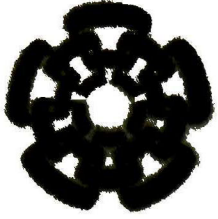


xx(104948.1)



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional**

U n i d a d G u a d a l a j a r a

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

“Regulación de sistemas con retardo”

Tesis que presenta
Eduardo Núñez Pérez

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

C I N V E S T A V
I P N
A D Q U I S I C I O N
D E L I B R O S

Guadalajara, Jal., Agosto de 2002

CLASIF.:	
ADQUIS.:	SSI-219
FECHA:	27 NOV - 2002
PROCED.:	TESIS-021
	\$

Regulación de sistemas con retardo

Tesis de Maestría en Ciencias Ingeniería Eléctrica

Por:

Eduardo Núñez Pérez

Ingeniero en Electrónica
Instituto Tecnológico de Sonora
1992-1996

Becario del CONACyT, expediente no. 157933

Directores de Tesis
Dr. Bernardino Castillo Toledo
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto de 2002

Índice general

1. Introducción	1
2. Herramientas matemáticas	5
2.1. Introducción	5
2.2. Sistemas con retardo	5
2.2.1. Representación en espacio de estados	6
2.2.2. Estabilidad de sistemas con retardo	7
2.3. El problema de regulación de la salida para sistemas sin retardo	9
2.3.1. Introducción .	9
2.3.2. Planteamiento del problema	11
2.3.3. Regulación de la salida por retroalimentación del estado	13
2.3.4. Regulación de la salida por retroalimentación del error	14
2.4. Control con modos deslizantes	15
2.5. Forma controlable por bloques y técnica de control por bloques	16
2.5.1. Técnica de control por bloques	17
2.6. Desigualdades Matriciales Lineales	19
3. Regulación de sistemas con retardo en el estado y control	25
3.1. Introducción	25
3.2. Regulación para una clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT) con retardo .	26
3.2.1. El problema de regulación por retroalimentación del estado	27
3.2.2. El problema de regulación por retroalimentación del error	31
3.3. La forma controlable por bloques con retardo (CBR)	42
3.4. Regulación lineal para sistemas en la forma CBR	43
3.4.1. Caso S1	43
3.4.2. Caso S2	47
3.4.3. Ejemplo caso S1	51
3.4.4. Ejemplo caso S2 .	57
3.5. Técnica de control por bloques para sistemas en forma CBR	65
3.5.1. Caso S1	66
3.5.2. Caso S2	70
3.5.3. Ejemplo caso S1	74
3.5.4. Ejemplo caso S2	75

4. Regulación de sistemas con múltiples retardos en el estado	83
4.1. Introducción	83
4.2. El problema de regulación para una clase de sistemas LIT con retardo	83
4.2.1. Problema de regulación por retroalimentación del estado	85
4.2.2. Problema de regulación por retroalimentación del error	89
4.3. Ejemplo	96
4.3.1. Regulación por retroalimentación del estado	96
4.3.2. Regulación por retroalimentación del error	97
5. Conclusiones y trabajo futuro	101
A. Solución de ecuaciones matriciales lineales	103

Capítulo 1

Introducción

Es ahora conocido que los retardos son componentes naturales de los procesos dinámicos en áreas como física, mecánica, biología, ecología, fisiología, economía, epidemiología, dinámica de población, química, aeronáutica, por mencionar algunas. Aún si el proceso en si mismo no incluye el fenómeno de retardo, los actuadores y sensores que son incluidos en su control automático pueden introducir tales retardos. Esto explica la gran cantidad de trabajos desarrollados sobre este argumento [3].

Por otra parte el seguimiento de una señal de referencia es un problema típico en la teoría de control. En particular para sistemas invariantes en el tiempo, lo anterior es llamado el problema de regulación, donde se tienen dos enfoques de control, la retroalimentación del estado, cuando se tiene disponible toda la información del sistema, y la retroalimentación del error, donde se considera que está disponible sólo la información del error de seguimiento. Este problema ha sido tratado para sistemas lineales, [13] ó [12], donde se establece una solución y para el caso no lineal [18]. Sin embargo, para sistemas con retardo, el problema de regulación ha sido sólo parcialmente tratado. Por ejemplo, [19] presenta el problema de regulación para una clase de sistemas lineales con múltiples retardos en el estado y en el control, donde se obtuvo una ley de control a través de la retroalimentación del estado. En el presente trabajo se aborda el problema de regulación tanto por retroalimentación de estado como por retroalimentación del error para dos clases de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo, uno con retardo en el estado y en el control y otro con múltiples retardos en el estado pero sin retardo en el control, además, se aplica la técnica de control por bloques para lograr el seguimiento.

Varios trabajos que manejan sistemas con retardo pueden ser encontrados en la literatura. Entre muchos otros, por ejemplo [7] trata del problema de control óptimo de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo desde dos puntos de vista: las aproximaciones geométrica y de programación dinámica. En [8] el problema de estabilización de sistemas invariantes en

el tiempo con retardo usando una técnica de estructura variable es tratado, mientras en [10] un compensador de dimensión finita es propuesto para la mismo objetivo. En [15] un modelo difuso Takagi-Sugeno con retardo es presentado y las condiciones de estabilidad son derivadas. Además una estabilización aproximada para sistemas no lineales con retardo a través de una retroalimentación de estado difusa y un controlador basado en observador son presentados. El problema de seguimiento de una señal de referencia es tratado en [9] para señales de referencia polinomiales. En [11], una aplicación en tiempo real de un proceso térmico con retardo en la entrada es presentado. También, la referencia [14] presenta un método interesante para diseñar una estructura híbrida. Más recientemente, [17] trata con seguimiento robusto y controlador de seguimiento de modelo para una clase de sistemas con retardos y con incertidumbres paramétricas.

El objetivo de este trabajo es lograr el seguimiento de una señal de referencia de un sistema con retardos (regulación de la salida). Lo anterior se presenta para dos tipos de sistemas con retardo. El primer sistema tiene retardo en el estado y control y se supone que está representado en una forma especial (llamada controlable por bloques con retardos o CBR). El segundo tipo de sistemas tiene múltiples retardos en el estado.

Las aportaciones que se hacen en este trabajo se concentran en los capítulos 3 y 4 de esta tesis, cuya organización es la siguiente.

En el capítulo 2 se presentan las herramientas matemáticas empleadas a lo largo del trabajo. Se muestran algunos aspectos básicos de los sistemas con retardo y la teoría de regulación para sistemas sin retardos, la cual se extiende para sistemas con retardo. Se muestran las bases del control con modos deslizantes, así como de la técnica de control por bloques, que se emplean en el capítulo 3. Al final se muestran algunos aspectos de las desigualdades matriciales lineales (DML) que son útiles en la derivación de los resultados de este trabajo.

En el capítulo 3 se presenta el problema de seguimiento para sistemas con retardo en el estado y control. En primer lugar, basado en la teoría de regulación para sistemas sin retardo, se presenta el problema para este tipo de sistemas, considerando la retroalimentación del estado y del error y se dan condiciones de existencia de una solución al problema. A continuación se presenta la forma controlable por bloques para este tipo de sistemas, donde se muestran los dos casos considerados (S1 y S2), cuya diferencia está en la estructura de la forma. Enseguida se presenta un método para calcular la ley de control que garantice el seguimiento, basado en la teoría de regulación para sistemas sin retardo, para los dos casos S1 y S2. Al final de este capítulo se presenta otro método para calcular el controlador, donde se hace uso de la técnica de control por bloques. Durante el capítulo se ilustran ejemplos utilizando las distintas opciones

de control para los dos casos de la forma CBR.

En el capítulo 4 se aborda el problema de seguimiento para sistemas con múltiples retardos en el estado. De igual manera que en el capítulo 3 para este tipo de sistemas se presentan los problemas de regulación por retroalimentación del estado y del error y se dan condiciones de existencia de una solución. Al final del capítulo se muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de los esquemas de control

Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de la tesis y algunas ideas sobre posibles extensiones de los resultados presentados.

En el apéndice A se presentan resultados sobre la solución de ecuaciones matriciales lineales, los cuales son útiles en pruebas de algunos teoremas.

Capítulo 2

Herramientas matemáticas

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas empleadas durante el desarrollo del presente trabajo. El capítulo está organizado de la siguiente manera:

En la sección 2.2 se presentan algunos resultados básicos sobre los sistemas con retardo. En la sección 2.3 se muestra la teoría de regulación para sistemas sin retardo en la cual se basa la propuesta para sistemas con retardo.

En la sección 2.4 se muestra la técnica de modos deslizantes, en la cual se basa uno de los esquemas de control presentados en el capítulo 3.

En la sección 2.5 se muestra una forma especial de representación de sistemas llamada controlable por bloques así como la técnica de control por bloques para sistemas sin retardo, la cual es empleada en el diseño del controlador presentado en el capítulo 3.

En la sección 2.6 se muestran las bases de la teoría de las desigualdades matriciales lineales (DML), las cuales se utilizan en el capítulo 4 para el diseño del controlador.

2.2. Sistemas con retardo

Los sistemas con retardos son aquellos en los cuales existen retardos de tiempo entre la aplicación de una señal al sistema y su efecto resultante en él. Ellos surgen ya sea como resultado de retardos inherentes en los componentes del sistema o como una introducción deliberada de retardo en el sistema con propósitos de control. Los retardos de tiempo están presentes frecuentemente en electrónica, mecánica, biología, metalurgia, sistemas químicos, etc. Éstos corresponden a tiempos de transporte (como las ondas de choque en la tierra, hormonas en el flujo sanguíneo, fluidos en procesos químicos o radiación electromagnética en el espacio) o tiempos de computación (como en el procesamiento de una imagen visual, evaluación de la

salida de un algoritmo de control digital o realización de una análisis de composición química). La formulación matemática de sistemas con retardo resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo [6].

Cualquier sistema físico tiene algún(los) retardo(s) de tiempo asociado con él debido a su naturaleza distributiva. Sin embargo, en muchos casos el(los) retardo(s) son despreciables y pueden ser ignorados en el modelo del sistema. En otros casos, un sistema físico puede tener varios retardos diferentes pero sus efectos acumulados pueden ser incluidos por simplicidad en el modelo del sistema como un retardo de tiempo sencillo. Estas aproximaciones introducen algún error en el análisis y el diseño de sistemas. Las magnitudes de estos errores frecuentemente dependen directamente de la magnitud de los retardos despreciados.

2.2.1. Representación en espacio de estados

Para sistemas continuos con retardo, el estado al tiempo t está definido sobre un intervalo $[t', t]$ donde t' depende de el(los) retardo(s) presentes en el sistema. Un vector $x(t)$ de dimensión n será usado para expresar el estado del sistema al tiempo t . Tal vector es llamado *vector de estado* y sus componentes $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, son llamados *variables de estado*. Si Δ es el retardo de tiempo más grande en el sistema, entonces el conocimiento de $x(t)$ sobre $(t_1 - \Delta, t_1)$ más el conocimiento del vector de entrada $u(t)$ sobre $[t_1, t_2]$ son necesarios y suficientes para determinar el estado $x(t)$ o la salida $y(t)$ para todo $t_2 > t_1$. Así, para sistemas continuos con retardo el *estado inicial* (o la *función inicial*) $\phi(t)$ debe estar dado para $t \in [t_0 - \Delta, t_0]$ donde t_0 es el tiempo inicial de observación del sistema.

Usando el concepto de estado es posible describir cualquier sistema con retardos por una ecuación vectorial diferencial y/o de diferencias. Tal ecuación es referida como una *ecuación de estado* del sistema. Para sistemas continuos con retardo la ecuación de estado en el caso más general tiene la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - h_{x1}), x(t - h_{x2}), \dots, x(t - h_{xN}), u(t), u(t - h_{u1}), u(t - h_{u2}), \dots, u(t - h_{uR}), t)$$

donde f es una función no lineal vector valuada y $h_{xi} > 0, i = 1, 2, \dots, N; h_{ui} > 0, i = 1, 2, \dots, R$ representan los retardos en el estado y en el control, respectivamente, presentes en el sistema. La *ecuación de salida* expresa el vector de salida $y(t)$ como una función de los vectores de estado y control

$$y(t) = g(x(t), x(t - h_{x1}), x(t - h_{x2}), \dots, x(t - h_{xN}), u(t), u(t - h_{u1}), u(t - h_{u2}), \dots, u(t - h_{uR}), t)$$

donde g , en general, es una función no lineal vector valuada. Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las funciones f y g no dependerán explícitamente del tiempo.

Para sistemas lineales con retardos, las ecuaciones de estado y de salida son de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + \sum_{i=1}^N A_i(t)x(t - h_{xi}) + B(t)u(t) + \sum_{i=1}^R B_i(t)u(t - h_{ui}) \\ y(t) &= C(t)x(t) + \sum_{i=1}^N C_i(t)x(t - h_{xi}) + D(t)u(t) + \sum_{i=1}^R D_i(t)u(t - h_{ui}).\end{aligned}$$

De la misma manera, si el sistema es invariante en el tiempo, entonces las matrices A , B , C , D ; A_i , C_i , $i = 1, 2, \dots, N$; y B_i , D_i , $i = 1, 2, \dots, R$ serán constantes.

2.2.2. Estabilidad de sistemas con retardo

La estabilidad es una propiedad importante de cualquier sistema de control, con y sin retardos. La estabilidad de sistemas con retardo es relativamente más complicada de definir en términos de eigenvalores, ya que debido a los términos retardados en el modelo del sistema, la ecuación característica es trascendental en lugar de algebraica. Se considera la ecuación de estado del sistema lineal invariante en el tiempo con retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^N A_i x(t - h_i), t_0 = 0 \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A , A_i , $i = 1, \dots, N$ son matrices constantes de $n \times n$ y h_i , $i = 1, \dots, N$ son retardos constantes del sistema. La condición inicial del sistema (2.1) es representada por una función continua

$$x(\sigma) = \phi(\sigma), \quad \Delta \leq \sigma \leq 0$$

donde

$$\Delta = \max_i h_i$$

Definición 1 Un estado x_e del sistema (2.1) se dice que es un **estado de equilibrio** si

$$x(t_0, \phi) = x_e \implies x(t; \phi) = x_e \quad \forall t > t_0.$$

En general el sistema (2.1) puede tener más de un estado de equilibrio, pero para nuestra presente discusión se asume que el estado de equilibrio es $x_e = 0$, es decir, el origen. Esta hipótesis no es restrictiva. Otros puntos de equilibrio pueden ser similarmente utilizados. A continuación se consideran definiciones de estabilidad.

Definición 2 El estado de equilibrio $x_e = 0$ es **estable en el sentido de Lyapunov** o simplemente estable cuando $t \rightarrow \infty$, si dados cualesquiera números positivos t_0 y ϵ , existe un

número $\delta > 0$ tal que cualquier solución continua $x(t)$ de (2.1) que satisface

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta} |x(t)| \leq \delta \quad (2.2)$$

también satisface

$$\max_{t_0 \leq t \leq \infty} |x(t)| \leq \epsilon. \quad (2.3)$$

Intuitivamente la definición anterior indica que la solución de (2.1) es estable si cualquier solución que es inicialmente pequeña se mantendrá pequeña para todo t . Se debe indicar que el número δ en general depende tanto de t_0 como de ϵ . Si un $\delta > 0$ puede ser encontrado independiente de t_0 , la solución x_e de (2.1) se dice que es *uniformemente estable con respecto al tiempo* ó en forma más breve *uniformemente estable*, para lo cual tenemos la siguiente definición.

Definición 3 El estado de equilibrio $x_e = 0$ es **uniformemente estable** si, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que $x(t)$ satisface (2.2) para cualquier $t_0 \geq 0$, entonces $x(t)$ satisface (2.3).

Otro concepto importante es la estabilidad asintótica que se define a continuación.

Definición 4 El estado de equilibrio $x_e = 0$ es **asintóticamente estable** si:

- (i) Es estable;
- (ii) Para cualquier $t_0 > 0$ existe un $\delta = \delta(t_0)$ tal que cualquier solución que satisface (2.2) también satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.4)$$

Una interpretación de la definición anterior es que todas las soluciones que inicializan con estados pequeños deben tender al origen. Sin embargo, en los sistemas con retardo, como muchos otros sistemas, las variaciones en la función inicial pueden ser de hecho muy grandes. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5 El estado de equilibrio $x_e = 0$ es **globalmente asintóticamente estable** si:

- (i) Es estable;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la solución satisface (2.4).

A continuación se tiene un teorema que establece condiciones bajo las cuales el sistema (2.1) es Uniformemente Asintóticamente Estable (UAE)[6].

2.3. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN DE LA SALIDA PARA SISTEMAS SIN RETARDO⁹

Teorema 6 Sea A una matriz estable. Sean Q y M matrices simétricas asociadas con la ecuación de Lyapunov

$$A^T Q + Q A + (N + 1)M = 0$$

satisfaciendo

$$M > 0$$
$$M - \sum_{i=1}^N Q A_i M^{-1} A_i^T Q > 0$$

entonces el sistema (2.1) es UAE. Notar que este esquema es independiente del valor de los retardos.

2.3. El problema de regulación de la salida para sistemas sin retardo

2.3.1. Introducción

Un problema de gran importancia en la teoría de control es el de controlar una planta con el fin de que su salida siga asintóticamente una trayectoria de referencia. En situaciones prácticas, la respuesta de una planta es influenciada no sólo por la entrada $u(\cdot)$ a través de la cual la acción de control es impuesta, sino posiblemente también por otras entradas exógenas, cuyo comportamiento no puede ser impuesto ni modificado, y las cuales por esta razón son llamadas *perturbaciones*. En este caso la planta puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones lineales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Ew(t)\end{aligned}$$

donde $u(t)$ representa la acción de control al tiempo t , $y(t)$ denota el valor, al tiempo t , de la salida a ser controlada, $x(t)$ es un vector representando el estado interno de la planta y $w(t)$ denota el valor, al tiempo t , de una entrada de perturbación; el problema en cuestión es encontrar, para cada función de referencia $y_{ref}(\cdot)$ en una familia prescrita (de funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$), una ley de control $u(\cdot)$, también definida en el intervalo $[0, \infty)$, tal que la respuesta correspondiente $y(\cdot)$ de la planta satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_{ref}(t)\| = 0 \quad (2.5)$$

para cualquier estado inicial $x(0)$ [4].

La ley de control para lograr este objetivo debe ser provista por un *controlador por retroalimentación*, que es un dispositivo que recibe una cierta cantidad de información sobre el valor del estado $x(t)$ de la planta al tiempo t , posiblemente el valor de la salida de referencia y_{ref} al tiempo t , el cual es capaz de generar el valor requerido de la ley de control $u(t)$ a este tiempo. En este caso el controlador por retroalimentación modelado por ecuaciones diferenciales de primer orden, asume la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Gy_{med}(t) \\ u(t) &= H\xi(t) + Ky_{med}(t)\end{aligned}$$

donde $y_{med}(t)$ representa la información disponible (por ejemplo una función lineal de $x(t)$ y $y_{ref}(t)$) y $\xi(t)$ indica el estado interno.

La interconexión de la planta a controlar y del controlador por retroalimentación se define como el *sistema en lazo cerrado*, que es un sistema lineal con estado $x(t), \xi(t)$ y entrada $y_{med}(t)$. De acuerdo a esto el requerimiento de seguimiento asintótico (2.5) se debe de satisfacer para cualquier estado inicial $x(0), \xi(0), w(0)$, cualquier función de salida de referencia $y_{ref}(\cdot)$ y también para cualquier perturbación posible $w(\cdot)$ en familias prescritas (de funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$) a las cuales la señal de referencia y entrada de perturbación se asume que pertenecen. Además, se requiere que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable.

El problema de control formulado en esta forma es usualmente conocido como seguimiento asintótico con *rechazo de perturbaciones* asintótico ó *regulación de la salida*.

Usualmente, una vez que las familias de las entradas de referencia y perturbación han sido identificadas, no hay razón para mantenerlas separadas, de forma que se puede definir una perturbación aumentada

$$\tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ y_{ref} \end{bmatrix}$$

De esta manera el problema en cuestión puede ser formulado como el problema de encontrar una ley de control que cumpla con el seguimiento asintótico para una planta modelada por las ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix} \tilde{w}(t) \\ e(t) &= Cx(t) + \begin{bmatrix} E & -Q \end{bmatrix} \tilde{w}(t)\end{aligned}$$

2.3.2. Planteamiento del problema

Se considera un *sistema lineal* descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Ew(t) - Qw(t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

La primera ecuación de este sistema describe una planta con estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, con entrada de control $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y sujeto a variables de entrada exógenas $w(t) \in \mathbb{R}^q$, que incluyen perturbaciones (a ser rechazadas) y/o referencias (a ser seguidas). La segunda ecuación define una variable de error $e(t) \in \mathbb{R}^p$.

La estructura del controlador que logra el seguimiento y rechaza las perturbaciones usualmente depende de la cantidad de información disponible para retroalimentar. La situación más favorable, desde el punto de vista de diseño de la retroalimentación, ocurre cuando el conjunto de variables medidas incluye todos los componentes del estado x de la planta y de la entrada exógena w . En este caso, se dice que el controlador está provisto de toda la información (*retroalimentación del estado*) y que dicho controlador es un sistema lineal *sin memoria*, modelado por una relación de la forma

$$u = Kx + Lw$$

Una situación más realista es aquella en la cual solamente los componentes del error e están disponibles para medición. En este caso, se dice que el controlador está provisto con *retroalimentación del error* y dicho controlador es un sistema lineal *dinámico*, modelado por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= F\xi + Ge \\ u &= H\xi\end{aligned}$$

Por simplicidad matemática, y también porque de esta manera una gran cantidad de situaciones prácticas son abarcadas, es asumido que la familia de entradas exógenas $w(\cdot)$, es la familia de todas las funciones del tiempo las cuales son solución de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\dot{w} = Sw\tag{2.7}$$

La estructura del esquema de control con disposición de toda la información (retroalimentación del estado) para la regulación de la salida se muestra en la figura 2.1, mientras que el esquema por retroalimentación del error se muestra en la figura 2.2.

Los problemas de encontrar controladores para alcanzar la regulación de la salida pueden ser formalmente formulados en los siguientes términos:

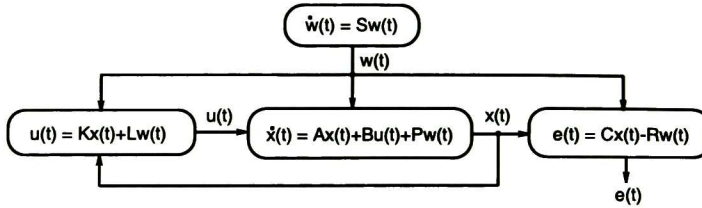


Figura 2.1: Estructura de esquema de control por retroalimentación de estado para sistemas sin retardo.

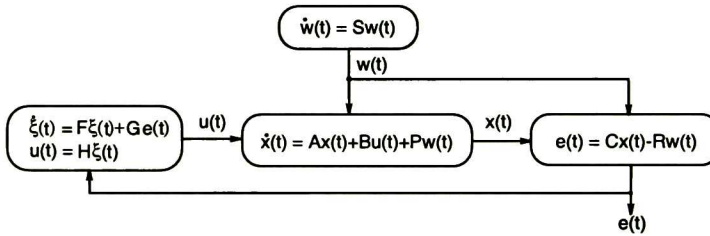


Figura 2.2: Estructura de esquema de control por retroalimentación de error para sistemas sin retardo.

Regulación de la salida por retroalimentación del estado. Dadas A, B, C, P, E, Q, S , encontrar, si es posible, dos matrices K y L tales que

$S)_{fi}$ La matriz $A + BK$ es Hurwitz.

$R)_{fi}$ Para cualquier condición inicial $(x(0), w(0))$ la solución $(x(t), w(t))$ de

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) - Rw(t), \quad R = \begin{bmatrix} E & -Q \end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)$$

es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Regulación de la salida por retroalimentación del error. Dadas A, B, C, P, E, Q, S , encontrar, si es posible, tres matrices F, G y H tales que

2.3. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN DE LA SALIDA PARA SISTEMAS SIN RETARDO 13

$S)_{ef}$ La matriz

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$$

es Hurwitz.

$R)_{ef}$ Para cualquier condición inicial $(x(0), \xi(0), w(0))$ la solución $(x(t), \xi(t), w(t))$ de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Pw(t)$$

$$\dot{\xi}(t) = F\xi(t) + Ge(t)$$

$$\dot{w}(t) = Sw(t)$$

$$e(t) = Cx(t) - R w(t)$$

donde

$$u(t) = H\xi(t)$$

es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Además, en lo que sigue, asúmase que el exosistema (2.7) satisface la siguiente hipótesis:

H1) El exosistema es *antiestable*, esto es, todos los valores propios de S tienen parte real no negativa.

2.3.3. Regulación de la salida por retroalimentación del estado

Note que para que la condición $S)_{fi}$ se satisfaga se debe cumplir que el par (A, B) sea estabilizable, esto es que los modos no controlables sean estables, lo cual se establece como hipótesis:

H2) El par (A, B) es estabilizable.

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales el problema puede ser resuelto:

Teorema 7 *Supóngase que las hipótesis H1) y H2) se satisfacen. Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación del estado puede ser resuelto si y sólo si existen matrices Π y Γ , las cuales resuelven las siguientes ecuaciones matriciales lineales*

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \tag{2.8}$$

$$0 = C\Pi - R \tag{2.9}$$

Si se satisfacen las ecuaciones (2.8) y (2.9) la ley de control que resuelve el problema de regulación de la salida es

$$u(t) = Kx(t) + (\Gamma - K\Pi)w(t) \tag{2.10}$$

2.3.4. Regulación de la salida por retroalimentación del error

Debido a que se tiene disponible sólo la información del error, se diseña un observador de estados para obtener los estados tanto del sistema como del exosistema para poder implementar la ley de control. Por lo tanto, se diseña el observador para el sistema siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) - R w(t)\end{aligned}$$

que considerando el estado conjunto

$$x^e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

el sistema se puede describir mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}^e(t) &= A^e x^e(t) + B^e u(t) \\ e(t) &= C^e x^e(t)\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde

$$A^e = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, B^e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C^e = [C \quad -R]$$

Para que el observador se pueda realizar es necesario que el par (C^e, A^e) sea detectable, lo cual se incluye como hipótesis:

H3) El par (C^e, A^e) es detectable.

Si se satisface la hipótesis H3) se puede construir el observador de estado descrito por la ecuación

$$\dot{\xi}(t) = (A^e - GC^e)\xi(t) + B^e u(t) + Ge(t)\tag{2.12}$$

A continuación se describe un procedimiento a través del cual se puede construir el regulador por retroalimentación del error empleando el principio de separación:

1. Se estabiliza el sistema sin perturbaciones, es decir, se encuentra la matriz K tal que $(A + BK)$ es Hurwitz.
2. Se verifica si existen las matrices Π y Γ tales que se satisfacen las ecuaciones (2.8) y (2.9).
3. Si se satisfacen los pasos 1 y 2 se diseña un observador para el sistema (2.11).

4. Se aplica la ley de control (2.10) con los estados observados, esto es

$$u(t) = H\xi(t) \quad (2.13)$$

donde

$$H = [K \quad (\Gamma - K\Pi)]$$

Por lo tanto el controlador está dado por

$$\dot{\xi}(t) = (A^e - GC^e + B^eH)\xi(t) + Ge(t) \quad (2.14)$$

De acuerdo a lo presentado se puede establecer el siguiente teorema:

Teorema 8 *Supóngase que las hipótesis H1), H2) y H3) se satisfacen. Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación del error puede ser resuelto si y sólo si existen matrices Π y Γ que resuelven las ecuaciones matriciales lineales (2.8) y (2.9).*

2.4. Control con modos deslizantes

Se consideran sistemas descritos por ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{x}(t) = f(x, t, u)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$

El control es seleccionado como una función discontinua del estado. Por ejemplo, cada componente del control u_i puede experimentar discontinuidades en alguna superficie no lineal $s_i(x) = 0$ en el espacio de estado

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m)$$

donde $u_i^+(x, t)$ y $u_i^-(x, t)$ son funciones del estado continuas con $u_i^+(x, t) \neq u_i^-(x, t)$; las $s_i(x)$ son funciones del estado continuas. El vector de estado de tales sistemas puede estar en una de las superficies discontinuas ó su intercepción dentro de un tiempo finito. Por ejemplo, las trayectorias del vector de estado del sistema pertenecen a alguna superficie de discontinuidad $s_i(x) = 0$ si en la vecindad de esta superficie los vectores de velocidad $f(x, t, u)$ están dirigidos unos hacia otros. Un término aceptado para el movimiento sobre superficies discontinuas es el de *modo deslizante* [1].

El modo deslizante existe en una superficie de discontinuidad siempre que las distancias a esta superficie y la velocidad de su cambio \dot{s} son de signos opuestos, es decir

$$\lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0 \quad y \quad \lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} < 0$$

Por lo tanto, el modo deslizante ocurre en la intercepción de m superficies $s_i(x) = 0$, ($i = 1, \dots, m$) y el orden de las ecuaciones del movimiento es de dimensión $n - m$, es decir, de orden menor que la dimensión del sistema original. De esta manera el control discontinuo produce la reducción de orden, lo cual lleva al desacoplamiento y simplificación del procedimiento de diseño.

Además, el elemento que implementa una acción discontinua de control $u(x)$ tiene la entrada $s(x)$ cercana a cero durante el modo deslizante mientras su salida toma valores finitos (para ser precisos el valor promedio de la salida ya que contiene componentes de alta frecuencia). Esto significa que el elemento implementa alta ganancia (teóricamente infinita), lo cual es una herramienta convencional para suprimir la influencia de perturbaciones e incertidumbres en el comportamiento de la planta. A diferencia de sistemas de control de alta ganancia continuos, el efecto de invariancia es alcanzado usando acciones de control finitas.

La dinámica del modo deslizante depende de las ecuaciones de la superficie de conmutación y no dependen del control. Por lo tanto, el procedimiento de diseño consiste de dos etapas. Primero, la ecuación de la variedad con modos deslizantes es seleccionada para diseñar la dinámica deseada de este movimiento de acuerdo con algún criterio. Entonces, el control discontinuo puede ser encontrado tal que el estado alcance la variedad y tal que el modo deslizante exista en esta variedad. Como resultado, el diseño es desacoplado en dos subproblemas de dimensión menor, y después de un intervalo de tiempo finito precediendo al movimiento deslizante, el sistema poseerá el comportamiento dinámico deseado.

2.5. Forma controlable por bloques y técnica de control por bloques

La *forma controlable por bloques* para sistemas lineales es la siguiente

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_1x_2(t) \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2x_3(t) \quad (2.16)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_r(t) = A_{r1}x_1(t) + \dots + A_{rr}x_r(t) + B_ru(t) \quad (2.17)$$

donde la peculiaridad de esta forma especial consiste en que para el bloque (2.15) el vector de estado $x_2(t)$ del segundo bloque (2.16) se puede considerar como un control ficticio; de la misma manera, para el segundo bloque (2.16) el vector de estado $x_3(t)$ se puede considerar como un control ficticio, de forma que siguiendo el mismo criterio para los bloques siguientes

2.5. FORMA CONTROLABLE POR BLOQUES Y TÉCNICA DE CONTROL POR BLOQUES 17

se encuentra que el vector de estado del bloque inferior al bloque en cuestión se considera como un control ficticio. Para el último bloque ya no se tiene un control ficticio, sino el control real $u(t)$. Esta estructura permitirá el uso de la técnica que se conoce como *control por bloques* que se tratará más adelante [1].

A continuación se describe en forma breve como se lleva un sistema lineal invariante en el tiempo a la forma controlable por bloques. El sistema está descrito inicialmente por la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.18)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Se asume que $\text{rango}(B) = m$ y el sistema es controlable. Ya que $\text{rango}(B) = m$, la matriz B en (2.18) puede ser particionada (después de reordenar los componentes del vector de estado) como

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde $B_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y el $\det(B_2) \neq 0$. Entonces la siguiente transformación de coordenadas no singular

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

reduce las ecuaciones del sistema (2.18) y (2.19) a la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= A_{11}x'_1(t) + A_{12}x'_2(t) \\ \dot{x}'_2(t) &= A_{21}x'_1(t) + A_{22}x'_2(t) + B_2 u \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $x'_1 \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, $x'_2 \in \mathbb{R}^m$ y A_{ij} son matrices constantes para $i, j = 1, 2$. Ahora se presentan 2 casos:

1. Si $\text{rango}(A_{12}) = n - m$ el sistema ya está en la forma controlable por bloques.
2. Si $\text{rango}(A_{12}) < n - m$ entonces hay que aplicar una transformación similar a (2.20) al primer bloque de (2.21).

El procedimiento se continúa hasta que se cumple la condición del paso 1.

2.5.1. Técnica de control por bloques

Para utilizar esta técnica, se asume que el sistema se encuentra en la forma controlable por bloques (2.15)-(2.17). Este es un procedimiento iterativo, donde en términos generales lo que se hace es que se van definiendo los controles ficticios a partir del primer bloque, de forma que

se obtiene una dinámica deseada, hasta llegar al último bloque donde se define el control. A continuación se describe en forma breve este procedimiento, donde por simplicidad no se indica el argumento de dependencia del tiempo.

paso 1. Se hace un cambio de variables, donde la primera es $z_1 = x_1$ y se requiere la siguiente dinámica $\dot{z}_1 = \Lambda_1 z_1$. Por lo tanto se define el control ficticio del primer bloque (2.15) como

$$x_2 = B_1^{-1}(-A_{11}x_1 + \Lambda_1 z_1 + z_2) \quad (2.22)$$

con el fin de cancelar la dinámica actual y agregar la dinámica deseada. La variable z_2 se agrega porque al no ser x_2 un control real hay una diferencia entre las dinámicas y esta variable toma en cuenta esa diferencia.

A continuación se despeja z_2 de (2.22)

$$z_2 = (A_{11} - \Lambda_1)x_1 + B_{12}x_2 \quad (2.23)$$

paso 2. Se deriva la nueva variable (2.23) a lo largo de las trayectorias del sistema original, con lo que se obtiene

$$\dot{z}_2 = \bar{A}_{21}x_1 + \bar{A}_{22}x_2 + \bar{B}_2x_3 \quad (2.24)$$

donde las matrices \bar{A}_{21} , \bar{A}_{22} y \bar{B}_2 dependen de las matrices originales del sistema y de la matriz de la dinámica deseada del paso 1 Λ_1 . De forma similar al paso 1 se define el control ficticio x_3 para obtener una dinámica deseada $\dot{z}_2 = \Lambda_2 z_2$

$$x_3 = B_2^{-1}(-\bar{A}_{21}x_1 - \bar{A}_{22}x_2 + \Lambda_2 z_2 + z_3) \quad (2.25)$$

y se despeja la nueva variable z_3

$$z_3 = \bar{A}_{31}x_1 + \bar{A}_{32}x_2 + \bar{B}_3x_3$$

Este procedimiento se continúa, de forma que en el último paso se tiene el siguiente sistema en las nuevas variables

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Lambda_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Lambda_2 z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= \sum_{i=1}^r \bar{A}_{ri} z_i + \bar{B}_r u \end{aligned}$$

Por último se define el control real u , similar a los pasos anteriores para obtener una dinámica deseada

$$u = \bar{B}_r^{-1} \left(- \sum_{i=1}^r \bar{A}_{ri} z_i + \Lambda_r z_r \right)$$

de forma que el sistema en lazo cerrado queda:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Lambda_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Lambda_2 z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_r &= \Lambda_r z_r \end{aligned}$$

donde en las nuevas variables se obtiene la dinámica deseada a través de los valores propios de las matrices $\Lambda_i, i = 1, \dots, r$. En este último paso el control también se puede elegir discontinuo

$$u = \bar{B}_r^{-1} \left(- \sum_{i=1}^r \bar{A}_{ri} z_i + \Lambda_r \text{sign}[z_r] \right)$$

De forma que una vez que se alcanza la superficie z_r la dinámica del sistema queda definida por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Lambda_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \Lambda_2 z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= \Lambda_{r-1} z_{r-1} \end{aligned}$$

2.6. Desigualdades Matriciales Lineales

En esta sección se muestran algunos aspectos básicos de las desigualdades matriciales lineales (DML), las cuales se presentan en los capítulos siguientes en algunos teoremas. Estos teoremas se basan en el teorema 6 de la sección 2.2, donde aparecen las DML's.

Una DML es una expresión de la forma [2]

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m > 0 \quad (2.26)$$

donde

$x = (x_1, \dots, x_m)$ es un vector de m números reales llamado *variables de decisión*.

F_0, \dots, F_m son matrices simétricas reales, es decir, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ para algún $n \in \mathbb{Z}_+$

La desigualdad > 0 en (2.26) significa *definida positiva*, es decir, $u^T F(x)u > 0 \forall u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. Equivalentemente, el eigenvalor más pequeño de $F(x)$ es positivo.

También la DML se puede definir de forma ligeramente más general,

Definición 9 *Desigualdad Matricial Lineal* Una DML es una desigualdad

$$F(x) > 0 \tag{2.27}$$

donde F es una función afín que mapea un espacio vectorial de dimensión finita \mathbb{V} al conjunto $\mathbb{S} := \{M \mid \exists n > 0 \text{ tal que } M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$, de matrices simétricas reales.

Una DML no estricta es una desigualdad matricial lineal donde $>$ en (2.26) y (2.27) es reemplazado por \geq .

La desigualdad matricial lineal (2.27) define una *restricción convexa* sobre x . Esto es, el conjunto $\delta := \{x \mid F(x) > 0\}$ es convexo. En efecto, si $x_1, x_2 \in \delta$ y $\alpha \in (0, 1)$ entonces

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) > 0$$

donde en la igualdad se utilizó que F es afín y la desigualdad se obtiene del hecho que $\alpha \geq 0$ y $(1 - \alpha) \geq 0$.

Aunque la restricción convexa $F(x) > 0$ sobre x puede parecer especial, se tiene que muchos conjuntos convexos pueden ser representados de esta forma. A continuación se presentan algunas propiedades de las DML's, las cuales se emplean para reducir restricciones múltiples sobre una variable desconocida a una restricción equivalente que incluye una desigualdad matricial simple.

Definición 10 *Sistema de DML's* Un sistema de desigualdades matriciales lineales es un conjunto finito de desigualdades matriciales lineales

$$F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0 \tag{2.28}$$

Es una propiedad simple pero esencial que cada sistema de DML's puede ser reescrito como una DML simple. Específicamente, $F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0$ si y sólo si

$$F(x) := \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(x) \end{bmatrix} > 0$$

La última desigualdad tiene sentido cuando $F(x)$ es simétrica para cualquier x . Además, ya que el conjunto de eigenvalores de $F(x)$ es simplemente la unión de los eigenvalores de

$F_1(x), \dots, F_k(x)$ cualquier x que satisface $F(x) > 0$ también satisface el sistema de DML's (2.28) y viceversa.

Una segunda propiedad importante toma en cuenta la incorporación de *restricciones afines* en desigualdades matriciales lineales. Lo anterior significa que *restricciones combinadas* (en la incógnita x) de la forma

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x = Ay + b \end{cases} \text{ para algún } y$$

donde la función afín $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}$ y las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ dadas pueden ser agrupadas en una desigualdad matricial lineal $\bar{F}(x) > 0$. Generalmente, las ecuaciones combinadas

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ x \in \mathcal{M} \end{cases}$$

donde \mathcal{M} es un subconjunto afín de \mathbb{R}^m , es decir,

$$\mathcal{M} = x_0 + \mathcal{M}_0 = \{x_0 + m_0 \mid m_0 \in \mathcal{M}_0\}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y \mathcal{M}_0 un subespacio lineal de \mathbb{R}^m , pueden ser reescritos en la forma de una desigualdad matricial simple $\bar{F}(x) > 0$.

Una tercera propiedad de las DML's es obtenida de un ejercicio simple de algebra. Es posible convertir algunas desigualdades *no lineales* a *desigualdades lineales*. Suponer que se particiona una matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

donde M_{11} tiene dimensión $r \times r$. Asíumase que M_{11} es no singular. Entonces la matriz $S := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$ es llamada el *complemento de Schur* de M_{11} en M . Si M es simétrica entonces se tiene que

$$\begin{aligned} M > 0 &\iff \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} > 0 \\ &\iff \begin{cases} M_{11} > 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata de esta observación es la siguiente proposición:

Proposición 11 Complemento de Schur Sea $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ una función afín la cual es particionada de acuerdo a

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$$

donde $F_{11}(x)$ es cuadrada. Entonces $F(x) > 0$ si y sólo si

$$\begin{cases} F_{11}(x) > 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}(x)[F_{11}(x)]^{-1}F_{21}(x) > 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Notar que la segunda desigualdad en (2.29) es una desigualdad *no lineal* en x . Usando este resultado, se tiene que desigualdades matriciales no lineales de la forma (2.29) pueden ser convertidas a desigualdades matriciales lineales. En particular, se tiene que desigualdades no lineales de la forma (2.29) define una restricción convexa sobre la variable x en el sentido que todas las x que satisfacen (2.29) definen un conjunto convexo.

Muchos problemas de optimización en control, identificación y procesamiento de señales pueden ser formulados (o reformulados) usando desigualdades matriciales lineales. Claramente, sólo tiene sentido tratar estos problemas a través de DML's si estas desigualdades pueden ser resueltas de una forma eficiente y confiable. Ya que la desigualdad matricial lineal $F(x) > 0$ define una restricción convexa sobre la variable x , los problemas de optimización que incluyen la minimización (o maximización) de una función de rendimiento $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}$ con $\delta := \{x \mid F(x) > 0\}$ pertenece a la clase de *problemas de optimización convexa*. De acuerdo a lo discutido, puede ser aparente que el gran poder de la teoría de la optimización convexa puede ser empleado si la función de rendimiento f se sabe que es convexa.

Suponer que $F, G, H : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ son funciones afines. Hay tres problemas genéricos relacionados al estudio de las desigualdades matriciales lineales:

1. **Viabilidad:** La prueba de que si existen o no soluciones $x \in \mathbb{V}$ de $F(x) > 0$ es llamada un *problema de viabilidad*. La DML es llamada *vable* si tal x existe, de otra forma la DML $F(x) > 0$ se dice que es *no viable*.
2. **Optimización:** Sea $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}$ y supóngase que $\delta := \{x \mid F(x) > 0\}$. El problema a determinar

$$V_{opt} = \inf_{x \in \delta} f(x)$$

es llamado un *problema de optimización con una restricción DML*. Este problema incluye la determinación de V_{opt} y para un $\epsilon > 0$ arbitrario el cálculo de una *solución casi óptima* x la cual satisface $x \in \delta$ y $V_{opt} \leq f(x) \leq V_{opt} + \epsilon$.

3. **Problema de eigenvalor generalizado:** El *problema de eigenvalor generalizado* trata de la minimización de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ sujeto a

$$\begin{cases} \lambda F(x) - G(x) > 0 \\ F(x) > 0 \\ H(x) > 0 \end{cases}$$

A continuación se presenta un ejemplo de la utilización de las DML's:

Ejemplo Se considera el problema de determinar la estabilidad asintótica de un sistema lineal autónomo

$$\dot{x} = Ax \tag{2.30}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El problema es decidir si todas las funciones $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfagan (2.30) tienen la propiedad que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. De acuerdo a la teoría de Lyapunov este sistema es asintóticamente estable si y solo si existe $X \in \mathbb{S}$ tal que $X > 0$ y $A^T X + XA < 0$. Así, la estabilidad asintótica del sistema (2.30) es equivalente a la viabilidad de la DML

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -A^T X - XA \end{bmatrix} > 0$$

Capítulo 3

Regulación de sistemas con retardo en el estado y control

3.1. Introducción

En este capítulo se propone la extensión de la teoría de regulación al caso de una clase de sistemas lineales con retardo. Esta clase está definida por los sistemas que son transformables a una representación de estado especial, llamada la forma controlable por bloques con retardos, ó forma CBR. Se tienen dos casos de la forma CBR, dependiendo de las características del sistema original, por lo que el método propuesto se presenta para ambos casos. La forma controlable por bloques por su estructura como se vió en la sección 2.5 permite un método de diseño del controlador iterativo.

El problema de regulación para este tipo de sistemas se aborda desde dos puntos de vista. El primero se basa en la teoría de regulación presentada en la sección 2.3 para sistemas sin retardo, mientras que el segundo esquema se basa en la técnica de control por bloques de la sección 2.5. Para ambos esquemas se presentan condiciones para la existencia de una solución al problema en cuestión.

En la sección 3.2 se presenta el problema de regulación de sistemas con retardo que están en la forma CBR. Se presentan los dos enfoques: retroalimentación del estado y del error y se dan condiciones para la solución. En la sección 3.3 se presenta la forma controlable por bloques. En la sección 3.4 se ilustra el primer enfoque para calcular el controlador, el cual aplica el esquema de regulación lineal. En esta sección se presentan ejemplos de los esquemas de control. En la sección 3.5 se presenta el segundo enfoque para calcular el controlador, el cual aplica la técnica de control por bloques. En esta sección también se incluyen ejemplos del método propuesto.

3.2. Regulación para una clase de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT) con retardo

Se considera la clase de sistemas LIT con retardo sujetos a una perturbación externa descritos por

$$\dot{x} = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B_0u(t) + B_1u(t - \tau) + Pw(t) \quad (3.1)$$

$$\dot{w}(t) = Sw(t) \quad (3.2)$$

$$e(t) = Cx(t) - R w(t) \quad (3.3)$$

$$x(\xi) = \varphi(\xi) \quad (3.4)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $e \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^q$ y $\tau > 0$. La condición inicial $\varphi(\xi)$ es una función continua definida para $\xi \in [t_0 - \tau, t_0]$. La ecuación (3.2) describe un generador de señales de referencia y/o perturbación externa, mientras la ecuación (3.3) es la señal de error de seguimiento entre la salida del sistema y la señal de referencia a ser seguida.

En base a lo presentado en la sección 2.3 se tienen dos estructuras del controlador de acuerdo a la cantidad de información disponible: retroalimentación del estado y del error. A continuación se definen ambos problemas.

Para el sistema (3.1)-(3.3), el **Problema de Regulación por Retroalimentación del Estado para sistemas con retardo en forma CBR (PRRES-CBR)** consiste en encontrar, si es posible, una retroalimentación

$$u(t) = \sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}x(t - j\tau) + \Omega w(t) \quad (3.5)$$

tal que

EES/CBR) El sistema en lazo cerrado sin perturbaciones es asintóticamente estable, es decir, la solución $x = 0$ de

$$\begin{aligned} \dot{x} = & A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B_0 \left[\sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}x(t - j\tau) \right] \\ & + B_1 \left[\sum_{i=2}^{r+1} K_{1(i-1)}u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}x(t - j\tau) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

es asintóticamente estable. Esto significa que, para cualquier condición inicial $\varphi(\xi) : [t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente solución $x(t)$ de (3.6), satisface $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

RES/CBR) El sistema en lazo cerrado (3.1) a (3.5) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

De la misma manera el **Problema de Regulación por Retroalimentación del Error para sistemas con retardo en forma CBR (PRRE-CBR)** puede ser establecido como el problema de encontrar un controlador dinámico

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i} \xi(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} \tilde{F}_{2j} u(t - j\tau) + L_0 [Cx(t) - Rw(t)] \\ &\quad + L_1 [Cx(t - \tau) - Rw(t - \tau)] \\ u(t) &= \sum_{i=1}^r \tilde{K}_{1i} u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r \tilde{K}_{2j} \xi(t - j\tau) \end{aligned} \quad (3.7)$$

tal que

EE/CBR) El punto de equilibrio del sistema compuesto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + \sum_{i=1}^r B_0 \tilde{K}_{1i} u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r B_0 \tilde{K}_{2j} \xi(t - j\tau) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r+1} B_1 \tilde{K}_{1(i-1)} u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} B_1 \tilde{K}_{2(j-1)} \xi(t - j\tau) \\ \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i} \xi(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} \tilde{F}_{2j} u(t - j\tau) + L_0 Cx(t) + L_1 Cx(t - \tau) \end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

RE/CBR) Para cualquier condición inicial $(x(0), \xi(0), w(0))$ la solución $(x(t), \xi(t), w(t))$ del sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.3) y (3.7) es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

En las figuras 3.1 y 3.2 se muestran los esquemas de control para los dos problemas antes mencionados.

3.2.1. El problema de regulación por retroalimentación del estado

Para el propósito de este trabajo se establecen las siguientes hipótesis:

H1) Todos los eigenvalores de S están en el lado derecho cerrado del plano complejo.

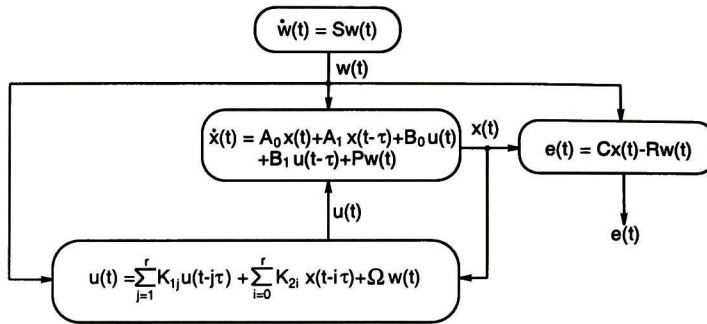


Figura 3.1: Estructura de esquema de control PRRES-CBR.

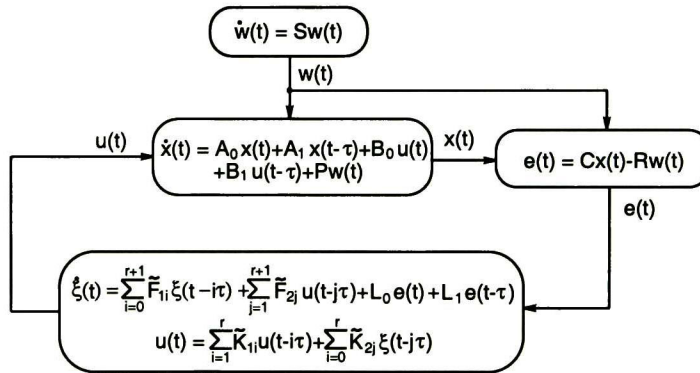


Figura 3.2: Estructura de esquema de control PRRE-CBR.

H2) Existen matrices $K_{1i}, i = 1, \dots, r, K_{2j}, j = 0, \dots, r$ tal que la condición EES/CBR) se cumple.

Se establece en primer lugar el siguiente resultado

Lema 12 *Asúmase que H1) e H2) se cumplen. Entonces para $u(t)$ dado por (3.5), la condición RES/CBR) se satisface si existe una solución X a las ecuaciones matriciales*

$$XS = A_0 X + A_1 X e^{-\tau S} + B_0 \sum_{j=0}^r K_{2j} X e^{-j\tau S} + B_1 \sum_{i=1}^{r+1} K_{2(i-1)} X e^{-i\tau S} + P_c \quad (3.8)$$

$$0 = CX - R \quad (3.9)$$

donde

$$P_c = B_0 \Omega + B_1 \Omega e^{-\tau S} + P \quad (3.10)$$

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

Prueba. Considérese la función $\hat{x}(t) = x(t) - Xw(t)$. Así

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A_0(\hat{x}(t) + Xw(t)) + A_1(\hat{x}(t - \tau) + Xw(t - \tau)) + B_0 \left[\sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) \right. \\ & + \sum_{j=0}^r K_{2j}(\hat{x}(t - j\tau) + Xw(t - j\tau)) \left. \right] + B_1 \left[\sum_{i=2}^{r+1} K_{1(i-1)}u(t - i\tau) \right. \\ & + \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}(\hat{x}(t - j\tau) + Xw(t - j\tau)) \left. \right] + B_0\Omega w(t) \\ & + B_1\Omega w(t - \tau) + Pw(t) - XSw(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.2) la siguiente relación puede ser obtenida

$$w(t - \tau) = e^{(t-\tau)S}w(t_0) = e^{-\tau S}e^{tS}w(t_0) = e^{-\tau S}w(t) \quad (3.12)$$

con la cual y reorganizando los términos en (3.11), se produce lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau) + B_0 \left[\sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}\hat{x}(t - j\tau) \right] \\ & + B_1 \left[\sum_{i=2}^{r+1} K_{1(i-1)}u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}\hat{x}(t - j\tau) \right] + \left[A_0X + A_1Xe^{-\tau S} \right. \\ & + B_0 \sum_{j=0}^r K_{2j}Xe^{-j\tau S} + B_1 \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}Xe^{-j\tau S} + B_0\Omega \\ & \left. + B_1\Omega e^{-\tau S} + P - XS \right] w(t). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.8) y (3.10), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) = & A_0\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau) + B_0 \left[\sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}\hat{x}(t - j\tau) \right] \\ & + B_1 \left[\sum_{i=2}^{r+1} K_{1(i-1)}u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}\hat{x}(t - j\tau) \right] \end{aligned}$$

Así, de H2) se tiene que $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$

Para el error de seguimiento, se tiene

$$e(t) = C\hat{x}(t) + (CX - R)w(t)$$

y si (3.9) se satisface, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

■

Como en el caso sin retardo, basado en el Lema 12, se pueden ahora establecer condiciones suficientes para la existencia de una solución del PRRES-CBR.

Teorema 13 *Asúmase que H1) e H2) se cumplen. Entonces, el PRRES-CBR tiene una solución si las ecuaciones matriciales*

$$\Pi S = A_0 \Pi + (A_1 \Pi + B_1 \Gamma) e^{-\tau S} + B_0 \Gamma + P \quad (3.13)$$

$$0 = C \Pi - R \quad (3.14)$$

tienen una solución Π y Γ .

Prueba. La prueba es constructiva.

Paso 1) Se escogen matrices $K_{1i}, i = 1, \dots, r, K_{2j}, j = 0, \dots, r$ tal que la condición H2) se cumple.

Paso 2) Se define la matriz en estado estable Γ como

$$\Gamma = \Omega + \sum_{j=0}^r K_{2j} \Pi e^{-j\tau S} \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.15) en (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi S = & A_0 \Pi + A_1 \Pi e^{-\tau S} + B_0 \sum_{j=0}^r K_{2j} \Pi e^{-j\tau S} + B_1 \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)} \Pi e^{-j\tau S} + B_0 \Omega \\ & + B_1 \Omega e^{-\tau S} + P \end{aligned}$$

Usando (3.10), se llega a la siguiente ecuación

$$\Pi S = A_0 \Pi + A_1 \Pi e^{-\tau S} + B_0 \sum_{j=0}^r K_{2j} \Pi e^{-j\tau S} + B_1 \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)} \Pi e^{-j\tau S} + P_c$$

por esta ecuación y (3.14), el teorema se obtiene del Lema 12 si definimos $X = \Pi$.

■

El control (3.5) que resuelve el PRRES-CBR puede ser ahora representado en la forma

$$u(t) = \sum_{j=0}^r K_{2j} (x(t - j\tau) - \Pi w(t - j\tau)) + \Gamma w(t) + \sum_{i=1}^r K_{1i} u(t - i\tau) - \sum_{k=1}^r K_{1k} \Gamma w(t - k\tau) \quad (3.16)$$

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución a las ecuaciones (3.13)-(3.14) está dada por el siguiente resultado.

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

Teorema 14 *Las ecuaciones (3.13)-(3.14) son universalmente solubles, es decir, tienen una solución Π, Γ para cualquier P y R dados, si y sólo si*

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A_0 - \lambda I + A_1 e^{-\tau\lambda} & B_0 + B_1 e^{-\tau\lambda} \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \sigma(S). \quad (3.17)$$

Prueba. Para la prueba se utiliza el Teorema 30 del apéndice A. Las ecuaciones (3.13)-(3.14) pueden ser escritas como

$$\begin{pmatrix} -P \\ -R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} S + \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} e^{-\tau S}$$

la cual claramente tiene la forma de la ecuación (A.1) del apéndice A si definimos $D_1 = I, D_2 = S, D_3 = e^{-\tau S}$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} \text{ y } \Theta = \begin{pmatrix} -P \\ -R \end{pmatrix}$$

Ahora se toma un eigenvector v de S , es decir, $Sv = \lambda v$ para $\lambda \in \sigma(S)$, entonces, $S^k v = \lambda^k v$ y $e^{\alpha S} v = e^{\alpha \lambda} v$. Así, la eigentupla conjunta de (D_1, D_2, D_3) tiene la forma

$$\hat{\lambda} = (1, \lambda, e^{-\tau\lambda})$$

En este caso la ecuación (A.2) del apéndice A toma la forma

$$G(\hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\tau\lambda}$$

Para toda $\lambda \in \sigma(S)$. Finalmente, ya que $G(\hat{\lambda})$ tiene rango pleno por filas si (3.17) se satisface, la prueba del teorema se sigue del Teorema 30. ■

3.2.2. El problema de regulación por retroalimentación del error

Para este caso, de forma similar a la retroalimentación de estado se prueba primero un resultado, el cual se usará después para dar una solución al problema.

Lema 15 *Asúmase que se cumple H1). Supóngase que existe una retroalimentación (3.7) para la cual la condición EE/CBR) se satisface. Entonces la condición RE/CBR) también se satisface si y sólo si existen matrices Π y Σ que resuelven las ecuaciones matriciales lineales*

$$\begin{aligned} \Pi S &= A_0 \Pi + B_0 \tilde{K}_{20} \Sigma + A_1 \Pi e^{-\tau S} + \sum_{i=1}^r [B_0 \tilde{K}_{2i} + B_1 \tilde{K}_{2(i-1)}] \Sigma e^{-i\tau S} \\ &\quad + B_1 \tilde{K}_{2r} \Sigma e^{-(r+1)\tau S} + P \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Sigma S = \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i} \Sigma e^{-i\tau S} \quad (3.19)$$

$$0 = C \Pi - R \quad (3.20)$$

Prueba. Se considera el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + \sum_{i=1}^r B_0\tilde{K}_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r B_0\tilde{K}_{2j}\xi(t - j\tau) \\
 &\quad + \sum_{i=2}^{r+1} B_1\tilde{K}_{1(i-1)}u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} B_1\tilde{K}_{2(j-1)}\xi(t - j\tau) + Pw(t) \\
 \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i}\xi(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} \tilde{F}_{2j}u(t - j\tau) + L_0Cx(t) - L_0Rw(t) \\
 &\quad + L_1Cx(t - \tau) - L_1Rw(t - \tau)
 \end{aligned}$$

Ahora se considera la transformación de coordenadas $\tilde{x} = x - \Pi w$ y $\tilde{\xi} = \xi - \Sigma w$. En las nuevas coordenadas así definidas, las ecuaciones que describen el sistema en lazo cerrado toman la forma

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau) \\ \tilde{\xi}(t - \tau) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - i\tau) \\ \tilde{\xi}(t - i\tau) \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\xi}(t - (r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0\tilde{K}_{11} \\ \tilde{F}_{21} \end{bmatrix} u(t - \tau) \\
 &\quad + \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0\tilde{K}_{1i} + B_1\tilde{K}_{1(i-1)} \\ \tilde{F}_{2i} \end{bmatrix} u(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1\tilde{K}_{1r} \\ \tilde{F}_{2(r+1)} \end{bmatrix} u(t - (r+1)\tau) \\
 &\quad + \Delta w(t)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_0\Pi + A_1\Pi e^{-\tau S} + \sum_{i=0}^r B_0\tilde{K}_{2i}\Sigma e^{-i\tau S} + \sum_{j=1}^{r+1} B_1\tilde{K}_{2(j-1)}\Sigma e^{-j\tau S} + P - \Pi S \\ \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i}\Sigma e^{-i\tau S} + L_0C\Pi - L_0R + L_1C\Pi e^{-\tau S} - L_1R e^{-\tau S} - \Sigma S \end{bmatrix}$$

Reacomodando los términos de la matriz Δ de la ecuación (3.21) se tiene la ecuación

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-\tau S} \\
 &\quad + \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-i\tau S} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-(r+1)\tau S} + \begin{bmatrix} P \\ -L_0R - L_1R e^{-\tau S} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

Para obtener las condiciones sobre las cuales la ecuación (3.22) tiene una solución se emplea el Teorema 30 del apéndice A, donde la ecuación (A.1) tiene la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -P \\ L_0R + L_1Re^{-\tau S} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S + \\ &\begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-\tau S} + \\ &\sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-i\tau S} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-(r+1)\tau S} \end{aligned}$$

donde

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix}, G_2 = - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix},$$

$$G_{i+2} = \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix}, i = 2, \dots, r, G_{r+3} = \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix}, D_1 = I,$$

$$D_2 = S, D_{i+2} = e^{-i\tau S}, i = 1, \dots, r+1, \Theta = \begin{bmatrix} -P \\ L_0R + L_1Re^{-\tau S} \end{bmatrix}$$

la correspondiente eigentupla conjunta es

$$\hat{\lambda} = (1, \lambda, e^{-\tau\lambda}, \dots, e^{-(r+1)\tau\lambda})$$

Del Teorema 30 la ecuación (3.22) tiene una solución y es única si la matriz (A.2) tiene rango pleno por filas, $2n + q, \forall \lambda \in \sigma(S)$, para cualquier eigentupla conjunta $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{r+3})$ de (D_1, \dots, D_{r+3}) , donde en este caso

$$\begin{aligned} G(\hat{\lambda}) &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} e^{-\tau\lambda} \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} e^{-i\tau\lambda} + \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} e^{-(r+1)\tau\lambda} \end{aligned}$$

Se tiene que la condición EE/CBR) implica que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0\tilde{K}_{20} \\ L_0C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & B_0\tilde{K}_{21} + B_1\tilde{K}_{20} \\ L_1C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t-\tau) \\ \tilde{\xi}(t-\tau) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t-i\tau) \\ \tilde{\xi}(t-i\tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & B_1\tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t-(r+1)\tau) \\ \tilde{\xi}(t-(r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0\tilde{K}_{11} \\ \tilde{F}_{21} \end{bmatrix} u(t-\tau) \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0\tilde{K}_{1i} + B_1\tilde{K}_{1(i-1)} \\ \tilde{F}_{2i} \end{bmatrix} u(t-i\tau) + \begin{bmatrix} B_1\tilde{K}_{1r} \\ \tilde{F}_{2(r+1)} \end{bmatrix} u(t-(r+1)\tau) \end{aligned}$$

es estable.

Si las matrices Π y Σ que satisfacen (3.22) existen, entonces $\Delta = 0$ y de la ecuación (3.21) se tiene que $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ y $\tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$, por lo tanto $x(t) \rightarrow \Pi w(t)$ y $\xi(t) \rightarrow \Sigma w(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. El mapeo del error $e(t) = Cx(t) - Rw(t)$ tiende en el límite a

$$e(t) = (C\Pi - R)w(t).$$

Ya que el exosistema es antiestable, entonces $e(t) \rightarrow 0$ si y sólo si

$$C\Pi - R = 0$$

Así la condición RE/CBR) se satisface si y sólo si la única solución Π y Σ de (3.22) satisface también (3.20).

Del primer bloque de la ecuación (3.22) se obtiene

$$\Pi S = A_0\Pi + B_0\tilde{K}_{20}\Sigma + A_1\Pi e^{-\tau S} + \sum_{i=1}^r [B_0\tilde{K}_{2i} + B_1\tilde{K}_{2(i-1)}]\Sigma e^{-i\tau S} + B_1\tilde{K}_{2r}\Sigma e^{-(r+1)\tau S} + P$$

que coincide con la ecuación (3.18).

Del segundo bloque de la ecuación (3.22) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \Sigma S &= L_0C\Pi + \tilde{F}_{10}\Sigma + L_1C\Pi e^{-\tau S} + \tilde{F}_{11}\Sigma e^{-\tau S} + \sum_{i=2}^r \tilde{F}_{1i}\Sigma e^{-i\tau S} + \tilde{F}_{1(r+1)}\Sigma e^{-(r+1)\tau S} \\ &\quad - L_0R - L_1R e^{-\tau S} \\ &= L_0[C\Pi - R] + L_1[C\Pi - R]e^{-\tau S} + \tilde{F}_{11}\Sigma e^{-\tau S} + \sum_{i=2}^r \tilde{F}_{1i}\Sigma e^{-i\tau S} + \tilde{F}_{1(r+1)}\Sigma e^{-(r+1)\tau S} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $C\Pi - R = 0$ produce

$$\Sigma S = \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i}\Sigma e^{-i\tau S}$$

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

que coincide con la ecuación (3.19).

■

Se vió en la sección previa que el problema de la regulación de la salida puede ser resuelto por una ley de retroalimentación (3.5), la cual depende de los estados tanto del sistema como del exosistema. Para el caso de retroalimentación del error, ya que los estados no están disponibles en su totalidad, se emplea un observador de estado para proveer esta información.

Se retoma el sistema extendido descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B_0u(t) + B_1u(t - \tau) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) - Rw(t)\end{aligned}$$

el cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}x^e(t) &= A_0^e x^e(t) + A_1^e x^e(t - \tau) + B_0^e u(t) + B_1^e u(t - \tau) \\ e(t) &= C^e x^e(t)\end{aligned}\tag{3.23}$$

donde

$$\begin{aligned}x^e(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, A_0^e = \begin{bmatrix} A_0 & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, A_1^e = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_0^e &= \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1^e = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C^e = [C \quad -R]\end{aligned}$$

Un observador para el sistema (3.23) está dado por

$$\dot{\xi}(t) = [A_0^e - L_0 C^e] \xi(t) + [A_1^e - L_1 C^e] \xi(t - \tau) + B_0^e u(t) + B_1^e u(t - \tau) + L_0 e(t) + L_1 e(t - \tau)\tag{3.24}$$

El siguiente teorema expresa condiciones de estabilidad del observador propuesto.

Teorema 16 *Sea L_0 una matriz tal que $(A_0^e - L_0 C^e)$ es una matriz estable. Sean Q y M matrices simétricas asociadas con la ecuación de Lyapunov*

$$(A_0^e - L_0 C^e)^T Q + Q(A_0^e - L_0 C^e) + 2M = 0$$

satisfaciendo

$$M > 0$$

$$M - Q(A_1^e - L_1 C^e)M^{-1}(A_1^e - L_1 C^e)^T Q > 0$$

Entonces el observador descrito por (3.24) es asintóticamente estable y $\xi(t) \rightarrow x^e(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Prueba. Se define el error de observación como

$$z(t) = x^e(t) - \xi(t)$$

al tomarse la derivada del error se tiene

$$\dot{z}(t) = (A_0^e - L_0C^e)z(t) + (A_1^e - L_1C^e)z(t - \tau) \quad (3.25)$$

Así, del Teorema 6 se deriva el resultado. ■

De la discusión anterior el procedimiento para construir el controlador por retroalimentación del error puede ser establecido como sigue

paso 1) Se calculan las matrices $K_{1i}, i = 1, \dots, r, K_{2j}, j = 0, \dots, r$ tal que se cumpla la condición EES/CBR).

paso 2) Se encuentra, si es posible, una solución Π y Γ de las ecuaciones (3.13)-(3.14).

paso 3) Se diseña el observador (3.24) para el estado $x^e(t)$, donde

$$\dot{\xi}(t) = [A_0^e - L_0C^e]\xi(t) + [A_1^e - L_1C^e]\xi(t - \tau)$$

es estable.

Finalmente, el controlador tiene la estructura

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^{r+1} \tilde{F}_{1i}\xi(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} \tilde{F}_{2j}u(t - j\tau) + L_0e(t) + L_1e(t - \tau) \\ &= \sum_{i=0}^{r+1} F_{1i}^0\xi^0(t - i\tau) + \sum_{i=0}^{r+1} F_{1i}^1\xi^1(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} F_{2j}u(t - j\tau) \\ &\quad + L_0e(t) + L_1e(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^r \tilde{K}_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r \tilde{K}_{2j}\xi(t - j\tau) \\ &= \sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + [K_{20} \quad \Omega] \begin{bmatrix} \xi^0(t) \\ \xi^1(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r [K_{2i} \quad 0] \begin{bmatrix} \xi^0(t - i\tau) \\ \xi^1(t - i\tau) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde

$$\Omega = \Gamma - \sum_{i=0}^r K_{2i}\Pi e^{-i\tau S} - \sum_{j=1}^r K_{1j}\Gamma e^{-j\tau S} \quad (3.28)$$

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

y

$$F_{10}^0 = \begin{bmatrix} A_0 - L_0^0 C + B_0 K_{20} \\ -L_0^1 C \end{bmatrix} \quad F_{11}^0 = \begin{bmatrix} A_1 - L_1^0 C + B_0 K_{21} + B_1 K_{20} \\ -L_1^1 C \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$F_{1i}^0 = \begin{bmatrix} B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 2, \dots, r, \quad F_{1(r+1)}^0 = \begin{bmatrix} B_1 K_{2r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$F_{10}^1 = \begin{bmatrix} P + L_0^0 R + B_0 \Gamma - B_0 K_{20} \Pi \\ S + L_0^1 R \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$F_{11}^1 = \begin{bmatrix} L_1^0 R - B_0 K_{21} \Pi - B_0 K_{11} \Gamma + B_1 \Gamma - B_1 K_{20} \Pi \\ L_1^1 R \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

$$F_{1i}^1 = \begin{bmatrix} -B_0 K_{2i} \Pi - B_0 K_{1i} \Gamma - B_1 K_{2(i-1)} \Pi - B_1 K_{1(i-1)} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 2, \dots, r, \quad (3.33)$$

$$F_{1(r+1)}^1 = \begin{bmatrix} -B_1 K_{2r} \Pi - B_1 K_{1r} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_{21} = \begin{bmatrix} B_0 K_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$F_{2i} = \begin{bmatrix} B_0 K_{1i} + B_1 K_{1(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad i = 2, \dots, r, \quad F_{2(r+1)} = \begin{bmatrix} B_1 K_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi^0(t) \\ \xi^1(t) \end{bmatrix}, \quad \xi^0(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \xi^1(t) \in \mathbb{R}^q, \quad F_{1i}^0 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}, \quad F_{1i}^1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times q}$$

Se demuestra ahora que este controlador resuelve el problema bajo consideración.

Teorema 17 *Asúmase que las H1), H2) y la condición del Teorema (16) se satisfacen. Entonces el PRRE-CBR puede resolverse si y sólo si existen matrices Π y Γ las cuales resuelven las ecuaciones matriciales lineales (3.13) y (3.14).*

Prueba.

(Necesidad)

Supóngase que existe una solución al PRRE-CBR, entonces por el Lema 15 las ecuaciones (3.18)-(3.20) se satisfacen. Estableciendo

$$\Gamma = \sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i} \Sigma e^{-irS}$$

de la ecuación (3.18) se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi S &= A_0 \Pi + A_1 \Pi e^{-\tau S} + B_0 \sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i} \Sigma e^{-i\tau S} + [B_1 \sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i} \Sigma e^{-i\tau S}] e^{-\tau S} + P \\ &= A_0 \Pi + (A_1 \Pi + B_1 \Gamma) e^{-\tau S} + B_0 \Gamma + P \end{aligned}$$

que es igual a (3.13). Además, (3.20) coincide con (3.14)

(Suficiencia)

Si existen matrices Π y Γ , entonces por el Teorema 16 se puede diseñar un controlador (3.26).

Se demuestra ahora que este controlador satisface la condición EE/CBR).

El subsistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \tilde{K}_{20} \\ L_0 C & \tilde{F}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & B_0 \tilde{K}_{21} + B_1 \tilde{K}_{20} \\ L_1 C & \tilde{F}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau) \\ \tilde{\xi}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0 \tilde{K}_{2i} + B_1 \tilde{K}_{2(i-1)} \\ 0 & \tilde{F}_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - i\tau) \\ \tilde{\xi}(t - i\tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & B_1 \tilde{K}_{2r} \\ 0 & \tilde{F}_{1(r+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\xi}(t - (r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \tilde{K}_{11} \\ \tilde{F}_{21} \end{bmatrix} u(t - \tau) \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 \tilde{K}_{1i} + B_1 \tilde{K}_{1(i-1)} \\ \tilde{F}_{2i} \end{bmatrix} u(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1 \tilde{K}_{1r} \\ \tilde{F}_{2(r+1)} \end{bmatrix} u(t - (r+1)\tau) \end{aligned}$$

sustituyendo (3.26), (3.27), (3.29)-(3.35), toma la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & B_0 K_{20} & B_0 \Omega \\ L_0^0 C & A_0 - L_0^0 C + B_0 K_{20} & P + L_0^0 R + B_0 \Omega \\ L_0^1 C & -L_0^1 C & S + L_0^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}^0(t) \\ \tilde{\xi}^1(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_1 & B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & B_1 \Omega \\ L_1^0 C & A_1 - L_1^0 C + B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & L_1^0 R + B_1 \Omega \\ L_1^1 C & -L_1^1 C & L_1^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau) \\ \tilde{\xi}^0(t - \tau) \\ \tilde{\xi}^1(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} 0 & B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & 0 \\ 0 & B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - i\tau) \\ \tilde{\xi}^0(t - i\tau) \\ \tilde{\xi}^1(t - i\tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & B_1 K_{2r} & 0 \\ 0 & B_1 K_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\xi}^0(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\xi}^1(t - (r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 K_{11} \\ B_0 K_{11} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \tau) \\ &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{1i} + B_1 K_{1(i-1)} \\ B_0 K_{1i} + B_1 K_{1(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1 K_{1r} \\ B_1 K_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - (r+1)\tau) \end{aligned}$$

Usando la matriz

$$\Xi = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

para una transformación de coordenadas, el subsistema toma la forma

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\zeta}}(t) \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + B_0 K_{20} & B_0 K_{20} & B_0 \Omega \\ 0 & A_0 - L_0^0 C & P + L_0^0 R \\ 0 & -L_0^1 C & S + L_0^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t) \\ \tilde{\phi}^0(t) \\ \tilde{\phi}^1(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A_1 + B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & B_1 \Omega \\ 0 & A_1 - L_1^0 C & L_1^0 R \\ 0 & -L_1^1 C & L_1^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - \tau) \\ \tilde{\phi}^0(t - \tau) \\ \tilde{\phi}^1(t - \tau) \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - i\tau) \\ \tilde{\phi}^0(t - i\tau) \\ \tilde{\phi}^1(t - i\tau) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} B_1 K_{2r} & B_1 K_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\phi}^0(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\phi}^1(t - (r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 K_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \tau) \\
 &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{1i} + B_1 K_{1(i-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1 K_{1r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t - (r+1)\tau)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} A_0 + B_0 K_{20} & [B_0 K_{20} & B_0 \Omega] \\ 0 & A_0^e - L_0 C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} A_1 + B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & [B_0 K_{21} + B_1 K_{20} & B_1 \Omega] \\ 0 & A_1^e - L_1 C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - \tau) \\ \tilde{\phi}(t - \tau) \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & [B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} & 0] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - i\tau) \\ \tilde{\phi}(t - i\tau) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} B_1 K_{2r} & [B_1 K_{2r} & 0] \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - (r+1)\tau) \\ \tilde{\phi}(t - (r+1)\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 K_{11} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - \tau) \\
 &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{1i} + B_1 K_{1(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1 K_{1r} \\ 0 \end{bmatrix} u(t - (r+1)\tau)
 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\zeta}}(t) &= (A_0 + B_0K_{20})\zeta(t) + (A_1 + B_0K_{21} + B_1K_{20})\zeta(t - \tau) + \sum_{i=2}^r (B_0K_{2i} + B_1K_{2(i-1)})\zeta(t - i\tau) \\
 &\quad + B_1K_{2r}\zeta(t - (r+1)\tau) + B_0K_{11}u(t - \tau) + \sum_{i=2}^r (B_0K_{1i} + B_1K_{1(i-1)})u(t - i\tau) \\
 &\quad + B_1K_{1r}u(t - (r+1)\tau) + \begin{bmatrix} B_0K_{20} & B_0\Omega \end{bmatrix} \phi(t) + \begin{bmatrix} B_0K_{21} + B_1K_{20} & B_1\Omega \end{bmatrix} \phi(t - \tau) \\
 &\quad + \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0K_{2i} + B_1K_{2(i-1)} & 0 \end{bmatrix} \phi(t - i\tau) + \begin{bmatrix} B_1K_{2r} & 0 \end{bmatrix} \phi(t - (r+1)\tau) \\
 \dot{\tilde{\phi}}(t) &= (A_0^e - L_0C^e)\phi(t) + (A_1^e - L_1C^e)\phi(t - \tau).
 \end{aligned}$$

Por el Teorema 16 se tiene que $\tilde{\phi}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, ya que la H2) se satisface se tiene $\tilde{\zeta}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto la condición EE/CBR) se satisface.

Para probar la condición RE/CBR) se usa el Lema 15. Si existen las matrices Π y Γ , entonces estableciendo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma^0 \\ \Sigma^1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

donde

$$\Sigma^0 \in \mathbb{R}^{n \times q}, \Sigma^1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \Pi S &= A_0\Pi + B_0\tilde{K}_{20}\Sigma + A_1\Pi e^{-\tau S} + B_0\tilde{K}_{21}\Sigma e^{-\tau S} + B_1\tilde{K}_{20}\Sigma e^{-\tau S} + \sum_{i=2}^r B_0\tilde{K}_{2i}\Sigma e^{-i\tau S} \\
 &\quad + \sum_{i=2}^r B_1\tilde{K}_{2(i-1)}\Sigma e^{-i\tau S} + B_1\tilde{K}_{2r}\Sigma e^{-(r+1)\tau S} + P \\
 &= A_0\Pi + A_1\Pi e^{-\tau S} + B_1 \left[\sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i}\Sigma e^{-i\tau S} \right] e^{-\tau S} + B_0 \sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i}\Sigma e^{-i\tau S} + P
 \end{aligned}$$

la cual, tomando en cuenta

$$\Gamma = \sum_{i=0}^r \tilde{K}_{2i}\Sigma e^{-i\tau S}$$

tiene la forma

$$\Pi S = A_0\Pi + (A_1\Pi + B_1\Gamma)e^{-\tau S} + B_0\Gamma + P$$

que es igual a (3.13).

3.2. REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

De la ecuación (3.19) y (3.26), (3.28), (3.29)-(3.35) se tiene

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} S &= \begin{bmatrix} A_0 - L_0^0 C + B_0 K_{20} \\ -L_0^1 C \end{bmatrix} \Sigma^0 + \begin{bmatrix} P + L_0^0 R + B_0 \Omega \\ S + L_0^1 R \end{bmatrix} \Sigma^1 \\
 &+ \begin{bmatrix} A_1 - L_1^0 C + B_0 K_{21} + B_1 K_{20} \\ -L_1^1 C \end{bmatrix} \Sigma^0 e^{-\tau S} + \begin{bmatrix} L_1^0 R + B_1 \Omega \\ L_1^1 R \end{bmatrix} \Sigma^1 e^{-\tau S} \\
 &+ \sum_{i=2}^r \begin{bmatrix} B_0 K_{2i} + B_1 K_{2(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^0 e^{-i\tau S} + \begin{bmatrix} B_1 K_{2r} \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^0 e^{-(r+1)\tau S} \\
 &= \begin{bmatrix} term_1 \\ term_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 term_1 &= A_0 \Pi - L_0^0 C \Pi + B_0 K_{20} \Pi + P + L_0^0 R + B_0 \Omega + A_1 \Pi e^{-\tau S} - L_1^0 C \Pi e^{-\tau S} + B_0 K_{21} \Pi e^{-\tau S} \\
 &+ B_1 K_{20} \Pi e^{-\tau S} + L_1^0 R e^{-\tau S} + B_1 \Omega e^{-\tau S} + \sum_{i=2}^r B_0 K_{2i} \Pi e^{-i\tau S} + \sum_{i=2}^r B_1 K_{2(i-1)} \Pi e^{-i\tau S} \\
 &+ B_1 K_{2r} \Pi e^{-(r+1)\tau S} \\
 &= A_0 \Pi + A_1 \Pi e^{-\tau S} - L_0^0 [C \Pi - R] - L_1^0 [C \Pi - R] e^{-\tau S} + B_0 \left[\sum_{i=0}^r K_{2i} \Pi e^{-i\tau S} + \Omega \right] \\
 &+ B_1 \left[\sum_{i=0}^r K_{2i} \Pi e^{-i\tau S} + \Omega \right] e^{-i\tau S} + P \\
 &= A_0 \Pi + (A_1 \Pi + B_1 \Gamma) e^{-\tau S} + B_0 \Gamma + P
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 term_2 &= -L_0^1 C \Pi + S + L_0^1 R - L_1^1 C \Pi e^{-\tau S} + L_1^1 R \Pi e^{-\tau S} \\
 &= -L_0^1 [C \Pi - R] - L_1^1 [C \Pi - R] e^{-\tau S} + S \\
 &= S
 \end{aligned}$$

por lo tanto se obtiene

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A_0 \Pi + (A_1 \Pi + B_1 \Gamma) e^{-\tau S} + B_0 \Gamma + P \\ S \end{bmatrix}$$

la cual satisface (3.13) y (3.14). Finalmente (3.20) también coincide con (3.14).

3.3. La forma controlable por bloques con retardo (CBR)

Para obtener un método general para calcular la ley de control que garantice el seguimiento, se introduce una forma particular, definida como la forma controlable por bloques con retardo (CBR)[5].

Bajo algunas condiciones presentadas en [5] el sistema (3.1) puede tomar la forma CBR que consiste de r bloques

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= A_{0,1}x_1(t) + A_{1,1}x_1(t - \tau) + P_1w(t) + B_{0,1}v_1(t), v_1(t) = x_2(t) + D_1x_2(t - \tau) \\
 \dot{x}_i &= A_{0,i}\bar{x}_i(t) + A_{1,i}\bar{x}_i(t - \tau) + P_iw(t) + B_{0,i}v_i(t), v_i(t) = x_{i+1}(t) + D_i x_{i+1}(t - \tau), \\
 &\quad i = 2, \dots, r - 1 \\
 \dot{x}_r &= A_{0,r}\bar{x}_r(t) + A_{1,r}\bar{x}_r(t - \tau) + P_rw(t) + B_{0,r}v_r(t), v_r(t) = u(t) + D_ru(t - \tau) \\
 y(t) &= Cx(t) = x_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $x = [x_1, \dots, x_r]^T$, $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\text{rango}(B_{0,i}) = n_i$, $i = 1, \dots, r$, $A_{0,i}, A_{1,i}$, $i = 1, \dots, r$ son matrices de dimensiones apropiadas y los enteros n_i satisfacen

$$m \geq n_r \geq n_{r-1} \geq \dots \geq n_2 \geq n_1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n$$

Las siguientes dos situaciones son posibles con respecto a estos enteros:

S1: $n_1 = n_2 = \dots = n_r = m$. En este caso el sistema está descrito por las ecuaciones (3.37), donde $D_i, B_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$

S2: $m > n_r > n_{r-1} > \dots > n_2 > n_1$. En este caso, la forma CBR es

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= A_{0,1}x_1(t) + A_{1,1}x_1(t - \tau) + P_1w(t) + \bar{B}_{0,1}v_1(t), v_1(t) = \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) \\
 \dot{x}_i &= A_{0,i}\bar{x}_i(t) + A_{1,i}\bar{x}_i(t - \tau) + P_iw(t) + \bar{B}_{0,i}v_i(t), v_i(t) = \psi_{i+1}(t) + D_i\psi_{i+1}(t - \tau), \\
 &\quad i = 2, \dots, r - 1 \\
 \dot{x}_r &= A_{0,r}\bar{x}_r(t) + A_{1,r}\bar{x}_r(t - \tau) + P_rw(t) + \bar{B}_{0,r}v_r(t), v_r(t) = v(t) + D_rv(t - \tau) \\
 y(t) &= Cx(t) = x_1(t)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\psi_i \in \mathbb{R}^{n_{i-1}}$, $D_i, \bar{B}_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $v \in \mathbb{R}^{n_r}$, y

$$\begin{aligned} u &= \Gamma_r v, \Gamma_r \in \mathbb{R}^{m \times n_r} \\ x_i &= \Gamma_{i-1} \psi_i, \Gamma_{i-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i-1}}, i = 2, \dots, r \\ \bar{B}_{0,i} &= B_{0,i} \Gamma_i, B_{0,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{i+1}}, i = 1, \dots, r-1 \\ \bar{B}_{0,r} &= B_{0,r} \Gamma_r, B_{0,r} \in \mathbb{R}^{n_r \times m} \\ \text{rango}(\bar{B}_{0,i}) &= \text{rango}(B_{0,i}) = n_i, i = 1, \dots, r \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^r n_i = n \end{aligned}$$

La principal diferencia aquí es que los vectores de control nuevos $v(t)$ y $\psi_i(t)$, $i = 2, \dots, r$ son obtenidos de una transformación adicional $u(t) = \Gamma_r v(t)$ and $x_i = \Gamma_{i-1} \psi_i$. Se presenta enseguida, para ambos casos, el procedimiento para calcular la ley de control.

3.4. Regulación lineal para sistemas en la forma CBR

Básicamente, la solución del regulador consiste en dos partes: una que estabiliza el sistema (condición de estabilidad) y la otra que, una vez que el sistema ha alcanzado la solución en estado estable, garantice que la solución del sistema se mantiene en el conjunto del estado estable. En esta sección, para el sistema lineal con retardos antes mencionado, un método a través del cual se obtienen ambas partes del controlador será presentado. Este método se ilustra para los dos casos de la forma CBR citados en la sección 3.3.

3.4.1. Caso S1

Como fue presentado anteriormente, la forma CBR (3.37) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{0,1} x_1(t) + A_{1,1} x_1(t - \tau) + P_1 w(t) + B_{0,1} v_1(t), \\ v_1(t) &= x_2(t) + D_1 x_2(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{0,21} x_1(t) + A_{0,22} x_2(t) + A_{1,21} x_1(t - \tau) + A_{1,22} x_2(t - \tau) + P_2 w(t) \\ &+ B_{0,2} v_2(t), \quad v_2(t) = x_3(t) + D_2 x_3(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_{0,i1} x_1(t) + A_{0,i2} x_2(t) + \dots + A_{0,ii} x_i(t) + A_{1,i1} x_1(t - \tau) + A_{1,i2} x_2(t - \tau) + \dots \\ &+ A_{1,ii} x_i(t - \tau) + P_i w(t) + B_{0,i} v_i(t), \quad v_i(t) = x_{i+1}(t) + D_i x_{i+1}(t - \tau), \\ i &= 3, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_{0,r1} x_1(t) + A_{0,r2} x_2(t) + \dots + A_{0,rr} x_r(t) + A_{1,r1} x_1(t - \tau) + A_{1,r2} x_2(t - \tau) \\ &+ \dots + A_{1,rr} x_r(t - \tau) + P_r w(t) + B_{0,r} v_r(t), \quad v_r(t) = u(t) + D_r u(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$y(t) = x_1(t). \quad (3.43)$$

Para encontrar la ley de control que satisface la condición de estabilidad EES/CBR) del PRRES-CBR, la técnica de control por bloques aplicada a la forma CBR (3.39)-(3.43), es derivada en [5]. En términos generales, el procedimiento de control por bloques consiste en encontrar paso a paso el siguiente cambio de variables

$$z_{k+1}(t) = \sum_{j=1}^k [A_{0,k,j}x_j(t) + A_{1,k,j}^1x_j(t-\tau) + \cdots + A_{1,k,j}^kx_j(t-k\tau)] - \Lambda_k z_k(t) + \bar{B}_k v_k^1(t), \quad k = 1, \dots, r-1 \quad (3.44)$$

donde $\bar{B}_k = B_{0,1} \cdots B_{0,k}$ y

$$v_k^1(t) = v_k^2(t) + B_{0,k}^{-1} \cdots B_{0,2}^{-1} D_1 B_{0,2} \cdots B_{0,k} v_k^2(t - \tau) \quad (3.45)$$

$$v_k^2(t) = v_k^3(t) + B_{0,(k-1)}^{-1} \cdots B_{0,3}^{-1} D_2 B_{0,3} \cdots B_{0,k-1} v_k^3(t - \tau) \quad (3.46)$$

⋮

$$v_k^{k-1}(t) = v_k(t) + B_{0,k}^{-1} D_{k-1} B_{0,k} v_k(t - \tau) \quad (3.47)$$

$$v_k(t) = x_{k+1}(t) + D_k x_{k+1}(t - \tau). \quad (3.48)$$

y la ley de control:

$$v_r^1(t) = v_{rc}^1(t) + \bar{B}_r^{-1} \Lambda_r z_r(t) \quad (3.49)$$

$$v_{rc}^1(t) = -\bar{B}_r^{-1} \sum_{j=1}^r [A_{0,k,j}x_j(t) + A_{1,k,j}^1x_j(t - \tau) + \cdots + A_{1,k,j}^kx_j(t - k\tau)]$$

tal que el sistema (3.39)-(3.43) y (3.49) en las nuevas variables $z_1(t), \dots, z_r(t)$ está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \\ \dot{z}_i(t) &= \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r(t) &= \Lambda_r z_r(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $z_i(t) \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, r$ y $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices Hurwitz con los eigenvalores deseados.

En lo que se refiere a la entrada en estado estable, a continuación se propone un procedimiento para encontrar el término $u_{ss} = \Gamma w(t)$ of (3.16) que mantiene el error de seguimiento en cero.

Paso 1). Se impone la ecuación del error (3.3) a cero, de donde $y(t) = x_1(t) = R w(t)$. Para $x_2(t)$, una solución en estado estable de la forma

$$x_2(t) = G_1 w(t) \quad (3.51)$$

donde $G_1 \subset \mathbb{R}^{m \times q}$ es propuesta. Se sustituye en la ecuación (3.39)

$$B_{0,1}G_1w(t) + B_{0,1}D_1G_1w(t - \tau) = [RS - A_{0,1}R - P_1]w(t) - A_{1,1}Rw(t - \tau),$$

si se toma en cuenta (3.12) se obtiene

$$B_{0,1}G_1 + B_{0,1}D_1G_1e^{-\tau S} = RS - A_{0,1}R - P_1 - A_{1,1}Re^{-\tau S} \quad (3.52)$$

la cual está en la forma

$$N_1G_1 - N_2G_1\bar{S} = R_1 \quad (3.53)$$

donde $N_1 = B_{0,1}$, $N_2 = B_{0,1}D_1$, $\bar{S} = e^{-\tau S}$ y $R_1 = RS - A_{0,1}R - P_1 - A_{1,1}Re^{-\tau S}$. Del Teorema A.1.1 de [4] esta ecuación tiene una solución para cada R_1 si y sólo si las n_1 filas de la matriz

$$A^1(\lambda) = B_{0,1} - \lambda B_{0,1}D_1 \quad (3.54)$$

son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} . Si este es el caso y ya que N_1 y N_2 son matrices cuadradas la solución G_1 es única.

Paso 2). Similar al paso 1 se impone la dinámica del error entre $x_2(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_2(t) = G_1w(t)$. Para $x_3(t)$, una solución en estado estable de la forma

$$x_3(t) = G_2w(t) \quad (3.55)$$

donde $G_2 \subset \mathbb{R}^{m \times q}$ es propuesta. Se sustituye en la ecuación (3.40)

$$\begin{aligned} B_{0,2}G_2w(t) + B_{0,2}D_2G_2w(t - \tau) &= [G_1S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2]w(t) \\ &\quad - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]w(t - \tau) \end{aligned}$$

Al tomarse en cuenta (3.12), se obtiene

$$B_{0,2}G_2 + B_{0,2}D_2G_2e^{-\tau S} = G_1S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2 - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]e^{-\tau S} \quad (3.56)$$

Se puede ver que la ecuación matricial (3.56) tiene la forma (3.53)

$$N_3G_2 - N_4G_2\bar{S} = R_2$$

donde $N_3 = B_{0,2}$, $N_4 = B_{0,2}D_2$, $\bar{S} = e^{-\tau S}$ y $R_2 = G_1S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2 - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]e^{-\tau S}$. Similar al paso 1 se puede concluir que esta ecuación tiene una solución para cada R_2 si y sólo si las n_2 filas de la matriz

$$A^2(\lambda) = B_{0,2} - \lambda B_{0,2}D_2 \quad (3.57)$$

son linealmente independiente para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} . Si este es el caso y ya que N_3 y N_4 son matrices cuadradas la solución G_2 es única.

Este procedimiento puede ser realizado iterativamente, de forma que en $(r-1)$ -ésimo paso se tiene

$$x_r(t) = G_{r-1}w(t) \quad (3.58)$$

En el último paso se impone la dinámica del error entre $x_r(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_r(t) = G_{r-1}w(t)$. Para $u(t)$, una solución en estado estable de la forma

$$u(t) = G_r w(t) \quad (3.59)$$

donde $G_r \subset \mathbb{R}^{m \times q}$ es propuesta. Se tiene que la matriz G_r corresponde a la matriz Γ en el control (3.16). Similar a los pasos anteriores se obtiene una ecuación matricial

$$N_{2r-1}G_r - N_{2r}G_r\bar{S} = R_r \quad (3.60)$$

donde $N_{2r-1} = B_{0,r}$, $N_{2r} = B_{0,r}D_r$, y $\bar{S} = e^{-\tau S}$. La ecuación (3.60) tiene una solución para cada R_r si y sólo si las n_r filas de la matriz

$$A^r(\lambda) = B_{0,r} - \lambda B_{0,r}D_r \quad (3.61)$$

son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} . Si este es el caso y ya que N_{2r-1} y N_{2r} son matrices cuadradas la solución G_r es única.

Finalmente la ley de control que resuelve el PRRES-CBR está dada por

$$u(t) = K(X - \Psi W) + \Gamma w + LU - L\Gamma\bar{W} \quad (3.62)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \\ \vdots \\ x(t-r\tau) \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t-\tau) \\ \vdots \\ w(t-r\tau) \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u(t-\tau) \\ u(t-2\tau) \\ \vdots \\ u(t-r\tau) \end{pmatrix}$$

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} w(t-\tau) \\ w(t-2\tau) \\ \vdots \\ w(t-r\tau) \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \Pi & & 0 \\ & \Pi & \\ 0 & & \Pi \end{pmatrix}, \Pi = \begin{pmatrix} R \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{r-1} \end{pmatrix}, \Gamma = G_r$$

$$K = [K_{20} \quad K_{21} \quad \cdots \quad K_{2r}], \quad L = [K_{11} \quad K_{12} \quad \cdots \quad K_{1r}]$$

Donde la matriz Ψ incluye $r+1$ bloques Π . La ley de control (3.62) incluye términos retardados debido al control (3.49). El razonamiento detrás de esta elección es que, cuando el sistema está en el conjunto de error cero, el término $(X - \Psi W)$ es cero y el término $-L\Gamma\bar{W}$ cancela el término LU , por lo que la entrada actual es precisamente la entrada en estado estable $u_{ss} = \Gamma w(t)$.

Las condiciones para la existencia de una solución del PRRES-CBR para el caso S1 son presentadas en el siguiente teorema.

Teorema 18 *Asúmase que*

H3) *Todos los eigenvalores de las matrices $D_i, i=1, \dots, r$ están localizados dentro del círculo unitario.*

H4) *Las n_i filas de las matrices $A^i(\lambda) = B_{0,i} - \lambda B_{0,i} D_i, i = 1, \dots, r$ son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} .*

Entonces, el PRRES-CBR para el sistema (3.39)-(3.43) es soluble con el controlador dado por (3.62).

Prueba. La estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.39)-(3.43) y (3.62) está garantizada por los eigenvalores del sistema (3.50), los cuales pueden ser escogidos arbitrariamente, lo cual implica la condición H2), y segundo, por la propiedad de las dinámicas internas presentadas por las transformaciones de variables de estado y control (3.44) y (3.45)-(3.48), lo cual implica la condición H3). La regulación de la salida es entonces garantizada por la hipótesis H4) que implica la existencia de una solución Π, Γ a las ecuaciones (3.13)-(3.14) y por lo tanto, por el Teorema 13, el PRRES-CBR tiene una solución. ■

3.4.2. Caso S2

La forma CBR (3.38) puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{0,1}x_1(t) + A_{1,1}x_1(t - \tau) + P_1w(t) + \bar{B}_{0,1}v_1(t), \\ v_1(t) &= \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{0,21}x_1(t) + A_{0,22}x_2(t) + A_{1,21}x_1(t - \tau) + A_{1,22}x_2(t - \tau) + P_2w(t) + \\ &\bar{B}_{0,2}v_2(t), \quad v_2(t) = \psi_3(t) + D_2\psi_3(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_{0,i1}x_1(t) + A_{0,i2}x_2(t) + \dots + A_{0,ii}x_i(t) + A_{1,i1}x_1(t - \tau) + A_{1,i2}x_2(t - \tau) \\ &+ \dots + A_{1,ii}x_i(t - \tau) + P_iw(t) + \bar{B}_{0,i}v_i(t), \quad v_i(t) = \psi_{i+1}(t) + D_i\psi_{i+1}(t - \tau), \\ i &= 3, \dots, r - 1 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_{0,r1}x_1(t) + A_{0,r2}x_2(t) + \dots + A_{0,rr}x_r(t) + A_{1,r1}x_1(t - \tau) + A_{1,r2}x_2(t - \tau) \\ &+ \dots + A_{1,rr}x_r(t - \tau) + P_rw(t) + \bar{B}_{0,r}v_r(t), \quad v_r(t) = v(t) + D_rv(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$y(t) = x_1(t). \quad (3.67)$$

En este caso el controlador que satisface la condición de estabilidad EES/CBR) del PRRES-CBR es obtenido de una forma similar al caso S1[5]. En este caso el cambio de variables toma

la forma

$$z_{k+1}(t) = \tilde{B}_k^{-1} \left[\sum_{j=1}^k [A_{0,k,j}x_j(t) + A_{1,k,j}^1x_j(t-\tau) + \cdots + A_{1,k,j}^kx_j(t-k\tau)] + \Lambda_k z_k \right] \\ + \Gamma_k v_k^1(t), \quad k = 1, \dots, r-1$$

donde

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} B_{0,k} \\ H_{k2} \end{bmatrix}$$

con $H_{k2} = [0 \quad I_{n_{k+1}-n_k}]$, $H_{k2} \in \mathbb{R}^{(n_{k+1}-n_k) \times n_{k+1}}$ tiene rango n_{k+1} y

$$\begin{aligned} v_k^1(t) &= v_k^2(t) + \bar{B}_{0,k}^{-1} \cdots \bar{B}_{0,2}^{-1} \Gamma_k \cdots \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \cdots \Gamma_k^+ \bar{B}_{0,2} \cdots \bar{B}_{0,k} v_k^2(t-\tau) \\ v_k^2(t) &= v_k^3(t) + \bar{B}_{0,(k-1)}^{-1} \cdots \bar{B}_{0,3}^{-1} \Gamma_{k-1} \cdots \Gamma_2 D_2 \Gamma_2^+ \cdots \Gamma_{k-1}^+ \bar{B}_{0,3} \cdots \bar{B}_{0,(k-1)} v_k^3(t-\tau) \\ &\vdots \\ v_k^{k-1}(t) &= v_k(t) + \bar{B}_{0,k}^{-1} \Gamma_{k-1} D_{k-1} \Gamma_{k-1}^+ \bar{B}_{0,k} v_k(t-\tau) \\ v_k(t) &= \psi_{k+1}(t) + D_k \psi_{k+1}(t-\tau) \\ x_{k+1}(t) &= \Gamma_k \psi_{k+1}(t) \end{aligned}$$

la ley de control toma la forma:

$$v_r^1(t) = v_{rc}^1(t) + \bar{B}_{0,r}^{-1} \Lambda_r z_r(t) \quad (3.68)$$

$$v_{rc}^1(t) = -\bar{B}_{0,r}^{-1} \sum_{j=1}^r [A_{0,k,j}x_j(t) + A_{1,k,j}^1x_j(t-\tau) + \cdots + A_{1,k,j}^kx_j(t-k\tau)]$$

La dinámica en lazo cerrado ahora toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \Lambda_1 z_1(t) + B_{0,1} z_2(t) \\ \dot{z}_i(t) &= \Lambda_i z_i(t) + B_{0,i} z_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r(t) &= \Lambda_r z_r(t) \end{aligned}$$

donde $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, ..., $z_r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ y $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\Lambda_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, ..., $\Lambda_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ son matrices Hurwitz con los eigenvalores deseados.

La ley de control que resuelve el PRRES-CBR, similar a la sección previa toma la forma (3.62).

Enseguida proponemos un procedimiento similar para encontrar el término $v_{ss} = \Gamma w(t)$.

Paso 1). Similar al caso 1 se impone de nuevo la ecuación del error (3.3) a cero, de donde $y(t) = x_1(t) = R w(t)$. También, se propone una solución $x_2(t) = G_1 w(t)$, con $G_1 \subset \mathbb{R}^{n_2 \times q}$. A través de la sustitución en la ecuación (3.63) se tiene

$$\bar{B}_{0,1}\Gamma_1^+ G_1 w(t) + \bar{B}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ G_1 w(t - \tau) = [RS - A_{0,1}R - P_1]w(t) - A_{1,1}R w(t - \tau)$$

al tomarse en cuenta (3.12) se obtiene

$$\bar{B}_{0,1}\Gamma_1^+ G_1 + \bar{B}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ G_1 e^{-\tau S} = RS - A_{0,1}R - P_1 - A_{1,1}R e^{-\tau S} \quad (3.69)$$

la cual tiene la forma

$$N_1 G_1 - N_2 G_1 \bar{S} = R_1 \quad (3.70)$$

donde $N_1 = \bar{B}_{0,1}\Gamma_1^+$, $N_2 = \bar{B}_{0,1}D_1\Gamma_1^+$, $\bar{S} = e^{-\tau S}$ y $R_1 = RS - A_{0,1}R - P_1 - A_{1,1}R e^{-\tau S}$. La ecuación (3.70) tiene una solución para cada R_1 si y sólo si las n_1 filas de la matriz

$$A^1(\lambda) = \bar{B}_{0,1}\Gamma_1^+ - \lambda \bar{B}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ \quad (3.71)$$

son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} .

Paso 2). Se impone la dinámica del error entre $x_2(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_2(t) = G_1 w(t)$. Se toma en cuenta una solución propuesta para $x_3(t)$ como (3.55), donde en este caso $G_2 \subset \mathbb{R}^{n_3 \times q}$. Al sustituir en la ecuación (3.64) se tiene

$$\begin{aligned} \bar{B}_{0,2}\Gamma_2^+ G_2 w(t) + \bar{B}_{0,2}D_2\Gamma_2^+ G_2 w(t - \tau) &= [G_1 S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2]w(t) \\ &\quad - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]w(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.72)$$

al tomarse en cuenta (3.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{B}_{0,2}\Gamma_2^+ G_2 + \bar{B}_{0,2}D_2\Gamma_2^+ G_2 e^{-\tau S} &= G_1 S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2 \\ &\quad - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]e^{-\tau S} \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde la ecuación matricial (3.73) similar a (3.69) es de la forma

$$N_3 G_2 - N_4 G_2 \bar{S} = R_2 \quad (3.74)$$

donde $N_3 = \bar{B}_{0,2}\Gamma_2^+$, $N_4 = \bar{B}_{0,2}D_2\Gamma_2^+$, $\bar{S} = e^{-\tau S}$ y $R_2 = G_1 S - A_{0,21}R - A_{0,22}G_1 - P_2 - [A_{1,21}R + A_{1,22}G_1]e^{-\tau S}$. Similar al paso 1 se tiene que la ecuación (3.74) tiene una solución para cada R_2 si y sólo si las n_2 filas de la matriz

$$A^2(\lambda) = \bar{B}_{0,2}\Gamma_2^+ - \lambda \bar{B}_{0,2}D_2\Gamma_2^+ \quad (3.75)$$

son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} .

Este procedimiento puede ser realizado iterativamente, de forma que en el $(r-1)$ -ésimo paso se tiene

$$x_r(t) = G_{r-1}w(t) \quad (3.76)$$

En el último paso se impone la dinámica del error entre $x_r(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_r(t) = G_{r-1}w(t)$. Para $v(t)$ una solución de la forma

$$v(t) = G_r w(t) \quad (3.77)$$

donde $G_r \subset \mathbb{R}^{n_r \times q}$ es propuesta. Donde la solución propuesta (3.77) es el término $v_{ss} = \Gamma w(t)$. Similar a los pasos previos se obtiene una ecuación matricial

$$N_{2r-1}G_r - N_{2r}G_r\bar{S} = R_r \quad (3.78)$$

donde $N_{2r-1} = \bar{B}_{0,r}$, $N_{2r} = \bar{B}_{0,r}D_r$ y $\bar{S} = e^{-\tau S}$. La ecuación (3.78) tiene una solución para cada R_r si y sólo si las n_r filas de la matriz

$$A^r(\lambda) = \bar{B}_{0,r} - \lambda\bar{B}_{0,r}D_r \quad (3.79)$$

son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} .

El siguiente resultado, cuya prueba es similar a la del Teorema 18, establece las condiciones para la existencia de una solución al PRRES-CBR para el caso S2.

Teorema 19 *Asúmase que*

H5) *Todos los eigenvalores de las matrices $D_i, i=1, \dots, r$ están localizados dentro del círculo unitario.*

H6) *Las n_i filas de las matrices $A^i(\lambda) = \bar{B}_{0,i}\Gamma_i^+ - \lambda\bar{B}_{0,i}D_i\Gamma_i^+$, $i = 1, \dots, r-1$ y las n_r filas de la matriz $A^r(\lambda) = \bar{B}_{0,r} - \lambda\bar{B}_{0,r}D_r$ son linealmente independientes para cada λ que es un eigenvalor de \bar{S} .*

Entonces, el PRRES-CBR para el sistema (3.63)-(3.67) es soluble para un controlador dado por (3.62).

3.4.3. Ejemplo caso S1

PRRES-CBR)

Se considera el siguiente sistema de segundo orden con retardos tanto en el control como en el estado que ya está descrito en la forma CBR (caso S1 : $n_1 = n_2 = m = 1$)

$$\dot{x}_1 = a_{0,1}x_1(t) + a_{1,1}x_1(t - \tau) + P_1w(t) + b_{0,1}v_1(t), v_1(t) = x_2(t) + D_1x_2(t - \tau) \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a_{0,21}x_1(t) + a_{0,22}x_2(t) + a_{1,21}x_1(t - \tau) + a_{1,22}x_2(t - \tau) + P_2w(t) + b_{0,2}v_2(t), \\ v_2(t) &= u(t) + D_2u(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3.82)$$

La señal de referencia $w_1(t)$ viene del exosistema descrito por

$$\dot{w}(t) = Sw(t), \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Para este ejemplo la ley de control, similar a (3.49), que satisface la condición de estabilidad EES/CBR) del PRRES-CBR es

$$u(t) = -(b_{0,1}b_{0,2})^{-1}\{\phi_1(t) + [b_{0,1}b_{0,2}D_2 + b_{0,1}D_1b_{0,2}]u(t - \tau) + b_{0,1}D_1b_{0,2}D_2u(t - 2\tau)\} \quad (3.84)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= [(a_{0,1} - \lambda_1)a_{0,1} + b_{0,1}a_{0,21} - \lambda_2(a_{0,1} - \lambda_1)]x_1(t) + [(a_{0,1} - \lambda_1)a_{1,1} + a_{1,1}a_{0,1} \\ &+ b_{0,1}a_{1,21} + b_{0,1}D_1a_{0,21} - \lambda_2a_{1,1}]x_1(t - \tau) + [a_{1,1}^2 + b_{0,1}D_1a_{1,21}]x_1(t - 2\tau) \\ &+ [(a_{0,1} - \lambda_1)b_{0,1} + b_{0,1}a_{0,22} - \lambda_2b_{0,1}]x_2(t) + [(a_{0,1} - \lambda_1)b_{0,1}D_1 + a_{1,1}b_{0,1} \\ &+ b_{0,1}a_{1,22} + b_{0,1}D_1a_{0,22} - \lambda_2b_{0,1}D_1]x_2(t - \tau) \\ &+ [a_{1,1}b_{0,1}D_1 + b_{0,1}D_1a_{1,22}]x_2(t - 2\tau) \end{aligned}$$

Enseguida se obtiene el término $u_{ss} = \Gamma w(t)$ con el procedimiento de la sección 3.4.1.

Paso 1). Se impone el error de seguimiento a cero, de donde

$$y(t) = x_1(t) = R w(t) = w_1(t), \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se propone la forma de la solución en estado estable para $x_2(t)$

$$x_2(t) = G_1 w(t) \quad (3.85)$$

donde $G_1 \subset \mathbb{R}^{1 \times 2}$ y al sustituirla en la ecuación (3.80) se tiene

$$b_{0,1}G_1w(t) + b_{0,1}D_1G_1w(t - \tau) = [RS - a_{0,1}R - P_1]w(t) - a_{1,1}Rw(t - \tau), \quad P_1 = [p_1 \quad 0]$$

al tomarse en cuenta (3.12)

$$b_{0,1}G_1 + b_{0,1}D_1G_1e^{-\tau S} = RS - a_{0,1}R - P_1 - a_{1,1}Re^{-\tau S}$$

Cuya solución es

$$G_1^T = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{0,1} + p_1 + D_1e_{22}a_{0,1} + D_1e_{22}p_1 + \alpha D_1e_{21} + a_{1,1}e_{11} + a_{1,1}D_1e_{11}e_{22} - a_{1,1}e_{12}D_1e_{21}}{b_{0,1}(1 + D_1e_{22} + D_1e_{11} + D_1^2e_{11}e_{22} - D_1^2e_{21}e_{12})} \\ \frac{\alpha - a_{1,1}e_{12} + D_1e_{11}\alpha + a_{0,1}D_1e_{12} + p_1D_1e_{12}}{b_{0,1}(1 + D_1e_{22} + D_1e_{11} + D_1^2e_{11}e_{22} - D_1^2e_{21}e_{12})} \end{bmatrix}$$

donde

$$e^{-\tau S} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

Paso 2). Se impone la dinámica del error entre $x_2(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_2(t) = G_1w(t)$. Se propone la forma de la solución en estado estable para $u(t)$

$$u(t) = G_2w(t) \quad (3.86)$$

donde la solución propuesta (3.86) es el término $u_{ss} = \Gamma w(t)$ y $G_2 \subset \mathbb{R}^{1 \times 2}$, de donde se obtiene una ecuación lineal

$$b_{0,2}G_2 + b_{0,2}D_2G_2e^{-\tau S} = G_1S - a_{0,21}R - a_{0,22}G_1 - P_2 - [a_{1,21}R + a_{1,22}G_1]e^{-\tau S} \quad P_2 = [p_2 \quad 0]$$

cuya solución está dada por

$$G_2^T = \begin{bmatrix} g_1^2 \\ g_2^2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} g_1^2 = & -(a_{0,21} + p_2 + D_2e_{22}g_{12}\alpha + D_2e_{22}a_{0,22}g_{11} + g_{11}\alpha D_2e_{21} - a_{0,22}g_{12}D_2e_{21} \\ & + a_{1,21}D_2e_{11}e_{22} + a_{1,22}g_{11}D_2e_{11}e_{22} - e_{12}a_{1,22}g_{11}D_2e_{21} + e_{11}a_{1,22}g_{11} + a_{1,22}g_{12}e_{21} \\ & + g_{12}\alpha + a_{0,22}g_{11} + e_{11}a_{1,21} + D_2e_{22}a_{0,21} + D_2e_{22}d_2 - e_{12}a_{1,21}D_2e_{21}) / ((1 + D_2e_{22} \\ & + D_2e_{11} + D_2^2e_{11}e_{22} - D_2^2e_{21}e_{12})b_{0,2}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_2^2 = & (g_{11}\alpha - a_{0,22}g_{12} - e_{12}a_{1,21} - e_{12}a_{1,22}g_{11} - a_{1,22}g_{12}e_{22} + D_2e_{11}g_{11}\alpha - D_2e_{11}a_{0,22}g_{12} \\ & - D_2e_{11}a_{1,22}g_{12}e_{22} + g_{12}\alpha D_2e_{12} + a_{0,21}D_2e_{12} + a_{0,22}g_{11}D_2e_{12} + p_2D_2e_{12} \\ & + a_{1,22}g_{12}e_{21}D_2e_{12}) / ((1 + D_2e_{22} + D_2e_{11} + D_2^2e_{11}e_{22} - D_2^2e_{21}e_{12})b_{0,2}) \end{aligned}$$

Para este ejemplo se seleccionaron los siguientes parámetros: $a_{0,1} = 1$, $a_{1,1} = 1$, $p_1 = 1$, $b_{0,1} = 1$, $D_1 = 0,5$, $a_{0,21} = 1$, $a_{0,22} = 1$, $a_{1,21} = 1$, $a_{1,22} = 1$, $p_2 = 1$, $b_{0,2} = 1$, $D_2 = 0,5$, $\alpha = 1$, $\tau = 0,5$, $\lambda_1 = -20$ y $\lambda_2 = -20$. Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.3 y 3.4, respectivamente. En la figura 3.5 se ilustra la señal de control $u(t)$. Se hizo otra prueba con las ganancias $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = -5$, para observar el efecto de la disminución de la ganancias en el desempeño del controlador. Para esta segunda prueba se ilustran en la figura 3.6 el error de seguimiento y en la figura 3.7 la señal de control.

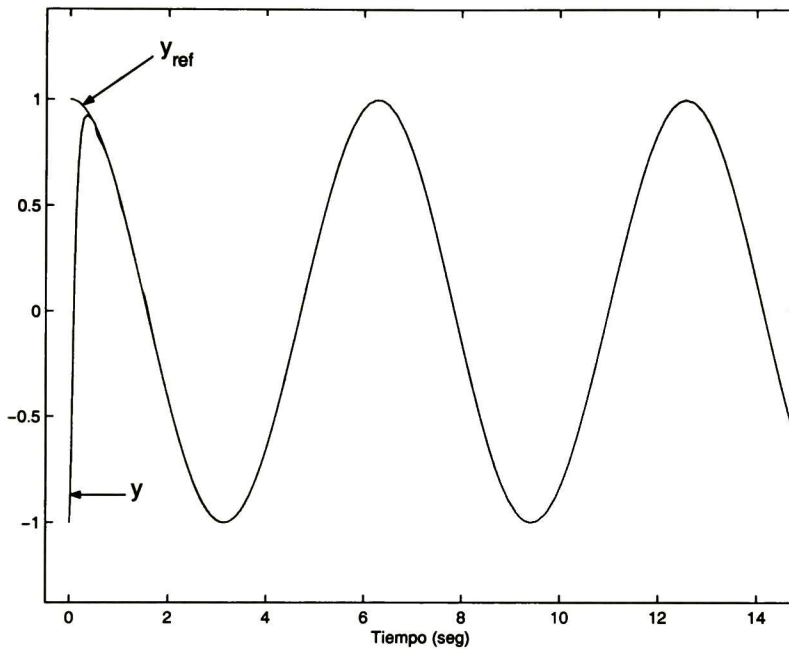


Figura 3.3: PRRES-CBR (Caso 1). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

PRRE-CBR)

Se aplica la técnica al sistema (3.80)-(3.82) de la sección anterior. Este sistema está descrito por las siguientes matrices

$$A_0 = \begin{bmatrix} a_{0,1} & b_{0,1} \\ a_{0,21} & a_{0,22} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_{0,1}D_1 \\ a_{1,21} & a_{1,22} \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0,2} \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{0,2}D_2 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0] \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad R = [1 \ 0]$$

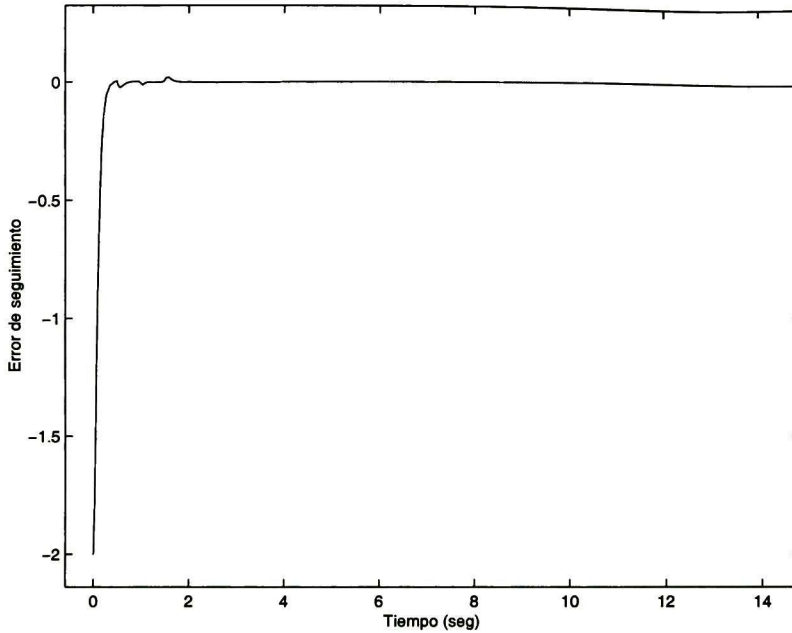


Figura 3.4: PRRES-CBR (Caso 1). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

Se procedió a diseñar el controlador (3.26) de la sección 3.2.2, donde las matrices de ganancia del observador se obtuvieron a través de la DML descrita en el Teorema 16. Las matrices de ganancia para la estabilización, así como la entrada en estado estable $u_{ss} = \Gamma w(t)$ son los mismos que se calcularon para la retroalimentación de estado de la sección anterior. En este caso el controlador toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \sum_{i=0}^3 F_{1i}^0 \xi^0(t - i\tau) + \sum_{i=0}^3 F_{1i}^1 \xi^1(t - i\tau) + \sum_{j=1}^3 F_{2j} u(t - j\tau) \\ & + L_0 e(t) + L_1 e(t - \tau) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{10}^0 = & \begin{bmatrix} -8,8761 & 1 \\ -454,9184 & -41 \\ -2,9094 & 0 \\ -0,3605 & 0 \end{bmatrix} & F_{10}^1 = & \begin{bmatrix} 10,8761 & 0 \\ 368,6874 & 25,7646 \\ 2,9094 & 1,0000 \\ -0,6395 & 0 \end{bmatrix} & F_{11}^0 = & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -264 & -43 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ F_{11}^1 = & \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 172,7943 & 25,7981 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & F_{12}^0 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -23,25 & -12,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & F_{12}^1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2,7825 & 6,4746 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

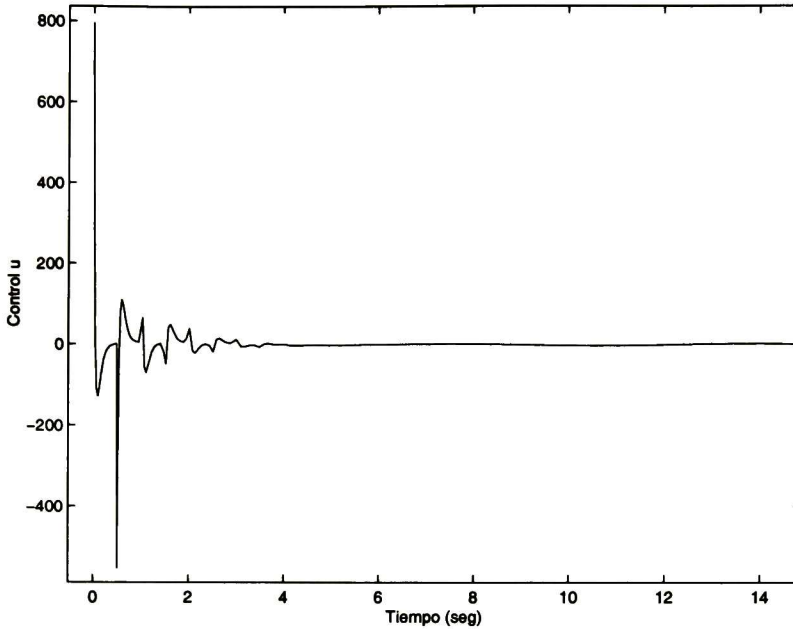


Figura 3.5: PRRES-CBR (Caso 1). Control $u(t)$.

$$F_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,75 & -0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,2437 & 0,0084 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,7500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1250 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_0 = \begin{bmatrix} 9,8761 \\ 13,9184 \\ 2,9094 \\ 0,3605 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.8 y 3.9, respectivamente. En la figura 3.10 se ilustra la señal de control $u(t)$.

De acuerdo a los resultados de las simulaciones (figuras 3.4 y 3.9) se puede establecer que efectivamente para el caso S1 de la forma CBR el error de seguimiento para los dos enfoques, PRRES-CBR y PRRE-CBR, tiende a cero. Se tiene que para el caso de PRRE-CBR, el error de seguimiento tarda más tiempo en llegar a cero, lo cual se debe a que como el controlador es un observador, se tiene un tiempo extra por el tiempo en el que el error de observación tiende a cero.

En lo que se refiere al control, se tiene que para el caso de PRRE-CBR (figura 3.10) el control

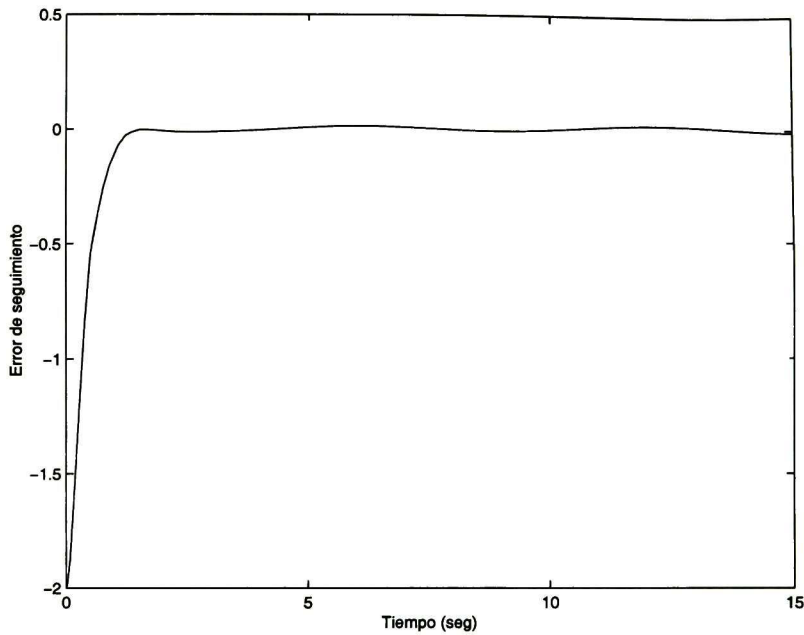


Figura 3.6: PRRES-CBR (Caso 1). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$. Ganancias menores.

tiene un valor inicial menor que para el caso PRRES-CBR (figura 3.5). Aunque al final las señales de control para los dos esquemas de control tienden al mismo estado estable. Esto se debe a que en PRRE-CBR el control depende de los estados del observador, los cuales inicialmente son cero, a diferencia del caso PRRES-CBR, donde el control depende de los estados del sistema y del exosistema, los cuales inicialmente son diferentes de cero.

Si comparamos la señal de control (figura 3.7) que se obtuvo para ganancias menores, con la que se obtuvo en la primera prueba (figura 3.5) para el caso 1, se observa que la magnitud del control es menor, lo cual también repercute en que el error de seguimiento al utilizar ganancias menores (figura 3.6) tarde más tiempo en llegar a cero que el que se obtuvo con la primera prueba (figura 3.4), es decir, con ganancias mayores. De lo anterior se tiene que a mayor rapidez de convergencia del error de seguimiento mayor magnitud del control es necesaria, lo cual es válido para todos los esquemas de control que se presentan en la tesis, ya que no se consideró ninguna restricción sobre el control en el diseño de los controladores propuestos.

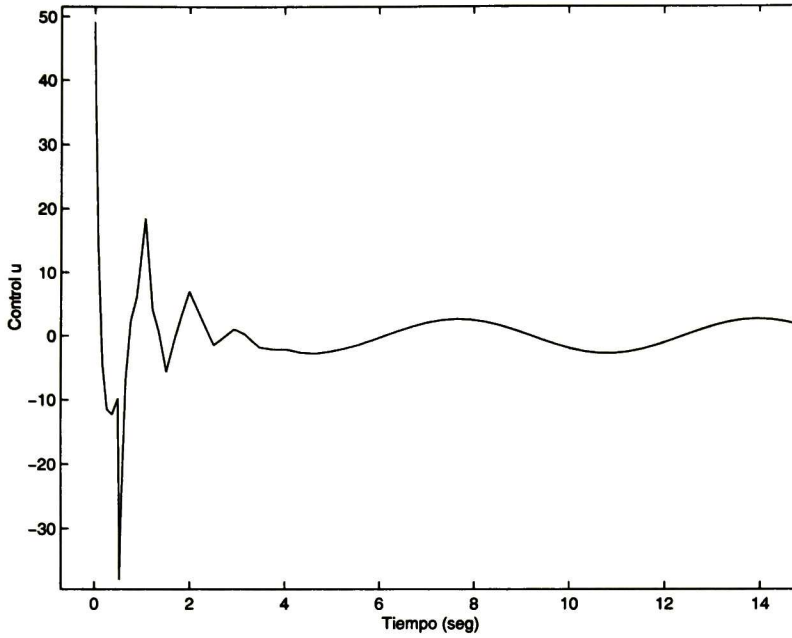


Figura 3.7: PRRES-CBR (Caso 1). Control $u(t)$. Ganancias menores.

3.4.4. Ejemplo caso S2

PRRES-CBR)

Se considera el siguiente sistema de tercer orden con retardos tanto en el control como en el estado que ya está descrito en la forma CBR (caso S2 : $n_1 = 1, n_2 = 2, m = 3$)

$$\dot{x}_1 = a_{0,1}x_1(t) + a_{1,1}x_1(t - \tau) + P_1w(t) + \bar{b}_{0,1}v_1(t), v_1(t) = \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a_{0,21}x_1(t) + a_{0,22}x_2(t) + a_{1,21}x_1(t - \tau) + a_{1,22}x_2(t - \tau) + P_2w(t) + \bar{B}_{0,2}v_2(t), \\ v_2(t) &= v(t) + D_2v(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3.89)$$

La señal de referencia $w_1(t)$ viene del exosistema (3.83)

Para este ejemplo la ley de control, similar a (3.68), que satisface la condición de estabilidad EES/CBR) del PRRES-CBR es

$$v(t) = -(\bar{B}_{0,2})^{-1}\{\phi_1(t) + [\bar{B}_{0,2}D_2 + \Gamma_1\Pi_1\Gamma_1^+\bar{B}_{0,2}]v(t - \tau) + \Gamma_1\Pi_1\Gamma_1^+\bar{B}_{0,2}D_2v(t - 2\tau)\} \quad (3.90)$$

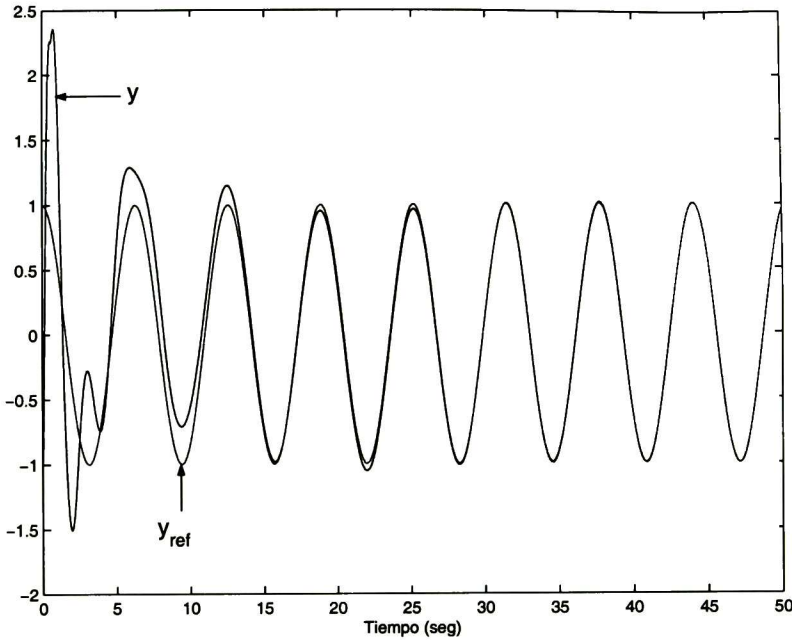


Figura 3.8: PRRE-CBR (Caso 1). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

donde

$$\begin{aligned}
 \phi_1(t) = & \left(\left[\begin{array}{c} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)a_{0,1} \\ 0 \end{array} \right] + a_{0,21} - \Lambda_2 \left[\begin{array}{c} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1) \\ 0 \end{array} \right] \right) x_1(t) \\
 & \left(\left[\begin{array}{c} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)a_{1,1} + \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}a_{0,1} \\ 0 \end{array} \right] + a_{1,21} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{0,21} \right. \\
 & \left. - \Lambda_2 \left[\begin{array}{c} \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1} \\ 0 \end{array} \right] \right) x_1(t - \tau) + \left(\left[\begin{array}{c} \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}a_{1,1} \\ 0 \end{array} \right] + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,21} \right) x_1(t - 2\tau) \\
 & \left(\left[\begin{array}{cc} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)\bar{b}_{0,1}\Gamma_1^+ & \\ 0 & 0 \end{array} \right] + a_{0,22} - \Lambda_2 \right) x_2(t) \\
 & \left(\left[\begin{array}{cc} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)\bar{b}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ + \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}\bar{b}_{0,1}\Gamma_1^+ & \\ 0 & 0 \end{array} \right] + a_{1,22} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{0,22} \right. \\
 & \left. - \Lambda_2 \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \right) x_2(t - \tau) + \left(\left[\begin{array}{cc} \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}\bar{b}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ & \\ 0 & 0 \end{array} \right] + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,22} \right) x_2(t - 2\tau)
 \end{aligned}$$

Enseguida se obtiene el término $v_{ss} = \Gamma w(t)$ con el procedimiento de la sección 3.4.2.

Paso 1). Se impone el error de seguimiento a cero, de donde

$$y(t) = x_1(t) = R w(t), \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

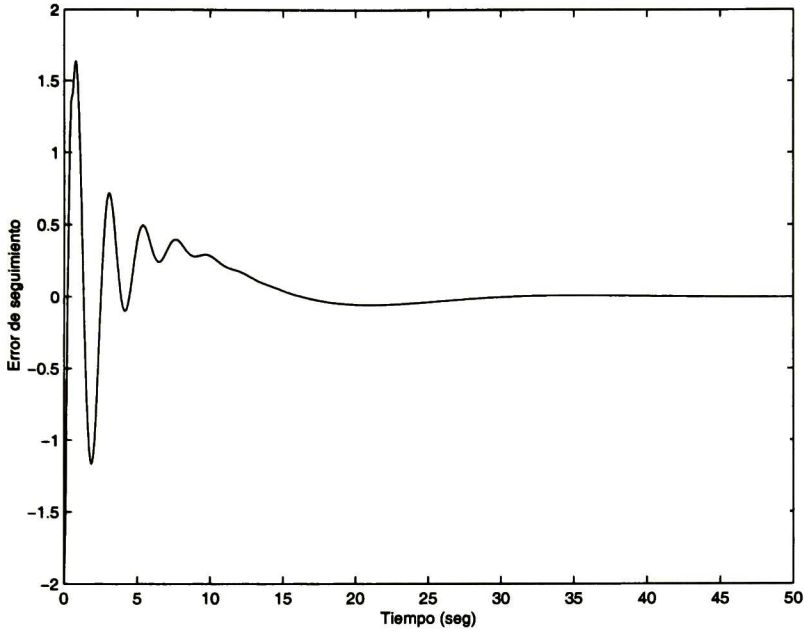


Figura 3.9: PRRE-CBR (Caso 1). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

Se propone la forma de la solución en estado estable para $x_2(t)$

$$x_2(t) = G_1 w(t) \tag{3.91}$$

donde $G_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y al sustituirla en la ecuación (3.87) se tiene

$$\bar{b}_{0,1} \Gamma_1^+ G_1 w(t) + \bar{b}_{0,1} D_1 \Gamma_1^+ G_1 w(t - \tau) = [RS - a_{0,1}R - P_1]w(t) - a_{1,1}Rw(t - \tau)$$

al tomarse en cuenta (3.12) se obtiene

$$\bar{b}_{0,1} \Gamma_1^+ G_1 + \bar{b}_{0,1} D_1 \Gamma_1^+ G_1 e^{-\tau S} = RS - a_{0,1}R - P_1 - a_{1,1}R e^{-\tau S}$$

De la ecuación anterior se obtiene

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

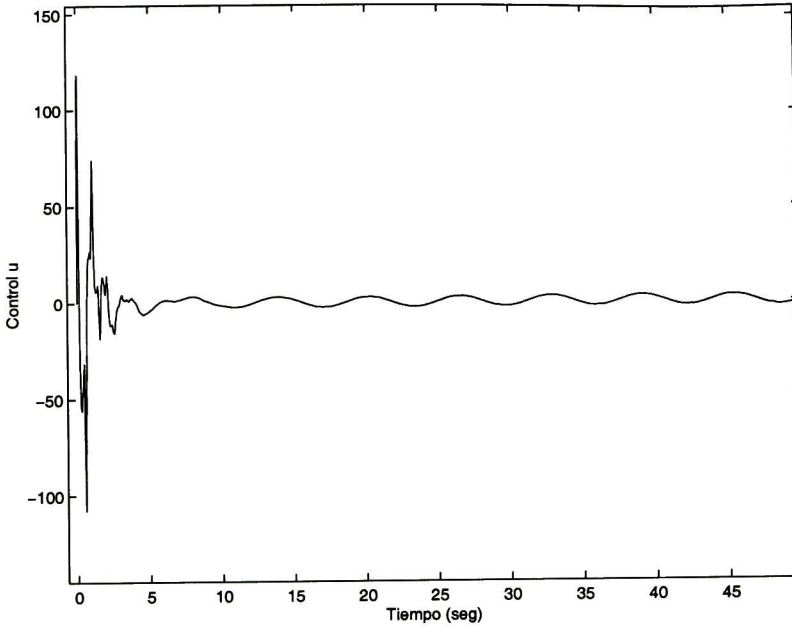


Figura 3.10: PRRE-CBR (Caso 1). Control $u(t)$.

donde

$$g_{11} = -(\bar{b}_{0,1}g_{21} + e_{11}\bar{b}_{0,1}D_1g_{21} + 2a_{0,1} + 2 + 2a_{1,1}e_{11} + e_{22}D_1\bar{b}_{0,1}g_{21} + e_{22}D_1^2e_{11}\bar{b}_{0,1}g_{21} + 2e_{22}D_1a_{0,1} + 2e_{22}D_1 + 2e_{22}D_1a_{1,1}e_{11} - e_{12}\bar{b}_{0,1}D_1^2g_{21}e_{21} + 2\alpha e_{21}D_1 - 2a_{1,1}e_{12}e_{21}D_1)/(\bar{b}_{0,1}(1 + e_{11}D_1 + e_{22}D_1 + e_{22}D_1^2e_{11} - e_{12}D_1^2e_{21}))$$

$$g_{12} = (2\alpha - \bar{b}_{0,1}g_{22} + 2e_{12}D_1 - 2a_{1,1}e_{12} - e_{22}\bar{b}_{0,1}D_1g_{22} + 2e_{11}D_1\alpha + 2a_{0,1}e_{12}D_1 - \bar{b}_{0,1}D_1g_{22}e_{11} - \bar{b}_{0,1}D_1^2g_{22}e_{22}e_{11} + e_{21}\bar{b}_{0,1}D_1^2g_{22}e_{12})/((1 + e_{11}D_1 + e_{22}D_1 + e_{22}D_1^2e_{11} - e_{12}D_1^2e_{21})\bar{b}_{0,1})$$

y

$$e^{-\tau s} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$$

Paso 2). Se impone la dinámica del error entre $x_2(t)$ y su estado estable a cero, de donde $x_2(t) = G_1w(t)$. Se propone la forma de la solución en estado estable para $v(t)$

$$v(t) = G_2w(t) \tag{3.92}$$

donde la solución propuesta (3.92) es el término $v_{ss} = \Gamma w(t)$ y $G_r \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Se obtiene la ecuación

$$\bar{B}_{0,2}G_2 + \bar{B}_{0,2}D_2G_2e^{-\tau S} = G_1S - a_{0,21}R - a_{0,22}G_1 - P_2 - [a_{1,21}R + a_{1,22}G_1]e^{-\tau S}$$

que al resolverla se obtiene

$$G_2 = \begin{bmatrix} g_{11}^2 & g_{12}^2 \\ g_{21}^2 & g_{22}^2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= -(-m_1 - e_{22}m_1 + m_2e_{21})/(1 + e_{22} + e_{11} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}) \\ g_{12}^2 &= (m_2 + e_{11}m_2 - m_1e_{12})/(1 + e_{22} + e_{11} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}) \\ g_{21}^2 &= -(-m_3 - e_{22}m_3 + m_4e_{21})/(1 + e_{22} + e_{11} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}) \\ g_{22}^2 &= (m_4 + e_{11}m_4 - m_3e_{12})/(1 + e_{22} + e_{11} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} = G_1S - a_{21}R - a_{22}G_1 - P_2 - (a_{1,21}R + a_{1,22}G_1)e^{-\tau S}$$

Para este ejemplo se seleccionaron los siguientes parámetros: $a_{0,1} = 0$, $a_{1,1} = 0$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_{0,1} = 2$, $D_1 = 0,5$, $a_{0,21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_{0,22} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $a_{1,21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_{1,22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $\tau = 0,5$, $\lambda_1 = -100$ y $\lambda_2 = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}$, $g_{21} = 0,5$, $g_{22} = 15$. Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.11 y 3.12, respectivamente. En la figura 3.13 se ilustra la señal de control $u(t)$.

PRRE-CBR)

Se aplica la técnica al sistema (3.87)-(3.89) de la sección anterior. Este sistema está descrito por las siguientes matrices

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a_{0,1} & \bar{b}_{0,1}\Gamma_1^+ \\ a_{0,21} & a_{0,22} \end{bmatrix} & A_1 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \bar{b}_{0,1}D_1\Gamma_1^+ \\ a_{1,21} & a_{1,22} \end{bmatrix} & B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{0,2} \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{0,2}D_2 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ 0], & P &= \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} & S &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} & R &= [1 \ 0] \end{aligned}$$

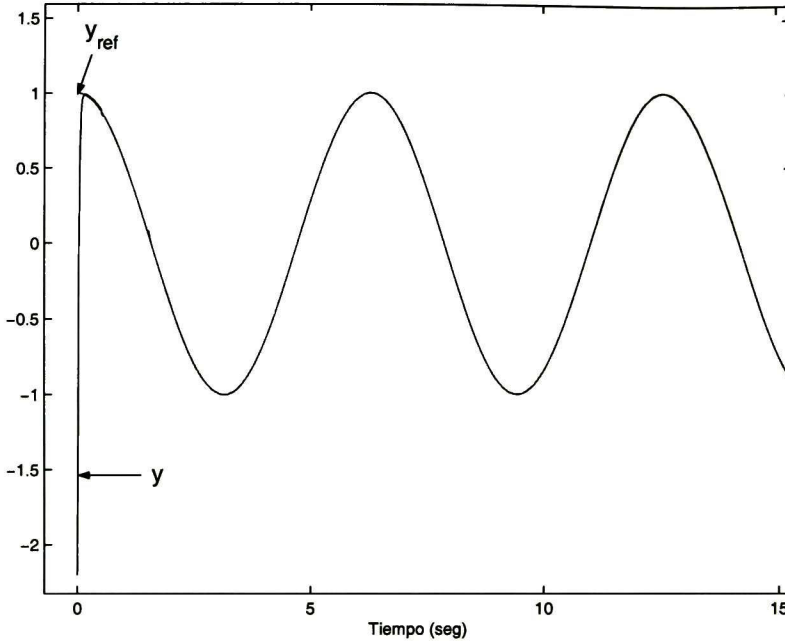


Figura 3.11: PRRES-CBR (Caso 2). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

Se procedió a diseñar el controlador (3.26) de la sección 3.2.2, donde las matrices de ganancia del observador se obtuvieron a través de la DML descrita en el Teorema 16. Las matrices de ganancia para la estabilización, así como la entrada en estado estable $v_{ss} = \Gamma w(t)$ son los mismos que se calcularon para la retroalimentación de estado de la sección anterior. En este caso el controlador toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \sum_{i=0}^3 F_{1i}^0 \xi^0(t - i\tau) + \sum_{i=0}^3 F_{1i}^1 \xi^1(t - i\tau) + \sum_{j=1}^3 F_{2j} u(t - j\tau) \\ & + L_0 e(t) + L_1 e(t - \tau) \end{aligned}$$

donde

$$F_{10}^0 = \begin{bmatrix} -3,4 & 1 & -1 \\ -5003,3 & -150 & 50 \\ 0,9 & 0 & -100 \\ -0,4 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{10}^1 = \begin{bmatrix} 4,4 & 0 \\ 4918,8 & 1552,3 \\ 39,5 & 1491,4 \\ 0,4 & 1 \\ -1,9 & 0 \end{bmatrix},$$

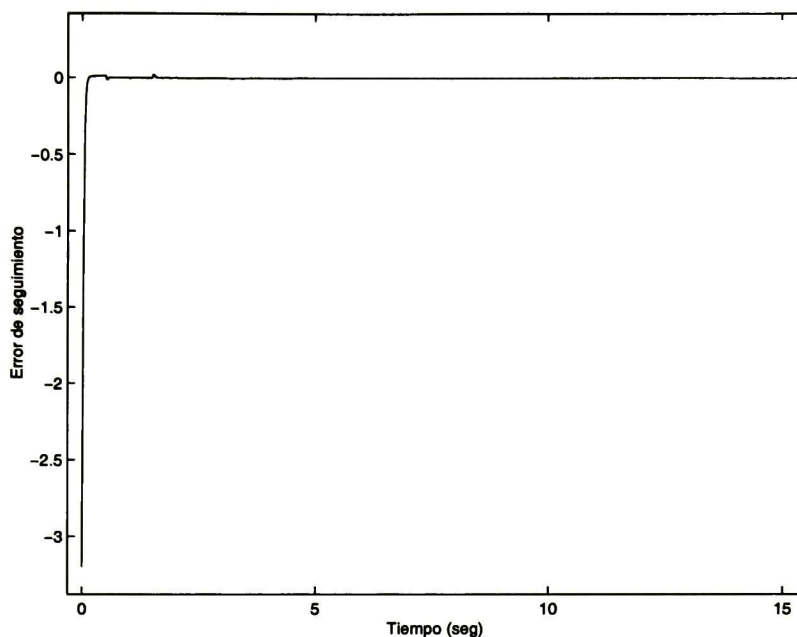


Figura 3.12: PRRES-CBR (Caso 2). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

$$F_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ -2499,3 & -125 & 76,2 \\ -0,2 & 25 & -74,7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2408,6 & 828,1 \\ 37,2 & 739,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{12}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,125 & -25,75 & 24,375 \\ -0,1250 & 12,75 & -12,375 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -25,0184 & 32,6584 \\ 9,2163 & -9,5467 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{13}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,125 & -0,125 \\ 0 & 0,125 & 0,125 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,3475 & 3,3419 \\ 0,3475 & -3,3419 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,75 & 0,25 \\ 0,25 & -0,75 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

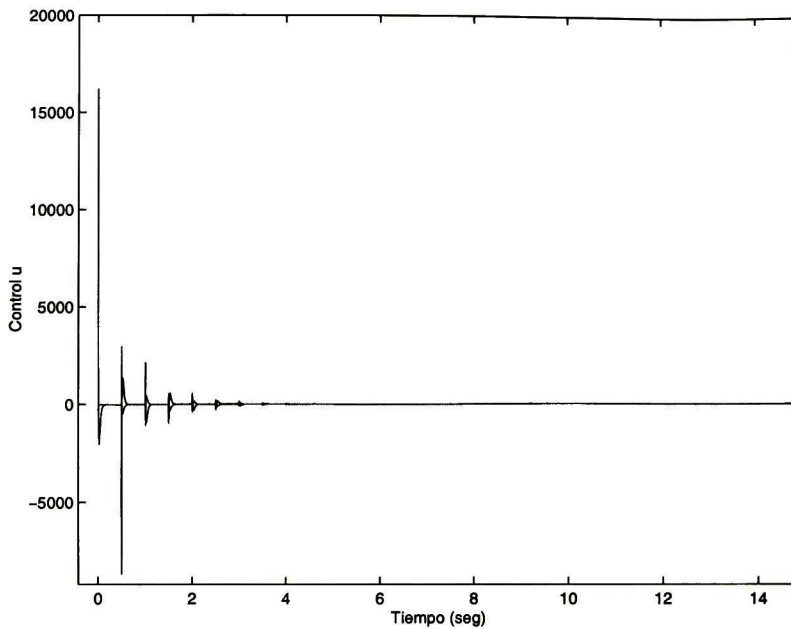


Figura 3.13: PRRES-CBR (Caso 2). Control $u(t)$.

$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,5 & 0,25 \\ 0,25 & -0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0625 & 0,0625 \\ 0,0625 & -0,0625 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_0 = \begin{bmatrix} 3,4264 \\ 3,2612 \\ -0,8653 \\ 0,3773 \\ -0,9402 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.14 y 3.15, respectivamente. En la figura 3.16 se ilustra la señal de control $u(t)$.

Para el caso S2 de la forma CBR se tienen resultados similares que para el caso S1, es decir, el error de seguimiento tiende a cero, tanto para PRRES-CBR (figura 3.12) como para PRRE-CBR (figura 3.15). También se tiene la diferencia en el tiempo en el que error de seguimiento tiende a cero por el error de observación.

De la misma manera, en lo que se refiere al control (figuras 3.13 y 3.16), se tiene la misma situación que para el caso S1, es decir, los valores iniciales diferentes en el control para PRRES-CBR y PRRE-CBR, que se debe a las diferentes condiciones iniciales.

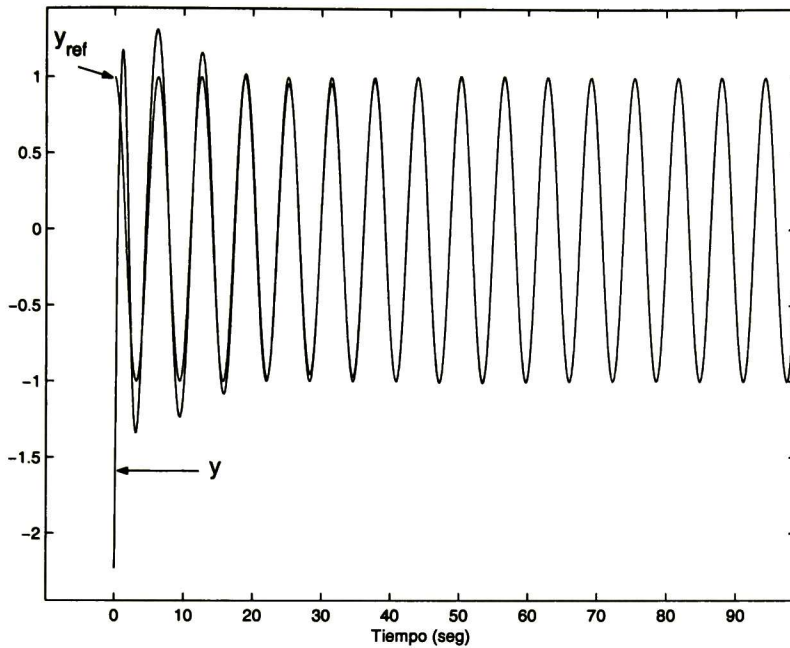


Figura 3.14: PRRE-CBR (Caso 2). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

3.5. Técnica de control por bloques para sistemas en forma CBR

Para diseñar la ley de control que logre el seguimiento se aplica la técnica de control por bloques a la forma expandida CBR. Esta ley de control es obtenida a través de un procedimiento iterativo que consiste en r pasos. A continuación se define el problema formalmente.

Para el sistema (3.1)-(3.3), el **Problema de Regulación con Modos deslizantes para sistemas con retardo en forma CBR (PRMD-CBR)** consiste en encontrar, si es posible, una variedad deslizante

$$s(x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - q_0\tau), w(t), w(t - \tau), \dots, w(t - q_1\tau)) = 0$$

y una retroalimentación discontinua

$$u(t) = \sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}x(t - j\tau) + \sum_{k=0}^r K_{3k}w(t - k\tau) + K_4 \text{sign}(s) \quad (3.93)$$

tal que

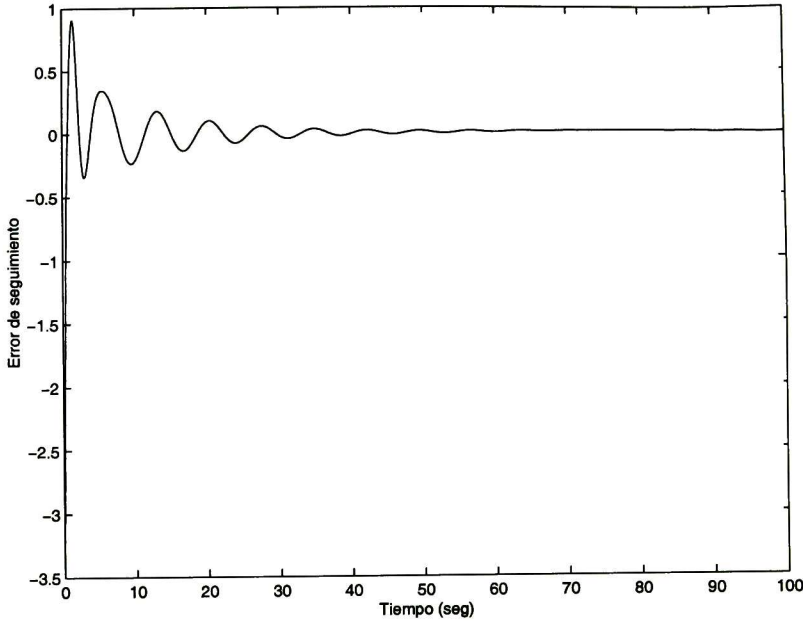


Figura 3.15: PRRE-CBR (Caso 2). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

EMD/CBR) El sistema en lazo cerrado sin perturbaciones es asintóticamente estable, es decir, La solución $x = 0$ de

$$\begin{aligned} \dot{x} = & A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + B_0 \left[\sum_{i=1}^r K_{1i}u(t - i\tau) + \sum_{j=0}^r K_{2j}x(t - j\tau) + K_4 \text{sign}(s(t)) \right] \\ & + B_1 \left[\sum_{i=2}^{r+1} K_{1(i-1)}u(t - i\tau) + \sum_{j=1}^{r+1} K_{2(j-1)}x(t - j\tau) + K_4 \text{sign}(s(t - \tau)) \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

es asintóticamente estable. Esto significa que, para cualquier condición inicial $\varphi(\xi) : [t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente solución $x(t)$ de (3.94), satisface $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

RMD/CBR) El sistema en lazo cerrado (3.1)-(3.3) y (3.93) satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

El esquema de control para esta técnica se ilustra en la figura 3.15.

3.5.1. Caso S1

Se considera la forma CBR extendida (3.39)-(3.43). A continuación se describe el procedimiento.

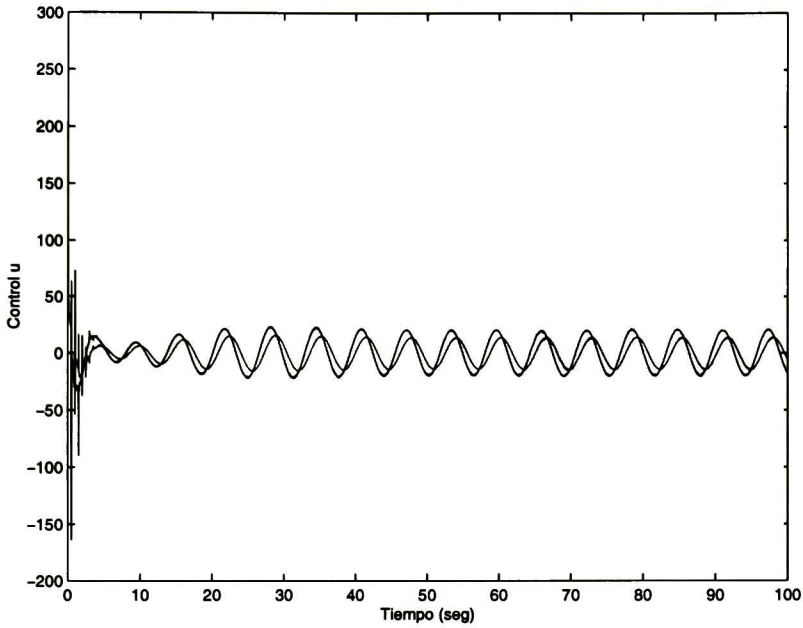


Figura 3.16: PRRE-CBR (Caso 2). Control $u(t)$.

Paso 1). Primero se define una nueva variable que tiene la información del error de seguimiento entre la salida del sistema (3.43) y la referencia que viene del exosistema (3.2)

$$z_1(t) = y(t) - y_{ref}(t) = x_1(t) - Rw(t) \quad (3.95)$$

se toma la derivada de (3.95) a lo largo de las trayectorias del 1^{er} bloque de (3.39)-(3.43)

$$\dot{z}_1(t) = A_{0,1}z_1(t) + A_{1,1}z_1(t - \tau) + B_{0,1}x_2(t) + B_{0,1}D_1x_2(t - \tau) + \phi_1(t) \quad (3.96)$$

donde

$$\phi_1(t) = R_1w(t) + N_1w(t - \tau)$$

$$R_1 = A_{0,1}R - RS + P_1 \quad \text{y} \quad N_1 = A_{1,1}R$$

enseguida se define una dinámica deseada

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1z_1(t) + z_2(t) \quad (3.97)$$

donde $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz Hurwitz con los eigenvalores deseados y $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$

La ecuación (3.96) y la dinámica deseada (3.97) definen una nueva transformación $z_2(t)$

$$z_2(t) = (A_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) + A_{1,1}z_1(t - \tau) + B_{0,1}v_1(t) + \phi_1(t) \quad (3.98)$$

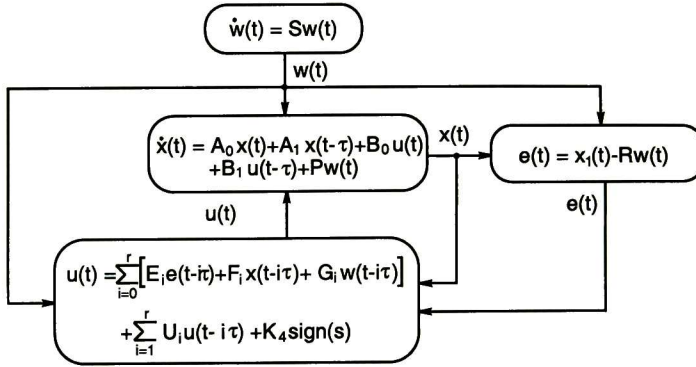


Figura 3.17: Estructura de esquema de control PRMD-CBR.

Paso 2). Se toma la derivada de (3.98)

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_2 v_2^1(t) \quad (3.99)$$

donde $\bar{B}_2 = B_{0,1} B_{0,2}$ y

$$\begin{aligned} v_2^1(t) &= v_2(t) + B_{0,2}^{-1} D_1 B_{0,2} v_2(t - \tau) \\ &= [x_3(t) + D_2 x_3(t - \tau)] + B_{0,2}^{-1} D_1 B_{0,2} [x_3(t - \tau) + D_2 x_3(t - 2\tau)] \end{aligned}$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + z_3(t) \quad (3.100)$$

donde $\Lambda_2 \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz Hurwitz y $z_3(t) \in \mathbb{R}^m$

La ecuación (3.99) y la dinámica deseada (3.100) definen una nueva transformación $z_3(t)$

$$z_3(t) = \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_2 v_2^1(t) - \Lambda_2 z_2(t) \quad (3.101)$$

Este procedimiento puede ser realizado iterativamente obteniendo en el k -ésimo paso, $k = 3, \dots, r - 1$, la siguiente transformación recursiva

$$z_{k+1}(t) = \sum_{i=0}^k \left[E_{ki} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^k x_2(t - i\tau) + \dots + F_{(k-1)i}^k x_k(t - i\tau) + G_{ki} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_k v_k^1(t) - \Lambda_k z_k(t) \quad (3.102)$$

donde $\bar{B}_k = B_{0,1} \cdots B_{0,k}$, $\Lambda_k \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz Hurwitz y

$$\begin{aligned} v_k^1(t) &= v_k^2(t) + B_{0,k}^{-1} \cdots B_{0,2}^{-1} D_1 B_{0,2} \cdots B_{0,k} v_k^2(t - \tau) \\ v_k^2(t) &= v_k^3(t) + B_{0,k-1}^{-1} \cdots B_{0,3}^{-1} D_2 B_{0,3} \cdots B_{0,k-1} v_k^3(t - \tau) \\ &\vdots \\ v_k^{k-1}(t) &= v_k(t) + B_{0,k}^{-1} D_{k-1} B_{0,k} v_k(t - \tau) \\ v_k(t) &= x_{k+1}(t) + D_k x_{k+1}(t - \tau) \end{aligned}$$

en el último paso se tiene

$$\dot{z}_r(t) = \sum_{i=0}^r \left[E_{ri} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^r x_2(t - i\tau) + \cdots + F_{(r-1)i}^r x_r(t - i\tau) + G_{ri} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_r v_r^1(t) \quad (3.103)$$

donde $\bar{B}_r = B_{0,1} \cdots B_{0,r}$, y

$$v_r^1(t) = v_r^2(t) + B_{0,r}^{-1} \cdots B_{0,2}^{-1} D_1 B_{0,2} \cdots B_{0,r} v_r^2(t - \tau) \quad (3.104)$$

$$v_r^2(t) = v_r^3(t) + B_{0,r-1}^{-1} \cdots B_{0,3}^{-1} D_2 B_{0,3} \cdots B_{0,r-1} v_r^3(t - \tau) \quad (3.105)$$

\vdots

$$v_r^{r-1}(t) = v_r(t) + B_{0,r}^{-1} D_{r-1} B_{0,r} v_r(t - \tau) \quad (3.106)$$

$$v_r(t) = u(t) + D_r u(t - \tau) \quad (3.107)$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r \text{sign}[z_r(t)] \quad (3.108)$$

donde $\Lambda_r \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz Hurwitz.

La ecuación (3.103) y la dinámica deseada (3.108) definen el control $u(t)$

$$\begin{aligned} v_r^1(t) &= [\bar{B}_r]^{-1} \left[\Lambda_r \text{sign}[z_r(t)] - \sum_{i=0}^r \left[E_{ri} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^r x_2(t - i\tau) + \cdots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_{(r-1)i}^r x_r(t - i\tau) + G_{ri} w(t - i\tau) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

que produce la dinámica en lazo cerrado de los estados $z_1(t), \dots, z_r(t)$ determinado por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \Lambda_1 z_1(t) + z_2(t) \\ \dot{z}_i(t) &= \Lambda_i z_i(t) + z_{i+1}(t), i = 2, \dots, r-1 \\ \dot{z}_r(t) &= \Lambda_r \text{sign}[z_r(t)] \end{aligned} \quad (3.110)$$

con la dinámica deseada.

Las condiciones de estabilidad y regulación de la salida del sistema en lazo cerrado son presentadas en el siguiente Teorema [5].

Teorema 20 *La estabilidad y la regulación de la salida del sistema (3.39)-(3.43) con la estrategia de control (3.109) se satisfacen si los eigenvalores de las matrices $D_i, i = 1, \dots, r$ están localizados dentro del círculo unitario.*

Prueba. La estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.39)-(3.43) y (3.109) está definida por los eigenvalores del sistema (3.110) los cuales pueden ser escogidos arbitrariamente, y segundo, por la propiedad de las dinámicas internas presentadas por las transformaciones de variables de estado y control (3.98), (3.101), (3.102) y (3.104)-(3.107). Es claro que estas dinámicas internas son asintóticamente estables si las condiciones del Teorema 20 se cumplen. La regulación de la salida es garantizada porque si el sistema (3.110) es estable entonces $z_1(t)$, que tiene la información del error de seguimiento, tiende a cero. ■

3.5.2. Caso S2

Se considera la forma CBR extendida (3.63)-(3.67). A continuación se describe el procedimiento.

Paso 1). Similar a (3.95) se define una nueva variable que tiene la información del error de seguimiento

$$z_1(t) = x_1(t) - Rw(t) \quad (3.111)$$

se toma la derivada de (3.111) a lo largo de las trayectorias del 1^{er} bloque de (3.63)-(3.67)

$$\dot{z}_1(t) = A_{0,1}z_1(t) + A_{1,1}z_1(t - \tau) + \bar{B}_{0,1}v_1(t) + \phi_1(t) \quad (3.112)$$

donde

$$\phi_1(t) = R_1w(t) + N_1w(t - \tau)$$

$$R_1 = A_{0,1}R - RS + P_1 \text{ y } N_1 = A_{1,1}R$$

$$v_1(t) = \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) = \Gamma_1^+x_2(t) + D_1\Gamma_1^+x_2(t - \tau)$$

$$\Gamma_1^+ = (\Gamma_1^T\Gamma_1)^{-1}\Gamma_1^T$$

enseguida se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1z_1(t) + H_{11}z_2(t) \quad (3.113)$$

donde $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ es una matriz Hurwitz con los eigenvalores deseados, $z_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ y $H_{11} \subset \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$

Ahora al tomarse en cuenta las relaciones

$$\bar{B}_{0,1} = B_{0,1}\Gamma_1, v_1(t) = \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau), x_2(t) = \Gamma_1\psi_2(t), \psi_2(t) = \Gamma_1^+ x_2(t)$$

se tiene

$$\bar{B}_{0,1}v_1(t) = B_{0,1}\Gamma_1v_1(t) = B_{0,1}[\Gamma_1\psi_2(t) + \Gamma_1D_1\psi_2(t - \tau)] = B_{0,1}[x_2(t) + \Gamma_1D_1\Gamma_1^+x_2(t - \tau)] \quad (3.114)$$

se establece

$$H_{11} = B_{0,1}$$

entonces de la ecuación (3.112), la dinámica deseada (3.113) y (3.114) se tiene

$$B_{0,1}[x_2(t) + \Gamma_1D_1\Gamma_1^+x_2(t - \tau)] = -(A_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) - A_{1,1}z_1(t - \tau) - \phi_1(t) + B_{0,1}z_2(t) \quad (3.115)$$

Para definir la transformación $z_2(t)$ asúmase que los elementos de la matriz $B_{0,1}$ pueden ser reordenados tal que la matriz cuadrada

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{0,1} \\ H_{12} \end{bmatrix}$$

con $H_{12} = [0 \ I_{n_2 - n_1}]$, $H_{12} \subset \mathbb{R}^{(n_2 - n_1) \times n_2}$ tiene rango n_2 . Entonces se establece la siguiente igualdad

$$H_{12}[x_2(t) + \Gamma_1D_1\Gamma_1^+x_2(t - \tau)] = H_{12}z_2 \quad (3.116)$$

de las ecuaciones (3.115) y (3.116) se puede obtener la transformación no singular para $z_2(t)$ de la forma

$$z_2(t) = \tilde{B}_1^{-1} \begin{bmatrix} (A_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) + A_{1,1}z_1(t - \tau) + \phi_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} + [x_2(t) + \Gamma_1D_1\Gamma_1^+x_2(t - \tau)] \quad (3.117)$$

usando

$$x_2(t) = \Gamma_1\psi_2(t) \text{ y } \psi_2(t) = \Gamma_1^+x_2(t)$$

el segundo término de (3.117) puede ser representado como

$$\Gamma_1\psi_2(t) + \Gamma_1D_1\psi_2(t - \tau) = \Gamma_1[\psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau)] = \Gamma_1v_1(t)$$

Entonces la transformación (3.117) es representada de manera compacta como

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \tilde{B}_1^{-1} \begin{bmatrix} (A_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) + A_{1,1}z_1(t - \tau) + \phi_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1v_1(t) \quad (3.118) \\ v_1(t) &= \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) \\ x_2(t) &= \Gamma_1\psi_2(t) \end{aligned}$$

Paso 2). Se toma la derivada de (3.118)

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_{0,2} v_2^1(t) \quad (3.119)$$

donde

$$\begin{aligned} v_2^1(t) &= v_2(t) + \bar{B}_{0,2}^{-1} \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_{0,2} v_2(t - \tau) \\ v_2(t) &= \psi_3(t) + D_2 \psi_3(t - \tau) \\ x_3(t) &= \Gamma_2 \psi_3(t) \end{aligned}$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 z_2(t) + H_{21} z_3(t) \quad (3.120)$$

donde $\Lambda_2 \subset \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ es una matriz Hurwitz, $z_3(t) \in \mathbb{R}^{n_3}$ y $H_{21} \subset \mathbb{R}^{n_2 \times n_3}$.

Usando la ecuación (3.119), la dinámica deseada (3.120) y similar al procedimiento para obtener $z_2(t)$ (3.118) se tiene

$$\begin{aligned} z_3(t) &= \tilde{B}_2^{-1} \left[\sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right] - \Lambda_2 z_2(t) \right] \\ &\quad + \Gamma_2 v_2^1(t) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Este procedimiento puede ser realizado iterativamente obteniendo en el k -ésimo paso, $k = 3, \dots, r - 1$, la siguiente transformación recursiva

$$z_{k+1}(t) = \tilde{B}_k^{-1} \left[\begin{array}{c} \Sigma - \Lambda_k z_k(t) \\ 0 \end{array} \right] + \Gamma_k v_k^1(t) \quad (3.122)$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{i=0}^k \left[E_{ki} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^k x_2(t - i\tau) + \dots + F_{(k-1)i}^k x_k(t - i\tau) + G_{ki} w(t - i\tau) \right] \\ v_k^1(t) &= v_k^2(t) + \bar{B}_{0,k}^{-1} \dots \bar{B}_{0,2}^{-1} \Gamma_k \dots \Gamma_2 D_1 \Gamma_2^+ \dots \Gamma_k^+ \bar{B}_{0,2} \dots \bar{B}_{0,k} v_k^2(t - \tau) \\ v_k^2(t) &= v_k^3(t) + \bar{B}_{0,k-1}^{-1} \dots \bar{B}_{0,3}^{-1} \Gamma_{k-1} \dots \Gamma_3 D_2 \Gamma_3^+ \dots \Gamma_{k-1}^+ \bar{B}_{0,3} \dots \bar{B}_{0,k-1} v_k^3(t - \tau) \\ &\vdots \\ v_k^{k-1}(t) &= v_k(t) + \bar{B}_{0,k}^{-1} \Gamma_k D_{k-1} \Gamma_k^+ \bar{B}_{0,k} v_k(t - \tau) \\ v_k(t) &= \psi_{k+1}(t) + D_k \psi_{k+1}(t - \tau) \\ x_{k+1} &= \Gamma_k \psi_{k+1}(t) \end{aligned}$$

$\Lambda_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ es una matriz Hurwitz.

En el último paso se llega a

$$\dot{z}_r(t) = \sum_{i=0}^r \left[E_{ri} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^r x_2(t - i\tau) + \dots + F_{(r-1)i}^r x_r(t - i\tau) + G_{ri} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_{0,r} v_r^1(t) \quad (3.123)$$

donde

$$v_r^1(t) = v_r^2(t) + \bar{B}_{0,r}^{-1} \dots \bar{B}_{0,2}^{-1} \Gamma_r \dots \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \dots \Gamma_r^+ \bar{B}_{0,2} \dots \bar{B}_{0,r} v_r^2(t - \tau) \quad (3.124)$$

$$v_r^2(t) = v_r^3(t) + \bar{B}_{0,r-1}^{-1} \dots \bar{B}_{0,3}^{-1} \Gamma_{r-1} \dots \Gamma_2 D_2 \Gamma_2^+ \dots \Gamma_{r-1}^+ \bar{B}_{0,3} \dots \bar{B}_{0,r-1} v_r^3(t - \tau) \quad (3.125)$$

⋮

$$v_r^{r-1}(t) = v_r(t) + \bar{B}_{0,r}^{-1} \Gamma_{r-1} D_{r-1} \Gamma_{r-1}^+ \bar{B}_{0,r} v_r(t - \tau) \quad (3.126)$$

$$v_r(t) = v(t) + D_r v(t - \tau) \quad (3.127)$$

$$u(t) = \Gamma_r v(t) \quad (3.128)$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r \text{sign}[z_r(t)] \quad (3.129)$$

donde $\Lambda_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ es una matriz Hurwitz.

La ecuación (3.123) y la dinámica deseada (3.129) definen el control $u(t)$

$$v_r^1(t) = [\bar{B}_{0,r}]^{-1} \left[\Lambda_r \text{sign}[z_r(t)] - \sum_{i=0}^r \left[E_{ri} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^r x_2(t - i\tau) + \dots + F_{(r-1)i}^r x_r(t - i\tau) + G_{ri} w(t - i\tau) \right] \right] \quad (3.130)$$

que produce la dinámica en lazo cerrado de los estados $z_1(t), \dots, z_r(t)$ gobernada por el sistema

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1 z_1(t) + B_{0,1} z_2(t)$$

$$\dot{z}_i(t) = \Lambda_i z_i(t) + B_{0,i} z_{i+1}(t), i = 2, \dots, r - 1$$

$$\dot{z}_r(t) = \Lambda_r \text{sign}[z_r(t)]$$

Con matrices Hurwitz $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ y sin retardo.

Las condiciones de estabilidad y regulación de la salida del sistema en lazo cerrado son presentadas en el siguiente teorema [5].

Teorema 21 *La estabilidad y la regulación de la salida del sistema (3.63)-(3.67) con la estrategia de control (3.130) se satisfacen si los eigenvalores de las matrices $D_i, i = 1, \dots, r$ están localizados dentro del círculo unitario.*

3.5.3. Ejemplo caso S1

Se considera el sistema de segundo orden que se encuentra en la forma CBR (3.80)-(3.82). La referencia es el estado $w_1(t)$ del exosistema (3.83). Ahora se aplica la técnica de control por bloques.

Paso 1). Se define $z_1(t)$ similar a (3.95) y al tomarse la derivada produce

$$\dot{z}_1(t) = a_{0,1}z_1(t) + a_{1,1}z_1(t - \tau) + b_{0,1}x_2(t) + b_{0,1}D_1x_2(t - \tau) + \phi_1(t) \quad (3.131)$$

donde

$$\phi_1(t) = R_1w(t) + N_1w(t - \tau)$$

$$R_1 = a_{0,1}R - RS + P_1 \text{ y } N_1 = a_{1,1}R$$

enseguida se define una dinámica deseada

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1z_1(t) + z_2(t) \quad (3.132)$$

donde $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\Lambda_1 < 0$ y $z_2(t) \in \mathbb{R}$.

La ecuación (3.131) y la dinámica deseada (3.132) definen una nueva transformación $z_2(t)$

$$z_2(t) = (a_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) + a_{1,1}z_1(t - \tau) + b_{0,1}v_1(t) + \phi_1(t)$$

Paso 2). Al derivarse $z_2(t)$ se obtiene

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i}z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2x_2(t - i\tau) + G_{2i}w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_2v_2^1(t)$$

donde $\bar{B}_2 = b_{0,1}b_{0,2}$ y

$$\begin{aligned} v_2^1(t) &= v_2(t) + b_{0,2}^{-1}D_1b_{0,2}v_2(t - \tau) \\ &= [u(t) + D_2u(t - \tau)] + b_{0,2}^{-1}D_1b_{0,2}[u(t - \tau) + u(t - 2\tau)] \end{aligned}$$

y

$$E_{20} = (a_{0,1} - \Lambda_1)a_{0,1} + b_{0,1}a_{0,21}, \quad E_{21} = a_{1,1}a_{0,1} + b_{0,1}a_{1,21} + b_{0,1}D_1a_{0,21} + (a_{0,1} - \Lambda_1)a_{1,1},$$

$$E_{22} = a_{1,1}^2 + b_{0,1}D_1a_{1,21}, \quad F_{10}^2 = (a_{0,1} - \Lambda_1)b_{0,1} + b_{0,1}a_{0,22},$$

$$F_{11}^2 = (a_{0,1} - \Lambda_1)b_{0,1}D_1 + a_{1,1}b_{0,1} + b_{0,1}a_{1,22} + b_{0,1}D_1a_{0,22}, \quad F_{12}^2 = a_{1,1}b_{0,1}D_1 + b_{0,1}D_1a_{1,22},$$

$$G_{20} = (a_{0,1} - \Lambda_1)(a_{0,1}R + P_1 - RS) + b_{0,1}a_{0,21}R + a_{0,1}RS + P_1S - RS^2 + b_{0,1}P_2$$

$$G_{21} = a_{1,1}a_{0,1}R + a_{1,1}(P_1 - RS) + b_{0,1}a_{1,21} + b_{0,1}D_1a_{0,22} + a_{1,1}RS + b_{0,1}D_1P_2 + (a_{0,1} - \Lambda_1)a_{1,1}R$$

$$G_{22} = a_{1,1}^2R + b_{0,1}D_1a_{1,21}R$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 \text{sign}[z_2(t)] \quad (3.133)$$

El control $u(t)$ queda definido

$$u(t) = [\bar{B}_2]^{-1} \left[\Lambda_2 \text{sign}[z_2(t)] - \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) \right. \right. \\ \left. \left. + G_{2i} w(t - i\tau) \right] - (b_{0,1}b_{0,2}D_2 + b_{0,1}D_1b_{0,2})u(t - \tau) - b_{0,1}D_1b_{0,2}D_2u(t - 2\tau) \right]$$

Para este ejemplo se seleccionaron los siguientes parámetros: $a_{0,1} = 1$, $a_{1,1} = 1$, $p_1 = 1$, $b_{0,1} = 1$, $D_1 = 0,5$, $a_{0,21} = 1$, $a_{0,22} = 1$, $a_{1,21} = 1$, $a_{1,22} = 1$, $p_2 = 1$, $b_{0,2} = 1$, $D_2 = 0,5$, $\alpha = 1$, $\tau = 0,5$, $\lambda_1 = -20$ y $\lambda_2 = -20$. Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.18 y 3.19, respectivamente. En las figuras 3.20 y 3.21 se ilustran el comportamiento de la superficie de conmutación $z_2(t)$ y del control $u(t)$, respectivamente.

De acuerdo a los resultados de la simulación se tiene que efectivamente el error de seguimiento tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito (figura 3.19). También se observa que se presenta el modo deslizante, ya que la superficie de conmutación tiende a cero (figura 3.20).

En lo que se refiere al control (figura 3.21), se observa que inicialmente el control tiene una magnitud mucho menor que para el caso de técnica de regulación lineal, como por ejemplo en la figura 3.5. De la misma manera hay diferencias en el estado estable del control, ya que para el caso de regulación lineal el control es una señal de baja frecuencia, mientras que en el caso con modos deslizantes el control es de alta frecuencia, pero acotado, lo cual es característico del control con modos deslizantes.

3.5.4. Ejemplo caso S2

Se considera el sistema de segundo orden que se encuentra en la forma CBR (3.87)-(3.89). La referencia es la señal $w_1(t)$ que se toma del exosistema (3.83). Ahora se aplica la técnica de control por bloques.

Paso 1). Similar a (3.95) se define una nueva variable que tiene la información del error de seguimiento

$$z_1(t) = x_1(t) - R w(t) \quad (3.134)$$

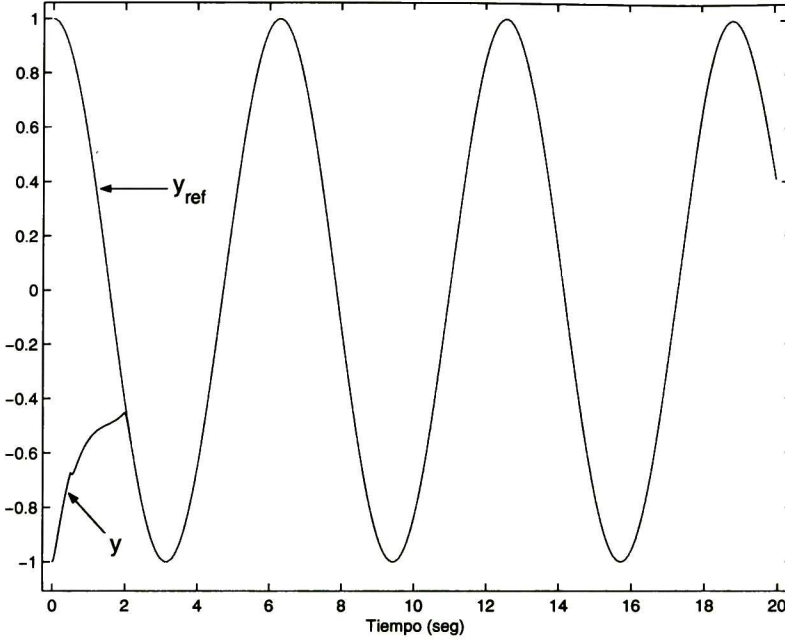


Figura 3.18: PRMD-CBR (Caso 1). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

se toma la derivada

$$\dot{z}_1(t) = a_{0,1}z_1(t) + a_{1,1}z_1(t - \tau) + \bar{B}_{0,1}v_1(t) + \phi_1(t) \quad (3.135)$$

donde

$$\phi_1(t) = R_1w(t) + N_1w(t - \tau)$$

$$R_1 = a_{0,1}R - RS + P_1 \quad \text{y} \quad N_1 = a_{1,1}R$$

enseguida se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_1(t) = \Lambda_1z_1(t) + b_{0,1}z_2(t) \quad (3.136)$$

donde $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\Lambda_1 < 0$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^2$ y $b_{0,1} \subset \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

la transformación no singular para $z_2(t)$ toma la forma

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \tilde{B}_1^{-1} \begin{bmatrix} (a_{0,1} - \Lambda_1)z_1(t) + a_{1,1}z_1(t - \tau) + \phi_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1v_1(t) \\ v_1(t) &= \psi_2(t) + D_1\psi_2(t - \tau) \\ x_2(t) &= \Gamma_1\psi_2(t) \end{aligned}$$

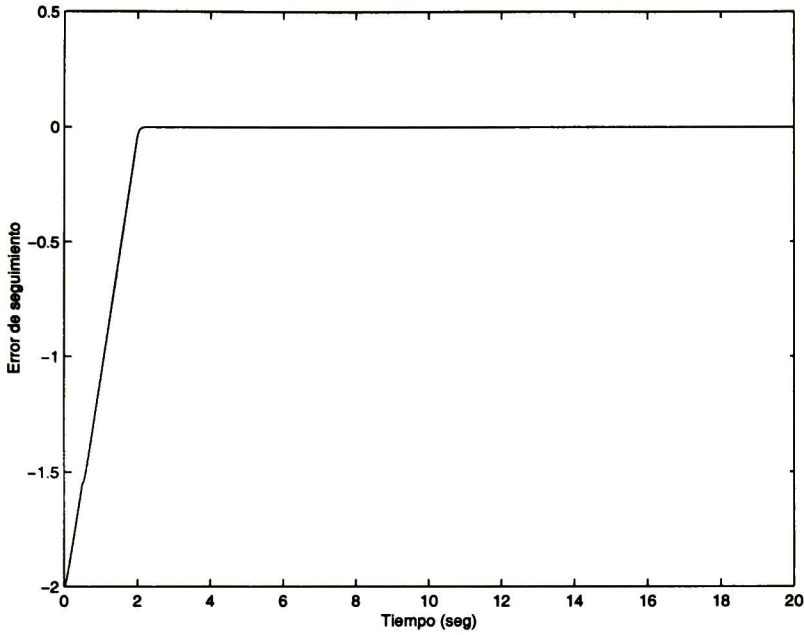


Figura 3.19: PRMD-CBR (Caso 1). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

Paso 2). Se toma la derivada de $z_2(t)$

$$\dot{z}_2(t) = \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right] + \bar{B}_{0,2} v_2^1(t) \quad (3.137)$$

donde

$$E_{20} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)a_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{0,21}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)a_{1,1} + \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}a_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{1,21} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,21}$$

$$E_{22} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,21}$$

$$F_{10}^2 = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)\bar{b}_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{0,22}$$

$$F_{11}^2 = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1}(a_{0,1} - \Lambda_1)\bar{b}_{0,1}\Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ + \bar{b}_{0,1}^{-1}a_{1,1}\bar{b}_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} + a_{1,22} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{0,22}$$

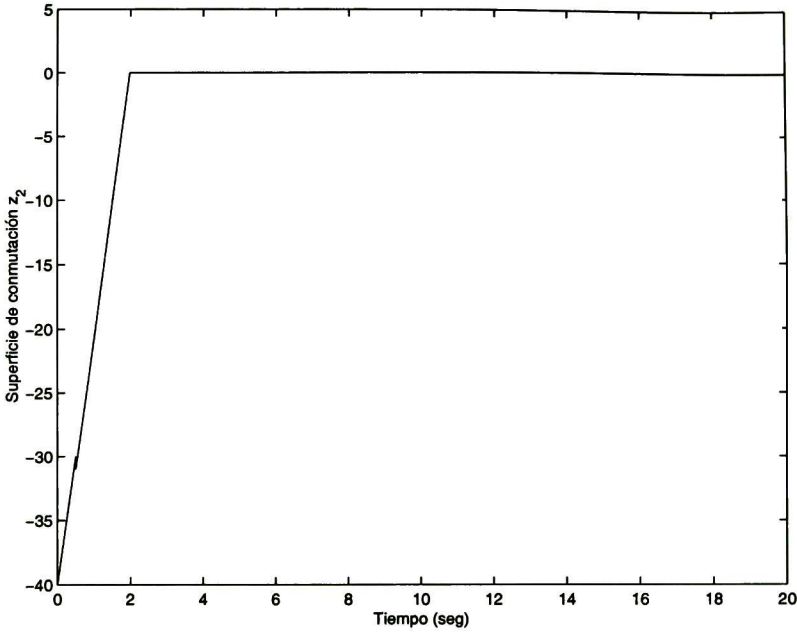


Figura 3.20: PRMD-CBR(Caso 1). Superficie de conmutación $z_2(t)$.

$$F_{12}^2 = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1} a_{1,1} \bar{b}_{0,1} \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,22}$$

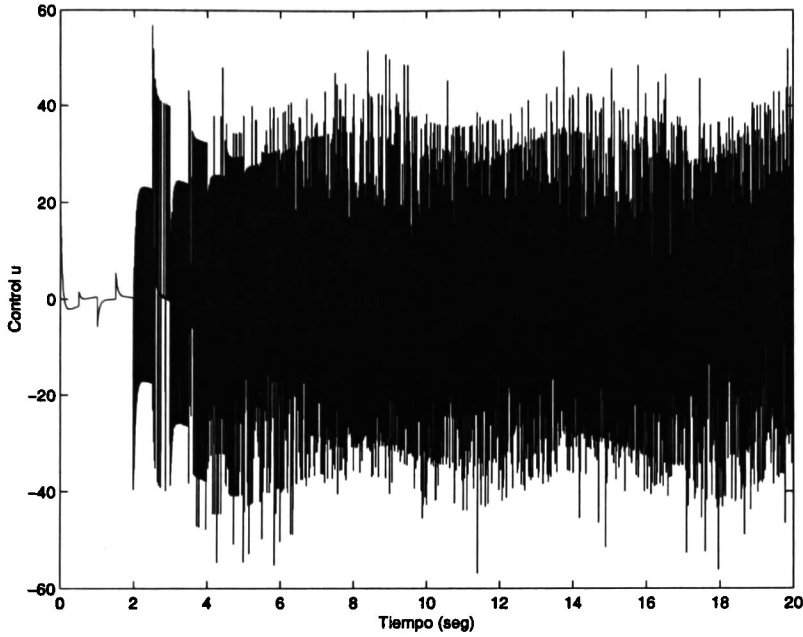
$$G_{20} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1} (a_{0,1} - \Lambda_1) a_{0,1} R + \bar{b}_{0,1}^{-1} (a_{0,1} - \Lambda_1) (P_1 - RS) + \bar{b}_{0,1}^{-1} (a_{0,1} RS + P_1 S - RS^2) \\ 0 \end{bmatrix} + a_{0,21} R + P_2$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1} (a_{0,1} - \Lambda_1) a_{1,1} R + \bar{b}_{0,1}^{-1} a_{1,1} (a_{0,1} R + P_1 - RS) + \bar{b}_{0,1}^{-1} a_{1,1} RS \\ 0 \end{bmatrix} + (a_{1,21} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{0,21}) R + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ P_2$$

$$G_{22} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{0,1}^{-1} a_{1,1}^2 R \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ a_{1,21} R$$

se define la dinámica deseada

$$\dot{z}_2(t) = \Lambda_2 \text{sign}[z_2(t)] \quad (3.138)$$


 Figura 3.21: PRMD-CBR (Caso 1). Control $u(t)$.

donde $\Lambda_2 \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

El control $u(t)$ se define

$$v(t) = [\bar{B}_{0,2}]^{-1} \left[\Lambda_2 \text{sign}[z_2(t)] - \sum_{i=0}^2 \left[E_{2i} z_1(t - i\tau) + F_{1i}^2 x_2(t - i\tau) + G_{2i} w(t - i\tau) \right. \right. \\ \left. \left. - (\bar{B}_{0,2} D_2 + \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_{0,2}) v(t - \tau) - \Gamma_1 D_1 \Gamma_1^+ \bar{B}_{0,2} D_2 v(t - 2\tau) \right] \right]$$

Para este ejemplo se seleccionaron los siguientes parámetros: $a_{0,1} = 0$, $a_{1,1} = 0$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b_{0,1} = 2$, $D_1 = 0,5$, $a_{0,21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_{0,22} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $a_{1,21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_{1,22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{B}_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$, $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha = 1$, $\tau = 0,5$, $\lambda_1 = -100$ y $\lambda_2 = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}$. Las respuestas en el tiempo para $y(t)$, $w_1(t)$ y para el error $e(t)$ están presentadas en las figuras 3.22 y 3.23, respectivamente. En las figuras 3.24 y 3.25 se ilustran el comportamiento de la superficie de conmutación $z_2(t)$ y de la señal de control $u(t)$, respectivamente.

De acuerdo a los resultados de la simulación se tiene que el error de seguimiento (figura 3.23) efectivamente tiende a cero. Como para el caso S1 se observa que se alcanza el modo deslizante

ya que la superficie de conmutación tiende a cero (figura 3.24). En lo que se refiere al control se tiene la misma situación que para el caso S1, es decir, una magnitud inicial menor que la técnica de regulación lineal y en estado estable se tiene una señal de magnitud acotada y de alta frecuencia (figura 3.25).

La elección de una de las dos técnicas presentadas (regulación lineal y control por bloques) dependerá del tipo de sistema en particular. Ya que por ejemplo, no todos los sistemas soportan la acción de control de alta frecuencia que se tiene en los modos deslizantes. De la misma manera, en el caso de regulación lineal, donde se presentaron magnitudes del control mayores. El uso de la técnica de regulación por retroalimentación del estado ó del error dependerá de la información disponible del sistema.

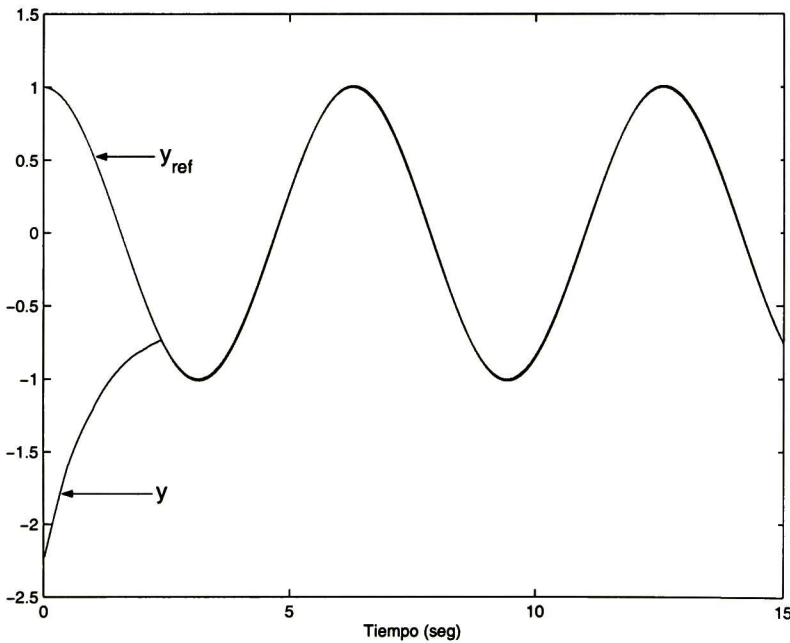


Figura 3.22: PRMD-CBR (Caso 2). Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $y_{ref}(t) = w_1(t)$.

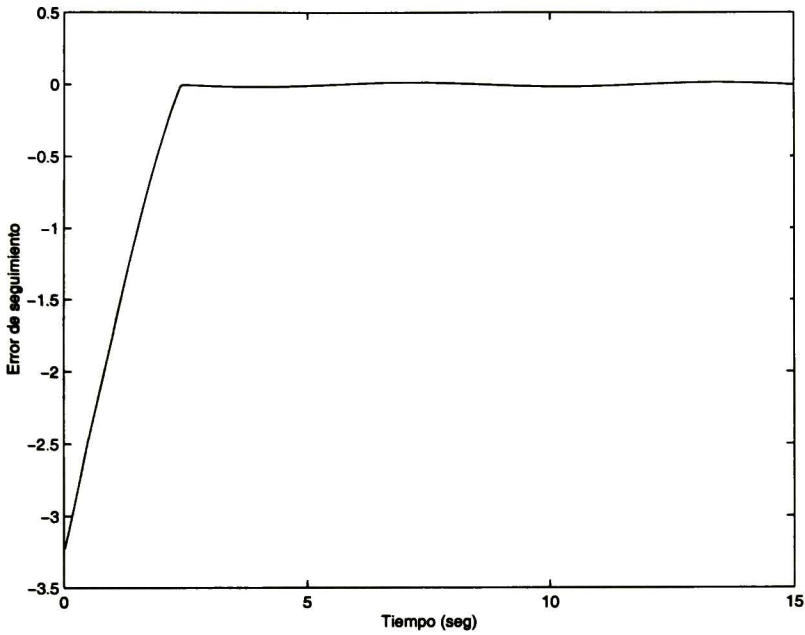


Figura 3.23: PRMD-CBR (Caso 2). Error de seguimiento $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$.

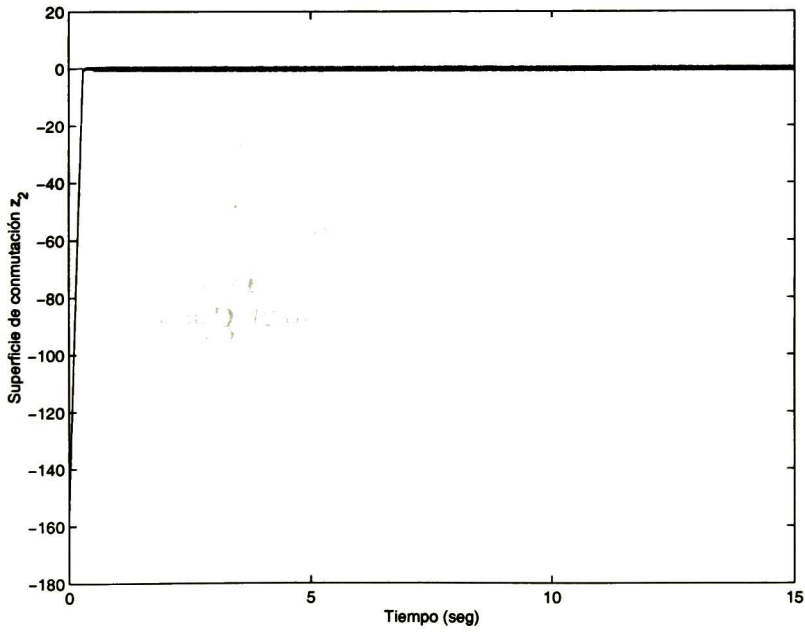


Figura 3.24: PRMD-CBR (Caso 2). Superficie de conmutación $z_2(t)$.

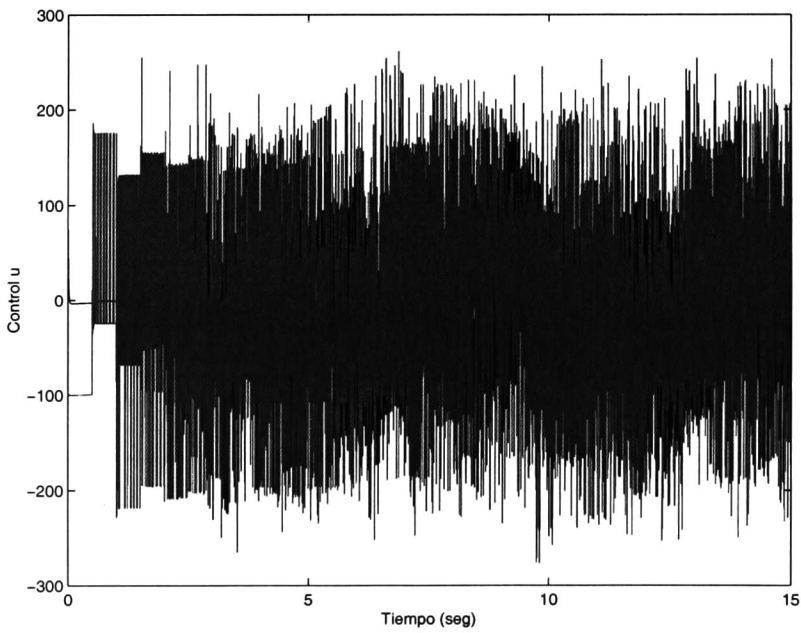


Figura 3.25: PRMD-CBR (Caso 2). Control $u(t)$.

Capítulo 4

Regulación de sistemas con múltiples retardos en el estado

4.1. Introducción

En este capítulo se aborda el problema de calcular el controlador que garantice el seguimiento para sistemas con múltiples retardos en el estado. Se presentan como en el capítulo anterior los dos enfoques de la regulación: retroalimentación del estado y del error. En la sección 4.2 se presenta la formulación de ambos enfoques para el problema de regulación. En la sección 4.2.1 se presenta el problema de regulación por retroalimentación del estado y se dan condiciones de existencia de una solución. De la misma manera, en la sección 4.2.2 se muestra el problema de regulación por retroalimentación del error y se dan condiciones de existencia de una solución. Finalmente en la sección 4.3 se muestra un ejemplo que se resuelve por los dos enfoques aquí presentados.

4.2. El problema de regulación para una clase de sistemas LIT con retardo

Se considera un sistema lineal invariante en el tiempo con retardos sujeto a una señal de perturbación externa, descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i) + Bu(t) + Pw(t) \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, y τ_i son retardos de tiempo reales positivos, con $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N$. La señal de perturbación y/o referencia viene del exosistema (3.2). De la misma manera la señal de error y la condición inicial están definidas por (3.3) y (3.4), respectivamente.

El problema consiste en diseñar un controlador por retroalimentación que garantice el seguimiento. Como se vió en las secciones anteriores la estructura de este controlador depende de la cantidad de información disponible del sistema, dando lugar a dos estructuras: *regulador por retroalimentación de estado* y *regulador por retroalimentación del error*.

Más formalmente, el **Problema de regulación por retroalimentación de estado con retardos (PRRESR)** puede ser establecido como el problema de encontrar, si es posible, una retroalimentación

$$u(t) = \sum_{i=0}^N K_i x(t - \tau_i) + Tw(t) \quad (4.2)$$

tal que

EESR) El punto de equilibrio $x(t) = 0$ del sistema en lazo cerrado sin perturbaciones

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BK_0)x(t) + (A_1 + BK_1)x(t - \tau_1) + \cdots + (A_N + BK_N)x(t - \tau_N) \quad (4.3)$$

es asintóticamente estable. Esto significa, para cualquier condición inicial $\varphi : [t_0 - \tau_N, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la correspondiente solución $x(t)$ de (4.3), satisface $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

RESR) $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

De la misma manera, el **Problema de regulación por retroalimentación del error con retardos (PRRER)** puede ser formulado como el problema de encontrar un controlador dinámico

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \xi(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N L_i [Cx(t - \tau_i) - Rw(t - \tau_i)] \\ u(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{K}_i \xi(t - \tau_i) \end{aligned} \quad (4.4)$$

tal que

EER) El punto de equilibrio del sistema compuesto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N B \tilde{K}_i \xi(t - \tau_i) \\ \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \xi(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N L_i Cx(t - \tau_i) \end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

4.2. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LIT CON RETARDO 85

RER) Para cualquier condición inicial $(x(0), \xi(0), w(0))$ la solución $(x(t), \xi(t), w(t))$ del sistema en lazo cerrado (4.1)-(4.4) es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran los esquemas de control para los dos problemas antes mencionados.

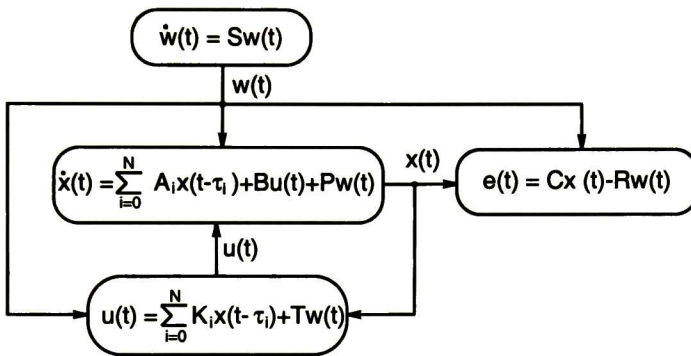


Figura 4.1: Estructura de esquema de control PRRESR.

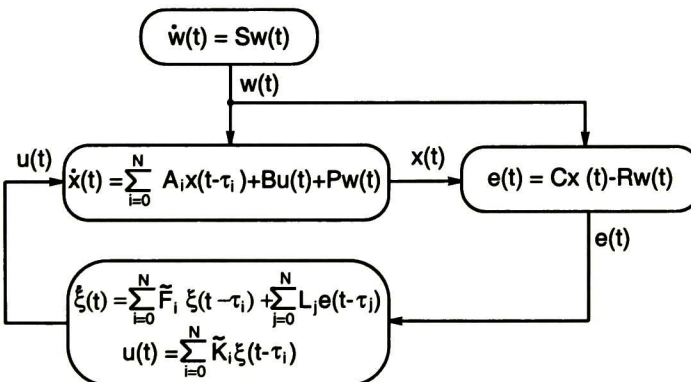


Figura 4.2: Estructura de esquema de control PRRER.

4.2.1. Problema de regulación por retroalimentación del estado

Para proponer una solución a este problema se considera que se cumple la hipótesis H1) y además se considera la siguiente hipótesis

H7) Existen matrices K_0, \dots, K_N y matrices simétricas Q y M asociadas con la ecuación de Lyapunov

$$(A_0 + BK_0)^T Q + Q(A_0 + BK_0) + (N + 1)M = 0$$

satisfaciendo

$$M > 0$$

$$M - \sum_{i=1}^N Q(A_i + BK_i)M^{-1}(A_i + BK_i)^T Q > 0$$

Se puede demostrar que si la H7) se satisface, entonces el punto de equilibrio del sistema (4.3) es asintóticamente estable [6]. Esta propiedad será usada en lo siguiente para diseñar el controlador.

Se establece primero el siguiente resultado.

Lema 22 *Asúmase que las H1) y H7) se satisfacen. Entonces, para $u(t)$ dada por (4.2), la condición RESR) se satisface si existe una solución X a las ecuaciones matriciales*

$$XS = \sum_{i=0}^N (A_i + BK_i)Xe^{-\tau_i S} + P_c \quad (4.5)$$

$$0 = CX - R. \quad (4.6)$$

Donde $P_c = BT + P$.

Prueba. Considérese la función $\hat{x}(t) = x(t) - Xw(t)$. Así

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A_0 + BK_0)(\hat{x}(t) + Xw(t)) + (A_1 + BK_1)(\hat{x}(t - \tau_1) + Xw(t - \tau_1)) \\ &\quad + \dots + (A_N + BK_N)(\hat{x}(t - \tau_N) + Xw(t - \tau_N)) \\ &\quad + BTw(t) + Pw(t) - XS w(t) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta (3.12) y acomodando los términos, se tiene lo siguiente

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=0}^N (A_i + BK_i)\hat{x}(t - \tau_i) + \left(\sum_{i=0}^N (A_i + BK_i)Xe^{-\tau_i S} + P + BT - XS \right)w$$

Ya que $P_c = BT + P$ entonces, por (4.5), se obtiene

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=0}^N (A_i + B_0 K_i)\hat{x}(t - \tau_i)$$

Así, de H7) se tiene que $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.2. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LIT CON RETARDO 87

Para el error de seguimiento de la salida, se tiene ahora que

$$e(t) = C\hat{x}(t) + (CX - R)w$$

y debido a que $CX - R = 0$, RESR) se satisface, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. ■

Como en el caso de sistemas sin retardo, basado en el Lema 22, se pueden ahora establecer condiciones suficientes para la existencia de una solución al PRRESR.

Teorema 23 *Asúmase que H1) y H7) se satisfacen. Entonces, el PRRESR tiene una solución si las ecuaciones matriciales*

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B\Gamma + P \quad (4.7)$$

$$0 = C\Pi - R \quad (4.8)$$

tienen una solución Π y Γ .

Prueba. La prueba es constructiva.

Paso 1) Se escogen matrices K_0, \dots, K_N tal que la condición H7) se satisface.

Paso 2) Se establece $T = \Gamma - \sum_{i=0}^N K_i \Pi e^{-\tau_i S}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Pi S &= \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B(T + \sum_{i=0}^N K_i \Pi e^{-\tau_i S}) + P \\ 0 &= C\Pi - R, \end{aligned}$$

de donde

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N (A_i + BK_i) \Pi e^{-\tau_i S} + BT + P$$

o equivalentemente

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N (A_i + B_0 K_i) \Pi e^{-\tau_i S} + P_c$$

De la ecuación anterior y la ecuación (4.8), el Teorema se obtiene del Lema 22 si se define $X = \Pi$. ■

Nota 24 Las ecuaciones (4.7)-(4.8) expresan la existencia de un subespacio $x = \Pi w$ que se vuelve invariante por $u = \Gamma w$, en el cual el error de seguimiento es cero. De hecho, se tiene que

$$\dot{x}(t) = \Pi S w(t) = \sum_{i=0}^N A_i \Pi w(t - \tau_i) + B \Gamma w(t) + P w(t) \quad (4.9)$$

$$0 = C \Pi w(t) - R w(t). \quad (4.10)$$

Usando (3.12), (4.9)-(4.10) implica, para toda $w(t)$,

$$\begin{aligned} \Pi S w &= \left(\sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B \Gamma + P \right) w \\ 0 &= (C \Pi - R) w. \end{aligned}$$

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución de las ecuaciones (4.7)-(4.8) está dada por el siguiente resultado.

Teorema 25 Las ecuaciones (4.7)-(4.8) son universalmente solubles, es decir, tienen una solución Π y Γ para cada P y R dadas, si y sólo si

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N A_i e^{-\tau_i \lambda} - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p \quad \forall \lambda \in \sigma(S). \quad (4.11)$$

Prueba. Para probar este resultado se utiliza el Teorema 30 del apéndice A. Las ecuaciones (4.7)-(4.8) pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -P \\ R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} e^{-\tau_i S} \\ &\quad - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi \\ \Gamma \end{pmatrix} S \end{aligned}$$

que claramente tiene la forma de la ecuación (A.1) del apéndice A si definimos $D_1 = I$, $D_2 = S$, $D_i = e^{-\tau_i - 2S}$, para $3 \leq i \leq N + 2$.

Ya que $e^{-\tau_i S} e^{-\tau_j S} = e^{-\tau_j S} e^{-\tau_i S}$, la hipótesis del Teorema 30 se satisface. Ahora, considérese un eigenvector v de S , es decir, $Sv = \lambda v$ para $\lambda \in \sigma(S)$, entonces, $S^k v = \lambda^k v$ y $e^{\alpha S} v = e^{\alpha \lambda} v$. Así, la eigentupla conjunta de (D_1, \dots, D_k) tiene la forma

$$\widehat{\lambda} = (1, \lambda, e^{-\tau_1 \lambda}, \dots, e^{-\tau_N \lambda}),$$

de donde la ecuación (A.2) del apéndice A es

$$G(\widehat{\lambda}) = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-\tau_i \lambda} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda$$

para toda $\lambda \in \sigma(S)$. Finalmente, ya que $G(\widehat{\lambda})$ tiene rango pleno por filas si (4.11) se satisface, la prueba de este Teorema se obtiene del Teorema 30. ■

4.2.2. Problema de regulación por retroalimentación del error

Para este caso, de forma similar a la retroalimentación de estado se prueba primero un resultado, el cual se usará después para dar una solución al problema.

Lema 26 *Asúmase que la H1) se satisface. Supóngase que existe una retroalimentación (4.4) para la cual la condición EER) se satisface. Entonces la condición RER) también se satisface si y sólo si existen matrices Π y Σ que resuelven las ecuaciones matriciales lineales*

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N B \tilde{K}_i \Sigma e^{-\tau_i S} + P \quad (4.12)$$

$$\Sigma S = \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \Sigma e^{-\tau_i S} \quad (4.13)$$

$$0 = C\Pi - R \quad (4.14)$$

Prueba. Se considera el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N B \tilde{K}_i \xi(t - \tau_i) + Pw(t) \\ \dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \xi(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N L_i C x(t - \tau_i) - \sum_{i=0}^N L_i R w(t - \tau_i) \end{aligned}$$

Ahora se considera la transformación de coordenadas $\tilde{x} = x - \Pi w$ y $\tilde{\xi} = \xi - \Sigma w$. En las nuevas coordenadas así definidas, las ecuaciones que describen el sistema en lazo cerrado toman la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i & B \tilde{K}_i \\ L_i C & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}(t - \tau_i) \end{bmatrix} + \Delta w(t) \quad (4.15)$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N B \tilde{K}_i \Sigma e^{-\tau_i S} + P - \Pi S \\ \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \Sigma e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N L_i C \Pi e^{-\tau_i S} - \sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} - \Sigma S \end{bmatrix}$$

Reacomodando los términos de la matriz Δ de la ecuación (4.15) se tiene la ecuación

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i & B \tilde{K}_i \\ L_i C & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-\tau_i S} + \begin{bmatrix} P \\ -\sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Para obtener las condiciones sobre las cuales la ecuación (4.16) tiene una solución se aplica el Teorema 30 del apéndice A, donde la ecuación (A.1) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} -P \\ \sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i & B \tilde{K}_i \\ L_i C & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} e^{-\tau_i S} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S$$

donde

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_0 & B\tilde{K}_0 \\ L_0C & \tilde{F}_0 \end{bmatrix}, G_2 = - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$G_i = \begin{bmatrix} A_{i-2} & B\tilde{K}_{i-2} \\ L_{i-2}C & \tilde{F}_{i-2} \end{bmatrix}, i = 3, \dots, N+2, Z = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix}, D_1 = I,$$

$$D_2 = S, D_i = e^{-\tau_i S}, i = 3, \dots, N+2, Q = \begin{bmatrix} -P \\ \sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} \end{bmatrix}$$

la correspondiente eigentupla conjunta es

$$\hat{\lambda} = (1, \lambda, e^{-\tau_1 \lambda}, \dots, e^{-\tau_N \lambda})$$

Del Teorema 30 la ecuación (4.16) tiene una solución y es única si la matriz (A.2) tiene rango pleno por filas, $2n + q, \forall \lambda \in \sigma(S)$, para cualquier eigentupla conjunta $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N+2})$ of (D_1, \dots, D_{N+2}) , donde en este caso

$$G(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} A_0 & B\tilde{K}_0 \\ L_0C & \tilde{F}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \lambda + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & B\tilde{K}_i \\ L_iC & \tilde{F}_i \end{bmatrix} e^{-\tau_i \lambda}$$

Se tiene que la condición EER) implica que

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i & B\tilde{K}_i \\ L_iC & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}(t - \tau_i) \end{bmatrix}$$

es estable.

Si las matrices Π y Σ que satisfacen (4.16) existen, entonces $\Delta = 0$ y de la ecuación (4.15) se tiene que $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ y $\tilde{\xi}(t) \rightarrow 0$, por lo tanto $x(t) \rightarrow \Pi w(t)$ y $\xi(t) \rightarrow \Sigma w(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. El mapeo del error $e(t) = Cx(t) - R w(t)$ tiende en el límite a

$$e(t) = (C\Pi - R)w(t).$$

Ya que el exosistema es antiestable, entonces $e(t) \rightarrow 0$ si y sólo si

$$C\Pi - R = 0$$

Así la condición RER) se satisface si y sólo si la única solución Π y Σ de (4.16) satisface también (4.14).

Del primer bloque de la ecuación (4.16) se obtiene

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N B\tilde{K}_i \Sigma e^{-\tau_i S} + P$$

4.2. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN PARA UNA CLASE DE SISTEMAS LIT CON RETARDO91

que coincide con la ecuación (4.12).

Del segundo bloque de la ecuación (4.16) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\Sigma S &= \sum_{i=0}^N L_i C \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \Sigma e^{-\tau_i S} - \sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} \\ &= \sum_{i=0}^N L_i [C \Pi - R] e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \Sigma e^{-\tau_i S}\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $C \Pi - R = 0$, entonces

$$\Sigma S = \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \Sigma e^{-\tau_i S}$$

que coincide con la ecuación (4.13).

■

Se vió en la sección previa que el problema de la regulación de la salida puede ser resuelto por una ley de retroalimentación (4.2), la cual depende de los estados tanto del sistema como del exosistema. Para el caso de retroalimentación del error, ya que los estados no están disponibles en su totalidad, se utilizará un observador de estado para proveer esta información.

Se retoma el sistema extendido descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i) + B u(t) + P w(t) \\ \dot{w}(t) &= S w(t) \\ e(t) &= C x(t) - R w(t)\end{aligned}$$

el cual puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}^e(t) &= \sum_{i=0}^N A_i^e x^e(t - \tau_i) + B^e u(t) \\ e(t) &= C^e x^e(t)\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde

$$\begin{aligned}x^e(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, A_0^e = \begin{bmatrix} A_0 & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, A_i^e = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N, \\ B^e &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C^e = [C \quad -R]\end{aligned}$$

Un observador para el sistema (4.17) está dado por

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^N [A_i^e - L_i C^e] \xi(t - \tau_i) + B^e u(t) + \sum_{i=0}^N L_i e(t - \tau_i)\tag{4.18}$$

El siguiente teorema expresa condiciones de estabilidad del observador propuesto.

Teorema 27 Sea L_0 una matriz tal que $(A_0^e - L_0C^e)$ es una matriz estable. Sean Q y M matrices simétricas asociadas con la ecuación de Lyapunov

$$(A_0^e - L_0C^e)^T Q + Q(A_0^e - L_0C^e) + (N + 1)M = 0$$

satisfaciendo

$$M > 0$$

$$M - \sum_{i=1}^N Q(A_i^e - L_iC^e)M^{-1}(A_i^e - L_iC^e)^T Q > 0$$

Entonces el observador descrito por (4.18) es asintóticamente estable y $\xi(t) \rightarrow x^e(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Prueba. Se define el error de observación como

$$z(t) = x^e(t) - \xi(t)$$

al tomarse la derivada del error se tiene

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^N (A_i^e - L_iC^e)z(t - \tau_i) \quad (4.19)$$

o equivalentemente

$$\dot{z}(t) = (A_0^e - L_0C^e)z(t) + (A_1^e - L_1C^e)z(t - \tau_1) + \dots + (A_N^e - L_NC^e)z(t - \tau_N) \quad (4.20)$$

Así, del Teorema 6 se deriva el resultado. ■

De la discusión anterior el procedimiento para construir el controlador por retroalimentación del error puede ser establecido como sigue

paso 1) Se calculan las matrices K_0, \dots, K_N tal que el sistema

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N [A_i + BK_i]x(t - \tau_i)$$

es estable.

paso 2) Se encuentra, si es posible, una solución Π y Γ de las ecuaciones (4.7)-(4.8).

paso 3) Se diseña el observador (4.18) para el estado $x^e(t)$, donde

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^N [A_i^e - L_iC^e]\xi(t - \tau_i)$$

es estable.

Finalmente, el controlador tiene la estructura

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{F}_i \xi(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N L_i e(t - \tau_i) \\ &= \sum_{i=0}^N F_i^0 \xi^0(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N F_i^1 \xi^1(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^N L_i e(t - \tau_i)\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}u(t) &= \sum_{i=0}^N \tilde{K}_i \xi(t - \tau_i) \\ &= [K_0 \quad T] \begin{bmatrix} \xi^0(t) \\ \xi^1(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N [K_i \quad 0] \begin{bmatrix} \xi^0(t - \tau_i) \\ \xi^1(t - \tau_i) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^N K_i \xi^0(t - \tau_i) + T \xi^1(t)\end{aligned}\quad (4.22)$$

donde

$$T = \Gamma - \sum_{i=0}^N K_i \Pi e^{-\tau_i S} \quad (4.23)$$

y

$$F_i^0 = \begin{bmatrix} A_i - L_i^0 C + B K_i \\ -L_i^1 C \end{bmatrix}, i = 0, \dots, N \quad (4.24)$$

$$F_0^1 = \begin{bmatrix} P + L_0^0 R + B \Gamma - B K_0 \Pi \\ S + L_0^1 R \end{bmatrix}, F_i^1 = \begin{bmatrix} L_i^0 R - B K_i \Pi \\ L_i^1 R \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N \quad (4.25)$$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi^0(t) \\ \xi^1(t) \end{bmatrix}, \xi^0(t) \in \mathbb{R}^n, \xi^1(t) \in \mathbb{R}^q, F_i^0 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times n}, F_i^1 \in \mathbb{R}^{(n+q) \times q}$$

Se demuestra ahora que este controlador resuelve el problema bajo consideración.

Teorema 28 *Asúmase que las H1), H7) y la condición del Teorema 27 se satisfacen. Entonces el PRER puede resolverse si y sólo si existen matrices Π y Γ las cuales resuelven las ecuaciones matriciales lineales (4.7) y (4.8).*

Prueba.

(Necesidad)

Supóngase que existe una solución al PRER, entonces por el Lema 26 las ecuaciones (4.12)-(4.14) se satisfacen. Estableciendo

$$\Gamma = \sum_{i=0}^N \tilde{K}_i \Sigma e^{-\tau_i S}$$

la ecuación (4.12) se reduce a

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B\Gamma + P$$

que es igual a (4.7). Además, (4.14) coincide con (4.8).

(Suficiencia)

Si existen matrices Π y Γ , entonces por el Teorema 27 se puede diseñar un controlador (4.21).

Se demuestra ahora que este controlador satisface la condición EER).

El subsistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i & B\tilde{K}_i \\ L_i C & \tilde{F}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}(t - \tau_i) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

sustituyendo (4.21), (4.22), (4.24) y (4.25), toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & BK_0 & BT \\ L_0 C & F_0^0 & F_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}^0(t) \\ \tilde{\xi}^1(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & BK_i & 0 \\ L_i C & F_i^0 & F_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}^0(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}^1(t - \tau_i) \end{bmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & BK_0 & BT \\ L_0^0 C & A_0 - L_0^0 C + BK_0 & P + L_0^0 R + BT \\ L_0^1 C & -L_0^1 C & S + L_0^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}^0(t) \\ \tilde{\xi}^1(t) \end{bmatrix} \\ + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i & BK_i & 0 \\ L_i^0 C & A_i - L_i^0 C + BK_i & L_i^0 R \\ L_i^1 C & -L_i^1 C & L_i^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}^0(t - \tau_i) \\ \tilde{\xi}^1(t - \tau_i) \end{bmatrix}$$

Usando la matriz

$$\Xi = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

para una transformación de coordenadas, el subsistema toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\zeta}}(t) \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + BK_0 & BK_0 & BT \\ 0 & A_0 - L_0^0 C & P + L_0^0 R \\ 0 & -L_0^1 C & S + L_0^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t) \\ \tilde{\phi}^0(t) \\ \tilde{\phi}^1(t) \end{bmatrix} \\ + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i + BK_i & BK_i & 0 \\ 0 & A_i - L_i^0 C & L_i^0 R \\ 0 & -L_i^1 C & L_i^1 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - \tau_i) \\ \tilde{\phi}^0(t - \tau_i) \\ \tilde{\phi}^1(t - \tau_i) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A_0 + BK_0 & [BK_0 & BT] \\ 0 & A_0^e - L_0 C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix} \\ + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} A_i + BK_i & [BK_i & 0] \\ 0 & A_i^e - L_i C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}(t - \tau_i) \\ \tilde{\phi}(t - \tau_i) \end{bmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\zeta}}(t) &= \sum_{i=0}^N [A_i + BK_i] \tilde{\zeta}(t - \tau_i) + [BK_0 \quad BT] \tilde{\phi}(t) + \sum_{i=1}^N + [BK_i \quad 0] \tilde{\phi}(t - \tau_i) \\ \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \sum_{i=0}^N [A_i^e - L_i C^e] \tilde{\phi}(t - \tau_i)\end{aligned}$$

Por el Teorema 27 tenemos que $\tilde{\phi}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, ya que la H7) se satisface se tiene que $\tilde{\zeta}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto la condición EER) se satisface.

Para probar la condición RER) usamos el Lema 26. Si existen las matrices Π y Γ , entonces estableciendo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma^0 \\ \Sigma^1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

donde

$$\Sigma^0 \in \mathbb{R}^{n \times q}, \Sigma^1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$$

se tiene lo siguiente

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N BK_i \Sigma^0 e^{-\tau_i S} + BT \Sigma^1 + P \quad (4.28)$$

la cual, usando (4.23) y (4.27) la ecuación (4.28) toma la forma

$$\Pi S = \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B \Gamma + P$$

que es igual a (4.7).

De (4.13) y (4.21), (4.24) y (4.25) se tiene

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} S &= \sum_{i=0}^N \begin{bmatrix} A_i - L_i^0 C + BK_i \\ -L_i^1 C \end{bmatrix} \Sigma^0 e^{-\tau_i S} + \begin{bmatrix} P + L_0^0 R + BT \\ S + L_0^1 R \end{bmatrix} \Sigma^1 \\ &+ \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} L_i^0 R \\ L_i^1 R \end{bmatrix} \Sigma^1 e^{-\tau_i S} \\ &= \left[-\sum_{i=0}^N L_i^1 C \Pi e^{-\tau_i S} + S + \sum_{i=0}^N L_i^1 R e^{-\tau_i S} \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}term &= \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} - \sum_{i=0}^N L_i^0 C \Pi e^{-\tau_i S} + \sum_{i=0}^N BK_i \Pi e^{-\tau_i S} + P \\ &+ \sum_{i=0}^N L_i R e^{-\tau_i S} + B \Gamma - \sum_{i=0}^N BK_i \Pi e^{-\tau_i S}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Pi \\ I \end{bmatrix} S &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} - \sum_{i=0}^N L_i^0 [C\Pi - R] e^{-\tau_i S} + B\Gamma + P \\ S - \sum_{i=0}^N L_i^1 [C\Pi - R] e^{-\tau_i S} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N A_i \Pi e^{-\tau_i S} + B\Gamma + P \\ S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la cual satisface (4.7) y (4.8). Finalmente (4.14) también coincide con (4.8). ■

4.3. Ejemplo

En esta sección se toma un ejemplo y se implementa la regulación de la salida por retroalimentación del estado y del error. Se considera el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t - \tau_1) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t - \tau_2) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{4.30}$$

En este caso la señal de referencia viene del exosistema (3.83) y $y_{ref}(t) = w_1(t)$

4.3.1. Regulación por retroalimentación del estado

Se calcularon la matrices Π y Γ que resuelven las ecuaciones (4.7) y (4.8). Lo anterior se hizo a partir de la condición en estado estable $x(t) = \Pi w(t)$, lo que lleva a que el error de seguimiento sea igual a cero, y de las ecuaciones del sistema y del exosistema.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 \\ 0,7149 & -0,0394 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} -3,3623 & 1,0490 \end{bmatrix}$$

Utilizando el paquete para DML's de Matlab se obtuvieron

$$K_0 = \begin{bmatrix} -6,4602 & -1,6379 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2,0000 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1,0000 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 5,9555 & -0,3102 \end{bmatrix}$$

Se simuló el sistema con $\tau_1 = 0,5$, $\tau_2 = 0,8$ y $\alpha = 1$. En la figura 4.3 se muestran la salida del sistema $y(t)$ y la señal de referencia $w_1(t)$. En la figura 4.4 se muestra el error de seguimiento. En la figura 4.5 se ilustra la señal de control $u(t)$.

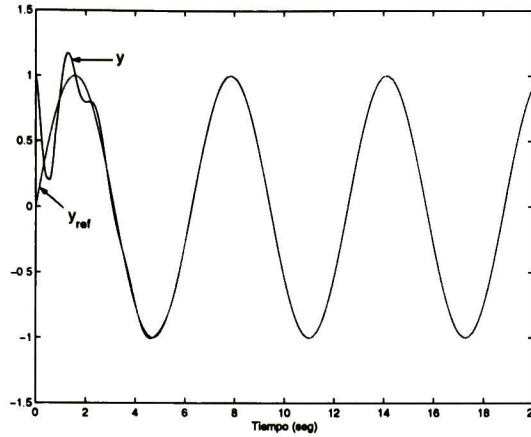


Figura 4.3: PRRESR. Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $w_1(t)$

4.3.2. Regulación por retroalimentación del error

Las matrices de ganancia para la estabilización K_0 , K_1 y K_2 , así como la entrada en estado estable $u_{ss} = \Gamma w(t)$ son los mismos que se calcularon para el PRRESR. En este caso el controlador toma la forma

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=0}^2 F_i^0 \xi^0(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^2 F_i^1 \xi^1(t - \tau_i) + \sum_{i=0}^2 L_i e(t - \tau_i)$$

donde

$$L_0 = \begin{bmatrix} 7,5994 \\ 18,3244 \\ 2,0094 \\ 0,6173 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

$$F_0^0 = \begin{bmatrix} -10,5994 & 5,0000 \\ -23,7845 & -0,6379 \\ -2,0094 & 0 \\ -0,6173 & 0 \end{bmatrix}, F_1^0 = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2^0 = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 0 \end{bmatrix}, F_0^1 = \begin{bmatrix} 8,5994 & 0 \\ 22,5931 & 1,9845 \\ 2,0094 & 1,0000 \\ -0,3827 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1^1 = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0 \\ 1,4297 & -0,0787 \\ 0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 0 \end{bmatrix}, F_2^1 = \begin{bmatrix} -0,5000 & 0 \\ 0,7149 & -0,0394 \\ 0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 0 \end{bmatrix}$$

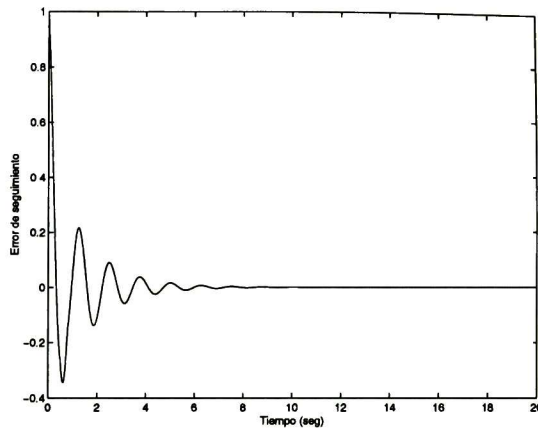


Figura 4.4: PRRESR. Error de seguimiento $e(t) = y(t) - w_1(t)$

En la figura 4.6 se muestran la salida del sistema $y(t)$ y la señal de referencia $w_1(t)$. En la figura 4.7 se muestra el error de seguimiento. En la figura 4.8 se ilustra la señal de control $u(t)$. De los resultados obtenidos en las simulaciones se observa que efectivamente el error de seguimiento tiende a cero para los dos enfoques de control (figura 4.4 para PRRESR y la figura 4.7 para PRRER). De manera similar que en el capítulo anterior se tiene que el error de seguimiento para el caso de PRRER tarda más tiempo en llegar a cero, lo cual se debe a la dinámica del error de observación. En lo referente al control, de las figuras 4.5 y 4.8, se observa que para ambos esquemas tiende al mismo estado estable.

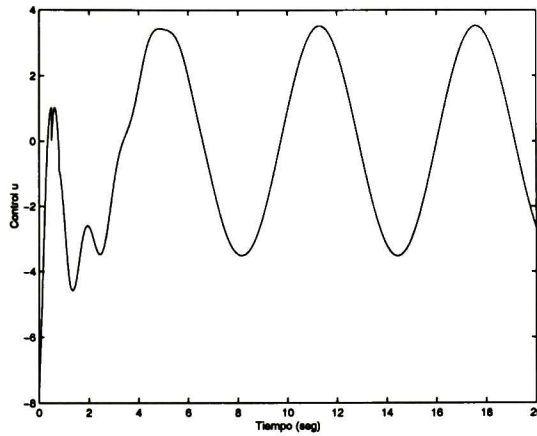


Figura 4.5: PRRESR. Control $u(t)$

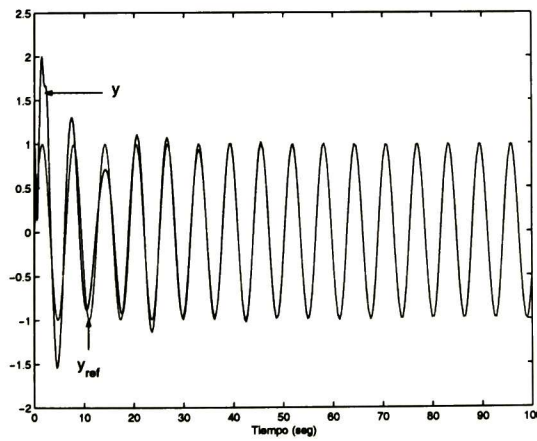


Figura 4.6: PRRER. Salida del sistema $y(t) = x_1(t)$ y referencia $w_1(t)$

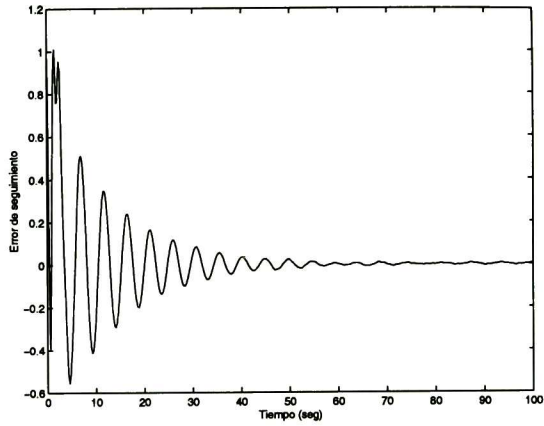


Figura 4.7: PRRER. Error de seguimiento $e(t) = y(t) - w_1(t)$

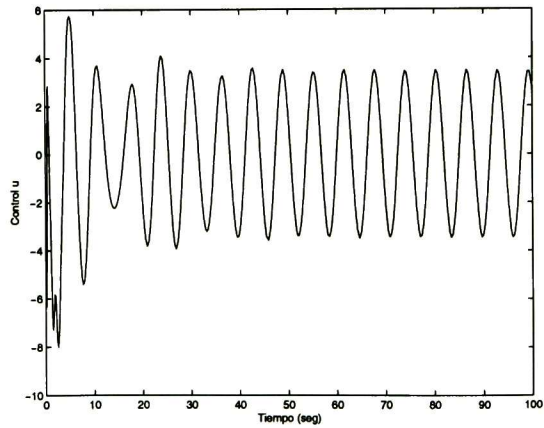


Figura 4.8: PRRER. Control $u(t)$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha presentado el problema de seguimiento de la salida (regulación de la salida) para dos clases de sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo. Basándose en la teoría de regulación para sistemas sin retardo.

En primer lugar se abordó el problema para una clase de sistemas con retardo en el estado y en el control, presentados en una forma especial llamada controlable por bloques con retardos. El problema se solucionó desde dos enfoques: el de la teoría de regulación lineal (retroalimentación del estado y del error) y el de la técnica de control por bloques. Ambos esquemas presentaron un método iterativo para el cálculo del controlador, el cual fue posible gracias a la estructura de la forma controlable por bloques. Para el caso de la técnica de regulación lineal se presentaron condiciones de existencia de la solución en función de la solución de un par de ecuaciones matriciales lineales, del cumplimiento de ciertas hipótesis sobre el sistema a controlar y el exosistema, además de condiciones sobre el rango de un conjunto de matrices. Algunas condiciones sobre la existencia de la solución son análogas a las que se tienen para sistemas sin retardo. Para el caso de la técnica de control por bloques, las condiciones de existencia de una solución al problema se establecieron en función de condiciones de estabilidad de ciertas matrices del sistema a controlar. Los ejemplos ilustraron la efectividad de los métodos propuestos.

De acuerdo a los resultados de las simulaciones se tiene que en cuanto al comportamiento del error de seguimiento, las dos técnicas son similares. Una diferencia significativa se tiene en el control, donde para el caso de regulación lineal se tiene un valor inicial mayor en comparación con el de la técnica de control por bloques. Mientras que en estado estable también se presentan diferencias, ya que para la técnica de control por bloques el estado estable es una señal de alta frecuencia, no así la que se obtiene para la técnica de regulación lineal, aunque ambas señales son acotadas. Por lo tanto, la elección de una de estas dos técnicas dependerá del sistema en particular que permita la acción de control.

De la misma manera se presentó la solución del problema de regulación para una clase de sistemas con múltiples retardos en el estado, pero sin retardo en el control. Aquí también se definieron los problemas por retroalimentación del estado y del error y se dieron condiciones para la existencia de la solución. Que al igual que en la aplicación de esta técnica al caso anterior, dicha solución está en función de la solución de un par de ecuaciones matriciales lineales, así como hipótesis del sistema a controlar y el exosistema. Los ejemplos mostraron la efectividad de los esquemas de control propuestos.

En cuanto a las diferencias en el desempeño de los dos enfoques de regulación lineal, es decir, retroalimentación del estado y del error, aplicados a los dos tipos de sistemas se tiene que para el caso de retroalimentación del error, el error de seguimiento tarda más tiempo en llegar a cero, lo cual se debe a la dinámica del observador. La elección entre uno de estos enfoques dependerá de la cantidad de información disponible del sistema.

Como trabajo futuro de la presente investigación se podría enunciar lo siguiente

- Considerar el caso de la forma controlable por bloques (CBR) en el que la salida no coincide con el estado del primer bloque.
- Considerar la aplicación de los resultados aquí presentados en esquemas de control Takagi-Sugeno para sistemas no lineales con retardo.
- Para el caso de sistemas con retardo en el control, considerar leyes de estabilización sin memoria, es decir, que no dependa de valores anteriores.

Considerar sistemas no lineales con retardo.

- Considerar el problema de regulación robusta para la clase de sistemas estudiados.

Apéndice A

Solución de ecuaciones matriciales lineales

Definición 29 Sea (D_1, \dots, D_k) un conjunto de matrices conmutativas $m \times m$. Un vector $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ es una eigentupla conjunta de (D_1, \dots, D_k) si existe un eigenvector correspondiente común, es decir, si existe $v \neq 0$ tal que

$$D_i v = \lambda_i v \quad i = 1, \dots, k$$

En base a la definición anterior, el siguiente resultado expresa las condiciones bajo las cuales un clase de ecuaciones matriciales lineales tiene solución [16].

Teorema 30 Sea $G_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ y suponer que $D_i D_j = D_j D_i$ para toda $i, j = 1, \dots, k$. Entonces la ecuación

$$\sum_{i=1}^k G_i Z D_i = \Theta \tag{A.1}$$

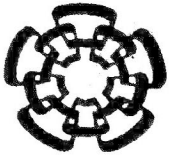
es universalmente soluble (es decir tiene una solución Z para cualquier Θ) si $G(\hat{\lambda})$ tiene rango pleno por filas para cualquier eigentupla conjunta $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de (D_1, \dots, D_k) , donde

$$G(\hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^k G_i \lambda_i \tag{A.2}$$

Bibliografía

- [1] Vadim Utkin, Jürgen Guldner and Jingxin Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor and Francis, 1999.
- [2] Carsten Scherer and Siep Weiland, *Linear Matrix Inequalities in Control*, 2000.
- [3] V. B. Kolmanovskii and J.P. Richard, Some new trends in the study of time delay systems, *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 45, pp. 219-221, 1998.
- [4] Hans W. Knobloch, Alberto Isidori and Dietrich Flockerzi, *Topics in Control Theory*, Birkauer Verlag, Basel Boston Berlin, 1993.
- [5] Alexander G. Loukianov and Jaime Escoto Hernández, *Block Control of Linear Time Invariant Systems with Delay*, 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000.
- [6] M. Zavarei y M. Jamshidi, *Time-Delay Systems Analisis, Optimization and Aplications*, North-Holland, 1987.
- [7] Y. Alekal, P. Brunovsky, D. H. Chyung and E. B. Lee, The Quadratic Problem for Systems with Time Delays, *IEEE Trans. Aut. Control*, 16 (1971) 673-687.
- [8] F. Gouaisbaut, W. Perruquetti and J. P. Richard, A sliding mode-control for linear systems with input and state delays, In *Proc. CDC'99, 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, 1999, 4234-4239.
- [9] D. H. Chyung, Tracking Controller for Linear Systems with Time Delays in Both State and Control Variables, *J. of Dyn. Syst. Meas. and Control*, 115 (1993) 179-183.
- [10] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannembaum, Stabilization of time-delay systems using finite-dimensional compensators, *IEEE Trans. Aut. Control*, 30 (1985) 75-78.
- [11] E. R. Palacios, Control No lineal de un sistema termico con retardo, M. S. Thesis, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, Jalisco, Mexico, 1999 (in spanish).

- [12] B. A. Francis, The linear multivariable regulator problem, *SIAM J. Cont. Optimiz.*, 15 (1977) 486-505.
- [13] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*, (Springer Verlag, New York, 1979).
- [14] N. Z. Yen and Y. C. Wu, Multirate robust servomechanism controller of linear delay systems using a hybrid structure, *Int. J. control*, 60 (1994) 1265-1281.
- [15] Young-Yan Cao and P. M. Frank, Analysis and Synthesis of Nonlinear Time-Delay Systems via Fuzzy Control Approach, *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 8 (2000) 200-211.
- [16] M. L. J. Hautus, On the solvability of linear matrix equation, *Memorandum* 1982-072, (1988).
- [17] M. L. Ni, M. J. Er, W. E. Leithead and D. J. Leith, New approach to the design of robust tracking and model following controllers for uncertain delay systems, *IEEE Proc.-Control Theory Appl.* 148, No. 6 (November 2001) 472-477
- [18] A. Isidori and C. I. Byrnes, Output regulation of nonlinear systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, 35 (1990) 131-140.
- [19] J. L. Dominguez, El problema de regulación para una clase de sistemas con retardo, M. S. Thesis, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN, México, D. F., Mexico, 1995 (in spanish).



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Unidad Guadalajara

Cinvestav

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: Regulación de sistemas con retardo del(a) C. Eduardo NÚÑEZ PÉREZ el día 23 de Agosto de 2002

Arturo del Sagrado Corazón SÁNCHEZ
CARMONA
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Alexander GEORGIEVICH
LOUKIANOV
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Antonio RAMÍREZ TREVIÑO
Investigador CINVESTAV 2A
CINVESTAV GDL
Guadalajara

Victor GONZÁLEZ ALVAREZ
Profesor-Investigador Titular C
Universidad de Guadalajara
Guadalajara

Ricardo FEMAT FLORES
Profesor-Investigador SNI nivel I
IPICYT
San Luis Potosí



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000004444