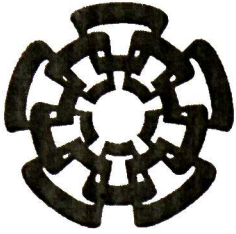


xx (117180.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

El problema de la regulación difusa. Aplicación a sistemas electromecánicos

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Víctor Jesús Zúñiga Márquez

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería eléctrica

Director de Tesis

Dr. Bernardino Castillo Toledo

Guadalajara, Jalisco, Noviembre del 2004.

CLASIF.: TK 165.68 286 2004
ADQUIS.: SS 1 - 347
FECHA: 24/7/05
PROCED.: DON - 2005
\$ _____

ID 116512-2001

El problema de la regulación difusa. Aplicación a sistemas electromecánicos

**Tesis de Maestria en Ciencias
Ingeniería eléctrica**

Por:

Víctor Jesús Zúñiga Márquez
Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica
Universidad de Guadalajara 1997-2002

Becario de CONACYT, expediente no. 171727

Director de Tesis
Dr. Bernardino Castillo Toledo

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Noviembre del 2004.

AGRADECIMIENTOS

A mis padre Ofelia Márquez Soto y Víctor Manuel Zúñiga Leos, por darme la vida y saber guiarme correctamente hacia una educación, por su apoyo moral y económico, por sus consejos y palabras de aliento que mucho me sirvieron para hacer mejor las cosas y por inculcarme el sentido de la responsabilidad y deber.

A mis hermanas Rayitos, Titi y Lupita por su apoyo y por las platicas de aliento que me ayudaban a seguir adelante para terminar este trabajo.

A mi asesor Dr. Bernardino Castillo Toledo, por haberme propuesto este bonito tema de tesis, así como por el interés y conocimientos que siempre mantuvo vivo para la realización de este trabajo.

A la Dra. Ofelia Begovich M. por alentarme y darme ideas que contribuyeron a enriquecer esta tesis. Al Dr. Alexander Loukianov G. por sus sabios comentarios, por su paciencia y amabilidad. Al Dr. Antonio Ramírez T. por su sencillez y conocimientos trasmitidos en clase. Al Dr. Edgar Sánchez por su constante interés en el avance de la tesis y por sus recomendaciones. Al M. en C. Jesús Meda C. por todo el tiempo dedicado a la supervisión y mejoramiento de esta tesis.

A mis compañeros Alma Alanis, Carlos Aldana, Juan Anzures, Víctor Castro, Tonatiuh Gallardo, Carlos Lizalde, Raymundo Márquez, Flavio Muñoz, Isaac Ramírez, por la sincera amistad que nos unió durante nuestros estudios, por su apoyo intelectual y moral. Así mismo al grupo de Sistemas No Lineales.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico y al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) por todo el apoyo material y humano brindado para la culminación de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría de regulación.	5
2.1. El problema de regulación lineal.	5
2.2. Problema de regulación lineal con retroalimentación del estado.	8
2.3. Problema del regulador lineal con retroalimentación del error.	9
2.3.1. Construcción del regulador por retroalimentación del error.	10
2.4. Regulación robusta de la salida	11
2.4.1. Construcción del regulador robusto.	12
2.5. Regulación no lineal.	14
2.5.1. Problema de regulación no lineal con disposición de toda la información.	15
3. Regulación no lineal difusa	17
3.1. Introducción .	17
3.2. Modelado difuso tipo Takagi-Sugeno	17
3.3. Regulador no lineal difuso por retroalimentación del estado	19
3.4. Regulador no lineal difuso por retroalimentación del error	23
3.5. Regulador robusto no lineal difuso	25
3.6. Casos particulares de la teoría de regulación difusa	29
3.6.1. Regulador difuso por retroalimentación del estado (caso particular)	31
3.6.2. Regulador difuso por retroalimentación del error (caso particular)	32
3.6.3. Regulador difuso robusto (caso particular)	33
4. Aplicación al péndulo simple	35
4.1. Introducción .	35
4.2. Modelo dinámico	35
4.3. Aproximación local en particiones difusas	36
4.4. Regulación difusa por retroalimentación del estado	38
4.4.1. Control y aplicación al péndulo simple (caso particular)	39
4.4.2. Caso general	41
4.5. Regulación difusa por retroalimentación del error.	43
4.5.1. Control y aplicación al péndulo simple (caso particular)	43
4.5.2. Caso general	46
4.6. Regulación robusta difusa	48
4.7. Comentarios	54

5. Pendubot y robot completamente actuado.	55
5.1. Introducción .	55
5.2. Modelo dinámico del pendubot	55
5.3. Diseño del controlador difuso para el pendubot	58
5.4. Diseño del controlador no lineal difuso para el pendubot	63
5.5. Resultados en simulación del pendubot	68
5.6. Resultados en tiempo real del pendubot	74
5.7. Modelo dinámico del robot completamente actuado	80
5.8. Controlador no lineal difuso, robot completamente actuado	82
5.9. Comentarios	87
6. Conclusiones y trabajo futuro	89
6.1. Conclusiones	89
6.2. Trabajo futuro	90
Apéndice A.	93
Apéndice B.	97
Apéndice C.	99

RESUMEN

Este trabajo presenta los resultados para la solución del problema de regulación en la salida en sistemas no lineales utilizando la técnica de “*Regulación no lineal difusa*”. La construcción del controlador se basa en la combinación de la regulación no lineal y el modelado difuso Takagi Sugeno. Se describe el problema y la solución en base a esta técnica para el regulador por retroalimentación del estado y retroalimentación del error. El controlador resultante es aplicado en tiempo real a sistemas electromecánicos como el péndulo simple y pendubot, además en simulación a un robot completamente actuado de dos grados de libertad.

Capítulo 1

Introducción

El seguimiento de señales de referencia es un problema importante dentro del campo de la teoría de sistemas, por lo tanto en la literatura, existen diferentes métodos para tratar este problema. Uno de estos métodos es la teoría de regulación, que provee un excelente marco de trabajo para tratar el seguimiento asintótico de trayectorias y a la vez rechazar perturbaciones. El problema de regulación consiste en encontrar un controlador por retroalimentación del estado o error tal que en la ausencia de influencias externas el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable y el error de seguimiento tiende a cero cuando la planta es influenciada por una señal de referencia y/o perturbación, ambas generadas por un sistema externo, llamado exosistema.

La solución al problema del regulador lineal es dado por Francis en [6]; básicamente la ley de control se diseña a partir de la solución algebraica de un conjunto de ecuaciones matriciales conocidas como las ecuaciones de Francis. Francis también presentó la solución para el regulador lineal robusto, es decir, un controlador capaz de mantener la propiedad de regulación a pesar de variaciones sobre los parámetros del sistema. Para su solución, se requiere de un controlador construido empleando el principio del modelo interno. En este caso, el modelo interno es la inmersión del exosistema en un sistema dinámico que genera todas las posibles entradas en estado estacionario para cualquier valor permitido de los parámetros.

En [2] Isidori y Byrnes han extendido estos resultados en el área no lineal, en su trabajo ellos han mostrado que el regulador no lineal puede ser obtenido en base a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales llamadas, las ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB). En el caso no lineal, la inclusión de un modelo interno resulta ser también una condición necesaria para obtener robustez con respecto a variaciones paramétricas.

Por otro lado, recientemente, algunas técnicas permiten la caracterización de sistemas no lineales por medio de subsistemas lineales. Uno de estos métodos es el modelado difuso Takagi-Sugeno (TS). Esta técnica permite modelar la dinámica no lineal por medio de una conveniente interpolación de subsistemas lineales, cada uno de ellos correspondiendo a diferentes puntos de operación. Básicamente la interpolación se lleva a cabo por la suma de pesos de los subsistemas locales. Entonces, controles locales pueden ser diseñados para cada subsistema, el controlador total se obtiene por el mismo procedimiento usado para definir el sistema difuso total. En [9] se presenta el método del Compensador Paralelo Distribuido (PDC), el cual permite obtener el controlador de una manera práctica por medio de técnicas de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI).

El objetivo de este trabajo de tesis es el diseñar un controlador que proporcione una alternativa válida que pueda ser aplicada en la búsqueda de una solución al problema de seguimiento de referencias para sistemas no lineales, empleando para su construcción una combinación de técnicas lineales y no lineales. El controlador para el sistema no lineal se desarrolla usando una combinación de la teoría de regulación no lineal y el modelado difuso Takagi Sugeno. En el presente trabajo el modelado difuso Takagi Sugeno se usa para tomar ventaja de los resultados de estabilización [9] al proveer una región de atracción más grande que los resultados dados por un simple estabilizador lineal. Para satisfacer la condición de regulación, la componente del controlador que lleva el error de seguimiento a cero, será diseñada sobre la planta no lineal, y no sobre los subsistemas locales. A este tipo de controlador se le nombra *regulador no lineal difuso*. En ocasiones, en el diseño del regulador no lineal difuso se necesita resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, lo cual en general es difícil y complicado, por lo que en muchos casos es conveniente buscar soluciones aproximadas [13].

Vale la pena mencionar que existen algunos trabajos [10], [11] donde el controlador final se construye a partir de los reguladores lineales diseñados para cada subsistema en el modelo difuso Takagi Sugeno, no obstante como es mostrado en [7], [12] un controlador diseñado de esa manera sólo permite el seguimiento exacto en algunos casos particulares. Este tipo de controlador recibe el nombre de *regulador difuso*. Como se menciono anteriormente, en este trabajo el método de control propuesto lleva el error de seguimiento a cero o a una vecindad cerca de este cuando se tienen que resolver aproximadamente algunas ecuaciones diferenciales parciales. Esta es la principal diferencia entre el presente trabajo y los trabajos previos.

Para demostrar la efectividad del método propuesto los resultados fueron aplicados sobre tres sistemas electromecánicos, estos son

- **Péndulo simple**, es un sistema electromecánico completamente actuado que consta de sólo un eslabón acoplado a un motor, es decir, de un grado de libertad, su dinámica no lineal corresponde a sólo una no linealidad. Se entiende por sistema completamente actuado aquel que tiene el mismo número de actuadores y grados de libertad.
- **Pendubot**, es un sistema electromecánico subactuado con una dinámica no lineal muy compleja, el cual consiste de dos eslabones; uno de los cuales está en la base del sistema inercial y es actuado, mientras el segundo tiene un movimiento libre. Se entiende por sistema electromecánico subactuado aquel sistema que en el número de actuadores es menor a los grados de libertad que posee. Considerando un sistema de n grados de libertad con coordenadas generalizadas q^1, \dots, q^n y $m < n$ actuadores relacionados directamente a un solo grado de libertad. Los grados de libertad actuados son llamados uniones activas y los $l = n - m$ grados de libertad subactuados son llamados uniones pasivas. Algunos ejemplos de sistemas electromecánicos subactuados es el acrobot, o cualquier sistema que debido al modelo matemático usado para el diseño de controles, incluya uniones flexibles.
- **Robot manipulador completamente actuado**, es un sistema no lineal multivariable, que consta de dos grados de libertad (eslabones) y dos actuadores (motores), al igual que el pendubot cuenta de una dinámica no lineal muy compleja. La ventaja de este sistema con el pendubot, es que, cada eslabón puede seguir señales de referencia independiente en amplitud y frecuencia.

De acuerdo con la definición adoptada por la Federación Internacional de Robótica bajo la norma ISO/TR 8373, un robot manipulador se define como una maquina manipuladora con varios grados de libertad controlada automáticamente, reprogramable y de usos múltiples, pudiendo estar en un lugar fijo o móvil para su empleo.

En su aplicación industrial, los robots manipuladores son comúnmente empleados en tareas repetitivas y de precisión, así como en actividades peligrosas para operadores humanos. Las principales ventajas argumentadas para el uso de robots manipuladores en la industria son la reducción de los costos de producción, el incremento de la precisión, la calidad y la productividad. Adicionalmente, existen aplicaciones monopolizadas por los robots manipuladores tales como el trabajo en zonas radioactivas, tóxicas o explosivas y en aplicaciones submarinas y espaciales.

Esta memoria de tesis se estructura de la siguiente forma

En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la regulación lineal en sus variantes retroalimentación del estado, retroalimentación del error y robusta; además se expone el caso de regulación no lineal por retroalimentación del estado.

En el capítulo 3 se presentan las aportaciones principales de este trabajo de tesis, en particular el diseño del regulador no lineal difuso, en sus variantes: retroalimentación del estado, retroalimentación del error y robusta. Se detallan los casos de cuando o cuando no un sistema puede cumplir con un seguimiento exacto en la salida cuando se aplica un regulador difuso.

En el capítulo 4 se aplica el diseño de reguladores difusos, tanto en simulación y tiempo real, a una sencilla planta como lo es el péndulo simple, este es un caso particular donde el error de seguimiento se puede llevar a cero. En cada aplicación se describe la forma en que se construye el controlador y se verifican las condiciones para la solución al problema de regulación no lineal difusa. Además se expone un caso general de la teoría de regulación difusa, donde el error de seguimiento en estado estacionario no se lleva a cero.

En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos en la aplicación de los esquemas de control difuso y control no lineal difuso al seguimiento de trayectorias en plantas no lineales de dinámica bastante compleja como lo son el pendubot y el robot completamente actuado de dos grados de libertad. Igualmente, se describe la forma en que se construyen los controladores y se verifican las condiciones para la solución al problema de regulación no lineal difusa. Los resultados son presentados en simulación y en tiempo real para el pendubot. Para el robot completamente actuado los resultados son sólo aplicados en simulación, los resultados en tiempo real no se llevan a cabo, ya que no se cuenta físicamente con este tipo de sistema en el laboratorio de control.

En el capítulo 6, se encuentran algunas conclusiones sobre el proyecto de tesis realizado y extensiones futuras que servirán para enriquecerlo.

Cabe señalar que se incorpora en el apéndice C, una breve introducción a las Desigualdades Lineales Matriciales (LMI), que son una herramienta fundamental para el análisis que se plantea. Este enfoque permite asegurar, cuando es posible la estabilidad de un sistema difuso total y a la vez calcular los valores de las ganancias de los controladores.

Por último, los resultados de este trabajo de tesis fueron expuestos en un artículo sometido a una revista de investigación científica.

Capítulo 2

Teoría de regulación.

2.1. El problema de regulación lineal.

Un problema muy importante en teoría de control es el de hacer que la salida de un sistema siga una referencia dada. En el caso de una planta descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

en la cual $u(t) \in R^m$ denota la entrada por la cual la acción de control es puesta en la planta, $y(t) \in R^p$ denota el valor de la salida a ser controlada y $x(t) \in R^n$ es el vector que representa el estado interno de la planta, el problema en cuestión es encontrar para cualquier salida de referencia $y_{ref}(t)$, una ley de control $u(t)$, tal que la respuesta $y(t)$ de la planta satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_{ref}(t)\| = 0\tag{2.2}$$

La ley de control destinada a este propósito debe ser provista por un controlador retroalimentado, el cual es un dispositivo que recibe cierta información acerca del estado del sistema $x(t)$ y posiblemente de la señal de referencia $y_{ref}(t) \in R^p$ con las cuales es posible generar el valor requerido de la ley de control $u(t)$. Una clase de controlador es el modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Gy_{inf}(t) \\ u(t) &= H\xi(t) + My_{inf}(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

en la cual y_{inf} representa la información que se tiene.

En muchas situaciones prácticas, la respuesta está influenciada no sólo por la entrada $u(t)$ sino también por otras entradas exógenas que en general son perturbaciones.

Si $\tilde{w}(t) \in R^j$ denota el vector de perturbaciones, la planta puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D\tilde{w}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + E\tilde{w}(t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

En este caso, la tarea del controlador es hacer que la salida del sistema $y(t)$ siga la señal de referencia aún con las perturbaciones $\tilde{w}(t)$.

La señal de referencia $y_{ref}(t)$ puede también ser expresada en términos de otra señal externa, es decir

$$y_{ref}(t) = Rz(t) \quad (2.5)$$

donde se considera que $z(t) \in R^k$ se genera por un sistema dinámico externo.

Una vez que las familias de señales de referencia y perturbaciones han sido identificadas el problema en cuestión se puede plantear como el de encontrar una ley de control $u(t)$ para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$P = [D \ 0], \quad Q = [E \ -R], \quad w(t) = \begin{bmatrix} \tilde{w}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

y $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$ denota el error de seguimiento de referencia tal que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En este contexto se supondrá que $w(t) \in R^r$ es generada por un sistema dinámico

$$\dot{w}(t) = Sw(t); \quad (2.8)$$

esta elección se debe a que un gran número de situaciones prácticas pueden ser cubiertas. Este sistema es llamado *exosistema*.

En lo que sigue, se supondrá que el exosistema satisface la siguiente hipótesis:

(H1) El exosistema es neutralmente estable, esto es, los valores propios de S están en el eje imaginario del plano complejo.

La situación más favorable, desde el punto de vista de retroalimentación, sucede cuando todos los estados de la planta $x(t)$ y los del exosistema $w(t)$ están disponibles para ser medidos. En este caso se dice que el controlador está provisto de toda la información, es decir, la señal de control está dada por

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t). \quad (2.9)$$

A continuación se presenta un diagrama a bloques del sistema y el controlador:

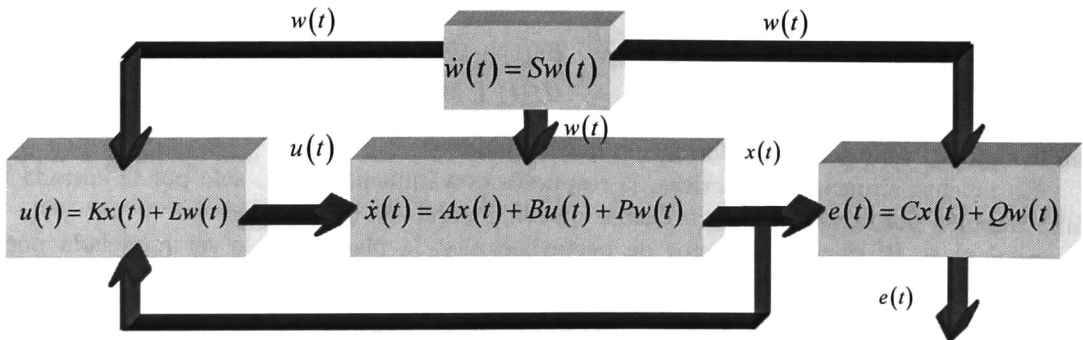


Figura 2.1. Controlador por retroalimentación del estado.

Una situación más realista y más común es cuando solo el error $e(t)$ puede ser medido. En este caso se dice que el controlador está provisto con retroalimentación del error, y es modelado

como un sistema dinámico lineal, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) &= H\xi(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

El diagrama a bloques del sistema y el regulador se muestra a continuación

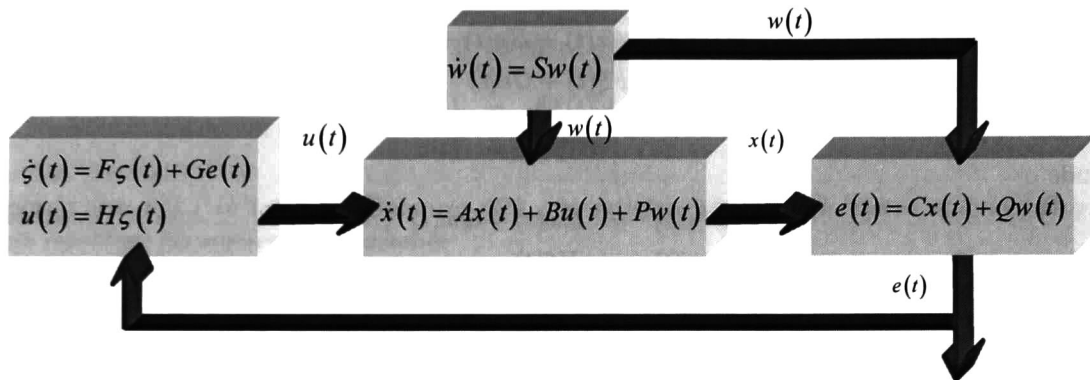


Figura 2.2. Controlador por retroalimentación del error.

La combinación de (2.6) con cualquiera de los dos controladores, produce un nuevo sistema llamado *sistema a lazo cerrado*, con entrada $w(t)$, estado interno $(x(t), \xi(t))$ y salida $e(t)$. El propósito del controlador es garantizar que el sistema a lazo cerrado sea asintóticamente estable y que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para cualquier condición inicial posible y cualquier entrada exógena posible de una familia prescrita de funciones del tiempo. Cuando éste es el caso, el sistema a lazo cerrado se dice tener la propiedad de *regulación de salida*. Note que el requisito en cuestión es esencialmente que cada entrada $w(t)$ induzca un estado estable bien definido $x_{ss}(t)$ tal que

$$e(t) = Cx_{ss}(t) + Qw(t) = 0\tag{2.11}$$

para todo $t \geq 0$.

Los problemas para lograr los objetivos deseados pueden ser enunciados formalmente de la siguiente manera

Regulación por retroalimentación del estado. Dadas $[A, B, C, P, Q, S]$ encontrar si es posible, dos matrices K y L tal que

(S)_{fi} La matriz $(A + BK)$ es Hurwitz.

(R)_{fi} Para cada condición inicial $(x(0), w(0))$ la solución $(x(t), w(t))$ de

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t)\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)$$

es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Regulación por retroalimentación del error. Dadas $[A, B, C, P, Q, S]$ encontrar si es posible, tres matrices F, G y H tales que

(S)_{ef} La matriz

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$$

es Hurwitz.

(R)_{ef} Para cada condición inicial $(x(0), \xi(0), w(0))$ la solución $(x(t), \xi(t), w(t))$ de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$\begin{aligned} e(t) &= Cx(t) + Qw(t) \\ u(t) &= H\xi(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

2.2. Problema de regulación lineal con retroalimentación del estado.

En esta sección se mostrará cómo el problema de regulación con disposición del vector de estado puede ser resuelto. Se presenta primero un simple pero importante resultado, el cual, proporciona la llave para la solución del problema en cuestión.

Lema 2.2.1. *Suponga que para alguna $u(t) = Kx(t) + Lw(t)$, $(S)_{fi}$ se satisface y $(H1)$ se satisface entonces $(R)_{fi}$ también se satisface si y solo si existe una matriz Π que resuelve las ecuaciones*

$$\Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \quad (2.15)$$

$$0 = C\Pi + Q. \quad (2.16)$$

Prueba: ver [1].

Entonces si se encuentran matrices Π y L tales que, para una K que estabiliza la matriz $(A + BK)$, se satisfacen las ecuaciones anteriores, el problema del regulador lineal con disposición de toda la información está solucionado.

Se nota que para que $(S)_{fi}$ se satisfaga se debe cumplir que el par (A, B) sea estabilizable, esto es, que los modos no controlables sean estables. Por lo que lo anterior se pone como hipótesis.

(H2) El par (A, B) es estabilizable.

Teorema 2.2.1. *Suponga que $(H1)$ y $(H2)$ se satisfacen, entonces existe una solución al problema de regulación de la salida por medio de retroalimentación del estado si y solo si existen matrices Π y Γ tales que resuelven las ecuaciones*

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \quad (2.17)$$

$$0 = C\Pi + Q. \quad (2.18)$$

Prueba: ver [15].

2.3. Problema del regulador lineal con retroalimentación del error.

Resolver el problema de regulación de la salida por medio de la retroalimentación del error es de más utilidad desde el punto de vista de control de procesos, puesto que, en la práctica, sólo se tiene disponible la salida del sistema. En esta sección se dan las condiciones bajo las cuales se puede resolver este problema. Primero se enuncia el siguiente lema análogo al lema 2.2.1.

Lema 2.3.1. *Suponga que (H1) se satisface y que existe un controlador dado por:*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) &= H\xi(t)\end{aligned}$$

para la cual $(S)_{ef}$ se satisface. Entonces $(R)_{ef}$ se satisface si y solo si existen matrices Π y Σ que resuelven las siguientes ecuaciones

$$\Pi S = A\Pi + BH\Sigma + P \quad (2.19)$$

$$\Sigma S = F\Sigma \quad (2.20)$$

$$0 = C\Pi + Q \quad (2.21)$$

Prueba: Primero se toma el sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + BH\xi(t) + Pw(t) \\ \dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + GCx(t) + GQw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t)\end{aligned} \quad (2.22)$$

y haciendo el cambio de variable $\tilde{x} = x - \Pi w$, $\tilde{\xi} = \xi - \Sigma w$ se tiene que el sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\Pi + BH\Sigma + P - \Pi S \\ G(C\Pi + Q) + (F\Sigma - \Sigma S) \\ C\Pi + Q \end{bmatrix} w(t) \\ e(t) &= C\tilde{x}(t) + (C\Pi + Q)w(t).\end{aligned} \quad (2.23)$$

De la ecuación (2.23) se considera la siguiente ecuación de Sylvester

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ GQ \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Puesto que (H1) y $(S)_{ef}$ se satisfacen, entonces

$$\sigma \left(\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \right) \cap \sigma(S) = \emptyset$$

por lo tanto las matrices Π y Σ que satisfacen (2.24) existen y son únicas.

De (2.23) se observa que

- 1.- $\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$ es Hurwitz por $(S)_{ef}$.
- 2.- $\begin{bmatrix} A\Pi + BH\Sigma + P - \Pi S \\ G(C\Pi + Q) + (F\Sigma - \Sigma S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ por (2.24).

Entonces $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$ y $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ por lo que $x(t) \rightarrow \Pi w(t)$ y $\xi(t) \rightarrow \Sigma w(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.
Sustituyendo estos valores en la ecuación del error se tiene

$$e(t) = Cx(t) + Qw(t) \rightarrow (C\Pi + Q)w(t) \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Puesto que el exosistema es neutralmente estable entonces $e(t) \rightarrow 0$ si y solo si

$$3.- (C\Pi + Q) = 0.$$

Esto es $(R)_{ef}$ se satisface si y solo si la única solución Π, Σ de (2.24) satisface (2.21).

Sustituyendo estos resultados en (2.24) obtenemos (2.19) y (2.20). (ver [1])

2.3.1. Construcción del regulador por retroalimentación del error.

Puesto que no se tiene toda la información se procederá a diseñar un observador para el sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

que se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x^e(t) &= A^e x^e(t) + B^e u(t) \\ e(t) &= C^e x^e(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde

$$A^e = \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad B^e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C^e = [C \quad Q], \quad x^e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Para poder realizar el observador es necesario que el par (C^e, A^e) sea detectable, esto es, los modos no observables son estables. Esto motiva a la siguiente hipótesis

(H3) El par (C^e, A^e) es detectable.

Tomando (H3) es posible realizar un observador del estado descrito por:

$$\dot{\xi}(t) = (A^e - GC^e)\xi(t) + B^e u(t) + Ge(t) \quad (2.28)$$

del cual se sabe que si $(A^e - GC^e)$ es Hurwitz, entonces $\xi(t) \rightarrow x^e(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. De lo anterior podemos aplicar el resultado obtenido para el caso de disposición de toda información, esto es

- 1.- Se obtiene una matriz K para la cual $(A + BK)$ es Hurwitz.
- 2.- Se analiza si existen matrices Π y Γ tales que (2.17) y (2.18) se satisfacen.
- 3.- Si existen se realiza el observador para el estado $x^e(t)$, donde $(A^e - GC^e)$ es Hurwitz.
- 4.- Se aplica la ley de control con el estado observado

$$u(t) = [K \quad (\Gamma - K\Pi)] \xi(t),$$

entonces el controlador está dado por

$$\dot{\xi}(t) = (A^e - GC^e + B^e H)\xi(t) + Ge(t) = F\xi(t) + Ge(t), \text{ o explícitamente}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BK - G_0C & P + B(\Gamma - K\Pi) - G_0Q \\ -G_1C & S - G_1Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} e(t) \\ u(t) &= [K \quad (\Gamma - K\Pi)] \xi(t) = H\xi(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Teorema 3.3.1. *Suponga que (H1), (H2) y (H3) se satisfacen. Entonces el problema de regulación de salida por retroalimentación del error puede resolverse si y solo si existen matrices Π y Γ que resuelven las ecuaciones (2.17) y (2.18).*

Prueba: ver [15].

2.4. Regulación robusta de la salida

En esta sección se considera el caso en el que el sistema (2.6) depende de un conjunto de parámetros, los cuales se suponen que son constantes con valores desconocidos [2]. Esta variación paramétrica puede deberse a errores de medición o a cambios sufridos por la planta provocados por el desgaste, cambios de temperatura, etc. El propósito es diseñar una ley de control que sea capaz de resolver el problema de regulación de la salida vía retroalimentación del error para cada conjunto de valores de los parámetros, al menos en alguna vecindad de los valores nominales.

Por otra parte, se considera que el exosistema (2.8) no está sujeto a incertidumbres paramétricas, dado que en general es un dispositivo que modela tanto a las referencias como a las perturbaciones que afectan a la planta y no un objeto real cuyos parámetros pueden sufrir variaciones.

La incertidumbre en los valores de los parámetros puede expresarse como el conjunto $\{A, B, C, P, Q\}$ que varía en cierta vecindad ρ del conjunto nominal $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$, esto es

$$\{A, B, C, P, Q\} = \{A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, C_0 + \delta C, P_0 + \delta P, Q_0 + \delta Q\}$$

entonces, un problema de regulación se dice que está bien definido en $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ si existe una vecindad ρ de $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ tal que, dicho problema tiene solución para cada $\{A, B, C, P, Q\}$ en ρ .

Regulación robusta. Un controlador dinámico de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Ge(t) \\ u(t) &= H\xi(t) \end{aligned}$$

es un controlador robusto en $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$ si

1.- Resuelve el problema de regulación de la salida para los parámetros nominales.

2.- Resuelve el problema de regulación de la salida para la vecindad ρ de $\{A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0\}$, donde la matriz

$$\begin{bmatrix} A & BH \\ GC & F \end{bmatrix}$$

es Hurwitz.

Del teorema 2.3.1. se tiene que el problema de regulación de la salida tiene solución si existen matrices Π y Γ , tales que resuelven las ecuaciones (2.17) y (2.18), donde la señal de control está dada por (2.29).

Obsérvese que Π y Γ son matrices que dependen de los parámetros del sistema, y si éstos son cambiados, entonces el regulador podría ya no resolver el problema de regulación de la salida, esto es, las matrices Π y Γ podrían no existir. Para resolver el problema, se tomará la siguiente hipótesis

(H4) Las matrices Π y Γ que resuelven el problema de regulación por retroalimentación del estado existen para todos los valores $\{A, B, C, P, Q\}$ en la vecindad ρ .

2.4.1. Construcción del regulador robusto.

Ahora se procederá a la construcción del regulador robusto. Hacemos notar que el regulador construido anteriormente es robusto para el caso de una entrada una salida, de acuerdo al principio del modelo interno [6]; apelando a ese principio se desea controlar "m" salidas para lo cual se necesitan "m" entradas, necesitamos incluir en el controlador "m" modelos del exosistema.

Nótese que la ley de control que resuelve el problema de regulación de la salida es de la forma

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)$$

y tomando el cambio de variable $\tilde{x} = x - \Pi w$ puede ponerse en la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= K(x(t) - \Pi w(t)) + (K\Pi + L)w(t) \\ u(t) &= K\tilde{x}(t) + \Gamma w(t) \end{aligned}$$

ahora bien, cuando $e(t) = 0$ entonces $\tilde{x} = 0$ y la entrada al sistema es

$$u_{ss}(t) = \Gamma w(t)$$

pero si hay variación de parámetros, es claro que la solución Γ de las ecuaciones (2.17) y (2.18) será diferente y no coincidirá con la que tenemos.

La idea es entonces introducir un sistema auxiliar que permita de alguna manera "observar" la entrada $u_{ss}(t)$ para cada valor de los parámetros.

Para esto, sea

$$s^r + a_{r-1}s^{r-1} + a_{r-2}s^{r-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

la ecuación característica de S , y por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que

$$S^r + a_{r-1}S^{r-1} + a_{r-2}S^{r-2} + \dots + a_1S + a_0I = 0 \quad (2.30)$$

tomando las siguiente variables

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \Gamma w(t) \\ \dot{z}_1(t) &= z_2(t) = \Gamma S w(t) \\ &\vdots \\ z_{r-1}(t) &= z_r(t) = \Gamma S^{r-1} w(t) \\ \dot{z}_r(t) &= \Gamma S^r w(t) = \Gamma (-a_0I - a_1S - \dots - a_{r-2}S^{r-2} - a_{r-1}S^{r-1}) w(t) = \\ \dot{z}_r(t) &= -a_0z_1 - a_1z_2 - \dots - a_{r-2}z_{r-1} - a_{r-1}z_r \end{aligned}$$

se tendrá el siguiente sistema dinámico

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -a_0 I & -a_1 I & -a_2 I & \cdots & -a_{r-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_r(t) \end{bmatrix} = \Phi z(t) \quad (2.31)$$

$$\Gamma w(t) = H_0 z(t) = [I \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] z(t) = z_1(t). \quad (2.32)$$

Obsérvese que el sistema dinámico anterior proporciona la salida deseada $\Gamma w(t)$ independientemente del valor de Γ , y además cumple con el principio del modelo interno.

Para construir el controlador dinámico, se toma ahora el sistema nominal y el sistema construido anteriormente, esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + B_0 u(t) + P_0 w(t) \\ \dot{w}(t) &= S w(t) \\ \dot{z}(t) &= \Phi z(t) \\ e(t) &= C_0 x(t) + Q_0 w(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

el cual se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A_o (\tilde{x}(t) + \Pi w(t)) + B_0 u(t) + P_0 w(t) - \Pi S w(t) \\ \dot{w}(t) &= S w(t) \\ \dot{z}(t) &= \Phi z(t) \\ e(t) &= C_0 \tilde{x}(t) + (C_0 \Pi + Q_0) w(t) = C_0 \tilde{x}(t) \end{aligned}$$

donde $\tilde{x}(t) = x(t) - \Pi w(t)$.

Puesto que $\Gamma w(t) = H_0 z(t)$, para toda Γ , y por (2.17), (2.18) y (H4) tenemos la siguiente igualdad

$$-B_0 H_0 z(t) = -B_0 \Gamma w(t) = (A_0 \Pi + P_0 - \Pi S) w(t)$$

entonces el sistema toma la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 & -B_0 H_0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ e(t) &= [C_0 \ 0] \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Definiendo

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_0 & -B_0 H_0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [C_0 \ 0], \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 u(t) \\ e(t) &= C_2 x_2(t) \end{aligned} \quad (2.36)$$

tiene la misma forma que (2.26).

Entonces, si el par (C_2, A_2) es detectable es posible diseñar un observador del estado para este nuevo sistema. Lo anterior motiva la siguiente hipótesis

(H3_b) El par (C_2, A_2) es detectable.

Por lo tanto, tenemos que el controlador toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (A_2 - GC_2 + B_2H)\xi(t) + Ge(t) = F\xi(t) + Ge(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + B_0K - G_0C_0 & 0 \\ -G_1C_0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} e(t) \\ u(t) &= [K \quad H_0] \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = H\xi(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Teorema 2.4.1. *Suponga que (H1) se satisface y que (H2) y (H3_b) se satisfacen en ρ_0 entonces el problema de regulación robusta tiene la solución si y solo si (H4) se satisface.*

Prueba: ver [15].

2.5. Regulación no lineal.

En las secciones anteriores se estudió el problema de regulación de la salida para el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo. En esta sección se analizan los resultados semejantes que para el caso no lineal se tienen. En vista de la similitud que tienen, se han omitido la pruebas de los lemas y teoremas, y solo se hace referencia a la bibliografía que se puede consultar.

Para el caso no lineal se considera un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, w, u) \quad (2.38)$$

$$\dot{w} = s(w) \quad (2.39)$$

$$e = h(x, w) \quad (2.40)$$

con estado x definido en un vecindad U del origen en R^n , entrada $u \in R^m$ y estado w definido en una vecindad W del origen de R^r . En el cual $f(x, w, u)$, $s(w)$ y $h(x, w)$ son funciones suaves y $f(0, 0, 0) = 0$, $s(0) = 0$ y $h(0, 0) = 0$.

El problema de regulación de la salida con retroalimentación del estado. Dado un sistema no lineal de la forma (2.38), encontrar si es posible una ley de control $u = \alpha(x, w)$ tal que

(S)_{FI} El punto de equilibrio $x = 0$ de

$$\dot{x} = f(x, 0, \alpha(x, w)) \quad (2.41)$$

sea exponencialmente estable en primera aproximación.

(E)_{FI} Existe una vecindad $V \in U \times W$ de $(0, 0)$ tal que, para cada condición inicial $(x_0, w_0) \in V$ la solución de:

$$\dot{x} = f(x, w, \alpha(x, w)) \quad (2.42)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (2.43)$$

2.5.1. Problema de regulación no lineal con disposición de toda la información.

En esta sección se muestra como el caso de retroalimentación del estado puede ser resuelto. Para esto se presenta un importante resultado el cual es básico para la solución del problema en cuestión.

Lema 3.5.1. *Suponga que existe $\alpha(x, w)$, para la cual $(S)_{FI}$ se satisface. Entonces $(R)_{FI}$ se satisface si y solo si existe un mapeo $x = \pi(w)$ con $\pi(0) = 0$, definido en una vecindad $W_0 \subset W$ del origen tal que satisface las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, \alpha(\pi(w), w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned} \quad (2.44)$$

para todo $w \in W_0$.

Prueba: ver [2].

Usando este resultado se establecen las condiciones necesarias y suficientes para la solución del regulador con disposición de toda la información.

Teorema 3.5.1. *El problema de regulación con disposición de toda la información, tiene solución si y solo si el par (A, B) es estabilizable y existen mapeos $x = \pi(w)$ y $u = c(w)$, con $\pi(0) = 0$ y $c(0) = 0$, ambos definidos en una vecindad $W_0 \subset W$ del origen tal que satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(\pi(w), w, c(w)) \\ 0 &= h(\pi(w), w) \end{aligned} \quad (2.45)$$

para todo $w \in W_0$.

Prueba: ver [2].

Una vez conocidos los mapeos $\pi(w)$ y $c(w)$ de la ecuación (2.45), la ley de control que resuelve el problema de regulación es provista por

$$\alpha(x, w) = c(w) + K(x - \pi(w)) \quad (2.46)$$

donde K es la matriz que ubica los polos de la matriz $(A + BK)$ en el lado izquierdo del plano complejo.

El diagrama a bloques de la ley de control es

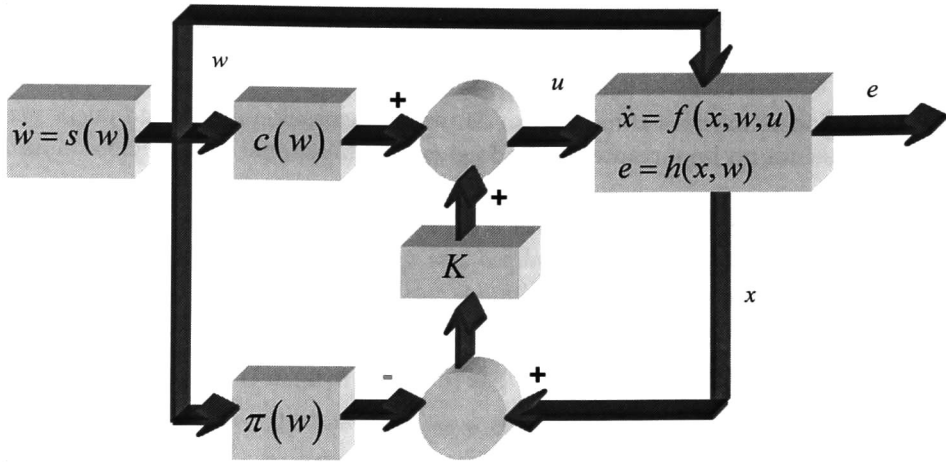


Figura 2.3. Controlador no lineal por retroalimentación del estado.

Capítulo 3

Regulación no lineal difusa

3.1. Introducción

En el presente capítulo, se presenta un método que permite combinar la teoría de regulación no lineal con el esquema del modelado difuso Takagi Sugeno. El objetivo es aprovechar el modelo difuso Takagi Sugeno para tomar ventajas de los resultados de estabilización, el cual proporciona una región de estabilidad más grande que los simples estabilizadores lineales. Por otra parte, los mapeos no lineales $x_{ss} = \pi(w)$ y $u_{ss} = \gamma(w)$ representan la subvariedad de estado estacionario en la salida y la entrada de estado respectivamente. Esta entrada hace invariante la subvariedad cero de estado estable de la salida y garantiza que el error de seguimiento es cero en la subvariedad de estado estacionario. Se mostrará que un controlador total construido con reguladores lineales diseñados para cada subsistema en el modelo difuso Takagi Sugeno sólo permite el seguimiento exacto en algunos casos. Con el fin de asegurar seguimiento exacto se presentan los resultados de la teoría de regulación no lineal difusa, exponiendo los principales teoremas de esta técnica. Además, se describen los métodos de diseño de los controladores propuestos. En la sección 3.2 se describe la técnica del modelado difuso Takagi Sugeno para sistemas no lineales. En la sección 3.3 se presenta el regulador no lineal difuso por retroalimentación del estado, es decir, con toda la información disponible. En la sección 3.4 se presenta el regulador no lineal difuso por retroalimentación del error. En la sección 3.5 se presenta el regulador robusto no lineal difuso, exponiendo el teorema principal utilizado por esta técnica, además se describe el método de diseño propuesto. Por último, en la sección 3.6 se presentan los casos particulares de la teoría de regulación difusa, estos deben cumplir ciertas condiciones para obtener un seguimiento exacto y por lo tanto error nulo.

3.2. Modelado difuso tipo Takagi-Sugeno

Considere el sistema no lineal dado por

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t), u(t)) \quad (3.1)$$

$$\dot{w}(t) = s(w(t)) \quad (3.2)$$

$$e(t) = h(x(t), w(t)) \quad (3.3)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado de la planta, $w(t) \in R^r$ es el vector de estado del exosistema, el cual genera las señales de referencia y/o perturbación y $u(t) \in R^m$ es la señal de entrada. La ecuación (3.3) describe el error en el seguimiento $e(t) \in R^m$, el cual es usualmente dado como la diferencia entre las salidas medibles del sistema $y_i(t)$ con $i = 1, \dots, r$ y las señales de referencia. Las salidas del sistema dependen o coinciden exactamente con el estado $x(t)$ en general. Esto es asumiendo que $f(0, 0, 0)$, $s(0)$ y $h(0, 0)$ son funciones analíticas, con $s(0) = 0$, $f(0, 0, 0) = 0$ y $h(0, 0) = 0$.

Se conoce que una buena aproximación para sistemas no lineales es provista por el modelo difuso Takagi Sugeno. Un modelo de esta manera se define sobre una adecuada selección de subsistemas lineales, acorde a reglas asociadas con algunos conocimientos físicos y algunas caracterizaciones lingüísticas del sistema no lineal. Estos subsistemas lineales describen propiamente, al menos localmente, el comportamiento del sistema no lineal para una región predeterminada del espacio de estado. Se considera el modelo dado por (3.1)-(3.3) y se supone que es posible describir localmente su comportamiento de entrada salida por un modelo dinámico difuso Takagi Sugeno representado por r reglas

Regla i

SI

$z_1(t)$ es M_1^i y $z_2(t)$ es M_2^i y \dots y $z_p(t)$ es M_p^i

$$\text{ENTONCES} \quad \sum_i : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ \dot{w}(t) &= S(w(t)) \\ e_i(t) &= C_i x(t) + Q_i w(t), \quad i = 1 \dots r \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $z_1(t), \dots, z_p(t)$ son variables premisas medibles, M_j^i son los correspondientes conjuntos difusos obtenidos a partir de algún conocimiento previo de la dinámica del sistema y los subsistemas A_i, B_i, C_i, S, Q_i y P_i , se obtienen por linealización del sistema no lineal alrededor de predefinidos puntos de operación $(x, w, u) = (x_i^0, w_i^0, u_i^0)$, es decir

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial x} \Big|_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)}; & B_i &= \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial u} \Big|_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)}; & P_i &= \frac{\partial f(x, w, u)}{\partial w} \Big|_{(x_i^0, w_i^0, u_i^0)}; \\ C_i &= \frac{\partial h(x, w)}{\partial x} \Big|_{(x_i^0, w_i^0)}; & S &= \frac{\partial s(w)}{\partial w} \Big|_{(w_i^0)}; & Q_i &= \frac{\partial h(x, w)}{\partial w} \Big|_{(x_i^0, w_i^0)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para una tripleta dada $(x(t), u(t), w(t))$, el modelo difuso compuesto se obtiene usando un fuzificador tipo elemento único, inferencia tipo producto y defuzificador centro de gravedad. Este modelo está dado por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t)] \quad (3.6)$$

$$\dot{w}(t) = S(w(t)) \quad (3.7)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + Q w(t) \quad (3.8)$$

donde $h_i(z(t))$ son los niveles de membresía normalizados para cada regla calculada a partir de las funciones de membresía para $z_j(t)$ en M_j^i . En este caso se supone que los niveles de membresía cumplen con las siguientes condiciones

$$h_i(z(t)) = \frac{\varpi_i(z(t))}{\prod_{j=1}^r \varpi_j(z(t))}, \quad \varpi_i(z(t)) = \prod_{i=1}^p M_j^i(z_j(t)),$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0,$$

con $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$ $i = 1, \dots, r$ y $j = 1, \dots, p$.

3.3. Regulador no lineal difuso por retroalimentación del estado

Para la solución a este problema se combinan técnicas de regulación lineal y no lineal, la principal razón es encontrar un controlador que garantice regulación por retroalimentación del estado, estabilidad de lazo cerrado y error de seguimiento cero, ya que en algunos casos cuando se diseña el regulador difuso por medio de técnicas lineales el error de seguimiento en estado estacionario no puede ser llevado a cero. El objetivo es aprovechar el modelo difuso Takagi Sugeno para tomar ventajas de los resultados de estabilización, construyendo un estabilizador difuso, el cual proporciona una región de estabilidad más grande que los simples estabilizadores lineales. Por otra parte, los mapeos no lineales $x_{ss} = \pi(w)$ y $u_{ss} = \gamma(w)$ son los exactos, calculados directamente de la planta no lineal, y no así de los sistemas locales. Este es el caso más favorable de la teoría de regulación porque se tiene acceso a toda la información del sistema. Se formula el correspondiente problema de regulación de la salida, tanto para cada subsistema como para el sistema agregado (3.6)-(3.8). Las reglas del regulador dinámico son entonces descritas por

Regla i

SI $z_1(t)$ es M_1^i y $z_2(t)$ es M_2^i y \dots y $z_p(t)$ es M_p^i

ENTONCES $\sum i : \{u(t) = K_i x(t) + L_i w(t)\}$
 por lo tanto, el controlador esta dado por

$$u(x(t), w(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [K_i(x(t) - \pi(w(t))) + \gamma(w(t))]. \quad (3.9)$$

donde

$$L_i = \gamma(w(t)) - K_i \pi(w(t))$$

El Problema de Regulación No Lineal Difusa por Retroalimentación del Estado (PRNLDS) puede ser definido como el problema de encontrar un conjunto de tripletas $(K_i, \pi(w), \gamma(w))$, $i = 1, \dots, r$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:

FRS) El punto de equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ del sistema

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i K_j x(t)$$

es asintóticamente estable.

FRR) La solución del sistema en lazo cerrado (3.6)- (3.8) con (3.9) satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Vale la pena notar que aun si el sistema original es no lineal, la propiedad del modelo Takagi Sugeno describe su comportamiento mediante subsistemas lineales, permitiendonos diseñar un estabilizador para cada uno de estos sistemas. A continuación se dan las condiciones para la estabilidad del sistema total; tan pronto como se cumpla la propiedad del regulador, es necesario encontrar la subvariedad cero de estado estacionario de la salida y la entrada en estado estacionario para el sistema no lineal difuso tal que hace invariante esta subvariedad. Esto se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1 *Suponga que las siguientes condiciones se cumplen*

FH1) *El exosistema $\dot{w}(t) = s(w(t))$ es Poisson estable [2].*

FH2) *Los pares (A_i, B_i) son estabilizables.*

FH3) *Existen matrices K_i y \mathbf{P} tal que*

$$N_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} N_{ii} < 0 \quad (3.10)$$

para todo $i = 1, \dots, r$ y

$$\left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right) < 0 \quad (3.11)$$

para $i < j \leq r$, son asintóticamente estables con

$$N_{ij} = (A_i + B_i K_j). \quad (3.12)$$

FH4) *Existen mapeos $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$, $u_{ss} = \gamma(w(t))$ con $\pi(0) = 0$, y $\gamma(0) = 0$ que satisfacen las condiciones*

$$\frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] \quad (3.13)$$

$$0 = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i \pi(w(t))] + Q(w(t)) \quad (3.14)$$

entonces el (PRNLDS) tiene solución.

Antes de hacer la prueba cabe mencionar que si el modelado difuso es el exacto entonces este modelado es la representación exacta del modelo no lineal, por lo tanto, la solución para la subvariedad en estado estacionario de la salida y la entrada en estado estacionario en ambos casos es la misma, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w} s(w) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] = f(\pi(w), \gamma(w), w) \\ 0 &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i \pi(w(t))] + Q(w(t)) = h(\pi(w), w). \end{aligned}$$

Por el contrario, si el modelado difuso es un aproximado del modelo no lineal, el error en estado estacionario estará acotado, ya que tanto, la subvariedad en estado estacionario de la salida y la entrada en estado estacionario no coincidirán con sus respectivos no lineales. Para la prueba de este y los consecuentes teoremas se utilizará la planta difusa exacta.

Prueba: La hipótesis **FH1)** implica que la aproximación lineal del exosistema tiene todos sus valores propios sobre el eje imaginario. Al suponer estabilidad de Poisson en cada punto de una vecindad de $w = 0$ se tendrá que ninguna trayectoria puede converger asintóticamente al equilibrio $w = 0$, con lo cual se excluyen los casos en que tal aproximación lineal tiene sus valores propios con parte real negativa. Además, dicha aproximación lineal no puede tener valores propios con parte real positiva porque el equilibrio $w = 0$ sería inestable. Así la clase de exosistemas permitidos serán entre otros, los sistemas que generen señales periódicas y constantes. De esta manera el problema del regulador no se transforma en un problema de estabilización.

La suposición **FH3)** garantiza la existencia de un controlador difuso $u(x(t), 0)$, cuando el exosistema se desconecta, definido como

$$u(x(t), 0) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

tal que

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(x(t), 0)]$$

podemos reescribir como

$$\dot{x}(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 N_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j \frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right\} x(t).$$

Ahora, tomando la función de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

tenemos que

$$\dot{V} = x^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 (N_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} N_{ii}) \right\} x + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j x^T \left\{ \left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right) \right\} x.$$

Ahora, por **FH3**, \dot{V} es definida negativa y así el punto de equilibrio $(x, w) = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

Para la parte de regulación, el error en estado estacionario se define como $e_{ss} = x(t) - \pi(w(t))$ y su derivada como

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ss}(t) &= \dot{x}(t) - \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w(t)) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[A_i + B_i \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j \right] e_{ss}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] - \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w(t)). \end{aligned}$$

Por otra lado, el error de seguimiento esta dado por

$$e(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + Q(w(t))$$

el cual en términos del error en estado estacionario se convierte en

$$e(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i (e_{ss}(t) + \pi(w(t))) + Q(w(t)).$$

De esta manera resulta claro que el seguimiento asintótico de la referencia se logra, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ cuando **FH3** y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] \\ 0 &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i \pi(w(t))] + Q(w(t)) \end{aligned}$$

se satisfacen.

En este trabajo, para satisfacer la condición **FH3**) primeramente se diseñan los reguladores locales para cada subsistema y segundo se procede a encontrar una matriz \mathbf{P} definida positiva común para todas las desigualdades de la forma de Lyapunov. De cualquier manera, por medio de técnicas LMI estas dos tareas pueden ser desarrolladas al mismo tiempo. El lector puede referenciar a [5], donde se presenta un completo análisis de técnicas LMI enfocado a teoría de control.

3.4. Regulador no lineal difuso por retroalimentación del error

Resolver el problema de regulación no lineal difusa de la salida por medio de la retroalimentación del error es de más utilidad desde el punto de vista de control de procesos, ya que algunas variables pueden no ser medibles. Se formula el correspondiente problema en términos de encontrar un controlador que garantice regulación por retroalimentación del error, estabilidad de lazo cerrado y error de seguimiento cero, tanto para cada subsistema como para el sistema agregado (3.6)-(3.8). Las reglas del regulador dinámico son entonces descritas por

Regla i

SI $z_1(t)$ es M_1^i y $z_2(t)$ es M_2^i y ... y $z_p(t)$ es M_p^i

ENTONCES $\sum i : \begin{cases} \dot{\zeta} = F_i \zeta(t) + G_i e \\ u = H_i \zeta(t) \end{cases}$

por lo tanto, el controlador esta dado por

$$\dot{\zeta} = \sum_{i=1}^r h_i F_i \zeta + \sum_{i=1}^r h_i G_i e \quad (3.15)$$

$$u = \sum_{i=1}^r h_i H_i \zeta. \quad (3.16)$$

más claramente

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i \overbrace{\begin{bmatrix} A_i + B_i K_i - G_{i1} C_i & 0 \\ -G_{i2} C_i & S \end{bmatrix}}^{F_i} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r h_i \overbrace{\begin{bmatrix} G_{i1} \\ G_{i2} \end{bmatrix}}^{G_i} e \quad (3.17)$$

$$u = \sum_{i=1}^r h_i [K_i \zeta_1 + \gamma(\zeta_2)] = \sum_{i=1}^r h_i H_i \zeta. \quad (3.18)$$

El *Problema de Regulación No Lineal Difusa por Retroalimentación del Error (PRNLDE)* puede ser definido como el problema de encontrar un conjunto de trietas (F_i, G_i, H_i) , $i = 1, \dots, r$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:

FES) El punto de equilibrio $(x, \zeta) = (0, 0)$ del sistema

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i H_j \zeta(t)$$

$$\dot{\zeta} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j G_i C_j x(t) + \sum_{i=1}^r h_i F_i \zeta(t)$$

es asintóticamente estable.

FER) La solución del sistema en lazo cerrado (3.6)-(3.8), (3.15), (3.16) satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

Teorema 3.4.1 *Suponga que las siguientes condiciones se cumplen*

FEH1) *El exosistema $\dot{w}(t) = s(w(t))$ es Poisson estable [2].*

FEH2) *Los pares (A_i, B_i) son estabilizables.*

FEH3) *Los pares*

$$\begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_i & -B_i\Gamma_i \\ 0 & S \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

son detectables.

FEH4) *Existen matrices K_i, G_i y \mathbf{P} tal que*

$$M_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} M_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

y

$$\left[\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right] < 0$$

para $i < j \leq r$, donde

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_i H_j \\ G_i C_j & F_i \end{bmatrix}$$

FEH5) *Existen mapeos $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$, $u_{ss} = \gamma(w(t))$ con $\pi(0) = 0$, y $\gamma(0) = 0$ que satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w) &= \sum_{i=1}^r h_i(w) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] \\ 0 &= \sum_{i=1}^r h_i(w) [C_i \pi(w(t))] + Q(w(t)) \end{aligned}$$

entonces el (PRNLDE) tiene solución.

Prueba: Primero se prueba la estabilidad del sistema difuso total cuando $w = 0$. Para este fin podemos reescribir el sistema en lazo cerrado (3.6), (3.15) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i B_i \left(\sum_{j=1}^r h_j H_j \zeta(t) \right) \\ \dot{\zeta}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i F_i \zeta(t) + \sum_{i=1}^r h_i G_i \left(\sum_{j=1}^r h_j C_j x(t) \right) \end{aligned}$$

definiendo $x_e(t) = [x(t) \quad \zeta(t)]^T$ podemos expresar de la manera

$$\dot{x}_e(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 M_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j \frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right\} x_e(t).$$

Ahora , tomando la función de Lyapunov

$$V(x, \varsigma) = x_e^T \mathbf{P} x_e$$

se tiene que

$$\dot{V} = x_e^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 (M_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} M_{ii}) \right\} x_e + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j x_e^T \left\{ \left(\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right) \right\} x_e.$$

Por **FEH4**), \dot{V} es definida negativa y así el punto de equilibrio $(x, \varsigma) = (0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable. Ver prueba en [7].

Para la parte de regulación, por construcción, la subvariedad de estado estacionario para el sistema compuesto (3.6), (3.17) y (3.18) está dado por $x_{ss} = \pi(w)$, $u_{ss} = \gamma(\varsigma_2)$.

El error de seguimiento de la salida (3.8) es dado por

$$\begin{aligned} e(t) &= \sum_{i=1}^r h_i C_i x(t) + Qw(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i C_i (x(t) - \pi(w)) + \left[\sum_{i=1}^r h_i C_i \pi(w) + Q_i w(t) \right] \end{aligned}$$

y, donde la subvariedad de estado estacionario es atractiva [4], entonces $x(t) \rightarrow \pi(w)$ asintóticamente y de esta manera por **FEH4**) resulta que $e(t) \rightarrow 0$.

La existencia de una solución del problema de regulación de la salida por retroalimentación del error, depende de entre otras cosas, de que para el sistema autónomo (3.2) con salida $u = \gamma(w)$, el cual puede ser considerado como un generador de aquellas funciones de entrada que producen respuestas de error cero, se pueda construir un observador, esta construcción puede no ser posible. Para debilitar este requerimiento, se tratará de tener una inmersión del sistema autónomo y su salida en otro que pueda cumplir con dicha condición.

3.5. Regulador robusto no lineal difuso

Definición 1 (Inmersión) Considerense los sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) & \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ y &= h(x) & y &= \tilde{h}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

definidos en dos espacios de estados diferentes, X y \tilde{X} , pero que tienen el mismo espacio de salida $Y = R^m$. Se supone, como es usual, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$ y $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{h}(0) = 0$ se dice que el

sistema $\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned}$ está inmerso en el sistema $\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ y &= \tilde{h}(\tilde{x}) \end{aligned}$ si existe un mapeo C^k $\tau : X \rightarrow \tilde{X}$,

con $k \geq 1$, que satisface $\tau(0) = y$

$$h(x) \neq h(z) \Rightarrow \tilde{h}(\tau(x)) \neq \tilde{h}(\tau(z))$$

tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial x} f(x) &= \tilde{f}(\tau(x)) \\ h(x) &= \tilde{h}(\tau(x))\end{aligned}$$

para toda $x \in X$.

Las dos condiciones mencionadas en esta definición, expresan el hecho de que cualquier trayectoria de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.20}$$

es también una trayectoria de

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}) \\ y &= \tilde{h}(\tilde{x}).\end{aligned}\tag{3.21}$$

La importancia de la inmersión radica en el hecho que el sistema (3.21) puede tener propiedades importantes que el sistema (3.20) no tiene. Por ejemplo, cualquier sistema lineal puede estar inmerso en un sistema lineal observable; cosas similares suceden en los sistemas no lineales bajo hipótesis apropiadas. Para el caso no lineal se requiere ver si es posible encontrar un sistema no lineal inmerso en un sistema lineal. Usando el concepto de inmersión, se pueden entonces enunciar las condiciones necesarias y suficientes para la solución del problema de regulación de salida por retroalimentación del error.

Evidentemente una de las propiedades recomendables en la implementación física, se refiere a mantener las características de estabilidad y seguimiento aún en presencia de variaciones paramétricas de la planta, esto es, la propiedad de la robustez. Por lo cual se debe diseñar una ley de control que cumpla con lo anterior y sea capaz de resolver el problema de regulación no lineal de la salida por retroalimentación de error. La inclusión de un modelo interno es una condición necesaria para asegurar robustez del controlador respecto a la variación paramétrica, en este caso, el modelo interno es la inmersión del sistema en un sistema dinámico que genera todas las posibles entradas en estado estacionario para cualquier valor de los parámetros. Se formula el correspondiente problema de regulación de la salida para el sistema no lineal, en términos de encontrar un controlador que garantice regulación robusta, estabilidad de lazo cerrado y error de seguimiento cero, tanto para cada subsistema como para el sistema no lineal agregado (3.6)-(3.8). Las reglas del regulador dinámico son entonces descritas por

Regla i

SI $z_1(t)$ es M_1^i y $z_2(t)$ es M_2^i y ... y $z_p(t)$ es M_p^i

ENTONCES $\sum i : \begin{cases} \dot{\zeta} = F_i \zeta(t) + G_i e \\ u = H_i \zeta(t) \end{cases}$

por lo tanto, el controlador esta dado por

$$\dot{\zeta} = \sum_{i=1}^r h_i F_i \zeta + \sum_{i=1}^r h_i G_i e\tag{3.22}$$

$$u = \sum_{i=1}^r h_i H_i \zeta.\tag{3.23}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \dot{\varsigma}_1 \\ \dot{\varsigma}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i \overbrace{\begin{bmatrix} A_i + B_i K_i - G_{i1} C_i & 0 \\ -G_{i2} C_i & \Phi \end{bmatrix}}^{F_i} \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r h_i \overbrace{\begin{bmatrix} G_{i1} \\ G_{i2} \end{bmatrix}}^{G_i} e \quad (3.24)$$

$$u = \sum_{i=1}^r h_i K_i \varsigma_1 + H_0 \varsigma_2 = \sum_{i=1}^r h_i H_i \varsigma. \quad (3.25)$$

Es importante notar que los mapeos $x_{ss} = \pi(w)$ representa la subvariedad cero de estado estable de la salida y $u_{ss} = \gamma(w)$ la entrada de estado estable. Esta entrada hace invariante la subvariedad cero de estado estable de la salida y garantiza que el error de seguimiento es cero en la subvariedad de estado estacionario. La condición (3.28) expresa el hecho de que esta entrada de estado estable puede ser generada, por un sistema lineal dinámico de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}_2 &= \Phi \varsigma_2 \\ u_{ss} &= H_0 \varsigma_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde

$$\varsigma_2 = \begin{bmatrix} \varsigma_2^1 \\ \vdots \\ \varsigma_2^m \end{bmatrix} \quad \Phi = \text{diag} \{ \Phi_1, \dots, \Phi_m \}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} H_0^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_0^m \end{bmatrix}$$

$$\varsigma_2^j = \begin{bmatrix} \varsigma_2^{j1} \\ \vdots \\ \varsigma_2^{jq_j} \end{bmatrix} \quad \Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^j & -a_1^j & -a_2^j & \dots & -a_{q_j-1}^j \end{bmatrix} \quad H_0^i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times q_j}$$

y $\varsigma_2^{jk} = L_s^{j-1} \gamma(w)$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, q_j$. Este sistema puede ser visto como una inmersión del exosistema (3.7) en un sistema lineal observable.

El *Problema de Regulación Robusta No Lineal Difusa (PRRNLD)* puede ser definido como el problema de encontrar un conjunto de tripletas (F_i, G_i, H_i) , $i = 1, \dots, r$ tal que las siguientes condiciones se cumplen:

FOS) El punto de equilibrio $(x, \varsigma) = (0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j B_i H_j \varsigma(t) \\ \dot{\varsigma} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j G_i C_j x(t) + \sum_{i=1}^r h_i F_i \varsigma(t) \end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

FOR) La solución del sistema en lazo cerrado (3.6), (3.8), (3.22), (3.23) satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Teorema 3.5.1 Suponga que las siguientes condiciones se cumplen

FOH1) El exosistema $\dot{w}(t) = s(w(t))$ es Poisson estable [2].

FOH2) Los pares (A_i, B_i) son estabilizables.

FOH3) Los pares

$$\begin{bmatrix} A_i & -B_i H_0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad [C_i \quad 0] \quad (3.27)$$

son detectables.

FOH4) Existen matrices K_i , G_i y \mathbf{P} tal que

$$O_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} O_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

y

$$\left[\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right] < 0$$

para $i < j \leq r$, donde

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_i H_j \\ G_i C_j & F_i \end{bmatrix}$$

FOH5) existen mapeos $x_{ss}(t) = \pi(w(t))$, $u_{ss} = \gamma(w(t))$ con $\pi(0) = 0$, y $\gamma(0) = 0$ que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(w(t))}{\partial w(t)} s(w) &= \sum_{i=1}^r h_i(w) [A_i \pi(w(t)) + B_i \gamma(w(t)) + P_i w(t)] \\ 0 &= \sum_{i=1}^r h_i(w) [C_i \pi(w(t))] + Q(w(t)) \end{aligned}$$

y para cada $j = 1, \dots, m$, entonces existe un conjunto de números reales $a_0^j, a_1^j, \dots, a_{q_j-1}^j$, tal que la entrada en estado estacionario $\gamma_j(w)$ satisface

$$L_s^{q_j} \gamma_j(w) = a_0^j \gamma_j(w) + a_1^j L_s \gamma_j(w) + \dots + a_{q_j-1}^j L_s^{q_j-1} \gamma_j(w) \quad (3.28)$$

entonces el (PRRNLD) tiene solución.

Prueba: Primero se prueba la estabilidad del sistema difuso total cuando $w = 0$. Para este fin podemos reescribir el sistema en lazo cerrado (3.6), (3.22) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i B_i \left(\sum_{j=1}^r h_j H_j \zeta(t) \right) \\ \dot{\zeta}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i F_i \zeta(t) + \sum_{i=1}^r h_i G_i \left(\sum_{j=1}^r h_j C_j x(t) \right) \end{aligned}$$

definiendo $x_e(t) = [x(t) \quad \varsigma(t)]^T$ podemos expresar de la manera

$$\dot{x}_e(t) = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 O_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j \frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right\} x_e(t).$$

Ahora, tomando la función de Lyapunov

$$V(x, \varsigma) = x_e^T \mathbf{P} x_e$$

se tiene que

$$\dot{V} = x_e^T \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2 (O_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} O_{ii}) \right\} x_e + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j x_e^T \left\{ \left(\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right) \right\} x_e.$$

Por **FOH4**), \dot{V} es definida negativa y así el punto de equilibrio $(x, \varsigma) = (0, 0)$ es globalmente asintóticamente estable.

Para la parte de regulación, por construcción, la subvariedad de estado estacionario para el sistema compuesto (3.6), (3.24) y (3.25) está dado por $x_{ss} = \pi(w)$, $\varsigma_{1,ss} = 0$, y $\varsigma_{2,ss} = (\gamma(w) \quad L_s \gamma(w) \quad \cdots \quad L_s^{q-2} \gamma(w) \quad L_s^{q-1} \gamma(w))^T$

El error de seguimiento de la salida (3.8) es dado por

$$\begin{aligned} e(t) &= \sum_{i=1}^r h_i C_i x(t) + Qw(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i C_i (x(t) - \pi(w)) + \left[\sum_{i=1}^r h_i C_i \pi(w) + Q_i w(t) \right] \end{aligned}$$

y, donde la subvariedad de estado estacionario es atractiva [4], entonces $x(t) \rightarrow \pi(w)$ asintóticamente y de esta manera por **FOH4**) resulta que $e(t) \rightarrow 0$.

Es importante recalcar que la diferencia fundamental entre la solución para el sistema lineal y no lineal recae en el hecho de encontrar una inmersión del tipo (3.26), que genera la entrada en estado estacionario $u_{ss}(t)$, mientras que la solución de dicha inmersión está garantizada para el caso lineal, para el caso no lineal no es posible asegurar su existencia a priori; entonces cuando se requiere solucionar el problema de regulación robusta de la salida, la construcción de una inmersión que tenga propiedades favorables a la detectabilidad y estabilidad, es el principal problema que se presenta. Cuando el mapeo $u_{ss} = \gamma(w)$ es polinomial en la variable de estado w , es posible obtener una solución; pero en muchos otros casos cuando el mapeo $u_{ss} = \gamma(w)$ incluye una exponencial, senoidal o términos racionales, esta solución es difícil o imposible de encontrar, dado que la dimensión de la inmersión puede ser infinita, una posible manera de tratar este problema es trabajar con una solución aproximada o buscar una solución alternativa.

3.6. Casos particulares de la teoría de regulación difusa

Los resultados presentados hasta ahora dependen de la existencia de mapeos en estado estacionario no lineales $x_{ss} = \pi(w)$ y $u_{ss} = \gamma(w)$. Una interesante pregunta es cuando estos mapeos

en estado estacionario pueden ser dados también en términos de las funciones de membresías, es decir, si $\pi(w)$ y $\gamma(w)$ pueden ser escritos como

$$\pi(w) = \left[\sum_{i=1}^r h_i(w) \Pi_i \right] w, \quad \gamma(w) = \left[\sum_{i=1}^r h_i(w) \Gamma_i \right] w \quad (3.29)$$

con Π_i y Γ_i calculados del respectivo problema de regulación para cada subsistema lineal en el modelo difuso TS, es decir, para cada subsistema descrito por

Regla i

SI $z_1(t)$ es M_1^i y $z_2(t)$ es M_2^i y ... y $z_p(t)$ es M_p^i

ENTONCES $\sum i : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ \dot{w}(t) = S(w(t)) \\ e_i(t) = C_i x(t) + Q w(t), \quad i = 1 \dots r. \end{cases}$

En otras palabras, la solución al problema de regulación para estos subsistemas serían inferidos de la existencia de una solución a las ecuaciones matriciales

$$\Pi_i S_i = A_i \Pi_i + B_i \Gamma_i + P_i \quad (3.30)$$

$$0 = C_i \Pi_i + Q_i \quad (3.31)$$

para cada subsistema. Desafortunadamente esto en general no es verdad, como se muestra en lo sucesivo.

Considerando que los mapeos en estado estacionario (3.29) deberán satisfacer las ecuaciones (3.13) y (3.14) se considera que

$$\left[\left[\sum_{i=1}^r \dot{h}_i \Pi_i \right] + \left[\sum_{i=1}^r h_i \Pi_i \right] \left[\sum_{i=1}^r h_i S_i \right] \right] w = \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i \Pi_j + B_i \Gamma_j + P_i) \right] w$$

$$0 = \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (C_i \Pi_j + Q_i) \right] w.$$

De lo anterior, se puede ver que las ecuaciones (3.30) y (3.31) para todo $i = 1, \dots, r$; corresponden exactamente a la solución del problema de regulación para cada subsistema. Hasta este punto, las ecuaciones resolverían el problema de regulación para el sistema no lineal total si y solo si las siguientes condiciones se cumplen

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \Pi_i + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j (\Pi_i S_j + \Pi_j S_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j (A_i \Pi_j + B_i \Gamma_j + P_i + A_j \Pi_i + B_j \Gamma_i + P_j) \\
0 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j (C_i \Pi_j + Q_i + C_j \Pi_i + Q_j)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

lo cual en general no es cierto. No obstante, un caso particular ocurre cuando $\Pi_1 = \Pi_2 = \dots = \Pi_r = \Pi$. Entonces el término $\sum_{i=1}^r \dot{h}_i \Pi_i = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \Pi = 0$ donde $\sum_{i=1}^r h_i = 1$. Entonces, las ecuaciones $C_i \Pi + Q_i + C_j \Pi + Q_j = 0$ se satisfacen trivialmente por la ecuación (3.31) y solo se necesita satisfacer

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j (\Pi S_j + \Pi S_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r h_i h_j (A_i \Pi + B_i \Gamma_j + P_i + A_j \Pi + B_j \Gamma_i + P_j).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora, se distinguen dos casos

$$\begin{aligned}
\text{Caso a)} \quad & B_1 = B_2 = \dots = B_r = B \\
\text{Caso b)} \quad & \Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_r = \Gamma.
\end{aligned}$$

En ambos casos la ecuación (3.33) se satisface trivialmente por las ecuaciones (3.30) y (3.31), por lo tanto, el problema de regulación tiene solución. El caso b) implica que las ecuaciones del regulador (3.13)-(3.14) tienen una solución lineal $x_{ss} = \Pi w$ y $u_{ss} = \Gamma w$.

Los siguientes resultados resumen la discusión anterior, y establecen bajo que condiciones se resuelve el problema de regulación, cuando el regulador difuso es diseñado a partir de sistemas lineales. Una vez que se cumplen las condiciones de los corolarios se obtiene un seguimiento exacto de la trayectoria, de otro modo se hace presente un error en estado estacionario o puede no haber solución.

3.6.1. Regulador difuso por retroalimentación del estado (caso particular)

Corolario 3.6.1.1 (Caso a) Suponga que en el regulador del sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) $B_i = B$ y las siguientes condiciones se cumplen

- FSH1)** Las matrices S_i tiene eigenvalores en el semiplano derecho cerrado
- FSH2)** Los pares (A_i, B) son estabilizables
- FSH3)** Existen matrices K_i y P tal que

$$N_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} N_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

y

$$\left[\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right] < 0$$

para $i < j \leq r$, donde

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B_i K_j \end{bmatrix}$$

FSH4) Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Pi S_i &= A_i \Pi + B \Gamma_i + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i \end{aligned}$$

tiene una solución Π, Γ_i para $i = 1, \dots, r$, entonces el (PRNLDS) tiene solución.

Corolario 3.6.1.1. (Caso b) Suponga que en el sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) las condiciones **FSH1)**, **FSH2)**, **FSH3)** se cumplen y también

FSH4_b) Las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Pi S_i &= A_i \Pi + B_i \Gamma + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i \end{aligned}$$

tiene la misma solución Π y Γ , entonces el (PRNLDS) tiene solución.

3.6.2. Regulador difuso por retroalimentación del error (caso particular)

Corolario 3.6.2.1. (Caso a) Suponga que en el regulador del sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) $B_i = B$ y las siguientes condiciones se cumplen

FSEH1) Las matrices S_i tiene eigenvalores en el semiplano derecho cerrado

FSEH2) Los pares (A_i, B) son estabilizables

FSEH3) Los pares $\begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & -B \Gamma_i \\ 0 & S_i \end{bmatrix}$ son detectables

FSEH4) Existen matrices K_i, G_i y \mathbf{P} tal que

$$M_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} M_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

y

$$\left[\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[\frac{M_{ij} + M_{ji}}{2} \right] < 0$$

para $i < j \leq r$, donde

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & B H_j \\ G_i C_j & F_i \end{bmatrix}$$

FSEH5) Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\Pi S_i &= A_i \Pi + B \Gamma_i + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i\end{aligned}$$

tiene una solución Π, Γ_i para $i = 1, \dots, r$,
entonces el (PRNLDS) tiene solución.

Corolario 3.6.2.1. (Caso b) Suponga que en el sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) las condiciones **FSEH1), FSEH2), FSEH3), FSEH4)** se cumplen y también

FSEH5_b) Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\Pi S_i &= A_i \Pi + B_i \Gamma + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i\end{aligned}$$

tiene la misma solución Π y Γ , entonces el (PRNLDE) tiene solución.

3.6.3. Regulador difuso robusto (caso particular)

Corolario 3.6.3.1. (Caso a) Suponga que en el regulador del sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) $B_i = B$ y las siguientes condiciones se cumplen

FSOH1) Las matrices S_i tiene eigenvalores en el semiplano derecho cerrado

FSOH2) Los pares (A_i, B) son estabilizables

FSOH3) Los pares $\begin{bmatrix} A_i & -BH_{0i} \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i & 0 \end{bmatrix}$ son detectables

FSOH4) Existen matrices K_i, G_i y \mathbf{P} tal que

$$O_{ii}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} O_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

y

$$\left[\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right]^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left[\frac{O_{ij} + O_{ji}}{2} \right] < 0$$

para $i < j \leq r$, donde

$$O_{ij} = \begin{bmatrix} A_i & BH_j \\ G_i C_j & F_i \end{bmatrix}$$

FSOH5) Las ecuaciones

$$\begin{aligned}\Pi S_i &= A_i \Pi + B \Gamma_i + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i\end{aligned}$$

tiene una solución Π, Γ_i para $i = 1, \dots, r$
entonces el (PRRNLD) tiene solución.

Corolario 3.6.3.1. (Caso b) Suponga que en el sistema no lineal difuso (3.6)-(3.8) las condiciones **FSOH1), FSOH2), FSOH3), FSOH4)** se cumplen y también

FSEH5_b) *Las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\Pi S_i &= A_i \Pi + B_i \Gamma + P_i \\ 0 &= C_i \Pi - Q_i\end{aligned}$$

tiene la misma solución Π y Γ , entonces el (PRRLD) tiene solución.

Capítulo 4

Aplicación al péndulo simple

4.1. Introducción

En este capítulo se hace un análisis de cuando el error de seguimiento en estado estacionario en un sistema difuso puede ser llevado a cero. El péndulo simple es un sistema que cae en el caso particular de la teoría de regulación difusa vista en el capítulo 3, es decir, cumple con las condiciones de los teoremas de regulación no lineal difusa (**PRNLDS**), (**PRNLDE**) y (**PRRNLD**); además se presenta un caso general donde estos teoremas no pueden satisfacerse. En la sección 4.2 se presenta el modelo dinámico del péndulo simple a partir del método de Euler-Lagrange. En la sección 4.3 se presenta una técnica eficiente para el modelado de sistemas difusos llamada aproximación local en particiones difusas. En la sección 4.4 se presenta la teoría de regulación difusa por retroalimentación del estado aplicada al péndulo simple en simulación y en tiempo real, además de un caso general donde el error de seguimiento no se lleva a cero. En la sección 4.5 se presenta la metodología de la regulación difusa por retroalimentación del error. En la sección 4.6 se trabaja con el péndulo simple, aplicando en simulación y en tiempo real la teoría de regulación robusta difusa, tanto para el seguimiento de una señal periódica y para una combinación de señales.

4.2. Modelo dinámico

Las ecuaciones no lineales invariantes en el tiempo que determinan el comportamiento dinámico del péndulo (figura 4.1(a)) se obtienen por el método Euler-Lagrange.

El péndulo considerado como un sistema no conservativo es representado por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \tau \quad (4.1)$$

donde L es el Lagrangiano definido por

$$L = K - V$$

K es la energía cinética, V la energía potencial del modelo. Los vectores τ y q representan el par y la posición de la unión del eslabón, R es la función de disipación de Rayleigh y t es el tiempo.

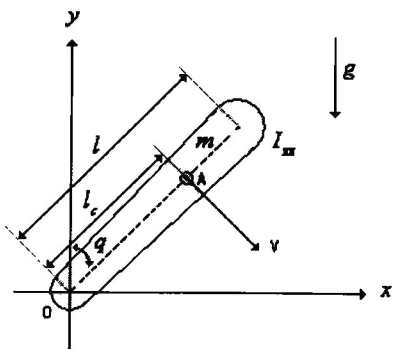


Figura 4.1(a). Esquema del péndulo simple.

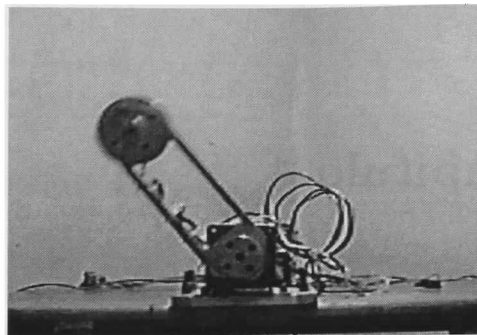


Figura 4.1(b). Péndulo simple.

Siguiendo el mismo procedimiento mostrado en [16] las ecuaciones que representan al sistema son

$$\tau = (ml_c^2 + I_{zz}) \ddot{q} + mgl_c \sin(q) + \mu_f \dot{q}. \quad (4.2)$$

A partir de la ecuación (4.2) se puede obtener la representación en variables de estado de la forma siguiente

$$\ddot{q} = -\frac{1}{(ml_c^2 + I_{zz})} (mgl_c \sin(q) + \mu_f \dot{q} - \tau) \quad (4.3)$$

definiendo las siguiente variables como

$$x_1 = q, \quad x_2 = \dot{q}, \quad u = \tau, \quad y = x_1,$$

el sistema no lineal queda representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) &= h(x) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ml_c^2 + I_{zz}} [mgl_c \sin(x_1) + \mu_f x_2] \end{bmatrix} & g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml_c^2 + I_{zz}} \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_1. \end{aligned}$$

Por último en la figura 4.1(b) se muestra una fotografía del péndulo simple, el cual se encuentra en el laboratorio de control automático del Cinvestav Unidad Guadalajara.

4.3. Aproximación local en particiones difusas

Un método para obtener modelos difusos TS es la aproximación local en particiones difusas. El objetivo del método es aproximar términos no lineales seleccionando términos lineales.

Cuando x_1 está cerca de cero, la ecuación no lineal puede ser simplificada como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-mgl_c x_1 - \mu_f x_2 + u}{ml_c^2 + I_{zz}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cuando x_1 esta cerca de $\pm\pi/2$, la ecuación no lineal puede simplificarse a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{-(2/\pi) mgl_c x_1 - \mu_f x_2 + u}{ml_c^2 + I_{zz}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Ahora (4.4) y (4.5) son sistemas lineales. Construimos el siguiente modelo difuso basado en sistemas lineales

Regla 1

SI $x_1(t)$ esta cerca de 0

$$\begin{aligned}\text{ENTONCES } \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ \dot{w}(t) &= S_1 w(t) \\ e(t) &= C_1 x(t) + Q_1 x(t).\end{aligned}$$

Regla 2

SI $x_1(t)$ esta cerca de $\pm\pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$)

$$\begin{aligned}\text{ENTONCES } \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ \dot{w}(t) &= S_2 w(t) \\ e(t) &= C_2 x(t) + Q_2 x(t).\end{aligned}$$

con los siguientes subsistemas lineales

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{\pi} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ S_1 &= S_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} & C_1 &= C_2 = [1 \ 0] & Q_1 &= Q_2 = [-1 \ 0]\end{aligned}$$

donde

$$a_{21} = -\frac{mgl_c}{ml_c^2 + I_{zz}}, \quad a_{22} = -\frac{\mu_f}{ml_c^2 + I_{zz}}, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{ml_c^2 + I_{zz}}.$$

Los parámetros del sistema físico son los siguientes

l_c	Longitud del eslabón	0,1551 m,
m	Masa del eslabón	0,8293 kg,
I_{zz}	Momento de inercia del eslabón	0,00595 kg · m ² ,
μ_f	Coficiente de fricción viscosa	0,00545 kg/s,
g	Constante gravitacional	9,81m/s ²

Las funciones para las reglas de membresía pueden ser representadas por las ecuaciones (4.6) y (4.7), la figura 4.2 muestra el comportamiento de las funciones de membresía

$$h_1(x_1(t)) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{-7[x_1(t) - \pi/4]}} \right\} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-7[x_1(t) + \pi/4]}} \right\} \quad (4.6)$$

$$h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)). \quad (4.7)$$

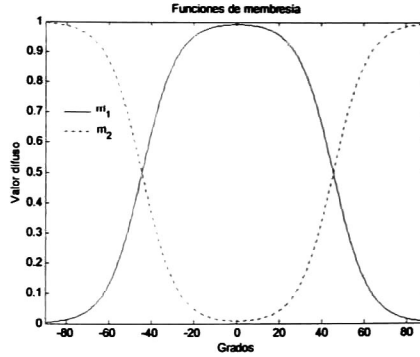


Figura 4.2. Funciones de membresía.

La función de membresía de la figura 4.2 reproduce el comportamiento en forma local de la única no linealidad del péndulo simple, es decir, cumple la condición de sector en forma local [9], la posición del péndulo se mantiene dentro de una región $-\frac{\pi}{2} \leq x_1(t) \leq \frac{\pi}{2}$.

4.4. Regulación difusa por retroalimentación del estado

A continuación se presenta el diseño de un regulador difuso por retroalimentación del estado, con el objetivo de seguir una señal de referencia senoidal. Se mostrará claramente que sólo en ciertos casos los mapeos no lineales en estado estacionario coinciden con los mapeos difusos en estado estacionario diseñados a partir de modelos locales. Cuando los mapeos (4.9) y (4.10) no son iguales se presenta un error en estado estacionario al aplicar el regulador difuso en la planta difusa Takagi-Sugeno y por lo tanto el regulador difuso aplicado a la planta no lineal acarrea éste tipo de problema.

La explicación de esta situación es que para el sistema no lineal difuso total del péndulo simple

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(a_{21}h_1 + \frac{2}{\pi}a_{21}h_2 \right) x_1 + a_{22}x_2 + (b_1h_1 + b_2h_2) u \end{aligned} \quad (4.8)$$

el exacto estado estacionario como es definido en [2] esta dado por

$$\begin{aligned} x_{1ss} &= \beta w_1, & x_{2ss} &= \beta w_2, \\ u_{ss} &= \frac{-\beta w_1 - \left(a_{21}h_1(w_1) + \frac{2}{\pi}a_{21}h_2(w_1) \right) w_1 - a_{22}w_2}{b_1h_1(w_1) + b_2h_2(w_1)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Por otra parte, la solución para cada subsistema esta dada por

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \frac{-\beta - a_{21}}{b_1} & \frac{-a_{22}}{b_1} \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\beta - \frac{2}{\pi}a_{21}}{b_2} & \frac{-a_{22}}{b_2} \end{bmatrix}$$

y entonces los mapeos difusos son

$$x_{ss} = \sum_{i=1}^2 h_i \Pi_i w \quad \text{y} \quad u_{ss} = \sum_{i=1}^2 h_i \Gamma_i w$$

resultando

$$\begin{aligned} x_{1ss} &= \beta w_1, & x_{2ss} &= \beta w_2, \\ u_{ss} &= \left(h_1(w_1) \frac{-\beta - a_{21}}{b_1} + h_2(w_1) \frac{-\beta - \frac{2}{\pi} a_{21}}{b_2} \right) w_1 \\ &+ \left(h_1(w_1) \frac{-a_{22}}{b_1} + h_2(w_1) \frac{-a_{22}}{b_2} \right) w_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como se puede ver (4.9) y (4.10) son sólo iguales cuando $b_1 = b_2$. En éste caso, la solución exacta a el problema de regulación coincide con la solución al problema de regulación difusa solo si el vector B es el mismo para ambos subsistemas, además de los mapeos lineales Π_i .

4.4.1. Control y aplicación al péndulo simple (caso particular)

Para esta aplicación se elige una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, la cual es generada por el exosistema, eligiendo una frecuencia con valor $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$ y condiciones iniciales $(w_1(0), w_2(0)) = (0, 1)$. Sustituyendo los valores de los parámetros en los subsistemas, obtenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -48,7183 & -0,2104 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -31,01507 & -0,2104 \end{bmatrix} \\ B_1 &= B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 38,61004 \end{bmatrix} & C_1 &= C_2 = [1 \quad 0], \\ S_1 &= S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & Q_1 &= Q_2 = [-1 \quad 0]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En primer lugar, el exosistema se elige como generador de señales común para todos los subsistemas, es decir $S_i = S$ para $i = 1, 2$. Dado que los eigenvalores de la matriz S del exosistema están sobre el eje imaginario en $[i, -i]$, la condición **FSH1)** se satisface.

Continuando, la condición **FSH2)** se cumple para todos los modelos locales. Esta condición se comprueba verificando el rango de la matriz de controlabilidad. Una vez comprobada la condición anterior para los dos subsistemas, se procede a ubicar sus polos de tal manera que todos los subsistemas sean estables. La ubicación propuesta coloca los polos de los dos subsistemas en $[-40 - 40j]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= [-40,1781 \quad -2,0665] \\ K_2 &= [-40,6367 \quad -2,0665] \end{aligned}$$

La siguiente condición a verificar, se refiere a la existencia de una matriz P simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i previamente calculadas, cumplan

con las restricciones del sistema de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo con la condición **FSH3**).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6,1986 & 0,00367 \\ 0,00367 & 0,00291 \end{bmatrix}$$

Por último se resuelven las dos ecuaciones matriciales para cada subsistema, se obtienen los siguientes mapeos

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = [1,2359 \quad 0,00545], \quad \Gamma_2 = [0,7774 \quad 0,00545]$$

con esto se cumple la condición **FSH4** y queda resuelto el (**PRNLDS**).

Como se puede observar en la figura 4.3(a) la salida de la planta que es representada por el eslabón del péndulo sigue asintóticamente la referencia generada por el exosistema, se puede ver que el error en estado estacionario tiende a cero. En la figura 4.3(d) son presentados los valores de las funciones de membresía para cada subsistema local.

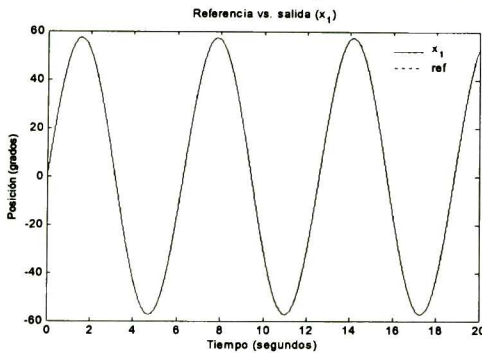


Figura 4.3(a)

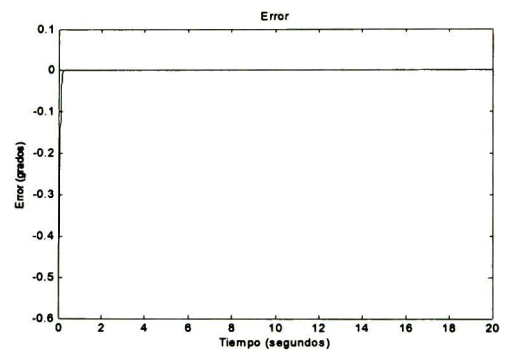


Figura 4.3(b)

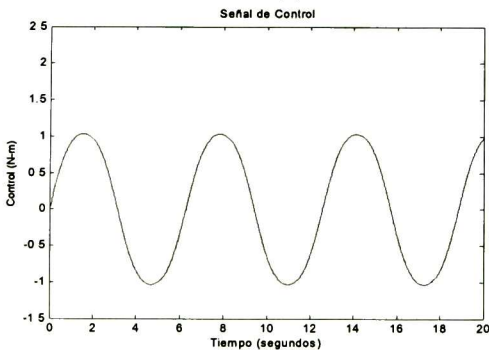


Figura 4.3(c)

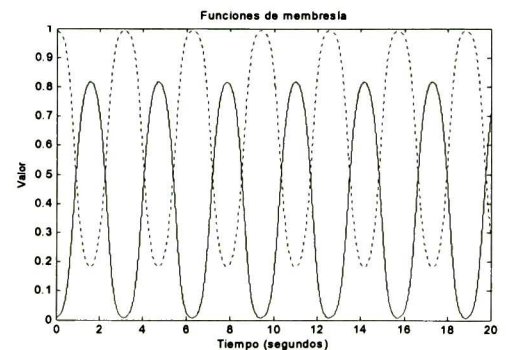


Figura 4.3(d)

Figura 4.3. Simulación del controlador difuso por retroalimentación del estado con una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, (caso particular).

Resultados en tiempo real.

Para hacer la aplicación en tiempo real del péndulo fue necesario quitar el eslabón subactuado del pendubot, de esta manera un único eslabón queda sujeto al motor y por lo tanto, el sistema es completamente actuado. El control del motor del péndulo simple se hace por medio de una PC Pentium IBM a 75Mhz con un programa en lenguaje C++, la posición del eslabón se mide con un encoder óptico BEI 1024 y un servo amplificador 25A8PWM se usa para operar el motor

en modo torque. La tarjeta DAC genera señales analógicas entre -10 y $+10$ V. El ángulo del eslabón se mide respecto del eje vertical, totalmente ergido en posición vertical representa 0° y colocado en posición horizontal 90° . Las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [0^\circ \ 0]$.

En la figura 4.4(a) se aprecia el seguimiento de la salida de la planta con respecto a la señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$. El error en estado estacionario oscila entre $\pm 1^\circ$ de diferencia entre ambas señales, esto se debe al desgaste de los componentes físicos y electrónicos, no tanto al diseño del regulador difuso. El inciso (c) presenta la ley de control que es aplicada al sistema para efectuar esta tarea.

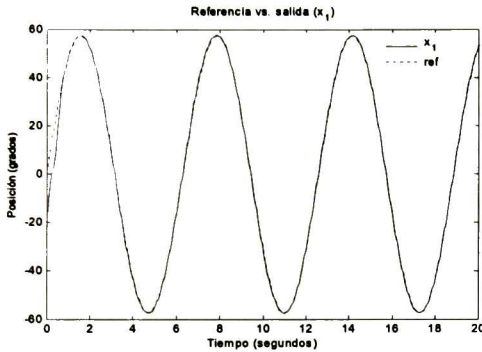


Figura 4.4(a)

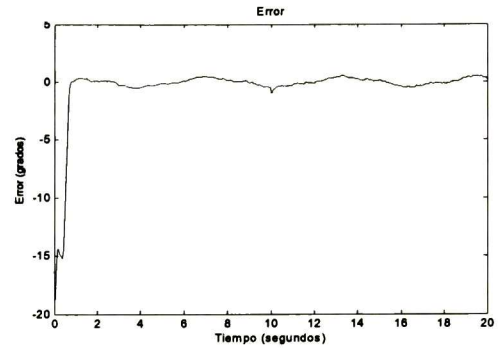


Figura 4.4(b)

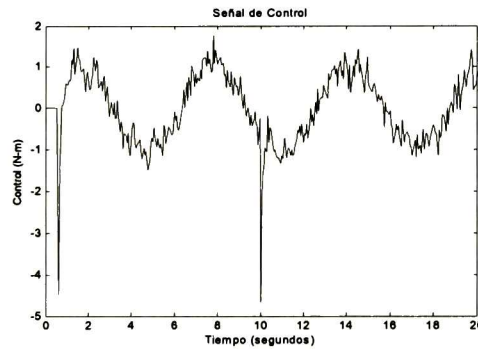


Figura 4.4(c)

Figura 4.4. Aplicación en tiempo real del controlador difuso por retroalimentación del estado con una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, (caso particular).

4.4.2. Caso general

Cuando un sistema no lineal es representado por medio de un modelo difuso puede ocurrir que las matrices de entrada B_i de los modelos lineales sean distintas, si se diseña un regulador difuso para seguir una señal de referencia y se aplica éste control, tanto en el modelo difuso como en el modelo no lineal seguramente se tendrá en el seguimiento un error en estado estacionario. La principal razón es que los mapeos no lineales no coinciden con los mapeos difusos obtenidos a partir de los modelos locales, como es mostrado con (4.9) y (4.10). Para probar lo anterior, en el sistema no lineal total (4.8) arbitrariamente se ha seleccionado $b_2 = 4 * b_1$, el valor numérico

de los subsistemas es el siguiente

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -48,7183 & -0,2104 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -31,01507 & -0,2104 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 38,61004 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 154,4402 \end{bmatrix}, & C_1 = C_2 &= [1 \ 0], \\ S_1 &= S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & Q_1 = Q_2 &= [-1 \ 0]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dado que los eigenvalores de la matriz S del exosistema están sobre el eje imaginario en $[i, -i]$, el sistema es neutralmente estable y la condición **FSH1_b**) se satisface.

La condición **FSH2_b**) se cumple para los dos modelos locales, se procede a ubicar sus polos de tal manera que todos los subsistemas sean estables. La ubicación de los polos de los dos subsistemas se coloca en $[-40 - 40]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= [-40,1781 \quad -2,0665], \\ K_2 &= [-10,1591 \quad -0,5166]. \end{aligned}$$

La tercera condición a verificar, se refiere a la existencia de una matriz \mathbf{P} simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i previamente calculadas, cumplan con las restricciones del sistema de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo con la condición **FSH3_b**).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6,1986 & 0,00367 \\ 0,00367 & 0,00291 \end{bmatrix}$$

Por último se resuelven las dos ecuaciones matriciales para cada subsistema, obteniéndose los siguientes mapeos

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = [1,2359 \quad 0,00545], \quad \Gamma_2 = [0,1943 \quad 0,00136]$$

como se puede observar la condición **FSH4_b**) no se cumple ya que los mapeos Γ_1 y Γ_2 son distintos, además $b_1 \neq b_2$ y no se satisface la ecuación (3.33).

En la figura 4.5(a) la salida de la planta que es representada por el eslabón del péndulo no sigue asintóticamente a la referencia generada por el exosistema, se puede ver en la figura 4.5(b) que existe un error en estado estacionario.

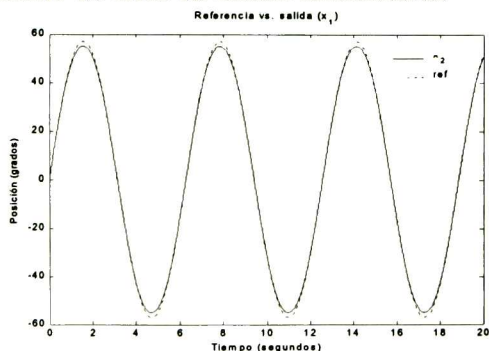


Figura 4.5(a)

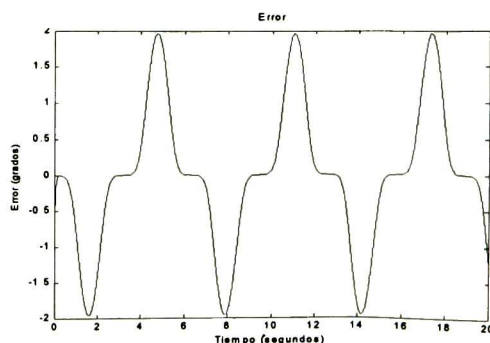


Figura 4.5(b)

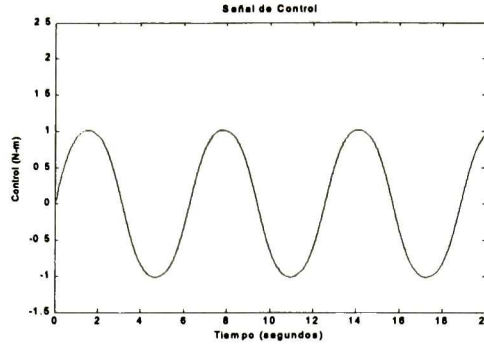


Figura 4.5(c)

Figura 4.5. Simulación del controlador difuso por retroalimentación del estado con una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, (caso general).

4.5. Regulación difusa por retroalimentación del error.

4.5.1. Control y aplicación al péndulo simple (caso particular)

En esta sección el objetivo es que el péndulo simple lleve a cabo seguimiento de señales periódicas, pero ahora no se tiene a disposición la información de los estado, es decir, la posición del eslabón y la velocidad angular del mismo; sólo se tiene la información del error entre la salida de la planta y la señal de referencia. Para solucionar esta situación se aplica la regulación difusa por retroalimentación del error, con una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$ y condiciones iniciales $x(0) = [0^\circ \ 0]$. Los subsistemas lineales son los mismos que en (4.11).

El exosistema es neutralmente estable dado que sus eigenvalores están sobre el eje imaginario en $[i, -i]$, por lo tanto, se satisface la condición **FSEH1)**.

Ahora la condición **FSEH2)** se comprueba verificando el rango de la matriz de controlabilidad de cada subsistema. La ubicación propuesta coloca los polos de los dos subsistemas en $[-8 - 8]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0,3957 & -0,4089 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -0,8543 & -0,4089 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En seguida, se verifica la detectabilidad de las matrices

$$\begin{bmatrix} A_i & P_i \\ 0 & S_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_i & Q_i \end{bmatrix}$$

dadas en la condición **FSEH3)**. En este caso se verifica la detectabilidad, mediante la prueba de rango de la matriz de observabilidad. A partir de esta prueba, se calculan las matrices de ganancias G_{1i} y G_{2i} , de manera que las matrices

$$\begin{bmatrix} A_i & P_i \\ 0 & S_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{1i} \\ G_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i & Q_i \end{bmatrix}$$

sean estables.

Para esto se propone ubicar los polos en $[-15 \ -15 \ -15 \ -15]$. Las matrices de ganancias son

$$G_1 = \begin{bmatrix} -217,3 \\ 253,8 \\ -277,0 \\ -1033,8 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} -376,4 \\ -339,3 \\ -436,2 \\ -1644,7 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso se refiere a la existencia de una matriz \mathbf{P} simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias (K_i, G_{1i}, G_{2i}) previamente calculadas, cumplan con las restricciones del sistema de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo con la condición **FSEH4**). Siguiendo con la construcción indicada en el corolario 3.6.2.1, se generan 3 desigualdades de la forma de desigualdad de Lyapunov. A continuación se realiza la búsqueda de la matriz \mathbf{P} , aplicando el algoritmo de optimización convexa al sistema de desigualdades. La matriz encontrada debe satisfacer todas las desigualdades, de manera que al evaluarlas con la matriz calculada, se cumpla que todas las desigualdades sean definidas negativas. Dicha propiedad es equivalente a verificar que sus eigenvalores sean negativos. La matriz es la siguiente

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 657,6634 & -21,7539 & -642,4286 & 29,0497 & 648,1575 & -30,2309 \\ -21,7539 & 1,7990 & 22,7748 & -1,9661 & -27,3524 & 2,7510 \\ -642,4286 & 22,7748 & 648,5816 & -28,6917 & -674,8467 & 35,7047 \\ 29,0497 & -1,9661 & -28,6917 & 2,4003 & 32,0257 & -2,7629 \\ 648,1575 & -27,3524 & -674,8467 & 32,0257 & 744,1854 & -49,1348 \\ -30,2309 & 2,7510 & 35,7047 & -2,7629 & -49,1348 & 5,7984 \end{bmatrix}$$

En el caso de la condición **FSEH5**) se resuelven las dos ecuaciones matriciales para cada subsistema, se obtienen los siguientes mapeos

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = [1,2359 \quad 0,00545] \quad \Gamma_2 = [0,7774 \quad 0,00545]$$

con esto queda resuelto el (**PRNLDE**).

Como se puede observar en la figura 4.6(a) la salida de la planta que es representada por el eslabón del péndulo sigue asintóticamente la referencia senoidal generada por el exosistema, en la figura 4.6(b) se puede ver que el error tiende a cero, cabe mencionar que los estados del observador tienden a los estados reales de la planta.

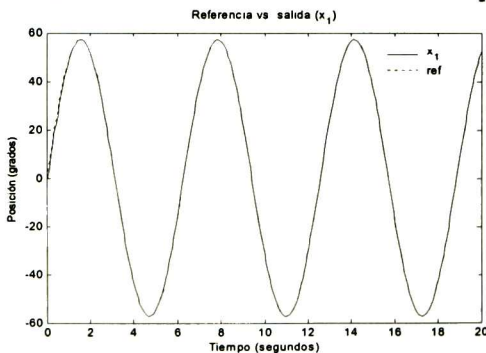


Figura 4.6(a)

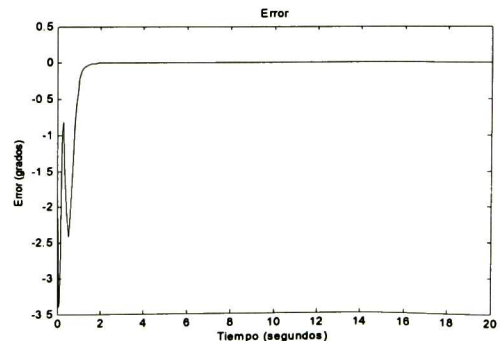


Figura 4.6(b)

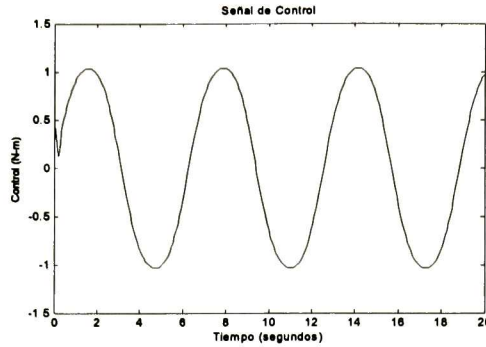


Figura 4.6(c)

Figura 4.6. Simulación del controlador difuso por retroalimentación del error con una señal de referencia de $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, (caso particular).

Resultados en tiempo real.

Para la aplicación en tiempo real no se tiene a disposición la información de la posición del eslabón ni de la velocidad angular, lo único disponible es el valor del error; por lo tanto se diseña un observador de tal forma que proporcione la entrada en estado estacionario necesaria para que la salida de la planta siga a la señal de referencia. En la figura 4.7(a) se presenta el comportamiento del eslabón para una señal de referencia $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, se observa un pequeño error en las crestas de la onda senoidal, que no sobrepasa $\pm 1^\circ$ grado de diferencia, una respuesta bastante aceptable para ser en tiempo real.

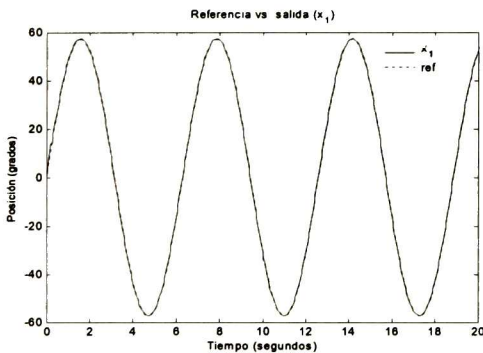


Figura 4.7(a)

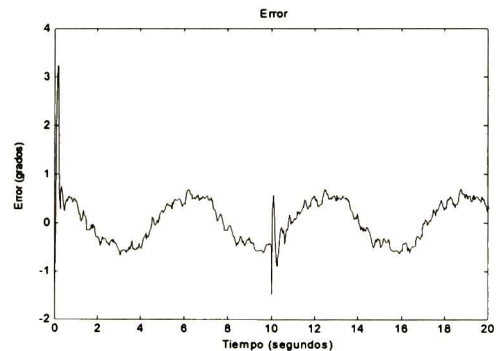


Figura 4.7(b)

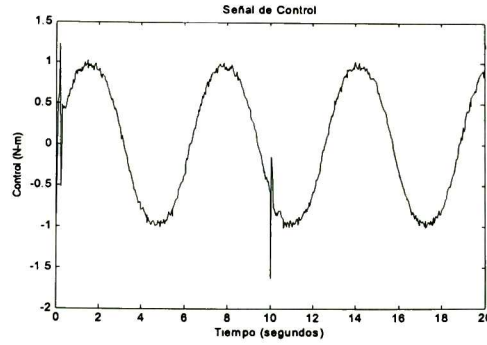


Figura 4.7(c)

Figura 4.7. Aplicación en tiempo real del controlador difuso por retroalimentación del error con una señal de referencia de $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$, (caso particular).

4.5.2. Caso general

En la subsección 4.4.2 se muestra un caso general donde no se realiza seguimiento exacto en la salida, mediante el diseño de un regulador difuso por retroalimentación del estado. Ahora, en base a los mismos sistemas locales (4.12) y las mismas condiciones en la señal de referencia se diseñará un regulador difuso por retroalimentación del error, aplicados tanto al sistema difuso total como al sistema no lineal. En el sistema no lineal total (4.8) arbitrariamente se ha seleccionado $b_2 = 4 * b_1$.

La condición **FSEH1_b**) se satisface para las matrices S_i de (4.12). Al igual se cumple la condición **FSEH2_b**) para los pares (A_i, B_i) de (4.12). La ubicación propuesta coloca los polos de los dos subsistemas en $[-8 - 8]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -0,3957 & -0,4089 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -0,2135 & -0,1022 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En seguida, se verifica la detectabilidad de las matrices dadas en la condición **FSEH3_b**). En este caso se verificó la detectabilidad, mediante la prueba de rango de la matriz de observabilidad. A partir de esta prueba, se calculan las matrices de ganancias G_{1i} y G_{2i} , para esto se propone ubicar los polos en $[-15 \ -15 \ -15 \ -15]$ Las matrices de ganancias son

$$G_1 = \begin{bmatrix} -217,3 \\ 253,8 \\ -277,0 \\ -1033,8 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} -376,4 \\ -339,3 \\ -436,2 \\ -1644,7 \end{bmatrix}$$

La penúltima condición a verificar, se refiere a la existencia de una matriz \mathbf{P} simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias (K_i, G_{1i}, G_{2i}) previamente calculadas, cumplan con las restricciones del sistema de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo con

la condición **FSEH_{4b}**).

$$P = 1,0e - 006 \begin{bmatrix} 0,8908 & -0,0124 & -0,9009 & 0,0073 & 0,9033 & -0,0064 \\ -0,0124 & 0,0002 & 0,0125 & -0,0001 & -0,0127 & 0,0002 \\ -0,9009 & 0,0125 & 0,9149 & -0,0072 & -0,9192 & 0,0072 \\ 0,0073 & -0,0001 & -0,0072 & 0,0002 & 0,0073 & -0,0001 \\ 0,9033 & -0,0127 & -0,9192 & 0,0073 & 0,9262 & -0,0080 \\ -0,0064 & 0,0002 & 0,0072 & -0,0001 & -0,0080 & 0,0003 \end{bmatrix}$$

En el caso de la condición **FSEH_{5b}**) se resuelven las dos ecuaciones matriciales para cada subsistema, se obtienen los siguientes mapeos

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = [1,2359 \quad 0,00545] \quad \Gamma_2 = [0,1943 \quad 0,00136]$$

pero el (**PRNLDE**) no puede ser resuelto exactamente ya que los mapeos Γ_1 y Γ_2 no son los mismos, además $B_1 \neq B_2$, por lo que al resolver la ecuación (3.33) es distinta de cero.

En la figura 4.8(a) se presenta tanto la salida de la planta como la señal de referencia, el error presentado es debido a que la suma de los mapeos lineales no son los exactos, de otra manera, no representan la exacta subvariedad de entrada de estado estable $u_{ss} = \gamma(w)$.

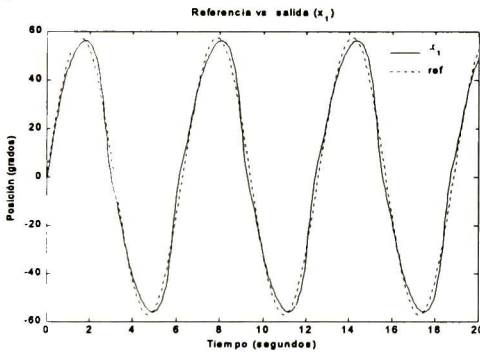


Figura 4.8(a)

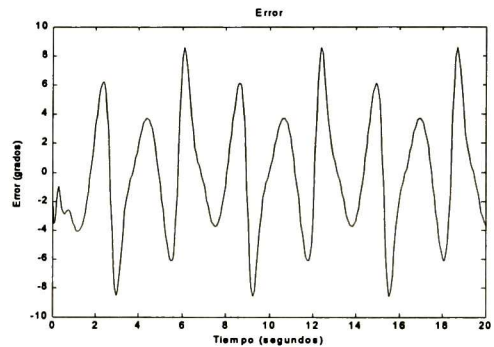


Figura 4.8(b)

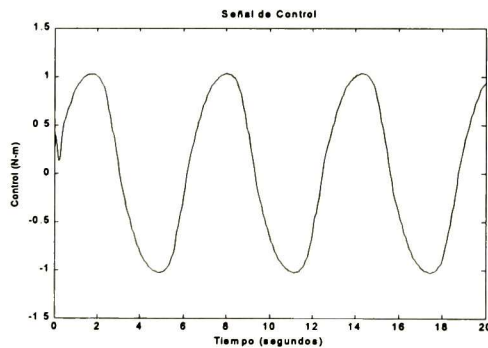


Figura 4.8(c)

Figura 4.8. Simulación del controlador difuso por retroalimentación del error con una señal de referencia de $57,29 \sin(1t)$, (caso general).

4.6. Regulación robusta difusa

En esta sección se presenta la aplicación de la teoría de regulación robusta difusa al péndulo simple, en primer lugar se planea seguir una señal periódica; en el segundo experimento se propone el seguimiento de una combinación de trayectorias generas por el exosistema (4.13).

Para mostrar el controlador robusto difuso, en esta sección se seguirá una señal de referencia periódica $y_{ref} = 85 \sin(1t)$, con condiciones iniciales $x(0) = [0^\circ \ 0]$. Los subsistemas lineales son los mismos que en (4.11).

La condición **FSOH1**) se cumple ya que los eigenvalores de las matrices S_i están sobre el eje imaginario en $[i, -i]$.

Por lo consiguiente, la inmersión Φ dada en la ecuación (2.31) se calcula en este caso, a partir de los coeficientes del polinomio característico, de la matriz S del exosistema, es decir,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$. Nótese que la matriz Φ es igual para los dos controladores locales, debido a que el exosistema es el mismo. Además, la matriz H_0 del controladores se define como

$$H_{0i} = [1 \ 0]$$

de acuerdo a (2.32).

La condición **FSOH2**) se cumple para los dos modelos locales. La ubicación propuesta coloca los polos de los dos subsistemas en $[-8 - 8]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= [-0,3957 \ -0,4089], \\ K_2 &= [-0,8543 \ -0,4089]. \end{aligned}$$

En seguida, se verifica la detectabilidad de las matrices

$$\begin{bmatrix} A_i & -B_i H_{0i} \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \quad [C_i \ 0]$$

dadas en la condición **FSHO3**). En este caso se verificó la detectabilidad, mediante la prueba de rango de la matriz de observabilidad. A partir de esta prueba, se calculan las matrices de ganancias G_{1i} y G_{2i} , de manera que la matrices

$$\begin{bmatrix} A_i & -B_i H_{0i} \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{1i} \\ G_{2i} \end{bmatrix} [C_i \ 0]$$

sean estables.

Para esto se propone ubicar los polos en $[-15 \ -15 \ -15 \ -15]$ Las matrices de ganancias son

$$G_1 = \begin{bmatrix} 59,8 \\ 1287,7 \\ -348,1 \\ -1276,2 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 59,8 \\ 1305,4 \\ -348,1 \\ -1276,2 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las ganancias (K_i, G_{1i}, G_{2i}), se inicia la búsqueda de una matriz \mathbf{P} simétrica definida positiva, de acuerdo con la condición **FSOH4**).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3,1090 & -0,0503 & -3,1239 & 0,0602 & -0,7548 & 0,1227 \\ -0,0503 & 0,0206 & 0,0585 & -0,0216 & -0,0154 & -0,0132 \\ -3,1239 & 0,0585 & 3,6652 & -0,0523 & 0,8432 & -0,1133 \\ 0,0602 & -0,0216 & -0,0523 & 0,0279 & 0,0203 & 0,0185 \\ -0,7548 & -0,0154 & 0,8432 & 0,0203 & 0,6968 & -0,1311 \\ 0,1227 & -0,0132 & -0,1133 & 0,0185 & -0,1311 & 0,0492 \end{bmatrix}$$

En el caso de la condición **FSOH5**) se resuelven las dos ecuaciones matriciales para cada subsistema, obteniéndose los siguientes mapeos

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1,4835 & 0 \\ 0 & 1,4835 \end{bmatrix} \quad \Gamma_1 = [1,8335 \quad 0,00808], \quad \Gamma_2 = [1,1532 \quad 0,00808],$$

con esto se resuelve el (**PRRNLD**).

En la figura 4.9(a) se presenta el seguimiento del eslabón respecto a la señal de referencia $y_{ref} = 85^\circ \sin(1t)$, el error de la figura 4.9(b) se debe a que el eslabón se acerca mucho a la zona límite del modelado difuso, de una manera más clara, esta cerca de $\pm 90^\circ$, mientras más cerca se encuentre el eslabón de ese punto puede sufrir inestabilidad y por lo tanto, un pequeño error de seguimiento.

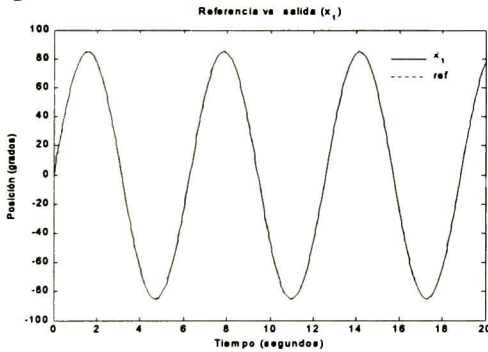


Figura 4.9(a)

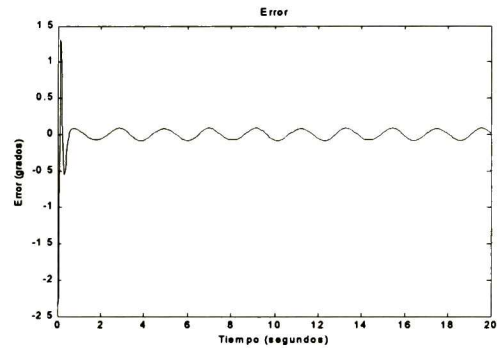


Figura 4.9(b)

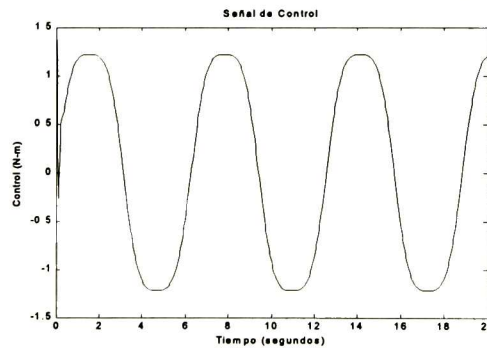


Figura 4.9(c)

Figura 4.9. Simulación del controlador robusto difuso para una señal de referencia de $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$.

Resultados en tiempo real.

Las respuestas en tiempo real se muestran en la figura 4.10, en (a) se observa el seguimiento de la trayectoria que es realizada por el eslabón, en (b) se presenta el error en esto estacionario y por último en (c) se nota que la ley de control es muy suave respecto a los métodos anteriores.

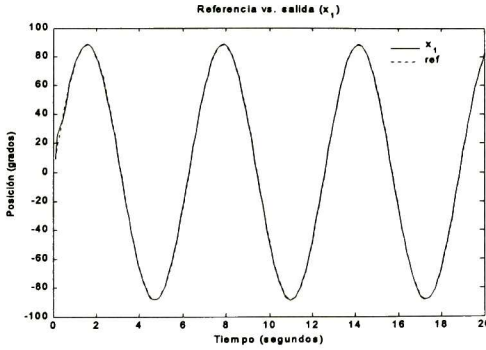


Figura 4.10(a)

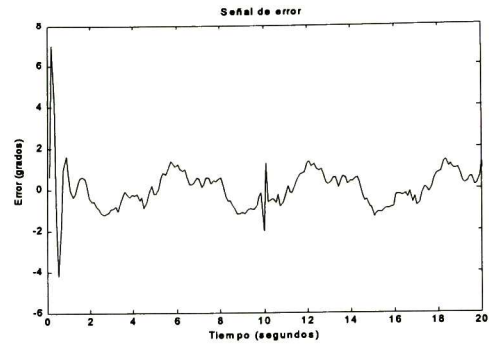


Figura 4.10(b)

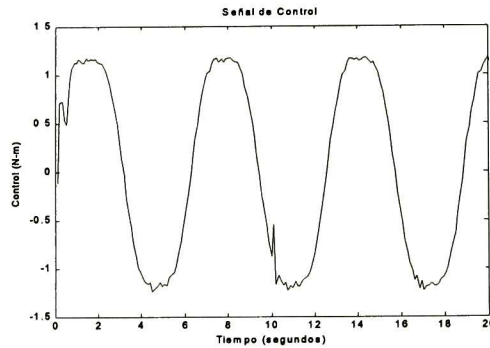


Figura 4.10(c)

Figura 4.10. Aplicación en tiempo real del controlador robusto difuso para una señal de referencia de $y_{ref} = 57,29^\circ \sin(1t)$.

Seguimiento de una combinación de trayectorias

Ahora, el objetivo es aplicar un controlador robusto difuso a la planta no lineal del péndulo simple para el seguimiento de una combinación de trayectorias generadas por (4.13), para una frecuencia de oscilación $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$. Los sistemas lineales son los mismos que se presentan en (4.11), excepto por el exosistema.

El modelo matemático del exosistema que permite generar las señales de referencia a seguir esta dado por

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde w_1 genera una señal constante, w_2 genera señales senoidales y por último w_3 genera señales cosenoidales.

Las señales de referencia y los tiempos de vida son

$$\begin{aligned} t < 9,5\text{seg} & \quad y_{ref} = 80^\circ w_2(t), \\ 9,5\text{seg} < t \leq 19,5\text{seg} & \quad y_{ref} = 0^\circ w_1(t), \\ 19,5\text{seg} < t \leq 28,5\text{seg} & \quad y_{ref} = 60^\circ w_2(t), \\ t \geq 28,5 & \quad y_{ref} = 20^\circ w_3(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

El exosistema (4.13) es antiestable dado que sus valores propios están en $[0, i, -i]$, la condición **FSOH1)** se satisface.

Por lo consiguiente, la inmersión Φ dada en la ecuación (2.31) se calcula en este caso, a partir de los coeficientes del polinomio característico, de las matrices S_i , es decir,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Además, la matrices H_{0i} de los controladores se definen como

$$H_{0i} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

de acuerdo a (2.32).

Los polos de los dos subsistemas se colocan en $[-5 \ -5]$, para la obtención de las matrices de ganancias dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= [0,6143 \quad -0,2536] \\ K_2 &= [0,1558 \quad -0,2536] \end{aligned}$$

de antemano la condición **FSOH2)** se ha cumplido.

Una vez que se cumple la condición **FSOH3)**, se obtienen las matrices de ganancias del observador ubicando los polos en $[-10 \ -10 \ -10 \ -10 \ -10]$, el resultado es

$$G_1 = \begin{bmatrix} 49,8 \\ 939,8 \\ -257,7 \\ -1269,1 \\ -2332,3 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 49,8 \\ 957,5 \\ -257,7 \\ -1269,1 \\ -2332,3 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidas las ganancias (K_i, G_{1i}, G_{2i}) , se inicia la búsqueda de una matriz **P** simétrica definida positiva, las cuales deben cumplir con las restricciones del sistema de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo con la condición **FSOH4)**.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5,2553 & -0,0721 & -5,2234 & 0,0903 & -1,7474 & 0,1346 & 0,0466 \\ -0,0721 & 0,0477 & 0,0597 & -0,0497 & -0,0152 & -0,0585 & 0,0160 \\ -5,2234 & 0,0597 & 5,9905 & -0,0332 & 1,6965 & 0,0071 & -0,0780 \\ 0,0903 & -0,0497 & -0,0332 & 0,0720 & -0,0055 & 0,0547 & -0,0020 \\ -1,7474 & -0,0152 & 1,6965 & -0,0055 & 2,3761 & -0,5339 & 0,0610 \\ 0,1346 & -0,0585 & 0,0071 & 0,0547 & -0,5339 & 0,4240 & -0,1491 \\ 0,0466 & 0,0160 & -0,0780 & -0,0020 & 0,0610 & -0,1491 & 0,0717 \end{bmatrix}$$

Para la condición **FSOH5**), existen las matrices Π_i y Γ_i para las cuatro señales a referencia (4.14). Por lo tanto se resuelve el (**PRRNLD**).

La respuesta en simulación se presenta en la figura 4.12, se puede ver en (a) que la salida de la planta sigue a la trayectoria generada en base a una combinación de señales. El sistema dinámico (4.15) provee la entrada u_{ss} para cada valor de los parámetros y para cada señal de referencia, la ley de control puede ser vista en (c).

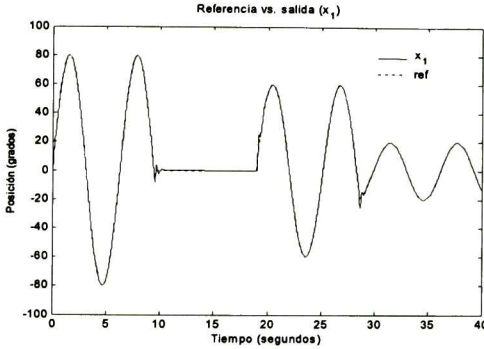


Figura 4.11(a)

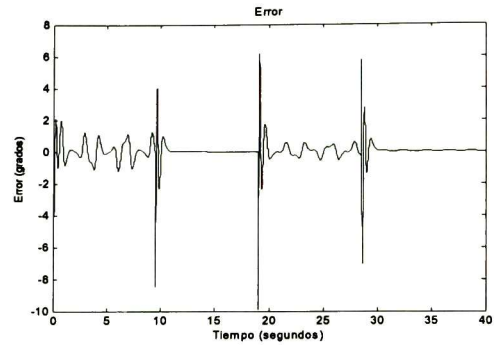


Figura 4.11(b)

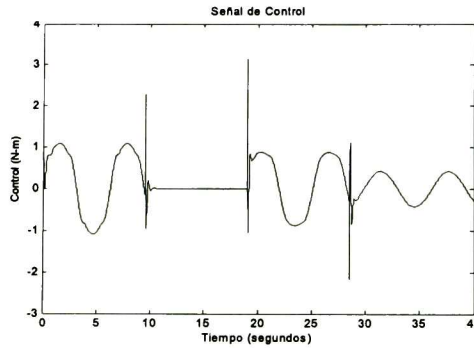


Figura 4.11(c)

Figura 4.11. Simulación del controlador robusto difuso para las señales de referencia presentadas en (4.14).

Resultados en tiempo real.

En la figura 4.12 se plasman los resultados del controlador robusto difuso obtenido, haciendo una comparación entre las figuras 4.11(a) y 4.12(a) se aprecia que tienen el mismo comportamiento, salvo cuando se estabiliza el péndulo en 0° , en tiempo real se nota un error algo significativo; pero en general los resultados son bastantes satisfactorios. Es importante recalcar que sólo se conmutan las señales de referencia y no así la señal de control. Esto es gracias a que la inmersión de alguna manera "observa" la entrada en estado estacionario u_{ss} .

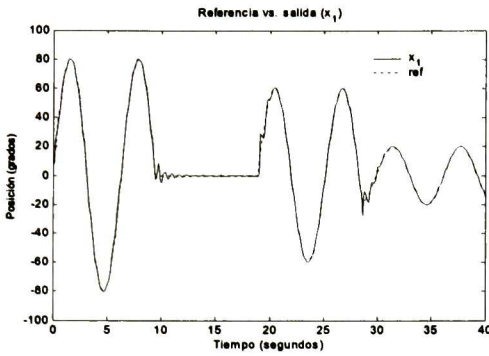


Figura 4.12(a)

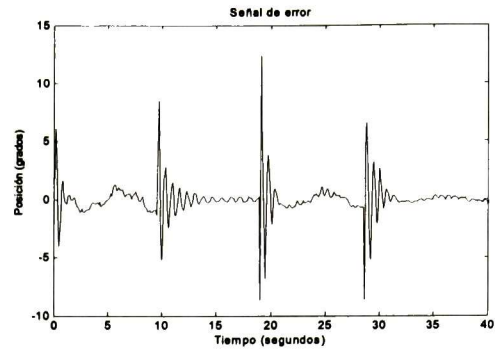


Figura 4.12(b)

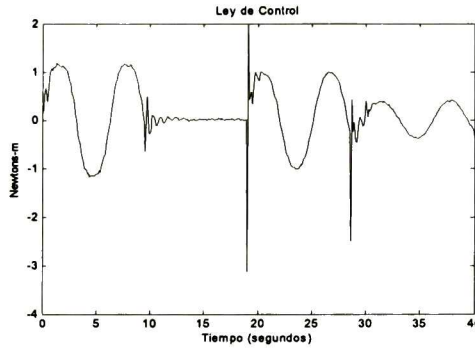


Figura 4.12(c)

Figura 4.12. Aplicación en tiempo real del controlador robusto difuso para las señales de referencia presentadas en (4.14).

Ahora, se presenta otro controlador robusto difuso para una combinación de señales, sólo se muestran los resultados en tiempo real de la aplicación al péndulo simple. Las señales y los tiempos de vida son

$$\begin{aligned}
 t < 6\text{seg} & & y_{ref} &= 20^\circ \sin(2t), \\
 12,5\text{seg} < t \leq 6\text{seg} & & y_{ref} &= 40^\circ \sin(2t), \\
 19\text{seg} < t \leq 12,5\text{seg} & & y_{ref} &= 60^\circ \sin(2t), \\
 t \geq 19 & & y_{ref} &= 80^\circ \sin(2t).
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

En la figura 4.13 se observa el comportamiento en tiempo real de la planta, las señales de referencia (4.16) son reproducidas con un mínimo error por el eslabón del péndulo, se aprecia que existe un error considerable cuando la señal de referencia se conmuta, pero este error queda acotado al alcanzar el estado estacionario.

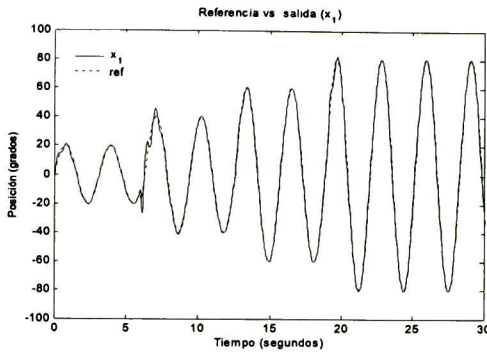


Figura 4.13(a)

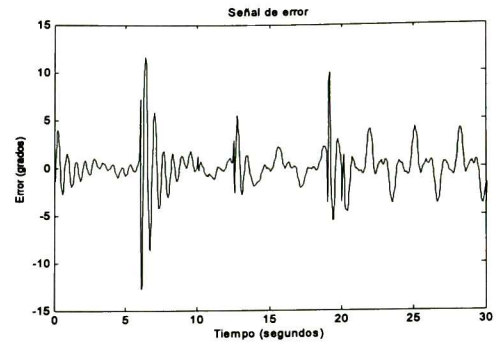


figura 5.13(b)

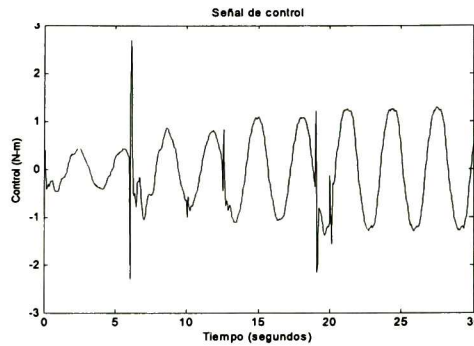


Figura 5.13(c)

Figura 4.13. Aplicación en tiempo real del controlador robusto difuso para las señales de referencia presentadas en (4.16).

4.7 Comentarios

Los casos de estudio presentados en este capítulo, fueron desarrollados de una manera metodológica, es decir, los problemas de regulación difusa se hicieron paso por paso sin omitir detalle y cumpliendo con las condiciones de los respectivos teoremas, esto es con el áfan de poder aplicar esta metodología de una manera sencilla.

Cabe mencionar que los resultados aplicados al péndulo simple fueron bastante satisfactorios en simulación y de una manera fiel se reprodujeron en tiempo real. Además se calcularon una gran variedad de reguladores difusos para diferentes amplitudes y frecuencias en la señal de referencia, los cuales fueron aplicados en tiempo real obteniendo excelentes resultados.

Respecto a los casos generales en donde no es posible llevar a cero el error de seguimiento, cuando el regulador es diseñado a partir de los mapeos difusos obtenidos de los sistemas locales, un método es desarrollado en [8] para la solución a este problema.

Capítulo 5

Pendubot y robot completamente actuado.

5.1. Introducción

Los manipuladores robóticos son sistemas usados comúnmente en la industria en tareas como: soldadura, pintura, manipulación de materiales en líneas de manufactura, etc. En general, se desea que el manipulador conduzca su elemento final a lo largo de una trayectoria. Para solucionar este problema existen técnicas que nos permiten realizar el seguimiento de trayectorias como lo es la teoría de regulación difusa y la teoría de regulación no lineal difusa. En la primera de ellas, se caracteriza el sistema no lineal por medio de subsistemas lineales con el método conocido como modelado difuso Takagi-Sugeno, entonces controles locales pueden ser diseñados para cada sistema y el controlador total (PDC) es una combinación de los anteriores. Para el segundo método, el controlador total es diseñado a partir de la planta no lineal y el modelado difuso se utiliza para tomar ventaja al adquirir una región de estabilización mayor. En la sección 5.2 se presenta el modelo dinámico del pendubot representado en variables de estado. En la sección 5.3 se diseña un controlador difuso y se muestra que es un caso general de la teoría de regulación difusa. En la sección 5.4 es diseñado un controlador no lineal difuso para el seguimiento de trayectorias. En la sección 5.5 se presentan los resultados en simulación efectuados al pendubot en Matlab. La sección 5.6 es dedicada a representar el comportamiento del sistema pendubot en tiempo real, al seguir una señal de referencia. La sección 5.7 presenta el modelo dinámico de un robot completamente actuado de dos grados de libertad. En la sección 5.8 se diseña un regulador no lineal difuso para el modelo no lineal del robot completamente actuado, además se expone los resultados de la simulación. En la sección 5.9 se hacen comentarios generales de este capítulo.

5.2. Modelo dinámico del pendubot

Las ecuaciones no lineales invariantes en el tiempo que determinan el comportamiento dinámico del robot se obtienen por el método Euler-Lagrange.

Del sistema mostrado en la figura 5.1, el movimiento angular se determina por los ángulos q_1 y q_2 , l_1 y l_2 representan la longitud del primer y segundo eslabón, l_{c1} y l_{c2} representan las distancias del centro de masa del eslabón 1 y 2, m_1 y m_2 son las masa del primer y segundo eslabón, I_{zz1} e I_{zz2} representan los momentos de inercia del primer y segundo eslabón referidos

a su centro de masa, y g es la aceleración de la gravedad.

La ecuación de Euler-Lagrange para el Pendubot, considerado como un sistema no conservativo, está dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \tau \quad (5.1)$$

donde q y \dot{q} son vectores de dimensión 2, determinados por el número de eslabones específico a este robot, τ es un vector de fuerzas de dimensión 2 que representa el par, R es la función de disipación de Rayleigh, L es el Lagrangiano definido como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial V

$$L = K - V.$$

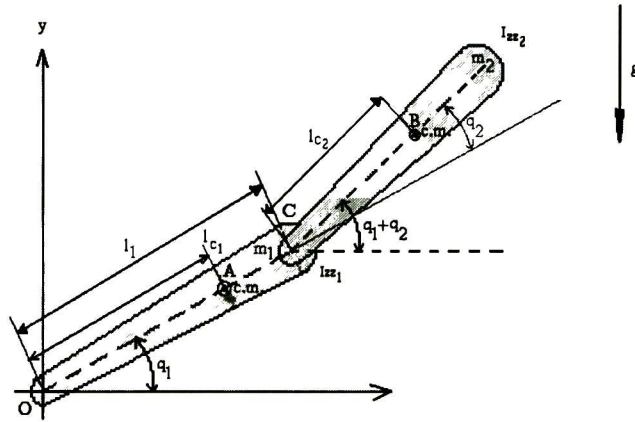


Figura 5.1. Esquema del Pendubot.

Las ecuaciones correspondientes a cada eslabón son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \tau_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

τ_1 es el par del motor en la unión uno, τ_2 es nulo ya que no existe actuador en la unión dos.

De acuerdo a [16] las ecuaciones que representan al sistema son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_{zz1} + I_{zz2}\} \ddot{q}_1 \\ &+ \{m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_{zz2}\} \ddot{q}_2 + m_1 g l_{c1} \cos(q_1) \\ &- 2m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) - m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2^2 \sin(q_2) \\ &+ m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] + \mu_1 \dot{q}_1 \\ 0 &= \{m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_{zz2}\} \ddot{q}_1 + \{m_2 l_{c2}^2 + I_{zz2}\} \ddot{q}_2 \\ &+ m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2^2 \sin(q_2) + m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) + \mu_2 \dot{q}_2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma más compacta como

$$d(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (5.4a)$$

donde

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} & \dot{q} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, & \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} & D(q) &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \\ d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_{zz1} + I_{zz2}, \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 [l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)] + I_{zz2}, \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_{zz2}, \\ c(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \sin(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \\ g(q) &= \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \cos(q_1) + m_2 g (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \\ m_2 g l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ f(\dot{q}) &= \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}) \\ f_2(\dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \dot{q}_1 \\ \mu_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$d(q)$ es la matriz de inercias, $c(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis-centrífeta, $g(q)$ es el vector gravitacional y $f(\dot{q})$ representa la acción de la fricción viscosa del sistema.

A partir del modelo dinámico (5.4a) se puede obtener la representación en variables de estado de la forma siguiente

$$\ddot{q} = d(q)^{-1} [\tau - c(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) - f(\dot{q})]$$

desarrollando se obtiene

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{22}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ -\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{11}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ -\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \tau_1$$

con $c_1 = c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2$ y $c_2 = c_{12}\dot{q}_1$.

Si se definen las siguientes variables

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = \dot{q}_1, \quad x_4 = \dot{q}_2, \quad u = \tau_1, \quad y = x_2,$$

el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u \\ y(t) &= h(x) \end{aligned}$$

queda representado por

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{22}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ -\frac{d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{11}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \quad h(x) = x_2.$$

Los valores paramétricos del pendubot son

l_1	Longitud del eslabón 1	0,2032 m,	
l_2	Longitud del eslabón 2	0,3817 m,	
l_{c1}	Distancia del centro de masa del eslabón 1	0,1551 m,	
l_{c2}	Distancia del centro de masa del eslabón 2	0,1635 m,	
m_1	Masa del eslabón 1	0,8293 kg,	
m_2	Masa del eslabón 2	0,3402 kg,	(5.7)
I_{zz1}	Momento de inercia para el eslabón 1	0,00595 kg · m ² ,	
I_{zz2}	Momento de inercia para el eslabón 2	0,0043 kg · m ² ,	
μ_1	Fricción para el eslabón 1	0,00545 kg/s,	
μ_2	Fricción para el eslabón 2	0,00047 kg/s,	
g	Constante gravitacional	9,81 m/s ²	

5.3. Diseño del controlador difuso para el pendubot

Para realizar el diseño del regulador difuso se proponen dos tipos de configuración de acuerdo a la posición inicial del pendubot, llamadas configuración arriba y configuración abajo, entre ellas se distinguen por la condición inicial de ambos eslabones, respecto a la horizontal es medido el ángulo del eslabón 1 y el ángulo del eslabón 2 es medido respecto al eslabón 1, las condiciones iniciales en las distintas configuraciones son

- Configuración arriba, $x(0) = [90^\circ \quad 0^\circ \quad 0 \quad 0]$, x_1 por arriba de la horizontal.
- Configuración abajo, $x(0) = [270^\circ \quad 180^\circ \quad 0 \quad 0]$, x_1 por debajo de la horizontal.

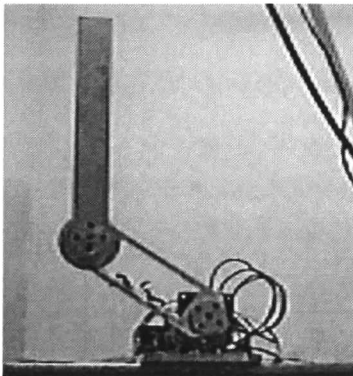


Figura 5.2. Pendubot, configuración arriba.

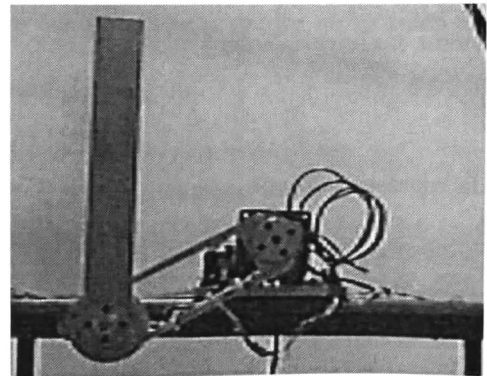


Figura 5.3. Pendubot, configuración abajo.

Configuración arriba

El comportamiento no lineal de la planta (5.6) se aproxima por un modelo difuso TS, para el diseño del regulador se requiere la aproximación lineal del modelo en variables de estado. La aproximación lineal se hace conforme a (3.5) en 11 puntos de operación, en este caso esos puntos son

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 & x_5^0 & x_6^0 & x_7^0 & x_8^0 & x_9^0 & x_{10}^0 & x_{11}^0 \\
 x_1 & 15^\circ & 30^\circ & 45^\circ & 60^\circ & 75^\circ & 90^\circ & 105^\circ & 120^\circ & 135^\circ & 150^\circ & 165^\circ \\
 x_2 & = 75^\circ & 60^\circ & 45^\circ & 30^\circ & 15^\circ & 0^\circ & -15^\circ & -30^\circ & -45^\circ & -60^\circ & -75^\circ \\
 x_3 & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ \\
 x_4 & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ & 0^\circ
 \end{array} \quad (5.8)$$

Los subsistemas A_i , B_i y C_i se encuentran en el apéndice A (A.1). Los modelos lineales describen el comportamiento de la planta, válido en una región alrededor del punto de operación. Cada punto de operación define un sistema lineal diferente. Los puntos de operación se seleccionan de acuerdo a la amplitud de la señal de referencia que se desea seguir. Note que los puntos de operación cumplen la condición $x_1 + x_2 = 90^\circ$, esta es una restricción física del pendubot que deberá satisfacer durante todo el proceso de control para mantener la estabilidad.

Para este sistema en configuración arriba, se desea que la salida del sistema x_2 , siga una señal de referencia senoidal a partir de la posición $x(0) = [90^\circ \ 0^\circ \ 0 \ 0]$. Se presenta en forma general la señal de referencia que se desea seguir como

$$y_{ref} = A_{mp} \sin(\beta t)$$

donde A_{mp} es la amplitud de la senoidal y β la frecuencia en radianes.

El modelo matemático del exosistema que permite generar la señal de referencia a seguir, es de la siguiente forma

$$\dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde w_1 genera una señal constante, w_2 y w_3 generan señales senoidales y cosenoidales; las matrices del lado derecho son las condiciones iniciales y β es la frecuencia de la señal de referencia.

La señal de referencia (5.10) que seguirá cada uno de los modelos lineales en función del exosistema (5.9) está dada por

$$y_{ref} = \eta w_1(t) + A_{mp} w_2(t). \quad (5.10)$$

Por lo tanto, las matrices Q_i que especifican la señal de referencia que deben seguir cada modelo lineal, quedan representadas de la siguiente manera

$$\begin{array}{lll}
 Q_1 = \begin{bmatrix} 75^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_2 = \begin{bmatrix} 60^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_3 = \begin{bmatrix} 45^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix} \\
 Q_4 = \begin{bmatrix} 30^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_5 = \begin{bmatrix} 15^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_6 = \begin{bmatrix} 0^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, \\
 Q_7 = \begin{bmatrix} -15^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_8 = \begin{bmatrix} -30^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_9 = \begin{bmatrix} -45^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix} \\
 Q_{10} = \begin{bmatrix} -60^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_{11} = \begin{bmatrix} -75^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

En la linealización realizada en (5.8), se considera que cada punto de operación es el origen, por lo tanto, para que la salida del sistema siga la señal de referencia deseada, se requiere de un par nominal que desplace el origen al nuevo punto de operación.

El par nominal se calcula de la siguiente manera

$$\tau = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(x_1) \quad (5.11)$$

donde x_1 es el punto donde se linealizó el eslabón 1, para cada subsistema lineal.

Una vez obtenidos los modelos lineales, es necesario definir los conjuntos difusos, lo cual se realiza mediante funciones de membresía. Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_2) son llamados uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez y once. Para la interpolación de los subsistemas, se consideran siete funciones de membresía triangulares entre dos funciones de membresía pseudo-trapezoidales, todas dependiendo exclusivamente de la posición del eslabón 2.

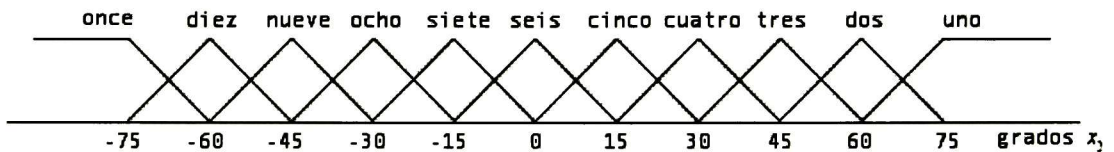


Figura 5.4. Funciones de membresía, configuración arriba.

El modelo difuso de la planta y el controlador difuso de acuerdo a (3.4) puede representarse de la siguiente manera

1º Regla de la planta y controlador

SI x_2 es uno

ENTONCES

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ e(t) = C_1 x(t) + Q_1 w(t) \\ u(t)_1 = K_1 x(t) + L_1 w(t) \end{cases}$$

⋮

10º Regla de la planta y controlador

SI x_2 es diez

ENTONCES

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{10} x(t) + B_{10} u(t) \\ e(t) = C_{10} x(t) + Q_{10} w(t) \\ u(t)_{10} = K_{10} x(t) + L_{10} w(t) \end{cases}$$

2º Regla de la planta y controlador

SI x_2 es dos

ENTONCES

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ e(t) = C_2 x(t) + Q_2 w(t) \\ u(t)_2 = K_2 x(t) + L_2 w(t) \end{cases}$$

⋮

11º Regla de la planta y controlador

SI x_2 es once

ENTONCES

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11} x(t) + B_{11} u(t) \\ e(t) = C_{11} x(t) + Q_{11} w(t) \\ u(t)_{11} = K_{11} x(t) + L_{11} w(t) \end{cases}$$

(5.12)

La salida total del controlador difuso esta dada por

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [K_i x(t) + L_i w(t)] \quad (5.13)$$

donde $L = \left[\Gamma_i x(t) - K_i \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \Pi_j w(t) \right]$ e $i = 1, \dots, 11$.

Los subsistemas A_i , B_i y C_i se encuentran en el apéndice A (A.4). Los modelos lineales describen el comportamiento de la planta, válido en una región alrededor del punto de operación. Note que los puntos de operación cumplen la condición $x_1 + x_2 = 450^\circ$, esta es una restricción física del sistema que deberá satisfacer durante todo el proceso de control para mantener la estabilidad.

El exosistema (5.9), la configuración de la referencia a seguir (5.10) y el par nominal (5.11) son los mismos a tomarse en cuenta para este diseño.

Por lo tanto, las matrices Q_i que especifican la señal de referencia que deben seguir cada modelo lineal, quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{bmatrix} 60^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_2 &= \begin{bmatrix} 45^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_3 &= \begin{bmatrix} 30^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, \\ Q_4 &= \begin{bmatrix} 15^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_5 &= \begin{bmatrix} 0^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_6 &= \begin{bmatrix} -15^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, \\ Q_7 &= \begin{bmatrix} -30^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_8 &= \begin{bmatrix} -45^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}, & Q_9 &= \begin{bmatrix} -60^\circ & -A_{mp} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_2) son llamados uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve. Para la interpolación de los subsistemas, son consideradas las funciones de membresía de la figura 5.5, todas dependiendo exclusivamente de la posición del eslabón 2.

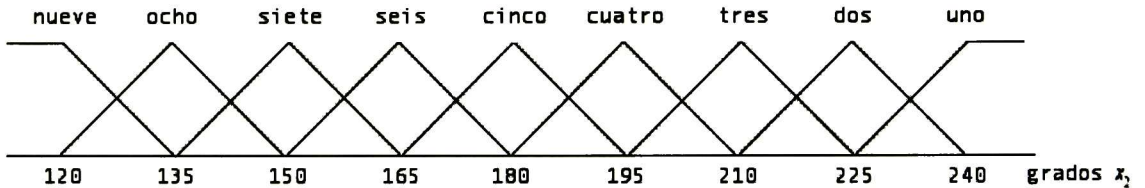


Figura 5.5. Funciones de membresía, configuración abajo.

El modelo difuso de la planta y el controlador difuso de acuerdo a (3.4) puede representarse de la forma (5.12), además la ley de control total es de la misma forma que (5.13). Se toma en cuenta que la configuración abajo se conforma de 9 subsistemas y no de 11, por esta razón sólo existen 9 reglas para la obtención del regulador difuso.

Para el sistema en configuración abajo se desea que la salida del sistema x_2 , siga una señal de referencia senoidal a partir de la posición $x(0) = [270^\circ \ 180^\circ \ 0 \ 0]$. El regulador es diseñado en base a una señal de referencia de amplitud $A_{mp} = 40^\circ$ y frecuencia $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$, es decir, $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$.

Para cada matriz $S_i = S$ de (5.9), la condición **FH1)** se cumple. En segundo lugar, la condición **FH2)** se cumple. La ubicación de los polos para los 9 subsistemas es $[-9 \ -9 \ -7 \ -7]$. Las matrices de ganancias están dadas por

$$\begin{aligned} K_1 &= K_9 = \begin{bmatrix} -41,4829 & -46,1138 & -5,3408 & -7,1697 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= K_8 = \begin{bmatrix} -26,0261 & -30,8265 & -3,0422 & -4,7660 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= K_7 = \begin{bmatrix} -18,7778 & -23,6542 & -2,0220 & -3,6339 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= K_6 = \begin{bmatrix} -15,3008 & -20,2009 & -1,5588 & -3,0870 \end{bmatrix}, \\ K_5 &= \begin{bmatrix} -14,2512 & -19,1551 & -1,4237 & -2,9212 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

La tercera condición a satisfacer, es la búsqueda de una matriz \mathbf{P} simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i , cumplan con la condición **FH3**)

$$P = 1,0e - 008 * \begin{bmatrix} 0,1415 & 0,1662 & 0,0028 & 0,0006 \\ 0,1662 & 0,1942 & 0,0033 & 0,0009 \\ 0,0028 & 0,0033 & 0,0005 & 0,0008 \\ 0,0006 & 0,0009 & 0,0008 & 0,0011 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Por último, en el apéndice A (A.2 y A.3) se pueden apreciar los mapeos lineales Π_i y Γ_i , la condición **FH4**) no se satisface y por consecuencia el **(PRNLDS)** no se resuelve exactamente. La razón principal es que los mapeos (3.29) no son los mismos.

5.4. Diseño del controlador no lineal difuso para el pendubot

En esta sección se diseña el regulador no lineal difuso por retroalimentación del estado que se aplica al pendubot, para que la salida del sistema realice el seguimiento de una trayectoria. Para resolver el **(PRNLDS)** el teorema 3.3.1 tiene que satisfacerse. Retomando el sistema (5.6), se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= f_{31}(x) [f_{32}(x) + u] \\ \dot{x}_4 &= f_{41}(x) [f_{32}(x) + u] + f_{42}(x) \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde

$$\begin{aligned} d_{11}(x) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(x_2)) + I_{zz1} + I_{zz2}, \\ d_{12}(x) &= m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(x_2)) + I_{zz1}, \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_{zz2}, \\ c_1(x) &= -2m_2 l_1 l_{c2} x_4 x_3 \sin(x_2) - m_2 l_1 l_{c2} x_4^2 \sin(x_2), \\ c_2(x) &= m_2 l_1 l_{c2} x_3 \sin(x_2), \\ g_1(x) &= m_1 g l_{c1} \cos(x_1) + m_2 g (l_1 \cos(x_1) + l_2 \cos(x_1 + x_2)), \\ g_2(x) &= m_2 g l_{c2} \cos(x_1 + x_2), \\ f_1(x) &= \mu_1 x_3, \\ f_2(x) &= \mu_2 x_4, \\ f_{31}(x) &= \frac{d_{22}}{d_{11}(x) d_{22} - d_{12}(x)^2}, \\ f_{32}(x) &= \frac{d_{12}(x) c_2(x)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(x) g_2(x)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(x) f_2(x)}{d_{22}} + c_1(x) + g_1(x) + f_1(x), \\ f_{41}(x) &= -\frac{d_{12}(x)}{d_{11}(x) d_{22} - d_{12}(x)^2}, \\ f_{42} &= -\frac{c_2(x)}{d_{22}} - \frac{g_2(x)}{d_{22}} - \frac{f_2(x)}{d_{22}}, \\ x &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \end{aligned}$$

Se desea realizar el seguimiento a una trayectoria de referencia dada por una señal $y_{ref} = A_{mp} \sin(\beta t)$. Para generar esta señal el exosistema empleado es

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} \beta w_2 \\ -\beta w_1 \end{bmatrix} \\ y_{ref} &= w_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

así el error de seguimiento está dado por $e = x_2 - w_1$.

A continuación, se tienen que resolver las ecuaciones diferenciales parciales (3.13) y (3.14) para el sistema (5.18), obteniendo los mapeos no lineales que aseguren el seguimiento de la referencia. Las ecuaciones del regulador para el estado estacionario son

$$\frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w} s(w) = \pi_3(w) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w} s(w) = \pi_4(w) \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) = f_{31}(\pi(w)) [f_{32}(\pi(w)) + u] \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \pi_4(w)}{\partial w} s(w) = f_{41}(\pi(w)) [f_{32}(\pi(w)) + u] + f_{42}(\pi(w)). \quad (5.23)$$

Del error de seguimiento, el siguiente resultado es evidente

$$\pi_2(w) = w_1 \quad (5.24)$$

tomando la primera y segunda derivada de (5.24)

$$\frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w} s(w) = \dot{w}_1 = \beta w_2 = \pi_4(w) \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_4(w)}{\partial w} s(w) &= \beta \dot{w}_2 = -\beta^2 w_1 \\ &= f_{41}(\pi(w)) [f_{32}(\pi(w)) + u] + f_{42}(\pi(w)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

despejando u de (5.26), puede ser visto que la entrada en estado estacionario es

$$\gamma(w) = -\frac{\beta^2 w_1 - f_{42}(\pi(w))}{f_{41}(\pi(w))} - f_{32}(\pi(w)) \quad (5.27)$$

sustituyendo (5.27) en (5.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) &= -f_{31}(\pi(w)) \left[\frac{\beta^2 w_1 - f_{42}(\pi(w))}{f_{41}(\pi(w))} \right] \\ &= \frac{d_{22}}{d_{12}(\pi(w))} \left[\beta^2 w_1 - \frac{c_2(\pi(w))}{d_{22}} - \frac{g_2(\pi(w))}{d_{22}} - \frac{f_2(\pi(w))}{d_{22}} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como podemos observar las ecuaciones diferenciales parciales (5.26) y (5.28) son difíciles de resolver, por lo que se buscará obtener una aproximación polinomial con el método propuesto en [13]. Básicamente, este método muestra que los mapeos no lineales pueden ser arbitrariamente aproximados por series de Taylor. La aproximación a $\pi_1(w)$ es

$$\begin{aligned} \pi_1(w) &= a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_1^2 + a_4 w_1 w_2 + a_5 w_2^2 \\ &\quad + a_7 w_1^2 w_2 + a_8 w_1 w_2^2 + a_9 w_1^3 + \theta(|w^4|). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ahora, tomando la primera y segunda derivada de (5.29) respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w} s(w) &= -a_2 \beta w_1 - a_4 \beta w_1^2 - a_7 \beta w_1^3 + a_1 \beta w_2 \\ &\quad + 2\beta (a_3 - a_5) w_1 w_2 + \beta (3a_6 - 2a_8) w_1^2 w_2 \\ &\quad + a_4 \beta w_2^2 + \beta (2a_7 - 3a_9) w_1 w_2^2 + a_8 \beta w_2^3 + \theta (|w^4|) \\ &= \pi_3(w) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) &= -a_1 \beta^2 w_1 + 2\beta^2 (a_5 - a_3) w_1^2 + \beta^2 (2a_8 - 3a_6) w_1^3 \\ &\quad - a_2 \beta^2 w_2 - 4a_4 \beta^2 w_1 w_2 + \beta^2 (6a_9 - 7a_7) w_1^2 w_2 \\ &\quad + 2\beta^2 (a_3 - a_5) w_2^2 + \beta^2 (6a_6 - 7a_8) w_1 w_2^2 \\ &\quad + \beta^2 (2a_7 - 3a_9) w_2^3 + \theta (|w^4|) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Hasta aquí, se ha obtenido una solución propuesta en forma simbólica de la ecuación diferencial parcial (5.31), lo siguiente es expandir en series de Taylor en el punto de interés la ecuación (5.28) e igualarlas para obtener la respuesta. Como se mencionó anteriormente se propone resolver el (PRNLDS) para dos tipos de configuración, entonces cada una de ellas tendrá su propia solución, como se ve a continuación.

Configuración arriba

Antes de resolver los mapeos no lineales $\pi(w)$ y $\gamma(w)$ se hace un paréntesis para satisfacer ciertas condiciones del teorema 3.3.1. Dado que el exosistema (5.19) es lineal y sus valores propios se encuentran en $[i, -i]$, cuando $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$, entonces se satisface la condición **FH1**).

En segundo lugar la condición **FH2**) se cumple para todos los pares (A_i, B_i) , las matrices de ganancias para este ejemplo son las mismas que en (5.14) El estabilizador difuso se representa como

$$u(x(t), 0) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

con $i = 1, \dots, 11$.

La tercera condición a satisfacer, es la búsqueda de una matriz **P** simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i , cumplan con la condición **FH3**), esta matriz es la obtenida en (5.15).

Continuando con la solución de los mapeos no lineales, es necesario expandir (5.28) en series de Taylor alrededor de $x = [\frac{\pi}{2} \ 0 \ 0 \ 0]$ y $w = [0 \ 0]$; los exponentes superiores a un tercer orden en la serie de Taylor son ignorados. La expansión se hace utilizando un software matemático como lo es maple, el resultado es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) &= (22,0938 + 0,5423\beta^2 + 22,0938a_1) w_1 + 22,0938a_3 w_1^2 + 22,0938a_4 w_1 w_2 \\ &\quad + (22,0938a_6 - 0,4576a_2^2 \beta^2 - 3,6823a_1^3 - 11,0469a_1^2 - 5,9913a_1) w_1^3 \\ &\quad + (0,1241\beta^2 + 1,3732) w_1^3 + (22,0938a_2 - 0,01902\beta) w_2 + 22,0938a_5 w_2^2 \\ &\quad + (22,0938a_8 - 11,0469a_2^2 - 0,4576a_1^2 \beta^2 - 11,0469a_1 a_2^2) w_1 w_2^2 \\ &\quad + (22,0938a_7 - 11,0469a_1^2 a_2 + 0,9152a_1 a_2 \beta^2 - 22,0938a_1 a_2) w_1^2 w_2 \\ &\quad - (0,00435\beta + 5,9913a_2) w_1^2 w_2 + (22,0938a_9 - 3,6823a_2^3) w_2^3. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Igualando los coeficientes de los polinomios (5.31) y (5.32) resultan 9 ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
 -a_1\beta^2 &= 22,0938 + 0,5423\beta^2 + 22,0938a_1 \\
 2a_5\beta^2 - 2a_3\beta^2 &= 22,0938a_3 \\
 2a_8\beta^2 - 3a_6\beta^2 &= 22,0938a_6 - 0,4576\beta^2 a_2^2 - 3,6823a_1^3 - 11,0469a_1^2 - 5,9913a_1 \\
 &\quad + 0,1241\beta^2 + 1,3732 \\
 -a_2\beta^2 &= 22,0938a_2 - 0,01902\beta \\
 -4a_4\beta^2 &= 22,0938a_4 \\
 6a_9\beta^2 - 7a_7\beta^2 &= 22,0938a_7 - 11,0469a_1^2 a_2 + 0,9152a_1 a_2 \beta^2 - 22,0938a_1 a_2 \\
 &\quad - 5,9913a_2 - 0,00435\beta \\
 2a_3\beta^2 - 2a_5\beta^2 &= 22,0938a_5 \\
 6a_6\beta^2 - 7a_8\beta^2 &= 22,0938a_8 - 11,0469a_2^2 - 0,4576a_1^2 \beta^2 - 11,0469a_1 a_2^2 \\
 2a_7\beta^2 - 3a_9\beta^2 &= 22,0938a_9 - 3,6823a_2^3.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

La solución de (5.33) para una frecuencia $\beta = \frac{rad}{seg}$ en la señal de referencia, está dada como

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -0,98018337, & a_2 &= 0,00082398, & a_3 &= 0, \\
 a_4 &= 0, & a_5 &= 0, & a_6 &= -0,00786148, \\
 a_7 &= 0,00003254, & a_8 &= 0,01349134, & a_9 &= 0,00000259.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

después de algunos cálculos tediosos pero simples, se obtiene la aproximación a la solución de las ecuaciones del regulador

$$\pi(w) = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} -0,98018337w_1 + 0,00082398w_2 - 0,00786148w_1^3 \\ +0,00003254w_1^2 w_2 + 0,01349134w_1 w_2^2 + 0,00000259w_2^3 \end{array} \right) \\ w_1 \\ \left(\begin{array}{c} -0,00008239w_1 - 0,00003254w_1^3 - 0,98018337w_2 \\ -0,05056715w_1^2 w_2 + 0,00005731w_1 w_2^2 + 0,01349134w_2^3 \end{array} \right) \\ w_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\gamma(w) = -\frac{w_1 + f_{42}(\pi(w))}{f_{41}(\pi(w))} - f_{32}(\pi(w))$$

donde

$$\begin{aligned}
 d_{11}(w) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\pi_2)) + I_{zz1} + I_{zz2}, \\
 d_{12}(w) &= m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\pi_2)) + I_{zz1}, \\
 d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_{zz2}, \\
 c_1(w) &= -2m_2 l_1 l_{c2} \pi_4 \pi_3 \sin(\pi_2) - m_2 l_1 l_{c2}^2 \pi_4^2 \sin(\pi_2), \\
 c_2(w) &= m_2 l_1 l_{c2} \pi_3 \sin(\pi_2), \\
 g_1(w) &= m_1 g l_{c1} \cos(\pi_1) + m_2 g (l_1 \cos(\pi_1) + l_2 \cos(\pi_1 + \pi_2)), \\
 g_2(w) &= m_2 g l_{c2} \cos(\pi_1 + \pi_2), \\
 f_1(w) &= \mu_1 \pi_3, \\
 f_2(w) &= \mu_2 \pi_4,
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{32}(w) &= \frac{d_{12}(\pi) c_2(\pi)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(\pi) g_2(\pi)}{d_{22}} + \frac{d_{12}(\pi) f_2(\pi)}{d_{22}} + c_1(\pi) + g_1(\pi) + f_1(\pi), \\ f_{41}(w) &= -\frac{d_{12}(\pi)}{d_{11}(\pi) d_{22} - d_{12}(\pi)^2}, \\ f_{42}(w) &= -\frac{c_2(\pi)}{d_{22}} - \frac{g_2(\pi)}{d_{22}} - \frac{f_2(\pi)}{d_{22}}. \end{aligned}$$

Obtenemos la ley de control, tal como es expresada en (3.9)

$$u(\pi(w), w) = -\frac{w_1 + f_{42}(w)}{f_{41}(w)} - f_{32}(w) + \sum_{i=1}^{11} h_i(z) K_i(x - \pi(w)).$$

Con la obtención de los mapeos no lineales $\pi(w)$ y $\gamma(w)$ se satisface la ecuación de Francis-Isidori-Byrnes (2.45) y por consecuencia el (PRNLDS) tiene solución exacta.

Configuración abajo

Primeramente se deben de cumplir ciertas condiciones del teorema 3.3.1, antes de resolver los mapeos no lineales. Dado que el exosistema (5.19) es lineal y sus valores propios se encuentran en $[i, -i]$, cuando $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$, entonces se satisface la condición **FH1**). En segundo lugar la condición **FH2**) se cumple para todos los modelos locales. La ubicación de los polos es $[-9 \quad -9 \quad -7 \quad -7]$, el estabilizador difuso es

$$u(x(t), 0) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t)$$

y las matrices de ganancias para este ejemplo son como en (5.16), con $r = 1, \dots, 9$.

Continuando, la siguiente condición a satisfacer, es la búsqueda de una matriz **P** simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i , cumplan con la condición **FH3**), **P** es la misma que (5.17).

Ahora es necesario expandir (5.28) en series de Taylor alrededor de $x = [\frac{3\pi}{2} \quad \pi \quad 0 \quad 0]$ y $w = [0 \quad 0]$, se descartan los términos de alto orden en la serie de Taylor, la expansión se hace utilizando un software matemático, después de algunos calculos tediosos pero simples, obtenemos la aproximación a la solución de las ecuaciones del regulador, para una frecuencia $\beta = 1 \frac{rad}{seg}$ los mapeos son

$$\pi(w) = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{l} -1,0206344370w_1 + 0,0008579885w_2 + 0,0102912460w_1^3 \\ -0,0000438124w_1^2w_2 - 0,0207826241w_1w_2^2 - 0,000000332w_2^3 \end{array} \right) \\ w_1 \\ \left(\begin{array}{l} -0,0008579885w_1 + 0,0000438124w_1^3 - 1,020634437w_2 \\ +0,0724389863w_1^2w_2 - 0,0000866286w_1w_2^2 - 0,0207826241w_2^3 \end{array} \right) \\ w_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\gamma(w) = -\frac{w_1 + f_{42}(\pi(w))}{f_{41}(\pi(w))} - f_{32}(\pi(w))$$

Obtenemos la ley de control, tal como es expresada en (3.9)

$$u(\pi(w), w) = -\frac{w_1 + f_{42}(w)}{f_{41}(w)} - f_{32}(w) + \sum_{i=1}^9 h_i(z) K_i(x - \pi(w)). \quad (5.35)$$

Con la obtención de los mapeos $\pi(w)$ y $\gamma(w)$ obtenidos directamente de la planta no lineal en vez de la planta difusa se satisface la condición **FH4**) y por consecuencia el **(PRNLDS)** tiene solución, para la configuración abajo.

5.5. Resultados en simulación del pendubot

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos por el controlador difuso Takagi-Sugeno y el controlador no lineal difuso aplicados a la planta no lineal, en configuración arriba y abajo. Para probar el desempeño del controlador se hacen pruebas con distintas señales de referencia senoidales. El entorno de simulación es MatLab.

Configuración arriba

En la figura 5.6 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el controlador no lineal difuso al pendubot para el seguimiento en la salida de una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, como se puede observar el seguimiento entre la salida de la planta y la señal de referencia es casi exacto y el error es demasiado pequeño.

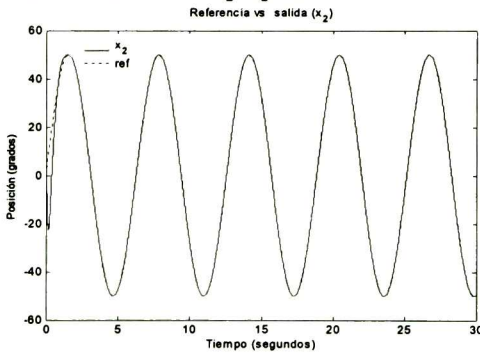


Figura 5.6(a)

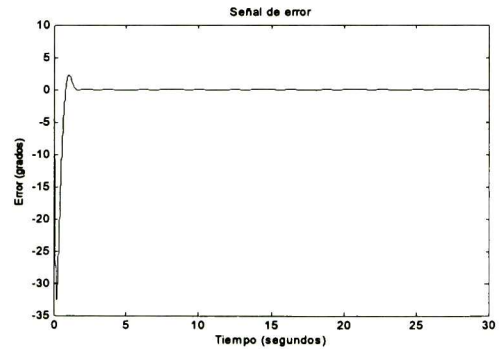


Figura 5.6(b)

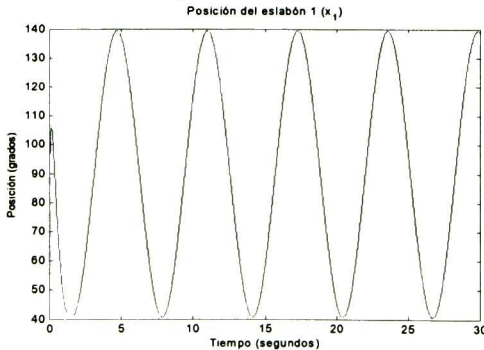


Figura 5.6(c)

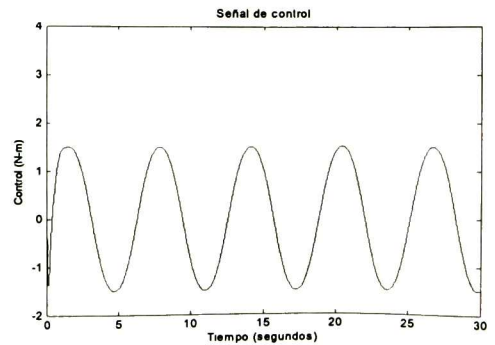


Figura 5.6(d)

Figura 5.6. Simulación del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$.

La figura 5.7 presenta el comportamiento de la planta con el controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, se aprecia que existe un error en estado estacionario acotado entre $\pm 3^\circ$, este error se puede atribuir a que el regulador es calculado a partir de cada modelo local y no de la planta no lineal. Comparando el comportamiento de las figuras 5.6(a) y 5.7(a), se deduce que la primera de estas tiene un mejor desempeño al tener menos error.

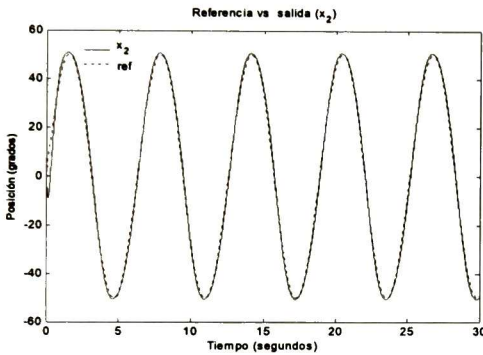


Figura 5.7(a)

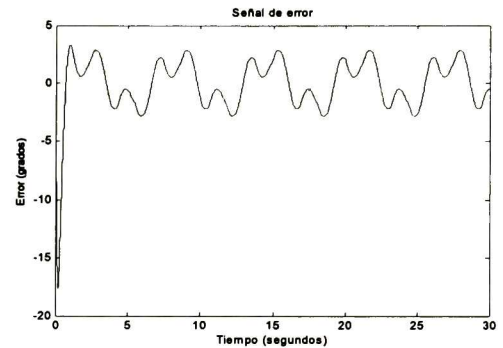


Figura 5.7(b)

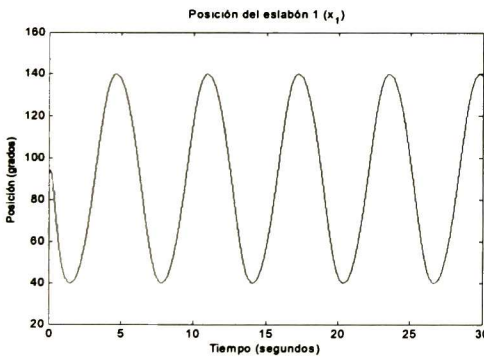


Figura 5.7(c)

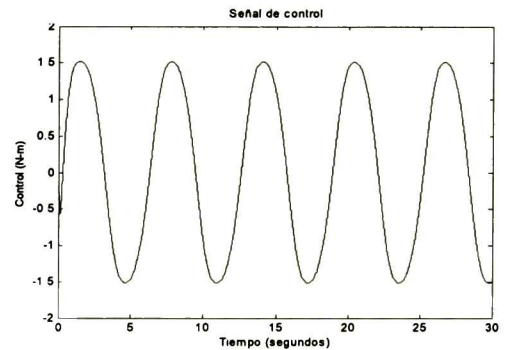


Figura 5.7(d)

Figura 5.7. Simulación del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$.

Ahora para la siguiente simulación se aumenta en 10° a la señal de referencia, en la figura 5.8 se presenta el comportamiento de la planta no lineal con un controlador no lineal difuso siguiendo una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$. Se vuelve a verificar el buen desempeño del regulador no lineal, el pequeño error que se presenta es debido que al calcular la ley de control no lineal se utiliza un método numérico para aproximar la ecuación diferencial parcial (5.32) y se omiten los términos de alto orden.

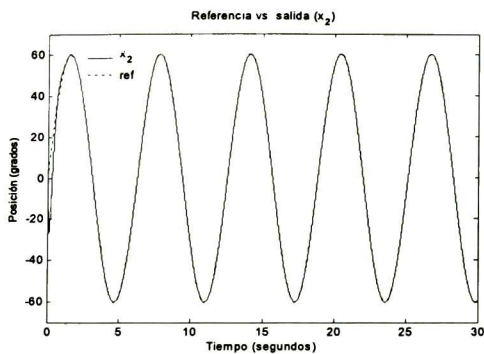


Figura 5.8(a)

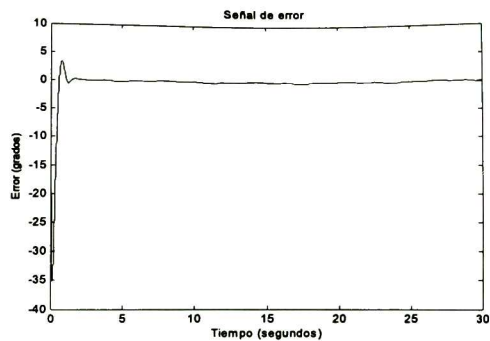


Figura 5.8(b)

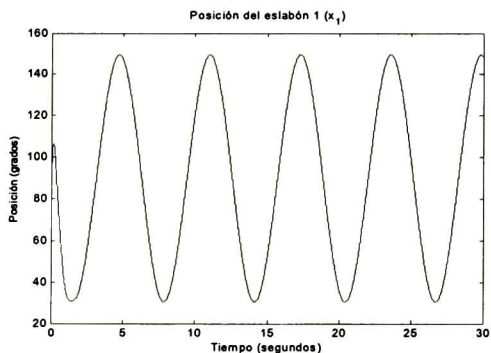


Figura 5.8(c)

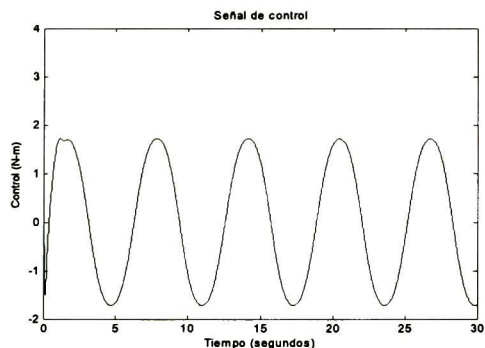


Figura 5.8(d)

Figura 5.8. Simulación del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$.

Ahora, continuando con el desempeño del controlador difuso con una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$, en la figura 5.9 se aprecia que existe un error que varía de $\pm 5^\circ$ entre la salida de la planta y la señal de referencia generada por el exosistema, en comparación, el comportamiento del regulador no lineal difuso de la figura 5.8 es mejor que el comportamiento del regulador difuso de la figura 5.9, ambos aplicados a la misma planta.

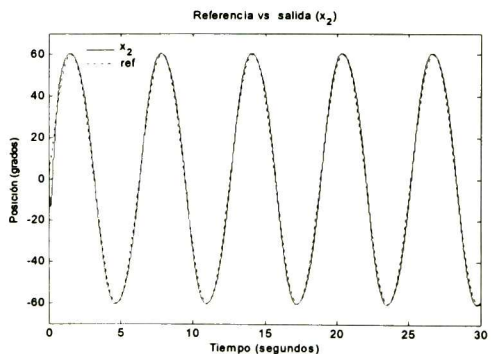


Figura 5.9(a)

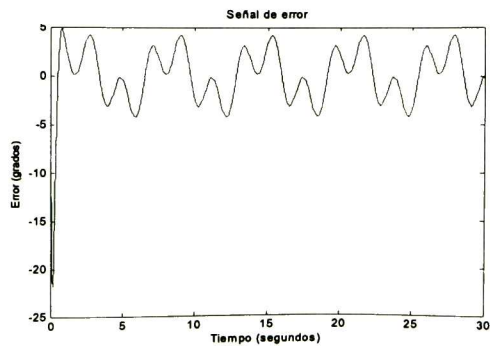


Figura 5.9(b)

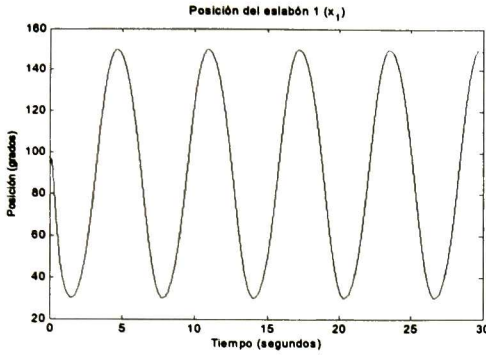


Figura 5.9(c)

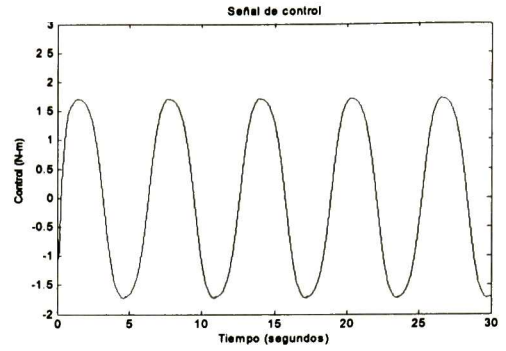


Figura 5.9(d)

Figura 5.9. Simulación del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$.

En la siguiente simulación de la figura 5.10 se acrecenta aun más el grado de complejidad, al aumentar en 10° la amplitud de la señal de referencia $y_{ref} = 70^\circ \sin(1t)$, esto se ve reflejado en el error de seguimiento presentado oscilaciones entre $\pm 1^\circ$, debido a que la amplitud se acerca a la zona de inestabilidad de $\pm 90^\circ$. Es comprensible que al ser aumentada la amplitud de la señal de referencia la energía que demanda el sistema sea mayor, en la figura 5.10(d) el valor de la señal de control oscila entre ± 2 N-m.

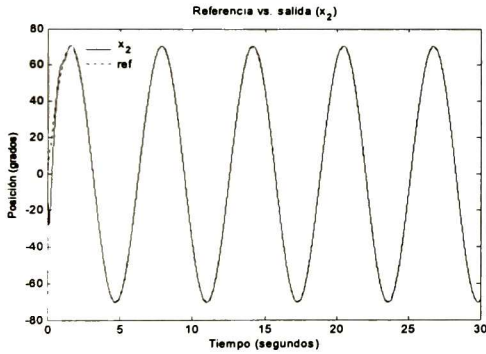


Figura 5.10(a)

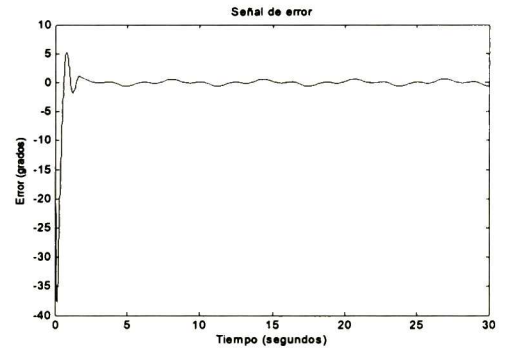


Figura 5.10(b)

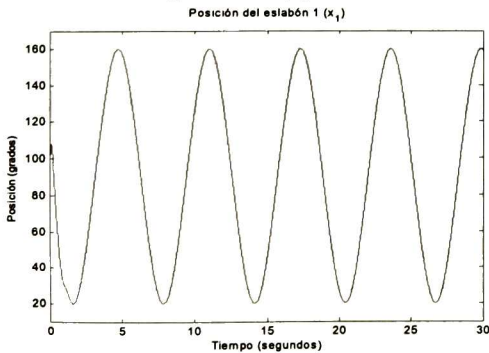


Figura 5.10(c)

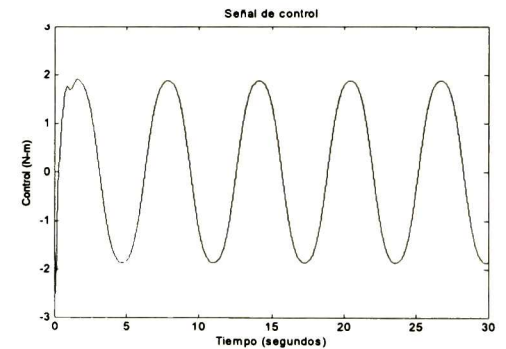


Figura 5.10(d)

Figura 5.10. Simulación del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 70^\circ \sin(1t)$.

Configuración abajo

Las siguientes tres simulaciones son realizadas con lo que se ha denominado configuración abajo, la figura 5.11 presenta el comportamiento para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, la señal de referencia senoidal producida por el exosistema inicia en 180° para el eslabón 2, los puntos máximos y mínimo de la señal son 220° y 140° , respectivamente. Aunque es otra configuración se aprecia que el diseño del controlador no lineal difuso es efectivo, el pequeño error entre la salida de la planta y la señal que genera el exosistema es debido a que se descartan los elementos de grado mayor e igual a 4 en la expansión en serie de Taylor, por consecuencia pierde un poco de exactitud la ley de control (5.35).

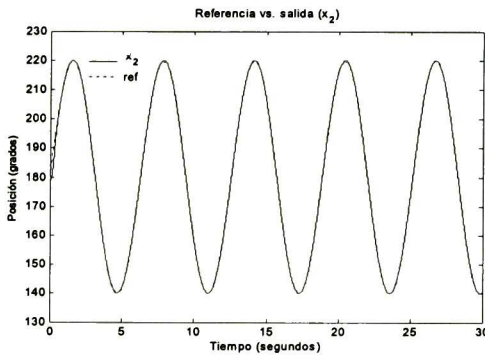


Figura 5.11(a)

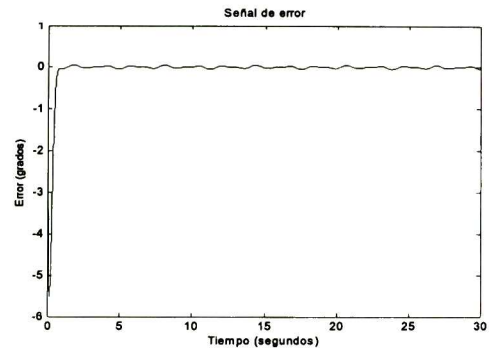


Figura 5.11(b)

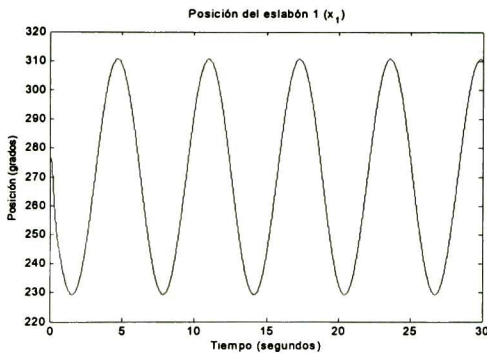


Figura 5.11(c)

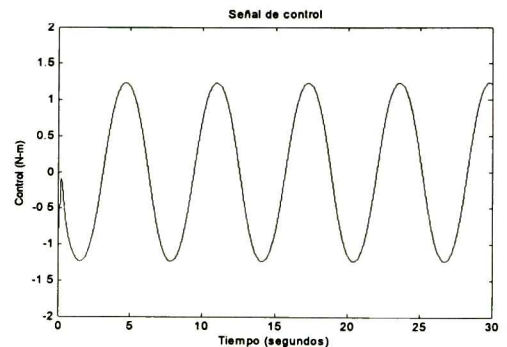


Figura 5.11(d)

Figura 5.11. Simulación del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

Se presenta en la figura 5.12 el desempeño del regulador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, diseñado a partir de la sumatoria de cada uno de los reguladores de los sistemas locales, se muestra un error acotado de $\pm 1,5^\circ$ entre la señal de salida de la planta y la señal que genera el exosistema, este pequeño error se debe a que las ecuaciones (3.29) no coinciden exactamente entre el modelo difuso y el no lineal difuso. Haciendo una comparación entre el controlador no lineal difuso de la figura 5.11 y el controlador difuso de la figura 5.12 el primero de estos es más efectivo.

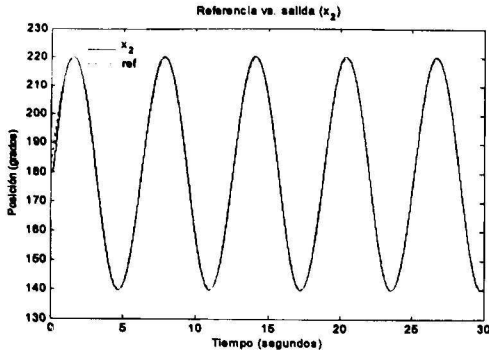


Figura 5.12(a)

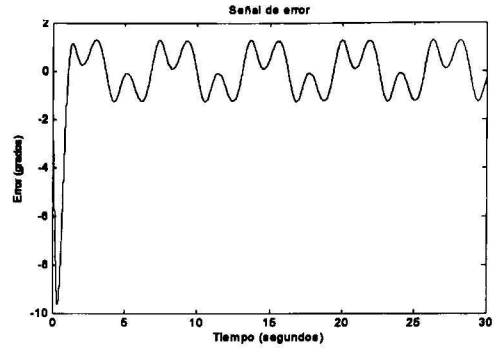


Figura 5.12(b)

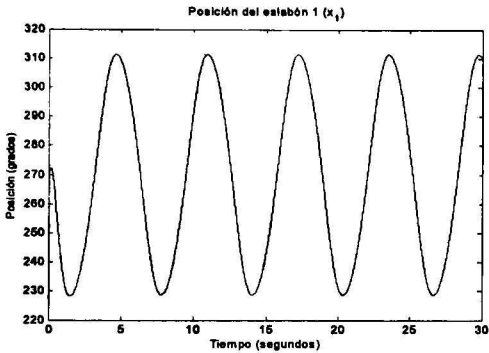


Figura 5.12(c)

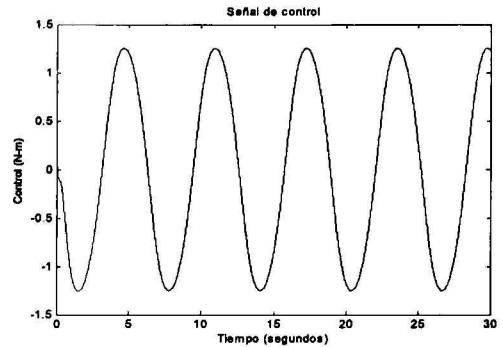


Figura 5.12(d)

Figura 5.12. Simulación del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

Para finalizar la sección de simulación, se presenta el desempeño de un controlador no lineal difuso que es aplicado a la planta no lineal en configuración abajo, siguiendo una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$. Se puede apreciar que existe un pequeño error cuando la señal de referencia alcanza su mayor amplitud.

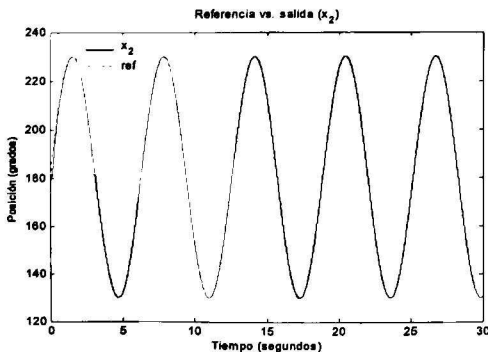


Figura 5.13(a)

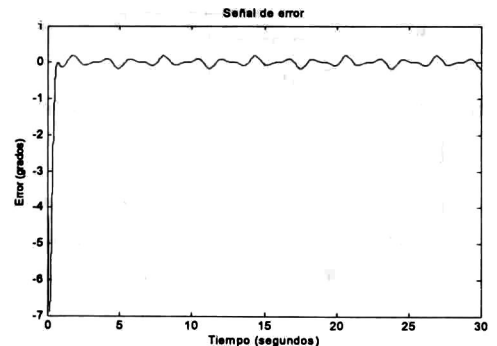


Figura 5.13(b)

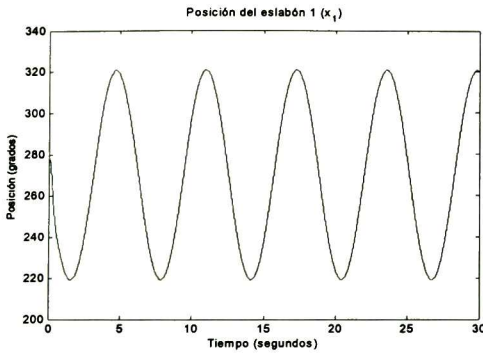


Figura 5.13(c)

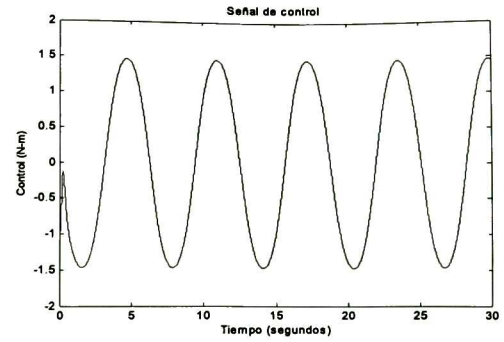


Figura 5.13(d)

Figura 5.13. Simulación del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

5.6. Resultados en tiempo real del pendubot

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el regulador no lineal difuso y el regulador difuso al sistema físico real. Para la configuración arriba las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [90^\circ \ 0^\circ \ 0 \ 0]$ y para la configuración abajo las condiciones iniciales del sistema son $x(0) = [270^\circ \ 180^\circ \ 0 \ 0]$ para esto es necesario llevar el sistema a estas posiciones manualmente. Cabe mencionar que una vez que el controlador es diseñado en Matlab, se procede a traducirlo al lenguaje C++, para hacer la implementación en tiempo real.

Configuración arriba

La figura 5.14 muestra el comportamiento del sistema en tiempo real al aplicar el regulador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, el eslabón 2 sigue de una manera eficiente a la señal de referencia presentando un error acotado entre $\pm 3^\circ$, con una ley de control que no se satura.

El regulador difuso diseñado a partir de cada subsistema local es mostrado en la figura 5.15, se aprecia que le es un poco difícil a la salida de la planta el seguimiento en los picos de la sinusoidal. La ley de control es un más agresiva que la calculada a partir del modelo no lineal.

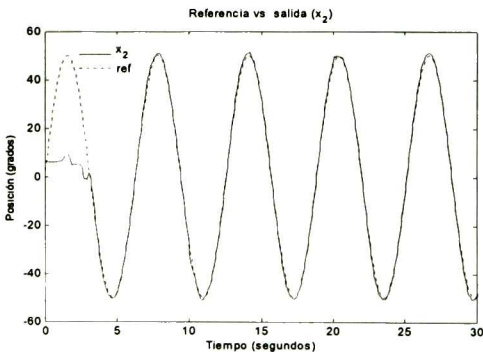


Figura 5.14(a)

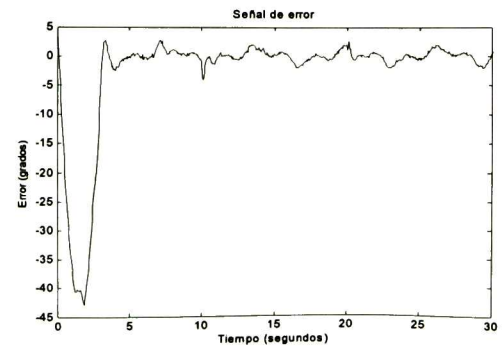


Figura 5.14(b)

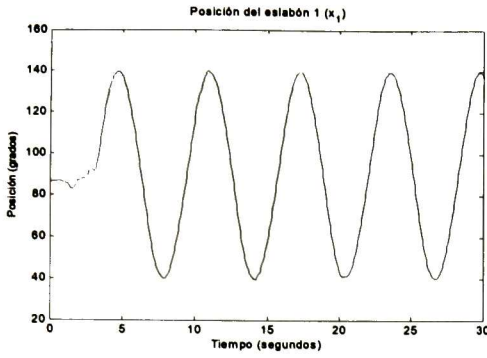


Figura 5.14(c)

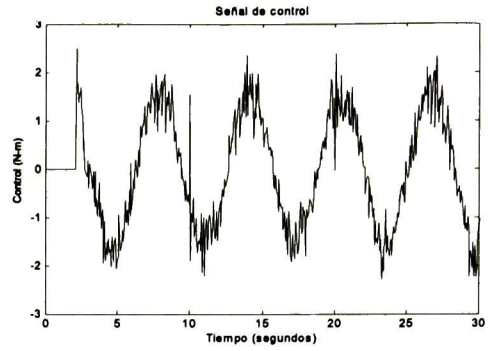


Figura 5.14(b)

Figura 5.14. Aplicación en tiempo real del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$.

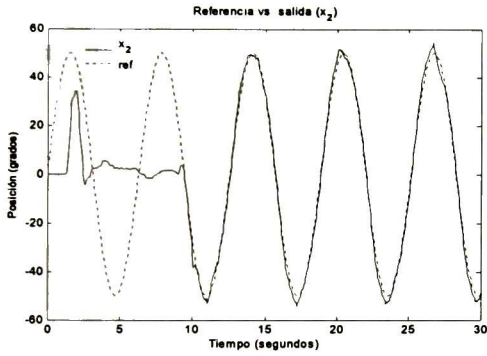


Figura 5.15(a)

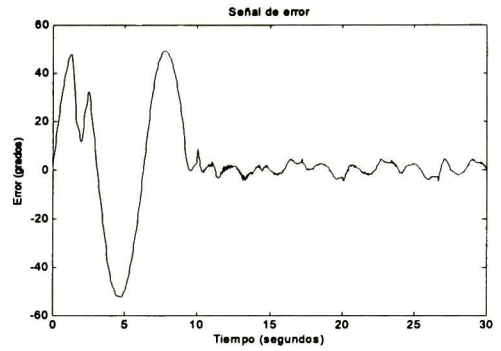


Figura 5.15(b)

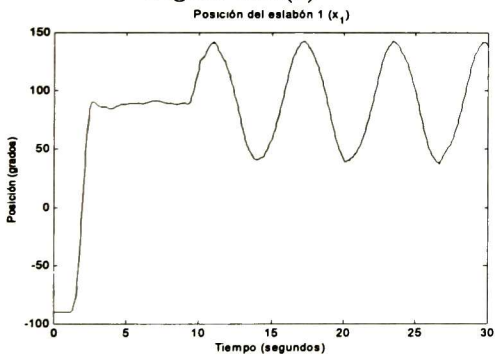


Figura 5.15(c)

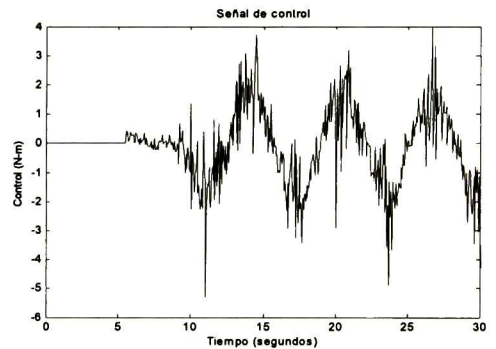


Figura 5.15(d)

Figura 5.15. Aplicación en tiempo real del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$.

En la figura 5.16 se muestra la respuesta en tiempo real para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, cuando se aplica un controlador no lineal con estabilizador simple, este tipo de controlador solo es válido alrededor del origen. Comparando la figura 5.14(a) y 5.16 se muestra un mejor desempeño cuando el estabilizador es difuso, la razón del error en esta figura es que la amplitud de la referencia esta fuera de la región de estabilidad.

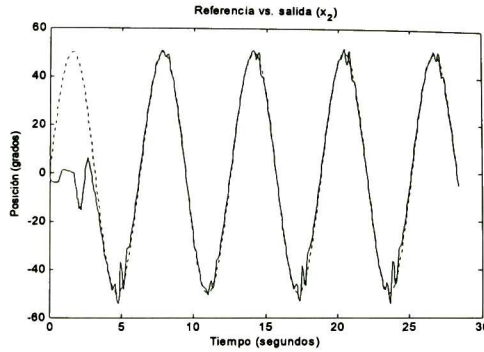


Figura 5.16. Regulador no lineal para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$.

En la figura 5.17 se observan los resultados cuando un regulador no lineal difuso es aplicado al sistema real al seguir una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$, aun con error en estado estacionario de $\pm 3^\circ$ se puede decir que hace buen seguimiento si se toma en cuenta la amplitud de la señal.

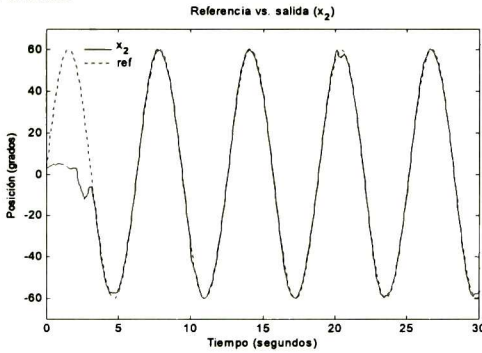


Figura 5.17(a)

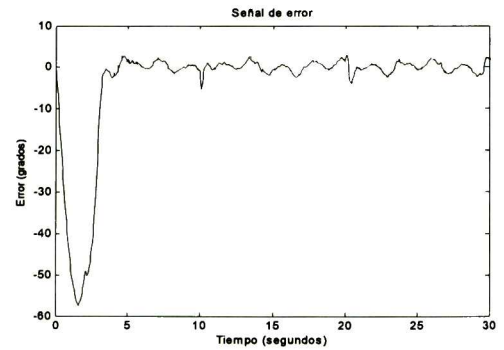


Figura 5.17(b)

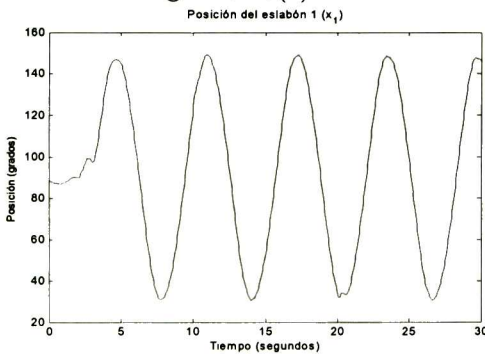


Figura 5.17(c)

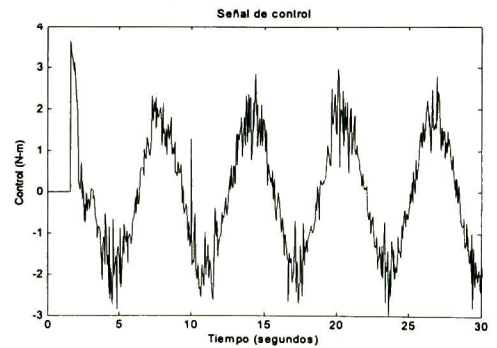


Figura 5.17(d)

Figura 5.17. Aplicación en tiempo real del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$.

En la figura 5.18 es plasmado el comportamiento en tiempo real del regulador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$, con esta técnica el seguimiento es defectuoso ya que

la salida de la planta difiere de la señal generada por el exosistema, presentando un error de aproximadamente $\pm 7^\circ$ en los picos de la senoidal. Se observa que la ley de control de la figura 5.18(d) está más agitada en comparación a la presentada en la figura 5.17(d).

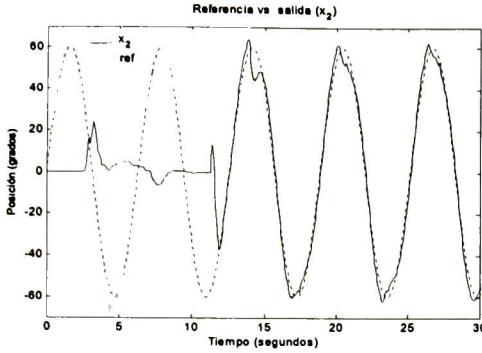


Figura 5.18(a)

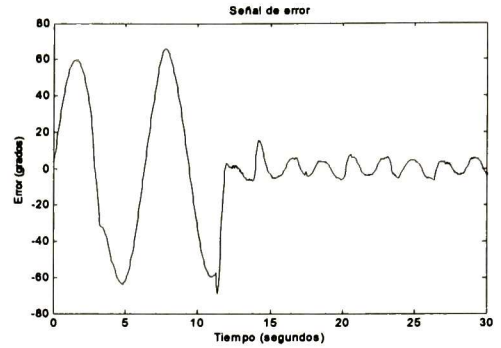


Figura 5.18(b)

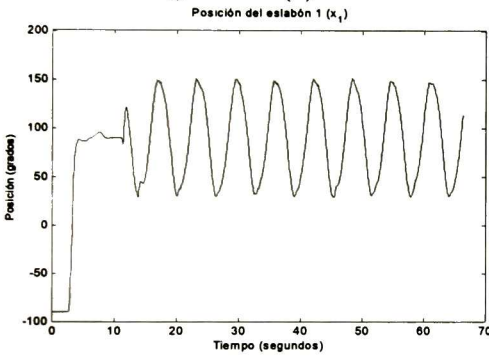


Figura 5.18(c)

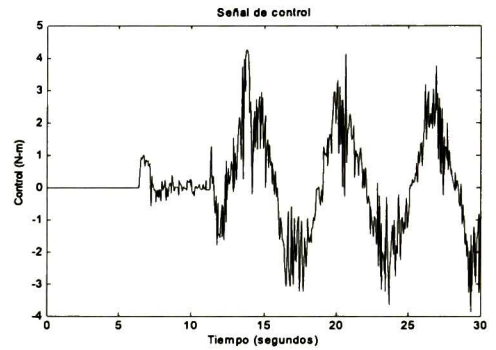


Figura 5.18(d)

Figura 5.18. Aplicación en tiempo real del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 60^\circ \sin(1t)$.

Las siguientes gráficas de la figura 5.19 muestran el comportamiento del sistema en tiempo real, el regulador no lineal del sistema es diseñado para seguir una señal de referencia $y_{ref} = 70^\circ \sin(1t)$. Aun con regulador no lineal difuso, para amplitudes muy grandes como es este caso, el seguimiento no es exacto, presentando un error en estado estacionario que varía entre $\pm 9^\circ$. Se puede atribuir a que es un problema estructural y además en gran parte debido al desgaste de los componentes electrónicos y no tanto del diseño del regulador.

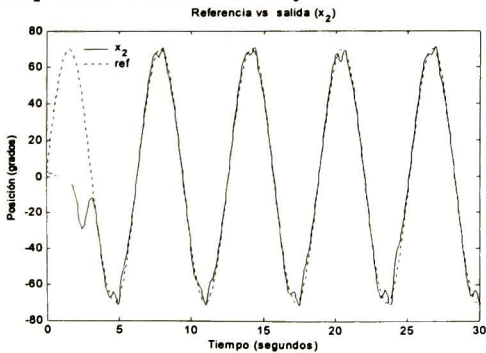


Figura 5.19(a)

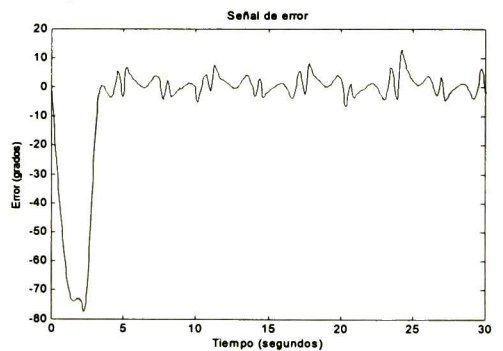


Figura 5.19(b)

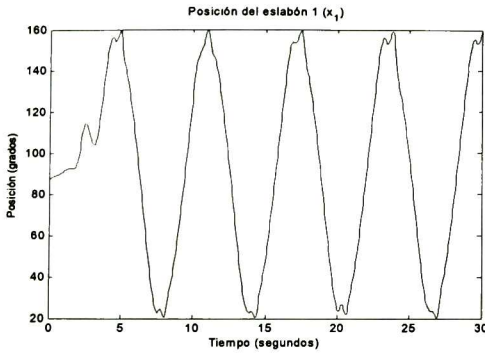


Figura 5.19(c)

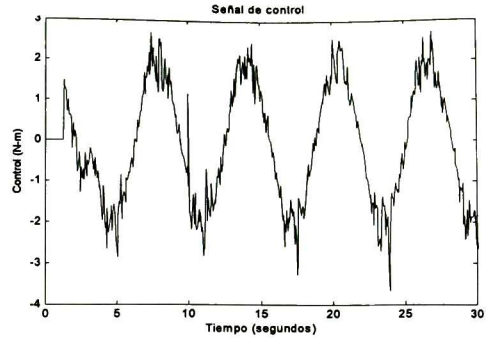


Figura 5.19(d)

Figura 5.19. Aplicación en tiempo real del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 70^\circ \sin(1t)$.

Configuración abajo

Los siguientes resultados en tiempo real fueron aplicados para la configuración abajo, en la figura 5.20 se presenta el desempeño del regulador no lineal difuso, el seguimiento es excelente entre la salida de la planta y la señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, ya que el error no pasa de $\pm 1^\circ$. Esto es gracias a que el regulador cuenta con los mapeos no lineales exactos $\pi(w)$ y $\gamma(w)$, además de un estabilizador difuso.

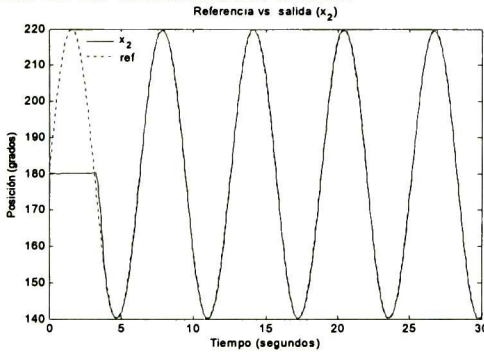


Figura 5.20(a)

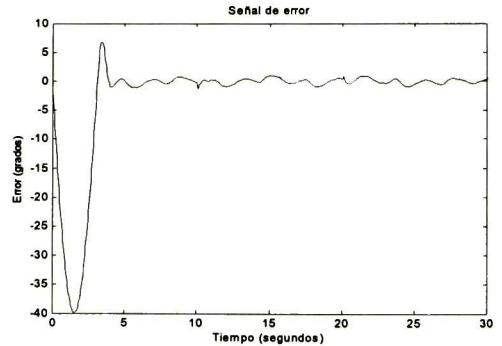


Figura 5.20(b)

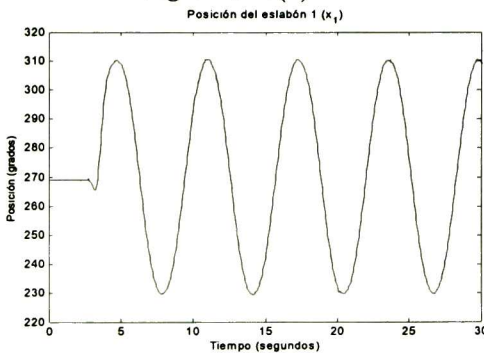


Figura 5.20(c)

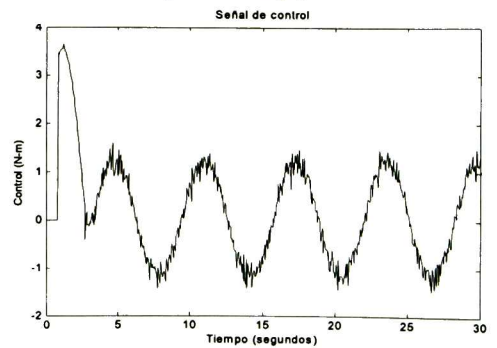


Figura 5.20(d)

Figura 5.20. Aplicación en tiempo real del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

Por otra parte el regulador diseñado a partir de cada modelo lineal es aplicado al sistema real, en la figura 5.21 se aprecia el desempeño del regulador difuso siguiendo una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, el error en estado estacionario varia entre $\pm 5^\circ$ Este controlador muestra cierta desventaja frente al controlador no lineal difuso presentado en la figura 5.20.

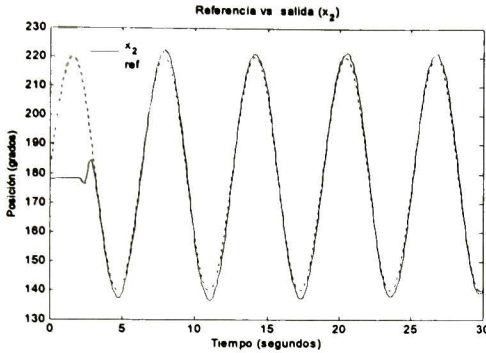


Figura 5.21(a)

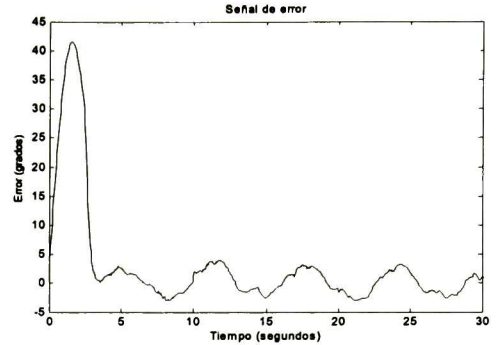


Figura 5.21(b)

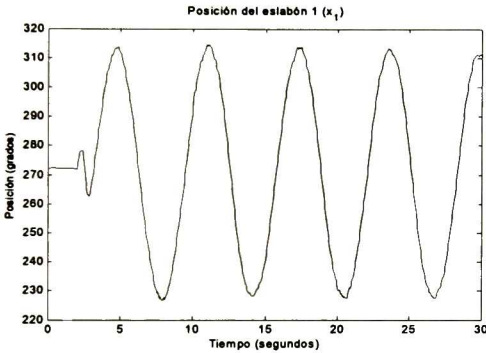


Figura 5.21(c)

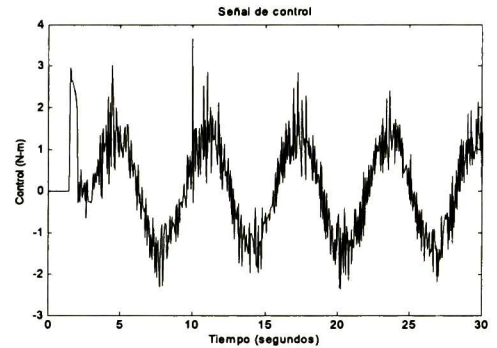


Figura 5.21(d)

Figura 5.21. Aplicación en tiempo real del controlador difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 40^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

Por último, en la figura 5.22 se aplica en tiempo real al sistema un regulador no lineal difuso siguiendo una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, se vuelve a verificar que este tipo de controlador presenta excelentes resultados, tal es que el error de seguimiento queda acotado entre $\pm 1^\circ$

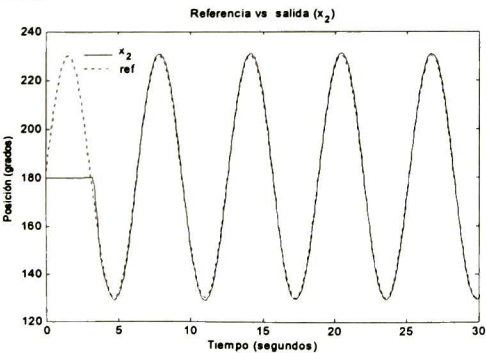


Figura 5.22(a)

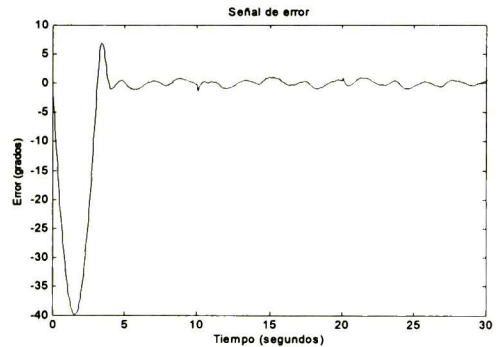


Figura 5.22(b)

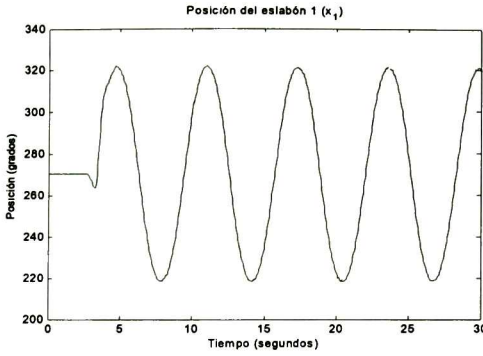


Figura 5.22(c)

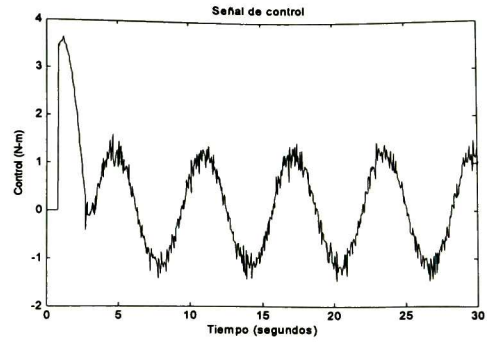


Figura 5.22(d)

Figura 5.22. Aplicación en tiempo real del controlador no lineal difuso para una señal de referencia $y_{ref} = 50^\circ \sin(1t)$, configuración abajo.

5.7. Modelo dinámico del robot completamente actuado

El robot completamente actuado en estudio cuenta con dos grados de libertad; el término completamente actuado proviene de la igualdad entre el número de eslabones y actuadores del sistema. Al colocar los dos eslabones en posición vertical forman un brazo y antebrazo. El primer eslabón se encuentra unido mediante un motor eléctrico (hombro) a una superficie horizontal, pudiendo ser en la orilla de una mesa o en un pedestal vertical. El segundo eslabón se conecta al extremo final del primer eslabón a través de un segundo motor eléctrico (codo).

El diagrama del robot completamente actuado es el mismo que se presenta en la figura 5.1, se toma en cuenta que los dos eslabones están acoplados mediante dos motores. Como se sabe, las ecuaciones no lineales invariantes en el tiempo de Euler-Lagrange rigen el comportamiento dinámico del robot, las ecuaciones correspondientes a cada motor son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde τ_1 y τ_2 son el par del motor del robot en la unión 1 y 2. La dinámica de un robot de n grados de libertad con eslabones rígidos y sin elasticidad en las uniones se expresa como

$$d(q) \ddot{q} + c(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (5.37a)$$

donde q es el vector de posiciones articulares, \dot{q} es el vector de velocidades articulares, $d(q)$ es la matriz de inercias, $c(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y coriolis, $g(q)$ es el vector gravitacional, $f(\dot{q})$ representa la acción de la fricción viscosa del sistema, y τ es el vector de pares aplicados. Las estructuras de los diversos componentes del modelo dinámico (5.37a) para

el robot completamente actuado son iguales que (5.5) excepto por el vector de pares aplicados, en este caso, $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$. El valor de cada parámetro está dado por (5.7).

A partir del modelo dinámico (5.37a) se puede obtener la representación en variables de estado de la siguiente forma

$$\ddot{q} = d(q)^{-1} [\tau - c(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) - f(\dot{q})]$$

desarrollando se obtiene

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{22}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{11}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \tau_1 + \begin{bmatrix} \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{d_{11}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \tau_2$$

con $c_1 = c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2$ y $c_2 = c_{12}\dot{q}_1$.

Si se definen las siguientes variables

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = \dot{q}_1, \quad x_4 = \dot{q}_2, \quad u_1 = \tau_1, \quad u_2 = \tau_2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2,$$

el sistema no lineal queda representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g_{a1}(x)u_1 + g_{a2}(x)u_2 \\ y(t) &= h(x) \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{22}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \left[\frac{d_{11}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$g_{a1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_{22}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \quad g_{a2}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \\ \frac{d_{11}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \end{bmatrix} \quad h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

5.8. Controlador no lineal difuso, robot completamente actuado

En esta sección se diseña un regulador no lineal difuso por retroalimentación del estado, tal que este control sea aplicado al sistema multivariable (5.38) para que las salidas del sistema (x_1, x_2) , sigan una señal de referencia senoidal y cosenoidal, respectivamente. Para resolver el (PRNLDS), el teorema 3.3.1 tiene que satisfacer cada una de sus condiciones. El sistema correspondiente al modelo no lineal del robot completamente actuado puede representarse como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{den(x)} (f_{31}(x) + g_{a31}(x) u_1 + g_{a32}(x) u_2) \\ \frac{1}{den(x)} (f_{41}(x) + g_{a41}(x) u_1 + g_{a42}(x) u_2) \end{bmatrix} \quad \dot{w}(t) = \begin{bmatrix} \alpha w_2 \\ -\alpha w_1 \\ \beta w_4 \\ -\beta w_3 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

donde

$$\begin{aligned} f_{31}(x) &= d_{22} \left[\frac{d_{12}c_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}g_2}{d_{22}} + \frac{d_{12}f_2}{d_{22}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ f_{41}(x) &= -d_{12} \left[\frac{d_{11}c_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}g_2}{d_{12}} + \frac{d_{11}f_2}{d_{12}} - c_1 - g_1 - f_1 \right] \\ den(x) &= d_{11}d_{22} - d_{12}^2, \\ g_{a31}(x) &= d_{22}, \quad g_{a32}(x) = -d_{12}, \quad g_{a41}(x) = -d_{12}, \quad g_{a42} = d_{11}, \end{aligned}$$

las trayectorias de referencia independientes están dadas por

$$q(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

y el error de seguimiento es

$$e = \begin{bmatrix} x_1 - w_1 \\ x_2 - w_4 \end{bmatrix}$$

El comportamiento no lineal del sistema (5.38) se aproxima mediante un modelo difuso Takagi Sugeno, con el fin de construir un estabilizador difuso tal que agrande la región de estabilización es necesario linealizar el sistema en distintos puntos de operación, de manera que estos puntos de operación se seleccionan de acuerdo a las señales de referencia a seguir. La aproximación lineal del sistema se hace conforme a (3.5) en cinco puntos de operación, estos son

	x_1^0	x_2^0	x_3^0	x_4^0	x_5^0
x_1	30°	60°	90°	120°	150°
x_2	0°	-52°	60°	52°	0°
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0

los subsistemas A_i , B_i y C_i se encuentran en el apéndice B.

Obtenidos los modelos lineales, es necesario definir los conjuntos difusos, estos se obtienen mediante funciones de membresía. Los conjuntos difusos se definen respecto a la salida (x_1) , estos son llamados uno, dos, tres, cuatro y cinco. Para la mezcla de los subsistemas se consideran tres

funciones de membresía triangulares y dos funciones de membresía pseudo-trapezoidales, en la figura 5.23 se muestran las funciones de membresía.

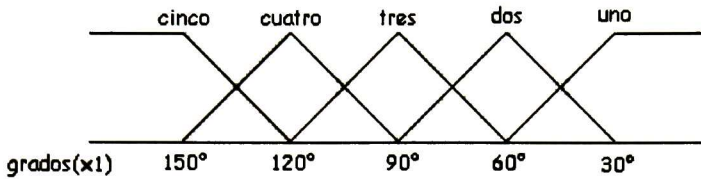


Figura 5.23 Funciones de membresía.

La hipótesis **FH1**) implica que la aproximación lineal del exosistema (5.39) tiene todos sus valores propios sobre el eje imaginario, $[\pm\alpha i \pm\beta i]$. Al suponer estabilidad de Poisson en cada punto de una vecindad de $w = 0$ se tendrá que ninguna trayectoria puede converger asintóticamente al equilibrio $w = 0$. Así la clase de exosistemas permitidos serán entre otro, los sistemas que generan señales periódicas y constantes.

La hipótesis **FH2**) se cumple para los cinco pares (A_i, B_i) , al tener rango pleno en la matriz de controlabilidad. Ahora se procede a ubicar los polos de manera que los cinco subsistemas sean estables. La ubicación propuesta es $[-9 \ -9 \ -6,7 \ -6,7]$. Las matrices de ganancias son

$$\begin{aligned}
 K_1 = K_5 &= \begin{bmatrix} -5,8228 & -1,7625 & -1,1870 & -0,3878 \\ -1,7625 & -1,0809 & -0,3878 & -0,2099 \end{bmatrix}, \\
 K_2 = K_4 &= \begin{bmatrix} -5,8121 & -1,7440 & -1,0506 & -0,3196 \\ -1,3036 & -1,0530 & -0,3196 & -0,2099 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} -6,1112 & -1,7369 & -1,0096 & -0,2991 \\ -1,4217 & -1,0289 & -0,2991 & -0,2099 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El siguiente paso se refiere a la existencia de una matriz **P** simétrica definida positiva que junto con las matrices de ganancias K_i , cumplan con las restricciones de desigualdades matriciales lineales, de acuerdo a la hipótesis **FH3**). De tal manera, que se generan 15 desigualdades de la forma de desigualdad de Lyapunov. La matriz encontrada debe satisfacer todas las desigualdades, de manera que al evaluarlas con la matriz calculada, se cumpla que todas las desigualdades sean definidas negativas. La matriz **P** es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,9767 & 0,0050 & 0,0088 & 0,0043 \\ 0,0050 & 1,8466 & -0,0035 & 0,0087 \\ 0,0088 & -0,0035 & 0,0302 & 0,0011 \\ 0,0043 & 0,0087 & 0,0011 & 0,0289 \end{bmatrix}$$

los valores propios son positivos $(0,0282 \ 0,0307 \ 1,8464 \ 1,9769)$, por consecuencia la matriz **P** es definida positiva.

Por último el **(PRNLDS)** tiene solución si la hipótesis **FH4**) se cumple, es decir, existen los mapeos $x = \pi(w)$ y $u = \gamma(w)$ que son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (2.45). Toman la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w} s(w) &= \pi_3(w) \\ \frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w} s(w) &= \pi_4(w)\end{aligned}\quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) &= \frac{1}{den(w)} (f_{31}(w) + g_{a31}(w) u_1 + g_{a32}(w) u_2) \\ \frac{\partial \pi_4(w)}{\partial w} s(w) &= \frac{1}{den(w)} (f_{41}(w) + g_{a41}(w) u_1 + g_{a42}(w) u_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \pi_1(w) - w_1 \\ 0 &= \pi_2(w) - w_4.\end{aligned}\quad (5.41)$$

A partir de (5.41) se tiene que

$$\pi_1(w) = w_1 \quad \text{y} \quad \pi_2(w) = w_4 \quad (5.42)$$

que al sustituirse en (5.40) conduce a las ecuaciones

$$\frac{\partial \pi_1(w)}{\partial w} s(w) = \pi_3(w) = \dot{w}_1 = \alpha w_2 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \pi_3(w)}{\partial w} s(w) = -\alpha^2 w_1 \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \pi_2(w)}{\partial w} s(w) = \pi_4(w) = \dot{w}_4 = -\beta w_3 \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \pi_4(w)}{\partial w} s(w) = -\beta^2 w_4 \quad (5.46)$$

el mapeo $\pi(w)$ que es la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales (3.13), esta dada por (5.42), (5.43) y (5.45), conformada de la siguiente manera

$$\pi(w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_4 \\ \alpha w_2 \\ -\beta w_3 \end{bmatrix}$$

De la sustitución de (5.44) y (5.46) en (5.40) se tiene que

$$-\alpha^2 w_1 = \frac{1}{den(w)} (f_{31}(w) + g_{a31}(w) u_1 + g_{a32}(w) u_2)$$

$$-\beta^2 w_4 = \frac{1}{den(w)} (f_{41}(w) + g_{a41}(w) u_1 + g_{a42}(w) u_2)$$

de donde

$$\gamma_1(w) = -\frac{(-\beta^2 w_4 den(w) - f_{41}(w)) g_{a32}(w) + (\alpha^2 w_1 den(w) + f_{31}(w)) g_{a42}(w)}{g_{a31}(w) g_{a42}(w) - g_{a41}(w) g_{a32}(w)}$$

$$\gamma_2(w) = \frac{(\alpha^2 w_1 den(w) + f_{31}(w)) g_{a41}(w) + (-\beta^2 w_4 den(w) - f_{41}(w)) g_{a31}(w)}{g_{a31}(w) g_{a42}(w) - g_{a41}(w) g_{a32}(w)}$$

y la ley de control que resuelve el (PRNLDS) está dada por

$$u_1 = \gamma_1(w) + \sum_{i=1}^5 h_i(z) K_{f1i}(x - \pi(w))$$

$$u_2 = \gamma_2(w) + \sum_{i=1}^5 h_i(z) K_{f2i}(x - \pi(w))$$
(5.47)

donde K_{f1i} y K_{f2i} son la primer y segunda fila de K_i , respectivamente.

En la figura 5.24 se muestra el desempeño del robot completamente actuado al aplicar la ley de control no lineal difusa (5.47). Las salidas x_1 y x_2 siguen una señal senoidal y cosenoidal de 60° de amplitud, respectivamente, ambas con frecuencia de $1 \frac{rad}{seg}$. En este caso, se considera que $\alpha = \beta = 1 \frac{rad}{seg}$, la condición inicial del exosistema (5.39) es $w(0) = [0 \ 1,0472 \ 0 \ 1,0472]^T$. En la figura 5.24 se observa que los dos errores de seguimiento se hacen exactamente igual a cero, motivo por el cual, se afirma que para sistemas con altas no linealidades en su movimiento, la técnica de control no lineal difuso proporciona un desempeño fino del sistema en lazo cerrado.

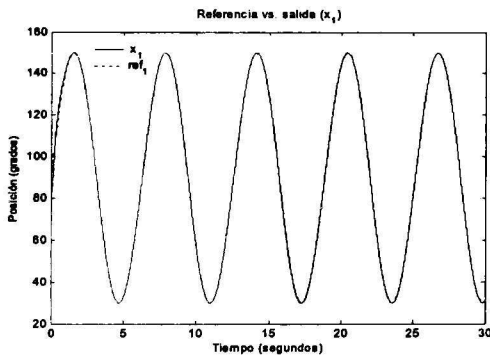


Figura 5.24(a)

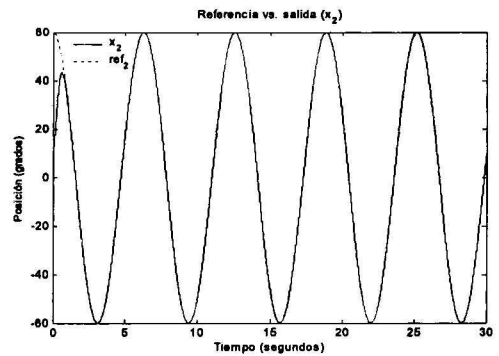


Figura 5.24(b)

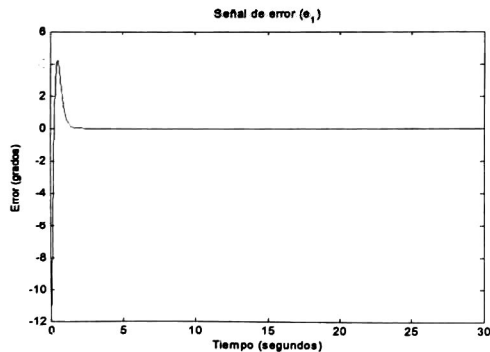


Figura 5.24(c)

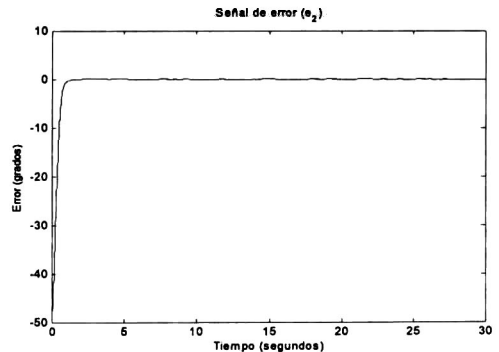


Figura 5.24(d)

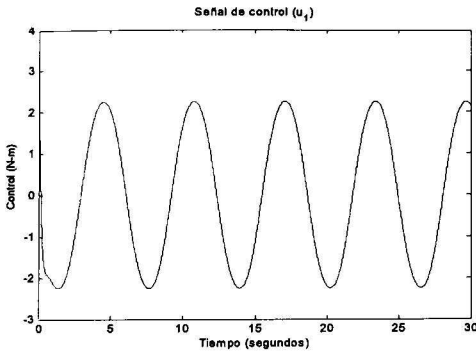


Figura 5.24(e)

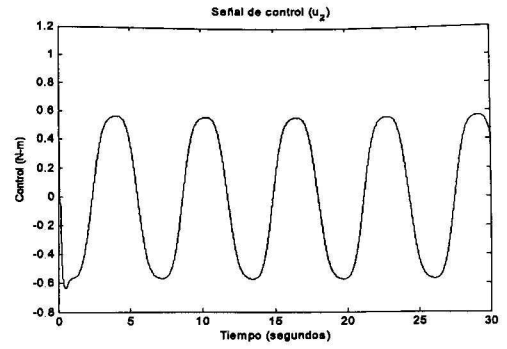


Figura 5.24(f)

Figura 5.24. Aplicación en simulación del controlador no lineal difuso para señales de referencia $y_{ref1} = 60^\circ \sin(1t)$ y $y_{ref2} = 60^\circ \cos(1t)$.

En la figura 5.25 se observa el comportamiento de la planta (5.38) al aplicar la ley de control no lineal difusa (5.47). Las salidas x_1 y x_2 siguen señales de referencia $y_{ref1} = 60^\circ \sin(0,5t)$ y $y_{ref2} = 60^\circ \cos(2t)$, respectivamente. Para el exosistema (5.39) se considera que $\alpha = 0,5 \frac{rad}{seg}$ y $\beta = 2 \frac{rad}{seg}$, con condición inicial $w(0) = [0 \ 1,0472 \ 0 \ 1,0472]^T$. Como se observa en la figura 5.25 las salidas del sistema pueden seguir señales de referencia independientes ya sea en amplitud o como es en este caso, en frecuencia. La ley de control no lineal aplicada al robot completamente actuado es la exacta, razón por la cual los errores son idénticamente cero.

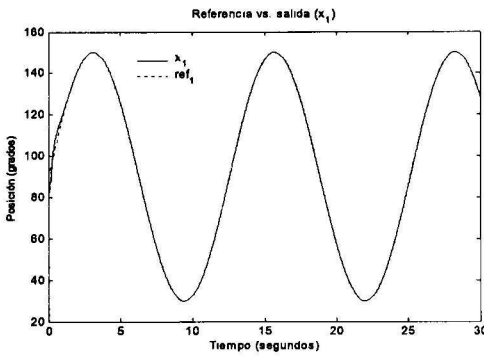


Figura 5.25(a)

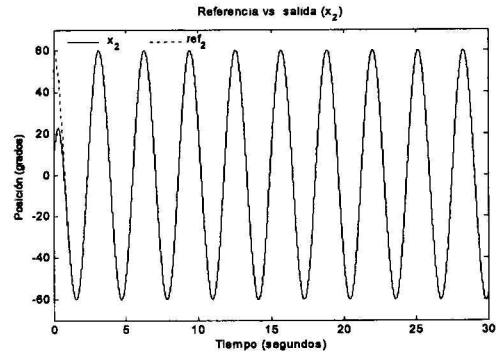


Figura 5.25(b)

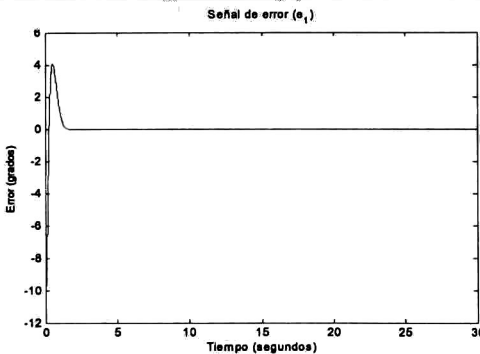


Figura 5.25(c)

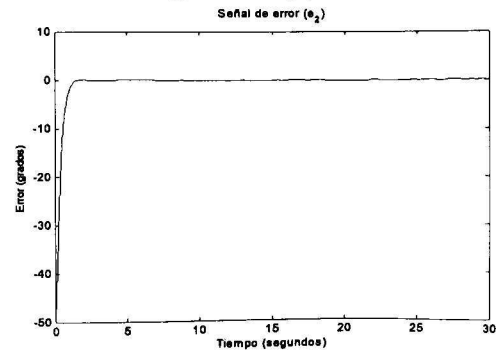


Figura 5.25(d)

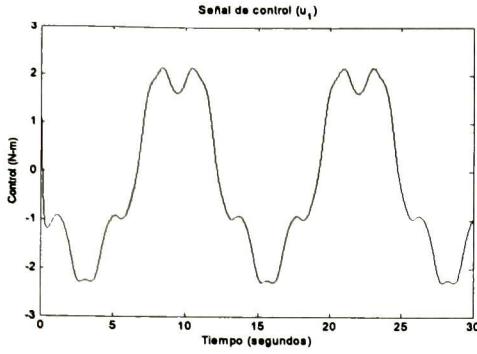


Figura 5.25(e)

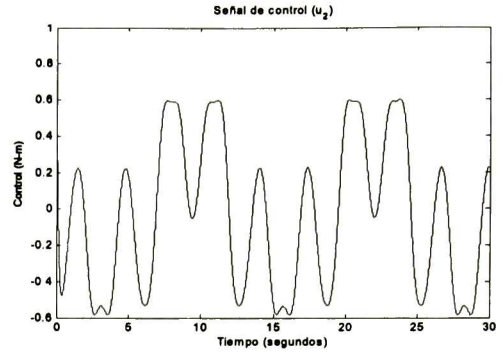


Figura 5.25(f)

Figura 5.24. Aplicación en simulación del controlador no lineal difuso para señales de referencia $y_{ref1} = 60^\circ \sin(0,5t)$ y $y_{ref2} = 60^\circ \cos(2t)$.

5.9. Comentarios

De las pruebas hechas en el pendubot es posible concluir que, se obtiene un mejor desempeño en el seguimiento de una señal de referencia, cuando el regulador es construido directamente de la planta no lineal y no así de cada subsistema local. Es conveniente notar que el estabilizador difuso combinado con los mapeos no lineales $\pi(w)$ y $\gamma(w)$, agranda la región de estabilización y permite seguir amplitudes grandes en la señal de referencia, además que minimiza el error de seguimiento considerablemente.

La linealización en 11 y 9 puntos de operación para el pendubot puede ser un tanto exagerada, pero de esta forma el modelo difuso TS aproxima de una mejor manera la dinámica no lineal de la planta. El seguimiento de trayectorias en lo que se ha denominado configuración abajo es una innovación en esta tesis.

Aparte de los experimentos presentados en este capítulo para el pendubot, se realizaron una gran variedad más, con otras señales de referencia de distintas frecuencias por ejemplo $\beta = 0,05 \frac{rad}{seg}$, $\beta = 0,5 \frac{rad}{seg}$, $\beta = 2,5 \frac{rad}{seg}$, etc., además de distintas amplitudes como lo es de 10° hasta 70° . Cabe mencionar que en tiempo real la mayor amplitud que se logró obtener fueron 70° ; en simulación la máxima amplitud obtenida fueron 80° .

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

Se definió el problema del *regulador no lineal difuso* por retroalimentación del estado, retroalimentación del error y robusto, se dan las condiciones para la existencia de su solución. Este controlador esta basado en la teoria de regulación no lineal y el modelado difuso Takagi-Sugeno. La relativa ventaja de este método es que se obtiene una convergencia global del error de seguimiento en la salida, en contraste a las propiedades locales del regulador no lineal clásico y del regulador difuso.

Se obtuvo una implementación en tiempo real en el péndulo simple de los reguladores difusos en sus tres variantes: retroalimentación del estado, retroalimentación del error y robusto. El diseño de los reguladores se hizo de una manera metodológica cumpliendo completamente con las condiciones que resuelven el problema de regulación no lineal difusa. Las respuestas en simulación como en tiempo real fueron bastante satisfactorias.

Los resultados presentados en esta tesis para la teoria de *regulación no lineal difusa* aplicada al pendubot permiten reducir el error de seguimiento arbitrariamente mediante la selección de un orden superior en los coeficientes de la serie de Taylor al resolver las ecuaciones diferenciales parciales (ecuaciones de Francis), respecto al método que se basa en el diseño de interpolación de controladores lineales.

El robot completamente actuado de dos grados de libertad, es un sistema que posee fuertes no linealidades en su dinámica de movimiento, razón por la cual, fue interesante aplicar la teoría de *regulación no lineal difusa*. Los resultados obtenidos en simulación, permiten verificar que los errores de seguimiento son idénticamente igual a cero, gracias a que la subvariedad en estado estacionario de la salida y la entrada de estado son las exactas, es decir, no son aproximadas. Aunado a esto, el estabilizador difuso permite generar una región de estabilización más grande que la generada por un estabilizador simple.

Los algoritmos de optimización para las desigualdades matriciales lineales, han probado ser una herramienta útil y eficaz en el tratamiento de problemas de control, la aplicación de los algoritmos que propone esta tesis, plantea con buenos resultados, un método sencillo para obtener la matriz de estabilidad común para todos los sistemas lineales.

Las técnicas de *control no lineal difuso* y *control difuso* se encuentran actualmente en pleno desarrollo. Aunque ya existen varias de ellas establecidas como viables, el estudio de nuevas variantes o modificaciones de las mismas generan que las técnicas se perfeccionen y es campo abierto para la investigación.

6.2. Trabajo futuro

Como trabajo futuro se propone la aplicación al pendubot y al robot completamente actuado, de dos tipos de reguladores como lo son: no lineal difuso por retroalimentación del error y no lineal difuso robusto.

La implementación en tiempo real del regulador no lineal difuso aplicado a un robot manipulador completamente actuado de dos o más grados de libertad.

Verificar la extensión al problema de discretización no lineal utilizando el concepto de retenedor exponencial.

Bibliografía

- [1] Konobloch, H. W., Isidori A., Flockerzi D. *Topics in Control Theory*, Birkhäuser Verlag, 1993.
- [2] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [3] Byrnes C.I., Delli Priscoli, F. & Isidori, A. *Output regulation of uncertain nonlinear systems*. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [4] J. Carr, *Applications of center manifold theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [6] B. A. Francis. "The linear multivariable regulator problem", *SIAM J. Cont. Optimiz.*, 15:486-505, 1977.
- [7] B. Castillo-Toledo, J. A. Meda-Campana, y A. "Titli. A fuzzy output regulator for Takagi-Sugeno fuzzy models" In *Proceedings of the 2003 IEEE international Symposium on Intelligent Control*, volume 2, pages 2159-2164, Las vegas, Nevada, Diciembre 2002.
- [8] J. A. Meda-Campana & B. Castillo-Toledo. "On the output regulation for TS fuzzy models with sliding modes", sometido al *24th ACC*, Portland, Oregon.
- [9] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis. A linear matrix inequality approach*. Jonh Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [10] M. Xiao-Jun & S. Zeng-Qi. "Output tracking and regulation on nonlinear system based on Takagi-Sugeno fuzzy model" *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 30(1):47-59, February 2000.
- [11] Zhen Cai & Chun-Yi Su. "Real-Time tracking control of underactuated pendubot using Takagi-Sugeno fuzzy systems" In *Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Computational Intelligent in Robotics and Automation*, pages 73-78, Kobe, Japan, July 2003.
- [12] Ho Jae Lee, Jin Bae Park, and Young Hoon Joo. "Comments on Output tracking and regulation on nonlinear systems based on Takagi-Sugeno fuzzy model" *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 33(3):521-523, June 2003.
- [13] B. Castillo-Toledo. "Almost tracking through singular points via the nonlinear regulator theory". In *Proceedings of the IV Congreso Latinoamericano de Control Automático (Invited paper)*, pages 590-594, Puebla, Puebla, Noviembre 1990.

- [14] L. E. Ramos. *Control de un sistema electromecánico subactuado (Pendubot)*, Tesis de Maestría, Dept de Ing. Eléctrica, Sección Control Automatico, Cinvestav, 1996.
- [15] Obregón Pulido Guillermo. *Control no lineal discretizado con retenedor exponencial*, Tesis de Maestría, Cinvestav, Gdl. 1999.
- [16] B. Haro. *Diseño de un banco de controladores lineales para el Pendubot*, Tesis de Maestría, Dept de Ing. Eléctrica, Sección Control Automatico, Cinvestav, 1999.
- [17] M. Maldonado C. *Seguimiento de trayectoria utilizando control difuso tipo Takagi-Sugeno*, Tesis de Maestría, Cinvestav-GDL, 1999.

Apéndice A.

A.1 Sistemas lineales A_i , B_i y C_i , configuración arriba.

$$A_1 = A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9,7425 & -3,0309 & -0,1386 & 0,0146 \\ 28,8544 & 44,4165 & 0,1689 & -0,0528 \end{bmatrix} \quad B_1 = B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25,4400 \\ -30,9941 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19,6953 & -6,1272 & -0,1451 & 0,0178 \\ 12,7217 & 49,4354 & 0,2063 & -0,0604 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 26,6218 \\ -37,8500 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 29,7407 & -9,2524 & -0,1549 & 0,0213 \\ -6,7562 & 55,4951 & 0,2473 & -0,0691 \end{bmatrix} \quad B_3 = B_9 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28,4256 \\ -45,3807 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 39,0722 & -12,1554 & -0,1662 & 0,0248 \\ -26,8915 & 61,7592 & 0,2876 & -0,0780 \end{bmatrix} \quad B_4 = B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30,4917 \\ -52,7666 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 46,0285 & -14,3195 & -0,1755 & 0,0275 \\ -42,8083 & 66,7109 & 0,3185 & -0,0849 \end{bmatrix} \quad B_5 = B_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 32,2053 \\ -58,4459 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 48,6530 & -15,1360 & -0,1792 & 0,0285 \\ -48,9696 & 68,6277 & 0,3304 & -0,0876 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 32,8816 \\ -60,6185 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_{11} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

A.2 Mapeos lineales Π_i , para una señal de referencia $y_{ref} = 50 \sin(1t)$, configuración arriba.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \begin{bmatrix} 1,3089 & -0,8681 & 0,0007 \\ -1,3089 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8681 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} 1,0472 & -0,8639 & 0,0007 \\ -1,0471 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8639 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} \\ \Pi_3 &= \begin{bmatrix} 0,7853 & -0,8603 & 0,0007 \\ -0,7853 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8603 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} & \Pi_4 &= \begin{bmatrix} 0,5236 & -0,8576 & 0,0007 \\ -0,5235 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8576 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} \\ \Pi_5 &= \begin{bmatrix} 0,2618 & -0,8559 & 0,0007 \\ -0,2618 & 0,8726 & 0 \\ 0 & 0,0007 & -0,8559 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix}, & \Pi_6 &= \begin{bmatrix} 0 & -0,8553 & 0,0007 \\ 0 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8559 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} \\ \Pi_7 &= \begin{bmatrix} -0,2618 & -0,8559 & 0,0007 \\ 0,2618 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8559 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} & \Pi_8 &= \begin{bmatrix} -0,5236 & -0,8576 & 0,0007 \\ 0,5235 & 0,8726 & 0 \\ 0 & 0,0007 & -0,8576 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix}, \\ \Pi_9 &= \begin{bmatrix} -0,7853 & -0,8603 & 0,0007 \\ 0,7853 & 0,8726 & 0 \\ 0 & 0,0007 & -0,8603 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} & \Pi_{10} &= \begin{bmatrix} -1,0472 & -0,8639 & 0,0007 \\ 1,0471 & 0,8726 & 0 \\ 0 & 0,0007 & -0,8639 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} \\ \Pi_{11} &= \begin{bmatrix} -1,3089 & -0,8681 & 0,0007 \\ 1,3089 & 0,8726 & 0 \\ 0 & -0,0007 & -0,8681 \\ 0 & 0 & 0,8726 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.3 Mapeos lineales Γ_i , para una señal de referencia $y_{ref} = 50 \sin(1t)$, configuración arriba.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= [-0,6572 \quad 0,4705 \quad -0,0055] & \Gamma_2 &= [-1,0157 \quad 0,8724 \quad -0,00585] \\ \Gamma_3 &= [-1,0773 \quad 1,2144 \quad -0,0061], & \Gamma_4 &= [-0,8796 \quad 1,4750 \quad -0,0063], \\ \Gamma_5 &= [-0,4905 \quad 1,6379 \quad -0,0064], & \Gamma_6 &= [0 \quad 1,6933 \quad -0,0065] \\ \Gamma_7 &= [0,4905 \quad 1,6379 \quad -0,0064], & \Gamma_8 &= [0,8796 \quad 1,4750 \quad -0,0063] \\ \Gamma_9 &= [1,0773 \quad 1,2144 \quad -0,0061], & \Gamma_{10} &= [1,0157 \quad 0,8724 \quad -0,00585], \\ \Gamma_{11} &= [0,6572 \quad 0,4705 \quad -0,0055] \end{aligned}$$

A.4 Sistemas lineales A_i , B_i y C_i , configuración abajo.

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_9 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19,6953 & 6,1272 & -0,1451 & 0,0072 \\ 52,1123 & 37,1809 & 0,0838 & -0,0392 \end{bmatrix} & B_1 = B_9 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 26,6218 \\ -15,3935 \end{bmatrix} \\
 A_2 = A_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -29,7407 & 9,2524 & -0,1549 & 0,0053 \\ 52,7251 & 36,9903 & 0,0625 & -0,0372 \end{bmatrix} & B_2 = B_8 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 28,4256 \\ -11,4705 \end{bmatrix}, \\
 A_3 = A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -39,0722 & 12,1554 & -0,1662 & 0,0038 \\ 51,2529 & 37,4483 & 0,0447 & -0,0361 \end{bmatrix} & B_3 = B_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30,4917 \\ -8,2167 \end{bmatrix} \\
 A_4 = A_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -46,0285 & 14,3195 & -0,1755 & 0,0028 \\ 49,2486 & 38,0718 & 0,0325 & -0,0355 \end{bmatrix} & B_4 = B_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 32,2053 \\ -5,9646 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -48,6530 & 15,1360 & -0,1792 & 0,0024 \\ 48,3362 & 38,3556 & 0,0280 & -0,0354 \end{bmatrix} & B_5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 32,8816 \\ -5,1447 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_9 = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

A.5 Mapeos lineales Π_i , para una señal de referencia $y_{ref} = 40 \sin(1t)$, configuración abajo.

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \begin{bmatrix} 1,0472 & -0,7053 & 0,0006 \\ -1,0472 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7053 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix} & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} 0,7854 & -0,7083 & 0,0006 \\ -0,7854 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7083 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix} \\
 \Pi_3 &= \begin{bmatrix} 0,5236 & -0,7106 & 0,0006 \\ -0,5236 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7120 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix} & \Pi_4 &= \begin{bmatrix} 0,2618 & -0,7120 & 0,0006 \\ -0,2618 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7120 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0,7125 & 0,0006 \\ 0 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7120 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} -0,2618 & -0,7120 & 0,0006 \\ 0,2618 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7120 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_7 = \begin{bmatrix} -0,5236 & -0,7106 & 0,0006 \\ 0,5236 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7120 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_8 = \begin{bmatrix} -0,7854 & -0,7083 & 0,0006 \\ 0,7854 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7083 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_9 = \begin{bmatrix} -1,0472 & -0,7053 & 0,0006 \\ 1,0472 & 0,6981 & 0 \\ 0 & -0,0006 & -0,7053 \\ 0 & 0 & 0,6981 \end{bmatrix}$$

A.6 Mapeos lineales Γ_i , para una señal de referencia $y_{ref} = 40 \sin(1t)$, configuración abajo.

$$\Gamma_1 = [1,0158 \quad -0,6560 \quad -0,0036]$$

$$\Gamma_2 = [1,0774 \quad -0,9433 \quad -0,0034]$$

$$\Gamma_3 = [0,8797 \quad -1,1655 \quad -0,0032]$$

$$\Gamma_4 = [0,4906 \quad -1,3060 \quad -0,0031]$$

$$\Gamma_5 = [0 \quad 1,3540 \quad -0,0031],$$

$$\Gamma_6 = [-0,4906 \quad -1,3060 \quad -0,0031],$$

$$\Gamma_7 = [-0,8797 \quad -1,1655 \quad -0,0032]$$

$$\Gamma_8 = [-1,0774 \quad -0,9433 \quad -0,0034],$$

$$\Gamma_9 = [-1,0158 \quad -0,6560 \quad -0,0036]$$

Apéndice B.

Sistemas lineales A_i , B_i y C_i , robot completamente actuado.

$$A_1 = A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 24,3265 & -7,5680 & -0,1792 & 0,0285 \\ -24,4848 & 34,3139 & 0,3304 & -0,0876 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 45,1550 & 3,9698 & -0,1500 & 0,0197 \\ -62,9378 & 12,2477 & 0,2279 & -0,0649 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 48,5815 & 7,2937 & -0,1451 & 0,0178 \\ -48,7097 & 6,1155 & 0,2063 & -0,0604 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 32,8816 & -60,6185 \\ -60,6185 & 186,3794 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 27,5233 & -41,8171 \\ -41,8171 & 138,1609 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 26,6218 & -37,8500 \\ -37,8500 & 128,4408 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Apéndice C.

Desigualdades Lineales Matriciales (LMI's)

La primera desigualdad matricial lineal usada para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos se remonta al siglo XIX [5]. Cuando, alrededor de 1890, Lyapunov demostró que la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

es estable si y sólo si existe una matriz \mathbf{P} definida positiva tal que

$$A^T\mathbf{P} + \mathbf{P}A < 0$$

Los requisitos $\mathbf{P} > 0$ y $A^T\mathbf{P} + \mathbf{P}A < 0$ son los que se conocen hoy como la desigualdad de Lyapunov en \mathbf{P} . Lyapunov también probó que esta primera LMI puede ser resuelta explícitamente, al elegir una $Q = Q^T > 0$ y luego resolver la ecuación lineal $A^T\mathbf{P} + \mathbf{P}A < 0$ para la matriz \mathbf{P} .

Una *desigualdad matricial lineal* (LMI) tiene la forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \tag{C.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ es la variable y las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 0, \dots, m$ son constantes. El símbolo de desigualdades empleado en (C.1) significa que $F(x)$ es definida positiva, es decir, $u^T F(x) u > 0$ para todas las $u \in \mathbb{R}^n$ diferentes de cero. También es posible encontrar LMI's no estrictas que se representan

$$F(x) \geq 0 \tag{C.2}$$

Aunque (C.1) aparenta tener una forma muy especializada, puede representar una amplia variedad de restricciones convexas en x . Por ejemplo: desigualdades lineales, desigualdades cuadráticas (convexas), desigualdades de norma de matrices y restricciones que intervienen en la teoría de control, como la desigualdad de Lyapunov y desigualdades matriciales cuadráticas (convexas), pueden representarse en la forma LMI.

Cuando se tiene múltiples LMI's $F^{(x)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$ pueden representarse como la única LMI $\text{diag}(F^{(x)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$. Por lo tanto, no es necesario diferenciar entre un conjunto de LMI's y una LMI sencilla.

A continuación se enlistan algunos de los problemas convexas y cuasi-convexas que se encuentran con más frecuencia en el análisis de sistemas.

- **Problema de LMI:** Dada una LMI $F(x) > 0$, el problema de LMI (LMIP) consiste en encontrar x^{fact} tal que $F(x^{fact}) > 0$, o en su defecto, determinar que la LMI no es factible.

- **Problema del valor propio:** El EVP (eigenvalue problem) es minimizar el máximo valor propio de una matriz que es función afín de una variable, sujeto a una restricción LMI, o por el contrario, determinar que dicha restricción no es factible, es decir

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeto a: } \lambda I - A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \end{aligned}$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son matrices simétricas que dependen de la variable de optimización x . Este es un problema de optimización convexa.

Los EVP's pueden representarse en la forma equivalente de minimizar una función lineal sujeta a una LMI

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T \lambda \\ & \text{sujeto a: } F(x) > 0, \end{aligned}$$

con $F(x)$ como una función afín de x .

- **Problema del valor propio generalizado:** Un GEVP (generalized eigenvalue problem) consiste en minimizar el máximo valor propio generalizado de un par de matrices, sujeto a una restricción LMI. La forma general del GEVP es

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeto a: } \lambda B(x) - A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \quad C(x) > 0, \end{aligned}$$

donde $A(x)$, $B(x)$, y $C(x)$ son matrices simétricas y funciones afines de la variable de optimización x .

También se puede expresar como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x)) \\ & \text{sujeto a: } B(x) > 0, \quad C(x) > 0, \end{aligned}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}(X, Y)$ significa el máximo valor propio generalizado del *pencil* $\lambda Y - X$ con $Y > 0$. El GEVP es un problema de optimización cuasi-convexo, ya que la restricción es convexa y el objetivo $\lambda_{\text{máx}}(A(x), B(x))$ es cuasi-convexo.

- **Problema convexo:** El CP es

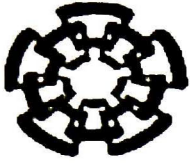
$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \log \det A(x)^{-1} \\ & \text{sujeto a: } A(x) > 0, \quad B(x) > 0, \end{aligned}$$

donde $A(x)$ y $B(x)$ son matrices simétricas que son funciones afines de x .

La solución de cualquiera de los casos anteriores, es determinar si el problema es factible o no lo es. En caso de ser factible se calcula el punto que exceda el mínimo global por un valor menor que el factor de tolerancia determinado.

Un método muy sencillo que permite obtener la solución de LMIP's, EVP's, GEVP's y CP's es el llamado *algoritmo elipsoide*. Esta técnica inicia considerando que se cuenta con una elipse que contiene un punto óptimo, luego se genera un plato de corte que pasa por el centro de la elipse y después se calcula otra elipse de menor tamaño que contiene al punto óptimo. El procedimiento continúa hasta lograr la precisión requerida.

Aunque puede demostrarse la convergencia del algoritmo elipsoide [5], existen técnicas que resultan mucho más eficientes en la práctica. Estas se conocen como los métodos de punto interior, los cuales han sido desarrollados desde 1988 para la solución de los problemas mencionados. En [5] se puede encontrar una breve descripción del funcionamiento de estos métodos.



CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

El problema de la regulación difusa. Aplicación a sistemas
electromecánicos

del (la) C.

Víctor Jesús ZÚÑIGA MÁRQUEZ

el día 05 de Noviembre de 2004.

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SS1T000007623