

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Eigenestados en una guía de onda temporal**

**Tesis que presenta**

**Eduardo Márquez Raya**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

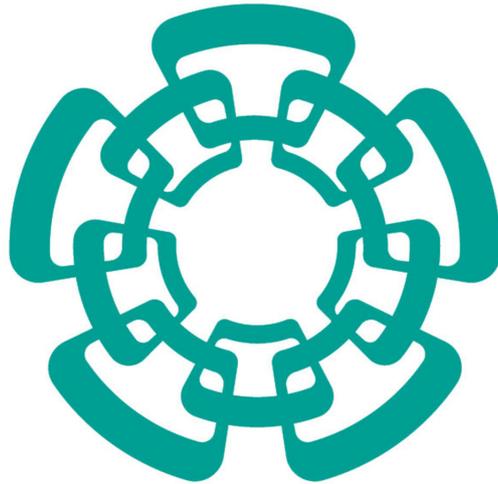
en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. David Bermúdez Rosales**

Ciudad de México

Diciembre, 2022



**Cinvestav**

---

**Eigenestados en una guía de onda temporal**

---

Tesis presentada por

**Eduardo Márquez Raya**

Como requisito para obtener el grado de

*Maestro en Ciencias*

Asesorado por

**Dr. David Bermúdez Rosales**

*Departamento de Física*

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto  
Politécnico Nacional*

**Cinvestav**

6 de diciembre de 2022

# Dedicatoria

---

*A Leonel,  
mis padres,  
Itzel Neri.  
Los pilares fundamentales de mi vida.*

# Agradecimientos

---

En este pequeño espacio quiero extender mi agradecimiento a todas las personas e instituciones que a lo largo de los años han contribuido en mi crecimiento personal y profesional. Para comenzar, agradezco a mis padres por todo el apoyo que me han brindado en todos los aspectos de mi vida, por su amor incondicional, sin ellos nada de esto hubiera sido posible.

Al Dr. David Bermúdez Rosales quien me asesoró y guió en la elaboración de este trabajo, le extiendo mi más sincero agradecimiento por su gran paciencia al explicarme y resolverme dudas sobre temas y conceptos que no entendía, por transmitirme ese gran sentido de responsabilidad, organización y trabajo constante que se requiere en el mundo académico.

A mis compañeros, en especial a César y Rafael con quienes compartí interminables noches de trabajo, profundas conversaciones de física, tardes de ejercicio en las áreas deportivas del Cinvestav y muchos otros momentos de convivencia. A Itzel por su paciencia y apoyo durante estos años juntos. También quiero agradecer a Mariana Del Castillo que siempre estuvo para ayudarme en todos los trámites administrativos.

De igual forma quiero agradecer a todos los profesores del Departamento con los que tuve la fortuna de tomar clase y quienes contribuyeron enormemente en mi formación.

Por último, quiero agradecer al Conacyt por el otorgamiento de la beca 782984 que hizo posible mi dedicación de tiempo completo a los estudios de maestría.

*Eduardo Márquez Raya*

# Resumen

---

En este trabajo se explora la dualidad espacio–tiempo, en particular, la analogía de pulsos ópticos entre la difracción paraxial de haces confinados y la dispersión de banda estrecha. La descripción de estos dos fenómenos está dada por un par de ecuaciones diferenciales de difusión que permiten la propagación debido a la existencia de un coeficiente imaginario.

Aprovechando esta analogía extendemos el concepto conocido de una guía de onda–donde las ondas se guían en el espacio–al de guía de onda temporal donde las ondas se guían en el tiempo. La formación de estas guías de onda temporales se realiza aprovechando los efectos dispersivos y no lineales que se producen dentro de una fibra óptica.

Mostramos que estas guías temporales pueden reproducir procesos análogos al de su contraparte espacial, como la reflexión, refracción, la reflexión total interna (RTI) y un número finito de modos de propagación.

Estudiamos estas guías desde tres enfoques diferentes. En la primera parte de este trabajo se obtienen los correspondientes eigenvalores y eigenestados aproximando la guía de ondas a un pozo de potencial rectangular. Posteriormente, se derivan la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) que describe la propagación de pulsos ópticos dentro de una fibra óptica y la resolvemos numéricamente. Por último, se obtienen las correspondientes ecuaciones de Hamilton para el caso óptico, con las cuales podemos observar los cambios de frecuencia que experimenta un pulso óptico atrapado en esta guía de onda temporal.

Los cambios de frecuencia causados por la interacción luz con luz en el dieléctrico son análogos a los producidos en un pulso de prueba interaccionando con el horizonte de eventos de un agujero negro y un agujero blanco. Este efecto se conoce como radiación de Hawking análoga, en este trabajo estudiamos la versión clásica o estimulada.

# Abstract

---

In this work, space-time duality is explored, in particular, the analogy in optical pulses between confined beam paraxial diffraction and narrow-band scattering. The description of these two phenomena is given by a pair of differential diffusion equations that allow propagation due to the existence of an imaginary coefficient.

Taking advantage of this analogy, we extend the known concept of a waveguide—where waves are guided in space, to that of a temporal waveguide—where waves are guided in time. The formation of these temporary waveguides is done by taking advantage of the dispersive and non-linear effects that occur within an optical fiber.

We show that these temporal guides can reproduce processes analogous to their spatial counterparts, such as, reflection, refraction, total internal reflection (TIR), and a finite number of propagation modes.

We study these guides from three different approaches. In the first part of this work, the corresponding eigenvalues and eigenstates are obtained by approximating the waveguide to a rectangular potential well. Then we derive the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) that describes the propagation of optical pulses within an optical fiber and solve it numerically. Finally, some Hamilton equations are obtained for the optical case, with which we can observe the frequency changes experienced by an optical pulse trapped in the temporary waveguide.

The frequency changes caused by interaction of light-by-light inside the dielectric are analogous to those produced in a probe pulse interacting with the event horizon of a black hole and a white hole. This effect is known as analogue Hawking radiation, in this work we study the classical or stimulated version.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Analogía entre espacio y tiempo	9
1.2. Gravedad análoga en fibras ópticas	10
<b>2. Dualidad espacio–tiempo</b>	<b>12</b>
2.1. Difracción paraxial	12
2.2. Dispersión en dieléctricos	13
2.3. Ecuaciones de difusión	14
2.4. Lentes temporales	15
<b>3. Límites temporales</b>	<b>17</b>
3.1. Reflexión y refracción en un límite estacionario	17
3.2. Coeficientes de reflexión y transmisión	19
3.3. Reflexión y transmisión en un límite temporal	19
3.4. Coeficientes de reflexión y transmisión temporales	21
<b>4. Radiación de Hawking en modelos de gravedad análoga</b>	<b>22</b>
4.1. Solución de Schwarzschild	22
4.2. Radiación de Hawking	23
4.3. Análogos de gravedad	25
4.3.1. Análogo acústico	26
4.3.2. Análogo óptico	27
4.3.3. Análogos cuánticos	28
<b>5. Propagación de pulsos en fibras ópticas</b>	<b>30</b>
5.1. Fibras ópticas	30
5.2. Dispersión	31
5.2.1. Régimen de dispersión normal	32
5.2.2. Régimen de dispersión anómalo	32
5.3. Propagación de pulsos dentro de fibras ópticas	33
5.4. Ecuación de eigenvalores	35
5.5. Ecuación de propagación de pulso óptico	35
5.6. Ecuación de Schrödinger no lineal	37
<b>6. Eigenestados en una guía de onda temporal</b>	<b>39</b>
6.1. Guía de onda temporal	39
6.2. Ecuación de onda marco comóvil	40
6.3. Modos de propagación en una guía de onda temporal	40
6.3.1. Ecuación de eigenvalores	41

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	7
6.3.2. Eigenestados . . . . .	44
<b>7. Propagación en los marcos de Schrödinger y Hamilton</b>	<b>47</b>
7.1. Ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	47
7.2. Potenciales . . . . .	48
7.3. Soluciones numéricas . . . . .	49
7.4. Ecuaciones de Hamilton . . . . .	52
7.4.1. Ecuaciones de Hamilton en una guía de onda temporal . . . . .	53
7.4.2. Relación de dispersión . . . . .	54
7.4.3. Soluciones numéricas . . . . .	54
<b>8. Conclusiones</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Una guía de onda es una estructura dieléctrica capaz de transportar ondas electromagnéticas. Nos enfocaremos en longitudes de onda que van del infrarrojo al visible. Estas se pueden dividir en dos clases de acuerdo al número de modos guiados en guías de onda monomodo y multimodo, cuya principal diferencia se encuentra en el tamaño de su núcleo.

La propagación de ondas electromagnéticas dentro de una guía de onda se describe por medio de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, es bien sabido que la óptica geométrica clásica proporciona una descripción aproximada de la propagación de la luz en las regiones donde el índice de refracción varía ligeramente en una distancia comparable con la longitud de onda de la luz [1].

En el contexto de la óptica geométrica, las ecuaciones de Fresnel y las leyes de la reflexión y refracción de Snell son utilizadas para dar una descripción aproximada de la propagación de rayos de luz a través de una fibra óptica. En particular, el fenómeno de la reflexión total interna es el responsable de guiar la luz en las fibras ópticas.

Aunque las primeras fibras de vidrio fueron fabricadas en la década de 1920, las fibras ópticas nacieron en la década de 1950, cuando la incorporación de un recubrimiento sobre la fibra condujo a considerables mejoras en sus características. El campo de estudio de las fibras ópticas se desarrolló rápidamente en años posteriores, con la inclusión de tierras raras para dopar las fibras y seguir con su mejora, lo cual no solamente condujo a grandes avances en las telecomunicaciones, sino al desarrollo del campo de fibras ópticas no lineales, amplificadores y láseres.

En 1973 se sugirió que las fibras ópticas pueden soportar pulsos de tipo solitón, que son ondas capaces de mantener su forma durante grandes distancias de propagación, como resultado de un equilibrio entre los efectos dispersivos y no lineales. Los solitones ópticos fueron observados experimentalmente por primera vez en 1980, y condujeron a una serie de avances en la generación y control de pulsos ultracortos en fibras ópticas [2].

Al inicio del nuevo milenio, se produjo un nuevo desarrollo que cambió el enfoque de las investigaciones en el campo de fibras ópticas no lineales, se comenzó a emplear dos efectos no lineales que se producen dentro de las fibras, la dispersión Raman estimulada y la mezcla de cuatro ondas para fabricar amplificadores de fibra óptica. Desde entonces, se han desarrollado varios tipos de fibras, conocidas como altamente no lineales. Estas

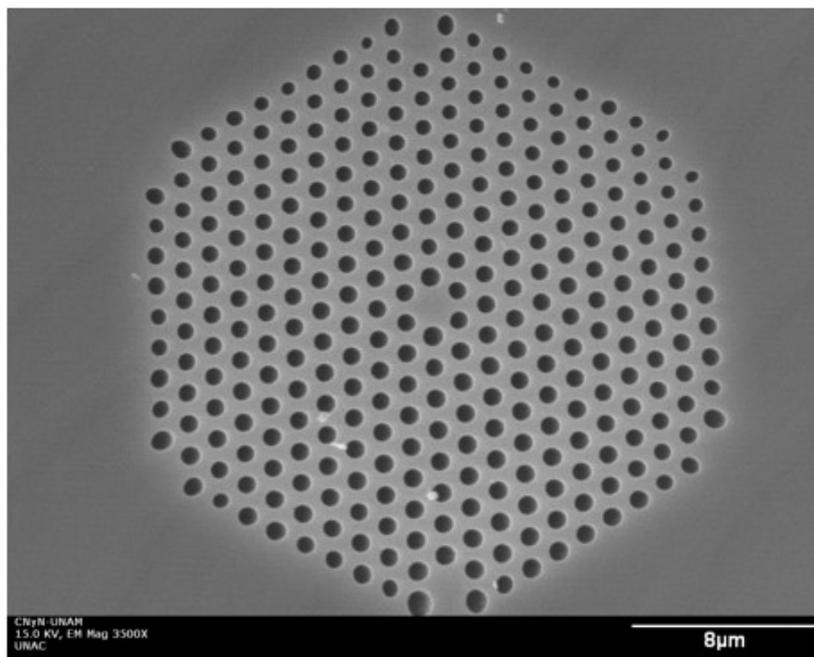


Figura 1.1: Fibra óptica microestructurada de núcleo sólido. [Foto cedida por el Dr. Alfred B. U'Ren].

reciben los nombres de fibras microestructuradas, fibras perforadas o fibras de cristal fotónico, donde la característica en común es que su núcleo relativamente estrecho está rodeado por un recubrimiento que contiene una gran cantidad de orificios de aire.

Debido a esto, las fibras microestructuradas o de cristal fotónico están encontrando aplicaciones en campos como la tomografía de coherencia óptica y metrología de frecuencia de alta precisión [2]. Una de estas fibras de cristal fotónico se muestra en la figura 1.

## 1.1. Analogía entre espacio y tiempo

Existe una dualidad entre las ecuaciones que describen la difracción paraxial de haces de luz confinados y la dispersión de pulsos de banda estrecha a través de dieléctricos. Esto significa que ambas ecuaciones comparten la misma solución [3]. Los efectos dispersivos en un dieléctrico provocan el ensanchamiento de los pulsos ópticos en el tiempo, de la misma forma en que los haces ópticos se esparcen en el espacio debido a la difracción.

Las ecuaciones que describen la difracción paraxial y la dispersión de banda estrecha, se obtienen aplicando dos sencillas aproximaciones a la ecuación de onda que se deriva de las ecuaciones de Maxwell. La solución más general de la ecuación de onda produce una descripción de la evolución espacio-temporal de una función de onda de forma arbitraria, que generalmente es difícil de obtener. Bajo las aproximaciones de onda plana, monocromática y de rayos paraxiales, la ecuación de onda se reduce a un par de ecuaciones de difusión, cuyo coeficiente imaginario es el responsable de la propagación [4].

La analogía espacio-tiempo permite aplicar técnicas de la óptica de Fourier al domi-

nio temporal. Por ejemplo, el análogo temporal de la difracción de Fraunhofer ocurre cuando se envía un pulso óptico a través de un dieléctrico con una alta dispersión. Esta analogía del espacio-tiempo conduce a que puede existir un análogo temporal de las leyes de reflexión y refracción de Snell, así como de las ecuaciones de Fresnel.

Las leyes de Snell y las ecuaciones de Fresnel se conocen desde hace siglos. Cuando una onda de luz incide en un límite estacionario en el espacio que separa dos medios con distintos índices de refracción, parte de la onda se refleja y la otra parte se refracta (transmite) al otro medio, la dirección de los rayos reflejados y refractados se describen por la ley de Snell.

Una frontera temporal es un límite a través del cual cambia el índice de refracción para todo el material en un solo instante de tiempo. De forma análoga al caso espacial donde el límite estacionario rompe la simetría traslacional, un límite temporal rompe la simetría temporal [3].

En este ámbito, Govind P. Agrawal junto con su estudiante Brent W. Plansinis en la Universidad de Rochester, mostraron que hay un análogo temporal para las ecuaciones de Fresnel, las leyes de Snell y la reflexión total interna. El desarrollo de estos análogos temporales llevó al estudio de límites temporales en movimiento, que serían el análogo temporal de las guías de onda espaciales. Además, han mostrado la forma en que estas guías temporales exhiben las mismas características que sus contrapartes espaciales.

En el contexto de la óptica no lineal, un rápido aumento o disminución en la intensidad de un pulso bombeo, crea un límite temporal de tal forma que el espectro de un pulso de prueba se desplaza de manera que parece ser reflejado por el límite temporal. Este fenómeno no lineal ha sido ampliamente utilizado en las áreas de gravedad análoga y solitones ópticos [3]. En este trabajo exploraremos tanto analítica como numéricamente, la propagación de pulsos ópticos dentro de una guía de onda temporal y abordamos la idea de la existencia de modos temporales soportados por dichas guías de onda.

## 1.2. Gravedad análoga en fibras ópticas

En 1974, Stephen W. Hawking mostró que si uno toma en cuenta la mecánica cuántica, los agujeros son capaces de emitir un flujo de radiación continua, que hoy en día se conoce como efecto Hawking. Desafortunadamente, parece imposible o muy poco probable llegar a medir este efecto producido por agujeros negros que se formaron por un colapso gravitacional, debido a que estos emitirán radiación a una temperatura muy por debajo de la temperatura del fondo cósmico de microondas [5].

Sin embargo, en 1981 William Unruh propuso estudiar este fenómeno astrofísico de una manera totalmente diferente, mostrando que hay sistemas físicos más accesibles que poseen las mismas propiedades que los agujeros negros, en los cuales es posible medir la radiación de Hawking [6].

En los análogos del horizonte de eventos se considera que el espacio-tiempo del agujero

negro es un medio en movimiento, es decir, como un fluido cuyo movimiento es causado por la acción de la gravedad y se considera a la luz como ondas que se propagan en este fluido. En los análogos ópticos la analogía va un paso más allá: las ondas son ondas de luz y el fluido en movimiento es reemplazado por la propagación de luz dentro de un material dieléctrico [7].

La idea básica para crear análogos de agujeros negros ópticos consiste en desacelerar la luz al grado de que ésta coincida con la velocidad del medio en el que se propaga. En 2008, el grupo de Ulf Leonhardt usó pulsos ultracortos en fibras ópticas microestructuradas para demostrar la formación de un horizonte de eventos artificial en óptica, observando un efecto óptico clásico: el desplazamiento de frecuencia de la luz hacia el azul en un horizonte de agujero blanco [8]. Esto se considera la primera detección de radiación de Hawking estimulada en una fibra óptica.

Los trabajos realizados en esta área han llevado a la creación de un sistema conocido como láser de agujero negro (BHL) [9]. Este modelo se basa en la existencia de dos horizontes, uno interno u horizonte de agujero blanco (WH) y otro externo u horizonte de agujero negro (BH). En esta configuración la radiación de Hawking se autoamplifica si el campo escalar es bosónico y la relación de dispersión se encuentra en el régimen anómalo [10].

En este trabajo mostramos que dos pulsos ópticos que se propagan a través de una fibra óptica pueden crear una guía de onda temporal, análoga a su contraparte clásica. Esta guía de onda temporal es capaz de confinar en el tiempo un pulso óptico, de la misma forma en que una guía de onda espacial confina luz durante su propagación.

Debido a que una guía de onda temporal está formada por dos pulsos ópticos, se podría generar un horizonte de agujero blanco y un horizonte de agujero negro, con lo cual podríamos tener radiación de Hawking autoamplificada.

# Capítulo 2

## Dualidad espacio–tiempo

Existe una dualidad entre las ecuaciones que describen la difracción paraxial de haces confinados en el espacio y la dispersión de pulsos ópticos que se propagan a través de un dieléctrico en el tiempo. La simetría matemática entre la difracción y dispersión fue observada por primera vez en la década de 1960, sin embargo, esta dualidad entre el espacio y el tiempo no fue utilizada hasta un par de décadas después cuando Kornel y Nazarathy propusieron un sistema de imágenes temporal [4]. Desde entonces, la analogía entre la difracción y la dispersión ha encontrado una amplia gama de aplicaciones como la compresión y ampliación de pulsos, espectroscopía ultrarápida, modelado de pulsos y procesamiento de imágenes [3].

Los fenómenos de difracción y dispersión se describen por ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, que en un sentido más amplio son ecuaciones de difusión, pero la presencia de un coeficiente imaginario permite la propagación de la función envolvente.

La dualidad entre la difracción y dispersión se construye realizando dos aproximaciones a la ecuación de onda. La ecuación de onda para un campo eléctrico  $\vec{E}$  o un campo magnético  $\vec{H}$  se obtienen de las ecuaciones de Maxwell. La solución más general a esta ecuación de onda proporciona una descripción de la evolución espacio–temporal de una función arbitraria que es difícil de obtener, sin embargo, se pueden hacer aproximaciones para el caso espacial y temporal por separado, para que la ecuación de onda sea exactamente soluble.

### 2.1. Difracción paraxial

La ecuación diferencial que describe la difracción paraxial, se obtiene de las ecuaciones de Maxwell, partiendo de la ecuación de onda para el campo eléctrico  $\vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde  $\mu$  y  $\epsilon$  son la permeabilidad eléctrica y permitividad magnética, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar al campo como una función escalar que solo depende de la posición  $\vec{x}$ . Para desarrollar el problema de la difracción paraxial suponemos una onda monocromática, lo que conduce a introducir una función delta en el espectro de frecuencia en el campo escalar en  $\omega = \omega_0$

$$\mathcal{E}(\vec{x}, \omega) = E_0(\vec{x}) \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.2)$$

Tal que la ecuación de onda para el campo eléctrico se reduce a la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2) E_0 = 0, \quad (2.3)$$

donde  $k^2 = \mu\epsilon\omega_0^2 = (2\pi/\lambda)^2$ . Para estudiar la ecuación de rayos paraxiales, es decir, rayos que principalmente están confinados a lo largo del eje  $z$ , las variaciones en la fase ocurrirán más rápidamente en la dirección  $z$ , tal comportamiento lo podemos especificar escribiendo

$$E_0(\vec{x}) = A(\vec{x}) e^{-ikz}, \quad (2.4)$$

donde  $A(x, y, z)$  es una función envolvente que varía lentamente con el número de onda  $k$ . Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de Helmholtz (2.3) tenemos:

$$\left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} \right) e^{-ikz} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} e^{-ikz} - ik \vec{E} e^{-ikz} \right) + k^2 \vec{E} e^{-ikz} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0. \quad (2.6)$$

Físicamente la aproximación paraxial nos dice que la curvatura de la envolvente en la dirección de propagación del campo es mucho menor que la curvatura en el perfil transversal [4], con lo cual podemos despreciar el término  $\partial_z^2 \vec{E}$  y la ecuación de onda se reduce a la ecuación paraxial

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_t^2 E, \quad (2.7)$$

donde el operador  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es el operador Laplaciano transversal. Esta ecuación gobierna la propagación de la envolvente a lo largo de la dirección  $z$ , y es similar a la ecuación de difusión de calor pero con un coeficiente imaginario [4].

## 2.2. Dispersión en dieléctricos

Para la construcción de la ecuación diferencial que describe la evolución temporal de la envolvente, es mejor utilizar el potencial vectorial  $\vec{A}(z, t)$ , de una onda plana en dirección  $z$  que se propaga en un medio con constante de propagación  $\beta(\omega)$ , Hermann A. Haus [11] demostró que primero se debe encontrar una ecuación diferencial de primer grado para una componente espectral de  $\vec{A}$ , la dependencia espacial de una componente del potencial vectorial es

$$A = a(z)u(x, y), \quad (2.8)$$

donde  $a(z)$  es la amplitud con una dependencia en  $z$  de forma exponencial  $e^{-i\beta(\omega)z}$ , así podemos escribir una ecuación diferencial para  $a(z)$  como

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -i\beta(\omega)a. \quad (2.9)$$

Si se considera una perturbación en un rango estrecho de frecuencias alrededor de  $\omega_0$ , podemos expandir en una serie de Taylor a segundo orden la constante de propagación  $\beta(\omega)$ , reescribiendo la ecuación diferencial para  $a(z)$  como

$$\frac{\partial a(z, \omega)}{\partial z} = -i \left[ \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right] a(z, \omega). \quad (2.10)$$

La dependencia espacio-temporal de  $a(z, \omega)$  se puede obtener con la transformada de Fourier inversa de la señal analítica, definida como

$$a(z, t) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} a(z, \omega) d\omega. \quad (2.11)$$

Debido a que hemos considerado que el espectro de  $a(z, \omega)$  es estrecho y está centrado alrededor de  $\omega_0$ , es más conveniente expresarlo como una función de  $\omega - \omega_0$ , escribiendo

$$a(z, \omega) = A(z, \omega - \omega_0) e^{-i\beta(\omega_0)z}, \quad (2.12)$$

donde  $A(z, \omega - \omega_0)$  es la función envolvente que varía lentamente con respecto a  $z$ . Podemos reescribir la ecuación (2.10) introduciendo la definición (2.12), obteniendo

$$\frac{\partial A(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} = -i \left[ \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right] A(z, \omega - \omega_0). \quad (2.13)$$

Usando la transformada inversa de Fourier con la relación  $[i(\omega - \omega_0)]^n A(z, \omega - \omega_0) = \mathcal{F}[\partial_t^n A(z, t)]$ , nos conduce a la ecuación

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(z, t) = \frac{i}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2}, \quad (2.14)$$

donde  $\partial_\omega \beta = 1/v_g$  es el inverso de la velocidad de grupo. La envolvente  $A(z, t)$  se propagaría sin cambios en la velocidad de grupo, si no fuera por el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.14), el cual produce distorsión [11].

Esta ecuación describe la propagación de un pulso en un medio dispersivo, para encontrar la semejanza con la ecuación de onda paraxial se introducen los siguientes cambios de variable

$$\tau = (t - t_0) - \frac{z - z_0}{v_g}, \quad (2.15)$$

$$\zeta = z - z_0, \quad (2.16)$$

con  $t_0$  y  $z_0$  como parámetros. Con estas nuevas variables podemos reescribir la ecuación (2.14) en la forma

$$\frac{\partial A(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = -\frac{i}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A(\zeta, \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (2.17)$$

Esta ecuación es de la misma forma que la ecuación de onda paraxial en dos dimensiones, salvo por el signo negativo en el coeficiente imaginario en el caso espacial.

### 2.3. Ecuaciones de difusión

Como vimos en las secciones anteriores, bajo ciertas aproximaciones aplicadas a la ecuación de onda se pueden derivar dos nuevas ecuaciones. Se transformó una ecuación diferencial hiperbólica (ecuación de onda) en dos ecuaciones parabólicas, que normalmente se asocian con fenómenos de difusión, como en la ecuación de calor.

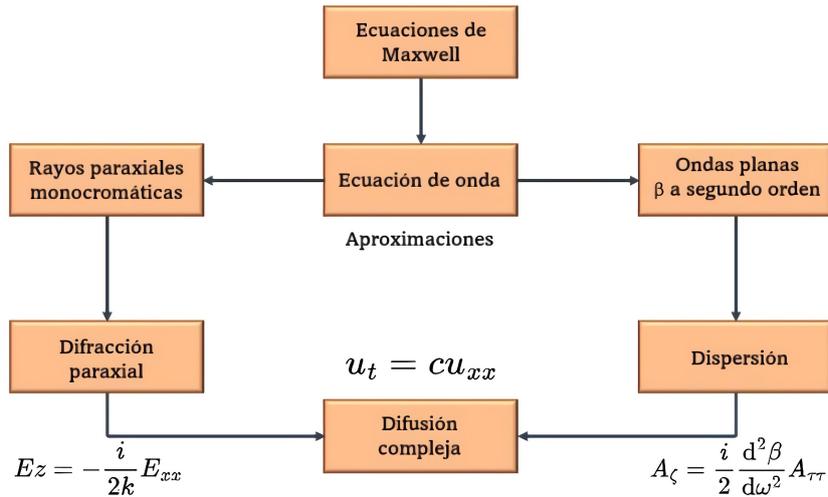


Figura 2.1: Diagrama de flujo que muestra las aproximaciones realizadas a la ecuación de onda para obtener ecuaciones de difusión.

A diferencia de una ecuación de difusión, estas nuevas ecuaciones contienen un coeficiente imaginario que las convierte en ecuaciones de onda dispersivas lineales, o también llamadas ecuaciones de tipo Schrödinger. Además, estos coeficientes imaginarios abren la posibilidad de que la función envolvente se propague.

Es interesante notar la similitud adyacente entre estas tres ecuaciones. En el caso de la ecuación de calor mientras más confinada se encuentre la energía térmica, más rápido se difundirá a sus alrededores. Lo mismo ocurre en el caso paraxial, cuanto más confinado se encuentra un haz con respecto a la longitud de onda, más rápido se difracta a medida que se propaga. Finalmente, en el caso de la ecuación de dispersión mientras más corta es la envolvente del pulso más rápido se propagará [4].

Tipo	Espacial	Temporal
Ecuación de difusión	$E_z = -\frac{i}{2k}(E_{xx} + E_{yy})$	$A_\zeta = \frac{i}{2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} A_{\tau\tau}$
Variable de propagación	$z$	$\zeta$
Variable de perfil	$x, y$	$\tau$
Difusividad	$-\frac{i}{2k}$	$\frac{i}{2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2}$

Cuadro 2.1: Ecuaciones de difracción paraxial y dispersión.

## 2.4. Lentes temporales

La analogía espacio–tiempo es utilizada para la construcción y el estudio de lentes temporales. En el caso espacial, una lente ideal no cambia la forma de un haz, pero sí estira o comprime su espectro angular.

El efecto de una lente delgada puede describirse mediante una transformación de fase, de

la forma

$$U_o(x) = U_i(x)e^{i\frac{k}{2f}x^2}, \quad (2.18)$$

donde  $f$  es la distancia focal, que contiene las propiedades físicas de una lente como son los radios de curvatura y el índice de refracción.

Para la formación de una lente temporal, se utilizan métodos para producir cambios de fase que sean dependientes del tiempo y de forma parabólica. Esto provocará que el espectro de la frecuencia del pulso se estire o se comprima, mientras que el perfil temporal no cambia. Se puede modelar la propagación a través de una lente temporal como

$$A_o(t) = A_i(t)e^{i\psi(t)}, \quad (2.19)$$

donde  $\psi(t)$  es el cambio de fase producido por la lente temporal. Este modelo se puede aproximar para cualquier modulación expandiendo  $\psi(t)$  en una serie de Taylor centrada en  $t = 0$

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_1 t + \frac{1}{2}\psi_2 t^2 + \frac{1}{3}\psi_3 t^3 + \dots \quad (2.20)$$

Los primeros dos términos de la expansión se pueden despreciar, debido a que el primero es un cambio de fase constante y el segundo es un cambio de fase lineal que únicamente provoca una traslación en el espectro.

El término cuadrático proporciona el cambio de fase parabólico que se necesita para la formación de una lente temporal y los términos de orden superior son aberraciones que provocan distorsiones en el espectro de salida. Podemos reescribir la expresión (2.19) como

$$A_o(t) = A_i(t)e^{i\frac{\psi_2 t^2}{2}} = A_i(t)e^{i\frac{1}{2D_f}t^2}, \quad (2.21)$$

donde el parámetro  $D_f$  es el análogo de la distancia focal en una lente tradicional. Físicamente este parámetro nos indica la cantidad de dispersión que se requiere para comprimir un pulso cuasi-monocromático a su duración mínima.

Una de las características más importantes de los lentes temporales es la relación que existe entre el tiempo de apertura  $\Delta T$  y la resolución temporal  $\delta t$ . El tiempo de apertura se define con el ancho a media altura FWHM (*full-width at half-maximum*) del pulso más largo que la lente pueda capturar. A diferencia de una lente espacial, las lentes temporales pueden seguir transmitiendo luz que está fuera de la apertura de tiempo. Por lo tanto, la apertura es un intervalo de tiempo en el que los términos de orden superior pueden ser despreciados [3].

Otra analogía entre los lentes espaciales y temporales, es que podemos escribir la resolución temporal en términos del tiempo de apertura y el análogo de la distancia focal

$$\delta t = 4 \ln 2 \frac{|D_f|}{\Delta T}. \quad (2.22)$$

# Capítulo 3

## Límites temporales

Antes del siglo XIX, la gran mayoría de los científicos consideraban a la luz como una corriente de partículas que eran emitidas por una fuente de luz. El principal artífice de esta teoría fue Isaac Newton. Sin embargo, en 1687 el físico Christian Huygens demostró que una teoría ondulatoria de la luz podría explicar las leyes de la reflexión y refracción.

La primera demostración convincente de la naturaleza ondulatoria de la luz se dió en 1801 por Thomas Young, quien mostró que en las condiciones apropiadas, la luz exhibía comportamiento de interferencia. Pero el suceso más importante relacionado con el comportamiento de la luz fue el trabajo de James Clerk Maxwell, quien en 1873 demostró que la luz era una onda electromagnética de alta frecuencia [12].

Aunque la teoría clásica permite dar una explicación a la gran mayoría de los fenómenos de la luz, en 1905 Albert Einstein propuso un modelo de discretización en el que la energía de una onda de luz se presenta en paquetes de energía llamados fotones. Este modelo mantiene algunas características de la teoría ondulatoria y corpuscular de la luz, razón por la que se considera a la luz de naturaleza dual, en ocasiones la luz actúa como una partícula y en otras como una onda.

En general, cuando una onda de luz incide en un límite estacionario en el espacio que separa dos medios con distintos índices de refracción, parte de la onda se refleja y la otra parte se refracta (transmite) al otro medio, la dirección de los rayos reflejados y refractados se describen por la ley de Snell.

En contraste con el caso espacial, un límite temporal se forma cuando el índice de refracción para todo el medio cambia en un solo instante de tiempo. En analogía con el límite estacionario, se pueden derivar las versiones temporales de las leyes de reflexión y refracción de Snell, incluyendo la versión temporal de las ecuaciones de Fresnel.

### 3.1. Reflexión y refracción en un límite estacionario

La reflexión y la refracción de las ondas de luz son fenómenos que se describen por la ley de Snell. Estos se producen cuando un rayo de luz que viaja en una región del espacio se encuentra con otra región donde el índice de refracción cambia de manera repentina.

La frontera que divide el espacio en dos regiones con distintos índices de refracción rom-

pe la simetría traslacional, como consecuencia cuando los fotones interaccionan con la frontera la energía permanece constante mientras que el momento de los fotones es libre de cambiar. La onda que se refleja viaja hacia atrás en el espacio, mientras que la onda transmitida seguirá viajando hacia adelante. Si consideramos ondas planas de la forma

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)], \quad (3.1)$$

donde  $\vec{k}$ , es el número de onda y está relacionado con la frecuencia por la relación de dispersión

$$k = \frac{n}{c} \omega. \quad (3.2)$$

Considerando una onda plana que se propaga en el plano  $xy$ , y que incide sobre una frontera localizada en plano  $y = 0$  que separa dos regiones con distintos índices de refracción, se produce una onda reflejada y una transmitida [3]. Por lo tanto, el campo  $\vec{E}$  total en la frontera

$$\vec{E} = E_i \exp[i(k_{ix} + k_{iy} - \omega t)] + E_r \exp[i(k_{rx} + k_{ry} - \omega t)], \quad (3.3)$$

y justo después de la frontera

$$\vec{E} = E_t \exp[i(k_{tx} + k_{ty} - \omega t)], \quad (3.4)$$

donde los subíndices  $i$ ,  $r$  y  $t$  indican incidente, reflejada y transmitida, respectivamente. Usando la relación de dispersión e imponiendo la conservación de la energía, de tal manera que  $\omega$  permanezca constante, podemos definir números de onda para las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas

$$k_i = \frac{n_1}{c} \omega = k_r, \quad k_t = \frac{n_2}{n_1} k_r. \quad (3.5)$$

Debido a que  $E_r$  se refleja, este debe propagarse hacia atrás en el espacio como se muestra en la figura 3.1, lo que implica que  $k_{ry} = -k_{iy}$ . Además, se requiere que la fase de cada una de las ondas coincidan en la frontera, para que esto ocurra se debe de cumplir

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}. \quad (3.6)$$

Para los ángulos de incidencia  $\theta_i$ , de transmisión  $\theta_t$  y de reflexión  $\theta_r$ , medidos respecto a la normal a la frontera

$$\sin |\theta_i| = \sin |\theta_r| = \frac{n_2}{n_1} \sin |\theta_t|, \quad (3.7)$$

como  $\theta_i = \theta_r$ , tenemos la ley de refracción de Snell

$$n_1 \sin |\theta_i| = n_2 \sin |\theta_t|. \quad (3.8)$$

Una característica importante de la ley de refracción de Snell, ocurre cuando  $n_1 > n_2$ , en estas circunstancias

$$\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_i) > 1$$

en tal caso el ángulo  $\theta_i$  es indefinido, lo que significa que no existe una onda transmitida. Por lo tanto, la onda incidente es completamente reflejada, a este fenómeno se le conoce como reflexión total interna (RTI).

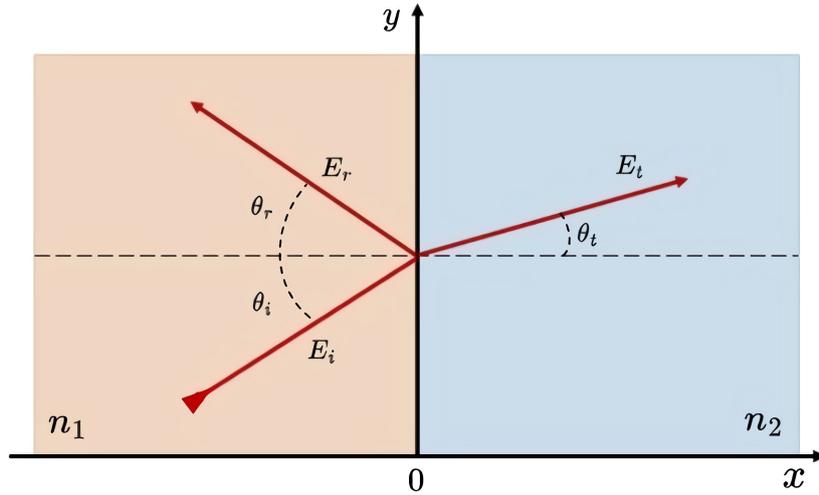


Figura 3.1: Diagrama del proceso de reflexión y refracción. La línea punteada representa la norma a la frontera entre el medio  $n_1$  y  $n_2$ .

### 3.2. Coeficientes de reflexión y transmisión

Para encontrar la ley de Snell estudiamos el comportamiento de los vectores de onda al cruzar la frontera. Para encontrar los campos se deben aplicar las correspondientes condiciones de frontera a la interfaz que divide a ambos medios.

De forma general, las ecuaciones dependen de la polarización de la luz respecto al plano de incidencia. Considerando que la propagación tiene lugar en el plano  $xy$  y que el campo está polarizado en la dirección  $z$ , los campos deben de ser continuos en la frontera, por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{iz} + E_{rz} &= E_{tz}, \\ k_{iy}E_{iz} + k_{ry}E_{rz} &= K_{ty}E_{tz}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

definiendo  $r = E_{rz}/E_{iz}$  y  $t = E_{tz}/E_{iz}$ , de las expresiones anteriores encontramos que

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (3.10)$$

Estas cantidades reciben el nombre de coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente, y proporcionan una medida de la fracción de energía incidente que es reflejada y transmitida.

### 3.3. Reflexión y transmisión en un límite temporal

Una frontera temporal es un límite a través del cual cambia el índice de refracción para todo el material en un solo instante de tiempo. De forma análoga al caso espacial donde el límite estacionario rompe la simetría traslacional, un límite temporal rompe la simetría temporal.

Por lo tanto, cuando un fotón cruza un límite temporal, el momento del fotón se conserva pero la energía es libre de cambiar. Como la energía de un fotón es proporcional a la frecuencia, cuando estos cruzan límites temporales se producen cambios de frecuencia.

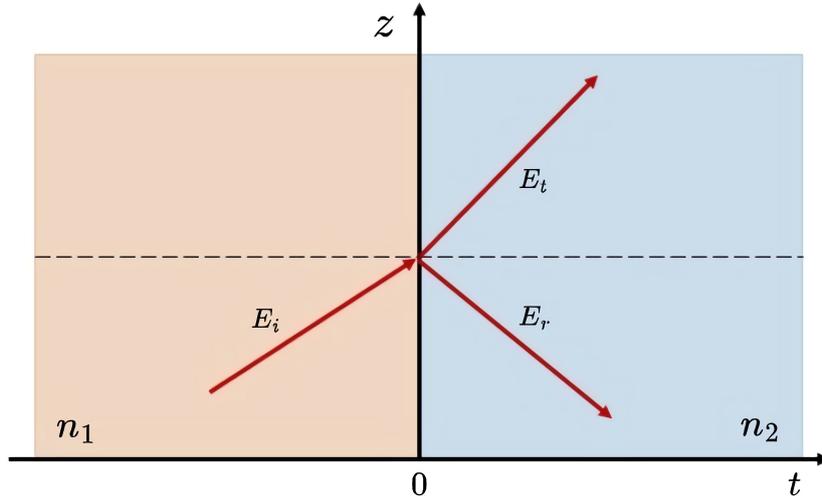


Figura 3.2: Esquema del proceso de reflexión y refracción temporal. Se muestra que el índice de refracción cambia con el tiempo.

A diferencia del caso espacial, las ondas reflejada y transmitida se propagarán en la misma región, ya que la región para  $t < 0$  no es accesible debido a que una propagación hacia el pasado violaría el principio de causalidad. Por lo tanto, la reflexión temporal se debe propagar en la región  $t > 0$  al igual que la onda transmitida [3], como se aprecia en la figura 3.2.

El campo eléctrico total en la región  $t < 0$  es

$$\vec{E}(x, t < 0) = E_i \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_i t)], \quad (3.11)$$

y en la región para  $t > 0$

$$\vec{E}(r, t > 0) = E_t \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_t t)] + E_r \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_r t)]. \quad (3.12)$$

Al igual que en el caso espacial, se requiere que la fase de cada una de las ondas coincidan en el límite temporal, esto ocurre solamente si el vector  $\vec{k}$  es constante, tal que

$$k_i = k_r = k_t, \quad (3.13)$$

lo cual implica la conservación del momento. Usando la relación de dispersión encontramos que

$$|\omega_t| = \omega_r, \quad n_1 \omega_i = n_2 \omega_t. \quad (3.14)$$

Estas últimas dos expresiones se pueden considerar como las versiones temporales de la ley de Snell. Debido a que  $\omega_r$  y  $\omega_t$  tienen la misma magnitud, la única forma en  $E_r$  sea distinto de  $E_t$  es si  $\omega_r = -\omega_t$ , en este caso una frecuencia negativa describe una onda con frecuencia positiva que se propaga hacia atrás en el espacio. Por lo tanto, la reflexión temporal al igual que la reflexión espacial, describen ondas que se propagan hacia atrás a través del espacio.

Una característica importante en los límites temporales es que contrario al caso espacial, no existe una condición para que se produzca reflexión total interna.

### 3.4. Coeficientes de reflexión y transmisión temporales

Los coeficientes de reflexión y transmisión de un límite temporal se obtienen de forma equivalente al caso espacial, con la diferencia de que las condiciones de continuidad se imponen a los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ . Usando la relación de dispersión y las ecuaciones constitutivas obtenemos

$$n_1^2 E_i = n_2^2 (E_t + E_r), \quad n_1 E_i = n_2 (E_t - E_r), \quad (3.15)$$

donde el signo negativo de la segunda ecuación, se debe a que la onda reflejada se propaga en la misma región que la onda transmitida. Resolviendo las ecuaciones para encontrar los coeficientes  $r$  y  $t$ , encontramos

$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{n_1^2}{n_2^2} - \frac{n_1}{n_2} \right), \quad t = \frac{E_t}{E_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{n_1^2}{n_2^2} + \frac{n_1}{n_2} \right). \quad (3.16)$$

Es importante mencionar que a diferencia del caso espacial, la suma de las intensidades de los coeficientes es distinta de uno

$$|r|^2 + |t|^2 \neq 1, \quad (3.17)$$

esto es una consecuencia de que la energía no se conserva a través de un límite temporal, lo que se conserva es el número total de fotones. Físicamente, que no se conserve la energía se debe al intercambio de energía entre el pulso y el medio cuando este cambia de índice de refracción.

## Capítulo 4

# Radiación de Hawking en modelos de gravedad análoga

En 1974 Stephen W. Hawking demostró que si uno toma en cuenta la mecánica cuántica los agujeros son capaces de emitir un flujo de radiación continua con espectro térmico, que hoy en día se conoce como radiación de Hawking. Desafortunadamente, parece imposible o muy poco probable llegar a medir este efecto producido por agujeros negros que se formaron por un colapso gravitacional, debido a que estos emitirán radiación a una temperatura muy por debajo de la temperatura del fondo cósmico de microondas. Este efecto es una característica universal de los agujeros negros y es completamente independiente de los detalles de su formación [13, 14]. Sin embargo, en 1981 William Unruh propuso estudiar este fenómeno astrofísico de una manera totalmente diferente, mostrando que hay sistemas físicos más accesibles que poseen las mismas propiedades que los agujeros negros, en los cuales es posible medir la radiación de Hawking [6].

De hecho, dado que la radiación de Hawking es considerada un fenómeno fundamental en la teoría cuántica de campos en espacios curvos, se ha utilizado como una prueba en la formulación de teorías cuánticas de la gravedad [15]. Por lo que es necesario tener una verificación experimental de este efecto o estudiarlo en condiciones más generales.

### 4.1. Solución de Schwarzschild

Los agujeros negros surgen de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein en relatividad general. Estos son objetos astrofísicos extremadamente densos que generan un campo gravitacional tan fuerte que ni la luz puede escapar. La formación de un agujero negro se debe al colapso gravitacional de una estrella, el cual se produce al final de su evolución termonuclear cuando la presión ya no es capaz de equilibrar la auto-atracción gravitacional de la estrella, por tal motivo son llamados agujeros negros estelares [14]. También hay agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias, los cuales son de los que se tiene comprobación experimental, sin embargo, se sospecha que en el Universo primitivo se pudieron formar agujeros negros debido a fluctuaciones del campo gravitacional, los cuales se conocen como agujeros negros primordiales.

Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, que describe un agujero negro esféricamente simétrico, estático y sin

carga eléctrica cuya métrica es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $r_S = 2GM/c^2$  y  $d\Omega^2$  es el elemento de ángulo sólido, a esta solución se le conoce como métrica de Schwarzschild.

La métrica no está definida en  $r = 0$  la cual es conocida como la singularidad y  $r = r_S$  representa el horizonte de eventos ( $r_S$  es llamado radio de Schwarzschild) del agujero negro, que define un punto sin retorno a partir del cual ni siquiera la luz puede escapar. Por lo tanto, en  $r = 0$  es el lugar donde la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita. La singularidad en  $r = r_S$  se debe a la elección de coordenadas y es removible usando las coordenadas de Painlevé, Lemaître, Gullstrand.

Una característica importante de la métrica de Schwarzschild, es que esta se aproxima asintóticamente a un espacio-tiempo plano (de Minkowski) donde la teoría cuántica de campos está bien definida [16].

## 4.2. Radiación de Hawking

En 1972 Jacob Bekenstein demostró que existen similitudes entre la física de los agujeros negros y la termodinámica. Una de las similitudes más sorprendentes es la que relaciona la entropía con el área de un agujero negro: ambas cantidades tienden a aumentar de forma irreversible [17]. De acuerdo a la relatividad general un agujero negro sólo puede absorber materia, lo cual implica que su tamaño nunca decrece, por otra parte, la teoría cuántica predice que los agujeros negros emiten partículas que se alejan del horizonte de eventos [18].

En 1974 Stephen W. Hawking demostró que considerando efectos cuánticos, los agujeros negros son capaces de crear y emitir partículas como si estos fueran cuerpos calientes a una temperatura de  $\hbar c^3 / (8\pi k_B GM) \approx 10^{-6} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) K$ , donde  $M$  es la masa del agujero negro. Esta emisión de radiación térmica implica una disminución en la masa de agujero negro, lo que eventualmente conduce a su evaporación. El flujo de partículas inicia con la formación de un horizonte de eventos que ocurre mientras el cuerpo estelar colapsa a un radio menor que  $r_S$  [19, 20].

La predicción teórica de que los agujeros negros pueden emitir radiación fue completamente inesperada, ya que se pensaba que esta emisión de partículas solo podría ser provocada por campos gravitacionales dependientes del tiempo (agujeros negros rotantes). La gran contribución de Hawking fue mostrar que incluso un agujero negro estático (solución de Schwarzschild) produce partículas a una tasa dependiente de su masa.

Una forma cualitativa para entender la radiación de Hawking es la siguiente: se crean pares de partículas virtuales partícula-antipartícula debido a las fluctuaciones producidas por el campo gravitacional fuera del horizonte de eventos del agujero negro. Puede suceder que una partícula de este par se encuentre dentro del horizonte de eventos y la otra fuera, la partícula que se encuentre dentro del horizonte caerá inevitablemente al

agujero negro, mientras que la partícula que estaba fuera tiene una probabilidad distinta de cero de escapar hacia el infinito, convirtiéndose en una partícula real que fue irradiada por el agujero negro. Por otra parte, la disminución en la masa del agujero negro en este proceso de radiación, se debe a que para un observador lejano la partícula que cae dentro del agujero negro tiene energía negativa [18].

El punto de partida de Hawking, fue considerar un campo escalar  $\Phi$  sin masa y Hermitiano que obedece la ecuación de onda covariante  $\Phi_{;\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$  en un espacio-tiempo asintóticamente plano, en el cual hay una estrella que al colapsar produce un agujero negro. En un espacio-tiempo plano los campos cuánticos se pueden expresar como una descomposición en términos de los operadores de creación y aniquilación ( $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ ) como:

$$\Phi = \sum_i \left[ f_i \hat{a}_i + f_i^* \hat{a}_i^\dagger \right], \quad (4.2)$$

donde  $f_i, f_i^*$  son los llamados modos de frecuencia positiva y negativa, respectivamente. Al mismo tiempo estos modos satisfacen la ecuación de onda  $f_{;\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$  [13], los operadores de aniquilación  $\hat{a}_i$  permiten definir un estado de vacío, tal que:

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0, \quad \forall i. \quad (4.3)$$

En un espacio-tiempo curvo con una métrica dependiente del tiempo, no es posible hacer una única descomposición del campo como la mostrada en (4.2) debido a que las frecuencias dejan de ser invariantes. Por otra parte, de la teoría cuántica de campos las partículas son definidas como oscilaciones de frecuencia positiva medidas desde el tiempo propio de un observador, esto significa que dos observadores distintos podrían medir un número distinto de partículas [21].

El operador de campo  $\Phi$  también se puede expresar en términos de ondas salientes y entrantes en el horizonte de eventos, como

$$\Phi = \sum_i \left[ g_i \hat{b}_i + g_i^* \hat{b}_i^\dagger \right], \quad (4.4)$$

donde las  $g_i$  son soluciones de la ecuación de onda, asintóticamente salientes y se anulan en el horizonte de eventos, también se pueden expresar como una combinación lineal de los modos  $f_i, f_i^*$

$$g_i = \sum_j \left[ \alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^* \right]. \quad (4.5)$$

Es importante señalar que los coeficientes  $\beta_{ij}$  no pueden ser nulos, esto se debe a que la dependencia temporal de la métrica durante el colapso gravitacional provoca una mezcla de frecuencias positivas y negativas.

Comparando las dos expresiones para el campo  $\Phi$  dadas por las ecuaciones (4.2) y (4.4), los operadores  $\hat{b}_i$  se interpretan como los operadores de aniquilación para las partículas salientes y se pueden escribir como una combinación lineal de los operadores de creación y aniquilación ( $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ )

$$\hat{b}_i = \sum_j \left[ \alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij}^* \hat{a}_j^\dagger \right]. \quad (4.6)$$

Esta relación entre los distintos operadores de creación y aniquilación se conoce como transformación de Bogoliubov, y los coeficientes complejos e independientes del tiempo  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  se llaman coeficientes de Bogoliubov [13] y satisfacen la condición de normalización

$$|\alpha_{ij}|^2 - |\beta_{ij}|^2 = 1. \quad (4.7)$$

Lo anterior implica que cuando no hay partículas entrantes, el valor esperado del operador número  $\hat{N} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$  está dado por:

$$\langle 0_a | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_b \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2, \quad (4.8)$$

por lo tanto, el número de partículas creadas y emitidas al infinito se determinan calculado el coeficiente de Bogoliubov  $\beta_{ij}$ .

De esta manera el número de partículas creadas, vistas por un observador en el infinito asintóticamente plano en un modo de frecuencia  $\omega$  es

$$\langle \hat{N}_\omega \rangle = \langle \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega \rangle = \frac{\delta(0)}{\exp\left(\frac{2\pi\omega}{\kappa}\right) - 1}. \quad (4.9)$$

Esta expresión afirma que un agujero negro posee un espectro térmico que corresponde a una temperatura de

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \approx 6,169 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) K. \quad (4.10)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $M$  es la masa de agujero negro [18, 19]. Esta última expresión pone de manifiesto la dificultad que existe para detectar la radiación térmica emitida por un agujero negro, debido a que estos emiten a una temperatura extremadamente pequeña comparada con el fondo cósmico de microondas que es de 2.7K. Por ejemplo, un agujero negro supermasivo emite radiación a una temperatura de alrededor de  $10^{-17}$  K, que está 17 órdenes de magnitud por debajo de la temperatura del fondo cósmico de microondas [14].

### 4.3. Análogos de gravedad

Como se mencionó en la sección anterior, la emisión de radiación térmica y la evaporación de los agujeros negros fueron un descubrimientos sorprendentes. La física de estos objetos astrofísicos parece combinar la mecánica cuántica y la gravitación para producir efectos termodinámicos. En general, la derivación de este resultado se basa en las siguientes consideraciones: los campos cuánticos no afectan el campo gravitacional en el cual se propagan, el campo gravitacional no está cuantizado y por último, se asume que la ecuación de onda para el campo cuántico es válida a cualquier escala [6].

Sin embargo, existen sistemas que poseen las mismas características que un agujero negro (emisión de partículas) en los cuales la física es mucho más accesible, y estos pueden ser utilizados para estudiar los efectos cuánticos en gravedad o al menos en espacios curvos. El

uso de sistemas análogos para el estudio de la radiación de Hawking, sirve como una ruta alternativa para un mejor entendimiento de dicho fenómeno ante la imposibilidad de una medición directa de este efecto producido por un agujero negro astrofísico.

Uno de los sistemas análogos más conocidos es el que describe la propagación de ondas de sonido en un fluido en movimiento, este sistema se puede considerar como la analogía a la propagación de ondas de luz en un espacio-tiempo curvo. Del estudio detallado de este sistema se ha encontrado que cuando el flujo del fluido es supersónico se genera un agujero mudo, que es el análogo acústico de un agujero negro. Además se puede demostrar la emisión de fonones análoga a la de radiación de Hawking emitida por un agujero negro [22].

Se han desarrollado y estudiado muchos otros modelos de gravedad análoga en diferentes medios de propagación como: ondas de agua, fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, etc. En estos modelos análogos se busca la existencia de una métrica efectiva, que contenga la noción de espacio-tiempo curvo que se trabaja en relatividad general.

### 4.3.1. Análogo acústico

Una forma sencilla de modelar el comportamiento de un campo cuántico en un campo gravitacional clásico es con ondas de sonido [6]. La física para describir la propagación de ondas sonoras en un fluido es bien entendida, la idea central es la siguiente: un fluido en movimiento arrastra las ondas de sonido con él, si existe una región donde la velocidad de fluido fuera supersónica las ondas de sonido jamás podrían escapar de esta región. Esto se traduce como la existencia de un análogo de horizonte de eventos de un agujero negro [22].

Considerando que el flujo de fondo tiene simetría esférica y que es estacionario, además de asumir un fluido sin viscosidad, barotrópico y de flujo irrotacional, se puede encontrar que la métrica que describe este sistema está dada por

$$ds^2 = \frac{\rho_o}{c} \left[ (c^2 - v_o^2) d\tau^2 - \frac{c}{c^2 - v_o^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4.11)$$

donde  $\rho_o$  y  $v_o$  son la densidad y velocidad de fluido, respectivamente y  $c$  es la velocidad de las ondas de sonido. El tiempo  $\tau$  está definido como:

$$\tau = t + \int \frac{v_o(r)}{c^2 - v_o^2(r)} dr. \quad (4.12)$$

Asumiendo que en cierta región  $r = R$ , la velocidad del fluido excede suavemente la velocidad de las ondas sonoras, la métrica (4.11) toma la forma:

$$ds^2 \approx \frac{\rho_o}{c} \left[ 2c\alpha (r - R) d\tau^2 - \frac{dr^2}{2\alpha (r - R)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4.13)$$

de esta última expresión podemos ver la similitud que existe con la métrica cerca de un agujero negro de Schwarzschild (4.1). Este resultado implica que en el punto donde la

velocidad de fluido es mayor a la velocidad de las ondas de sonido, se formará un *horizonte acústico*, análogo al horizonte de eventos de un agujero negro, del cual las ondas de sonido no pueden escapar [6].

Ahora que se ha mostrado la analogía existente entre la física que describe este modelo con la de un agujero negro de Schwarzschild, uno se podría preguntar si en este horizonte acústico también habrá una emisión de partículas como en el caso astrofísico. La respuesta a esta interrogante la dió William Unruh, mostrando que en este horizonte existe una emisión de fonones a una temperatura de

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \left| \frac{\partial v^r}{\partial r} \right|_H, \quad (4.14)$$

donde  $\hbar$  y  $k_B$  son las constantes de Planck y Boltzmann, respectivamente y  $\partial v^r/\partial r$  se evalúa en el horizonte. Asumiendo que  $\partial v^r/\partial r \approx c/R$ , donde  $c$  es velocidad del sonido y  $R$  el radio del horizonte, se obtiene una temperatura de [6]:

$$T = (3 \times 10^{-7} K) \left( \frac{c}{300 \text{ m/s}} \right) \left( \frac{1 \text{ mm}}{R} \right). \quad (4.15)$$

Aunque esta sigue siendo una temperatura baja, es grande comparada con la temperatura a la que emitiría partículas un agujero negro, y es posible medirla en un laboratorio.

### 4.3.2. Análogo óptico

Como ya se ha mencionado la temperatura de Hawking para un agujero negro astrofísico está muy por debajo de la temperatura del fondo cósmico de microondas (2.7 K), por lo que una medición de la radiación de Hawking de un agujero negro astrofísico es muy poco probable, sin embargo, la medición en sistemas análogos de laboratorio parece ser más factible [8].

En los análogos del horizonte de eventos se considera que el espacio-tiempo del agujero negro es un medio en movimiento, es decir, como un fluido cuyo movimiento es causado por la acción de la gravedad, y se considera a la luz como ondas que se propagan en este fluido. En los análogos ópticos la analogía va un paso más allá: las ondas son ondas de luz y el fluido en movimiento es reemplazado por la propagación de luz dentro de un material dieléctrico junto con un cambio a un marco de referencia móvil [15].

La idea básica para crear análogos de agujeros negros ópticos consiste en lograr desacelerar la luz al grado de que esta coincida con la velocidad del medio en el que se propaga, en la referencia [8] muestran por primera vez la detección de radiación de Hawking estimulada al hacer pasar pulsos ultracortos de luz a través de una fibra óptica. Este pulso de luz modifica las propiedades de la fibra debido al efecto Kerr, el índice de refracción efectivo de la fibra  $n_0$  gana una contribución  $\delta n$  que es proporcional a la intensidad del pulso

$$n = n_0 + \delta n, \quad \delta n \propto I(z, t). \quad (4.16)$$

Esta contribución al índice de refracción se mueve junto con el pulso, de esta forma el pulso establece un medio en movimiento que se mueve a la velocidad de la luz [8]. En este caso el pulso de luz ultracorto será perseguido por un pulso de prueba de menor

intensidad y con una velocidad de grupo mayor. El pulso de prueba obedece la siguiente ecuación de onda

$$[c^2 \partial_z^2 + c^2 \beta^2 (i \partial_t) - \partial_t \chi \partial_t] A = 0, \quad (4.17)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad debida al efecto Kerr,  $\beta$  es la dispersión del pulso de prueba y  $A$  es el potencial vectorial. Realizando un cambio de coordenadas, la ecuación de onda (4.17) se transforma en:

$$(\partial_\zeta - \partial_\tau)^2 A = \partial_\tau \frac{u^2 n^2}{c^2} \partial_\tau A, \quad (4.18)$$

aquí  $\tau$  y  $\zeta$  son el tiempo de retardo y propagación respectivamente, en el marco comóvil,  $n$  es el índice de refracción total y  $u$  es la velocidad del pulso.

Introduciendo notación relativista para las coordenadas y sus derivadas:  $x^\mu = (\zeta, \tau)$ ,  $\partial_\mu = (\partial_\zeta, \partial_\tau)$ , se obtiene que la métrica de este modelo está definida por [8]:

$$g_{\mu\nu} = \frac{u^2 n^2}{c^2} \begin{pmatrix} \frac{u^2 n^2}{c^2} - 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

De la misma forma que en el análogo acústico, en la región donde se forma el *horizonte óptico* se crean espontáneamente pares de fotones. Este proceso representa el análogo óptico de la radiación de Hawking con una temperatura de

$$T = \frac{\hbar}{2\pi k_B} \alpha', \quad (4.20)$$

donde  $\hbar$  y  $k_B$  son las constantes de Planck y Boltzmann, respectivamente, el factor  $\alpha'$  se define como

$$\alpha' = -\frac{u}{c} \frac{\partial n}{\partial \tau} = -\frac{u}{c} \frac{\partial \delta n}{\partial \tau}, \quad (4.21)$$

$u$  es la velocidad del sonido,  $c$  la velocidad de la luz y  $n$  es el índice de refracción de la fibra óptica.

### 4.3.3. Análogos cuánticos

Los sistemas análogos representan una gran oportunidad para el estudio de la evaporación de los agujeros negros astrofísicos. Debido a que este proceso de evaporación es un fenómeno cuántico [23], los sistemas con un alto grado de coherencia cuántica se han vuelto un objeto estudio en esta área.

Debido al gran desarrollo que se ha llevado a cabo en la creación y control de condensados de Bose-Einstein (BEC), se ha generado un gran interés para realizar estudios sobre análogos de horizontes de eventos y radiación de Hawking [24]. Se ha observado que en los BECs existen configuraciones que en el límite hidrodinámico exhiben comportamientos semejantes a los de un agujero negro gravitacional [25].

Los BECs se caracterizan por una acumulación macroscópica de partículas en un solo estado cuántico. Para llevar a cabo esta degeneración cuántica se requieren temperaturas de alrededor de 100 nK, en tal punto las partículas se vuelven indistinguibles y sus estadísticas de Bose comienzan a ser relevantes [14].

Un BEC se puede representar por un Hamiltoniano que describa la interacción de  $N$  bosones bajo un potencial externo  $V_{\text{ext}}(x)$ . A temperaturas extremadamente bajas las interacciones atómicas son pequeñas, por lo que casi todos los átomos están en el mismo estado cuántico  $\Psi$  cuya evolución viene dada por la ecuación de Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}} + \frac{4\pi a\hbar^2}{m}|\Psi|^2 \right) \Psi, \quad (4.22)$$

donde  $m$  es la masa de los átomos y  $a$  es la longitud de dispersión. Sin embargo, si sólo se consideran pequeñas perturbaciones (ondas de sonido) en el BEC alrededor de un estado estacionario [25], se obtiene una ecuación de onda relativista dada por

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0, \quad (4.23)$$

aquí  $g = \det g_{\mu\nu}$  en un espacio-tiempo curvo. Por otro lado, el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  está totalmente determinado por la velocidad local del sonido  $c$  y velocidad del fondo  $v$ . Esta métrica tiene la forma

$$g_{\mu\nu} = \frac{n}{mc} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

En esta métrica también se forma un horizonte, por ejemplo: si se forma un sumidero de átomos en una trampa esférica, donde el término  $c^2 - v^2 = 0$  en  $r = r_h$  se formará un horizonte de eventos sónico completamente análogo al horizonte de eventos de un agujero negro gravitacionales [25].

Por último, a partir de las velocidades del sonido que se encuentran en los BECs, una aproximación para la temperatura de Hawking en este sistema es

$$T \approx \frac{\hbar}{2\pi k_B} \frac{c}{R}, \quad (4.25)$$

asumiendo un valor de  $R \approx 10 \mu\text{m}$  para el radio del horizonte de eventos sónico se obtiene una temperatura de  $T \approx 10^{-9} \text{K}$ , que sólo tiene un orden de magnitud tres veces menor que del BEC [24].

# Capítulo 5

## Propagación de pulsos en fibras ópticas

Una guía de onda es cualquier estructura capaz de guiar una onda electromagnética en una dirección con una mínima pérdida de energía. El mejor ejemplo de una guía de onda son las fibras ópticas, estos dispositivos están diseñados para confinar la energía de las ondas electromagnéticas en una región y guiarlas por medio de reflexión total interna a través de un canal [11].

Partiendo de la teoría electromagnética, es posible encontrar la ecuación de onda que describa la dinámica de pulsos dentro de una fibra óptica. Esta ecuación se conoce como ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE) por *nonlinear Schrödinger equation*.

En este capítulo comenzamos con una descripción del papel que juega la dispersión en la propagación de pulsos dentro de fibras ópticas. A partir de las ecuaciones de Maxwell se deriva la NLSE, que ha logrado explicar con éxito una gran cantidad de efectos no lineales que se manifiestan dentro de las fibras ópticas.

### 5.1. Fibras ópticas

La forma más simple de describir una fibra óptica, consiste en un núcleo de algún material dieléctrico como el vidrio que se encuentra recubierto por otro material cuyo índice de refracción  $n_c$  es ligeramente menor al índice de refracción del núcleo  $n_n$ . Existen dos parámetros que en la práctica son muy utilizados para caracterizar fibras ópticas, la diferencia relativa del índice de refracción y el parámetro  $V$  que se definen como

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{n_n - n_c}{n_n}, \\ V &= k_0 a \sqrt{n_n^2 - n_c^2},\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $a$  es el radio del núcleo y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz.

El parámetro  $V$  es utilizado para determinar el número de modos que puede soportar la fibra, las fibras con  $V < 2,405$  admiten un solo modo y por ello se les conoce como fibras monomodo. Como se puede ver de la ecuación anterior  $V$  es proporcional al radio del núcleo de la fibra, es decir, mientras más grande sea el núcleo de la fibra esta admitirá más modos de propagación [2].

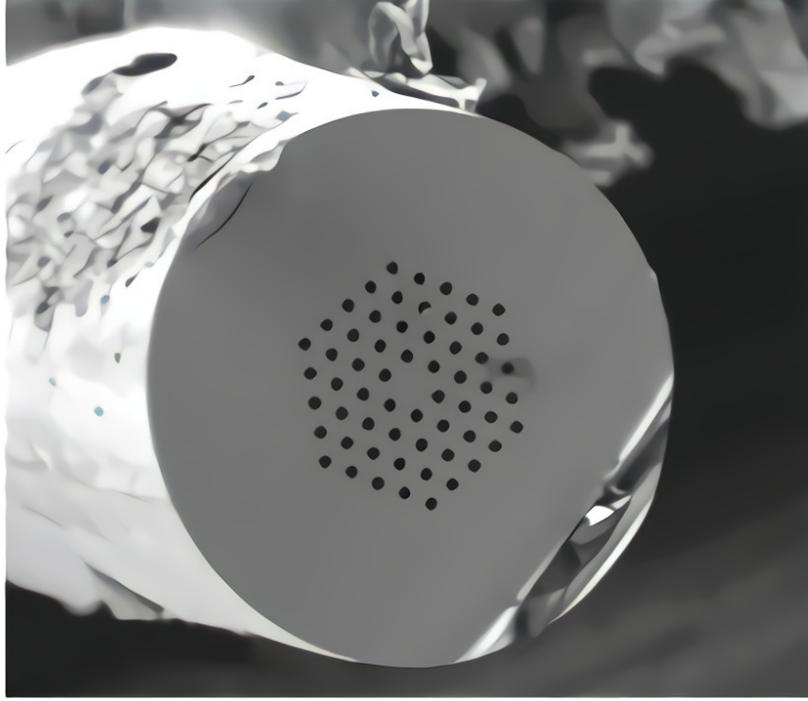


Figura 5.1: Fibra óptica microestructurada LMA-10 con geometría hexagonal de dos canales. Foto original: Candiani, A. Cucinotta, *Functionalized microstructured optical fibers for specific nucleic acid detection*.

## 5.2. Dispersión

Cuando una onda electromagnética interactúa con un material dieléctrico, se produce una respuesta que depende de la frecuencia  $\omega$ . A esta propiedad se le conoce como dispersión cromática y se manifiesta a través de la dependencia en la frecuencia del índice de refracción  $n(\omega)$ .

La dispersión en las fibras ópticas juega un papel fundamental en la propagación de pulsos cortos, debido a que las diferentes componentes del espectro viajan a diferentes velocidades. Estos efectos pueden ser contabilizados, expandiendo la constante de propagación  $\beta(\omega)$  en una serie de Taylor alrededor de una frecuencia central  $\omega_0$

$$\beta(\omega) = \frac{n(\omega)}{c}\omega = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (5.2)$$

donde

$$\beta_m = \left( \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

Los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$  representan el inverso de la velocidad de grupo  $v_g$  y la dispersión de la velocidad de grupo, respectivamente. Estos dos parámetros están relacionados con

el índice de refracción  $n(\omega)$  y sus derivadas a través de las relaciones

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2n}{d\omega^2} \right),\end{aligned}\tag{5.4}$$

donde  $n_g$  es el índice de grupo. Físicamente, la envolvente de un pulso óptico se mueve a la velocidad de grupo, mientras que el parámetro  $\beta_2$  es el responsable del ensanchamiento del pulso durante la propagación, a este fenómeno se le conoce como dispersión de velocidad de grupo (*group-velocity dispersion*) y  $\beta_2$  recibe el nombre de parámetro GVD.

Otro parámetro que es utilizado en la práctica es el parámetro de dispersión  $D$  y esta relacionado con  $\beta_2$  y  $n$  como

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2},\tag{5.5}$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda. La característica más importante que existe entre los parámetros  $D$  y  $\beta_2$ , es que para la sílice (el material más común para las fibras ópticas) se anulan cerca de una longitud de onda de alrededor de  $1,27\mu m$ , a esta longitud de onda se le conoce como longitud de onda de dispersión cero  $\lambda_D$ , en la figura 5.2 se muestra la variación de estos parámetros para una fibra óptica de sílice.

Una de las características de la dispersión cromática es que los pulsos con diferentes longitudes de onda se propagan a velocidades diferentes dentro de una fibra óptica. Esta característica conduce al efecto *walk-off* (alejamiento) que juega un importante papel en la descripción de los efectos no lineales que involucran dos o más pulsos estrechamente espaciados. Los efectos no lineales que aparecen en las fibras ópticas pueden manifestar comportamientos cualitativamente diferentes, dependiendo del signo del parámetro GVD.

### 5.2.1. Régimen de dispersión normal

Para longitudes de onda tales que  $\lambda < \lambda_D$  se dice que una fibra óptica exhibe una dispersión normal con  $\beta_2 > 0$ . En este régimen de dispersión, las componentes del espectro con alta frecuencia (azul) viajan más lentamente que las componentes de baja frecuencia (rojo) del mismo pulso.

### 5.2.2. Régimen de dispersión anómalo

Este régimen de dispersión ocurre cuando  $\beta_2 < 0$  y cuando la longitud de onda del pulso es mayor que la longitud de dispersión cero  $\lambda > \lambda_D$  las componentes de alta frecuencia son más rápidas que las de baja frecuencia. El régimen de dispersión anómalo es de gran interés, debido a que en este régimen las fibras ópticas admiten la propagación de solitones a través de un equilibrio entre los efectos de dispersión y no lineales [2].

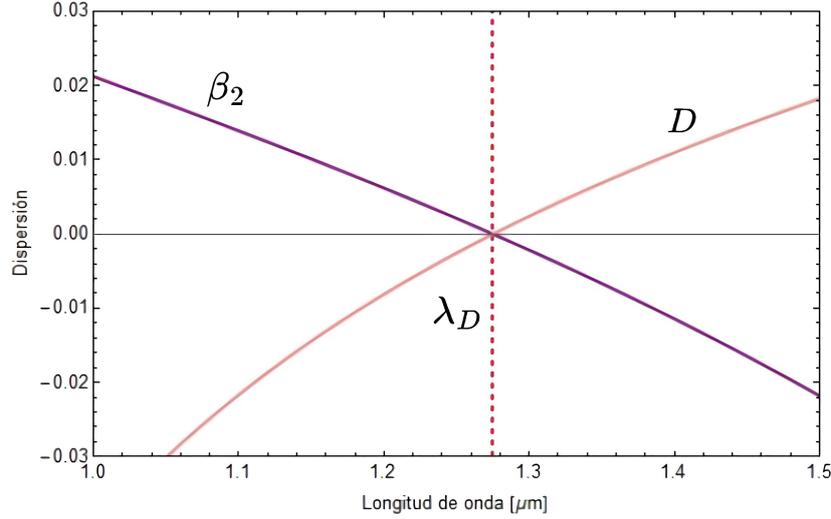


Figura 5.2: Variación de los parámetros  $\beta_2$  (línea morada) y  $D$  (línea rosa) con la longitud de onda, para una fibra óptica de sílice, la línea punteada muestra la longitud de onda a la cual los dos parámetros se anulan, esto ocurre cerca de  $1,27 \mu\text{m}$ .

### 5.3. Propagación de pulsos dentro de fibras ópticas

Para comprender los fenómenos no lineales que ocurren dentro de una fibra óptica es necesario partir de la teoría electromagnética. Todos los fenómenos que involucran la propagación de pulsos ópticos a través de una fibra están gobernados por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.6)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.9)$$

donde  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son los vectores de campo eléctrico y magnético, respectivamente, mientras que  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  son las densidades de flujo eléctrico y magnético,  $\vec{J}$  es el vector de densidad de corriente y  $\rho_f$  la densidad de carga.

En un medio dieléctrico como las fibras ópticas no hay cargas libres, por lo que  $\vec{J} = 0$  y  $\rho_f = 0$ . Por otra parte, las densidades  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  surgen como una respuesta del medio a la propagación de los campos eléctrico y magnético, los cuales están relacionados por las ecuaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (5.10)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (5.11)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío y  $\mu_0$  es la permeabilidad en el vacío y  $\vec{P}$  y  $\vec{M}$  son los vectores de polarización y magnetización inducidos, respectivamente.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden utilizar para obtener la ecuación de onda que describe la propagación de un pulso de luz dentro de una fibra óptica. Tomando el rotacional de la ecuación (5.6) y utilizando las ecuaciones (5.7),(5.10),(5.11), además considerando que debido a la ausencia de cargas libres dentro de una fibra  $\vec{J} = 0$  y  $\vec{M} = 0$ , obtenemos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}, \quad (5.12)$$

donde  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$  es la velocidad de la luz en el vacío [2]. Para resolver la ecuación (5.12) se debe determinar la relación entre la polarización inducida  $\vec{P}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ , como la polarización  $\vec{P}$  se produce como una respuesta de las cargas ligadas dentro de la fibra al campo eléctrico  $\vec{E}$ , una aproximación a esta relación está dada por

$$\vec{P} = \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \vec{E}(t') dt'. \quad (5.13)$$

Esta expresión proporciona una descripción de la polarización como una respuesta lineal al campo eléctrico, la función de respuesta  $\chi(t)$  proporciona las contribuciones del campo eléctrico a todos los momentos anteriores a la medición de  $\vec{P}$ . Sustituyendo la ecuación (5.13) en la ecuación de onda (5.12) y tomando la transformada de Fourier respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de Helmholtz [26]:

$$\nabla^2 \tilde{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \tilde{\vec{E}} = 0, \quad (5.14)$$

donde  $\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega)$ , además

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (5.15)$$

y

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{i\omega t} dt. \quad (5.16)$$

En general  $\tilde{\chi}(\omega)$  es una cantidad compleja, por lo que  $\epsilon(\omega)$  también es compleja. Las partes reales e imaginarias se pueden relacionar con el índice de refracción  $n(\omega)$  y el coeficiente de absorción  $\alpha(\omega)$  con la definición

$$\epsilon(\omega) = \left( n(\omega) + i \frac{\alpha(\omega)c}{2\omega} \right)^2, \quad (5.17)$$

igualando esta definición y (5.17) y relacionado las partes reales e imaginarias, obtenemos

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\tilde{\chi}(\omega)], \quad \alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \operatorname{Im} [\tilde{\chi}(\omega)]. \quad (5.18)$$

Podemos simplificar aún más la ecuación de Helmholtz (5.14), debido a que en la región de longitud de onda donde se producen efectos no lineales las pérdidas durante la propagación son bajas, por lo tanto, podemos despreciar la parte imaginaria de  $\epsilon(\omega)$ , obteniendo [2]

$$\nabla^2 \tilde{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} n(\omega) \tilde{\vec{E}} = 0, \quad (5.19)$$

donde el índice de refracción  $n(\omega)$  describe una velocidad de onda que depende de la frecuencia y la dispersión en la fibra [26].

## 5.4. Ecuación de eigenvalores

Debido a la simetría cilíndrica en la estructura de las fibras ópticas, resulta conveniente utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas para resolver la ecuación (5.19), considerando el laplaciano de una función escalar  $\psi$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \quad (5.20)$$

podemos reescribir la ecuación de Helmholtz dada por (5.19), como

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (5.21)$$

donde  $k_0^2 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\tilde{E}$  es la transformada de Fourier del campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.22)$$

Podemos resolver la ecuación (5.21) centrándonos en la componente  $\tilde{E}_z$  y usando el método de separación de variables, proponiendo una solución general de la forma [2]

$$\tilde{E}_z(\tilde{r}, \omega) = A(\omega) F(\rho) e^{im\phi} e^{i\beta z}, \quad (5.23)$$

donde  $A$  es una función que solo depende de la frecuencia,  $\beta$  es la constante de propagación,  $m$  es un número entero y  $F(\rho)$  es solución de la ecuación

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) - \beta^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) F = 0. \quad (5.24)$$

Ésta es una ecuación diferencial para las funciones de Bessel de orden  $m$ . La solución de esta ecuación debe de estar libre de singularidades dentro del núcleo de la fibra ( $\rho < a$ ), por otra parte, en la región del recubrimiento de la fibra ( $\rho \geq a$ ) la solución debe decaer exponencialmente, por lo tanto, solo se permite un cierto número de soluciones discretas, cada una de las cuales corresponde a un valor particular de  $\beta$ . En algunos casos un solo valor de  $\beta$  corresponde a una frecuencia dada [26].

## 5.5. Ecuación de propagación de pulso óptico

El estudio de la mayoría de los efectos no lineales que ocurren en las fibras ópticas, implica el uso de pulso cortos con un ancho entre 10 ns y 10 fs. Cuando esta clase de pulso se propagan dentro de una fibra, los efectos de dispersión y no lineales influyen en las formas y espectros de los pulsos. Considerando efectos no lineales en la ecuación de onda (5.12), tenemos

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (5.25)$$

donde  $\vec{P}_L$  y  $\vec{P}_{NL}$  son las partes lineal y no lineal, respectivamente.

Es posible simplificar la ecuación de onda (5.25), a través de hacer varias suposiciones. La parte no lineal del vector de polarización inducida, se debe considerar como una perturbación de la parte lineal, se asume que el pulso óptico mantendrá su polarización a lo largo de la fibra, por lo tanto, se puede realizar un enfoque escalar, y por último consideramos que el pulso es monocromático.

Asumiendo que la envolvente del pulso varía lentamente, podemos separar la parte del campo eléctrico que varía rápidamente

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [E(\vec{r}, t)e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}] \hat{\mathbf{x}}, \quad (5.26)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}$  es un vector unitario en dirección de la polarización, c.c. es el complejo conjugado y  $E(\vec{r}, t)$  es una función que varía lentamente con el tiempo. Se pueden escribir expresiones similares para las componentes de la polarización  $\vec{P}_L$  y  $\vec{P}_{NL}$  [2].

Debido a que estamos considerando un campo eléctrico con una frecuencia bien definida, la parte no lineal de la polarización incluye solamente el término de auto-modulación de fase SFM (*self-phase modulation*) [26], dado por

$$P_{NL}(\vec{r}, t) \approx \epsilon_0 \epsilon_{NL} E(\vec{r}, t), \quad (5.27)$$

$\epsilon_{NL}$  es la contribución no lineal del material dieléctrico, definida como

$$\epsilon_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\vec{r}, t)|^2, \quad (5.28)$$

donde  $\chi_{xxxx}^{(3)}$  es la respuesta no lineal instantánea, con una dependencia temporal dada por el producto de tres funciones delta de la forma  $\delta(t - t_1)$ .

Por lo general, para obtener la ecuación de onda para  $E(\vec{r}, t)$  es conveniente trabajar en el espacio de Fourier. Sin embargo, en este caso no es posible debido a la no linealidad de  $\epsilon_{NL}$ . Para obtener la ecuación de propagación es necesario tratar a  $\epsilon_{NL}$  como una constante, lo cual se puede justificar debido a que estamos considerando una variación lenta de la envolvente, obteniendo nuevamente una ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \tilde{E} + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (5.29)$$

donde  $k_0 = \omega/c$ ,  $\epsilon(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)} + \epsilon_{NL}$  es la constante dieléctrica y  $\tilde{E}$  es la transformada de Fourier, definida como

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (5.30)$$

Podemos resolver la ecuación (5.30) usando el método de separación de variables, proponiendo una solución de la forma

$$\tilde{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z}, \quad (5.31)$$

donde  $\tilde{A}$  es una función que varía lentamente con  $z$  y  $\beta_0$  es el número de onda. Sustituyendo esta ecuación (5.31) en (5.30), obtenemos un par de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\epsilon(\omega) k_0^2 - \tilde{\beta}^2] F = 0, \quad (5.32)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \tilde{\beta}_0^2) \tilde{A} = 0. \quad (5.33)$$

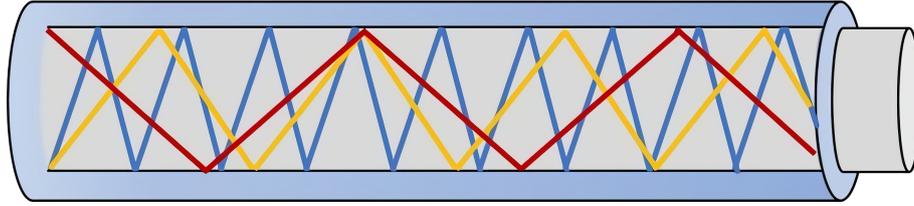


Figura 5.3: Fibra óptica multi-modo, las distintas frecuencias viajan a diferentes velocidades dentro de esta.

Resolviendo la ecuación de eigenvalores (5.32) encontramos el valor de  $\tilde{\beta}$ , haciendo las siguientes aproximaciones en la constante dieléctrica  $\epsilon(\omega)$

$$\epsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n, \quad (5.34)$$

donde  $\Delta n$  es una pequeña perturbación, definida como

$$\Delta n = \bar{n} |E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0}. \quad (5.35)$$

Usando teoría de perturbaciones a primer orden para resolver la ecuación (5.32), el término  $\Delta n$  no afecta la distribución modal  $F(x, y)$ , pero el eigenvalor de  $\tilde{\beta}$  se transforma en

$$\tilde{\beta} = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega), \quad (5.36)$$

donde

$$\Delta\beta(\omega) = \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}. \quad (5.37)$$

Para obtener la ecuación de propagación de  $A(z, t)$  hay que tomar la transformada de Fourier inversa de (5.33). Además, debemos de hacer una expansión en serie de Taylor de  $\beta(\omega)$  y  $\Delta\beta(\omega)$  alrededor de una frecuencia central  $\omega_0$ . Se pueden despreciar los términos cúbicos y de orden mayor en ambas expansiones si el ancho espectral del pulso satisface la condición  $\omega < \omega_0$ , con estas simplificaciones obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma(\omega) |A|^2 A, \quad (5.38)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de absorción y  $\gamma$  es el parámetro de no linealidad. Esta ecuación describe la propagación de un pulso óptico en una fibra monomodo y está relacionada con la ecuación no lineal de Schrödinger [2].

## 5.6. Ecuación de Schrödinger no lineal

La ecuación de propagación (5.38) ha explicado con éxito una gran cantidad de efectos no lineales que se manifiestan dentro de las fibras ópticas, sin embargo, bajo algunas circunstancias experimentales dicha ecuación debe modificarse. Un ejemplo de estas modificaciones a la ecuación (5.38) ocurre para pulsos ultra cortos  $< 1\text{ps}$ , la ganancia Raman puede amplificar las componentes de baja frecuencia del pulso, mediante una transferencia de energía de las componentes de alta frecuencia, este fenómeno se conoce como

dispersión Raman [2].

Para pulsos con un ancho  $> 5$  ps la contribución de la dispersión a tercer orden es pequeña, por lo tanto, se puede utilizar una ecuación más simplificada, dada por

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + i\frac{\alpha}{2}A - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma|A|^2 A = 0, \quad (5.39)$$

está ecuación se obtiene de (5.38), al usar la transformación

$$\tau = t - z/v_g = t - z\beta_1, \quad (5.40)$$

que describe un marco de referencia que se mueve con el pulso a la velocidad de grupo  $v_g$ . En el caso donde no haya absorción por parte del medio  $\alpha = 0$ , la ecuación (5.39) se reduce a

$$i\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma|A|^2 A = 0, \quad (5.41)$$

que se conoce como ecuación no lineal de Schrödinger NLSE (*nonlinear Schrödinger equation*), esto debido a que se asemeja a la ecuación de Schrödinger con un término no lineal en el potencial. La NLSE es la ecuación fundamental en el estudio de los efectos no lineales y se ha utilizado exhaustivamente en el estudio de solitones.

# Capítulo 6

## Eigenestados en una guía de onda temporal

El concepto de reflexión total interna en una interfaz dieléctrica ha sido utilizado ampliamente en la fabricación de fibras ópticas. Los análogos temporales de la reflexión y refracción se producen cuando un pulso óptico se acerca a una interfaz en movimiento que separa dos regiones con distintos índices de refracción [27].

En el contexto de la óptica no lineal, la intensidad de un pulso que se propaga dentro de una fibra óptica (*pulso de bombeo*) crea un límite temporal en movimiento debido al efecto Kerr. Por otra parte, el espectro de un pulso de prueba que interactúa con el pulso de bombeo se desplaza de tal manera que parece reflejarse desde el límite temporal. Este fenómeno no lineal se ha explorado recientemente en diversas áreas de la física como la gravedad análoga y solitones ópticos.

En este capítulo se muestra que mediante dos límites temporales se obtiene el análogo temporal de una guía de onda óptica, mostrando la existencia de modos temporales en dichas guías de onda [3, 27].

### 6.1. Guía de onda temporal

Cuando un pulso óptico es encerrado entre dos límites temporales donde es posible la reflexión total interna, se forma un análogo temporal de una guía de onda óptica, que limita al pulso a moverse en una ventana de tiempo central donde el índice de refracción es diferente de las regiones exteriores. De forma análoga a las guías de onda espaciales, una guía de onda temporal es capaz de admitir un número finito de modos de propagación como en la figura 5.3.

La idea básica para la formación de límites temporales consiste en propagar pulsos de luz ultra cortos a través de una fibra óptica. Este pulso de luz modifica las propiedades de la fibra debido al efecto Kerr, el índice de refracción efectivo de la fibra  $n_0$  tiene una contribución adicional  $\delta n$  que es proporcional a la intensidad del pulso [8, 3]

$$n = n_0 + \delta n, \quad \delta n \propto I(z, t). \quad (6.1)$$

Esta contribución al índice de refracción se mueve junto con el pulso como se muestra en la figura 6.1, de esta forma el pulso establece un medio en movimiento que se mueve

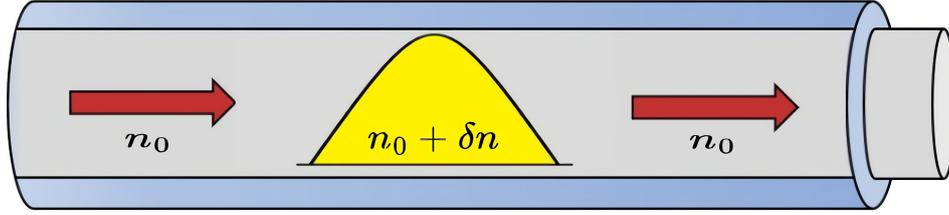


Figura 6.1: Cambio en el índice de refracción debido al efecto Kerr óptico

a la velocidad de la luz [8]. Si la velocidad de grupo del pulso de prueba difiere con la velocidad de los límites temporales, se espera que el pulso se desplace hacia uno de los límites y se refleje por completo. Este proceso debería repetirse, de tal forma que el pulso queda atrapado entre los dos límites. Dicho comportamiento es análogo a un haz de luz dentro de una guía de onda espacial. Debido a esta analogía, a este sistema de dos límites temporales se le considera como guía de onda temporal.

## 6.2. Ecuación de onda marco comóvil

Para estudiar el efecto que produce el pulso de bombeo (límite temporal) sobre el pulso de prueba es conveniente utilizar un marco de referencia comóvil donde el pulso de bombeo sea estacionario. Podemos construir este marco a través de la siguiente transformación de coordenadas

$$\zeta = \frac{z}{u}, \quad \tau = t - \frac{z}{u}, \quad (6.2)$$

donde  $u$  es la velocidad de grupo del pulso. Las coordenadas  $\zeta$  y  $\tau$  no corresponden a las coordenadas de espacio y tiempo en el marco comóvil. Sin embargo, definen un sistema de referencia no inercial que es perfectamente válido; donde podemos resolver la ecuación de onda e invertir la transformación para obtener la solución en el marco de laboratorio original [26].

Las derivadas parciales en el marco comóvil y el marco de laboratorio están relacionadas a través de

$$\partial_z = \frac{1}{u}(\partial_\zeta - \partial_\tau), \quad \partial_t = \partial_\tau. \quad (6.3)$$

Con esta transformación de coordenadas, obtenemos la ecuación de onda que describe la interacción entre el pulso de prueba y el pulso de bombeo, dada por

$$-i\frac{\partial A}{\partial \zeta} + \omega_h A + \frac{1}{2}\beta_2 u \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = 2u\gamma P(\tau)A, \quad (6.4)$$

donde  $u$  es la velocidad de grupo,  $\gamma$  el coeficiente no lineal,  $\omega_h$  es la frecuencia del pulso de bombeo,  $\beta_2$  el parámetro GVD y  $P(\tau)$  es la intensidad del pulso.

## 6.3. Modos de propagación en una guía de onda temporal

De manera similar a los modos espaciales que se propagan en una guía de onda, los modos en una guía de onda temporal no cambian de forma durante la propagación excepto

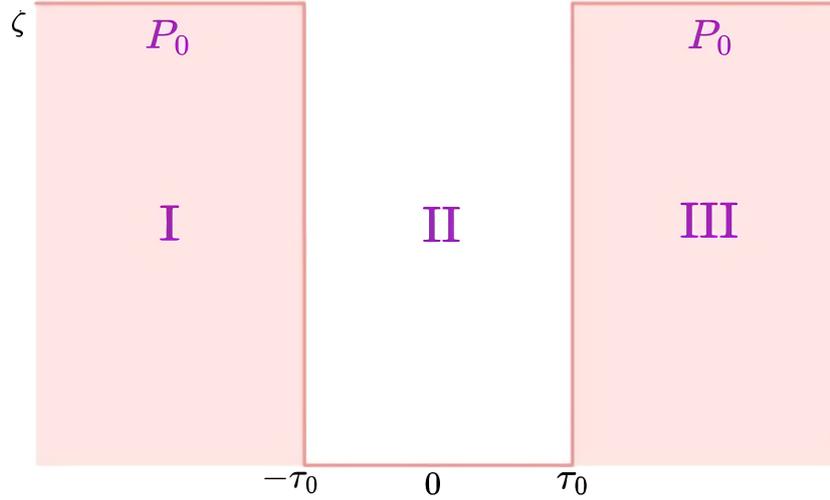


Figura 6.2: Aproximación de una guía de onda temporal, a un pozo de potencial rectangular.

por un cambio de fase. Proponemos una solución a la ecuación (6.4) de la forma

$$A(\zeta, \tau) = M(\tau)e^{-i\Omega'\zeta - i\Omega\tau}, \quad (6.5)$$

donde  $M(\tau)$  es la forma temporal del modo y  $\Omega'$ ,  $\Omega$  son frecuencias. Sustituyendo (6.5) en la ecuación de propagación (6.4), y separando las partes real e imaginarias, se obtiene el siguiente par de ecuaciones

$$u\beta_2\Omega \frac{dM}{d\tau} = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{d^2M}{d\tau^2} + \frac{2}{\beta_2} \left( \frac{\omega_h - \Omega'}{u} - 2\gamma P(\tau) \right) M = 0, \quad (6.7)$$

de la ecuación (6.6) se obtiene que  $\Omega = 0$  lo que significa que desde el marco de laboratorio no hay cambio en la frecuencia. Además, se puede observar que (6.7) es una ecuación de tipo Schrödinger.

### 6.3.1. Ecuación de eigenvalores

Para resolver la ecuación (6.7), vamos a simplificar el problema considerando que los pulsos ópticos que forman la guía de onda temporal son cuadrados, reduciendo el problema a encontrar los eigenestados dentro de un pozo de potencial rectangular, con un potencial de intensidad  $P_0$  y un ancho de  $2\tau_0$ .

Dividimos el espacio  $\tau$  en tres regiones, de tal forma que el potencial dentro del pozo es cero y fuera es  $P_0$  como se muestra en la figura 6.2. De esta manera, un pulso de prueba con una energía menor al potencial queda ligado al potencial, mientras que un pulso con una energía mayor es dispersado por el potencial

$$P(\tau) = \begin{cases} P_0, & \tau < -\tau_0, \\ 0, & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ P_0, & \tau_0 < \tau. \end{cases} \quad (6.8)$$

En estas tres regiones la ecuación (6.7), toma las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 M_I}{d\tau^2} - \omega_{out}^2 M_I &= 0, \\ \frac{d^2 M_{II}}{d\tau^2} - \omega_{in}^2 M_{II} &= 0, \\ \frac{d^2 M_{III}}{d\tau^2} - \omega_{out}^2 M_{III} &= 0,\end{aligned}\tag{6.9}$$

en donde hemos definido

$$\omega_{in}^2 = \frac{2}{\beta_2} \left( \frac{\omega_h - \Omega'}{u} \right),\tag{6.10}$$

$$\omega_{out}^2 = \frac{2}{\beta_2} \left( 2\gamma P_0 + \frac{\Omega' - \omega_h}{u} \right).\tag{6.11}$$

Las soluciones de la ecuación (6.7) en las tres regiones se escriben de la forma

$$M(\tau) = \begin{cases} Ae^{\omega_{out}(\tau+\tau_0)} + Be^{-\omega_{out}(\tau+\tau_0)} & \tau < -\tau_0, \\ Ce^{i\omega_{in}\tau} + De^{-i\omega_{in}\tau} & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ Ee^{\omega_{out}(\tau-\tau_0)} + Fe^{-\omega_{out}(\tau-\tau_0)} & \tau > \tau_0, \end{cases}\tag{6.12}$$

las seis constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  se pueden determinar imponiendo condiciones de frontera. Debido a la simetría del potencial tenemos soluciones pares e impares, es conveniente analizar cada caso por separado. Las soluciones físicamente aceptables de las ecuaciones (6.12), en el caso de paridad par son

$$M_o(\tau) = \begin{cases} Ae^{\omega_{out}(\tau+\tau_0)} & -\tau < -\tau_0, \\ B \cos(\omega_{in}\tau) & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ Ae^{-\omega_{out}(\tau-\tau_0)} & \tau > \tau_0, \end{cases}\tag{6.13}$$

por otra parte, las soluciones impares son

$$M_e(\tau) = \begin{cases} Ae^{\omega_{out}(\tau+\tau_0)} & \tau < -\tau_0, \\ C \sin(\omega_{in}\tau) & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ Ae^{-\omega_{out}(\tau-\tau_0)} & \tau > \tau_0. \end{cases}\tag{6.14}$$

Las condiciones de continuidad de  $M(\tau)$  y  $M'(\tau)$  en las fronteras localizadas en  $-\tau_0$  y  $\tau_0$ , proporciona el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}A &= B \cos(\omega_{in}\tau_0), \\ B\omega_{out} &= B\omega_{in} \sin(\omega_{in}\tau_0), \\ A &= -C \sin(\omega_{in}\tau_0), \\ A\omega_{out} &= C\omega_{in} \cos(\omega_{in}\tau_0).\end{aligned}\tag{6.15}$$

De la primera y segunda de estas ecuaciones se sigue que

$$\tan(\omega_{in}\tau_0) = \frac{\omega_{out}}{\omega_{in}},\tag{6.16}$$

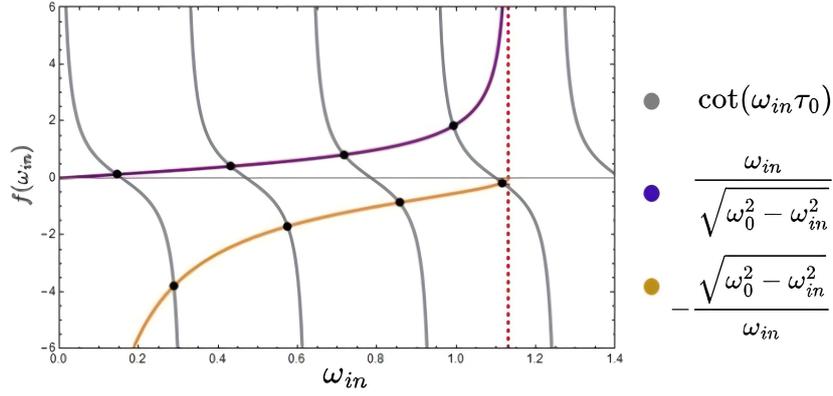


Figura 6.3: Gráfica de las ecuaciones (6.20), donde los puntos negros muestran las intersecciones que corresponden a cada uno de los eigenvalores que admite la guía de onda temporal, la línea roja punteada representa la intensidad del potencial.

mientras que de las dos ecuaciones restantes se obtiene que

$$\cot(\omega_{in}\tau_0) = -\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}}. \quad (6.17)$$

El par de ecuaciones (6.16) y (6.17), son funciones trascendentes y su solución se puede obtener fácilmente por un método gráfico. Definiendo una nueva variable como sigue

$$\omega_0^2 = \omega_{out}^2 + \omega_{in}^2, \quad (6.18)$$

y sustituyendo (6.10) y (6.11) obtenemos

$$\omega_{out} = \sqrt{\frac{4\gamma P_0}{\beta_2} - \omega_{in}^2}. \quad (6.19)$$

De esta última expresión obtenemos un par de ecuaciones de eigenvalores dadas por

$$\begin{aligned} \tan(\omega_{in}\tau_0) &= \frac{\sqrt{\frac{4\gamma P_0}{\beta_2} - \omega_{in}^2}}{\omega_{in}}, \\ \cot(\omega_{in}\tau_0) &= -\frac{\sqrt{\frac{4\gamma P_0}{\beta_2} - \omega_{in}^2}}{\omega_{in}}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Las soluciones de estas dos ecuaciones de eigenvalores (6.20), son las intersecciones de las curvas que se muestran en la figura 6.3 que corresponden a cada uno de los modos que soporta la guía de onda. Además, hay que hacer notar que por muy pequeño que sea el parámetro  $4\gamma P_0/\beta_2$  existirá al menos una solución, lo que muestra que una guía de onda posee al menos un estado ligado. Por otra parte, mientras más grande es el producto  $\gamma P_0$  aumentará en número de modos de propagación dentro de la guía de onda.

En el límite en que el producto  $\gamma P_0$  se hace infinito, las intersecciones se hacen equidistantes en valores  $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$

Modo $m_i$	Eigenvalor $\omega_{in}$	Modo $m_i$	Eigenvalor $\omega_{in}$
$m = 0$	0.144291	$m = 4$	0.716784
$m = 1$	0.288385	$m = 5$	0.856588
$m = 2$	0.432055	$m = 6$	0.992539
$m = 3$	.575005	$m = 7$	1.11604

Cuadro 6.1: Eigenvalores en una guía de onda temporal.

### 6.3.2. Eigenestados

De manera similar al caso de guías de onda espaciales, podemos definir un parámetro adimensional como

$$V = \tau_0 \omega_0 = 2\tau_0 \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\beta_2}}. \quad (6.21)$$

En completa analogía con el caso espacial, el parámetro  $V$  sirve para determinar el número de modos que puede soportar la guía de onda temporal, la cual puede soportar  $m$  modos cuando  $V < (m + 1)\pi/2$ . En particular, cuando  $V < \pi/2$  la guía de onda solo tiene un modo de propagación [27].

En la guía de onda temporal que hemos considerado, los valores de los parámetros que aparecen en (6.21) son:  $\tau_0 = 10$  ps,  $\gamma = 2$  W<sup>-1</sup>/km,  $P_0 = 4$  W y  $\beta_2 = 25$  ps<sup>2</sup>/km, por lo tanto, para nuestra guía de onda temporal  $V = 11,3$  y puede soportar 8 modos, que coinciden con el número de eigenvalores que encontramos por el método gráfico de figura 6.3.

Las funciones  $M_e(\tau)$  y  $M_o(\tau)$  deben de satisfacer la condición de normalización dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M(\tau)|^2 d\tau = 1, \quad (6.22)$$

de esta manera, las funciones  $M_e(\tau)$  y  $M_o(\tau)$  se escriben de la forma

$$M_e(\tau) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega_{in}\tau_0)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}} \exp \left[ \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{in}^2} (\tau + \tau_0) \right], & \tau < -\tau_0, \\ \frac{\cos(\omega_{in}\tau)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}}, & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ \frac{\cos(\omega_{in}\tau_0)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}} \exp \left[ -\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{in}^2} (\tau - \tau_0) \right], & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (6.23)$$

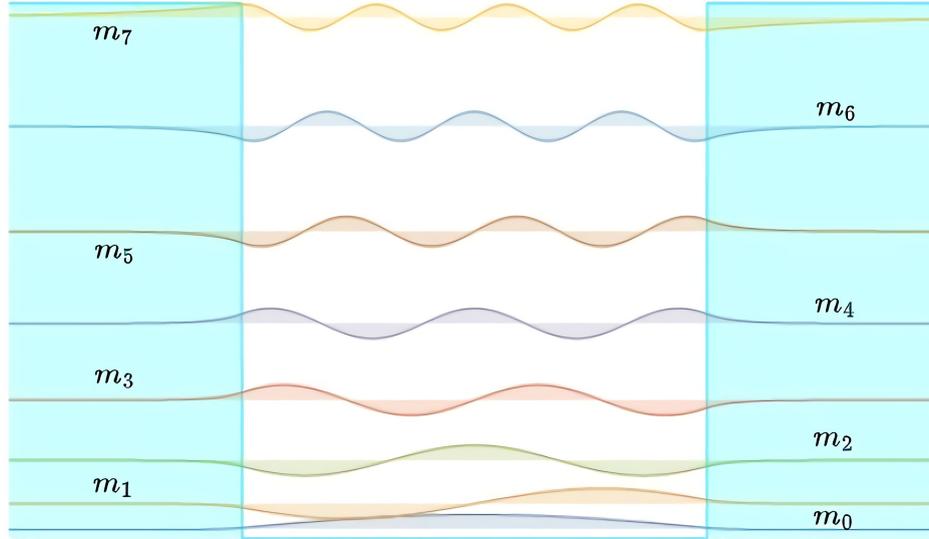


Figura 6.4: Comparación de los 8 eigenestados dentro de la guía de onda temporal.

$$M_o(\tau) = \begin{cases} -\frac{\sin(\omega_{in}\tau_0)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}} \exp\left[\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{in}^2}(\tau + \tau_0)\right], & \tau < \tau_0, \\ \frac{\sin(\omega_{in}\tau)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}}, & -\tau_0 < \tau < \tau_0, \\ \frac{\sin(\omega_{in}\tau_0)}{\sqrt{\tau_0 + (\omega_0^2 - \omega_{in}^2)^{-\frac{1}{2}}}} \exp\left[-\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{in}^2}(\tau - \tau_0)\right], & \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (6.24)$$

En la figura 6.4 se muestran los 8 modos que soporta la guía de onda temporal correspondientes a los 8 eigenvalores encontrados en la sección anterior. Los eigenestados de la función  $M_e(\tau)$  corresponden a los valores de  $m = 0, 2, 4, 6$ , mientras que para la función  $M_o(\tau)$  para  $m = 1, 3, 5, 7$ .

La evolución temporal para distintos modos ( $m = 0, 1, 4, 5$ ) se muestran en la figura 6.5, como era de esperar los modos se propagan sin cambiar su forma a través de la guía temporal. En forma análoga al caso de una guía de onda espacial, el  $m$ -ésimo modo tiene  $m + 1$  picos dentro de la ventana temporal de la guía de onda [3].

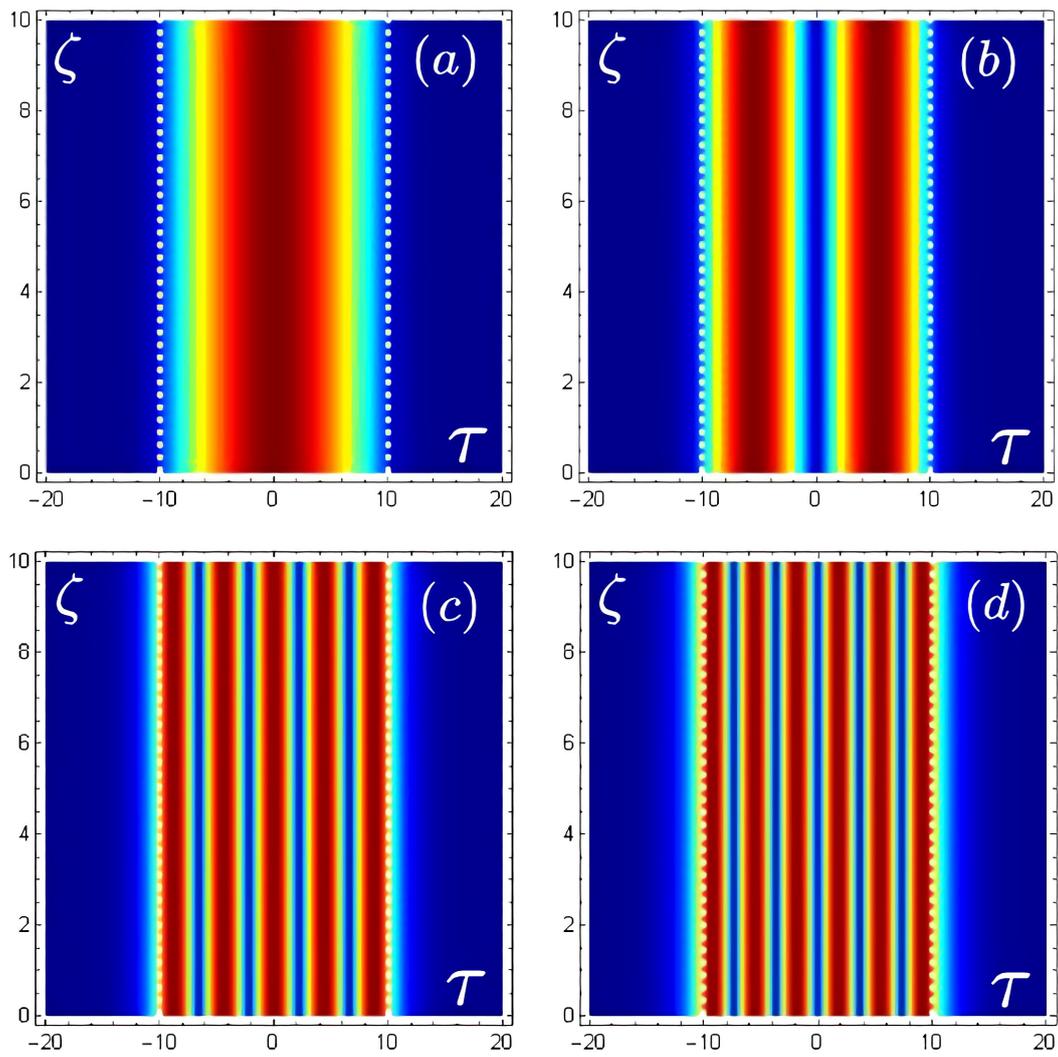


Figura 6.5: Modos soportados por la guía de onda temporal. (a)  $m = 0$ , (b)  $m = 1$ , (c)  $m = 4$ , (d)  $m = 5$ .

# Capítulo 7

## Propagación en los marcos de Schrödinger y Hamilton

El desarrollo de simulaciones numéricas y modelos analíticos de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) tienen un papel importante en la optimización y el diseño de sistemas de comunicación óptica. Además, ayudan a comprender la física en la propagación de pulsos ultracortos en un medio no lineal y dispersivo [29].

La NLSE es una ecuación fundamental de la ciencia no lineal y se ha estudiado ampliamente en el contexto de la teoría de solitones. La NLSE es una ecuación diferencial parcial no lineal que generalmente no se puede resolver analíticamente, excepto en algunos casos donde se puede utilizar el método de dispersión inversa. Por lo tanto, a menudo es necesario usar un enfoque numérico para comprender y estudiar los efectos no lineales que ocurren en las fibras ópticas [2].

### 7.1. Ecuación no lineal de Schrödinger

La ecuación básica que gobierna la propagación de pulsos en fibras ópticas se conoce como ecuación no lineal de Schrödinger. La NLSE para un ancho de pulso  $> 5$ ps es

$$i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (7.1)$$

donde  $A$  es la envolvente del pulso que varía lentamente,  $\alpha$  es un parámetro de absorción,  $\beta_2$  el parámetro GVD y  $\gamma$  el coeficiente de no linealidad. En ausencia de absorción esta ecuación se reduce a

$$i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - \gamma |A|^2 A. \quad (7.2)$$

Esta ecuación es similar a la conocida ecuación Schrödinger de la mecánica cuántica, sin embargo, son solo las ecuaciones de Maxwell adaptadas a la propagación del campo en una fibra óptica monomodo. El término no lineal  $\gamma |A|^2 A$  es análogo a una energía potencial, y es precisamente esto lo que permite atrapar un pulso óptico [30].

El primer término de la derecha de la ecuación (7.2) describe los efectos dispersivos de la fibra y cambia el espectro de frecuencia del pulso, sólo sirve para ampliar o comprimir el pulso en el tiempo. El segundo término contiene la parte no lineal, este afecta la forma

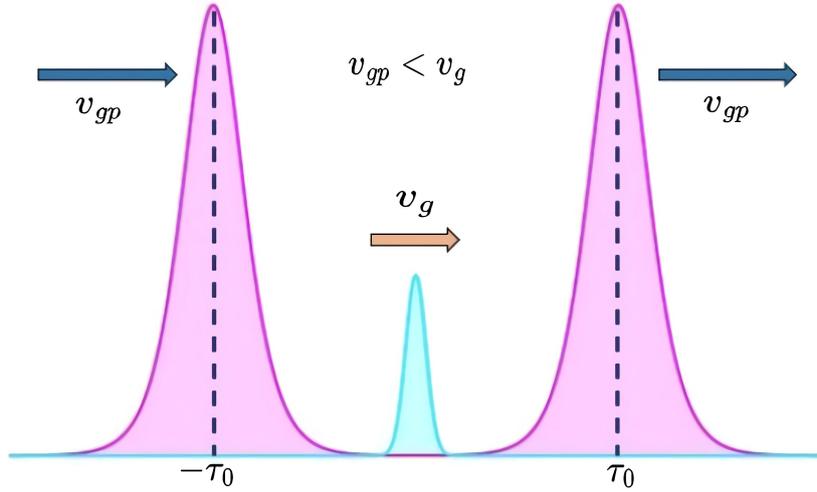


Figura 7.1: Guía de onda temporal formada por dos solitones (rosa), pulso de bombeo (azul) atrapado entre los límites temporales.

del pulso en el tiempo, pero en el dominio de la frecuencia es el responsable de ensanchar o comprimir el pulso [30].

## 7.2. Potenciales

En esta sección vamos a estudiar qué es lo que sucede cuando un pulso óptico es confinado entre dos límites temporales que se mueven con la misma velocidad. Si la velocidad de grupo del pulso difiere de la velocidad de los límites temporales, esperamos que el pulso viaje hacia uno de los límites temporales y al llegar se refleje completamente en dirección al otro límite temporal, repitiéndose este proceso atrapando el pulso entre los dos límites temporales. Este comportamiento es análogo al de un haz óptico atrapado entre dos límites espaciales, que forman una guía de onda convencional [27]. Debido a esto, nos referiremos a este sistema como guía de onda temporal.

En el primer caso vamos a considerar que estos dos límites temporales están formados por dos pulsos tipo solitón de la forma

$$P(\tau) = P_0 \operatorname{sech}^2(\tau \pm \tau_0), \quad (7.3)$$

donde  $P_0$  es la intensidad del pulso. En figura 7.1 se muestra un esquema del sistema.

En el segundo caso consideraremos que nuestros límites temporales son aproximadamente cuadrados, utilizando un potencial de la forma

$$P(\tau) = \frac{P_0}{2} \left[ \tanh\left(\frac{\tau - \tau_0}{a}\right) - \tanh\left(\frac{\tau - \tau_0}{a}\right) \right], \quad (7.4)$$

donde  $P_0$  es la intensidad del pulso. En la figura 7.2 mostramos un esquema del sistema.

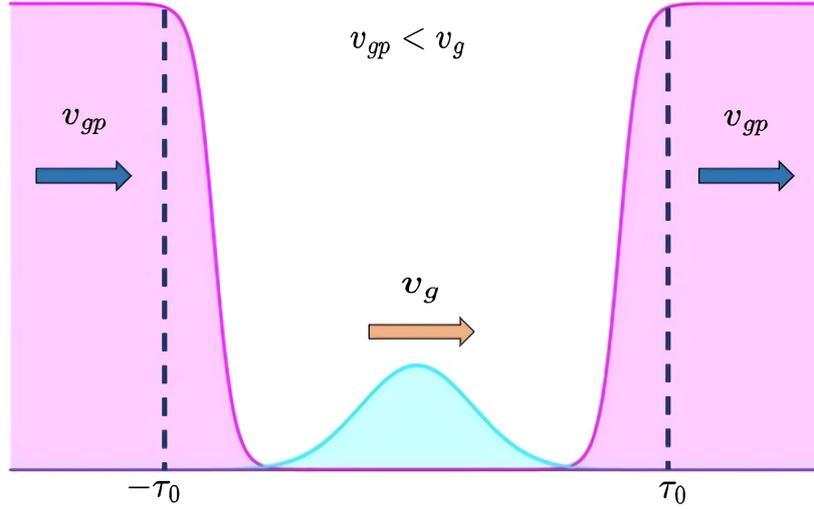


Figura 7.2: Guía de onda temporal formada por pulsos ópticos aproximadamente cuadrados.

### 7.3. Soluciones numéricas

En el capítulo anterior obtuvimos que la ecuación de onda que describe la interacción entre el pulso de prueba y el pulso de bombeo, se escribe como

$$-i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma |A|^2 A - \omega_h A, \quad (7.5)$$

donde  $\omega_h$  es la frecuencia del pulso y el término  $|A|^2$  es la intensidad del pulso de bombeo. Entonces la ecuación (7.5) se puede escribir como

$$-i \frac{\partial A}{\partial \zeta} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + [\gamma P(\tau) - \omega_h] A. \quad (7.6)$$

Considerando un pulso gaussiano como pulso de prueba

$$A(0, \tau) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\tau_0^2}\right), \quad (7.7)$$

que interacciona con un potencial de la forma

$$P(\tau) = P_0 \left[ \operatorname{sech}\left(\frac{\tau - \tau_0}{a}\right)^2 + \operatorname{sech}\left(\frac{\tau + \tau_0}{a}\right)^2 \right], \quad (7.8)$$

el pulso gaussiano quedaría atrapado entre los dos límites temporales formados por solitones si la velocidad de grupo del pulso de prueba difiere un poco de la velocidad de los límites temporales como en la figura 7.1.

Para visualizar el comportamiento de un pulso óptico dentro de una guía de onda temporal, se envía un pulso gaussiano con  $\tau_0 = 3,16$  ps y su máximo en el centro de la guía de ondas con un ancho de 20 y 14 ps, resolvemos la ecuación (7.6) numéricamente, con los parámetros  $\beta_2 = 25$  ps<sup>2</sup>/km,  $\gamma = 2$  W<sup>-1</sup>/km,  $\omega_h = 1$  fs<sup>-1</sup> y  $P_0 = 5$  W.

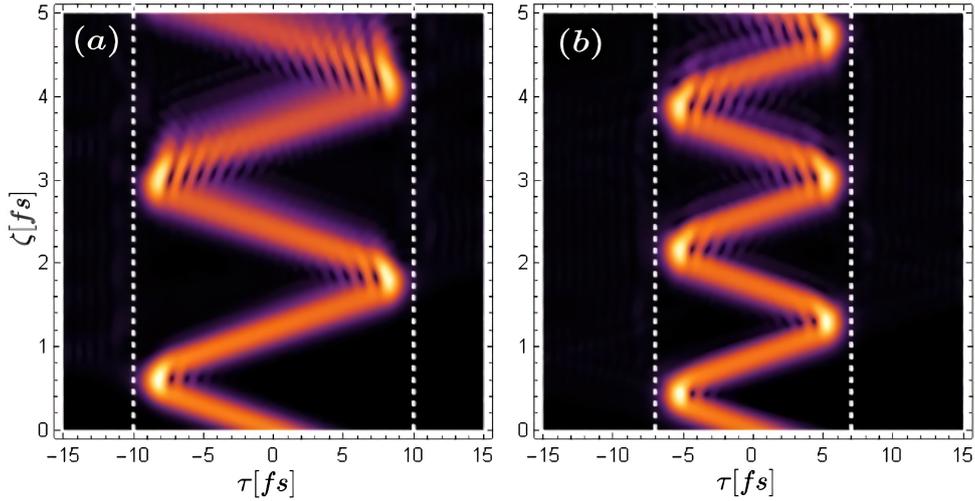


Figura 7.3: Pulso gaussiano atrapado en una guía de onda temporal con diferentes ventanas de tiempo, (a) 20 fs, (b) 14 fs.

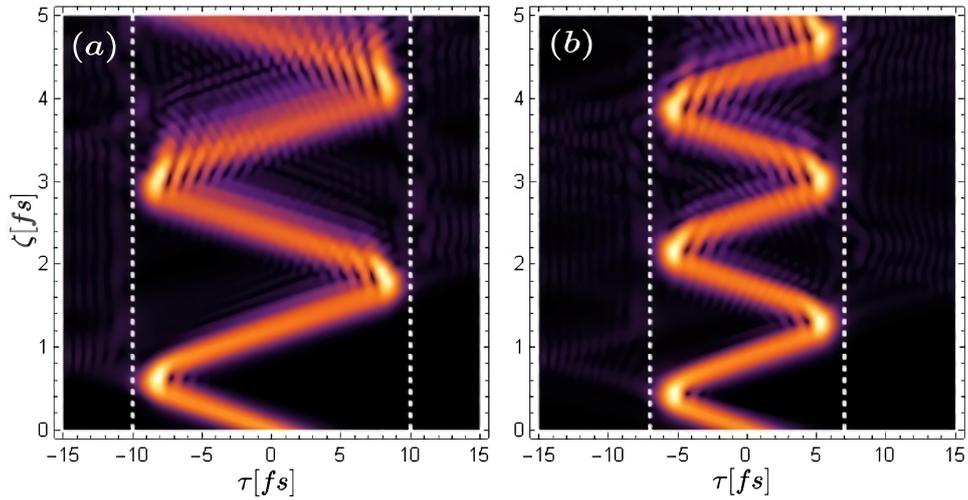


Figura 7.4: Solitón atrapado en una guía de onda temporal con diferentes ventanas de tiempo, (a) 20 fs, (b) 14 fs.

En la figura 7.3 se muestra como el pulso óptico rebota en los límites temporales, de forma análoga a como lo haría un pulso óptico en una guía de onda convencional.

Ahora vamos a considerar un pulso de tipo solitón como pulso de prueba, de la forma

$$A(0, \tau) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^2, \quad (7.9)$$

utilizando los mismos valores para los parámetros  $\beta_2$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_h$  y  $P_0$ , que en el caso anterior.

Como podemos observar de las figuras 7.3 y 7.4 ambos pulsos experimentan reflexión total interna al chocar con los límites temporales, además, podemos notar que los pulsos sufren un ensanchamiento antes de cada reflexión, esto es provocado por el parámetro GVD. No se puede hacer que la dispersión sea insignificante debido a que la reflexión

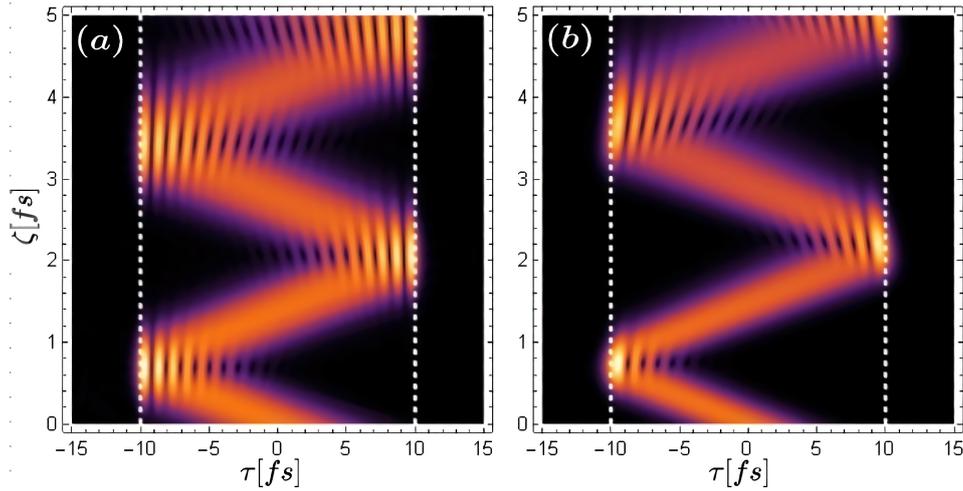


Figura 7.5: Pulso gaussiano atrapado en una guía de onda temporal formada por dos pulsos de la forma (7.4) con (a)  $a = 1$  fs y (b)  $a = 0,1$  fs.

total interna no puede ocurrir sin ella [27].

Nuevamente vamos a usar un pulso de prueba gaussiano como en (7.7) con  $\tau_0 = 3,9$  fs, dentro de una guía de onda formada por dos límites temporales de la forma (7.4) con un ancho de 20 fs y  $a = 1$  fs.

Por último, vamos a utilizar como pulso de prueba un solitón dentro del pozo de potencial (7.4), donde el ancho de 20 fs se mantiene fijo, variando únicamente el coeficiente  $a$ .

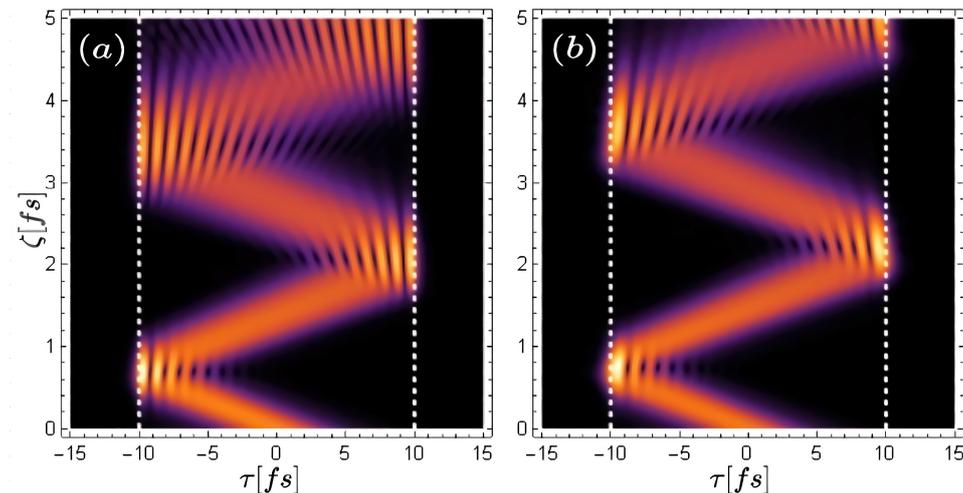


Figura 7.6: Solitón atrapado entre dos límites temporales de la forma (7.4), manteniendo la separación entre los límites fija y variando únicamente el coeficiente  $a$ , (a)  $a = 1$  fs y (b)  $a = 0,1$ .

Debido a que el núcleo (ancho) de nuestras guías de onda son mucho mayores que el ancho de los pulsos de prueba, se excitan los múltiples modos (figura 5.3) que puede soportar la guía los cuales interfieren entre sí a medida que el pulso se propaga [27].

## 7.4. Ecuaciones de Hamilton

En 1835 William R. Hamilton demostró que una duplicación simétrica del número de variables independientes de un sistema mecánico, se puede obtener al describir su dinámica por medio de  $2n$  cantidades  $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$  donde  $p_i$  es el momento canónico conjugado de  $q_i$ , definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.10)$$

donde  $L$  es la función lagrangiana y  $\dot{q}_i$  las velocidades generalizadas [31].

En la formulación de la mecánica de Hamilton, el papel de la lagrangiana lo asume la función de Hamilton o hamiltoniano  $H$  definido por

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (7.11)$$

Una de las consecuencias de introducir esta nueva función  $H$  se obtiene al tomar la diferencial de (7.11):

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right\}. \quad (7.12)$$

Con la definición (7.10) y las ecuaciones de Euler-Lagrange, la ecuación (7.12) se reduce a

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (7.13)$$

lo que muestra que  $H$  solamente depende de las variables  $q$  y  $p$ . Por otra parte,

$$dH = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (7.14)$$

Comparando las ecuaciones (7.13) y (7.14), se obtiene

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.15)$$

además obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7.16)$$

Las ecuaciones (7.15) se conocen como ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas de Hamilton, y forman un conjunto de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, equivalentes a las ecuaciones de movimiento de Lagrange [31].

### 7.4.1. Ecuaciones de Hamilton en una guía de onda temporal

Como se mencionó en el capítulo anterior, la formación de límites temporales consiste en hacer pasar pulsos de luz ultracortos a través de una fibra óptica. Este pulso de luz modifica las propiedades de la fibra debido al efecto Kerr óptico, el índice de refracción efectivo de la fibra  $n_{\text{eff}}$  obtiene una contribución adicional  $\delta n$  que es proporcional a la intensidad del pulso [8]

$$n_{\text{eff}}(\omega, \tau) = n(\omega) + \delta n(\tau), \quad (7.17)$$

Para crear dicha perturbación, Ulf Leonhardt y sus colaboradores propusieron pulso de tipo solitón a través de una fibra óptica de la forma

$$\delta n(\tau) = \delta n_{\text{max}} \text{sech}^2 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right), \quad (7.18)$$

donde  $\delta n_{\text{max}}$  es la intensidad máxima del solitón y  $\tau_0$  es su duración [33].

Para estudiar el efecto que produce el pulso de bombeo (límite temporal) sobre el pulso de prueba, es conveniente utilizar un marco de referencia (marco comóvil) donde el pulso de bombeo sea estacionario. Tal marco lo podemos construir a través de la siguiente transformación de coordenadas

$$\zeta = \frac{z}{v_g}, \quad \tau = t - \frac{z}{v_g}, \quad (7.19)$$

donde  $\zeta$  es el tiempo de propagación,  $\tau$  el tiempo de retardo y  $v_g$  es la velocidad de grupo del límite temporal. Como la expresión para  $n(\omega)$  en las coordenadas  $(\tau, \zeta)$  es más simple, son las coordenadas mayormente utilizadas por la comunidad dedicada al estudio de las fibras ópticas.

Con este cambio de coordenadas hay un cambio de fase entre el marco de laboratorio y el marco comóvil. En el marco de laboratorio tenemos

$$\Phi = \int (k dz - \omega dt), \quad (7.20)$$

donde  $k$  es el número de onda y  $\omega$  la frecuencia. Por otra parte, de las transformaciones (7.19) la fase en el marco comóvil esta dada por

$$\Phi = - \int (\omega' d\zeta + \omega d\tau), \quad (7.21)$$

donde se ha definido

$$\omega' = \omega \left( 1 - n_{\text{eff}}(\omega) \frac{v_g}{c} \right). \quad (7.22)$$

En el marco comóvil, el límite temporal está en reposo y el medio (fibra) se mueve con una velocidad  $-v_g$ , creando un medio móvil efectivo abriendo la posibilidad a la formación de un análogo de horizonte de eventos [32].

De las transformaciones (7.19) y las ecuaciones (7.20)-(7.22), obtenemos el siguiente par ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\tau}{d\zeta} = - \frac{\partial \omega'}{\partial \omega} = \frac{\omega'}{\omega} - \omega \frac{v_g}{c} n'(\omega), \quad \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{\partial \omega'}{\partial \tau} = - \frac{v_g}{c} \delta n'(\omega), \quad (7.23)$$

que son las ecuaciones análogas de Hamilton en el caso óptico [33].

### 7.4.2. Relación de dispersión

Cuando las ondas electromagnéticas se propagan a través de un medio interactúan con los electrones enlazados, de tal manera que su velocidad depende de la frecuencia  $\omega$ . En el campo de las fibras ópticas usualmente se trabaja con una relación de dispersión de la forma

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{k!} (\omega - \omega_0)^k, \quad (7.24)$$

donde la última igualdad es una expansión en serie de Taylor de  $\beta(\omega)$  alrededor de una frecuencia central  $\omega_0$ .

En este trabajo utilizamos un modelo para la relación de dispersión que incluye las propiedades esenciales para modelar la dispersión de la luz en una fibra óptica, además, de que genera un análogo de horizonte de eventos en el régimen óptico [32], el cual está dado por la siguiente ecuación

$$\beta(\omega) = \sqrt{b_1 + b_2 \omega^2}. \quad (7.25)$$

En la figura 7.7 se muestra la relación de dispersión. Los parámetros  $b_1$  y  $b_2$  están definidos en función de las frecuencias en el marco comóvil  $\omega'_h$  y en el laboratorio  $\omega_h$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{v_g^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega'_h}{\omega_h}\right) \left(1 - \frac{2\omega'_h}{\omega_h}\right), \\ b_2 &= \frac{v_g^2 \omega'_h}{c^2 \omega_h^3} \left(1 - \frac{\omega'_h}{\omega_h}\right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

### 7.4.3. Soluciones numéricas

En esta sección se resuelven numéricamente las ecuaciones de Hamilton (7.23), la primera de estas ecuaciones describe la propagación de un pulso óptico atrapado entre dos límites temporales, la segunda ecuación muestra los cambios de frecuencia que experimenta el pulso durante la propagación.

Escogemos los parámetros  $\omega'_h = 1$  PHz y  $\omega_h = 2,62645$  PHz, los cuales no sólo nos dan los órdenes de magnitud, si no que también son una buena aproximación a posibles materiales experimentales [32].

Las figuras 7.8 y 7.9 muestran las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (7.23) para un pulso óptico con una frecuencia cercana a  $\omega_l$  y a una frecuencia intermedia entre  $\omega_l$  y  $\omega_h$ , cuando el pulso choca con el límite temporal 1 sufre un corrimiento hacia el azul, mientras que al chocar con el límite temporal 2 tiene un corrimiento al rojo. Este comportamiento es análogo a un horizonte de eventos de un agujero blanco y un agujero negro, respectivamente.

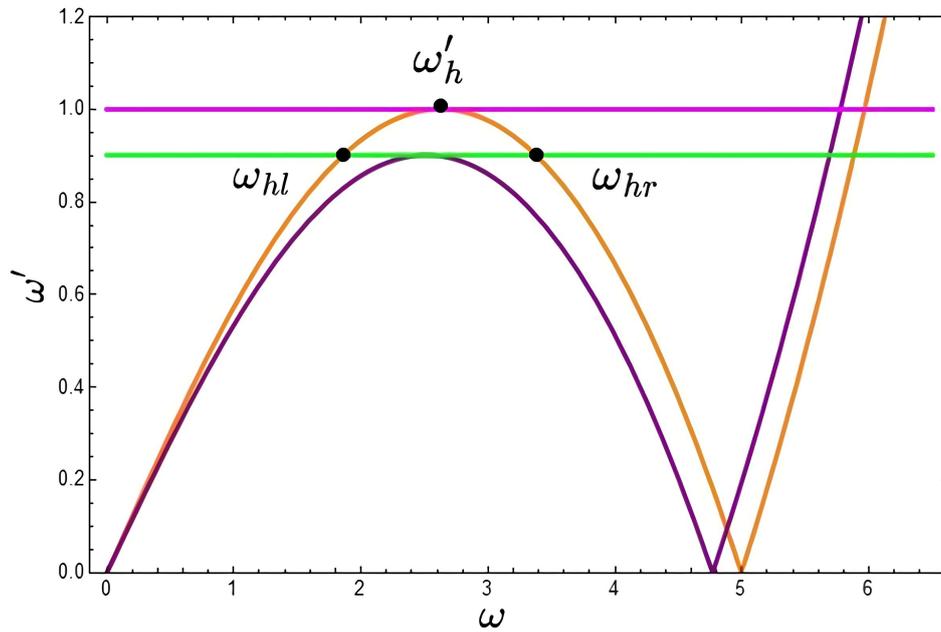


Figura 7.7: Relación de dispersión para el modelo de guía de onda temporal, la línea naranja es la ecuación (7.22) sin considerar la contribución del solitón ( $\delta n = 0$ ), la línea morada es la misma ecuación considerando la contribución del solitón ( $\delta n = \delta n_{max}$ ). La frecuencia  $\omega_h$  es la frecuencia del horizonte,  $\omega_l$  y  $\omega_r$  son las frecuencias que delimitan la región espectral que sufren el efecto Hawking análogo.

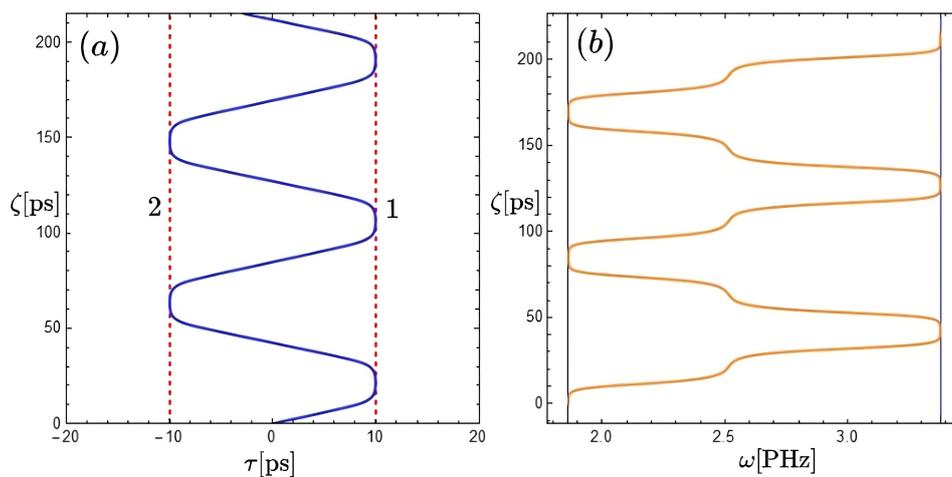


Figura 7.8: (a) Trayectoria de un pulso óptico atrapado en una guía de onda temporal. (b) Cambios de frecuencia que experimenta el pulso al incidir en los límites temporales.

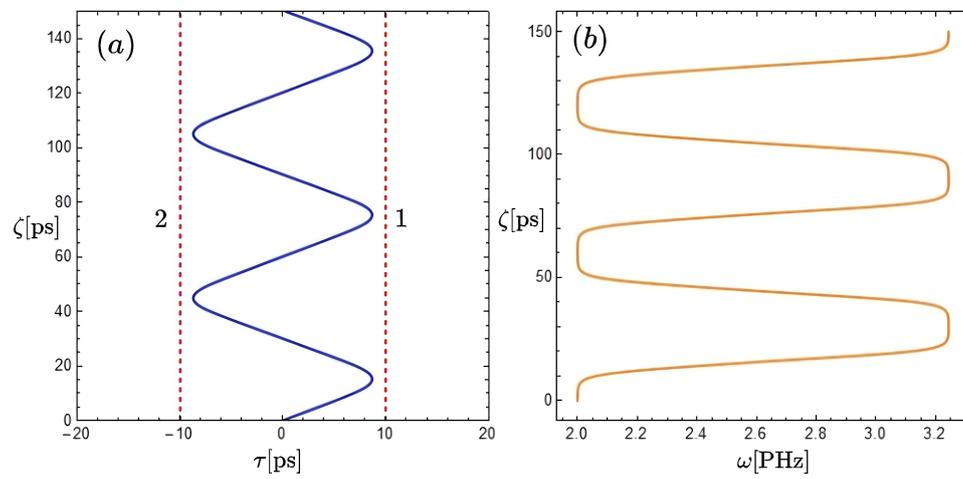


Figura 7.9: (a) Trayectoria de un pulso óptico atrapado en una guía de onda temporal a una frecuencia entre  $\omega_h$  y  $\omega_l$ . (b) Cambios de frecuencia que experimenta el pulso al incidir sobre los límites temporales.

# Capítulo 8

## Conclusiones

La simetría matemática que existe entre las ecuaciones que describen los procesos de difracción y dispersión está determinada por un par de ecuaciones de difusión con la presencia de un coeficiente imaginario que permite la propagación de las funciones envolventes.

Esta analogía se puede extender al estudio de la propagación de pulsos de luz en fibras ópticas. Aprovechando los fenómenos no lineales que se producen durante la propagación de pulsos dentro de una fibra óptica, es posible construir un análogo en el dominio del tiempo de una guía de onda, para la cual se pueden definir expresiones equivalentes para los coeficientes de reflexión y refracción.

Mostramos que estas guías de onda temporales son una consecuencia del efecto Kerr óptico producido por pulsos de luz que se propagan a través de una fibra óptica. Se resolvieron de forma analítica las ecuaciones que describen el sistema para obtener los modos de propagación dentro de una guía de onda temporal, obteniendo que estos se mantienen estables durante la propagación.

Posteriormente derivamos la ecuación no lineal de Schrödinger y se resolvió numéricamente para dos tipos de pulsos atrapados dentro de la guía de ondas: un pulso gaussiano y un solitón. Además, para la formación de la guía se consideró que los límites temporales podrían estar formados por pulsos de la forma  $\text{sech}^2(\tau/\tau_0)$  y  $\tanh(\tau/\tau_0)$ . De los resultados numéricos se puede observar que la propagación es más estable cuando los límites temporales están formados por solitones ( $\text{sech}^2$ ), ya que en el caso de la tangente hiperbólica el pulso tiende a ensancharse rápidamente debido a los efectos dispersivos.

Por último, se utilizaron las ecuaciones de Hamilton para el caso óptico. De estas ecuaciones se pudo corroborar que cuando un pulso óptico interactúa con un límite temporal este experimenta un corrimiento hacia el rojo y a el azul a medida que este se propaga dentro de la guía de onda temporal. Este comportamiento es análogo al efecto de un horizonte de eventos de un agujero negro y un agujero blanco, respectivamente.

En la actualidad los experimentos en el área de gravedad análoga se llevan a cabo en modelos ópticos y cuánticos, por esta razón una guía de ondas temporal sirve como herramienta para el estudio de fenómenos astrofísicos como la evaporación de agujeros negros o la radiación de Hawking.

# Apéndice A

En la sección 6.3.1 se resolvieron gráficamente las ecuaciones (6.20) donde los puntos de intersección corresponden a los eigenvalores de cada uno de los modos que puede soportar la guía de onda temporal. A continuación, se muestran los distintos métodos usados para la solución aun que en el texto principal solo utilizamos un método con el cual no era necesario introducir nuevos cambios de variable así como tampoco identidades trigonométricas.

## Método 1

Dadas las ecuaciones de eigenvalores (6.16) y (6.17)

$$\begin{aligned}\tan(\omega_{\text{in}}\tau_0) &= \frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}, \\ \cot(\omega_{\text{in}}\tau_0) &= -\frac{\omega_{\text{out}}}{\omega_{\text{in}}}.\end{aligned}\tag{8.1}$$

Tomando la primera ecuación de (8.1), elevando al cuadrado y utilizando una identidad trigonométrica

$$\tan^2(\omega_{\text{in}}\tau_0) = \frac{\omega_{\text{out}}^2}{\omega_{\text{in}}^2} = \sec^2(\omega_{\text{in}}\tau_0) - 1,\tag{8.2}$$

$$\sec^2(\omega_{\text{in}}\tau_0) = \frac{\omega_{\text{out}}^2 + \omega_{\text{in}}^2}{\omega_{\text{in}}^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{in}}^2},\tag{8.3}$$

$$|\cos(\omega_{\text{in}}\tau_0)| = \frac{\omega_{\text{in}}}{\omega_0}.\tag{8.4}$$

De manera similar para la segunda ecuación de (8.1) obtenemos

$$|\sin(\omega_{\text{in}}\tau_0)| = \frac{\omega_{\text{in}}}{\omega_0}.\tag{8.5}$$

Debido a que las ecuaciones (8.4) y (8.5) son trascendentes usaremos un método gráfico para encontrar las soluciones, como se muestra en la figura ??.

## Método 2

Tomando nuevamente las ecuaciones de eigenvalores (8.1), y reescribiendo de la forma

$$\begin{aligned}\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{\text{in}}^2} &= \omega_{\text{in}} \tan(\omega_{\text{in}}\tau_0), \\ \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{\text{in}}^2} &= -\omega_{\text{in}} \cot(\omega_{\text{in}}\tau_0).\end{aligned}\tag{8.6}$$

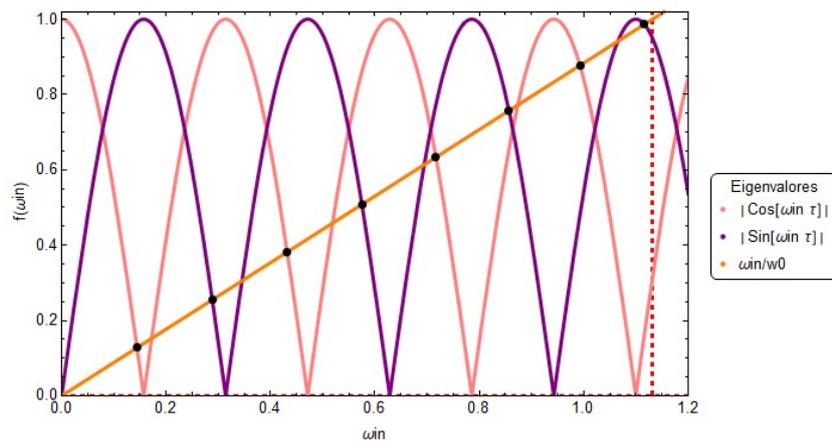


Figura 8.1: Solución de las ecuaciones de eigenvalores (8.4) y (8.5).

En la figura 8.2 se muestran los puntos de intersección de las curvas (8.6)

### Método 3

Usando el carácter periódico de la tangente, podemos reescribir la primera expresión de (8.1) de la forma

$$\tan(\omega_{in}\tau_0 - \frac{m\pi}{2}) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_{in}^2}}{\omega_{in}}, \quad (8.7)$$

las soluciones para  $m = 0, 1, \dots, 7$ , corresponden a cada uno de los eigenvalores admitidos por la guía de onda, como se muestra en la figura 8.3.

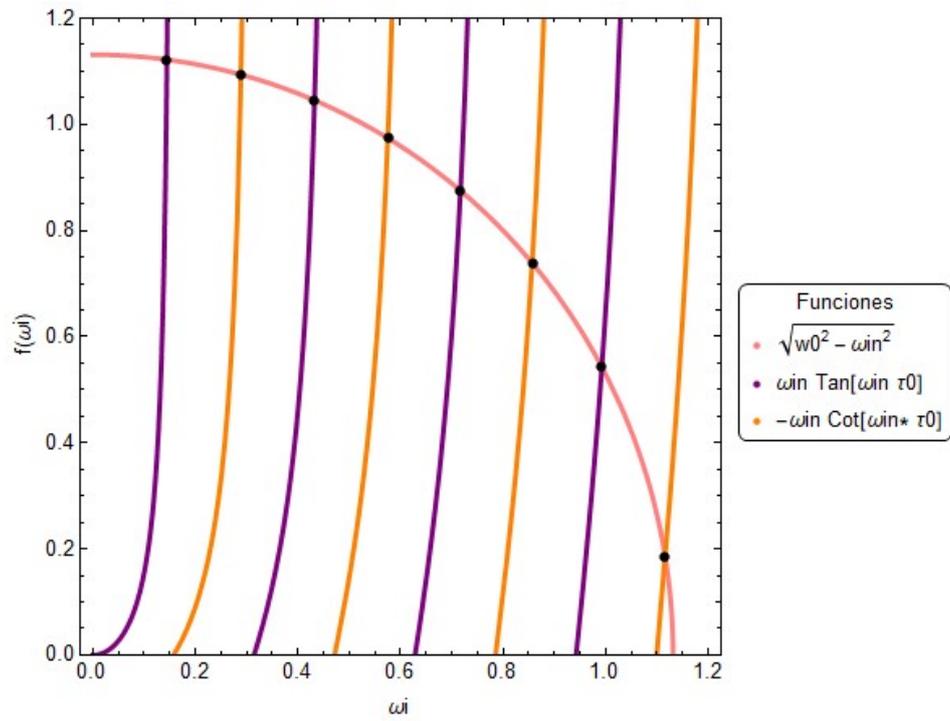


Figura 8.2: Solución a la ecuación de eigenvalores (8.6)

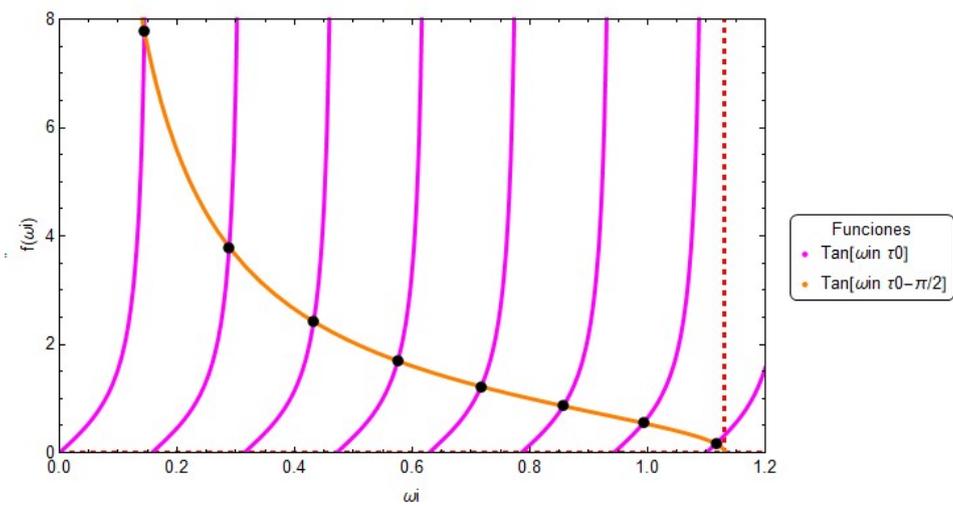


Figura 8.3: Solución de la ecuación de eigenvalores (8.7).

# Bibliografía

- [1] Snyder, A. W., Love, J. (2012). *Optical waveguide theory*. Springer. USA.
- [2] Agrawal, G. P. (2000). *Nonlinear fiber optics*. Springer, Berlin.
- [3] Plansinis, B. W. (2017). *Applications of space-time duality*. PhD thesis, University of Rochester, New York, USA.
- [4] Kolner, B. H. (1994). *Space-time duality and the theory of temporal imaging*. IEEE Journal of Quantum Electronics, **30**(8), 1951-1963.
- [5] Helfer, A. D. (2003). *Do black holes radiate?* Reports on Progress in Physics, **66**(6), 943.
- [6] Unruh, W. G. (1981). *Experimental black-hole evaporation*. Physical Review Letters, **46**(21), 1351.
- [7] Gaona Reyes J, L. (2016). *Theoretical description of the optical black-hole laser*. MSc thesis, Cinvestav, México.
- [8] Philbin, T. G., Kuklewicz, C., Robertson, S., Hill, S., König, F., Leonhardt, U. (2008). *Fiber-optical analog of the event horizon*. Science, **319**(5868), 1367-1370.
- [9] Jacobson, T. (2013). *Black holes and Hawking radiation in spacetime and its analogues*. In Analogue Gravity Phenomenology (pp. 1-29). Springer, Cham. Italy.
- [10] Rincón Estrada J, D. (2019). *Inestabilidades en sistemas acústicos y ópticos*, MSc thesis, Cinvestav, México.
- [11] Haus, H. (1984). *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- [12] Serway, R. A., Jewett, J. W. (2009). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. Cengage Learning Editores. USA.
- [13] Hawking, S. W. (1974). *Black hole explosions?* Nature, **248**(5443), 30-31.
- [14] Faccio, D., Belgiorno, F., Cacciatori, S., Gorini, V., Liberati, S., Moschella, U. (Eds.). (2013). *Analogue gravity phenomenology: analogue spacetimes and horizons, from theory to experiment* (Vol. 870). Springer, Italy.
- [15] Gaona-Reyes, J. L., Bermudez, D. (2017). *The theory of optical black hole lasers*. Annals of Physics, 380, 41-58.

- [16] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P., Lasenby, A. N. (2006). *General relativity: An introduction for physicists*. Cambridge University Press, New York, USA.
- [17] Beckenstein J.D. Phys. Rev. D. 7, 2333-2346 (1973).
- [18] Mukhanov, V., Winitzki, S. (2007). *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, New York, USA.
- [19] Hawking, S. W. (1975). *Particle creation by black holes*. Communications in Mathematical Physics 43 199-200.
- [20] Parker, L., Toms, D. (2009). *Quantum field theory in curved spacetime: Quantized fields and gravity*. Cambridge University Press, New York, USA.
- [21] Fernández Cristóbal, J. (2010). *Radiación de Hawking*. Revista Mexicana de Física E, **56**(2), 213-226.
- [22] Barceló, C., Liberati, S., Visser, M. (2011). *Analogue gravity*. Living Reviews in Relativity, **14**(1), 1-159.
- [23] Sakagami, M. A., Ohashi, A. (2002). *Hawking radiation in the laboratory*. Progress of Theoretical Physics, **107**(6), 1267-1272.
- [24] Barceló, C., Liberati, S., Visser, M. (2003). *Probing semiclassical analog gravity in Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions*. Physical Review A, **68**(5), 053613.
- [25] Garay, L. J., Anglin, J. R., Cirac, J. I., Zoller, P. (2000). *Sonic analog of gravitational black holes in Bose-Einstein condensates*. Physical Review Letters, 85(22), 4643.
- [26] Robertson, S. J., (2011). *Hawking radiation in dispersive media*. PhD thesis, School of Physics and Astronomy, University of St Andrews. UK.
- [27] Plansinis, B. W., Donaldson, W. R., Agrawal, G. P. (2016). *Temporal waveguides for optical pulses*. Journal of the Optical Society of America B, **33**(6), 1112-1119.
- [28] Rincon-Estrada, J. D., Bermudez, D. (2021). *Instabilities in an optical black-hole laser*. Annalen der Physik, **533**(1), 2000239.
- [29] Lembrikov, B. I. (2019). *Nonlinear optical phenomena. Nonlinear Optics-Novel Results in Theory and Applications.*, BoD-Books on Demand, USA.
- [30] Mollenauer, L. F., Gordon, J. P. (2006). *Solitons in optical fibers: fundamentals and applications*. Elsevier. USA.
- [31] Lemos, N. A. (2018). *Analytical mechanics*. Cambridge University Press, New York, USA.
- [32] Bermudez, D., Leonhardt, U. (2016). *Hawking spectrum for a fiber-optical analog of the event horizon*. Physical Review A, **93**(5), 053820.
- [33] Moreno Ruíz, A. (2018). *Espectro de Hawking en medios dispersivos*. MSc thesis, Cinvestav, México.