CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

# DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO. UN ANÁLISIS POR MEDIO DE COVARIACIÓN DE MAGNITUDES

T E S I S

Que presenta:

**BEATRIZ SILVIA SOTO CRUZ**

Para obtener el grado de:

**MAESTRA EN CIENCIAS**

EN LA ESPECIALIDAD DE
**MATEMÁTICA EDUCATIVA**

Director de la Tesis:

**DR. HUGO ROGELIO MEJÍA VELASCO**

Ciudad de México Octubre 2022.

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco…

… A Dios por ser quien soy y darme siempre lo que necesito para salir adelante.

… A mi familia por el apoyo y el cariño que siempre me dan.

… Al IPN por ser parte fundamental de mi formación profesional.

… A la ESIME TICOMAN por ser mi alma mater y darme la oportunidad de trabajar en la formación de jóvenes ingenieros.

… Al Dr. Hugo Mejía Velasco por su apoyo y paciencia en la realización de este trabajo.

… A los Drs. Gonzalo Zubieta y Armando Cuevas por tomarse el tiempo para leer y comentar este trabajo, así como sus enseñanzas.

… A Adriana Parra por tener siempre esa buena disposición para orientarme y sus consejos.

… A mis alumnos por ser mi fuente de inspiración a ser cada día una mejor en lo que hago.

… A Dafne, Axel, Emilio, Eduardo, Omar y Gonzalo por su entusiasmo, ayuda e invaluable aportación a este trabajo.

… A mis amigos que siempre me echaron porras para terminar lo que inicié con tanta ilusión.

… A mis compañeros que se convirtieron en amigos y cómplices de la aventura que iniciamos juntos en el CINVESTAV y que me ayudaron y apoyaron con sus conocimientos.

*Dedico este trabajo a quienes desde el cielo me acompañan y llevo en mi corazón*

*Mi mamá, una mujer fuerte y dedicada a su familia…*

*y el Dr. Víctor Manuel Alvarado Verdín un amigo como pocos…*

# ÍNDICE


ÍNDICE 1

RESUMEN 2

ABSTRACT 3

INTRODUCCIÓN 4

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES 6

*1.1 Importancia del estudio del cálculo en ingeniería* 6

*1.2 Dificultades de la enseñanza del cálculo.* 9

*1.3 La educación en tiempos de pandemia* 18

*1.4 Planteamiento del problema* 19

*1.5 Objetivo* 20

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL 21

*2.1 Clase presencial y clase en línea* 21

*2.2 Contenido de razón de cambio en el curso de cálculo* 25

*2.3 Covariación y Cálculo* 29

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA 33

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS 42

*4.1 Análisis del caso Dafne y Axel* 43

*4.2 Análisis del caso Emilio y Eduardo* 60

*4.3 Análisis del caso Gonzalo y Omar* 70

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES 91

5.1 Respuesta a las preguntas de investigación 91

5.2 Trabajo futuro 93

ANEXOS 94

1. TEXTO DE DIÁLOGOS 94

# RESUMEN

En toda ingeniería el Cálculo Diferencial e Integral es parte del plan de estudios, y un tema importante es *razón de cambio* como aplicación de la derivada. Sin embargo, para su estudio es necesario que los estudiantes aborden problemas relacionados que les permita desarrollar un pensamiento analítico y funcional sobre *qué tan rápido cambia una cantidad*.

En el presente trabajo se pretende determinar la manera en que los estudiantes de ingeniería abordan los problemas de razón de cambio como aplicación de la derivada y las acciones mentales que ponen en juego para el desarrollo de su solución.

En nuestra investigación se trabajó con 3 parejas de estudiantes voluntarios de primer semestre de ingeniería, quienes ya habían estudiado en clases el tema de razón de cambio. Debido a que se realizó durante la pandemia por Covid-19, todas las sesiones fueron virtuales y se agarbaron para su posterior análisis.

El marco de referencia está sustentado bajo las ideas de Carlson (2002), Doerr (2017) y Roorda (2016) sobre variación y covariación, sobre cómo abordan los estudiantes los problemas de razón de cambio y las acciones mentales que ponen en juego para resolverlos.

Para resolver correctamente los problemas planteados, los estudiantes debieron poner en juego la acción mental correspondiente al nivel más alto de covariación. Sin embargo, en general les costó trabajo identificar las relaciones funcionales que permitían resolver los problemas planteados de manera que en gran medida solo alcanzaron un nivel intermedio de covariación de manera consistente.

# ABSTRACT

In all engineering, Differential and Integral Calculus is part of the curriculum, and an important topic is ratio of change as an application of the derivative. However, for its study it is necessary for students to approach related problems that allow them to develop analytical and functional thinking about how fast a quantity changes.

In the present work we intend to determine the way in which engineering students approach ratio of change problems as an application of the derivative and the mental actions they put into play for the development of its solution.

In our research we worked with 3 pairs of volunteer first semester engineering students, who had already studied the ratio of change topic in class. Because it was conducted during the Covid-19 pandemic, all sessions were virtual and were saved for later analysis.

The framework is underpinned under the ideas of Carlson (2002), Doerr (2017) and Roorda (2016) on variation and covariation, on how students approach ratio of change problems and the mental actions they put into play to solve them.

To correctly solve the problems posed, students had to bring into play the mental action corresponding to the highest level of covariation. However, in general they struggled to identify the functional relationships that allowed them to solve the problems posed so that they largely only reached an intermediate level of covariation on a consistent basis.

# INTRODUCCIÓN

El estudio del Cálculo Diferencial e Integral ha sido parte fundamental de toda ingeniería, ya que aplican los principios de esta rama de la matemática como parte principal de la formación académica. Sin embargo, los estudiantes presentan diferentes dificultades durante el proceso de aprendizaje, una que podemos considerar es la *conceptual*, ya que conocen algunos conceptos pero estos carecen de sentido para la mayoría de los estudiantes, pues no pueden relacionar diferentes representaciones de un mismo objeto de estudio. Distintos estudios sobre la enseñanza del cálculo coinciden en que este proceso de enseñanza debe darse no solo algebraicamente, sino con las diferentes representaciones disponibles, lo que les permitirá a los estudiantes una comprensión profunda, y si a esto le sumamos los grandes contenidos en los programas de estudio el problema no se puede solventar durante el curso, porque no hay tiempo suficiente para hacerlo.

Centrando la atención en los problemas de razón de cambio, encontramos que la principal dificultad que presentan los estudiantes es identificar la covariación entre variables, pues no son capaces de relacionar los cambios de una variable con respecto a otra, y por consiguiente les es muy difícil plantear el problema y desarrollar una estrategia que les permita llegar a la solución.

La pandemia mundial de SARS-CoV 19 trajo consigo grandes cambios en la educación, entre los mas importantes podemos mencionar la modalidad a distancia que todos los niveles educativos tuvieron que adoptar y que provocó un gran rezago educativo por la falta de recursos tanto de los profesores como de los estudiantes. Sin embargo, ambos actores de los procesos de enseñanza y aprendizaje tuvieron que adaptarse a la nueva forma de trabajo, desde el uso de plataformas digitales hasta aplicaciones que les permitieran interactuar entre si. Pero el proceso de adaptación no fue efectivo pues algunos profesores no pudieron acceder a la capacitación o se negaron a ella y se limitaron a enviar por correo electrónico ejercicios sin dar retroalimentación a los estudiantes, quienes no comprendieron los contenidos ni el objetivo de los mismos.

Para el caso de razón de cambio instantánea, se plantearon problemas a tres parejas de estudiantes de primer semestre de ingeniería, y se analizó la forma en que los abordaron así como las acciones mentales (definidas por Carlson et al. 2002) que intervinieron en su desarrollo, dejando evidencia de sus dificultades en la aplicación de la derivada como razón de cambio instantánea.

El análisis de resultados sugiere que la mayoría de los estudiantes tienen un buen manejo algebraico, pero no comprenden la relación funcional entre las cantidades que varían con respecto a otra variable, lo que les impide realizar un desarrollo adecuado a la hora de resolver problemas de razón de cambio instantánea como aplicación de la derivada, aún cuando previamente habían estudiado el tema durante el curso de cálculo diferencial e integral.

# CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

En este capítulo se revisó un poco de la historia de la ingeniería, para determinar la relación entre estas dos disciplinas, también se presenta una descripción general sobre la unidad de aprendizaje de cálculo diferencial e integral de la ESIME, algunos estudios sobre de las dificultades que presentan los estudiantes en el estudio del cálculo en general y particularmente en temas de razones de cambio. Después se menciona cómo se transformaron los procesos de enseñanza y aprendizaje durante la pandemia de SARS-CoV-19. Finalmente se plantea el problema y las preguntas de esta investigación.

## *1.1 Importancia del estudio del cálculo en ingeniería*

En la edad antigua surgieron los primeros indicios de la ingeniería con la invención de la rueda y la palanca, que facilitaron la realización del trabajo, dando los primeros indicios de la mecánica; después con las grandes construcciones como las pirámides egipcias y precolombinas. Así, al ir avanzando las civilizaciones, también lo hizo la ingeniería en todas las áreas en las que se fue desarrollando, como la militar, la metalurgia, la hidrografía, la ingeniería civil y la aeronáutica entre otras.

La ingeniería aeronáutica, se fue desarrollando desde que el ser humano ideó formas de volar, al principio construyendo alas simulando las de los pájaros, sin embargo, éstas no funcionaron de la forma esperada. Muchos fueron los intentos del hombre por volar, y al paso del tiempo se comenzó el estudio científico sobre este tema, dando paso a los fundamentos del aire y de la aerodinámica. Fue a finales del siglo XV d. C., cuando Leonardo da Vinci inició el estudio de la aeronáutica con el vuelo de las aves, desarrollando así los primeros esquemas de artefactos voladores, los cuales no tuvieron éxito; pero sentaron las bases de la aeronáutica. Con la invención de los motores de combustión interna se dio inicio a la creación de dispositivos voladores propulsados por éstos.

Los ingenieros aeronáuticos aplican los principios de la ciencia, aerodinámica, aviónica, y mecánica en la investigación, diseño, construcción y mantenimiento de aeronaves, misiles, radares, vehículos espaciales y satélites. La ingeniería aeronáutica suele especializarse en algún área como: investigación, diseño, construcción o

mantenimiento (Aeronáutica, 2019). Cada una de las cuales aporta mejoras a la experiencia de volar en su ámbito de competencia. Así mismo, cada una de estas áreas de especialidad requiere un alto conocimiento de la matemática involucrada, desde el cálculo hasta la matemática avanzada, debido a que para que un avión pueda mantenerse en el aire se requiere de un cálculo preciso de todas las fuerzas que intervienen en él, tanto internas como externas, así como también para el diseño y su operación.

Según (Instituto Politécnico Nacional, s. f.); *en 1937 se fundó la carrera de Ingeniería Aeronáutica por iniciativa del entonces director de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Manuel Cerillo Valdivia con la intención de atender las demandas de la industria aeronáutica que crecía a pasos agigantados, y para impulsar el desarrollo tecnológico en este ramo. Los planes de estudio originales de la carrera naciente, fueron implementados por ingenieros parisinos de la Escuela Superior de Ingeniería Aeronáutica de París, quienes fueron asesorados por el departamento de Ingeniería Aeronáutica del Instituto Tecnológico de Massachusetts E. U. A. Los primero años a partir de su creación la carrera se impartía en la pequeña escuela ubicada en el Centro Histórico. Posteriormente, al fundarse la Unidad Profesional Zacatenco del IPN (en 1974) se trasladó a un anexo del edificio uno. Finalmente, en 1988 se creo la Unidad Profesional Ticomán donde hasta la fecha se imparte la carrera. En 1983 se da inicio a la revisión y actualización de los planes de estudios, haciendo reuniones de trabajo con egresados y empresas con el fin de definir el ingeniero requerido en el campo laboral; implementando el nuevo plan de estudios en el segundo semestre de 1987. Sin embargo, el avance tecnológico en materia de aviación obligaron a la ESIME Unidad Ticomán a llevar a cabo una reforma curricular que inicia en 1997, con el fin de enfocar la carrera hacia la especialización en las distintas áreas de la aeronáutica como son: Optimización en la Operación de la Aviación Civil, Administración y Planeación del Transporte Aéreo, Diseño y Construcción de Aeronaves, Mantenimiento de Aeronaves, Control Automático, Simulación de Flujos Computacionales, Energética y Diseño Mecánico, entre otras. Reforma que rindió frutos en el segundo semestre del 2004 con su implementación, siendo un nuevo plan de estudios creado y enfocado a las necesidades del medio aeronáutico. Actualmente, la ESIME Unidad Ticomán trabaja en una nueva actualización de los planes de estudios que estén a la vanguardia de las crecientes necesidades de la industria aeronáutica, sin dejar de lado los aspectos que la conforman como una ingeniería.*

Durante todo el proceso de reformas curriculares se ha tenido en cuenta que la matemática es parte fundamental de la ingeniería aeronáutica, por lo que los planes de estudio tienen sus bases en esta importante ciencia exacta desde los primeros semestres de la carrera y posterior a estos, sus aplicaciones a la ingeniería, sin dejar de lado la importancia de la adquisición de habilidades para aquellos ingenieros que continuarán sus estudios en diferentes posgrados del área de ingeniería.

Una de las unidades de aprendizaje base de la formación académica de los estudiantes de todos los programas de ingeniería es: ***Cálculo Diferencial e Integral***. Sin embargo, es uno de los cursos que presenta mayores dificultades para los estudiantes, a pesar de estar enfocado al área de ingeniería. Esto significa que está centrado principalmente en el dominio de métodos aplicados para resolver diversos problemas provenientes de textos de Cálculo tradicionales (Tall, 1997). Sin embargo, no ha sido suficiente para lograr una comprensión adecuada de los conceptos involucrados en la resolución de los problemas.

Observemos un poco más de cerca el contenido de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Diferencial e Integral de la ESIME: La unidad de Aprendizaje está conformada por 9 unidades, cuyo objetivo principal es que: "*El alumno utilizará los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral de manera eficiente en la solución de problemas en los distintos campos de la ingeniería"* (Programa de estudios, IPN ESIME, 2003), para ello se asignan un total de 108 horas, repartidas en 6 horas a la semana.

La primera unidad es "Números Reales", cuyo objetivo es que el alumno emplee las propiedades de los número reales en la resolución de desigualdades y que sea capaz de expresar su solución en términos de intervalos; todo esto en un tiempo máximo de 9 horas. La segunda unidad es: "Funciones Reales de Variable Real", donde se pretende que el alumno maneje el concepto de función real de variable real y sus características principales, como son dominio, rango, gráfica, simetría, intersecciones con los ejes de coordenadas, entre otras. El tiempo máximo designado para alcanzar el objetivo es de 15 horas. La tercera unidad es "Límites y Continuidad", al final de ésta el alumno debe de ser capaz de calcular límites de funciones reales de variable real y establecer la continuidad de una función en un punto y en un intervalo, para ello se cuenta con un

máximo de 9 horas. La unidad 4 es “Derivación”, en donde el objetivo es que el alumno calcule derivadas de funciones reales de variable real; esto en un tiempo máximo de 12 horas. La unidad 5 corresponde a “Aplicaciones de la Derivada”, con la cual se pretende que el alumno aplique la derivada en la solución de problemas de ingeniería, con un máximo de 12 horas. En la unidad 6 “Sucesiones y Series”, el objetivo es que el alumno determinará la conferencia de sucesiones y series, y expresará funciones en series de potencias; en un máximo de 9 horas. Las unidades 7, 8 y 9 corresponden a “Integrales, Técnicas de Integración y Aplicaciones de la Integral” respectivamente, cuyo objetivo es en cada caso: reconocer los conceptos y teoremas fundamentales de la integral definida e indefinida, manipular las principales técnicas de integración en la solución de problemas y resolver problemas relacionados con áreas, volúmenes, centros de masa, trabajo y longitudes de arco; con un máximo de 42 horas, repartidas en 15, 15 y 12 horas respectivamente.

Las unidades 4 y 5 que corresponden a la Derivada se trabajan en el segundo tercio del curso, empezando con la definición e interpretación de la derivada en un punto, después se trabaja la derivación de sumas, productos, cocientes y potencias de funciones, que dan paso a la regla de la cadena y a la derivación implícita. Posteriormente se abordan los teoremas que permiten la introducción de los criterios de la primera y segunda derivadas para la determinación de máximos, mínimos y puntos de inflexión, para después continuar con los problemas de aplicación de razón de cambio y optimización.

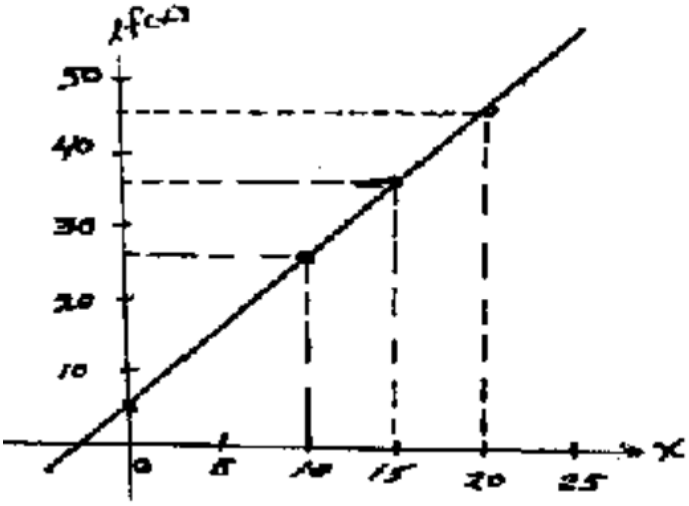
### *1.2 Dificultades de la enseñanza del cálculo.*

La enseñanza del Cálculo trae consigo diversas dificultades tanto para el profesor como para los estudiantes. Los autores de artículos revisados que hablan sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo y sobre la razón de cambio instantánea y covariación son: Benitez et al. 2009, Carlson et al. (2002 y 2010), Doerr et al. (2017), Hitt (2005 y 2017), Roorda et al. (2015 y 2016), Roorda, Tall (1997), entre otros.

Para el estudiante, las principales dificultades son conceptuales, pues conocen las funciones pero les cuesta trabajo definir su dominio, rango y gráfica, y una vez que definen esos elementos no tienen sentido ni significado para la gran mayoría, es decir,

no pueden relacionar las representaciones. Este problema como dice Tall (1997) se destaca por el hecho de que algunos estudiantes parecen hacer conexiones entre representaciones y otros no.

Hitt F. (2005) considera que cuando la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegaran a una comprensión profunda del cálculo. Sobre el concepto de función sugiere que tanto profesores como estudiantes se restringen a la manipulación algebraica relativa al concepto, lo que limita su comprensión; sin embargo, si se conectaran diferentes representaciones de un concepto, se promovería un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización. En una experimentación con profesores de matemáticas, se les solicitó que diseñaran una clase del tema que ellos quisieran, sin utilizar notas o libros (Tabla 1.2.1).

| Propuesta del profesor<br>(transcripción fiel) | Interpretación |
|---|---|
| Que el alumno determine la representación algebraica del siguiente problema: "La edad del padre de Juan es el doble de la edad de esté dentro de cinco años"<br>**y** = edad del padre de Juan: (Variable dependiente).<br>**x** = edad de Juan: (Variable Independiente)<br>Modelo algebraico. y = 2 x + 5<br>logrando que el alumno Indique esto; tan solo una de sus compañeros enuncio dicho problema. con lo que ellos mismos determinaron que la edad del Padre estaba en función de la edad del Hijo.<br>Estableciendo la Representación Algebraica del Problema; podremos asignarle a Juan una Serie de edades de la siguiente forma: Si Juan no ha nacido ¿cual es la edad de su padre?<br>y = f (x)<br>f (x ) = 2 x + 5<br>f(0)=2(0)+5=5 años; | El enunciado tal como se presenta parece más cercano a una interpretación algebraica como: $y = 2\ (x+5)$, diferente de la proporcionada por el profesor. Pero el punto más importante es que en realidad el profesor está planteando una ecuación y no una función. ¿Tendrá claro el profesor la diferencia entre ecuación y función? Por la manera como el profesor presenta su ejemplo, pareciera un ejemplo que efectivamente él desarrolló en el aula. |
| Así que para cuando Juan tiene, 10, 15 y 20 años ¿cual será la edad del Padre? para cuando Juan tiene 10 años, la edad de su padre es de 25 Años.<br>f (1 0 ) = 2 (1 0 ) + 5 = 2 0 + 5 = 2 5<br>- para cuando Juan tiene 15 años la edad de su padre será de 35 años<br>f(15)=2(15)+5=30+5=35<br>- para cuando Juan cumpla 20 años mayor de edad la<br>edad de su padre Será de: 45 años | ¡Si Juan tiene un año, el padre tendrá 6 años! El profesor ha proporcionado un ejemplo irreal carente de lógica. |
| Por medio del ejemplo anterior lo podremos interpretar gráficamente por medio de parejas ordenadas (x, f(x)) donde:<br>**x** = edad de Juan.<br>**f(x)** = edad del Padre.<br>Obteniendo los siguientes puntos y, denotándolos por: F(x) = {(0, 5) (10, 25) (15, 35) (20, 45)}<br>Elaborando una gráfica en el sistema cartesiano. de la forma: | El profesor pasa de caso discreto al continuo sin explicación alguna. |
|  | ¿Qué significado le podemos dar a las edades negativas? |

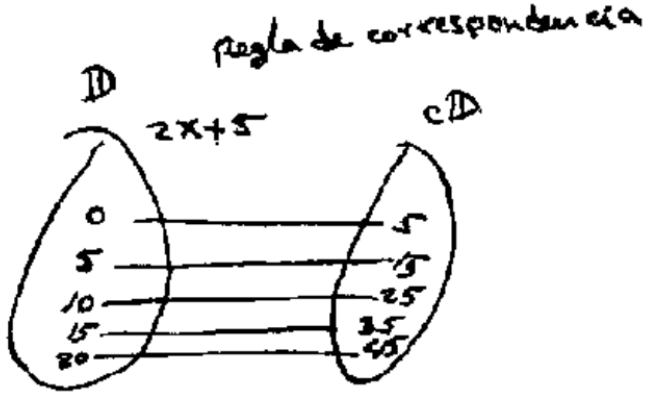
| | |
|---|---|
| Obteniendo el siguiente Diagrama Sagital:<br>  <br> | El profesor regresa a una representación discreta sin mayor explicación. |
| De tal forma que la gráfica obtenida corresponde a una gráfica de una linea Recta a la cual Se le llamara "función lineal"<br>De la misma forma observará que para cada valor de x le corresponde al menos una de f(x), con lo que se le puede inducir que corresponde a una función Inyectiva; los valores del D (Dominio) van de uno menor a uno mayor de tal forma que decimos que la función es Creciente, y como para cada valor que el asignemos a x, existe un valor para f(x), con lo cual la definimos como Continua para ∀ x ∃ f (x),<br>- continua.<br>Podremos dejar que el alumno encuentre y grafique<br>- la analogía de grados Centígrados a grados Farenhai. Graficándola y enunciando una serie de Carateristicas de esté ejemplo.<br>-"Un movil desarrolla una velocidad de cinco veces su distancia recorrida, menos cuatro metros en un tiempo determinado". etcétera. | El profesor se contradice con la definición de función: "...para cada elemento del Dominio le corresponde uno y solo un elemento del Codominio..."<br><br>Menciona que una función es creciente porque "los valores de D (Dominio) van de uno menor a uno mayor". O sea que para él función creciente está determi- nada por los valores del dominio sin tomar en cuenta sus imágenes.<br><br>Su definición de continuidad la considera equivalente a que la función esté definida en cada punto<br><br>Ambigüedad en el enunciado. |

Tabla 1.2.1. Tomado de Hitt F. (2002, págs. 3 y 4)

El profesor parece no percatarse de las contradicciones lógicas en las que él mismo se encontraba tanto desde el punto de vista de la matemática como del sentido común. Lo que señalan con esto es que: *Producto de la enseñanza, se tendrán alumnos que frente a una contradicción, no generarán un conflicto cognitivo (reconocimiento de que algo anda mal) y su desempeño será bajo en la resolución de problemas, Hitt F. (2002, pág. 5).* Esto significa que el manejo es más algebraico, se trabaja con una expresión más algebraica que funcional, las variables que aparecen no recorren un conjunto de valores.

En el estudio de Roorda et al. (2015) aplicó algunas tareas relacionadas con razón de cambio a estudiantes de entre 16 a 18 años de edad, que ofrecieron a los estudiantes

amplias oportunidades para utilizar y relacionar una variedad de procedimientos de razón de cambio. Los estudiantes fueron entrevistados por el primer autor en una pequeña sala de conversación en sus respectivos colegios. Todas las entrevistas se grabaron en vídeo y se transcribieron literalmente después. La tabla 1.2.2 presenta el período de las entrevistas y las tareas utilizadas.

| | *Periodo entre los grados 10 y 12* | *Tareas usadas para la entrevista* |
|---|---|---|
| Entrevista 1 | Hacia el final del grado 10 | Tarea: Barril |
| Entrevista 2 | En el tercer mes del grado 11 | Tarea 1: Barril |
| | | Tarea 2: Pelota |
| Entrevista 3 | Hacia el final del grado 11 | Tarea: Barril |
| Entrevista 4 | En el tercer mes del grado 12 | Tarea 1: Pelota |
| | | Tarea 2: Barril |

*Tabla 1. Entrevistas y tareas utilizadas (Tomado de: Roorda et al. 2013, pág. 874)*

Una tarea fue:

*Barril: Un barril contiene un líquido que sale por un agujero en el fondo. El volumen del líquido en el barril disminuye con el tiempo y se expresa como* $V = 10\left(2 - \frac{1}{60}t\right)^2$. *También se presenta la gráfica* $V - t$. *Los alumnos deben calcular la velocidad de salida en* $t = 40$

Los alumnos utilizaron procedimientos inadecuados. Estos procedimientos se describen en los resultados de cada alumno, por ejemplo:

*El desarrollo de Bob.* Bob es un niño con un gran aprecio por la ciencia y las matemáticas. Su profesor de matemáticas lo describe como un alumno inteligente pero a veces "descuidado" en sus cálculos. La tabla 4 recoge los procedimientos utilizados y las explicaciones dadas por Bob.

Con respecto a la amplitud y conexión del repertorio, en las entrevistas 1 y 2, Bob menciona varios procedimientos, pero no dice cómo están relacionados. En la entrevista 3, relaciona directamente el método de la tangente aprendido en las clases de física con

los procedimientos aprendidos en las clases de matemáticas (diferenciación simbólica y método del intervalo pequeño). La relación entre el método de la tangente y el de la derivada no se indica explícitamente, pero menciona estos procedimientos en una frase con una observación adicional de que las tangentes son menos exactas en comparación con las derivadas. En la entrevista 4, Bob relaciona en ambas tareas palabras como velocidad, pendiente y inclinación y menciona diferentes procedimientos para calcular la tasa de cambio instantánea. Las relaciones entre estas palabras parecen favorecer su comprensión de las relaciones entre los procedimientos. En esta etapa final, la derivada es fundamental en sus explicaciones. Desde una perspectiva orientada al actor, observamos que en las entrevistas 1 y 2 Bob prefiere los procedimientos aprendidos en las clases de física, como el método de la tangente y las fórmulas físicas. La palabra velocidad parece ser fundamental en sus explicaciones. Esta palabra también conduce a un procedimiento inadecuado porque la velocidad le recuerda al "método del área", un procedimiento que se enseña en las clases de física para calcular la distancia recorrida en una gráfica velocidad-tiempo (Roorda et al. 2015, págs. 878 a 881).

El estudio muestra que la mayoría de los alumnos no utilizan los procedimientos tras su introducción inmediata, sino sólo tras la repetición y ampliación de sus conocimientos sobre las derivadas y la cinemática. Esto los llevó a recomendar la enseñanza de las matemáticas como un plan de estudios concéntrico, es decir, un plan de estudios en el que los alumnos trabajen repetidamente con los mismos conceptos y procedimientos, pero en diferentes contextos, a un nivel de dificultad creciente, con nuevas perspectivas y con posibilidades de que los alumnos más débiles se pongan al día.

Por su parte Carlson et. al (2002) estudiaron el aprendizaje de las relaciones funcionales como un proceso dinámico, donde sugieren que los estudiantes deben conocer el concepto de función previo al inicio de la universidad, ya que de esta forma tienen más clara la covariación de los valores de entrada con los valores de salida, al realizar tablas y gráficas que representen una función.

Existen procesos de pensamiento y conductas pseudo-analíticos que son aquellos que tienen lugar sin comprensión; estos procesos no son necesariamente negativos, ya que pueden ser generados por asociaciones espontáneas aunque incontroladas. Cuando se estudia el pensamiento de los estudiantes de cálculo, se observa que tratan de interpretar la naturaleza cambiante de una función en un determinado dominio, se ha observado que esta capacidad se desarrolla lentamente con problemas específicos para interpretar la información gráfica de una función; sin embargo, también se ha observado que los estudiantes fácilmente se confunden cuando una gráfica cambia de sentido y presentan mayores dificultades para interpretarla como un medio para definir la covariación entre variables (Carlson et. al 2002).

Un razonamiento de covariación es necesario para que los estudiantes aprendan los principales conceptos del cálculo; sin embargo, los actuales programas de estudio no promueven dicho razonamiento, lo que genera grandes dificultades para su aprendizaje (Carlson 2002).

Enfocándonos en el estudio de la razón de cambio, encontramos nuevamente que los estudiantes presentan dificultades conceptuales, ya que razonar e interpretar fenómenos que implican razón de cambio les resulta especialmente difícil (Ärlebäck & Doerr, 2017). En su estudio Ärlebäck y Doerr enfatizan la importancia de que los estudiantes de ingeniería sean capaces de interpretar y razonar sobre fenómenos cambiantes con razones de cambio en diversos contextos; también comparten que tanto los modelos y la modelización destacan en los programas de estudio y que hay diferentes enfoques y perspectivas sobre estos, como un medio para aprender matemáticas. Los estudiantes utilizan modelos para dar sentido a problemas concretos, haciendo múltiples conjeturas, interpretaciones, descripciones y explicándolos. En su estudio realizaron un análisis de la interpretación y razonamiento de los estudiantes sobre razones de cambio negativas en tres contextos: el movimiento a lo largo de una trayectoria recta, la intensidad de la luz a una distancia de una fuente puntual y la descarga de un condensador en un circuito simple.

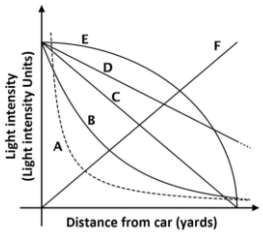
En este mismo estudio Ärlebäck & Doerr definen un modelo como: *un sistema formado por elementos, relaciones, reglas y operaciones que pueden utilizarse para dar*

*sentido, explicar, predecir o describir algún otro sistema. El aprendizaje de contenidos matemáticos se produce mientras los estudiantes desarrollan un modelo matemático útil y generalizado que puede ser utilizado y reutilizado en una serie de contextos estructuralmente similares.* La secuencia de desarrollo del modelo comenzó con una MEA (Model Eliciting Activity, por sus siglas en inglés), para provocar la noción de velocidad negativa utilizando detectores de movimiento para generar gráficos de posición del movimiento corporal de los alumnos a lo largo de una trayectoria recta. Después de la MEA, se realizó una actividad de exploración de modelos utilizando SimCalc MathWorlds, una simulación informática del movimiento a lo largo de una trayectoria recta. El entorno de simulación invertía el espacio de representación de la MEA, donde el movimiento corporal creaba un gráfico de posición. En el entorno de simulación, los alumnos crearon gráficos de velocidad lineal a trozos para generar el movimiento de los personajes simulados. En este entorno, los alumnos exploraron la relación entre los gráficos de velocidad lineal a trozos y sus gráficos de posición asociados.

Los estudiantes tuvieron inicialmente dificultades para razonar sobre la velocidad y los cambios en la velocidad cuando se les dio un gráfico de posición. A través del entorno de simulación del ordenador en la actividad de exploración del modelo, los estudiantes ganaron competencia en el razonamiento y la interpretación de las representaciones gráficas de la velocidad y la posición cuando ambas cantidades eran positivas. Sin embargo, las dificultades de los estudiantes para distinguir cuidadosamente entre posición, velocidad y rapidez resurgieron cuando la razón de cambio de posición (velocidad) era negativa o linealmente decreciente.

La tarea sobre la intensidad de la luz se diseñó para que los alumnos tuvieran la oportunidad de aplicar sus conocimientos sobre la velocidad media de cambio, inicialmente obtenidos en el contexto del movimiento lineal, en un nuevo contexto en el que la variable independiente era la distancia y no el tiempo, y en el que la disminución de la variable dependiente era no lineal (un cuadrado inverso). Las dificultades iniciales de los alumnos para distinguir entre los valores de la función y los valores de las razones de cambio promedio de la función en los subintervalos del dominio, que fueron

superadas en el contexto del movimiento, reaparecieron cuando los alumnos aplicaron sus modelos en desarrollo de la razón de cambio promedio en el nuevo contexto de la intensidad de la luz con respecto a la distancia. Las interpretaciones iniciales de los alumnos sobre la relación entre la intensidad de la luz y la distancia a la fuente de luz se resumen en la Fig. 6. A pesar de que todos los alumnos habían asistido a un curso de física en el instituto, casi todos los alumnos (83%) dibujaron una relación lineal (C, D y F mostradas en la Fig. 1.2.1) entre la intensidad de la luz y la distancia a la fuente. Todos los estudiantes, excepto uno, describieron correctamente cómo se comparaba la intensidad a 1.000 metros con la intensidad a 2.000 metros, basándose en el gráfico que dibujaron.




| Graph | Number of students |
|---|---|
| A | 4 (12%) |
| B | 1 (3%) |
| C | 22 (65%) |
| D | 5 (15%) |
| E | 1 (3%) |
| F | 1 (3%) |

*Fig. 1.2.1 Modelos iniciales de los alumnos sobre la intensidad en función de la distancia a la fuente de luz (Ärlebäck & Doerr 2017, págs. 194-195)*

Como se puede observar en la literatura aparecen investigaciones sobre razón de cambio, en principio están usando razón de cambio promedio, cuando comienzan a ver la derivada, en la mayor parte de los casos no usan la razón de cambio instantánea y mucho menos la usan en problemas de aplicación donde tienen que poner en juego variación entre las diferentes magnitudes, identifican las expresiones funcionales que relacionan esas magnitudes y finalmente aplican las derivadas, como un acercamiento y no como una aplicación de esta.

Lo mencionado en la revisión de la literatura es semejante a lo que sucede con los estudiantes de primer semestre de ingeniería en México. En su gran mayoría han cursado en el nivel previo de su formación académica las unidades de aprendizaje de Cálculo Diferencial e Integral, desde una perspectiva introductoria y un enfoque básico

de procedimientos algorítmicos que les permiten calcular derivadas e integrales de funciones expresadas de manera explícita y en algunos casos implícitas. Esto les proporciona un buen dominio de estos procesos meramente algebraicos. Sin embargo, cuando se enfrentan a problemas contextuales tradicionales, es decir, en los cuales no aparece una función explícita, se presenta su primera dificultad al no saber cómo abordar el problema.

### *1.3 La educación en tiempos de pandemia*

La pandemia mundial a causa del SARS-CoV 19 obligó al cierre de todas las escuelas a nivel mundial, provocando con ello una crisis educativa debido a los inconvenientes que el cierre causó, en este sentido Human Rights Watch (2021) publicó un informe derivado de 470 entrevistas a personas (entre docentes, estudiantes, padres y madres) de 60 países 2en el cual se constató que la falta de medios digitales de un gran número de estudiantes en situación vulnerable no tuvieron acceso a internet ni alguna herramienta tecnológica que les permitiera continuar con las clases en línea, lo que obligó a millones de estudiantes a abandonar sus estudios.

En México, desde que inició la pandemia en marzo de 2020, todas las escuelas de todos los niveles educativos se vieron obligadas a cerrar, dado que las autoridades federales suspendieron de manera indefinida las actividades presenciales para evitar contagios masivos de un virus del cual se desconocía casi todo (SARS-CoV 19). Motivo por el cual se dió la instrucción desde la Secretaría de Educación Pública de que todos los maestros de todos los niveles tendrían que adaptar sus clases a la vía remota, y avanzar en el ciclo escolar de manera virtual. Esto originó un gran descontrol, ya que profesores y estudiantes requerían en primer lugar un artefacto tecnológico que permitiera transmitir y recibir información (ya sea una computadora, una tableta electrónica o un teléfono inteligente) e internet para tal efecto. Los primeros meses de la pandemia fueron de adaptación a esta nueva forma de enseñar, los profesores no estaban preparados para este nuevo reto, sin embargo, cada uno hizo lo que consideró apropiado para cumplir con su labor docente, y en estos primeros meses enviaron incontables tareas y copias de los contenidos en los libros, pero esto no funcionó y pronto se dieron cuenta de que tenían que utilizar nuevas estrategias de enseñanza;

aunque al principio resultó difícil porque la mayoría no estaba familiarizado con las plataformas disponibles (zoom, classroom, teams, WhatsApp, Facebook, meet, etc.) tuvieron que tomar cursos sobre estas plataformas e ir aprendiendo sobre la marcha.

Los estudiantes por su parte esperaban que sus clases en línea fueran similares a las presenciales, sin embargo, no contaban con todas las dificultades que enfrentarían, desde la conexión a internet, el dispositivo que utilizarían y los espacios adaptados para tal efecto hasta los innumerables distractores a su alrededor.

En el caso de los estudiantes de la ESIME, las cosas no fueron diferentes, en principio, los profesores no sabían cómo afrontar las clases a distancia, pues poco sabían de las plataformas digitales, pero su responsabilidad los condujo por el camino de las tecnologías digitales. Algunas de las Unidades de Aprendizaje son susceptibles de impartirse en línea, pues requieren lecturas y videos demostrativos, sin embargo, en el caso de matemáticas, si bien es tema teórico, sus contenidos no son fácilmente adaptables, sobre todo si se considera que las actividades de aprendizaje en su mayoría son dirigidas por el profesor, trabajadas en equipos y con el uso de algún software especializado o algún instrumento tecnológico que provee la escuela.

### *1.4 Planteamiento del problema*

Las dificultades en la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial e Integral son muchas y variadas; pero centraremos la atención en las dificultades que tienen los estudiantes en la resolución de problemas típicos de razón de cambio como problemas de aplicación de la derivada, después de que ya se cubrieron los temas usuales de Cálculo Diferencial y se resolvieron algunos ejercicios relacionados.

A través de la experiencia personal, se han identificado diversos problemas en los estudiantes cuando intentan resolver problemas típicos de razón de cambio, es por esta razón que se propone una investigación sobre estos problemas, identificando los más representativos: ***covariación entre variables y deficiencias conceptuales.***

Es por esta razón que se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo los estudiantes de ingeniería abordan los problemas de razón de cambio como problemas de aplicación de la derivada?

2. ¿Qué acciones mentales ponen en juego al resolver los problemas de razón de cambio?

## *1.5 Objetivo*

Para resolver estas preguntas de investigación, el objetivo que nos estamos planteando es diseñar y seleccionar problemas de razón de cambio instantánea que nos permitan identificar las acciones mentales que ponen en juego los estudiantes al resolver estos problemas como una aplicación de la derivada.

Dada la situación de pandemia, estos problemas se trabajarán en formato a distancia y se diseñará la forma más adecuada para recolectar la información.

# CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se describen algunos resultados de investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes en las clases de cálculo y más específicamente en temas relacionados con razón de cambio. Se describen brevemente las clases presenciales y cómo se tuvieron que adaptar estas en la modalidad a distancia derivado de la pandemia SARS-CoV-19, así como los materiales que normalmente se ocupan en cada caso y las dificultades tanto de los profesores como de los estudiantes al tener que trabajar en línea. Más adelante, se describe cómo se aborda una clase de razón de cambio como aplicación de la derivada dentro de un aula y las situaciones que se observan durante la clase, y lo que cambia durante una clase en línea. Se describen varios estudios que se tomaron como base teórica para la investigación, y en particular el estudio de Carlson et al. (2002) sobre las acciones mentales y los niveles de desarrollo que pueden alcanzar los estudiantes cuando resuelven problemas de razón de cambio.

## *2.1 Clase presencial y clase en línea*

Cuando pensamos en los procesos de enseñanza y aprendizaje inmediatamente evocamos un salón de clases, un profesor y estudiantes, donde el salón de clases es el recinto en donde se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje; el profesor es el facilitador del conocimiento (quien enseña) y los estudiantes son los receptores de ese conocimiento (quienes aprenden). Sin embargo, hay mucho más que decir de estos tres elementos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que a lo largo del tiempo a éstos se han ido integrando cada vez más elementos que propician mejores procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, el aula ya no solamente es un espacio que contiene un pizarrón, escritorio, mesas y sillas para los estudiantes, ahora también contiene proyectores (cañones o pantallas digitales), computadora(s) o algún otro artefacto tecnológico para el profesor y en algunos casos también para los estudiantes, red wifi, etc. El profesor ya no solo tiene a su disposición el libro de texto de apoyo, ahora puede echar mano de las tecnologías digitales para impartir su cátedra y un sin fin de recursos y herramientas que puede utilizar para que su clase sea más dinámica, interesante e interactiva. Y finalmente, los estudiantes ya no solo son receptores pasivos

del conocimiento, ahora participan más activamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, son responsables de su propio ritmo de aprendizaje y tienen a la mano muchos recursos tecnológicos que les ayuda a comprender de los temas impartidos por el profesor. Todos estos elementos "nuevos" que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje sugieren metodologías diferentes que se ajusten a estos cambios.

Ahora bien, si pensamos en la educación a distancia podemos imaginar el aula virtual, un profesor que aclare dudas, contenidos explícitos y actividades de aprendizaje que lo apoyen; en este caso, suponemos que los estudiantes de esta modalidad cuentan con los elementos necesarios para una clase en línea, es decir, una computadora (o tableta electrónica, o smartphone), red wifi y un espacio adecuado para estudiar. Todos estos elementos contribuyen a los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que en esta modalidad en línea o a distancia tanto el profesor como el estudiante tienen ciertos conocimientos de cómo facilitar los procesos, se supone por un lado que el profesor está capacitado para poder llevar a cabo una clase en esta modalidad, se ha preparado previamente para la enseñanza a distancia o en línea, domina la plataforma que utilizará durante el ciclo escolar, ha creado contenidos específicos para su materia que provean al estudiante de las actividades necesarias para lograr un aprendizaje significativo de la materia, ha creado foros de discusión donde interactúan con otros estudiantes de la misma clase y donde aclaran dudas, etc.; y por otro lado el estudiante está comprometido con su propio aprendizaje, estudia los contenidos disponibles para su consulta, realiza las actividades correspondientes a su propio ritmo, participa en los foros que le permiten aclarar sus dudas y compartir con otros estudiantes puntos de vista y percepciones de lo estudiado previamente. Esto nos obliga a preguntarnos si ¿todos los estudiantes pueden aprender en una modalidad en línea? Y si ¿Todos los profesores (de cualquier nivel educativo) pueden llevar a cabo una unidad de aprendizaje en línea? La respuesta a estas preguntas no es nada trivial, porque tanto profesores como estudiantes deben capacitarse para esta modalidad, no es lo mismo una clase presencial que una clase en línea.

Ahora, ¿qué pasa cuando se vive una pandemia mundial y todos los profesores y estudiantes están obligados a continuar el ciclo escolar en modalidad en línea? Acaso, ¿profesores y estudiantes están preparados para este nuevo reto?

Las nuevas condiciones nos presentan una oportunidad para cambiar los procesos de enseñanza y aprendizaje haciendo un uso eficaz de la tecnología, pero para ello es necesario conocer de cerca cómo se utiliza la tecnología en primer lugar dentro de un aula durante una clase presencial y posteriormente en un ambiente virtual, también se describirán las aulas presenciales y las diferencias respecto a un ambiente en línea.

En el caso de los estudiantes, se debe tener en cuenta que las generaciones han cambiado su forma de aprender, pues después de los años 70's y 80's con la aparición de la tecnología en los ambientes escolares; la nuevas microgeneraciones (llamadas así porque han evolucionado cada cuatro años a partir de los 90's), han hecho parte de su vida diaria el uso del internet y de teléfonos inteligentes, como una extensión de sí mismos (Engelbrecht, 2020).

Sin embargo, en un estudio de Aguilar (2020) con estudiantes de los primeros semestres de ingeniería, se encontró que cuando se les encomienda alguna tarea matemática (en la modalidad presencial), la mayoría acude a sitios como YouTube, Google y Facebook donde básicamente buscan clarificar dudas, repasar temas vistos en clase o encontrar maneras alternativas de resolver problemas, así como verificar resultados y buscar soluciones a tareas paso a paso, sitios en los cuales los estudiantes basan su confianza en la autoridad proveída por el grado académico o el estatus del autor(a), o el prestigio de la institución que produce la fuente, o incluso en las reacciones y comentarios de los visitantes en dichas plataformas, aunque no siempre la fuente sea la más confiable. En este punto es importante mencionar que si la actividad no es lo suficientemente clara para el estudiante, es muy probable que divaguen en su búsqueda, o que incluso no sepan a ciencia cierta que es lo que deben buscar, por lo que en muchos casos limitan la búsqueda de información a palabras "clave" o alguna búsqueda errónea del tema en cuestión.

En el ambiente virtual, el uso de la tecnología por parte de los estudiantes no ha cambiado mucho, salvo por el hecho de que para tomar clase requieren forzosamente de

> *El papel del profesor ha sido reconocido como un factor tanto crítico como problemático en este proceso integrador (Artigue, Drijvers, Lagrange, Mariotti & Ruthven, 2009; Doerr & Zangor, 2000; Lagrange & Ozdemir Erdogan, 2009; Monaghan, 2004; Ruthven & Hennessy, 2002). Crítico en el sentido de que la forma en que los profesores abordan el uso de la tecnología tiene importantes consecuencias en los efectos de su uso en el aula (Kendal & Stacey, 2002). Es problemático, ya que los profesores que no perciben el uso de la tecnología en su enseñanza como algo valioso para sus objetivos educativos pueden evitarlo, a menos que se les exija explícitamente por limitaciones institucionales o curriculares. Además, los profesores suelen tener dificultades para adaptar sus técnicas*

la tecnología, pero más allá de eso, siguen en la búsqueda de información a través de páginas como Google, YouTube y Facebook, aunque en esta modalidad algunas veces también repiten la clase (cuando el profesor sube sus clases grabadas).

En el caso de los profesores, se puede mencionar que durante las clases presenciales han usado la tecnología como apoyo para organizar su práctica docente con la producción de hojas de trabajo, como control de asistencia y en algunos casos como apoyo para representar las matemáticas; aunque en la actualidad también la emplean para conectarse, organizar comunidades de conocimiento y para compartir materiales (Clark-Wilson, 2020). Citando a Paul Drijvers (2010, pp. 213-214), respecto al rol del profesor en el aula de clases:

Es por ello que es importante la capacitación del profesor en el uso efectivo de las herramientas tecnológicas dentro del aula.

El aula de matemáticas debe estar provista de aquellas herramientas y materiales que faciliten los procesos de enseñanza y aprendizaje, estos pueden ser desde una calculadora científica o una computadora personal con algún software especializado (Mathlab, Geogebra, Maple, etc.), hasta un proyector o algún pizarrón digital que permita plantear y resolver situaciones interesantes incentivando la creatividad de los estudiantes para resolver problemas (Flores et al., 2011). El profesor debe estar bien capacitado en el uso de las herramientas disponibles para lograr un proceso de enseñanza capaz de promover el aprendizaje de los estudiantes como consecuencia de

su acción. Mientras, en un ambiente virtual si bien es indispensable un artefacto tecnológico con internet, el área de estudio no siempre es la adecuada, ya que existen alrededor del estudiante muchos distractores que dificultan su proceso de aprendizaje; además, cada estudiante tiene sus propios hábitos particulares e interpretaciones de las instrucciones que hacen su aprendizaje único y diferente, es por ello que las tareas propuestas por el profesor en un ambiente en línea están menos reguladas que cuando éste está presente (Flores et al., 2011).

### *2.2 Contenido de razón de cambio en el curso de cálculo*

Una clase de razón de cambio en primera instancia inicia con la idea intuitiva del cambio de una variable con respecto a otra, haciendo referencia a la velocidad como la razón de cambio más comúnmente utilizada y conocida.

Después se hace la clasificación según su tipo (promedio e instantánea).

- **Promedio**. La pendiente de la recta secante que conecta dos puntos en la gráfica de una función representa la razón de cambio promedio en el intervalo $(x_1, x_2)$. Esta razón se puede determinar con el cociente de diferencias $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

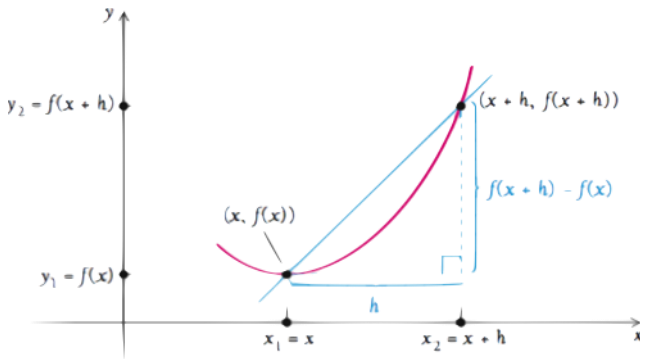



*Figura 1. Razón de Cambio Promedio*

- **Instantánea**. La razón de cambio instantánea de $f(x)$ es aquella función cuyo valor en cualquier punto $x_0$ de un intervalo está dado por: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si este límite existe. Geométricamente, la razón de cambio instantánea representa la pendiente de la recta tangente en $(x, f(x))$.

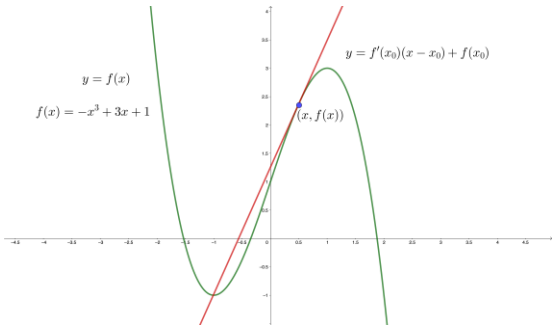


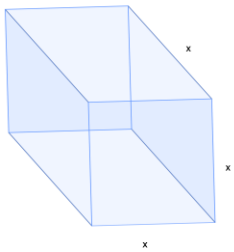

*Figura 2. Razón de cambio instantánea*

Se presenta un problema que muestre una aplicación real de la razón promedio, mostrando un gráfico que permita observar la variación de la distancia respecto a la velocidad, lo que permite que el alumno relacione este cambio con la idea intuitiva presentada al inicio del tema, para posteriormente guiar su pensamiento de estas relaciones a través de tablas y preguntas que tienen que responder para poder dar solución al problema planteado. Una vez que el alumno resuelve correctamente el problema de razón de cambio promedio, se presenta un problema de razón de cambio instantánea, donde después de leer detenidamente el problema se lanzan preguntas sobre cómo se puede resolver con una lluvia de ideas encaminadas o dirigidas por el profesor para que éstas sean coherentes tanto con el problema como con su solución, una vez que los alumnos han planteado las ideas del problema, se pide que realicen una tabla del cambio de una variable con diferentes valores de otra y que grafiquen los valores encontrados; después se les pide que expliquen su gráfica, haciendo énfasis en la covariación de las variables. Una vez identificada la covariación el alumno puede hacer los cálculos necesarios para obtener la solución del problema. Por último, se hacen preguntas sobre la solución obtenida con el fin de observar la claridad del problema y el tema.

Durante una clase presencial un problema típico sería:

1. *El volumen de un cubo está cambiando a razón de* $75\frac{cm^3}{min}$*. Hallar la razón de cambio de su lado cuando mide* $5cm$*.*

Para resolverlo, primero se hace un dibujo que ilustre el problema y se ponen literales




Después se escribe la fórmula que se conoce pero que no aparece explícitamente en el texto, esto es:

Volumen del cubo:

$V = x^3$

Ahora, se sabe que la razón de cambio es una derivada, entonces de acuerdo al problema el volumen cambia a razón de $75\frac{cm^3}{min}$, esto es:

$$\frac{dV}{dt} = 75\frac{cm^3}{min}$$

Y se pide la razón de cambio de su lado cuando este mide $5cm$, o sea:

$\frac{dx}{dt}$ =? cuando $x = 5cm$

Se debe derivar la fórmula del volumen con respecto al tiempo, y para poder hacerlo se deriva aplicando la regla de la cadena, esto es:

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

De donde se despeja $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{3x^2}$$

Pero se sabe que $\frac{dV}{dt} = 75\frac{cm^3}{min}$ y $x = 5cm$, por lo que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{75\frac{cm^3}{min}}{3(5cm)^2} = \frac{75\frac{cm^3}{min}}{75cm^2} = 1\frac{cm}{min}$$

De donde la razón de cambio del lado del cubo cuando éste mide $5cm$ es de $1\frac{cm}{min}$

Durante una clase presencial, una vez que el problema se planteó se hace una lluvia de ideas para iniciar la solución, se realizan preguntas orientadas para que los estudiantes propongan soluciones viables, en caso contrario, se cambia la estrategia, se utiliza la computadora con algún programa que permita a los estudiantes explorar sus posibilidades y apoyar sus conjeturas.

Se sugiere la elaboración de un dibujo que represente el problema y nombrar cada una de sus partes, para tener un punto de partida a la hora de proponer una función o expresión algebraica que ayude a la solución. Una vez planteada la función, se pregunta a los estudiantes por toda la información que proporciona el problema y de qué manera se puede introducir o utilizar en la solución. Después se hacen las operaciones necesarias para continuar con la solución del problema. Finalmente, se sustituyen los datos y se llega a la solución deseada. En este punto, se pregunta a los estudiantes el

significado del resultado y que representa en el contexto del problema. Se hace una reflexión final con la intención de que ellos estén conscientes de que el uso del cálculo les permite plantear soluciones más simples a problemas cuya solución no es inmediata.

Durante todo el proceso se puede observar a los estudiantes, y el profesor se da cuenta si están entendiendo o no haciendo preguntas sobre el problema y analizando cada respuesta inmediatamente. El lenguaje corporal y gestual de los estudiantes también es importante, porque demuestra si se está alcanzando el objetivo de aprendizaje, aclarando dudas durante la sesión y poniendo de manifiesto el aprendizaje logrado.

En una clase en línea el problema se vuelve diferente, esto debido a que no se puede observar a los estudiantes en directo, ni sus gestos, ni su lenguaje corporal, lo que sin duda complica saber si se está siendo claro o no, por lo que se debe ser muy explícito tanto en las instrucciones como en el procedimiento, de tal forma que no queden dudas en el momento de leerlos, logrando así una comprensión total tanto del problema como de su solución. Es muy importante el diseño de la clase, ya que de esta depende el que sea una clase exitosa o no y también depende de esto el interés que se puede generar en el estudiante, así como su motivación para realizar las actividades incluidas que permitan mejorar su proceso de aprendizaje.

### *2.3 Covariación y Cálculo*

En el estudio de Carlson et al. (2010) se menciona que en Estados Unidos cada vez son menos los estudiantes que se inclinan por alguna de las carreras STEM y algunas investigaciones sugieren que la decisión de abandonar una especialidad STEM surge de varios factores entre los que destacan las dificultades conceptuales, las malas enseñanzas de los profesores, el ritmo de los cursos así como la carga de trabajo, la pobreza de conocimientos previos, los problemas económicos y las barreras del lenguaje. También influye en la alta deserción lo que se enseña en los cursos de matemáticas, ya que al parecer los contenidos son poco claros e inconsistentes (Arismendi-Pardi, 1996; Schmidt, Houang, & Cogan, 2002). En este mismo estudio se

desarrolla la “Evaluación de Conceptos de Precálculo” (PCA por sus siglas en inglés) la cual proporciona a los desarrolladores de planes de estudio y a los educadores mayor claridad sobre los fundamentos conceptuales necesarios para el aprendizaje del cálculo.

Carlson et al. (2002) descomponen el razonamiento covariacional en cinco acciones mentales distintas, las cuales *describen las habilidades de razonamiento involucradas en la representación e interpretación significativa de las situaciones funcionales dinámicas.*

En la acción mental 1 (MA1, por sus siglas en inglés) los estudiantes son capaces de reconocer el cambio conjunto de dos cantidades en una relación de dependencia.

La acción mental 2 (MA2) es aquella donde el estudiante asocia la dirección de cambio de una cantidad, respecto al cambio en la otra.

Acción mental 3 (MA3), la capacidad de razonamiento covariacional avanza, en esta acción mental el alumno es capaz de coordinar la cantidad de cambio de una cantidad mientras imagina cambios en la otra cantidad.

Acción mental 4 (MA4), el alumno entiende la razón de cambio de una cantidad con respecto a la otra, al mismo tiempo que observa el cambio en una cantidad.

La acción mental 5 (MA5) consiste en asociar el cambio de una cantidad con los cambios continuos en una segunda cantidad.

| *Acción mental* | *Descripción de la acción mental* | *Comportamientos (Representación gráfica)* |
|---|---|---|
| Acción mental 1 (MA1) | Coordinar la dependencia de una variable con otra | ○ Etiquetar los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (por ejemplo, $y$ cambia con los cambios en $x$) |
| Acción mental 2 (MA2) | Asociar la dirección de cambio de una variable con los cambios en la otra | ○ Construir una línea recta monótona<br>○ Verbalizar una conciencia de la dirección del cambio de la salida mientras se consideran los cambios en la entrada |

| | | |
|---|---|---|
| Acción mental 3 (MA3) | Asociar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra | ○ Trazar puntos/construir líneas secantes<br>○ Verbalizar una conciencia de la cantidad de cambio de la salida mientras se consideran los cambios en la entrada |
| Acción mental 4 (MA4) | Calcular la tasa de cambio media de la función con incrementos constantes de la variable de entrada | ○ Construir rectas secantes para intervalos contiguos en el dominio<br>○ Verbalizar la conciencia de la razón de cambio de la salida (con respecto a la entrada) mientras se consideran incrementos uniformes de la entrada |
| Acción mental 5 (MA5) | Calcular la razón de cambio instantánea de la función con cambios constantes en la variable independiente para todo el dominio de la función | ○ Construir una curva suave con indicaciones claras de cambios de concavidad<br>○ Verbalizar un conocimiento de los cambios de la razón de cambio instantánea para todo el dominio de la función (la dirección de las concavidades y los puntos de inflexión son correctos) |

*Tabla 2.3.1. Acciones mentales del marco de covariación (Tomado de Carlson et al., 2002, pág. 357.)*

En este mismo estudio, Carlson et. Al (2002) definen cinco niveles de desarrollo distintos:

Nivel 1 L1. Coordinación. En este nivel, las ideas de covariación apoyan la acción mental de coordinar el cambio de una variable respecto a otra.

Nivel 2 L2. Dirección. Las ideas de covariación ayudan a las acciones mentales de asociar la dirección de cambio de una variable respecto a los cambios en la otra; las acciones mentales involucradas son MA1 y MA2.

Nivel 3 L3. Coordinación cuantitativa. En este nivel, las ideas de covariación pueden ayudar con las acciones mentales de asociación del cambio de una variable con

los cambios de la otra. Las acciones mentales que en este nivel intervienen son MA1, MA2 y MA3.

Nivel 4 L4. Razón media. Aquí las ideas de covariación apoyan acciones mentales de calcular la razón de cambio promedio de la función con los cambios constantes en la variable de entrada. Se puede descomponer la razón promedio para comparar la cantidad de cambio de la variable de salida con los cambios de la variable de entrada. Las acciones mentales que podemos identificar en este nivel son de MA1 a MA4.

Nivel 5 L5. Razón instantánea. En este nivel, las ideas de covariación apoyan las acciones mentales de cálculo de razón de cambio instantánea de la función con los cambios constantes en la variable de entrada. Este nivel incluye la certeza de que la razón instantánea es el resultado de incrementos cada vez más pequeños de la razón media. También se incluye la idea de que el punto de inflexión es donde la razón de cambio cambia de creciente a decreciente o viceversa. Las acciones mentales MA1 a MA5 son las involucradas.

# CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

El *estudio de casos,* según Croswell (2003) es una estrategia de investigación donde el investigador explora en profundidad, un evento, una actividad, un proceso a una o más personas. Yin (s.f.) hace una clasificación donde considera que es *exploratorio*, sirviendo de piloto para otros estudios o preguntas de investigación que se pueden usar para generar hipótesis; también es *descriptivo*, ya que proporciona relatos narrativos en que se realiza una descripción amplia y profunda del caso, sin el propósito de partir de una hipótesis o teoría, ni generalizar las observaciones; además de *explicativo*, ya que su objetivo es probar teorías. Stake (1998) por su parte considera que es *intrínseco e instrumental*, ya que se interesa por el caso en sí mismo y no porque a partir de su estudio se aprenda sobre otros casos, sino porque se requiere aprender sobre ese caso particular; y porque toma el estudio de caso como un instrumento.

Los estudios de caso optan por una generalización analítica más que estadística, es decir, permite desarrollar una teoría que pueda ayudar a quien investiga a comprender casos, fenómenos o situaciones similares. Captan la realidad cercana y las experiencias vividas por los participantes, sus pensamientos y sentimientos sobre una situación. Observando el caso en su contexto de la vida real. Se combina una descripción detallada de los eventos que involucran al caso con el análisis del mismo.

Se implementó el estudio de casos, por ser un procedimiento que permite observar y analizar el comportamiento de los estudiantes ante los problemas típicos de razón de cambio para evidenciar las dificultades presentadas en actividades en línea.

La estrategia de trabajo que se siguió fue la siguiente:

- Los estudiantes. A un grupo de 30 estudiantes de primer semestre de ingeniería se le solicitó 6 voluntarios, cabe mencionar que se encontraban en clases a distancia de cálculo diferencial e integral, y el tema de razón de cambio ya había sido visto y evaluado en su curso. Los estudiantes voluntarios escogieron con quien hacer pareja, quedando de la siguiente manera:

- Los problemas. Se escogieron 6 problemas de razón de cambio, los cuales se seleccionaron de forma que tuvieran que aplicar diversas relaciones, por ejemplo: volumen, ley de los gases, semejanza, funciones trigonométricas y teorema de Pitágoras. Después se descartó el problema 1 ya que tenía una errata en los datos que invalidó el sentido geométrico del problema y confundió a los estudiantes. El problema 2 también se descartó por considerarse poco relevante. Finalmente se trabajó con los problemas que los estudiantes alcanzaron a resolver en el tiempo asignado en la primera sesión, la segunda sesión fue sin límite de tiempo pero solo se les solicitó resolver un problema.

- Las sesiones de trabajo. Se trabajaron 2 sesiones en línea en la plataforma zoom, de 2 horas aproximadamente cada una, por pareja en diferentes días, en la primer sesión el profesor estuvo presente, les explicó cómo tenían que trabajar los problemas dándoles la libertad de usar todo el material que requirieran sin restricciones (este podía incluir calculadora, dispositivos electrónicos, internet, libros, apuntes, cuadernos, etc.) y después solo fue observador, respondió únicamente preguntas específicas sobre los problemas, no proporcionó ningún tipo de ayuda extra. En la segunda sesión se pidió a los estudiantes que resolvieran solo un problema, en esta sesión trabajaron solos, es decir sin la presencia del profesor, tenían que grabar la clase en la plataforma de su elección y posteriormente enviarla al profesor para su análisis.

Gonzalo y Omar, trabajaron 3 sesiones, ya que en la primera sesión solo lograron resolver el problema 3, en la segunda sesión resolvieron los problemas 4 y 5; y en la tercer sesión (que trabajaron solos) se les pidió resolver el problema 6.

La pareja de Dafne & Axel en la primer sesión trabajaron los problemas 3 y 4 (por el tiempo que les llevó llegar a la solución), en la segunda sesión se les pidió resolver el problema 5.

Emilio y Eduardo en la primer sesión resolvieron los problema 3, 4 y 5, y en la segunda sesión se les pidió resolver el problema 6.

- Análisis de datos. Se analizaron los videos de cada pareja en cada sesión; cada problema se examino interpretando lo que compartieron en función de sus capacidades de razonamiento y comprensión alcanzadas en cada problema (Carlson, 2010), poniendo de manifiesto la acción mental alcanzada en cada caso. Se describió brevemente lo que cada estudiante hizo de forma individual y en conjunto, para después realizar una tabla que sustenta lo observado y descrito por el investigador.

Los problemas presentados a los estudiantes fueron:

3. Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1 metro, la superficie sube a razón de 1 centímetro por minuto. ¿A qué rapidez le esta entrando agua al recipiente?

*Este problema requiere que los estudiantes establezcan la relación funcional entre el volumen y la altura, cuando ambas magnitudes cambian con el tiempo.*

*Solución.*

Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de 1 metro y aumenta a razón de $1\frac{cm}{min}$. Esto significa que se debe calcular $\frac{dV}{dt}$.

Para ello es necesario conocer que el volumen del cono está dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Como se puede apreciar, la fórmula contiene dos variables por lo que se debe poner en función de una sola, y en este caso es $h$, dado que los datos del problema son de ésta.

Para poner $r$ en función de $h$ se considera que cuando la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro, y por semejanza de triángulos se cumple que:

$\frac{r}{h} = \frac{R}{4R}$ por lo que despejando $r$ se tiene:

$$r = \frac{h}{4}$$

Sustituyendo esta $r$ en $V$ se tiene:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3$$

Derivamos implícitamente $V$ con respecto a $t$ y se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16}h^2\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

Sustituyendo los datos se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16}(100)^2(1) = 625\pi\frac{cm^3}{min}$$

Lo que equivale a:

$$\frac{dV}{dt} \approx 1.963\frac{l}{min}$$

4. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta $T$ (en grados Kelvin) y la presión $P$ (en atmósferas) con un volumen $V$ (en litros), es $PV = nRT$; donde $n$ es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8atm$ y que aumenta a razón de $0.10\frac{atm}{min}$, además $V = 10l$ y disminuye a razón de $0.15\frac{l}{min}$. Determinar la razón de cambio de $T$ con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10mol$.

*En este problema, aparecen diferentes magnitudes que están interrelacionadas y lo que se busca es que el estudiante identifique que variables se mantienen constantes y cuales no al establecer su relación funcional.*

*Solución*

Se pide determinar la razón de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo $t$. Dado que se conoce que $PV = nRT$ y además $R = 0.0821$, $P = 8atm$ y $n = 10mol$, entonces la fórmula se transforma en:

$PV = 10(0.0821)T = 0.821T$

Este problema proporciona una relación que lo describe, sin embargo, algunas magnitudes son constantes, lo que provoca en los estudiantes confusión al no identificar aquellas que varían y como varían.

Donde $P, V$ y $T$ están en función del tiempo.

Derivando implícitamente se tiene:

$$P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt} = 0.821\frac{dT}{dt}$$

De donde se despeja $\frac{dT}{dt}$ quedando:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P\frac{dV}{dt} + V\frac{dP}{dt}}{0.8221}$$

Sustituyendo los datos $P = 8atm, \frac{dP}{dt} = 0.10\frac{atm}{min}, V = 10l$ y $\frac{dV}{dt} = -0.15\frac{l}{min}$ (el signo "-" es porque disminuye) queda:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{8(-0.15) + 10(0.10)}{0.8221} = -\frac{0.2}{0.821} \approx -0.24\frac{°K}{min}$$

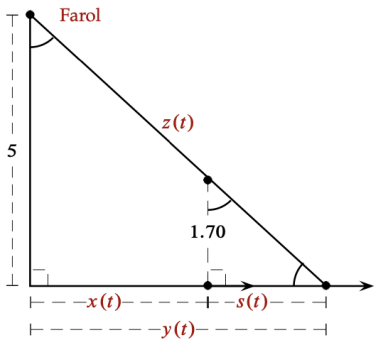
5. Un poste de 5 metros de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 metros de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de $1.2\frac{m}{s}$. Cuando la

distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada de la sombra del hombre es de 6 metros, ¿Con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?

*Nuevamente hay diferentes magnitudes que dependen del tiempo y se busca que identifiquen las relaciones funcionales y geométricas, partiendo de una representación geométrica del problema.*

*Solución.*

El diagrama del problema se puede representar como:




Se pide calcular la velocidad a la que crece la sombra proyectada por el hombre, a medida que éste se aleja del poste, es decir $\frac{ds}{dt}$, sabiendo que $\frac{dx}{dt} = 1.2m$ y que $x(t) + s(t) = 6m$ donde $x(t)$ es la distancia de los pies del hombre hasta la base del poste y $s(t)$ es la longitud de su sombra.

Nuevamente, se presentan dificultades en los estudiantes porque no identifican las relaciones de covariación entre variables, también les provoca confusión y dificultad la relación de semejanza que aparece con la representación esquemática del problema, ya que al observar un triángulo rectángulo, inmediatamente lo relacionan con el Teorema de Pitágoras.

En la figura se aprecian dos triángulos semejantes (uno dentro del otro) con un vértice común ubicado en la punta más alejada de la sombra. El triángulo grande con vértices

en la base del poste y en el farol; el triángulo pequeño con vértices en los pies y en la cabeza del hombre. El triángulo grande tiene un cateto de longitud $5m$ y el otro de longitud $y(t) = x(t) + s(t)$; el triángulo pequeño tiene un cateto de longitud $1.70m$ y el otro de longitud $s(t)$.

Por la semejanza de los triángulos rectángulos se tiene que:

$$\frac{s(t)}{1.70} = \frac{y(t)}{5}$$

De donde

$$5s(t) = 1.7y(t)$$

$$\begin{aligned} 5s(t) &= 1.7y(t) \\ 5s(t) &= 1.7[x(t) + s(t)] \\ 5s(t) - 1.7s(t) &= 1.7x(t) \\ 3.3s(t) &= 1.7x(t) \\ s(t) &= 0.\overline{51}x(t) \end{aligned}$$

Derivando con respecto a $t$ se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Sustituyendo $\frac{dx}{dt} = 1.2m$, se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}(1.2) = 0.6\overline{18}\frac{m}{s}$$

Esto significa que en cualquier instante, la sombra crece a razón constante de $0.618\frac{m}{s}$, sin importar la distancia a la que se encuentre el hombre del poste.

La segunda pregunta pide calcular la velocidad a la que está creciendo la distancia que hay entre la luz y la punta de la sombra, es decir $\frac{dz}{dt}$. Esto se puede conocer a partir del teorema de Pitágoras

$$z(t) = y(t)^2 + 5^2$$
$$z(t) = \sqrt{y(t)^2 + 25}$$

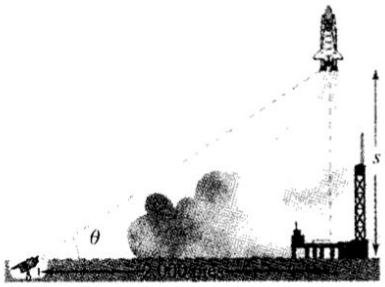
Derivando respecto a $t$ se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2 + 25}}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2 + 25}}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dt}\right)$$

Sustituyendo los valores $y = 6m, \frac{dx}{dt} = 1.2\frac{m}{s}$ y $\frac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}\frac{m}{s}$ se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 25}}\left(1.2 + 0.6\overline{18}\right)$$
$$= \frac{6\left(1.\overline{18}\right)}{\sqrt{61}}$$
$$\approx 1.3968$$
$$\frac{dz}{dt} \approx 1.4\frac{m}{s}$$

6. Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos. La cámara dista $2000 pies$ del punto de lanzamiento. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación $\theta$ de la cámara de



2000

la figura 10 segundos después del despegue.

*Aquí se busca determinar las magnitudes que modelan el problema y las relaciones funcionales entre ellas.*

*Solución.*

El problema pide calcular el ritmo de cambio de $\theta$ con respecto al tiempo. Esto es $\frac{d\theta}{dt}$.

La velocidad del cohete está dada por: $\frac{ds}{dt} = 100t$

De la figura se deduce que la función requerida para resolver el problema es:

$$tan(\theta) = \frac{s}{2000}$$

Derivando implícitamente con respecto a $t$ la expresión anterior, se tiene:

$$sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

Despejando $\frac{d\theta}{dt}$ y sustituyendo los valores $t = 10s$, y si la altura del cohete en ese instante esta dada por: $s = 50t^2 = 50(10)^2 = 5000pies$ se tiene:

$$\frac{d\theta}{dt} = cos^2(\theta)\frac{100t}{2000}$$
$$= \left(\frac{2000}{\sqrt{s^2 + 2000}}\right)^2 \frac{100t}{2000}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2000(100)(10)}{5000^2 + 2000^2}$$
$$= \frac{2}{29}\frac{rad}{s}$$

Cuando $t = 10s, \theta$ está cambiando a razón de $\frac{2}{29}\frac{rad}{s}$.

# CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Aquí se describen los resultados de los problemas 3, 4 y 5; el problema 1 no se contempló ya que tuvo una errata en los datos que invalidaba el sentido geométrico del problema. El problema 2 tampoco se consideró ya que no resultó significativo para el estudio.

Se trabajó en dos sesiones virtuales de aproximadamente una hora y media cada una, las cuales se grabaron. En la primera sesión se trabajaron los problemas 1, 3 y 4 (el problema 1 se descartó cuando se estaba haciendo el análisis de los videos) y el profesor estuvo presente durante la sesión, interviniendo sólo cuando los estudiantes tenían alguna duda específica, cabe mencionar que en esta primera sesión solo se les presentó el texto del problema, conforme iban avanzando en su proceso de solución y si el profesor lo creía necesario les presentó el dibujo del problema para facilitar la comprensión del mismo.

En la segunda sesión el profesor no estuvo presente, la sesión también fue virtual y trabajaron por parejas independientes. En esta segunda sesión resolvieron el problema 5, intercambiaron mas ideas entre ellos y en esta ocasión no se les presentó ningún dibujo, ellos tuvieron que interpretar el problema solos y las tres parejas tardaron casi dos horas en terminarlo.

## *4.1 Análisis del caso Dafne y Axel*

### Problema 3.

Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1 metro, la superficie sube a razón de 1 centímetro por minuto. ¿Qué tan rápido cambia el volumen del recipiente?

*Axel y Dafne:*

Dafne lee el problema y Axel trata de definir los datos; buscan adecuar esos datos y se apoyan en un dibujo, escriben la fórmula del volumen del cono y tratan de entender el problema respecto al dibujo (Figura 4.1.1).

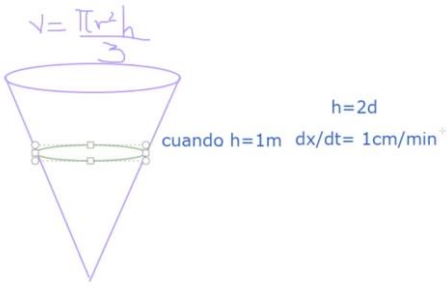



*Figura 4.1.1. Dibujo de la situación y los datos.*

Intentan comprender lo que pide el problema. Hacen lluvia de ideas para plantear la solución, Axel trata de explicar cómo utilizaría semejanza de triángulos para determinar la solución (figura 4.1.2), intentado relacionar el problema con uno similar que había resuelto en su examen de ingreso a la licenciatura, sin embargo, no logra concretar la idea.

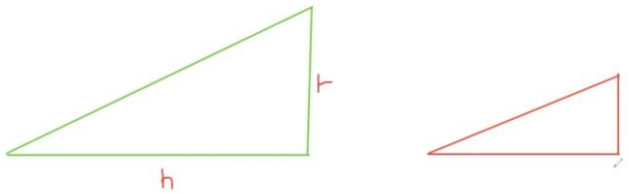



*Figura 4.1.2. Intento de Axel usando semejanza de triángulos.*

Dafne sabe que el volumen debe estar en función de la altura, y hace la relación correspondiente (figura 4.1.3).

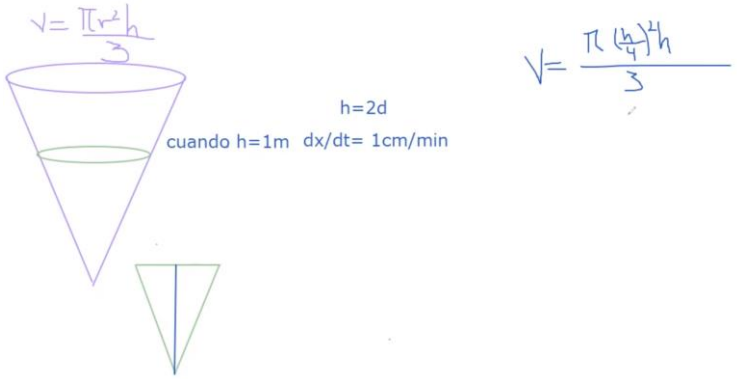



*Figura 4.1.3. Dafne escribe la fórmula del volumen del cono como función de la altura h.*

Axel sabe que los cambios (tanto de volumen como de altura) son con respecto al tiempo (figura 4.1.4) y le explica a Dafne cómo se deben relacionar.

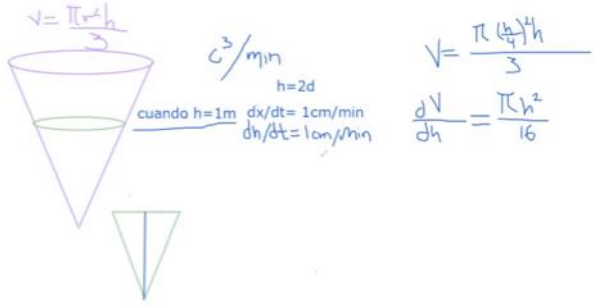



*Figura 4.1.4. Axel señala que la altura varía con respecto al tiempo*

Dafne comprende la relación y cambia la derivada del volumen ahora con respecto al tiempo (figura 4.1.5), lo que los lleva a la solución del problema. Sin embargo, tienen dudas sobre las unidades, pues Axel insiste en que al tratarse de volumen las unidades tendrían que ser en litros por minuto, Dafne le dice que pueden ser centímetros cúbicos, que en sus clases de física así se los mencionaron, entonces preguntan al profesor en que unidades deben presentar el resultado y finalmente expresan su resultado en centímetros cúbicos por minuto y en litros por minuto.

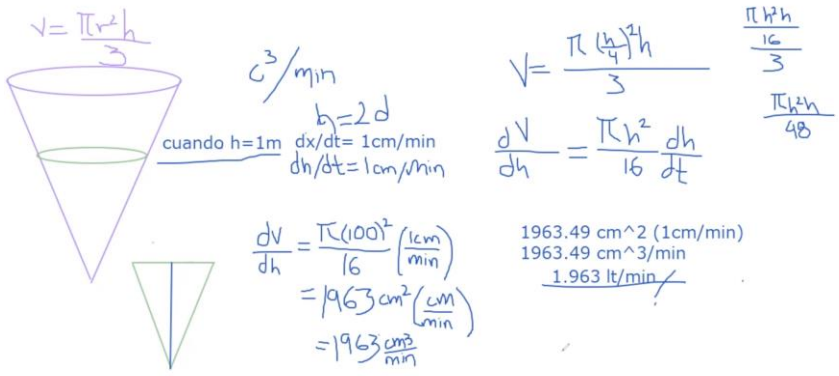
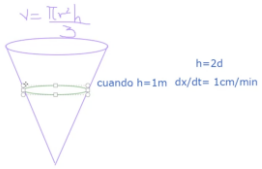
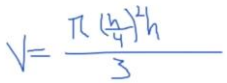
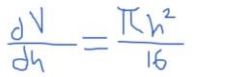



*Figura 4.1.5. Dafne comprende la variación del volumen y la altura respecto al tiempo y encuentra la solución del problema.*

La tabla 4.1.1 muestra los diálogos entre Dafne y Axel, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Tenemos la altura que es como… has de cuenta, este es nuestro metro no?, y después aquí justo aquí la razón de cambio es esta de un centímetro por minuto, entonces la cosa sería […] o sea tenemos la velocidad, sería sacar el volumen que lleva por decirlo, o sea, el volumen que le entra cada minuto y después con el volumen pues ya podemos decir "ah esto es lo que le entra cada minuto"…* | *Lluvia de ideas*   | *Acción mental 1. Dafne determina la dependencia de la altura respecto al diámetro.* |
| | ⋮ ⋮ ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Si no mal recuerdo, así como le hice en el examen de la superior, tenemos que tener dos triángulos, uno grande y uno chiquito, y eso se tiene que convertir a una división para… para ¿cómo se llama? igualarlos, o sea, de un lado es igual a tal lado sobre el otro lado es igual al otro lado.* | *Trata de explicar como utilizar la semejanza para resolver el problema, sin embargo, no logra concretar su idea.* | *Acción mental 3. Se dan cuenta de que hay una covariación entre el radio y la altura, pero no la cuantifican.* |
| *Dafne:* | *…V es igual a pi por altura sobre cuatro que viene siendo radio al cuadrado por altura sobre tres no?…* | *El volumen debe estar en función de la altura.*  | *Acción mental 5. Dafne determina la razón de cambio instantánea del volumen con respecto a la altura* |
| *Dafne:* | *…Para plantearlo todo en términos de altura, entonces es radio al cuadrado, pero altura es igual a dos diámetro y diámetro es dos radio […] Entonces, la derivada del volumen sobre la altura queda así […] Entonces, se veía importante, pero la verdad ya no se que hacer con esto […] no se, tengo una idea no?… aquí podemos sacar como la razón de cambio del volumen por la altura no? Pero […]* |  | |
| *Axel:* | *… Aquí falta algo […] Si ya derivaste con respecto a la altura es dh sobre dt no?, y el otro es dV sobre dt, no dh.* | *Los cambios del volumen y la altura* | *Acción mental 4 y 5. Dafne sabe que existe covariación* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Pero porque dt? Porque esta no lleva tiempo, esta solo es del volumen…* | *son con respecto al tiempo.* | *del volumen con respecto a la altura, sin embargo no alcanza a cuantificarla conforme pasa el tiempo. Y Axel sabe que el volumen y la altura cambian con respecto al tiempo, pero tampoco logra cuantificarlas.* |
| *Axel:* | *… Pero cambia con respecto al tiempo…* | | |
| *Dafne:* | *… Este cambia con respecto a la altura, este es únicamente para el volumen… y es que tanto cambia el volumen dependiendo de cuánto cambia la altura, porque la altura también cambia el radio y esas cosas no?, entonces esta es la relación volumen altura… y esta es la razón de cambio entre la altura y el tiempo que es la que nos habían dado.* | $\frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{16}\frac{dh}{dt}$<br>1963.49 cm^2 (1cm/min)<br>1963.49 cm^3/min | |

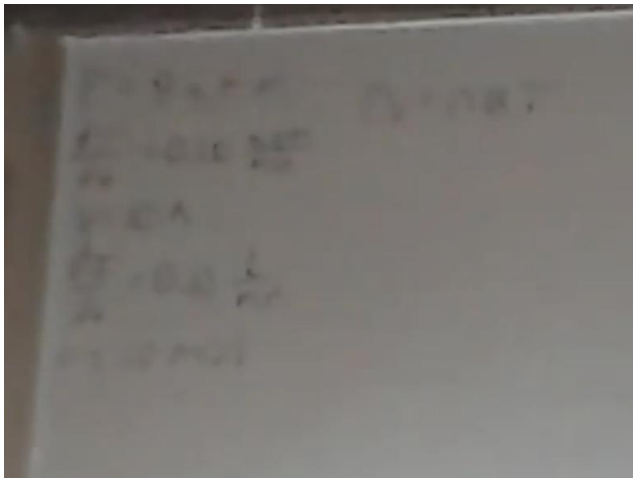
*Tabla 4.1.1. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 3.*

**Problema 4.**

La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta $T$ (en grados Kelvin) y la presión $P$ (en atmósferas) con un volumen $V$ (en litros), es $PV = nRT$; donde $n$ es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8atm$ y que aumenta a razón de $0.10\frac{atm}{min}$, además $V = 10l$ y disminuye a razón de $0.15\frac{l}{min}$. Determinar la razón de cambio de $T$ con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10mol$.

*Axel y Dafne:*

Dafne lee el problema para entender lo que se pide. Axel dice que es más fácil trabajar en el pizarrón de su casa que en la pizarra de la plataforma Zoom porque le es muy difícil escribir en ella. Dafne le dice los datos. (Figura 4.1.6)



$P = 8atmPV = nRT$

$\frac{dP}{dt} = 0.10\frac{atm}{min}$

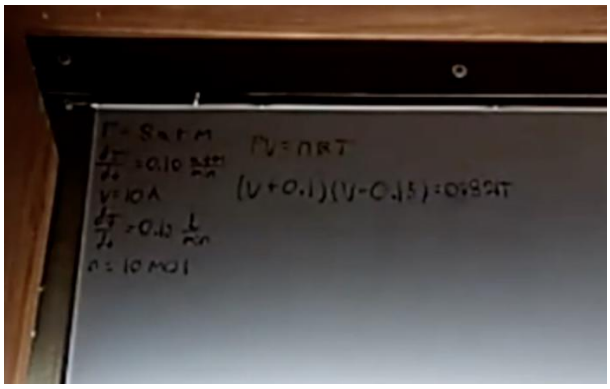
$V = 10l$

$\frac{dV}{dt} = 0.15\frac{l}{min}$

$n = 10mol$

*Figura 4.1.6. Datos del problema 4 (izquierda); transcripción (derecha).*

Hacen lluvia de ideas, tratando de plantear el problema, sin embargo, no alcanzan a comprender lo que se pide ni cómo pueden plantear la solución (fig. 4.1.7).



$P = 8atmPV = nRT$

$\frac{dP}{dt} = 0.10\frac{atm}{min}(V + 0.1)(V - 0.15) = 0.821T$

$V = 10l$

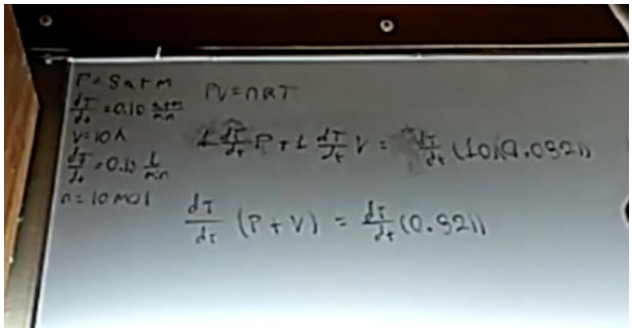
$\frac{dV}{dt} = 0.15\frac{l}{min}$

$n = 10mol$

*Figura 4.1.7. Intento de plantear la solución (izquierda). Transcripción (derecha)*

A pesar de que tienen una fórmula que describe el problema, esto les confunde porque solo ven las letras (y están acostumbrados a que las letras son variables) y no el contexto del problema.

Ambos saben que tienen que derivar, pero al ver solo las letras no alcanzan a interpretar la expresión como lo que representa en el problema. El profesor tiene que intervenir para orientarlos en el cálculo de la derivada, ellos saben que tienen que derivar, pero no saben porque (figura 4.1.8).



$P = 8atm PV = nRT$

$\frac{dP}{dt} = 0.10\frac{atm}{min} 1\frac{dP}{dt}P + 1\frac{dT}{dt}V = \frac{dT}{dt}(10)(0.821)$

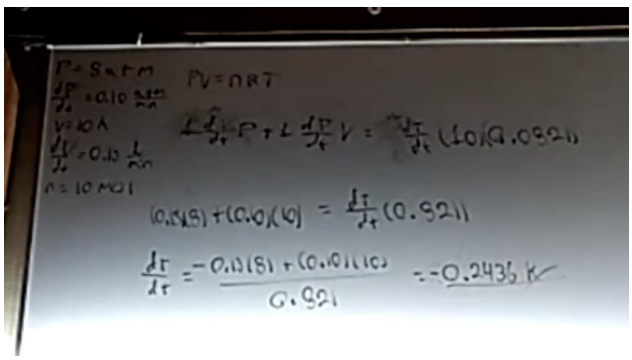
$V = 10lt$

$\frac{dV}{dt} = 0.15\frac{lt}{min}\frac{dT}{dt}(P + V) = \frac{dT}{dt}(0.821)$

$n = 10mol$

*Figura 4.1.8. Derivación implícita guiada por el profesor (izquierda). Transcripción (derecha).*

Sin embargo, después de escribir la derivada, entonces pudieron sustituir los datos, con los signos correspondientes.



$P = 8atm PV = nRT$

$\frac{dP}{dt} = 0.10\frac{atm}{min} 1\frac{dP}{dt}P + 1\frac{dT}{dt}V = \frac{dT}{dt}(10)(0.821)$

$V = 10lt$

$\frac{dV}{dt} = 0.15\frac{lt}{min}(0.15)(8) + (0.10)(10) = \frac{dT}{dt}(0.821)$

$n = 10mol \frac{dT}{dt} = \frac{-0.15(8) + (0.10)(10)}{0.821} = -0.2436K$

*Figura 4.1.8. Solución del problema (izquierda). Transcripción (derecha).*

La tabla 4.1.2 muestra los diálogos entre Dafne y Axel, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Bien, solo sustituyamos como con los datos originales y te sale una temperatura y luego sustituyes con los datos después de aplicarles la razón de cambio y te sale otra temperatura y la diferencia es lo que cambió, pero así no va porque estamos viendo cálculo y no puede ser así de sencillo…* | *Lluvia de ideas. Los estudiantes proponen una solución con base a lo que entienden del problema, e intentan plantear la solución.* | *Acción mental 1 y 3. Tratan de relacionar los cambios cuando sustituyen los datos, pero no alcanzan a identificar cuales son variables y cuales constantes.* |
| *Axel:* | *… Hay un dx por dt, esto quiere decir que a fuerzas se tiene que derivar… bueno, hay dos en sí, hay dos pero ahora si que aquí donde esta la x, que x sería T?* | | *Axel identifica la covariación de la temperatura con respecto al tiempo, sin embargo, no logra cuantificarla correctamente.* |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Bueno, en sí no sería dt, sería dT de temperatura no? […] no es dx es dT sobre dt.* | | *A pesar de que Axel ya había identificado la variación de la temperatura con respecto al tiempo, sigue sin poder cuantificarla.* |
| *Axel:* | *… Ahí esta, y derivamos eso no? Es que aquí entro en duda porque uno o sea una razón dice atm sobre min y lo que tiene atm es la presión y el otro dice… este… litros sobre minuto y eso es volumen…* | | |
| *Axel:* | *… Se deriva todo con respecto a la temperatura no? […] en el primer caso y en el segundo, bueno, en el primero se deriva con respecto a la presión, en el segundo con respecto al volumen…* | | |
| *Dafne:* | *… A ver escribe entre paréntesis (V+0.1) por (V-0.15)=0.821 T, y ya P su razón de cambio es V y volumen baja y las otras dos son constantes porque no están cambiando en esta operación…* | *Ambos saben que tienen que derivar, pero al ver solo las letras no alcanzan a interpretar la expresión como lo que representa en el problema. Solo ven las letras como una relación estática entre las cantidades y no como magnitudes que están cambiando.* | *Acción mental 3. Dafne visualiza la variación del volumen sin embargo, asume que la presión cambia con respecto al volumen, el cual disminuye (porque así lo dice el problema)* |
| *Axel:* | *… Es que se tienen que sacar dos operaciones con esta fórmula y al final se tiene que sacar la razón de cambio de la temperatura pero… este… te digo las otras razones de cambio van… van… este* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *con diferentes variables, entonces no me cuadra mucho…* | | |
| *Axel:* | *… Se tiene que derivar todo para tener la… la derivada al final de T para que sea la razón de cambio no?… Bueno, pongámoslo P por dT sobre dt chiquita de tiempo…*<br><br>⋮ ⋮ ⋮ | *Al ver que la fórmula tiene solo letras (aunque algunas de ellas representan valores constantes) se confunden y las consideran variables.* | *Acción mental 5. Axel identifica la covariación de la temperatura con respecto al tiempo, pero le cuesta trabajo derivar implícitamente porque no acaba de identificar que cantidades que varían cuales son contantes.* |
| *Axel:* | *… Pues entonces si esa, es así nada mas nos queda dT entre dt de tiempo no?* | *El profesor trata de hacerles ver cuales literales son constantes y como deben manejarlas, sin embargo, aún no lo comprenden, pues para ellos las literales varían.* | |
| *Prof:* | *… No, pero falta el n y el R, es como si derivas 2x te queda la constante no?* | | |
| *Axel:* | *… Son constantes no? La derivada de una constante es cero…* | | |
| *Prof:* | *… Si, pero se están multiplicando, no se están sumando, si se estuvieran sumando si…* | | |
| *Axel:* | *… Entonces, aquí es cero no?* | | |
| *Axel:* | *… Ps ahí está, ya tenemos todo, entonces dV sobre dt es 0.15 por P que es 8 mas dP sobre dt es 0.10 por 10 y ya, entones dT sobre dt es igual a 0.15 por 8 mas 0.10 por 10 entre 0.821…* | *Al final, comprenden cuales son las literales que varían con respecto al tiempo, así como el sentido de esa variación y concluyen el problema.* | *Acción mental 5. Al identificar las cantidades que varían y las que permanecen constantes Axel puede determinar la razón de cambio de la temperatura.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *…da 2.67… Nada más tengo una duda aquí… Es que pues dice que volumen disminuye a razón… entonces, eso significa que esa parte sería negativa no? […] Entonces está mal la operación […] Entonces da menos 0.2436…* | | *Acción mental 3. Dafne identifica que el cambio del volumen es negativo, por lo que el signo debe ser este.* |

*Tabla 4.1.2. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 4.*

**Problema 5.**

Un poste de 5 metros de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 metros de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de $1.2\frac{m}{s}$. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada de la sombra del hombre es de 6 metros, ¿Con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?

*Axel y Dafne:*

Dafne lee el problema. Axel hace el dibujo que representa el problema y pone los datos que se dan, observa en su dibujo que hay dos triángulos semejantes y los utiliza para plantear la solución (figura 4.1.9).

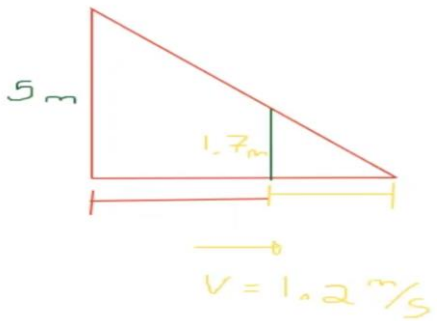



*Figura 4.1.9. Dibujo de Axel que representa lo que él entiende del problema.*

Al ir desarrollando las operaciones va cambiando las literales de modo que coincidan con las de su dibujo. Pero se puede observar que las letras son diferentes a las que presentan en el dibujo (figura 4.1.10).

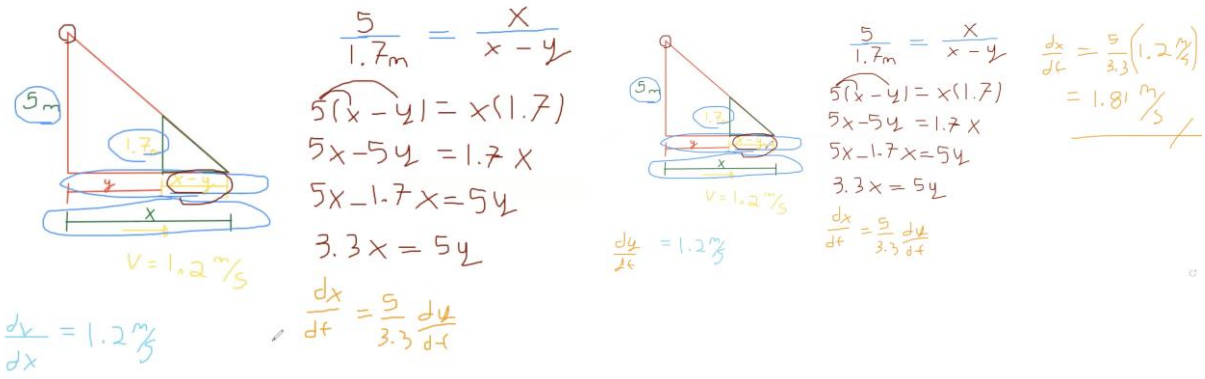



*Figura 4.1.10. Primer intento de solución de la primera pregunta.*

El primer intento les parece fallido porque a pesar de que no tienen muy presente el tema de Semejanza de triángulos, Dafne se da cuenta de que plantearon mal la razón de semejanza. Hacen un segundo intento, con un planteamiento similar, pero con las letras de su dibujo, que al momento de resolver no se sienten seguros de su procedimiento porque les queda un resultado negativo y lo repiten (figura 4.1.11).

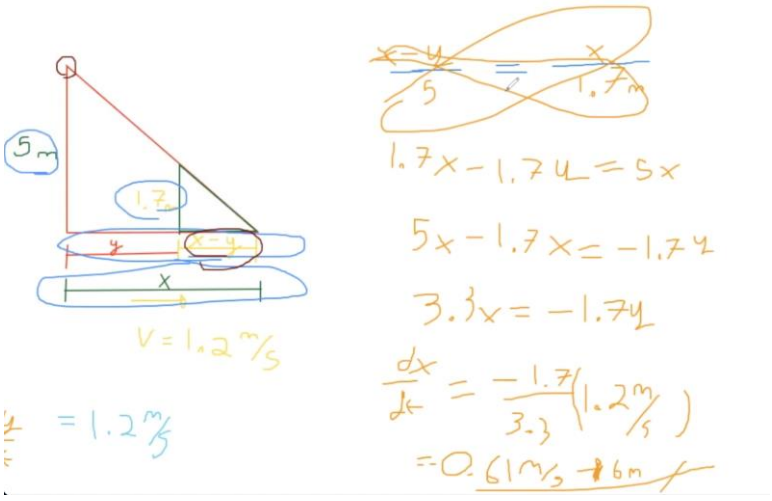



*Figura 4.1.11. Segundo intento de solución.*

Después de hacer los cálculos correspondientes vuelven a quedar inconformes, entonces vuelvan a cambiar las letras del dibujo, y los cálculos, esta vez si los satisfacen (al quedarles el resultado positivo) (figura 4.1.12).

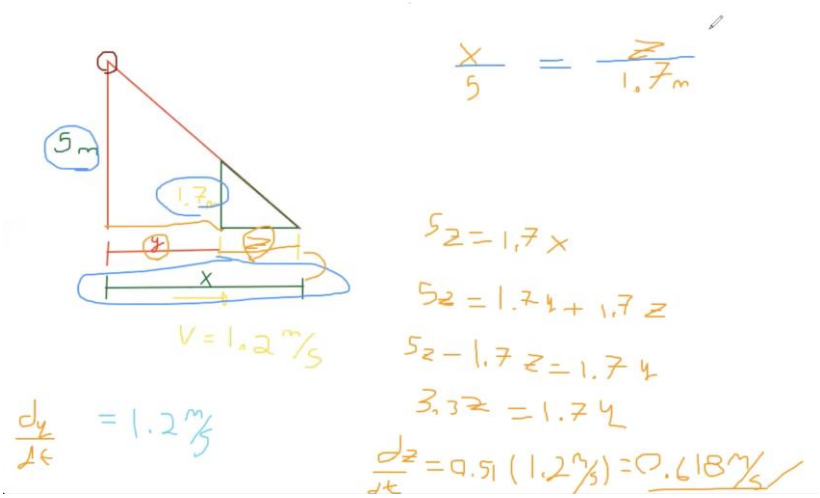



*Figura 4.1.12. Tercer intento de solución.*

Siguen con la segunda parte del problema, utilizan el teorema de Pitágoras, derivan y encuentran el resultado (figura 4.1.13).

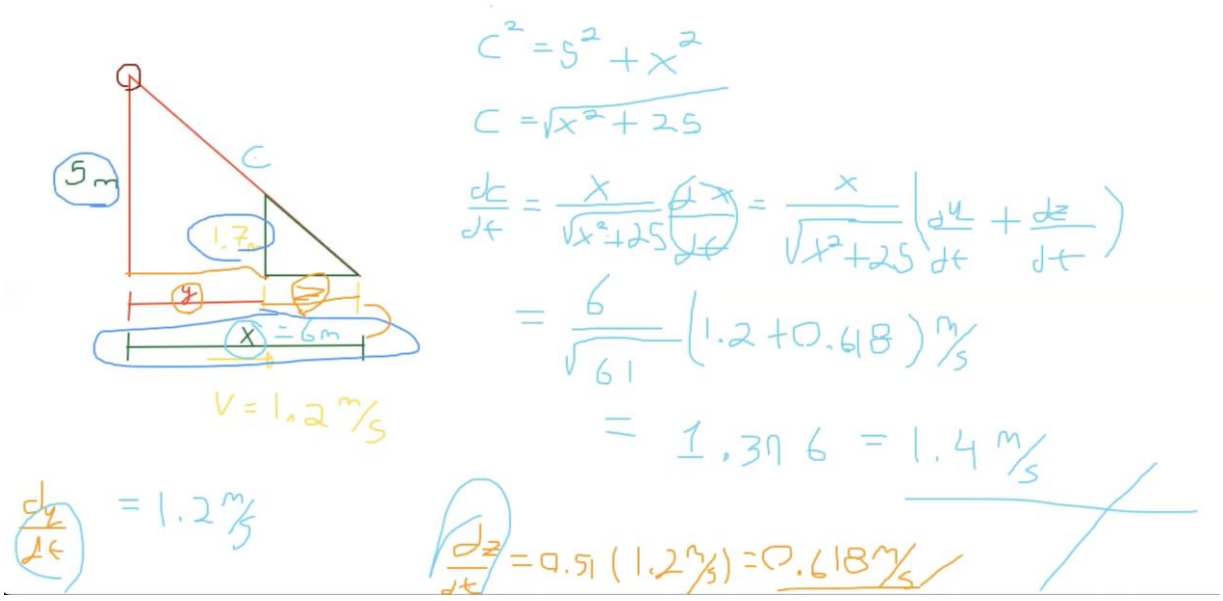
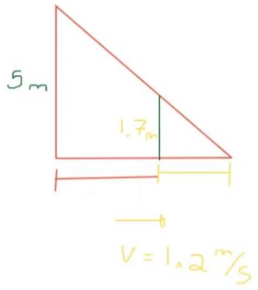
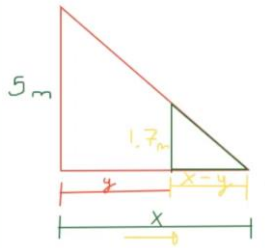
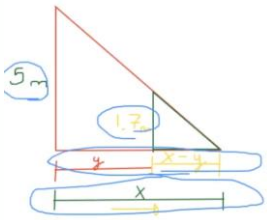
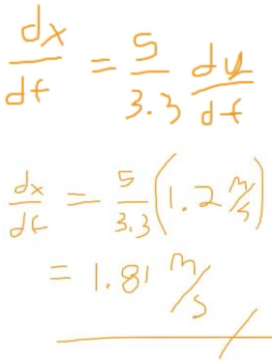
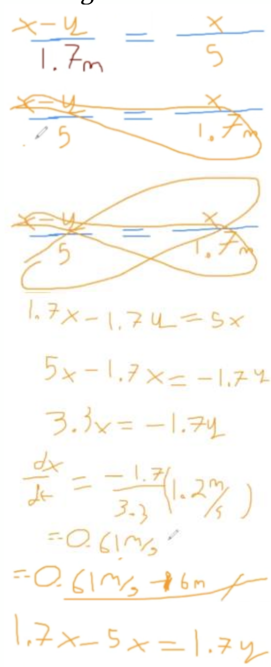


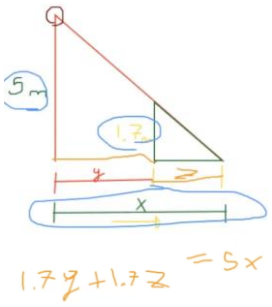

*Figura 4.1.13. Solución de la segunda parte del problema.*

La tabla 4.1.3 muestra los diálogos entre Dafne y Axel, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Dice que la distancia A va de la base del poste a la punta de la sombra, o sea… abajo, si no? Sería el de abajo?…* |   | *Acción mental 1.* *Identifican los datos, y aunque tienen dudas sobre cómo acomodarlos en su dibujo, logran escribir correctamente la información en su dibujo.* |
| *Axel:* | *… Fíjate, de todo esto… de todo esto de acá, supongamos una distancia "x" no?, y de este cachito… del rojo podría ser "y"… y este cacho es la resta… ahora si que este grandote que es "y" menos "x"… Entonces como te dije… lo de igualar los triángulos, se compara esto con esto y esto con esto y bueno, utilizando de ese tema que no me acuerdo su nombre, ve, sería 5 que es la altura del farolito, sobre el 1.70 que es la altura del hombre y del otro lado es… este … comparar la distancia grande entre este cachito porque es lo que vamos… o sea a evaluar no?… Haciendo todo este cachivache es 5 por "x" menos "y" es igual a "x" por 1.70… Entonces, haciendo cada cosa, es este con este, esto con este 5x menos 5y e igual a 1.7 x… Te parece razonable? O no?* | *Axel trata de ubicar las variables en su dibujo inicial, sin embargo, no puede concretar su idea pues no está seguro de su planteamiento.*     | *Acción mental 2.* *Axel define las variables en su dibujo, pero al intentar definir la semejanza no queda convencido de su planteamiento y lo desecha.* |
| *Axel:* | *… Y este… aquí todavía no podemos hacer mucho, necesitamos encontrar este… "y"… No, no es cierto, más bien este… pasamos "y" para acá y "x" para acá…* | $\frac{5}{1.7m} = \frac{x}{x-y}$ |  |
| *Dafne:* | *… 5x menos 1.7… 4.3x es igual a 5y…* | $5(x-y) = x(1.7)$ |  |
| *Axel:* | *… Es 4.3?* | $5x-5y = 1.7x$ |  |
| *Dafne:* | *… No, digo 3.3… ajá…* | $5x-1.7x = 5y$ |  |
| *Axel:* | *… 3.3x es igual a 5y…* | $3.3x = 5y$ |  |
| *Dafne:* | *… Cual quieres despejar? "x", o "y"?* |  |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… No, todavía no, aquí ya derivamos, aquí derivamos pues para utilizar el… esto sería dx, se cambia, es dx no… como era?… es dv, aquí no es dx es dv sobre dx es igual a 1.2 m/s… Entonces, derivamos esto y pues no da este dx, no no no… ay! Que difícil es esto… dx, pero se deriva con respecto al tiempo no? Sobre 5… sobre 3.3 bueno, esto si lo podríamos pasar para acá no?… dy sobre dt…* | *En su primer intento de solución, Axel sabe que el cambio es con respecto al tiempo, sin embargo, no logra concretar la idea de este cambio, lo que provocó incertidumbre en su proceso y terminó por desecharlo.*<br>  <br> | *Acción mental 5.*<br>*Axel identifica la covariación de la posición "x" respecto al tiempo y calcula su razón de cambio instantánea. Sin embargo, no tiene claro su desarrollo y termina desechándolo.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:*<br><br>*Dafne:*<br><br>*Axel:*<br><br>*Dafne:*<br><br>*Axel:* | *… Entonces… como lo planteamos?*<br>*Ah! Ya me acordé como se llama esto: La semejanza!…*<br><br>*… Ándale! Esa cosa… como que teníamos la idea pero la planteamos mal… Sabes que hicimos mal? Pusimos los dos números del mismo lado… en la primera que planteaste 5 sobre 1.7 y 5 con "y", como al revés, literalmente sos dos hay que cambiarlos, el 5 y el de abajo "x" menos "y" se iría "x" menos "y" o solo "y" con 1.7 y ahí iría 5…*<br><br>*… Creo que es así.. bueno, hay que borrar todo esto…. Otra vez… 1.7… es mas multipliquemos directamente ya… este con este y este con este… "x" menos 1.7 "y" es igual a 5x… como acá está el mayor mejor lo dejamos así mira 5 menos 1.7x es igual a menos 1.7y… bueno, esto da 3.3 no? 3.3x igual a menos 1.7y… pasamos este para acá dividiendo y al derivar queda dx sobre dt es igual a menos 1.7 sobre 3.3 por 1.2 m/s.*<br><br>*… Da 0.51 la división por 1.2 da 0.61 en total 0.618…*<br><br>*0.61 dejémosla ahí… y ahora… son m/s esto cuando es a 6 m no?* | *En el segundo intento de solución, ya tienen claro que la semejanza puede llevarlos a la solución del problema, sin embargo, al final de su proceso en encuentran con un resultado negativo que les indica que "algo" está mal, pues saben claramente que la sombra crece, por lo que vuelven a desechar este segundo intento.*<br>  | *Acción mental 5.*<br>*Finalmente, Axel desarrolla correctamente la semejanza, sin embargo, la dirección del cambio no es correcta.* |
| *Dafne:*<br><br>*Dafne:*<br><br>*Axel:*<br><br>*Dafne:* | *… Lo dejamos positivo no?…*<br>*No, nadamos que… o sea, me saca de onda que vaya decreciendo… pero…*<br><br>*… Pues va para acá no?… así […] Pero… a ver que pasó aquí?… Creo que no debí de hacer esto… entonces era al revés… es al revés esto, entonces es 1.7 menos 5x es igual a 1.7 "y" y esto positivo… y esto positivo… si no?… Y es que el problema ahora es que aquí queda negativo o tal ves si es esto…*<br><br>*… Más bien… no sería… "x" mas "y" o sea sería lo mismo más la diferencia…* | | *Acción mental 3.*<br>*Dafne, identifica la dirección del cambio.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Pero es que… ahí se estaría diciendo que "x" mas "y"… o sea, estaría como hasta acá… O sabes que? Aquí que sea "z" pongamos no?, entonces "z" por esto, entonces aquí es 1.7 "z" por… por… por… híjole!… ahora si ya vi… ya quedó… aquí tiene que ser "y" más "z" […] o sea, es 1.7 "y" mas 1.7 "z" y ahora… que procede?… Me está estresando esto!!! Porque no… no, esto no funciona! […] 5"x" no, creo que ahora acomodé mal las variables…* | *El tercer intento de solución. En esta ocasión cambian las variables (las primeras no les convence y los confunde), y plantean el problema de la misma forma que en el segundo intento, pero con otras letras. Sin embargo, al hacer los cálculos Axel se da cuenta de que su planteamiento no funcionará, porque nuevamente le aparece un signo negativo, por lo que decide "reacomodar" las variables.* | |
| *Dafne:* | *… Y "x" es igual a "z+y" no?* |  | |
| *Axel:* | *… Si, porque equivale a esto… O sea, que ya me entendiste… 5"x" es igual a 1.7 "y" más 1.7 "z" y ahora si ya quedó… Entonces aquí 5"z" menos 1.7 "z" es igual a 1.7 "y"… 3.3 "z" es igual a 1.7 "y" […] pasamos para el otro lado, derivamos y dz, dt o si era "y"… así… todo esto… o sea, la división da 0.51 por 1.2 m/s… 0.681 m/s esto es lo primero no?…* | *Finalmente, con este reacomodo y los cálculos correspondiente les queda el resultado positivo, lo que les da seguridad de que están en lo correcto.* | *Acción mental 5. Reacomodando las variables y considerando la dirección del movimiento llegan a la solución correcta del problema.* |
| *Axel:* | *Ahora si ya quedó… ya nos quedó positivo…* | | |

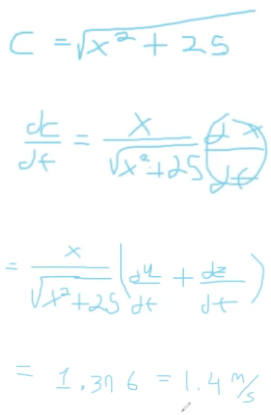
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *Ahora usamos lo que tú dijiste porque si me parece coherente… Lo de Pitágoras […] como sería este rollo?* | *Ambos tienen claro que usando el Teorema de Pitágoras pueden encontrar la razón de cambio con la que se mueve la punta de la sombra respecto al farol.* | *Acción mental 1. Identifican la dependencia de las variables correctamente.* |
| *Axel:* | *… Si, $c^2$ … Y yo creo que como tenemos esto nada más dejamos el resultado […] borramos este y ya…* | | |
| *Dafne:* | *… Entonces $a^2$ podría ser el 5 metros que no cambia…* | | |
| *Axel* | *… Más…más $x^2$ no? Que es todo lo de aquí… y… pues hacemos todo esto y directamente esto es igual a la raíz cuadrada de… ponemos primero la "x" que es cuadrada más 25 […] y ahora hay que derivarlo porque en eso sale la… como se llama?…*<br>*[…] ahora, sería… bueno ya se derivó esto, entonces respecto a dx no? dx dt pero esto también lo podemos expresar como "x" sobre raíz de $x^2$ más 25 y esto por… por como "x" es la suma de estos dos, pues podemos asumir que esto es la suma de esto… y esto […] Entonces es dy sobre dt y dz sobre dt… y desde el principio nos dijeron que "x" es igual a 6 metros no?*<br>*… 1.396… dejémoslo en 4 te parece?… 1.4 m/s… y pues ya no? Supongo que ya acabamos no?…* |  | *Acción mental 5. Axel, identifica la covariación de la distancia "c" con respecto al tiempo, deriva implícitamente y encuentra la razón de cambio solicitada.* |

*Tabla 4.1.3. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 5.*

Esta pareja compartió mas sus ideas, también ambos tienen buen desarrollo algebraico, sin embargo, tienen dificultades para identificar la covariación entre variables, lo que les provocó dificultad para plantear los problemas. Dafne daba las ideas iniciales para el desarrollo del problema, pero no lograba identificar la variación con respecto al tiempo, lo que repercutió en su desarrollo y resultados. Por su parte Axel desarrolló las ideas de Dafne y aunque sabía que las variables cambiaban con el tiempo,

le fue difícil identificar por sí solo la covariación de estas. Además para Axel fue muy difícil escribir en la pizarra electrónica, tanto que prefirió desarrollar un problema en su pizarra física (desde su casa, enfocando su procedimiento con la cámara de su laptop). Dafne prefirió escribir poco con cuadros de texto, ya que también se le dificultó la escritura con el ratón de la computadora.

De acuerdo a la manera en que abordaron los problemas propuestos y con referencia a Carlson et al. (2010), podemos señalar que Dafne alcanzó el Nivel 3 y las Acciones Mentales asociadas a este, ya que desarrolla una asociación cuantitativa, es decir, sus ideas de covariación le ayudan a asociar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra pero sin lograr identificar y transformarla. Por otro lado, Axel alcanzó el Nivel 5 con algunos tropiezos en su desarrollo, lo que le permitió llegar al resultado de los problemas.

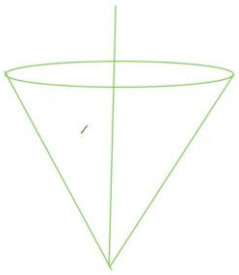
## *4.2 Análisis del caso Emilio y Eduardo*

### Problema 3.

Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1 metro, la superficie sube a razón de 1 centímetro por minuto. ¿Qué tan rápido cambia el volumen del recipiente?

*Emilio y Eduardo*

Ambos leen el problema, y empiezan a trabajar cada uno por su cuenta tratando de plantear la solución. El profesor les pregunta qué están haciendo y les pide que compartan sus ideas y posibles soluciones. Emilio hace el dibujo, pero antes de que ponga los datos en el mismo Eduardo comenta que al estar haciendo el dibujo, se da cuenta de que lo puede interpretar como un triángulo rectángulo y empieza a dibujar su idea (Figura 4.2.1).

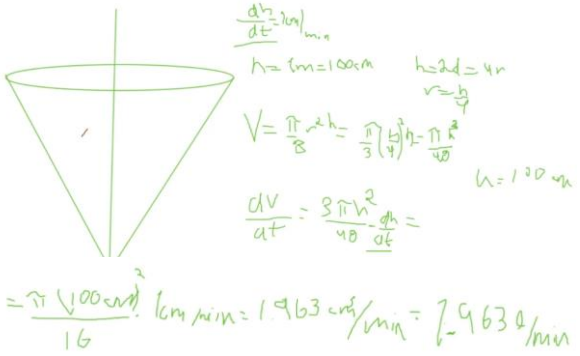


a)

b)

*Figura 4.2.1. Dibujo del problema. a) Dibujo de Emilio, b) Dibujo de Eduardo.*

Después de dibujar el triángulo intenta escribir una expresión relacionada con el triángulo, sin embargo, no logra concretar su idea. Emilio comenta que él ya tiene la solución del problema y lo explica (Figura 4.2.2).



$$\frac{dh}{dt} = 1\ \frac{cm}{min}$$

$$h = 1\ m = 100\ cm \quad h = 2d = 4r$$

$$r = \frac{h}{4}$$

$$V = \frac{4}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$$

$$h = 100\ cm$$

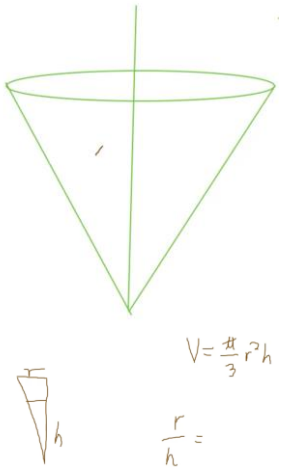
$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{48} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{\pi(100\ cm)^2}{16} \cdot 1\ \frac{cm}{min} = 1963\frac{cm^3}{min} = 1.963\ \frac{l}{min}$$

*Figura 4.2.2. Solución del problema 3 presentada por Emilio.*

En la tabla 4.2.1 se muestra el diálogo entre Emilio y Eduardo, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| **Alumno** | Diálogo | **Descripción** | **Acción Mental** |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *… Bueno, pues ahorita voy poniendo lo que llevamos…* | *Lluvia de ideas. Emilio y Eduardo intentan* | *Acción mental 1.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Eduardo:*<br><br>*Eduardo:* | *…Ahorita que intenté hacer el dibujo en mi cuaderno, este… hice un triángulo y de ahí se me ocurrió una idea… y si. Lo manejamos por el, o sea y si lo manejamos bidimensionalmente al principio? Y de ahí lo manejamos como un triángulo rectángulo…*<br><br>*…No, a ver… Podríamos ocupar yo que sé… éste… entonces pues nos va a quedar acá nuestro triangulito… ahí, pero sabemos que va a llegar a cierto nivel y este sería nuestro radio… esta sería nuestra altura y de aquí sería nuestro radio… esto primero con la otra fórmula… la del volumen, de algo nos va a servir… ahí va… y de aquí… con esta el triángulo podría salir… el doble de lo… mmm… la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro…* | *resolver el problema por su cuenta trabajando en su cuaderno. Emilio empieza a escribir el problema y Eduardo plantea su idea, sin embargo no logra concretarla.*<br>  <br> | *Ambos determinan la relación entre variables, las escriben y comparten sus ideas.* |
| *Emilio:* | *…Bueno, encontré el resultado, pero lo hice no por triángulos sino tal cual tomando el cono, bueno, lo que teníamos, por esta fórmula y prácticamente haríamos lo mismo…* | *Emilio relaciona el proceso con el problema anterior y encuentra fácilmente la razón solicitada.* | *Acción mental 5. Emilio identifica plenamente la relación funcional entre las variables, logrando determinar la razón de cambio solicitada. Explica su procedimiento.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *… Tenemos que dh o sea que es la velocidad de llenado es de 1 cm cada minuto y así como en el. Pasado nos decía que era a los 10, en este es a 1 metro, pero como estamos, la velocidad nos da en centímetros lo pasé a centímetros para más fácil… Entonces, de aquí… este… pues es pi sobre 3 por el radio al cuadrado sobre h y entonces tenemos la relación de que h es igual a 2 veces el diámetro y eso es igual a 4 veces el radio, entonces r es igual a r sobre 4 al cuadrado sobre h y entonces tenemos la relación de que h es igual a 2 veces el diámetro y eso es igual a ,4 veces el radio, entonces r es igual a r sobre 4 al cuadrado sobre 48… entonces igual que en el pasado, porque… bueno… al parecer siento que es lo mismo nada mas que cambiamos las fórmulas dV igual a dt sería nuestra derivada implícita y entonces aquí de hecho se me fue no es 2 es 3, la derivamos y tenemos 3 por pi por h cuadrada sobre 48 por dh sobre dt y aquí esto es o más importante porque aquí ya salió la velocidad que es donde va a salir la razón de cambio… y entonces, nuestro problema nos dice que en el momento en que h sea igual a 100 centímetros h va a ser igual a 1 centímetro por minuto, entonces sustituyendo me da…pi por los 100 centímetros al cuadrado sobre 16 y eso multiplicado or 1 centímetro por minuto me da 1 punto… bueno, no no no, 1963 centímetros cúbicos por minuto y esto en litros es 1.963 litros por minuto…* | $\frac{dh}{dt} = 1\frac{cm}{min}$ ☐<br>$h = 1m = 100cm$ ☐<br>$h = 2d = 4r$ ☐<br>$r = \frac{h}{4}$ ☐<br>$V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$ ☐<br>$h = 100cm$ ☐<br>$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{48} \cdot \frac{dh}{dt}$ ☐<br>$= \frac{\pi(100cm)^2}{16} \cdot 1\frac{cm}{min} = 1963\frac{cm^3}{min} = 1.963\frac{l}{min}$ ☐ | |
| *Eduardo:* | *… Es que me quedé atorado porque quería ocupar este… triángulos semejantes y ya de ahí se supone que ya de ahí sería fácil porque ya me saldría supongo que el resultado de… que tenías acá de h sobre 4 y ya de ahí comparar… tendríamos creo que el mismo procedimiento…* | *Eduardo está correlacionando variables, y no logra la comprensión del problema para plantear una solución correcta.* | *Acción mental 1. Eduardo solo logró identificar algunas variables, pero no la relación funcional entre ellas, lo que le impidió encontrar la solución del problema.* |

*Tabla 4.2.1. Texto del diálogo entre Emilio y Eduardo del problema 3.*

**Problema 4.**

La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta $T$ (en grados Kelvin) y la presión $P$ (en atmósferas) con un volumen $V$ (en litros), es $PV = nRT$; donde $n$ es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8atm$ y que aumenta a razón de $0.10\frac{atm}{min}$, además $V = 10l$ y disminuye a razón de $0.15\frac{l}{min}$. Determinar la razón de cambio de $T$ con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10mol$.

Emilio y Eduardo leen el problema por separado. Para Emilio, el problema parece familiar, pero Eduardo no entiende lo que se pide, no puede hacer una conjetura, por lo que Emilio le dice lo que piensa sobre la solución. Sin embargo, Eduardo sigue sin comprender el problema pues le causan confusión los datos que se ofrecen. Emilio por su parte, piensa que el problema es simple por lo que empieza a resolverlo (Fig. 4.2.3).

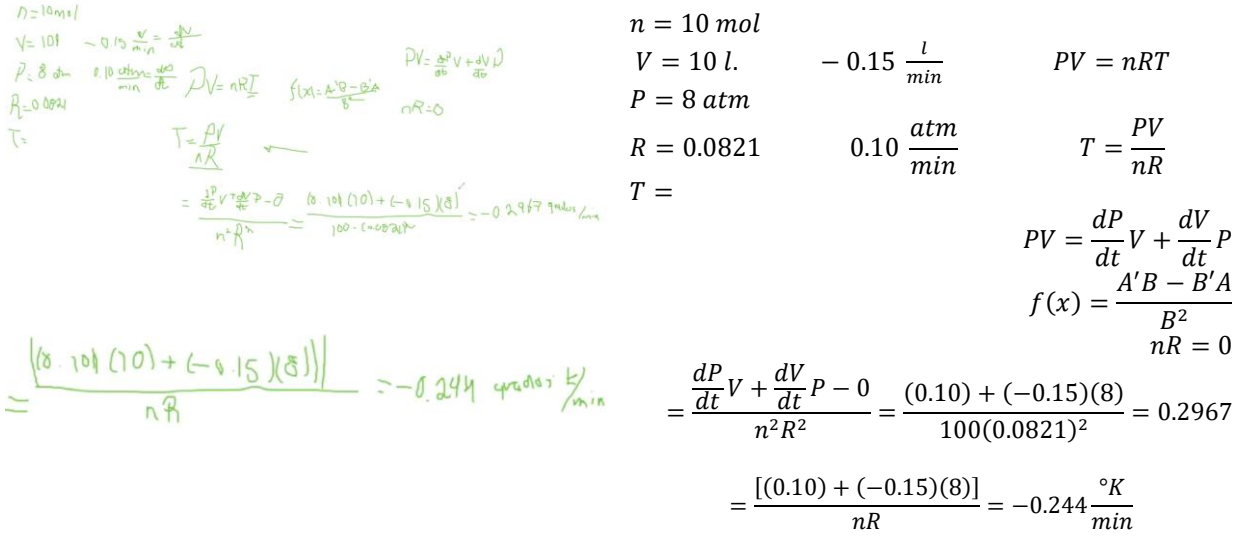



*Figura 4.2.3. Solución del problema de Emilio*

En la tabla 4.2.2 se muestra el diálogo entre Emilio y Eduardo, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Eduardo:* | *…Mmmh… Apenas estoy checando… como lo podríamos plantear… Aquí si no tengo alguna idea en mente…* | *Eduardo no entiende el problema* | |
| *Emilio:* | *…Aquí sacamos la derivada, sustituimos y creo que ya quedaría…* | *Para Emilio, el problema es claro sobre la razón de cambio que busca* | *Acción mental 5. Emilio identifica la relación funcional entre la variables lo que le permite determinar la razón de cambio solicitada.* |
| *Eduardo:* | *… Aquí el rollo es que nos está diciendo que una aumenta y el otro disminuye y nos dan a una razón, entonces ahí sigo atorado… realmente no se como podríamos hacerle…* | *Entiende que una variable cambia con respecto a otra, pero sigue sin comprender el problema* | *Acción mental 1.* |
| *Emilio:* | *…Mira… ya saqué esto de aquí, la de T igual a … esta… esta la voy a derivar… A prima por B prima menos B prima por A sobre B al cuadrado… Entonces, aquí va a ser que la derivada de P por V va a ser una… multiplicación y entonces va a ser… derivada de P respecto al tiempo por V mas la derivada de V sobre dt por T… Si no? Y esto es la derivada de lo de abajo… n por R donde primero es cero porque es nuestra constante mas R que es otra constante…. Entonces aquí ya nuestra derivada va a ser… entonces nos queda como dP sobre dt por V mas dV sobre dt por P menos cero sobre n cuadrado por R cuadrado… Aquí sustituimos ¿no?… Tenemos que… este… dP es 0.10 atmósferas por minuto por nuestro volumen que es 10 litros mas la derivada de acá que es menos 0.15 por las 8 que es nuestra presión sobre 100 ya para resolverlo por 0.0821 al cuadrado… según* | *Entiende claramente cuales son las variables que cambian respecto al tiempo, y también cuales permanecen constantes.* $f(x) = \frac{A'B - B'A}{B^2}$ $PV = \frac{dP}{dt}V + \frac{dV}{dt}P$ $T = \frac{PV}{nR}$ $\frac{dT}{dt} = \frac{\frac{dP}{dt}V + \frac{dV}{dt}P - 0}{n^2R^2} = \frac{(0.10) + (-0.15)(8)}{100(0.0821)^2} = 0.2967$ $= \frac{[(0.10) + (-0.15)(8)]}{nR} = -0.244 \frac{\square^{\circ} K}{min}$ | *Acción mental 5. Emilio le explica a Eduardo su proceso.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *yo, es así… La temperatura disminuye menos 0.2967…*<br>*Ah! Ya se que me faltó… me faltó multiplicarlo por n y R por V … es 0.244 grados Kelvin por minuto…* | | |

*Tabla 4.2.2. Texto del diálogo entre Emilio y Eduardo sobre el problema 4.*

Problema 6.

Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos. La cámara dista $2000 pies$ del punto de lanzamiento. Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación $\theta$ de la cámara $10$ segundos después del despegue.

Eduardo y Emilio leen el problema por separado y comparten sus ideas sobre el dibujo que podría ayudarlos a plantear la situación (Fig. 4.2.4).

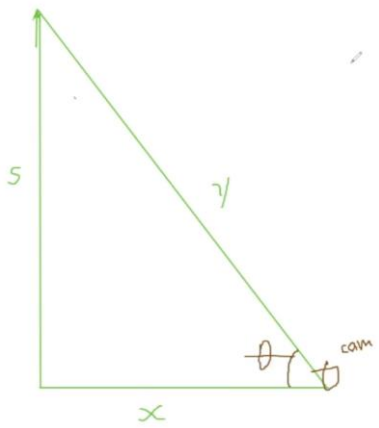
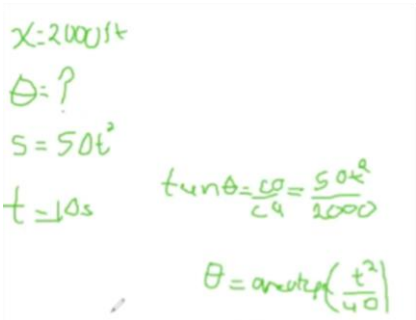



*Figura 4.2.4. Planteamiento del problema*

En su lluvia de ideas, proponen trabajar con funciones trigonométricas y Emilio incorpora los datos del problema (Fig. 4.2.5).




$x = 2000ft$
$\theta = ?$
$s = 50t^2$
$tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{50t^2}{2000}$
$t = 10s$
$\theta = arctan\left(\frac{t^2}{40}\right)$

*Figura 4.2.5. Datos del problema.*

Con el planteamiento del problema escrito, fácilmente llegan a la solución del problema. En la tabla 4.2.3 se muestra el diálogo entre Emilio y Eduardo, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Emilio:*<br><br>*Eduardo:* | *… Compañero, creo. Que el dibujo sería así no?*<br><br>*Si, realmente el punto estaría desde alguna esquina y formaría un triángulo y nadamos sería calcular… dice… 10 segundos después* | *Lluvia de ideas. Ambos comparten sus ideas para plantear el problema. Y escriben los datos a partir del dibujo.* | *Acción mental 1. Determinan la dependencia entre variables.* |

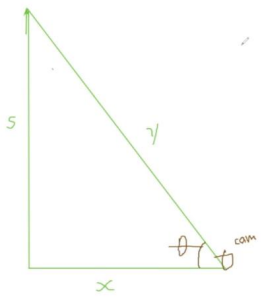
| | | | |
|---|---|---|---|
| | *del despegue… pero nos dan una fórmula y pues estaría la cámara…* | | |
| *Emilio:* | *…Entonces ese es el cohete…este es "s", este es "x" y "y" te parece?…* |  | |
| *Eduardo:* | *Theta… si…* | | |
| *Emilio:* | *… Entonces nos dice que "x" es igual a 2000 pies…* | | |
| *Eduardo:* | *…Pero creo que lo podríamos sacar con lo del seno y coseno…* | | |
| *Emilio:* | *…Ándale! Si, exacto… Y lo que nos piden… hay que encontrar entonces…el ángulo está acá y la relación entre los dos es la tangente no?… Entonces quedamos que es tangente de theta es igual a cateto opuesto entre cateto adyacente […] Al cuadrado entre 2000 no?, entonces theta igual a arcotangente…* | *Relacionan las variables y observan cual es la dependiente y cual la independiente y su relación entre ellas.* | *Acción mental 1 y 2. Determinan la dependencia entre variables y su sentido.* |
| *Emilio:* | *… Y se puede reducir como t cuadrada sobre 40…*<br>*… Dice que t es 10 segundos, entonces es… derivada de la tangente… no, de la cotangente… no, del arcotangente y esa fórmula es… la derivada de esto por el arcotangente por f de x entonces dice que es f prima de x sobre 1 mas la función de f de x al cuadrado… ok, ahora si ya… Cuál es la derivada de t cuadrada sobre 40?… tenemos que es 2t, va a ser 80 menos cero no? Y de ahí se puede reducir con 2600 […] Entonces va a quedar como t sobre 20 sobre 1 más t cuadrada sobre 40 al cuadrado pero aquí terminó como… ah! No, no, porque así esta bien no?… No, es una derivada implícita…*<br>*10 sobre 20 sobre 1 más 100 sobre 40 al cuadrado… un medio de 1 más 10 cuartos al cuadrado y esto es igual a… y quedaría de 0.69 radianes por segundo…* | *Al comprender la covariación entre las variables, puede determinar su variación conforme pasa el tiempo.* | *Acción mental 5. Emilio determina la razón de cambio instantánea al tener claro la relación funcional entre las variables involucradas en el problema.* |

*Tabla 4.2.3. Diálogo entre Emilio y Eduardo sobre el problema 6.*

Esta pareja trabajó de manera independiente, es decir, cada uno de ellos trabajó en su cuaderno por separado, compartieron muy poco sus ideas. Emilio tiene un dominio muy bueno de la matemática, es analítico, comprende perfectamente la covariación entre variables, lo que le permite resolver de forma efectiva los problemas planteados.

En el caso de Eduardo, no encuentra las relaciones de covariación entre variables, esto lo confunde y termina por aceptar las ideas de Emilio sin lograr alcanzar la solución de problema por cuenta propia.

En ambos casos la escritura en el pizarrón electrónico fue complicada pues los dos participantes manifestaron esta dificultad.

Emilio alcanzó el Nivel 5, pues recorre las Acciones Mentales 1 a 5 en todos los problemas planteados, no presentó mayor dificultad en su desarrollo, tiene claramente identificadas las ideas de covariación para el cálculo de razón de cambio instantánea.

Eduardo por su parte, únicamente alcanzó el Nivel 2, porque pone en juego de manera sistemática las Acciones Mentales 1 y 2, pues únicamente pudo asociar la dirección de cambio de una variable respecto a otra.

### *4.3 Análisis del caso Gonzalo y Omar*

**Problema 3.**

Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1 metro, la superficie sube a razón de 1 centímetro por minuto. ¿Qué tan rápido cambia el volumen del recipiente?

*Gonzalo y Omar*

Ambos leen el problema y comparten lo que entienden, hacen lluvia de ideas sobre lo que pueden hacer para resolverlo. Gonzalo hace un dibujo para apoyar sus ideas, y ubica los datos que proporciona el problema. Omar vuelve a leer el problema para verificar que el dibujo es correcto (figura 4.3.1).

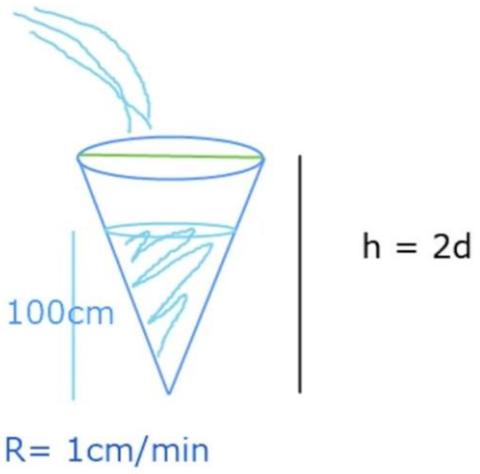



*Figura 4.3.1. Dibujo de la situación con datos*

Después de su lluvia de ideas, ambos trabajan el problema en su cuaderno y después comparten su trabajo, sin embargo, le cuesta trabajo entender el problema y el profesor tiene que intervenir en repetidas ocasiones para orientarlos y que puedan

aterrizar correctamente sus ideas, ya que no comprendían como establecer las relaciones de covariación entre las variables del problema.

Gonzalo escribe en la pizarra de zoom pero no expresa sus ideas, solo escribe lo que hizo previamente en su cuaderno, Omar por otro lado, también escribe en la pizarra lo que hizo en su cuaderno, pero ninguno de los dos presta atención a lo que el otro hace. Sin embargo, ambos llegan al resultado (Figura 4.3.2).

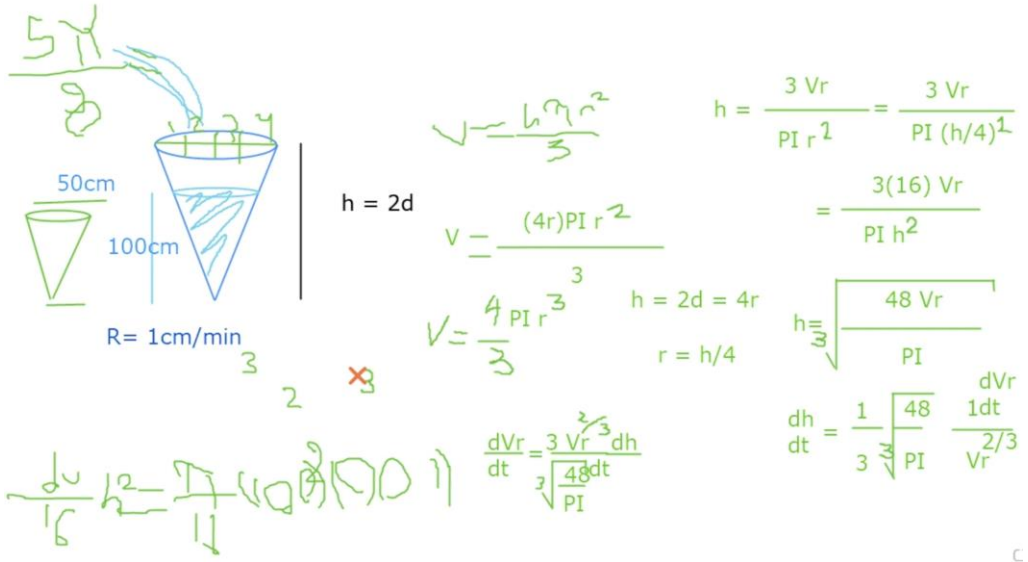
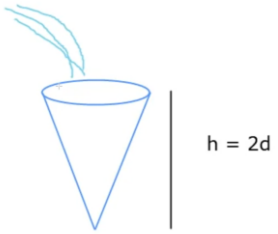
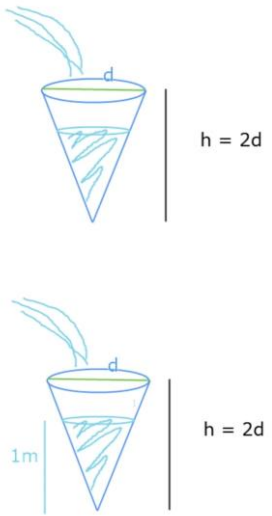



*Figura 4.3.2. Trabajo en la pizarra.*

La tabla 4.3.1 muestra los diálogos entre Gonzalo y Omar, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *… A ver, dice un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido… ok, ahí ya lo tenemos… después, la longitud de la altura es el doble del diámetro… ok, aquí ya tenemos 2d y al recipiente le está entrando agua con una rapidez constante por lo que la profundidad del agua… cuando la profundidad es de un metro la superficie sube a razón de un centímetro por minuto…* |   | *Acción mental 1. Ambos tienen clara la relación entre variables. Pero no pueden determinar como cambia una variable cuando la otra cambia.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Volumen de un cono es de un tercio del cilindro no? El volumen del cono sería un tercio altura por pi por radio al cuadrado […] Bueno, para comodidad podríamos pasar la razón de un centímetro por minuto a metros sobre… segundo… me imagino… Si, yo creo que es más cómodo trabajar la distancia en centímetros para no tener números tan…*<br>*… O sea, ponemos la distancia que sea 100 centímetros más fácil pero entonces podemos escribir para empezar la del volumen del recipiente… O sea, la podemos poner como un tercio altura por pi por radio al cuadrado no? Pero tenemos que la altura es 2d o sea 4 veces el radio ok?… Vamos a empezar con eso… V es igual a… sobre 3… la altura va a ser 4r o sea, 4r, luego pi que no tengo como escribirlo así que le voy a poner "pi" y radio cubo… 4 tercios pi radio cubo… Si vamos bien Omar? Todo bien?*<br>⋮ ⋮ |  | |
| *Gonzalo:* | *…Nos pide calcular la rapidez con la que entra el agua al recipiente…*<br>*…Bueno… con rapidez se refiere a… dice que le entra agua con rapidez constante… o sea, con volumen constante? Tenemos el mismo tiempo?* | *Entienden lo que se les pide, pero no logran aterrizar sus ideas, el profesor interviene con preguntas específicas encaminadas a la comprensión de la covariación entre variables. Sin embargo, aún no logran visualizar la relación de covariación correctamente.* | *Acción mental 2.*<br>*No logran cuantificar la relación funcional entre el volumen y el tiempo.* |

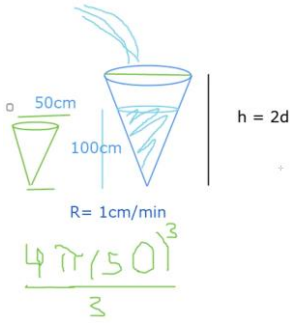
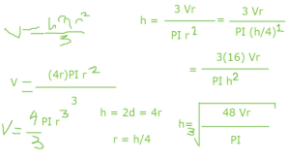
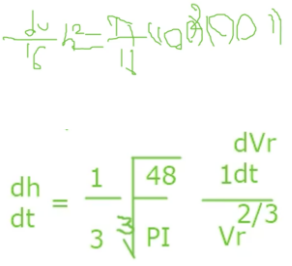
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prof:* | *…La rapidez con la que entra es el volumen no?* |  | |
| *Gonzalo:* | *… A ver Omar, entonces podemos partir que… bueno, tenemos que la altura (ya despejada)… Es como lo tenía… 3Vr, aquí es pi, luego al cuadrado porque aquí es "h" sobre 4… si verdad?… si, luego esto sería al cuadrado, luego aquí nos quedaría que 38 Vr entre pi "h" cuadrada… 3 por 16 sería r pi h cuadrada y si pasamos la h de este lado ya nadamos sería… "h"… 48 Vr sobre pi, la raíz cúbica…* |  | |
| *Omar:*<br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Omar:*<br><br><br>*Prof:* | *… Según yo y mis locuras quedara de la siguiente forma…*<br><br>*… Así quedaría la derivada…*<br><br>*… Te falta el dV en dt…*<br><br>*… Si, solo que aquí no me cabe… sería dVr sobre dt…*<br><br>*… Si, pero como que se ve más fácil la de Omar que la tuya…*<br><br>*… Si, es más fácil pero me tardé como 10 minutos más en empezar que Gonzalo…*<br><br>*….Ya nadamas es sustituir resultados…* |  | *Acción mental 5. Finalmente, con ayuda de profesor logran cuantificar los cambios de la altura y el volumen con respecto a tiempo, lo que les arroja la razón de cambio buscada.* |

*Tabla 4.3.1. Diálogos entre Gonzalo, Omar y el profesor del problema 3.*

**Problema 4.**

La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta $T$ (en grados Kelvin) y la presión $P$ (en atmósferas) con un volumen $V$ (en litros), es $PV = nRT$; donde $n$ es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8atm$ y que aumenta a razón de $0.10\frac{atm}{min}$, además $V = 10l$ y disminuye a razón de $0.15\frac{l}{min}$. Determinar la razón de cambio de $T$ con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10mol$.

*Gonzalo y Omar:*

Gonzalo lee el problema y anota los datos, Omar por su parte comenta que le parece que es similar a otro problema que ya habían resuelto previamente, y que lo buscará para guiarse. Gonzalo identifica las variables y las constantes al momento de ir leyendo el problema. Nuevamente trabajan por separado en su cuaderno y Gonzalo lo resuelve primero. Después Omar le pregunta cómo lo está haciendo pues él no entiende muy bien como se puede resolver, por lo que Gonzalo lo explica en la pizarra y llega al resultado sin mayor problema (fig. 4.3.3).

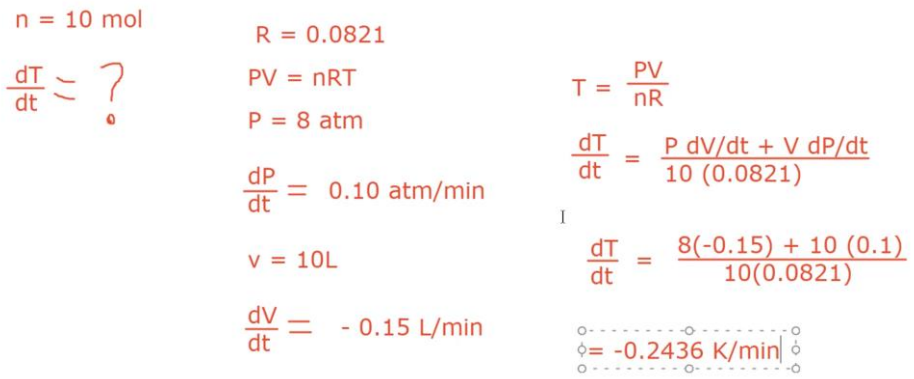



*Figura 4.3.3. Planteamiento y solución del problema.*

En la tabla 4.3.2 se muestra el diálogo entre Gonzalo y Omar, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br>*Omar:* | *... Ok... Tenemos que... n es igual a 10 mol... Necesitamos una dT mayúscula con respecto al tiempo... ok, voy a poner la fórmula... en cierto instante P es igual a 8 atmósferas...*<br><br>*... Yo por lo mientras aquí lo voy planteando acá...* | *Identifica la incógnita del problema.*<br><br>n = 10 mol<br>dT/dt = ?<br>R = 0.0821<br>PV = nRT<br>P = 8 atm | *Acción mental 1. Gonzalo identifica las variables a determinar y su dependencia con respecto al tiempo.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… dP es la razón de 0.10 atm sobre minutos… es una razón… es un dP dt sería no?… con un volumen de 10 litros y disminuye a razón de 0 punto… y voy trazando dV dt y tenemos que dP serían 0.10 atm por minuto y lo otro decía que eran menos… disminuye a razón de 0.15 litros por minuto…* | *Observa la covariación de la presión respecto al tiempo y también la dirección del cambio de volumen respecto al tiempo.*<br>$\frac{dP}{dt} = 0.10$ atm/min<br>v = 10L<br>$\frac{dV}{dt} =$ - 0.15 L/min<br>R = 0.0821 | *Acción mental 3 y 5.* |
| *Omar:* | *… Es un poco parecido al problema del globo que hicimos una vez… Deja lo checo…* | | |
| *Gonzalo:* | *… R es igual a 0.0821…* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |

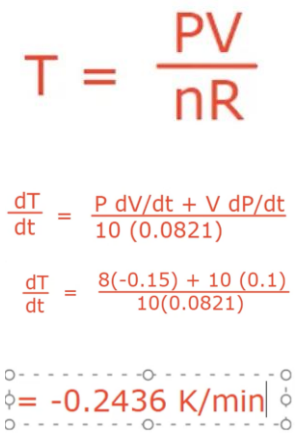
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Bueno, primero lo… pasando lo que yo estaba haciendo… era… pasando de… pasando de la fórmula de la de… la de PV es igual a nRT, despejé… básicamente despejé la T, porque necesitamos un dT mayúscula, diferencial de temperatura en el tiempo, la razón, entonces, queda que T es igual a PV entre nR no?… si… ok… y aquí derivé la T que es lo que buscamos no?… dT mayúscula entre dt minúscula que es el diferencial.. es igual a… y como aquí nos están dando los datos del diferencial de presión y el diferencial del volumen, ahí es como una doble derivada implícita, o no se como decirlo, el de P por V que sería la derivada del primero por el segundo mas la derivada del segundo por el primero no?… Entonces quedará… sería P por dV dt no? Más V dP entre dt no? Y todo esto sobre nR, n y R son constantes, tenemos n, tenemos los 10 moles constantes que son fijos y tenemos que R también es una constante… Tenemos que 10 por 0.0821 no? Es como yo lo había planteado…*<br>*Y como tenemos los datos pues ya tenemos el dT de la temperatura por el tiempo no?*<br><br>*dT entre dt sería igual que… aquí que es… P que en ese instante cuanto dijimos que valía?… 8 atmósferas no? 8 para la razón de cambio del volumen dice que disminuye, entonces sería por menos 0.15 de este lado… más 10 litros, que tiene en ese momento por la razón de cambio de la presión que la presión aumenta a 0.1 y aquí ya igual a 10 por 0.0821 no se si hasta ahí tiene lógica lo que he hecho… no se que pienses Omar…*<br>*… Y esto me dio que es igual a menos 0.2436, entonces es… sería… son temperatura sería… Kelvin entre minutos…* | *Identifica las variables que cambian y las que permanecen constantes, lo que le permite encontrar la solución del problema.*<br>  | *Acción mental 5. Gonzalo pudo identificar rápidamente las literales que son constantes y las que varían con respecto al tiempo, lo que le permitió encontrar la razón de cambio buscada.* |

*Tabla 4.3.2. Diálogo entre Gonzalo y Omar sobre el problema 4.*

**Problema 5.**

Un poste de 5 metros de altura tiene un farol en la parte superior; un hombre de 1.70 metros de estatura se aleja del poste caminando a una velocidad de $1.2\frac{m}{s}$. Cuando la distancia de la base del poste a la punta (parte más alejada de la sombra del hombre es de 6 metros, ¿Con qué velocidad crece su sombra?; ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol?

*Gonzalo y Omar:*

Ambos leen el problema y Omar hace un dibujo que representa el texto del problema y los datos, sin embargo, no les convence el dibujo, lo borran y lo hacen nuevamente (figura 4.3.4).

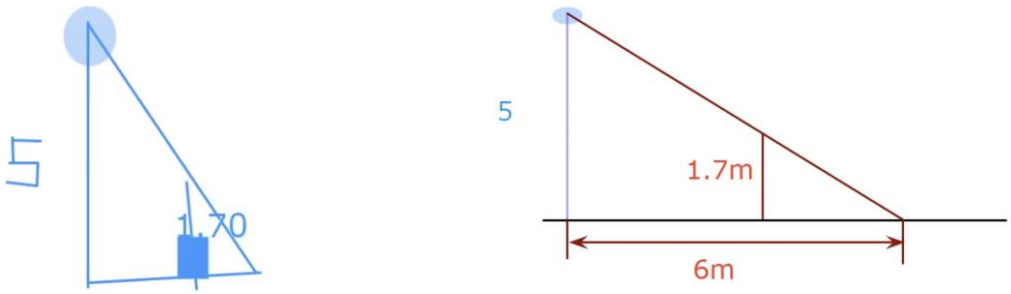
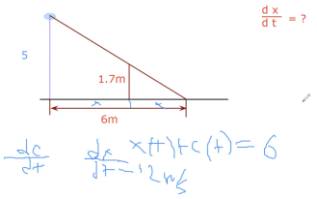



*Figura 4.3.4. Dibujo del problema.*

Después de hacer el dibujo con algunos datos, tratan de ponerse de acuerdo con las incógnitas, que es lo que el problema pide, y como lo pueden representar. Finalmente

deciden trabajar cada uno por su cuenta, Omar escribe en la pizarra del lado inferior izquierdo y Gonzalo trabaja por su cuenta en su cuaderno (Figura 4.3.5).

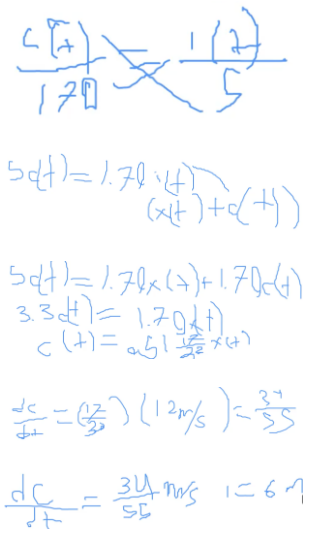



$$\frac{dc}{dt}x(t) + c(t) = 6$$

$$\frac{dx}{dt} = 1.2m/s$$

*Figura 4.3.5. Omar escribe en la parte inferior izquierda (color azul) y Gonzalo en la parte superior derecha (color rojo).*

Gonzalo trata de entender lo que Omar escribe, ya que este último cambia las letras e introduce otras para "hacerlo más fácil", sin embargo, esto le causa confusión a Gonzalo. Omar utiliza semejanza de triángulos para plantear la solución del problema, resuelve y encuentra la solución de la primera pregunta del problema (figura 4.3.6).



*Interpretación*

$$\frac{c(t)}{1.70} = \frac{i(t)}{5}$$

$$5c(t) = 1.70i(t)$$

$$x(t) + c(t)$$

$$5c(t) = 1.70x(t) + 1.70c(t)$$

$$3.3c(t) = 1.70x(t)$$

$$c(t) = 0.51\frac{17}{33}x(t)$$

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{17}{33}\right)(1.2m/s) = \frac{34}{55}$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{34}{55}m/si = 6m$$

*Figura 4.3.6. Semejanza utilizada por Omar.*

Para resolver la segunda parte del problema ambos están de acuerdo en utilizar el Teorema de Pitágoras y Omar es quien plantea la solución (figura 4.3.7).

*Interpretación*

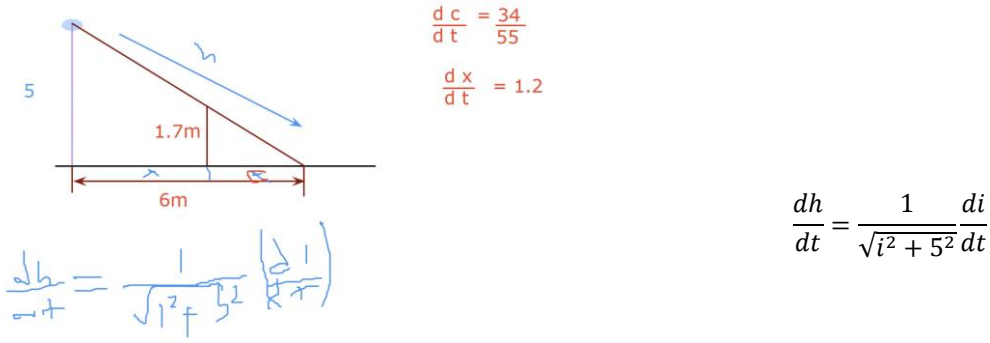



*Figura 4.3.7. Solución de la segunda pregunta del problema.*

Gonzalo hace una comprobación porque no está muy seguro del planeamiento de Omar, y se da cuenta de que lo que Omar ha hecho es correcto (figura 4.3.8).

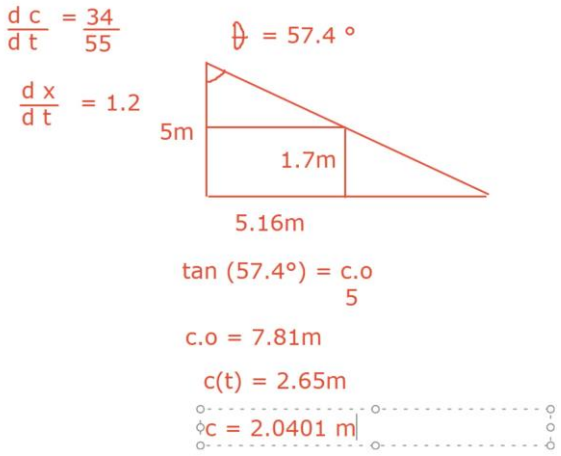
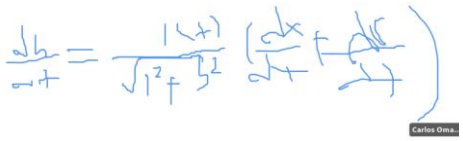


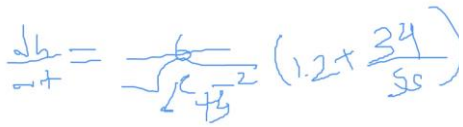

*Figura 4.3.8. Comprobación de Gonzalo.*

Omar continúa con la solución del problema (figura 4.3.9) y lo concluye.



*Interpretación*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{i(t)}{\sqrt{i^2 + 5^2}}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dc}{dt}\right)$$



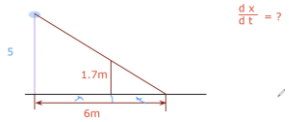
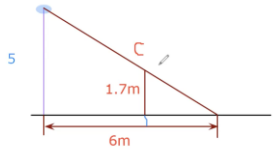
$$\frac{dh}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 5^2}}\left(1.2 + \frac{34}{55}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{120\sqrt{61}}{671}$$

$$= 1.3967 \text{ m/s}$$

*Figura 4.3.9. Solución de la segunda pregunta del problema.*

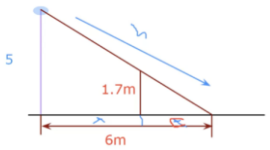
En la tabla 4.3.3 se muestra el diálogo entre Gonzalo y Omar, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:*<br><br>*Omar:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br><br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br><br>*Omar:*<br><br>*Gonzalo:* | *… ¿Qué nos pide?…. a que velocidad crece la sombra…*<br><br>*… Velocidad de crecimiento de la sombra…*<br><br>*… Una velocidad es una derivada, es una razón con respecto al tiempo… Sería cuantos metros avanza en tanto tiempo… de la velocidad con respecto al tiempo… digo la distancia con respecto al tiempo… sería un dx entre un dt…*<br>*… Ya estoy poniendo acá las variables…*<br><br>*… Entonces… como le ponemos a cada uno, o sea… "c" le va a poner a la hipotenusa?…*<br><br>*… Yo le voy a poner a lo del tiempo…*<br><br>*… Pero "c" es esta… la hipotenusa digamos?* | *Identifica el cambio con respecto al tiempo, después sabe que se trata de la covariación de la distancia con respecto al tiempo.*<br>  <br><br>  <br><br> | *Acción mental 5.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… A ver… dice: ¿Con qué velocidad crece la sombra? La sombra pues es de la distancia total menos… a bueno, sería lo de la izquierda no? Bueno, no importaría porque seguiría creciendo siempre… con que velocidad crece su sombra… ah ok porque mientras avanza a la derecha, la persona es la que se mueve…*<br>*… Y con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol… la otra ya sería digamos la velocidad de cambio de la hipotenusa, digamos la razón de cambio de la hipotenusa de la distancia con respecto al tiempo…*<br>⋮ ⋮ | | *Acción mental 5.*<br>*Reconocen la relación funcional entre las variables, hipotenusa con respecto al tiempo.* |
| *Omar:* | *… Si, o sea primero estas dos van a dar pentotal esto… entonces ya con eso ya tendríamos…*<br>*… O sea, esto es "c" con respecto al tiempo también… Estas de acuerdo? Que esto tiene que ser igual a 6 metros… Si, y eso sería nuestra primera ecuación…y pues ya también tenemos el dx aquí… ya tenemos el dx que es igual al que nos dan que sería 1.2 metros entre segundo y ahí ya tenemos otro valor ahí…*<br>⋮ ⋮ ⋮ | $\frac{dc}{dt}x(t) + c(t) = 6$<br>$\frac{dx}{dt} = 1.2m/s$ | *Acción mental 1 y 5.*<br>*Define correctamente la relación funcional entre las variables respecto al tiempo.* |
| *Omar:* | *… Entonces… sería "c"…* $c(t)$ *y este es el de acá que tendría que poner el 1.70… que es igual esto a "i" de inicial de t de 5… según esto así quedaría la semejanza… y ahora nada mas tendríamos que ponerlo… ok, serían 5… esto se cruzan así…* | <br>$\frac{c(t)}{1.70} = \frac{i(t)}{5}$ | *Acción mental 3.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *…A ver… entonces estos se cruzan… este 5 queda del otro lado y este 1.70 queda del otro lado… ya que queda del otro lado sabemos que esta cosa… tenemos que quitar esto de aquí… Entonces esta debería de ser… A ver, déjame pensar tantito… son 5* $c(t)$ *que se pasan del otro lado y eso son 1.70 y serían esos 2 para poder cancelarlos… A ver, deja lo escribo porque ya me perdí…*<br>*… 5 dt es igual a 1.70 por* $\mathrm{i}(t)$ *…* | | |
| *Omar:* | *… La relación de la sombra y también del tiempo… A ver, primero hay que sacar lo de la sombra y ya después nos preocupamos por lo demás… Ok, es equivalente no?… Entonces, que se puede hacer?… lo podemos multiplicar ya directo este 1.70 y quedaría 1.70* $x(t)$ *mas 1.70* $c(t)$ *nada mas por la multiplicación de acá…* | $5c(t) = 1.70x(t) + 1.70c(t)$ | |
| *Omar:*<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Omar:* | *… Entonces sería 1.70* $x(t)$ *mas 1.70* $c(t)$ *… entonces queremos eliminar esta cosa de acá para que nos quede… respecto a una sola, entonces se pasa del otro lado… Sería 5 menos 1.7 sería 3.3 no?…*<br>⁞⁞ ⁞⁞<br>*… 3.3* $c(t)$ *… que esto sería igual al 1.7* $x(t)$ *… Podemos pasar ello 1.7 dividiendo al otro lado y así?…*<br>*… Tenemos que ponerlo respecto a lo de la sombra que es lo que queremos saber, entonces pasamos el 3.3 que sería el 3.3 entre 1.70 no no, sería 1.70 entre 3.3 que sería 1.5151 y se repite no?… Entonces sería… esto es* $c(t)$ *… que esto es igual a 0.51…* $\frac{17}{33}x(t)$ *…*<br><br>*… Y el dc dt ya sería…*<br><br>*… Ya sería con respecto a* $x(t)$ *…* | $5c(t) = 1.70x(t) + 1.70c(t)$<br><br>$5c(t) - 1.7c(t) = 3.3c(t)$<br><br>$3.3c(t) = 1.70x(t)$<br><br>$c(t) = 0.51\frac{17}{33}x(t)$ | *Acción mental 2. Identifica la relación funcional entre las variables que cambian con el tiempo.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:*<br><br><br><br>*Omar:*<br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Gonzalo:* | *… Entonces derivamos implícito a ambos lados o?… es que ya tenemos la* $c(t)$*, que es la sombra, "c" es la de… esto es "c"…*<br>*… A ver, ya tenemos el… el dx dt que era 1.2 metros sobre segundo… y ahorita ya tenemos el "c"…*<br>*…El* $c(t)$ *es lo que andamos buscando a que razón aumenta la sombra…*<br>*… Derivamos implícita… y sería* $\frac{17}{33}$ | | *Ación mental 5. Determina la razón de cambio instantánea de la sombra con respecto al tiempo. Derivando implícitamente con respecto al tiempo, lo que los lleva a la solución del problema.* |
| *Omar:* | *… Que sería la cosa esta… 1.2…*<br>*…Entonces queremos saber cuanto vale dc con respecto al tiempo, entonces vendría siendo.. el que habíamos puesto de… era* $\frac{17}{33}$*… esto va multiplicando por lo que era… caminando a una velocidad… la velocidad que sería 1.2 metros sobre segundo si?…* | | |
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Omar:* | *… Eso da* $\frac{34}{55}$*… es 0.618 pero según yo tendríamos que incluir también la* $i(t)$ *la que ya tenemos de 6 pero no se si sí o no… porque no se si te acuerdas que… pero en todas las pasadas (los ejercicios) no se, por ejemplo en la de volumen, en la de presión y volumen la de* $PV = nRT$ *no se si el volumen en ese instante era tal… y ese sí lo poníamos normal…*<br>*… En el segundo inciso lo que queremos es la hipotenusa…*<br>*… dc dt sería* $\frac{34}{55}$ *metros sobre segundo en nuestro tiempo cero… No, cuando* $i = 6m$ *no?…*<br>*… Ok, a ver como resolvemos el siguiente?…*<br>*A ver, dice, con que velocidad crece su sombra? Ah no esa es la primera… Con que velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol… ok…* | $\frac{dc}{dt} = \frac{34}{55} m/si = 6m$ | *Acción mental 5.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… O sea, ese si es con que velocidad aumenta la hipotenusa… a que razón cambia la hipotenusa…* | | |
| *Omar:*<br><br><br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Omar:* | *… Entonces… "h" (de hipotenusa) ya sabemos que la primera razone cambio es de 34.55 que son 0.618 que esto equivale a 6 metros en ese momento… Entonces estamos de acuerdo que… ya tenemos 34. Y tantos… tenemos "i", tenemos… puedes escribir el dx por fa…*<br><br>*… dx dt que es 1.2 metros sobre segundo…*<br><br>*… Pues Pitágoras no? No hay otra… sabemos que Pitágoras sería que la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de nuestra "i" cuadrada más 5 al cuadrado no?… Entonces ahí ya tenemos una… pues derivada…* | $\frac{dx}{dt} = 1.2$ | |
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br>*Omar:* | *… Si, derivada otra vez… es que para eso necesitaríamos el di dt no? Para tener eso… si, porque tendríamos que derivar implícitamente la "i" y para sacar un di dt necesitaríamos sacar… uno tendríamos un di dt…*<br><br>*… A ver, tenemos la hipotenusa que sería dh dt… sería…* |  | |
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br><br>*Omar:* | *… Y eso nos daría de $\frac{1}{2}$ y abajo sería la raíz cuadrada mas 5 al cuadrado derivada de "i" que sería 2i y se eliminan los 2 y… bueno sería di dt… que sería i entre la raíz de i cuadrada mas 5 al cuadrado di dt esa es la cosa, no tenemos un di dt…*<br><br>*… Pues lo ponemos aquí y ya está…* | $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\sqrt{i^2 + 5^2}} \frac{di}{dt}$ | *Acción mental 5. Identifica la relación funcional de la altura con respecto al tiempo.* |

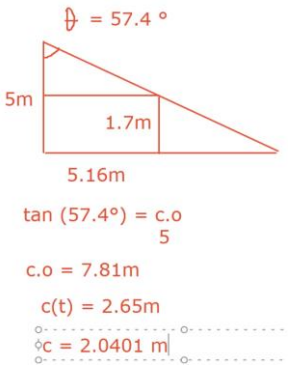
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… O sea, eso es nuestra fórmula, porque el "i" tenemos que en ese instante ya es 6, y necesitamos di dt que podemos sacar de la operación pasada según yo…*<br>*… A ver, acabo de hacer una comprobación rara del pasado… creo que si… del pasado que si está bien… dime dió… A ver te explico rápido…*<br>*… A ver, tenemos que… bueno, 5 y 1.7 son parejos no?… en ese instante sacamos la… lo que te dije hace ratito…* $c(t)$ *en ese instante cuando vale 6, "c" vale 2.04 y si sacamos la diferencia de 6 y 2.04 tenemos que vale 2.96 la parte de aquí ene momento no?… Es una comprobación rara… La cosa que en un segundo instante imaginario, a la* $x(t)$ *se le va a sumar 1.2 en un segundo triángulo y nada más hacer eso… Lo voy a poner acá rápido… En un segundo instante esto ya vale 3.96 mas 1.2 igual a 5.16 metros, este sigue valiendo 5 metros y este 1.70 metros…* |  | |
| *Omar:* | *… Iba con el di dt que sería dx dt mas dc dt que ya es la derivada y pues ya… Y ahora ya solo queda sustituir…* | $\frac{di}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dc}{dt}$ | |
| *Gonzalo:* | *… Sabemos que en ese momento "i" es 6 entre la raíz de i cuadrada mas 5 al cuadrado y di dt que es 1.2 mas* $\frac{34}{55}$*… Es 1.3967…* | $\frac{dh}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+5^2}}\left(1.2+\frac{34}{55}\right)$<br>$\frac{d\,h}{d\,t} = \frac{120\sqrt{61}}{671}$<br>$= 1.3967$ m/s | |

*Tabla 4.3.3. Diálogo entre Gonzalo y Omar sobre el problema 5.*

Problema 6.

Una cámara de televisión, situada a ras del suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde $s$ se mide en pies y $t$ en segundos. La cámara dista $2000 pies$ del punto de lanzamiento.

Calcular el ritmo de cambio del ángulo de elevación $\theta$ de la cámara 10 segundos después del despegue.

*Gonzalo y Omar:*

Gonzalo lee el problema y hace un dibujo representativo poniendo los datos en él (figura 4.3.10).

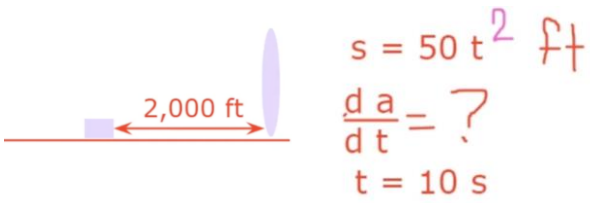



*Figura 4.3.10. Dibujo del problema.*

Omar por su parte comenta que se parece a un problema resuelto previamente, sin embargo, necesita más tiempo para entender el problema e intentar una posible solución y solo escucha atento lo que Gonzalo explica y escribe en la pizarra su primera idea (figura 4.3.11).

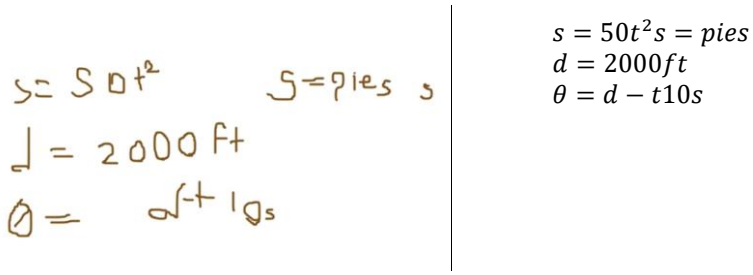
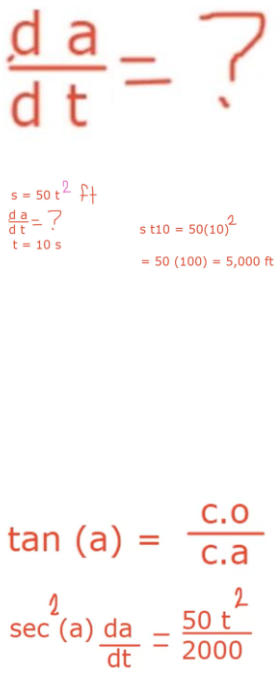



*Fig. 4.3.11. Datos de Omar.*

Después de escribir los datos del problema por separado, ambos trabajan en su cuaderno el problema, pero no comparten nada hasta que el profesor les pregunta que están haciendo, y ambos contestan que están pensando y razonando el problema.

En la tabla 4.3.4 se muestra el diálogo entre Gonzalo y Omar, así como la descripción del diálogo y la acción mental correspondiente.

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Primero voy a poner el dibujo, a ver si ahora si lo se interpretar bien… Tenemos que es una horizontal, acá… esto va a ser el observador de color morado… ahí… y está tomando el despegue de un cohete espacial que sube verticalmente con la ecuación… ok… esto va a ser el cohete espacial… se mueve verticalmente con la ecuación s igual 50 t cuadrada… donde s es en pies y t en segundos… ok… la cámara dista 2 mil pies del punto de lanzamiento… de aquí a acá son 2 mil pies no?* | $s = 50t^2 s = pies$ $d = 2000ft$ $\theta = d - t10s$ | |
| | *… da, dt es nuestra incógnita… Bueno, dice… digamos que en el instante cero es cuando todavía no despega… está a 2 mil pues de distancia… y el cohete va a despegar verticalmente obviamente… después de 10 segundos el cohete ya está… bueno… sería en ese… en 10 segundos… "s" en 10 igual a… sería 50 por 10 al cuadrado… que sería 50 por 100 igual a 5 mil pies no? O sea, que ahí , más o menos lo que estoy razonando sería que ya en el segundo 10 ya estaría ahí y ya tendría una inclinación pues…. Y pues bueno, ya tenemos un triángulo rectángulo de 2 mil y 5 mil y ahí podemos tener una función del ángulo, que la función del ángulo sería una tangente que sería un cateto opuesto entre un cateto adyacente… y ahí podríamos… bueno digamos que el cateto opuesto se mueve en función de "t" que podríamos poner 50 t cuadrada…* |  | *Acción mental 1 y 5. Gonzalo identifica La covariación del ángulo con respecto al tiempo como su incógnita, sin embargo no alcanza a cuantificarla correctamente para determinar la razón de cambio solicitada.* |

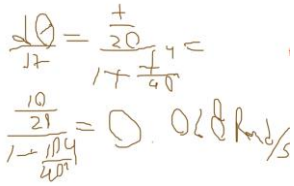
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *Entonces, sabemos que… bueno ahí podríamos derivar nada mas normal con respecto a tema… la derivada de theta con… bueno… nuestro ángulo "a" con respecto al tiempo porque la función de 50 t ya… se muevo con respecto al tiempo y ya es una función de "t"… no se… porque si derivamos tiempo no podemos tener derivada de tiempo entre otra derivada de tiempo no?* | *Del lado izquierdo aparece una expresión implícita, mientras que del lado derecho la expresión es explícita, esto le causa confusión a Gonzalo quien solo deriva el lado izquierdo argumentando que del lado derecho no puede derivar t con respecto a sí misma.* | |
| *Omar:* | *… Es que lo estoy poniendo todo con respecto al tiempo… o sea, ya que obtuve la… cosa de lo del ángulo… Bueno, el chiste es que lo tengo que poner respecto al tiempo no?… siento que me equivoqué en algo… a ver ahorita estoy revisando a ver si me equivoqué o no […]*<br>*Disculpe maestra la respuesta sería punto 068 radianes por segundo?* | *Omar deriva implícitamente la expresión del ángulo, lo que le permite encontrar el resultado buscado.*<br>  <br>$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{t}{20}}{1+\frac{t^4}{40^2}} =$<br>$\frac{\frac{10}{20}}{1+\frac{10^4}{40^2}} = 0.068\frac{Rad}{s}$ | *Acción mental 5.*<br>*Omar logra determinar la relación funcional del ángulo respecto al tiempo, lo que le permitió determinar la razón de cambio instantánea solicitada.* |

*Tabla 4.3.4. Diálogo entre Gonzalo y Omar sobre el problema 6.*

Esta pareja tiene un buen desarrollo algebraico, sin embargo, se les dificulta identificar la covariación entre variables, lo que les provoca inseguridad en su desarrollo. Omar, relacionó saberes previamente adquiridos con cada problema, llegando finalmente a la solución correcta. Gonzalo por su parte, intentó relacionar su

conocimiento sobre el cálculo con los problemas, siempre escribiendo de forma explícita las relaciones planteadas, dejando de lado la covariación entre variables.

Omar escribió en la pizarra electrónica sus ideas y procedimientos, sin embargo, poco se entendía lo que escribió, dada su dificultad para escribir con el ratón. Gonzalo por su parte escribió con cuadros de texto lo que hizo mas entendible sus ideas, pero también manifestó su complejidad para escribir.

De acuerdo con Carlson et al. (2010), Gonzalo solo al trabajar con los últimos problemas (4 y 5) alcanzó el Nivel 5, poniendo de manifiesto las Acciones Mentales correspondientes, pues comprendió la relación funcional entre las variables involucradas en los problemas y pudo encontrar el resultado esperado. Omar, solo alcanzó la Acción Mental 5 en los problemas 3 y 6, pues a pesar del tiempo que le tomó relacionar los conceptos previos, pudo identificar la relación funcional entre las variables involucradas en el problema, logrando encontrar la respuesta esperada. Ya no fue posible entrevistar a Omar para identificar con claridad su nivel alcanzado.

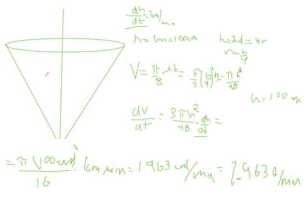
# CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Después de analizar los videos obtenidos de las 3 parejas de estudiantes que participaron en las sesiones de trabajo, daremos respuesta a las preguntas de investigación planteadas al inicio.

## *5.1 Respuesta a las preguntas de investigación*

1. *¿De qué manera los estudiantes de ingeniería abordan los problemas de razón de cambio como problemas de aplicación de la derivada?*

Al presentarse los problemas, las tres parejas leyeron los problemas en repetidas ocasiones tratando de entenderlos, escribieron los datos proporcionados en el problema para después realizar un dibujo de la situación, intentando escribir una expresión algebraica que les ayude a modelar los problemas relacionándolos con problemas trabajados previamente a lo largo de su formación académica. Es en este momento donde presentan mayores dificultades, pues las relaciones que presentan no son funcionales, perdiendo de vista las ideas de covariación entre magnitudes, no alcanzan a vislumbrar que magnitudes cambian con el tiempo y cuales permanecen constantes, lo que les provoca incertidumbre, confusión e inseguridad en su desarrollo. En dos de las tres parejas se identificó la siguiente dificultad: ***no logran identificar la variación entre las diferentes magnitudes, ni las expresiones funcionales que relacionan esas magnitudes para finalmente aplicar las derivadas***. Solo un estudiante (Emilio) de una pareja identificó correctamente la variación entre magnitudes y su única complicación fue la escritura en la pizarra electrónica.

| | | |
|---|---|---|
| *Emilio* | *… Tenemos que dh o sea que es la velocidad de llenado es de 1 cm cada minuto …bueno… al parecer siento que es lo mismo nada mas que cambiamos las fórmulas dV igual a dt sería nuestra derivada implícita y entonces aquí de hecho se me fue no es 2 es 3, la derivamos y tenemos 3 por pi por h cuadrada sobre 48 por dh sobre dt y aquí esto es o más importante porque aquí ya* |  $\frac{dh}{dt} = 1\frac{cm}{min}$ $h = 1m = 100cm$ $h = 2d = 4r$ $r = \frac{h}{4}$ $V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$ $h = 100cm$ $\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{48}\cdot\frac{dh}{dt}$ $= \frac{\pi(100cm)^2}{16}\cdot 1\frac{cm}{min} = 1963\frac{cm^3}{min} = 1.963\frac{l}{min}$ |

| | | |
|---|---|---|
| | *salió la velocidad que es donde va a salir la razón de cambio…* | |

Diálogo de Emilio, pone de manifiesto el Nivel 5 alcanzado sin mayor dificultad (tomado de la Tabla A4 del Anexo).

2. *¿Qué acciones mentales ponen en juego al resolver los problemas de razón de cambio?*

Todas las parejas asocian el cambio de una variable con respecto a otra (Acción Mental 1) (aunque el cambio no sea precisamente el tiempo), por ejemplo, en el problema 3 todos asocian el cambio del volumen con el cambio del radio, en el problema 4 a pesar de que ya tienen la relación que modela el problema, a Dafne y Axel esto les causa confusión pues no identifican las magnitudes que cambian y las que permanecen constantes; Emilio sin problema logra un Nivel 5 con las Acciones Mentales asociadas al mismo en todos los problemas trabajados.

Todas las parejas alcanzan también la Acción Mental 2, pues identifican la dirección del cambio sin mayor dificultad. La Acción Mental 3, solo Eduardo no la logra alcanzar ya que no logra asociar cuantitativamente los cambios de una magnitud respecto a otra. La Acción Mental 4 no se pone de manifiesto pues en ninguno de los problemas intervienen la razón de cambio promedio. Por último, la Acción Mental 5 fue alcanzada por Emilio en todos los problemas trabajados, Axel, por su parte también la alcanzó con algunos tropiezos durante su desarrollo, Gonzalo sólo la puso de manifiesto en los problemas donde la variación fue directa. Omar por otro lado, aparentemente la alcanzó; sin embargo, no se le pudo asignar un Nivel porque no se logró una entrevista que proporcionara los elementos necesarios para asignarlo de manera contundente.

De acuerdo a lo anterior, la primera dificultad que enfrentan los estudiantes es identificar la covariación entre varias magnitudes cuando están relacionadas con el tiempo.

Los estudiantes de primer semestre de ingeniería cuentan con un buen desarrollo algebraico, sin embargo, la mayoría tiene dificultades para identificar la covariación entre variables en los problemas de razón de cambio, esto se hizo más evidente en las clases en línea, ya que a pesar de haber visto previamente le tema de razón de cambio como parte de las aplicaciones de la derivada, al intentar resolver ejercicios de este tema se manifiestan grandes dificultades en la mayoría de los estudiantes para identificar las ideas de covariación.

### *5.2 Trabajo futuro*

Lo que se hizo hasta este momento funcionó sólo como diagnóstico, se requiere en un futuro diseñar actividades que refuercen la identificación de las variables que aparecen en los problemas, así como su cuantificación, que les permita ver las expresiones como relaciones funcionales y no como expresiones algebraicas estáticas, esto implicará la construcción de tablas de valores, gráficas (hasta donde sea posible) y por último medir la variación promedio o la variación instantánea y lo que ello conlleva. Actividades que promuevan las Acciones Mentales en las que se encontraron mayores dificultades, con el fin de que los estudiantes las superen por sí mismos y pongan en juego aquellas que no alcanzaron durante esta investigación.

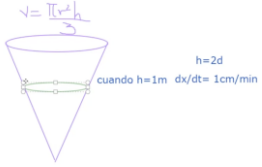
En la actividad presentada, el profesor solo fue espectador y su intervención fue limitada. Se propone que el profesor tenga mayor intervención con fin de que los estudiantes tengan retroalimentación inmediata y aclaren las dudas que les puedan surgir durante el desarrollo de las actividades.

# ANEXOS

## 1. TEXTO DE DIÁLOGOS

### Dafne y Axel

Problema 3

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Tenemos la altura que es como… has de cuenta, este es nuestro metro no?, y después aquí justo aquí la razón de cambio es esta de un centímetro por minuto, entonces la cosa sería […] o sea tenemos la velocidad, sería sacar el volumen que lleva por decirlo, o sea, el volumen que le entra cada minuto y después con el volumen pues ya podemos decir "ah esto es lo que le entra cada minuto"…* | *Lluvia de ideas*   | *Acción mental 1.* |
| *Axel:* | *… Que lo que podemos hacer también es aplicar… (ay no me acuerdo como se llama ese tema), pero es… este, ahora si que cuando es un triángulo chiquito comparándolo con uno grande, la semejanza y así obtendríamos como que una altura mas acertada por así decirlo […] Tendríamos que poner nuestro conito en 2D y partirlo a la mitad…* | | |
| *Axel:* | *… Si no mal recuerdo, así como le hice en el examen de la superior, tenemos que tener dos triángulos, uno grande y uno chiquito, y eso se tiene que convertir a una división para… para ¿como se llama? igualarlos, o sea, de un lado es igual a tal lado sobre el otro lado es igual al otro lado.* | *Trata de explicar como utilizar la semejanza para resolver el problema, sin embargo, no logra concretar su idea.* | *Acción mental 3. Se dan cuenta de que hay una covariación entre el radio y la altura, pero no la cuantifican.* |
| *Dafne:* | *… Ahí si no te entiendo…* | | |
| *Axel:* | *… Veamos, nuestro triangúlote […] y el del agua tendría que ser un poquito mas chico… así… y lo que estamos buscando es esto, esto de aquí, estamos buscando la nueva altura… Esto es "h" no?… y acá está* | | |

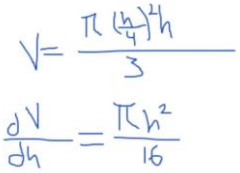
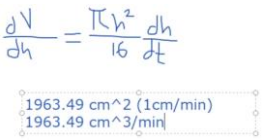
| | | | |
|---|---|---|---|
| | *el radio… Mi pregunta es como hacemos para relacionarlo con esto lo de allá…* | | |
| *Dafne:* | *…V es igual a pi por altura sobre cuatro que viene siendo radio al cuadrado por altura sobre tres no?…* | *El volumen debe estar en función de la altura.*  | *Acción mental 5.* |
| *Axel:* | *…El sobre cuatro de donde viene?* | | |
| *Dafne:* | *…Para plantearlo todo en términos de altura, entonces es radio al cuadrado, pero altura es igual a dos diámetro y diámetro es dos radio […] Entonces, la derivada del volumen sobre la altura queda así […] Entonces, se veía importante, pero la verdad ya no se que hacer con esto […] no se, tengo una idea no?… aquí podemos sacar como la razón de cambio del volumen por la altura no? Pero […]* | | |
| *Axel:* | *… Aquí falta algo […] Si ya derivaste con respecto a la altura es dh sobre dt no?, y el otro es dV sobre dt, no dh.* | *Los cambios del volumen y la altura son con respecto al tiempo.* | *Acción mental 4 y 5. Dafne sabe que existe covariación del volumen con respecto a la altura, sin embargo no alcanza a cuantificarla conforme pasa el tiempo. Y Axel sabe que el volumen y la altura cambian con respecto al tiempo, pero tampoco logra cuantificarlas.* |
| *Dafne:* | *… Pero porque dt? Porque esta no lleva tiempo, esta solo es del volumen…* | | |
| *Axel:* | *… Pero cambia con respecto al tiempo…* | | |
| *Dafne:* | *… Este cambia con respecto a la altura, este es únicamente para el volumen… y es que tanto cambia el volumen dependiendo de cuánto cambia la altura, porque la altura también cambia el radio y esas cosas no?, entonces esta es la relación volumen altura… y esta es la razón de cambio entre la altura y el tiempo que es la que nos habían dado.* |   | |

**Tabla A1. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 3.**

Problema 4

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Bien, solo sustituyamos como con los datos originales y te sale una temperatura y luego sustituyes con los datos después de aplicarles la razón de cambio y te sale otra temperatura y la diferencia es lo que cambió, pero así no va porque estamos viendo cálculo y no puede ser así de sencillo…* | *Lluvia de ideas. Los estudiantes proponen una solución con base a lo que entienden del problema, e intentan plantear la solución.* | *Acción mental 1 y 3.* |
| *Axel:* | *… Hay un dx por dt, esto quiere decir que a fuerzas se tiene que derivar… bueno, hay dos en sí, hay dos pero ahora si que aquí donde esta la x, que x sería T?* | | |
| *Dafne:* | *… Si, pero T mayúscula* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Bueno, en sí no sería dt, sería dT de temperatura no? […] no es dx es dT sobre dt.* | | |
| *Axel:* | *… Ahí esta, y derivamos eso no? Es que aquí entro en duda porque uno o sea una razón dice atm sobre min y lo que tiene atm es la presión y el otro dice… este… litros sobre minuto y eso es volumen…* | | |
| *Dafne:* | *…Bueno lo que cambia son solo […] como los dos de afuera, sería como […] a ver 0.1* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *atm sobre minuto por 0.15 litros por minuto…* | | |
| *Axel:* | *… Se deriva todo con respecto a la temperatura no? […] en el primer caso y en el segundo, bueno, en el primero se deriva con respecto a la presión, en el segundo con respecto al volumen…* | | |
| *Dafne:* | *… A ver escribe entre paréntesis (V+0.1) por (V-0.15)=0.821 T, y ya P su razón de cambio es V y volumen baja y las otras dos son constantes porque no están cambiando en esta operación…* | *Ambos saben que tienen que derivar, pero al ver solo las letras no alcanzan a interpretar la expresión como lo que representa en el problema.*<br>*Solo ven las letras como una relación estática entre las cantidades y no como magnitudes que están cambiando.* | *Acción mental 3 y 4. Dafne visualiza la covariación del volumen sin embargo, asume que la presión cambia con respecto al volumen.* |
| | | | |
| | | | |
| *Axel:* | *… Es que se tienen que sacar dos operaciones con esta fórmula y al final se tiene que sacar la razón de cambio de la temperatura pero… este… te digo las otras razones de cambio van… van… este con diferentes variables, entonces no me cuadra mucho…* | | |
| *Prof:* | *… A ver, que tienen en común los datos que tienen ahí?* | | |
| *Dafne:* | *… Que todos son en minutos?* | | |
| *Prof:* | *… Exacto, todos son respecto al tiempo* | | |
| *Dafne:* | *… Ah si?* | | |
| *Prof:* | *… Entonces que hay que hacer?, ya tienen la fórmula… que hay que hacer?* | | |
| *Dafne:* | *Sustituirlos en la fórmula?* | | |
| *Prof:* | *…Umh no. Acuérdense que primero se deriva y después se sustituyen los datos…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Si, se tiene que derivar pero con respecto a que?… Porque no se puede… ahora si que no es válido ir una por una… este… derivando con respecto algo, derivo con respecto a esto y otra a esto y no pues no…* | | |
| *Prof:* | *No, todas se derivan con respecto a laque tienen en común que ya dio tu compañera que es?…* | | |
| *Axel:* | *El tiempo no?* | | |
| *Prof:* | *… El tiempo, entonces todas se derivan con respecto al tiempo, pero como tienes muchas variables P, V, T y n hay que derivar implícitamente…* | *Al ver que la fórmula tiene solo letras (aunque algunas de ellas representan valores constantes) se confunden y las consideran variables. El profesor trata de orientarlos para que comprendan el papel de cada literal en la fórmula, sin embargo, no logran comprenderlo.* | *Acción menta 4 y 5.* |
| *Axel:* | *… Se tiene que derivar todo para tener la… la derivada al final de T para que sea la razón de cambio no?… Bueno, pongámoslo P' por dT sobre dt chiquita de tiempo…* | | |
| *Prof:* | *… Está bien, pero cuanto vale la derivada de P? Si no tiene exponente ni nada…* | | |
| *Dafne:* | *… La derivada de una constante es 1… digo una variable que diga…* | | |
| *Axel:* | *… No, […] bueno, es 1, entonces aquí es 1, luego por… P que…* | | |
| *Prof:* | *… No, porque es como si tuvieras, o sea P y V son variables, entonces es como si tuvieras un producto de funciones…* | | |
| | ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Primero, no es el… la derivada del segundo por el primero no?* | | |
| *Dafne:* | *… Más, la primera por la derivada de la segunda no?…* | | |
| *Axel:* | *… dt por P mas la derivad de la primera que es dT por V no? Según yo no?…* | | |

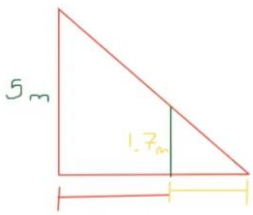
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prof:* | *… R es constante, n creo que también tiene… también es constante, la única que varía es T, o sea, la única variable del otro lado es T.* | | |
| *Axel:* | *… Pues entonces si esa, es así nada mas nos queda dT entre dt de tiempo no?* | *El profesor trata de hacerles ver cuales literales son constantes y como deben manejarlas, sin embargo, aún no lo comprenden, pues para ellos las literales varían.* | *Acción mental 1.* |
| *Prof:* | *… No, pero falta el n y el R, es como si derivas 2x te queda la constante no?* | | |
| *Axel:* | *… Son constantes no? La derivada de una constante es cero…* | | |
| *Prof:* | *… Si, pero se están multiplicando, no se están sumando, si se estuvieran sumando si…* | | |
| *Axel:* | *… Entonces, aquí es cero no?* | | |
| *Prof:* | *… No, a ver, cual es la derivada de 2x?* | | |
| *Axel:* | *…2* | | |
| *Dafne:* | *…2* | | |
| *Prof:* | *… Pues se quedan las constantes, estamos de acuerdo?* | *Por tercera vez el profesor trata de explicar el papel de las literales que no cambian y por lo tanto se quedan en la derivada. Finalmente, logran calcular la derivada, pero no les queda* | *Acción mental 5.* |
| *Axel:* | *… Ajá, ah entonces… si no? dT entre dt* | | |
| *Prof:* | *… No, a ver, otra vez, la derivada de 2x? … cuanto es?* | | |
| *Axel:* | *… 2* | | |
| *Prof:* | *… 2 es la constante, ajá?* | | |
| *Axel:* | *… Entonces sería 10, 10 mol* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prof:* | *… n y R son constantes, la privada de T es dT en dt, ajá?, ya la tienes ahí pero faltan ahí las constantes n y R, porque esas se quedan…* | *muy claro el porqué n y R son constantes.* | |
| *Axel:* | *… Las constantes son 10 y el otro es 0.08…no se que […] Entonces se multiplicarían no?* | *El profesor intenta nuevamente explicarles cuales son variables y cuales son constantes, sin embargo, aún no logran visualizar la covariación entre P y V con respecto al tiempo. Axel insiste en que la temperatura T es la única variable respecto al tiempo y trata de hacerla encajar, aunque no aparezca en la fórmula.* | *Acción mental 3.* |
| *Prof:* | *… Exactamente.* | | |
| *Axel:* | *… Es 10 por cuanto es?… 0.0821 y acá pues queda P mas V igual a dT en dt ¿cuánto equivale esto? Se recorre un punto…* | | |
| *Dafne:* | *… 0.821* | | |
| *Prof:* | *… A ver, ahí en el lado izquierdo tu derivada, bueno lo de arriba, tu derivada… ajá esa, es la derivada de que? dT? T mayúscula?* | | |
| *Axel:* | *…dT sobre t de tiempo más 1 dT sobre dt por V…* | | |
| *Prof:* | *… Pero ahí porque?, o sea si tu producto es PV porqué metes dT? O sea la derivada de la temperatura con respecto al tiempo…* | | |
| *Axel:* | *… Porque ahí si, ahora si que ahí entra esto no?… y aquí son otras unidades, entonces aquí sería P y aquí sería V…* | | |
| *Axel:* | *… Ps ahí está, ya tenemos todo, entonces dV sobre dt es 0.15 por P que es 8 mas dP sobre dt es 0.10 por 10 y ya, entones dT sobre dt es igual a 0.15 por 8 mas 0.10 por 10 entre 0.821…* | *Al final, comprenden cuales son las literales que varían con respecto al tiempo, así como el sentido de esa* | *Acción mental 5.* |

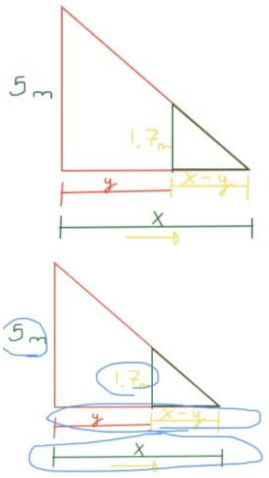
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | *variación y concluyen el problema.* | |
| *Dafne:* | *…da 2.67… Nada más tengo una duda aquí… Es que pues dice que volumen disminuye a razón… entonces, eso significa que esa parte sería negativa no? […] Entonces está mal la operación […] Entonces da menos 0.2436…* | | |
| *Axel:* | *… Kelvin? […] Es que por eso le decía, es que en mi mentecita trabajaba pero me metían duda estos dos de como, ahora si que como se metían en la ecuación…* | | |

**Tabla A2. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 4.**

Problema 5

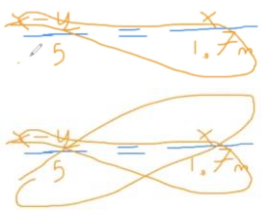
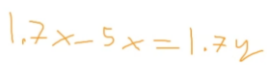
| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Claro que es un triángulo no?…* | *Lluvia de ideas. Dafne lee el problema y Axel va dibujando lo que entiende del problema. Inmediatamente identifica un triángulo rectángulo* | |
| *Dafne:* | *Aja* | | |
| *Axel:* | *… 5 metros… yo que se, así que sean los 5 metros, dice que es de 1.70 que camina hacia acá… camina… ¿cuánto?… No dice verdad?* |   | |
| *Dafne:* | *… no, dice la distancia de la sombra…* | | |
| *Axel:* | *… Supongamos esa distancia… Y pues de aquí a acá es la sombra no?* | | |

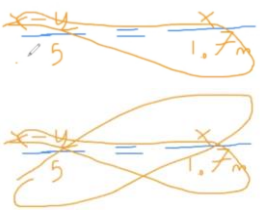
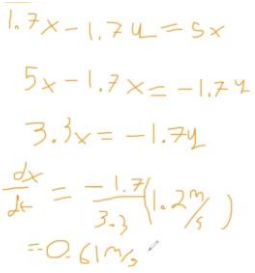
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… Dice que la distancia A va de la base del poste a la punta de la sombra, o sea… abajo, si no? Sería el de abajo?…* | | |
| *Axel:* | *… La distancia de la base del poste a la punta de la sombra es de 6 m, ah! O sea esto es de 6 m. Esto es 5 y esto es 6 no?, y pues el hombre mide 1.70* | | |
| | | | |
| *Dafne:* | *… Entonces suponemos que el momento uno su sombra es de 1.70 o de cero?* | | |
| *Axel:* | *… No, de 1.70* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Dice, bueno como tal no lo dice pero dice que la razón de cambio es este no? La velocidad. Porque dice que una parte la recorre y después, … hace como que otro cambio no? O sea, como que camina más…* | | |

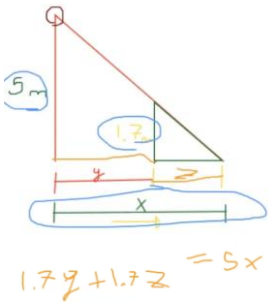
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *…. Estaba pensando… o sea, si está caminando a esa velocidad, pero la sombra no va a crecer igual porque pues el faro está arriba y si está caminando como horizontalmente, ya ves como se hace la luz no? Entre más ángulo tiene, más larga es tu sombra… Nada más que no se como usarlo en el problema…* | *Axel trata de ubicar las variables en su dibujo inicial, sin embargo, no puede concretar su idea pues no está seguro de su planteamiento.*<br>  <br><br><br><br>$\frac{5}{1.7m} = \frac{x}{x-y}$<br>$5(x-y) = x(1.7)$<br>$5x - 5y = 1.7x$<br>$5x - 1.7x = 5y$<br>$3.3x = 5y$ | *Acción mental 2.* |
| *Axel:* | *Esto como son dos triángulos, no se si te acuerdes del primero que nos tocó, de separarlos, o sea en uno chiquito y otro grandote… déjame lo vuelvo a leer…* | | |
| *Dafne:* | *Pues estaba pensando que se teníamos los dos catetos podíamos saber el ángulo de… como que le está dando la luz a la sombra y ver por la distancia que hay entre el faro y la sombra en ese momento, para que? No se, pero pues… datos me dan y así…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Aaaa yo creo que ya utilizar ángulos hasta va a ser como que un poquito más complicado…* | | |
| *Dafne:* | *… Pero es que no tenemos que hacer el ángulo, podemos utilizar Pitágoras y ya…* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Axel:* | *… Fíjate, de todo esto… de todo esto de acá, supongamos una distancia "x" no?, y de este cachito… del rojo podría ser "y"… y este cacho es la resta… ahora si que este grandote que es "y" menos "x"… Entonces como te dije… lo de igualar los triángulos, se compara esto con esto y esto con esto y bueno, utilizando de ese tema que no me acuerdo su nombre, ve, sería 5 que es la altura del farolito, sobre el 1.70 que es la altura del hombre y del otro lado es… este … comparar la distancia grande entre este cachito porque es lo que vamos… o sea a evaluar no?… Haciendo todo este cachivache es 5 por "x" menos "y" es igual a "x" por 1.70… Entonces, haciendo cada cosa, es este con este, esto con este 5x menos 5y e igual a 1.7 x… Te parece razonable? O no?* | | |
| *Dafne:* | *… Regla del sandwich…* | | |
| *Axel:* | *… Y este… aquí todavía no podemos hacer mucho, necesitamos encontrar este… "y"… No, no es cierto, más bien este… pasamos "y" para acá y "x" para acá…* | | |
| *Dafne:* | *… 5x menos 1.7… 4.3x es igual a 5y…* | | |
| *Axel:* | *… Es 4.3?* | | |
| *Dafne:* | *… No, digo 3.3… ajá…* | | |
| *Axel:* | *… 3.3x es igual a 5y…* | | |
| *Dafne:* | *… Cual quieres despejar? "x", o "y"?* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… No, todavía no, aquí ya derivamos, aquí derivamos pues para utilizar el… esto sería dx, se cambia, es dx no… como era?… es dv, aquí no es dx es dv sobre dx es igual a 1.2 m/s… Entonces, derivamos esto y pues no da este dx, no no no… ay! Que difícil es esto… dx, pero se deriva con respecto al tiempo no? Sobre 5… sobre 3.3 bueno, esto si lo podríamos pasar para acá no?… dy sobre dt…* | *En su primer intento de solución, Axel sabe que el cambio es con respecto al tiempo, sin embargo, no logra concretar la idea de este cambio, lo que provocó incertidumbre en su proceso y terminó por desecharlo.*<br>$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3.3}\frac{dy}{dt}$<br>$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3.3}\left(1.2\frac{m}{s}\right)$<br>$= 1.81\ m/s$ | *Acción mental 3.* |
| *Dafne:* | *… Si, según yo si…* | | |
| *Axel:* | *No, entonces esto no es dx, de hecho eso está mal… está mal puesto eso…, debería ser dy sobre dt porque… este… como se llama?… lo que queremos encontrar es dt dx no?… A ver… déjame ver el problema… porque dice que con que velocidad crece su sombra… Y el otro, es con que velocidad se mueve la punta… dx sobre dt es igual a 5 sobre 3.3 por 1.2… eso cuanto da?…* | | |
| *Dafne:* | *1.8 m/s. Eso sería cuando está a 6 m no?… Y bueno, ya encontramos el primero… Con qué velocidad crece la… la sombra…* | | |
| *Axel:* | *… Pero dice que con qué velocidad se mueve la punta de la sombra…* | | |
| *Dafne:* | *… Pues yo estaba pensando en plantearlo como… como la de Pitágoras* $a^2$ *es igual a* $b^2$ *mas* $c^2$ *… entonces "a" sería la hipotenusa y luego "b" serían los 5 m y "c" sería lo de abajo… entonces como sacas la relación entre la sombra abajo y la distancia a la punta del farol… eso lo combinas con la otra razón de cambio…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Pero también… Bueno no se… se tendrá que derivar también?…* | *En el segundo intento de solución, ya tienen claro que la semejanza puede llevarlos a la solución del problema, sin embargo, al final de su proceso en encuentran con un resultado negativo que les indica que "algo" está mal, pues saben claramente que la sombra crece, por lo que vuelven a desechar este segundo intento.*  | *Acción mental 2 y 3.* |
| *Dafne:* | *… Tal vez…* | | |
| *Axel:* | *… Si, es que creo que si se tiene que derivar… Porque supongo que también es respecto a esto no?… Creo que estamos mal..* | | |
| | ⋮ ⋮ |  | |
| *Dafne:* | *… Entonces… como lo planteamos?* | | |
| *Axel:* | *Ah! Ya me acordé como se llama esto: La semejanza!…* | | |
| *Dafne:* | *… Ándale! Esa cosa… como que teníamos la idea pero la planteamos mal… Sabes que hicimos mal? Pusimos los dos números del mismo lado… en la primera que planteaste 5 sobre 1.7 y 5 con "y", como al revés, literalmente son dos hay que cambiarlos, el 5 y el de abajo "x" menos "y" se iría "x" menos "y" o solo "y" con 1.7 y ahí iría 5…* | | |
| *Axel:* | *… Aquí iría el 5 no?…* | | |
| *Dafne:* | *… Ajá…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Y aquí "x"… Pues entonces es "x"… pero termina igual…* |  | |
| *Dafne:* | *… Y si le quitamos la otra "x" a 1.7… Bueno si no… podría simplificar términos pero si… no?* | | |
| *Axel:* | *… Creo que es así.. bueno, hay que borrar todo esto…. Otra vez… 1.7… es mas multipliquemos directamente ya… este con este y este con este… "x" menos 1.7 "y" es igual a 5x… como acá está el mayor mejor lo dejamos así mira 5 menos 1.7x es igual a menos 1.7y… bueno, esto da 3.3 no? 3.3x igual a menos 1.7y… pasamos este para acá dividiendo y al derivar queda dx sobre dt es igual a menos 1.7 sobre 3.3 por 1.2 m/s* |  | |
| *Dafne:* | *… Da 0.51 la división por 1.2 da 0.61 en total 0.618…* | | |
| *Axel:* | *0.61 dejemosla ahí.. y ahora… son m/s esto cuando es a 6 m no?* | | |
| *Dafne:* | *… Lo dejamos positivo no?…* | | |
| *Axel:* | *… Pues es que […] ahora no me digas que multipliqué mal…* | | |
| *Dafne:* | *No, nadamos que… o sea, me saca de onda que vaya decreciendo… pero…* | | |
| *Axel:* | *… Pues va para acá no?… así […] Pero… a ver que pasó aquí?… Creo que no debí de hacer esto… entonces era al revés… es al revés esto, entonces es 1.7 menos 5x es igual a 1.7 "y" y esto positivo… y esto positivo… si no?… Y es que el problema ahora es que aquí queda negativo o tal ves si es esto…* | | |
| *Dafne:* | *… Más bien… no sería… "x" mas "y" o sea sería lo mismo más la diferencia…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Pero es que… ahí se estaría diciendo que "x" mas "y"… o sea, estaría como hasta acá… O sabes que? Aquí que sea "z" pongamos no?, entonces "z" por esto, entonces aquí es 1.7 "z" por… por… por… híjole!… ahora si ya vi… ya quedó… aquí tiene que ser "y" más "z" […] o sea, es 1.7 "y" mas 1.7 "z" y ahora… que procede?… Me está estresando esto!!! Porque no… no, esto no funciona! […] 5"x" no, creo que ahora acomodé mal las variables…* | *El tercer intento de solución. En esta ocasión cambian las variables (las primeras no les convence y los confunde), y plantean el problema de la misma forma que en el segundo intento, pero con otras letras. Sin embargo, al hacer los cálculos Axel se da cuenta de que su planteamiento no funcionará, porque nuevamente le aparece un signo negativo, por lo que decide "reacomodar" las variables.*   $1.7y+1.7z = 5x$ | *Acción mental 2 y 5.* |
| *Dafne:* | *… Y "x" es igual a "z+y" no?* | | |
| *Axel:* | *… Si, porque equivale a esto… O sea, que ya me entendiste… 5"x" es igual a 1.7 "y" más 1.7 "z" y ahora si ya quedó… Entonces aquí 5"z" menos 1.7 "z" es igual a 1.7 "y"… 3.3 "z" es igual a 1.7 "y" […] pasamos para el otro lado, derivamos y dz, dt o si era "y"… así… todo esto… o sea, la división da 0.51 por 1.2 m/s… 0.681 m/s esto es lo primero no?…* | *Finalmente, con este reacomodo y los cálculos correspondiente les queda el resultado positivo, lo que les da seguridad de que están en lo correcto.* $5z = 1.7x$<br>$5z = 1.7y + 1.7z$<br>$5z - 1.7z = 1.7y$<br>$3.3z = 1.7y$<br>$\frac{dz}{dt} = 0.51(1.2^{m}/_{s}) = 0.618^{m}/_{s}$ | |
| *Axel:* | *Ahora si ya quedó… ya nos quedó positivo…* | | |
| *Dafne:* | *Ahora usamos lo que tú dijiste porque si me parece coherente… Lo de Pitágoras […] como sería este rollo?* | *Ambos tienen claro que usando el Teorema de Pitágoras pueden* | *Acción mental 5.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Axel:* | *… Si, $c^2$ … Y yo creo que como tenemos esto nada más dejamos el resultado […] borramos este y ya…* | *encontrar la razón de cambio con la que se mueve la punta de la sombra respecto al farol.* $c^2 = 5^2 + x^2$ | |
| *Dafne:* | *… Entonces $a^2$ podría ser el 5 metros que no cambia…* | | |
| *Axel:* | *… Más…más $x^2$ no? Que es todo lo de aquí… y… pues hacemos todo esto y directamente esto es igual a la raíz cuadrada de… ponemos primero la "x" que es cuadrada más 25 […] y ahora hay que derivarlo porque en eso sale la… como se llama?…* | $c = \sqrt{x^2 + 25}$ | |
| *Dafne:* | *… La razón de cambio?…* | | |
| *Axel:* | *… Ajá… Pero hay que derivarla… la derivada de esto es dc sobre dt es igual a… si mal no recuerdo esto es… lo de abajo es igualito por la derivada de lo de adentro no?* | $\frac{dc}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ | |
| *Dafne:* | *… "x"… ya ya lo tengo… lo que va arriba es "x"* | | |
| *Axel:* | *… Es que no me acuerdo como es la derivada de esto… ah! Creo que ya vi…. Si… si… si… no no ya ves que era la raíz, bueno si de raíz de "x" era uno entre 2 raíz de "x" y por la derivada de lo de adentro… bueno más bien es cuando es cuadrada…* | | |
| *Dafne:* | *…Ajá… es la mitad de lo de adentro y por eso solo queda una sola no dos…* | $= \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt}\right)$ | |
| *Axel:* | *[…] ahora, sería… bueno ya se derivó esto, entonces respecto a dx no? dx dt pero esto también lo podemos expresar como "x" sobre raíz de $x^2$ más 25 y esto por… por como "x" es la suma de estos dos, pues podemos asumir que esto es la suma de esto… y esto […] Entonces es dy sobre dt y dz sobre dt… y desde el principio nos dijeron que "x" es igual a 6 metros no?* | | |
| *Dafne:* | *… Entonces, sustituimos ahí…* | | |
| *Axel:* | *[…] esto lo podemos poner directo… y es la raíz de 6 por 6… son 36 más 25 […]* | | |

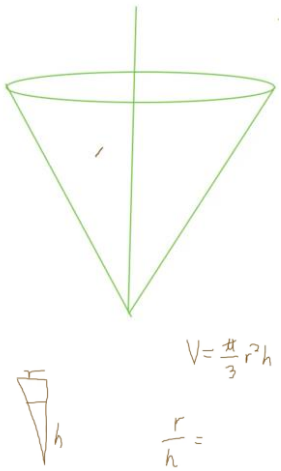
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Dafne:* | *… 61 raíz sería…* | | |
| *Axel:* | *… Por … este… 1.2* | | |
| *Dafne:* | *… Más 0.6…* | | |
| *Axel:* | *… Más 0.618 no?* | | |
| *Dafne:* | *… Si…* | | |
| *Axel:* | *… Bueno, esto… las unidades las pongo aquí al lado… Y eso cuanto da?* | | |
| *Dafne:* | *… Da… 1.396 ya todo…* | | |
| *Axel:* | *… 1.396… dejémoslo en 4 te parece?… 1.4 m/s… y pues ya no? Supongo que ya acabamos no?…* | | |
| *Dafne:* | *… Si.* | | |

**Tabla A3. Texto del diálogo entre Dafne y Axel del problema 5.**

## Emilio y Eduardo

Problema 3

| **Alumno** | Diálogo | **Descripción** | **Acción Mental** |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *… Bueno, pues ahorita voy poniendo lo que llevamos…* | *Lluvia de ideas. Emilio y Eduardo intentan resolver el problema por su cuenta trabajando en su cuaderno. Emilio empieza a escribir el problema y Eduardo plantea su idea, sin embargo no logra concretarla.* | *Acción mental 1.* |
| *Eduardo:* | *…Ahorita que intenté hacer el dibujo en mi cuaderno, este… hice un triángulo y de ahí se me ocurrió una idea… y si. Lo manejamos por el, o sea y si lo manejamos bidimensionalmente al principio? Y de ahí lo manejamos como un triángulo rectángulo…* | | |
| *Emilio:* | *…Podría ser… pues ahí dale…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Eduardo:* | *…No, a ver… Podríamos ocupar yo que sé… éste… entonces pues nos va a quedar acá nuestro triangulito… ahí, pero sabemos que va a llegar a cierto nivel y este sería nuestro radio… esta sería nuestra altura y de aquí sería nuestro radio… esto primero con la otra fórmula… la del volumen, de algo nos va a servir… ahí va… y de aquí… con esta el triángulo podría salir… el doble de lo… mmm… la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro…* |   | |
| *Emilio:* | *…Bueno, encontré el resultado pero lo hice no por triángulos sino tal cual tomando el cono, bueno, lo que teníamos, por esta fórmula y prácticamente haríamos lo mismo…* | *Emilio relaciona el proceso con el problema anterior y encuentra fácilmente la razón solicitada.* | *Acción mental 5.* |

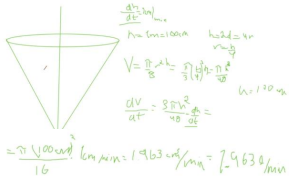
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *… Tenemos que dh o sea que es la velocidad de llenado es de 1 cm cada minuto y así como en el. Pasado nos decía que era a los 10, en este es a 1 metro, pero como estamos, la velocidad nos da en centímetros lo pasé a centímetros para más fácil… Entonces, de aquí… este… pues es pi sobre 3 por el radio al cuadrado sobre h y entonces tenemos la relación de que h es igual a 2 veces el diámetro y eso es igual a 4 veces el radio, entonces r es igual a r sobre 4 al cuadrado sobre h y entonces tenemos la relación de que h es igual a 2 veces el diámetro y eso es igual a ,4 veces el radio, entonces r es igual a r sobre 4 al cuadrado sobre 48… entonces igual que en el pasado, porque… bueno… al parecer siento que es lo mismo nada mas que cambiamos las fórmulas dV igual a dt sería nuestra derivada implícita y entonces aquí de hecho se me fue no es 2 es 3, la derivamos y tenemos 3 por pi por h cuadrada sobre 48 por dh sobre dt y aquí esto es o más importante porque aquí ya salió la velocidad que es donde va a salir la razón de cambio… y entonces, nuestro problema nos dice que en el momento en que h sea igual a 100 centímetros h va a ser igual a 1 centímetro por minuto, entonces sustituyendo me da…pi por los 100 centímetros al cuadrado sobre 16 y eso multiplicado or 1 centímetro por minuto me da 1 punto… bueno, no no no, 1963 centímetros cúbicos por minuto y esto en litros es 1.963 litros por minuto…* |  $\frac{dh}{dt} = 1\frac{cm}{min}$ $h = 1m = 100cm$ $h = 2d = 4r$ $r = \frac{h}{4}$ $V = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{48}$ $h = 100cm$ $\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{48}.\frac{dh}{dt}$ $= \frac{\pi(100cm)^2}{16} \cdot 1\frac{cm}{min} = 1963\frac{cm^3}{min} = 1.963\frac{l}{min}$ | |
| *Eduardo:* | *… Es que me quedé atorado porque quería ocupar este… triángulos semejantes y ya de ahí se supone que ya de ahí sería fácil porque ya me saldría supongo que el resultado de… que tenías acá de h sobre 4 y ya de ahí comparar… tendríamos creo que el mismo procedimiento…* | *Eduardo está correlacionando variables, y no logra la comprensión del problema para plantear una solución correcta.* | *Acción mental 1.* |

**Tabla A4. Texto del diálogo entre Emilio y Eduardo del problema 3.**

Problema 4

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *… Este… No lo habíamos hecho ya maestra?… Uno ya parecido? Cómo lo estas haciendo?…* | *A Emilio el problema le parece familiar* | |
| *Eduardo:* | *…Mmmh… Apenas estoy checando… como lo podríamos plantear… Aquí si no tengo alguna idea en mente…* | *Eduardo no entiende el problema* | |
| *Emilio:* | *…Aquí sacamos la derivada, sustituimos y creo que ya quedaría…* | *Para Emilio, el problema es claro sobre la razón de cambio que busca* | *Acción mental 5.* |
| *Eduardo:* | *… Aquí el rollo es que nos está diciendo que una aumenta y el otro disminuye y nos dan a una razón, entonces ahí sigo atorado… realmente no se como podríamos hacerle…* | *Entiende que una variable cambia con respecto a otra, pero sigue sin comprender el problema* | *Acción mental 1.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Emilio:* | *…Mira… ya saqué esto de aquí, la de T igual a … esta… esta la voy a derivar… A prima por B prima menos B prima por A sobre B al cuadrado… Entonces, aquí va a ser que la derivada de P por V va a ser una… multiplicación y entonces va a ser… derivada de P respecto al tiempo por V mas la derivada de V sobre dt por T… Si no? Y esto es la derivada de lo de abajo… n por R donde primero es cero porque es nuestra constante mas R que es otra constante…. Entonces aquí ya nuestra derivada va a ser… entonces nos queda como dP sobre dt por V mas dV sobre dt por P menos cero sobre n cuadrado por R cuadrado… Aquí sustituimos ¿no?… Tenemos que… este… dP es 0.10 atmósferas por minuto por nuestro volumen que es 10 litros mas la derivada de acá que es menos 0.15 por las 8 que es nuestra presión sobre 100 ya para resolverlo por 0.0821 al cuadrado… según yo, es así… La temperatura disminuye menos 0.2967…*<br>*Ah! Ya se que me faltó… me faltó multiplicarlo por n y R por V … es 0.244 grados Kelvin por minuto…* | *Entiende claramente cuales son las variables que cambian respecto al tiempo, y también cuales permanecen constantes.*<br>$f(x) = \frac{A'B - B'A}{B^2}$<br>$PV = \frac{dP}{dt}V + \frac{dV}{dt}P$<br>$T = \frac{PV}{nR}$<br>$\frac{dT}{dt} = \frac{\frac{dP}{dt}V + \frac{dV}{dt}P - 0}{n^2R^2} = \frac{(0.10) + (-0.15)(8)}{100(0.0821)^2} = 0.2967$<br>$= \frac{[(0.10) + (-0.15)(8)]}{nR} = -0.244 \frac{\square^{\circ} K}{min}$ | *Acción mental 5.* |

**Tabla A5. Texto del diálogo entre Emilio y Eduardo del problema 4.**

Problema 6

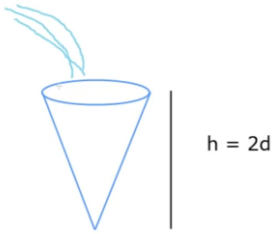
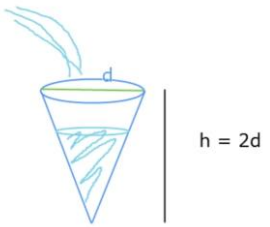
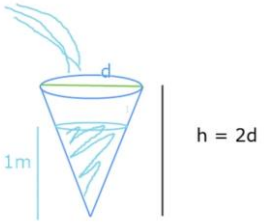
| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Emilio:*<br><br>*Eduardo:* | *… Compañero, creo. Que el dibujo sería así no?*<br><br>*Si, realmente el punto estaría desde alguna esquina y formaría un triángulo y nadamos sería calcular… dice… 10 segundos después del despegue… pero* | *Lluvia de ideas. Ambos comparten sus ideas para plantear el problema. Y escriben los datos a partir del dibujo.* | *Acción mental 1.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *nos dan una fórmula y pues estaría la cámara…* | | |
| *Emilio:* | *…Entonces ese es el cohete…este es "s", este es "x" y "y" te parece?…* | | |
| *Eduardo:* | *Theta… si…* | | |
| *Emilio:* | *… Entonces nos dice que "x" es igual a 2000 pies…* | | |
| *Eduardo:* | *…Pero creo que lo podríamos sacar con lo del seno y coseno…* | | |
| *Emilio:* | *…Ándale! Si, exacto… Y lo que nos piden… hay que encontrar entonces…el ángulo está acá y la relación entre los dos es la tangente no?…*<br>*Entonces quedamos que es tangente de theta es igual a cateto opuesto entre cateto adyacente […] Al cuadrado entre 2000 no?, entonces theta igual a arcotangente…* | *Relacionan las variables y observan cual es la dependiente y cual la independiente y su relación entre ellas.* | *Acción mental 1 y 2.* |
| *Eduardo:* | *…Arcotangente de 50 t cuadrada sobre 2000…* | | |
| *Emilio:* | *… Y se puede reducir como t cuadrada sobre 40…*<br>*… Dice que t es 10 segundos, entonces es… derivada de la tangente… no, de la cotangente… no, del arcotangente y esa fórmula es… la derivada de esto por el arcotangente por f de x entonces dice que es f prima de x sobre 1 mas la función de f de x al cuadrado… ok, ahora si ya… Cuál es la derivada de t cuadrada sobre 40?… tenemos que es 2t, va a ser 80 menos cero no? Y de ahí se puede reducir con 2600 […] Entonces va a quedar como t sobre 20 sobre 1 más t cuadrada sobre 40 al cuadrado pero aquí terminó como… ah! No, no, porque así esta bien no?… No, es una derivada implícita…*<br>*10 sobre 20 sobre 1 más 100 sobre 40 al cuadrado… un medio de 1 más 10 cuartos al cuadrado y esto es igual a… y quedaría de 0.69 radianes por segundo…* | *Al comprender la covariación entre las variables, puede determinar su variación conforme pasa el tiempo.* | *Acción mental 5.* |

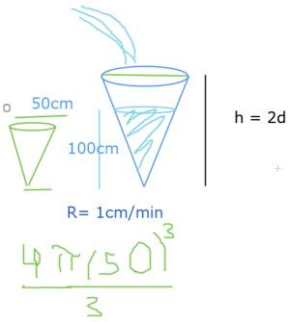
**Tabla A6. Texto del diálogo entre Emilio y Eduardo del problema 6.**

**Gonzalo y Omar**

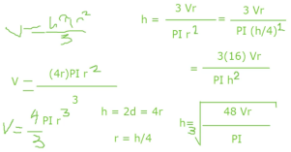
Problema 3

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo* | *… Bueno, tenemos que es un cono circular, bueno cono circular recto invertido… que entonces sería…* | *Lluvia de ideas. Ambos leen el problema y hacen un dibujo que apoye sus ideas.*   | *Acción mental 1 y 2.* |
| *Omar:* | *… Como con forma de embudo no?* | | |
| *Gonzalo:* | *… Y dice la longitud de la altura es el doble del diámetro o sea "h" igual 2d, o sea, al recipiente le está cayendo agua desde arriba y la rapidez constante, la profundidad del agua va en aumento, o sea que va…* | | |
| *Omar:* | *… O sea, que la altura va a ser el doble de esto y acá del diámetro, aquí está… de esta cosa de acá…*   | | |
| *Gonzalo:* | *… Y la profundidad del agua va en aumento, o sea, la profundidad del agua es todo lo de abajo, todo esto de acá es el agua y cuando ahí es de un metro, o sea que la profundidad es de un metro, aumenta a razón de un centímetro por minuto… me imagino que la superficie del agua…*   | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *… A ver, dice un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido… ok, ahí ya lo tenemos… después, la longitud de la altura es el doble del diámetro… ok, aquí ya tenemos 2d y al recipiente le está entrando agua con una rapidez constante por lo que la profundidad del agua… cuando la profundidad es de un metro la superficie sube a razón de un centímetro por minuto…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Volumen de un cono es de un tercio del cilindro no? El volumen del cono sería un tercio altura por pi por radio al cuadrado […] Bueno, para comodidad podríamos pasar la razón de un centímetro por minuto a metros sobre… segundo… me imagino… Si, yo creo que es más cómodo trabajar la distancia en centímetros para no tener números tan…* | | |
| *Omar:* | *… Si, si va a ser mejor…* | | |
| *Gonzalo:* | *… O sea, ponemos la distancia que sea 100 centímetros más fácil pero entonces podemos escribir para empezar la del volumen del recipiente… O sea, la podemos poner como un tercio altura por pi por radio al cuadrado no? Pero tenemos que la altura es 2d o sea 4 veces el radio ok?… Vamos a empezar con eso… V es igual a… sobre 3… la altura va a ser 4r o sea, 4r, luego pi que no tengo como escribirlo así que le voy a poner "pi" y radio cubo… 4 tercios pi radio cubo… Si vamos bien Omar? Todo bien?* | | |
| *Omar:* | *… Es que estoy intentando sacarlo yo aparte para ver si me sale igual…* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Prof:* | *¿Que hay que calcular?* | | |
| *Gonzalo:* | *…Nos pide calcular la rapidez con la que entra el agua al recipiente…* | *Entienden lo que se les pide, pero no logran* | *Acción mental 2.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prof:*<br><br>*Omar:*<br><br>*Gonzalo:* | *…Ok, entonces eso se traduce a?… de acuerdo a su dibujo y a sus letras?*<br><br>*… Al volumen de… bueno al volumen que contiene el agua…*<br><br>*…Bueno… con rapidez se refiere a… dice que le entra agua con rapidez constante… o sea, con volumen constante? Tenemos el mismo tiempo?* | *aterrizar sus ideas, el profesor interviene con preguntas específicas encaminadas a la comprensión de la covariación entre variables. Sin embargo, aún no logran visualizar la relación de covariación.* | |
| *Prof:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Gonzalo:* | *…La rapidez con la que entra es el volumen no?*<br><br>*… Entonces sería una derivada, cual sería esa derivada?*<br><br>*… Sería la derivada de la altura?*<br><br>*… Ajá, sería "dh" en "dt", entonces si tienes dh en dt tu función debe estar en función de "h", no de "r"…*<br><br>*… Si… y "h" sería 3 Vr entre pi r cuadrada…*<br><br>*Si, pero tu ya la escribiste como 2 veces el diámetro, entonces el diámetro a que es igual?…*<br><br>*… A "h" sobre 2…*<br><br>*… Pero además el diámetro es cuantas veces el radio?…*<br><br>*… 2 veces el radio…*<br><br>*… Entonces de ahí, de eso despejas "r" y ya la sustituyes en tu volumen…*<br><br>*… Entonces sería una derivada, cual sería esa derivada?*<br><br>*… Sería la derivada de la altura?* |  | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Ah ok ok ok, tenemos que la razón… que dice?… La superficie sobre la… hay que sacar la altura de ahí… la chiquita… tenemos que es de un centímetro por minuto no?* | | |
| *Prof:* | *… Entonces ese centímetros por minuto que es?* | | |
| *Gonzalo:* | *… Tenemos que es la altura a la que sube cuando está a un metro de profundidad del agua no?… y sube a un centímetro por minuto mientras se está llenando…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Ah ok ok ok, tenemos que la razón… que dice?… La superficie sobre la… hay que sacar la altura de ahí… la chiquita… tenemos que es de un centímetro por minuto no?* | | |
| *Prof:* | *… Entonces ese centímetros por minuto que es?* | | |
| *Gonzalo:* | *… Tenemos que es la altura a la que sube cuando está a un metro de profundidad del agua no?… y sube a un centímetro por minuto mientras se está llenando…* | | |
| *Prof:* | *… Entonces sería una derivada, cual sería esa derivada?* | | |
| *Gonzalo:* | *… Sería la derivada de la altura?* | | |
| *Prof:* | *… Ajá, sería "dh" en "dt", entonces si tienes dh en dt tu función debe estar en función de "h", no de "r"…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Si… y "h" sería 3 Vr entre pi r cuadrada…* | | |
| *Prof:* | *Si, pero tu ya la escribiste como 2 veces el diámetro, entonces el diámetro a que es igual?…* | | |
| *Gonzalo:* | *… A "h" sobre 2…* | | |
| *Prof:* | *… Pero además el diámetro es cuantas veces el radio?…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… 2 veces el radio…* | | |
| *Prof:* | *… Entonces de ahí, de eso despejas "r" y ya la sustituyes en tu volumen…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Omar, ahí cual estas haciendo?* | | |
| *Omar:* | *… Estoy haciendo esto de acá…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Pero es lo de la profundidad del agua? O que es?…* | | |
| *Omar:* | *… Si, cuando tiene ya… cuando tiene 100 cm, o sea, estoy ahorita averiguando el volumen… A ver, voy a ver como lo planteas tú porque ya me perdí tantito…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Omar, ahí cual estas haciendo?* | | |
| *Omar:* | *… Estoy haciendo esto de acá…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Pero es lo de la profundidad del agua? O que es?…* | | |
| *Omar:* | *… Si, cuando tiene ya… cuando tiene 100 cm, o sea, estoy ahorita averiguando el volumen… A ver, voy a ver como lo planteas tú porque ya me perdí tantito…* | | |
| *Gonzalo:* | *… A ver Omar, entonces podemos partir que… bueno, tenemos que la altura (ya despejada)… Es como lo tenía… 3Vr, aquí es pi, luego al cuadrado porque aquí es "h" sobre 4… si verdad?… si, luego esto sería al cuadrado, luego aquí nos quedaría que 38 Vr entre pi "h" cuadrada… 3 por 16 sería r pi h cuadrada y si pasamos la h de este lado ya nadamos sería… "h"… 48 Vr sobre pi, la raíz cúbica…* |  | |
| *Prof:* | *…¿Que es Vr?* | | |
| *Gonzalo:* | *… Volumen del recipiente… A ver Omar, que está haciendo tú? Para ver si voy bien?* | | |

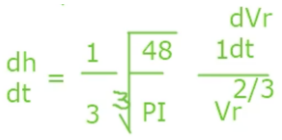
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Prof:* | *… Está haciendo exactamente lo mismo, nada más está separando la del volumen y sustituyendo…*<br>*Es exactamente lo mismo que hizo tu compañero, nadamos que él despejó "h"… y tú nadamos estás sustituyéndolo escribiéndolo… Pero esta bien… Creo que era más fácil derivar implícitamente que despejar "h", pero está bien…* | | |
| *Omar:* | *…Me quedaría algo así como… sería… pi sobre 38 y el otro sería entre 16 creo…* | | |
| *Prof:* | *… ¿Porqué 38?…* | | |
| *Omar:* | *… Ah! No perdón 48 y el otro… así como a primera vista sería como 16 que es el que también tiene aquí Gonzalo en el 3 por 16…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Si, yo despejé la h… creo que lo compliqué más…* | | |
| *Omar:* | *… Según yo y mis locuras quedara de la siguiente forma…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Así quedaría la derivada…* |  | |
| *Prof:* | *… Te falta el dV en dt…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Si, solo que aquí no me cabe… sería dVr sobre dt…*<br>*Bueno, ya tenemos eso… que creo que estamos haciendo exactamente lo mismo Omar…* | | |
| *Omar:* | *… Es para comprobar resultados…* | | |
| *Prof:* | *… Si, pero como que se ve más fácil la de Omar que la tuya…* | | |
| *Omar:* | *… Si, es más fácil pero me tardé como 10 minutos más en empezar que Gonzalo…* | | |
| *Prof:* | *….Ya nadamos es sustituir resultados…* | | |

**Tabla A7. Texto del diálogo entre Gonzalo y Omar del problema 3.**

Problema 4

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br>*Omar:* | *… Ok… Tenemos que… n es igual a 10 mol… Necesitamos una dT mayúscula con respecto al tiempo… ok, voy a poner la fórmula… en cierto instante P es igual a 8 atmósferas…*<br><br>*… Yo por lo mientras aquí lo voy planteando acá…* | *Identifica la incógnita del problema.*<br><br> | *Acción mental 1.* |

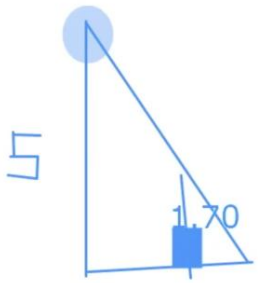
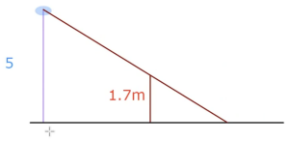
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… dP es la razón de 0.10 atm sobre minutos… es una razón… es un dP dt sería no?… con un volumen de 10 litros y disminuye a razón de 0 punto… y voy trazando dV dt y tenemos que dP serían 0.10 atm por minuto y lo otro decía que eran menos… disminuye a razón de 0.15 litros por minuto…* | *Observa la covariación de la presión respecto al tiempo y también la dirección del cambio de volumen respecto al tiempo.*<br><br>$\frac{dP}{dt} = 0.10$ atm/min<br><br>v = 10L<br><br>$\frac{dV}{dt} = -0.15$ L/min<br><br>R = 0.0821 | *Acción mental 3 y 5* |
| *Omar:* | *… Es un poco parecido al problema del globo que hicimos una vez… Deja lo checo…* | | |
| *Gonzalo:* | *… R es igual a 0.0821…* | | |
| | ⋮ ⋮ | | |
| *Gonzalo:* | *… Hasta ahorita que llevas Omar?…* | | |
| *Omar:* | *… Ahorita estoy buscando el problema… erque hicimos la otra vez…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Ok…* | | |
| *Omar:* | *… Ya me sacó de onda tantito… a ver? Tú como lo estas planteando?* | | |

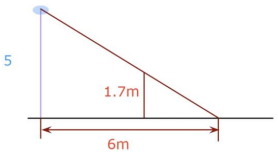
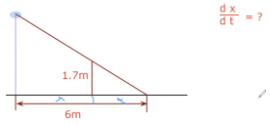
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Bueno, primero lo… pasando lo que yo estaba haciendo… era… pasando de… pasando de la fórmula de la de… la de PV es igual a nRT, despejé… básicamente despejé la T, porque necesitamos un dT mayúscula, diferencial de temperatura en el tiempo, la razón, entonces, queda que T es igual a PV entre nR no?… si… ok… y aquí derivé la T que es lo que buscamos no?… dT mayúscula entre dt minúscula que es el diferencial.. es igual a… y como aquí nos están dando los datos del diferencial de presión y el diferencial del volumen, ahí es como una doble derivada implícita, o no se como decirlo, el de P por V que sería la derivada del primero por el segundo mas la derivada del segundo por el primero no?… Entonces quedará… sería P por dV dt no? Más V dP entre dt no? Y todo esto sobre nR, n y R son constantes, tenemos n, tenemos los 10 moles constantes que son fijos y tenemos que R también es una constante… Tenemos que 10 por 0.0821 no? Es como yo lo había planteado…*<br>*Y como tenemos los datos pues ya tenemos el dT de la temperatura por el tiempo no? Tú como lo hiciste?…* | *Identifica las variables que cambian y las que permanecen constantes, lo que le permite encontrar la solución del problema.*<br>$T = \frac{PV}{nR}$<br>$\frac{dT}{dt} = \frac{P\,dV/dt + V\,dP/dt}{10\,(0.0821)}$<br>$\frac{dT}{dt} = \frac{8(-0.15) + 10\,(0.1)}{10(0.0821)}$ | *Acción mental 5.* |
| | ⋮ ⋮<br>*dT entre dt sería igual que… aquí que es… P que en ese instante cuanto dijimos que valía?… 8 atmósferas no? 8 para la razón de cambio del volumen dice que disminuye, entonces sería por menos 0.15 de este lado… más 10 litros, que tiene en ese momento por la razón de cambio de la presión que la presión aumenta a 0.1 y aquí ya igual a 10 por 0.0821 no se si hasta ahí tiene lógica lo que he hecho… no se que pienses Omar…* | = -0.2436 K/min | |
| *Omar:* | *… Lo estoy viendo…* | | |

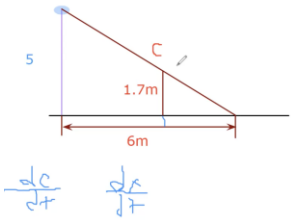
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Y esto me dió que es igual a menos 0.2436, entonces es… sería… son temperatura sería… Kelvin entre minutos…* | | |

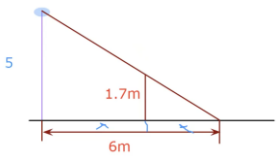
**Tabla A8. Texto del diálogo entre Gonzalo y Omar del problema 4.**

Problema 5

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *… Dice que mide 5 metros no?… y acá se supone que hay un farol, estás de acuerdo?… Entonces también dice que… que está un señor acá no? Que está un señor parado en este lado… Entonces, de este lado el mide 1.70… 1.70… entonces acá arriba está el farol y de este lado está el señor no?… A una velocidad de 1.2 metros sobre segundos… y nos pregunta… y esto sería… ¿con qué velocidad crece su sombra? ¿Con qué velocidad se mueve la punta de la sobra con respecto al… farol?* | *Primer dibujo de la situación*   | *Acción mental 1.* |
| *Gonzalo:* | *… Ah pues bueno… dice que cuando la distancia de la base a la punta de la sombra es de 6 metros…* | | |
| *Omar:* | *… Ahí está borrada, ahí ponlo…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Aquí mide 5 metros no? Tenemos que dibujar un suelo imaginario… de color negro… Esto solo es el suelo… tenemos luna persona aquí… la persona se va a llamar… va a ser una … la punta no nos dice nada… solo es para saber… que onda…* |   | |
| *Omar:* | *… Es que así se me facilita más… saber donde está…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:*<br><br><br><br><br><br><br>*Omar:*<br><br><br>*Gonzalo:* | *… Ok ok… Tenemos que una persona aquí de 1.70 a 5 metros… Y en ese momento de aquí no tiene que pasar por aquí… esa distancia de ahí desde la punta hasta… deja le dibujo una línea con flechita… de aquí hasta aquí en ese momento es de 6 metros no?…*<br><br>*… Pero cambia con respecto al tiempo acá… No, o sea dice… apunta la sombra sobre 6 metros… ok…*<br><br>*… Dice de la punta a la caja… a punta dela sombra… No, dice de la base del farol a la punta de la sombra son 6 metros… Si, dice cuando la base del poste a la sombra es de 6 metros…* |  | |
| *Omar:*<br><br><br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Omar:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br><br><br><br><br>*Omar:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br><br><br>*Omar:* | *… si, entonces también tenemos que dividir acá… bueno, tenemos que dividir la distancia entre el cuate este y acá…*<br><br>*… ¿Qué nos pide?…. a que velocidad crece la sombra…*<br><br>*… Velocidad de crecimiento de la sombra…*<br><br>*… Una velocidad es una derivada, es una razón con respecto al tiempo… Sería cuantos metros avanza en tanto tiempo… de la velocidad con respecto al tiempo… digo la distancia con respecto al tiempo… sería un dx entre un dt…*<br>*… Ya estoy poniendo acá las variables…*<br><br>*…Si, nada mas es para que yo me base…*<br><br>*… Y la otra sería la velocidad, bueno, sería la… si crece la sombra es un dx dt pero la velocidad con la que se mueve la sombra sería la de la hipotenusa no?*<br><br>*… Pues is va avanzando… nadamos se va recorriendo…* | *Identifica el cambio con respecto al tiempo, después sabe que se trata de la covariación de la distancia con respecto al tiempo.*<br>  | *Acción mental 5.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Ah no pero la punta de la sombra con respecto al farol… me imagino…al farol es la punta del poste… entonces es la … sería la hipotenusa…* | | |
| *Omar:* | *… Si, a ver… dice… y esta es dx, así identifico más fácil…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Entonces… como le ponemos a cada uno, o sea… "c" le va a poner a la hipotenusa?…* |  | |
| *Omar:* | *… Yo le voy a poner a lo del tiempo…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Pero "c" es esta… la hipotenusa digamos?* | | |
| *Omar:* | *… Ah no no no, yo estoy poniendo a esta de acá…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Que va a ser tu "c"?* | | |
| *Omar:* | *… Esa parte de ahí… De la pura sombra…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Y son tus incógnitas? O solo estas poniendo…* | | |
| *Omar:* | *… No mira, es que yo entiende que es primero de la hipotenusa y tenemos que averiguar, primero lo de acá y lo de acá…* | | |
| *Gonzalo:* | *… A ver… dice: ¿Con qué velocidad crece la sombra? La sombra pues es de la distancia total menos… a bueno, sería lo de la izquierda no? Bueno, no importaría porque seguiría creciendo siempre… con que velocidad crece su sobra… ah ok porque mientras avanza a la derecha, la persona es la que se mueve…*<br>*… Y con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol… la otra ya sería digamos la velocidad de cambio de la hipotenusa, digamos la razón de cambio de la hipotenusa de la distancia con respecto al tiempo…* | | |

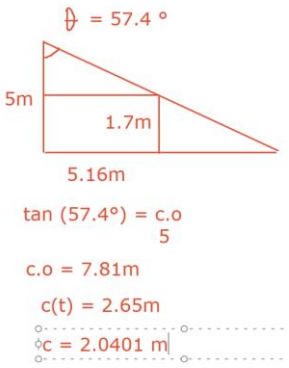
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:*<br><br><br><br><br><br>*Gonzalo:* | *… Si, también tendríamos que saber de aquí a acá… bueno, de aquí, este de aquí y este de acá pues van a formar ya completo el de este… sería… sería "x" con respecto al tiempo, mas mi "c" que sería este de acá que sería el que está después del chavo este…*<br>⋮ ⋮<br>*… A ver, entonces dime como atacarías el problema…* |  | |
| *Omar:* | *… Si, o sea primero estas dos van a dar pentotal esto… entonces ya con eso ya tendríamos…*<br>*… O sea, esto es "c" con respecto al tiempo también… Estas de acuerdo? Que esto tiene que ser igual a 6 metros… Si, y eso sería nuestra primera ecuación…y pues ya también tenemos el dx aquí… ya tenemos el dx que es igual al que nos dan que sería 1.2 metros entre segundo y ahí ya tenemos otro valor ahí…*<br>⋮ ⋮ ⋮<br>*… Ok, entonces ya tenemos que la distancia total del cateto de abajo va a ser la suma de esos 2… Entonces ya tenemos ahí una cosa… son 5… y 1.70… ese es una semejanza…*<br>⋮ ⋮ ⋮<br>*…* $c(t)$*… 2.04 a ver vamos a tratar de hacerlo… te acuerdas cual era la formulista para esto de las semejanzas?…* | $\frac{dc}{dt}x(t) + c(t) = 6$<br>$\frac{dx}{dt} = 1.2m/s$ | |
| *Gonzalo:*<br><br><br>*Omar:* | *… Pues comprarlos, o sea… haciendo con semejanza, la parte de aquí sale 2.04…*<br>*…Entonces… sería "c"…* $c(t)$ *y este es el de acá que tendría que poner el 1.70… que es igual esto a "i" de inicial de t de 5… según esto así quedaría la semejanza… y ahora nada mas tendríamos que ponerlo… ok, serían 5… esto se cruzan así…* | $\frac{c(t)}{1.70} = \frac{i(t)}{5}$ | *Acción mental 3.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… Hasta ahorita no entiendo que quieres hacer pero supongo…* | | |
| *Omar:* | *… Es lo que estoy haciendo con el de semejanzas…* | | |
| *Gonzalo:* | *… O sea si, pero no se a que vas… tú síguelo haciendo a ver si ahorita lo entiendo…* | | |
| *Omar:* | *… Yo quería ver como lo resolvías primero… A ver… entonces estos se cruzan… este 5 queda del otro lado y este 1.70 queda del otro lado… ya que queda del otro lado sabemos que esta cosa… tenemos que quitar esto de aquí… Entonces esta debería de ser… A ver, déjame pensar tantito… son 5* $c(t)$ *que se pasan del otro lado y eso son 1.70 y serían esos 2 para poder cancelarlos… A ver, deja lo escribo porque ya me perdí…*<br>*… 5 dt es igual a 1.70 por* $i(t)$ *…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Tenemos que saber que 1.7 y 5 siempre son constantes…* | | |
| *Omar:* | *… Como el de acá que es equivalente, sería* $x(t)$ *mas* $c(t)$ *… esto sería el equivalente a esto de acá (*$i(t)$*), estás de acuerdo?…* | $5c(t) = 1.70i(t)$<br>$x(t) + c(t)$ | |
| *Gonzalo:* | *… Tu síguela haciendo, porque apenas estoy entendiendo como lo estás haciendo… Es que lo de semejanza de triángulos no se como lo estás planteando… Estas intentando sacar la razón derivando de ahí?…* | | |
| *Omar:* | *… Si porque van a cambiar los 2 triángulos…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Lo que quieres es una fórmula que te de…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *… La relación de la sombra y también del tiempo… A ver, primero hay que sacar lo de la sombra y ya después nos preocupamos por lo demás… Ok, es equivalente no?… Entonces, que se puede hacer?… lo podemos multiplicar ya directo este 1.70 y quedaría 1.70* $x(t)$ *mas 1.70* $c(t)$ *nada mas por la multiplicación de acá…* | $5c(t) = 1.70x(t) + 1.70c(t)$ | |
| *Gonzalo:* | *… Bueno, sabemos que el dx dt siempre va a ser igual a 1.2 no? Eso ya lo tenemos ahí, cuando hagamos una derivación implícita, eso ya lo tenemos ahí…* | | |
| *Omar:* | *… Entonces sería 1.70* $x(t)$ *mas 1.70* $c(t)$ *… entonces queremos eliminar esta cosa de acá para que nos quede… respecto a una sola, entonces se pasa del otro lado… Sería 5 menos 1.7 sería 3.3 no?…*<br>⋮ ⋮<br>*… 3.3* $c(t)$ *… que esto sería igual al 1.7* $x(t)$ *… Podemos pasar ello 1.7 dividiendo al otro lado y así?…*<br>*… Tenemos que ponerlo respecto a lo de la sombra que es lo que queremos saber, entonces pasamos el 3.3 que sería el 3.3 entre 1.70 no no, sería 1.70 entre 3.3 que sería 1.5151 y se repite no?… Entonces sería… esto es* $c(t)$ *… que esto es igual a 0.51…* $\frac{17}{33}x(t)$ *…* | $5c(t) = 1.70x(t) + 1.70c(t)$<br>$5c(t) - 1.7c(t) = 3.3c(t)$<br>$3.3c(t) = 1.70x(t)$<br>$c(t) = 0.51\frac{17}{33}x(t)$ | |
| *Gonzalo:* | *… Y el dc dt ya sería…* | | |
| *Omar:* | *… Ya sería con respecto a* $x(t)$ *…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Entonces derivamos implícito a ambos lados o?… es que ya tenemos la* $c(t)$*, que es la sombra, "c" es la de… esto es "c"…* | | |
| *Omar:* | *… A ver, ya tenemos el… el dx dt que era 1.2 metros sobre segundo… y ahorita ya tenemos el "c"…* | | |
| *Gonzalo:* | *… El* $c(t)$ *es lo que andamos buscando a que razón aumenta la sombra…* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Omar: | ... Y habíamos quedado que era la suma, no, en este caso ya no sería la suma... pues multiplicamos no? | | |
| Gonzalo: | ... Derivamos implícita... y sería $\frac{17}{33}$ | | |
| Omar: | ... Que sería la cosa esta... 1.2...<br>...Entonces queremos saber cuánto vale dc con respecto al tiempo, entonces vendría siendo.. el que habíamos puesto de... era $\frac{17}{33}$... esto va multiplicando por lo que era... caminando a una velocidad... la velocidad que sería 1.2 metros sobre segundo si?... | | |
| Gonzalo: | ... Eso da $\frac{34}{55}$... es 0.618 pero según yo tendríamos que incluir también la $i(t)$ la que ya tenemos de 6 pero no se si sí o no... porque no se si te acuerdas que... pero en todas las pasadas (los ejercicios) no se, por ejemplo en la de volumen, en la de presión y volumen la de $PV = nRT$ no se si el volumen en ese instante era tal... y ese sí lo poníamos normal... | $\frac{dc}{dt} = \frac{34}{55} m/si = 6m$ | Acción mental 5. |
| Omar: | ... No, es que no se podría porque ya lo cambiamos en la equivalencia en la cosa esta de... en la semejanza se supone que con eso ya es equivalente... si lo hubiéramos hecho con la "i" entonces si, tendríamos que cambiarlo...<br>... Y pues eso sería el primero... | | |
| Gonzalo: | ... En el segundo inciso lo que queremos es la hipotenusa... | | |
| Omar: | ... dc dt sería $\frac{34}{55}$ metros sobre segundo en nuestro tiempo cero... No, cuando $i = 6m$ no?...<br>... Ok, a ver como resolvemos el siguiente?...<br>A ver, dice, con que velocidad crece su sombra? Ah no esa es la primera... Con que velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto al farol... ok... | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… O sea, ese si es con que velocidad aumenta la hipotenusa… a que razón cambia la hipotenusa…* | | |
| *Omar:* | *… Entonces… "h" (de hipotenusa) ya sabemos que la primera razone cambio es de 34.55 que son 0.618 que esto equivale a 6 metros en ese momento… Entonces estamos de acuerdo que… ya tenemos 34. Y tantos… tenemos "i", tenemos… puedes escribir el dx por fa…* | $\frac{dx}{dt} = 1.2$ | |
| *Gonzalo:* | *… dx dt que es 1.2 metros sobre segundo…* | | |
| *Omar:* | *… Pues Pitágoras no? No hay otra… sabemos que Pitágoras sería que la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de nuestra "i" cuadrada más 5 al cuadrado no?… Entonces ahí ya tenemos una… pues derivada…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Si, derivada otra vez… es que para eso necesitaríamos el di dt no? Para tener eso… si, porque tendríamos que derivar implícitamente la "i" y para sacar un di dt necesitaríamos sacar… uno tendríamos un di dt…* | | |
| *Omar:* | *… A ver, tenemos la hipotenusa que sería dh dt… sería…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Y eso nos daría de* $\frac{1}{2}$ *y abajo sería la raíz cuadrada mas 5 al cuadrado derivada de "i" que sería 2i y se eliminan los 2 y… bueno sería di dt… que sería i entre la raíz de i cuadrada mas 5 al cuadrado di dt esa es la cosa, no tenemos un di dt…* | | |
| *Omar:* | *… Pues lo ponemos aquí y ya está…* | | |
| *Gonzalo:* | *… La cosa es que tenemos que sacarlo pues… para tener eso…* | | |
| *Omar:* | *… Magia… listo!…* | $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\sqrt{i^2 + 5^2}} \frac{di}{dt}$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *… O sea, eso es nuestra fórmula, porque el "i" tenemos que en ese instante ya es 6, y necesitamos di dt que podemos sacar de la operación pasada según yo…*<br>*… A ver, acabo de hacer una comprobación rara del pasado… creo que si… del pasado que si está bien… dime dió… A ver te explico rápido…*<br>*… A ver, tenemos que… bueno, 5 y 1.7 son parejos no?… en ese instante sacamos la… lo que te dije hace ratito…* $c(t)$ *en ese instante cuando vale 6, "c" vale 2.04 y si sacamos la diferencia de 6 y 2.04 tenemos que vale 2.96 la parte de aquí ene momento no?… Es una comprobación rara… La cosa que en un segundo instante imaginario, a la* $x(t)$ *se le va a sumar 1.2 en un segundo triángulo y nada más hacer eso… Lo voy a poner acá rápido… En un segundo instante esto ya vale 3.96 mas 1.2 igual a 5.16 metros, este sigue valiendo 5 metros y este 1.70 metros… Lo que hice fue usar básicamente trigonometría… es solo comprobación, no estoy sacando nada… y saco esto, y saco el ángulo de la esquina superior izquierda que este vale 5 menos 1.7 que vale 3.3 que sería un cateto adyacente y un opuesto de 5.16… sacas el ángulo y da de 57.4 grados y sacas todo eso para sacar la "i" en ese segundo instante y tienes que… eso es una tangente de 57.4 grados igual a calero opuesto sobre cateto adyacente que sería* $i(t)$ *entre 5 metros y entonces el cateto opuesto en ese momento sería 5 por la tangente de 57.4 grados y da 7.81 metros y luego le restamos el 5.16 para saber la* $c(t)$*, entonces* $c(t)$ *es igual a 2.65 metros y después de eso… pues ya sería el cambio de lo que aumentó en ese momento sería* $\frac{34}{55}$ *lo que aumentó la sombra en ese momento para regresar al inicio y nos daría la distancia original que sería* |  | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *2.04 que solo es para comprobar… si sí iba por buen camino…* | | |
| *Omar:* | *… Iba con el di dt que sería dx dt mas dc dt que ya es la derivada y pues ya… Y ahora ya solo queda sustituir…* | $\frac{di}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dc}{dt}$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Gonzalo:* | *... Sabemos que en ese momento "i" es 6 entre la raíz de i cuadrada mas 5 al cuadrado y di dt que es 1.2 mas $\frac{34}{55}$... Es 1.3967...* | $\frac{dh}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+5^2}}\left(1.2+\frac{34}{55}\right)$<br>$\frac{d\,h}{d\,t} = \frac{120\sqrt{61}}{671}$<br>$= 1.3967$ m/s | |

**Tabla A9. Texto del diálogo entre Gonzalo y Omar del problema 5.**

Problema 6

| Alumno | Diálogo | Descripción | Acción mental |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *... Este es más parecido a los que ya habíamos hecho... del triangulito...* | *Al leer el problema ambos coinciden en el dibujo que lo representa.* | *Acción mental 1.* |
| *Gonzalo:* | *... Primero voy a poner el dibujo, a ver si ahora si lo se interpretar bien... Tenemos que es una horizontal, acá... esto va a ser el observador de color morado... ahí... y está tomando el despegue de un cohete espacial que sube verticalmente con la ecuación... ok... esto va a ser el cohete espacial... se mueve verticalmente con la ecuación s igual 50 t cuadrada... donde s es en pies y t en segundos... ok... la cámara dista 2 mil pies del punto de lanzamiento... de aquí a acá son 2 mil pies no?* | <br>$s = 50t^2 s = pies$<br>$d = 2000ft$<br>$\theta = d - t10s$ | |
| *Omar:* | *... A este cero que sí le estoy entendiendo un poquito mas... dame chance que creo que ya le agarré la onda a este...* | | |
| *Gonzalo:* | *... Si, no te preocupes... calcular el ritmo de cambio del ángulo 10 segundos después del lanzamiento...* | | |
| *Omar:* | *... Voy a empezar a escribir acá abajo a la izquierda...* | | |
| *Prof:* | *... Platíquenme que están haciendo?...* | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:*<br><br>*Gonzalo:* | *… Yo pensando…*<br><br>*… Yo también estoy intentado razonarlo… que bueno, como tal necesitamos un d theta dt no?… No tengo theta, le voy a llamar "a"…* | | |
| *Prof:*<br><br>*Omar:* | *… Creen que necesitan el dibujo?…*<br><br>*… No, denos tantito tiempo, si podemos…* | | |
| *Gonzalo:* | *… da, dt es nuestra incógnita… Bueno, dice… digamos que en el instante cero es cuando todavía no despega… está a 2 mil pues de distancia… y el cohete va a despegar verticalmente obviamente… después de 10 segundos el cohete ya está… bueno… sería en ese… en 10 segundos… "s" en 10 igual a… sería 50 por 10 al cuadrado… que sería 50 por 100 igual a 5 mil pies no? O sea, que ahí , más o menos lo que estoy razonando sería que ya en el segundo 10 ya estaría ahí y ya tendría una inclinación pues…. Y pues bueno, ya tenemos un triángulo rectángulo de 2 mil y 5 mil y ahí podemos tener una función del ángulo, que la función del ángulo sería una tangente que sería un cateto opuesto entre un cateto adyacente… y ahí podríamos… bueno digamos que el cateto opuesto se mueve en función de "t" que podríamos poner 50 t cuadrada…*<br>*Entonces, sabemos que… bueno ahí podríamos derivar nada mas normal con respecto a tema… la derivada de theta con… bueno… nuestro ángulo "a" con respecto al tiempo porque la función de 50 t ya… se muevo con respecto al tiempo y ya es una función de "t"… no se… porque si derivamos tiempo no podemos tener derivada de tiempo entre otra derivada de tiempo no?* | $\frac{da}{dt} = ?$<br>$s = 50\,t^2$ ft<br>$\frac{da}{dt} = ?$<br>$t = 10$ s<br>$s\ t10 = 50(10)^2$<br>$= 50\,(100) = 5{,}000$ ft<br>$\tan(a) = \frac{c.o}{c.a}$<br>$\sec^2(a)\frac{da}{dt} = \frac{50\,t^2}{2000}$<br>*Del lado izquierdo aparece una expresión implícita, mientras que del lado derecho la expresión es explícita, esto le causa confusión a Gonzalo quien solo deriva el lado izquierdo argumentando que del lado derecho no puede derivar t con respecto a sí misma.* | *Acción mental 1 y 5.* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:* | *… Queremos saber después de cuanto tiempo?… ah! De 10 segundos… ok… Entonces, estas de acuerdo de que sería… el ángulo sería la tangente de 50 t cuadrada entre 2 mil…*<br>*… Deja lo pongo en Geogebra a ver si me ayuda…* | | |
| *Gonzalo:* | *…Mira… ahorita lo que estaba viendo es que podríamos poner ya como tal, si derivamos a la izquierda…no, mira yo lo que estaba pensando es que si ponemos… si derivamos desde la izquierda de una vez, es como tangente de "a" queda secante cuadrada no?… la secante cuadrada de "a" y acá… deja veo… Pues mira… hice esto, pero me quedé pensando… no se si tiene sentido…*<br>*… Es que llegué a algo, pero ahora que lo pienso o se si tiene tanto sentido…*<br>*… De 50t cuadrada entre 2 mil y ya no se si esto tenga sentido…* | | |
| *Omar:* | *… A ver.. creo que ya lo tengo… deja hacer el cálculo y ya te digo…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Me dices cuanto te da…*<br>*… da, dt es igual a 50 t cuadrada entre secante cuadrada de "a" por 2 mil… Omar, te parece que tiene sentido esto?* | | |
| *Omar:* | *… Pues mira, ahorita… a ver… derivaste de la tangente no?…* | | |
| *Gonzalo:* | *… Si, de la tangente del lado izquierdo y después de que tengo secante cuadrada de "a" dt porque la de la derecha ya está en función del tiempo, nada mas pasé la secante cuadrada de "a" dividiendo… y el ángulo lo podemos sacar con el Pitágoras de la tangente de opuesto sobre hipotenusa… que vale 5 mil en el segundo 10… no se si tenga sentido para ti…* | | |

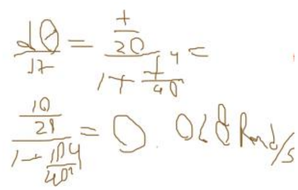
| | | | |
|---|---|---|---|
| *Omar:*<br><br>*Gonzalo:*<br><br>*Omar:* | *…Pues creo que si podría salir, pero la neta no estoy seguro e? Es que no he estado siguiendo mucho tu procedimiento… nada mas me agarré de lo primero que pusiste…*<br><br>*… Bueno, en ese momento… en el instante 10 "a" vale… es arcotangente de 5 mil sobre 2 mil da 68.1985 grados… y ya la ponemos aquí… nos daría que… esta cosa… no, pero no derivé 50t cuadrada… es lo que estoy viendo ahorita… ah no, pero ahí no era la… esa era del ángulo… la posición… No, creo que me análisis está mal ahora que lo checo…*<br><br>*… Yo siento que ya estoy cerca, pero me falta algo… creo que…* | | |
| *Gonzalo:*<br><br>*Omar:*<br><br>*Prof:*<br><br>*Omar:* | *… Tú que estás haciendo? Por donde te estás aproximando al resultado?… o que estás haciendo?…*<br><br>*… Es que lo estoy poniendo todo con respecto al tiempo… o sea, ya que obtuve la… cosa de lo del ángulo… Bueno, el chiste es que lo tengo que poner respecto al tiempo no?… siento que me equivoqué en algo… a ver ahorita estoy revisando a ver si me equivoqué o no […]*<br>*Disculpe maestra la respuesta sería punto 068 radianes por segundo?*<br><br>*… Si…*<br><br>*… Ay! Ya se armó […]*<br>*En lo que siempre me tardo más es en el planteamiento…* | *Omar deriva implícitamente la expresión del ángulo, lo que le permite encontrar el resultado buscado.*<br>  <br>$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{t}{20}}{1+\frac{t^4}{40^2}} =$<br>$\frac{\frac{10}{20}}{1+\frac{10^4}{40^2}} = 0.068\frac{Rad}{s}$ | *Acción mental 5.* |

**Tabla A10. Texto del diálogo entre Gonzalo y Omar del problema 6.**

# REFERENCIAS


Ingeniería aeronáutica. (2019, 20 enero). Ingeniería. https://ingeniero.win/ingenieria-aeronautica/

Aguilar, M. S. (2020, 7 enero). Mathematical help-seeking: observing how undergraduate students use the Internet to cope with a mathematical task. ZDM – Mathematics Education. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-019-01120-1?error=cookies_not_supported&code=02253d35-6819-4c0f-80c5-9d7898bcb376

Aldon, G., Panero, M. Can digital technology change the way mathematics skills are assessed?. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1333–1348 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01172-8

Alvarado, A., Butto, C., Carmona, G., Cepeda, F., Esparza, E., Filloy, E., Gallegos, L., Mochón, S., Moreno, L., Perrusquía, E., Rojano, T., Sacristan, A. I., Tonda, J., Trigueros, M., Ursini, S., & Waldegg, G. (2006). Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula (T. Rojano, Ed.). http://www.matedu.cinvestav.mx/~asacristan/EFIT-EMAT_RojanoEd_06.pdf

Álvarez, N., & Sánchez, E. (202d. C., mayo 29). Voces estudiantiles: pandemia y educación superior internacional. Nexos. https://educacion.nexos.com.mx/voces-estudiantiles-pandemia-y-educacion-superior-internacional/

Ärlebäck, J. B., & Doerr, H. M. (2017). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. ZDM, 50(1–2), 187–200. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5

Benítez Mojica, D. & Bueno Tokunaga, A. Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas *El Cálculo y su Enseñanza* © 2009 Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Bozkurt, G., Uygan, C. Lesson hiccups during the development of teaching schemes: a novice technology-using mathematics teacher's professional instrumental genesis of

dynamic geometry. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1349–1363 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01184-4

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing Students Reasoning Abilities and Understandings. Cognition and Instruction, 28(2), 113–145. https://doi.org/10.1080/07370001003676587

Carlson, M., Sally Jacobs, Coe, E., Sean Larsen, & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378. doi:10.2307/4149958

Cevikbas, M., Kaiser, G. Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1291–1305 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01191-5

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Thomas, M. Teaching with digital technology. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1223–1242 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01196-0

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 75(2), 213–234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

El grave impacto de la pandemia en la educación mundial. (2021, 18 mayo). Human Rights Watch. https://www.hrw.org/es/news/2021/05/16/el-grave-impacto-de-la-pandemia-en-la-educacion-mundial

El portal de la tesis. (s. f.). https://recursos.ucol.mx/tesis/estudios_de_caso.php. Recuperado 12 de julio de 2022, de https://recursos.ucol.mx/tesis/estudios_de_caso.php

Engelbrecht, J. (2020, 26 junio). Transformation of the mathematics classroom with the internet. ZDM – Mathematics Education.

https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01176-4?error=cookies_not_supported&code=70c6de45-b47a-4eb0-81b8-7aafb67ab1f8

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A., & Molina, M. (2011). MATERIALES Y RECURSOS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS (M. García, Ed.). Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf

González, M. (2005, 1 abril). RED Monográfico número III Abril 2005. RED Revista de Educación a Distancia. https://www.um.es/ead/red/M3/

Günster, S.M., Weigand, HG. Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1259–1274 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01179-1

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds),

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. Eco Matemático, 8, 6–15. https://doi.org/10.22463/17948231.1374

Instituto Politecnico Nacional. (s. f.). Portal del Instituto Politecnico Nacional. Recuperado 27 de agosto de 2021, de https://www.esimetic.ipn.mx/conocenos.html

OECD. (s. f.). OECD. Recuperado 28 de agosto de 2021, de https://www.oecd.org/centrodemexico/medios/EAG2020_COVID%20Brochure%20ES.pdf

Pérez Soberanes, A. M., Ruiz Ledesma, E. F., & González González, O. A. (s. f.). Importancia del cálculo en el desarrollo académico del ingeniero. defie. Recuperado 13 de agosto de 2021, de https://www.repo-ciie.dfie.ipn.mx/pdf/338.pdf

Razón de cambio. (s. f.). Universidad de Sonora. Recuperado 30 de julio de 2021, de https://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/razon%20de%20cambio-cb.pdf

Roorda, G., Vos, P. & Goedhart, M.J. AN ACTOR-ORIENTED TRANSFER PERSPECTIVE ON HIGH SCHOOL STUDENTS DEVELOPMENT OF THE USE OF PROCEDURES TO SOLVE PROBLEMS ON RATE OF CHANGE. *Int J of Sci and Math Educ* **13,** 863–889 (2015). https://doi.org/10.1007/s10763-013-9501-1

Roorda, G., Vos, P., Drijvers, P., & Goedhart, M. (2016). Solving Rate of Change Tasks with a Graphing Calculator: a Case Study on Instrumental Genesis. Digital Experiences in Mathematics Education, 2(3), 228–252. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0022-8

Salvador, I. R., & Salvador, I. R. (2018, 8 marzo). Estudio de caso: características, objetivos y metodología. psicologia y mente. Recuperado 13 de julio de 2022, de https://psicologiaymente.com/psicologia/estudio-de-caso

Tall, D. O. (1997a). Functions and Calculus. International Handbook of Mathematics Education, 289–325.

Thurm, D., Barzel, B. Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM Mathematics Education* **52,** 1411–1422 (2020). https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/s11858-020-01158-6