



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Radiación de Hawking análoga con circuitos  
simplécticos**

**Tesis que presenta**

**César Lara Cruz**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. David Bermúdez Rosales**

Ciudad de México

Diciembre, 2022



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco  
Departamento de Física

Radiación de Hawking análoga  
con circuitos simplécticos

Tesis que presenta  
César Lara Cruz

para obtener el Grado de  
Maestría en Ciencias  
en Física

Director de Tesis  
Dr. David Bermúdez Rosales



# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo a lo largo de estos años.

A mis amigos de la ESFM, Julio César y Mario, por creer en mí cuando yo no lo hacía y motivarme a seguir con mis estudios.

A Eduardo, por ser un gran amigo y compañero a lo largo de la maestría.

A mi asesor David Bermúdez, por ser un gran mentor y ejemplo a seguir. Por su paciencia y dedicación conmigo para ayudarme a mejorar.

Al cinvestav y a todos los investigadores con quienes tuve la oportunidad de trabajar y aprender de ellos.

Agradezco al conacyt, ya que gracias a su apoyo con la beca 1071000 me fue posible dedicarme completamente a este trabajo.



# Resumen

En este trabajo se presenta un modelo basado en la teoría de variables cuánticas continuas y estados gaussianos multipartita para estudiar el efecto Hawking análogo en fibras ópticas. Este formalismo nos permite construir diagramas llamados circuitos simplécticos, que nos ayudan a entender la dinámica de la creación de pares de Hawking de una forma intuitiva.

Los resultados más importantes en este trabajo son los cálculos numéricos del promedio de fotones producidos en cada uno de los modos asociados a las condiciones de empatamiento de fase de una relación de dispersión sencilla dada por una sola resonancia (como el caso del diamante), y la cuantificación del entrelazamiento entre los pares de Hawking mediante una función conocida como negatividad logarítmica. Se construyeron los circuitos de los sistemas de agujero negro, agujero blanco y el par agujero negro-blanco.

El análisis numérico se obtuvo para el efecto Hawking espontáneo, cuando el estado de entrada es el vacío, y estimulado, con estados coherentes, comprimidos y térmicos como entradas. Los resultados obtenidos nos muestran que el modelo de circuitos simplécticos logra emular la dinámica de los sistemas análogos ópticos, además de que demuestra ser una herramienta poderosa y útil por su sencillez frente a otros modelos usados con los mismos propósitos.



# Abstract

In this work we present a model based on the theory of quantum continuous variables and multipartite Gaussian states to study the analogue of the Hawking effect in optical fibers. This formalism allows us to construct diagrams called symplectic circuits, which help us to understand the dynamics of Hawking pair creation in an intuitive way.

The most important results in this work are the numeric calculations of the average number of photons produced in each of the modes associated with the phase-matching conditions of a simple dispersion relation given by a single resonance (as the diamond), and the entanglement quantification between the Hawking pairs by means of a function known as logarithmic negativity. The circuits of the black hole, white hole and black hole-white hole pair systems were constructed.

The numerical analysis was obtained for the spontaneous, with the vacuum state and stimulated, with coherent, squeezed and thermal states as inputs. The results obtained show that the model of symplectic circuits manages to emulate the dynamics of optical analog systems, in addition to proving to be a powerful and useful tool due to its simplicity compared to other models used for the same purposes.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Radiación de Hawking en sistemas análogos</b>	<b>5</b>
2.1. Radiación de Hawking en astrofísica . . . . .	6
2.2. Radiación de Hawking en sistemas análogos . . . . .	9
2.2.1. Métrica acústica . . . . .	10
2.2.2. Análogo acústico de la métrica de Schwarzschild . . . . .	13
2.2.3. Análogo acústico en condensados de Bose-Einstein . . . . .	13
2.2.4. Análogo óptico en fibras . . . . .	15
<b>3. Sistema análogo en fibras ópticas</b>	<b>19</b>
3.1. Propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas . . . . .	19
3.2. No linealidad en fibras ópticas . . . . .	21
3.3. Fibras ópticas como guías de onda . . . . .	23
3.4. Solitón óptico . . . . .	24
3.4.1. Efecto Kerr . . . . .	26
3.5. Frecuencias negativas . . . . .	28
3.6. Análogo del horizonte de eventos en fibras ópticas . . . . .	30
3.6.1. Marco comóvil . . . . .	30
3.7. Radiación de Hawking estimulada . . . . .	33
3.8. Temperatura efectiva . . . . .	35
<b>4. Estados cuánticos de la luz en variables cuánticas continuas</b>	<b>37</b>
4.1. Cuantización de campos electromagnéticos . . . . .	37
4.2. Estados unimodales . . . . .	39
4.2.1. Estados cuadratura . . . . .	39

4.2.2.	Estados de número (o de Fock)	40
4.2.3.	Estados coherentes (de Glauber)	41
4.2.4.	Estados comprimidos	42
4.2.5.	Estados térmicos	43
4.3.	Variables cuánticas continuas	45
4.4.	Estados gaussianos	46
4.4.1.	Momentos estadísticos de estados gaussianos	48
4.5.	Momentos estadísticos de estados cuánticos unimodales	50
4.5.1.	Entradas con modos en el vacío	50
4.5.2.	Entradas con estados coherentes	51
4.5.3.	Entradas con modos multifotónicos	52
4.5.4.	Sistema con estados térmicos	53
4.5.5.	Sistema con estados comprimidos unimodales	53
4.5.6.	Producto tensorial de estados gaussianos	54
<b>5.</b>	<b>Circuitos simplécticos</b>	<b>55</b>
5.1.	Moduladores de fase	55
5.2.	Divisor de haz	56
5.3.	Amplificador paramétrico	57
5.4.	Dispositivos ópticos como operaciones gaussianas	60
5.4.1.	Generador de modulador de fase	61
5.4.2.	Generador de divisor de haz	61
5.4.3.	Compresor de un sistema bipartita	62
5.5.	Modelo de agujeros negros ópticos 0D	64
5.5.1.	Circuito simpléctico de un agujero negro	64
5.5.2.	Circuito simpléctico de un agujero blanco	67
5.5.3.	Circuito simpléctico del par BH-WH	68
<b>6.</b>	<b>Cuantificación del entrelazamiento cuántico</b>	<b>69</b>
6.1.	Entrelazamiento cuántico	69
6.2.	Entropía de von Neumann	70
6.3.	Criterio de Peres-Horodecki	72
6.3.1.	Transposición parcial	72

6.3.2.	Criterio PPT y entrelazamiento . . . . .	73
6.3.3.	Negatividad logarítmica . . . . .	73
6.4.	Separabilidad y entrelazamiento de estados gaussianos . . . . .	74
6.4.1.	Negatividad logarítmica para estados gaussianos . . . . .	74
<b>7.</b>	<b>Modelos análogos con circuitos simplécticos</b>	<b>77</b>
7.1.	Circuitos análogos ópticos . . . . .	77
7.2.	Entrada: estado de vacío . . . . .	78
7.2.1.	Circuito BH con estado de vacío . . . . .	78
7.2.2.	Circuito WH con estado de vacío . . . . .	83
7.2.3.	Circuito BH-WH con estado de vacío . . . . .	83
7.3.	Entrada: estado coherente . . . . .	85
7.3.1.	Circuito BH (o WH) con estado coherente . . . . .	85
7.3.2.	Circuito BH-WH con estado coherente . . . . .	87
7.4.	Entrada: estado comprimido . . . . .	87
7.4.1.	Circuito BH (o WH) con estado comprimido . . . . .	87
7.4.2.	Circuito BH-WH con estado comprimido . . . . .	88
7.5.	Entrada: fluctuaciones térmicas isotrópicas . . . . .	88
<b>8.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>98</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La revolución científica y tecnológica del siglo XX fue, sin lugar a dudas, producto de la física moderna y de sus dos grandes pilares: la relatividad general y la mecánica cuántica. El prolífico avance en estas áreas trajo consigo el surgimiento de muchas ramas como la cosmología, la física de estado sólido, la óptica cuántica, la física de partículas, la materia condensada, la física nuclear y un largo etcétera, que nos han permitido entender más el universo y han impactado en el desarrollo de nuestra sociedad de maneras que hubieran sido inimaginables hace poco más de un siglo. Las diversas corrientes de pensamiento y la gran variedad de métodos y modelos que se han desarrollado en la física han logrado que los físicos permeen en otras ciencias, como la biología, la medicina, la química e incluso la economía.

La relatividad y la mecánica cuántica han logrado responder preguntas en física que se consideraron fundamentales por un largo tiempo. Sin embargo, la cantidad de preguntas aún más fundamentales que surgieron en consecuencia es mucho mayor, las cuales son cada vez más difíciles de responder, y conforman lo que los físicos de nuestra generación y futuras tienen como tarea responder. Un ejemplo de esta situación es el caso de los agujeros negros, los cuales surgen como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. Los agujeros negros son singularidades espacio-temporales de densidad infinita delimitados por horizontes de eventos a los que no se puede acceder sin ser engullidos, que devoran todo lo que esté a su paso y de los que ni siquiera la luz puede escapar. En un inicio, a esta solución no se le tomó con mucha seriedad, pues no se tenía evidencia de que tales objetos existieran en el universo, por lo que usualmente se consideraba como una solución puramente matemática, sin contenido físico importante.

En el siglo XVIII, el clérigo inglés John Michell y el físico francés Pierre Simon Laplace tenían en mente la posibilidad de que existieran estrellas tan densas y con campos gravitacionales tan intensos que no permitieran el escape de la luz que producían, de manera que los objetos más brillantes del universo serían invisibles. A estas les llamaron estrellas oscuras [1]. En 1974, el físico inglés Stephen Hawking publica un artículo [2] proponiendo un modelo semi-clásico en el que se sobrepone un campo cuántico sobre la curvatura espacio-temporal provocada por un agujero negro. De la teoría cuántica de campos se sabe que existe un campo cuántico asociado presente en todo el universo para toda partícula fundamental y que la propia partícula es una excitación de este campo, por lo que la presencia de estos sobre el agujero negro debe tener alguna consecuencia. La energía del vacío de los campos produce

pares de partículas virtuales de forma incesante, pero no pueden ser observadas dado que sus tiempos de vida son tan cortos que ningún aparato existente es capaz de detectarlas. Sin embargo, bajo ciertas condiciones podría ser posible observarlas, como en el efecto Casimir, efecto Schwinger, el efecto Unruh y, por supuesto, el efecto Hawking [3].

El campo cuántico sobre un agujero negro produce pares de partículas en el horizonte de eventos, las cuales son dispersadas por el intenso campo gravitacional, de forma que una cae hacia la singularidad y otra logra escapar hacia el infinito. Esto ocurre en toda la superficie del horizonte de eventos, por lo que se observaría radiación térmica emitida por el agujero negro, lo que se conoce como efecto Hawking. Esto trae como consecuencia la evaporación del agujero negro, que por este mecanismo perdería energía hasta que termine por evaporarse. Resulta curioso que el modelo actual de agujero negro no es totalmente negro como lo predijo la relatividad, y no son estrellas pero sí emiten radiación, como creían Michell y Laplace.

Por desgracia, actualmente no hay forma de comprobar el efecto Hawking. De hecho, hace poco más de 3 años a la fecha de entrega de este trabajo fue publicada la primer imagen real de un agujero negro supermasivo ubicado en el centro de la galaxia M87\*. La imagen del agujero es la sombra alrededor del disco de acretación de materia que alcanza temperaturas muy altas comparadas a la de nuestro sol [4].

El que se haya podido observar un agujero negro no es ningún aliento para detectar radiación de Hawking en un futuro cercano pues hay varios problemas. La temperatura de la radiación de Hawking depende inversamente de la masa del agujero negro, por lo que entre más masivo sea, menor será su temperatura. Hasta ahora solo se ha podido observar un agujero negro supermasivo, por lo que su radiación de Hawking debería ser muy pequeña, y aunque fuera detectable, la radiación del disco de acreción es tan inmensa que cualquier rastro de radiación de Hawking se vería mermada. Incluso si pudiéramos estar frente a un agujero negro del orden de la masa del Sol sin disco de acreción tampoco podríamos observarla. En este caso la temperatura de la radiación cósmica de fondo de 2.7 K sigue siendo enorme en comparación de la radiación de Hawking.

Podríamos pensar en observar agujeros negros de masas más pequeñas y, si el efecto Hawking es real, su temperatura de Hawking fuera más alta y podríamos observar radiación durante su evaporación, sin embargo, la existencia de estos agujeros es hipotética. Podemos ser optimistas y pensar que no todo está perdido y tal vez se encuentre una forma de sobrepasar los obstáculos para al fin observarla. Por el contrario, podemos tomar la postura de que simplemente no hay manera de que podamos observarla en el futuro previsible ni con la más avanzada tecnología. Sea de la forma que sea, no esperamos tener noticias relevantes sobre la radiación de Hawking astrofísica en un futuro cercano.

Siempre que escuchamos sobre horizonte de eventos lo primero que viene a nuestra mente son los agujeros negros astrofísicos. Sin embargo, no son los únicos sistemas en los que pueden aparecer. En 1981, el físico canadiense William Unruh publica un artículo [5] en el que propone un sistema que presenta horizontes de eventos análogos a los de un agujero y que podrían observarse en laboratorio y además podrían producir radiación de Hawking análoga. El sistema consiste de un fluido cuya velocidad no es uniforme. En alguna región la velocidad del fluido crece tanto que supera la velocidad del sonido en el propio fluido, formándose así un horizonte de eventos acústico o agujero mudo. En este horizonte se producen pares de fonones cuyo origen ves de las perturbaciones sónicas del fluido; uno de estos fonones cae al

horizonte de eventos y el otro sale expulsado como radiación. Matemáticamente, los sistemas del agujero negro astrofísico y el acústico son análogos. Con este sistema nace el primer modelo de gravedad análoga.

Posteriormente aparecieron nuevos sistemas análogos, como en condensados de Bose-Einstein, superfluidos, fibras ópticas, grafeno, entre otros [6]. En los sistemas de condensados ya se ha detectado radiación de Hawking análoga espontánea [7] y en los ópticos la versión estimulada [8, 9], lo cual ha hecho que poco a poco la rama de gravedad análoga tome más relevancia dentro de la comunidad científica, no solo por generalizar el caso astrofísico, sino también porque estamos a la expectativa de que los sistemas análogos den resultados que permitan entender mejor a los agujeros negros astrofísicos y el universo a escalas cosmológicas desde los laboratorios.

En este trabajo se estudia un análogo óptico que consiste de una fibra óptica en la que se envían pulsos de luz [8]. Un pulso intenso aumenta el índice de refracción local mediante un efecto electrodinámico no lineal llamado *efecto Kerr*. Este efecto produce horizontes de eventos de velocidad de grupo para pulsos de menor intensidad en la fibra y, junto con la dispersión subluminal y la producción de modos con norma negativa [10, 11], proporcionan los ingredientes necesarios para producir radiación de Hawking análoga. Este sistema tiene la peculiaridad de producir horizontes de eventos para el par agujero negro y blanco, y la radiación de Hawking análoga de cada caso es observable en el laboratorio. El método más natural para estudiar este sistema es mediante las ecuaciones de Maxwell macroscópicas en un medio no lineal que describen la propagación de los pulsos y cuantizar el campo electromagnético, aunque no hay una única forma de hacerlo. Este sistema es versátil, pues su descripción admite distintos modelos, por ejemplo, algunos se basan en el modelo de Hopfield de excitones [12–17] en el que se cuantizan los campos electromagnéticos partiendo del lagrangiano clásico de interacción luz-materia [18] y otros a partir del hamiltoniano de campo electromagnético [19], dispersión de los modos en medios 1D [20, 21], entre otros.

Hay muchas propiedades de interés en los sistemas análogos. En este trabajo estudiamos la termalidad y el entrelazamiento de los pares de Hawking usando un modelo mucho más simple que los mencionados anteriormente, basado en circuitos simplécticos [16, 17, 22]. Los pulsos de luz más usados en los laboratorios de óptica cuántica son estados unimodales como los estados de número, coherentes, comprimidos o térmicos, para los cuales sus distribuciones de probabilidad en el espacio fase, dadas por sus funciones de Wigner, son superficies gaussianas. El estado multimodal del sistema óptico se puede modelar como un conjunto de estados unimodales en el espacio fase en la teoría de variables cuánticas continuas QCV (*quantum continuous variables*) a los que llamamos *estados gaussianos*, cuya evolución está determinada por una matriz de dispersión formada por concatenaciones de divisores de haz, moduladores de fase y amplificadores paramétricos que emulen los procesos físicos que producen el efecto Hawking análogo. Esas operaciones gaussianas son transformaciones simplécticas en el espacio fase, las cuales se pueden representar mediante diagramas sencillos, a los que llamamos circuitos simplécticos, que nos muestran la propagación de los pulsos y la producción de radiación de Hawking de una forma más intuitiva.

En el capítulo 2 se hace una introducción a la gravedad análoga. Se explican las similitudes entre los diversos casos análogos y el agujero negro astrofísico desde el punto de vista matemático. Una vez establecida la analogía, abordaremos en el capítulo 3 la física detrás

del análogo óptico partiendo de las ecuaciones de Maxwell no lineales. Se estudia la relación de dispersión con una resonancia y de los modos que pueden propagarse en la fibra según las condiciones de empatamiento de fase, la producción de modos de frecuencia negativa, la producción de pares de Hawking en los horizontes de eventos análogos del agujero negro y blanco y la radiación de Hawking espontánea y estimulada.

En el capítulo 4 presentaremos de los estados cuánticos de la luz que pueden enviarse en la fibra como pulsos de prueba, que son los estados coherentes, comprimidos y térmicos. También se introducen los estados cuadratura, que son importantes para caracterizar el espacio fase en el cual definiremos el estado gaussiano del sistema, además se demuestra que los estados gaussianos se pueden parametrizar en términos de momentos estadísticos.

En el capítulo 5 se estudian las operaciones de modulaciones de fase, divisores de haz y amplificadores paramétricos sobre el espacio fase, donde resultan ser equivalentes a transformaciones simplécticas en la teoría de variables cuánticas continuas. Estas operaciones nos permiten dibujar los circuitos simplécticos que nos ayudarán a modelar los análogos de agujeros negros y blancos en el caso óptico.

El efecto Hawking es un proceso cuántico de formación de pares de partículas que puede confundirse con la producción de radiación clásica no lineal, resultante de la interacción de un pulso de bombeo intenso con pulsos de prueba. La diferencia fundamental reside en el entrelazamiento cuántico. Los pares de Hawking están entrelazados mientras que la radiación clásica no lo está. En el capítulo 6 se discute una forma de calcular entrelazamiento entre pares de partículas mediante una función llamada *negatividad logarítmica*. Esta cuantifica qué tan entrelazadas están las partículas.

En el capítulo 7 presentaremos los resultados de nuestro modelo en los circuitos de agujero negro, blanco y en el par agujero negro-blanco para distintos estados gaussianos de entrada. Obtendremos el entrelazamiento, el número de partículas producido y la temperatura de forma numérica. Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de este trabajo.

## Capítulo 2

# Radiación de Hawking en sistemas análogos

Con el desarrollo de la teoría de la relatividad general aparecieron nuevos fenómenos y sistemas físicos de los cuales no se tenían siquiera pistas de su existencia. Entre los sistemas que esta teoría describe, uno de los más estudiados y que causa un gran asombro son los agujeros negros: objetos astrofísicos que absorben todo lo que se encuentre a su paso y que ni la luz puede escapar de ellos a pesar de su gran velocidad.

Los agujeros negros se pueden clasificar según su origen: (i) los estelares, que surgen como un remanente de la muerte de una estrella masiva, (ii) los supermasivos, que se encuentran en los centros de las galaxias y (iii) los primordiales, que son hipotéticos y se cree que pudieron formarse en el universo temprano después del *Big Bang*. La diferencia entre estos es su masa: los primordiales, si es que existen, deberían tener masas más pequeñas que los agujeros negros estelares. Estos objetos se caracterizan por formar un horizonte de eventos, una vez que se le cruza no hay forma de salir de él.

La relatividad general dice que los agujeros negros son eternos, que serán los restos de un universo que alguna vez albergó todo lo que hoy en día conocemos y lo que aún está por descubrirse, pero puede que esto no sea del todo cierto debido a la radiación de Hawking. Hoy en día sabemos que tal emisión no es exclusiva de los sistemas gravitacionales, sino que puede producirse en distintos contextos físicos y se le conoce como radiación de Hawking análoga, de la cual se habla en este trabajo.

Por desgracia resulta muy poco probable detectar radiación de Hawking de sistemas gravitacionales (más adelante se explicará por qué), sin embargo, los sistemas análogos han demostrado que la radiación de Hawking análoga existe y puede ser observada en el laboratorio con la ventaja de tener bajo control los parámetros del sistema gracias a que la física de estos es bien conocida. Aún queda mucho por desarrollar en el área de los sistemas análogos; más allá de buscar radiación de Hawking, se busca entender y descubrir más física para comprender mejor el universo en el que vivimos.

Antes de adentrarnos en los modelos análogos, es importante entender cómo se produce la radiación de Hawking en un agujero negro gravitacional para así comprender cómo se desarrolla la analogía matemática y físicamente, además de que históricamente así fue como

inició el estudio de sistemas análogos.

## 2.1. Radiación de Hawking en astrofísica

De acuerdo a la relatividad general clásica, los agujeros negros pueden absorber materia y aumentar su tamaño, pero no emitir radiación, de ahí su nombre. Sin embargo, podemos agregar un ingrediente a este modelo de tal forma que esto no sea del todo verdad. Sabiendo que los campos cuánticos forman una piedra angular del universo y de su entendimiento, se puede hacer un modelo semiclásico en el que se agreguen estos sobre la curvatura del espacio-tiempo (generada por el agujero), la cual actuará como un fondo clásico. Este fue el marco sobre el que trabajó S. Hawking en sus artículos de 1974 [2] y 1975 [23] donde, con gran sorpresa, se concluyó que los agujeros negros pueden emitir partículas con un espectro térmico, lo cual provocaría su eventual evaporación, es decir, no serían eternos ni completamente negros.

La teoría cuántica de campos sobre espacios curvos es un marco que, como primera aproximación al acoplamiento de la cuántica y la gravedad, nos dice que se pueden emitir partículas del vacío. En el caso (1+1)D [3] Dicho acoplamiento viene dado por el funcional de la acción:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \sqrt{-g} d^2x, \quad (2.1)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico,  $g$  su determinante y  $\phi$  el campo cuántico escalar sin masa acoplado. Al aplicar el principio de mínima acción obtenemos las ecuaciones de movimiento del campo, las cuales se reducen a la ecuación de onda

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi). \quad (2.2)$$

En el caso particular de un agujero negro sin carga ni momento angular la métrica de Schwarzschild describe la geometría del espacio-tiempo (3+1)D, dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2 \theta), \quad (2.3)$$

en donde usamos unidades naturales,  $r_S = 2M$  es el radio de Schwarzschild que corresponde al horizonte de eventos que aparece en la figura 2.1 (del cual se hablará más adelante) y  $M$  es la masa del agujero negro. Para el caso (1+1)D basta con omitir el diferencial de ángulo sólido.

Resulta conveniente analizar el sistema en otras coordenadas, por lo que se introduce la coordenada tortuga  $r^*(r)$  que cumple con

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{r_S}{r}}, \quad (2.4)$$

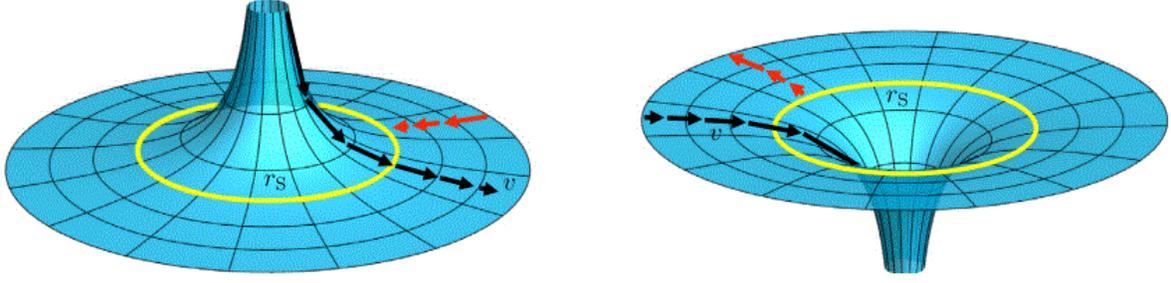


Figura 2.1: Diagrama de un agujero negro y un agujero blanco. Las curvas negras representan ondas co-propagantes y las rojas ondas contra-propagantes. La línea  $r_S$  en amarillo es el radio de Schwarzschild (imagen tomada de [24]).

e introduciendo las coordenadas tortugas del cono de luz

$$\tilde{u} \equiv t - r^*, \quad \tilde{v} \equiv t + r^*, \quad (2.5)$$

la ecuación (2.3) se reduce a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r(\tilde{u}, \tilde{v})}\right) d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (2.6)$$

La métrica tiene una singularidad removable en  $r_S$ , además se encuentra restringida al exterior del agujero ( $r > r_S$ ), lo cual puede arreglarse introduciendo las coordenadas de Kruskal-Szekeres [3] en el cono de luz definidas como

$$u = -2r_S \exp\left(-\frac{\tilde{u}}{2r_S}\right), \quad v = 2r_S \exp\left(\frac{\tilde{v}}{2r_S}\right). \quad (2.7)$$

Así la métrica adquiere la forma

$$ds^2 = \frac{r_S}{r(u, v)} \left(1 - \frac{r(u, v)}{r_S}\right) dudv. \quad (2.8)$$

El operador de campo admite las siguientes expansiones en las coordenadas antes mencionadas

$$\hat{\phi} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[ \exp(-i\Omega\tilde{u}) \hat{b}_\Omega^+ + \exp(i\Omega\tilde{u}) \hat{b}_\Omega^- \right] + c.c. \quad (2.9)$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[ \exp(-i\omega u) \hat{a}_\omega^+ + \exp(i\omega u) \hat{a}_\omega^- \right] + c.c. \quad (2.10)$$

Aquí sólo consideramos los primeros términos de la expansión correspondientes a los modos de frecuencia positiva.

En el horizonte de eventos se crearían pares virtuales de partículas, aquellas con frecuencias positivas saldrían del agujero, y aquellas con frecuencias negativas caerían a este. Cada expansión modal define un estado de vacío a través de los operadores de creación y aniquilación, en nuestro caso tenemos dos estados de vacío distintos

$$\hat{b}_{\Omega}^{-} |0\rangle_B = 0, \quad \hat{a}_{\omega}^{-} |0\rangle_K = 0, \quad (2.11)$$

donde  $|0\rangle_B$  es el vacío de Boulware para observadores lejanos al horizonte de eventos del agujero negro y  $|0\rangle_K$  es el vacío de Kruskal en el horizonte.

Los espacios curvos traen consigo una dificultad, cada expansión modal define un vacío distinto, es decir, la definición de estado de vacío y por tanto la definición de partícula son relativas al sistema de referencia. Entonces, para un observador lejano el vacío de Kruskal contiene partículas, lo cual no ocurre en el espacio de Minkowski (espacio-tiempo plano), en donde todos los observadores inerciales concuerdan en la existencia de un único vacío, el vacío de Minkowski  $|0\rangle_M$ .

Los operadores  $\hat{b}_{\Omega}^{\pm}$  y  $\hat{a}_{\omega}^{\pm}$  están relacionados por las transformaciones de Bogoliubov:

$$\hat{b}_{\Omega}^{-} = \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{-} - \beta_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{+}], \quad (2.12)$$

donde  $\alpha_{\Omega\omega}$  y  $\beta_{\Omega\omega}$  son los coeficientes de Bogoliubov, los cuales cumplen con la condición de normalización

$$\int_0^{\infty} d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega} \beta_{\Omega'\omega}^*) = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (2.13)$$

El número esperado de partículas para un observador lejano será distinto de cero en el vacío de Kruskal. Tomando en cuenta que el operador número de partículas  $b$  es  $\hat{N}_{\omega} \equiv \hat{b}_{\Omega}^{+} \hat{b}_{\Omega}^{-}$ , entonces el número esperado de partículas en este vacío resulta ser

$$\langle \hat{N}_{\Omega} \rangle = \int_0^{\infty} d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 = \frac{\delta(0)}{\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{\kappa}\right) - 1}, \quad (2.14)$$

siendo  $\kappa = (2r_S)^{-1}$  la gravedad superficial. El espectro de emisión de partículas depende del coeficiente  $\beta_{\Omega\omega}$ , por lo que si este es no nulo, entonces habrá emisión de partículas del agujero negro, es decir, las transformaciones de Bogoliubov poseen la información matemática sobre la producción de partículas en el vacío. El factor divergente  $\delta(0)$  es el volumen de todo el espacio, por lo que resulta más conveniente expresar este resultado como una densidad de partículas

$$n_{\Omega} = \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{\kappa}\right) - 1}. \quad (2.15)$$

Tenemos entonces que la distribución de partículas sin masa del vacío de Kruskal para un observador lejano obedece la distribución espectral térmica de Bose-Einstein con temperatura:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}, \quad (2.16)$$

que se conoce como temperatura de Hawking.

Anteriormente se mencionó que clásicamente los agujeros negros son eternos y no radían, a menos que se tenga un agujero negro de Kerr y se produzca superradiancia, lo cual es un fenómeno clásico que eventualmente hace que el agujero negro evolucione a un estado estático de Schwarzschild. Con este modelo semiclásico tenemos ahora dos posibilidades: un agujero negro eterno tiene sentido sólo si este se encuentra inmerso en un baño térmico, de esta forma emite y absorbe partículas y se mantiene en equilibrio; si se coloca un agujero negro en el vacío, terminará evaporándose al emitir radiación de Hawking. Para un agujero negro no eterno creado por colapso estelar, un observador lejano detectará únicamente partículas viniendo desde el agujero. Por desgracia, la radiación de Hawking astrofísica no se ha podido detectada debido que su temperatura típica  $T \sim 10^{-7}$  K está muy por debajo de la del fondo cósmico de microondas de  $T \sim 2.7$  K (CMB, *cosmic microwave background*) [25]. Además, esta radiación es homogénea e isotrópica, lo cual significa que es improbable que la radiación de Hawking pueda ser detectada.

## 2.2. Radiación de Hawking en sistemas análogos

En la actualidad resulta imposible detectar radiación de Hawking de agujeros negros. Sin embargo, W. Unruh en 1981 [26] abrió un mundo de posibilidades al demostrar que hay sistemas que pueden emitir radiación de forma similar a como lo hacen los agujeros negros y que además podría ser detectada en el laboratorio.

El artículo de Unruh dió inicio a lo que hoy se conoce como gravedad análoga, la cual consiste en el estudio de sistemas físicos que bajo ciertas condiciones tengan efectos similares a aquellos comúnmente estudiados (no necesariamente agujeros negros astrofísicos), por ejemplo sistemas acústicos, fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, entre otros, con la condición de que se produzcan horizontes tales que permitan producir partículas de forma similar a un agujero negro (radiación de Hawking análoga). En cada sistema se buscará la manera de hacer que el análisis sea matemáticamente equivalente al de campos cuánticos sobre fondos gravitacionales y así poder construir la analogía.

Hoy en día los análogos se dividen en dos categorías: clásicos y cuánticos. Veremos que la radiación detectada no es exactamente igual a la radiación de Hawking de agujeros negros puesto que su naturaleza corresponde a efectos distintos, sin embargo, los modelos de gravedad análoga han demostrado ser consistentes con los resultados experimentales.

### 2.2.1. Métrica acústica

El primer sistema análogo que se propuso fue el de ondas acústicas en un fluido en movimiento, donde se dejó en duda si la radiación de Hawking análoga podría ser producida en el laboratorio. Para la construcción del modelo partimos de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de un fluido, es decir, de la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.17)$$

y la ecuación de Euler

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \mathbf{f}, \quad (2.18)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\mathbf{v}$  su velocidad. Asumimos que el fluido tiene viscosidad cero, entonces las únicas fuerzas presentes son aquellas debidas a la presión del fluido, es decir, la densidad de fuerza es

$$\mathbf{f} = -\nabla p. \quad (2.19)$$

La ecuación de Euler puede reducirse a una versión de la ecuación de Bernoulli

$$-\partial_t \phi + h + \frac{1}{2} \nabla^2 \phi = 0, \quad (2.20)$$

esta reducción surge de asumir que el fluido es irrotacional, con lo que se introduce el potencial de velocidades  $\phi$ , tal que  $\mathbf{v} = -\nabla \phi$ , y también se asume que el fluido es barotrópico, esto significa que la densidad sólo es función de la velocidades, además de poder definir una entalpía específica de la forma

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')} \iff \nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.21)$$

Resulta natural preguntarnos cómo surge la analogía del acoplamiento de un fondo clásico y los campos cuánticos en un fluido. A diferencia del caso astrofísico, lo que ahora sucede es que tanto el fondo como el campo cuantizado vienen del mismo ente, es decir, del propio fluido. Asumiremos que el fondo está caracterizado por  $(\rho_0, p_0, \phi_0)$ , de tal forma que habrá fluctuaciones de las variables del fluido a varios órdenes de magnitud (nos quedaremos con fluctuaciones a primer orden para linearizar al sistema):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + O(\epsilon^2), \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2), \\ \phi &= \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usando la analogía con el sonido, se discute cómo podemos distinguir entre una ráfaga de viento (fluctuación del medio) y una onda acústica (fonón) [6], ya que en principio ambas

podrían modelarse según la ecuación (2.22); diferenciaremos entre estas mediante una convención: aquellas perturbaciones con frecuencias del orden de las fluctuaciones promedio del fluido son de frecuencias bajas y las consideraremos como ráfagas de viento, mientras que las perturbaciones de frecuencias más altas son consideradas como sonidos.

Linealizando la ecuación de continuidad llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) &= 0, \\ \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) &= 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

De la ecuación de Euler se obtiene el par de ecuaciones

$$\begin{aligned}-\partial_t \phi_0 + h + \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi_0) &= 0, \\ -\partial_t \phi_1 + h + \frac{1}{2} (\nabla^2 \phi_1) &= 0,\end{aligned}\tag{2.24}$$

y de la condición barotrópica tenemos que

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} p_1 = \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1).\tag{2.25}$$

Tras una manipulación de estas ecuaciones se llega a la expresión

$$-\partial_t \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \right) + \nabla \cdot \left( \rho_0 \nabla \phi_1 - \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho_0 \mathbf{v}_0 (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \right) = 0.\tag{2.26}$$

Esta es una ecuación de onda que describe la propagación del potencial escalar linearizado  $\phi_1$ , es decir, de la perturbación acústica. Podemos simplificar la expresión anterior al identificar a la velocidad del sonido local definida por

$$c^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho},\tag{2.27}$$

y construyendo la matriz simétrica  $4 \times 4$  identificada como la métrica acústica inversa

$$g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & \cdot & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{pmatrix}.\tag{2.28}$$

Entonces la ecuación (2.26) se puede escribir como

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi).\tag{2.29}$$

Podemos entonces encontrar la matriz acústica covariante

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} (c^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

y así podemos definir el elemento de línea acústico:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)]. \quad (2.31)$$

Resulta curioso notar que las fluctuaciones acústicas y el fondo clásico están gobernados por métricas distintas aunque en principio se trata del mismo medio. El fondo clásico está descrito por la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  y las fluctuaciones por la métrica acústica efectiva  $g_{\mu\nu}$ .

La métrica acústica tiene más restricciones (3 grados de libertad,  $\rho$ ,  $\varphi$  y  $c$  y la ecuación de continuidad los reduce a 2) que la métrica de un espacio curvo (3+1)D (6 grados de libertad), lo cual significa que la métrica acústica como mucho puede reproducir sólo un subconjunto de las métricas de interés en relatividad general.

Hasta ahora la única similitud encontrada entre un agujero negro y el modelo de Unruh [26] es que en ambos casos existe una métrica. Por lo mencionado anteriormente sabemos que existe una métrica acústica análoga a la métrica de Schwarzschild, lo cual garantiza la existencia de radiación de Hawking análoga, pero aún debemos definir las regiones acústicas. En este caso análogo la radiación significa la producción de fonones. Las métricas acústica y de Schwarzschild no son idénticas. Generalmente las dos métricas son iguales salvo un factor conforme, es decir, son conformalmente equivalentes pero aún así se formarán horizontes y se produce radiación de Hawking análoga.

El flujo puede formar una ergosfera, que es la región en donde la velocidad del fluido se vuelve supersónica ( $v > c$ ), similar al caso del agujero negro, en donde la ergosfera es la región donde el espacio se mueve a velocidades superlumínicas. Se define una superficie atrapada (interior o exterior si el flujo es entrante o saliente, respectivamente) bajo la condición de que la componente normal del flujo sobre ésta es mayor o igual a la velocidad local del sonido; a la región formada por las superficies atrapadas se le llama región atrapada. Se define el horizonte de eventos acústico como la frontera de la región atrapada en la que los fonones no pueden escapar. También se define el horizonte aparente acústico, el cual es una superficie en donde la componente normal de la velocidad del fluido es supersónica.

La analogía con el caso astrofísico surge de forma natural, ya que matemáticamente las ecuaciones que la describen son idénticas al caso gravitacional del agujero negro, lo cual implica que los fonones radiados deben emitirse también en un espectro térmico. Ya vimos que la temperatura de (2.16) depende de la gravedad superficial, lo cual implica que podemos obtener también una gravedad superficial asociada dependiente de la velocidad del fluido y del sonido dada por:

$$g_H = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial (c^2 - v^2)}{\partial n} \right|_H = c_H \left. \frac{\partial |c - v|}{\partial n} \right|_H. \quad (2.32)$$

Vemos entonces que la gravedad superficial análoga en un fluido equivale al gradiente del flujo de velocidades en el horizonte de eventos.

La temperatura de Hawking depende así de la velocidad del sonido  $c_H$  y la gravedad superficial  $g_H$  en el horizonte de eventos

$$kT_H = \frac{\hbar g_H}{2\pi c_H} = \frac{\hbar}{2} \left. \frac{\partial |c - v|}{\partial n} \right|_H. \quad (2.33)$$

### 2.2.2. Análogo acústico de la métrica de Schwarzschild

Como ejemplo, se puede ilustrar cómo puede reproducirse la geometría de Schwarzschild con la métrica acústica [6]. Para esto es necesario introducir una versión poco usual de la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = dt^2 - \left( dr \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}} dt \right)^2 + r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2 \theta). \quad (2.34)$$

Las coordenadas de PGL (Pailevé-Gullstrand-Lemaître) [3] y las de Schwarzschild están conectadas por

$$t_{PG} = t_S \pm \left[ 4M \operatorname{arctanh} \left( \sqrt{\frac{2MG}{R}} \right) - 2\sqrt{2GM}r \right]. \quad (2.35)$$

Podemos cambiar las variables de la métrica acústica de tal forma que obtengamos una métrica conforme a la métrica de PGL y así obtener la analogía. Tomando  $\rho$  y  $c$  constante,  $v = \sqrt{2GM/r}$ , además si consideramos simetría esférica y la ecuación de continuidad, se deduce que  $\rho \propto r^{-3/2}$ , con lo que la métrica acústica toma la forma

$$ds^2 \propto r^{-3/2} \left[ -dt^2 + \left( dr \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}} dt \right)^2 + r^2 (d\theta^2 + d\varphi^2 \sin^2 \theta) \right]. \quad (2.36)$$

Comparando las ecuaciones (2.34) y (2.36) vemos que las métricas son conformalmente equivalentes. No importa que no sean idénticas, es suficiente con que sean conformes para garantizar la existencia de radiación de Hawking análoga.

Los análogos de sistemas gravitacionales no están limitados a fluidos, existen también en sistemas ópticos y en condensados de Bose-Einstein (BECs por *Bose-Einstein condensates*) que se estudiarán en las siguientes secciones del capítulo.

### 2.2.3. Análogo acústico en condensados de Bose-Einstein

Un BEC es un estado cuántico de la materia en el que las partículas de un gas de bosones se aglomeran en el estado base cuando la temperatura se acerca al cero absoluto. La

condensación entonces no ocurre en el espacio de posiciones, sino en el de momentos. Es posible obtener un análogo de la radiación de Hawking en este sistema [27]. Este análogo posee dos grandes ventajas, la primera es que diferencia de un agujero negro gravitacional, la física del condensado está bien entendida gracias a la mecánica cuántica, por lo que se tiene un excelente control en el laboratorio, y segunda, no es necesario buscar una métrica conforme a un caso gravitacional ya que puede derivarse una para el BEC desde primeros principios [25]. Como en cualquier otro sistema análogo se deben manipular las condiciones del condensado como la temperatura ( $\sim 100$  nK) con la finalidad de producir radiación de Hawking. Sea  $\Psi$  el campo cuántico que caracteriza al condensado y es solución a la ecuación de Gross-Pitaevskii (también llamada ecuación de Schrödinger no lineal)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + k(a)\Psi^\dagger\Psi \right] \Psi, \quad (2.37)$$

con  $V$  un potencial externo y  $k(a) = 4\pi a\hbar^2/m$  la longitud de dispersión entre interacciones de los bosones en el gas. Podemos linealizar la ecuación al suponer que existe una fluctuación en el campo  $\varphi$  sobre el fondo  $\langle\Psi\rangle = \psi$  tal que  $\Psi = \psi + \varphi$ , lo que nos lleva al par de ecuaciones desacopladas, en la que se considera que no hay reacciones de retorno (que las fluctuaciones no afecten al fondo):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + kn_c \right] \psi + k(2\tilde{n}\psi + \tilde{m}\psi^*), \\ i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + 2kn_T \right] \varphi + km_T\varphi^\dagger \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde los parámetros son

$$\begin{aligned} n_c &\equiv |\psi|^2, & m_c &= \psi^2, \\ \tilde{n} &\equiv \langle\varphi^\dagger\varphi\rangle, & \tilde{m} &\equiv \langle\varphi\varphi\rangle, \\ n_T &= n_c + \tilde{n}, & m_T &= m_c + \tilde{m}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Considerando un campo de velocidades irrotacional ( $\mathbf{v} = \nabla\theta/m$ ) y tomando la función de onda del condensado  $\psi$  se puede separar la ecuación de Gross-Pitaevskii en una ecuación de continuidad y en la ecuación de Euler [6], esta última dada por

$$\rho \left[ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right] + \rho\nabla \left[ \frac{V(\mathbf{x})}{m} \right] + \nabla \left[ \frac{k\rho^2}{2m^2} \right] + \nabla \cdot \sigma^Q = 0, \quad (2.40)$$

con  $\rho = mn_c$  y  $\sigma^Q$  el tensor de esfuerzos cuántico. Esta ecuación puede escribirse en su forma de Hamilton-Jacobi

$$m\frac{\partial\theta}{\partial t} + \left[ \frac{(\nabla\theta)^2}{2m} + V(\mathbf{x}) + kn_c - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2\sqrt{n_c}}{\sqrt{n_c}} \right] = 0. \quad (2.41)$$

Ahora estamos interesados en las fluctuaciones del campo, en particular en su representación acústica cuántica

$$\hat{\phi} = e^{-i\theta/\hbar} \left( \frac{1}{2\sqrt{n_c}} \hat{n}_1 - i \frac{\sqrt{n_c}}{\hbar} \hat{\theta}_1 \right), \quad (2.42)$$

con  $\hat{n}_1$  y  $\hat{\theta}_1$  campos cuánticos reales los cuales son solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{n}_1 + \frac{1}{m} \nabla \cdot (n_1 \nabla \theta + n_c \nabla \hat{\theta}_1) &= 0, \\ \partial_t \hat{\theta}_1 + \nabla \theta \cdot \nabla \hat{\theta}_1 + kn_1 - \frac{\hbar^2}{2m} D_2 \hat{n}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las cuales resultan de la linealización de la ecuación de Gross-Pitaevskii alrededor de una solución clásica, es decir,  $n_c \rightarrow n_c + \hat{n}_1$  y  $\phi \rightarrow \phi + \hat{\phi}_1$

$$D_2 \hat{n}_1 \equiv -\frac{1}{2} n_c^{-3/2} [\nabla^2 (\sqrt{n_c})] \hat{n}_1 + \frac{1}{2\sqrt{n_c}} \nabla^2 \left( \frac{\hat{n}_1}{\sqrt{n_c}} \right). \quad (2.44)$$

Resulta que la ecuación de onda del campo  $\hat{\theta}_1$  en un espacio-tiempo curvo tiene la forma

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{\theta}_1 \right). \quad (2.45)$$

La métrica efectiva es

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{n_c}{m c_s(a, n_c)} \begin{pmatrix} -[C_s(a, n_c)^2 - v^2] & \vdots & -v_j \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

con  $c_s(a, n_c)^2 = kn_c/m$  la velocidad de los fonones en el medio.

Vemos entonces que existen múltiples sistemas que producen radiación análoga a la de Hawking, tanto clásicos como cuánticos y que al obtener la métrica podemos buscar algún caso astrofísico que mejor se acople con la finalidad de trasladar el conocimiento que ya tenemos en esta área al estudio de análogos.

## 2.2.4. Análogo óptico en fibras

Con lo visto anteriormente puede inferirse que, sin importar la naturaleza física del sistema análogo, sea un fluido, una fibra óptica, u otro, todo se reduce a encontrar una métrica general para después compararla con el caso gravitacional más apropiado. Encontrando la métrica podemos definir los análogos de horizontes, los agujeros negros, los agujeros blancos y radiación de Hawking.

Una fibra óptica es un material dieléctrico, y su analogía con agujeros negros, surge de la interacción entre distintos pulsos de luz propagándose en la fibra, por lo que la física del sistema está gobernada por las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} &= 0,\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde  $\mathbf{H} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  y  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$ , siendo  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$  los tensores de permeabilidad y permitividad del medio, respectivamente.

Tales ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en forma compacta [6] a través del tensor de campo electromagnético  $F_{\nu\beta}$  y del tensor  $Z^{\mu\alpha\nu\beta}$  como sigue:

$$\partial_\alpha (Z^{\mu\alpha\nu\beta} F_{\nu\beta}) = 0,\tag{2.48}$$

donde las entradas de estos tensores cumplen que

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \\ F_{0i} &= -F_{i0} = E_i, F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k, \\ Z^{0i0j} &= -Z^{0ij0} = Z^{i0j0} = -Z^{i00j} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ij}, \\ Z^{ijkl} &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon^{knl}\mu_{mn}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Además, se tiene que [6]

$$Z^{\mu\nu\alpha\beta} = K\sqrt{-g} [g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}],\tag{2.50}$$

siendo  $K$  una constante de proporcionalidad. La métrica del espacio-tiempo curvo puede expresarse en términos de los tensores de permeabilidad y permitividad como sigue

$$g_{ij} = \left[ \left( \frac{\boldsymbol{\mu}^{1/2} \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\mu}^{1/2}}{\det(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\epsilon})} \right)^{1/2} \right]_{ij}.\tag{2.51}$$

De este resultado se concluye que siempre puede encontrarse una métrica análoga para un dieléctrico en términos de  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

En el laboratorio pueden producirse agujeros negros ópticos y detectar la radiación de Hawking análoga. A diferencia del caso acústico, en donde los horizontes se forman debido al flujo del fluido, en el caso óptico el medio se encuentra fijo (fibra óptica), pero los pulsos de luz propagantes pueden cambiar el índice de refracción del material (llamado efecto Kerr), por lo que de forma efectiva hay un cambio en el material, pero en ambos casos pueden formarse los horizontes.

La búsqueda de los horizontes ópticos en el laboratorio ha rendido frutos [8] en el esquema de la óptica no lineal, en donde se envían pulsos ultracortos (llamados pulsos de bombeo)

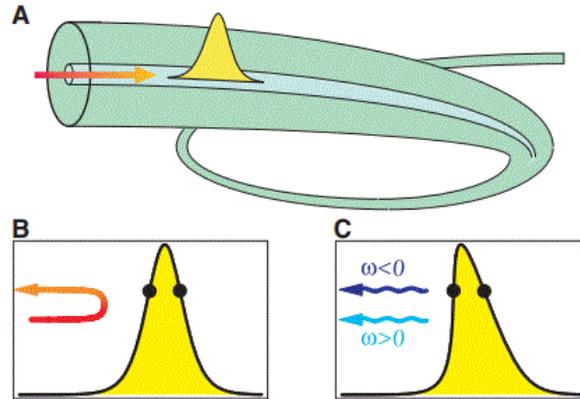


Figura 2.2: Horizontes en fibras ópticas. (a) Solitón en una fibra óptica y un pulso de prueba detrás tratando de alcanzarlo. (b) El pulso de prueba es frenado por el pulso de bombeo. Los puntos negros indican los horizontes de agujero negro y blanco. (c) Emisión de un par de fotones (imagen tomada de [8]).

en fibras ópticas que con su paso cambian las propiedades del material  $n_0$  debido al efecto Kerr. El cambio del índice de refracción es proporcional al pulso,  $\delta n \propto I(z, t)$ , es decir:

$$n = n_0 + \delta n. \quad (2.52)$$

El pulso viaja en la fibra a la velocidad de la luz, posteriormente se emite una onda de prueba continua detrás del solitón la cual tiene una velocidad de grupo ligeramente mayor y una frecuencia distinta a la del pulso de bombeo para así poder alcanzarlo e interactuar con él. El efecto Kerr provoca que el pulso de prueba se ralentice hasta alcanzar la velocidad de grupo del pulso de bombeo, a su vez la cola trasera del pulso de bombeo juega el papel de un horizonte de agujero blanco al no poder ser alcanzada, los modos entrantes en este caso se comprimen al chocar con el frente trasero y su frecuencia aumenta, por lo que sufre un corrimiento al azul [8]. El frente delantero del solitón genera un horizonte de agujero negro para luz de prueba más veloz que la de bombeo, y al contrario del frente trasero, la luz de prueba es más lenta que la del de bombeo y sufre un corrimiento al rojo (figura 2.2).

De forma cualitativa, tomemos la distancia de propagación  $z$  en términos del tiempo de propagación  $\zeta = z/u$ , con  $u$  la velocidad de propagación, e introduzcamos el tiempo de retardo  $\tau = t - z/u$ . Las fases de los modos evolucionan como

$$\varphi = \int (\omega d\tau + \omega' d\zeta), \quad (2.53)$$

donde  $\omega'$  es la frecuencia en el sistema comóvil al solitón.

Linealizando  $\delta n$  en  $\tau$  alrededor de  $\tau = 0$  se obtiene

$$1 - \frac{nu}{c} = \alpha' \tau. \quad (2.54)$$

El espectro de radiación tiene la temperatura [8]

$$k_B T = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad \alpha = -\frac{1}{\delta n} \frac{\partial \delta n}{\partial \tau}. \quad (2.55)$$

donde  $\alpha$  y  $\alpha'$ , en el sistema de laboratorio y en sistema comóvil, respectivamente, están conectados mediante una expresión que resulta de linealizar (2.54).

# Capítulo 3

## Sistema análogo en fibras ópticas

Como ya vimos en el capítulo anterior, es necesario que un sistema físico esté dotado con ciertas propiedades para que la analogía con un agujero negro o blanco (o ambos a la vez) pueda producirse. Un sistema análogo que ha podido ser estudiado en laboratorio y en el que se ha logrado detectar radiación de Hawking estimulada es formado por pulsos electromagnéticos propagándose en fibras ópticas no lineales [8]. Como es de suponerse, tanto la fibra como los pulsos propagantes deben cumplir con una serie de requisitos y propiedades para que dicho sistema genere un horizonte de eventos análogo. En este capítulo se presenta la física de propagación de ondas electromagnéticas (EM) en fibras ópticas visto como una guía de onda, las condiciones físicas que deben existir para producirse horizontes de eventos, la producción de pares de Hawking estimulados y la temperatura efectiva de la radiación de Hawking análoga.

### 3.1. Propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas

La propagación de pulsos en fibras ópticas, al ser un fenómeno electromagnético, está descrito por las ecuaciones de Maxwell, que en el sistema internacional (SI) son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde se ha asumido que no hay fuentes de densidad de carga y corriente libres como es el caso de una fibra óptica.

Las densidades de flujo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son las respuestas del medio material a la propagación de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , los cuales se relacionan mediante las relaciones constitutivas

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},\end{aligned}\tag{3.2}$$

siendo  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  la polarización eléctrica y magnética del material del medio, respectivamente (esta última será nula en una fibra óptica al no ser un material magnético).

Con esto es posible encontrar la ecuación de onda del campo eléctrico que se propaga por el medio

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} - \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{P}. \quad (3.3)$$

La velocidad de propagación de un pulso EM dependerá de la respuesta del medio en la que se propague, pues las componentes del espectro de un pulso viajarán a distintas velocidades dependiendo cuál sea su frecuencia. Esta es una diferencia con la velocidad propagación de luz en el vacío que siempre es constante (299,792,458 m/s) sin importar su frecuencia. La forma en que los electrones ligados a los átomos o moléculas del dieléctrico (como es el caso de una fibra óptica) interactúan con pulsos EM es lo que dicta su consecuente propagación y evolución. Este fenómeno se manifiesta en lo que llamamos dispersión, la cual está relacionada con las frecuencias de resonancia características a las que el dieléctrico absorbe energía por sus electrones ligados. La información de la dispersión cromática se encuentra en el índice de refracción del material en la forma de relación de Sellmeier [28]

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \lambda_j^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}, \quad (3.4)$$

donde  $\omega_j$  ( $\lambda_j$ ) es la frecuencia (longitud de onda) de resonancia  $j$ -ésima y  $B_j$  su intensidad.

Los pulsos de luz clásica están formados por paquetes de onda constituidos por un continuo de componentes espectrales que, como ya se mencionó, se propagan en el medio a distinta velocidad debido a la dispersión en el material. Cada una de estas componentes viaja a la que conocemos como velocidad de fase, la cual está dada por la expresión

$$v_p(\omega) = \frac{c}{n(\omega)}, \quad (3.5)$$

con  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Sin embargo, el paquete de onda viaja en la fibra como una unidad formada por sus componentes espectrales con una envolvente que determina su amplitud y se propaga a una velocidad distinta

$$v_g(\omega) = \frac{c}{n_g(\omega)}, \quad (3.6)$$

esta es la velocidad de grupo, y  $n_g$  es el índice de grupo dado por

$$n_g(\omega) = n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}. \quad (3.7)$$

La propagación de un pulso no solo depende del material del que esté compuesto la fibra, sino también de la estructura y diseño de dispersión de la misma, lo cual puede ser usada a

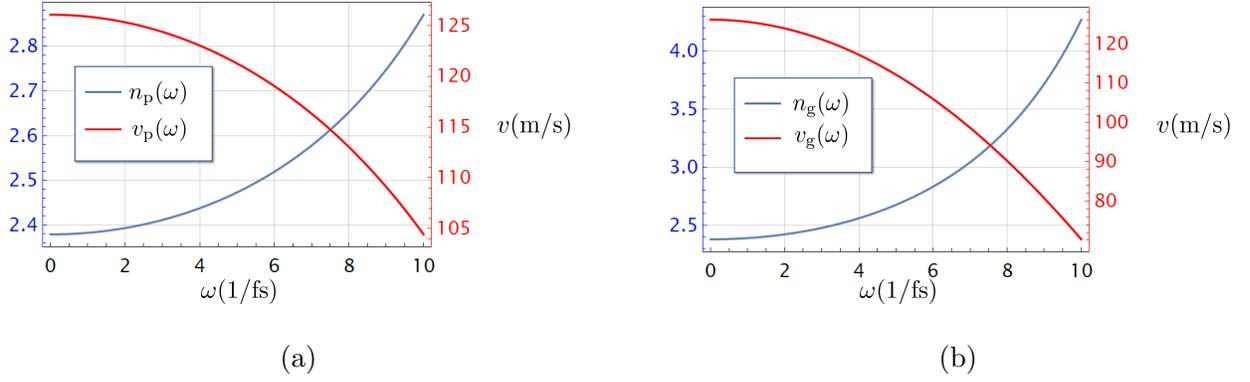


Figura 3.1: Las velocidades e índices de fase (a) y grupo (b) del diamante. Observamos la dependencia en frecuencia con la que se propaga el modo en el dieléctrico, exhibiendo dispersión subluminal.

nuestro favor para aumentar efectos no lineales y birrefringencia puesto que la propagación en el plano transversal del campo EM en la fibra depende de la frecuencia y polarización del pulso.

En el presente trabajo se hacen los análisis numéricos sobre una fibra de diamante, cuyo índice de refracción aproximado para el rango del infrarrojo al ultravioleta está dado por  $B_1 = 4.6580$ ,  $\omega_1 = 16.74 \text{ fs}^{-1}$  y  $\lambda_1 = 112.5 \text{ nm}$  [29]. Esto es debido a que el diamante está bien descrito con una sola frecuencia de resonancia, pero se puede generalizar en el estudio numérico de la propagación de pulsos [30].

Este material produce dispersión subluminal, donde aquellos modos con frecuencias altas viajan a velocidades menores que modos de bajas frecuencias, gracias a que el índice de refracción aumenta conforme  $\omega$  crece, como puede observarse en la figura 3.1.

## 3.2. No linealidad en fibras ópticas

El confinamiento de un pulso en la fibra aumenta los efectos no lineales de forma que la respuesta del medio toma un papel importante. La respuesta óptica no lineal intrínseca de la fibra está caracterizada por su perfil de susceptibilidad  $\chi_g(\mathbf{r}, t)$  (tomándola como una función real para despreocuparse de pérdidas) y por la polarización no lineal del medio  $\mathbf{P}$ .

La respuesta completa del medio se puede dividir en la parte lineal y no lineal como

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t), \quad (3.8)$$

donde los términos de polarización corresponden a los órdenes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L &= \mathbf{P}^{(1)}, \\ \mathbf{P}_{NL} &= \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

La polarización a segundo orden es nula cuando la estructura molecular del dieléctrico es simétrica, por lo que la no linealidad de orden más bajo es la de tercer orden ( $\mathbf{P}^{(3)}$ ), entonces las expresiones anteriores quedan como

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^t dt_3 \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3), \quad (3.11)$$

las cuales son válidas en la aproximación dipolar y en la respuesta local del medio, donde se incorpora la respuesta no instantánea del material a tiempos posteriores.

Supongamos el caso en que la polarización no lineal es despreciable ( $\mathbf{P}_{NL} = 0$ ), por lo que la respuesta del medio a un campo eléctrico es puramente lineal (este caso describe la propagación de pulsos de baja intensidad). Llevando a (3.3) al dominio de la frecuencia mediante una transformada de Fourier [28] tenemos

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.12)$$

donde  $\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$  es la constante dieléctrica del material y  $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$  y  $\tilde{\mathbf{E}}$  son las transformadas de Fourier de  $\tilde{\chi}^{(1)}(t)$  y  $\mathbf{E}$ , respectivamente.

En general  $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$  es compleja, por lo que sus partes real e imaginaria se relacionan con el índice de refracción y la absorción del material  $\epsilon = (n + i\alpha c/2\omega)^2$  respectivamente, que a su vez se relacionan con  $\chi^{(1)}$  como

$$n(\omega) = 1 + \text{Re} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)], \quad (3.13)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \text{Im} [\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)]. \quad (3.14)$$

Como  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  al no haber densidad libre de carga, entonces (3.12) se reduce a una ecuación de onda para el campo en el espacio de Fourier a

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (3.15)$$

Tenemos entonces que el número de onda del elemento espectral del pulso electromagnético con frecuencia  $\omega$  está dado por la relación de dispersión

$$k(\omega) = \beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (3.16)$$

Esta relación nos dice cómo el número de onda del pulso electromagnético depende de su frecuencia como respuesta del material en el que este se propaga (dispersión cromática).

La descripción anterior concierne a los pulsos de prueba en nuestro sistema análogo, cuya respuesta de polarización de la fibra es lineal al ser de baja intensidad. La respuesta no lineal surge al tomar pulsos de intensidad más alta, en nuestro caso serán los pulsos de bombeo los que inducen el efecto Kerr del cual hablaremos mas adelante.

Considerando la respuesta no lineal para pulsos más intensos, la ecuación (3.12) toma la forma

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \left( \mathbf{E} + \int_{-\infty}^t \chi_g(t-t') \mathbf{E}(t') dt' + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0. \quad (3.17)$$

El orden más bajo de no-linealidad en una fibra es el de tercer orden, que está dado por la respuesta del producto de 3 componentes del campo eléctrico y es generado por la excitación de los electrones de la fibra en escalas de tiempo comparable con el tamaño atómico dividido por la velocidad de la luz [8, 28].

Si se asume una respuesta inmediata por parte del material, las componentes de la polarización no lineal  $\chi^{(3)}$  son proporcionales al cubo del producto de las componentes del campo, es decir

$$P_m = \frac{2\epsilon_0}{3} \sum_{l=1} (\kappa_1 E_m E_m E_m^* + \kappa_2 E_l E_m E_l^* + \kappa_3 E_l E_l E_m^*), \quad (3.18)$$

donde las  $\kappa$ 's son constantes del material de la no linealidad de Kerr [8], las cuales pueden ser aproximadamente iguales en ciertos materiales ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa$ ) debido a su isotropía.

En las fibras los pulsos tienen dos estados de polarización posibles denotados  $\pm$ , lo cual hace que la ecuación (3.6) se pueda escribir como

$$P_{\pm} = 2\epsilon_0 \kappa \left( |E_{\pm}|^2 E_{\pm} + \frac{2}{3} |E_{\mp}|^2 E_{\pm} + \frac{1}{3} E_{\mp}^2 E_{\mp} \right), \quad (3.19)$$

A estos términos se les conoce como auto modulación de fase (*self-phase modulation*, SPM), modulación de fase cruzada (*cross phase-modulation*, XPM) y mezclado de cuatro ondas (*four-wave mixing*, FWM), respectivamente. El término SPM produce corrimientos de fase en el campo eléctrico como resultado de la no linealidad de un campo sobre sí mismo sin importar cuál sea su polarización, mientras que XPM lo hace debido a la interacción de campos ortogonales entre sí [31]. El término FWM también corresponde a una interacción entre los dos posibles estados de polarización del campo.

### 3.3. Fibras ópticas como guías de onda

Tratando a la fibra como una guía de onda homogénea en la cual los pulsos EM se encuentran confinados en el plano  $xy$  y se propagan en la dirección  $z$ , se puede ver al campo  $\tilde{\mathbf{E}}$  en términos de modos transversales

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{r}) = \tilde{E}_{\pm}(\omega, z) \mathbf{A}_{\pm}(x, y, z), \quad (3.20)$$

por lo que (3.17) queda como

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}_{\pm}) + (1 + \tilde{\chi}_g) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A}_{\pm} = \beta_{\pm}^2(\omega) \mathbf{A}_{\pm}, \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{A}_{\pm}$  son los modos de la fibra que, como podemos ver, son eigenfunciones normalizadas (3.21) y los  $\beta_{\pm}^2$  son los eigenvalores respectivos para cada estado de polarización  $\pm$  y frecuencia  $\omega$ . Como la no linealidad está delimitada en una región finita del espacio cercana al núcleo de la fibra, puede aproximarse la ecuación de onda (3.3) en el espacio real como

$$[\partial_z^2 + \beta_{\pm}^2(i\partial_t)] E_{\pm} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \partial_t^2 P. \quad (3.22)$$

Los eigenvalores de los modos transversales resultan ser

$$\beta_{\pm}(\omega) = \frac{n_{\pm}(\omega)\omega}{c}, \quad (3.23)$$

donde se ha definido  $\beta$  en (3.16). Al ser  $\mathbf{A}_{\pm}$  las eigenfunciones de la ecuación de onda de los modos dentro de la fibra, estos no sufren cambios en su propagación transversal. Los modos que cumplan con esto tendrán una dispersión e índice de refracción dependiente de su polarización, lo que se conoce como birrefringencia.

### 3.4. Solitón óptico

La no linealidad en una fibra óptica es un ingrediente esencial para el sistema análogo formado por el par agujero negro (*black hole*, BH) y agujero blanco (*white hole*, WH), ya que en ésta reside la posibilidad de crear sus horizontes de eventos mediante efecto Kerr. Un pulso de bombeo lo suficientemente intenso aumenta el índice de refracción local en el material de forma similar a como un agujero negro modifica el espacio-tiempo a su alrededor. El pulso intenso que formará los horizontes de eventos será un solitón, el cual tiene la propiedad de no cambiar de forma durante su propagación en la fibra.

El efecto de dispersión de pulsos ultracortos [32] (con duración del orden de ps) en fibras se puede observar al expandir  $\beta$  sobre su frecuencia central  $\omega_0$

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_{1,0}(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_{2,0}}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.24)$$

donde

$$\beta_{k,0} = \left. \frac{d^{(k)}\beta(\omega)}{d\omega^{(k)}} \right|_{\omega_0}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.25)$$

con

$$\beta_{1,0} = \left. \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)} = \frac{n_g(\omega_0)}{c} = \frac{1}{c} \left( n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \Big|_{\omega_0}, \quad (3.26)$$

y

$$\beta_{2,0} = \left. \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \omega \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega_0}. \quad (3.27)$$

Este último término es la dispersión de la velocidad de grupo y es culpable del ensanchamiento de un pulso al propagarse en la fibra. En la región donde la velocidad de grupo tiene una dispersión anómala, es decir  $\beta_2 < 0$ . En esta región espectral las componentes de baja frecuencia viajan a mayor velocidad que las componentes de alta frecuencia [28]; la dispersión trata de ensanchar al pulso y su efecto se cancela con la no linealidad de tercer orden (debida a SPM) en la propagación que trata de comprimirlo [8, 31], dando como resultado una solución estable a la ecuación (3.22) cuya envolvente no cambia en el tiempo.

Consideremos que la propagación de los pulsos ocurre en un solo estado de polarización, por lo que los términos de interacción entre estados polarizados en la no-linealidad son nulos (XPM y FWM), quedando entonces el término no lineal SPM [31]

$$P_{NL} = \frac{3\epsilon_0}{4} \chi^{(3)} |E|^2 E. \quad (3.28)$$

Se asume la aproximación de variación lenta en la envolvente del pulso, es decir, en el régimen donde se cumplan las condiciones

$$|\partial_z^2 \mathcal{E}| \ll |\beta_0 \partial_z \mathcal{E}|, \quad |\partial_t^2 \mathcal{E}| \ll |\omega_0 \partial_t \mathcal{E}|, \quad (3.29)$$

donde se ha expresado al campo eléctrico del pulso como

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E} \exp(i\beta_0 z - i\omega_0 t) \hat{z}, \quad (3.30)$$

con  $\omega_0$  la frecuencia central del pulso,  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ ,  $I = |\mathcal{E}|^2$  su intensidad y  $\mathcal{E}$  la envolvente.

Los términos de la ecuación de propagación del pulso (3.22) se pueden aproximar en términos de las derivadas de primer orden como

$$\begin{aligned} c^2 (\partial_z^2 + \beta(i\partial_t)) E &\approx \exp(i\beta_0 z - i\omega_0 t) 2c^2 \beta_0 (i\partial_z + \beta - \beta_0) \mathcal{E}, \\ \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t^2 P_{NL} &\approx -i \exp(i\beta_0 z - i\omega_0 t) \frac{3}{4} \omega_0 \chi^{(3)} \mathcal{E} (-i\omega_0 |\mathcal{E}|^2 + 3\partial_t |\mathcal{E}|^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aproximando  $\beta(\omega)$  por una serie de Taylor alrededor de  $\omega_0$  tenemos que

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta_{1,0}(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_{2,0}}{2}(\omega - \omega_0)^2, \quad (3.32)$$

lo cual nos lleva a la ecuación de propagación para la envolvente

$$i \left( \partial_t + \frac{1}{\beta_{1,0}} \partial_z \right) \mathcal{E} - \frac{\beta_{2,0}}{2\beta_{1,0}} \partial_t^2 \mathcal{E} + \frac{3}{8} \chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2 \beta_0 \beta_2} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.33)$$

Tomando el cambio de coordenadas del marco comóvil al pulso

$$\begin{aligned} z' &= z, & \partial_z &= \partial_{z'} - \beta_{1,0} \partial_\tau, \\ \tau &= t - \beta_{1,0} z, & \partial_t &= \partial_\tau. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) se puede reescribir como

$$i \partial_{z'} \mathcal{E} - \frac{1}{2} \beta_{2,0} \partial_\tau^2 \mathcal{E} + \frac{3}{8} \chi^{(3)} \frac{\omega_0^2}{c^2 \beta_0} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (3.35)$$

Esta es una ecuación de Schrödinger no lineal debido a la dependencia del módulo cuadrado de la envolvente. Como mencionamos antes, esta ecuación posee una solución en la región de dispersión anómala, formándose así la solución solitónica fundamental cuya característica es que no cambia su forma conforme el pulso se propaga, cuya función matemática es [31, 33]:

$$\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sech} \left( \frac{\tau}{T_0} \right) \exp \left( i \frac{|\beta_{2,0}| z'}{2T_0^2} \right), \quad \mathcal{E}_0 = \frac{8c^2 \beta_0 |\beta_{2,0}|}{3\chi^{(3)} \omega_0^2 T_0^2}. \quad (3.36)$$

donde  $T_0$  es el ancho del solitón.

### 3.4.1. Efecto Kerr

El efecto Kerr es cuando un pulso solitónico deforma el índice de refracción del material conforme éste se propaga. Este cambio local producirá horizontes de eventos análogos. Hay dos formas en las que el efecto Hawking análogo puede suceder. El caso espontáneo, donde el ruido incesante del vacío del campo EM produce un par de fotones en los horizontes de eventos análogos que satisfagan las condiciones de empatamiento de fase, y el caso estimulado, en el que se envía otra señal de luz que interactúe con el pulso de bombeo, lo que se conoce como amplificar (radiación de Hawking estimulada). Generalmente se usan pulsos de prueba de baja intensidad para evitar reacciones inversas (*backreaction*, cuando el pulso de prueba afecta al de bombeo) con el pulso de bombeo. Ambos pulsos poseen frecuencias distintas, denotadas por  $\omega_0$  y  $\omega_p$ , para el pulso de bombeo y de prueba, respectivamente. La interacción entre los pulsos ocurre gracias al efecto no lineal de SPM dado por (3.28)

$$P_{\text{NL}} = \frac{r}{2} \epsilon_0 \chi |E_0| E_p, \quad (3.37)$$

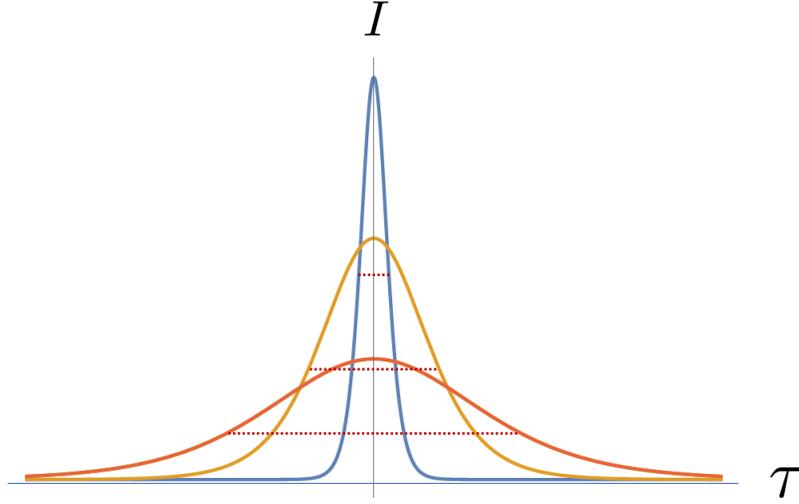


Figura 3.2: Solitones para distintas intensidades  $I$  y ancho  $T_0$  marcado con líneas discontinuas. Estos pulsos no cambian de forma conforme se propagan, es decir, son estables.

con  $r = 3$  para pulsos con misma polarización y  $r = 1$  si los pulsos son ortogonales. De esta expresión se deduce que la susceptibilidad no lineal inducida por el pulso de bombeo es

$$\chi_0 = \frac{r}{2} \chi^{(3)} |E_0|^2. \quad (3.38)$$

Podemos escribir la ecuación de propagación del pulso de prueba a partir de (3.22). La interacción en esta expresión está implícita en el cambio local de la susceptibilidad (3.38), es decir

$$c^2 [\partial_z^2 + \beta^2 i \partial_t] E_p = \partial_t^2 (\chi_0 E_p). \quad (3.39)$$

De las ecuaciones (3.16) y (3.22) y asumiendo que el campo de prueba tiene una dependencia temporal periódica tal que  $i\partial_t \rightarrow -\omega$  tenemos que

$$c^2 \partial_z^2 E_p - \partial_t^2 (n^2 + \chi_0) E_p = 0. \quad (3.40)$$

Vemos que hay un cambio efectivo local en el índice de refracción en el material debido al pulso de bombeo que afecta la propagación del pulso de prueba. A este cambio efectivo del índice de refracción se le conoce como efecto Kerr

$$n_{\text{eff}}^2(\omega, \tau) = n^2(\omega) + \chi_0(\tau), \quad (3.41)$$

Con esto podemos definir una nueva relación de dispersión tomando en cuenta el cambio efectivo y que  $\chi_0 \ll n^2(\omega)$ , entonces

$$\beta_{\text{eff}}(\omega, t) = n_{\text{eff}}(\omega, t) \frac{\omega}{c} \approx n(\omega, t) \frac{\omega}{c} + \frac{\chi_0}{2n(\omega, t)} = \beta(\omega, t) + \frac{\chi_0}{2n(\omega, t)}, \quad (3.42)$$

y se define

$$\delta n(\omega, t) \equiv \frac{\chi_0}{2n(\omega, t)}, \quad (3.43)$$

por lo que se obtiene

$$n_{\text{eff}}(\omega, t) = n + \delta n(\omega, t). \quad (3.44)$$

### 3.5. Frecuencias negativas

La formación de pares de Hawking en horizontes de eventos es un proceso que conserva la energía. En el caso astrofísico, una partícula logra escapar y otra cae hacia la singularidad. Aquellos que son emitidos como radiación tienen frecuencia positiva y aquellos que caen tienen misma frecuencia pero de signo contrario, provocando pérdida de masa del agujero hasta que eventualmente se evapore. Los pares de fotones formados quedan entrelazados. Sin embargo, aún si existiese un modo de detectar radiación de Hawking en un agujero negro astrofísico, no es posible detectar las partículas dentro del horizonte de eventos, para esto habría que acceder a esta región del espacio-tiempo, en la que no hay forma de salir ni de transmitir ningún tipo de información. En el caso análogo en fibras ópticas es posible detectar ambas partículas puesto que no existe singularidad ya que la analogía viene de que en ambos sistemas existe un horizonte de eventos.

La aparición de frecuencias negativas en modelos físicos surgen por condiciones matemáticas, donde su uso logra facilitar los cálculos implicados o para asignar alguna propiedad a ciertas funciones (como para hacer hermitiano un operador). Un ejemplo es al describir la propagación de una onda EM, donde lo usual es escoger el campo eléctrico descrito por una onda compleja, ya que este tipo de funciones, además de también ser soluciones a la ecuación de propagación, son más fáciles de manejar. Además la solución más general es, por principio de superposición, la suma de la onda compleja más su conjugada, ambas propagándose en la misma dirección, que para un solo modo del campo en se puede escribir como

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\omega}(\mathbf{x}, t) \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) + \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t), \quad (3.45)$$

donde el primer término corresponde al campo con frecuencias positivas y su conjugado con frecuencias negativas y  $\omega$  la frecuencia del modo en laboratorio. No importa cuál de los dos términos usemos para describir al campo, los resultados serán los mismos, pues al final será la parte real de la onda la que describa la física del sistema, después de todo, no hay distinción entre frecuencias positivas y negativas, o dicho de otra forma, hay simetría entre frecuencias positivas y negativas en el laboratorio.

Lo anterior es cierto cuando el campo describe ondas propagándose en el vacío y en medios lineales, sin embargo, se ha demostrado que la no linealidad en fibras ópticas produce

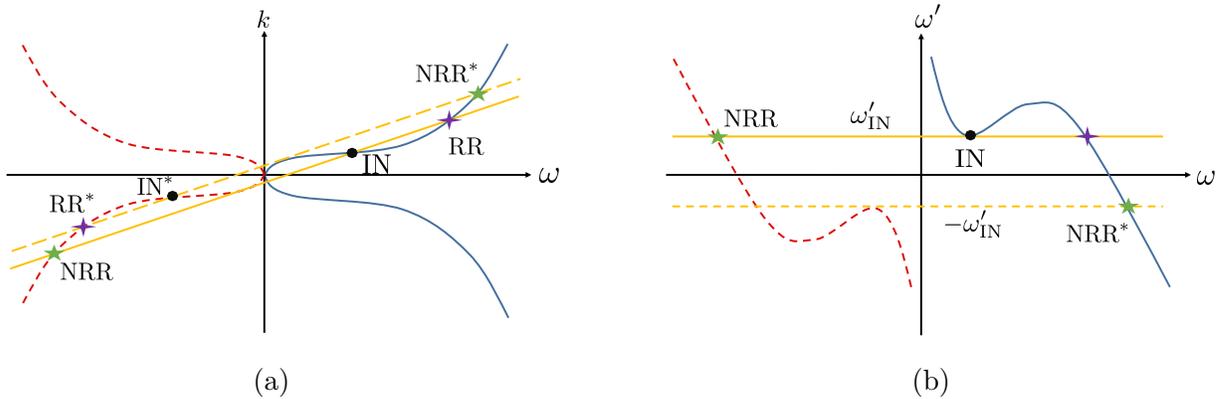


Figura 3.3: Condiciones de empatamiento de fase entre la dispersión del material y un solitón de entrada (IN) en laboratorio (a) y en el marco comóvil (b) donde se traduce a conservación de frecuencia. Es posible excitar un modo de frecuencia positiva (RR) y uno con frecuencia negativa (NRR). Las líneas sólidas son las ramas de frecuencia positiva y las punteadas las de frecuencias negativas.

excitaciones que no pueden ser explicados considerando únicamente la frecuencias positivas [10, 11].

La radiación resonante (RR), también llamada onda dispersiva o radiación Cherenkov es un efecto óptico clásico no lineal donde un solitón propagándose en una fibra óptica emite luz de baja intensidad por dispersión, y los modos que emita son soluciones a las condiciones de empatamiento de fase (*phase-matching conditions*) de la relación de dispersión del material con el momento del solitón.

La relación de empatamiento de fase [10] de conservación del momento es

$$\beta(\omega_{RR}) - \beta(\omega_0) = \frac{1}{u} (\omega_{RR} - \omega_0) + \beta_{NL}(\omega_0), \quad (3.46)$$

donde  $\beta_{NL}(\omega_0) = \omega_0 \chi_0 / c$  es la corrección por efecto Kerr,  $\omega_0$  es la frecuencia del solitón en laboratorio,  $u$  su velocidad y  $\omega_{RR}$  la frecuencia de radiación resonante RR.

En la figura 3.3 tenemos la forma de la relación de dispersión de vidrio de sílice fundido en el marco de laboratorio y en el marco comóvil al solitón. Las curvas representan las ramas de la relación de dispersión de la fibra para modos contrapropagantes. Vemos que el solitón (rectas amarillas) toca a la relación de dispersión (curvas azules y rojas) en tres puntos, dos de estas frecuencias son soluciones de empatamiento de fase en 3.3a y conservación de la energía comóvil en 3.3b, es decir, existen dos modos que pueden ser excitados. En el marco comóvil estos modos tienen frecuencia  $\omega_{IN}$  (por la conservación de la frecuencia), sin embargo existe una ruptura en la simetría de frecuencias en el marco de laboratorio. En la figura 3.3b podemos ver que el modo excitado  $\omega_{NRR}$  (de mayor frecuencia en el marco de laboratorio) pertenece a la rama de frecuencias negativas y su simétrico positivo  $\omega_{NRR^*}$  no es excitado, esto significa que no hay forma de explicar la excitación de  $\omega_{NRR}$  considerando únicamente frecuencias positivas, y de forma equivalente, si consideramos la rama de frecuencias positivas no hay forma de explicar como se excita al modo  $\omega_{RR}$  (de menor frecuencia en laboratorio).

Este efecto de la no linealidad ya ha sido observado en experimentos [10]. La no linealidad del medio nos obliga a considerar ambas ramas, esto implica que las frecuencias negativas no son solo una herramienta matemática para simplificar los cálculos, si no una realidad física y observable [11]. Además,  $N_{RR}$  se midió en el experimento de medición de la NHR en óptica [9].

## 3.6. Análogo del horizonte de eventos en fibras ópticas

Ahora se tienen los elementos necesarios para generar el análogo óptico al horizonte de eventos de un agujero negro, blanco o ambos a la vez, aunque no tenemos una singularidad espacio-temporal. Primero se envía un pulso intenso y detrás de este se envían pulsos de prueba de menor intensidad, distinta frecuencia y más rápidos para que ocurra la interacción. Mientras el pulso de prueba se acerca, su velocidad comienza a disminuir gracias al efecto Kerr, hasta el punto en que las velocidades de grupo de ambos pulsos se empaten, formándose un horizonte de eventos de agujero blanco WH (*white-hole horizon*) en el perfil trasero del solitón (con una velocidad mayor) y un horizonte de eventos de agujero negro BH (*black-hole horizon*) en el frente para pulsos de prueba más lentos que el bombeo [8, 20, 21]. Los pulsos que se acercan al WH se comprimen y su frecuencia disminuye, por lo que sufren un corrimiento Doppler hacia el azul, y al contrario, los pulsos que se acercan al BH sufren un corrimiento Doppler hacia el rojo.

Además del horizonte de velocidad de grupo también existe un horizonte de fase para las componentes espectrales del pulso de bombeo. Ahora trataremos la dispersión desde el sistema comóvil al solitón para así definir matemáticamente ambos horizontes.

### 3.6.1. Marco comóvil

El primer sistema análogo que fue desarrollado fue el modelo de ondas acústicas en un fluido, donde el horizonte de eventos se forma gracias al movimiento del fluido. En el caso óptico es el pulso de bombeo en movimiento el que forma los horizontes mientras el medio en el que se propaga se encuentra estático en el marco de laboratorio. Si nos montamos en el marco comóvil al solitón, ahora es el medio el que se mueve de forma contrapropagante de forma similar al caso acústico, por lo tanto no es en todos los casos necesario tener un medio en movimiento para formar horizontes, pero sí el movimiento de alguna propiedad efectiva.

En el marco de laboratorio podemos describir la propagación de los pulsos con las coordenadas  $(z, t)$ , pero el uso de las coordenadas comóviles al solitón nos proporciona una ventaja, pues en éste la frecuencia se conserva [8, 20].

Las coordenadas comóviles son  $(\tau, \zeta)$  y están relacionadas con  $(z, t)$  mediante las transformaciones

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{u}, & d\tau &= dt - \frac{dz}{u}, \\ \zeta &= \frac{z}{u}, & d\zeta &= \frac{dz}{u}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

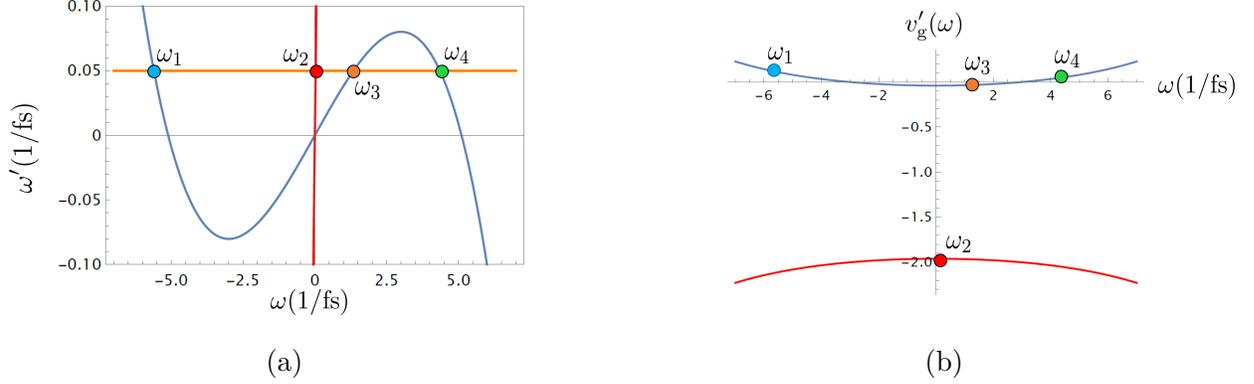


Figura 3.4: (a) Relación de dispersión del diamante en el marco comóvil. La curva azul representa los modos copropagantes y la recta roja los contrapropagantes. Las intersecciones con la recta naranja son las posibles soluciones. (b) velocidad de grupo de los modos en el marco comóvil.

La fase de cada modo es invariante ante transformaciones de coordenadas, por lo que puede escribirse en el marco de laboratorio y en el comóvil como

$$\phi = \int (k dz - \omega dt) = - \int (\omega' d\zeta + \omega d\tau), \quad (3.48)$$

con  $\omega$  y  $\omega'$  las frecuencia del modo en los marcos de laboratorio y comóvil, respectivamente. Se ha definido

$$\omega'(\omega) = \omega - uk = \omega[1 - u\beta(\omega)]. \quad (3.49)$$

Comparando la fase en ambos sistemas notamos que ahora la distancia de propagación  $\zeta$  toma el papel del tiempo y el tiempo de retardo  $\tau$  juega el papel de distancia.

La ecuación (3.49) es la relación de dispersión en el marco comóvil. Las ondas pueden viajar con velocidad propagante al pulso desde el marco de laboratorio (copropagantes al pulso) o en dirección contraria (contrapropagantes al pulso). En la figura 3.4a tenemos la dispersión del diamante en el marco comóvil. La curva azul representa la dispersión de los modos copropagantes en laboratorio y la recta roja a los modos contrapropagantes. Dada una frecuencia  $\omega'$  en el marco comóvil, existen a lo más cuatro pulsos como soluciones a las condiciones de empatamiento de fase. Tres de estas soluciones son pulsos copropagantes en el marco de laboratorio, denotados por  $\omega_1, \omega_3$  y  $\omega_4$ , y solo un contrapropagante etiquetado como  $\omega_2$ . En el marco de laboratorio esto se vería como en la figura 3.5a. Los modos  $\omega_2, \omega_3$  y  $\omega_4$  tienen frecuencia positiva y  $\omega_1$  frecuencia negativa.

Las direcciones de los pulsos en el marco comóvil cambian respecto a las direcciones en el marco de laboratorio. Ahora el solitón está en reposo y la fibra óptica viaja con velocidad  $-u$ . La velocidad de grupo en el marco comóvil está dada por [19]:

$$v'_g(\omega) = -\frac{d\omega'}{d\omega}. \quad (3.50)$$

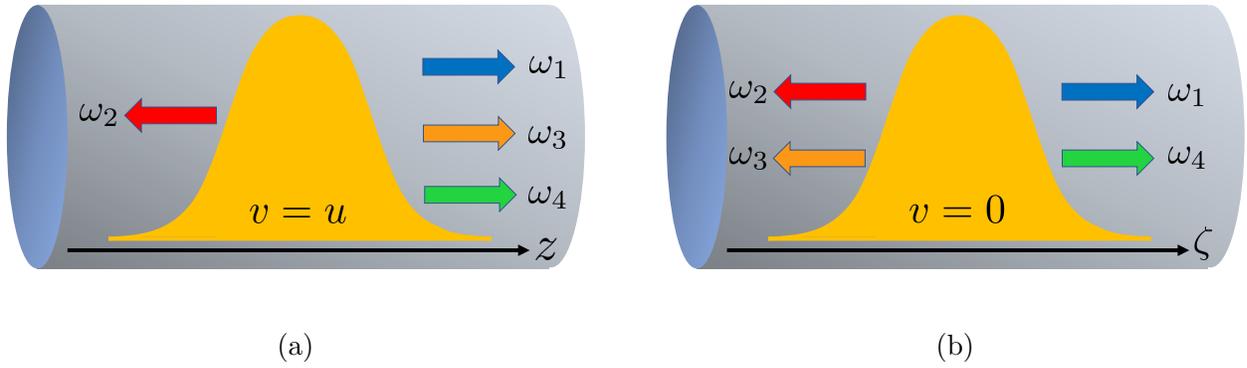


Figura 3.5: Dirección de los pulsos en el marco (a) de laboratorio y (b) comóvil. En el marco de laboratorio hay tres pulsos copropagantes al solitón y uno contrapropagante. (b) En el marco comóvil  $(\zeta, \tau)$ , el pulso de bombeo se mantiene en reposo, los modos  $\omega_1, \omega_4$  se mueven a la derecha (contrapropagantes al movimiento de la fibra) y los modos  $\omega_2$  y  $\omega_3$  se mueven a la izquierda (copropagantes con la fibra). La fibra en el marco comóvil tiene velocidad  $-u$  (con  $u$  la velocidad del solitón).

En la figura 3.4b muestra la velocidad de grupo comóvil para los pulsos de la figura 3.4a. Los pulsos  $\omega_1$  y  $\omega_4$  tienen velocidad de grupo positiva contrapropagantes al movimiento de la fibra, mientras que los pulsos  $\omega_2$  y  $\omega_3$  ahora son copropagantes. El cambio en la dirección de los pulsos de un marco a otro se representa en las figuras 3.5a y 3.5b. El pulso  $\omega_3$  cambia de dirección en el marco comóvil y los otros tres mantienen la misma dirección que en el marco de laboratorio.

En el marco comóvil la frecuencia se conserva (los 4 modos tienen misma frecuencia), mientras que en el marco de laboratorio todos poseen frecuencias distintas. Pueden existir solo dos soluciones si  $\omega$  supera el máximo local. Cuando esto ocurre los modos  $\omega_3$  y  $\omega_4$  se vuelven soluciones complejas y ya no describen ondas propagantes. Este caso no es de nuestro interés, pues estos modos juegan un papel esencial en el efecto Hawking análogo.

El sistema análogo debe comprender el efecto Kerr para producir los horizontes de eventos, por lo que la relación de dispersión completa en el marco comóvil se obtiene de las ecuaciones (3.44) y (3.49) y es

$$\omega'(\omega) = \omega (1 \pm u\beta_{\text{eff}}(\omega)) = \omega \left( 1 \pm \frac{n(\omega) + \delta(\omega)}{n_g(\omega_0)} \right), \quad (3.51)$$

con  $n_g(\omega_0)$  el índice de grupo del pulso de bombeo.

La figura 3.6 nos muestra la relación de dispersión del diamante sin efecto Kerr (curva azul) y con efecto Kerr (curva verde). De nuevo tenemos cuatro modos solución a las condiciones de empataamiento. Como ya mencionamos, el efecto Kerr produce dos horizontes de eventos llamados horizonte de velocidad de grupo y de fase

El horizonte de velocidad de grupo con frecuencia  $\omega_h$  y  $\omega_h'$  en el marco de laboratorio y comóvil, respectivamente, que cumple con las condiciones [20]:

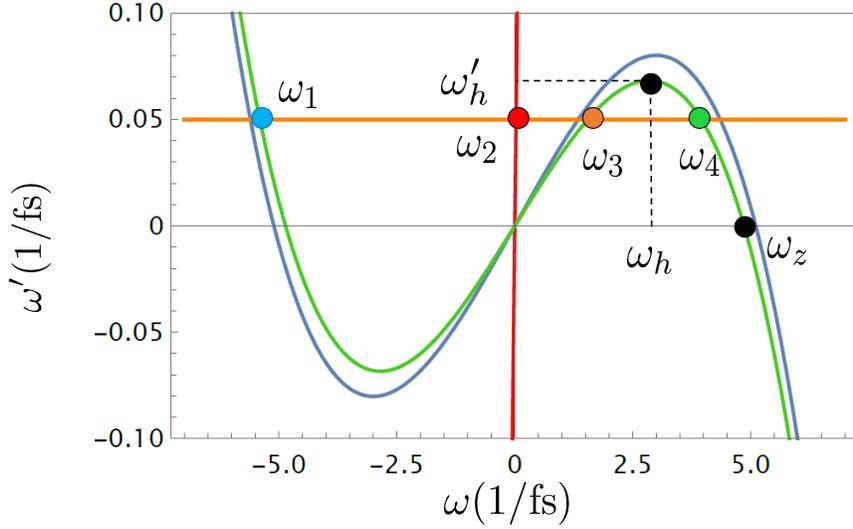


Figura 3.6: Relación de dispersión del diamante con  $\delta n = 0$  (curva azul) y con  $\delta n = 0,01$  (curva verde). El efecto Kerr produce horizontes de eventos de agujero negro y blanco con frecuencia  $\omega_h$  en el marco comóvil, y un horizonte de velocidad de fase con frecuencia  $\omega_z$ .

$$v_g'(\omega_h) = 0, \quad \omega'(\omega_h) = \omega_h', \quad \left. \frac{d\omega'}{d\omega} \right|_{\omega_h} = 0. \quad (3.52)$$

para el horizonte de velocidades de grupo, al cual llamaremos simplemente horizonte, es el punto en el que la velocidad de grupo de un pulso se frena por completo. Para el horizonte de fase con frecuencia  $\omega_z$  en laboratorio se tiene que

$$\omega'(\omega_z) = 0, \quad \left. \frac{d\omega'}{d\omega} \right|_{\omega_z} < 0. \quad (3.53)$$

los horizontes análogos de BH y WH tienen misma frecuencia en ambos sistemas de referencia, como se muestra en la figura 3.6. Pensemos en que el efecto Hawking de WH es el reverso temporal del BH y viceversa, por lo que pensar que ambos tengan frecuencias asociadas distintas implicaría romper la simetría temporal, por tanto ambos horizontes poseen la misma frecuencia ( $\omega_h$  y  $\omega_h'$ ) aunque en distintas posiciones espaciales.

### 3.7. Radiación de Hawking estimulada

Al considerar el efecto Kerr la relación de dispersión local alrededor del solitón cambia, puesto que aumenta el índice de refracción, esto se ve reflejado en la figura 3.6. Debemos restringir las frecuencias en el marco comóvil a  $\omega' < \omega_h'$ , ya que si las condiciones de empataamiento están por encima de  $\omega_h$  no habría horizonte de eventos y en consecuencia tampoco radiación de Hawking análoga.

El par de modos  $\omega_1$  y  $\omega_3$  se asocia al par de Hawking en BH, el modo  $\omega_1$  cae hacia el interior de agujero y el modo  $\omega_3$  es emitido como radiación de Hawking, como se muestra en la figura

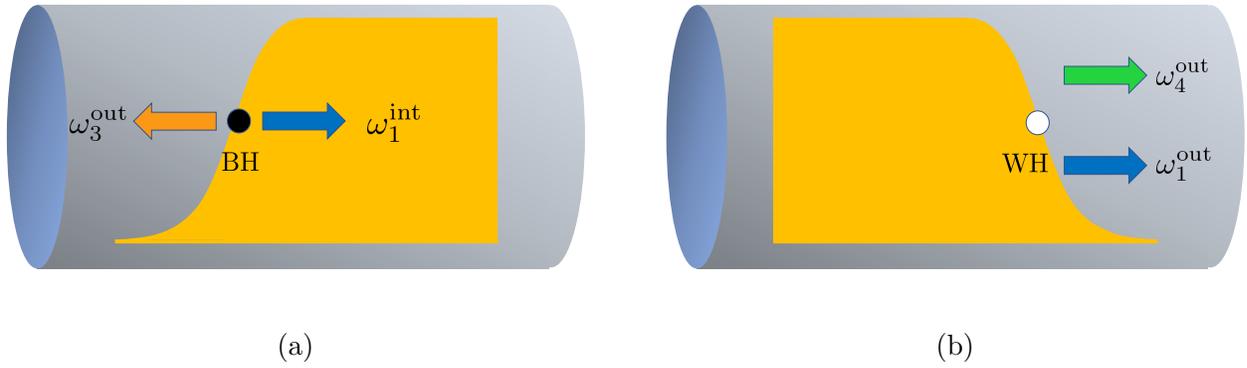


Figura 3.7: Horizontes de eventos de (a) BH y (b) WH en el marco comóvil. El par de Hawking de BH está identificado por los modos  $\omega_1^{\text{int}}$  y  $\omega_3^{\text{out}}$ , mientras que el par de WH son los modos  $\omega_1^{\text{out}}$  y  $\omega_4^{\text{out}}$ . Cada par se compone de un modo de frecuencia positiva y otro con frecuencia negativa. Los horizontes de eventos en el marco comóvil intercambian posición comparado con el marco de laboratorio debido al tiempo de retardo.

**3.7a.** Los modos  $\omega_1$  y  $\omega_4$  forman el par de Hawking del WH y ambos modos se propagan en la misma dirección como vemos en la figura 3.7b.

La radiación análoga se puede producir de forma espontánea o estimulada. La radiación de Hawking espontánea es el caso más parecido al caso astrofísico. En el horizonte de eventos hay creación de pares de partículas debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío, y aquellas que cumplan con las condiciones de empatamiento de fase podrán producir radiación de Hawking, sin embargo, la probabilidad de que esto ocurra es muy baja, la intensidad de la radiación es tan baja que no ha podido ser observada en óptica. La otra forma es estimulando a los horizontes con luz para que produzcan pares de partículas mediante un proceso de amplificación paramétrica (de esto se habla en el capítulo 5).

La estimulación consiste en enviar luz en alguno de los modos permitidos por las condiciones de empatamiento de fase. Estos pulsos, llamados pulsos de prueba, tienen velocidades superiores a la velocidad del solitón o pulso de bombeo, de manera que estos puedan alcanzarlo para que interactúen. Para estimular el BH se puede enviar un pulso de prueba ya sea en el modo de entrada  $\omega_1^{\text{in}}$  u  $\omega_4^{\text{in}}$  (figura 3.8) y mediante amplificación paramétrica se producirá el par de Hawking  $\omega_1^{\text{out}}$  y  $\omega_3^{\text{out}}$ . Para estimular la radiación de Hawking del WH hay dos formas: estimulando directamente el WH con el modo de entrada  $\omega_3^{\text{in}}$  o con el modo  $\omega_1^{\text{int}}$ . En este último caso es necesario estimular primero al BH para que este modo se produzca en la región interior entre los horizontes. Como vemos es posible que se produzcan ambos pares si estimulamos al BH, pero el inverso no ocurre, pues ningún modo que estimule primero al WH no podrá estimular al BH. El modo  $\omega_2^{\text{in}}$  no estimula ninguno de los horizontes, su dispersión es muy baja pues viaja en dirección contraria a los otros pulsos [20].

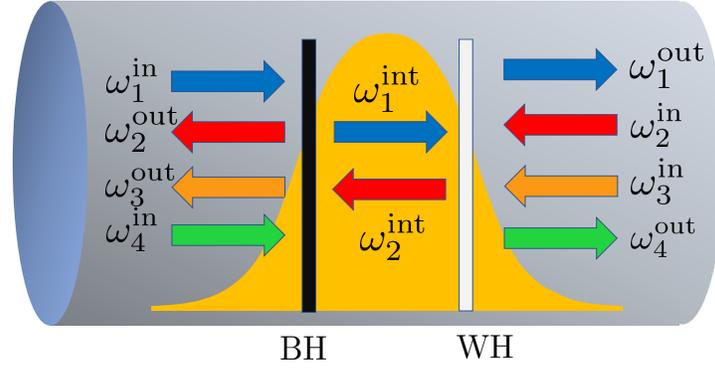


Figura 3.8: Propagación de los cuatro modos iniciales (in) antes de la interacción con el solitón, y después de la interacción (out). Solo los modos 1 y 2 pueden propagarse en el interior del solitón.

### 3.8. Temperatura efectiva

Para terminar con la analogía del sistema óptico debemos encontrar una temperatura efectiva de la radiación de Hawking y su espectro de emisión. Sabemos que el espectro de radiación de un agujero negro astrofísico es Planckiano, por lo que si asumimos que en el caso óptico esto también es así, entonces la temperatura efectiva es matemáticamente idéntica, entonces se propone en el marco comóvil [8]

$$T'_H = \frac{\hbar\alpha'}{2\pi k_B}, \quad \alpha' = -\frac{u}{c} \frac{\partial \delta n}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad (3.54)$$

y en el marco de laboratorio

$$T_H = \frac{\hbar\alpha}{2\pi k_B}, \quad \alpha = -\frac{1}{\delta n} \frac{\partial \delta n}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}. \quad (3.55)$$

Este último resultado no debe tomarse como correcto, pues hay que tener en cuenta que no hay manera de deshacerse de la dispersión en un material dieléctrico, por lo que un sistema más realista debería contemplar este fenómeno, provocando que el espectro no sea planckiano y por tanto la temperatura efectiva no es de la forma (3.54) [20, 34], si no que debe depender de la frecuencia de los modos emitidos. En este trabajo se presentan dos formas de obtener la temperatura efectiva, cuya teoría será desarrollada en los siguientes capítulos.



# Capítulo 4

## Estados cuánticos de la luz en variables cuánticas continuas

La luz puede ser estudiada desde dos perspectivas distintas, como un campo clásico y como uno cuántico, cuya naturaleza sale a la vista dependiendo del qué y cómo se lo preguntemos, es decir, su comportamiento dependerá del experimento y de la información que queramos extraer de ella. La radiación de Hawking es un efecto cuántico, por tanto, si deseamos conocer ciertos aspectos cuánticos de esta (por ejemplo, el entrelazamiento cuántico) es necesario tener una descripción apropiada de la luz que se propaga en la fibra óptica.

En este capítulo presentamos los estados cuánticos de luz unimodales utilizados en este trabajo: estados de número (o de Fock), cuadratura, coherentes, comprimidos y térmicos. En las últimas secciones hablaremos de variables cuánticas continuas (QCV por *quantum continuous variables*) y estados gaussianos, lo que nos ayudará a desarrollar herramientas que permitan describir la evolución de sistemas cuánticos multimodales en términos de unos pocos parámetros. En particular, estamos interesados en la parametrización en momentos estadísticos que nos permitan calcular entrelazamiento y termalidad de la radiación de Hawking análoga bajo el modelo de circuitos simplécticos.

### 4.1. Cuantización de campos electromagnéticos

Como vimos en el capítulo anterior, la descripción clásica de la luz a través de campos electromagnéticos (EMF por *electromagnetic field*) está descrita por las ecuaciones de Maxwell. De ellas podemos partir para dar una descripción cuántica, donde se propone que los campos clásicos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  son los valores esperados de sus observables cuánticos asociados  $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{D}}$  y  $\hat{\mathbf{H}}$  sobre un estado cuántico de luz descrito por un vector de estado  $|\psi\rangle$  o un operador de densidad  $\hat{\rho}$  [35] (por ejemplo  $\mathbf{E} = \langle\psi|\hat{\mathbf{E}}|\psi\rangle$ ).

Del electromagnetismo clásico sabemos que es posible obtener los campos eléctrico y magnético través del potencial vectorial  $\mathbf{A}$ , por lo que análogamente se pide que

$$\hat{\mathbf{E}} = -\partial_t \hat{\mathbf{A}}, \quad \hat{\mathbf{B}} = -\nabla \times \hat{\mathbf{A}}, \quad (4.1)$$

bajo la norma de Coulomb  $\nabla \cdot \epsilon \hat{\mathbf{A}} = 0$ .

Los EMF clásicos obedecen el principio de superposición, el cual tiene su raíz en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, por lo tanto esta propiedad debe estar contenida en su equivalente cuántico. El operador  $\hat{\mathbf{A}}$  ya contiene todas las configuraciones de EMF posibles (el principio de superposición no es válido para campos cuánticos), por lo que de forma implícita la superposición está contenida en este ente. El estado cuántico de la luz es el que finalmente determina cuál de todas las posibles configuraciones del campo será la que termine surgiendo, y es este resultado el que cumplirá con la superposición e interferencias clásicas.

Sea  $\{\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) | k \in \mathbb{Z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  una base vectorial completa de soluciones complejas a las ecuaciones de Maxwell bajo la norma de Coulomb las cuales llamamos modos, por lo que el operador de potencial vectorial se puede expandir como

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_k \left( \mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) \hat{a}_k + \mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}, t) \hat{a}_k^\dagger \right), \quad (4.2)$$

y los coeficientes  $\hat{a}_k$  y  $\hat{a}_k^\dagger$  son las amplitudes cuánticas del modo  $k$  del campo, de tal manera que el operador sea hermitiano.

Se define el producto escalar de los modos que mide el grado en que dos de estos difieren

$$(\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l) = \frac{1}{\hbar} \int (\mathbf{A}_k^* \mathbf{D}_l - \mathbf{A}_l \mathbf{D}_k^*) d^3x, \quad \mathbf{D} = -\epsilon_0 \epsilon \partial_t \mathbf{A}. \quad (4.3)$$

Este producto nos lleva a las reglas de ortogonalización modal

$$(\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l) = \delta_{kl}, \quad (\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l^*) = 0, \quad (4.4)$$

con esto obtenemos las amplitudes cuánticas del EMF en términos de los modos

$$\hat{a}_k = \left( \mathbf{A}_k, \hat{\mathbf{A}} \right), \quad \hat{a}_k^\dagger = - \left( \mathbf{A}_k^*, \hat{\mathbf{A}} \right), \quad (4.5)$$

lo cual nos lleva a deducir relaciones de conmutación que cumplen los operadores

$$\left[ \hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger \right] = \delta_{kl}, \quad \left[ \hat{a}_k, \hat{a}_l \right] = 0. \quad (4.6)$$

Estas son las relaciones de conmutación de Bose-Einstein, es decir, la luz es un campo bosónico y a su vez nos muestran que cada modo tiene asociados los operadores de aniquilación y creación  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$  en un espacio de Hilbert individual, lo cual queda claro del hecho de que operadores de distintos  $k$  conmuten. Cuanto menores son los grados de libertad que describan un EMF más fácil será observar sus propiedades cuánticas, razón por la que nos restringiremos a estados de la luz unimodales y a su descripción cuántica.

## 4.2. Estados unimodales

Las propiedades clásicas de la luz quedan establecidas en la función modal  $\mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t)$ , mientras que sus propiedades cuánticas se manifiestan a través de los operadores de creación y aniquilación y sus relaciones de conmutación (4.6), que en el caso de luz unimodal se reducen a

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbb{I}}. \quad (4.7)$$

A continuación se presentarán casos típicos de luz unimodal y se introducen los operadores cuadratura, esenciales en el desarrollo de este trabajo.

### 4.2.1. Estados cuadratura

Como en el capítulo anterior, supongamos luz polarizada en la dirección  $x$  y propagándose en la  $z$  en un dieléctrico, donde los campos eléctrico y magnético se pueden escribir como

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathcal{E} \exp(ikz)q(t), \quad \mathbf{B}(z, t) = \mathcal{B} \exp(ikz)p(t), \quad (4.8)$$

con  $\mathcal{E} = E_0 \mathbf{z}$ ,  $\mathcal{B} = \sqrt{\epsilon\mu} B_0 \mathbf{y}$  y la función  $q(t)$  es el factor dependiente del tiempo con dimensión de longitud [36] y  $p(t) = \dot{q}(t)$  su derivada temporal.

El hamiltoniano clásico de campo electromagnético en el sistema SI es

$$H = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) d^3x, \quad (4.9)$$

que con las expresiones (4.8) se tiene de forma equivalente que

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega q^2). \quad (4.10)$$

Vemos que el modo electromagnético se comporta como un oscilador armónico de masa unitaria en las variables  $q$  y  $p$  al que se conoce como oscilador electromagnético. Se cuantiza el hamiltoniano con sus observables asociados  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  a los que ahora llamaremos cuadraturas y se postula que cumplan con la relación de conmutación canónica de Heisenberg

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (4.11)$$

Ahora los operadores de campo electromagnético son entonces

$$\hat{\mathbf{E}}(z, t) = \mathcal{E} \exp(ikz)\hat{q}(t), \quad \hat{\mathbf{B}}(z, t) = \mathcal{B} \exp(ikz)\hat{p}(t). \quad (4.12)$$

Podemos escribir los operadores de creación y aniquilación en términos de los operadores cuadratura a partir del operador de potencial vectorial según las relaciones de conmutación (4.6), resultando en

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (4.13)$$

Llamamos a los eigenestados de  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  estados cuadratura

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \text{con } p, q \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

los cuales cumplen con las relaciones de ortogonalización

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \quad (4.15)$$

y con la resolución a la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|dq = \mathbb{I}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle\langle p|dp = \mathbb{I}. \quad (4.16)$$

Los operadores de cuadratura definen el espacio fase y se relacionan mediante las transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} |q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iqp)|p\rangle dp, \\ |p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iqp)|q\rangle dq. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Cabe recalcar que los estados cuadratura no son normalizables y por tanto no son físicamente reproducibles, sin embargo, las funciones de onda de estados cuánticos proyectados al espacio fase de cuadraturas sí tienen sentido físico, al ser normalizables e interpretarse como amplitudes de probabilidad

$$\langle q|\psi\rangle = \psi(q), \quad \langle p|\psi\rangle = \psi(p). \quad (4.18)$$

### 4.2.2. Estados de número (o de Fock)

El hamiltoniano de oscilador electromagnético (4.10) se puede reescribir en términos de los operadores de creación y aniquilación como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.19)$$

donde se ha introducido el operador de número de fotones definido por

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (4.20)$$

cuyos eigenestados son los estados de número  $|n\rangle$  tales que

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.21)$$

donde  $n$  es el número de fotones, es decir, el estado de número determina el número de fotones en un sistema.

Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los estados de Fock como

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \end{aligned} \quad (4.22)$$

vemos que el operador  $\hat{a}^\dagger$  aumenta el número de fotones a  $n+1$  mientras que  $\hat{a}$  lo disminuye en  $n-1$ , razón por lo que se les conoce como operadores de creación y aniquilación, respectivamente. El valor de  $n$  es un número natural, de lo contrario obtendríamos estados no normalizables y valores esperados negativos, siendo así físicamente inaceptables. El valor mínimo permitido resulta ser  $n=0$ , es decir, el estado de cero fotones y de menor energía al que llamamos vacío y denotamos por  $|0\rangle$ , el cual debe cumplir que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (4.23)$$

Es posible obtener cualquier estado de número de  $n$  fotones mediante aplicaciones sucesivas del operador de creación sobre el estado de cero fotones, es decir, se puede obtener mediante  $n$  excitaciones sucesivas del vacío

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle. \quad (4.24)$$

Los estados de número forman una base completa del espacio de Hilbert del oscilador electromagnético, por lo que se cumple la resolución a la identidad además de ser ortonormales

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| &= \mathbb{I}, \\ \langle n|m\rangle &= \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

### 4.2.3. Estados coherentes (de Glauber)

La coherencia de luz clásica se refiere a un EMF con campo eléctrico, magnético y fase bien definidos. En la literatura se define a los estados coherentes de tres formas [35, 37]:

#### 1. Eigenestado del operador de aniquilación:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (4.26)$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$  su eigenvalor y  $|\alpha|$  corresponde a la amplitud de onda clásica, por lo que en el espacio fase se puede descomponer en cuadraturas como  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + ip_0)$  y  $\arg(\alpha)$  a su fase.

## 2. Estado vacío desplazado:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad \hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}), \quad (4.27)$$

a  $\hat{D}(\alpha)$  se le llama operador de desplazamiento. El estado de vacío en el espacio fase se encuentra en las coordenadas  $(0, 0)$  y este operador unitario lo desplaza hacia  $(q_0, p_0)$  con fase  $\theta = \arg(\alpha)$ , resultando así un estado coherente como se observa en la figura 4.1a.

## 3. Estado de mínima incertidumbre:

$$\Delta q_\alpha \Delta p_\alpha = \frac{\hbar}{2}, \quad \forall \alpha. \quad (4.28)$$

Por esta razón a los estados coherentes se les conoce como los estados cuánticos más clásicos, puesto que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg y admiten también una descripción clásica basada en las ecuaciones de Maxwell.

Los estados coherentes pueden expandirse en la base de número

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle, \quad (4.29)$$

esta representación nos permite obtener la estadística de número de fotones que es poissoniana, es decir, la probabilidad de obtener  $n$  número de fotones de un estado coherente es

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp(-|\alpha|^2), \quad (4.30)$$

por lo tanto un haz de luz coherente no se emite siempre con el mismo número de fotones en todo instante, haciendo que la intensidad del haz no sea constante, aún así observamos una intensidad aproximadamente uniforme ya que los estados de número de fotones más probables son del mismo orden.

### 4.2.4. Estados comprimidos

Los estados coherentes no son los únicos con la propiedad de minimizar el principio de incertidumbre de Heisenberg. Se puede proponer que las dispersiones de las cuadraturas para un estado sean

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2} e^{-2\xi}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2} e^{2\xi}, \quad (4.31)$$

de tal forma que  $\Delta q \Delta p = \hbar/2$  para todo  $\xi$ . Vemos que este factor comprime la dispersión de  $q$ , mientras que la de  $p$  se ensancha o viceversa según sea su valor, tal como vemos en

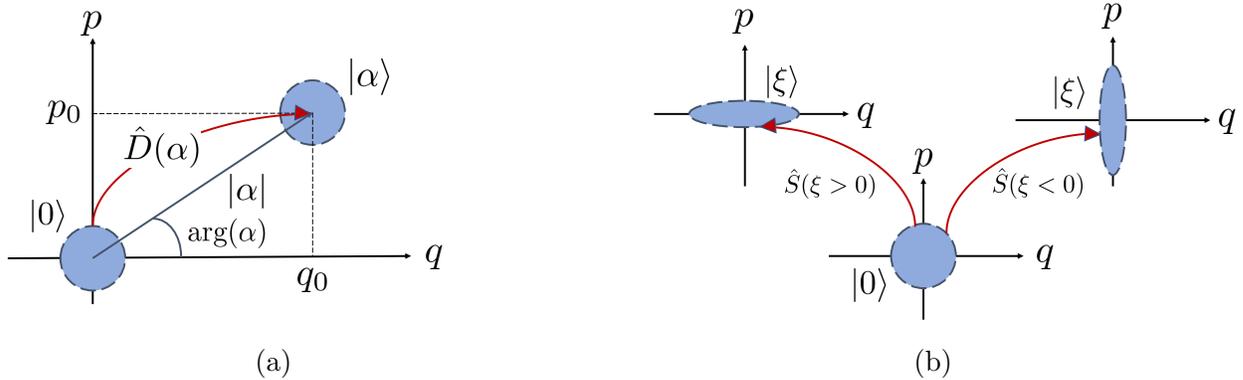


Figura 4.1: (a) Estado coherente en el espacio fase unimodal como consecuencia del desplazamiento del vacío. (b) Estado comprimido en el espacio fase. Dependiendo del valor de  $\xi$  se comprimirá una u otra cuadratura. Si  $\xi > 0$  se comprime la cuadratura  $q$  (se expande  $p$ ) y si  $\xi < 0$  se comprime  $p$  (se expande  $q$ ).

la figura 4.1b. Llamamos a este parámetro coeficiente de compresión. El estado que cumpla con esto lo podemos encontrar proponiendo una modificación a la función de onda del vacío en el espacio de cuadratura  $q$  y en el de  $p$  y encontrar así cuál es el operador que modifica al vacío [35, 37]. El estado buscado se conoce como estado comprimido

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle, \quad \hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{\xi}{2}(\hat{a} - \hat{a}^{\dagger 2})\right], \quad (4.32)$$

y a  $\hat{S}(\xi)$  se llama operador de compresión. Al proceso físico que produce luz de este tipo se le llama amplificación paramétrica, de la cual hablaremos con mayor detalle en el siguiente capítulo. A diferencia de un estado coherente, un estado comprimido solo admite una descripción cuántica, por lo que este es un caso de luz no clásica.

Un estado comprimido unimodal expandido en la base de estados de número es [38]:

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh\xi)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} |2n\rangle. \quad (4.33)$$

#### 4.2.5. Estados térmicos

Un estado térmico describe radiación en equilibrio termodinámico, ya sea por interacción con materia en su entorno o producidas por fuentes térmicas, siendo así la clase de luz más abundante en nuestro ambiente, por ejemplo, la radiación producida por el Sol, las lámparas incandescentes y la radiación cósmica de fondo, teniendo todos estos sistemas en común un espectro de radiación de cuerpo negro (un cuerpo opaco no reflejante). El estado cuántico más general que describe una fuente térmica es el de una mezcla estadística de estados de número en cualquier número de fotones posible

$$\hat{\rho} = \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l |l\rangle\langle l|, \quad (4.34)$$

con las poblaciones  $\rho_l$  bajo las constricciones de normalización y el promedio de la energía (ensemble canónico) del estado son

$$\sum_{l=0}^{\infty} \rho_l = 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l E_l = E. \quad (4.35)$$

El postulado generalizado de ensembles dice que la única distribución estadística de estados capaz de reproducir el equilibrio termodinámico con restricciones arbitrarias es la que maximiza la entropía de Gibbs

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i. \quad (4.36)$$

Con este podemos calcular las poblaciones de (4.34) dadas las condiciones (4.35), obteniendo que

$$\rho_l = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_l}{k_B T}\right), \quad Z = \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_l}{k_B T}\right), \quad (4.37)$$

donde a  $Z$  es la función de partición,  $T$  la temperatura y  $E_l$  la energía del  $l$ -ésimo estado. En general sobre una base arbitraria se puede escribir (4.37) como el operador de densidad con  $\beta = 1/(k_B T)$  de la forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \hat{H}), \quad Z = \text{Tr} \left[ \exp(-\beta \hat{H}) \right]. \quad (4.38)$$

Para el caso unimodal de radiación de cuerpo negro usamos el ensemble canónico, entonces el hamiltoniano es  $\hat{H} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}$  y el operador de densidad queda como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{\infty} e^{\beta \hbar \omega l} |l\rangle\langle l|, \quad Z = 1 - e^{\beta \hbar \omega}. \quad (4.39)$$

El número promedio de fotones para este estado en equilibrio termodinámico tiene una distribución planckiana, es decir

$$\bar{n} = -\frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-n \beta \hbar \omega} n = \frac{1}{1 - e^{\beta \hbar \omega}}. \quad (4.40)$$

### 4.3. Variables cuánticas continuas

Un sistema en variables cuánticas continuas QCV es aquel que cumple con las reglas de conmutación canónica (CCR, por *canonical commutation relations*) (4.11), en nuestro caso los modos (grados de libertad) dados por las cuadraturas  $\hat{q}_j$ 's y  $\hat{p}_j$ 's

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad i, j \in 1, \dots, n. \quad (4.41)$$

Para simplificar los cálculos y tener una notación más compacta se define el vector de operadores canónicos de los  $n$ -modos como

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_n), \quad (4.42)$$

Se puede reescribir (4.41) en una sola expresión para todos los modos mediante el producto exterior. Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , el producto exterior de ambos vectores es

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\top, \quad \text{con} \quad (\mathbf{u}\mathbf{v}^\top)_{ij} = u_i v_j, \quad i, j \in 1, \dots, n \quad (4.43)$$

con  $\mathbf{v}^\top$  el dual euclidiano (real) de  $\mathbf{v}$  (el caso más general es el dual sesquilineal  $\mathbf{v}^\dagger$  sobre  $\mathbb{C}^n$ ). Esto se cumple también sobre vectores de operadores hermitianos en un espacio de Hilbert general de dimensión  $2n$ , teniendo el conmutador y anticonmutador de la forma

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^\top] &= \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}^\top - (\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}^\top)^\top, \\ \{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}^\top\} &= \hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}^\top + (\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{v}}^\top)^\top. \end{aligned} \quad (4.44)$$

de esta forma se pueden reescribir las CCR (4.41) como

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^\top] = i\Omega, \quad (4.45)$$

donde  $\Omega$  es la forma simpléctica, también conocida como forma real, canónica y antisimétrica; es una matriz  $2n \times 2n$

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^n \Omega_1, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

con la propiedad de que  $\Omega^2 = -\mathbb{I}$ . El resultado (4.45) se puede formular equivalentemente en términos de operadores de creación y aniquilación, donde la relación con las cuadraturas está dada por (4.13). Se define el vector de operadores de creación y aniquilación como

$$\hat{\mathbf{a}} = \left( \hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \dots, \hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger \right)^\top, \quad (4.47)$$

y el cambio de base de operadores canónicos a operadores escalera viene dada por la transformación unitaria

$$\bar{U} = \bigoplus_{k=1}^n \bar{u}, \quad \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

tal que la relación CCR queda como

$$[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^\top] = \bigoplus_{k=1}^n \sigma_z, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

## 4.4. Estados gaussianos

Gran parte de los sistemas físicos de interés en óptica cuántica y que poseen un gran marco de aplicabilidad están descritos por hamiltonianos cuadráticos en QCV (por ejemplo el oscilador armónico). El hamiltoniano cuadrático más general en QCV [39] se puede escribir de la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}^\top H \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{r}, \quad (4.50)$$

con  $H$  es la matriz hamiltoniana del sistema que asumimos que es simétrica (no confundir la matriz hamiltoniana  $H$  con su operador hamiltoniano  $\hat{H}$ ),  $\hat{\mathbf{r}}$  el operador definido como en (4.42) y  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Físicamente se pide que los hamiltonianos sean cuadráticos ya que estos caracterizan sistemas armónicos hasta una interacción, es decir, son osciladores armónicos cuasi libres. Recurriendo a la diagonalización de  $\hat{H}$  podemos identificar los modos que están desacoplados entre sí (que no están entrelazados). La estabilidad del sistema representado por un estado gaussiano requiere que la matriz gaussiana sea positiva  $H > 0$  para garantizar que todos sus eigenvalores sean positivos, que físicamente significa que de los grados de libertad sean estables.

Se define un estado gaussiano como los estados termales y estados base de hamiltonianos cuadráticos con matriz definida positiva  $H > 0$  [39] e imitando la notación de física estadística, cualquier estado gaussiano mezclado en el espacio de Hilbert es de la forma

$$\rho_G = \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{\text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H})]}, \quad (4.51)$$

con  $\beta > 0$ , y un estado gaussiano puro se obtiene en el límite cuando  $\beta \rightarrow \infty$ . Estos estados tienen la propiedad de tener funciones de Wigner gaussianas [40] como en las mostradas en la figura 4.2.

El hamiltoniano (4.50) tiene una forma aún más general al desplazar  $\hat{\mathbf{r}} \rightarrow \hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}$ , esta operación no afecta el grado del hamiltoniano puesto que sigue siendo de segundo orden. Este cambio se logra mediante un operador de desplazamiento  $\hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}} = \exp(i\bar{\mathbf{r}}\Omega\hat{\mathbf{r}})$  que actúa sobre operadores canónicos como  $\hat{D}_{-\bar{\mathbf{r}}}\hat{\mathbf{r}}\hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}} = \hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}$ , entonces el hamiltoniano (4.50) se puede generalizar como

$$\hat{H}' = \hat{D}_{-\bar{\mathbf{r}}}\hat{\mathbf{r}}^\top H \hat{\mathbf{r}}\hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\top H (\hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}). \quad (4.52)$$

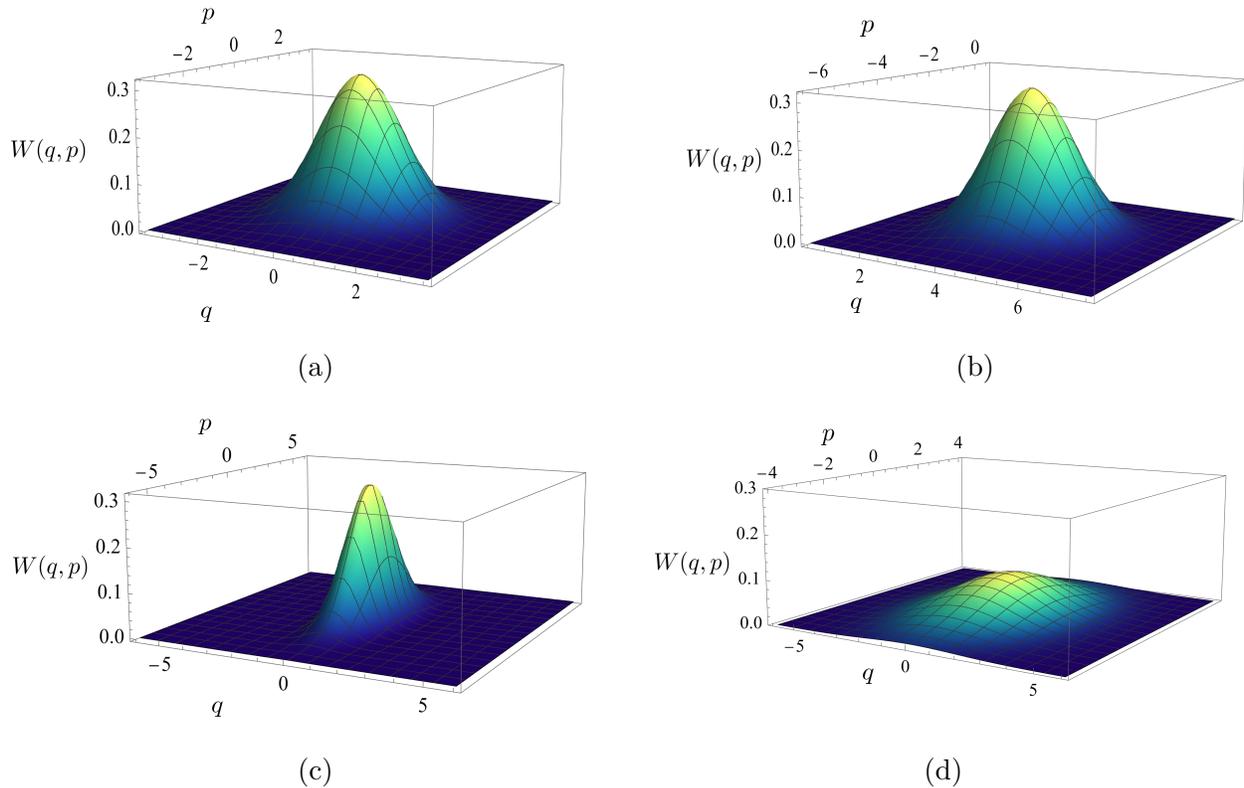


Figura 4.2: Funciones de Wigner de distintos estados cuánticos. (a) Estado de vacío, que es una función gaussiana con pico en el origen. (b) Estado coherente, en el que el centro de la gaussiana no se encuentra fuera del origen. (c) Estado comprimido, es más ancho en uno de los ejes que en otro. (d) Estado térmico. Todos estos estados tienen una función de Wigner en forma de gaussiana en el espacio fase.

La descomposición en modos normales del sistema requiere llevar a cabo un proceso de diagonalización, el cual se logra a través de transformaciones canónicas; estas forman el grupo  $S_{P_{2n,\mathbb{R}}}$  (grupo simpléctico) cuyos elementos preservan la forma simpléctica, es decir

$$S \in S_{P_{2n,\mathbb{R}}} \Leftrightarrow S\Omega S^T = \Omega. \quad (4.53)$$

El teorema de descomposición en modos normales [39] nos dice que para toda matriz definida positiva existe una transformación canónica que puede llevarla a una forma diagonal, en particular, teniendo que  $H > 0$  debe existir al menos una  $S_H = e^{\Omega H} \in S_{P_{2n,\mathbb{R}}}$  que lleve a la matriz hamiltoniana  $H$  a una forma diagonal como

$$S_H^T H S_H = \bigoplus_{l=1}^n \omega_l \mathbb{I}_2 = \text{diag}(\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_n), \quad \omega_l \in \mathbb{R}^+, \quad l = 1, \dots, n. \quad (4.54)$$

A los  $\omega_l$ 's se les conoce como eigenvalores simplécticos doblemente degenerados de  $H$ , los cuales corresponden a las frecuencias de oscilación de los modos normales. Las transformaciones  $S_H$  son resultado de la acción de hamiltonianos  $\hat{S}_H = \exp\left(\frac{i}{2} \hat{\mathbf{r}}^T H \hat{\mathbf{r}}\right)$  sobre operadores

canónicos como

$$\hat{S}_H^\dagger \hat{\mathbf{r}} \hat{S}_H = S_H \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.55)$$

La descomposición normal nos da un conjunto nuevo de grados de libertad independientes cuya dinámica es la de osciladores armónicos libres y sus hamiltonianos respectivos son

$$\hat{H}_{\omega_l} = \frac{\omega_l}{2} (\hat{x}_l^2 + \hat{p}_l^2) = \omega_l \left( \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \right), \quad (4.56)$$

así el hamiltoniano más general (4.52) se puede reescribir como

$$\hat{H} = \hat{D}_{-\bar{\mathbf{r}}} \hat{S} \left( \sum_{l=1}^n \hat{H}_{\omega_l} \right) \hat{S}^\dagger \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}, \quad \hat{D} = S_H \bar{\mathbf{r}}, \quad (4.57)$$

con  $\hat{S}$  la representación de una transformación simpléctica cualquiera  $S$  en el espacio de Hilbert. Lo anterior da como resultado la expresión del estado gaussiano más general en términos de los osciladores libres [39] como

$$\rho_G = \hat{D}_{-\bar{\mathbf{r}}} \hat{S} \left[ \frac{\bigotimes_{l=1}^n \exp(-\beta \hat{H}_{\omega_l})}{\prod_{l=1}^n \text{Tr} \left\{ \exp(-\beta \hat{H}_{\omega_l}) \right\}} \right] \hat{S}^\dagger \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}, \quad (4.58)$$

por lo que el estado en el espacio de Hilbert es el producto tensorial de estados de osciladores armónicos termales desacoplados una vez llevada a cabo la normalización simpléctica. Los osciladores con hamiltonianos (4.56) son positivos semi-definidos (son lineales y de la forma  $\hat{O}^\dagger \hat{O}$ ), por lo que sus eigenvalores están acotados por debajo, teniendo así cada uno un estado de vacío de cero partículas denotado por  $|0\rangle_l$ , de manera que el estado de vacío de todo el campo que comprende los  $n$ -modos es el producto tensorial  $|0\rangle = \bigotimes_{l=1}^n |0\rangle_l$ .

#### 4.4.1. Momentos estadísticos de estados gaussianos

La definición de un estado gaussiano (4.51) es una parametrización en términos de un hamiltoniano de segundo orden  $\hat{H}$ ,  $\beta$  y  $\hat{\mathbf{r}}$ , sin embargo no es la única parametrización admisible. Teniendo en cuenta la definición de estados gaussianos como aquellos que poseen una función de Wigner en forma de gaussiana nos permite parametrizar (4.58) mediante su primer y segundo momentos estadísticos. Partimos de la analogía con una distribución de probabilidad gaussiana que está caracterizada por la media  $\mu$  y su desviación estándar  $\sigma$ .

Los parámetros estadísticos de una distribución normal pueden estimarse a partir de una muestra de la variable aleatoria  $(x_1, \dots, x_k)$  de la distribución normal  $(\mu, \sigma)$  mediante las ecuaciones

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k x_l, \quad \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k (x_l - \mu)^2, \quad (4.59)$$

de manera que el primer y segundo momentos estadísticos de un estado gaussiano general son respectivamente [39, 40]:

$$\bar{\mathbf{r}} = \text{Tr} [\rho_G \hat{\mathbf{r}}], \quad \sigma = \text{Tr} [\{(\hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}), (\hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\top\} \rho_G]. \quad (4.60)$$

Al primer momento estadístico  $\bar{\mathbf{r}}$  le llamamos el promedio y al segundo momento  $\sigma$ , al que llamamos matriz de covarianza. Juntos contienen toda la información de  $S$  y los eigenvalores simplécticos de  $H$  a través de los eigenvalores simplécticos de  $\sigma$ , por lo que (4.60) es una parametrización del estado gaussiano al igual que (4.58), con la ventaja de ser matemáticamente y computacionalmente más fácil de tratar. Esto es sencillo de ver si escribimos el estado y sus momentos estadísticos en la base de Fock de los modos normales como sigue:

En los artículos sobre estados gaussianos aquí citados no se demuestra cómo es que la matriz hamiltoniana y la matriz de covarianza contienen la misma información sobre los grados de libertad del sistema. Para entenderlo se recurre a la referencia [39] donde se explica como sigue. El estado gaussiano (4.51) se reescribe en la base de número como:

$$\rho_G = \left[ \prod_{l=1}^n (1 - e^{\beta\omega_l}) \right] \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}^\dagger \hat{S}^\dagger \left[ \bigotimes_{l=1}^n \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{\beta\omega_l n} |n\rangle_l \langle n| \right) \right] \hat{S} \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}, \quad (4.61)$$

y la matriz de covarianza se reduce a

$$\sigma = S \left( \bigoplus_{l=1}^n \frac{1 + e^{-\hbar\omega_l}}{1 - e^{-\hbar\omega_l}} \mathbb{I}_2 \right) S^\top = S \left( \bigoplus_{l=1}^n \lambda_l \mathbb{I}_2 \right) S^\top, \quad (4.62)$$

donde se ha definido

$$\lambda_l \equiv \frac{1 + e^{-\hbar\omega_l}}{1 - e^{-\hbar\omega_l}} \geq 1, \quad (4.63)$$

siendo  $\lambda_l$  los eigenvalores simplécticos de la matriz de covarianza, que son también los valores absolutos de los eigenvalores de la matriz  $i\Omega\sigma$  que vienen a pares  $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_n$  [39, 40], cuyos valores mínimos son  $\omega_l = 1/2, \forall l$ , por incertidumbre en el estado base del modo- $l$ . Para que esto se cumpla se pide que la matriz de covarianza sea definida positiva ( $\sigma > 0$ ). Sobre esto y otras propiedades que esta matriz debe cumplir se discutirán en el capítulo 6.

De (4.61) vemos que el estado en la base de Fock depende de las eigenfrecuencias de los modos normales del sistema y de las transformaciones simplécticas; la misma información está contenida en (4.62) y (4.63). Notemos que cada eigenvalor simpléctico  $\lambda_l$  de  $\sigma$  depende únicamente de cada eigenfrecuencia  $\omega_l$  de  $\rho_G$ , por lo que ambos espectros simplécticos contienen la misma información sobre los grados de libertad y por lo tanto sobre física del sistema, mostrando así que el estudio de las propiedades de un estado gaussiano es totalmente equivalente a estudiar solo su primer y segundo momentos estadísticos. Esto será de vital importancia en el estudio de entrelazamiento entre pares de Hawking en el modelo de circuitos simplécticos de los que hablaremos en los siguientes dos capítulos.

## 4.5. Momentos estadísticos de estados cuánticos unimodales

En el capítulo 3 se habla del efecto Hawking análogo en fibras ópticas y de los modos del campo EM que participan en este proceso. Esto se puede modelar mediante transformaciones y circuitos simplécticos (que definiremos en el siguiente capítulo) usando una matriz de dispersión que caracterice las propiedades de interacción entre el pulso de bombeo y los pulsos de prueba que describen la radiación análoga, ya sea espontánea o estimulada. Antes de esto, es necesario proponer el estado cuántico inicial de los 4 modos con estados unimodales asintóticos y gaussianos, y parametrizarlo en términos de sus momentos estadísticos (4.60). Finalizaremos este capítulo calculando  $\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}}$  y  $\sigma^{\text{in}}$  de entrada para los casos que se estudian en este trabajo.

El estado cuántico inicial del sistema es el producto tensorial de los estados cuánticos iniciales de los cuatro modos

$$\hat{\rho}^{\text{in}} = \bigotimes_{i=1}^4 \hat{\rho}_i^{\text{in}}. \quad (4.64)$$

Las entradas del primer momento estadístico son

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_i^{\text{in}} &= \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\rho}^{\text{in}}], \\ \sigma_{ij}^{\text{in}} = \sigma_{ji}^{\text{in}} &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\{\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{r}}_j\} \hat{\rho}^{\text{in}}] - \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\rho}^{\text{in}}] \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_j \hat{\rho}^{\text{in}}], \end{aligned} \quad (4.65)$$

notemos que la matriz de covarianza es simétrica por el anticonmutador. Las entradas de esta matriz dependen solo de operadores canónicos a pares, por lo que sin pérdida de generalidad podemos calcularla para un sistema bipartita y después obtenerla para un el caso multipartita.

### 4.5.1. Entradas con modos en el vacío

Supongamos un sistema bipartita en el que en cada canal tenemos el estado de vacío como entrada. El operador de densidad de este sistema

$$\hat{\rho}^{\text{in}} = |0\rangle_1 |0\rangle_{21} \langle 0|_2 \langle 0| = |0, 0\rangle \langle 0, 0|. \quad (4.66)$$

Las trazas en los valores esperados las podemos hacer en la base de número compuesta de los modos  $\{|l_1, l_2\rangle | l_j \in \mathbb{Z}^+, j = 1, 2\}$ , la cual es completa. Al modo  $i$ -ésimo le corresponden los operadores canónicos  $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_i$  que están relacionados con los operadores de creación y aniquilación de la forma

$$\hat{q}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger), \quad \hat{p}_j = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j), \quad j = 1, 2. \quad (4.67)$$

Las entradas de  $\bar{\mathbf{r}}$  son

$$\bar{\mathbf{r}}_i^{\text{in}} = \text{Tr} [\hat{\rho}^{\text{in}} \hat{\mathbf{r}}_i] = \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} \langle l_1, l_2 | 0, 0 \rangle \langle 0, 0 | \hat{\mathbf{r}}_i | l_1, l_2 \rangle \propto \begin{cases} \langle 0, 0 | 1, 0 \rangle = 0, & \hat{\mathbf{r}}_i = \hat{q}_1, \hat{p}_1 \\ \langle 0, 0 | 0, 1 \rangle = 0, & \hat{\mathbf{r}}_i = \hat{q}_2, \hat{p}_2 \end{cases} \quad (4.68)$$

donde se ha usado (4.22). De este mismo resultado se sigue que el segundo término de la entrada en la matriz de covarianza (4.65) es cero  $\forall i$ . Basta con calcular el primer término con el anticonmutador para obtener las entradas de  $\sigma$ . De (4.68) tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{in}} &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\{\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{r}}_j\} \hat{\rho}^{\text{in}}] = \frac{1}{2} \sum_{l_1, l_2=0}^{\infty} \langle l_1, l_2 | 0, 0 \rangle \langle 0, 0 | (\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j + \hat{\mathbf{r}}_j \hat{\mathbf{r}}_i) | l_1, l_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\langle 0, 0 | \hat{\mathbf{r}}_i (\hat{\mathbf{r}}_j | 0, 0 \rangle) + \langle 0, 0 | \hat{\mathbf{r}}_j (\hat{\mathbf{r}}_i | 0, 0 \rangle) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (4.69)$$

De (4.68) y (4.69) podemos generalizar para un sistema compuesto de  $n$ -modos en el estado de vacío, por lo que sus momentos estadísticos serán

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \quad \sigma^{\text{in}} = \mathbb{I}_{2n}. \quad (4.70)$$

El primer momento estadístico es cero, este valor es el esperado recordando que el estado de vacío unimodal se encuentra en el punto (0,0) en el espacio fase, como se ve en las figuras 4.1a y 4.2a. Este sistema nos ayudará a estudiar la radiación de Hawking análoga espontánea.

### 4.5.2. Entradas con estados coherentes

Como en el caso anterior, consideremos un sistema bipartita, ahora las entradas en cada modo son los estados coherentes  $|\alpha_1\rangle$  y  $|\alpha_2\rangle$  para los canales 1 y 2, respectivamente. El operador de densidad del sistema es

$$\hat{\rho} = |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \langle \alpha_1| \langle \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_2\rangle \langle \alpha_1, \alpha_2|. \quad (4.71)$$

Para calcular las entradas de los momentos estadísticos es necesario tener en cuenta la transformaciones unitarias de desplazamiento sobre operadores canónicos

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{q} \hat{D}(\alpha) = \hat{q} + q_\alpha, \quad \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + p_\alpha, \quad (4.72)$$

con  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\alpha + ip_\alpha)$ , además de los elementos matriciales en la base de número del operador de desplazamiento son [37]

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{D}(\alpha) | m \rangle &= \sqrt{\frac{m!}{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha)^{n-m} L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2), \quad n \geq m, \\ L_n^{(k)}(z) &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+k}{m+k} \frac{z^m}{m!}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

con  $L_n^{(k)}(z)$  lo polinomios asociados de Laguerre.

Calculemos las entradas de  $\bar{\mathbf{r}}$  para (4.71) trazando sobre la base de número compuesta

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{r}}_i^{\text{in}} &= \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\rho}^{\text{in}}] = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \langle n_1, n_2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{\mathbf{r}}_i | n_1, n_2 \rangle \\
&= \sum_{n_1, n_2, l_1, l_2=0}^{\infty} \langle n_1, n_2 | l_1, l_2 \rangle \frac{(\alpha_1)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\alpha_2)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}} \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{\mathbf{r}}_i | n_1, n_2 \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{\mathbf{r}}_i \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}} \frac{(\alpha_2)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}} | n_1, n_2 \rangle \\
&= \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{\mathbf{r}}_i | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_j | \alpha_j \rangle \langle \alpha_i | \hat{\mathbf{r}}_i | \alpha_i \rangle \\
&= \langle 0_j | \hat{D}^\dagger(\alpha_i) \hat{\mathbf{r}}_i \hat{D}(\alpha_i) | 0_i \rangle = \langle 0_i | \hat{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_{\alpha_i} | 0_i \rangle = \mathbf{r}_{\alpha_i}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Ahora las entradas de la matriz de covarianza se obtienen con cálculos similares a los anteriores

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \text{Tr} [\hat{\rho}^{\text{in}} \hat{\mathbf{r}}_i \hat{\mathbf{r}}_j] - \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\rho}^{\text{in}}] \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_j \hat{\rho}^{\text{in}}] \\
&= \langle \alpha_i | \hat{\mathbf{r}}_i | \alpha_i \rangle \langle \alpha_j | \hat{\mathbf{r}}_j | \alpha_j \rangle - \mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j} \\
&= \mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j} - \mathbf{r}_{\alpha_i} \mathbf{r}_{\alpha_j} = 0, \quad \text{para } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, 2n.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

y para  $i = j$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii} &= \langle \alpha_j | \alpha_j \rangle \langle \alpha_i | \hat{\mathbf{r}}_i^2 | \alpha_i \rangle - (\text{Tr} [\hat{\mathbf{r}}_i \hat{\rho}^{\text{in}}])^2 = \langle \alpha_i | \hat{\mathbf{r}}_i^2 | \alpha_i \rangle - (\langle \alpha_i | \hat{\mathbf{r}}_i | \alpha_i \rangle)^2 \\
&= (\Delta \hat{\mathbf{r}}_i)^2 = \frac{1}{2}, \quad \forall i.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

La matriz de covarianza es equivalente identidad. Generalizando a un sistema de  $n$ -modos, cada uno con un estado coherente de entrada  $|\alpha_i\rangle$  con  $i = 1, \dots, n$ , sus momentos estadísticos son

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = (q_{\alpha_1}, p_{\alpha_1}, q_{\alpha_2}, p_{\alpha_2}, \dots, q_{\alpha_n}, p_{\alpha_n}), \quad \sigma^{\text{in}} \equiv \mathbb{I}_{2n}. \tag{4.77}$$

Este resultado es el esperado puesto que un estado coherente se puede definir como un desplazamiento del vacío (4.27). Comparando (4.70) y (4.77) vemos que en esta parametrización también se cumple que los estados coherentes son desplazamientos del vacío, además de que  $\sigma$  no cambia, tal como ocurre en 4.2a y 4.2b.

### 4.5.3. Entradas con modos multifotónicos

Sea un sistema multipartita en el que cada modo se encuentra en el estado con fotones  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Se sabe que para  $\langle \hat{\mathbf{r}}_i \rangle = 0$ ,  $\langle \hat{\mathbf{r}}_i^2 \rangle = m_i + 1/2 \forall i$  y de (4.11) tenemos

$$\begin{aligned} \langle [q_i, p_j] \rangle &= i\delta_{ij}, \quad \text{y} \quad \langle \{q_i, p_j\} \rangle = 0, \\ \Rightarrow \langle q_i, p_j \rangle &= i\delta_{ij}, \quad \text{y} \quad \langle p_i, q_j \rangle = -i\delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (4.78)$$

entonces el primer y segundo momento son

$$\hat{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \quad \sigma^{\text{in}} = \frac{1}{2} \text{diag}(2m_1 + 1, \dots, 2m_n + 1) \equiv \bigotimes_{j=1}^n (2m_j + 1) \mathbb{I}_2. \quad (4.79)$$

Este resultado concuerda con el de la referencia [41]. Los estados de número no son estados gaussianos, ya que sus funciones de Wigner no son gaussianas en el espacio fase, sin embargo, este calculo es útil para obtener los momentos estadísticos de los estados térmicos.

#### 4.5.4. Sistema con estados térmicos

Los momentos estadísticos de este sistema son equivalentes a (4.79), puesto que en cada modo tenemos un cierto número promedio de fotones de entrada dados por (4.40) [17, 42], por lo tanto

$$\hat{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \quad \sigma^{\text{in}} = \bigotimes_{j=1}^n (2\bar{m}_j + 1) \mathbb{I}_2, \quad \bar{m}_j = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_j}}. \quad (4.80)$$

El primer momento estadístico es el esperado, pues de la figura 4.2d vemos que su función de Wigner se encuentra en el origen.

En todos estos casos es posible determinar  $\bar{\mathbf{r}}$  sin hacer los cálculos, pues solo debemos saber cuál es la posición de cada modo en el espacio fase. De hecho, todos los modos se encontraran en el origen a excepción de los modos en estados coherentes.

#### 4.5.5. Sistema con estados comprimidos unimodales

Como los estados comprimidos no son desplazamientos del vacío, entonces, siempre que se tengan estados comprimidos por entradas en los modos se tendrá que  $\bar{\mathbf{r}} = 0$ . Los operadores cuadratura se comprimen como

$$\hat{\mathbf{r}} \rightarrow S(\xi)\hat{\mathbf{r}}, \quad S(\xi) = \begin{pmatrix} e^{-\xi} & 0 \\ 0 & e^{\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

luego, la matriz de covarianza es [38]

$$\sigma = S(\xi)S(\xi)^\top = S(2\xi) = \begin{pmatrix} e^{-2\xi} & 0 \\ 0 & e^{2\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Para un sistema multipartita en el que uno de los modos tenga de entrada un estado comprimido de un solo modo, la submatriz de  $\sigma$  correspondiente a este estado será de la forma (4.82).

### 4.5.6. Producto tensorial de estados gaussianos

Un caso de interés en este trabajo es en el que hay distintos estados gaussianos en cada modo de entrada con distintos momentos estadísticos. Sin pérdida de generalidad, sean dos estados gaussianos  $\rho_A$  y  $\rho_B$  con momentos estadísticos  $(\bar{\mathbf{r}}_A, \sigma_A)$  y  $(\bar{\mathbf{r}}_B, \sigma_B)$ , respectivamente. Los momentos estadísticos del sistema bipartita [38, 39] son

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_A \oplus \bar{\mathbf{r}}_B, \quad \sigma = \sigma_A \otimes \sigma_B. \quad (4.83)$$

Con esto podemos obtener, por ejemplo, la matriz de covarianza en el que en una entrada hay un fotón y en el resto hay vacío. Este y otros casos similares son estudiados en este trabajo.

# Capítulo 5

## Circuitos simplécticos

El efecto Hawking análogo en fibras admite una gran variedad de modelos para calcular distintas propiedades, como el espectro, la termalidad, el entrelazamiento o el número de partículas creadas. El modelo de circuitos simplécticos nos ayuda a calcular de una forma sencilla el número de fotones producidos, el grado de entrelazamiento cuántico de los pares de Hawking (lo cual se abordará en el siguiente capítulo) y la termalidad de la radiación producida por análogos de horizontes de eventos de BH, WH y el par WH-BH.

Los circuitos simplécticos son arreglos de instrumentos ópticos formados por moduladores de fase, divisores de haz y amplificadores paramétricos, que matemáticamente se pueden representar con operadores cuánticos que actúan sobre el estado del sistema cuando este está parametrizado por sus momentos estadísticos [16, 17]. Estos circuitos determinan la dinámica de los modos del sistema mediante una matriz de dispersión que engloba los procesos físicos que los afectan en su propagación e interacción. La motivación de este modelo es que las transformaciones de Bogoliubov del efecto Hawking análogo y las de un circuito simpléctico pueden ser idénticas con el arreglo adecuado de instrumentos ópticos [16, 17, 22, 43, 44] y que es matemáticamente más sencillo que otros modelos basados en el modelo de Hopfield [13–15, 45] o en dispersión de ondas [20, 21], sin perder de vista las limitaciones que este puede tener.

En este capítulo repasaremos algunos aspectos de la teoría de los instrumentos ópticos antes de formar los circuitos simplécticos análogos y entender qué papel juegan en el proceso de producción de pares de Hawking. Por simplicidad abordaremos la teoría en el caso de dos modos (sistema bipartita) que, sin pérdida de generalidad, se puede extender a nuestro caso de interés de 4 modos.

### 5.1. Moduladores de fase

Los moduladores de fase (PS por *phase shifters*) son instrumentos ópticos simples formados por platos dieléctricos capaces de rotar la fase de ondas EM respecto a algún sistema de referencia. Pueden representarse matemáticamente mediante matrices de la forma

$$R_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

siendo  $\phi$  el ángulo de polarización. La forma general de divisores de haz y amplificadores paramétricos implican operaciones de rotación y moduladores de fase, sin embargo, estos se omiten en los cálculos, puesto que la fase es irrelevante para los resultados que se presentan en este trabajo [17].

## 5.2. Divisor de haz

Como sabemos, los aspectos cuánticos de la luz se magnifican cuanto menor sea la cantidad de modos y de fotones que la conforman [35]. La luz mayormente empleada en laboratorios de óptica es la de haces coherentes, sin embargo, en una enorme cantidad de experimentos llevados a cabo en la rama de la óptica cuántica se requieren haces de fotones individuales. No es suficiente con reducir la intensidad de la luz para producir fotones individuales. El método más usado para obtenerlos es por conversión paramétrica descendiente espontánea SPDC (por spontaneous parametric down-conversion) (vea la sección 5.3). Después de producir un solo fotón es necesario tener un método para detectarlo, lo cual se logra utilizando divisores de haz BS (por *beam splitter*) como en la figura 5.1a. Estos dispositivos están diseñados con un espejo semireflector con coeficientes de reflectancia y transmitancia específicos. Un material comúnmente usado para construir divisores de haz es la calcita, que es un material birrefringente, es decir, tiene la capacidad de separar un haz incidente no polarizado en dos haces de salida con polarizaciones perpendiculares entre sí, por lo que su descripción cuántica es análoga a la de un aparato Stern-Gerlach. En los canales de salida se colocan fotodetectores de tal forma que cuando se logre tener un fotón incidente habrá una sola señal en alguno de los dos canales de salida, permitiéndonos observar la naturaleza cuántica de la luz con un dispositivo simple. La probabilidad de detectar al fotón en uno u otro de los canales dependerá de los coeficientes antes mencionados.

Un divisor de haz ideal es un dispositivo que permite que dos pulsos de luz incidentes interfieran entre sí y produzcan dos haces de luz salientes sin generar pérdidas (sin absorción de fotones por parte del material dieléctrico) y que permite el proceso inverso. Como se mencionó en el capítulo anterior, los estados coherentes son los estados cuánticos más clásicos de luz, lo que nos permite cuantizar al divisor de haz de forma sencilla. Clásicamente un haz coherente está determinado por su amplitud  $\alpha \in \mathbb{C}$ , que a su vez es el eigenvalor del operador de aniquilación  $\hat{a}$  para el estado coherente  $|\alpha\rangle$  según la definición 1 de la sección 4.2.3, entonces  $\hat{a}$  es la amplitud cuántica de este estado. El proceso de interferencia de dos haces coherentes con amplitudes  $\alpha_{\omega_1}$  y  $\alpha_{\omega_2}$  está dado por la transformación [35]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\omega_1}^{\text{out}} \\ \alpha_{\omega_2}^{\text{out}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_{\omega_1}^{\text{in}} \\ \alpha_{\omega_2}^{\text{in}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \hat{a}_{\omega_1}^{\text{out}} \\ \hat{a}_{\omega_2}^{\text{out}} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \hat{a}_{\omega_1}^{\text{in}} \\ \hat{a}_{\omega_2}^{\text{in}} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

con  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las frecuencias de cada modo. Esta transformación se representa en la figura 5.1b. Imponiendo las condiciones de conservación de intensidad (ya que no hay pérdidas) y que las amplitudes cuánticas deben cumplir con las reglas de conmutación bosónicas, se deduce

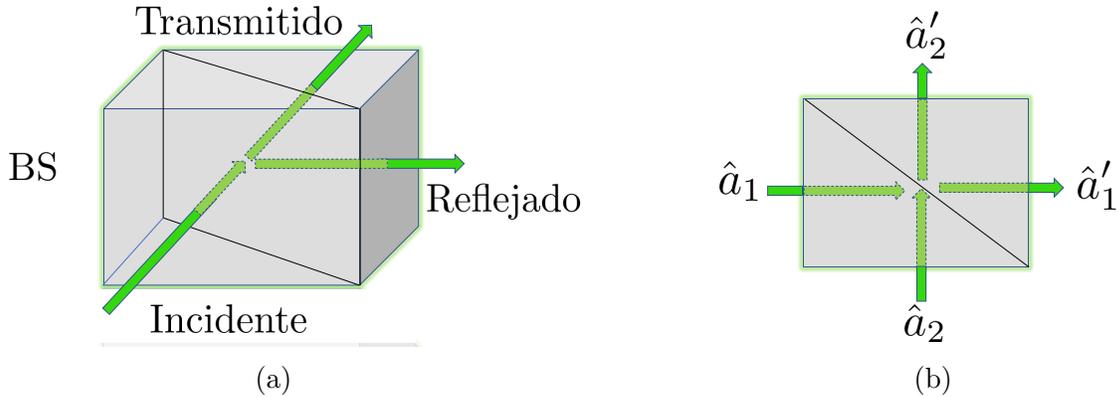


Figura 5.1: (a) Haz incidente en un BS que se divide en un haz reflejado y otro transmitido. (b) En general hay dos modos de entrada en el BS y dos de salida, representados por sus amplitudes cuánticas.

que ésta es una transformación unitaria  $B^\dagger = B^{-1}$ . Por esta razón es posible descomponer a la matriz de forma general como producto de matrices de modulación de fase (que se omiten por las razones ya mencionadas) y una rotación, es decir

$$B = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & -\rho \\ \rho & \tau \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

con  $\rho$  y  $\tau$  los coeficientes de reflectividad y transmitividad, respectivamente. El ángulo  $\Theta$  es el ángulo de rotación (mezcla) que sufren los modos después de cruzar el divisor. La conservación de la intensidad implica que  $\rho$  y  $\tau$  cumplan con la condición

$$\rho^2 + \tau^2 = 1, \quad \rho = -\sin \Theta, \quad \tau = \cos \Theta. \quad (5.4)$$

Las transformaciones de Bogolyubov quedan como

$$\begin{aligned} \hat{a}_{k_1}^{\text{out}} &= \hat{a}_{k_1}^{\text{in}} \cos \Theta + \hat{a}_{k_2}^{\text{in}} \sin \Theta, \\ \hat{a}_{k_2}^{\text{out}} &= -\hat{a}_{k_1}^{\text{in}} \sin \Theta + \hat{a}_{k_1}^{\text{in}} \cos \Theta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

### 5.3. Amplificador paramétrico

La amplificación paramétrica (*parametric amplification*) es un efecto no lineal donde un pulso de bombeo (*pump*) intenso induce dipolos eléctricos oscilatorios en los átomos que forman el medio en el que se propaga, haciéndolos oscilar a la misma frecuencia del pulso  $\omega_p$ , que junto con un factor de amplificación sobre los dipolos hará que estos radien luz produciendo pares de fotones enredados con frecuencias  $\omega_s$  señal (*signal*) y  $\omega_i$  acompañante (*idler*) que cumplan con las condiciones de empatamiento de fase (*phase-matching conditions*). El proceso de

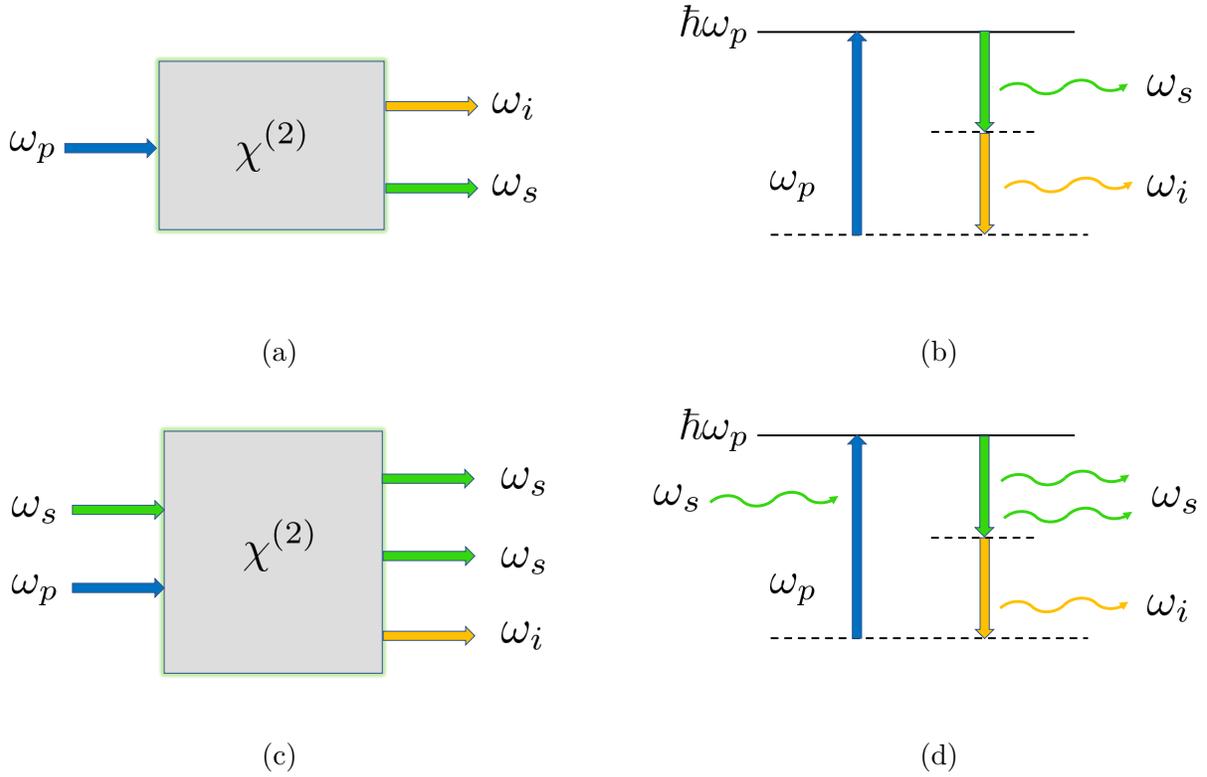


Figura 5.2: (a) Conversión paramétrica espontánea. El fotón de bombeo decae en dos fotones señal y acompañante por la no-linealidad. (b) Representación de los niveles de energía. (c) Amplificación paramétrica, la señal ( $s$ ) se amplifica y se crea el acompañante ( $i$ ) por conservación de la energía. (d) Niveles de energía de la amplificación paramétrica.

amplificación puede ser estimulado por un pulso interactuante (*signal*) (5.2c) o espontáneo debido al ruido cuántico del vacío. La conservación de la energía implica que

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i. \quad (5.6)$$

Con lo anterior mencionado podemos entender la relación del efecto Hawking análogo y la amplificación paramétrica: Producción espontánea o estimulada de pares de fotones entrelazados cuyo origen viene de la no-linealidad del medio en el que se propaga un pulso de luz intenso [22, 43, 44].

El hamiltoniano que describe el proceso completamente cuántico conocido como conversión paramétrica descendiente espontánea SPDC es [43, 44]

$$\hat{H} = \hbar\omega_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hbar\omega_s \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s + \hbar\omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + i\hbar\chi \left( \hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i \right), \quad (5.7)$$

donde  $\chi$  es la permitividad no lineal del medio. Este proceso implica la conversión del un fotón de bombeo ( $p$ ) en dos fotones ( $s$ ) y ( $i$ ), es decir, la aniquilación del pulso de bombeo para crear a señal y acompañante 5.2a, que en el hamiltoniano está expresado por el término  $\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger$ , además debe incluirse su transpuesto conjugado de tal forma que el hamiltoniano sea hermitiano, permitiendo que el proceso inverso sea posible.

Suponiendo un pulso de bombeo es clásico y que no se ve afectado de manera significativa por el proceso de conversión paramétrica descendiente espontánea [38, 43, 44], el hamiltoniano (5.7) se reduce al proceso de amplificación paramétrica

$$\hat{H}^{(\text{PA})} = i\hbar A\chi \left( \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_s \hat{a}_i \right), \quad (5.8)$$

con  $A$  es la amplitud clásica del pulso de bombeo.

Las ecuaciones de evolución de Heisenberg de los operadores de los modos señal y acompañante [43] son

$$\frac{d\hat{a}_s(t)}{dt} = A\chi\hat{a}_i^\dagger(t), \quad \frac{d\hat{a}_i(t)}{dt} = A\chi\hat{a}_s^\dagger(t), \quad (5.9)$$

y sus soluciones son

$$\begin{aligned} \hat{a}_s(\tau) &= \hat{a}_s(0) \cosh \xi + \hat{a}_i^\dagger(0) \sinh \xi, \\ \hat{a}_i(\xi) &= \hat{a}_i(0) \cosh \xi + \hat{a}_s^\dagger(0) \sinh \xi, \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde  $\tau = \chi t$  y  $\xi = A\tau$ . Esto lo podemos escribir como una transformación matricial general para dos modos de la forma

$$\begin{pmatrix} \hat{a}'_{\omega_1} \\ \hat{a}'_{\omega_2} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{a}_{\omega_1} \\ \hat{a}_{\omega_2} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

con  $C$  la matriz de amplificación paramétrica. De nuevo se imponen las condiciones de conmutación bosónicas y que la diferencia de número de fotones entre los dos modos es una cantidad conservada. Esto permite encontrar la forma general de la matriz, que al igual que el caso del divisor de haz nos restringimos a matrices reales eliminando los moduladores de fase, por lo que ésta se puede ver como una matriz de rotación hiperbólica

$$C = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi \\ \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

La acción de un amplificador paramétrico se puede reescribir en términos de matrices de rotación en ángulos de  $\pi/4$  y una compresión-estiramiento como

$$C = R^{-1} \begin{pmatrix} \exp(\xi) & 0 \\ 0 & \exp(-\xi) \end{pmatrix} R, \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

La acción de (5.13) sobre los operadores cuadratura hace que éstas se compriman-expandan con un factor de compresión  $\xi$ . Por esta razón, en QCV les llamamos compresores (*squeezers*) a los operadores de amplificación paramétrica.

Asumamos que los modos señal ( $s$ ) y acompañante ( $i$ ) se encuentran inicialmente en el vacío, de manera que el estado cuántico inicial del sistema es  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle_s \otimes |0\rangle_i = |0, 0\rangle$ . La evolución del estado en el marco de Schrödinger es [43, 44]

$$|\psi(\tau)\rangle = \exp \left[ A\tau \left( \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_s \hat{a}_i \right) \right] |0, 0\rangle = \operatorname{sech}(A\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(A\tau) |n\rangle_i \otimes |n\rangle_s. \quad (5.14)$$

Este es un estado comprimido de dos modos con  $A\tau \in [0, 1]$  el factor de compresión. Este es un estado EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) [35, 44], el cual es producto de la amplificación paramétrica del vacío, es decir, se pueden producir fotones de forma espontánea, y como resultado existe una alta correlación entre los fotones producidos. En el espacio fase esto hace que las cuadraturas de ambos modos estén entrelazadas.

Si nos interesamos solo por el modo señal ( $s$ ) y trazamos sobre este subsistema a un operador arbitrario  $\hat{F}$  con el estado EPR tenemos

$$\langle F(\tau) \rangle_s = \operatorname{sech}^2(A\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(A\tau) \langle n | \hat{F} | n \rangle_s, \quad (5.15)$$

Comparando (5.15) con el espectro de un estado térmico con temperatura  $T$

$$\langle F \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \langle n | \hat{F} | n \rangle_s = (1 - e^{-\hbar\beta\omega_s}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar n\beta\omega_s} \langle n | \hat{F} | n \rangle_s \quad (5.16)$$

tenemos que el modo señal ( $s$ ) se encuentra en un estado térmico con temperatura [22, 35, 43, 44]

$$T(\tau) = \frac{\hbar\omega_s}{2k_B \ln [\coth(A\tau)]}, \quad (5.17)$$

donde la dependencia del tiempo se debe al incremento del número de ocupación de los modos por la amplificación.

## 5.4. Dispositivos ópticos como operaciones gaussianas

En el capítulo anterior vimos que es posible parametrizar a un estado cuántico gaussiano en términos de  $\hat{\mathbf{r}}$  y  $\sigma$ . Ahora queremos caracterizar el tipo de operaciones que actúan sobre estos para describir la dinámica del sistema. Las operaciones ópticas como el modulador de fase, divisor de haz y amplificador paramétrico pertenecen a un tipo de funciones llamadas mapeos-CP (completamente positivos) u operaciones gaussianas. Estos son mapeos lineales unitarios que actúan sobre estados gaussianos como  $M : \rho_G \rightarrow M(\rho_G)$  y mapean estados gaussianos a estados gaussianos [38]. Este tipo de mapeos, también llamados *canales cuánticos*, son generados por hamiltonianos cuadráticos (4.50) [39] y pertenecen al grupo

de transformaciones simplécticas de la forma  $S = e^{\Omega H}$  (donde  $\Omega H$  es el generador de la transformación), es decir, las operaciones gaussianas son equivalentes a transformaciones simplécticas en el espacio fase. El operador correspondiente a  $S$  en el espacio de Hilbert está dado por  $\hat{S} = \exp\left(\frac{i}{2}\hat{\mathbf{r}}^\top \hat{H} \hat{\mathbf{r}}\right)$ .

El mapeo del estado cuántico (4.51) y de sus momentos estadísticos (4.60) es [38, 39]

$$\begin{aligned}\rho &\rightarrow \hat{S}^\dagger \rho \hat{S}, \\ \bar{\mathbf{r}} &\rightarrow S \bar{\mathbf{r}}, \\ \sigma &\rightarrow S \sigma S^\top,\end{aligned}\tag{5.18}$$

con  $S = \exp(\Omega H)$  la transformación simpléctica.

Dos tipos importantes de operaciones gaussianas son las pasivas y las generales. Una transformación simpléctica pasiva es aquella que conserva energía, y siempre se puede descomponer como producto de moduladores de fase con divisores de haz, que como vimos anteriormente, este tipo de operaciones conservan la intensidad [39]. Después tenemos el caso general de cualquier transformación simpléctica en cualquier número de modos se puede descomponer como producto de moduladores de fase (5.1), divisores de haz (5.3) y de compresores unimodales (5.12).

### 5.4.1. Generador de modulador de fase

Como toda transformación simpléctica, el generador de un modulador de fase es de la forma  $\Omega H_{\text{MF}} \phi$ , pero de (5.1) se tiene que

$$R(\phi) = e^{\Omega \phi} = \cos \phi \mathbb{I}_2 + \sin \phi \Omega_1 \Rightarrow H_{\text{MF}} = \mathbb{I}_2,\tag{5.19}$$

por lo tanto, el hamiltoniano en el espacio de Hilbert es

$$\hat{H}_{\text{MF}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}^\top H_{\text{MF}} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}^\top \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2),\tag{5.20}$$

es decir, el oscilador armónico libre es el generador de la modulación de fase pues este sistema rota la fase de los modos en el espacio fase gracias a su dinámica oscilatoria [38, 39].

### 5.4.2. Generador de divisor de haz

La matriz de transformación de un divisor de haz de un sistema de dos modos considerando todas las variables canónicas  $\hat{q}$ 's y  $\hat{p}$ 's del sistema es

$$S_{\text{BS}}(\Theta) = B = \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & \sin \Theta & 0 \\ 0 & \cos \Theta & 0 & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta & 0 \\ 0 & -\sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix},\tag{5.21}$$

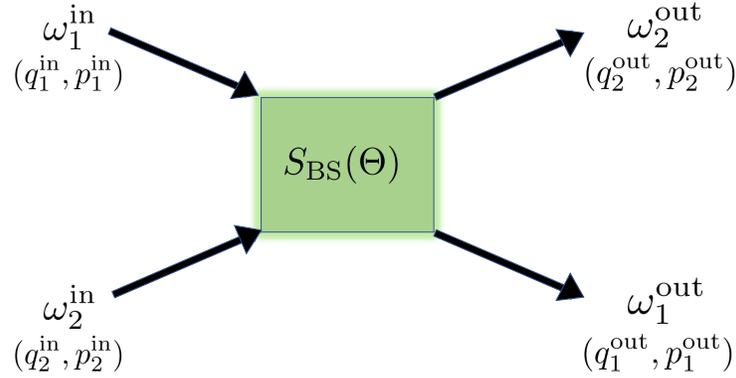


Figura 5.3: Circuito simpléctico de un divisor de haz de un sistema bipartita. La etiqueta de cada modo es su frecuencia  $\omega$ , cada uno con dos grados de libertad en el espacio fase (operadores canónicos). La transformación simpléctica actúa sobre los momentos estadísticos de un estado gaussiano para describir la evolución del sistema.

El generador de la transformación simpléctica asociada es  $\Omega H_{BS}$  tal que

$$B = e^{\Omega H_{BS} \Theta} \Rightarrow \Omega H_{BS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H_{BS} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Entonces el operador hamiltoniano es [38, 39]

$$\hat{H}_{BS} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}}^T H_{BS} \hat{\mathbf{r}} = \hat{p}_1 \hat{q}_2 - \hat{q}_2 \hat{p}_1 = i \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \right). \quad (5.23)$$

Este hamiltoniano nos muestra que el divisor de haz excita uno de los dos modos mientras el otro se aniquila, este comportamiento es el esperado pues es justo lo que el material semireflector del dispositivo hace en la reflexión y transmisión de un fotón y que el parámetro  $\Theta$  nos dice con qué probabilidad se reflejará o se transmitirá.

El circuito simpléctico de un BS es un diagrama que representa la mezcla de los modos como en la figura 5.3. La transformación simpléctica representada en este diagrama es (5.21), donde se le denota por  $S_{BS}$  para hacer referencia a que es una transformación simpléctica. La evolución de los modos del sistema bajo la acción de un BS queda determinada por la transformación de los momentos estadísticos según (5.18) y en consecuencia, tendremos momentos estadísticos del estado gaussiano de salida.

### 5.4.3. Compresor de un sistema bipartita

El hamiltoniano de este proceso es (5.8) y su matriz de transformación es (5.12). La compresión sobre todos los operadores canónicos en un sistema bipartita es

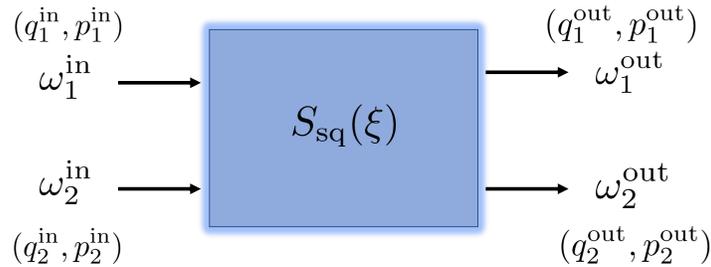


Figura 5.4: Circuito simpléctico de un compresor de un sistema bipartita.

$$S(\xi)_{\text{sq}} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & 0 & \sinh\xi & 0 \\ 0 & \cosh\xi & 0 & \sinh\xi \\ \sinh\xi & 0 & \cosh\xi & 0 \\ 0 & \sinh\xi & 0 & \cosh\xi \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Como el compresor es un amplificador paramétrico, su transformación simpléctica nos dice de forma implícita que los modos de salida estarán entrelazados y que se amplificarán. El compresor es una transformación simpléctica pasiva cuyo hamiltoniano no es positivo. Ya mencionamos en la sección 5.3 que el efecto sobre las cuadraturas es que estas terminan estando fuertemente acopladas o entrelazadas y esto se ve reflejado en la no-positividad de (5.8). En el siguiente capítulo se discutirá de forma más amplia la positividad del hamiltoniano de un sistema y cómo es que ésta es un indicador de separabilidad y que la violación de esta propiedad indicará entrelazamiento, como es el caso del estado (5.14).

El circuito simpléctico de un compresor representado como en la figura 5.4 es una herramienta visual que nos permite saber cuales son los modos de entrada que terminarán entrelazados y amplificados.

Los circuitos simplécticos son una herramienta simple y útil para comprender el proceso de evolución de los modos de un sistema y más aún, nos permitirán modelar sistemas de gravedad análoga de forma sencilla una vez que se entienda qué papel juegan los divisores de haz y amplificadores paramétricos en la producción de pares de Hawking. Computacionalmente este modelo es muy simple, pues la evolución de un sistema cuántico se reduce a proponer un estado inicial y calcular sus momentos estadísticos de entrada, obtener la matriz de dispersión como producto de transformaciones canónicas concatenadas y calcular los momentos estadísticos de salida según (5.18). El estado cuántico de salida puede ser muy complicado de calcular, pero el parametrizarlo con  $\bar{\mathbf{r}}$  y  $\sigma$  nos permite obtener la misma información del estado de salida con solo calcular productos matriciales, con la certeza de que el estado resultante sigue siendo gaussiano y toda la teoría de QCV que se ha presentado hasta ahora sigue siendo válida.

## 5.5. Modelo de agujeros negros ópticos 0D

La amplificación paramétrica y el efecto Hawking análogo en fibras son similares, pues en ambos existe creación de pares de partículas entrelazadas, tanto de forma espontánea como estimulada, además de que comparten las mismas transformaciones de Bogolyubov [22], por lo que resulta natural cuestionarnos si existe una posibilidad de construir un modelo basado en las operaciones gaussianas que nos permita estudiar aspectos de la física de la radiación de Hawking análoga. Este modelo al que llamamos modelo de circuitos simplécticos nos permite construir el análogo de agujero negro, agujero blanco, y el par agujero negro-blanco para sistemas como el de condensados de Bose-Einstein (BECs) y en el que desarrollamos en este trabajo, el análogo en fibras ópticas [16, 17, 22].

Las matrices de transformación (5.1), (5.21) y (5.24) son como cajas negras, pues lo que sucede dentro de los dispositivos ópticos y el cómo es que de los pulsos interactúan entre sí es desconocido para nosotros, únicamente proponemos cuáles son los modos de luz de entrada, después ocurre una transformación en términos de operadores gaussianos sobre el estado, y como resultado tenemos otro estado de salida. Tampoco sabemos dónde o cuándo sucede la transformación (0 dimensional) [43] por lo que podemos tomar a los modos de entrada y salida en el pasado y futuro asintótico, respectivamente.

### 5.5.1. Circuito simpléctico de un agujero negro

El efecto Hawking en un BH astrofísico ocurre cuando hay modos con norma negativa y un campo gravitacional intenso en el horizonte de eventos [2, 23]. La radiación del BH hace que disminuya su masa, sin embargo, como la pérdida es lenta se asume que la masa se mantiene constante durante el proceso de emisión. En el análogo en fibras ocurre lo mismo con el pulso de bombeo, al formarse los pares su intensidad disminuye, pero el cambio es mínimo, por lo que la envolvente del solitón se considera fija [44]. Esto mismo es lo que se asume en el amplificador paramétrico, entonces la intensidad del pulso de bombeo juega un rol parecido al de la masa del agujero negro y el propio proceso de amplificación paramétrica es el que produce los pares de Hawking análogos. En otras palabras, un compresor de dos modos es el que produce la radiación de Hawking análoga en el modelo de circuitos simplécticos [16, 17, 46].

Idealmente uno de los pares cae a la singularidad y otro es emitido como radiación, sin embargo esto no siempre ocurre. Ambas partículas están sometidas al potencial gravitacional intenso del BH y muchas de las veces la partícula no podrá escapar y caerá a la singularidad. Esta dispersión clásica llamada *backreaction* la podemos modelar en un circuito simpléctico con un divisor de haz que permita que el modo asociado a la radiación de Hawking análoga pueda escapar del horizonte con una cierta probabilidad o que se transforme en otro pulso que lo haga ir hacia la singularidad. Con estas dos operaciones gaussianas basta para construir el circuito simpléctico del efecto Hawking de un BH más general.

Para construir los circuitos nos basamos en las figuras 3.4 y 5.5. En el BH óptico el modo  $\omega_1^{\text{in}}$  (de norma negativa) y  $\omega_4^{\text{in}}$  (de norma positiva) pueden estimular al modo  $\omega_3^{\text{out}}$  asociado a la radiación de Hawking, por lo tanto estos dos modos deben pasar a través de un compresor

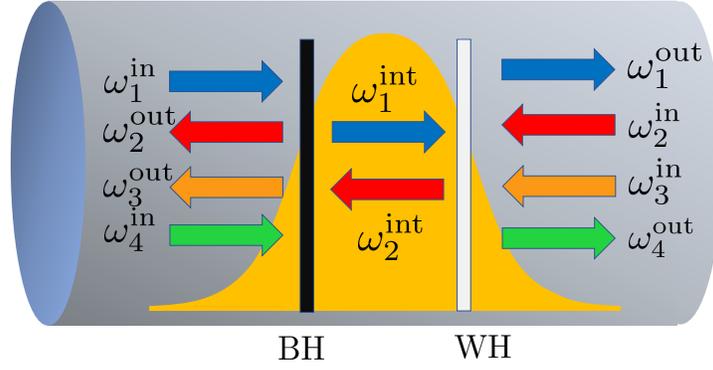


Figura 5.5: Propagación de los cuatro modos iniciales (in) y (out).

para crear al par de Hawking formado por los modos entrelazados  $\omega_1^{\text{int}}$  y  $\omega_3^{\text{out}}$ . En este sistema hay *backreaction* por la interacción entre los modos  $\omega_2^{\text{out}}$  y  $\omega_3^{\text{out}}$ , descrita matemáticamente por un divisor de haz. Entonces el circuito simpléctico de un BH está compuesto por un compresor, seguido de un divisor como se muestra en la figura 5.6a. Este sistema puede representarse en un diagrama de Penrose causal, presentado en la figura 5.6b, en el que el eje horizontal representa la coordenada espacial y el eje vertical el tiempo. Los modos iniciales  $\omega_1^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$  vienen del pasado asintótico y se dirigen hacia el horizonte de eventos del BH, mientras que el modo  $\omega_2^{\text{in}}$  proviene del interior del BH. Los modos  $\omega_1^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$  producen el par de Hawking  $\omega_1^{\text{int}}$  que cruza el horizonte hacia el BH y  $\omega_3^{\text{out}}$  que se emite como radiación hacia el futuro asintótico. El modo  $\omega_2^{\text{in}}$  no produce radiación de Hawking estimulada, por lo que este cruza el horizonte como  $\omega_2^{\text{int}}$ . Parece contradictorio que este modo cruce el horizonte, sin embargo, este no interactúa con el resto del sistema hasta su salida y pasa de largo. El resto de modos no viajan a velocidades superiores a la del pulso de bombeo.

La matriz de transformación simpléctica asociada al circuito del BH consiste en un compresor que actúa sobre los modos  $\omega_1^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$  como

$$S_{\text{sq}}(\xi_H) = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh(\xi_H) & 0 \\ 0 & \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sinh(\xi_H) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) & 0 \\ 0 & -\sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

y de un divisor de haz entre los modos  $\omega_3^{\text{out}}$  y  $\omega_2^{\text{out}}$  cuya matriz es

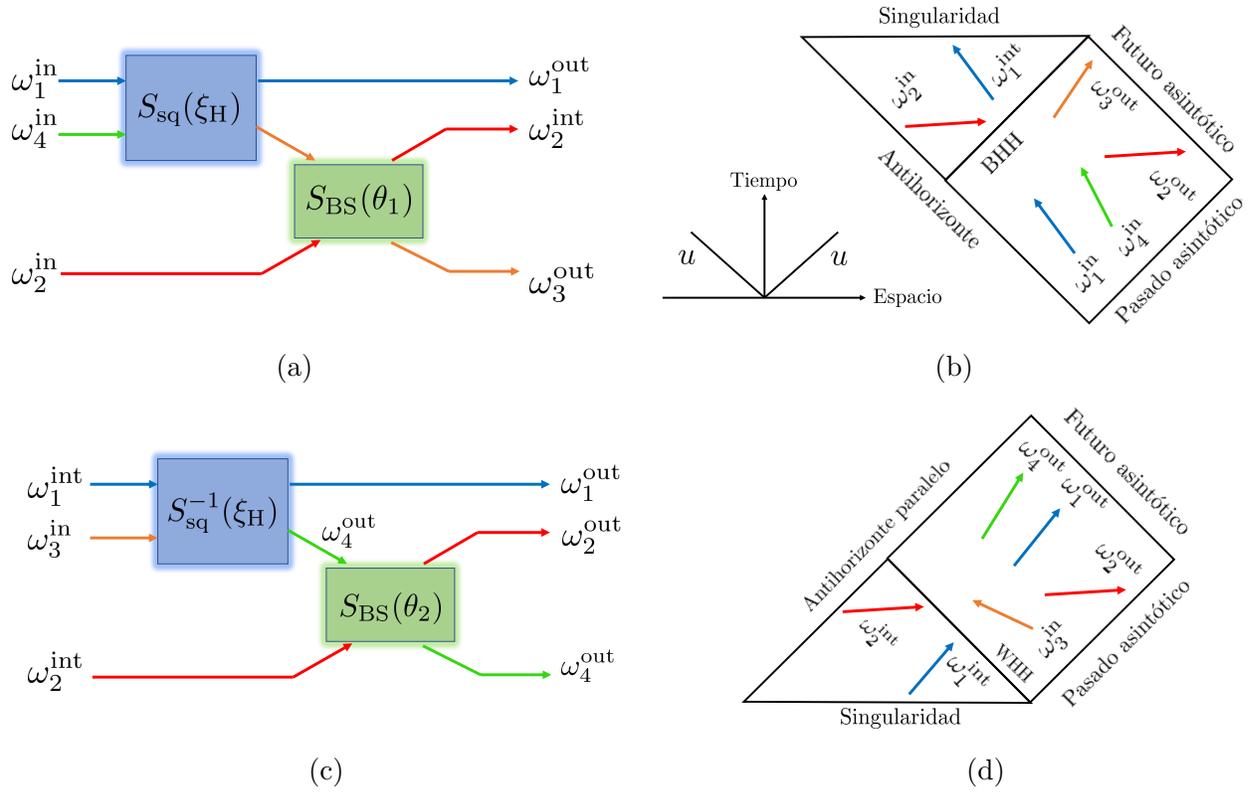


Figura 5.6: Circuito simplético (a) y diagrama de Penrose (b) de un BH óptico. Circuito simplético (c) y diagrama de Penrose (b) de un WH óptico.  $u$  es la velocidad de grupo del pulso de bombeo.

$$S_{\text{BS}}^{\text{BH}}(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

de manera que el circuito simplético del BH está dado por la matriz de dispersión

$$S_{\text{BH}} = S_{\text{BS}}(\theta_1) \cdot S_{\text{sq}}(\xi_H). \quad (5.27)$$

Como la radiación de Hawking análoga se produce por amplificación paramétrica, entonces la temperatura del de Hawking está dada por (5.17), o de forma equivalente [22]

$$\tanh(\xi_H) = e^{-\pi\omega/\gamma}, \quad (5.28)$$

donde  $\gamma$  es la pendiente del perfil de velocidades del pulso en el horizonte del BH, que es análogo a la gravedad superficial al caso astrofísico.

### 5.5.2. Circuito simpléctico de un agujero blanco

Los modos  $\omega_3^{\text{in}}$  y  $\omega_1^{\text{int}}$  (que provienen de la región interior del WH) pueden estimular al WH para crear sus pares de Hawking. A diferencia del BH, los pares  $\omega_1^{\text{out}}$  y  $\omega_4^{\text{out}}$  del WH se propagan en la misma dirección. En este sistema existe un acoplamiento entre los modos  $\omega_4^{\text{out}}$  y  $\omega_2^{\text{in}}$  (que se dirige hacia el horizonte de eventos). Este acoplamiento produce *backreaction*, es decir, que hay una probabilidad de que el modo  $\omega_4^{\text{out}}$  pueda caer hacia el WH y convertirse en el modo  $\omega_2^{\text{int}}$ . Esto implica que el espectro de radiación de Hawking del WH sea el de un cuerpo gris, al igual que el BH.

El circuito simpléctico del WH consiste compresor que actúa sobre los modos  $\omega_3^{\text{in}}$  y  $\omega_1^{\text{in}}$  para producir los pares de Hawking, dado por la matriz

$$S_{\text{sq}}(\xi_H) = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & -\sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & \sinh(\xi_H) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

seguido de un divisor de haz que acople a los modos  $\omega_2^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{out}}$  como se muestra en la figura 5.6c.

$$S_{\text{BS}}(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Entonces la matriz de dispersión del circuito es

$$S_{\text{WH}} = S_{\text{BS}}(\theta) \cdot S_{\text{sq}}^{-1}(\xi_H). \quad (5.31)$$

La propagación espacio-temporal de los modos en el WH se representa en el diagrama de Penrose de la figura 5.6d. De forma análoga al BH, para el WH tenemos la relación de temperatura de Hawking y frecuencia

$$\tanh(\xi_H) = e^{-\pi\omega/\gamma'}, \quad (5.32)$$

con  $-\gamma'$  la pendiente del perfil de velocidades del pulso en el horizonte de eventos.

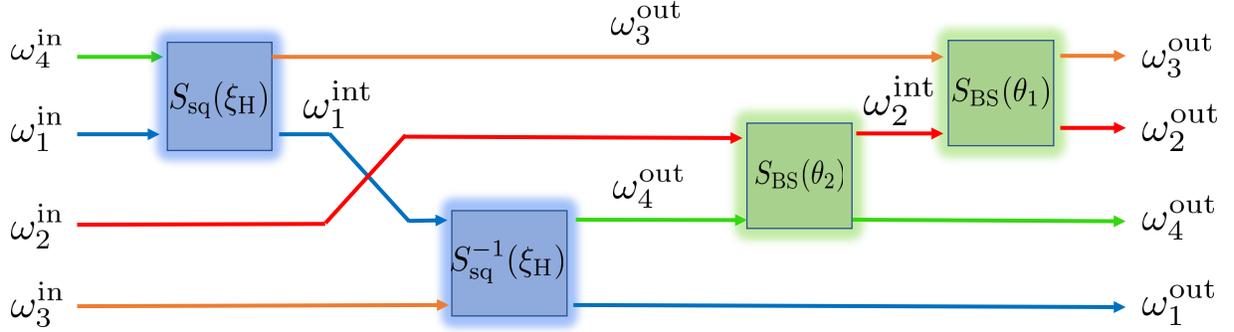


Figura 5.7: Circuito simpléctico del par BH-WH.

### 5.5.3. Circuito simpléctico del par BH-WH

El sistema formado por el par BH-WH con circuitos simplécticos describe el caso óptico del solitón, donde tenemos ambos horizontes de eventos. El circuito simpléctico del par es se muestra en la figura 5.7, que resulta de la unión de los circuitos del BH y WH. El modo  $\omega_1^{\text{int}}$  formado en el BH puede estimular al WH con el modo. La matriz de dispersión del sistema es

$$S = S_{\text{BS}}(\theta_1) \cdot S_{\text{BS}}(\theta_2) \cdot S_{\text{sq}}^{-1}(\xi_H) \cdot S_{\text{sq}}(\xi_H). \quad (5.33)$$

# Capítulo 6

## Cuantificación del entrelazamiento cuántico

La radiación estimulada en fibras ópticas se puede producir por dispersión como un efecto de la electrodinámica clásica no lineal, sin embargo, la radiación de Hawking análoga estimulada puede ser un fenómeno cuántico, por lo que resulta natural preguntarnos cómo podríamos distinguir si la radiación emitida es debida a efectos clásicos o cuánticos. La respuesta está en el entrelazamiento. Los pares de Hawking producidos en la radiación análoga tienen la característica de estar entrelazados, mientras que los haces producidos por dispersión clásica no lo están. En este capítulo se estudian los métodos para determinar si dos partículas están entrelazadas y cómo se puede calcular el grado de entrelazamiento bajo el contexto de la teoría de variables cuánticas continuas. Primero se hablará de la entropía de von Neumann y su interpretación como una medida de entrelazamiento y veremos que su régimen de aplicabilidad nos obliga a buscar criterios de separabilidad o entrelazamiento más generales, como lo es la negatividad logarítmica, basado en la violación del criterio positividad de transposición parcial PPT (*positivity of partial transposition*).

### 6.1. Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento cuántico es una correlación entre distintas partes que componen un sistema, en el que el estado cuántico que lo representa no se puede factorizar en estados cuánticos que describan cada una de las partes. Debido a esto, el realizar una operación sobre una de las partes provoca que el resto de ellas se vean afectadas indirectamente y de forma instantánea por la medición efectuada sin importar qué tan alejadas se encuentren, es decir, no es una correlación clásica. Por esta razón se dice que el entrelazamiento cuántico es una correlación más alta a la permitida clásicamente.

Parecería que el entrelazamiento viola la relatividad especial al ser instantáneo e independiente de la distancia, como si contradijera el principio de causalidad, sin embargo, dependemos de este para garantizar si el estado está o no entrelazado. Podemos hacer un ejercicio mental en el que dos partículas interactúan para quedar entrelazadas y después ser enviadas a distintos lugares alejados entre sí, donde dos observadores cuidarán de cada una ellas y las

someterán a operaciones que afecten el estado cuántico de cada una. Cuando las partículas estén entrelazadas y uno de los observadores (llamémosle Alicia) realiza una operación sobre su partícula, modificará el estado cuántico de ambas y en consecuencia, la medición del otro observador (llamémosle Beto) también cambiará. Si inicialmente conocemos el estado del sistema, es posible determinar cuál será el resultado de la partícula de Beto, el cual dependerá del resultado de la medición en Alicia y viceversa. Para que los observadores sepan si existe entrelazamiento deben comunicarse y confirmar que las predicciones y las observaciones concuerdan, y la comunicación solo puede darse a través de un canal clásico, como una llamada telefónica, un mensaje de texto o cualquier otra forma de comunicación cotidiana. Estamos forzados a recurrir a comunicaciones clásicas, de lo contrario hablar de entrelazamiento no tendría sentido.

Matemáticamente el entrelazamiento es sinónimo inseparabilidad. El espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  al cual pertenece el estado del sistema compuesto por  $n$ -partes es el producto tensorial de los  $n$ -espacios de Hilbert distintos  $\{\mathcal{H}_k \ k \in [1 \dots n]\}$ , es decir  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{H}_k$ . Por supuesto, en el espacio de Hilbert compuesto habrá estados separables, es decir, que pueden factorizarse o separarse en producto de estados de distintos espacios de Hilbert que componen al sistema mediante operaciones locales y comunicaciones clásicas (LOCC por *local operations and classical communications*). Esta es una técnica de información cuántica como la descrita al inicio de la sección, donde una operación local se realiza en una parte del sistema, el resultado obtenido se comunica por un canal clásico a otra de las partes para así llevar a cabo otra operación local dependiente de la información recibida [39]. Bajo esta técnica podemos saber si un estado está o no entrelazado. Un ejemplo de LOCC es el proceso de teleportación cuántica, en el cual es posible transmitir el estado cuántico de una partícula a otra mediante información clásica [47].

Los sistemas más simples en los que puede haber entrelazamiento son los bipartitas, en donde se analizan solo dos subsistemas A y B del sistema completo, cuyo espacio de Hilbert es  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . El estado cuántico de un sistema bipartita  $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  es separable si y solo si existen estados locales  $\hat{\rho}_{A,l} \in \mathcal{H}_A$  y  $\hat{\rho}_{B,l} \in \mathcal{H}_B$ , con  $j \in 1, 2, \dots, n$  y probabilidades  $p_l$  (con  $\sum_{l=1}^n p_l = 1$ ), tales que admitan la descomposición

$$\hat{\rho} = \sum_{l=1}^n p_l (\hat{\rho}_{A,l} \otimes \hat{\rho}_{B,l}), \quad (6.1)$$

bajo las condiciones de un LOCC antes descritas. Decimos entonces que un sistema bipartita está entrelazado si no es separable de la forma (6.1).

En las secciones siguientes discutiremos, sin pérdida de generalidad, los criterios de separabilidad y entrelazamiento de sistemas bipartitas en variables cuánticas continuas sobre estados gaussianos.

## 6.2. Entropía de von Neumann

El concepto de entropía nace en la termodinámica y gracias al desarrollo de la física estadística y de la teoría de la información se puede interpretar como una medida de la ignorancia

del observador, cuyo precio hay que pagar al saltar de la descripción microscópica a la macroscópica de un sistema físico. Un observador únicamente puede conocer promedios de las variables que definen un sistema, sin embargo, existe una cantidad gigantesca de configuraciones microscópicas del sistema que son compatibles con el estado macroscópico observado, por lo que no podemos saber en cuál de ellos está en un instante dado ya que estos son igualmente probables (principio de igualdad de probabilidades *a priori*). Esto implica que la información sobre el estado microscópico del sistema en un instante dado se desconoce en la descripción macroscópica, lo que equivale a perder información de las posiciones y momentos de todas las partículas que lo componen.

En teoría de la información, dado un mensaje  $X$  (la colección de todos los mensajes posibles) con un grado de indeterminación dado por la variable aleatoria  $x$  (número de estados posibles) compuesto por una cadena de caracteres con probabilidad asociada  $p_x$ , la entropía de Shannon (análoga a la entropía de Gibbs [48]) es

$$S(X) = - \sum_x p_x \log_2(p_x), \quad (6.2)$$

la cual nos dice el número de bits clásicos por caracter necesarios para especificar a  $x$  por completo [39], por lo que  $S(X)$  es un indicador de qué tan incierta es la variable  $x$ . En otras palabras, la entropía es proporcional al logaritmo del todos los estados posibles del mensaje [48]. Si hablamos de un sistema físico en el que el ensamble  $X$  consiste en una cantidad enorme de microestados compatibles con el macroestado (del orden de  $10^{10^{28}}$ ), la entropía es el número de bits por caracter necesarios para especificar por completo a  $x$  de forma unívoca en el límite asintótico de cadenas infinitamente largas [39].

De forma similar, la información contenida en un estado cuántico  $\hat{\rho}$  nos dice cuántos qubits (estados cuánticos de dos niveles) se necesitan para representar de manera unívoca al estado  $\hat{\rho}$  en el límite asintótico de sistemas físicos en el ensamble. La entropía cuántica está dada por

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}), \quad (6.3)$$

a la cual se conoce como entropía de von Neumann y caracteriza el contenido entrópico de un estado cuántico: entre mayor sea, más mezclado estará en comparación de uno de menor entropía. Es fácil ver si el estado cuántico es un proyector en un espacio de Hilbert de dimensión 1, pues su entropía será  $S = 0$  [39].

Un estado global cuántico bipartita puro se puede separar de la forma (6.1) si y solo si los estados cuánticos asociados a cada subsistema son también puros y la entropía de von Neumann de estos estados es cero. En caso de que esta sea distinta de cero, entonces el estado global está entrelazado, es decir, la entropía de von Neumann es un a medida de entrelazamiento cuántico, sin importar sobre cuál subsistema se trace [39].

### 6.3. Criterio de Peres-Horodecki

La determinación de separabilidad de un estado puro es sencilla si este admite una descomposición Schmidt (6.1), donde es necesario conocer los espectros de cada subsistema, esto puede ser muy complicado de conocer o inclusive imposible. En el caso de estados mezclados el criterio de separabilidad no es tan sencillo, ya que si bien la entropía es un indicador de entrelazamiento, no es el único ni el más simple. Un estado mezclado global bipartita puede no estar entrelazado entre los subsistemas y estar entrelazado de forma local, por lo que usar la entropía de von Neumann como criterio medida de entrelazamiento en casos de este estilo resulta inútil. Una forma de resolver este problema es mediante el criterio de Peres-Horodecki (también llamado criterio PPT, por *positive partial transposition*), que nos da una condición suficiente para saber si un estado mezclado está entrelazado [37, 39, 40, 49].

#### 6.3.1. Transposición parcial

Un método más general para determinar si un sistema bipartita mezclado está entrelazado consiste en el estudio de un tipo de mapeo del estado conocido como transposición parcial. La idea principal de este método consiste en medir el grado en el que la transposición parcial sobre uno de los subsistemas deja de ser positiva [40].

Sea un estado general  $\hat{\rho}$  de un sistema bipartita en  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  dado por

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j,k,l} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|, \quad (6.4)$$

la transposición parcial respecto al subsistema B se define como [49]

$$\hat{\rho}^{T_B} = (\mathcal{I}_A \otimes T)(\hat{\rho}) = \sum_{i,j,k,l} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes (|k\rangle\langle l|)^T = \sum_{i,j,k,l} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k| \quad (6.5)$$

Sea  $\hat{\rho}$  con  $\dim \mathcal{H}_A = n$  y  $\dim \mathcal{H}_B = m$  y este admite una representación matricial por bloques  $m \times n$

$$\hat{\rho} \doteq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

cada submatriz de dimensión  $m$ . La matriz transpuesta parcial respecto al subsistema B es

$$\hat{\rho}^{T_B} \doteq \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \cdots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \cdots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Cualquier estado  $\hat{\rho}$  que no pueda escribirse de la forma (6.4) no es separable, o equivalentemente, está entrelazado. El superoperador  $(\mathcal{I}_A \otimes T)$  pertenece a la clase de mapeos-CP (completamente positivos). Un mapeo-CP debe cumplir con las propiedades de: (i) linealidad, (ii) preservar la traza para que la suma de probabilidades siga siendo 1, (iii) positividad ( $\phi(\hat{\rho}) \geq 0$  si  $\hat{\rho} \geq 0$ , tal que la regla de Born mantenga valores positivos de probabilidad después de un proceso dinámico) y (iv) completamente positivo ( $\rho \otimes \mathcal{I}(|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0$ ,  $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , donde  $\mathcal{I}(|\psi\rangle\langle\psi|)$  es el superoperador identidad en  $\mathcal{H}_B$ ) [39].

### 6.3.2. Criterio PPT y entrelazamiento

La transposición parcial mapea un operador de densidad a otro operador de densidad. El criterio PPT estipula que si hay entrelazamiento entre los subsistemas, entonces la matriz de densidad  $\rho^T$  no es definida positiva, es decir, que tiene eigenvalores negativos [37]. La prueba se basa en el teorema 2 de Horodecki et al., [49]; dado  $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  de dimensión  $2 \times 2$  o  $2 \times 3$ . El estado es separable si para cualquier mapeo positivo  $M : \mathcal{M}_A \rightarrow \mathcal{M}_B$  ( $\mathcal{M}_A$  y  $\mathcal{M}_B$  son los conjuntos de operadores que actúan en  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente), el operador  $(\mathcal{I}_A \otimes M)\hat{\rho}$  es positivo y el estado es separable [37, 49]. La transposición parcial  $\hat{\rho}^{T_B}$  es el único mapeo positivo capaz de generar eigenvalores negativos. Si esto ocurre se viola el criterio anterior y se tiene una condición suficiente de entrelazamiento, es decir, si la matriz parcial transpuesta  $\hat{\rho}^{T_B}$  tiene eigenvalores negativos, entonces el sistema está entrelazado.

### 6.3.3. Negatividad logarítmica

El criterio de Peres-Horodecki nos permite construir funciones de correlación. Una de ellas es la negatividad, definida como

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{1}{2} (\|\rho^T\|_1 - 1), \quad (6.8)$$

donde  $\|A\|_1 = \text{Tr}|A| = \text{Tr}\sqrt{AA^\dagger}$  es la norma de un operador, definida como el valor absoluto de la suma de sus eigenvalores y el subíndice indica el valor total de la suma. Si el estado es separable entonces  $\mathcal{N} = 0$ , de lo contrario el estado está entrelazado [37, 40, 50]. La negatividad es una función monótona pues el entrelazamiento no aumenta bajo LOCC.

Otro indicador de entrelazamiento es la negatividad logarítmica definida como

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2 \|\rho^T\|_1 = \log_2 [1 + 2\mathcal{N}(\rho)]. \quad (6.9)$$

La negatividad logarítmica es monótona creciente, es decir, valores mayores de  $E_{\mathcal{N}}$  indican mayor entrelazamiento. Si  $E_{\mathcal{N}} = 0$  el estado tiene transpuesta parcial positiva y es separable, pero si  $E_{\mathcal{N}} > 0$  está entrelazado. La negatividad logarítmica es una función monótona (no crece bajo LOCC) de entrelazamiento cuántico, por lo que un valor alto de negatividad logarítmica corresponde a un estado mayormente entrelazado. Esta función no tiene una interpretación clara, sin embargo, nos ofrece una forma de medir entrelazamiento ya que se puede evaluar de forma exacta [39].

## 6.4. Separabilidad y entrelazamiento de estados gaussianos

La negatividad logarítmica es la función que se usa en este trabajo para cuantificar qué tan entrelazados están los pares de Hawking análogos. En los capítulos 4 y 5 se desarrolló la teoría del análogo óptico en términos de estados gaussianos en QCV y con circuitos simplécticos bajo la parametrización en  $\bar{\mathbf{r}}$  y  $\sigma$ , pero (6.9) está en términos de  $\rho$ , por lo que ahora hay que traducirla en términos de los momentos estadísticos. Inicialmente los estados de entrada en la fibra no están entrelazados, por lo que (6.8) y (6.9) serán nulos, sin embargo, la acción de los compresores en los horizontes de eventos del BH y WH producirán los pares de Hawking entrelazados. La matriz de covarianza del estado gaussiano de salida tendrá correlaciones en las submatrices fuera de la diagonal y son correlaciones de subsistemas a pares. Los resultados obtenidos en este trabajo sobre el entrelazamiento de la radiación de Hawking se presentan en el siguiente capítulo. Ahora se concluye con el procedimiento para calcular la negatividad logarítmica.

La matriz de covarianza de un sistema bipartita entrelazado se puede descomponer en submatrices como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_A & \sigma_{AB} \\ \sigma_{AB}^\top & \sigma_B \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

con  $\sigma_A, \sigma_B$  las matrices de covarianza local de un solo modo y  $\sigma_{AB}$  la correlación de ambos modos. Cuando  $\sigma_{AB} = 0$  el sistema es separable como en (4.83), pero este caso es trivial al ser el del estado inicial que sabemos y es separable. El primer momento estadístico  $\bar{\mathbf{r}}$ , es afectado por LOCC y cualquier cantidad que sea modificada no puede ser usada como medida de entrelazamiento, pues no queremos que el resultado sea afectado por los observadores.

### 6.4.1. Negatividad logarítmica para estados gaussianos

Dos criterios suficientes para garantizar la separabilidad de un sistema bipartita es que se cumpla que  $\sigma \geq 1$  (que el eigenvalor más pequeño de  $\sigma$  sea mayor a 1) o que  $\det \sigma_{AB} \geq 0$ , sin embargo, hay una forma computacionalmente más sencilla y más general de saber si hay entrelazamiento, a través de la representación del estado gaussiano de  $n$ -modos (4.61) en términos de los eigenvalores simplécticos de la matriz de su covarianza (4.62) [39]:

$$\rho_G = \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}^\dagger \hat{S}^\dagger \left[ \bigotimes_{l=1}^n \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_l + 1} \left( \frac{\lambda_l - 1}{\lambda_l + 1} \right)^n |n\rangle_u \langle n| \right) \right] \hat{S} \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}. \quad (6.11)$$

Para calcular  $E_{\mathcal{N}}$  como en (6.9) debemos obtener la traspuesta parcial (6.11). Esta queda como

$$\rho_G^T = \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}^\dagger \hat{S}^\dagger \left[ \bigotimes_{l=1}^{n+m} \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(\bar{\lambda}_l - 1)^n}{(\bar{\lambda}_l + 1)^{n+1}} |n\rangle_u \langle n| \right) \right] \hat{S} \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}, \quad (6.12)$$

donde  $\{\bar{\lambda}_l | l = 1, \dots, n + m\}$  es conjunto de eigenvalores simplécticos de la matriz de covarianza parcialmente transpuesta  $\sigma^T$  la cual se obtiene mediante

$$\sigma^T = T\sigma T, \quad T = \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{I}_2 \otimes \bigoplus_{j=1}^m \sigma_z. \quad (6.13)$$

La norma de  $\rho_G$  resultante de tomar (6.12) resulta en

$$\|\rho_G^T\|_1 = \prod_{j=1}^{n+m} \max \left\{ 1, \frac{1}{\bar{\lambda}_j} \right\}. \quad (6.14)$$

La negatividad logarítmica queda como [39–41]

$$E_{\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{m+n} \max \{ 0, -\log_2(\bar{\lambda}_k) \}. \quad (6.15)$$

En particular nos restringiremos a calcular el entrelazamiento en sistemas bipartitas correspondiente a los pares de Hawking, basta con analizar la matriz reducida de  $\sigma$  a pares de los modos de interés. Para calcular la negatividad logarítmica del caso general bipartita (6.10) es necesario obtener los eigenvalores simplécticos  $\bar{\lambda}$ 's, que resultan ser soluciones del polinomio [37, 40]:

$$\bar{\lambda}^4 + (\det\sigma_A + \det\sigma_B - 2\det\sigma_{AB})\bar{\lambda}^2 + \det\sigma = 0, \quad (6.16)$$

las soluciones de esta ecuaciones vienen a pares como  $\pm i\lambda_j$ .



# Capítulo 7

## Modelos análogos con circuitos simplécticos

En el capítulo 5 se construyeron los circuitos simplécticos más generales de análogos de BH, WH y el par BH-WH partiendo del caso astrofísico. En este capítulo usamos estos circuitos con los que se obtienen resultados sobre el número promedio de partículas producidas y el entrelazamiento entre los pares de Hawking con la teoría de estados gaussianos en QCV. El algoritmo numérico que se sigue en todos los casos presentados es el mismo: Primero proponemos los momentos estadísticos  $\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}}$  y  $\sigma^{\text{in}}$  del estado gaussiano de entrada o *input*, luego los mapeamos al estado gaussiano de salida o *output*  $\bar{\mathbf{r}}^{\text{out}}$  y  $\sigma^{\text{out}}$  mediante la matriz de dispersión asociada al circuito simpléctico de interés. A estos los podemos reducir a los subsistemas que componen al sistema (sistemas locales) para obtener el número promedio de partículas producidas en cada modo. Con las matrices reducidas de la matriz de covarianza podemos calcular el entrelazamiento de los sistemas bipartitas asociados a los pares de Hawking. Finalmente, mediante el criterio PPT obtenemos los eigenvalores simplécticos de la transposición parcial para poder calcular la negatividad logarítmica.

Los resultados presentados a continuación se obtuvieron al estudiar cada uno de los circuitos con composiciones de estados gaussianos de entrada presentados en la tabla 7.1.

### 7.1. Circuitos análogos ópticos

En el capítulo 5 se construyeron los arreglos de circuitos análogos mínimos para describir el efecto Hawking más general (figuras 5.6a, 5.6c y 5.7). Estos consisten en arreglos de amplificadores paramétricos que producen los pares entrelazados, y divisores de haz, cuyo propósito es describir el proceso de dispersión entre modos acoplados (*backreaction*). El modelo ideal de WH consiste únicamente en un amplificador paramétrico tal que la radiación emitida es la de un cuerpo negro, pero el introducir el divisor de haz al circuito disminuye la eficiencia por un segundo proceso de dispersión, y la producción de radiación estará mermada, por lo que emisión de un cuerpo gris. Como ya sabemos, los circuitos de BH, WH y el par BH-WH sufren de *backreaction*, por lo que son todos cuerpos grises, sin embargo, se ha observado que la interacción del modo  $\omega_2$  con el resto de pulsos es tan baja, que la probabilidad de

Estado	$\bar{\mathbf{r}}$	$\sigma$
Vacío	(0,0)	$\mathbb{I}_2$
Coherente	$(q_\alpha, p_\alpha)$	$\mathbb{I}_2$
Comprimido	(0,0)	$\text{diag}(e^{2s}, e^{-2s})$
Térmico	(0,0)	$\text{diag}(2\bar{n} + 1, 2\bar{n} + 1)$

Cuadro 7.1: Momentos estadísticos de estados gaussianos unimodales.

que se disperse al modo en algún otro es prácticamente nula [17, 20], de hecho, lo usual es eliminar el modo  $\omega_2$  de los análisis teóricos y experimentales. Con esta condición podemos eliminar los divisores de haz de nuestros circuitos, como se muestra en las figuras 7.1b, 7.1d y 7.4.

Comenzaremos por el estado gaussiano más simple en el que todos los modos de entrada se encuentran en el vacío. Para este caso en particular enfatizaremos los pasos mencionados en el algoritmo con la finalidad de demostrar algunas de las propiedades de estados gaussianos y transformaciones simplécticas vistas en los capítulos anteriores. En el resto de casos solo presentaremos los resultados, pues el algoritmo es siempre el mismo.

## 7.2. Entrada: estado de vacío

Supongamos que los cuatro modos de entrada en la fibra se encuentran en el estado de vacío. De la tabla 7.1 y de (4.83) tenemos que los momentos estadísticos son

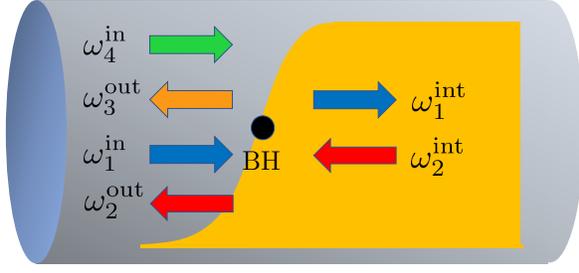
$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \bigoplus_{j=1}^4 \bar{\mathbf{r}}_j^{\text{in}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^8, \quad \sigma^{\text{in}} = \bigotimes_{j=1}^{\text{in}} \sigma_j = \mathbb{I}_8. \quad (7.1)$$

Este estado gaussiano en cualquiera de los circuitos producirá radiación de Hawking espontánea. Ahora hagamos evolucionar este estado en cada uno de los circuitos.

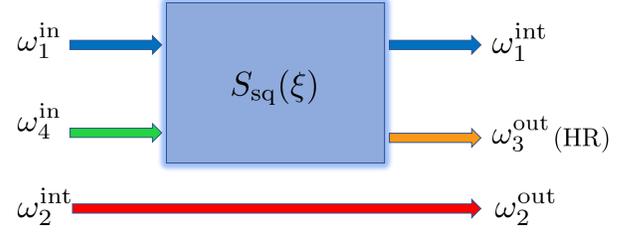
### 7.2.1. Circuito BH con estado de vacío

El modelo de BH descrito aquí consiste en un compresor con los modos de entrada  $\omega_1^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$  y los modos de salida  $\omega_3^{\text{out}}$  y  $\omega_1^{\text{int}}$ . El modo  $\omega_3^{\text{out}}$  es el de radiación de Hawking como se muestra en 7.1b. Al eliminar la dispersión clásica, el modo  $\omega_2$  no interactúa con ningún otro, como se observa en el circuito de la figura 7.1b.

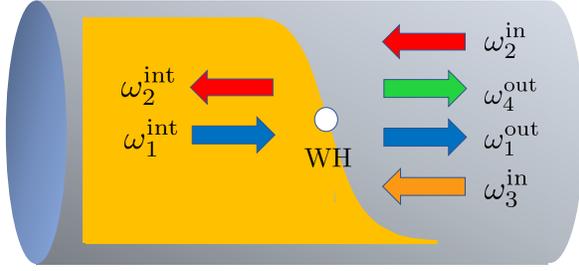
El estado inicial no está entrelazado ya que su matriz de covarianza es diagonal con  $\lambda_j = 1, \forall j$ . El efecto Hawking ocurre cuando el estado inicial (7.1) es transformado por la matriz de dispersión asociada al circuito simpléctico 7.1b. Esta transformación está dada por la matriz



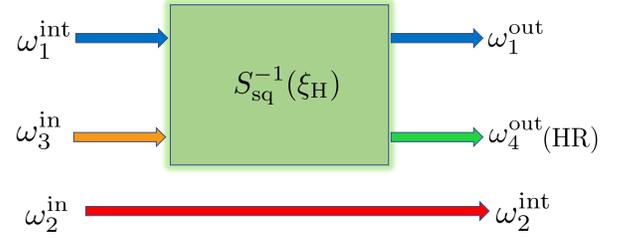
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 7.1: (a) BH en una fibra óptica. (b) circuito simpléctico del BH óptico en el que se desprecia la dispersión por *backreaction*. (c) WH en una fibra óptica. (d) Circuito simpléctico del WH sin *backreaction*.

$$S_{\text{sq}}(\xi_H) = \begin{pmatrix} \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh(\xi_H) & 0 \\ 0 & \cosh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sinh(\xi_H) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) & 0 \\ 0 & -\sinh(\xi_H) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(\xi_H) \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

la cual actúa como compresor para el par de modos  $(\omega_1^{\text{in}}|\omega_4^{\text{in}})$  y es el operador identidad para  $(\omega_2^{\text{in}}|\omega_3^{\text{in}})$ . Los momentos estadísticos se transforman como en (5.18), entonces se tiene

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{out}} = S_{\text{sq}}(\xi_H)\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \mathbf{0}, \quad (7.3)$$

$$\sigma^{\text{out}} = S_{\text{sq}}(\xi_{\text{H}}) \mathbb{I}_8 S_{\text{sq}}^{\text{T}}(\xi_{\text{H}})$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(2\xi_{\text{H}}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh(2\xi_{\text{H}}) & 0 \\ 0 & \cosh(2\xi_{\text{H}}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \sinh(\xi_{\text{H}}) \cosh(\xi_{\text{H}}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(2\xi_{\text{H}}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(2\xi_{\text{H}}) & 0 \\ 0 & -2 \sinh(\xi_{\text{H}}) \cosh(\xi_{\text{H}}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(2\xi_{\text{H}}) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

La matriz de covarianza de salida se puede escribir en términos de las submatrices de covarianza de cada subsistema local, es decir, de cada uno de los modos y de sus correlaciones como se sigue

$$\sigma^{\text{in}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\omega_1}^{\text{in}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_2}^{\text{in}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\omega_3}^{\text{in}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_4}^{\text{in}} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\omega_1}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{1,2}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{1,4}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{1,3}}^{\text{out}} \\ \sigma_{\omega_{2,1}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_2}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{2,4}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{2,3}}^{\text{out}} \\ \sigma_{\omega_{4,1}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{4,2}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_4}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{4,3}}^{\text{out}} \\ \sigma_{\omega_{3,1}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{3,2}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{3,4}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_3}^{\text{out}} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

donde las submatrices fuera de la diagonal cumplen con  $\sigma_{\omega_{j,i}}^{\text{out}} = (\sigma_{\omega_{i,j}}^{\text{out}})^{\text{T}}$  y son las correlaciones. Cuando estas submatrices son no nulas significa que hay entrelazamiento entre pares de modos.

## Partículas emitidas

Con los momentos estadísticos de salida podemos calcular el número promedio de fotones por unidad de tiempo por frecuencia producidos en cada subsistema con la ecuación [16, 41]:

$$\langle n_{\omega_i}^{\text{out}} \rangle = \frac{1}{4} \text{Tr} \sigma_i^{\text{out}} + \bar{\mathbf{r}}_i^{\text{out}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}_i^{\text{out}})^{\text{T}} - \frac{1}{2}, \quad (7.6)$$

entonces

$$\begin{aligned} n_{\omega_3}^{\text{out}} &= n_{\text{H}} = \sinh^2(\xi_{\text{H}}), \\ n_{\omega_1}^{\text{out}} &= n_{\text{p}} = \sinh^2(\xi_{\text{H}}), \\ n_{\omega_2}^{\text{out}} &= n_{\omega_4}^{\text{out}} = 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde  $n_{\omega_3}^{\text{out}} = n_{\text{H}}$ , refiriéndonos a que se trata del modo asociado a la radiación de Hawking y  $n_{\omega_1}^{\text{out}} = n_{\text{p}}$  en referencia al compañero (*partner* de Hawking). En los modos ( $\omega_2^{\text{out}} | \omega_4^{\text{out}}$ ) no hay producción de fotones, tal como se esperaba, pues ninguno de estos modos se ve amplificado por el compresor, por lo que el número de fotones de entrada y salida es cero. El promedio de fotones en los modos  $\omega_1^{\text{out}}$  y  $\omega_4^{\text{out}}$  es idéntica. En este caso es el vacío el que se amplifica y se crean pares al mismo ritmo en ambas salidas. El modo 3-out es el de la radiación de

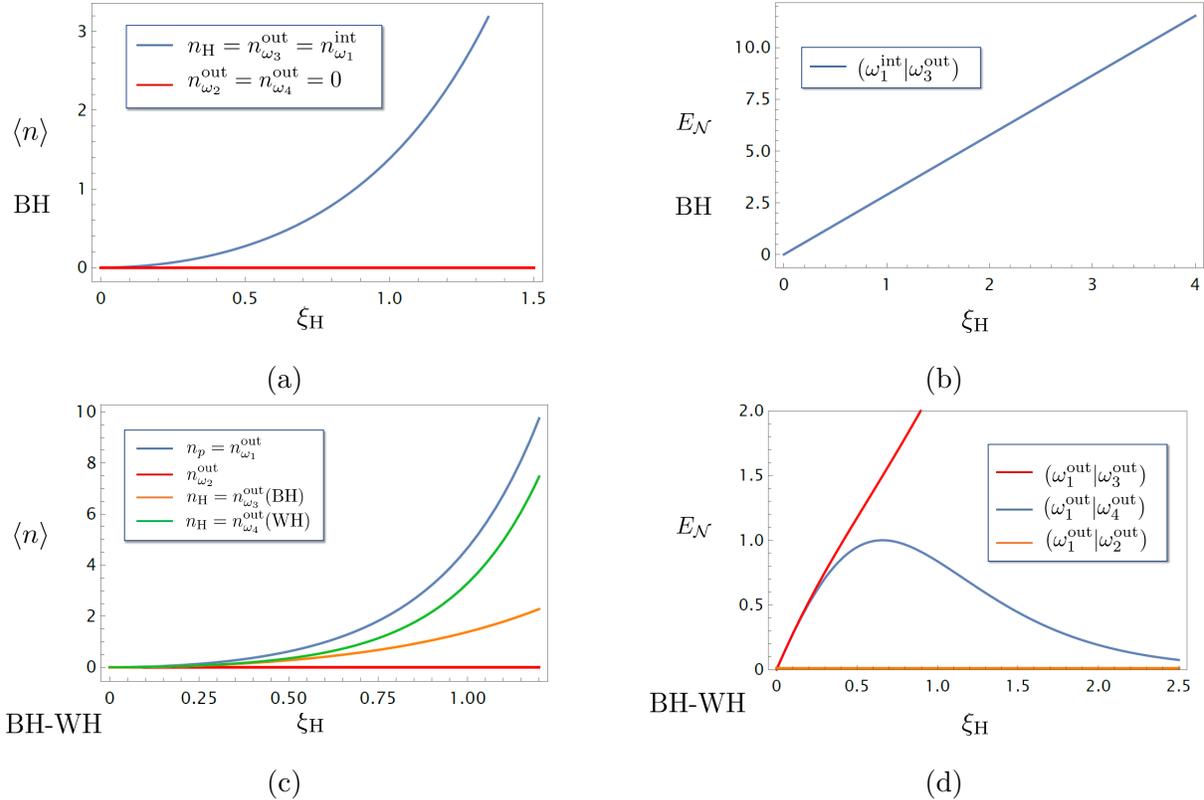


Figura 7.2: Estado de vacío. (a) Promedio de número de fotones producidos por el BH (y WH) en el estado gaussiano de vacío como función de  $\xi_H$ . (b) Negatividad logarítmica entre los pares de Hawking del BH (WH). (c) Promedio de número de fotones por unidad producidos por el circuito par BH-WH. (d) Negatividad logarítmica entre los pares de Hawking de cada horizonte en el circuito BH-WH.

Hawking y 1-out es el compañero de Hawking que cruza el horizonte. Como en el BH no hay *backreaction* si despreciamos  $\omega_2$ , entonces el espectro debería ser de cuerpo negro. Esto se verifica considerando la relación  $\tanh^2(\xi_H) = e^{-\omega/T_H}$ , y sustituyendo en (7.7) se obtiene la distribución planckiana

$$n_H = n_{\omega_3}^{\text{out}} = \frac{1}{e^{\omega/T_H} - 1}, \quad (7.8)$$

es decir, que la radiación de Hawking es térmica.

El promedio de número de fotones depende del factor de compresión  $\xi_H$ . Entre mayor sea el factor de compresión, mayor será el número de pares producidos, es decir, que la interacción entre los pulsos de prueba-bombeo será mayor, lo que propicia el incremento en la producción de pares, como se ve en la figura 7.2a.

## Entrelazamiento

Las submatrices de correlación entre el par de modos  $(\omega_1^{\text{int}} | \omega_3^{\text{out}})$  no son nulas, por lo que existe entrelazamiento en esta bipartición. Esto ya se esperaba, pues ya sabíamos que el

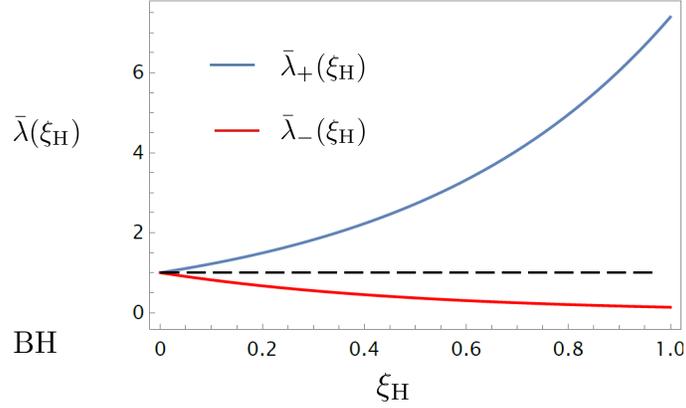


Figura 7.3: Parte imaginaria de los eigenvalores simplécticos del subsistema  $\bar{\sigma}_{1-3}^{\text{out}}$ . El eigenvalor  $\bar{\lambda}_- < 1, \forall \xi_H$ , por lo que hay entrelazamiento.

compresor se encarga de producir pares de fotones entrelazados. La matriz de dispersión mapea al estado gaussiano en otro estado gaussiano pues esta matriz es una transformación simpléctica en el espacio fase. Los estados gaussianos se caracterizan por tener matrices de covarianza definidas positivas, y su espectro simpléctico cumple con la condición (4.63). Se tiene que  $\sigma^{\text{out}} = S_{\text{sq}}(\xi_H) \mathbb{I}_8 S_{\text{sq}}^T(\xi_H)$  como en (4.62), por lo que los eigenvalores simplécticos del estado son  $\lambda_j = 1$  y está ocho veces degenerado. Para calcular el entrelazamiento de los pares de Hawking es necesario reducir la matriz de covarianza  $\sigma^{\text{out}}$  a la del sistema bipartita enredado de la forma (6.10). La matriz reducida para los modos 1-out y 3-out es

$$\sigma_{1-3}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \sigma_{\omega_1}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_{1,3}}^{\text{out}} \\ \sigma_{\omega_{3,1}}^{\text{out}} & \sigma_{\omega_3}^{\text{out}} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

donde

$$\sigma_{\omega_1}^{\text{out}} = \sigma_{\omega_3}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \cosh(2\xi_H) & 0 \\ 0 & \cosh(2\xi_H) \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\omega_{1,3}}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} \sinh(2\xi_H) & 0 \\ 0 & -2 \sinh(\xi_H) \cosh(\xi_H) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Para obtener el espectro simpléctico de la matriz de covarianza transpuesta  $\bar{\sigma}_{1-3}^{\text{out}}$  usamos la ecuación (6.16) y como resultado tenemos los eigenvalores

$$\pm i \bar{\lambda}_+(\xi_H) = \pm \frac{\sqrt{\sinh(2\xi_H) - \cosh(2\xi_H)}}{\sqrt{\sinh(\xi_H) + \cosh(2\xi_H)}}, \quad \pm i \bar{\lambda}_-(\xi_H) = \pm \frac{\sqrt{-\sinh(2\xi_H) - \cosh(2\xi_H)}}{\sqrt{\cosh(2\xi_H) - \sinh(2\xi_H)}}. \quad (7.11)$$

De (6.15) tenemos que la negatividad logarítmica es

$$E_{\mathcal{N}} = F(\bar{\lambda}_+) + F(\bar{\lambda}_-), \quad (7.12)$$

con

$$F(\bar{\lambda}_{\pm}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{\lambda}_{\pm} \geq 1 \\ -\log_2(\bar{\lambda}_{\pm}), & \text{si } \bar{\lambda}_{\pm} < 1. \end{cases} \quad (7.13)$$

Solo hay entrelazamiento si se cumple que  $\bar{\lambda}_{\pm} < 1$ . Vemos que esto lo cumple el eigenvalor  $\bar{\lambda}_-$  como se puede ver en la figura 7.3.

Vemos en la figura 7.2b que el entrelazamiento aumenta de forma monótona con el factor de compresión de  $\xi_H$ . No hay entrelazamiento cuando  $\xi_H = 0$ . Este es el caso de propagación libre de los modos en la fibra donde no hay compresores, entonces no hay ningún proceso que produzca entrelazamiento ni pares de fotones. La intensidad de interacción depende del factor de compresión, que a su vez depende de la amplitud del pulso de bombeo y de la no-linealidad del medio. En cuanto mayores sean estos, mayor será el entrelazamiento y por ende, mayor certeza de que la radiación que se está emitiendo es de Hawking.

### 7.2.2. Circuito WH con estado de vacío

Al eliminar el divisor de haz, eliminamos el acoplamiento entre los modos  $\omega_2^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$ , es decir, que ahora el WH es simétrico al BH, por lo que los resultados que se presentaron en la sección anterior aplican también para el WH.

En todos los casos se observó que los resultados de número promedio de partículas y de negatividad logarítmica entre los pares de Hawking es el mismo para los circuitos de BH y WH cuando eliminamos *backreaction*, con la diferencia entre los modos de entrada y salida en ambos circuitos si consideramos los cambios  $\omega_1^{\text{in}} \rightarrow \omega_3^{\text{in}}$ ,  $\omega_3^{\text{out}} \rightarrow \omega_4^{\text{out}}$  y  $\omega_1^{\text{int}} \rightarrow \omega_1^{\text{out}}$ . Por esta razón solo se presentan los resultados del BH de aquí en adelante.

### 7.2.3. Circuito BH-WH con estado de vacío

La dinámica del sistema considerando el par BH-WH cambia debido a la interacción de los pulsos con ambos horizontes. En este caso se produce efecto Hawking espontáneo en el WH por el modo  $\omega_3^{\text{in}}$  y una amplificación producido por el modo  $\omega_1^{\text{int}}$  producido por el BH. Esto implica que el número de fotones producidos en el WH debe superar a los producidos por el BH. Sabiendo que el compresor amplifica el número de fotones de entrada, y siguiendo la trayectoria de los modos en el circuito 7.4, podemos estimar en qué modos habrá más o menos intensidad. El BH produce radiación térmica (7.8). El modo  $\omega_1^{\text{in}}$  se amplifica por el BH y cae la región entre horizontes como  $\omega_1^{\text{int}}$ . Luego estimula al WH, provocando una amplificación de sí mismo al salir del WH y también amplifica a  $\omega_4^{\text{out}}$ , entonces debe cumplirse que  $n_3^{\text{out}} < n_4^{\text{out}} < n_1^{\text{out}}$ . El promedio de fotones en cada modo de este sistema son

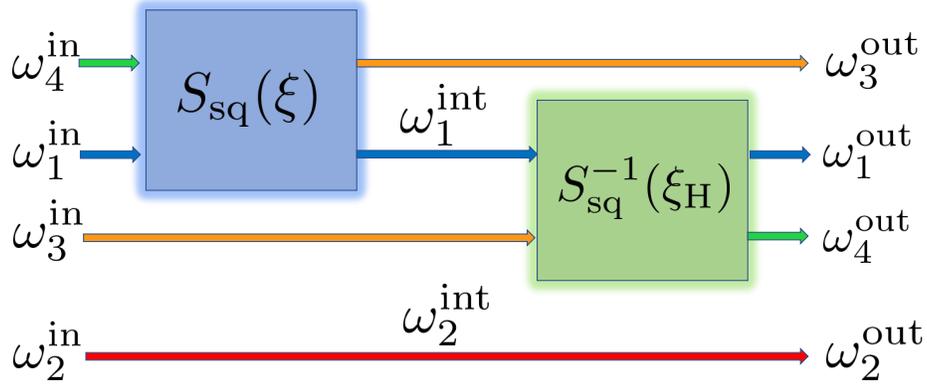


Figura 7.4: Circuito simpléctico del par BH-WH. Este resulta de la figura 5.7 al despreciar la dispersión *backreaction*.

$$\begin{aligned}
 n_{\omega_1}^{\text{out}} &= \frac{1}{2}[3 + \cosh(2\xi_H)] \sinh^2(\xi_H), \\
 n_{\omega_2}^{\text{out}} &= 0, \\
 n_{\omega_3}^{\text{out}} &= n_H = \sinh^2(\xi_H), \\
 n_{\omega_4}^{\text{out}} &= \cosh^2(\xi_H) \sinh^2(\xi_H).
 \end{aligned}
 \tag{7.14}$$

En la figura 7.2c se muestra el número promedio de fotones producidos y vemos que se cumple la predicción. Cabe resaltar que se intuyó el cómo se amplificarían los modos con tan solo ver el circuito simpléctico y entendiendo el proceso de amplificación paramétrica, mostrando así su gran utilidad a pesar de ser simple. En este caso se cumple que  $n_{\omega_1}^{\text{out}} = n_{\omega_3}^{\text{out}} + n_{\omega_4}^{\text{out}}$ , es decir, que hay conservación de la norma en el proceso de dispersión [20].

El entrelazamiento del par  $(\omega_1^{\text{out}}|\omega_3^{\text{out}})$  en el circuito de BH (figura 7.7) con el circuito BH-WH (figura 7.2d) no cambia, pues no hay ningún pulso producido en el WH que lo modifique. Sin embargo, la negatividad logarítmica del par  $(\omega_1^{\text{out}}|\omega_4^{\text{out}})$  decrece con el aumento del factor de compresión (figura 7.2d). Esto parece contradecir lo mencionado en la sección anterior, pero no es así. El WH produce radiación de Hawking espontánea y los pares producidos deberían tener un entrelazamiento monótono y creciente como en el BH, sin embargo este disminuye cuando la estimulación es provocada por radiación térmica proveniente del BH [16, 17].

Para entender como la radiación térmica produce decoherencia, en la ref. [16] se presenta un ejemplo de un sistema bipartita inmerso en un baño térmico y comprimido en uno de sus modos. La matriz de covarianza es

$$\sigma^{\text{in}} = (1 + 2n_{\text{env}})\text{diag}(e^{2g}, e^{-2g}, 1, 1),
 \tag{7.15}$$

donde  $n_{\text{env}}$  es el promedio de número de fotones térmicos en el ambiente o en el baño térmico

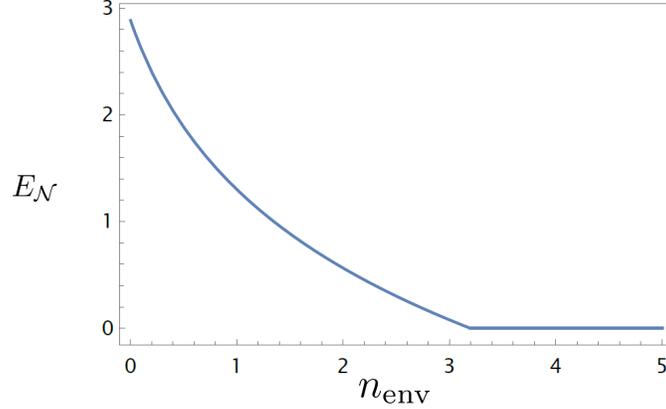


Figura 7.5: Disminución y extinción de entrelazamiento debido a la radiación térmica, donde  $n_{\text{env}}$  es el promedio de fotones del ambiente.

donde se encuentre inmerso el sistema. La negatividad logarítmica de este estado es

$$E_{\mathcal{N}} = \max \{0, -\log_2[(2n_{\text{env}} + 1)ee^{-2g}]\}. \quad (7.16)$$

La negatividad logarítmica no solo disminuye con  $n_{\text{env}}$ , si no que se hace nula, destruyendo el entrelazamiento., como se observa en la figura 7.5. La radiación térmica del modo  $\omega_1^{\text{int}}$  estimula al WH y a su vez, disminuye el entrelazamiento.

### 7.3. Entrada: estado coherente

Ahora supongamos que en el modo  $\omega_1^{\text{in}}$  se envía un estado coherente para estimular al BH y el resto de los modos de entrada están en el estado de vacío. Los momentos estadísticos de este estado gaussiano son

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = (q_\alpha, p_\alpha, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \alpha = q_\alpha + ip_\alpha, \quad \sigma^{\text{in}} = \mathbb{I}_8. \quad (7.17)$$

El número promedio de fotones del estado coherente de entrada es

$$n_{\omega_1}^{\text{in}} = q_\alpha^2 + p_\alpha^2 = |\alpha|^2. \quad (7.18)$$

Este resultado nos ayuda a modular el número de fotones de entrada. Tenemos que  $\alpha = q_\alpha + ip_\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ , con  $|\alpha| = \sqrt{q_\alpha^2 + p_\alpha^2}$ .

#### 7.3.1. Circuito BH (o WH) con estado coherente

La matriz de covarianza inicial del este estado es igual a la del caso anterior (7.1), por lo que la matriz de salida también es (7.4). El primer momento estadístico de salida es

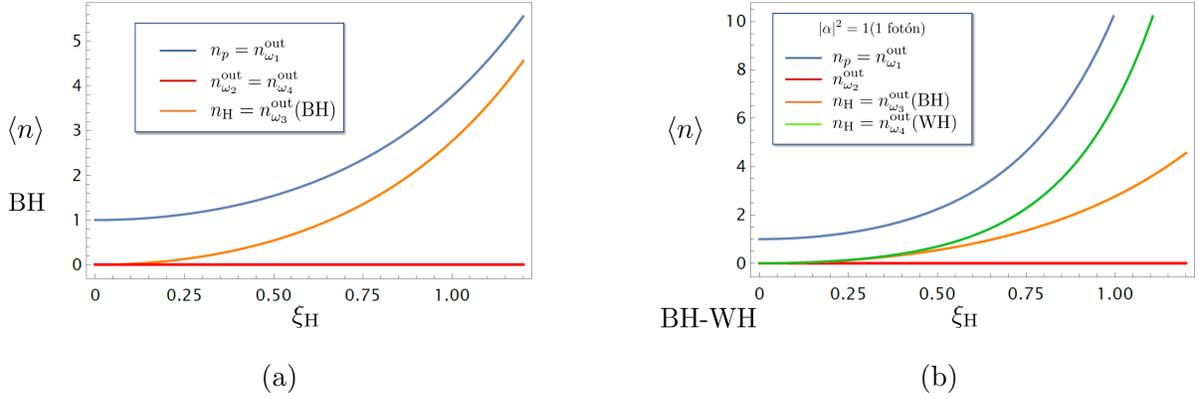


Figura 7.6: (a) Promedio de número de fotones por unidad tiempo por unidad de frecuencia producidos por el BH (y WH) para un estado coherente de un fotón en el modo  $\omega_1^{\text{in}}$  como función de  $\xi_H$ . (b) Promedio de fotones como función producidos en el circuito BH-WH con un fotón de entrada en  $\omega_1^{\text{in}}$ .

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{out}} = (q_\alpha \cosh(\xi_H), p_\alpha \cosh(\xi_H), 0, 0, 0, 0, q_\alpha \sinh(\xi_H), -p_\alpha \sinh(\xi_H)). \quad (7.19)$$

La matriz de covarianza es idéntica al caso del vacío, por lo que  $\sigma^{\text{out}}$  es (7.4). Entonces el número promedio de partículas de salida es

$$\begin{aligned} n_{\omega_1}^{\text{out}} &= (p_\alpha^2 + q_\alpha^2) \cosh^2(\xi_H) + \sinh^2(\xi_H) = n_{\omega_1}^{\text{in}} + (n_{\omega_1}^{\text{in}} + 1) \sinh^2(\xi_H), \\ n_{\omega_3}^{\text{out}} &= n_H = (p_\alpha^2 + q_\alpha^2 + 1) \sinh^2(\xi_H) = (n_{\omega_1}^{\text{in}} + 1) \sinh^2(\xi_H), \\ n_{\omega_2}^{\text{out}} &= n_{\omega_4}^{\text{out}} = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Un caso aplicable en laboratorio es el de un estado coherente de un fotón de entrada. El estado de número  $|1\rangle$  no puede usarse como entrada pues por definición no es un estado gaussiano: no es el estado base del hamiltoniano del oscilador armónico libre y su función de Wigner no es una función gaussiana en el espacio fase. El estado coherente de un fotón se logra si  $n_{\omega_1}^{\text{in}} = |\alpha|^2 = 1$ . El promedio de número de partículas producidas por efecto Hawking con esta condición, usando (7.20), resulta en

$$\begin{aligned} n_{\omega_1}^{\text{out}} &= n_p = 1 + 2 \sinh^2(\xi_H), \\ n_{\omega_3}^{\text{out}} &= n_H = 2 \sinh^2(\xi_H). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Observamos que el promedio de fotones producidos en  $\omega_1^{\text{out}}$  es mayor al de radiación de Hawking  $\omega_3^{\text{out}}$  por un fotón. Este fotón extra es el que enviamos en la entrada  $\omega_1^{\text{in}}$  y sale en  $\omega_1^{\text{out}}$  con una amplificación. La producción de pares de partículas es la misma en ambos canales de salida. Comparando (7.20) con (7.7) vemos que el ritmo de amplificación de pares del fotón coherente duplica al del vacío. El ritmo de amplificación depende de cuantos fotones de entrada enviamos en el canal, tal como se ve de (7.20). Entre más fotones enviamos de entrada, mayor será la amplificación en ambos canales, pues cada uno de ellos deberá ser amplificado.

## Entrelazamiento

Sabemos que el entrelazamiento no puede depender de cantidades que se puedan modificar por LOCC, por lo que el primer momento  $\bar{\mathbf{r}}$  no juega ningún papel en el cálculo del entrelazamiento, solo importa  $\sigma$ . De la tabla 7.1 vemos que el estado vacío y el coherente tienen misma matriz de covarianza sin importar el número de fotones inicial. Recordemos que un estado coherente se define como un desplazamiento del vacío y el desplazamiento está reflejado en  $\bar{\mathbf{r}}$ , por lo que ambos estados gaussianos tienen misma matriz de covarianza, es decir, el entrelazamiento en ambos casos es el mismo. No importa si los estados de entrada  $\omega_1^{\text{in}}$  y  $\omega_4^{\text{in}}$  en el compresor son estados de vacío o coherentes, los pares de partículas producidos tendrán el mismo grado de entrelazamiento. Más aún, no importa el número de fotones del estado coherente inicial, ni cuántos fotones se produzcan por amplificación paramétrica, el entrelazamiento entre el par de Hawking siempre será el mismo.

### 7.3.2. Circuito BH-WH con estado coherente

De nuevo observamos un incremento en los promedios de fotones producidos (figura 7.6b) en comparación con el estado de vacío (figura 7.2c), pues depende del número de fotones inicial. La negatividad logarítmica toma los mismos valores que en el caso del vacío (figura 7.2d).

Para este estado de entrada se cumple que  $n_{\omega_1}^{\text{out}} \approx n_{\omega_3}^{\text{out}} + n_{\omega_4}^{\text{out}}$ , para valores de  $\xi_H < 2$ , y para valores superiores se alcanza la conservación de la norma. El proceso de conversión de modos de frecuencia positiva a negativa produce partículas. Recordemos que eliminamos el proceso de backreaction entre los modos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Si consideramos esta interacción, obtendríamos un número mayor de partículas y así obtener conservación de norma. Aún así, esta interacción es irrelevante para el estudio de la radiación de Hawking.

## 7.4. Entrada: estado comprimido

Se propone ahora un estado inicial con el modo  $\omega_1^{\text{in}}$  con un vacío comprimido. Los momentos gaussianos de este estado son

$$\bar{\mathbf{r}}^{\text{in}} = \bigoplus_{j=1}^4 \bar{\mathbf{r}}_j^{\text{in}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^8, \quad \sigma^{\text{in}} = \text{diag}(e^{2s}, e^{-2s}, 1, 1, 1, 1, 1, 1). \quad (7.22)$$

El factor de compresión  $s$  es independiente del factor  $\xi_H$  de los compresores del circuito.

### 7.4.1. Circuito BH (o WH) con estado comprimido

Como antes, obtenemos numéricamente el promedio de fotones producidos y el entrelazamiento entre el par de Hawking. Para el caso del circuito BH obtuvimos varios resultados de estos variando el factor de compresión  $s$  del estado inicial. El promedio de partículas producidas es

$$\begin{aligned}
n_{\omega_1}^{\text{out}} &= \frac{1}{4} [(e^{-2s} + e^{2s}) \cosh^2(\xi_H) + \cosh(2\xi_H) - 3], \\
n_{\omega_3}^{\text{out}} &= \frac{1}{4} e^{-2s} (e^{2s} + 1)^2 \sinh^2(\xi_H), \\
n_{\omega_2}^{\text{out}} &= n_{\omega_4}^{\text{out}} = 0.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

En la figura 7.7a vemos el número promedio de fotones producido. Se observa que hay un aumento del promedio de partículas dependiente del factor de compresión inicial. Cuando  $s = 0$  se recupera el caso del vacío de la figura 7.2b. Cuando  $s > 0$  el promedio aumenta, es decir, la intensidad de partículas del par de Hawking se puede aumentar aún más si el modo de entrada está comprimido.

Con la negatividad logarítmica ocurre lo mismo. En la figura 7.7b se observa como el entrelazamiento aumenta cuando proponemos factores de compresión cada vez más grandes. Este efecto también se reporta en las refs. [16, 17]. Esto es importante, pues recordemos que para garantizar que la radiación emitida por la interacción de los pulsos es de Hawking, esta debe estar entrelazada. Si enviamos luz comprimida tenemos más entrelazamiento y en consecuencia, mayor certeza de que el efecto Hawking se manifieste. Un estado coherente comprimido en  $\omega_1^{\text{in}}$  es un estado gaussiano que tiene misma matriz de covarianza que el el vacío comprimido y tendríamos los mismos resultados.

Todos los cálculos numéricos referentes al caso comprimido presentados en la figura 7.7 se hicieron para factores de compresión  $s > 0$  en donde la cuadratura  $q$  se expande y  $p$  se comprime, y para  $s < 0$  donde ocurre lo contrario. El número promedio de fotones y entrelazamiento en cualquiera de los circuitos es el mismo sin importar el signo de  $s$ , por lo que no importa cuál de las cuadraturas se expanda o contraiga.

#### 7.4.2. Circuito BH-WH con estado comprimido

De las figuras 7.7c y 7.7d observamos el mismo comportamiento. Aunque de nuevo, la estimulación del WH debida a  $\omega_1^{\text{in}}$  disminuye por la radiación térmica emitida por el BH, podemos incrementarla con el factor  $s > 0$  en el rango de  $0 \leq \xi_H < 1$ .

Al igual que con el caso del estado coherente de 1 fotón, la conservación de la norma no se cumple hasta valores de  $\xi > 2$  por despreciar *backreaction* entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

### 7.5. Entrada: fluctuaciones térmicas isotrópicas

El estado (7.15) es un caso particular de un sistema bipartita donde se ha introducido ruido debido al baño térmico en el que se encuentra inmerso el sistema. Sabemos que a radiación térmica destruye el entrelazamiento (figuras 7.2d, 7.7d, 7.5) y el sistema de los cuatro modos con ruido térmico no es la excepción. De nuevo observamos incremento en la producción de fotones y aumento en el entrelazamiento del BH como en los demás casos, sin embargo, en el WH el entrelazamiento entre los pares ( $\omega_1^{\text{out}}|\omega_4^{\text{out}}$ ) desaparece con el incremento en  $n_{\text{env}}$ , justo como en la figura 7.5.

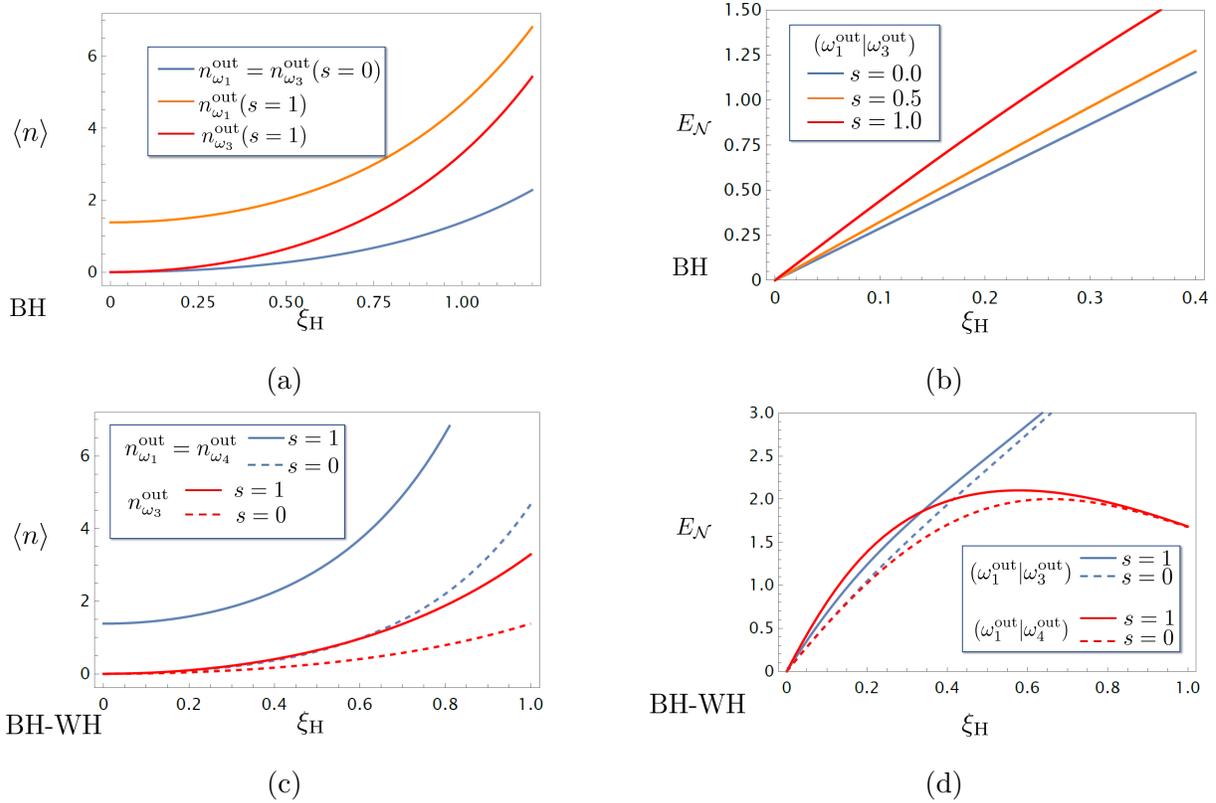


Figura 7.7: (a) Estado de entrada con el modo  $\omega_1$  comprimido. promedio de número de fotones emitidos por el BH. Vemos que hay un aumento dependiente del factor de compresión. (b) Negatividad logarítmica de los pares de Hawking del BH aumentan con la compresión. (c) Promedio de fotones emitidos por el par BH-WH. (d) Negatividad logarítmica entre los pares de Hawking para el par BH-WH. Observamos que el entrelazamiento aumenta con el factor de compresión del estado inicial.



# Capítulo 8

## Conclusiones

La teoría de variables cuánticas continuas QCV (*quantum continuous variables*) sobre estados gaussianos presentada en el capítulo 4, junto con la descripción de evolución de sistemas cuánticos en el espacio fase mediante transformaciones simplécticas vistas en el capítulo 5, nos permiten modelar las bases del sistema análogo de radiación de Hawking en fibras ópticas de una forma simple mediante circuitos simplécticos. Con estos es posible entender de forma gráfica y sencilla cómo se propagan los pulsos en la fibra, cómo ocurre el proceso de creación de pares de Hawking y la interacción de los pulsos que produce *backreaction* o dispersión clásica en agujeros negros (BH, *black hole*), agujeros blancos (WH, *white hole*), y el par agujeros negro-blanco (BH-WH). Este modelo posee la ventaja de ser computacionalmente muy simple, pues a diferencia de otros modelos basados en dispersión de funciones de onda como soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, los circuitos simplécticos solo involucran transformaciones matriciales. El costo de pasar de la descripción en funciones de onda a la de circuitos simplécticos implica entrar a la teoría QCV, que es más abstracta y físicamente menos intuitiva.

Para construir los circuitos simplécticos de los sistemas análogos es necesario conocer las direcciones de los modos que cumplen con las condiciones de empatamiento de fase en el sistema comóvil al pulso de bombeo. De esta manera sabremos cuáles son los pulsos asociados a los pares de Hawking de BH y WH y si existen acoplamientos entre los modos. En este trabajo nos basamos en la relación de dispersión del diamante para construir los circuitos. Existe un acoplamiento entre los modos  $\omega_1$  y  $\omega_4$  con  $\omega_2$ , sin embargo, esta dispersión es despreciable, pues el modo  $\omega_2$ , al tener una dirección inicial contraria a la del resto de modos, la probabilidad de que ocurra *backreaction* es muy baja. Si somos estrictos, este acoplamiento debería incluirse en los análisis con la finalidad de tener el sistema más general posible, que para los resultados que aquí presentamos resulta innecesaria.

Al despreciar *backreaction* se concluye que los circuitos de BH y WH se vuelven simétricos, y que los resultados numéricos presentados en este trabajo, sin importar cuales sean los estados gaussianos de entrada, el número promedio de partículas y negatividad logarítmica son exactamente iguales en ambos sistemas, aunque hay que tener en cuenta las diferencias. En el BH, los pares de Hawking se propagan en direcciones contrarias, uno de los fotones cae al interior del pulso de bombeo, mientras que otro se emite como radiación de Hawking. En el sistema del WH, el par de Hawking es emitido como radiación hacia el exterior, por lo tanto,

veríamos más partículas emitidas desde un WH que de un BH. Esto se sigue cumpliendo cuando consideramos el circuito par BH-WH.

Aunque en los sistemas BH y WH es posible producir radiación de Hawking espontánea, en el sistema par esto es más complicado. El BH puede producir radiación de Hawking espontánea que estimula al WH con el modo  $\omega_1^{\text{int}}$ , pero lo contrario no ocurre. Uno de los resultados es que el número promedio de partículas en el WH siempre es superior a las producidas en el BH debido a esta estimulación producida por la amplificación paramétrica en este horizonte. También se observa que el promedio de partículas aumenta de forma continua con el factor de compresión  $\xi_H$  de los amplificadores paramétricos. Este factor depende del efecto Kerr, es decir, que aumentando la intensidad del pulso de bombeo es posible crear una mayor cantidad de partículas. Cuánticamente esto implica que la interacción entre los pulsos de prueba-bombeo aumenta y, por lo tanto, habrá mayor amplificación.

La conservación de la norma se cumple en el caso de entrada de vacío, sin embargo, esto no se cumple para los estados de 1 fotón y de vacío, aunque los valores se aproximan bastante. Esto también se debe a que eliminamos *backreaction*, y aunque esto no afecta a la radiación de Hawking, pues interacción entre los modos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  es despreciable. Esto significa que se puede amplificar el número de fotones sin perder (ni ganar) entrelazamiento entre los pares de Hawking.

Al comparar el sistema par con vacío y con un fotón coherente de entrada llegamos a la conclusión de que el entrelazamiento es el mismo en ambos sistemas, aunque el número de partículas producidos no es igual. Vemos que el ritmo de amplificación de pares del fotón coherente duplica al del vacío, y se siguen duplicando sea cual sea el número de fotones de entrada del estado coherente.

Una de las grandes ventajas de este modelo es el análisis de entrelazamiento de los pares de Hawking. La entropía como cuantificador de entrelazamiento falla al considerar estados mezclados, por lo que se tuvo que recurrir a un método más avanzado como lo es el criterio de transposición parcial positiva PPT. La violación de este criterio es suficiente para determinar si una bipartición del estado cuántico se encuentra entrelazada, y el uso de la negatividad logarítmica funciona como una medida monótona creciente del grado de entrelazamiento. Se obtuvo que el entrelazamiento en el sistema BH (o WH) siempre aumenta con  $\xi_H$ , sea cual sea el estado gaussiano de entrada, sin embargo, esto no es así para el modelo par BH-WH. Se obtuvo que el entrelazamiento del par de Hawking en el WH aumenta y después comienza a disminuir de forma continua. Los análisis numéricos tienen problemas para obtener el entrelazamiento cuando  $\xi_H \approx 4$ , sin embargo, para valores menores a este es notable que el entrelazamiento del WH se disminuye casi en su totalidad a pesar de que aumenta el número de partículas. Esto significa que nuestro modelo predice que la formación de partículas se amplifica por la no linealidad, pero la naturaleza cuántica se pierde, por lo que el WH no producirá más radiación de Hawking.

Aunque los resultados son prometedores, no hay que perder de vista que no se comprobaron los resultados presentados de forma experimental, numérica o con alguna otra referencia. Para constatar que este modelo es capaz de reproducir y predecir resultados físicos reales del sistema análogo óptico, debe utilizarse algún modelo cuya validez haya sido comprobada. Los modelos más completos, y por lo tanto, más complicados, dependen de una cantidad de variables mucho mayores, asociadas a las propiedades del material dieléctrico y a los pulsos

de luz que se propagan en la fibra. La siguiente etapa de este trabajo consiste en encontrar un punto de partida que nos permita relacionar las variables de ambos modelos para así proponer un circuitos más refinados que nos permitan expandir su alcance predictivo. Esto se pretende lograr mediante el modelo de la ref. [15], en donde se usa un modelo microscópico del dieléctrico. La interacción relativista de los pulsos se propone mediante una densidad lagrangiana, con la que se deriva una ecuación diferencial de cuarto orden que describe la propagación de los modos.

Algunos resultados obtenidos en este trabajo son cuestionables, pues el modelo de circuitos simplécticos es todavía una idealización de un sistema realmente complicado. Por ejemplo, se llegó a la conclusión de que el espectro emitido por efecto Hawking es cercano al térmico en el marco comóvil. Otra de las conclusiones en este trabajo fue que la radiación térmica disminuye el entrelazamiento de los pares de Hawking del WH, pero si realmente la radiación que estimula al WH no es térmica, tal vez haya diferencias entre el grado de entrelazamiento real y el que se predice por negatividad logarítmica. Estos no son motivos para descartar la validez del modelo en circuitos simplécticos, al contrario, es una muestra de que aún hay mucho trabajo por hacer para refinar el modelo que, en caso de lograrse, resultaría en una herramienta poderosa para estudiar el análogo en fibras ópticas, y tal vez sea útil para estudiar sistemas análogos de distinta naturaleza.



# Bibliografía

- [1] A. Alberdi and A.A. Odriozola. *Los agujeros negros: Las fuerzas extremas de La gravedad*. National Geographic. RBA Coleccionables, 2015, Navarra, ES .
- [2] Stephen W Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
- [3] Viatcheslav Mukhanov and Sergei Winitzki. *Introduction to quantum effects in gravity*. 2007, Cambridge, England.
- [4] GC Bower. Focus on first Sgr A\* results from the event horizon telescope. *The Astrophysical Journal Letters*, 930(2), 2022.
- [5] William G Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Physical Review D*, 14(4):870, 1976.
- [6] Carlos Barceló, Stefano Liberati, and Matt Visser. Analogue gravity. *Living Reviews in Relativity*, 14(1):1–159, 2011.
- [7] Juan Ramón Muñoz de Nova, Katrine Golubkov, Victor I Kolobov, and Jeff Steinhauer. Observation of thermal Hawking radiation and its temperature in an analogue black hole. *Nature*, 569(7758):688–691, 2019.
- [8] Thomas G Philbin, Chris Kuklewicz, Scott Robertson, Stephen Hill, Friedrich König, and Ulf Leonhardt. Fiber-optical analog of the event horizon. *Science*, 319(5868):1367–1370, 2008.
- [9] Jonathan Drori, Yuval Rosenberg, David Bermudez, Yaron Silberberg, and Ulf Leonhardt. Observation of stimulated Hawking radiation in an optical analogue. *Physical Review Letters*, 122(1):010404, 2019.
- [10] E Rubino, J McLenaghan, SC Kehr, F Belgiorno, David Townsend, S Rohr, CE Kuklewicz, U Leonhardt, F König, and D Faccio. Negative-frequency resonant radiation. *Physical Review Letters*, 108(25):253901, 2012.
- [11] Fabio Biancalana. Negative frequencies get real. *Physics*, 5:68, 2012.
- [12] JJ Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review*, 112(5):1555, 1958.
- [13] Stefano Finazzi and Iacopo Carusotto. Quantum vacuum emission in a nonlinear optical medium illuminated by a strong laser pulse. *Physical Review A*, 87(2):023803, 2013.

- [14] Stefano Finazzi and Iacopo Carusotto. Spontaneous quantum emission from analog white holes in a nonlinear optical medium. *Physical Review A*, 89(5):053807, 2014.
- [15] Malte F Linder, Ralf Schützhold, and William G Unruh. Derivation of Hawking radiation in dispersive dielectric media. *Physical Review D*, 93(10):104010, 2016.
- [16] Ivan Agullo, Anthony J Brady, and Dimitrios Kranas. Quantum aspects of stimulated Hawking radiation in an optical analog white-black hole pair. *Physical Review Letters*, 128(9):091301, 2022.
- [17] Anthony J Brady, Ivan Agullo, and Dimitrios Kranas. Symplectic circuits, entanglement, and stimulated Hawking radiation in analog gravity. *arXiv preprint arXiv:2209.11317*, 2022.
- [18] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. American Association of Physics Teachers, third edition, 1999, New York, USA.
- [19] Juan David Rincon-Estrada and David Bermudez. Instabilities in an optical black-hole laser. *Annalen der Physik*, 533(1):2000239, 2021.
- [20] David Bermudez and Ulf Leonhardt. Hawking spectrum for a fiber-optical analog of the event horizon. *Physical Review A*, 93(5):053820, 2016.
- [21] Scott Robertson and Ulf Leonhardt. Integral method for the calculation of hawking radiation in dispersive media. I. Symmetric asymptotics. *Physical Review E*, 90(5):053302, 2014.
- [22] Ulf Leonhardt and Thomas G Philbin. Black hole lasers revisited. *Lectures Notes Physics*, (718):229–245, 2007.
- [23] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, pages 43 199–220, 1975.
- [24] José L Gaona-Reyes and David Bermudez. The theory of optical black-hole lasers. *Annals of Physics*, 380:41–58, 2017.
- [25] Daniele Faccio, Francesco Belgiorno, Sergio Cacciatori, Vittorio Gorini, Stefano Liberati, and Ugo Moschella. *Analogue gravity phenomenology: Analogue spacetimes and horizons, from theory to experiment*. Springer, 2013, Cham, Switzerland.
- [26] William George Unruh. Experimental black-hole evaporation? *Physical Review Letters*, 46(21):1351, 1981.
- [27] Jonathan Drori, Yuval Rosenberg, David Bermudez, Yaron Silberberg, and Ulf Leonhardt. Observation of stimulated hawking radiation in an optical analogue. *Physical Review Letters*, 122(1):010404, 2019.
- [28] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Elsevier, fifth edition, 2013, Oxford, England.

- [29] Giorgio Turri, Scott Webster, Ying Chen, Benjamin Wickham, Andrew Bennett, and Michael Bass. Index of refraction from the near-ultraviolet to the near-infrared from a single crystal microwave-assisted CVD diamond. *Optical Materials Express*, 7(3): 855–859, 2017.
- [30] Raul Aguero Santacruz. On the origin of the optical analogue of hawking radiation. *MSc, Cinvestav, Mexico*, 2019.
- [31] Scott James Robertson. Hawking radiation in dispersive media. PhD Thesis, University of St. Andrews. , *arXiv:1106.1805*, 2011, UK.
- [32] D Bermudez. Propagation of ultra-short higher-order solitons in a photonic crystal fiber. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 698, page 012017. IOP Publishing, 2016.
- [33] Amol Choudhary and Friedrich König. Efficient frequency shifting of dispersive waves at solitons. *Optics express*, 20(5):5538–5546, 2012.
- [34] Scott Robertson, Charles Ciret, Serge Massar, Simon-Pierre Gorza, and Renaud Parentani. Four-wave mixing and enhanced analog hawking effect in a nonlinear optical waveguide. *Physical Review A*, 99(4):043825, 2019.
- [35] Ulf Leonhardt. *Essential quantum optics: From quantum measurements to black holes*. Cambridge University Press, 2010, cambridge, England.
- [36] Christopher Gerry, Peter Knight, and Peter L Knight. *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2005, Cambridge, England.
- [37] Girish S Agarwal. *Quantum optics*. Cambridge University Press, 2012, New York, USA.
- [38] Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Raúl García-Patrón, Nicolas J Cerf, Timothy C Ralph, Jeffrey H Shapiro, and Seth Lloyd. Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):621, 2012.
- [39] Alessio Serafini. *Quantum continuous variables: A primer of theoretical methods*. CRC Press, 2017, Oxford, England.
- [40] Guifré Vidal and Reinhard F Werner. Computable measure of entanglement. *Physical Review A*, 65(3):032314, 2002.
- [41] Alessandro Ferraro, Stefano Olivares, and Matteo GA Paris. Gaussian states in continuous variable quantum information. *arXiv preprint quant-ph/0503237*, 2005.
- [42] Rabia Tahira, Manzoor Ikram, Hyunchul Nha, and M Suhail Zubairy. Entanglement of Gaussian states using a beam splitter. *Physical Review A*, 79(2):023816, 2009.
- [43] Paul D Nation and Miles P Blencowe. The trilinear hamiltonian: a zero-dimensional model of Hawking radiation from a quantized source. *New Journal of Physics*, 12(9): 095013, 2010.

- [44] PD Nation, JR Johansson, MP Blencowe, and Franco Nori. Colloquium: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits. *Reviews of Modern Physics*, 84(1):1, 2012.
- [45] F Belgiorno, SL Cacciatori, and F Dalla Piazza. Hawking effect in dielectric media and the Hopfield model. *Physical Review D*, 91(12):124063, 2015.
- [46] Anthony Brady. *Applications of Quantum Optics: From the Quantum Internet to Analogue Gravity*. PhD thesis, Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College, 2021.
- [47] Gregg Jaeger. *Entanglement, information, and the interpretation of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2009, Heidelberg, Germany.
- [48] Don S Lemons. *A student's guide to entropy*. Cambridge University Press, 2013, Cambridge, England.
- [49] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed quantum states: Linear contractions and permutation criteria. *Open Systems & Information Dynamics*, 13(1):103–111, 2006.
- [50] Martin B Plenio. Logarithmic negativity: a full entanglement monotone that is not convex. *Physical Review Letters*, 95(9):090503, 2005.