characteristics of vocs emission in porous dry building material. *Science of The Total Environment*, 704:135342, 2020.
- [8] Y. Bai, L. Yao, T. Wei, F. Tian, D.-Y. Jin, L. Chen, and M. Wang. Presumed asymptomatic carrier transmission of covid-19. *Jama*, 323(14):1406–1407, 2020.
- [9] C. Bamba, R. Riordan, J. Ford, and F. Matthews. The covid-19 pandemic and health inequalities. *J Epidemiol Community Health*, 74(11):964–968, 2020.
- [10] J. B. J. baron Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. F. Didot, 1822.
- [11] M. Beck. A brief introduction to stability theory for linear PDEs. *SIAM, Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures in Seattle, WA, USA, (2012)*, 2012.

- [12] V. Belavin. Fractional differentiation of oscillographic polarograms by means of an electro-chemical two-terminal network. *Tr. Kazan. Aviacion Inst.*, 5:144–145, 1964.
- [13] J. Berger, S. Gasparin, D. Dutykh, and N. Mendes. On the solution of coupled heat and moisture transport in porous material. *Transport in Porous Media*, 121(3):665–702, 2018.
- [14] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1494–1496. IEEE, 1991.
- [15] L. Brivadis, V. Andrieu, and U. Serres. Luenberger observers for discrete-time nonlinear systems. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3435–3440. IEEE, 2019.
- [16] R. L. Burden, J. D. Faires, and A. M. Burden. Numerical analysis (10th). *Cengage Learning, Boston*, pages 601–615, 2015.
- [17] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539, 1967.
- [18] C.-T. Chen. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1998.
- [19] J. Chen, Z. Zeng, and P. Jiang. Global mittag-leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. *Neural Networks*, 51:1–8, 2014.
- [20] W. Chen, J. Zhang, and J. Zhang. A variable-order time-fractional derivative model for chloride ions sub-diffusion in concrete structures. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(1):76–92, 2013.
- [21] M. H. Cherif and D. Ziane. Variational iteration method combined with new transform to solve fractional partial differential equations. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 1(2):113–120, 2018.
- [22] D. Claude, M. Fliess, and A. Isidori. Immersion directe et par bouclage d’un système non linéaire dans un linéaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 296(I):237–240, 1983.
- [23] M. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(5):1139–1144, 1981.
- [24] G. S. da Silva, R. P. Vieira, and C. Rech. Discrete-time sliding-mode observer for capacitor voltage control in modular multilevel converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 65(1):876–886, 2017.

- [25] A. De Wit, D. Lima, G. Dewel, and P. Borckmans. Spatiotemporal dynamics near a codimension-two point. *Physical Review E*, 54(1):261, 1996.
- [26] A. Doelman, T. J. Kaper, and P. A. Zegeling. Pattern formation in the one-dimensional gray-scott model. *Nonlinearity*, 10(2):523, 1997.
- [27] D. Etlili, A. Khedher, and A. Errachdi. A proposed high-gain observer for a class of nonlinear fractional-order systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 2021.
- [28] L. Euler. Memoire dans le tome v des comment. *Saint Petersburg Annees*, 55:1730, 1730.
- [29] N. W. Furukawa, J. T. Brooks, and J. Sobel. Evidence supporting transmission of severe acute respiratory syndrome coronavirus 2 while presymptomatic or asymptomatic. *Emerging infectious diseases*, 26(7), 2020.
- [30] G. Gaeta. A simple sir model with a large set of asymptomatic infectives. *arXiv preprint arXiv:2003.08720*, 2020.
- [31] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, S. Othman, et al. A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6):875–880, 1992.
- [32] K. P. Ghadle and F. Khan. Solution of FPDE in Fluid Mechanics by ADM, VIM and NIM. *American Journal of Mathematical and Computer Modelling*, 2(1):13–23, 2017.
- [33] Gobierno de México and Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Covid-19 méxico, 2021.
- [34] J. Gómez-Aguilar. Space–time fractional diffusion equation using a derivative with nonsingular and regular kernel. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 465:562–572, 2017.
- [35] P. Gray and S. Scott. Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: isolas and other forms of multistability. *Chemical Engineering Science*, 38(1):29–43, 1983.
- [36] M. Grenness and K. B. Oldham. Semiintegral electroanalysis. theory and verification. *Analytical Chemistry*, 44(7):1121–1129, 1972.
- [37] J. Grizzle and P. Moraal. Newton, observers and nonlinear discrete-time control. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 760–767. IEEE, 1990.
- [38] S. Guo, B. Jiang, F. Zhu, and Z. Wang. Luenberger-like interval observer design for discrete-time descriptor linear system. *Systems & Control Letters*, 126:21–27, 2019.

- [39] W. He, X. Gao, W. Zhong, and F. Qian. Secure impulsive synchronization control of multi-agent systems under deception attacks. *Information Sciences*, 459:354–368, 2018.
- [40] W. He, X. He, M. Zou, and H. Li. PDE model-based boundary control design for a flexible robotic manipulator with input backlash. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 27(2):790–797, 2018.
- [41] A. Hemeda. Variational iteration method for solving nonlinear coupled equations in 2-dimensional space in fluid mechanics. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(37):1839–1852, 2012.
- [42] A. A. Hemeda. Solution of fractional partial differential equations in fluid mechanics by extension of some iterative method. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2013. Hindawi, 2013.
- [43] M. Holtmann, M. Jones, A. Shah, and G. Holtmann. Low ambient temperatures are associated with more rapid spread of covid-19 in the early phase of the endemic. *Environmental research*, 2020.
- [44] C. Huang and J. Cao. Active control strategy for synchronization and anti-synchronization of a fractional chaotic financial system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473:262–275, 2017.
- [45] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. México en cifras: Ciudad de México, 2021.
- [46] Johns Hopkins University . Covid-19 dashboard by the center for systems science and engineering (csse) at johns hopkins university, 2021.
- [47] H. K. Khalil. High-gain observers in feedback control: Application to permanent magnet synchronous motors. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(3):25–41, 2017.
- [48] R. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2):299–307, 1984.
- [49] E. R. Kolchin. *Differential algebra & algebraic groups*, volume 54. Academic press, 1973.
- [50] V. V. Kulish and J. L. Lage. Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J. Fluids Eng.*, 124(3):803–806, 2002.
- [51] J. L. Lagrange. *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation & à l'intégration des quantités variables*. Académie royale des sciences et belles lettres, 1775.
- [52] G. Leibnitz. Letter from Hanover, Germany, September 30, 1695 to ga l'Hôpital. Leibnizen Mathematische Schriften. ed: Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 1962.

- [53] Y. Li, Y. Chen, and I. Podlubny. Mittag-leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8):1965–1969, 2009.
- [54] J. Liouville. *Mémoire sur le changement de la variable indépendante, dans le calcul des différentielles a indices quelconques*. 1835.
- [55] H. Liu and H. K. Khalil. Output feedback stabilization using super-twisting control and high-gain observer. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(3):601–617, 2019.
- [56] S. Liu, W. Jiang, X. Li, and X.-F. Zhou. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 51:13–19, 2016.
- [57] W. Liu and J. Huang. Event-triggered cascade high-gain observer and its application. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(6):2335–2351, 2020.
- [58] X. Liu, H. J. Marquez, and Y. Lin. Input-to-state stabilization for nonlinear dual-rate sampled-data systems via approximate discrete-time model. *Automatica*, 44(12):3157–3161, 2008.
- [59] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, 8(2):74–80, 1964.
- [60] T. Ma and C. Cao. L1 adaptive control for general partial differential equation (PDE) systems. *International Journal of General Systems*, 48(6):656–689, 2019.
- [61] J. T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16(3):1140–1153, 2011.
- [62] O. Martínez-Fuentes and R. Martínez-Guerra. A high-gain observer with mittag-leffler rate of convergence for a class of nonlinear fractional-order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 79:104909, 2019.
- [63] R. Martínez-Guerra and C. D. Cruz-Ancona. *Algorithms of estimation for nonlinear systems: A Differential and Algebraic Viewpoint*. Springer, 2017.
- [64] R. Martínez-Guerra, G. Gómez-Cortés, and C. Pérez-Pinacho. *Synchronization of integral and fractional order chaotic systems: A Differential Algebraic and Differential Geometric Approach With Selected Applications in Real-Time*. Springer, 2015.
- [65] R. Martínez-Guerra and C. A. Pérez-Pinacho. *Advances in Synchronization of Coupled Fractional Order Systems: Fundamentals and Methods*. Springer, 2018.
- [66] R. Martínez-Guerra, R. Suarez, and J. D. León-Morales. Asymptotic output tracking of a class of nonlinear systems by means of an observer. *International*

- Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 11(4):373–391, 2001.
- [67] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications*, volume 2, pages 963–968. Lille, France, 1996.
- [68] R. M. Mattheij, S. W. Rienstra, and J. H. ten Thijs Boonkamp. *Partial differential equations: modeling, analysis, computation*, volume 10. Siam, 2005.
- [69] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, 1993.
- [70] S. Momani and Z. Odibat. Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics. *Physics Letters A*, 355(4-5):271–279, 2006.
- [71] S. Monaco and D. Normand-Cyrot. Advanced tools for nonlinear sampled-data systems’ analysis and control. In *2007 European Control Conference (ECC)*, pages 1155–1158, 2007.
- [72] P. Moraal and J. Grizzle. Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements. *IEEE Transactions on automatic control*, 40(3):395–404, 1995.
- [73] K. Morris and W. Levine. Control of systems governed by partial differential equations. *The Control Theory Handbook*, Boca Raton, FL: CRC, (2010), 2010.
- [74] H. Nijmeijer and I. M. Mareels. An observer looks at synchronization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications*, 44(10):882–890, 1997.
- [75] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, K. V. Diegert, and K. F. Alvin. Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 75(3):333–357, 2002.
- [76] K. B. Oldham. Signal-independent electroanalytical method. *Analytical Chemistry*, 44(1):196–198, 1972.
- [77] J. M. Ortega. *Numerical analysis: a second course*. SIAM, 1990.
- [78] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. SIAM, 2000.
- [79] Oxford University and Global Change Data Lab. Mexico: Coronavirus pandemic country profile, 2021.
- [80] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8):821, 1990.



- [81] I. Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [82] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv preprint math/0110241*, 2001.
- [83] K. Prieto, M. Chavez-Hernandez, and J. P. Romero-Leiton. On mobility trends analysis of covid-19 dissemination in mexico city. *medRxiv*, 2021.
- [84] B. Riemann. Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differenziation. *Gesammelte Werke*, 62(1876), 1876.
- [85] B. Ross. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In *Fractional calculus and its applications*, pages 1–36. Springer, 1975.
- [86] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, et al. *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdonles-Bains, Switzerland, 1993.
- [87] J. Schnakenberg. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *Journal of theoretical biology*, 81(3):389–400, 1979.
- [88] S. Shivakumar, A. Das, S. Weiland, and M. M. Peet. Duality and  $H_\infty$ -optimal control of coupled ODE-PDE systems. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5689–5696. IEEE, 2020.
- [89] F. J. Silvestre, A. B. Guimarães Neto, R. M. Bertolin, R. G. A. da Silva, and P. Paglione. Aircraft control based on flexible aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 54(1):262–271, 2017.
- [90] M. A. Solis, M. Olivares, and H. Allende. Stabilizing dynamic state feedback controller synthesis: A reinforcement learning approach. *Studies in Informatics and Control*, 25(2):245–254, 2016.
- [91] R. Subramanian, Q. He, and M. Pascual. Quantifying asymptomatic infection and transmission of covid-19 in new york city using observed cases, serology, and testing capacity. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(9), 2021.
- [92] W. Tai, Q. Teng, Y. Zhou, J. Zhou, and Z. Wang. Chaos synchronization of stochastic reaction-diffusion time-delay neural networks via non-fragile output-feedback control. *Applied Mathematics and Computation*, 354:115–127, 2019.
- [93] W. K. Tang, G. Zhong, G. Chen, and K. Man. Generation of n-scroll attractors via sine function. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 48(11):1369–1372, 2001.
- [94] A. Terrand-Jeanne, V. Andrieu, V. D. S. Martins, and C.-Z. Xu. Adding integral action for open-loop exponentially stable semigroups and application to

- boundary control of PDE systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(11):4481–4492, 2019.
- [95] A. Tobías and T. Molina. Is temperature reducing the transmission of covid-19? *Environmental research*, 186:109553, 2020.
- [96] J.-H. Tsao and W.-T. Wu. Global control of a continuous stirred tank bioreactor. *The Chemical Engineering Journal and the Biochemical Engineering Journal*, 56(1):B69–B74, 1994.
- [97] V. Turut and N. Güzel. On solving partial differential equations of fractional order by using the variational iteration method and multivariate padé approximations. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(2):147–171, 2013.
- [98] G. Z. Voyiadjis and W. Sumelka. Brain modelling in the framework of anisotropic hyperelasticity with time fractional damage evolution governed by the Caputo-Almeida fractional derivative. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, 89:209–216, 2019.
- [99] P. Wan and J. Jian. Global mittag-leffler boundedness for fractional-order complex-valued cohen–grossberg neural networks. *Neural Processing Letters*, 49(1):121–139, 2019.
- [100] K. Wang, M. L. Steyn-Ross, D. A. Steyn-Ross, M. T. Wilson, J. W. Sleight, and Y. Shiraishi. Simulations of pattern dynamics for reaction-diffusion systems via simulink. *BMC systems biology*, 8(1):45, 2014.
- [101] S. Wei, W. Chen, and J. Zhang. Time-fractional derivative model for chloride ions sub-diffusion in reinforced concrete. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 21(3):319–331, 2017.
- [102] X. Xing and J. Liu. Modeling and robust adaptive iterative learning control of a vehicle-based flexible manipulator with uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(8):2385–2405, 2019.
- [103] H. Yang, J. Liu, and X. Lan. Observer design for a flexible-link manipulator with PDE model. *Journal of Sound and Vibration*, 341:237–245, 2015.
- [104] X. Yu, Y. Zhang, H. Sun, and C. Zheng. Time fractional derivative model with Mittag-Leffler function kernel for describing anomalous diffusion: Analytical solution in bounded-domain and model comparison. *Chaos, Solitons & Fractals*, 115:306–312, 2018.
- [105] J. Zhang, P. Shi, Y. Xia, and H. Yang. Discrete-time sliding mode control with disturbance rejection. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(10):7967–7975, 2018.

- [106] Z. Zhang, A. Zeb, S. Hussain, and E. Alzahrani. Dynamics of covid-19 mathematical model with stochastic perturbation. *Advances in Difference Equations*, 2020(1):1–12, 2020.
- [107] L. Zhou and F. Tan. A chaotic secure communication scheme based on synchronization of double-layered and multiple complex networks. *Nonlinear Dynamics*, 96(2):869–883, 2019.
- [108] R. Zhou, F. Li, F. Chen, H. Liu, J. Zheng, C. Lei, and X. Wu. Viral dynamics in asymptomatic patients with covid-19. *International Journal of Infectious Diseases*, 96:288–290, 2020.