



CENTRO DE INVESTIGACIONES Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control Robusto Mediante el Método de Elipsoide Atractivo
para Sistemas Estocásticos no Lineales en Tiempo Discreto
Usando un Observador por Modos Deslizantes**

T E S I S

Que presenta

David Velázquez Flores

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE:

CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alexander Pozniak Gorbach

Ciudad de México.

Julio, 2022

"To those who do not know mathematics it is difficult to get across a real feeling as to the beauty, the deepest beauty, of nature ... If you want to learn about nature, to appreciate nature, it is necessary to understand the language that she speaks in."

-Richard Feynman.

•

Dedicado a:

Los mejores padres del mundo, Ángel Velázquez Medina y Arcelia Flores Reyes, quienes sé que me apoyaron, apoyan y apoyarán incondicionalmente en todo momento y en cada decisión.

Agradecimientos

A:

- Mi asesor, el Dr.Alexander Poznyak por la paciencia y todo el apoyo que me brindó.
- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por haber hecho posible, mediante una beca, la realización de esta tesis.
- Alejandra por inyectarme su energía y entusiasmo en todo momento desde que la conocí.

Abstract

This thesis describes the procedure for designing a robust control for a wide class of discrete-time nonlinear systems that uses state estimations by a sliding mode observer. The range of discrete-time nonlinear systems treated are those that belong to the class of quasi-Lipschitz systems and that, in addition, are affected by stochastic disturbances both in the input and in the output. The Attractive Ellipsoid Method (AEM) is used to ensure the convergence of the state estimation error and the tracking error. The optimal matrix gains selection of the observer and feedback control are found by an optimization procedure consisting of the numerical solution of a problem with Bilinear Matrix Inequalities (BMI), which through special transformations becomes into a set of Linear Matrix Inequalities (LMI). Three examples show the effectiveness of the proposed approach.

Resumen

Esta tesis describe el procedimiento de diseño de un control robusto para una amplia clase de sistemas no lineales a tiempo discreto que utiliza estimaciones de estado hechas por un observador tipo modos deslizantes. La gama de sistemas no lineales a tiempo discreto tratados son los que pertenecen a la clase sistemas cuasi-Lipchitz y, que a demás, son afectados por perturbaciones estocásticas tanto en la entrada como en la salida. Se utiliza el Método de Elipsoides Atractivos (en inglés AEM-Attractive Ellipsoid Method) para asegurar la convergencia del error de estimación de estados y del error de seguimiento de trayectoria. La selección óptima de las ganancias matriciales del observador y de control por realimentación son halladas mediante un procedimiento de optimización que consiste en la solución numérica de un problema con Desigualdades Matriciales Bilineales (en inglés BMI-Bilinear Matrix Inequalities) que, mediante de transformaciones especiales, se convierte en un conjunto de Desigualdades Matriciales Lineales (en inglés LMI-Linear Matrix Inequalities). Tres ejemplos muestran la efectividad del enfoque sugerido.

Índice general

Agradecimientos	7
1. Introducción	15
1.1. Contribución principal	17
1.2. Estructura de la tesis	17
2. Planta estocástica no lineal en tiempo discreto	19
2.1. Modelo	20
2.2. Suposiciones principales	21
2.3. Formato cuasi-lineal	23
3. Observación y control: planteamiento del problema	25
3.1. Observador por modos deslizantes	26
3.2. Controlador	27
3.3. Formulación del problema	28
4. Análisis de convergencia	29
4.1. Convergencia	31
4.2. Representación analítica del elipsoide atractivo	39
5. Selección de las ganancias matriciales óptimas	43
5.1. La traza como función de optimización	43
5.2. Optimización matricial	44
5.3. Algoritmo de optimización	49

6. Ejemplos numéricos	51
6.1. Ejemplo 1: Sistema Lineal	51
6.2. Ejemplo 2: Sistema no lineal	54
6.3. Control Robusto para el sistema Carro-Masa	58
7. Conclusión	65
7.1. Resultados intermedios interesantes	65
7.2. Publicaciones	67

Capítulo 1

Introducción

El *Método del Elipsoide Atractivo* (en inglés AEM-Attractive Ellipsoid Method) ofrece a los investigadores una herramienta especial para el diseño controles de realimentaciones lineales para algunas clases de sistemas no lineales los cuales contienen tanto perturbaciones en el modelo (de entrada) como perturbaciones en la medición (de salida) [17]. Usualmente la aplicación de este método requiere conocer exactamente (disponibilidad completa) todos los estados actuales y de las acciones de control usadas. Un problema se presenta cuando las variables requeridas para el control no están disponibles, un posible enfoque para la solucionar esto consiste en la realización de un proceso de estimación de estado para el uso directo de los mismos en las acciones de control aplicadas. En cierto sentido, esta construcción se puede visualizar como un control adaptable por el AEM.

Como un ejemplo de este enfoque, en el caso determinista, se puede mencionar el artículo [10], que presenta un método para hacer la identificación de un sistema no lineal, usando redes neuronales de orden superior y algoritmos de modos deslizantes de orden superior, que está sujeto a perturbaciones internas y externas. Basado en la información obtenida de los estados disponibles del sistema se propone una red neural de orden superior para aproximar la dinámica del sistema. Los pesos de la red neuronal se entrenan por medio del filtro de Kalman y el observador de modo deslizante de orden superior. También se han aplicado los Observadores por Modos Deslizantes (en inglés SMO-Sliding Mode Observers) a sistemas con perturbaciones determinísticas acotadas [6], [15], [9]. En [16], se desarrolla una estrategia de control adaptable de modos deslizantes, basado en el control equivalente. La regla de adaptación combina las cualidades de ganancias monótonamente

crecientes y el control equivalente.

En esta tesis se considera la amplia clase de sistemas cuasi-Lipschitz no lineales estocásticos donde la estimación de estados es obtenida mediante una versión especial de SMO, proporcionando una estimación aceptable de los estados en el sentido del error cuadrático medio. Una característica específica de los sistemas estocásticos consiste en la consideración de perturbaciones estocásticas externas no acotadas que hace imposible la aplicación directa de los enfoques del AEM y SMO: debido a esto se requieren algunas contracciones y extensiones especiales.

En [8] se investiga un SMO para una clase de sistemas no lineales con retardos y protocolo de comunicación estocástica. El protocolo de comunicación estocástica es tomado para regular el orden de transmisión de las mediciones de múltiples nodos de sensores, que podrían evitar la colisión de datos. Según la programación del protocolo de comunicación, sólo un nodo sensor puede obtener acceso a la red de comunicación compartida en cada paso de tiempo para la transmisión de datos. Además, el protocolo de comunicación estocástica se rige por una cadena de Markov, que convierte el sistema, restringido por el protocolo, en un sistema de salto de Markov. El propósito es diseñar un SMO tal que, aún con el protocolo de comunicación estocástico, las trayectorias del error de estimación del sistema sean llevadas a la superficie deslizante y, al mismo tiempo, el movimiento en esta zona sea asintóticamente estable en el sentido de la media cuadrática.

En [20] se diseña un SMO adaptable para reconstruir los estados de un sistemas no lineal en tiempo continuo con incertidumbres estocásticas a partir de la salida del sistema que, en este caso es medible, y los estados reconstruidos se emplean para implementar un controlador por modos deslizantes que estabiliza al mismo. En este trabajo se aprovechan las ventajas de la técnica de modos deslizantes para diseñar tanto el observador como el controlador. La convergencia del observador y la estabilidad global asintótica del controlador son analizadas en términos de estabilidad estocástica de Lyapunov, y la efectividad de la estrategia de control se verifica a través de simulaciones numéricas.

El número de trabajos, en los que, la metodología de los modos deslizantes es aplicada para observar y controlar sistemas estocásticos, en realidad es muy limitado [1, 3, 5, 12, 13, 22]. Téngase en cuenta que básicamente se trabaja con modelos lineales, como un ejemplo está [21]).

El análisis de estabilidad de sistemas no lineales estocásticos se puede encontrar en [7]. Los estudios más recientes, y avanzados, sobre el diseño de observadores por modos deslizantes se

puede encontrar en [2, 4, 11].

El mérito de esta tesis es proponer el mecanismo exacto para el diseño de un control adaptable mediante el AEM que simultáneamente con un SMO aseguran un seguimiento de trayectoria con un buen desempeño para una amplia clase de sistemas no lineales con perturbaciones estocásticas.

1.1. Contribución principal

En esta tesis:

- Se realiza el desarrollo del AEM para su aplicación en un control por realimentación en sistemas no lineales a tiempo discreto con perturbaciones estocásticas, obteniendo las ganancias de dicho controlador y del observador por modos deslizantes.
- Se muestra la convergencia cuadrática media de los errores de seguimiento y de observación hacia un elipsoide atractivo cuyo tamaño se hace lo más pequeño posible a través de la selección óptima de las ganancias matriciales del observador de modos deslizantes y el control por realimentación.
- Se presenta la función traza como objetivo del procedimiento de optimización de las ganancias matriciales y se aplican transformaciones de congruencia para llevar el conjunto de restricciones BMI a restricciones de tipo LMI que admiten la aplicación directa de los paquetes de MATLAB como SEDUMI y YALMIP.

1.2. Estructura de la tesis

El capítulo 2 presenta la descripción de la planta no lineal a tiempo discreto, las suposiciones principales sobre todos los elementos de esta planta (o modelo) y su representación cuasi-lineal. La estructura del observador por modos deslizantes, la del controlador y la formulación del problema principal abordado en esta tesis están contenidos en el capítulo 3. El capítulo 4 trata principalmente con el análisis de convergencia que es realizado mediante el método de Lyapunov y además muestra el primer teorema principal obtenido con este trabajo. En el capítulo 5 se muestra la función de optimización que nos conduce el segundo teorema importante, además, este capítulo muestra la

transformación de las restricciones BMI en restricciones LMI. Antes de terminar, en el capítulo 6, se muestran algunas aplicaciones del proceso abarcado en esta tesis, en ejemplos académicos y prácticos.

Capítulo 2

Planta estocástica no lineal en tiempo discreto

Es imposible definir un sistema estocástico a tiempo discreto sin la noción de los conceptos de σ -*algebra* y *espacio de probabilidad* ([18]). Estos dos conceptos están estrechamente ligados y ya que el de espacio de probabilidad depende del de σ -*algebra*, se empezará definiendo este último.

Definición 1. Sea Ω el conjunto de eventos elementales de un experimento. Un conjunto no vacío $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$ de subconjuntos de Ω es llamado **σ -algebra** o conjunto potencia, si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Para cualquier conjunto $\phi_n \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$, con $n \geq 1 \dots$, la unión (intersección) de todos los elementos ϕ_n es cerrada. Es decir,

$$\cup_{n=1}^{\infty} \phi_n \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0} \quad (\cap_{n=1}^{\infty} \phi_n \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}).$$

2. Si $\phi \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$, entonces, el complemento ϕ^c pertenece a **σ -algebra** ($\phi^c \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$).
3. $\Omega \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$

Ahora estamos listos para introducir formalmente la definición de un espacio de probabilidad. Este concepto es fundamental en la teoría de probabilidad moderna y se define a continuación:

Definición 2. Se le dice **espacio de probabilidad** a una triplete ordenada

$$(\Omega, \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}, P) \quad (2.1)$$

donde Ω es el espacio de muestra, $\{\mathcal{F}_k\}$ es la σ -álgebra de los subconjuntos medibles de eventos de Ω y P es una medida de probabilidad en $\{\mathcal{F}_k\}$.

Comentario 1. Decir que P es una medida de probabilidad significa que P satisface lo siguiente:

- $P(\phi) \geq 0 \forall \phi \in \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$,
- $P(\Omega) = 1$, y
- $P(\cup_{n=1}^{\infty} \phi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\phi_n)$.

2.1. Modelo

Considerese las secuencias estocásticas $\{x(k)\}_{k \geq 0}$, $\{y(k)\}_{k \geq 0}$ y $\{u(k)\}_{k \geq 0}$, cuya relación está determinada por la ecuación en diferencias:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= f(k, x(k)) + Bu(k) + \xi(k+1) \in \mathbb{R}^n \\ y(k) &= Cx(k) + \zeta(k) \in \mathbb{R}^m \\ u(k) &\in \mathbb{R}^l, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Aquí, $x(k)$ representa los estados del sistema, $y(k)$ es la salida, y $\{u(k)\}_{k \geq 0}$ las entradas. Es necesario aclarar que se suponen disponible la entrada y la salida, pero no los estados. La matriz de entrada B y la de salida C pertenecen a $\mathbb{R}^{n \times l}$ y $\mathbb{R}^{m \times n}$, respectivamente. $f(k, x(k))$ es una función no lineal que establece la siguiente relación $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las variables aleatorias $\xi(k+1) \in \mathbb{R}^n$ y $\zeta(k) \in \mathbb{R}^m$ representan los ruidos de entrada y salida, despectivamente. Todas las secuencias estocásticas se definen en el espacio de probabilidad $(\Omega, \{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}, P)$, donde $\{\mathcal{F}_k\}_{k \geq 0}$ es el flujo de σ -álgebras \mathcal{F}_k , que para cada $k = 0, 1, \dots$, es la mínima σ -álgebra generada por el historial del proceso, i.e.,

$$\mathcal{F}_k = \sigma \{x(0), u(0), \xi_y(0); \dots; x(k), u(k), \xi_x(k), \xi_y(k)\}. \quad (2.3)$$

2.2. Suposiciones principales

Hay varias consideraciones que se deben tomar en cuenta, imperativamente, sobre los elementos de nuestro sistema. Estas consideraciones son las siguientes:

A1) Las variables aleatorias $\xi(k+1)$ y $\zeta(k)$ son secuencias de diferencia de martingalas (en inglés MDS-Martingale Difference Sequence), es decir,

$$\left. \begin{aligned} E\{\xi(k+1) \mid \mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{=} 0, \\ E\{\zeta(k) \mid \mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{=} 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

estas MDS no están correlacionadas

$$E\{\xi_i(k+1)\zeta_j(k) \mid \mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{=} 0. \quad (2.5)$$

Los elementos $\xi_i(k+1) \forall i = 1, \dots, n$, y $\zeta_j(k) \forall j = 1, \dots, m$, representan la i -ésima y k -ésima coordenadas de los vectores $\xi(k)$ y $\zeta(k+1)$, respectivamente. Los ruidos estocásticos están acotados por sus matrices de covarianza condicional

$$\left. \begin{aligned} E\{\xi(k+1)\xi^T(k+1) \mid \mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \Sigma_x, \\ E\{\zeta_y(k)\zeta_y^T(k) \mid \mathcal{F}_k\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \Sigma_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Los operadores $E\{\cdot \mid \mathcal{F}_k\}$ y $E\{\cdot\}$ representan la esperanza matemática y la esperanza matemática condicional. La expresión *a.s.* significa casi seguro, por sus siglas en inglés **almost-sure**.

Comentario 2. Una secuencia de diferencia de martingalas (en inglés MDS-Martingale Difference Sequence) es un elemento en extremo útil para la teoría de la probabilidad moderna ya que impone restricciones mucho más leves que la independencia, en lo que a la memoria respecta en secuencias estocásticas. Básicamente, una sucesión estocástica X_n es una MDS si su valor esperado con respecto a la historia del proceso (σ -álgebra) es cero.

A2) El mapeo no lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y desconocido, pertenece a la clase $C(A, f_0, f_1)$ de funciones

quasi-Lipschitz (ver [17]), si existen $f_0 > 0$ y $f_1 > 0$ que satisfacen la condición:

$$\|f(x(k), k) - Ax(k)\|^2 \leq f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \quad (2.7)$$

globalmente en \mathbb{R}^n .

Comentario 3. Si el mapeo no lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es dos veces diferenciable, es decir, $f \in C^2$ y el punto inicial $x_o = 0$ es un punto de equilibrio, entonces la matriz A se puede seleccionar mediante la expresión

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_o}. \quad (2.8)$$

Comentario 4. Que una función $f(x)$ cumpla con la condición (2.7) significa que el crecimiento de $f(x)$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$ está acotado por las funciones $ax \pm \sqrt{f_0 + f_1 \|x\|^2}$, es decir,

$$ax - \sqrt{f_0 + f_1 \|x\|^2} \leq f(x) \leq ax + \sqrt{f_0 + f_1 \|x\|^2}. \quad (2.9)$$

Por ejemplo, si se toma $f(x) = \text{sen}(x)$ con condición inicial $x_o = 0$ se puede llegar a que $a = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_o=0} = 1$, resultando en:

$$\begin{aligned} \|f(x) - ax\|^2 &= \|\text{sen}(x) - x\|^2 \\ &\leq (\|\text{sen}(x)\| + \|x\|)^2 \\ &\leq \|\text{sen}(x)\|^2 + 2\|\text{sen}(x)\|^2 \|x\|^2 + 2\|x\|^2 \\ &\leq 2\|\text{sen}(x)\|^2 + 2\|x\|^2 \\ &\leq f_0 + f_1 \|x\|^2, \end{aligned}$$

donde $f_0 = 2$ y $f_1 = 2$. En la figura (2.1) se muestra la representación gráfica de las cotas resultantes para $f(x) = \text{sen}(x)$, mencionadas en (2.9).

A3) Las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son conocidas, de tal manera que los pares (C, A) y (A, B) satisfacen las condiciones de observabilidad y controlabilidad, respectivamente.

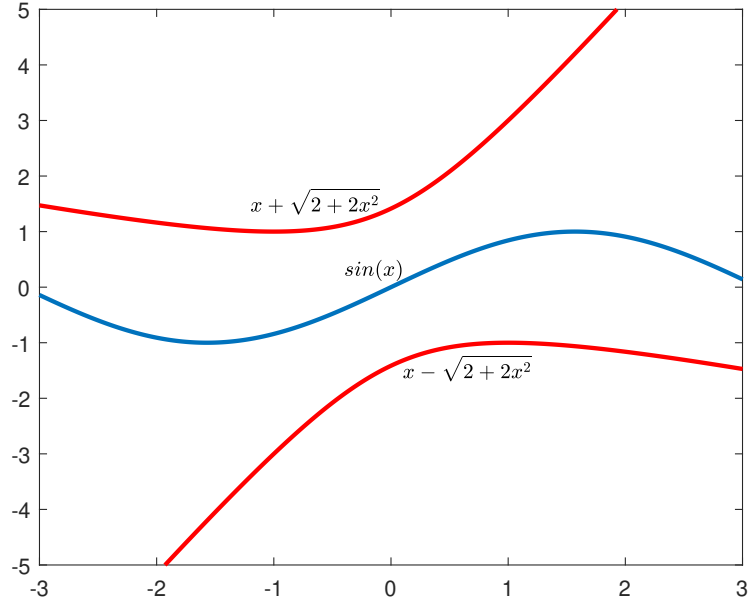


Figura 2.1: Cotas de $f(x) = \text{sen}(x)$.

2.3. Formato cuasi-lineal

Con el objetivo de analizar el modelo presentado en (2.2), sin perder las propiedades no lineales, se adopta el formato cuasi-lineal de un sistema

Definición 3. Defínase el sistema no lineal a tiempo discreto de la forma

$$x(k+1) = f(x(k), k) + Bu(k). \quad (2.10)$$

Si existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una función $g(x(k), k)$, que contiene una parte lineal y otra no lineal, tal que (2.10) se puede representar de la forma

$$x(k+1) = g(x(k), k) + Bu(k) \quad (2.11)$$

donde

$$g(x(k), k) = \underbrace{Ax(k)}_{\text{parte lineal}} + \underbrace{(f(x(k), k) - Ax(k))}_{\text{parte no lineal}},$$

entonces, a la representación (2.11) se le llama forma cuasi-lineal de (2.10).

Aplicando esta última definición a nuestro sistema, se puede ver claramente que la planta (2.2) tiene la representación cuasi-lineal:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1)x &= Ax(k) + Bu(k) + \hat{\xi}(k), \\ y(k) &= Cx(k) + \zeta(k), \\ \hat{\xi}(k) &:= \xi(k+1) + \tilde{\xi}(k), \\ \tilde{\xi}(k) &:= f(k, x(k)) - Ax(k), \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

aquí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Como se mencionó antes, $\xi(k+1)$ es un ruido externo clasificado como estocástico y satisface la condición A1. El término $\tilde{\xi}(k)$ caracteriza incertidumbres internas, que es \mathcal{F}_k medible y pertenece a la clase $C(A, f_0, f_1)$ de funciones cuasi-Lipschitz mencionada en la suposición A2. Tomando en cuenta las suposiciones anteriores, la incertidumbre $\hat{\xi}(k+1)$ se puede acotar como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \hat{\xi}^\top(k) \hat{\xi}(k) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \left(\xi(k+1) + \tilde{\xi}(k) \right)^\top \left(\xi(k+1) + \tilde{\xi}(k) \right) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \xi^\top(k+1)\xi(k) + 2\xi^\top(k+1)\tilde{\xi}(k) + \tilde{\xi}(k)^\top\tilde{\xi}(k) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \xi^\top(k+1)\xi(k+1) \mid \mathcal{F}_k \right\} + \mathbb{E} \left\{ 2\xi^\top(k+1)\tilde{\xi}(k) \mid \mathcal{F}_k \right\} + \mathbb{E} \left\{ \tilde{\xi}(k)^\top\tilde{\xi}(k) \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \text{tr} \left\{ \xi(k+1)\xi^\top(k+1) \right\} \mid \mathcal{F}_k \right\} + \mathbb{E} \left\{ \|f(x(k), k) - Ax(k)\|^2 \mid \mathcal{F}_k \right\} \\ &\stackrel{a.s.}{=} \text{tr} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \xi(k+1)\xi^\top(k+1) \mid \mathcal{F}_k \right\} \right\} + \|f(x(k), k) - Ax(k)\|^2 \\ &\stackrel{a.s.}{\leq} \text{tr} \left\{ \Sigma_x \right\} + f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Capítulo 3

Observación y control: planteamiento del problema

Estimar el estado actual de un sistema dinámico es crucial para construir un controlador o simplemente para obtener información en tiempo real sobre el sistema para la toma de decisiones. La forma más común de abordar este problema es colocar algunos sensores en el sistema físico y diseñar un algoritmo, conocido como observador, cuyo propósito es procesar la información incompleta e imperfecta proporcionada por los sensores para, por lo tanto, poder construir una estimación confiable de los estados del sistema. Por supuesto, la existencia de este algoritmo está condicionada a si las mediciones del sensor de alguna manera contienen suficiente información para reconstruir los estados del sistema de manera única, es decir, el sistema es observable.

Además de los estados disponibles a través de un observador, el proceso de toma de decisiones en un sistema, dígase lineal o no lineal, requiere de un controlador cuyo propósito es llevar al sistema a condiciones requeridas por los usuarios mediante una señal u que puede tener diversas formas. Al igual que con un observador, la existencia de una señal de control depende de la capacidad del sistema para ser controlador, a esto se le llama condición de controlabilidad del sistema.

Esta sección se centrará en el planteamiento de un observador que cumpla con las condiciones necesarias para la reconstrucción de los estados del sistema (2.2). Además, se abordará una propuesta de control por realimentación que coordinará en el proceso de toma de decisiones.

3.1. Observador por modos deslizantes

Un problema cuando se trata con sistemas no lineales y la reconstrucción de sus estados es la condición de observabilidad. Desde el momento en que se supone que la no lineal de un sistema, como (2.2), cumple con el pertenecer al tipo de funciones cuasi-Lipschitz $C(A, f_0, f_1)$ (2.7), se está haciendo que el peso de la observabilidad caiga sobre el par (C, A) . Esto último se menciona en la suposición A3 y esta restricción algebraica de observabilidad del par (C, A) es una condición necesaria y suficiente para la reconstrucción de los estados.

El observador por excelencia, utilizado en varios tipos de sistemas es el de Luenberger, que a pesar de ser robusto ante perturbaciones no compensa del todo las no linealidades de un sistema. Para compensar esto, y el hecho de que las perturbaciones externas son consideradas como estocásticas, se propone que al observador de Luenberger se le agregue un término más de tal manera que, la estructura propuesta del observador sea la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\sigma(k) + L_a \text{Sign}(\sigma(k)) \in \mathbb{R}^n, \\ \sigma(k) &= y(k) - C\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \right\}. \quad (3.1)$$

Este algoritmo de observación se denomina *Observador por Modos Deslizantes* (en inglés SMO-Sliding Mode Observer). El SMO tendrá como objetivo generar la estimación en línea $\{\hat{x}(k)\}_{k \geq 0}$ de los estados $\{x(k)\}_{k \geq 0}$ basado en el conocimiento de la salida $\{y(k)\}_{k \geq 0}$. Las matrices A , B y C son como en (2.2); en cuanto a L y L_a se tiene que $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $L_a \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Además de usar la realimentación del error de salida ($\sigma(k) = y(k) - C\hat{x}(k)$), el término adicional del SMO ($\text{Sign}(\sigma(k))$) incluye la realimentación del error de salida a través de una señal conmutada.

Comentario 5. La función signo $\text{Sign}(\sigma)$ está definida como

$$\text{Sign}(\sigma) := (\text{sign}(\sigma_1), \dots, \text{sign}(\sigma_m))^T, \quad (3.2)$$

cada término $\text{sign}(\sigma_i)$ satisfacen:

$$\text{sign}(\sigma_i) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_i > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma_i < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } \sigma_i = 0 \end{cases}. \quad (3.3)$$

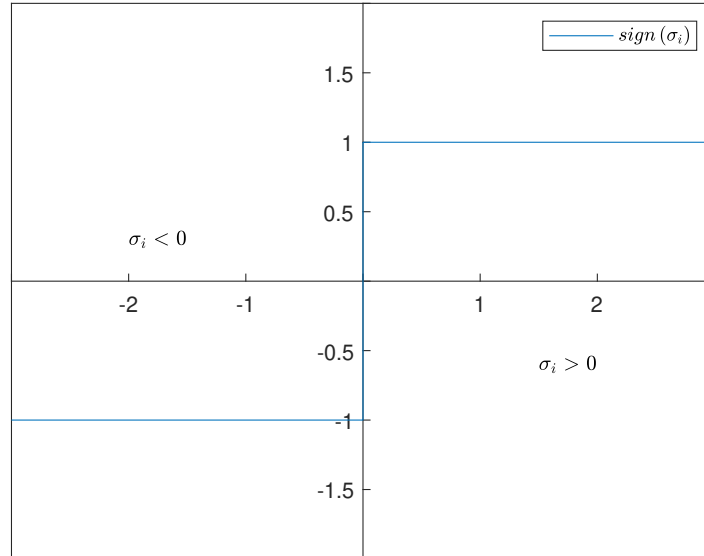


Figura 3.1: Función $\text{sign}(\sigma_i)$.

En la figura (3.1) se muestra la representación gráfica de la función signo.

3.2. Controlador

El objetivo principal de un control es ser un compensador dinámico que sea capaz de garantizar el seguimiento de una señal de referencia (con cualquier condición inicial) para el sistema en lazo cerrado a través de la realimentación de los estados o la salida, dependiendo de la disponibilidad de cada uno. El control propuesto en esta tesis realizará una comparación entre la señal de estimación y la deseada para aplicar una acción que influya en el sistema, minimizando la desviación entre la medición brindada por el sensor y la referencia.

La señal de referencia deberá tener la forma:

$$x^*(k) = \varphi(k, x^*(k-1)) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta la estructura de la dinámica deseada $x^*(k)$ en (3.4) y la estimación de

estados $\hat{x}(k)$ en (3.1) la propuesta sobre el algoritmo de control es la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} u(k) &:= K\hat{x}(k) + v(k), \\ v(k) &:= -Kx^*(k) + B^+\hat{\delta}(k) \\ \hat{\delta}(k) &:= \varphi(k+1, x^*(k)) - Ax^*(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{l \times n}$ es la ganancia de control, B^+ es la pseudoinversa de More-Penrose, esto significa que B^+ satisface las igualdades:

$$BB^+B = B, \quad B^+BB^+ = B^+. \quad (3.6)$$

3.3. Formulación del problema

A través de las propuestas del observador (3.1) y el controlador (3.5), estamos listos para abordar el problema general en esta tesis. Dicho problema puede ser planteado como se muestra a continuación.

Problema 1. Considérese el vector extendido

$$z(k) = \begin{pmatrix} \delta^\top(k) & e^\top(k) \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2n} \quad (3.7)$$

con los componentes internos definidos como

$$\delta(k) := x(k) - x^*(k), \quad e(k) := x(k) - \hat{x}(k), \quad (3.8)$$

donde $\delta(k) \in \mathbb{R}^n$ corresponde al error de seguimiento y $e(k) \in \mathbb{R}^n$ al error de estimación. Hallar las ganancias $K \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $L_a \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tales que el error cuadrático medio, ponderado por $E\{z^\top(k)P_z z(k)\}$, pertenezca asintóticamente al **elipsoide atractivo estocástico** que cumple la desigualdad

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E\{z^\top(k)P_z z(k)\} \leq 1 \quad (3.9)$$

para cualquier no linealidad admisible $f \in C(A, f_0, f_1)$.

Capítulo 4

Análisis de convergencia

Para hablar de convergencia en sistemas dinámicos es necesario definir la estabilidad y en este caso hablaremos de la estabilidad en el sentido de Lyapunov. De manera superficial, sabemos que un punto de equilibrio x_e es estable si las trayectorias que comienzan cerca de él se mantienen cerca del mismo punto para siempre. Más aún, el punto de equilibrio x_e es asintóticamente estable si, además de ser estable, las trayectorias de dicho sistema que inician en un punto inicial x_0 convergen a x_e . El análisis de convergencia presentado en este capítulo se basa en este último concepto de la teoría de Lyapunov solo que en vez de converger a un punto de equilibrio en sí, las trayectorias convergerán a una región llamada zona de atracción. Esta zona estará definida por una elipse denominada elipsoide atractiva [17].

Para poder obtener la zona de atracción de las trayectorias es necesario conocer de manera explícita el término $V(k+1)$. Para llegar a la expresión extendida de este término se requieren las dinámicas de los términos que intervienen en él, esto es la dinámica de los errores de observación y de control, definidos en (3.8).

■ Dinámica del error de seguimiento:

Para obtener la dinámica del término $\delta(k) := x(k) - x^*(k)$ (error de seguimiento) definido en (3.8) se contempla directamente la estructura de la dinámica deseada mencionada en (3.4) y

se sustituye el control propuesto en (3.5), resultando en:

$$\begin{aligned}
\delta(k+1) &= x(k+1) - x^*(k+1) \\
&= \left[Ax(k) + B \left(K\hat{x}(k) - Kx^*(k) + B^+\hat{\delta}(k) \right) + \hat{\xi}(k) \right] - \varphi(k+1, x^*(k)) \\
&= Ax(k) + BK(\hat{x}(k) - x^*(k)) + BB^+\hat{\delta}(k) + \hat{\xi}(k) - \left[\hat{\delta}(k) + Ax^*(k) \right] \\
&= A(x(k) - x^*(k)) + BK(\hat{x}(k) - x^*(k)) + \hat{\xi}(k) + (BB^+ - I_n)\hat{\delta}(k) \\
&= A\delta(k) + BK(\hat{x}(k) - x^*(k) + x(k) - x(k)) + \hat{\xi}(k) - (I_n - BB^+)\hat{\delta}(k) \\
&= (A + BK)\delta(k) - BKe(k) + \tilde{\xi}(k) - \hat{\delta}(k) \\
&= A\delta(k) + Bu(k) + \vartheta(k),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\vartheta(k) := \hat{\xi}(k) - \tilde{\delta}(k)$ y $\tilde{\delta}(k) := (I_n - BB^+)\hat{\delta}(k)$.

■ Dinámica del error de observación

Partiendo del término $e(k) := x(k) - \hat{x}(k)$, expresar la dinámica del error de observación $e(k+1)$ se reduce a sustituir la estructura de la planta en forma cuasi-Lineal (2.12) y la estructura del observador propuesto en (3.1).

$$\begin{aligned}
e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\
&= \left(Ax(k) + Bu(k) + \hat{\xi}(k+1) \right) - \left(A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\sigma(k) + L_a\text{Sign}(\sigma(k)) \right) \\
&= A(x(k) - \hat{x}(k)) - L(y(k) - C\hat{x}(k)) - L_a\text{Sign}(\sigma(k)) + \hat{\xi}(k) \\
&= Ae(k) - L(Cx(k) + \zeta(k) - C\hat{x}(k)) - L_a\text{Sign}(\sigma(k)) + \hat{\xi}(k) \\
&= (A - LC)e(k) - L_a\text{Sign}(\sigma(k)) + \hat{\xi}(k) - L\zeta(k) \\
&= (A - LC)e(k) - L_a\text{Sign}(\sigma(k)) + \omega(k)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $\omega(k) := \hat{\xi}(k) - L\zeta(k)$.

Los últimos resultados establecen claramente una relación, bajo ciertas consideraciones, entre el controlador, el observador de estados y el sistema propuesto en formato cuasi-lineal. Dichas relaciones pueden ser contempladas en una sola ecuación mediante el análisis de convergencia.

4.1. Convergencia

Como se mencionó antes, la metodología propuesta en este capítulo se basa esencialmente en el concepto de convergencia de Lyapunov. La propuesta del algoritmo de control se determina específicamente a través de este método, garantizando un tipo de estabilidad llama *estabilidad práctica*.

La estabilidad práctica garantiza que las trayectorias de un sistema dinámico estén limitadas dentro de una región invariante específica durante un intervalo de tiempo específico. En términos generales, se puede decir que un conjunto en el espacio de estados es invariante, para un sistema dinámico dado, si cada trayectoria iniciada en este conjunto permanece dentro del conjunto para todo tiempo mayor al inicial. Las cuestiones teóricas relacionadas con la construcción de dicho tipo de regiones se puede abordar a mediante el método de elipsoides atractivas. Como bien hace referencia su nombre, esta región se elige de manera geométrica con la forma de una elipsoide en el espacio de estados.

Basado en lo anterior, a continuación se establece la definición de un elipsoide atractivo robusto.

Definición 4. Sea la secuencia $\{r(k)\}_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^n$ una trayectoria, entonces $\{r(k)\}_{k \geq 0}$ pertenece al **Elipsoide Atractivo Robusto**,

$$\varepsilon(0, P_r) := \{r(k) \in \mathbb{R}^n : r^\top(k) P_r r(k) \leq 1\}. \quad (4.3)$$

La matriz generadora de la elipse es positiva definida, es decir, $P_r = P_r^\top > 0$, si para cualquier condición inicial de la planta (2.2) y una no linealidad admisible $f(k, x(k))$ se cumple la siguiente desigualdad

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \{r^\top(k) P_r r(k)\} \leq 1 \quad (4.4)$$

donde $E \{\cdot\}$ es la esperanza matemática.

El objetivo general aquí es asegurar que la estrategia de control por realimentación de estados observados hace que las trayectorias convergen global y asintóticamente a una elipsoide atractiva estocástica. Para demostrar que esto pasa se establece el siguiente teorema.

Teorema 1. Si las matrices P, K, L, L_a y los escalares α, λ, γ , se seleccionan de tal forma que

$$\tilde{W}(P, K, L, L_a | \alpha, \lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} 3\tilde{A}^\top P \tilde{A} + \tilde{\Lambda}_\delta - \alpha P & 0 & 0 \\ 0 & 2Q^\top P Q - \lambda I & Q^\top P \\ 0 & P Q & 2P - \gamma I \end{pmatrix} \leq 0, \quad (4.5)$$

con

$$\tilde{\Lambda}_\delta = \begin{bmatrix} 6\gamma f_1 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

entonces, para la función de energía

$$V(k) = z^\top(k) P z(k), \quad 0 < P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

se puede garantizar que

$$\mathbb{E}\{V(k+1)\} \leq \alpha \mathbb{E}\{V(k)\} + \tilde{\beta}_k(L). \quad (4.8)$$

donde

$$\tilde{\beta}_k(L) := \left. \begin{aligned} & m\lambda + \gamma \left(2\text{tr}\{\Sigma_x\} + 3f_0 + 6f_1 \|x_k^*\|^2 \right) + \\ & \gamma \left(2\|(I - BB^+)(Ax_k^* - \varphi(k+1, x_k^*))\|^2 + \text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Prueba.

a) La dinámica del vector extendido $z(k) \in \mathbb{R}^{2n}$ en (3.7), se obtiene al sustituir (4.2) y (4.1) para $z(k+1)$, es decir,

$$z(k+1) = \begin{pmatrix} \delta(k+1) \\ e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + BK)\delta(k) - BKe(k) + \vartheta(k) \\ (A - LC)e(k) - L_a \text{Sign}(\sigma(k)) + \omega(k) \end{pmatrix},$$

de tal manera que

$$z(k+1) = \tilde{A}(K, L)z(k) + Q(L_a)s(k) + \eta(k) \quad (4.10)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}(K, L) = \tilde{A} &= \begin{pmatrix} (A+BK) & -BK \\ 0_{n \times n} & (A-LC) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \\ Q(L_a) = Q &= \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & -L_a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times (n+m)}, \\ s(k) &= \begin{pmatrix} 0_n \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad \eta(k) = \begin{pmatrix} \vartheta(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Tomando en cuenta la relación obtenida para $z(k+1)$ se puede determinar la dinámica para la función $V(k)$, esto es:

$$\begin{aligned} V(k+1) &= z^\top(k+1)Pz(k+1) \\ &= (\tilde{A}z(k) + Qs(k) + \eta(k))^\top P(\tilde{A}z(k) + Qs(k) + \eta(k)) \\ &= z^\top(k)\tilde{A}^\top P\tilde{A}z(k) + 2z^\top(k)\tilde{A}^\top PQs(k) + 2z^\top(k)\tilde{A}^\top P\eta(k) + \\ &\quad s^\top(k)Q^\top PQs(k) + 2s^\top(k)Q^\top P\eta(k) + \eta^\top(k)P\eta(k) \end{aligned}$$

que se puede expresar en forma cuadrática como:

$$V(k+1) = \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \tilde{A}^\top P\tilde{A} & \tilde{A}^\top PQ & \tilde{A}^\top P \\ Q^\top P\tilde{A} & Q^\top PQ & Q^\top P \\ P\tilde{A}^\top & PQ & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Considerando que se cumple

$$2N^\top M \leq N^\top N + M^\top M,$$

y aplicando esto a los términos $2z^\top(k)\tilde{A}^\top PQs(k)$ y $2z^\top(k)\tilde{A}^\top P\eta(k)$, se tiene:

$$\begin{aligned} 2z^\top(k)\tilde{A}^\top PQs(k) &\leq z^\top(k)\tilde{A}^\top P\tilde{A}z(k) + s^\top(k)Q^\top PQs(k), \\ 2z^\top(k)\tilde{A}^\top P\eta(k) &\leq z^\top(k)\tilde{A}^\top P\tilde{A}z(k) + \eta^\top(k)P\eta(k). \end{aligned}$$

Utilizando estas últimas desigualdades, además de sumar y restar los términos $\alpha z^\top(k)Pz(k)$, $\lambda \|s(k)\|^2$,

y $\gamma\|\eta(k)\|^2$, en (4.12) se puede acotar por arriba $V(k+1)$ tal que:

$$V(k+1) \leq \left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}^\top W \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix} \\ & + \alpha z^\top(k) P z(k) + \lambda \|s(k)\|^2 + \gamma \|\eta(k)\|^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

donde

$$W(P, K, L, L_a | \alpha, \lambda, \gamma) := \begin{pmatrix} 3\tilde{A}^\top P \tilde{A} - \alpha P & 0 & 0 \\ 0 & 2Q^\top P Q - \lambda I & Q^\top P \\ 0 & P Q & 2R^\top P R - \gamma I \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Ahora, si se toma la esperanza matemática condicional $E\{\cdot | \mathcal{F}_k\}$ en ambos lados de (4.13) resulta la siguiente expresión:

$$E\{V(k+1) | \mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{\leq} E \left\{ \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}^\top W \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix} \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \alpha V(k) + \lambda \|s(k)\|^2 + \gamma E\{\|\eta(k)\|^2 | \mathcal{F}_k\}. \quad (4.15)$$

Centrándose en la desigualdad (4.15) se pueden notar, de momento, dos expresiones de interés, una cuyo acotamiento resulta evidente ($\|s(k)\|^2$) y otra que no lo es tanto ($E\{\|\eta(k)\|^2 | \mathcal{F}_k\}$).

1. Cota de $\|s(k)\|^2$

Partiendo de la definición de este término, proporcionada en (4.11)

$$\begin{aligned} \|s(k)\|^2 &= \begin{pmatrix} 0_n \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0_n \\ \text{Sign}(\sigma(k)) \end{pmatrix} \\ &= \|\text{Sign}(\sigma(k))\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^m \text{sign}^2(\sigma_i) \end{aligned}$$

Debido a que, sin importar el valor de σ_i , la imagen de $\text{sign}(\sigma_i) \forall 1 \leq i \leq m$ se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, cada termino $\text{sign}(\sigma_i)$ tiene como cota superior al 1, es

decir,

$$\|s(k)\|^2 \leq \sum_{i=0}^m 1 = m. \quad (4.16)$$

2. Cota de $E\{\|\eta(k)\|^2 | \mathcal{F}_k\}$.

Expandiendo este término, utilizando su definición (4.11), se llega a la representación:

$$\begin{aligned} E\{\eta^\top(k)\eta(k) | \mathcal{F}_k\} &= E\left\{\begin{pmatrix} \vartheta(k) \\ \omega(k, k+1) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \vartheta(k) \\ \omega(k, k+1) \end{pmatrix} | \mathcal{F}_k\right\} \\ &= E\{\vartheta^\top(k)\vartheta(k) | \mathcal{F}_k\} + E\{\omega^\top(k)\omega(k) | \mathcal{F}_k\}. \end{aligned}$$

Desarrollando las multiplicaciones internas se tiene:

$$\begin{aligned} \vartheta^\top(k)\vartheta(k) &= (\hat{\xi}(k) - \tilde{\delta}(k))^\top (\hat{\xi}(k) - \tilde{\delta}(k)) \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\hat{\xi}^\top(k)\tilde{\delta}(k) + \|\tilde{\delta}(k)\|^2 \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2(\xi(k+1) + \tilde{\xi}(k))^\top \tilde{\delta}(k) + \|\tilde{\delta}(k)\|^2 \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\xi^\top(k+1)\tilde{\delta}(k) - 2\tilde{\xi}^\top(k)\tilde{\delta}(k) + \|\tilde{\delta}(k)\|^2 \\ &\leq \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\xi^\top(k+1)\tilde{\delta}(k) + \left(\|\tilde{\xi}(k)\|^2 + \|\tilde{\delta}(k)\|^2\right) + \|\tilde{\delta}(k)\|^2 \\ &\leq \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\xi^\top(k+1)\tilde{\delta}(k) + \|\tilde{\xi}(k)\|^2 + 2\|\tilde{\delta}(k)\|^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \omega(k)^\top \omega(k) &= (\hat{\xi}(k) - L\zeta(k))^\top (\hat{\xi}(k) - L\zeta(k)) \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\hat{\xi}^\top(k)L\zeta(k) + \|L\zeta(k)\|^2 \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2(\xi(k+1) + \tilde{\xi}(k))^\top L\zeta(k) + \zeta^\top(k)L^\top L\zeta(k) \\ &= \|\hat{\xi}(k)\|^2 - 2\xi^\top(k+1)L\zeta(k) - 2\tilde{\xi}^\top(k)L\zeta(k) + \text{tr}\{L\zeta(k)\zeta^\top(k)L^\top\}. \end{aligned}$$

Nótese que no se desarrolló el término $\hat{\xi}(k)$, el motivo es que en (2.13) se presentó una cota

superior de este mismo. Las últimas dos desigualdades implican que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \{ \boldsymbol{\eta}^\top(k) \boldsymbol{\eta}(k) | \mathcal{F}_k \} &\stackrel{a.s.}{=} \mathbf{E} \{ \boldsymbol{\vartheta}(k)^\top \boldsymbol{\vartheta}(k) | \mathcal{F}_k \} + \mathbf{E} \{ \boldsymbol{\omega}(k)^\top \boldsymbol{\omega}(k) | \mathcal{F}_k \} \\
&\stackrel{a.s.}{\leq} \mathbf{E} \left\{ \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 - 2 \boldsymbol{\xi}^\top(k+1) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) + \left\| \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 + 2 \left\| \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad + \mathbf{E} \left\{ \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 - 2 \boldsymbol{\xi}^\top(k+1) L \boldsymbol{\zeta}(k) - 2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top(k) L \boldsymbol{\zeta}(k) + \right. \\
&\quad \left. \text{tr} \{ L \boldsymbol{\zeta}(k) \boldsymbol{\zeta}^\top(k) L^\top \} \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\stackrel{a.s.}{=} 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} - 2 \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\xi}^\top(k+1) \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad - 2 \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\xi}^\top(k+1) L \boldsymbol{\zeta}(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} - 2 \mathbf{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top(k) L \boldsymbol{\zeta}(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad + 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \mathbf{E} \left\{ \text{tr} \{ L \boldsymbol{\zeta}(k) \boldsymbol{\zeta}^\top(k) L^\top \} \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\stackrel{a.s.}{=} 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \mathbf{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^\top(k) \boldsymbol{\xi}(k+1) \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad - 2 \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \xi_i L_{ij} \zeta_j \middle| \mathcal{F}_k \right\} - 2 \mathbf{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top(k) L \boldsymbol{\zeta}(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad + 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \text{tr} \left\{ L \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\zeta}(k) \boldsymbol{\zeta}^\top(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} L^\top \right\} \\
&\stackrel{a.s.}{=} 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \hat{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} - 2 \tilde{\boldsymbol{\delta}}^\top(k) \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\xi}(k+1) \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\xi}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad - 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \left(L_{ij} \mathbf{E} \left\{ \xi_i \zeta_j \middle| \mathcal{F}_k \right\} \right) - 2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}^\top(k) L \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\zeta}(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} \\
&\quad + 2 \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{\boldsymbol{\delta}}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \text{tr} \left\{ L \mathbf{E} \left\{ \boldsymbol{\zeta}(k) \boldsymbol{\zeta}^\top(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} L^\top \right\},
\end{aligned}$$

donde L_{ij} es el elemento que se encuentra en la posición (i, j) de la matriz L . Tomando en

cuenta las suposiciones (A1), (A2) y el resultado (2.13), se cumple:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{\xi}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} &= \left\| \tilde{\xi}(k) \right\|^2, \\
\mathbb{E} \left\{ \left\| \tilde{\delta}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} &= \left\| \tilde{\delta}(k) \right\|^2, \\
\mathbb{E} \left\{ \left\| \hat{\xi}(k) \right\|^2 \middle| \mathcal{F}_k \right\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \text{tr} \{ \Sigma_x \} + f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \\
\tilde{\delta}^\top(k) \mathbb{E} \left\{ \xi(k+1) \middle| \mathcal{F}_k \right\} &\stackrel{a.s.}{=} 0_n, \\
\tilde{\xi}^\top(k) L \mathbb{E} \left\{ \zeta(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} &\stackrel{a.s.}{=} 0_m, \\
\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \left(L_{ij} \mathbb{E} \left\{ \xi_i \zeta_j \middle| \mathcal{F}_k \right\} \right) &\stackrel{a.s.}{=} 0, \\
\text{tr} \left\{ L \mathbb{E} \left\{ \zeta(k) \zeta^\top(k) \middle| \mathcal{F}_k \right\} L^\top \right\} &\stackrel{a.s.}{\leq} \text{tr} \left\{ L \Sigma_y L^\top \right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ \eta^\top(k) \eta(k) | \mathcal{F}_k \} &\stackrel{a.s.}{\leq} 2 \left(\text{tr} \{ \Sigma_x \} + f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \right) + \left\| \tilde{\xi}(k) \right\|^2 + 2 \left\| \tilde{\delta}(k) \right\|^2 + \text{tr} \left\{ L \Sigma_y L^\top \right\} \\
&\stackrel{a.s.}{\leq} 2 \text{tr} \{ \Sigma_x \} + 3 \left(f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \right) + 2 \left\| \tilde{\delta}(k) \right\|^2 + \text{tr} \left\{ L \Sigma_y L^\top \right\}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Gracias a las relaciones (4.16) y (4.17), una cota superior de $V(k+1)$, en (4.15), puede expresarse como sigue:

$$\mathbb{E} \{ V(k+1) | \mathcal{F}_k \} \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E} \left\{ \left(\begin{array}{c} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{array} \right)^\top W \left(\begin{array}{c} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{array} \right) \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \alpha \mathbb{E} \{ V(k) | \mathcal{F}_k \} + \beta_k(L), \tag{4.18}$$

donde

$$\beta_k(L) := m\lambda + \gamma \left(2 \text{tr} \{ \Sigma_x \} + 3 \left(f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \right) + 2 \left\| \tilde{\delta}(k) \right\|^2 + \text{tr} \left\{ L \Sigma_y L^\top \right\} \right).$$

Ahora, partiendo de la definición del error de seguimiento de trayectoria $\delta(k)$ en (3.8) se puede

establecer la equivalencia $x(k) = \delta(k) + x^*(k)$, esto último implica que:

$$\begin{aligned}\|x(k)\|^2 &= \|\delta(k) + x^*(k)\|^2 \\ &\leq 2\|\delta(k)\|^2 + 2\|x^*(k)\|^2.\end{aligned}$$

De esta forma, el componente $\beta_k(L)$ se puede limitar superiormente de tal manera que:

$$\begin{aligned}\beta_k(L) &\leq m\lambda + \gamma \left(2\text{tr}\{\Sigma_x\} + 3 \left(f_0 + f_1 \left(2\|\delta(k)\|^2 + 2\|x^*(k)\|^2 \right) \right) + 2\|\tilde{\delta}(k)\|^2 + \text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\} \right) \\ &= m\lambda + \gamma \left(2\text{tr}\{\Sigma_x\} + 3 \left(f_0 + 2f_1\|x^*(k)\|^2 \right) + 2\|\tilde{\delta}(k)\|^2 + \text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\} \right) + 6\gamma f_1\|\delta(k)\|^2 \\ &= \tilde{\beta}_k(L) + 6\gamma f_1\|\delta(k)\|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, el factor $6\gamma f_1\|\delta(k)\|^2$ puede incluirse en la forma cuadrática de W , en (4.18), a través de la representación:

$$\begin{aligned}6\gamma f_1\|\delta(k)\|^2 &= 6\gamma f_1 \delta^\top(k) \delta(k) \\ &= 6\gamma f_1 \begin{pmatrix} \delta^\top(k) & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(k) \\ 0_n \end{pmatrix} \\ &= 6\gamma f_1 \begin{pmatrix} \delta^\top(k) & e^\top(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(k) \\ e(k) \end{pmatrix} \\ &= 6\gamma f_1 \tilde{\Lambda}_\delta.\end{aligned}$$

Llevando (4.18) a la forma

$$\mathbb{E}\{V(k+1)|\mathcal{F}_k\} \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}\left\{ \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix}^\top \tilde{W} \begin{pmatrix} z(k) \\ s(k) \\ \eta(k) \end{pmatrix} \middle| \mathcal{F}_k \right\} + \alpha \mathbb{E}\{V(k)|\mathcal{F}_k\} + \tilde{\beta}_k(L). \quad (4.19)$$

Si se eligen las matrices P, K, L, L_a y los escalares $\alpha, \beta, \gamma, P, K, L, L_a$ de tal manera que $\tilde{W} \leq 0$, resulta:

$$\mathbb{E}\{V(k+1)|\mathcal{F}_k\} \leq \alpha \mathbb{E}\{V(k)|\mathcal{F}_k\} + \tilde{\beta}_k(L). \quad (4.20)$$

Y, finalmente, al aplicar la esperanza matemática en ambos lados de (4.20) claramente se obtie-

ne (4.8).

□

Hasta el momento solo se ha probado la convergencia de las trayectorias de errores a una zona específica. Sin embargo, aún existen dos problemas importantes. Uno es que la zona de convergencia no puede considerarse completamente invariante debido a que depende de L a través del término $\text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\}$. Otro es que no se sabe cómo obtener o calcular dicha zona de forma analítica. Ambos problemas serán atendidos en la siguiente sección mediante un límite.

4.2. Representación analítica del elipsoide atractivo

Como ya se mencionó, $\tilde{\beta}_k$ depende de un término que enlazado estrictamente al observador a través de la matriz L . Se puede ver aquí una oportunidad para restringir las condiciones para hallar L , haciendo con esto que la zona de convergencia dependa solo de constantes fijas que se pueden manipular a voluntad. Una forma de hacer esto es proponer una constante θ como cota superior de $\text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\}$, nótese que, en este sentido, $\theta > 0$. La forma de expresar esta restricción es:

$$\text{tr}\{L\Sigma_y L^\top\} \leq \theta,$$

que, de manera equivalente, puede enunciarse como:

$$\text{tr}\left\{\frac{\theta}{n}I_{n \times n} - L\Sigma_y L^\top\right\} \geq 0. \quad (4.21)$$

Bajo la suposición anterior se puede notar que:

$$\tilde{\beta}_k(L) \leq \psi(\lambda, \gamma, \theta)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi(\lambda, \gamma, \theta) &:= m\lambda + \gamma(2\text{tr}\{\Sigma_x\} + 3f_0 + 6f_1 X_+^* + 2\Delta_+^* + \theta), \\ \|x_k^*\|^2 &\leq X_+^*, \text{ y } \|\tilde{\delta}_k\|^2 \leq \Delta_+^*. \end{aligned}$$

Comentario 6. Teniendo en cuenta que $\tilde{\beta}_k(L) \leq \psi(\lambda, \gamma, \theta)$ se puede notar que (4.8) tiene una nueva

cota, definida como:

$$E\{V(k+1)\} \leq \alpha E\{V(k)\} + \psi(\lambda, \gamma, \theta). \quad (4.22)$$

Con la introducción de θ se ha logrado obtener una cota que depende de elementos manipulables es su totalidad y a partir de aquí es posible obtener una representación analítica de la zona de convergencia. Para esto mismo se introduce el siguiente teorema.

Teorema 2. Si existen las constantes $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $\theta > 0$ y $|\alpha| < 1$, tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} \leq \pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha), \quad (4.23)$$

donde

$$\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha) := \frac{\psi(\lambda, \gamma, \theta)}{1 - \alpha}, \quad (4.24)$$

entonces, la zona de atracción invariante de las trayectorias del error P_z tiene la forma analítica

$$P_z := \frac{1}{\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha)} P \quad (4.25)$$

Prueba.

Por el Teorema 1, se sabe que $E\{V(k)\}$ es prácticamente asintóticamente estable. Esto significa que $E\{V(k)\}$ converge a una zona relativamente pequeña centrada en el origen. Por lo tanto, no es erróneo asegurar que cuando $k \rightarrow \infty$ se cumple que $E\{V(k)\} \rightarrow E\{V(k+1)\}$, es decir, que $E\{V(k+1)\}$ es prácticamente igual que $E\{V(k)\}$. Entonces, al aplicar el $\limsup_{k \rightarrow \infty}$ en ambos lados de (4.22), se obtiene:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k+1)\} &\leq \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} + \psi(\lambda, \gamma, \theta) \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k+1)\} - \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} &\leq \psi(\lambda, \gamma, \theta) \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} - \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} &\leq \psi(\lambda, \gamma, \theta) \\ (1 - \alpha) \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V(k)\} &\leq \psi(\lambda, \gamma, \theta) \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} E\{V_k\} &\leq \pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha) \end{aligned}$$

Partiendo de la última desigualdad, y sabiendo que $V(k) = z(k)^\top P z(k)$, se tiene:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \{V_k\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} E \{z_k^\top P z_k\} \leq \pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha).$$

que es análogo a:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E \left\{ z(k)^\top \left(\frac{1}{\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha)} P \right) z(k) \right\} \leq 1.$$

donde, de acuerdo con la definición (3.9),

$$\frac{1}{\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha)} P = P_z$$

es la representación analítica del elipsoide atractivo estocástico.

□

Capítulo 5

Selección de las ganancias matriciales óptimas

Tomando en cuenta (4.4), es claro que si queremos minimizar los errores e_k y δ_{k+1} se necesita maximizar

$$P_z = \frac{1}{\pi(\psi(\beta, \gamma, \theta), \alpha)} P = \frac{1 - \alpha}{\psi(\beta, \gamma, \theta)} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

con respecto a las matrices L_a, L, K y los parámetros escalares α, λ, γ . Con esto en mente, es válido preguntar ¿Cómo es que tiene sentido maximizar esta expresión?

Para que tenga sentido el hecho de realizar una optimización, dígame maximizar o minimizar, es necesario definir sobre qué función se está realizando dicha optimización. En este caso, dicha función, se toma como la suma de los autovalores de una matriz, dicha suma se puede expresar a través del operador lineal traza ($\text{tr}\{\cdot\}$), la prueba de esta aclaración se puede ver en ([19]).

5.1. La traza como función de optimización

A pesar de haber varias opciones, se escoge la traza debido a que tiene propiedades variadas que son muy útiles desde el punto de vista de esta tesis. En álgebra lineal, el operador de traza $\text{tr}\{\cdot\}$ se define sólo para matrices cuadradas, es decir, cuya dimensión es, por ejemplo, $n \times n$. Habiendo dicho esto último, una definición formal de este operador sería la siguiente.

Definición 5. Sea A una matriz en $\mathbb{R}^{n \times n}$. La traza $\text{tr}\{\cdot\}$ de A es:

$$\text{tr}\{A\} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

donde a_{ii} representa todos los elementos en la diagonal principal de la matriz A .

Geoméricamente, por ejemplo en \mathbb{R}^3 , la traza una matriz A se puede interpretar como el cambio infinitesimal de volumen del paralelepípedo formado por los vectores columna de A (idénticamente a la derivada del determinante), esto se puede ver claramente mediante la fórmula de Jacobi. Desde este punto de vista, la función $\text{tr}\{\cdot\}$ puede usarse como una función de optimización.

Comentario 7. Recuerde que si se tiene una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y esta matriz cumple con $A \in C^1$, es decir, es un mapeo diferenciable, la fórmula de Jacobi es:

$$\frac{d}{dt} \det(A) = \text{tr} \left\{ \text{adj}(A) \frac{dA}{dt} \right\}$$

donde $\text{adj}(A)$ es la adjunta de A .

5.2. Optimización matricial

Teniendo claro el argumento a optimizar, y habiendo elegido la función que ayudará con esto, se puede empezar a plantear el procedimiento para encontrar las ganancias óptimas que rigen el observador y el controlador, además de, con esto mismo encontrar el elipsoide atractivo estocástico.

Problema 2. Encontrar las ganancias óptimas L_a^* , L^* , K^* , α^* , λ^* y γ^* , tales que sean solución del problema de optimización

$$\text{tr} \left\{ \frac{1 - \alpha}{\Psi(\lambda, \gamma, \theta)} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \sup_{P_1 > 0, P_2 > 0, L_a, L, K; \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0} \quad (5.1)$$

bajo las restricciones

$$\begin{aligned} \tilde{W}(P, K, L, L_a | \alpha, \lambda, \gamma) &\leq 0, \\ \text{tr} \left\{ \frac{\theta}{n} I_{n \times n} - L \Sigma_y L^T \right\} &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Como se puede notar, las restricciones matriciales del problema de optimización (5.2) son BMI. Esto dificulta la solución del problema a mediante algoritmos computacionales como el SeDuMi y YALMIP (desarrollados para MATLAB) ya que se obtienen resultados más confiables para LMI. La transformación de las restricciones de BMI a LMI se puede llevar a acabo utilizando una herramienta de gran utilidad en estos procedimientos. Esta herramienta es el complemento de Schur, también conocida como Lema de Schur. La idea detrás del complemento de Schur es expresar una matriz M definida a bloques, que es positiva $M \geq 0$, en una desigualdad matricial que incluya sus bloques. A continuación se presenta una definición formal de este lema.

Lema 1. *Defínase la matriz simétrica $M = M^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ particionada en submatrices $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $D = D^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tales que:*

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Si $M > 0$ y A (D) es no singular, entonces la siguiente desigualdad se mantiene:

$$D - B^T A^{-1} B > 0 \quad (A - B D^{-1} B^T > 0). \quad (5.4)$$

El siguiente teorema ilustra el procedimiento de transformación de las restricciones ayudándose del planteamiento de un conjunto de cambio de variable.

Teorema 3. *Las matrices L_a^* , L^* , K^* y los escalares α^* , λ^* , γ^* , óptimos, que son la solución del problema de optimización (5.1) bajo las restricciones (5.2), se definen mediante las igualdades:*

$$\begin{aligned} X_1^* &= P_1^*, \quad X_2^* = P_2^*, \quad K = G^*, \\ L^* &= (X_2^*)^{-1} Y_1^*, \quad L_a^* = (X_2^*)^{-1} Y_2^*, \end{aligned}$$

donde $X_1^, X_2^*, Y_1^*, Y_2^*$ and $\alpha^*, \lambda^*, \gamma^*, \theta^*$ son soluciones del problema de optimización:*

$$\text{tr} \left\{ \frac{1 - \alpha}{\Psi(\lambda, \gamma, \theta)} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{aligned} &\sup \\ &X_1 > 0, X_2 > 0, Y_1, Y_2, G; \\ &\alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

sujeto a las restricciones:

$$\tilde{W}^+ := \begin{pmatrix} -Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2^\top \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 \end{bmatrix} & 2X - \gamma I \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$W_{Q_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\alpha X - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) & \begin{bmatrix} (A + BG)^\top & 0 \\ -G^\top B^\top & A^\top X_2 - C^\top Y_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (A + BK) & -BG \\ 0 & X_2 A - Y_1 C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} I & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (5.6)$$

$$W_{Q_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda I - Q_2) & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_2^\top \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$W_\theta = \begin{bmatrix} \theta & \frac{\gamma}{2} Y_1 \\ \frac{\gamma}{2} Y_1^\top & \Sigma_y^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Prueba. Tómesese el cambio de variable (*c.v.*)

$$X_1 = P_1, X_2 = P_2, X = P, K = G, Y_1 = P_2 L, Y_2 = P_2 L_a, \quad (5.7)$$

donde $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$. La prueba se lleva a cabo realizando los siguientes pasos. En adelante, se utiliza el término *c.v.* en los símbolos de igualdad (o desigualdad) para indicar que se realizó el cambio de variable mencionado en (5.7).

Paso 1. Defínanse las matrices $Q_1 > 0$ y $Q_2 > 0$ que satisfacen las desigualdades:

$$\begin{aligned} 3\tilde{A}^\top(K, L)P\tilde{A}(K, L) + \tilde{\Lambda}_\delta - \alpha P &\leq -Q_1 \leq 0, \\ 2Q^\top(L_a)PQ(L_a) - \lambda I &\leq -Q_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sustituyendo estas cotas en (4.5), se tiene:

$$\begin{aligned} \tilde{W} \leq \tilde{W}^+ &:= \begin{pmatrix} -Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & Q^\top(L_a)P \\ 0 & PQ(L_a) & 2P - \gamma I \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{c.v.}}{=} \begin{pmatrix} -Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2^\top \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 \end{bmatrix} & 2X - \gamma I \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Paso 2. Nótese que la desigualdad:

$$3\tilde{A}^\top(K, L)P\tilde{A}(K, L) + \tilde{\Lambda}_\delta - \alpha P \leq -Q_1 \leq 0,$$

satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{3}(\alpha P - Q_1 - \tilde{\Lambda}_\delta) - \tilde{A}^\top(K, L)PP^{-1}P\tilde{A}(K, L) \\ &= \frac{1}{3}(\alpha P - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) - \tilde{A}^\top \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tilde{A} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha P - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) - \tilde{A}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tilde{A}, \end{aligned}$$

que al aplicar el complemento de Schur resulta en:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha P - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) & \tilde{A}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tilde{A} & \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (5.10)$$

Si se considera la desigualdad $2X - \gamma I < 0$ de (5.9), es decir:

$$X \leq \frac{\gamma}{2}I \iff X^{-1} \geq \frac{2}{\gamma}I > 0,$$

se puede notar la relación:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha P - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) & \tilde{A}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tilde{A} & \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \stackrel{c.v.}{\geq} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\alpha X - \tilde{\Lambda}_\delta - Q_1) & \tilde{A}^\top \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \tilde{A} & \begin{bmatrix} \frac{2}{\gamma}I & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{W_{Q_1}} \geq 0.$$

A su vez, la desigualdad $2Q^\top(L_a)PQ(L_a) - \lambda I \leq -Q_2 \leq 0$ puede expresarse como:

$$0 \leq \frac{1}{2}(\lambda I - Q_2) - Q^\top(L_a)PQ(L_a)$$

que, al aplicar el complemento de Schur y aplicando (5.7), resulta directamente en $W_{Q_2} \geq 0$.

Paso 3. Usando el cambio de variable (5.7) para la condición (4.21) resulta:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ \frac{\theta}{n} I_{n \times n} - L \Sigma_y L^\top \right\} &\stackrel{c.v.}{=} \text{tr} \left\{ \frac{\theta}{n} I_{n \times n} - Y_1 X_2^{-1} \Sigma_y X_2^{-1} Y_1^\top \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \frac{\theta}{n} I_{n \times n} - \left(\frac{\gamma}{2} Y_1 \right) \Sigma_y \left(\frac{\gamma}{2} Y_1 \right)^\top \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

y al usar el complemento de Schur en esta expresión se obtiene:

$$W_{\theta} = \begin{bmatrix} \theta & \frac{\gamma}{2} Y_1 \\ \frac{\gamma}{2} Y_1^T & \Sigma_y^{-1} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Step 4. Finalmente, el problema de optimización:

$$\text{tr} \left\{ \frac{1 - \alpha}{\Psi(\beta, \gamma, \theta)} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \sup_{\substack{P_1 > 0, P_2 > 0, L_a, L, K; \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0}}$$

puede ser cambiado, al usar el cambio de variable (5.7), por:

$$\text{tr} \left\{ \frac{1 - \alpha}{\Psi(\beta, \gamma, \theta)} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \sup_{\substack{X_1 > 0, X_2 > 0, Y_1, Y_2, G; \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0}}.$$

□

5.3. Algoritmo de optimización

Definidos y resueltos los problemas de este capítulo solo resta proponer un algoritmo de optimización que combine todas estas nociones.

1. Encontrar valores iniciales $1 > \alpha_o > 0$, $\beta_o > 0$, $\gamma_o > 0$, y $\theta_o > 0$ para los escalares α, β, γ , y θ , tales que el problema (5.5), sujeto a (5.6), tenga solución.
2. Defínase un contador $q = 1$
3. Mientras exista una solución de (5.5) sujeto a (5.6)
 - a) Aumentar α y disminuir β, γ y θ tales que se cumpla $1 > \alpha_q > \alpha_{q-1}$, $\beta_q < \beta_{q-1}$, $\gamma_q < \gamma_{q-1}$, y $\theta_q < \theta_{q-1}$ (esto para lograr que $\pi(\Psi(\beta, \gamma, \theta), \alpha)$ disminuya). Con los nuevos valores, buscar solución de (5.5) sujeto a (5.6)

b) Si la solución obtenida (5.5) sujeto a (5.6) existe, entonces almacénala y continúe el ciclo. Si la solución no existe rompa el ciclo y recupere la solución del paso anterior.

Cuando el ciclo del paso 3 se rompa por la condición del inciso *b)* se tendrán α^* , β^* , γ^* y θ^* dando paso a las ganancias matriciales óptimas

$$X_1^* = P_1^*, X_2^* = P_2^*, K = G^*, L^* = (X_2^*)^{-1} Y_1^*, L_a^* = (X_2^*)^{-1} Y_2^*,$$

Capítulo 6

Ejemplos numéricos

6.1. Ejemplo 1: Sistema Lineal

Considere el modelo gobernado por la dinámica:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \xi(k+1), \\ y(k) &= Cx + \zeta(k), \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando $\Xi_x = 0.01I_{2 \times 2}$ y $\Xi_y = 0.01$ las matrices de covarianza de los ruidos estocásticos $\xi(k+1)$ y $\zeta(k)$, respectivamente, se requiere encontrar el controlador basado en observación (3.1)-(3.5) que permita el seguimiento de la trayectoria

$$x^*(k) = \begin{bmatrix} C_1^* \sin(k + \frac{\pi}{2}) \\ C_2^* \sin(k + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix},$$

donde $C_1^* = 1.5$ y $C_2^* = 0.5$.

Primero, nótese que el sistema (6.1) es (A, B) -controlable y (C, A) -observable. Además, para la

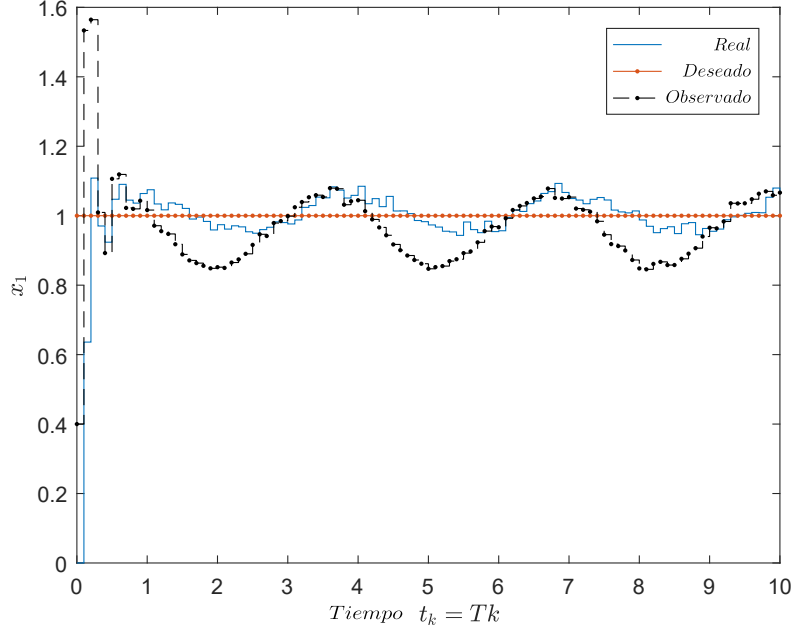


Figura 6.1: Comportamiento de estado x_1 .

trayectoria a seguir es fácil ver que:

$$\|x_k^*\|^2 \leq x_+^* = 2.5, \quad \|\tilde{\delta}_k\|^2 \leq \tilde{\delta}_+ = 0,$$

y, para el formato cuasi-lineal, $f_0 = f_1 = 0$. Con estos datos se procede a aplicar el proceso de optimización (5.5), que resulta en:

$$\alpha^* = 0.1, \beta^* = 0.1, \gamma^* = 0.1, \theta^* = 0.01,$$

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 4.489 & 0.1349 \\ 0.1349 & 4.8975 \end{bmatrix}, X_2^* = \begin{bmatrix} 3.9432 & -0.0404 \\ -0.0404 & 0.0738 \end{bmatrix},$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -4.5492 & -0.496 \\ 0 & -2.4607 \end{bmatrix}, L^* = \begin{bmatrix} 0.91 \\ 0.0016 \end{bmatrix}, L_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.001 \end{bmatrix}.$$

En las figuras (6.1) y (6.2), se muestra el comportamiento de los estados. La convergencia de los errores hacia los elipsoides atractivos se presenta en las figuras (6.3) y (6.4).

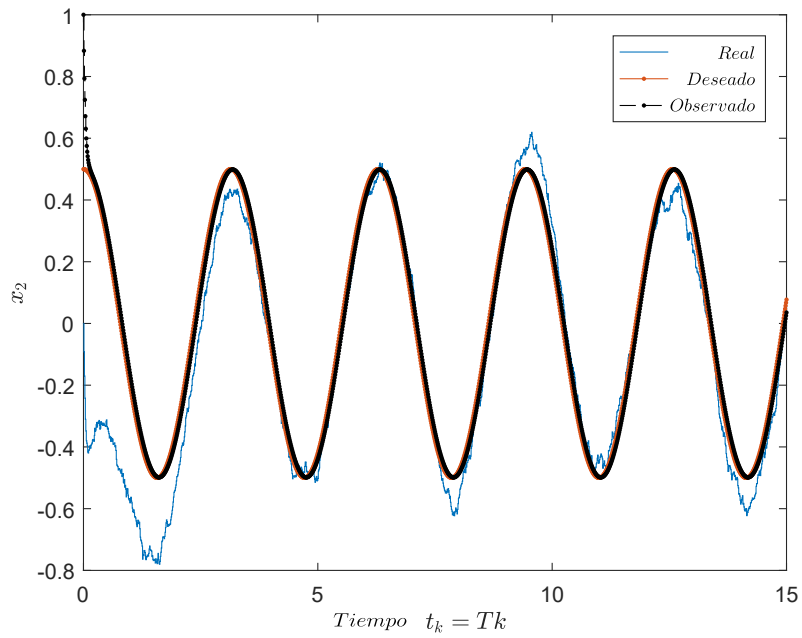


Figura 6.2: Comportamiento de estado x_2 .

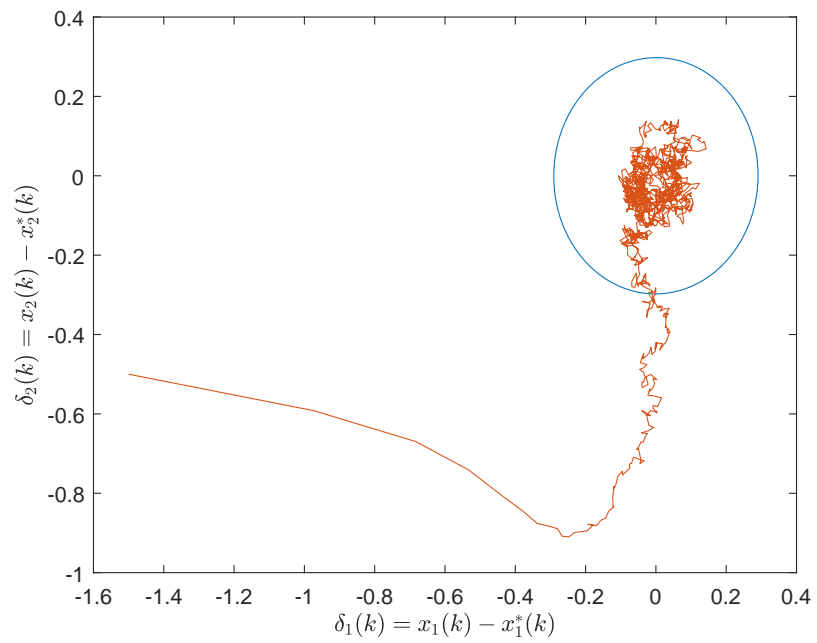


Figura 6.3: Convergencia de los errores de seguimiento en el plano de fase.

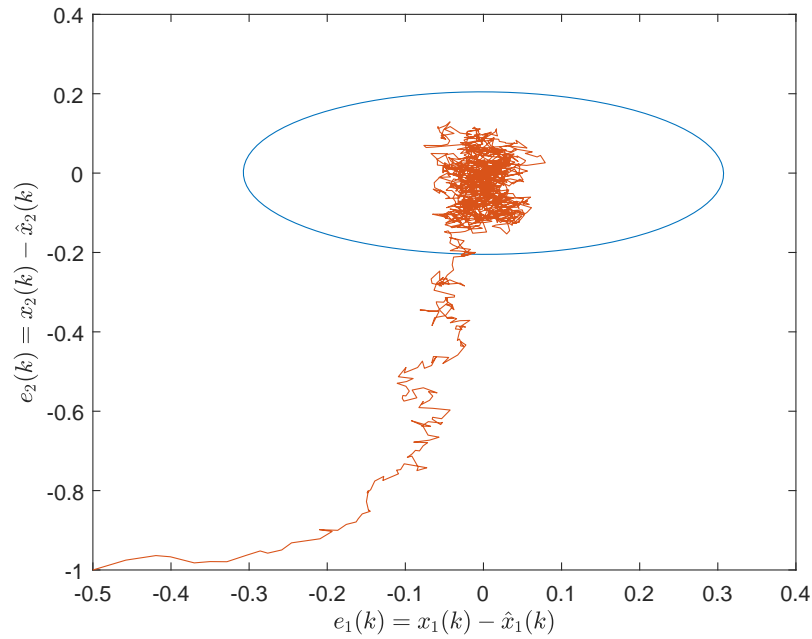


Figura 6.4: Convergencia de los errores de observación en el plano de fase.

6.2. Ejemplo 2: Sistema no lineal

Considérese el sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k) \sin(x_1(k)) \\ -0.1(x_1(k) + x_2(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \xi(k+1),$$

$$y(k) = x_1(k) + \zeta(k),$$

que en formato cuasi-lineal se presenta como:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \hat{\xi}(k+1),$$

$$y(k) = Cx(k) + \zeta(k),$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(k+1) &= \xi(k+1) + f(x(k)) - Ax(k), \\ f(x(k)) &= \begin{bmatrix} x_2(k) \sin(x_1(k)) \\ -0.1(x_1(k) + x_2(k)) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En la condición (2.13) resulta $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$. El par (A, B) es controlable y el par (C, A) es observable. Los ruidos $\xi(k+1)$ y $\zeta(k)$, cumplen la condición (2.6) con las matrices de covarianza $\Xi_x = 0.01I_{2 \times 2}$ y $\Xi_y = 0.01$, respectivamente. Se considera como problema el seguimiento de la trayectoria

$$x^*(k) = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \sin(k) \end{bmatrix}, C_1^* = 1, C_2^* = 0.5.$$

El procedimiento de optimización (5.5) conduce a

$$\alpha^* = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.9,$$

tal que, los parámetros matriciales P^* , K^* , L^* y L_a^* , que componen el controlador y el observador son como sigue:

$$\begin{aligned}P^* &= \begin{bmatrix} 0.0503 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0503 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4499 & -0.0012 \\ 0 & 0 & -0.0012 & 0.0021 \end{bmatrix}, \\ K^* &= \begin{bmatrix} 0 & -0.2596 \\ -0.2596 & 0.0499 \end{bmatrix}, \\ L^* &= \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.6 \end{bmatrix}, L_a^* = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0.01 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Las trayectorias de los estados se muestran en las figuras (6.5) y (6.6) respectivamente. Las figuras (6.7) y (6.8) muestra como los errores de convergen a los elipsoides atractivos.

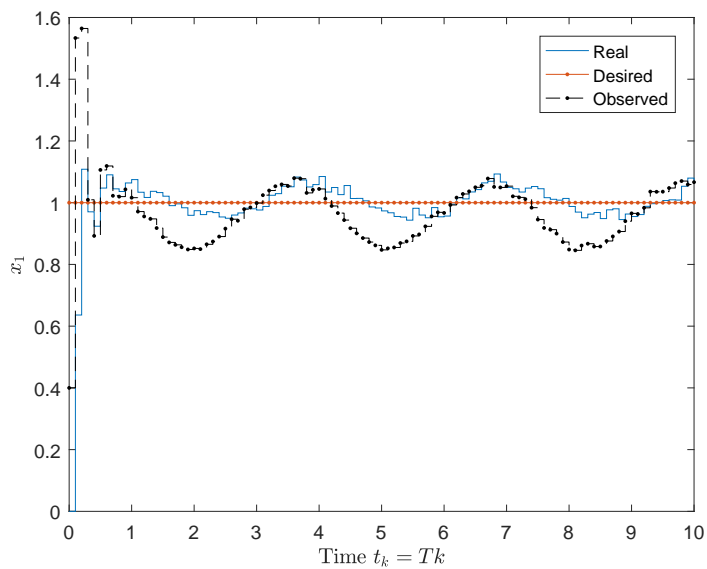


Figura 6.5: Trayectorias real, deseada y observada del estado $x_1(k)$.

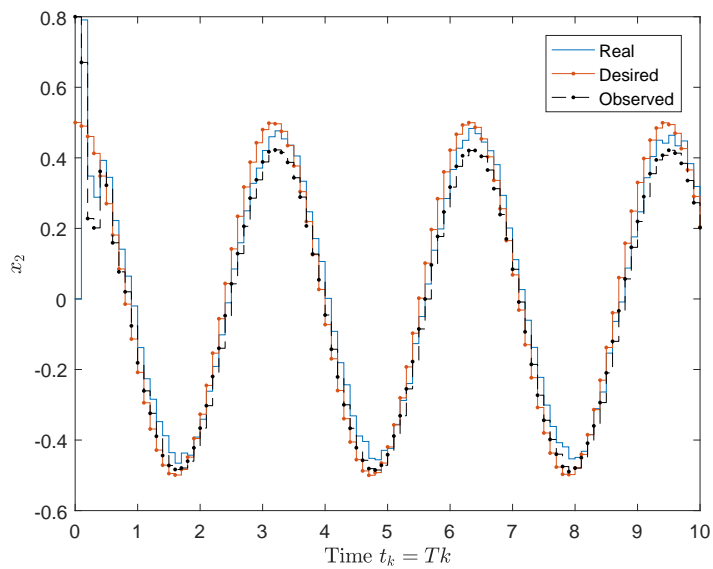


Figura 6.6: Trayectorias real, deseada y observada del estado $x_2(k)$.

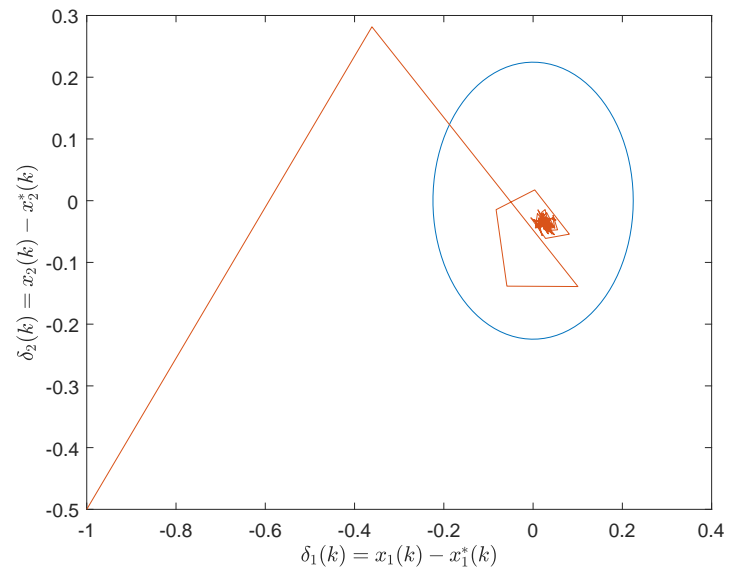


Figura 6.7: Convergencia del error de seguimiento $\delta(k)$.

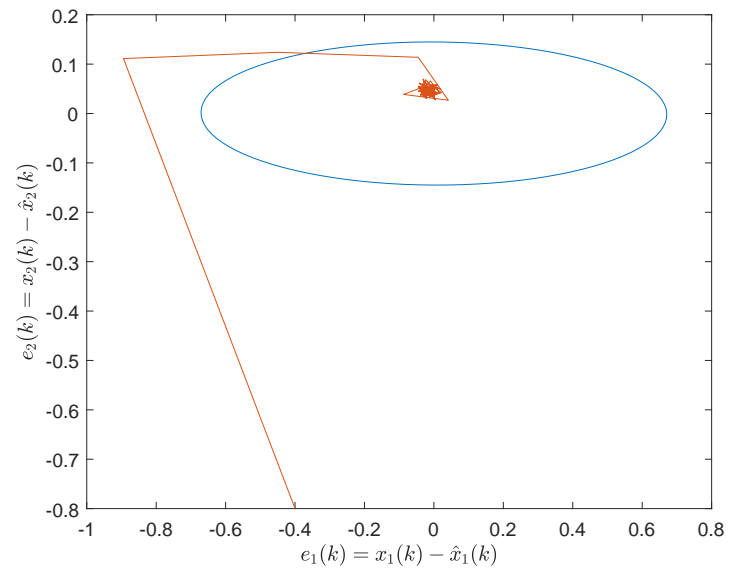


Figura 6.8: Convergencia del error de observación $e(k)$.

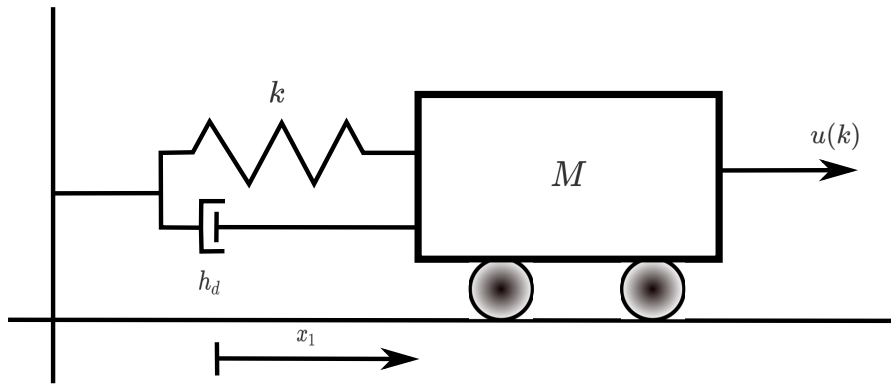


Figura 6.9: Carro con masa M , amortiguamiento h_d y elasticidad variable k

6.3. Control Robusto para el sistema Carro-Masa

Considérese el problema de estabilizar en el origen un carro con masa M que está sujeto a una pared mediante un resorte (Figura 6.9) con elasticidad k , expresada por

$$k = k_0 e^{-x_1(k)} \quad (6.2)$$

donde x_1 es el desplazamiento del carro desde la posición de equilibrio, y amortiguamiento h_d . La dinámica del sistema está dada por el siguiente modelo no lineal en espacio de estados en tiempo discreto (ver [14]):

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + T_s x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - T_s \frac{k_0}{M} e^{-x_1(k)} x_1(k) - T_s \frac{h_d}{M} x_2(k) + \frac{T_s}{M} u(k) + w(k+1) \\ y(k) &= [1 \ 0] x(k) + \zeta(k) \end{aligned}$$

donde x_2 es la velocidad del carro y $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T$. Los parámetros del sistema son $T_s = 0.4$ [s], $M = 1$ [Kg], $k_0 = 0.33$ [$\frac{N}{m}$] y $\bar{h}_d = 1.1$ [$\frac{Ns}{m}$]. El factor de amortiguamiento no es conocido del todo pero se supone es $h_d = \bar{h}_d + \Delta h_d$, donde $\|\Delta h_d\| < \gamma_\Delta = 0.1$. Si se considera que el carro se suelta desde la posición inicial $x_1(0) = 4$, y se deja evolucionar el sistema con respecto al tiempo, se puede notar el tiempo que le toma a $x_1(k)$ llegar al estado de equilibrio es considerablemente alto (ver Figura 6.10), esto se debe a la elasticidad k del resorte.

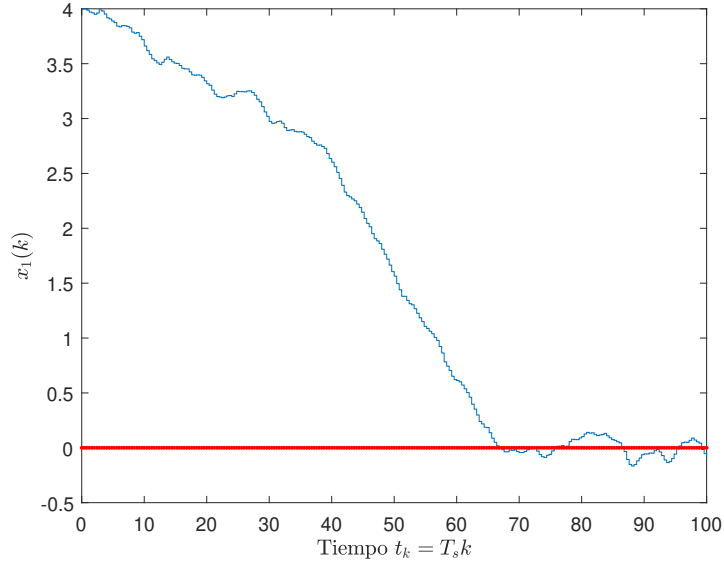


Figura 6.10: Trayectoria de $x_1(k)$ sin aplicar acciones de control.

El sistema (6.3) puede ser reescrito en formato cuasi-lineal como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 - T_s \frac{\bar{h}_d}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T_s}{M} \end{bmatrix}, \quad \xi(k+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ w(k+1) \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(k) &= f(k, x(k)) - Ax(k) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -T_s \frac{k_0}{M} e^{-x_1(k)} x_1(k) - T_s \frac{\Delta h_d}{M} x_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

De esto último se tiene:

$$\begin{aligned} \|f(k, x(k)) - Ax(k)\|^2 &= \left(-T_s \frac{k_0}{M} e^{-x_1(k)} x_1(k) - T_s \frac{\Delta h_d}{M} x_2(k) \right)^2 \\ &\leq \left(T_s \frac{k_0}{M} e^{-x_1(k)} x_1(k) \right)^2 + \left(T_s \frac{\Delta h_d}{M} x_2(k) \right)^2 \\ &\leq f_0 + f_1 \|x(k)\|^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde $f_0 = 0$ y $f_1 = \frac{T_s}{M} \sup \left\{ \left(k_0 e^{-x_1(k)} \right)^2, (\Delta h_d)^2 \right\} = 0.52$. Las matrices de covarianza de los

ruidos estocásticos $\xi(k+1)$ y $\zeta(k)$ se toman como $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (0.01)^2 \end{bmatrix}$ y $\Sigma_y = (0.002)^2$, respectivamente.

Aplicando el proceso de optimización propuesto en esta tesis se obtiene

$$\alpha^* = 0.99, \lambda = 0.1, \gamma = 0.1, \theta = 1$$

tal que la función de optimización (4.24) es igual a:

$$\Psi(\lambda, \gamma, \theta) = m\lambda + \gamma(2\text{tr}\{\Sigma_x\} + 3f_0 + 6f_1X_+^* + 2\Delta_+^* + \theta) = 0.2$$

$$X_+^* = 0, \Delta_+^* = 0$$

$$\pi(\Psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha) = \frac{\Psi(\lambda, \gamma, \theta)}{1 - \alpha} = 20.0020$$

Las matrices X_1^* , X_2^* , K^* , L^* y L_a^* , obtenidas del enfoque sugerido, son:

$$X_1^* = \begin{bmatrix} 3.8536 & 0 \\ 0 & 2.7594 \end{bmatrix}, X_2^* = \begin{bmatrix} 2.9408 & 1.0347 \\ 1.0347 & 0.9475 \end{bmatrix},$$

$$K^* = \begin{bmatrix} -0.4954 & -0.2942 \end{bmatrix}, L^* = \begin{bmatrix} 1.1246 \\ 0.1744 \end{bmatrix}, L_a^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar, con ayuda de las ganancias matriciales anteriores, los algoritmos de control y observación al sistema se obtienen las trayectorias mostradas en las Figuras 6.11 y 6.12. Además, en las Figuras 6.13 y 6.14, se muestra la convergencia de los errores de observación y de seguimiento de trayectoria hacia los elipsoides atractivos estocásticos definidas en (4.25). La señal de control $u(k)$ aplicada al sistema se muestra en la Figura 6.15. Por último, en la Figura 6.16, muestra la comparación (de la posición del sistema x_1) entre aplicar el control propuesto y dejar evolucionar el sistema de manera autónoma.

$$P_z = \begin{bmatrix} 0.1927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1470 & 0.0517 \\ 0 & 0 & 0.0517 & 0.0474 \end{bmatrix}$$

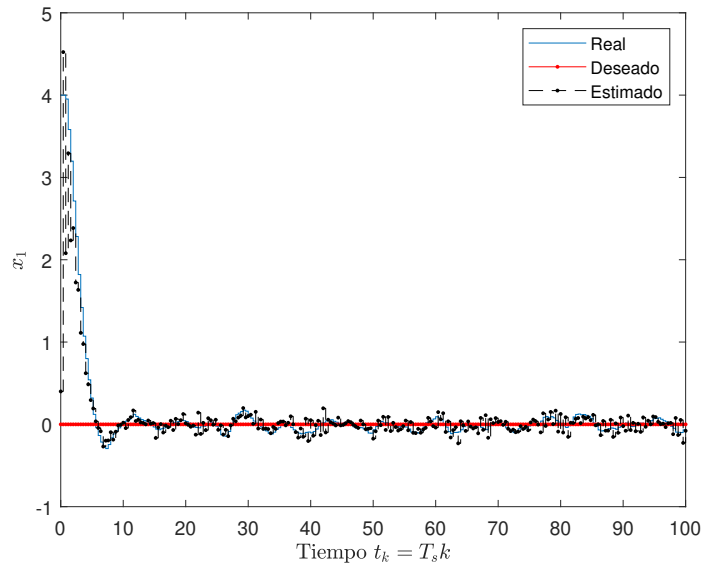


Figura 6.11: Trayectorias real, deseada y observada del estado $x_1(k)$.

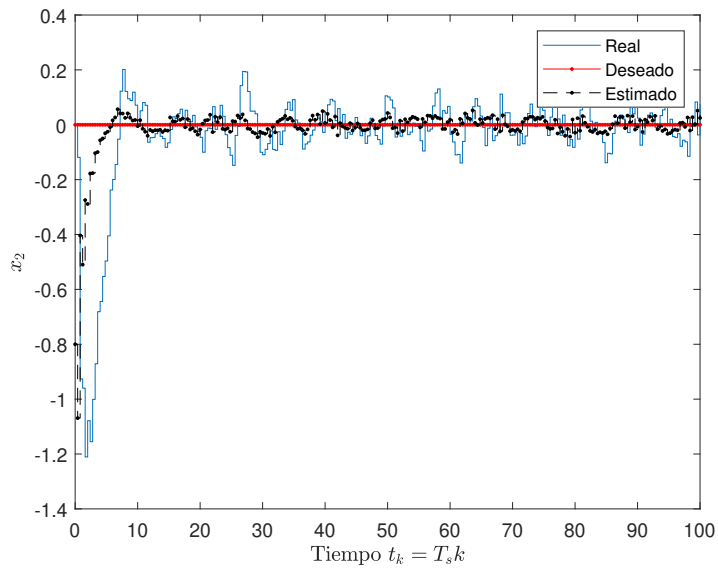


Figura 6.12: Trayectorias real, deseada y observada del estado $x_2(k)$

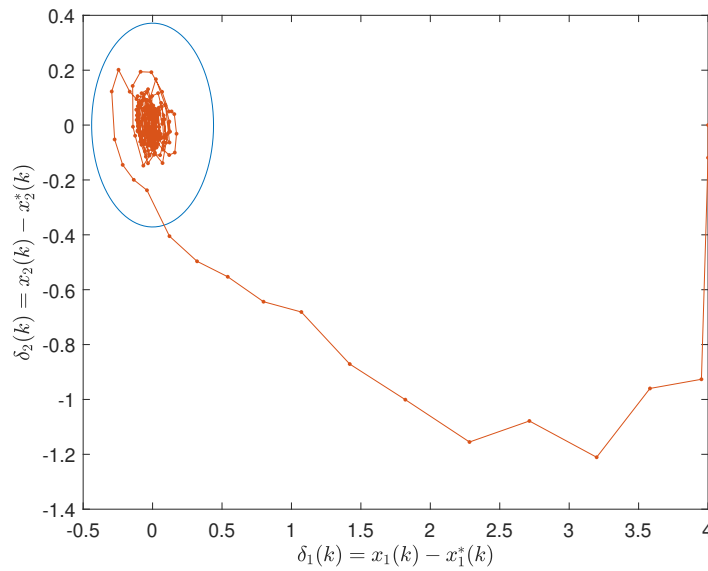


Figura 6.13: Elipsoide invariante $\frac{1}{\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha)} X_1$ y convergencia del error de seguimiento $\delta(k)$.

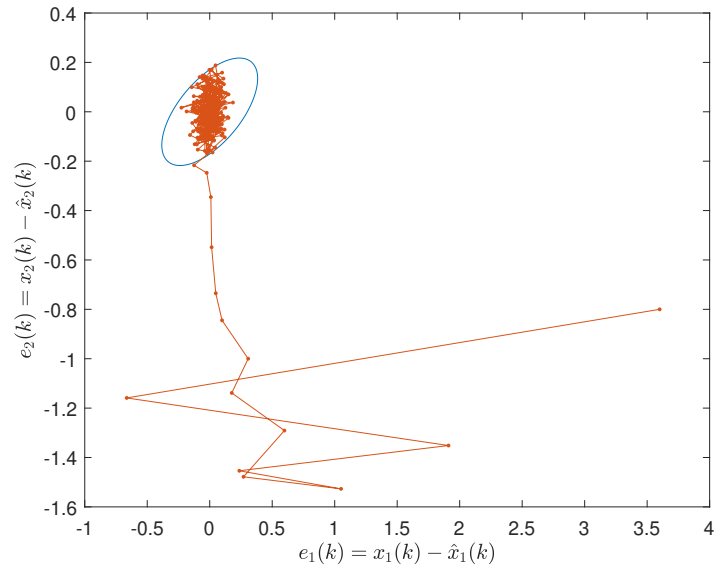


Figura 6.14: Elipsoide invariante $\frac{1}{\pi(\psi(\lambda, \gamma, \theta), \alpha)} X_2$ y convergencia del error de observación $e(k)$.

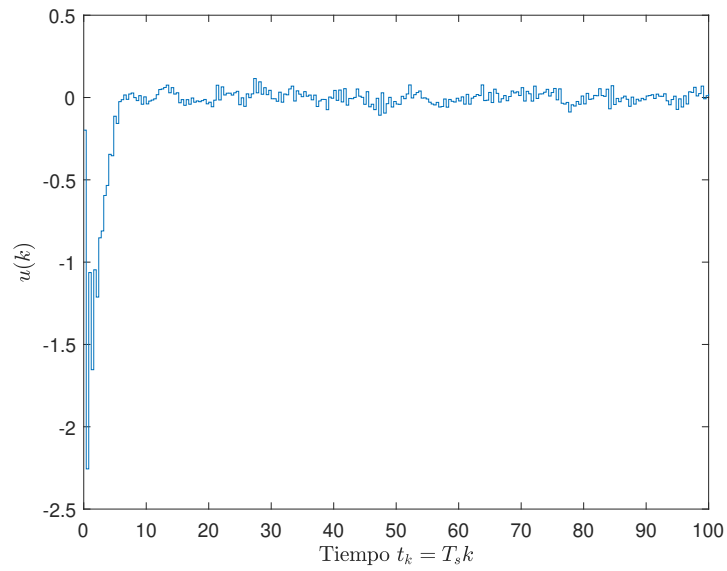


Figura 6.15: Señal de control $u(k)$.

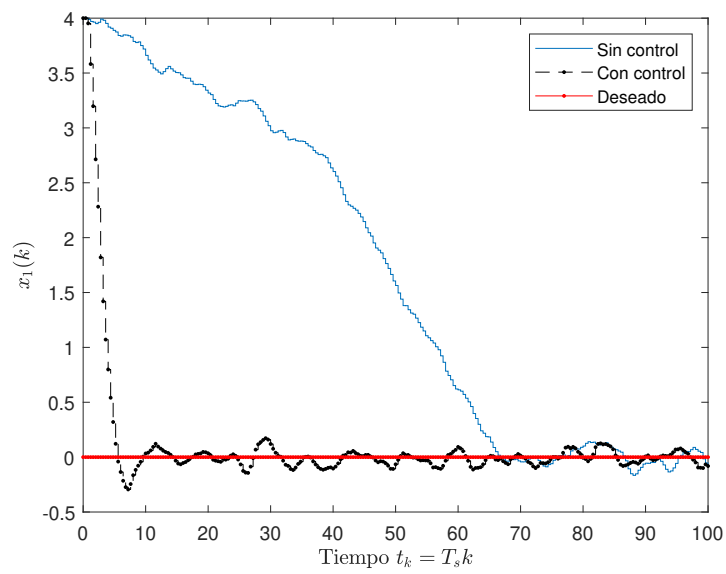


Figura 6.16: Comportamiento de x_1 como sistema autónomo y sistema controlado.

Capítulo 7

Conclusión

En esta disertación se ha creado el desarrollo de un algoritmo que se implementa para la realización de un diseño de control robusto para una clase de sistemas no lineales cuyo comportamiento involucra incertidumbres paramétricas y ruidos estocásticos. La restricción principal de la clase de sistemas es el cumplimiento de la condición *Quasi-Lipschitz*. El diseño del procedimiento está basado en la extensión del método de elipsoides estocásticas a sistemas estocásticos e incorpora restricciones no lineales que son convertidas a lineales mediante transformaciones de congruencia con el conocido complemento de Schur. Este proceso de optimización da como resultado una elipsoide atractiva estocástica invariante cuyas propiedades, y estructura, son esenciales para el cálculo de las ganancias matriciales óptimas que ponen en funcionamiento el algoritmo de observación y el de control. El análisis de convergencia que permite calcular las elipsoides atractivas estocásticas de manera analítica aseguran la estabilidad práctica asintótica de las trayectorias del error de seguimiento y error de estimación de estados con probabilidad uno. Por último, es fácil notar que la metodología propuesta presenta un control robusto con un algoritmo de control en extremo simple, como lo es la realimentación de estados, en contraste con los enfoques existentes que pueden ser, en la medida de lo requerido, complejos de aplicar.

7.1. Resultados intermedios interesantes

- Se obtiene la representación analítica de la zona de convergencia asegurando estabilidad práctica asintótica para el vector extendido de errores.

- Se obtiene un cambio de coordenadas mediante transformaciones de congruencia para llevar restricciones del tipo bilineal al tipo lineal llevando el enfoque de solución a las técnicas convencionales de SDP (por sus siglas en inglés Semidefinite Promgraming) admitiendo la aplicaciones de toolboxes en Matlab como SeDuMi y YALMIP. Se muestra que mediante un procedimiento de transformación particular, estas restricciones de BMI se pueden convertir en un conjunto de LMI que admite la aplicación directa de paquetes estándar de MATLAB;
- Se propone un algoritmo numérico de optimización funcional y original que proporciona una selección óptima de parámetros.
- Se reportaron algunas aplicaciones del procedimiento obtenido a través de ejemplos numéricos (lineales y no lineales) para ilustrar la metodología.

7.2. Publicaciones

- D. Velazquez, A. Poznyak. ” **Attractive Ellipsoid Design for Robust Sliding-Mode Observation Error in Stochastic Nonlinear Discrete-Time Systems** ”, International Journal of Robust and Nonlinear Control 31(1), 69-86, 2021.
- D. Velazquez, A. Poznyak. ” **Adaptive AEM Controller For A Wide Class of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems Using On-Line State Estimation** ”, Congreso Nacional de Control Automático (CNCA). Guanajuato, Guanajuato, México, 249-254, 2021.

Bibliografía

- [1] Khalid Abidi, Jian-Xin Xu, and Yu Xinghuo. On the discrete-time integral sliding-mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(4):709–715, 2007.
- [2] Hussain Alazki and Alex Poznyak. Constraint robust stochastic discrete-time tracking: Attractive ellipsoids technique. In *2010 7th International Conference on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control*, pages 99–104. IEEE, 2010.
- [3] Ma Aracelia Alcorta-García, Michael Basin, and Yazmin Gpe Acosta Sánchez. Risk-sensitive approach to optimal filtering and control for linear stochastic systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 5(6):1599–1614, 2009.
- [4] Bijan Bandyopadhyay and Sivaramakrishnan Janardhanan. *Discrete-time sliding mode control: a multirate output feedback approach*, volume 323. Springer Science & Business Media, 2005.
- [5] Michael V Basin and Pablo Cesar Rodríguez-Ramírez. Sliding mode controller design for stochastic polynomial systems with unmeasured states. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(1):387–396, 2013.
- [6] FJ Bejarano, L Fridman, and A Poznyak. Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 17(18):1734–1753, 2007.
- [7] Mohamed Bensoubaya, Abdelhak Ferfera, and Abderrahman Iggidr. Stabilization of nonlinear stochastic discrete systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*, volume 4, pages 3180–3181. IEEE, 1999.

- [8] Shuai Chen, Jun Guo, and Lifeng Ma. Sliding mode observer design for discrete nonlinear time-delay systems with stochastic communication protocol. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2019.
- [9] Jorge Davila, Leonid Fridman, and Alexander Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262, 2006.
- [10] M Hernandez-Gonzalez, MV Basin, and EA Hernandez-Vargas. Discrete-time high-order neural network identifier trained with high-order sliding mode observer and unscented kalman filter. *Neurocomputing*, 2019.
- [11] Sivaramakrishnan Janardhanan and Bijnan Bandyopadhyay. Multirate output feedback based robust quasi-sliding mode control of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(3):499–503, 2007.
- [12] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [13] H. Gao L. Wu, W. Zheng. Dissipativity-based sliding mode control of switched stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1(1):1, 2013.
- [14] L Magni, G De Nicolao, Riccardo Scattolini, and F Allgöwer. Robust model predictive control for nonlinear discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 13(3-4):229–246, 2003.
- [15] Jaime A Moreno and Marisol Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE conference on decision and control*, pages 2856–2861. IEEE, 2008.
- [16] Tiago Roux Oliveira, José Paulo VS Cunha, and Liu Hsu. Adaptive sliding mode control based on the extended equivalent control concept for disturbances with unknown bounds. In *Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*, pages 149–163. Springer, 2018.
- [17] A. Poznyak, A. Polyakov, and V. Azhmyakov. *Attractive ellipsoids in robust control*. Springer International Publishing, 2014.

- [18] Alex Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Volume 2: Stochastic Systems*, volume 2. Elsevier, 2009.
- [19] Alex Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*, volume 1. Elsevier, 2010.
- [20] Feng Qiao, QM Zhu, Jian Liu, and Fen Zhang. Adaptive observer-based non-linear stochastic system control with sliding mode schemes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2008.
- [21] S. Singh S. Janardhanan. Sliding mode control-based linear functional observers for discrete-time stochastic systems. *International Journal of Systems Science*, 2017.
- [22] Ligang Wu, Peng Shi, and Huijun Gao. State estimation and sliding-mode control of markovian jump singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(5):1213–1219, 2010.