

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
UNIDAD ZACATENCO**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**Procesos cognitivos de profesores con experiencia docente,  
durante la enseñanza de problemas multiplicativos ligados  
a las fracciones**

**TESIS**

Que presenta

**Marta Ramírez Cruz**

Para obtener el grado de

**DOCTORA EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE  
MATEMÁTICA EDUCATIVA**

**Directora de la tesis: Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez**

*Ciudad de México*

*Diciembre, 2022*



# Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo que me brindó al otorgarme la beca de posgrado, para realizar los estudios de doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.



A la Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez por todos los conocimientos y experiencia que compartió durante el desarrollo de este trabajo. Por su apoyo incondicional y comprensión.

A mis sinodales Dra. María Teresa Rojano Ceballos, Dra. Avenilde Romo Vázquez, Dra. Patricia Lamadrid González y al Dr. Carlos Valenzuela García, por el tiempo que dedicaron y por las valiosas sugerencias y observaciones a este documento.

A la profesora Rosa, por su cooperación, disposición el tiempo que nos brindó para este trabajo.

A los profesores Clemente, Fabiola y Magaly, por la participación durante las sesiones de trabajo colectivo.

A Maribel y Mario, compañeros entrañables desde la maestría, por tener la oportunidad de intercambiar ideas.

Adriana Parra, porque en ti encontré apoyo incondicional y siempre amable.



## Dedicatorias

A la memoria de mis padres, Mami Ceci (†) y Don Genaro (†), me enseñaron a tener metas y cumplirlas, por todo el amor que me brindaron.

A mis hermanos, Juanita, Luciano, Pablo, Luis, Kisy, Mary, Isabel, Emy y Rosy, porque han sido un ejemplo a seguir y por todo el apoyo que me han brindado.

A todos mis sobrinos, Ezequiel, Toño, Luciano, Monse, Ángeles, Ceci, Mago, Armando, Dayna, Chavita, Meli, Nikito, Bryan, Beto, Sebastián y Dylan, siempre me han manifestado amor.

A mis compañeros del Centro, Agustín, Noé, ... gracias a todos.



## Resumen

En este trabajo de investigación nos centramos en los *Procesos Cognitivos* de los profesores de Matemáticas con experiencia cuando diseñan, resuelven y reflexionan sobre sus propios procesos ante tareas relativas a la *resolución de problemas* que implican *multiplicación y división* ligados a los *números fraccionarios*. Para obtener los datos, utilizamos instrumentos metodológicos que nos permitieran conocer y tener un acercamiento minucioso al trabajo de los profesores de Matemáticas con amplia experiencia de enseñanza en la escuela secundaria.

Utilizamos las entrevistas porque nos permitieron establecer diálogos con los docentes de Matemáticas de manera individual, así como indagar acerca de sus procesos de resolución, formas de presentación, además de diseños realizados por los propios maestros.

Otro instrumento que tuvimos que adaptar a un ambiente virtual por la contingencia sanitaria (COVID-19), fueron las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas de educación secundaria, consistió en un espacio de interacción (virtual) para establecer una forma de trabajo colectivo e individual que nos permitió conocer y contrastar las formas de representación, de resolución y de justificación de los procedimientos presentados por los docentes. Por otra parte, este instrumento nos dio la oportunidad de promover la reflexión de los profesores sobre su propio trabajo generado durante las Jornadas Académicas.

En conjunto, la aplicación de los instrumentos y el análisis de la información recabada nos proporcionó la posibilidad de identificar los *procesos cognitivos de los profesores de Matemáticas* en educación secundaria cuando resuelven y diseñan problemas multiplicativos relacionados con los números fraccionarios.

## Abstract

In this research work we focus on the Cognitive Processes of teachers when they design, solve and reflect on their own processes before tasks, the resolution of problems involve multiplication and division linked to fractional numbers. To obtain the data, we used methodological instruments that would allow us to know and have a detailed approach to the work of mathematics teachers with extensive teaching experience in secondary schools.

We used the individual interview that allowed us to establish dialogues with mathematics teachers individually, as well as inquire about their resolution processes, forms of presentation, as well as designs made by the teachers themselves teachers.

Another instrument that we had to adapt to a virtual environment due to the health contingency (COVID-19), were the Academic Journeys with secondary school mathematics teachers, consisting of a (virtual) interaction space to establish a form of collective and individual work. that allowed us to know and contrast the forms of representation, resolution and justification of the procedures presented by the teachers. On the other hand, this instrument gave us the opportunity to promote the teachers' reflection on their own work generated during the Academic Journeys.

Together, the application of the instruments and the analysis of the information collected provided us with the possibility of identifying the cognitive processes of mathematics teachers in secondary education when they solve and design multiplicative problems related to fractional numbers.

## Índice

Resumen _____	9
Abstract _____	10
Introducción _____	16
<b>CAPÍTULO 1 _____</b>	<b>21</b>
<b><i>EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, PREGUNTAS Y OBJETIVOS</i> _____</b>	<b>21</b>
<b>1.1 El problema de investigación _____</b>	<b>23</b>
1.1.1 Justificación del problema _____	24
1.1.2 Preguntas de investigación _____	25
1.1.3 Objetivos de la investigación _____	27
1.1.3. a. Objetivo general _____	27
1.1.3. b. Objetivos específicos: _____	28
<b>Marco teórico _____</b>	<b>29</b>
<b>1.2 Antecedentes teóricos y empíricos _____</b>	<b>29</b>
1.2.1 El profesor y la enseñanza de problemas multiplicativos _____	29
1.2.2 La formación de profesores _____	31
<b>1.3 Los números fraccionarios _____</b>	<b>32</b>
<b>1.4 Investigaciones relacionadas con los números fraccionarios _____</b>	<b>33</b>
1.4.1 Las aportaciones de Kieren al campo de estudio de las fracciones _____	34
1.4.2 Los planteamientos de Pitkethly y Hunting _____	34
1.4.3 Los estudios de Behr, Lesh, Post y Silver acerca de las fracciones _____	35
1.4.4 Aportaciones de Freudenthal _____	36
1.4.5 Los planteamientos de Vergnaud acerca de los problemas multiplicativos _____	37
1.4.6 Las aportaciones de Dienes acerca de las fracciones y sus operaciones _____	41
1.4.7 Las investigaciones de Hart y sus aportaciones al estudio de las fracciones _____	42
1.4.8 Acerca de los estudios realizados por Valdemoros _____	43

1.4.9 Aportaciones de diversas investigaciones acerca de la enseñanza de los problemas multiplicativos y las fracciones _____	44
<b>1.5 Los profesores y la enseñanza _____</b>	<b>47</b>
1.5.1 Los roles asignados al profesor _____	47
1.5.2 El profesor como objeto de conocimiento _____	48
1.5.3 El conocimiento del profesor _____	49
1.5.4 Conocimiento matemático para la enseñanza _____	50
1.5.5 El profesor y la enseñanza de los contenidos de la Matemática Escolar _____	50
1.5.6 El profesor como mediador para la transmisión del conocimiento mediante diferentes formas de expresión _____	53
1.5.7 La reflexión sobre los procesos implícitos de la práctica del profesor _____	55
<b>CAPÍTULO 3 _____</b>	<b>99</b>
<b>ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS _____</b>	<b>99</b>
<b>3.1 El modelo de análisis _____</b>	<b>101</b>
<b>3.2 La entrevista individual con retroalimentación _____</b>	<b>105</b>
3.2.1 Las entrevistas a profesores de Matemáticas _____	105
3.2.2 La entrevista de la profesora Rosa _____	106
<b>3.3 Las tareas de la entrevista _____</b>	<b>111</b>
3.3.1 La resolución de problemas _____	112
<b>3.4 La resolución de problemas de Rosa y Carlos _____</b>	<b>123</b>
3.4.1 La resolución de problemas propuesta por Rosa _____	123
3.4.2 La resolución de problemas propuesta por Carlos _____	124
<b>3.5 Los procesos cognitivos de ambos maestros _____</b>	<b>126</b>
<b>3.6 Análisis global del capítulo _____</b>	<b>126</b>
<b>CAPÍTULO 4 _____</b>	<b>129</b>
<b>ANÁLISIS DE LAS JORNADAS ACADÉMICAS _____</b>	<b>129</b>
<b>4.1 Los profesores de Matemáticas con experiencia en la enseñanza _</b>	<b>132</b>

<b>4.2 Las Jornadas Académicas</b>	<b>133</b>
<b>4.3 El modelo de análisis de las Jornadas Académicas</b>	<b>134</b>
<b>4.4 El análisis de problemas multiplicativos que implican fracciones</b>	<b>138</b>
<b>4.5 El diseño metodológico de problemas multiplicativos que implican números fraccionarios</b>	<b>147</b>
<b>4.6 La resolución de problemas multiplicativos con números fraccionarios y la reflexión de los procedimientos</b>	<b>157</b>
<b>4.7 Consideraciones parciales de las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas</b>	<b>165</b>
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>167</b>
<b>LOS PROCESOS COGNITIVOS DE ROSA Y CARLOS</b>	<b>167</b>
<b>5.1 La resolución del problema sobre el inverso multiplicativo del número fraccionario y su vinculación como las operaciones de multiplicación y división (cociente de cocientes)</b>	<b>168</b>
5.1.1 La resolución propuesta por Rosa	169
5.1.2 Acerca de la preparación profesional de Carlos	174
5.1.3 Acerca de la experiencia profesional de Carlos durante la enseñanza	175
5.1.4 La propuesta de resolución al problema del área expresada por Carlos	177
<b>5.2 El problema de la división cuotativa</b>	<b>180</b>
5.2.1 La resolución del problema de división cuotativa expresada por Rosa	180
5.2.2 La resolución expresada por Carlos para el problema de la división cuotativa	182
<b>5.3 El problema del factor escalar</b>	<b>185</b>
5.3.1 La resolución mediante la suma iterada propuesta por Rosa para resolver el problema	185
5.3.2. La propuesta de resolución por parte de Carlos al problema de factor escalar	189

<b>5.4 Los problemas multiplicativos diseñados por los profesores con experiencia en la enseñanza</b>	<b>191</b>
5.4.1 El diseño de división realizado por Rosa	191
5.4.2 El diseño del problema de división presentado por Carlos	192
<b>5.5 Los procesos cognitivos de los maestros</b>	<b>194</b>
5.5.1 El contraste del proceso de formación profesional de Rosa y Carlos y su experiencia de enseñanza	194
5.5.2 Los hallazgos en torno a los núcleos de significación y procesos cognitivos durante la resolución y diseños de los problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios presentados por Rosa y Carlos	195
<b>CAPÍTULO 6</b>	<b>197</b>
<b>ANÁLISIS FINAL DE LOS DATOS</b>	<b>197</b>
<b>6.1 El modelo de análisis</b>	<b>199</b>
6.1.1 En el plano semántico de la división y la multiplicación	199
6.1.2 El plano sintáctico de la multiplicación y la división	200
6.1.3 En el plano de la traducción de un lenguaje a otro	200
6.1.4 En el plano pragmático	200
<b>6.2 Análisis de los fundamentos teóricos</b>	<b>201</b>
6.2.1 El producto de medidas	201
6.2.2 El isomorfismo de medidas	201
6.2.3 Inverso multiplicativo del producto o el inverso multiplicativo del producto de medidas	202
<b>6.3 Análisis del diseño y resolución de problemas</b>	<b>203</b>
6.3.1 Resolución de problemas	203
6.3.2 El diseño de los problemas	203
6.3.3 La reflexión que hacen los docentes de su propia práctica	203
<b>6.4 Análisis de las entrevistas</b>	<b>204</b>
6.4.1 La entrevista inicial a Rosa	205
6.4.1.a Resolución problemas efectuada por Rosa	205
6.4.2 Las representaciones de Rosa	209

6.4.3 La reflexión de su práctica docente _____	209
<b>6.5 La resolución de problemas de Rosa y Carlos _____</b>	<b>210</b>
<b>6.6 Las Jornadas Académicas _____</b>	<b>212</b>
6.6.1 El análisis de los problemas durante las Jornadas Académicas _	213
6.6.2 Limitaciones semánticas de las propuestas de los profesores ____	217
<b>6.7 El diseño de problemas _____</b>	<b>218</b>
<b>CONCLUSIONES _____</b>	<b>223</b>
<b>Referencias Bibliográficas _____</b>	<b>237</b>
<b>APÉNDICE A _____</b>	<b>243</b>
<b>APÉNDICE B _____</b>	<b>245</b>
<b>APÉNDICE C _____</b>	<b>249</b>
<b>Apéndice D _____</b>	<b>255</b>

## Introducción

En México se han aplicado pruebas para medir el logro de los aprendizajes de Matemáticas para alumnos de secundaria, los resultados reportan bajos porcentajes en lo que se refiere al dominio satisfactorio del estudio de los números fraccionarios y la resolución de problemas PLANEA (2017).

En el salón de clase, en Educación Secundaria convergen las acciones de diferentes sujetos cuyo objetivo común es el logro de los aprendizajes esperados de cada ciclo escolar para la asignatura de Matemáticas. Uno de los factores que consideramos como fundamental para lograr esta tarea es el profesor, porque es considerado el mediador entre los contenidos que sugiere el programa de estudio de las Matemáticas y la enseñanza impartida a los estudiantes.

Por otra parte, los *conocimientos matemáticos* con los que cuenta el docente se ponen de manifiesto a través del diseño de tareas y la ejecución de las mismas para llevar al salón de clase situaciones orientadas al logro de los objetivos del programa de estudios de Matemáticas.

*En esta investigación nos interesan los Conocimientos Matemáticos implícitos en los procesos cognitivos de los profesores de matemáticas con experiencia docente que son identificables ante el diseño y resolución de problemas multiplicativos relacionados con números fraccionarios en la escuela secundaria.*

El estudio de las matemáticas en secundaria, sugiere que los alumnos utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales para resolver problemas aditivos y multiplicativos, Plan y Programas de Estudios 2011. En ese sentido, en la presente investigación estamos interesados en indagar acerca de los *procesos cognitivos del profesor* que se ponen de manifiesto a través del diseño, resolución, comunicación de procedimientos y resultados

durante el estudio de las *fracciones y sus operaciones* en un terreno de resolución de problemas.

Los antecedentes del estudio de las fracciones se encuentran desde la educación primaria, continúan y se complementan en la secundaria, (véase apéndice A) es decir, el tratamiento didáctico de los números fraccionarios aparece desde el tercer grado de primaria con un enfoque orientado a que los estudiantes resuelvan problemas de manera autónoma, transitando de procedimientos informales a convencionales a partir del razonamiento y la construcción de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones.

En este ciclo de la Educación Básica se propone que los números fraccionarios sean abordados con la implementación de tareas que se apoyan en constructos de partición, equivalencia y unidades divisibles, así como en el uso de los significados de la fracción como medida, razón, operador, cociente, relación parte-todo, fracciones decimales y fracciones como porcentaje; lo anterior en un contexto de resolución de problemas que impliquen situaciones de reparto, suma y resta en situaciones donde el alumno ubique fracciones en la recta numérica y las compare.

Con estos antecedentes, en la escuela secundaria se continúa con el estudio de los números fraccionarios, específicamente en la *resolución de problemas* que implican operaciones y situaciones relacionadas a razón y proporción; este ciclo de la educación básica pretende que los estudiantes se acostumbren al uso de estos números fraccionarios y con sus diferentes representaciones y operaciones para resolver problemas de la vida cotidiana.

Recuperando estas consideraciones “el estudio de las fracciones es importante porque permite el desarrollo de nociones útiles para el conocimiento de temas más avanzados, como son el razonamiento proporcional y el estudio de las expresiones racionales en el álgebra.” Libro del maestro de secundaria (2006, p. 100).

Para el logro de lo que menciona el Programa de Estudios de Matemáticas en la secundaria, consideramos importante conocer la propuesta de

enseñanza del profesor, en este sentido, Schoenfeld (2000) menciona la importancia de caracterizar en detalle las decisiones y acciones de maestros mientras enseñan rutinas pedagógicas y diseño de guiones, por ello, esta investigación está centrada en identificar el *conocimiento matemático* del profesor, queremos conocer qué influye como factor clave en sus decisiones, el por qué de sus acciones, sus prioridades y cómo, mediante la reflexión, puede mejorar las actividades que propone para sus estudiantes.

La organización de este trabajo consta de la introducción, seis capítulos, y las conclusiones, en lo que sigue presentaremos de manera breve el contenido de cada capítulo de esta investigación.

En el capítulo 1 presentamos el problema de investigación, mencionamos los objetivos del estudio, así como las preguntas que guiaron la investigación. En el Marco Teórico, integramos los antecedentes empíricos y las aportaciones relevantes de estudios relacionados con la enseñanza de las fracciones, resaltando aspectos que enriquecen nuestro estudio además de investigaciones enfocadas a analizar el trabajo del profesor en el aula, que nos permitieron comprender las acciones de los profesores de Matemáticas con experiencia en la enseñanza, cuando diseñan y resuelven problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

En el capítulo 2 presentamos los instrumentos metodológicos utilizados para esta investigación, como el cuestionario, la entrevista individual con retroalimentación y las Jornadas Académicas.

Mostramos los objetivos del diseño de los instrumentos, así como las tareas que integramos. Incorporamos diagramas para indicar el proceso de aplicación de lo que aquí ya hemos indicado.

El capítulo 3 está integrado por el análisis de los datos obtenidos durante dos entrevistas realizadas a la profesora Rosa (la primera estuvo compuesta por 3 sesiones y la segunda por 2 sesiones) y una entrevista al profesor Carlos. Presentamos sus procesos de resolución, así como las reflexiones que

derivaron de los diálogos sostenidos con la profesora Rosa y con el profesor Carlos.

En el capítulo 4 presentamos los resultados y el análisis de la información que proporcionó la puesta en práctica de las actividades para las *Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas*, donde lo fundamental fue el diseño y resolución de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios. De manera paralela a esta actividad se promovió la reflexión mediante el diálogo con la investigadora, entre pares y de manera colectiva.

En el capítulo 5 mostramos un contraste de la información que se obtuvo para poder hacer explícitos los *procesos cognitivos* manifestados por los profesores Rosa y Carlos, lo que identificamos a través de la aplicación de los instrumentos metodológicos diseñados para esta investigación son las entrevistas y las Jornadas Académicas.

En el capítulo 6 integramos los resultados y hallazgos como producto del análisis general de los datos empíricos ligados a todas las actividades realizadas en esta investigación. La parte final del presente escrito está integrada por las conclusiones a las que llegamos en el presente estudio.



# **CAPÍTULO 1**

---

## **EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN, PREGUNTAS Y OBJETIVOS**

Este capítulo consta de cuatro secciones, que nos permitieron organizar toda la información que da sustento a la presente investigación. Asimismo, la utilizamos para analizar los datos obtenidos.

En primera instancia presentamos los datos que justifican el problema de investigación, muestran la importancia de dirigir la mirada al trabajo de los profesores, situación que nos permitió plantear las preguntas de investigación, así como los objetivos. En la segunda sección son integrados los antecedentes teóricos y empíricos del tema de estudio. En la tercera sección, se encuentran los estudios enfocados a los números fraccionarios y sus operaciones. En la cuarta sección son consideradas investigaciones que aportan datos relevantes acerca de las acciones realizadas por los profesores y la enseñanza de contenidos relacionados con los números fraccionarios.

Para el planteamiento del problema de investigación tenemos como referencia las dificultades reportadas en la enseñanza relacionada con las operaciones con números fraccionarios en la Educación Básica. De acuerdo

con esta información, diseñamos instrumentos que nos permitieron indagar y categorizar los procesos cognitivos de los profesores durante el periodo de su práctica de enseñanza en la escuela secundaria.

Para la justificación del problema de investigación, señalamos la importancia de volver la mirada a las actividades que diseñan los profesores desde sus saberes y experiencia de enseñanza. Encontramos antecedentes de este tema en su mayoría referidos a futuros profesores, hay pocos datos actuales respecto a profesores en ejercicio. Mencionamos los posibles alcances del estudio a través del planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos.

Presentamos señalamientos teóricos realizados por investigadores que por décadas se han enfocado al estudio de los números fraccionarios y las operaciones como la multiplicación y la división y dificultades relacionadas con la enseñanza, así como su tratamiento didáctico, por otra parte, hemos considerado las aportaciones que consideramos relevantes acerca del análisis relacionado con el conocimiento de los profesores de Matemáticas en el aula y que nos va a dar la posibilidad de establecer modelos de análisis acerca de las acciones de los maestros. Lo anterior se tomó como referencia para fundamentar el trabajo de investigación que aquí se presenta.

En primera instancia señalamos que los antecedentes del tema para esta investigación, versan sobre aspectos relacionados a la enseñanza de los números fraccionarios y sus operaciones, así como las dificultades que se han identificado para la enseñanza. Continuamos con planteamientos teóricos relacionados a las diferentes interpretaciones de las fracciones y sus operaciones, así como el tratamiento didáctico de este conjunto numérico. Posteriormente se señalan datos relacionados a la formación de profesores e investigaciones que tratan sobre los conocimientos del maestro de Matemáticas.

## 1.1 El problema de investigación

En la Escuela Secundaria en México, la enseñanza de los números fraccionarios y operaciones como la multiplicación y la división a través de situaciones problemáticas forma parte de los contenidos de estudio de las Matemáticas (Plan y Programa de Estudios, 2011), sin embargo, estos contenidos reportan dificultades en torno al logro de aprendizaje a nivel nacional PLANEA (2017).

*Nuestro problema de investigación se enfoca en el trabajo profesional del profesor de Matemáticas, porque en el proceso educativo están implícitas acciones como la planeación y ejecución de diseños didácticos. Por ello, estamos interesados en el diseño de tareas por parte de los profesores de Matemáticas con experiencia docente, destacando aquellas actividades que les permitan promover el logro de aprendizajes.*

*Consideramos que las decisiones pedagógicas serán fundamentadas en conocimientos matemáticos, con base en los saberes de los maestros relacionados con los contenidos de números fraccionarios y para diseñar las tareas que impliquen operaciones como la multiplicación y la división en donde estén considerados los números fraccionarios.*

Coincidimos con investigadores como Kieren (1988), Shoenfeld (2000), entre otros, quienes han señalado la importancia de las acciones del profesor en el aula, así como el impacto que tiene la toma de decisiones para promover ambientes propicios para la construcción de conocimientos relacionados con los números fraccionarios en la clase de Matemáticas.

Por otra parte, presentamos diversas investigaciones orientadas al *conocimiento matemático* de futuros profesores; sin embargo, en este trabajo consideramos que los docentes con experiencia en la clase de Matemáticas pueden proporcionar evidencia de diferentes estrategias y formas de representación que han utilizado y modificado a lo largo de su prolongada práctica educativa, que se ha visto enriquecida con las diversas

experiencias derivadas de la instrucción, en donde se reflejan los contenidos disciplinares que están presentes su práctica.

### **1.1.1 Justificación del problema**

De acuerdo con Llinares y Sánchez (1988), las reformas sociales han contribuido a una mayor escolarización del alumno hasta llegar a la obligatoriedad actual, la gran cantidad de materias a tratar, el fracaso escolar, entre otros motivos, han llevado a reformas curriculares en las que se ha cuestionado la necesidad de centrar la atención en la enseñanza de los conceptos relacionados con las fracciones y, sobre todo, de sus algoritmos durante los primeros niveles educativos.

En este sentido, se ha puesto énfasis a la actualización de currículo oficial, en donde se asigna al profesor la responsabilidad de enfocar la enseñanza valiéndose de recursos como el planteamiento de problemas para tener como resultado que los alumnos adquieran conocimientos basados en el desarrollo de competencias y habilidades, así como apoyar el estudio de los números fraccionarios y de sus operaciones.

El propósito de este trabajo consiste en documentar los *conocimientos matemáticos de profesores* cuando enseñan problemas multiplicativos relacionados con las fracciones, los recursos didácticos que utilizan para el diseño de sus tareas, además de conocer las reflexiones y opiniones que ellos dan de su propia enseñanza cuando abordan temas relacionados a los números fraccionarios. Por lo mencionado anteriormente, coincidimos con Llinares (1988), al resaltar la toma de decisiones por parte del profesor como un aspecto que influye en lo acontecido en el aula. Nos interesa indagar acerca de los conocimientos que emergen ante la necesidad de hacer un plan de clase, de seleccionar contenidos y realizar la validación correspondiente.

En este orden de ideas consideramos las investigaciones de Kieren (1988), cuando afirma que el maestro tiene la responsabilidad de crear y vigilar un ambiente en el cual se viva la Matemática, en este caso, diseñar actividades

que promuevan el *conocimiento matemático* de los números fraccionarios o racionales.

Como ya se dijo, en esta investigación pretendemos indagar en torno a los *procesos cognitivos* de los profesores antes y durante su desempeño en el aula cuando se estudian contenidos relacionados a los problemas multiplicativos ligados a las fracciones.

Para el presente trabajo nos referimos a los *procesos cognitivos* cuando hablamos de conocer los antecedentes teóricos que el docente posee de este tema, los recursos didácticos utilizados para enseñar estos contenidos, conocer los elementos que orientan la toma de decisiones para el diseño de tareas de la clase, las representaciones que utiliza, y los significados asignados a las representaciones utilizadas, cómo son justificados los procedimientos de resolución así como la reflexión que hace de su propia práctica y de sus diseños.

En su investigación, Kieren (1988) señala acerca de las acciones del profesor, una de ellas es presentar situaciones que orienten hacia los aspectos críticos del alumno y su conocimiento de número racional, y aun cuando el estudiante construye el conocimiento, el maestro tiene el papel de dirigir de manera activa y continua la clase de Matemáticas. Consideramos que estas prácticas están integradas por las acciones del docente (antes, durante y después de la clase).

### **1.1.2 Preguntas de investigación**

Esta investigación tiene como propósito identificar los *procesos cognitivos* de *profesores de Matemáticas* con experiencia en la enseñanza en la escuela secundaria, en la problemática de diseño y resolución de problemas multiplicativos ligados a las fracciones. Con base en las ideas anteriores presentamos las preguntas que nos permitieron establecer una línea de acciones en torno al problema de investigación, además de obtener los datos para dar respuesta a los planteamientos, así como documentar las ideas que las fundamentan.

1. *¿Cuál es el conocimiento matemático y pedagógico de los profesores para la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a las fracciones?*

La importancia de las preguntas de investigación reside en aspectos que consideramos nos pueden mostrar los elementos presentes cuando un docente realiza un plan de clase, además de caracterizar aquellos conocimientos de la matemática educativa que el profesor toma como referencia para todo el proceso de enseñanza aprendizaje. En este sentido, tomamos como punto de partida investigar acerca del tipo de preparación de los docentes, la formación continua, y la experiencia como medio de adquisición de conocimientos relacionados con la Matemática escolar, es decir, conocimientos didácticos, pedagógicos y relacionados con los contenidos de números fraccionarios y las operaciones de multiplicación y división que se ven reflejados a través de la enseñanza.

2. *¿Cuáles son los recursos pedagógicos que posee el profesor para enseñar contenidos que implican fracciones?*

En relación con la segunda pregunta coincidimos con Coll y Solé (1999) cuando mencionan la importancia de realizar un diagnóstico que permite establecer juicios en una etapa inicial y con base en ello tener la posibilidad de tomar decisiones fundamentadas en la enseñanza, dichas acciones son atribuidas a cuestiones como “pensamientos psicopedagógicos” (p. 10) de los profesores. Con estos datos, posiblemente los docentes deciden cuál es el proceso más adecuado para lograr sus metas, que en esta investigación están centradas en el proceso de aprendizaje mediante la resolución de problemas multiplicativos. Dicho proceso consideramos inicia a través del diseño de tareas por parte del maestro.

3. *¿Qué tareas diseñan los docentes cuando se enfrentan a situaciones vinculadas a los problemas multiplicativos con números fraccionarios?*

Tomando en consideración que los profesores en ejercicio tienen un cúmulo de experiencias derivadas de la enseñanza, suponemos la puesta en práctica de sus conocimientos y dichas experiencias cuando se le solicita realice diseños de problemas multiplicativos, como un medio de hacer explícitos los saberes interiorizados por parte del maestro durante la enseñanza, suponemos que los hará evidentes mediante la expresión verbal, de manera pictórica u otro tipo de representaciones para mostrar sus diseños y la correspondiente resolución.

#### 4. *¿De qué manera impacta el análisis reflexivo de la práctica docente sobre el diseño de tareas para la enseñanza?*

Este planteamiento se refiere a las actividades que los profesores diseñan y posteriormente al análisis de sus propias tareas, se presentarán situaciones que permitan al maestro reflexionar acerca de sus planteamientos, procedimientos, justificaciones y contenidos seleccionados para diseñar sus actividades, en este sentido coincidimos con los señalamientos de Coll et al. (1999) cuando mencionan que no solo influye la experiencia de la práctica cotidiana del docente, sino reflexión sobre lo que se hace y por qué se hace, es necesario recurrir cuando sea pertinente a referentes que puedan orientar y justificar sus acciones. En este caso para el diseño y la posterior puesta en práctica de las actividades de la clase, así como la reflexión de sus acciones.

### **1.1.3 Objetivos de la investigación**

En torno al problema de investigación que aquí se presenta, a continuación, se expone el objetivo general y los objetivos específicos para orientar el desarrollo del presente estudio.

#### **1.1.3. a. Objetivo general**

En esta investigación interesa *identificar los procesos cognitivos de profesores con experiencia en la enseñanza, en torno a problemas multiplicativos con números fraccionarios, incluye los conocimientos de contenido matemático y pedagógico, las representaciones y los significados que se asignan ante la resolución*

*y diseño de problemas, así como el papel que representa la reflexión sobre la práctica docente y los diseños que los maestros elaboran.*

### **1.1.3. b. Objetivos específicos:**

*a) Identificar los procesos cognitivos de los profesores mediante el análisis de las estrategias, representaciones, procedimientos y algoritmos usados cuando se resuelven problemas multiplicativos que implican números fraccionarios y las operaciones de multiplicación y de la división.*

*b) Determinar cuáles son los problemas multiplicativos relacionados con las fracciones que diseñan los profesores con experiencia docente en la clase de Matemáticas.*

*c) Determinar si el análisis que realizan los profesores acerca de sus acciones, diseños y estrategias favorece la reflexión de su práctica docente y promueve una mejora en torno a sus diseños iniciales. Lo anterior, se pretende lograr con base en el diseño metodológico.*

A continuación, se presentan algunas investigaciones precedentes a los planteamientos mostrados en este trabajo, las consideramos por los aspectos relevantes que aportan y permiten para fundamentar lo que aquí se presenta. Hemos considerado trabajos precedentes a la investigación que aquí mostramos con la finalidad de establecer el estado de la literatura relacionada con el planteamiento del problema, tenemos como punto de referencia los resultados de estudios que son afines con la problemática planteada en este trabajo.

Los estudios que mencionamos están enfocados en investigaciones de los *números fraccionarios, la didáctica y su enseñanza*, por otra parte, también hemos considerado necesario revisar aspectos del *conocimiento matemático del profesor*, su experiencia y práctica en la enseñanza, así como saber si *la reflexión* promueve cambios en las acciones profesionales, en nuestro caso la enseñanza, además de trabajos relacionados con la didáctica y estudio de los números fraccionarios y sus operaciones.

## **Marco teórico**

En esta sección presentamos los antecedentes teóricos y empíricos de la investigación que nos permitieron identificar los *procesos cognitivos* de los profesores con experiencia en la enseñanza en educación secundaria. La información que obtuvimos nos permitió interpretar e identificar las producciones escritas y verbales de los profesores con experiencia, tema central de esta investigación (Briones, 2001, p. 21).

Incorporamos la información que nos permitió hacer las interpretaciones de los números fraccionarios y sus operaciones, las representaciones para las fracciones, las dificultades que representan para la enseñanza y la importancia de la resolución de problemas significativos para promover la comprensión.

También reunimos información que resalta la importancia de los conocimientos matemáticos de los profesores, debido a que son la parte central de esta investigación. Asimismo, hemos considerado presentar aspectos desde la formación docente y sus implicaciones durante la enseñanza.

Decidimos trabajar con un enfoque centrado en la resolución de problemas para los profesores de educación secundaria porque dan la posibilidad de hacer representaciones y de hacer explícitos los conocimientos en torno a contenidos de los números fraccionarios. En el diseño de tareas pensadas para los estudiantes, podemos identificar decisiones pedagógicas, conocimientos y pensamientos. Lo anterior con la reflexión constante entre pares y de manera colectiva expresada de manera oral y escrita.

### **1.2 Antecedentes teóricos y empíricos**

#### **1.2.1 El profesor y la enseñanza de problemas multiplicativos**

Investigadores como Shulman (1986) sugieren la importancia de distinguir entre el conocimiento del contenido de una materia por parte del trabajo de un profesor y los procesos pedagógicos que guían su práctica.

En este sentido, otros investigadores han realizado aportaciones desde una perspectiva más específica, como es la enseñanza de las matemáticas escolares, donde el docente tiene un papel mediador del conocimiento, los investigadores mencionan la trascendencia que tienen los conocimientos del profesor en torno a los contenidos que enseña y con base en esos conocimientos tiene los elementos necesarios para promover situaciones donde el aprendizaje de los números fraccionarios y sus operaciones puede ser considerado a partir de las necesidades de los estudiantes (Ball 1990, 2000; Hill y Ball, 2008; Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotra, 2005; Tirosh y Graeber, 1990 y Tirosh, 2000).

Por otra parte, investigadores como Hart (1981), Sharp y Welder (2014) y Jensen y Hohense (2016) mostraron resultados que apuntan a la existencia de posibles carencias en la enseñanza de las fracciones y sus operaciones, así como dificultades por parte de los estudiantes cuando se les asignan tareas donde es necesaria la resolución de problemas multiplicativos. Ellos sugieren, como posible origen de dichas dificultades, las prácticas presentes en el salón de clase, debido a los procedimientos utilizados para la resolución de problemas que implican operaciones tales como la multiplicación y división con números fraccionarios, dichos procedimientos están apoyados en el uso de reglas y algoritmos, omitiendo justificaciones fundamentadas en las relaciones multiplicativas.

En lo que se refiere al estudio de los números fraccionarios y sus operaciones encontramos a investigadores como Kieren (1998), Freudenthal (1993), entre otros, quienes han realizado aportes significativos al concepto e interpretación de la fracción y su tratamiento didáctico. Por su parte Vergnaud (1983, 1991) estableció categorías para distinguir las relaciones multiplicativas que involucran problemas matemáticos con estructura multiplicativa y números fraccionarios, las cuales son consideradas como categorías para analizar los datos obtenidos en este trabajo.

El problema presentado en esta investigación implica indagar desde distintos ángulos a la enseñanza, debido a la compleja naturaleza del trabajo

docente, nosotros lo consideramos como un todo que tiene repercusiones desde sus antecedentes de formación profesional, y durante la experiencia acumulada por la práctica educativa. Debido a lo anterior consideramos pertinente incluir información relacionada a la formación docente.

### **1.2.2 La formación de profesores**

En lo que sigue integramos información relacionada con los programas de instrucción de profesores. En México por décadas una de las instituciones encargadas de preparar a los profesionales de la educación es la Escuela Normal (en nuestro país existen otras instituciones que forman educadores como la Universidad Pedagógica Nacional, Normales particulares o Universidades donde ofrecen carreras como Pedagogía) sin embargo, nos enfocamos a la Normal Superior debido a que la mayoría de los profesores que aportaron datos empíricos para esta investigación son egresados de la Normal Superior.

Para la formación de docentes de Secundaria en la Ciudad de México se tiene a la Escuela Normal Superior, que cuenta con un Plan de Estudios de ocho semestres en un sistema escolarizado donde se forma a Licenciados en educación en el área de Matemáticas, así como en otras asignaturas que la educación secundaria de nuestro país requiere.

Revisamos el Plan y Programa de Estudios de la Escuela Normal Superior que a través de su existencia ha tenido reformas, aquí sólo mencionamos las tres últimas reformas del Plan y Programa de Estudios (1983-2018), específicamente nos interesan las que se refieren a los contenidos del área de Matemáticas. Identificamos en el documento de 1983, estaban programados dos semestres durante primer año de preparación profesional para estudiar contenidos relativos a la aritmética, donde están incluidos los números fraccionarios y sus operaciones.

Para 1992, las modificaciones al Programa de Estudios se orientaron a fortalecer el aspecto pedagógico y las actividades frente a grupo de los futuros profesores, esta postura se vio reflejada en la disminución del

tiempo asignado al estudio de los contenidos matemáticos, entre ellos la aritmética, dejando sólo un semestre durante el segundo año de estudios para revisar contenidos de los números y sus relaciones.

En 2018 se implementó un nuevo programa, en donde se consideran dos semestres, para estudiar el sentido numérico y teoría de la aritmética (véase apéndice B), así como el énfasis en la práctica desde los primeros semestres de formación. Consideramos la necesidad de conocer el Plan de Estudios para la formación de profesores, dado que es un factor que influye en la práctica del futuro docente de Matemáticas en Educación Básica.

### **1.3 Los números fraccionarios**

Esta investigación tiene como componente principal a los números fraccionarios y las operaciones como la multiplicación y la división, como ya hemos mencionado, consideramos un enfoque apoyado en la resolución de problemas, por lo tanto, a lo largo del documento serán nombrados como *problemas multiplicativos relacionados con los números fraccionarios*.

Una de las hazañas más importante de los matemáticos fue la de definir todos los números en función de los números naturales y las nociones de conjuntos (Mosterin, 2000) por lo anterior, consideramos importante definir la noción de conjunto por las implicaciones para este trabajo de investigación, en este sentido el autor lo define como “Un conjunto es una cierta pluralidad de objetos (sus elementos, miembros o puntos) que pueden considerarse como una unidad” (Mosterín, 2000, p. 15). Asimismo, “El conjunto vacío (en signos,  $\emptyset$ ) es el único que carece de elementos. El conjunto unitario  $\{a\}$  es el conjunto cuyo único elemento es  $a$ . Para todo  $x$ :  $x \in \{a\}$  si y solo si  $x = a$ ” (Mosterín, 2000, p. 16).

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados de objetos. La relación en que están todos los elementos de un conjunto  $A$  con todos los del otro conjunto  $B$ , se llama *producto cartesiano* de  $A$  y  $B$ , designado  $A \times B$ ,  $A \times B = \{(x, z) \mid x \in A \text{ y } z \in B\}$ , es decir  $A \times B$  es el conjunto de todos los pares ordenados  $(x, z)$  tales que  $x \in A$  y  $z \in B$ .

Por otra parte, también en esa obra menciona el campo de cocientes al respecto tenemos lo siguiente:

Una partición de un conjunto  $A$  es una clase de subconjuntos no vacíos de  $A$ , tales que cada uno de los subconjuntos son disjuntos (carecen de elementos comunes) y entre todos son exhaustivos de  $A$  (su unión contiene todos los elementos de  $A$  y, por lo tanto, es igual a  $A$ ).

Toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre un dominio  $A$  induce una partición de ese dominio en clases de equivalencia, llamada *espacio cociente de  $A$*  por la relación  $\sim$ , y simbolizada como  $A/\sim$ .

Con lo anterior pasamos a la definición de número racional, se considera como cocientes de números enteros, para esta investigación los llamaremos *cocientes de números naturales* porque sólo hemos considerado los valores positivos de los números enteros.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b), a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\} \text{ con } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

La notación que comúnmente usamos para un número racional o fraccionario es  $a/b$ , donde  $b \neq 0$ .

## **1.4 Investigaciones relacionadas con los números fraccionarios**

En esta sección se presentan las aportaciones de varios investigadores sobre contenidos relacionados al estudio de los números fraccionarios y sus operaciones. Estudios como los de Pitkethly y Hunting (1996), Behr, Harel, Post y Lesh (1992) son de la opinión de que el conocimiento puede ser desarrollado a través de situaciones de instrucción diseñadas y apropiadas para ejemplificar principios de razonamiento para situaciones de número racional. Las experiencias de construcción de conocimiento diseñadas por los profesores deben considerar esquemas intuitivos para presentarlos a la clase de Matemáticas.

Por otra parte, investigadores como Freudenthal (1983), Streefland (1993) y Kieren (1983), entre otros, se han dado a la tarea de explicar las características esenciales del concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones, para ampliar esta información a continuación se exponen sus ideas.

#### **1.4.1 Las aportaciones de Kieren al campo de estudio de las fracciones**

La importancia del estudio de las fracciones tanto en el nivel básico como en grados posteriores reside en lo que menciona Kieren, donde afirma que en el estudio de las fracciones hay un fundamento para las relaciones algebraicas posteriores, y consideran que la comprensión de los números racionales es básica para el desarrollo y control de las ideas matemáticas.

Por otra parte, menciona que las fracciones están constituidas por subconstructos con cuatro significados: medida, cociente, razón operador multiplicativo y la relación parte todo, todos los subconstructos forman las bases del conocimiento de número racional. Agrega que los mecanismos de desarrollo son más generales y se vinculan con la madurez mental, mientras que los constructivos son más específicos, se relacionan con la experiencia, (Kieren, 1983).

En el estudio de las fracciones, para alumnos y para profesores, Kieren, Nelson y Smith, (1985) mencionan que la construcción de la fracción no se adquiere de manera intuitiva como sucede con los números naturales. Su complejidad reside en las diversas uniones entre “constructos mentales humanos” y “hechos externos”.

#### **1.4.2 Los planteamientos de Pitkethly y Hunting**

Pitkethly, et al. (1996) analizan investigaciones en el área de conceptos iniciales de fracciones, con la finalidad de ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión significativa de número racional. Con fundamento en los conceptos de fracción, mencionan que la noción de

número racional, es un conocimiento personal, pero que a pesar de construirlo de manera individual también es consensual, es decir, el conocimiento de número racional es socialmente construido y validado, en este sentido, consideramos la participación del docente como vital para guiar y proponer situaciones que favorezcan lo anterior, de acuerdo con los investigadores el pensamiento de número racional no es un pensamiento natural.

### **1.4.3 Los estudios de Behr, Lesh, Post y Silver acerca de las fracciones**

Investigadores como Behr, Lesh, Post y Silver (1983) llevaron a cabo una investigación acerca de los conceptos vinculados a los números racionales en la escuela secundaria. Lo que reportaron fue que existen distractores perceptuales en la enseñanza que dificultan y confunden el aprendizaje de los estudiantes. Encontraron además que el manejo adecuado de las relaciones del número racional les permite expandir sus estructuras mentales y su desarrollo intelectual.

Por otra parte, mencionan acerca de la importancia de las regiones geométricas, los conjuntos de objetos discretos y la recta numérica como los modelos más utilizados para representar fracciones en la enseñanza básica. Agregan que la interpretación de las regiones geométricas posiblemente implica una comprensión de la noción de área, es necesario mencionar que en nuestra investigación se ha observado el uso de representaciones geométricas como un medio para explicar los problemas multiplicativos por parte de los docentes.

Estos investigadores sugieren a los profesores el uso de materiales concretos menos complejos, además de apoyarse en comprensiones intuitivas útiles para la enseñanza de las operaciones con números fraccionarios debido a la importancia de los conceptos como la partición, la equivalencia, el orden y el reconocimiento de unidades, porque pueden ser utilizadas como

herramientas de pensamiento básicas para comprender los números racionales.

Ellos hacen énfasis en el uso de los materiales con posibilidad de manipularse, porque pueden ayudar a los procesos de pensamiento de los niños ya que los materiales adecuadamente concebidos y secuenciados por parte del docente pueden proporcionar la reconstrucción e interacción dinámica entre la solución y las condiciones del problema, en este sentido interesan las formas de representación y materiales que utilizan los profesores. Ellos señalan la necesidad de analizar o prestar especial atención en el tipo de tareas que se llevan al aula y que pueden generar confusión en los estudiantes.

#### **1.4.4 Aportaciones de Freudenthal**

Freudenthal (1983), no habla de acciones y propiedades de las acciones, sino de fenómenos, él menciona que los conceptos matemáticos son medios de organización de tales fenómenos; así, sus aportaciones se refieren a la “fenomenología didáctica”, donde señala que las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional y está relacionado con la acción de romper. Menciona que ... “cuando se estudian los números naturales se enfocan desde varias perspectivas. Cuando llega el turno de las fracciones se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad” (p. 10).

El investigador considera que lo anterior es una de las razones para tener dificultades en el aprendizaje de las fracciones. En este sentido nos interesa ahondar en lo que Freudenthal aporta a la enseñanza de la matemática escolar, consideramos sus definiciones porque identifica objetos matemáticos, en sus interpretaciones identifica la fracción como fracturador, como comparador y como operador. A continuación, se describe lo antes mencionado:

*La fracción como fracturador:* se utiliza para dividir el todo de manera reversible, irreversible, simbólico o dividirlo en partes iguales. Considera

que el “todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto, coloreado” (Freudenthal 1983, p. 19) lo encontramos representado como todo discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. El todo lo encontramos representado como todo definido (definido discreto) o todo indefinido (indefinido discreto).

*Las fracciones como comparadores* sirven para comparar objetos que se separan uno de otro; esto se puede realizar de manera directa o indirecta. De manera directamente si los objetos al ser comparados se colocan juntos o si el más pequeño es parte del más grande; y si la comparación se realiza a través de un tercer objeto, como mediador, Freudenthal señala el uso de la fracción como comparador indirecto.

*La fracción como operador:* la podemos encontrar en tres situaciones: como operador fracturante, operador razón, operador fracción. El operador fracturante que pide actuar sobre objetos concretos rompiéndolos en partes equivalentes; el operador razón que coloca las magnitudes en una razón una respecto a otras; el operador fracción actúa sobre el puro dominio del número, donde satisface la necesidad de inverso de los multiplicadores.

Por otra parte, Freudenthal (1983) también menciona acerca de la razón y proporcionalidad, la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud) indicada por  $a:b=c:d$ , él también menciona que la suma, la diferencia, el producto y el cociente lo son en sentido algorítmico. Queremos acotar que Freudenthal no se refiere a medidas, él menciona magnitudes.

#### **1.4.5 Los planteamientos de Vergnaud acerca de los problemas multiplicativos**

Relacionado con los problemas multiplicativos Vergnaud proporciona la definición de campo conceptual, específicamente de las estructuras multiplicativas.

## **Estructuras multiplicativas**

Vergnaud (1983) menciona que uno de los puntos desafiantes de la educación es presentar problemas significativos para favorecer un conocimiento determinado y que sea visto por los estudiantes como un medio de apoyo para resolver situaciones de su vida cotidiana. Las aportaciones de Vergnaud están orientadas a la comprensión de como se adquieren y desarrollan los conocimientos a partir de los problemas, en este trabajo interesan acciones consideradas para promover la comprensión de los estudiantes mediante el planteamiento y diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios.

Para esta investigación consideramos importante lo que Vergnaud llama campos conceptuales porque permite entender la forma en que están organizadas ideas como las representaciones (para este trabajo interesan las representaciones pictóricas y numéricas), él define los campos conceptuales como un “conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero estrechamente interconectados” (p. 127).

Él señala que no es posible fragmentar el conocimiento, para el caso de las estructuras multiplicativas contenidos como multiplicación, división, fracción, relación, función lineal, entre otros, ya que no son independientes entre sí y los estudiantes los encuentran en los problemas que resuelven.

El investigador establece dos campos conceptuales como principales, los que se refieren a las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas, en donde los problemas involucran operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo y multiplicativo (como es el caso de la multiplicación, división, fracción, razón y semejanza). Para este trabajo interesa lo que se refiere a las estructuras multiplicativas que son consideradas como un conjunto de problemas en donde Vergnaud identifica 3 categorías: isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple.

### *El isomorfismo de medida*

Es considerada “una estructura que se refiere a una proporción directa simple entre dos espacios de medida  $M_1$  y  $M_2$ ” (p. 129) y que permite representar situaciones de la vida diaria.

Asimismo, la relación multiplicativa se refiere a “una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de cierto tipo” (Vergnaud, 1991, p. 197).

En esta categoría se identifican cuatro subclases de problemas:

*Multiplicación:* donde se tiene una relación de cuatro términos, y donde los datos son operados como números y magnitudes, se puede usar un operador escalar.

*La división de primer tipo:* consiste en encontrar un valor unitario.

*División de segundo tipo:* consiste en encontrar  $x$  y conocer  $f(x)$  y  $f(1)$ , estos problemas en la mayoría de los casos se resuelven a través de invertir el operador.

*La regla de tres:* estos problemas se resuelven mediante diferentes procedimientos, usando propiedades de la relación de cuatro términos.

### *El producto de medidas*

De acuerdo a los planteamientos de Vergnaud (1983), él define el producto de medidas como “la estructura que consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medición,  $M_1$  y  $M_2$ , en un tercero,  $M_3$ , describe una cantidad considerable de problemas relacionados con el área, el volumen, el producto cartesiano y otros conceptos físicos” (p. 134).

“Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (Vergnaud, 1991, p. 211)

En este tipo de estructura se encuentran al menos tres variables, está representado por una tabla de doble correspondencia.

En esta categoría se identifican dos subtipos de problemas

*Multiplicación:* se encuentran problemas para calcular área y volumen.

*División:* Dado el valor de la medida del producto, y el valor de la medida elemental, encontrar el valor de la otra.

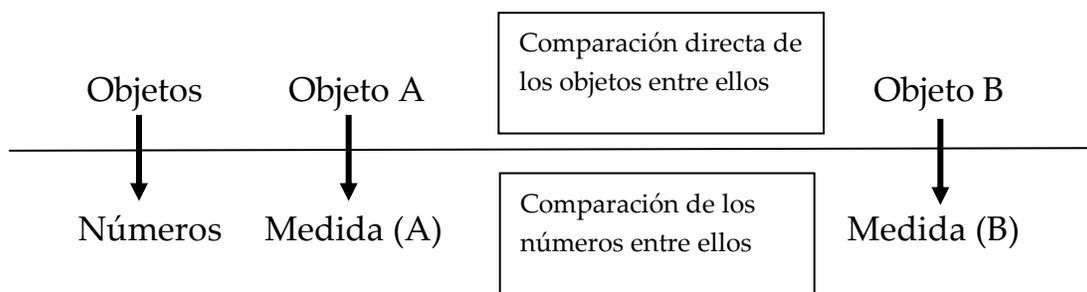
Los planteamientos de Vergnaud son considerados fundamentales para esta investigación debido a que están considerados como parte de los contenidos a enseñar en la educación secundaria, por ello no queremos dejar de lado lo que este investigador señala acerca de la medida.

### *La medida*

De acuerdo con Vergnaud (1991) la noción de número es indispensable para la enseñanza, pensamos que debe considerarse para todo el periodo de la educación básica por las implicaciones en la interpretación y resolución de problemas, en este sentido, señala que “la noción de número es indisociable de la noción de medida” (Vergnaud, 1991, p. 101).

### *El número como medida*

Los números como cardinales de conjuntos, constituyen un sistema de medida que facilita la comparación entre conjuntos. Para entender lo anterior Vergnaud sugiere el siguiente esquema.



Donde menciona que se dispone de dos medios para comparar los objetos A y B, serían la comparación directa de dos objetos, la comparación indirecta, que consiste en tomar primero las medidas de A y B, y enseguida comparar entre sí los números obtenidos.

Señala que también es posible medir las longitudes, las áreas, los volúmenes, los pesos, etc.

#### **1.4.6 Las aportaciones de Dienes acerca de las fracciones y sus operaciones**

Estamos interesados por las aportaciones de Dienes que apuntan a la comprensión de ideas inmersas en la multiplicación y división de fracciones.

Para Dienes (1972), la fracción puede ser considerada un estado de cosas o una orden, es decir, el resultado de realizar una operación. En relación con la multiplicación de fracciones Dienes sugiere la importancia de que los estudiantes entiendan la multiplicación como la aplicación de un operador a transformaciones de un estado, además de que “los niños deben habituarse a utilizar los números como descripciones de estados de una serie de operaciones” (p. 37).

Dienes considera los operadores fraccionarios como “operadores combinados que equivalen a una sucesión de multiplicaciones y divisiones o divisiones y multiplicaciones” (p. 42). Por otro lado, plantea situaciones donde es necesarios determinar qué operadores fraccionarios pueden restablecer el estado original sobre lo que se operó, ha esto lo llama el operador inverso, es posible obtenerlo siempre y cuando los estudiantes comprendan la reversibilidad del orden de las fracciones, además de las propiedades del inverso tanto de la multiplicación como de la división utilizando objetos reales.

Dienes define el inverso de un operador fraccionario como “un operador en el cuál la división ha sido reemplazada por una multiplicación, y la multiplicación por la división correspondiente” (p. 46).

En relación con la división de fracciones este investigador menciona que “buscar el operador que cambia un estado determinado en otro es precisamente una división” (p. 53), las operaciones que están involucradas se refieren a invertir y multiplicar, Dienes señala que en la enseñanza de este

tema se limita al uso de esta regla, dejando de lado el significado de dividir números fraccionarios.

#### **1.4.7 Las investigaciones de Hart y sus aportaciones al estudio de las fracciones**

Hart (1981), realizó un estudio en donde aportó datos relevantes acerca de las dificultades por parte de los estudiantes sobre del uso de los números fraccionarios y sus operaciones.

En lo que se refiere a las operaciones relacionadas a las fracciones identificó que el uso de diagramas ayuda a la solución del problema, asimismo la multiplicación y división son las operaciones con mayores dificultades para resolver por parte de los estudiantes, incluyendo números mixtos.

Por otra parte, Hart menciona situaciones donde la solución de problemas implica el uso del algoritmo de la división y es considerado muy difícil de aplicar. La investigadora atribuye esta situación cuando observó como “los niños no se sienten seguros en el uso de fracciones, sin embargo, tienden a aplicar en la medida de lo posible las reglas de los números enteros a las operaciones con fracciones” (p. 77), asimismo menciona que los estudiantes no prestan atención a la importancia de trabajar dentro del conjunto de fracciones porque les permite manipular números de una manera mucho menos restringida que cuando solo utilizan números enteros, esta situación se ha identificado durante el proceso de enseñanza de los profesores en ejercicio.

La investigadora afirma en torno a muchas de las dificultades por parte de los estudiantes cuando dividen fracciones se deben a las dificultades que representan para ellos la realización de la división de un número pequeño por uno mayor, lo consideran imposible porque trasladan las propiedades de los números enteros a los números fraccionarios.

En cuanto a la multiplicación, Hart menciona cómo “el significado de la multiplicación está firmemente arraigado en la experiencia del niño con los

números enteros donde la operación siempre se puede reemplazar por la suma repetida” (p. 72), asimismo, sugiere que “la multiplicación de fracciones no puede abordarse mediante el uso de métodos ingenuos e intuitivos y, por lo tanto, se basa mucho más en el aprendizaje de reglas sobre otros aspectos de las matemáticas” (p. 76). Las realizaciones concretas utilizadas cuando se introduce la multiplicación de fracciones generalmente están restringidas al área de los rectángulos, hemos identificado esta categoría mediante los diseños elaborados por los profesores.

En cuanto a las acciones del profesor en el aula, Hart menciona que, durante la práctica, los docentes deciden incorporar la introducción de la regla en contextos donde no están considerados los problemas, esta situación tiene como resultado que los estudiantes no reconocen la necesidad de su uso. En este sentido, consideramos que si el profesor tiene conocimiento de estas situaciones puede apoyar a sus estudiantes desde que plantea situaciones que favorezcan el análisis del resultado de un problema además de los beneficios de utilizar números fraccionarios, así como a modificar las ideas arraigadas por deducciones falsas de los estudiantes.

#### **1.4.8 Acerca de los estudios realizados por Valdemoros**

A este respecto, Valdemoros, Ramírez y Lamadrid (2015) sugieren la relevancia de identificar en el sujeto del conocimiento la presencia de “núcleos de significación y pensamiento”, dado que tales núcleos permiten entender cómo organiza su discurso dicho sujeto del conocimiento. Las autoras referidas definen a los “núcleos de significación y pensamiento como aquellas palabras y expresiones matemáticas verbalizadas, así como las representaciones y los modelos de enseñanza plenamente cargados de sentido para quien construye el conocimiento” (p. 195). En esta investigación ellas reportaron cómo una situación donde se presenta la fórmula del área del rectángulo se puede derivar el uso de la operación inversa del producto de fracciones.

En este trabajo consideramos la propuesta de dichas investigadoras para el análisis de los datos que aquí se presentan; a lo largo del estudio de cada tarea, se van a identificar las estrategias, los conocimientos matemáticos y didácticos y las representaciones de los profesores participantes en este trabajo, lo anterior se identificará a través de su discurso y de las representaciones que emergen a partir de los diseños que el maestro presente, asimismo, a través de los cuestionamientos que se hagan de las representaciones de que ellos realicen durante las entrevistas y las Jornadas Académicas, se espera documentar las reflexiones que surjan a lo largo de la aplicación de los instrumentos diseñados para obtener las reflexiones de los profesores.

#### **1.4.9 Aportaciones de diversas investigaciones acerca de la enseñanza de los problemas multiplicativos y las fracciones**

Los números fraccionarios y sus operaciones se estudian desde el tercer grado de primaria, ya en secundaria se estudia en primer y segundo grado (Plan y Programa de Estudios de Secundaria, SEP, 2011), sin embargo, a lo largo de la enseñanza media y superior se trabajan contenidos de la matemática que incluyen los números fraccionarios para acceder a nuevos conocimientos.

Algunas investigaciones han reportado carencias de la enseñanza con números fraccionarios, mencionan que este tema rara vez se enseña conceptualmente en la escuela, es decir, se sustenta con el uso de reglas, dejando de lado las ideas o relaciones multiplicativas para proporcionar sus explicaciones, Ball (1990). Posiblemente esta situación se vea reflejada en la enseñanza en la Educación Básica.

En su investigación Tirosh (2000), habla de la importancia de la experiencia que se adquiere a través de la enseñanza como fuente de conocimiento para los profesores, a pesar de no ser el único medio para adquirirla. Sus resultados apuntan a la posible tendencia de futuros profesores a atribuir

propiedades de la división de números naturales a la división de números fraccionarios.

En este orden de ideas, otros investigadores como Sharp y Welder (2014) resaltan la importancia e influencia de las decisiones de los profesores cuando enseñan la división con números fraccionarios, porque este contenido es considerado un tema difícil para los estudiantes; reportan situaciones donde los maestros pueden solventar dichas situaciones si son tomados en consideración aquellos contenidos que representan dificultades para el aprendizaje.

En nuestra investigación consideramos a los profesores con experiencia como una fuente de información acerca de las posibles dificultades por parte de los estudiantes, y cómo las han atendido a lo largo de su experiencia. Nos interesa conocer lo que anticipan los maestros y cómo enfrentan los obstáculos de sus alumnos, con la finalidad de mejorar lo que se diseña y enseña en la clase cuando trabajan con problemas multiplicativos ligados a las fracciones.

Por otra parte, Jensen y Hohensee (2016) como resultado de su investigación reportan la tendencia de futuros profesores cuando resuelven situaciones de *división con números fraccionarios*, los estudiantes suelen depositar la confianza de la respuesta en el algoritmo, dejando de lado el significado de la operación. En este sentido, consideramos de mucha relevancia las aportaciones que puede brindar los profesores desde su experiencia docente en torno a la forma de resolver problemas multiplicativos.

Smith, Bill y Raith (2018), hacen mención del reto que representa para los profesores el hecho de hacer que los estudiantes aprendan y construyan su conocimiento mediante la discusión y la reflexión de situaciones diseñadas por el docente. En el caso específico de una clase donde tienen que aprender el sentido de la división con números fraccionarios es necesario que el profesor tenga un objetivo claro de lo que desea que aprendan sus alumnos, además de la toma de decisiones durante el desarrollo de la clase, lo llevarán

a tener éxito en la enseñanza de dicho contenido relacionado a los números fraccionarios.

Webel y DeLeeuw (2016), realizaron aportaciones en torno al trabajo de profesores en una clase de matemáticas cuando enseñan un tema de multiplicación de números fraccionarios, reportaron situaciones donde ponen especial atención a la interpretación del lenguaje y los significados subyacentes durante la clase de matemáticas. Coincidimos con los investigadores cuando mencionan la importancia de la relación entre el lenguaje y el significado como elemento fundamental para la enseñanza de contenidos matemáticos.

Por otra parte, lo que ellos mencionaron al respecto fue que los profesores asocian *el significado de la operación* a palabras clave para la solución de problemas, esto también lo identificamos como medio de enseñanza en los profesores en contenidos de división con números fraccionarios, asimismo en torno a la multiplicación asociada a un proceso en donde tenían que aplicar el algoritmo vinculado a una representación pictórica de un rectángulo y el área correspondiente, la asociación de la operación con modelos de área del rectángulo, el uso preponderante del algoritmo como medio de justificación de la operación.

A diferencia de esta investigación, nos interesa identificar el *conocimiento del profesor*, además de darle la posibilidad de *reflexionar* sobre lo que produce y lleva al aula, como medio de mejora para la enseñanza.

Relativo a Charalambous y Pitta-Pantazi (2007), coincidimos con los datos aportados por los investigadores porque se apoyan en los subconstructos de la fracción aportados por Kieren y Behr et al. (1983), sin embargo, en nuestra investigación pretendemos identificar lo que realiza el profesor y de qué manera desde su posición como docente realiza y diseña situaciones para la clase de matemáticas y lo que puede aportar, a diferencia de Charalambous et al. (2007), donde se refieren al trabajo de los estudiantes en nuestra investigación, pretendemos identificar los constructos presentes o de los que

dejan evidencia cuando los profesores diseñan y resuelven problemas de manera individual y colectiva.

Los hallazgos que ellos reportan y que nos interesan se refieren al estudio de las fracciones, donde el uso de modelos continuos y discretos facilita el desarrollo de las operaciones aditivas y multiplicativas de las fracciones, de acuerdo a lo que ellos mencionan se presta poca atención a la comprensión del uso de operador en la sub-construcción de las fracciones, esta noción se introduce de manera indirecta como multiplicación de fracciones.

Mencionan la importancia de desarrollar la comprensión del operador y la sub construcción del cociente para favorecer la solución de tareas por parte de los estudiantes de problemas con operaciones multiplicativas con fracciones. Por otra parte, aseguran que las diferencias del desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas son el reflejo de la instrucción que recibieron. En este sentido rescatamos la importancia de las acciones del profesor para una mejora continua del quehacer educativo.

En palabras de ellos “una comprensión profunda de las diferentes interpretaciones de las fracciones puede elevar el rendimiento de las tareas relacionadas con las operaciones de fracciones y la equivalencia de fracciones”.

Sugieren a profesores que presentar y promover el uso de algoritmos para operar con fracciones debe dejarse en un segundo plano, se debe poner énfasis en la comprensión conceptual de los números fraccionarios.

## **1.5 Los profesores y la enseñanza**

### **1.5.1 Los roles asignados al profesor**

La transformación del Sistema Educativo Nacional, dio paso a reformas encaminadas a mejorar e innovar prácticas y propuestas pedagógicas (Acuerdo 592, 2011), en este documento se considera a los docentes un elemento importante para la enseñanza en la educación básica, porque son los encargados de generar ambientes propicios para el aprendizaje. Para esta

investigación consideramos a las acciones del profesor de Matemáticas como un factor determinante para formalizar la enseñanza, debido a que una de sus funciones es diseñar, proponer y validar las actividades para resolver en el aula cuando se estudian temas relacionados con los números fraccionarios y sus operaciones.

### **1.5.2 El profesor como objeto de conocimiento**

De acuerdo con lo anterior, consideramos necesario conocer lo que el profesor sabe, cómo lo sabe y cuáles con los medios que utiliza para poder comunicarlo. En este sentido coincidimos con Villoro (2011) cuando señala que el conocimiento en general comprende varias formas, saber es sólo una de ellas, sin embargo “un saber puede ser la forma de comprobar un conocimiento” (p. 127), con base en ese conocimiento adquirido de manera escolarizada o con la experiencia es que se ve permeada la práctica docente.

De acuerdo con Villoro (2011), el conocimiento lo define como “una propiedad interna de un sujeto, adquirida mediante diversas actividades” (p. 218), para este trabajo consideramos que dichos conocimientos emergen a través de la práctica reiterada de la enseñanza. Por otra parte, el investigador menciona que “el conocimiento en general es un estado disposicional a actuar, adquirido, determinado por un objeto o situación objetiva aprendidos, que se acompaña de una garantía segura de acierto” (pp. 220-221). Para esta investigación lo relacionado al conocimiento lo utilizamos para referimos a los contenidos de las Matemáticas Escolares, sabiendo que estos contenidos se hacen presentes durante la práctica misma de la enseñanza acompañados de elementos pedagógicos.

En este sentido, consideramos que la investigación permitirá explorar cómo la reflexión sobre las tareas que el profesor lleva al aula y sobre su propia práctica de enseñanza puede impactar sobre las acciones que acontecen en el aula en un contexto de enseñanza de números fraccionarios y la resolución de problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

### 1.5.3 El conocimiento del profesor

El conocimiento para la enseñanza que posee un profesor ha sido objeto de estudio desde hace varias décadas, investigadores como Shulman (1986), sugieren la importancia de observar la transformación del conocimiento del profesor al contenido de la instrucción sobre un tema determinado. Este investigador considera importante el conocimiento del maestro acerca de un tema determinado y la forma de enseñar, para ello, sugirió tres categorías para identificar el conocimiento del contenido: conocimiento del contenido de la materia, conocimiento del contenido pedagógico y el conocimiento curricular.

*El conocimiento del contenido de la materia* lo define como: la cantidad y organización del conocimiento en la mente del profesor. Shulman agrega que la función de los maestros no implica repetir a sus alumnos verdades aceptadas, en la clase debe incluir en su discurso explicaciones que permitan justificar sus afirmaciones.

*Conocimiento de contenido pedagógico:* las formas de representar o formular un tema para hacerlo comprensible para los estudiantes. El docente debe tener diferentes formas de representación derivadas de la investigación, de la práctica docente o de la experiencia (de acuerdo a nuestro planteamiento). Asimismo, implica el conocimiento y aplicación de estrategias para organizar un contenido determinado, incluso para identificar y resolver los posibles errores de los alumnos [lo que consideramos en nuestra investigación se refiere a la anticipación de dificultades desde el momento de la planeación].

*Conocimiento curricular:* es el conocimiento de los materiales donde el profesor puede obtener información acerca de las herramientas para la enseñanza, así como la evaluación del logro de los aprendizajes. Para este trabajo consideramos conocimiento curricular el que está apoyado en los documentos oficiales publicados por la Secretaría de Educación Pública.

### **1.5.4 Conocimiento matemático para la enseñanza**

Como se mencionó anteriormente, en los últimos años se ha utilizado el término conocimiento de contenido para indicar conocimientos del profesor acerca de la materia que enseña [en nuestra investigación a través de problemas multiplicativos que implican a los números fraccionarios y sus operaciones], sin embargo, existen diferencias entre el contenido especializado en una materia y el conocimiento para la enseñanza, este último conocimiento implica conocimientos generales que los profesores utilizan en su práctica (Shulman, 1986).

Otros investigadores como Ball, Thames y Phelps (2008), se refieren al conocimiento matemático para la enseñanza como “el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas” (p. 396), y a consideración de los resultados de esta investigación, es posible categorizar dichos conocimientos mediante las diferentes formas de expresión por parte del docente.

El conocimiento de contenido de la materia es lo que nosotros en este trabajo nombramos como conocimiento de las matemáticas escolares, y el conocimiento de contenido pedagógico lo ampliamos incluyendo el conocimiento didáctico y la reflexión por parte del profesor como medio de mejora constante.

### **1.5.5 El profesor y la enseñanza de los contenidos de la Matemática Escolar**

Otros investigadores, como Ball (2000), han aportado información acerca del conocimiento matemático por parte del profesor, ella menciona cómo el trabajo en la clase de matemáticas ofrece retos, porque en el aula se presentan situaciones para promover en los alumnos la adquisición de conocimientos, consideró la importancia de crear valiosas oportunidades de aprendizaje ya que contenido y pedagogía se entrelazan en el contexto de la enseñanza. Ella hizo señalamientos acerca del conocimiento de la materia, dichos conocimientos matemáticos tienen influencia en una buena

enseñanza, ya que no solo lo que saben los profesores, sino cómo lo adquirieron y la forma en que son capaces de transmitir matemáticamente en una clase favorecen la práctica.

Para lograr lo anterior, la investigadora sugiere la necesidad por parte del docente de tener claridad en torno a las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes, así como los objetivos de cada tarea propuesta. Asimismo, señala posibles dificultades por parte de algunos profesores para plantear situaciones más allá de lo que marca el currículo, o en su caso, hacer modificaciones a los documentos didácticos oficiales con el fin de satisfacer las necesidades educativas de los estudiantes, lo que supone conflictos en el entendimiento de lo que se requiere para enseñar una materia.

En este sentido, Ball y Bass (2000) mencionan la importancia de los conocimientos sólidos de un docente en cuanto a la materia a enseñar, así como técnicas pedagógicas utilizadas, estos aspectos brindan la oportunidad de favorecer situaciones valiosas y pertinentes para el aprendizaje apoyándose en experiencias previas e intereses de los estudiantes. Los investigadores sugieren una fragmentación entre la asignatura a enseñar y su pedagogía, lo que posiblemente promueve carencias en la formación profesional que están centradas en cómo enseñar conceptos y procesos matemáticos, dejando de lado la comprensión de contenidos.

Asimismo, en los resultados de las investigaciones realizadas por Ball, et al. (2008) consideraron que un profesor de matemáticas debe incorporar en su enseñanza no solo nociones pedagógicas, sino también el dominio matemático que pretende enseñar.

Estas investigaciones ampliaron las aportaciones de Shulman (1986), y lo centraron en el Conocimiento Matemático, lo llamaron “Conocimiento Matemático para la Enseñanza”, incorporaron tres componentes a lo establecido por Shulman: Conocimiento Común del Contenido, b) Conocimiento del Contenido Especializado y c) Conocimiento en el Horizonte Matemático.

La continuidad de las ideas de formación docente se extendió con las aportaciones que los investigadores presentaron para tratar de dar solución a los problemas de enseñanza, como la identificación del conocimiento de contenido que se utiliza para la enseñanza, la comprensión de cómo se concibe ese conocimiento y lo que necesita aprender para utilizar ese conocimiento en la práctica docente y de acuerdo a lo que planteamos para el diseño de tareas. A continuación, se describen los diferentes aspectos que integran estos contenidos para la enseñanza:

- a) El conocimiento Común del Contenido: Este conocimiento se integra con otras habilidades y se utiliza en situaciones que no son de enseñanza. Es un conocimiento que puede estar integrado por contenidos de aritmética elemental, como resolver operaciones con números naturales o realizar cálculo de área o perímetro de figuras planas. No es exclusivo de los profesores.
- b) Conocimiento del Contenido Especializado: Este tipo de conocimiento se refiere al de los maestros, porque considera la capacidad para discernir e interpretar la validez de lo que surge en una clase. Requiere un dominio conceptual de las operaciones, y con base en ello se espera que pueda promover la comprensión de las operaciones en los alumnos, con la toma de decisiones para elegir las tareas que lleva a la clase de Matemáticas.
- c) Conocimiento en el Horizonte Matemático: esta categoría está incluida dentro del conocimiento del contenido de la materia, se refiere a la “conciencia de cómo se relacionan los temas matemáticos a lo largo de las matemáticas incluidas en un programa de estudios” (Ball, et al., 2008, p. 403). En este caso, una visión general de los contenidos de la Matemática Escolar en la Educación Básica. Con base en este conocimiento, el docente tiene la posibilidad de tomar decisiones acerca de los contenidos que pueden incluir con la finalidad de lograr el objetivo de la clase.

### **1.5.6 El profesor como mediador para la transmisión del conocimiento mediante diferentes formas de expresión**

Para esta investigación consideramos las diferentes formas de expresión de los profesores como un medio para transmitir e identificar los conocimientos de la matemática educativa que ellos poseen, en el caso de la expresión verbal Vygotski (1982) menciona que “una parte de los procesos del lenguaje y el pensamiento coinciden en la denominada esfera del pensamiento verbal” (p. 110), sin embargo en los adultos la fusión del pensamiento y el lenguaje se da como un fenómeno parcial, que tiene validez solo si es aplicado al pensamiento verbal.

Interesa el proceso de formación de conceptos, debido a que revela los elementos fundamentales para llevar a cabo la tarea de enseñar, necesita además del uso funcional de las palabras, signos y representaciones como un medio para orientar la atención, promover el análisis y enfatizar procedimientos en la resolución de tareas. “La formación del concepto o significado por parte de la palabra es el resultado de una actividad compleja (palabras o signos) intervienen y se combinan todas las funciones intelectuales básicas.” (Vygotski, 1982, p. 131).

Nos interesa lo que se refiere a las representaciones por parte del profesor porque nos va a permitir conocer los conocimientos que utiliza para proponer sus tareas, además de los procedimientos y representaciones y cómo pretende que a través de sus diseños los estudiantes den significado a las operaciones con números fraccionarios a través de problemas multiplicativos, tenemos en consideración las afirmaciones de Vygotski (1982), sugiere que el “el niño no elige el significado de la palabra, le viene dado en el proceso de la comunicación verbal con los adultos” (p. 150).

Por otra parte, consideramos las afirmaciones como que “el proceso de la formación de conceptos, consiste en la transición de procesos intelectuales inmediatos a operaciones mediadas por signos” (p. 134), para este trabajo incluimos las representaciones.

Consideramos que las diferentes formas de expresión que encontramos tanto en el diseño como la puesta en práctica de tareas en el aula por parte del maestro requieren un análisis exhaustivo para conocer qué elementos están presentes para promover una enseñanza que dé como resultado la comprensión de contenidos relacionados con las operaciones de números fraccionarios, “el niño piensa en los mismos objetos que el adulto como significado de la palabra, gracias a lo cual resulta posible la comprensión mutua, pero piensa ese contenido de otro modo, con ayuda de operaciones intelectuales diferentes.” (Vygotski, 1982, p. 159)

En lo que concierne a la importancia de las acciones del profesor en la clase de Matemáticas, encontramos que el lenguaje juega un papel preponderante ya que es un medio de comunicar ideas entre el estudiante y el docente, en este sentido Hubbard, Instone, Noonan, Rothery y Shuard (1984), mencionan que "tanto el maestro como los alumnos a menudo usan lenguaje informal, dejando que el lenguaje formal se lea en los libros de texto"(p. 26), de ahí que consideramos de suma importancia identificar situaciones relacionadas con la experiencia del lenguaje y las explicaciones claras de las palabras matemáticas que pueden favorecer la lectura y resolución de problemas multiplicativos.

En relación con lo que se dice y hace en clase, consideramos necesario poner atención en la claridad de lo que se dice, se hace y se representa, debido a las dificultades ya reportadas en diversas investigaciones por parte de los estudiantes, Hubbard et al. (1984) afirma que “el alumno puede dar algún sentido a sus lecciones de Matemáticas, aunque solo está pensando en términos del significado coloquial sin comprender completamente la sutileza adicional del significado matemático completo” (p. 28).

Durante la clase el profesor debe ser consciente de la influencia del lenguaje para dar claridad a sus ideas, sin embargo, esto difícilmente sucede debido a que a los estudiantes manifiestan ideas confusas del significado de las palabras con contenido Matemático, lo mismo sucede con las

representaciones o procedimientos estudiados durante la clase, coincidimos con Hubbard et al. (1984) cuando sugiere que las acciones del profesor pueden influir en la enseñanza, desde la toma de decisiones para discernir el tipo de tareas para presentar en la clase de matemáticas, asimismo, enfatiza que “los juicios informados de un maestro reflexivo pueden tener ventajas”(p. 30).

Relacionado con las ideas anteriores Vygotski (1982) menciona acerca del lenguaje verbal como “la unión del pensamiento y el lenguaje en la forma más simple, el significado de la palabra” (p. 288). Para ello define el significado como: el rasgo necesario constitutivo de la propia palabra visto desde su aspecto interno, “en el aspecto psicológico, el significado de la palabra no es más que una generalización o un concepto, generalización y significado de la palabra son sinónimos” (p. 289).

En su obra Vygotsky hace referencia al significado y sentido, “el significado de la palabra es a la vez un fenómeno verbal e intelectual...es un fenómeno del pensamiento verbal o de la palabra con sentido” (p. 289), también menciona que “el sentido de la palabra es la suma de todos los sucesos psicológicos evocados en nuestra conciencia gracias a la palabra, el significado es sólo una de esas zonas, la más estable la más coherente y precisa” (p. 333). La palabra adquiere su sentido en su contexto y cambia de sentido en contextos diferentes, el significado permanece invariable y constante en todos los cambios de sentido de la palabra en diferentes contextos.

### **1.5.7 La reflexión sobre los procesos implícitos de la práctica del profesor**

Vinculado a lo que acontece en el salón de clase, investigadores como Da Ponte (2012) resaltan la importancia de conocer diversos factores que intervienen en el aula, tal es el caso del conocimiento del maestro además de la comprensión del por qué y la fundamentación de sus acciones dentro del contexto de la experiencia a través de procesos reflexivos.

Coincidimos con algunas de las ideas que aporta el investigador al considerar que el profesor con experiencia representa un enorme capital de conocimiento y puede ser tomado como referencia para el análisis de sus acciones inherentes a su práctica, además de observar aquellas situaciones de enseñanza que están presentes de manera explícita, así como la forma en que utiliza los conocimientos que posee para realizar diseños para la clase de Matemáticas.

Por otra parte, relacionado con la práctica del profesor en el aula Llinares (2012) habla de la necesidad de reflexionar acerca de las características de las tareas que deben ser propuestas para la enseñanza, y que tienen como antecedente un análisis relacionado con lo que se pretende enseñar. En este sentido el investigador agrega que los procesos que se dan durante la clase, es decir, durante el proceso de construcción de significados de los números fraccionarios, permiten identificar componentes del conocimiento del profesor, así como la forma en que el profesor comprende este tema.

En este trabajo compartimos la idea de la influencia que representa para el diseño de una clase lo relacionado con la *comprensión* por parte del profesor ante la preparación de un tema a enseñar, nosotros pretendemos identificar lo anterior a través de los diferentes instrumentos metodológicos. Para esta investigación interesa vincular la *reflexión* que el docente realiza sobre su propia práctica y la explicitación de su conocimiento mientras diseña las tareas para su clase, con la finalidad de promover una mejora del plan en el trabajo generado para ser desarrollado en el aula, debido a la relevancia que pueden representar dichas actividades en el conocimiento matemático a desarrollar durante una clase a los estudiantes.

Coincidimos con Llinares (2012) cuando resalta la posibilidad de promover un aprendizaje efectivo en la medida en que las tareas promuevan una mayor implicación cognitiva y por nuestra parte sugerimos hacer énfasis en la *reflexión* sobre el porqué de la toma de decisiones, así como de las *justificaciones, representaciones y procedimientos* que el maestro utiliza

tanto en sus diseños como en su práctica educativa, consideramos a la acción de repensar sobre actuación como un medio de promover la mejora de la enseñanza.

En este orden de ideas, consideramos relevantes los señalamientos de Schön (1987) cuando menciona la posibilidad de observar el conocimiento de un profesional, en nuestra investigación en torno a los profesionales de la educación, es decir los maestros de Matemáticas, a partir de sus acciones.

Para ello, retomamos lo que él llama conocimiento en la acción para referirse al conocimiento que se revela a través de acciones, agrega que “en ocasiones, es posible mediante la observación y la reflexión sobre nuestras acciones, realizar una descripción de conocimiento tácito que está implícito en ellas” (p. 35).

Por otra parte, Schön (1987) trabaja en aspectos como la reflexión sobre la acción cuando señala que esta situación es posible identificarla “retomando nuestro pensamiento sobre lo que hemos hecho para poder descubrir cómo nuestro conocimiento en la acción puede haber contribuido a un resultado inesperado”(p. 36), menciona además que la “acción de pensar sirve para reorganizar lo que estamos haciendo mientras lo estamos haciendo” (p. 37), lo llama reflexionando en la acción.

Nosotros recuperamos las ideas anteriores en el sentido de promover situaciones que permitan a los profesores reflexionar en dos direcciones, es decir, sobre la acción y en medio de la acción. Sobre la acción cuando cuestionamos las razones para tomar decisiones al incluir algún contenido para un diseño determinado o de las representaciones que utiliza cuando explica un tema relacionado a un contenido matemático.

Por otra parte, entendemos la reflexión en medio de la acción en este caso la enseñanza, cuando el profesor sugiere un procedimiento y es cuestionado por sus pares acerca de sus representaciones y planteamientos, con lo

anterior buscamos conocer los motivos de sus acciones con base en la experiencia de enseñanza con los estudiantes.

En la investigación interesan los señalamientos acerca de la reflexión sobre la acción de los profesores durante el desarrollo de las actividades programadas. En este sentido, la reflexión es considerada como una función crítica acerca de los conocimientos en la acción, y mediante la aplicación de los instrumentos diseñados para trabajar con los profesores esperamos una postura reflexiva sobre el conocimiento y las decisiones pedagógicas con el fin de diseñar tareas relacionadas con problemas multiplicativos, como un proceso conducente a la reestructuración de las estrategias utilizadas para desarrollar una clase.

Coincidimos con las ideas de Schön (1987) y adaptamos sus ideas a esta investigación cuando consideramos que mediante la reflexión sobre la acción es posible volver sobre los pasos de las situaciones didácticas diseñadas por el profesor para la clase de Matemáticas en la Secundaria. Por otra parte, tenemos la posibilidad de analizar de manera individual y con sus colegas sobre la actuación, resolución y diseño de dichas propuestas didácticas, asimismo, es posible hacer aportaciones para favorecer la práctica educativa.

Reflexionar sobre las justificaciones para sustentar la resolución de los problemas multiplicativos nos lleva a pensar sobre la pertinencia de los diseños iniciales y promover de manera consciente la posibilidad de modificar las tareas con fines de mejorar los planteamientos originales.

El objetivo de promover la reflexión sobre la propia práctica de los profesores con experiencia y sobre las actividades que diseñan para presentarlas en una clase con el tema de problemas multiplicativos relacionados con los números fraccionarios implica el desarrollo de habilidades por parte del docente para proponer situaciones prácticas que estén cargadas de significado y promuevan la comprensión del contenido Matemático.

La información que nos proporciona este capítulo nos dio la posibilidad de establecer un modelo de análisis para observar e identificar los *procesos cognitivos* de profesores de matemáticas con experiencia durante el desarrollo de la presente investigación. En el siguiente capítulo presentamos la organización y las etapas de aplicación de los instrumentos metodológicos.



# CAPÍTULO 2

---

## DISEÑO METODOLÓGICO

La enseñanza de las operaciones como la multiplicación y división con números fraccionarios a través de la resolución de problemas constituye el tema central de este estudio, privilegiamos el reconocimiento de los *procesos cognitivos* de los profesores, dado que los maestros con base en su experiencia pueden proponer situaciones problemáticas que ayuden a los estudiantes a generalizar sus métodos de resolución para este caso problemas multiplicativos (Flores, 2014). Tomando en consideración lo anterior, realizamos el diseño y la ejecución de los instrumentos que a continuación mencionamos.

Para este capítulo consideramos la descripción de los criterios, los elementos, la secuencia y organización de las acciones realizadas desde el inicio de este trabajo, la recolección de los datos empíricos y la última etapa de organización de los datos para el análisis. Se integra además la descripción del diseño de cada uno de los instrumentos aplicados en la investigación con la finalidad de mostrar e identificar los conocimientos Matemáticos de los profesores a través de un análisis minucioso.

Asimismo, mencionamos el escenario en donde se desarrollaron las actividades planeadas, los sujetos participantes en este estudio, así como la secuencia de aplicación de los instrumentos.

La práctica del docente en la escuela secundaria durante la enseñanza del tema de los números fraccionario y las operaciones como la multiplicación y división requiere de conocimientos Matemáticos relacionados con las fracciones; para ello, en esta investigación interesa identificar los *procesos cognitivos* que implican conocimientos Matemáticos, estrategias de enseñanza, representaciones, procedimientos, justificaciones, diseños de problemas multiplicativos y las reflexiones de los profesores en ejercicio.

En este capítulo integramos formas de validación de los instrumentos metodológicos, para ello, consideramos el trabajo preliminar como medio de validación entre otros, es decir, llevamos a cabo sesiones de trabajo con profesores en ejercicio en una escuela del estado de Hidalgo y lo consideramos una experiencia previa para ajustar los instrumentos metodológicos para la presente investigación.

El trabajo que realizamos en el estado de Hidalgo consistió en el diseño de tareas para llevar a cabo mediante un curso en una escuela ubicada en zona urbana. Cada jornada de trabajo fue de cuatro horas durante cinco periodos, el contenido de las cinco sesiones se refería a los números fraccionarios y sus operaciones, en las tres primeras sesiones de trabajo la función de la investigadora consistió en observar y tomar notas del diseño y resolución de los problemas por parte de los profesores mientras resolvían las tareas con números fraccionarios.

En las dos últimas sesiones la investigadora participó de manera activa con el colectivo docente mediante la aplicación de tareas que implicaban la resolución de problemas multiplicativos, solicitamos a los participantes que mostraran, desde su experiencia con los estudiantes, la forma de resolverlos durante la clase. Con base en sus respuestas y procedimientos hicimos preguntas a los profesores para que pensarán acerca de las razones y

decisiones tomadas sobre sus representaciones y las que mostraron sus pares.

Como actividad complementaria a la resolución de problemas pedimos a los maestros que realizaran diseños de problemas similares como normalmente proponen a sus estudiantes.

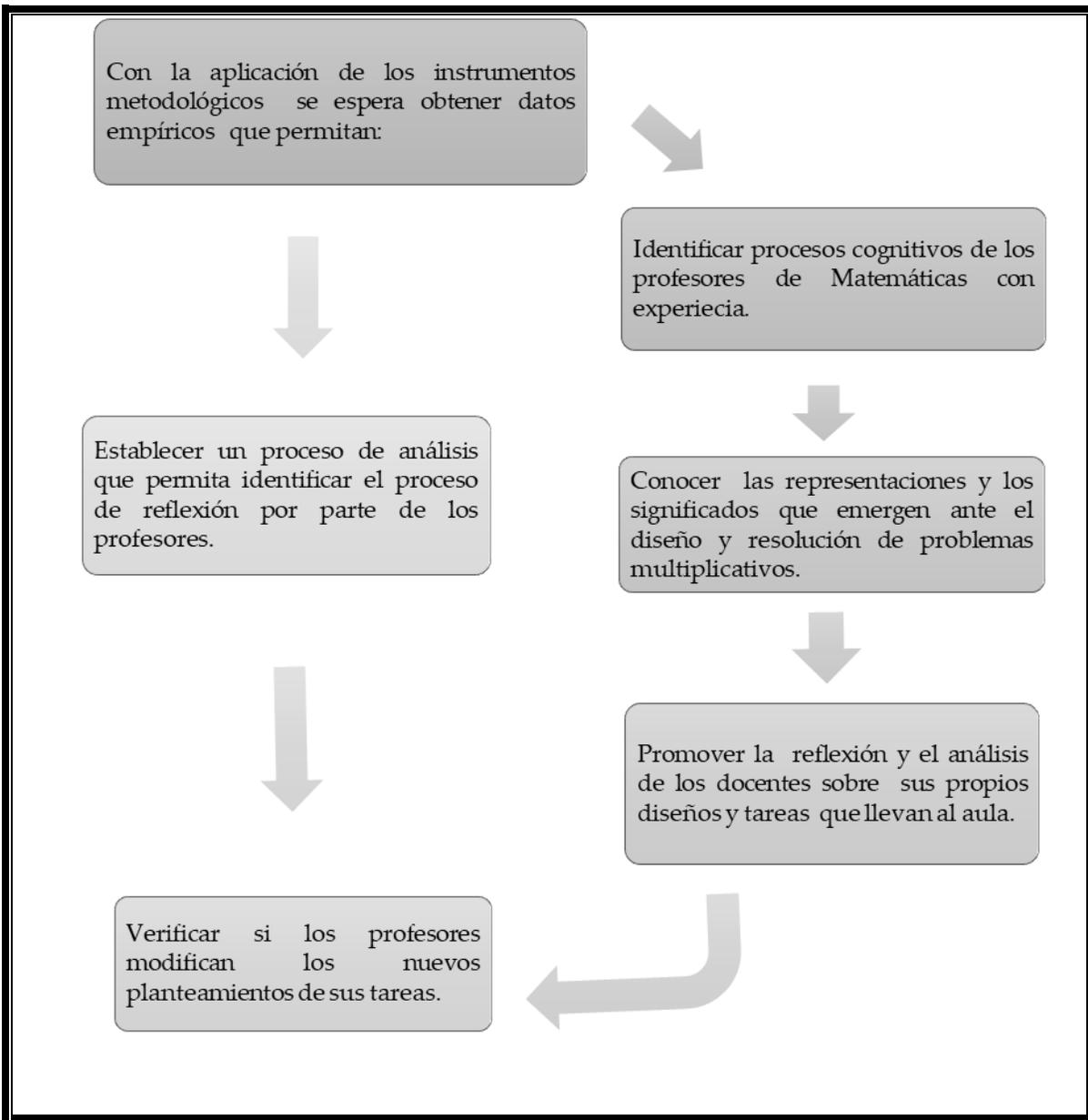
Las acciones programadas en este capítulo permitirán conocer e identificar los *procesos cognitivos* que surgen cuando el profesor de Matemáticas diseña y resuelve problemas de tipo multiplicativo relacionado con números fraccionarios para la clase, así como las reflexiones de los profesores promovida por el diálogo con la investigadora y con sus pares (véase figura 2.1).

Asimismo, será posible acceder al espacio natural de los profesores y conocer las representaciones, los significados que le atribuyen, comportamientos y condiciones objetivas que influyen en su práctica docente de manera individual y colectiva (Schwartz y Jacobs, 2006).

## **2.1 Naturaleza de la investigación**

De acuerdo con Taylor y Bogdan (1984), Stake (1999), Alvarez-Gayou (2003), entre otros, la investigación es de corte cualitativo, porque nos permitió conocer y describir de manera extensa los conocimientos de la Matemática Educativa que incluyen en su acervo los profesores en ejercicio a partir de la información obtenida en un contexto de diálogo con la investigadora y de intercambio de ideas entre pares. Asimismo, la interpretación de los datos requirió utilizar la triangulación de instrumentos para identificar los *procesos cognitivos* de los profesores cuando resuelven y diseñan problemas multiplicativos.

A continuación, presentamos las secuencias de aplicación de los instrumentos durante la investigación.



**Figura 2.1.** Propósitos del trabajo de investigación y los alcances que pretendemos alcanzar con la aplicación de los instrumentos.

El diseño de la presente investigación permitió dar seguimiento puntual a los participantes de manera individual (la profesora Rosa) y colectiva, durante las entrevistas individuales con retroalimentación (Rosa y Carlos) y las Jornadas Académicas, por lo anterior, es posible presentar datos obtenidos de situaciones planteadas de manera individual y colectiva con profesores en ejercicio.

Por otra parte, nos brindará la oportunidad de mostrar el análisis y la reflexión de los Docentes acerca de su propia práctica, situación que nos permitió inferir las razones acerca de la toma de decisiones por parte de los Maestros cuando diseñan situaciones que llevan al aula para sus estudiantes. En este sentido, también fue posible identificar las estrategias que los Profesores utilizan para enseñar contenidos relacionados con las fracciones y sus operaciones en la Escuela Secundaria.

## **2.2 Escenarios de la investigación**

El este apartado mencionamos los espacios físicos donde se realizaron las actividades programadas para la aplicación de los instrumentos metodológicos, describimos el perfil académico de los sujetos participantes de este estudio, presentamos el contexto en que los profesores se desarrollan laboralmente, así como las condiciones externas que llevaron a modificar el planteamiento inicial para las Jornadas Académicas.

### **2.2.1 Espacio físico para la entrevista individual**

La entrevista individual la aplicamos en un lugar elegido por la profesora Rosa (dentro de su domicilio), atendimos esta petición con la finalidad de que Rosa estuviera cómoda, sin interrupciones para poder llevar a cabo las actividades programadas.

### **2.2.2 Las Jornadas Académicas**

Las Jornadas Académicas estaban programadas para llevarse a cabo como un trabajo colectivo con Profesores en el espacio físico dentro de la biblioteca del Departamento de Matemática Educativa Jerzy Plebanski, sin embargo, debido a las condiciones sanitarias derivadas de la Pandemia por covid-19 en 2020, tuvimos que suspender dichas actividades presenciales de investigación.

Para cumplir con las acciones proyectadas para esta investigación fue necesario adaptarse a las condiciones de aislamiento, por ello, las Jornadas Académicas se realizaron de manera virtual en seis sesiones con una

duración de un poco más de dos horas cada reunión de trabajo colectivo a través de la plataforma Meet.

### **2.2.3 Sujetos participantes de la investigación**

La selección de los sujetos participantes la consideramos de acuerdo con la disposición que tuvieron los docentes para atender y realizar las diferentes actividades planeadas para este trabajo y porque tienen experiencia en la enseñanza de la clase de Matemáticas en educación secundaria en México.

En las primeras etapas, seleccionamos a la profesora Rosa como participante en la investigación, debido a la relevancia de los datos que aportó durante la resolución del cuestionario, por la amplia experiencia que posee y por lo mucho que comunica en sus procedimientos.

La profesora estudió en una Escuela Normal en la Ciudad de México, el programa de estudios con el que se formó cuenta con La licenciatura en Educación Media en el área de Matemáticas, ella tiene amplia experiencia en la enseñanza en la escuela secundaria (19 años), durante estos años sólo ha trabajado con alumnos de nivel secundaria en la clase de Matemáticas. Durante las entrevistas individuales ella manifestó que ha tenido formación continua, es decir, ha participado en cursos que ofrecen los Centros de Maestros, así como un diplomado de profesionalización permanente.

Para llevar a cabo las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas, y de acuerdo con las modificaciones del plan de acción original, es decir, las adaptaciones de las actividades por la emergencia sanitaria de Covid-19, enviamos una invitación a través de un medio electrónico a un grupo de docentes de Matemáticas, la invitación integró información general acerca del tema a tratar durante las reuniones de trabajo (resolución y diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios), indicamos las fechas y el horario en que se desarrollarían las sesiones de trabajo colectivo, estuvo dirigido a profesores con experiencia en la clase de Matemáticas en educación secundaria.

Como respuesta a la invitación varios maestros mencionaron su interés por las Jornadas Académicas, sin embargo, no todos los profesores reunieron los requisitos para participar, es decir, establecer el compromiso de asistir a todas las sesiones, realizar y entregar en tiempo y forma las actividades programadas, contar con una computadora y conexión a internet. Finalmente, cuatro profesores que tenían entre quince y veintiséis años de experiencia en la enseñanza fueron incorporados entre los participantes de las Jornadas Académicas.

Entre los docentes se encontraba la profesora Rosa, consideramos pertinente incluirla para tener un panorama general y un punto de referencia del proceso de la maestra en torno a sus *procesos cognitivos*.

La formación profesional y la experiencia docente que mencionamos está considerada desde el momento en que iniciamos las Jornadas Académicas y la presentamos a continuación:

La maestra Marina tenía 15 años de experiencia docente, se formó en la Universidad de Veracruz y tiene una maestría en la enseñanza de la Física. Ella se ha desempeñado en nivel medio superior y como docente en educación secundaria, enseñando Matemáticas.

La profesora Fátima cuenta con 25 años de experiencia, estudió en una Escuela Normal en la Ciudad de México, realizó una Maestría en Gestión Educativa en una Universidad privada, sólo se ha desempeñado como profesora de Matemáticas en secundaria.

El profesor Carlos tiene 26 años trabajando como profesor de enseñanza de las Matemáticas en la secundaria, estudió en una Escuela Normal, tiene una Maestría en Educación en una universidad privada.

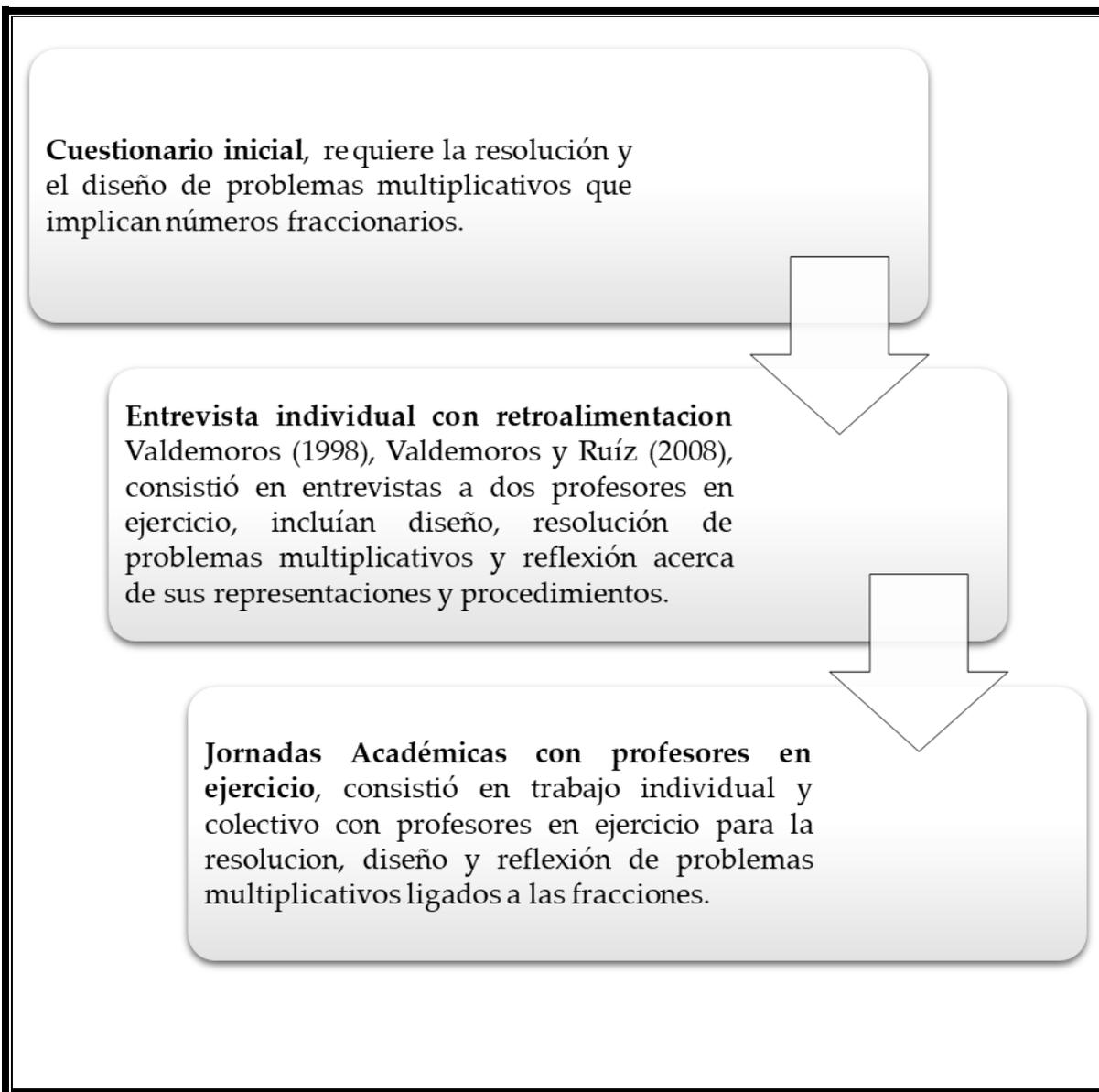
De los cuatro profesores participantes se observa que tienen estudios de posgrado y de formación continua, sus estudios están relacionados con tópicos relacionados en la educación en general, no específicamente en la enseñanza de las Matemáticas.

## 2.3 Diseño de los instrumentos metodológicos

Para esta investigación elaboramos instrumentos metodológicos que permitieron realizar la toma de datos para lograr el objetivo de la investigación. En lo que sigue, describimos los objetivos que pretendía cumplir al ser diseñados y las razones para elegirlos. Los instrumentos utilizados están centrados en identificar los *procesos cognitivos* que implican conocimientos matemáticos, los que surgen ante la resolución y diseño de problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como las reflexiones de los profesores sobre su propia práctica docente. Finalmente se presentan los procedimientos de validación de los instrumentos.

La organización de los instrumentos obedece a la necesidad de tener un primer acercamiento a los profesores relacionado con las estrategias y procedimientos que hacen evidentes al resolver problemas de manera escrita, es decir, conocer acerca de la forma de resolver problemas cuando están implicados los números fraccionarios y las operaciones de multiplicación y división, en una situación de resolución de problemas; con base en el análisis de los datos obtenidos diseñamos actividades para promover el trabajo colectivo de los profesores participantes en este estudio. A continuación, presentamos la secuencia del diseño y aplicación de los instrumentos para realizar la toma de datos (véase figura 2.2).

En la primera etapa consideramos necesario conocer los *procesos cognitivos* de los profesores (la forma de resolver los problemas, los procedimientos, estrategias de resolución, las representaciones, etc.), con la finalidad de tener referentes para realizar el diseño y la estructura de la entrevista, por otra parte, organizar los contenidos de las Jornadas Académicas con profesores en ejercicio.



**Figura 2.2.** Secuencia de la aplicación de los instrumentos metodológicos para la investigación.

Debido a lo anterior, en el diseño preliminar consideramos los resultados de la aplicación de las actividades que se llevaron a cabo con profesores en el estado de Hidalgo y que nos permitió realizar los ajustes necesarios para presentar el cuestionario en donde integramos problemas de multiplicación y división que implicaban números fraccionarios, dichos planteamientos los resolvieron profesores de secundaria, de los resultados y el correspondiente

análisis elegimos a la profesora Rosa, participante para la entrevista individual con retroalimentación.

La información de los datos obtenidos en la aplicación de los instrumentos como el cuestionario y la entrevista individual con retroalimentación (Valdemoros, 1998), permitió mostrar y caracterizar los conocimientos Matemáticos que la profesora Rosa pone en acción ante la resolución de problemas multiplicativos, con base en ello organizamos y diseñamos las actividades para las Jornadas Académicas con profesores en ejercicio. Por otra parte, para el grupo de los docentes participantes elegimos al profesor Carlos, porque él manifestó conocimientos sólidos y para tener la posibilidad de realizar un contraste de sus procesos cognitivos y los de Rosa.

### **2.3.1 Organización de los instrumentos metodológicos**

En un primer momento se aplicó el cuestionario que estaba integrado por dos secciones, en la primera sección se presentaron seis problemas con números fraccionarios (3 de multiplicación y 3 de división). En la segunda sección se solicitó el diseño de dos problemas multiplicativos.

Realizamos el análisis de las respuestas a los problemas y los resultados permitieron identificar los conocimientos, procedimientos y conceptos que utilizan los profesores en ejercicio para resolver tareas en donde se plantean problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

Relacionado con el diseño de dos problemas multiplicativos solicitados en el cuestionario, la consigna para los docentes fue presentar situaciones similares a las que proponen para su clase de Matemáticas, lo anterior con el objetivo de conocer los contenidos Matemáticos que los profesores consideran relevantes para la enseñanza cuando estructuran las actividades para la clase.

Por otra parte, como dato extra solicitamos a los docentes información acerca del origen de los problemas diseñados para este cuestionario y que

son similares a los que presentan a sus alumnos durante la enseñanza de este contenido.

En torno a los datos iniciales, por el tipo de respuestas registradas en el cuestionario y la disposición para participar en esta investigación decidimos que sólo participaría una de las tres profesoras para las actividades posteriores, elegimos a la maestra Rosa.

Con base en los datos identificados programamos acciones, como las entrevistas individuales con la profesora Rosa, realizamos una entrevista (en 3 momentos) de corte didáctico con retroalimentación Valdemosos (1998) y Valdemosos y Ruiz (2008), diseñamos un guion para obtener información acerca de los referentes utilizados desde la formación académica y experiencia de la profesora cuando resolvía los problemas multiplicativos, es decir, qué elementos escritos y pictóricos estaban presentes cuando ella realizó las tareas aplicadas.

Nos interesaba profundizar en torno a los *procesos cognitivos* de la Profesora Rosa, con el fin de lograr este objetivo, orientamos las preguntas para pensar durante el diálogo acerca del porqué de sus decisiones en torno al uso de un determinado procedimiento y no otro, explorar si la maestra consideraba otras formas de resolver el problema. Estas acciones permitieron un acercamiento para identificar los procesos cognitivos de la profesora Rosa cuando resolvió las tareas programadas en el cuestionario, fue posible indagar acerca del significado de sus procedimientos, sus representaciones durante la clase y los resultados que obtenía de ellos.

Con la información de los instrumentos previamente aplicados, estamos hablando del cuestionario y la entrevista de Rosa, con lo anterior, realizamos el diseño de actividades para docentes en ejercicio, en lo que llamaremos "Jornadas Académicas para profesores con experiencia en la clase de Matemáticas", en donde dimos prioridad al trabajo colectivo entre pares para el análisis y la reflexión sobre los diseños y resolución de problemas multiplicativos con números fraccionarios por parte de los docentes.

Posterior a la realización de las Jornadas Académicas aplicamos una entrevista con retroalimentación a dos de los Profesores que estuvieron presentes en el trabajo colectivo, nos referimos a la profesora Rosa (una entrevista en dos momentos) y al profesor Carlos (una entrevista), esta actividad se llevó a cabo de manera independiente y en diferentes momentos de manera virtual, a través de la plataforma meet.

Seleccionamos a Rosa y Carlos por el tipo de planteamientos y el contenido de sus diseños y participaciones durante las sesiones de trabajo. Asimismo, incluimos el análisis de las producciones escritas y orales de los profesores, esta forma de trabajo nos permitió fortalecer el análisis de la información obtenida de los instrumentos aplicados durante las actividades.

Consideramos necesario realizar la comparación de los datos iniciales hasta la etapa final de la investigación, es decir, las producciones de los profesores y las reflexiones que surgieron durante las diferentes actividades desarrolladas.

## **2.4 Diseño y objetivos de los instrumentos metodológicos**

En esta sección presentamos el diseño de los instrumentos utilizados para este estudio (lo presentamos en la figura 2.2), están destinados a profesores con experiencia en la clase de Matemáticas, mencionamos las razones por las que se eligieron y la información que pretendemos obtener para lograr los objetivos de esta investigación. En lo que sigue se describen los instrumentos metodológicos.

### **2.4.1 Cuestionario**

De acuerdo con lo que menciona Bisquerra (1989), el cuestionario es un conjunto de preguntas en donde se consideran situaciones relevantes para la investigación, para nuestro trabajo consideramos relevante el diseño y la resolución de problemas como medio para identificar los conocimientos de los profesores.

El primer acercamiento a los docentes participantes en esta investigación fue cuando indagamos acerca de la disposición de tiempo para resolver el cuestionario, así como la participación en futuras actividades. De los docentes que decidieron participar solicitamos datos generales como nombre, formación académica, tiempo de trabajo frente a grupo, participación en cursos de actualización y el grado escolar en que se desempeñaban al momento de la aplicación del cuestionario. El instrumento se aplicó en los momentos en que los profesores no tenían clase, el espacio físico fue la sala donde se reúnen con sus colegas.

En el diseño del cuestionario tratamos en la medida de lo posible de ser claros en las instrucciones, es decir, mencionamos la importancia de escribir de manera clara los procedimientos y representaciones sin borrar nada. Presentamos seis problemas multiplicativos que implicaron el uso de números fraccionarios. En la segunda sección del cuestionario las instrucciones fueron realizadas de manera imperativa, es decir, solicitamos la redacción de dos problemas multiplicativos en un contexto de números fraccionarios.

#### **2.4.1.a Objetivos del cuestionario**

En torno a las razones y el objetivo del cuestionario interesa determinar los contenidos semánticos de los números fraccionarios a los que los profesores recurren con frecuencia cuando resuelven problemas de tipo multiplicativo. Indagar acerca de las estrategias de resolución, procedimientos y representaciones de los profesores ante tareas con números fraccionarios, es decir, la intención era conocer los *procesos cognitivos* de los profesores a través de la resolución de problemas, se presentaron tareas que están incluidas en los libros de texto de secundaria (se realizaron adaptaciones de las investigadoras).

#### **2.4.1 b El objetivo de los problemas multiplicativos**

Decidimos aplicar problemas porque es un medio de expresión escrita donde el docente manifiesta sus conocimientos al momento de presentar

una resolución a la tarea. Se incluyeron tres problemas donde se requería la multiplicación de números fraccionarios en diferentes contextos, para identificar el tipo de representaciones y las formas de resolución, saber si los maestros utilizan algoritmos y cuáles son, si los justifican, conocer si el algoritmo es un medio para resolver el problema y cómo lo justifican, nos interesa identificar el sentido asignado a las representaciones y cómo se vinculan con los procedimientos.

Se presentaron tres problemas de división de fracciones con la finalidad de conocer cómo enfrentan la resolución de este tipo de planteamientos, las representaciones que los profesores utilizan para explicar en clase este tipo de problemas, los procedimientos emergentes, los algoritmos a los que recurren, de qué forma los justifican y cómo lo vinculan con las representaciones, si es que las hacen.

#### **2.4.2 Objetivos del diseño de problemas multiplicativos**

En la segunda sección del cuestionario solicitamos a los docentes que diseñaran dos problemas multiplicativos con números fraccionarios y que mencionaran la fuente de donde obtienen las tareas que llevan a la clase de matemáticas cuando estudian temas relacionados con los números fraccionarios y las operaciones de multiplicación y división. Esta tarea nos permitió identificar el tipo de situaciones que los profesores realizan, los conceptos de los números fraccionarios presentes cuando diseñan tareas con números fraccionarios, así como las fuentes de información a las que recurren.

#### **2.4.3 Experiencia piloto del cuestionario**

El ensayo preliminar del cuestionario se llevó a cabo en una escuela en el estado de Hidalgo, permitió realizar los ajustes necesarios a través de verificar que las instrucciones eran claras y no había lugar a duda, que el planteamiento de los problemas fuera claro y correcto y que permitiera que los profesores mostraran evidencia de la forma de resolverlos.

En el ensayo preliminar observamos que el tipo de planteamiento generaba dificultades, en este caso el de la división, por eso se realizaron ajustes y se presentaron problemas obtenidos de libros de texto vigente, se realizaron adaptaciones de las investigadoras cuando se consideramos necesario hacerlo y con la finalidad de acercarnos a lo que el currículo oficial solicita.

#### **2.4.3.a Validación del cuestionario**

Para el propósito de esta investigación consideramos enriquecedora la experiencia piloto y que fue considerada como validación del instrumento, aplicamos situaciones que implicaban la resolución de problemas similares a los que presentamos en los maestros en la escuela del estado de Hidalgo, los problemas incluyeron números fraccionarios y sus operaciones, específicamente de multiplicación y división, con la finalidad de tener un acercamiento a los conocimientos Matemáticos de los profesores. En el ensayo preliminar identificamos como dato relevante el uso del algoritmo de manera privilegiada sobre otros procedimientos para resolver las situaciones que les presentamos, así como las representaciones alojadas en contenidos geométricos.

#### **2.4.4 Las tareas del cuestionario**

En lo que sigue presentamos las tareas relacionadas con problemas multiplicativos donde están considerados los números fraccionarios, las diseñamos y aplicamos a través del cuestionario para profesores de Matemáticas. Tomando en consideración que durante el primer y segundo curso de educación secundaria se estudian contenidos relacionados al tema de estudio, en tercer grado está implícito el conocimiento de este conjunto numérico para estudiar otros contenidos de la matemática escolar (Véase apéndice A).

#### **2.4.4.a Los problemas de multiplicación**

Las tareas que a continuación mostramos se refieren a problemas de multiplicación que incluyen el uso de números fraccionarios, están

considerados planteamientos que implican parte-parte, parte-todo y producto de medidas. En la figura 2.3 podemos observar el problema multiplicativo que implica el producto de medidas.

Un edificio de planta rectangular hace esquina con dos calles. Uno de sus frentes ocupa un tercio de una calle, y el otro frente ocupa dos quintos de la otra calle. ¿Qué parte de la manzana está ocupada por el edificio?

**Figura 2.3** El problema de producto de medidas.

Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1*. México. Grupo Editorial Patria.

En la figura 2.4 mostramos el problema multiplicativo en donde consideramos el producto de medidas.

En un parque se encuentra una pista para correr, tiene una longitud de  $6\frac{4}{5}km$ . Asisten 3 corredores para entrenar, Javier corre  $2\frac{3}{4}$  vueltas, Cesar  $\frac{10}{4}$  vueltas, Raúl  $\frac{4}{5}$  vueltas.  
Determina la distancia que corre cada uno de los deportistas.  
¿Quién corre una distancia mayor?

**Figura 2.4** El problema del producto de medidas. Diseño de la investigadora.

A continuación, en la figura 2.5 se puede observar el problema multiplicativo que se refiere al área.

Una lámina rectangular mide  $1\frac{3}{4}$  metros de ancho y  $5\frac{1}{6}$  de metros de largo. ¿Cuál es el área que puede cubrir?

**Figura 2.5** El problema de área. Diseño de la investigadora.

#### **2.4.4.b Los problemas de división**

En lo que sigue se encuentran los problemas incluidos en el cuestionario y que se refieren a la división relacionada con los números fraccionarios en donde están incluida la división cuotativa.

En la figura 2.6 se encuentra el problema de división cuotativa.

Sandra diseña moños, en cada moño utiliza  $\frac{2}{5}$  de metro. Si cada carrete de listón tiene  $3\frac{1}{4}$  metros. ¿Cuántos moños puede hacer por carrete?

**Figura 2.6** El problema de la división cuotativa. Diseño de la investigadora.

En la figura 2.7 mostramos un problema de división cuotativa.

Una fábrica de jabón quiere lanzar un producto nuevo, para ello regala muestras de  $\frac{2}{5}$  Kg. Contrata personal para la distribución de las muestras y entrega a cada persona una caja con un peso de  $12\frac{7}{10}$  Kg. ¿Cuántas muestras tiene cada caja?

**Figura 2.7** El problema de división cuotativa. Diseño de la investigadora.

En la figura 2.8 presentamos un problema de división partitiva.

Un rollo de tela mide  $3\frac{3}{4}$  metros de largo, se desea obtener  $2\frac{1}{2}$  lienzos ¿Cuánto debe medir de largo cada pieza?

**Figura 2.8** El problema de la división partitiva. Diseño de la investigadora.

Los problemas anteriores se refieren a divisiones, donde se incorpora el uso de fracciones propias e impropias además de la división cuotativa y partitiva. Solicitamos la resolución de los problemas para determinar los procedimientos y formas de representación, teniendo como referencia la experiencia con sus estudiantes y la forma en que el profesor aborda estos contenidos.

#### **2.4.4.c El diseño de problemas**

Para la segunda sección del cuestionario solicitamos el diseño de problemas, proporcionamos dos pares de fracciones, y la consigna fue que cada profesor utilizara las fracciones como considerara pertinente para realizar el diseño de los problemas.

En la figura 2.9 presentamos el par de fracciones, las dos primeras eran para un problema de multiplicación y el segundo par de fracciones sirvió para un problema de división.

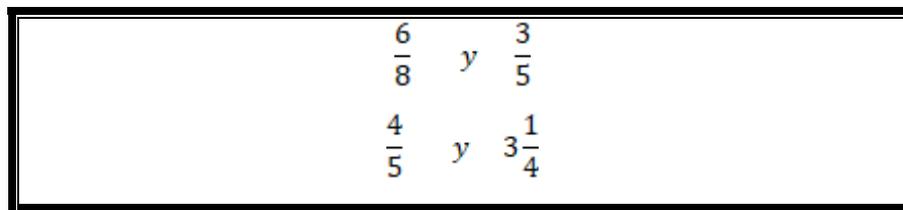

$$\frac{6}{8} \quad y \quad \frac{3}{5}$$
$$\frac{4}{5} \quad y \quad 3\frac{1}{4}$$

Figura 2.9 Las fracciones para el diseño de problemas.

## 2.5 La entrevista

La entrevista es una técnica para recuperar datos desde la experiencia de formación y práctica de enseñanza del profesor, cuyo objetivo es obtener información de forma oral y personalizada (Alvarez-Gayou, 2003). Para nuestra investigación, interesan las evidencias relacionadas con las acciones del profesor al momento de resolver el cuestionario, además de identificar los conocimientos Matemáticos de los profesores, tales como las actitudes y decisiones en relación al tema que se está estudiando. De esta manera la entrevista nos permitió una interpretación del contexto en que se desarrolla el Profesor entrevistado, asimismo, nos permitió conocer las reflexiones sobre su actuación propia (Cohen y Manion, 1990).

Para poder establecer un diálogo con los profesores consideramos el diseño de entrevistas con una estructura menos formal porque pensamos en la posibilidad de modificar la secuencia de las preguntas, o en su caso explicarlas o ampliarlas al momento de resolver los problemas o por el tipo de respuesta que obtuvimos de los entrevistados y de acuerdo a como se fue desarrollando cada una de las entrevistas. En este sentido, consideramos conveniente presentar preguntas abiertas, debido a que son flexibles y nos permitieron ahondar en los procesos cognitivos de los profesores cuando no estaban explícitos los procedimientos utilizados como lo mencionan Cohen et al. (1990).

Las entrevistas se realizaron en diferentes momentos de la investigación, después de analizar el cuestionario, y posterior a las Jornadas Académicas, dado que queríamos ahondar en los procesos cognitivos de los profesores al momento de resolver problemas, nos interesaba indagar acerca de la toma de decisiones con base en la experiencia de enseñanza.

Para la entrevista consideramos realizar un conjunto de preguntas de manera semiestructurada, con cuestionamientos orientados a reflexionar sobre los procedimientos y representaciones utilizadas durante la resolución de tareas y para hacer reflexionar a los docentes acerca de los diseños presentados. Hicimos énfasis en la importancia de no borrar ningún procedimiento al momento de resolver las tareas era importante dejar evidencia de expresiones escritas o pictóricas para apoyar sus procedimientos y posteriormente mostrar las razones que orientan sus decisiones cuando diseñan y resuelven problemas multiplicativos ligados a las fracciones (Valdemoros, 1988; Valdemoros y Ruiz, 2008). Las respuestas se registraron de manera grabada para facilitar el análisis y comparación.

Como ya lo hemos mencionado, en esta actividad elaboramos un guion con preguntas abiertas con base en los objetivos de la investigación, los problemas para resolver durante esta actividad se presentaron de manera escrita, con la finalidad de obtener todos los registros posibles acerca de los procedimientos y reflexiones de los docentes.

En la primera etapa para la entrevista con la profesora Rosa le entregamos las actividades programadas, ella resolvió las tareas y cuando terminó consideramos oportuno solicitar que nos compartiera de manera oral su procedimiento, y sobre lo que ella decía fuimos explorando acerca de sus decisiones didácticas con preguntas para explicitar el conocimiento de Rosa, consideramos pertinente repetir algunos de los problemas del cuestionario en la entrevista para indagar acerca de sus procedimientos alternos de solución.

Para la entrevista con los profesores Carlos y Rosa (después de las Jornadas Académicas), tuvimos la necesidad de realizarla de manera virtual en la plataforma meet, como resultado de los ajustes de aplicación de los instrumentos metodológicos. Para estas entrevistas consideramos pertinente utilizar la misma estrategia utilizada en las entrevistas iniciales con la maestra Rosa, es decir, aplicamos entrevistas semiestructuradas, para tener la posibilidad de reformular las preguntas cuando lo consideramos necesario. Por otra parte, para explorar a profundidad acerca de las decisiones de los maestros y reformular procesos de resolución dependiendo de las respuestas de los profesores Carlos y Rosa.

### **2.5.1 Los objetivos de las entrevistas**

El objetivo de la aplicación de cada una de las entrevistas individuales con retroalimentación, era indagar acerca de los conocimientos de la Matemática Educativa que poseen y hacen explícitos los profesores a través del trabajo individual, cómo vinculan estos conocimientos con la planeación de actividades en su práctica docente, cómo ellos reflexionan acerca de sus planteamientos y diseños, a qué contenidos Matemáticos recurren para explicar en el aula la resolución de problemas multiplicativos relacionados con las fracciones.

### **2.5.2 La entrevista de la profesora Rosa**

Elegimos a la maestra Rosa porque manifestó procedimientos alternativos, completos además de explícitos en la resolución del cuestionario, asimismo, tiene amplia experiencia en la enseñanza, y manifestó la disponibilidad personal para destinar más horas a esta investigación.

Nos interesa conocer el tipo de representaciones que utiliza y cómo las vincula con los procedimientos para resolver dichas tareas con números fraccionarios. Conocer cuáles son las razones para que la profesora tome decisiones pedagógicas para resolver problemas de tipo multiplicativo en la clase de matemáticas. Promover la reflexión de la profesora sobre sus procedimientos.

### 2.5.3 Las tareas de la entrevista de Rosa

En lo que sigue presentamos los problemas propuestos a la profesora Rosa para conocer sus procesos de resolución y la forma de justificar sus procedimientos.

En la entrevista a Rosa le presentamos el mismo problema de la figura 2.3, con la finalidad de ampliar sus justificaciones y conocer más acerca de sus representaciones, evidencias que dejaron sus registros en la resolución del cuestionario.

En la figura 2.10 se encuentra el problema de división cuotativa, donde Rosa deja evidencia de diferentes formas de representación.

Beto y Carla hacen competencia de carros, el coche de Beto recorre  $1 \frac{2}{3}$  metros y el de Carla  $\frac{2}{5}$  metros.

¿Cuántas veces el coche de Beto recorre la distancia que recorrió el coche de Carla?



**Figura 2.10.** El problema de división cuotativa. Diseño de la investigadora.

En la siguiente figura 2.11 tenemos el problema del área con una estructura de inversión de la multiplicación o factor perdido.

Javier tiene una hortaliza rectangular que mide  $\frac{21}{6}$  metros cuadrados de área. En este terreno sembró cebollas y lechugas. Como se acerca el temporal de lluvias con posibilidad de granizo quiere proteger su hortaliza, así que le colocará una cubierta de plástico. Sabe que el ancho de terreno es de  $1 \frac{1}{2}$  metros.

¿Cuánto debe medir el largo del plástico necesita para cubrir el área de la hortaliza?

**Figura 2.11** Problema del inverso de la multiplicación. Tomado de Castañeda (2015), y adaptado por la investigadora.

En la figura 2.12 observamos el planteamiento del problema del inverso de la multiplicación en un contexto de área.

Un pintor va a realizar un mural en una pared que tiene un área de  $3\frac{1}{4}$  m<sup>2</sup>, sabe que de largo mide  $2\frac{3}{5}$  m.  
¿Cuánto mide la longitud que corresponde al ancho de la barda?

Figura 2.12 Problema de multiplicación. Producción de la investigadora.

#### 2.5.4 Entrevista al profesor Carlos

El profesor Carlos manifestó durante el desarrollo de las Jornadas Académicas una participación activa, es decir realizó aportaciones y cuestionamientos acerca del porqué del uso durante la enseñanza de conceptos relacionados con los contenidos de los números fraccionarios y sus operaciones. Durante el diseño de tareas presentó planteamientos interesantes y específicos. Por lo anterior fue seleccionado para la entrevista, donde dejó ver una sólida preparación en torno a los conceptos matemáticos relacionados con los números fraccionarios.

### 2.6 Las Jornadas Académicas con profesores

Para diseñar la propuesta de trabajo durante las *Jornadas Académicas* con profesores en ejercicio fue necesario tener una aproximación de lo que nos podíamos encontrar, es decir, de los *procesos cognitivos* subyacentes en la práctica de los docentes. La premisa era conocer los conocimientos con los que cuentan los profesores, qué toman en cuenta para sus decisiones didácticas, de dónde obtienen los problemas que llevan al aula, el tipo de representaciones y procedimientos que realizan, así como saber si la reflexión que los profesores realizan de su práctica modifica su actuación en el aula.

Para la duración de las *Jornadas Académicas* consideramos en primera instancia cinco sesiones de dos horas cada una, sin embargo, por la relevancia de los datos obtenidos programamos una reunión más, por lo tanto, este informe corresponde a 12 horas de trabajo con docentes de

Matemáticas. Debido a la situación actual (confinamiento), las sesiones se llevaron a cabo de manera virtual, se utilizó la plataforma Meet para reunir a los docentes durante dos horas, un día a la semana.

Para esta investigación *las Jornadas Académicas están consideradas como un espacio de construcción de conocimiento de manera colectiva, combina los conocimientos, experiencia y promueve la reflexión sobre la enseñanza y diseño de tareas para la clase de Matemáticas en un contexto sobre los problemas multiplicativos con los números fraccionarios*. Estuvo dirigido a maestros en ejercicio con experiencia en la Enseñanza de Educación Secundaria.

### **2.6.1 Objetivo de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas**

El objetivo fue facilitar el diálogo y establecer procesos de comunicación además de fortalecer el aprendizaje mutuo y la retroalimentación a través de la participación de docentes con base en las experiencias de enseñanza y la reflexión sobre los diseños de tareas escritas por cada profesor acerca de situaciones problemáticas diseñadas por ellos. Buscamos que cada docente mostrara el proceso de resolución de problemas, tomando como referencia de enseñanza a sus estudiantes.

### **2.6.2 Las actividades programadas**

Para cada una de las sesiones se diseñó un protocolo de trabajo, en primera instancia se plantearon preguntas para contextualizar el tema central del trabajo colectivo, y para obtener las primeras impresiones por parte de los docentes, en torno a aquellos conceptos que considera necesarios para acceder al estudio de los números fraccionarios y sus operaciones. Por otra parte, se contempló el análisis de problemas, es decir, verificar los planteamientos para el estudio de los problemas multiplicativos con números fraccionarios y así promover la participación de los docentes con base en sus experiencias, se solicitó su participación a partir del diálogo

sobre situaciones que implican la toma de decisiones desde su experiencia en la enseñanza.

Las Jornadas Académicas con profesores las consideramos una forma de recogida de datos empíricos porque mediante la explicitación de las ideas de los maestros es posible desarrollar discusiones que enriquecen los saberes de los participantes en la investigación (Cohen y Manion, 1990). Tratamos de dar cuenta de los conocimientos de profesores cuando enseñan un determinado tema, lo que implica dar a conocer un modo de interacción de un grupo de individuos coordinados por un profesor en un determinado ambiente (Woods, 1987). Para nuestra investigación corresponde un ambiente de intercambio entre pares de manera virtual, coordinados por la investigadora.

### **2.6.3 Desarrollo de las Jornadas Académicas**

A continuación, presentamos un ejemplo del protocolo de una de las sesiones como referencia de las reuniones con los profesores, en el apéndice C mostramos los protocolos de todas las sesiones de trabajo. Es necesario mencionar que de acuerdo con los resultados de la sesión inicial se realizaron ajustes de la siguiente sesión; sucedió lo mismo con las sesiones subsecuentes, lo anterior sirvió además como validación del instrumento.

Para la primera sesión de trabajo colectivo con profesores de Matemáticas consideramos pertinente conocer sus opiniones relacionadas con lo que ellos esperaban obtener de su participación en las *Jornadas Académicas*, así como saber cómo ellos desde su experiencia aplican los problemas y su resolución en el salón de clase. Comentamos acerca de su importancia y el significado que ellos le dan.

En la figura 2.13 mostramos el formato que nos permitió organizar el trabajo con los profesores de matemáticas.

Título: Jornadas Académicas para profesores Coordinadora: Marta Ramírez Cruz					
<p><b>Consigna:</b> Los profesores van a reflexionar acerca de lo que hasta ahora se ha revisado, es decir, acerca del análisis de los problemas presentados (de la tesis de Fortunato Meneses). Los profesores van a presentar los ajustes de dos problemas (de la tesis de Fortunato Meneses). Van a presentar la forma de resolver los problemas en su clase. Los profesores ¿Cómo se imagina que lo resolverían sus estudiantes? A partir de dos fracciones los profesores van a diseñar un problema, lo van a mostrar y justificar la forma de resolver. Encontrar una aplicación...</p>					
Hora	Tiempo	Tema	Actividad propuesta	Responsable	Procedimiento
12:00	15 min.	Presentación y bienvenida	La coordinadora mencionará el objetivo y agenda de las Jornadas Académicas.	Coordinadora	Presentación Power point con el objetivo general de las Jornadas Académicas
12:15	10 min.	Presentación de los participantes	Cada uno de los participantes	Profesores	En orden los profesores van a mencionar datos generales como: nombre...
12:40	10 min.	Definición de los problemas	Se van a definir los problemas multiplicativos ligados a los números ...	Coordinadora y los profesores	Retomando los comentarios de los profesores se van a contextualizar los problemas ...
13:50	10 min.	Cierre de la sesión	Síntesis de la sesión	Coordinadora	Recuperar aspectos relevantes de la sesión, se mencionará
Observaciones generales			De acuerdo al desarrollo de la sesión se considera tener flexibilidad en cuanto al tiempo designado para las actividades donde los profesores manifiestan sus conocimientos y experiencias en torno a la enseñanza.		

Figura 2.13 Ejemplo del protocolo de las Jornadas Académicas.

Para comenzar mostramos en la figura 2.14 las preguntas orientadoras en torno a lo que se espera obtener de la participación de esta propuesta de trabajo colectivo y la pregunta orientadora para el tema de estudio.

<p>¿Qué expectativas tiene acerca de su participación en las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas?</p> <p>¿Qué papel representa la resolución de problemas en la enseñanza de contenidos matemáticos?</p>
--

Figura 2.14 Preguntas para contextualizar el tema.

Para el desarrollo de las sesiones se programaron diferentes actividades para llevarse a cabo de manera individual como el análisis y resolución de tareas el análisis de planteamientos, posteriormente se hacía un análisis de manera

colectiva donde los profesores tuvieron la posibilidad conocer, comparar y comentar acerca de los diferentes puntos de vista con base a sus experiencias, conocer sus procedimientos y escuchando los argumentos de los profesores. Nosotros nos centramos en las aportaciones a través del lenguaje oral y escrito que se dieron a lo largo de las sesiones.

Retomando los comentarios de los profesores vamos a contextualizar los problemas multiplicativos con números fraccionarios. Posteriormente presentaremos problemas que implican los números fraccionarios, no solicitamos la resolución, sólo el análisis acerca del planteamiento.

En la figura 2.15 mostramos los problemas que permitieron realizar el análisis de los planteamientos durante la primera sesión de las Jornadas Académicas y cuando fue necesario solicitamos realizar la reestructura del problema.

- 
- a) Tenemos 15 peras y las partimos a la mitad ¿cuántas mitades tenemos?
- b) Enviaron de la pastelería 16 pasteles, los que se repartirán entre 64 niños ¿Qué fracción tocará a cada uno?
- c) En un terreno de  $\frac{27}{24}$  m<sup>2</sup> se requiere repartir a dos hombres en partes iguales. ¿cuánta parte del terreno le corresponde a cada uno?
- d) Si de un pastel entero me quedan  $\frac{3}{4}$  partes y lo deseo repartir entre dos niños ¿qué parte del pastel le tocará a cada niño?

**Figura 2.15.** Problemas para promover el análisis.

Los planteamientos fueron tomados de Meneses (1991).

En la figura 2.16 presentamos otro problema que complementó la actividad relacionada con el análisis de problemas por parte de los profesores.

e) Juan tiene en un bote de  $\frac{6}{8}$  partes de pintura, y desea pintar  $\frac{3}{5}$  partes de una barda. ¿Alcanzará con la pintura que tiene? o ¿qué parte de la barda se puede pintar?

**Figura 2.16** Producto del cuestionario aplicado en esta investigación.

Otra de las actividades programadas estaba orientada a la resolución de problemas multiplicativos para que los profesores mostraran y justificaran sus procedimientos y procesos de resolución, para que argumentaran acerca del porqué de sus decisiones, interesaba conocer que aspectos desde su experiencia y de formación influyeron en sus procesos.

A continuación, en la figura 2.17 presentamos los problemas que resolvieron los profesores de matemáticas.

A Luis le tocó  $\frac{1}{3}$  de la mitad de un pastel, qué cantidad de pastel le dieron.

En el salón de clases de mi grupo hay un recipiente de agua con capacidad de  $26\frac{1}{2}$  litros. Si le bajamos al recipiente  $\frac{1}{8}$  diario cuántos litros tomamos cada día.

**Figura 2.17.** Problemas tomados de Meneses (1991).

Para complementar la actividad anterior incorporamos en la figura 2.18 un problema obtenido del cuestionario, se refiere al diseño de un profesor.

Juan tiene en un bote de  $\frac{6}{8}$  partes de pintura, y desea pintar  $\frac{3}{5}$  partes de una barda. ¿Alcanzará con la pintura que tiene? o ¿qué parte de la barda se puede pintar?

**Figura 2.18.** Producción del cuestionario aplicado en esta investigación.

Presentamos los siguientes problemas con la intención de promover la discusión en torno a los procedimientos y significados al resolver el problema. Consideramos también la puesta en común de la reflexión sobre

los problemas con base en su experiencia en la enseñanza, es decir, los profesores presentan procedimientos de resolución, reflexionamos luego acerca de los contenidos matemáticos expresados en los procesos de resolución.

En la figura 2.19 presentamos un problema que permitió reflexionar acerca del valor faltante.

Calcular la altura de un rectángulo sabiendo que su área es  $9/2$  y su base es  $5/3$ .

**Figura 2.19.** Tomado de Meneses, (1991).

Para los siguientes problemas consideramos la resolución y justificación, los profesores mostraron la forma de resolución y justificaron sus procedimientos, específicamente los que se refieren a los algoritmos de las operaciones. Ellos reflexionaron en conjunto con la investigadora apoyados en las siguientes preguntas: ¿cómo se puede modificar el problema con la operación inversa?, ¿la pregunta es apropiada para el enunciado del problema?, ¿ustedes consideran que los estudiantes pueden entender este tipo de planteamiento? y ¿cómo se puede justificar el problema?

A continuación, en la figura 2.20 integramos el problema del área que nos permitió identificar los procedimientos de resolución por parte de los Profesores.

Esta pieza de madera se utilizará para hacer una repisa.

Área:  $1/2$  metros cuadrados.

Ancho:  $2/3$  de metro

Alto ¿... metros?

¿Cómo realizaste el cálculo del lado desconocido?

¿Qué clase de números usaste? ¿porqué?

¿Cómo verificaste la respuesta?



**Figura 2.20** El problema del área. Tomado de Valdemoros et al. (2015).

La intención para el siguiente problema consistió en solicitar que los profesores mostraran la forma de resolución y justificaran sus procedimientos, específicamente los que se refieren a los algoritmos de las operaciones, en este caso fue posible indagar acerca del uso de los números decimales y las fracciones con preguntas como la siguiente ¿en qué caso consideran pertinente el uso de los números decimales o números fraccionarios?

En la figura 2.21 incorporamos el problema que nos permitió identificar los procesos de resolución de los profesores.

### Crema de brócoli

**Receta para 8 personas**

- 1  $\frac{1}{2}$  tazas de queso rayado
- $\frac{1}{2}$  taza de crema
- 4 cucharadas de mantequilla
- $\frac{3}{4}$  de una taza con cebolla picada
- 4 tazas de caldo de pollo
- 1 kg de brócoli

Se desea saber la cantidad de los ingredientes para 4 personas, 6 personas, 20 personas.



**Figura 2.21** El problema de la receta. Inspirado en *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*

En la figura 2.22 presentamos un problema adaptado, cuya intención fue identificar si los profesores utilizan el factor escalar o qué sentido le asignan a la multiplicación de números fraccionarios.

Para una fiesta infantil Aurora utiliza una imagen con las siguientes dimensiones.



$\frac{2}{5}$  dm

$\frac{3}{4}$  dm

Para la invitación necesita que las dimensiones (largo y ancho), sean  $2\frac{1}{2}$  veces más grande.

¿Qué medidas tendrá la invitación?

Olvidó que necesita pegar la misma imagen en los dulceros, para ello necesita que midan la quinta parte de las medidas de la invitación. ¿Qué medidas requiere?

**Figura 2.22** Problema adaptado por la investigadora. Inspirados en *Children's Understanding of Mathematics 11-16*.

El siguiente problema figura 2.23 se refiere al arreglo de mesas y el reparto de una pizza con la finalidad de resolver y reflexionar con los profesores acerca de situaciones que promueven el reparto y el tratamiento didáctico que dan a las operaciones con números fraccionarios.

Una familia con integrantes papá, mamá, Pedro y Ana, comen pizzas. La primera se reparte equitativamente. Mientras tanto, se prepara la segunda en el horno, la madre divide ésta en cuatro partes iguales. Luego ella dice "ya comí demasiado, ustedes tres pueden compartirla." "No", dice Ana, "uno de estos pedazos es suficiente para mí", Y volviéndose hacia Pedro y su papá agrega "ustedes pueden compartir el resto".

¿Cuánto recibe cada uno de los miembros de la familia?

**Figura 2.23.** Tomado de Streefland, (1993). Las fracciones un enfoque realista.

A través del desarrollo de las sesiones de trabajo colectivo también solicitamos el diseño de problemas y su correspondiente análisis los mostraremos en el capítulo 4, en este espacio solo mencionaremos la intención de promover esta actividad.

La tarea consistió en sugerir un par de fracciones, y solicitamos a los profesores que hicieran propuesta del diseño de un problema de multiplicación y un problema de división, cuando lo hayan realizado lo van a mostrar y van a justificar la forma en que ellos lo van a resolver.

Con la actividad anterior pretendemos que los profesores hagan explícitas las razones para utilizar un algoritmo o procedimiento y no otros, o saber si tienen alternativas de resolución. Queremos saber si ellos tienen dificultades cuando se encuentran ante el diseño de problemas e inferir las posibles razones de dicha situación.

Asimismo, pretendemos orientar la actividad sustentada en el diálogo hacia la reflexión colectiva sobre lo que ellos hacen y por qué lo hacen, además de preguntar acerca de lo que con base en su experiencia encuentran como dificultades de aprendizaje en sus estudiantes y cómo enfrentan dicha situación.

## **2.7 Interpretación de los Procesos Cognitivos de los profesores**

De las sesiones de trabajo colectivo con profesores fue necesario incluir preguntas sobre lo que los docentes iban realizando, con la finalidad de aclarar procedimientos o toma de decisiones sobre lo que producían, incluso sobre el diálogo que se estaba desarrollando entre pares.

Elegimos problemas para presentarlos durante el análisis individual y colectivo, diseñamos problemas y solicitamos que ellos los diseñaran, que los resolvieran y mostraran la forma de resolverlos, fue necesario que los docentes explicaran sus procedimientos y argumentaran en qué habían apoyado sus decisiones para las propuestas de resolución y diseño que ellos realizaron.

En lo que pondremos énfasis para realizar el análisis se refiere a los contenidos de los números fraccionarios y operaciones como la multiplicación y división que surgen ante la resolución de problemas, y en

qué contenidos de la Matemática se apoyan los profesores para promover la comprensión de lo que ellos realizan. Asimismo, nos interesa saber cómo justifican sus procedimientos, las representaciones y los significados que asocian a esas representaciones.

A través del lenguaje oral y escrito como medio de comunicación de sus ideas, conocimientos y razonamientos buscamos identificar los procesos cognitivos presentes cuando se enseñan contenidos de la Matemática Educativa.

## **2.8 Procedimientos de validación**

### **2.8.1 Ensayo preliminar para verificar la viabilidad de los instrumentos**

Para verificar la viabilidad de los instrumentos diseñados para esta investigación, realizamos la aplicación del cuestionario a modo de prueba con profesores en ejercicio y con experiencia en la enseñanza, se realizó el ensayo preliminar de los problemas que se aplicaron a los maestros de matemáticas, así como la pertinencia de solicitar el diseño de situaciones similares a las que llevan al salón de clase.

De las actividades realizadas en las Jornadas Académicas se fueron construyendo y modificando las actividades de acuerdo a la experiencia en la sesión previa, cada sesión se realizó con una semana de diferencia. Se realizaron las adecuaciones pertinentes de acuerdo a los datos que aportaban los profesores.

### **2.8.2 Triangulación**

Con la finalidad de verificar la validez en la interpretación de los datos que se van a obtener de la aplicación de los instrumentos mencionados en el diseño metodológico (Stake, 1999; Alvarez-Gayou, 2003) se propone realizar dos tipos de triangulación.

Como ya se ha mencionado, se utilizaron diferentes instrumentos para obtener datos, tales como la aplicación de un cuestionario, entrevistas y las

Jornadas Académicas, éstos se van a aplicar en diferentes momentos, debido a esto es pertinente realizar una triangulación de instrumentos ya que se van a utilizar diferentes métodos de recogida de datos para estudiar el problema planteado en esta investigación (Cohen y Manion, 1990).

### **2.8.3 Entrevistas individuales a Rosa y Carlos**

Para la investigación interesan los planteamientos y razonamientos de los profesores de manera individual, es decir, conocer las reflexiones que hace de su propia práctica en solitario, para lograr lo anterior nos vamos a centrar en las elaboraciones de dos profesores, Rosa y Carlos. Para ello, dimos seguimiento a las actividades de los profesores con entrevistas que permitieron describir sus procesos cognitivos ante la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a las fracciones (Cohen y Manion, 1990). La adaptación de las observaciones realizadas de sus actuaciones durante las *Jornadas Académicas* permitió recuperar datos de sus procesos e impresiones.

## **2.9 Análisis**

Los datos que se obtengan serán analizados desde las aportaciones que han realizado investigadores acerca de la construcción del conocimiento de las fracciones Kieren, (1985, 1998); Berh, et al. (1983); Freudenthal, (1983); Vergnaud, (1983, 1985); Hart, (1981); Behr, et al. (1992) y Picketly et al. (1996) entre otros.

Para ello, es necesario restablecer la forma en que se van a analizar los datos, desde el momento de la obtención de datos, la organización, la interpretación y finalmente presentar el informe de los hallazgos. Se va a identificar el tipo de conocimiento que los profesores de secundaria poseen en la enseñanza de contenidos de fracciones, por las representaciones y procedimientos que ellos utilicen, y que hagan explícitos en sus explicaciones, las preguntas de la entrevista están orientadas a promover en el profesor la mención de las razones que motivan la toma de decisiones.

A partir de la triangulación de los instrumentos, pretendemos dar una interpretación de contenido semántico de lo que el docente expresa a través del lenguaje, como un modo de expresar sus pensamientos, las estrategias que utilizan para definir las actividades de fracciones que los profesores llevan al aula, así como del análisis que el profesor hace de su propia práctica a través del trabajo entre pares, y si esta reflexión modifica sus planteamientos iniciales.

Es decir, pretendemos conocer la propuesta de enseñanza de problemas multiplicativos con fracciones a la que ellos recurren, cuáles son las estrategias que ellos privilegian, si ellos los diseñan y cómo los resuelven. Lo anterior se va a realizar a lo largo de las diferentes etapas de la investigación y del análisis, en primera instancia el cuestionario, para identificar los procedimientos y diseños que el profesor realiza.

Durante la entrevista individual con retroalimentación buscamos identificar los *procesos cognitivos* de los entrevistados, saber por qué utilizan ciertas representaciones y no otras, si la formación académica que ostentan influye en sus decisiones para resolver y diseñar problemas.

Vamos a contrastar estos datos con los que se obtengan de las sesiones de las *Jornadas Académicas* y en última instancia con nuevas entrevistas individuales con retroalimentación.

A modo de resumen en la figura 2.23 presentamos los elementos teóricos que guiaron la investigación.

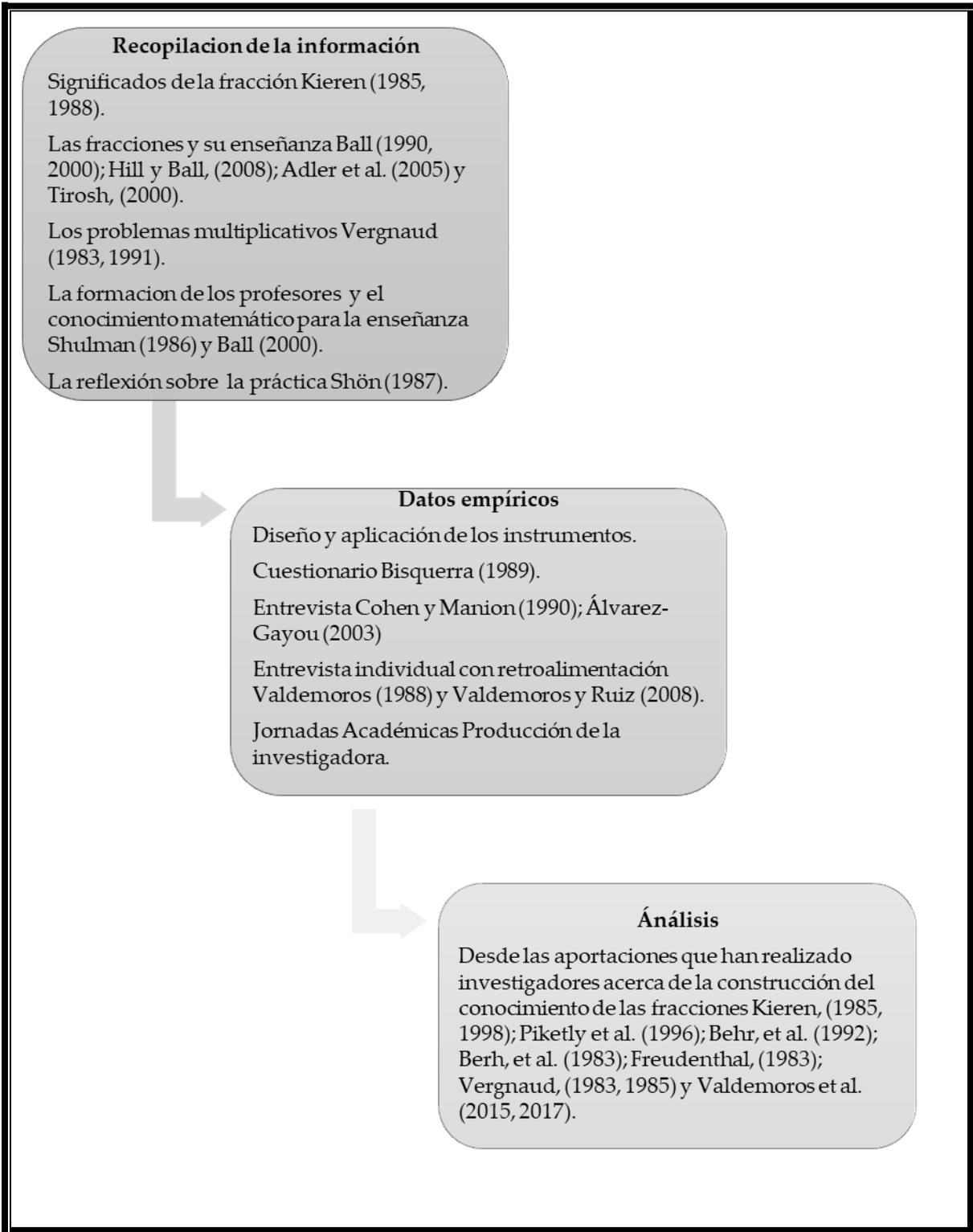
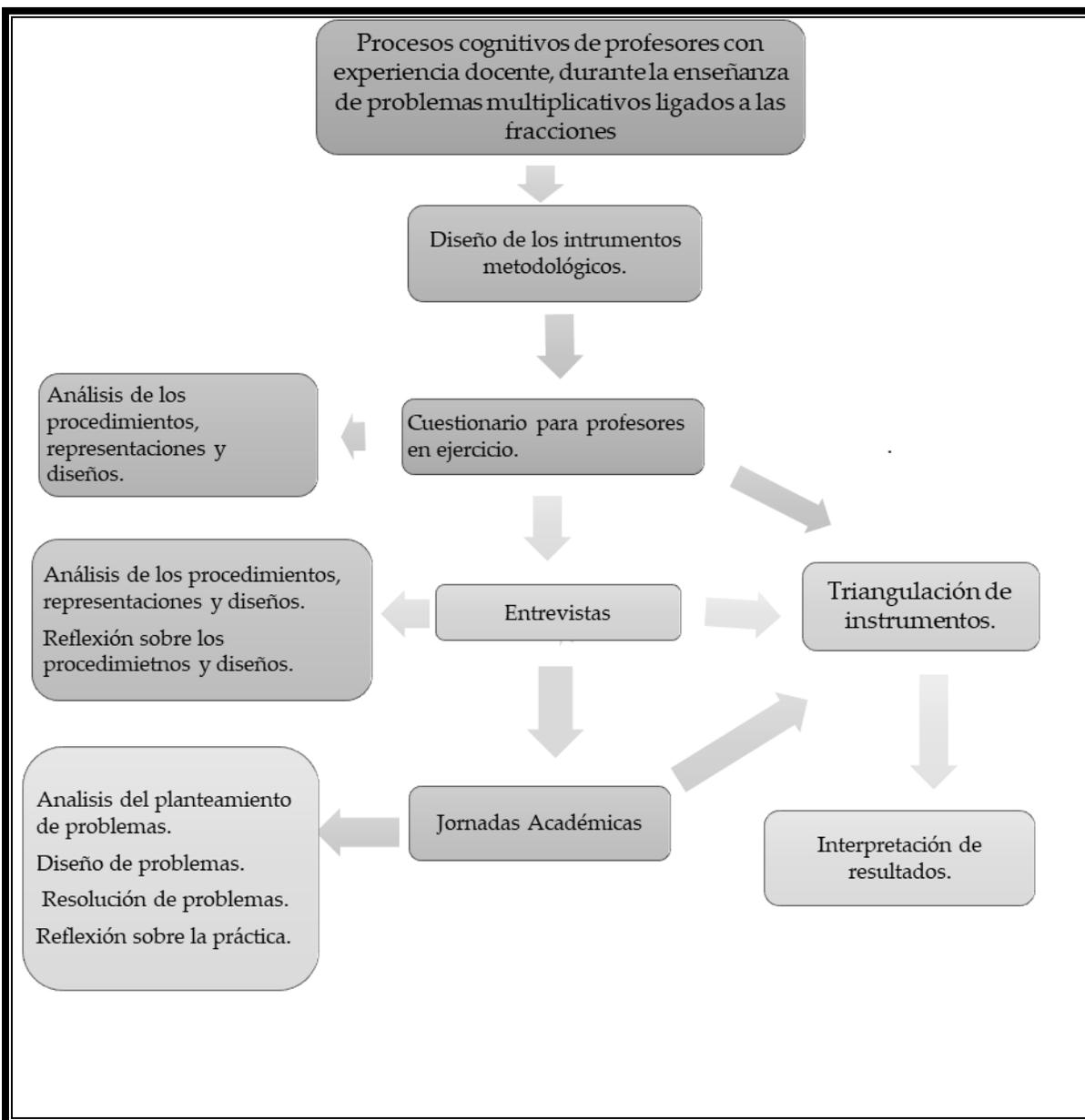


Figura 2.23. Elementos teóricos que guiaron la investigación.

A continuación, en la figura 2.24 mostramos el diagrama donde es posible identificar el proceso de la investigación.

Las experiencias y conocimientos que se hacen evidentes durante el trabajo colectivo con profesores en ejercicio son enriquecedores. Porque nos permite enfocar la atención en los profesionales con experiencia debido a la enseñanza reiterada.



**Figura 2.24** El diagrama donde mostramos el proceso de la investigación.

Con esta premisa ellos sugieren dificultades por parte de sus estudiantes, así como las estrategias que han utilizado para solventar dichas dificultades, es así que entre otros aspectos enriquecedores de este trabajo buscamos a través de la reflexión de sus acciones sea posible promover la reestructura de los diseños iniciales de problemas multiplicativos con la finalidad de mejorar su práctica educativa (Elliot, 1993).

A modo de finalización, en este capítulo presentamos el tipo de investigación que se llevó a cabo, los escenarios en donde se desarrolló el trabajo, la descripción de los sujetos participantes y sus perfil de formación académica, mencionamos los objetivos del diseño de los instrumentos metodológicos, el orden de aplicación, la validación de los instrumentos que nos permitieron obtener los datos para posteriormente realizar un análisis minucioso y que nos diera la oportunidad de caracterizar los procesos cognitivos, las dificultades a las que se enfrentan y cómo las resuelven los profesores de Matemáticas con amplia experiencia en la enseñanza de educación secundaria.

En el siguiente capítulo presentamos el análisis de las entrevistas individuales con retroalimentación que aplicamos a los profesores Rosa y Carlos, integramos además la resolución de los problemas y la reflexión que surgió a través del diálogo con los docentes.



# CAPÍTULO 3

---

## ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

En este capítulo presentamos el análisis de tres entrevistas individuales con retroalimentación que se realizaron en etapas diferentes de la investigación. Este instrumento lo aplicamos antes y después de las *Jornadas Académicas*. En la primera etapa (previo a las Jornadas Académicas con profesores) fueron llevadas a cabo una entrevista con retroalimentación en tres momentos para la profesora Rosa.

Durante la etapa 3 (después de las Jornadas Académicas) aplicamos dos entrevistas, una a la profesora Rosa (en dos momentos) y otra al maestro Carlos (para Carlos, agregamos una breve sección para recuperar datos asociados a su preparación profesional). La entrevista de los dos profesores no se realizó de manera simultánea, se llevó a cabo de modo individual a través de la plataforma Meet (atendiendo las recomendaciones sanitarias por el Covid-19).

La entrevista nos sirvió para indagar los conocimientos y *procesos cognitivos* de los docentes en un ambiente de resolución de tareas que con

frecuencia utilizadas por los maestros para trabajar con los estudiantes; las actividades programadas para la aplicación de este instrumento consistieron en la resolución de dos problemas multiplicativos vinculados a los números fraccionarios.

Las tres entrevistas nos permitieron identificar los conocimientos a los que recurren los profesores con amplia experiencia para justificar sus procesos de resolución de problemas multiplicativos, asimismo, permitió conocer las representaciones que utilizan los docentes para enseñar el tema que mencionamos previamente. Por otra parte, la interacción y el diálogo derivado de la comunicación de ideas durante las entrevistas nos dieron la oportunidad de identificar los significados que los docentes comunican en su discurso a través del lenguaje verbal y escrito.

Con base en la interacción del entrevistador y los docentes (dos profesores en entrevistas individuales con retroalimentación) buscamos promover la reflexión durante la resolución de los problemas a través de la expresión de manera oral y escrita de los pensamientos, la expresión de ideas y respuestas a los cuestionamientos orientados a la reflexión.

La reflexión por parte de los profesores se fue dando en la medida en que ellos expresaron de manera oral y escrita la forma de resolver un problema multiplicativo, es decir, cuando identificamos que el maestro titubeaba o se detenía en alguna parte del proceso de resolución de la tarea, preguntábamos acerca del porqué de sus decisiones o si tenía otra forma de explicar esa situación, lo que permitió al docente la posibilidad de encontrarse en lo que llamamos *conflicto cognitivo de enseñanza*, es decir, si las razones o procedimientos que el profesor manifestó no le permitieron mostrar la justificación de un procedimiento, de qué otra manera podía manifestar sus ideas y conocimientos para resolver la tarea que se estaba resolviendo.

Este formato de la entrevista permitió retroalimentar lo que el docente realizó y con el fin de hacer consiente a los entrevistados acerca de sus procedimientos y los conocimientos implícitos en la resolución.

### **3.1 El modelo de análisis**

Para poder conocer e identificar los conocimientos que emergen durante las entrevistas con retroalimentación presentamos el modelo de análisis de (Valdemoros, 1993; Valdemoros et al. 2008; Valdemoros et al. 2015, 2017). El modelo implica un conjunto de procesos interactivos durante el desarrollo de las tareas realizadas, para esta investigación incorporamos la identificación de los procesos cognitivos de los profesores con experiencia. A continuación, presentamos los aspectos que están considerados en el modelo de análisis.

**En el plano semántico:** pretendemos identificar los significados y significantes asociados a la multiplicación y división con números fraccionarios durante el desarrollo de la entrevista donde se integró la resolución de problemas multiplicativos.

**En el plano sintáctico:** las representaciones asociadas a los procedimientos y algoritmos que surgen durante la resolución de problemas y como propuesta de parte de los docentes para resolver con los estudiantes.

**En el plano de la traducción de un lenguaje a otro:** consideramos que los profesores tratan de favorecer la comprensión del tema relacionado con la resolución de problemas multiplicativos, para ello, utilizan formas de representación reiteradas a lo largo de la experiencia. Asimismo, consideramos la traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal como una forma de poder detectar los conocimientos del profesor, y como un medio de transmisión de conocimiento.

**En el plano pragmático:** nos interesa identificar los enunciados con contenido matemático, los significados que se asignan, así como la interpretación de esos significados durante la resolución y diseño de

problemas multiplicativos, lo anterior durante la interacción sostenida entre la investigadora y el profesor.

Hemos considerado las aportaciones de Valdemoros, et al. (2015, 2017), relacionado con el contenido del discurso que realiza el docente con experiencia cuando expresa de manera verbal y escrita sus razones para la toma de decisiones en torno a la resolución o diseño de una situación problemática. Las aportaciones de las investigadoras se refieren a “los núcleos de significación y pensamiento” en donde consideran la importancia del contenido de los enunciados cargados de sentido y significado, para este trabajo de investigación consideramos los aspectos relacionados con la enseñanza de contenidos de multiplicación y división ligados a los números fraccionarios por parte del docente además de la reflexión sobre la propia práctica.

Por otra parte, de acuerdo a los datos obtenidos a través de los conocimientos expresados mediante lenguaje como medio de comunicación durante la entrevista, realizamos categorías de análisis para identificar y mostrar los conocimientos de los profesores en ejercicio durante la resolución y diseño de problemas multiplicados vinculados con los números fraccionarios. En lo que se refiere a la resolución de problemas multiplicativos ligados a las fracciones tenemos:

Consideramos las aportaciones realizadas por Vergnaud (1988), referidas a las estructuras multiplicativas donde se consideran aquellas situaciones donde interviene la multiplicación y división, en esta investigación lo haremos relacionado con los números fraccionarios.

En lo que se refiere a la resolución de problemas, las aportaciones de este autor nos dieron la posibilidad de diseñar y elegir las tareas para presentar a los docentes y con base en esa distinción realizamos el análisis considerando los significados de la fracción aportados por Kieren (1988). En este sentido, las aportaciones de Vergnaud (1988, 1991) nos van a permitir identificar el

tipo de diseño que realicen los profesores, y dentro de ese diseño identificar los procesos cognitivos que surjan.

**El producto de medidas:** consiste en una relación de tres cantidades, donde una es el producto de otras dos en un contexto numérico y en un plano dimensional (Vergnaud, 1991), para la multiplicación encontrar la medida del producto cuando se conocen las medidas elementales, y para la división cuando es necesario encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida del producto.

**Inverso multiplicativo del producto o el inverso multiplicativo del producto de medidas** Valdemoros et al. (2015) en este caso se refiere a situaciones donde dada el área de un rectángulo y un lado se puede utilizar la operación inversa de la multiplicación para encontrar el valor del lado faltante.

**El espacio cociente:** Semánticamente hablando, la división no es conmutativa, de acuerdo con lo que menciona Piaget, Inhelder y Szeminska, (1960) la conservación procede de la medida, ellos señalan que los problemas clave se refieren a la subdivisión y conservación del todo, la subdivisión se refiere a partes equivalentes.

Toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre un dominio  $A$  induce una partición de ese dominio en clases de equivalencia, llamada *espacio cociente de  $A$*  por la relación  $\sim$ , y simbolizada como  $A/\sim$ .

Se considera como cocientes de números enteros, para esta investigación los llamaremos *cocientes de números naturales* porque sólo hemos considerado los valores positivos de los números enteros.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b), a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\} \text{ con } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

La notación que comúnmente usamos para un número racional o fraccionario es  $a/b$ , donde  $b \neq 0$ .

Por otra parte, en lo relacionado a la práctica de enseñanza por parte de los docentes consideramos las siguientes categorías:

**Conflicto cognitivo de enseñanza:** esta categoría se refiere al profesor durante la explicitación de los procedimientos ante la resolución de tareas, es decir, a los conocimientos y las explicaciones que surgen para sustentar los procedimientos que utiliza el profesor cuando expresa de manera oral y escrita las razones para la toma de decisiones al momento de resolver las tareas.

Lo anterior se presenta cuando los medios que utiliza el maestro para explicar el procedimiento en la resolución de un problema no le permiten dar las razones matemáticas suficientes a la hora de justificar lo que realiza, o en su caso la ausencia de conocimientos de contenido matemático que le permitan mostrar las relaciones de multiplicación al resolver problemas, ante esta situación los docentes pueden utilizar una nueva estrategia de resolución sin estar apoyados en contenidos matemáticos.

Apoyamos lo anterior en las aportaciones de Piaget que se refieren a la asimilación y el acomodamiento, “La asimilación implica “incluir en una estructura” y el acomodamiento describe como el proceso por el cual la estructura cognitiva del individuo [en ese caso el maestro] se enfrenta a una situación que requiere una modificación” (Coll, 1992, p. 25).

**Patrones de enseñanza:** Nos referimos a los patrones en la práctica de la enseñanza (que implican formas específicas de justificar los hechos matemáticos apoyados en el uso de definiciones correctas o incorrectas). En este sentido Gimeno (1991) menciona que el análisis de la práctica pedagógica implica la manifestación de espacios de decisión autónoma, en este caso consideramos las decisiones del profesor en torno a los contenidos de los temas que enseña además de identificar cómo los justifica. Asimismo, los patrones de enseñanza pueden entenderse como la estructura de las acciones que rigen una sesión de enseñanza reiterada por los años de servicio del docente.

## **3.2 La entrevista individual con retroalimentación**

Para el diseño y aplicación de la entrevista nos apoyamos en Valdemoros (1998), Valdemoros et al. (2008); Valdemoros et al. (2015, 2017). En lo que sigue, presentamos fragmentos de las entrevistas semiestructuradas de corte individual con retroalimentación, donde a lo largo de los diálogos identificamos datos relevantes de la práctica de los docentes durante la enseñanza de contenidos Matemáticos en la escuela secundaria.

Tratamos de identificar situaciones donde emergen los significados y el sentido para las operaciones como la multiplicación y división con números fraccionarios que los profesores asignan a las representaciones y afirmaciones presentes durante el proceso de resolución de problemas; relacionado con la experiencia de enseñanza pretendemos identificar cuáles son las estrategias y representaciones que privilegian, si ellos diseñan sus problemas o qué elementos consideran necesarios para elegir un problema para llevar al aula.

Asimismo, nos interesa conocer si los maestros identifican dificultades asociadas al estudio de las operaciones de tipo multiplicativo con números fraccionarios por parte de los estudiantes y qué acciones derivadas de su experiencia de enseñanza implementan para resolver esas situaciones.

### **3.2.1 Las entrevistas a profesores de Matemáticas**

Presentamos el análisis de los datos obtenidos de las entrevistas, en primer término, presentamos la información obtenida de la profesora Rosa, dicho instrumento (una entrevista en tres momentos), debido a la complejidad y profundidad de las situaciones que se plantearon y por el interés que tenemos en torno a los *procesos cognitivos* de la maestra, consideramos necesario indagar en torno a la formación profesional y preparación continua, los conocimientos y estrategias que emergen durante la resolución de problemas.

En segundo término, presentamos fragmentos y tareas de dos entrevistas (se aplicaron los mismos problemas a ambos docentes), una realizada a la

profesora Rosa y la otra aplicada al profesor Carlos, es necesario mencionar que fueron realizadas de manera individual y a través de la plataforma Meet. Las entrevistas se realizaron durante la tercera etapa de la investigación, es decir, después de haber llevado a cabo las Jornadas Académicas con profesores.

En una tercera sección realizamos la comparación de los procesos de resolución de problemas multiplicativos por parte de Rosa y Carlos, así como de las estrategias privilegiadas, las representaciones y los contenidos matemáticos presentes durante el diálogo sostenido con ambos docentes.

### 3.2.2 La entrevista de la profesora Rosa

A continuación, presentamos datos obtenidos de la entrevista aplicada a la profesora, en primera instancia presentamos aspectos de la preparación profesional y posteriormente los procesos de resolución de problemas multiplicativos de Rosa.

#### La experiencia docente de Rosa

Para mostrar aspectos de la preparación de la docente y su formación académica en lo que se refiere a los números fraccionarios, consideramos necesario mostrar fragmentos de la entrevista, para facilitar la lectura a la profesora la nombramos como Rosa y a la investigadora como E.

En la figura 3.1 presentamos fragmentos de la entrevista semiestructurada de corte individual con retroalimentación (Valdemoros, 1998 y Valdemoros et al. 2015), donde identificamos aspectos de la formación profesional de la profesora Rosa.

*E: ¿En el programa de estudios en que usted se formó, ¿cómo se planteaba el tratamiento y estudio de las fracciones y las operaciones como la multiplicación y división?*

*Rosa: Las fracciones y las operaciones yo creo que les ha faltado mayor profundidad de estudio, me las enseñaron a través de una representación geométrica, sin embargo, falta comprensión de lo que implica una fracción o la operación.*

*E: ¿Ha realizado algún curso de capacitación después de su formación como docente?*

*Rosa: Sí, he buscado en los centros de maestros, por las dificultades que se me presentan con algunos temas.*

*E: ¿A qué temas y dificultades se refiere?*

*Rosa: Temas que se les dificultan a los niños, los temas de fracciones se me dificulta enseñarlos, lo que busco son cursos donde me apoyen para enseñar esos temas y en el libro de texto me apoyo.*

**Figura 3.1.** La formación académica de Rosa.

En el fragmento anterior mostramos aspectos de la formación docente, donde ella atribuye una falta de profundidad en torno al estudio de contenidos relacionados con las fracciones, lo asocia con falta de comprensión, ella sugiere que esta situación ha repercutido en su práctica educativa, porque ella asume dificultades para enseñar temas relacionados con las operaciones ligadas a los números fraccionarios. Asimismo, observamos la importancia que Rosa asigna al conocimiento del programa de estudios y los libros de texto como una guía del diseño de las actividades para el aula. Por otra parte, observamos el uso de representaciones geométricas como medio para enseñar números fraccionarios desde la etapa formativa de Rosa.

A continuación, en la figura 3.2. se presentan otro fragmento de la entrevista de Rosa que permite recrear situaciones relacionadas con la enseñanza de las fracciones y sus operaciones.

*E ¿A qué contenidos matemáticos recurre para la enseñanza de las fracciones y las operaciones de multiplicación y división?*

*Rosa: Para las fracciones, yo utilizo representaciones geométricas, a través de algún cuadrado o algún círculo para representar una fracción, divido en partes iguales una recta y así dividir un entero en fracciones.*

*E: ¿De acuerdo con su experiencia usted ha identificado alguna dificultad relacionada con su enseñanza de las operaciones con fracciones en la escuela secundaria? ...*

*Rosa: Sí, a los alumnos les cuesta mucho trabajo tener claro qué es una fracción, pueden representarla, pero a la hora de utilizarla para resolver un problema, la operación la hacen de manera mecánica.*

*E: ¿A qué lo atribuye usted estas dificultades?*  
*Rosa: Es la forma en cómo se les ha enseñado, en cómo ha transmitido el maestro esa enseñanza, si el maestro no tiene claro, ...no lo va a transmitir al alumno, hace falta que el maestro tenga más recursos para enseñar estos temas.*  
*E: ¿Cómo cuáles recursos?*  
*Rosa: ... en un diplomado, un maestro nos explicaba cómo podíamos utilizar el modelo geométrico para enseñar la multiplicación de fracciones, y que es lo que representa, hasta ahí me quedó claro cómo se representa y qué significado tiene la operación.*  
*E: Previo a esta experiencia, en el diplomado, ¿cómo enseñaba usted la multiplicación con números fraccionarios?*  
*Rosa: De manera muy mecánica, yo creo que cometemos el error de enseñar a los alumnos cosas que no se han entendido o no se han alcanzado a comprender en el significado de la operación, entonces yo caigo en la mecanización del algoritmo.*

**Figura 3.2.** La experiencia de Rosa en la enseñanza de la multiplicación relacionada con los números fraccionarios.

Este fragmento nos permitió mostrar conocimientos que la profesora manifiesta de manera implícita, es decir, el énfasis mostrado para la representación de la unidad mediante figuras geométricas, y la recta numérica como medio para dar sentido a las fracciones. Por otra parte, intuimos una relación entre lo que ella identifica como dificultad para la enseñanza y contenidos que de manera personal no había dado significado de manera previa (en su formación), como es el caso del concepto de fracción, sin embargo, lo hace evidente por parte de sus estudiantes, y lo considera como un factor para que los alumnos tengan dificultades de comprensión ante el estudio de este tema.

Relacionado con las dificultades de enseñanza, ella es consciente de haber promovido la mecanización de procedimientos y lo atribuye a la falta de comprensión y recursos relacionados con el significado de la multiplicación de fracciones, y la falta de recursos para enseñar estos temas.

En la figura 3.3. mostramos otro fragmento de la entrevista, donde la profesora Rosa expresa desde su experiencia docente las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes.

*E: De acuerdo a su experiencia ¿cómo anticipa las dificultades que sus estudiantes pueden tener al estudiar el tema relacionado con la multiplicación y división de fracciones?*

*Rosa: ... viendo el programa, que contenidos se van abordar, ...los conceptos, ... tomo en cuenta mi experiencia para saber qué se va a dificultar del tema.*

*E: Las actividades que lleva al salón, ya sea un ejercicio, un problema, ¿usted tiene previsto posibles situaciones donde sus estudiantes tengan dificultades? Y ¿qué actividades promueve para resolver esta situación?*

*Rosa: Tomo en cuenta el examen diagnóstico, veo los errores que tienen los alumnos, generalmente año con año son los mismos, entonces yo voy previendo el tipo de actividades, ...cuáles son las que hace falta reforzar, por ejemplo, ellos conocen muy bien la representación de una fracción a través de figuras, porque así lo han manejado en primaria.*

**Figura 3.3.** Las dificultades de cognitivas de los estudiantes de acuerdo a la experiencia de Rosa.

Este fragmento de la entrevista nos permite mostrar como Rosa desde su experiencia identifica y anticipa dificultades acerca del tema relacionado con los números fraccionarios y sus operaciones por parte de los estudiantes, un elemento que le permite anticipar situaciones como la anterior es el diagnóstico del grupo, en este instrumento ella ha identificado patrones de errores sin documentarlos, la propuesta que ella sugiere para subsanar esta situación es reforzamiento de conceptos y apoyarse en aspectos que a su criterio los alumnos tiene muy fortalecidos, como es la representación de fracciones a través de figuras geométricas. Ella fundamenta sus procesos en prácticas reiteradas relacionadas con la representación de las fracciones mediante figuras geométricas.

Por otra parte, identificamos que ella tiene noción de dificultades y errores que se repiten, posiblemente por contenidos que no se han estudiado a profundidad, sin embargo, los tiene como referente de su experiencia de enseñanza sin una alternativa que le haya permitido resolver dicha situación de manera eficaz, sugiere la necesidad de promover la comprensión del

concepto de fracción y las operaciones de multiplicación y división para evitar este tipo de situaciones. En este sentido, ella recurre a la representación de fracciones con figuras como medio de afianzar y ampliar los conocimientos de los alumnos, es decir, la maestra hace énfasis en tratar de anclar un conocimiento muy fortalecido por parte de los estudiantes a lo nuevo que ella trata de explicar a través de los problemas.

En lo que sigue presentamos el fragmento donde Rosa menciona los errores identificados por ella sin documentar acerca del estudio de este tema, véase la figura 3.4.

*E: De acuerdo a su experiencia ¿Cuáles son los errores comunes de los estudiantes al resolver problemas que implican operaciones como la multiplicación y división con números fraccionarios?*

*Rosa: La mecanización de procedimientos en las operaciones, ... no hay comprensión, por ejemplo, en una multiplicación nada más dicen: se multiplica de manera directa, aunque no sepan por qué. En una división se multiplica de manera cruzada, aunque no sepan por qué, ....*

*E: ¿Qué acciones considera que se puedan implementar para evitar este problema?*

*Rosa: Yo creo que una solución es que ellos comprendan el concepto de una fracción, de las operaciones, ... básicamente sería la comprensión.*

*E: ¿Para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división con fracciones que representaciones utiliza usted?*

*Rosa: Para las operaciones con fracciones utilizo modelos geométricos, porque lo manejo bien, a mí se me facilita enseñarlo de esa forma, o también el uso de algunos problemas sencillos de repartición.*

*E: En la enseñanza de las operaciones como la multiplicación y división ¿Qué papel juega el algoritmo?*

*Rosa: Yo pienso que es muy importante en la resolución de problemas, si es un elemento que me va a ayudar a resolverlo pues tengo que saber cómo usarlo y que es lo que me está representando dentro de un problema.*

*E: ¿Usted considera que el algoritmo les permite a los alumnos comprender el tema de multiplicación y división relacionada con los*

*números fraccionarios?*

*Rosa: Sí, yo pienso que sí, sobre todo que está representando mediante la operación, cómo esa representación me puede llevar a una solución.*

**Figura 3.4.** Acerca de las dificultades de los estudiantes.

De acuerdo a lo que Rosa menciona, identificamos que ella es consciente de las dificultades que promueve en los alumnos la mecanización de procedimientos y la falta de comprensión para el significado de la operación al momento de utilizar los algoritmos como medio de resolución de problemas. De acuerdo con la experiencia de enseñanza de Rosa, para acceder a la comprensión de las operaciones es necesaria la comprensión del concepto de fracción. Rosa asigna al algoritmo como una representación y no como un proceso.

Con base en lo que solicita su programa de estudio ella selecciona tareas que a su criterio le permitirán solventar la problemática que enfrenta en el salón de clase, así como usar representaciones que intuimos las ha interiorizado y le han permitido justificar sus procedimientos.

### **3.3 Las tareas de la entrevista**

Durante las entrevistas consideramos conveniente integrar problemas multiplicativos, con la finalidad de identificar los procesos cognitivos que surgían durante la resolución de los problemas multiplicativos, así como los pensamientos que la maestra comunicó a través de diálogo sostenido durante la entrevista con retroalimentación entre Rosa y la investigadora. A continuación, se presentamos el análisis de las tareas, que nos permitieron recrear e identificar los procesos cognitivos manifestados por la profesora de Matemáticas, asimismo tratamos de profundizar en la resolución de problemas multiplicativos con fracciones, así como los conocimientos que la maestra utilizó para definir las estrategias para su enseñanza.

### 3.3.1 La resolución de problemas

#### *El problema del producto de medidas*

En la figura 3.5 presentamos un problema que implica el producto de medidas relacionada con números fraccionarios, permite mostrar la representación geométrica como medio para resolver el problema.

La profesora leyó el problema y comenzó a resolverlo mediante una representación pictórica y numérica, posteriormente comenzó el diálogo entre la maestra y la investigadora acerca de la resolución del problema, es decir, la profesora nos mencionó la forma en que ella podría llevar y resolver este problema en su clase.

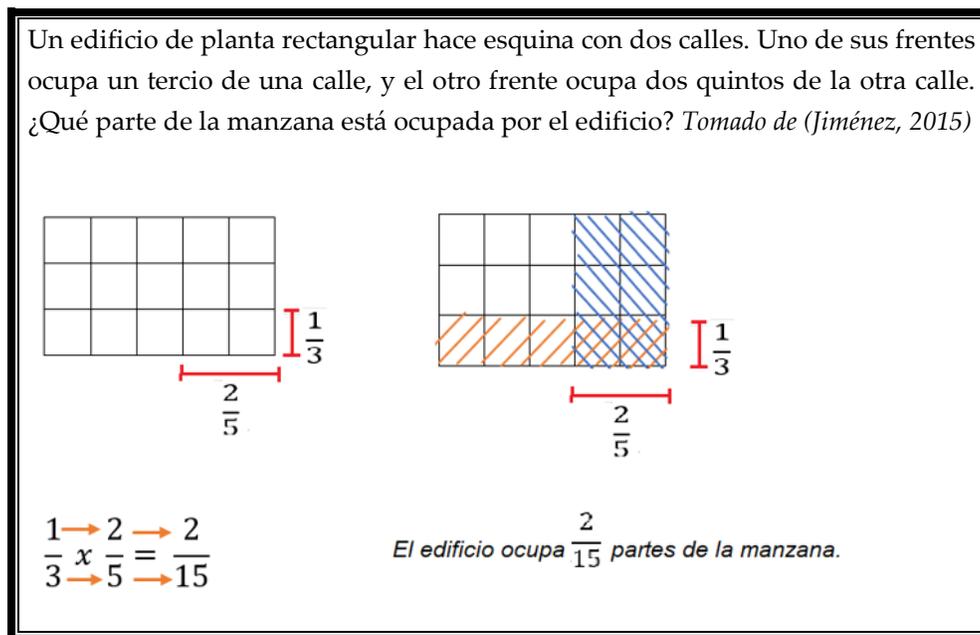


Figura 3.5 Resolución del problema del producto de medidas.

En el análisis de las representaciones, procedimientos y discurso emitido por Rosa identificamos situaciones como el uso representaciones geométricas y numéricas, como medio para resolver un problema.

Acerca de las representaciones observamos como ella utilizó la partición de cada uno de los lados de la figura geométrica para asignar un significado a

los números fraccionarios que intervinieron en los datos del problema, en palabras de ella *“vamos a dividir este frente en tercios, tomando una tercera parte y el otro lado del arreglo rectangular lo vamos a dividir en quintas partes de las cuales vamos a tomar dos”*, ella señaló lo que realizó en la figura de la izquierda, resaltó la necesidad de colorear las partes que representaban cada una de las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{5}$  dentro de la unidad [el rectángulo], como resultado de esa acción obtuvo una sección con doble sombreado.

En el análisis de las ideas que comunica la maestra Rosa en el plano de las representaciones como de manera verbal, identificamos el valor semántico asignado a la representación geométrica, porque la región con doble sombreado le permite representar la solución gráfica del problema y mostrar a los estudiantes la multiplicación de fracciones, esta estrategia le permite dar sentido a la operación de la multiplicación con números fraccionarios, así lo mencionó *“los estudiantes van a darse cuenta de que el resultado de multiplicar los numeradores es la parte con doble sombreado y el denominador corresponde al total de las partes”*. Por otra parte, le permite mostrar que no siempre se obtiene un número mayor cuando se multiplican dos números fraccionarios (Fischbein, 1985).

Identificamos que la profesora establece una relación entre lo semántico y lo sintáctico para que surja el sentido de la operación, es decir, en la figura donde se observa sombreado, Rosa sugiere que la multiplicación implica la intersección de las regiones señaladas y al realizar el conteo es posible verificar que esta parte corresponde al resultado de multiplicar las fracciones. Ella señaló la representación numérica del algoritmo y en el resultado hizo énfasis, suponemos que semánticamente tiene un lugar preponderante la representación pictórica, porque relacionó el denominador con el total de partes en que se dividió la figura y el numerador con las partes de doble sombreado, con base en esta relación trató de explicar la multiplicación de fracciones sin enfocarse únicamente en aspectos sintácticos.

Para finalizar la resolución del problema ella explicó el procedimiento para resolver la multiplicación con composiciones numéricas, apoyándose con flechas para guiar el procedimiento, cuestionamos acerca de la forma de resolver problemas multiplicativos previo a la capacitación que mencionó la profesora y ella agregó “solamente con el algoritmo”, por lo anterior suponemos que en el plano sintáctico están apoyados aquellos contenidos que sugieren conflictos cognitivos de enseñanza, porque la docente sólo utilizaba el algoritmo para resolver este tipo de problemas en su clase.

### *El problema de división con números fraccionarios*

En la figura 3.6 presentamos los procedimientos y reflexiones realizadas por la profesora para dar respuesta a la tarea que implica una división con números fraccionarios.

Para la solución del problema la profesora primero leyó el enunciado del problema, lo resolvió y en cuanto terminó ella mencionó los procedimientos que realizó para resolver la tarea, lo que permitió establecer el diálogo y la reflexión sobre la resolución del problema; la consigna para la actividad consistió en considerar la forma en que la profesora utilizaría dicho problema para su clase de matemáticas y enseñar a sus estudiantes el tema de la división que implica el uso de números fraccionarios.

El análisis de las acciones de la maestra nos permitió identificar aspectos semánticos relacionados con la estrategia inicial, ella utilizó una recta numérica para representar los recorridos (de acuerdo con el contexto del problema), posiblemente la docente tenía la idea intuitiva de resolver el problema mediante la comparación de las distancias recorridas, posiblemente la maestra pretendía establecer cuantas veces cabe  $\frac{2}{5}$  en  $1\frac{2}{3}$ , al comparar los segmentos de recta, sin embargo, abandona la estrategia.

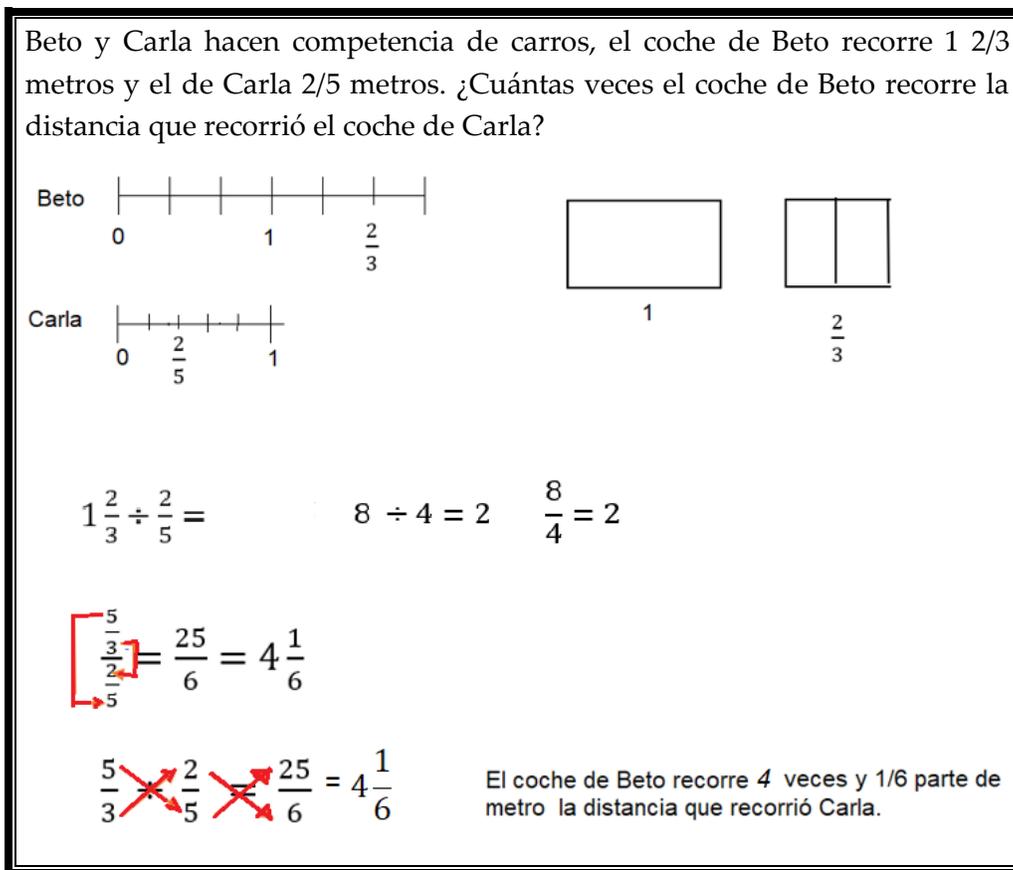


Figura 3.6. Problema de división de fracciones.

Cuando preguntamos acerca del porqué de la representación ella mencionó “quería preguntar a los alumnos si de esta manera podemos ver la distancia que recorre Beto y Carla”. Como no es posible representarlo de esa manera, Rosa sugiere utilizar una representación geométrica (dos rectángulos), para volver a indicar cuantas veces cabe, pero posiblemente identifica que no es posible representarlo de esa manera y nuevamente abandona esa estrategia, piensa un poco y continúa con la composición numérica.

De acuerdo con el análisis, los pensamientos expresados de manera implícita por la maestra están apoyados sobre las representaciones, tiene la idea intuitiva de mostrar mediante una recta numérica la división de fracciones, podemos pensar que Rosa trató de utilizar la misma estrategia del problema anterior, sin embargo, abandonó este intento porque esta representación no le iba a permitir mostrar cuántas veces cabe una medida en otra, consideramos que ella se encontró ante un conflicto cognitivo de enseñanza,

debido a que tuvo que ir reflexionando sobre sus propios procedimientos para validar sus estrategias de resolución, le resultó complicado mostrar de manera gráfica la resolución del problema a través de una división y por ello sus procedimientos se alojaron en el uso del algoritmo.

Cuando preguntamos el porqué de la representación geométrica, ella mencionó lo siguiente: *“quería representar cada fracción del problema, pero pensé que como son distancias no las puedo representar así, ... con figuras”*, agregó más adelante *“mejor le pregunto a los niños que operación podemos hacer para resolver el problema”*. En este breve diálogo identificamos conocimientos acerca de la longitud y su representación, conocimientos implícitos del concepto de fracción, identificación de la unidad en un contexto continuo, sin embargo, no fue posible articular estos conocimientos para proponer la resolución del problema. En este caso el algoritmo proporciona una estrategia de solución.

La profesora Rosa posteriormente señaló la expresión numérica [representó la división con números fraccionarios  $1 \frac{2}{3} \div \frac{2}{5}$ ], y comentó al respecto: *“hago una repartición de cuántas veces cabe dos quintas partes en la distancia que ha recorrido el carro de Beto, para esta repartición yo divido  $1 \frac{2}{3}$  entre  $\frac{2}{5}$ ”*, y señaló la representación numérica con fracciones, sin embargo, Rosa resolvió el problema utilizando un arreglo particular que señaló con flechas. Los conocimientos presentes en el diálogo de Rosa son la idea de partición y división cuotativa.

La entrevistadora, preguntó acerca del procedimiento que utilizó para resolver la división de fracciones y ella agregó que este tipo de decisiones las toma con base a su experiencia, así lo mencionó *“al alumno se le dificulta mucho entender cómo se va a dividir este número mixto con esta fracción propia [señaló la representación numérica del algoritmo de la división], para mí es más sencillo que ellos lo interpreten con este arreglo”*, y señaló [el arreglo alternativo que se reporta en esta investigación]; para apoyar el procedimiento para resolver la división.

En el plano de lo sintáctico identificamos el algoritmo de la división a través de multiplicar por la fracción inversa del divisor, a través de un acomodo numérico que de acuerdo a la experiencia de enseñanza de la docente les permite a los estudiantes recordar el procedimiento para resolver.

Por otra parte, ella utilizó una representación del procedimiento de la división con números naturales como caso particular y extender este procedimiento a los números fraccionarios. Cuando le preguntamos a Rosa si había otra forma de resolver el problema ella escribió el procedimiento que aparece en la parte baja de la figura 3.6. y agregó *“lo que hago es utilizar los extremos, los multiplico y luego los medios, es una forma de hacer la división.”* Con esa acción la docente explico la división de fracciones y justificó el procedimiento mediante el uso de flechas para mostrar el procedimiento.

En los procesos cognitivos de la profesora Rosa observamos formas de representación que permiten identificar los conocimientos y estrategias que utilizó para resolver la tarea, el supuesto es que ella utiliza arreglos alternativos para dar solución a posibles dificultades de enseñanza, estas decisiones tienen origen en su experiencia de enseñanza y con el fin de favorecer la comprensión de las operaciones y alejarse de la mecanización, sin embargo, ante la dificultad de mostrar la división de manera gráfica utilizó los números naturales como referencia para indicar el arreglo de los números fraccionarios y realizar el procedimiento.

Rosa hizo evidente el uso de modelos lineales, geométricos y representaciones numéricas para dar significado a la partición y la división con números fraccionarios. Ella consideró el modelo geométrico como estrategia para mostrar lo que realizó en el plano de las operaciones, sin embargo, no se observó una vinculación con los modelos de representación y las expresiones numéricas.

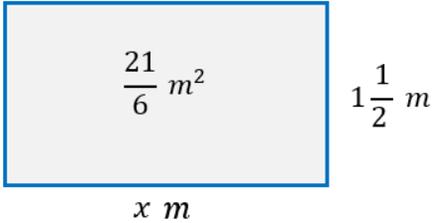
### *El problema del inverso multiplicativo del producto de medidas*

En la figura 3.7 presentamos los procedimientos que la profesora realizó para resolver el problema que se refiere al inverso del producto de medidas.

Javier tiene una huerta rectangular que mide  $\frac{21}{6}$  metros cuadrados de área. En este terreno sembró cebollas y lechugas. Como se avecina el temporal de lluvias con posibilidad de granizo quiere proteger su huerta, así que le colocará una cubierta de plástico. Sabe que el ancho de terreno es de  $1\frac{1}{2}$  metros.

¿Cuánto debe medir el largo del plástico que necesita para cubrir el área del terreno?

Inspirado en Castañeda (2015) adaptación de las investigadoras.



$A = a \times h$

$$\frac{21}{6} = b \left(1\frac{1}{2}m\right)$$
$$10 = (5)(x)$$
$$\frac{10}{5} = x$$
$$\left[ \frac{\frac{21}{6}}{\frac{3}{2}} \right] = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

**Figura 3.7** El problema del inverso del producto de medidas, la profesora resuelve mediante el inverso de la multiplicación.

Para resolver el problema, Rosa leyó el enunciado y resolvió el problema, posteriormente nos fue explicando sus procedimientos, cuando veíamos que Rosa se detenía, posiblemente a reflexionar, hacíamos preguntas relacionadas con la justificación de sus procedimientos o si había otra manera de resolver la situación con la finalidad de obtener información acerca de sus procesos cognitivos ante la resolución de la tarea.

De acuerdo con las representaciones de Rosa es posible inferir que identificó cómo proporcionaría alguna referencia a los alumnos para tratar de resolver el problema, *“los alumnos deben conocer las fórmulas geométricas, ¿cómo representarían con algún dibujo este problema?”* Rosa anticipó que ellos dibujarían un rectángulo al tiempo que señaló la figura correspondiente (señaló el rectángulo con los datos del problema). Ella se apoyó en los conocimientos elementales como las fórmulas para calcular área, como un contenido matemático ya interiorizado.

Para la resolución Rosa comunicó las siguientes ideas apoyándose con la representación geométrica, *“este lado mide  $1 \frac{1}{2}$  metro, ¿qué es lo que no sabemos?, ¿cuánto mide la base de este rectángulo?”*, al tiempo que señaló la base del rectángulo asociándola con la incógnita.

Rosa continuó explicitando y enfatizando la forma de asociar los datos de la figura con la fórmula: *“sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura”*, ella escribió la ecuación [sustituyó los datos del problema en la fórmula del área], continuó diciendo: *“el área son  $21/6$  de metros cuadrados, la base no la conocemos, pero la altura si, la cual es  $1 \frac{1}{2}$  metro”*, señaló la ecuación, luego mencionó como preguntaría a sus estudiantes acerca de lo que deben hacer para resolver tal situación.

La profesora de acuerdo a su experiencia anticipó la dificultad que podrían tener los alumnos para deducir la operación [inverso de la multiplicación] para dar respuesta al problema, para ello recurrió de manera reiterada como lo hizo de manera sistemática en la resolución de problemas previos, a una representación con números enteros, identificamos la intención de favorecer la comprensión mediante representaciones con números enteros, ella pretendía facilitar el procedimiento para que el estudiante utilizando contenidos relacionados con álgebra es decir, presentar ejemplos particulares para que los estudiantes deduzcan que es necesario despejar la ecuación, lo que llevaría a resolver una división con números fraccionarios.

Por otra parte, ella expresó de manera verbal tales pensamientos *“para hacerlo más sencillo utilizo un ejemplo, podemos conocer ese valor a través de una operación inversa que en este caso es una división”*, se refiere a la operación inversa de la multiplicación, ella agregó *“sirve para despejar, para que ellos conozcan que es un despeje, y nos va a permitir conocer el valor que hace falta”*, para ella este proceso es suficiente para relacionar la figura, la fórmula y acceder a la división de fracciones, ya que el procedimiento que utilizó fue el mismo del problema anterior, así la profesora dio sentido a la división de fracciones *“los alumnos ya entendieron que una división va a resolver el problema”*, resuelto el problema, interpretó la respuesta *“que está queriendo decir este  $7/3$ , o  $2\ 1/3$ , pues que es la medida del largo en metros con respecto a lo que nos pide el problema”*.

Como parte del análisis identificamos que no se otorga significado a las unidades de medidas identificadas, porque si están consideradas en la sustitución de los datos del problema en la fórmula, sin embargo, a lo largo de los procedimientos dejaron de ser consideradas para enfocarse únicamente a la composición numérica, lo que deja ver la importancia otorgada al uso del algoritmo.

### ***El problema del valor faltante***

A continuación, presentamos la resolución del problema multiplicativo que implica un cociente donde un valor corresponde a un valor faltante.

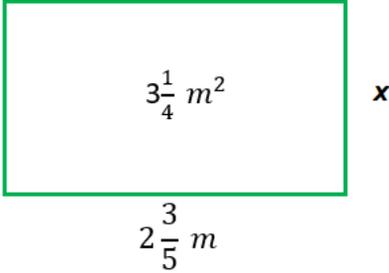
En la figura 3.8 observamos el procedimiento que realizó la profesora Rosa para resolver el problema durante la entrevista, dimos tiempo para que ella leyera y resolviera, en cuanto terminó procedió a explicar sus procedimientos, situación que facilitó el diálogo con la entrevistadora.

Para el análisis identificamos la representación y cuestionamos acerca de la misma, la profesora mencionó que la representación pictórica le permite explicitar a sus alumnos lo que deben realizar, *“este lado mide  $2\ 3/5$  metros, ¿qué es lo que no sabemos?, ¿cuánto mide la altura de este rectángulo?”*, al tiempo

que señaló la fórmula del área del rectángulo asociando la altura con la incógnita.

La maestra sugirió que esta forma de resolver permite a sus estudiantes asociar los datos de la figura con la fórmula: “sabemos que el área se obtiene multiplicando la base por la altura”, ella escribió la expresión, sustituyendo los datos del problema representados en la figura y asociándolo con la fórmula del área. Es posible observar conocimientos básicos como la fórmula del área de figuras geométricas como medio para dar significado a la operación de multiplicación de números fraccionarios.

Un pintor va a realizar un mural en una pared que tiene un área de  $3\frac{1}{4} \text{ m}^2$ , sabe que de largo mide  $2\frac{3}{5} \text{ m}$ . ¿Cuánto mide la longitud que corresponde al ancho de la barda?



$$A = b h$$

$$3\frac{1}{4} = \left(2\frac{3}{5}\right)(h)$$

$$3\frac{1}{4} \div 2\frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{13}{4}}{\frac{13}{5}} = \frac{65}{52} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \text{ m}$$

*El ancho mide  $1\frac{1}{4} \text{ m}$*

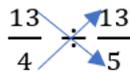


Figura 3.8. El problema multiplicativo que implica un cociente.

Ella señaló el beneficio de apoyarse en conocimientos trabajados de manera previa durante la primaria, como una estrategia para facilitar la enseñanza de este tipo de situaciones, en este sentido Rosa agregó “podemos conocer ese valor [refiriéndose a  $h$ , en la sustitución de la fórmula del área] a través de una

*operación inversa que en este caso es una división de fracciones  $3 \frac{1}{4} \div 2 \frac{3}{5}$ , nos va a permitir conocer el valor que hace falta",* hizo referencia a un despeje apoyándose en un ejemplo con números naturales para trasladar el mismo procedimiento a los números fraccionarios. De acuerdo a la estrategia identificamos que la multiplicación adquiere un sentido de valor faltante en el contexto del problema, mediante el uso de las propiedades de la igualdad, ella sugiere el despeje de la ecuación y establecer la división de fracciones como medio para resolver el problema.

La profesora anticipó la dificultad que representa para los estudiantes realizar la división con números fraccionarios, con base en esta premisa, dio sentido al procedimiento para llegar a la operación a través de una figura como referencia y el despeje de una ecuación, ella resolvió la operación a través de un procedimiento alternativo indicándolo con flechas, porque de acuerdo a su experiencia los alumnos recuerdan con facilidad el procedimiento, porque le asocian situaciones de la vida cotidiana. Cuando cuestionamos acerca de otra forma de resolver el problema, ella deja evidencia del algoritmo para dividir fracciones con el producto cruzado.

Del análisis de las estrategias, representaciones y conocimientos expresados de manera verbal y escrita por la maestra Rosa para la enseñanza de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios identificamos las representaciones geométricas como modelos de enseñanza para dar sentido a las operaciones.

Los conocimientos presentes en la entrevista se refieren la partición, identificación de la unidad, el significado y representación de la fracción tanto en un plano lineal como bidimensional.

En lo relacionado con las estrategias identificamos el uso preponderante de algoritmos cuando la profesora se encuentra en un conflicto cognitivo de enseñanza. Identificamos el uso de la fracción con el significado de medida, cociente y operador de acuerdo a Kieren (1983), así como el producto de medidas y el inverso del producto de medidas.

### 3.4 La resolución de problemas de Rosa y Carlos

A continuación, presentamos la entrevista realizada a la profesora Rosa y al profesor Carlos, los problemas planteados son los mismos, sin embargo, las entrevistas se realizaron de modo individual, en diferentes momentos y de manera independiente. Se llevaron a cabo mediante la plataforma Meet (como ya hemos mencionado). En la figura 3.9 mostramos el problema del área.

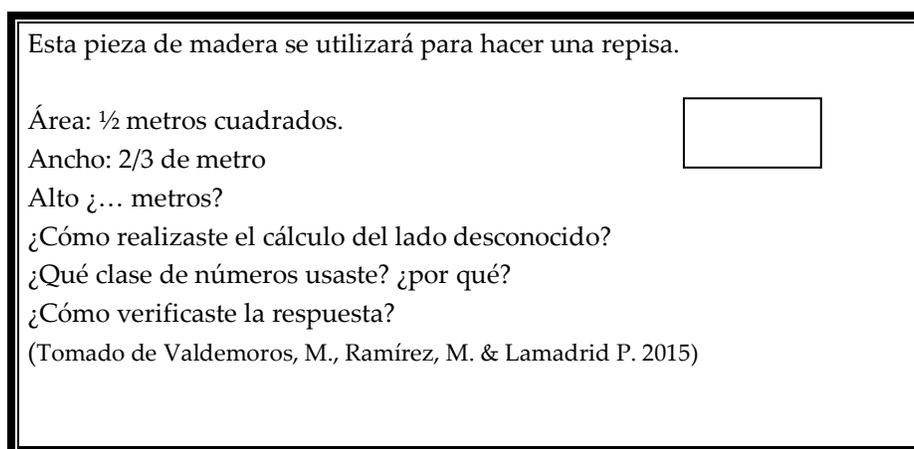


Figura 3.9. El problema del área.

#### 3.4.1 La resolución de problemas propuesta por Rosa

Para el desarrollo de esta entrevista, utilizamos el mismo formato de las entrevistas anteriores, es decir, fue una entrevista semiestructurada con retroalimentación y por petición de Rosa, esperamos a que leyera el problema y lo resolviera y sobre sus procedimientos realizamos preguntas y en ocasiones Rosa complementó sus procedimientos. En la figura 3.9. presentamos la resolución propuesta por Rosa al problema del área.

Después de resolver el problema Rosa comentó lo siguiente, *“se me dificultó responder a las preguntas que se me plantearon, acerca de porque usé esos números”*, y preguntamos a que se refería con la dificultad y ella respondió, *“porque pensé en convertir en números decimales, para los estudiantes es más fácil trabajar con decimales que con fracciones”* en este caso, consideramos que Rosa

identificó que al convertir a número decimal podía obtener números decimales infinitos, situación que le complicaría la representación gráfica.

$\frac{1}{2} m^2$      $\frac{2}{3} m$   
 $A = bh$   
 $\frac{1}{2} = b \left( \frac{2}{3} \right)$   
 $b = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$      $b = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$   
 $b = \frac{3}{4} m$   
 $A = bh$   
 $\frac{1}{2} = \left( \frac{3}{4} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$   
 $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$   
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**Figura 3.9.** La resolución de Rosa para el problema del área

Rosa es consistente con las representaciones que ha realizado de manera frecuente, sin embargo, en esta ocasión hace explícitas sus razones “*están dos representaciones, con los alumnos se trabaja más esta, la que está a mi derecha, realizando la operación me da  $\frac{3}{4}$  de metro que es lo que sería la base*”. Lo que ella agrega a la resolución es la comprobación de sus procedimientos, lo que previamente no había realizado.

### 3.4.2 La resolución de problemas propuesta por Carlos

A continuación, en la figura 3.10. presentamos la resolución propuesta por el profesor Carlos, es el mismo problema que resolvió la maestra Rosa.

El maestro comenzó con el comentario siguiente “*planteo una figura de rectángulo,  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados que representan el área de la figura, el dato que si tengo que es el ancho que son  $\frac{2}{3}$  de metro lo que yo hago aquí es que pongo un signo de interrogación en lugar de poner una letra, porque a veces los estudiantes no han visto las ecuaciones*”. En el diálogo sostenido con Carlos y por las representaciones que utiliza identificamos que él asigna importancia a la

unidad de referencia, utiliza representaciones geométricas como medio de para dar sentido a la operación.

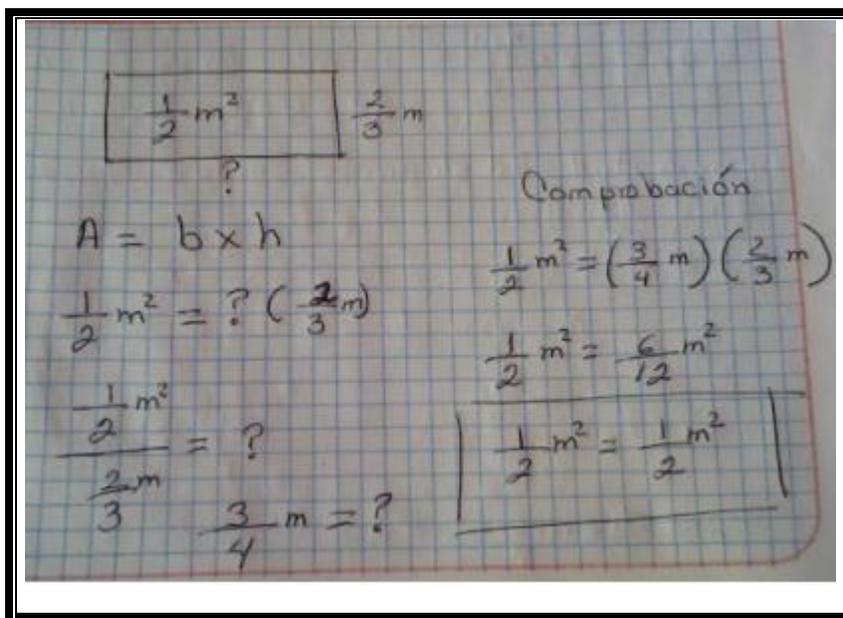


Figura 3.10. La propuesta de resolución de Carlos

Por otra parte, de acuerdo a su experiencia no utiliza contenidos de álgebra de manera explícita, pero la representación numérica que realiza sugiere el uso del producto con un valor faltante, así lo mencionó "es simplemente que manejo las letras de  $\frac{1}{2}$  de  $m^2$ , igual al valor desconocido, que es  $\frac{2}{3}$  del  $m$ ".

Cuando le preguntamos acerca del algoritmo él manifestó las siguientes ideas "He notado que el representar la división de esta forma [se refiere al arreglo similar que hemos reportado con Rosa], regularmente siempre se lleva a la multiplicación de extremo por extremo y medio por medio, pero en mi experiencia me di cuenta que la respuesta de la forma en cómo se multiplica cuando se ve la división de esta forma representativa, se confunden más cuando están  $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$  los alumnos aplican la forma de resolver la multiplicación en lugar de una división", Cuando preguntamos otra forma de resolver, el maestro agregó "en ocasiones utilizó el procedimiento de multiplicar por el inverso de la segunda fracción, pero he notado que los estudiantes quieren resolver todo con la multiplicación".

Identificamos que en los procedimientos utilizados por Carlos están implícitas decisiones didácticas como apoyarse en las composiciones verbales para promover la comprensión, tal es el caso de mencionar extremos por extremos y medios por medios, y que deja de lado el algoritmo relacionado con el inverso del divisor porque de acuerdo con su experiencia prefiere evitar errores comunes.

Es posible suponer que para Carlos es importante la validación de los resultados, dado que dejó evidencia de la comprobación.

### **3.5 Los procesos cognitivos de ambos maestros**

A continuación, mencionamos los conocimientos matemáticos presentes, así como *procesos cognitivos* durante la resolución y diseño de tareas relacionadas con los problemas multiplicativos, resaltamos lo que consideramos relevante para la investigación.

Para los problemas de multiplicación identificamos el uso de representaciones pictóricas, identificamos la asignación de representaciones concretas para la fracción.

Observamos la representación geométrica como un medio para dar sentido a la operación de la multiplicación, sin embargo, la división está sustentada en el algoritmo, por la dificultad que implica una representación concreta del problema.

En relación con los algoritmos de división identificamos el producto cruzado, el producto por el inverso del divisor.

### **3.6 Análisis global del capítulo**

En este capítulo presentamos datos relevantes acerca de los *procesos cognitivos* manifestados por ambos profesores durante entrevistas individuales con retroalimentación cuando resolvían y diseñaban problemas de multiplicación y división de números fraccionarios, tomando en consideración que estas tareas serían aplicadas a sus estudiantes.

De los *procesos cognitivos* identificados hemos considerado diferentes momentos, el primero se refiere a sus decisiones para resolver y generar diseños, y se refiere a las experiencias previas, es decir que los profesores eligen un método de resolución con base en la experiencia relacionada con las dificultades de sus estudiantes para comprender el tema. Sin embargo, nosotros podemos decir que también que estas decisiones están apoyadas en sus conocimientos derivados de su formación profesional y continua.

Otro momento se refiere a la resolución de las tareas, están alojados en representaciones geométricas para la multiplicación, identificamos el uso de algoritmos tales como el producto de numerador por numerador, denominador por denominador que se apoya en las representaciones de partes de partes para dar sentido a la operación.

Para la división identificamos procedimientos como el producto cruzado y el producto del inverso del divisor, así como dificultades para el diseño de problemas que impliquen división.

En el siguiente capítulo presentaremos el análisis de los datos obtenidos las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas. El trabajo con maestros fue concebido como un espacio de construcción de conocimiento por parte de los docentes, así como un medio para identificar los procesos cognitivos de los maestros de secundaria en la materia de Matemáticas durante sesiones de trabajo colectivo, en donde intervinieron los conocimientos, la experiencia y la reflexión sobre la enseñanza y diseño de tareas para la clase de Matemáticas con el tema de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.



# CAPÍTULO 4

---

## ANÁLISIS DE LAS JORNADAS ACADÉMICAS

En este capítulo presentamos información de lo acontecido durante las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas, así como el análisis de los resultados obtenidos durante el desarrollo del trabajo colectivo entre pares. El mencionado instrumento metodológico fue concebido como un espacio de construcción de conocimiento por parte de los docentes de Matemáticas con experiencia en la enseñanza, así como un medio para identificar los *procesos cognitivos* de los maestros de secundaria en la materia de Matemáticas durante sesiones de trabajo colectivo.

En tales *Jornadas Académicas* fueron involucrados la reflexión conjunta y fecundo contraste de los pensamientos sustentados por todos y cada uno de ellos. Los conocimientos, la experiencia y la reflexión sobre la enseñanza, resolución y diseño de tareas para la clase de Matemáticas con el tema de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

El objetivo de las *Jornadas Académicas* consistió en facilitar el diálogo y establecer procesos de comunicación entre pares como medio para fortalecer el aprendizaje mutuo y la retroalimentación, a través de la participación de

maestros con base en las experiencias de enseñanza, asimismo, se fortaleció la reflexión sobre los diseños que ellos elaboraron.

En este capítulo incorporamos los hallazgos identificados durante la experiencia de trabajo colectivo con maestros de Matemáticas de educación secundaria.

Las *Jornadas Académicas* fueron desarrolladas durante seis sesiones de dos horas aproximadamente cada una, las actividades programadas fueron realizadas de manera virtual en la plataforma Meet. Originalmente, este instrumento lo habíamos considerado como una reunión de manera presencial en las aulas ubicadas en la parte superior de las instalaciones de la biblioteca de Matemática Educativa “Jerzy Plebansky”, sin embargo, sustituimos la modalidad presencial por reuniones virtuales, para atender las recomendaciones de la contingencia sanitaria del COVID-19.

Por los contenidos desarrollados en las *Jornadas Académicas con profesores de matemáticas* y por los procesos observados durante la aplicación de las tareas diseñadas, consideramos pertinente mostrar la información en tres partes, es decir, no mencionaremos los datos obtenidos de manera cronológica de acuerdo al número de sesión, sino que decidimos presentarlo por secciones independientemente del número de sesión en que se desarrolló debido a los *procesos cognitivos* identificados por parte de los maestros. A continuación, presentamos las secciones donde integramos el análisis de los datos obtenidos durante la aplicación del instrumento a los docentes de matemáticas en ejercicio.

En primera instancia mencionamos las expectativas de los maestros al formar parte de este trabajo colectivo, esta información la consideramos relevante porque nos proporcionó indicios acerca de las necesidades implícitas durante su práctica de enseñanza. Asimismo, presentamos la importancia y el papel asignado por los profesores a la resolución de problemas para la clase de matemáticas durante su práctica educativa. Por otra parte, mostramos aspectos relacionados con los conocimientos que manifestaron los maestros con base en su experiencia de enseñanza cuando

realizaron el análisis de planteamientos de problemas multiplicativos (los problemas fueron tomados de un trabajo previo con estudiantes para profesor).

Mediante una presentación power point mostramos los problemas y solicitamos a los maestros que realizaran un análisis en cada uno de los planteamientos, considerando la posibilidad de llevarlos a su clase, y si ellos lo creían necesario podrían hacer modificaciones a los enunciados de acuerdo a su experiencia en *la enseñanza de problemas multiplicativos con números fraccionarios*. Para complementar la actividad, pedimos a los profesores nos comunicaran las razones y *la reflexión* que surgió durante la actividad, este trabajo se realizó de manera colectiva.

En la segunda parte incorporamos las actividades relacionadas con el diseño de situaciones que implican problemas multiplicativos relacionados con los números fraccionarios, solicitamos a los maestros que realizaran sus propios diseños y los mostraran con la finalidad de hacer un intercambio de ideas para conocer las razones que apoyaron la toma de decisiones y los conocimientos implícitos en cada planteamiento, esta actividad nos permitió promover la reflexión colectiva en torno a las propuestas de cada uno de los participantes.

En la tercera parte presentamos los datos obtenidos de la presentación de problemas para que los profesores los resolvieran y nos mostraran sus procesos y justificaciones para dar respuesta a los planteamientos presentados, la consigna fue que los docentes pensarán en la forma en que ellos presentarían esas situaciones con sus estudiantes. La resolución de los problemas se presentó de manera colectiva y nos permitió hacer el análisis de las representaciones, los procesos de resolución y la reflexión acerca de sus propias estrategias y las de sus compañeros con base en la experiencia de enseñanza y que manifestaron de manera colectiva para retroalimentar a sus pares.

En su conjunto este instrumento nos permitió obtener información para el logro de los objetivos presentados para esta investigación, es decir, nos

permitió indagar acerca de los *conocimientos* que subyacen en la práctica de los docentes en ejercicio, así como identificar los procesos cognitivos que surgen y están presentes al resolver y diseñar los problemas de tipo multiplicativo relacionados con los números fraccionarios. Por otra parte, nos permitió identificar cómo la reflexión colectiva promovió un cambio en los diseños de los profesores y permitió retroalimentar los conocimientos que surgieron al comunicar y analizar los diseños y la resolución que proponen, con la finalidad de promover la mejora de su práctica educativa.

#### **4.1 Los profesores de Matemáticas con experiencia en la enseñanza**

A continuación, presentamos datos relevantes acerca del perfil de los docentes que formaron el grupo de profesores con experiencia en la clase de Matemáticas. La invitación para participar en lo que denominamos “Jornadas Académicas para profesores de Matemáticas” fue dada a conocer a través de grupos de WhatsApp de profesores (como alternativa de organización de las escuelas durante la contingencia sanitaria se crearon grupos de WhatsApp) estuvo dirigida a “Profesores con experiencia en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria”, con el tema “Los problemas multiplicativos ligados a las fracciones”.

Los requisitos solicitados para formar parte del equipo de trabajo fueron: contar con una computadora, tener acceso a internet, el compromiso de participar en todas las sesiones y realizar las actividades programadas para cada una de las reuniones, tener de experiencia en la enseñanza de Matemáticas en la Secundaria.

En la figura 4.1 mostramos datos generales de los maestros que participaron en el trabajo colectivo, de acuerdo con la información que proporcionaron durante la primera sesión virtual, asimismo identificamos a cada uno de ellos con un nombre diferente al original con la finalidad de salvaguardar la identidad de los profesores, en lo sucesivo serán identificados con los nombres aquí mostrados.

Nombre	Formación	Experiencia laboral	Área de experiencia
Marina	Universidad Pedagógica de Veracruz. Maestría en Ciencias Exactas.	15 años	Secundaria y preparatoria
Rosa	Escuela Normal Superior	22 años	Secundaria
Fátima	Escuela Normal Superior Maestría en Educación.	23 años	Secundaria
Carlos	Escuela Normal Superior Maestría en administración de la recreación.	25 años	Secundaria

**Figura 4.1.** Perfil de los profesores de Matemáticas con experiencia.

Como es posible observar en la figura 4.1. los docentes cuentan con amplia experiencia de enseñanza en secundaria, por otra parte, tienen formación en educación, situación que favoreció y enriqueció el desarrollo de las Jornadas Académicas.

## 4.2 Las Jornadas Académicas

Para la primera sesión de las Jornadas Académicas presentamos a los profesores el objetivo de las actividades que íbamos a desarrollar a lo largo de cinco sesiones de dos horas cada una (a petición de los profesores se agregó una sexta sesión). Después de la presentación tratamos de indagar acerca de las expectativas de los docentes con respecto al contenido temático de las Jornadas Académicas. Identificamos que las expectativas de los maestros se referían a la necesidad de resolver dificultades de enseñanza relacionadas con los números fraccionarios, situación que han identificado a lo largo de su trayectoria laboral, por otra parte, estaban interesados en mejorar su práctica educativa.

De manera general los profesores manifestaron tener dificultades como enseñar temas relacionados con las fracciones, así como la necesidad de complementar los conocimientos que ya tienen, así lo manifestó Marina: *“Intercambiar diferentes maneras de enseñanza, además de una retroalimentación”*, por otra parte, Rosa agregó: *“...seguir aprendiendo, me interesa saber más del tema de las fracciones y las operaciones”*, Fátima mencionó *“Espero aprender más*

de la enseñanza de las fracciones”, finalmente Carlos expresó: “...fortalecer aquellas áreas de las fracciones que luego cuesta trabajo enseñar a los alumnos”.

Para dar un contexto al inicio de la primera sesión consideramos pertinente indagar el papel que asignan los profesores al planteamiento de problemas multiplicativos durante la clase de matemáticas.

### **4.3 El modelo de análisis de las Jornadas Académicas**

Para realizar el análisis de los datos obtenidos durante el desarrollo de las *Jornadas Académicas* utilizamos el mismo modelo del capítulo 3 de este trabajo de investigación, sin embargo, por la naturaleza de los datos y de las interacciones se incorporan nuevas categorías obtenidas del diseño y la resolución de problemas.

El modelo de análisis nos permitió identificar y categorizar los *procesos cognitivos* de profesores de matemáticas con amplia experiencia en la enseñanza. La interacción entre pares permitió establecer *diversas formas de comunicación* para mostrar los procesos emergentes ante la resolución de tareas presentadas. Las actividades propuestas nos permitieron identificar *conocimientos*, formas de *representación, resolución y diseño de problemas*. El modelo implica un conjunto de procesos interactivos durante los diálogos entre la investigadora y los profesores de matemáticas durante el desarrollo de las tareas realizadas. A continuación, presentamos los aspectos que están considerados en el modelo de análisis.

**En el plano semántico:** pretendemos identificar los *significados y significantes* asociados a la *multiplicación y división* con números fraccionarios cuando los profesores explicitan los procedimientos mientras resuelven problemas multiplicativos.

**En el plano sintáctico:** nos interesa identificar y categorizar las *representaciones asociadas a los procedimientos y algoritmos* que surgen durante la resolución de problemas.

**En el plano de la traducción de un lenguaje a otro:** consideramos que los profesores tratan de favorecer la comprensión del tema relacionado con la resolución de problemas multiplicativos ligados a las fracciones, para ello, utilizan *formas de representación reiteradas* a lo largo de la experiencia. Asimismo, consideramos la *traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal* como una forma de poder detectar los conocimientos del profesor, y como un medio de transmisión de conocimiento, situaciones que se ven favorecidas mediante la comunicación de los procedimientos.

**En el plano pragmático:** mediante la comunicación verbal y escrita nos interesa identificar *enunciados con contenido matemático, los significados que se asignan*, así como la interpretación de esos significados durante la resolución y diseño de problemas multiplicativos, lo anterior se analiza mediante durante la interacción sostenida entre la investigadora y los profesores, en las durante las Jornadas Académicas.

Por otra parte, los diálogos sostenidos entre pares y con la investigadora permitieron *realizar categorías de análisis para identificar y mostrar los conocimientos* de los profesores en ejercicio durante el diseño y la resolución y diseño de problemas multiplicados vinculados con los números fraccionarios. En lo que se refiere a la resolución de problemas ya hemos mencionado lo referente a las aportaciones realizadas por Vergnaud (1988), en donde menciona que las estructuras multiplicativas son consideradas como aquellas situaciones donde interviene la multiplicación y división.

**El producto de medidas:** consiste en una relación de tres cantidades, donde una es el producto de otras dos en un contexto numérico y en un plano dimensional (Vergnaud, 1991), para la multiplicación encontrar la medida del producto cuando se conocen las medidas elementales, y para la división cuando es necesario encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida del producto.

**Inverso multiplicativo del producto o el inverso multiplicativo del producto de medidas** Valdemoros et al. (2015) en este caso se refiere a situaciones donde dada el área de un rectángulo y un lado se puede utilizar la operación inversa de la multiplicación para encontrar el valor del lado faltante, marcando así el inverso como un número fraccionario.

**El espacio cociente:** Semánticamente hablando, la división no es conmutativa, de acuerdo con lo que menciona Piaget, Inhelder y Szeminska, (1966) la conservación procede de la medida, ellos señalan que los problemas clave se refieren a la subdivisión y conservación del todo, la subdivisión se refiere a partes equivalentes.

En este sentido, toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre un dominio  $A$  induce una partición de ese dominio en clases de equivalencia, llamada *espacio cociente de  $A$*  por la relación  $\sim$ , y simbolizada como  $A/\sim$ .

Se considera como cocientes de números enteros, para esta investigación los llamaremos *cocientes de números naturales* porque sólo hemos considerado los valores positivos de los números enteros.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b), a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\} \text{ con } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

La notación que comúnmente usamos para un número racional o fraccionario es  $a/b$ , donde  $b \neq 0$ .

Por otra parte, en lo relacionado con la práctica de enseñanza por parte de los docentes consideramos las siguientes categorías:

**Conflicto cognitivo de enseñanza:** esta categoría se refiere al lenguaje y las acciones que manifiesta el profesor y donde se expresan los conocimientos del contenido matemático durante la explicitación de los procedimientos ante la resolución de tareas. De acuerdo a lo que identificamos, son situaciones donde el profesor no encuentra una forma de resolver una tarea y acude a los algoritmos o recursos que no están apoyados en contenidos formales.

**Patrones de enseñanza:** nos referimos a los patrones en la práctica de la enseñanza (que implican formas específicas de justificar los hechos matemáticos apoyados en el uso de definiciones correctas o incorrectas). En este sentido, Gimeno (1991), menciona que el análisis de la práctica pedagógica implica la manifestación de espacios de decisión autónoma. De nuestra parte, consideramos las decisiones del profesor en torno a los contenidos de los temas que enseña, además de identificar cómo los justifica. Asimismo, los patrones de enseñanza pueden entenderse como la estructura de las acciones que rigen una sesión de enseñanza reiterada por los años de servicio del docente.

Para el análisis de los diseños propuestos por los docentes, consideramos datos que tienen antecedentes en la investigación de Meneses (1991), el investigador enfocó su estudio en estudiantes para profesor en Matemáticas de una Escuela Normal, en donde aportó categorías relacionadas con el diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios. Consideramos pertinente la aportación de dichas categorías por la similitud de los datos obtenidos en esta investigación.

Para nuestro estudio consideramos los problemas incluidos durante dos momentos del diseño, el primer momento previo al análisis de sus propias producciones y el segundo momento, posterior al intercambio y retroalimentación de ideas en torno a los planteamientos presentados. A continuación, mostramos las categorías identificadas de acuerdo a los diseños presentados por los profesores de Matemáticas que participaron en las Jornadas Académicas.

- Diseño de problemas en contextos forzados y con dificultades de sintaxis, situación que permitió a los profesores hacer análisis de sus producciones y modificar sus diseños iniciales.
- Diseño de situaciones que no corresponden a problemas multiplicativos con fracciones y que nos permitieron reconocer las

razones que impiden a los profesores producir problemas multiplicativos con números fraccionarios.

- Diseño de problemas con recursos gráficos, en su mayoría apoyados en figuras geométricas como el rectángulo.

En lo que se refiere a la resolución de problemas hemos identificado categorías derivadas de los procesos de resolución realizados por los docentes. A continuación, presentamos los datos que consideramos relevantes de la investigación.

- Uso de recursos gráficos para justificar los procedimientos.
- Resolución de problemas apoyados en errores conceptuales.
- Uso preponderante del algoritmo.

De acuerdo con las categorías, a continuación, presentamos el análisis de los datos obtenidos durante el desarrollo de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas con experiencia en la Enseñanza de Problemas Multiplicativos.

#### **4.4 El análisis de problemas multiplicativos que implican fracciones**

Como ya habíamos mencionado, en la primera sección del este capítulo vamos a presentar datos obtenidos durante el diálogo sostenido con los profesores y que están relacionados con el análisis y reflexión de problemas multiplicativos tomados de Meneses (1991).

En la figura 4.2 presentamos fragmentos de las respuestas de los profesores cuando preguntamos acerca del papel de la resolución de problemas en su práctica docente.

**¿Qué papel representa la resolución de problemas multiplicativos con números fraccionarios durante la enseñanza?**

**Marina:** *Identifico dificultades en el alumno por la falta de comprensión lectora, ... el tema de fracciones es difícil de enseñar y asimilar para el estudiante.*

**Rosa:** Los problemas están en la interpretación de la fracción, es necesario trabajar conceptos básicos como la expresión  $a/b$  a través de las representaciones geométricas, nos ocupamos más en las operaciones que en el razonamiento del problema.

**Fátima:** Desde mi experiencia, identifico que los jóvenes ...generalmente, recurren a los números decimales, prefieren transformar esa fracción a un número decimal para evitar el trabajo con las fracciones, estamos recurriendo más a aspectos procedimentales al abordar la fracción y para la resolución de problemas.

**Carlos:** A los alumnos se les dificulta diferenciar la operación, que método utilizar, y eso parte de que vienen muy mecánicos, todo lo quieren hacer de la misma forma, no razonan.

**Figura 4.2.** El papel de la resolución de problemas en la clase de Matemáticas.

De acuerdo con las aportaciones de los profesores es posible pensar en dos aspectos inherentes a la enseñanza y de contenidos de la matemática escolar, en este sentido los docentes resaltan *dificultades cognitivas* por parte de los estudiantes y posibles prácticas reiteradas que son apoyadas en los algoritmos, así como acciones procedimentales por parte de los docentes, lo anterior como una reflexión de su propia práctica.

Para continuar con la primera sección de este capítulo presentamos dos problemas tomados de Meneses (1991), el trabajo de este investigador se realizó con estudiantes para profesor y se enfocó en el *diseño de problemas* que implican operaciones de multiplicación y división relacionados con los números fraccionarios. Presentamos fragmentos del diálogo desarrollado entre los docentes de matemáticas y la investigadora.

En cada uno de los problemas, la consigna para los maestros fue analizar el contenido de cada situación y con base en su experiencia de enseñanza cada uno de los maestros realizaría los ajustes pertinentes si los consideraban necesarios, asimismo solicitamos que mencionaran observaciones del enunciado pensando cómo llevarían esos problemas a sus estudiantes.

En lo que sigue presentamos fragmentos de los diálogos establecidos entre los profesores durante el análisis de los problemas mostrados; para este documento presentamos las intervenciones cuyo contenido consideramos

significativo y aporta datos para la investigación, asimismo, nos permitieron identificar los conocimientos que los profesores dejaron de manera implícita a través de sus participaciones. El objetivo de las acciones de esta primera sección consistió en identificar los contenidos esenciales para la enseñanza de problemas multiplicativos considerados por los profesores con experiencia.

En la figura 4.3. presentamos fragmentos de los diálogos de los profesores, producto del análisis del problema 1. Consideramos las reflexiones de los profesores relacionadas con el planteamiento del problema y los procedimientos que intervinieron para resolverlo.

**Tenemos 15 peras y las partimos a la mitad ¿cuántas mitades tenemos?**

**Fátima:** ... en la acción indica lo que se va a realizar, si partes una pera obtendrás dos mitades, si lo hace al revés obtienes el doble, ... los dibujos y representaciones, facilita un problema cuando lo ven gráficamente.

**Rosa:** Cuando se hacen modelos gráficos, un conflicto que yo tengo en la enseñanza, es como pasar de ese modelo concreto a un concepto abstracto, de quince entre un medio, quince lo multiplico por dos, esa es la parte que se complica para dar a entender al alumno, como una expresión gráfica muy sencilla pasa a ser algo abstracto.

**Marina:** Es un problema que puede crear confusión para los estudiantes hasta que lo pasemos a la forma gráfica, es necesario hacer un dibujo, ellos dicen quince y lo partimos, en lugar de realizar un producto, puede realizar también una división, si tengo que partir las quince peras, entonces pueden expresarlo o presentarlo de una forma fraccionaria de quince sobre dos, de quince medios.

**Carlos:** Para resolver debemos ir al concepto de fracción, ahí tenemos una barrera, a veces interpretamos la fracción como una división, tenemos ahí problemas de comprensión. Una de las recomendaciones fundamentales es hacer gráficos y dibujos.

**Figura 4.3.** Las opiniones y recomendaciones de los maestros para el problema 1. Tomado de Meneses (1991).

De acuerdo con la lectura y reflexión del problema uno, y de las valoraciones que realizaron los profesores en torno al contenido del enunciado, el episodio anterior nos permitió identificar aquellos conocimientos que se

hacen explícitos a través del lenguaje oral cuando los docentes comunican sus ideas, resaltamos los contenidos de aquellos enunciados con contenido semántico y de las representaciones que implican sentido y significado en la resolución de problemas.

Identificamos conocimientos que nos hace suponer que la partición está asociada a la división (uno de los profesores manifestó el error de concepto relacionada con la fracción, situación que Carlos hizo evidente de manera discreta). Asimismo, es posible suponer que los maestros no tienen claro el concepto de unidad, y en lo que se refiere a las operaciones asignan el mismo sentido a la multiplicación y la división, manifiestan la posibilidad de resolver mediante operaciones inversas.

Relacionado con los patrones de enseñanza identificamos el valor preponderante asignado a la representación gráfica de los problemas como un medio de análisis, comprensión y justificación de los procedimientos ante la ausencia de poder mostrar un algoritmo como la multiplicación y su operación inversa. Identificamos la relación que establecen con palabras clave del enunciado y las operaciones que se pueden realizar para resolverlo. Es posible inferir la prioridad que asignan a la resolución y uso de operaciones, posiblemente de manera inconsciente, solo Rosa lo menciona de manera explícita.

Por otra parte, los profesores hicieron evidentes conflictos cognitivos relacionados con la enseñanza, cuando manifestaron la dificultad de pasar de una representación gráfica a un contenido abstracto, es decir, pasar de la representación gráfica a resolver una operación.

Para continuar con el análisis del diálogo de los maestros en la figura 4.4. presentamos otro fragmento del diálogo de los docentes relacionado con la resolución de problema y las operaciones que intervienen. De acuerdo a las intervenciones de los docentes, tratamos de orientar los cuestionamientos para profundizar acerca de los pensamientos de cada uno de los profesores.

**¿Qué pueden decir acerca de la operación que interviene en el problema?**

**Rosa:** ...esta es la parte más difícil de la enseñanza, porque se empieza a asociar números con la operación, multiplicar quince por dos, pero en este caso, quince entre un medio, no logran comprender ... como es que quince entre un medio es treinta. Esa parte se me dificulta para enseñar, llega entonces la mecanización.

**Carlos:** ... si partes una pera, tendrás dos mitades, dos enteros entonces si tienes quince peras se obtiene el doble, serían treinta.

**Marina:** veo que presenta un poco de dificultad si queremos verlo como una operación de un número entero en fracciones.

**Figura 4.4.** Los pensamientos implícitos de los profesores.

Los profesores identifican contenidos que implican dificultades cognitivas para la enseñanza, desde la comprensión del problema que van a llevar al aula, asimismo, identificamos la importancia del papel del uso de los modelos gráficos, desde su experiencia esta práctica permite al estudiante una mejor comprensión del problema. Consideramos que este fragmento sugiere conocimientos implícitos porque se deja ver

Es posible identificar como patrón de enseñanza referido a la asociación de números con las operaciones, o en su caso la asociación de datos del problema con la operación. Por otra parte, identificamos que al partir una unidad los docentes sugieren que cada parte se convierte en una nueva unidad, lo que implica un error conceptual acerca de unidad. Lo anterior lo inferimos debido a las razones que manifestaron los profesores.

Rosa asume que ante la falta de argumentos para explicitar los hechos matemáticos utiliza como alternativa la mecanización de procedimientos, en este caso para la multiplicación y la división.

A continuación, presentamos el problema dos y las observaciones que realizaron los profesores acerca del contenido del enunciado, en la figura 4.5 mostramos un fragmento de la participación y el análisis correspondiente por parte de los docentes.

En el análisis del problema dos, podemos identificar el patrón de enseñanza que implica la importancia asignada a la representación mediante un dibujo o representación gráfica que utilizan los profesores para promover en sus estudiantes la comprensión de la situación presentada en un enunciado, por otra parte, es considerada por los docentes como medio de solución y validación.

**Enviaron de la pastelería 16 pasteles, los que se repartirán entre 64 niños  
¿Qué fracción tocará a cada uno?**

**Fátima:** Yo lo abordaría con la parte gráfica, ..., una repartición equitativa, deberíamos llegar a una reducción y la equivalencia. Se puede imaginar sin llevar a cabo una repartición.

**Marina:** Lo que yo analice en este problema, es la necesidad de hacer la lectura e interpretación, mucho está basado en el lenguaje que utilizamos para presentar los problemas.

**Carlos:** Es necesario tener bien asentado el concepto de fracción, tengo 16 enteros que lo voy a partir en 64 partes iguales, pedimos la reducción, simplificar fracciones.

**Figura 4.5.** Análisis del problema relacionado con la simplificación.

Tomado de Meneses (1991).

Los conocimientos identificados durante el diálogo se refieren a la tendencia de los maestros a asociar la partición con la división de números naturales, y conceptos como la reducción y el uso de fracciones equivalentes.

A continuación, presentamos la reflexión que los profesores realizaron acerca del problema tres, es un fragmento amplio, sin embargo, permite mostrar nítidamente los conocimientos y toma de decisiones desde la experiencia de enseñanza.

En la figura 4.6. mostramos las intervenciones de los profesores resultado del análisis del problema tres, se refiere a la repartición del pastel y a una operación de números fraccionarios y enteros.

**Si de un pastel entero me quedan  $\frac{3}{4}$  partes y lo deseo repartir entre dos niños  
¿qué parte del pastel le tocará a cada niño?**

**Fátima:** Este problema es sencillo por la palabra repartir, nos hace mención a una

*división justa, los chicos podrían hacer la división tres cuartos entre dos, y al dos le pondríamos uno abajo y se convierte en fracción, no estoy alterando al número entero. Aplicaríamos el algoritmo y la respuesta es  $3/8$ . Yo pediría que resolvieran esto con una representación.*

**Carlos:** *Tengo dos preguntas, ...si yo hago una representación gráfica y realizo las particiones que menciona la maestra, ¿qué pasaría si un alumno me contesta  $3/6$ ?, ¿cómo le explico a los niños si dan una respuesta como 1.5 cuartos? Si hago una representación gráfica quizá sea sencillo, tomo una rebanada, tomo una parte completa de eso que queda, lo parto en dos y entonces tengo 1.5 cuartos.*

**Rosa:** *...hay que trabajar una repartición..., es necesario ver que los tres cuartos ahora es un entero, lo que quedo del pastel ahora se convierte en un entero, es lo que ahora voy a repartir, esto se les dificulta muchísimo a los alumnos, entender que una parte se convirtió en el todo.*

**Marina:** *... son obstáculos que nos vamos a encontrar como docentes, que el niño nos pueda decir  $1.5/4$ ,  $3/6$ , es inevitable, ... es parte del razonamiento que los chicos tienen para ir construyendo el concepto de fracción. La representación gráfica nos permite ir afrontando ese tipo de obstáculos, porque si yo tengo un pastel y ...me quedan únicamente  $3/4$ , de ese entero yo puedo definir cuáles son  $3/4$ , con un área sombreada, a partir de ahí empiezo a elaborar una subdivisión de la división que ya tengo, puedo mostrar cómo repartir ese pastel, si la unidad va a ser el pastel completo más la subdivisión del que tuvo para volver a subdividir y dar una respuesta con base en el entero original que yo tenía y la parte que tomé, o considerar la parte restante como mi entero y volver a subdividir, pero va a depender de la pregunta que me estén haciendo, si me están hablando del pastel total o si me están hablando de las  $3/4$  partes restantes.*

**Carlos:** *Mi intervención va directamente a la importancia de la planeación, donde debemos prever este tipo de posibles respuestas, para pensar cómo vamos a resolver esas situaciones ante los alumnos. Por el concepto de fracción nunca nos vamos a encontrar decimales, los estudiantes cometen el error de ver como una fracción  $1.5/4$  aunque pudiera parecer una expresión adecuada no está dentro del campo de las fracciones.*

**Figura 4.6.** El problema de la división de la unidad, observaciones de los docentes. Tomado de Meneses (1991)

El fragmento anterior nos permite identificar aspectos valiosos para nuestra investigación, así como rasgos de la enseñanza de cada uno de los maestros. Comenzaremos con las categorías mencionadas previamente que se refieren a los *errores conceptuales* relacionados con las fracciones y la unidad, *conflictos cognitivos* que enfrentan los docentes, los *patrones de enseñanza*

y los conocimientos implícitos en el diálogo. Por otra parte, nos permitió conocer acerca de las dificultades que ellos han identificado través de su experiencia en la enseñanza de las fracciones y las operaciones de multiplicación y división.

En este diálogo podemos identificar errores conceptuales que se refieren al concepto de unidad, lo anterior lo podemos identificar cuando Rosa menciona *“es necesario ver que los tres cuartos ahora es un entero”*  $\frac{3}{4}$  ahora corresponde a la nueva unidad que tiene que se dividida en dos partes así lo reiteró *“es lo que ahora voy a repartir”, “tomo una parte completa de eso que queda”*, por otra parte, Carlos reafirma dicha situación cuando agregó *“tomo una parte completa de eso que queda”*. Los docentes sugieren que la parte se convierte en el todo para volver a ser dividida, utilizan lo anterior para justificar la división de una fracción y un número entero.

Identificamos errores vinculados con el concepto de fracción, cuando Carlos menciona representaciones como *“1.5/6”*, el plantea dicha situación para indicar un error conceptual por parte de los estudiantes y que posiblemente esté fundamentado en su experiencia de enseñanza, sin embargo, sólo Marina expresa la forma en que puede resolver dicha situación durante la clase.

Relacionado con el concepto de división, los profesores confunden la operación de división con la partición de un objeto, en este caso el pastel cuando Fátima menciona *“por la palabra repartir, nos hace mención a una división justa”*.

Es posible identificar que los maestros son conscientes de las dificultades que representa para los profesores explicar la conservación de la unidad. En este sentido Rosa solo sugiere el conflicto cognitivo para los estudiantes, sin embargo, Marina lo refiere como un proceso de aprendizaje.

Como hemos mencionado, los docentes, específicamente Rosa, ha expresado ser consciente de tener dificultades para explicar situaciones relacionadas

con la enseñanza de las operaciones con números fraccionarios como la división, es lo que identificamos como un conflicto cognitivo de enseñanza. Cuando ella menciona la falta de recursos para poder explicitar a los estudiantes cómo puede relacionar una representación gráfica con una expresión numérica, es posible suponer que las representaciones son consideradas un medio para asignar significado a las operaciones, por lo que ante la dificultad de representar la división mediante particiones implica para ella un conflicto cognitivo de enseñanza.

Como patrón de enseñanza se reafirma la representación a través de dibujos o gráficamente como medio de comprensión, solución y validación para resolver problemas. Otro aspecto es la asociación de palabras clave para determinar la operación que se va a utilizar para dar respuesta a la situación que se plantea.

Los conocimientos implícitos durante el intercambio de ideas se refieren a la asociación de la partición con la división, posiblemente derivado del tipo de planteamientos que se encuentran en los libros de texto. Esta presente el concepto de fracción  $a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son números enteros.

Identificamos situaciones en que los maestros asumen que los problemas multiplicativos se refieren a la división de dos números naturales, un número natural entre un número fraccionario, lo anterior, porque solicitamos un ajuste a los enunciados, es decir, realizar alguna modificación que ellos consideraran conveniente para que los problemas presentados cumplieran la condición de ser problemas multiplicativos relacionados con números fraccionarios, sin embargo, los docentes se enfocaron propiamente a la resolución, posiblemente como un patrón de enseñanza interiorizado.

Como parte de las actividades programadas solicitamos el diseño de problemas multiplicativos para identificar los conocimientos que están presentes durante el desarrollo de esta tarea, asimismo nos permite conocer los contenidos que el profesor privilegia.

## 4.5 El diseño metodológico de problemas multiplicativos que implican números fraccionarios

Para el desarrollo de la segunda sesión solicitamos el diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios por parte de los docentes, sin embargo, los diseños que presentaron no correspondían con la consigna, situación que se manifestó y permitió reflexionar a los docentes durante el análisis de sus propios diseños. Lo anterior confirma lo que ya habíamos señalado, cuando mencionamos que los problemas multiplicativos están considerados como operaciones donde intervienen números enteros y fraccionarios de manera indistinta.

Relacionado con los diseños presentados, identificamos diseños que implicaron diversos contenidos, los profesores produjeron enunciados que se referían a multiplicación y división con números naturales, observamos además que los planteamientos no involucraron la multiplicación y división, es decir, estaban implicadas operaciones como la suma y la resta. Algunos otros diseños se relacionaron con la multiplicación y división de una fracción y un número natural.

A continuación, mostramos las producciones de los maestros durante las Jornadas Académicas, fue un trabajo individual y los presentamos a colectivo de maestros para poder hacer el correspondiente análisis.

De acuerdo al contenido matemático de los diseños, identificamos una categoría en donde las operaciones no correspondieron a problemas multiplicativos con números fraccionarios.

En la figura 4.7. presentamos algunos de los diseños realizados por los profesores de situaciones que implicaron números naturales en el contexto de operaciones como la multiplicación y división.

- a) La huerta escolar tiene  $60 \text{ m}^2$ , la cual se debe partir en 8 grupos, ¿cuántos metros le corresponde a cada grupo?

- b) La distancia entre dos ciudades es de 140 kilómetros. ¿Cuántas horas debe andar un hombre que recorre los  $\frac{3}{14}$  de dicha distancia en una hora, para ir de una ciudad a otra.

**Figura 4.7.** Problemas que implican números enteros. Producción de los profesores de matemáticas.

En el problema del inciso a y b observamos el diseño de situaciones o que se encuentran en el contexto de los números naturales, en el inciso a posiblemente por la naturaleza de la respuesta que implica el concepto de razón, y cuya relación puede ser representada con una fracción el docente considero que dicho enunciado sugiere un problema multiplicativo con números fraccionarios. Para el inciso b, se requiere utilizar regla de tres, y el significado de la fracción como cociente, este diseño nos hace suponer errores conceptuales relacionados con el concepto de fracción y la división de números fraccionarios.

En el análisis de los enunciados propuestos por los docentes, identificamos una categoría que se refiere al diseño de problemas en contextos forzados y no corresponden a problemas multiplicativos por la naturaleza de las operaciones que intervienen, es decir, operaciones como la suma y la resta de números fraccionarios. En la figura 4.8. mostramos el diseño de problemas que implican otras operaciones para su resolución.

- a) Jesús tiene que leer un libro, el lunes leyó la quinta parte del libro, el martes leyó un tercio del mismo. ¿Qué fracción le falta por leer?
- b) Si un kilo de zanahorias corresponde a 12 zanahorias iguales, ¿cuántas zanahorias habrá en un tercio de kilo?
- c) Mariana decide repartir su capital de la siguiente manera:  $\frac{1}{3}$  para su sobrina mayor,  $\frac{3}{10}$  para su hermana y el resto en partes iguales a sus cuatro primas, ¿cuánto le corresponde a cada uno de los herederos?
- d) Juan quiere pintar  $\frac{1}{2}$  de la pared de su cuarto, utilizó 1 litro de

pintura de color rosa y 1 litro de morado. Juan quiere terminar de pintar su cuarto y le faltan 3 partes  $\frac{1}{2}$  ¿Cuánta pintura necesita?

**Figura 4.8.** Problemas que implican operaciones distintas a la multiplicación y división. Producción de los profesores de matemáticas.

Es necesarios mencionar que cada profesor presentó al colectivo de docentes los diseños y de manera conjunta reflexionamos acerca de los planteamientos. Dicha actividad permitió a los docentes identificar aquellas situaciones que tenían implicadas en otro conjunto de números como los naturales. En la figura anterior mostramos el problema del inciso a, donde involucra operaciones como suma y resta de fracciones.

En el inciso b, c y d identificamos contextos forzados para incluir números fraccionarios, así como la idea del todo en un conjunto discreto y continuo, en b, sugiere un conjunto discreto e identificar una parte del todo. En el inciso c presenta una situación forzada e intervienen varias operaciones como suma, resta y la división de una fracción entre un número natural, y la pregunta está relacionada con el todo discreto que no está definido. Para el inciso d, intervienen varias operaciones como la suma y la división de una fracción y un número entero, presentan dificultades de sintaxis.

Otra categoría que podemos identificar en el diseño de los problemas presentados por los docentes se refiere a problemas multiplicativos en donde intervienen operaciones con números naturales y fraccionarios. En la figura 4.9. mostramos problemas multiplicativos que implican números enteros y fraccionarios.

- a) Una alberca tiene capacidad de 30 000 litros de agua, si sólo se encuentra a tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?
- b) Perdí los tres octavos de lo que tenía y me quedan \$40 ¿Cuánto tenía y cuánto gasté?
- c) ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se pueden llenar con

60 litros de agua?

**Figura 4.10.** Diseños iniciales de los profesores relacionados con problemas multiplicativos.

De la figura anterior identificamos diseños que implican números fraccionarios y naturales, situación que es consistente con el análisis previo de los problemas que presentamos, por lo tanto, es posible inferir que los docentes muestran falta de precisión para definir los problemas multiplicativos relacionados con los números fraccionarios.

De manera colectiva realizamos el análisis los diseños, y debido a la dinámica que ya hemos reportado previamente en la sección uno del presente capítulo, identificamos cómo los docentes apoyaron el análisis mediante la comprensión del problema, es decir, en primera instancia verificaron si el planteamiento era correcto y lógico, queremos mencionar que en el momento en que los docentes leían sus producciones tomaban conciencia de las dificultades que estaban presentes en los diseños.

Ellos verificaron si los problemas cumplían con la condición de involucrar números fraccionarios y operaciones como la multiplicación y división. Los maestros fundamentaron sus reflexiones y comentarios como resultado de resolver el problema o de sugerir estrategias de resolución. La actividad anterior los llevó a concluir que había inconsistencias en los diseños, para complementar los datos que deseábamos obtener solicitamos nuevos diseños, con la consigna de haber definido que en los problemas multiplicativos era necesario involucrar fracciones.

Es necesario precisar que derivado del medio virtual en que se aplicó y desarrolló este instrumento, los profesores realizaron sus diseños de acuerdo con las habilidades que ellos manifestaron en el uso de la computadora, las actividades presentadas por los maestros se entregaron por correo electrónico, la resolución se llevó a cabo en un ambiente de lápiz y papel, que ellos realizaron para resolver problemas, fue a través de compartir

pantalla y mostrar el desarrollo de sus procedimientos *in situ*. Prestamos especial atención en la comunicación verbal que se estableció entre pares.

Con base en la reflexión de los problemas diseñados en un primer momento los profesores presentaron otros diseños, esta actividad nos permitió corroborar la importancia de la reflexión como medio de mejora en las actividades que propone el docente para trabajar con los estudiantes en el aula.

A continuación, se presentan los diseños realizados por los profesores participantes de las Jornadas Académicas posterior al análisis de los primeros planteamientos relacionados con problemas multiplicativos.

En primera instancia mostraremos los diseños relacionados con multiplicación, mencionamos el nombre del docente que lo presentó con la finalidad de vincular las participaciones previas con los diseños presentados. En la figura 4.10. mostramos un problema de multiplicación propuesto por Marina.

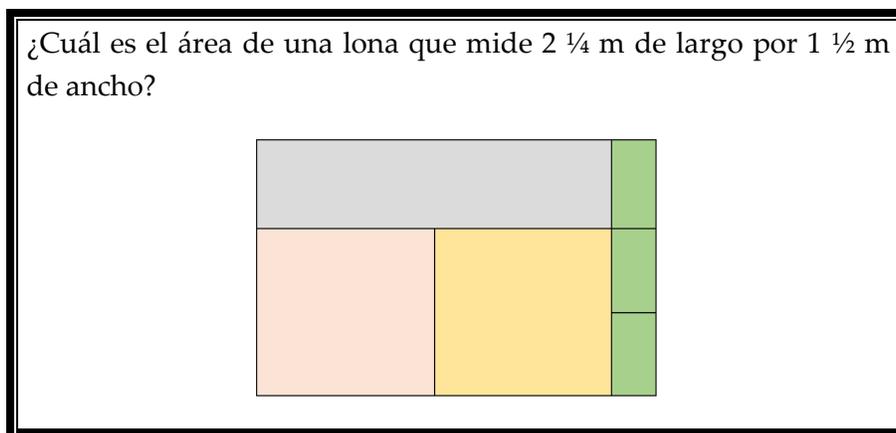


Figura 4.10. Problema del área realizado por Marina.

El diseño que realizó la maestra Marina corresponde a un modelo de área, sin embargo, consideramos que las partes que se observan pueden generar dificultades relacionadas con el concepto de partición, identificamos que el recurso gráfico en que se apoyó la profesora tiene relación con las representaciones utilizadas para explicar el producto de expresiones

algebraicas, recurso frecuente en temas de álgebra que se estudian en secundaria.

La representación gráfica corresponde a una composición de áreas, es decir, la región de color rosa representa la unidad cuadrada, es este caso un metro cuadrado, con base en esta interpretación, es posible identificar la equivalencia de las partes mediante la composición de áreas'. Es decir, la región de color gris corresponde a la misma área de la región rosa o la de color naranja, asimismo, cada parte de color verde corresponde a la octava parte de la unidad cuadrada. Con base en lo anterior, consideramos que el problema puede ser resuelto mediante la suma del área que representa cada región sombreada con diferente color.

En la figura 4.11. mostramos el diseño realizado por la maestra Fátima, observamos que utiliza la suma repetida para introducir la multiplicación.

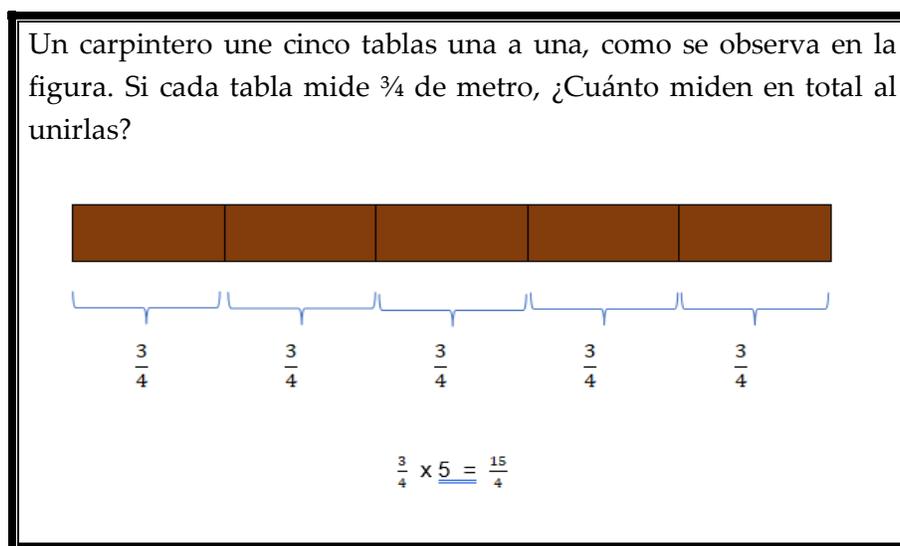


Figura 4.11. El diseño de Fátima, la suma repetida.

En el problema de la figura 4.11. se refiere a una suma de fracciones con el mismo denominador, la profesora representa las partes iguales y propone realizar una suma abreviada, posiblemente para mostrar la multiplicación de una fracción y un número entero.

En la figura 4.12. presentamos el diseño de problema de multiplicación realizado por Rosa.

El diseño que realizó la maestra Rosa se refiere a la obtención del área, la representación que ella utiliza es consistente con las representaciones que ha realizado de manera previa, y tiene antecedentes en una propuesta de enseñanza durante un curso al que la maestra asistió. La unidad de medida que la docente sugiere no corresponde con el contexto del problema. Los conocimientos que identificamos que están presentes en su diseño se refieren a la equipartición y la representación y uso del algoritmo para resolver una multiplicación de fracciones.

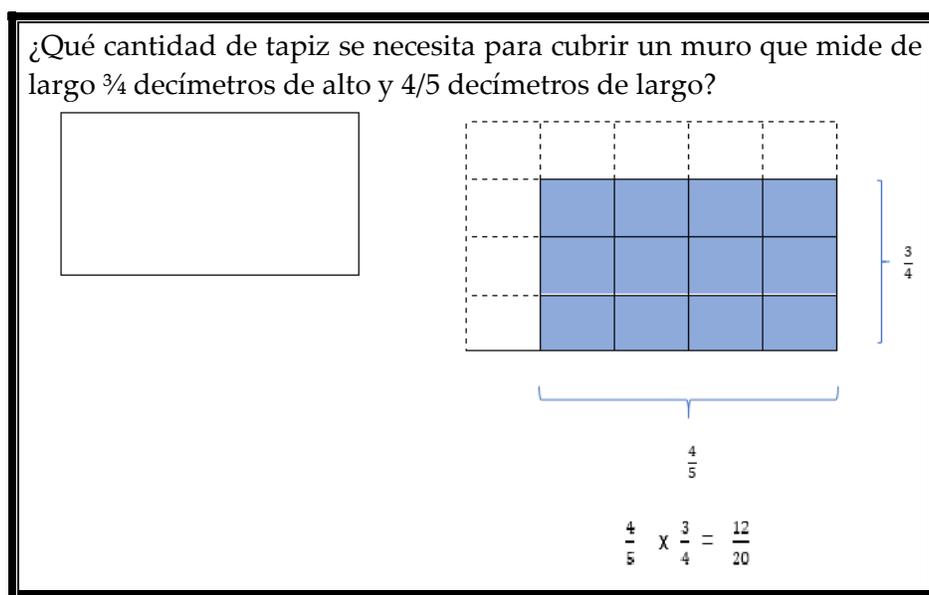


Figura 4.12. El modelo del área, diseño de Rosa.

En la figura 4.13. mostramos el diseño para el problema de multiplicación de cocientes presentado por Carlos.

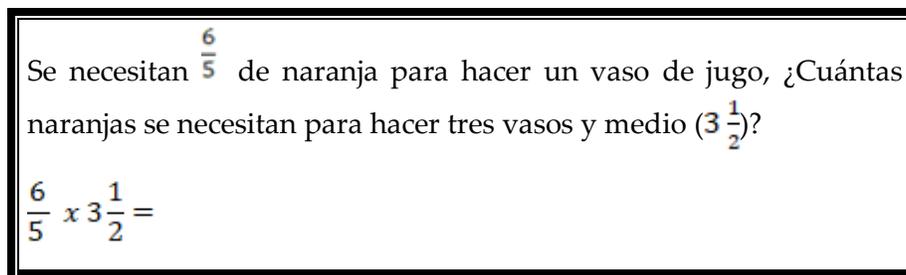


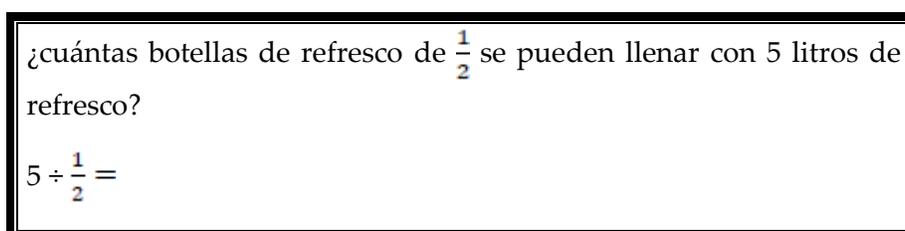
Figura 4.13. La multiplicación.

En el planteamiento que presenta Carlos identificamos que la unidad que el profesor propone no corresponde con la realidad, es decir, el contexto no del

problema no sugiere una partición equitativa, debido a que no todas las naranjas son iguales. Promueve el uso de operaciones para resolver el problema.

A continuación, presentamos los problemas de división presentados por los maestros con experiencia en la clase de matemáticas, al final presentamos los hallazgos identificados acerca de los planteamientos.

En la figura 4.14. mostramos el problema de división con números fraccionarios que realizó el profesor Carlos.



**Figura 4.14.** El problema de división con números naturales y fraccionarios.

Identificamos que el profesor presenta un problema de división con de números fraccionarios y naturales, es posible observar que el diseño es similar a los que se presentan en los libros de texto, de ahí que podamos suponer la influencia de los materiales educativos que ofrece la Secretaría de Educación tienen influencia en las decisiones para seleccionar los problemas que el docente presenta en el aula.

A continuación, presentamos el diseño de la profesora Fátima, en la figura 4.15. se puede observar lo que ella realizó.



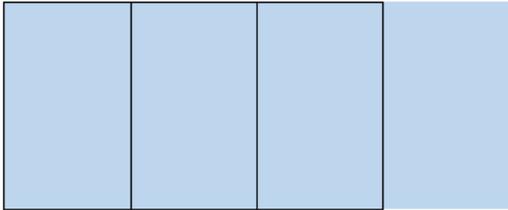
- a) Explica el procedimiento que seguiría el dueño de la papelería para hacer la repartición indicada.
- b) ¿Qué parte del total del mazo representa cada bolsita que se ha armado?
- c) ¿Qué operación u operaciones pueden llevarnos a la respuesta respetando el contexto?

Figura 4.15. El problema de multiplicación de fracciones presentado por Fátima.

En el problema que observamos en la figura 4.14. Fátima implica el peso de un mazo de lentejuela como unidad de medida, para realizar la partición de la unidad propone “la balanza”. Los conocimientos que podemos identificar en la propuesta están basados en el método egipcio, es decir, en la partición a la mitad de fracciones unitarias, dado que se necesita hacer biparticiones para llegar al resultado.

En la figura 4.16. mostramos el diseño de división con números fraccionarios presentado por Marina.

Si tengo  $\frac{3}{4}$  l de aceite de almendras y lo quiero dividir en botellas de  $\frac{1}{8}$  l. ¿cuántas botellas puedo llenar?



$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{24}{4} = 6$$

Figura 4.16. Diseño de división realizado por Marina.

En la figura 4.15 podemos apreciar que la propuesta de Marina está apoyada en un modelo gráfico, sin embargo, no indica la manera en que dicha figura le puede permitir mostrar lo que se tiene que realizar, consideramos que incluso la solución que se puede obtener a través de la figura que ella presentó se trata de un caso particular, debido a que puede realizar una partición para obtener octavos y así identificar la parte que corresponde al

número de botellas que se pueden llenar de acuerdo al planteamiento que ella realizó.

En la figura 4.17 presentamos el diseño de un problema con números fraccionarios de la división que realizó la profesora Rosa.

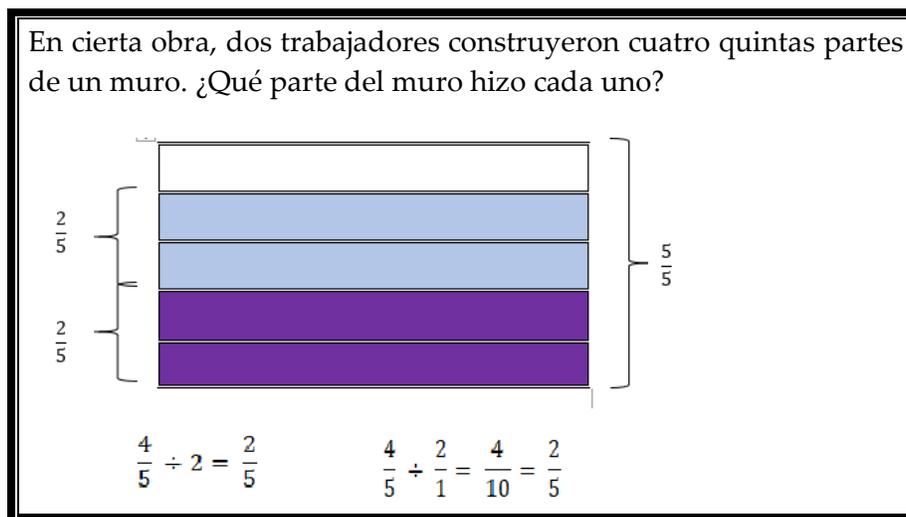


Figura 4.17. El problema de división con números fraccionarios.

El diseño que presentó Rosa está apoyado en una representación gráfica, sin embargo, la posible solución que se puede obtener implica un caso particular, es decir, intervienen números enteros y fraccionarios, situación que incumple con lo solicitado, involucrar números fraccionarios en el diseño del problema.

Otra de las actividades programadas se refirió a la resolución de problemas multiplicativos para conocer la forma en que los maestros de matemáticas justificaban sus procedimientos y procesos de resolución, además de indagar las razones en que apoyaban sus argumentos e identificar acerca del porqué de sus decisiones, interesaba conocer que aspectos desde su experiencia docente y de formación académica influyeron en sus procesos. A continuación, presentamos la sección tres que hace referencia a lo antes mencionado.

## 4.6 La resolución de problemas multiplicativos con números fraccionarios y la reflexión de los procedimientos

Sección tres, se refiere a la resolución de problemas y la reflexión de los procedimientos de los profesores.

En la figura 4.18. presentamos el problema del área, esta actividad permitió mantener un diálogo con los profesores acerca de sus procedimientos de resolución.

Esta pieza de madera se utilizará para hacer una repisa.

Área:  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados. 

Ancho:  $\frac{2}{3}$  de metro

Alto ¿... metros?

¿Cómo realizaste el cálculo del lado desconocido?

¿Qué clase de números usaste? ¿por qué?

¿Cómo verificaste la respuesta?

(Tomado de Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P., 2015)

**Figura 4.18.** El problema del área.

Acerca de los procedimientos realizados por los profesores ante la resolución de una situación como el problema que se presentó en la figura 4.18. mostramos fragmentos del intercambio de ideas y la forma en que los docentes justificaron sus procedimientos, lo anterior nos permitió conocer los conocimientos que los docentes movilizan para poder resolver el problema del área.

En lo que sigue mostramos la resolución que presento la maestra Rosa, en la figura 4.19. mostramos sus procedimientos.

En la figura 4.19 identificamos representaciones consistentes con las formas de resolución que la profesora Rosa ha manifestado en situaciones previas, se apoya de una representación geométrica para ubicar los datos del

problema, utiliza representaciones numéricas con acomodos diferentes para facilitar a los estudiantes la resolución de problemas de división.

$\frac{1}{2} \text{ m}^2$

 $\frac{2}{3} \text{ m}$

$A = bh$

$$\frac{1}{2} = b \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$b = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \quad b = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$$

$$b = \frac{3}{4} \text{ m}$$

$a = bh$

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{3}{4} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

**Figura 4. 19.** La resolución de Rosa

A continuación, presentamos fragmentos de lo que la maestra mencionó para justificar sus procedimientos, en la figura 4.20. se puede leer lo que ella dijo.

***Rosa:** Empiezo por utilizar la fórmula del área que es base por altura, los datos que me están dando es el área, sustituyo datos, es un medio de metro cuadrado, la base la desconozco, la altura, en este caso el ancho es 2/3 de metro, sustituyendo y despejando me lleva a una división. [se refiere a las expresiones que se encuentran en el tercer renglón].*

*Tengo que dividir un medio entre dos tercios, están dos representaciones, con los alumnos se trabaja más esta [señala la que está de lado izquierdo en el tercer renglón].*

*Realizando la operación me da  $\frac{3}{4}$  de metro, sería la base, para comprobar la solución, ...regreso a la fórmula, ... [la maestra sustituyó los datos en la fórmula], realizo las operaciones y me da  $\frac{6}{12}$  y si lo simplifico, es*

$\frac{1}{2}$ , que es el área del rectángulo.

**Investigadora:** *Usted utiliza una fórmula, ¿nos podría explicar por qué la utiliza?*

**Rosa:** *... nos está hablando del área de un rectángulo, se tiene el dato de que el ancho es  $\frac{2}{3}$ , se desconoce la base, yo me apoyo en la geometría, la fórmula del área de un rectángulo, usar lo que se conoce, con preguntas guiadoras, es un rectángulo, conozco el área, conozco la altura y me preguntan por la base, entonces eso me ayuda a irlos guiando hacia la solución al problema.*

**Investigadora:** *...usted representa dos divisiones, de acuerdo a su experiencia ¿por qué las utiliza y con base en qué toma las decisiones para hacer estas representaciones?*

**Rosa:** *cuando se trabaja con áreas, el alumno está acostumbrado a utilizar números enteros, y si hubiera utilizado números enteros, ellos buscan un número que multiplicado por dos que me de ocho, dividido 8 entre 2 [la maestra sugiere un ejemplo con números enteros], para los alumnos esa representación es conocida, es familiar, con preguntas guiadoras, vemos la diferencia de usar enteros y fracciones. Esta forma de representar la división de dos fracciones [se refiere al acomodo para la división, una fracción sobre otra], hago la línea de división más larga, los alumnos aprenden a diferenciar estos símbolos, que cuando es una fracción y cuando es una división, esta representación yo la cambio por la que está a la derecha y ellos saben cómo hacerla, que en este caso sería con productos cruzados.*

**Figura 4.20.** La resolución de Rosa.

Del procedimiento que presentó la maestra Rosa podemos decir que ella recurre a la regla de los productos cruzados, utilizando dos representaciones, es posible identificar la combinación del conocimiento y la experiencia la llevan a tomar decisiones donde puede expresar situaciones que favorecen la comprensión de sus estudiantes a través de pasar de números enteros a números fraccionarios.

En lo que sigue presentamos la resolución de Fátima, en la figura 4.20 podemos observar su procedimiento.

<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;"> <math>\frac{1}{2}m^2</math> </div> $\frac{2}{3}m$	
$A = a \times b$	<b>Comprobación</b>
$\frac{1}{2}m^2 = ? \left(\frac{2}{3}m\right)$	$\frac{1}{2}m^2 = \left(\frac{3}{4}m\right) \left(\frac{2}{3}m\right)$
$\frac{\frac{1}{2}m^2}{\frac{2}{3}m} = ?$	$\frac{1}{2}m^2 = \frac{6}{12}m^2$
$\frac{3}{4}m = ?$	$\frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}m^2$

**Figura 4.21.** El procedimiento de Fátima.

En la figura 4.21 podemos ver el procedimiento presentado por la profesora Fátima, consideramos que aporta datos complementarios en torno a la resolución.

De la misma forma Rosa procedió, Fátima se apoya en la fórmula para calcular el área de un rectángulo, es posible inferir que ella se encuentra en un plano algebraico incipiente por la sustitución que realiza de los datos, sin embargo, no sugiere el uso de la incógnita de manera escrita, posiblemente porque trata de mantenerse en un plano aritmético.

A continuación, en la figura 4.22. presentamos fragmentos del diálogo de Fátima y la investigadora, relacionado con la solución del problema del área.

*Fátima: Mi planteamiento es técnicamente igual que la maestra Rosa, planteo mi figura del rectángulo,  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados que representan el área de la figura, el dato que sí tengo que es el ancho que son  $\frac{2}{3}$  de metro. pongo un signo de interrogación en lugar de poner una letra, por el valor desconocido, ... planteo la fórmula del área que es base por altura, sustituyo los valores, a diferencia del otro planteamiento, manejo las letras de  $\frac{1}{2}$  de  $m^2$ , igual al valor desconocido, que es  $\frac{2}{3}$  del  $m$ , la división que ocupo es la misma, aplico la división algebraica entre  $m^2$  y  $m$ , obtengo  $\frac{3}{4}$  de  $m$  que es el valor que falta.*

*Hago la comprobación igual, terminando sobre la misma fórmula del área,*

obteniendo la simplificación y el valor desconocido.

**Investigadora:** ... usted tiene  $\frac{1}{2} m^2 \div \frac{2}{3} m = \zeta?$ , es una división, ¿usted cómo les explica a los estudiantes el procedimiento para resolver esa división?

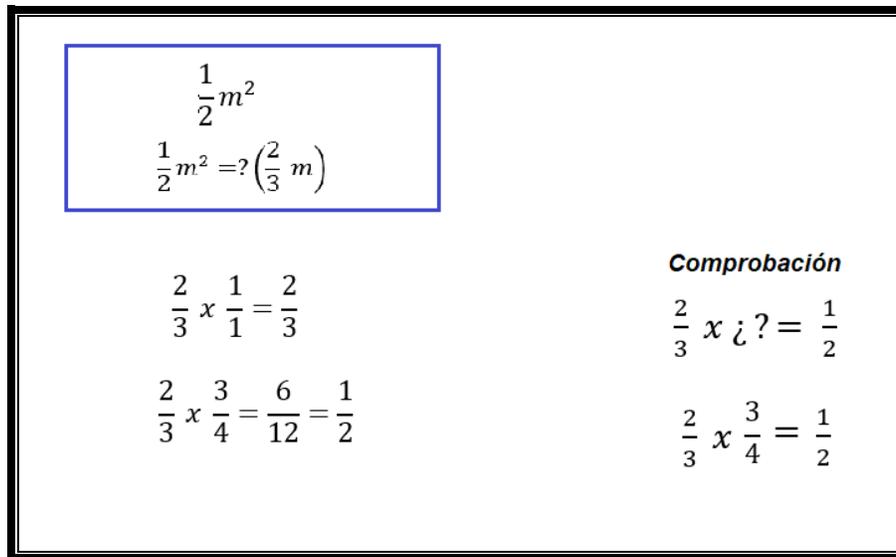
**Fátima:** He notado que al representar la división de esta forma [se refiere al acomodo de una fracción sobre otra], regularmente se lleva a la multiplicación de extremo por extremo y medio por medio, como una regla, en mi experiencia me di cuenta que es más sencillo para los alumnos en cómo se resuelve cuando se ve la división de esta forma representativa, los estudiantes se confunden más cuando ven  $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$  y quieren aplicar la forma de resolver una multiplicación en lugar de una división, es cruzado y ellos lo hacen de forma directa, se quedan mecanizados.

**Figura 4.22.** La resolución de la maestra Fátima.

De acuerdo con lo que es posible identificar en el diálogo sostenido con la profesora Fátima notamos el uso de representaciones numéricas alternativas, con la finalidad de evitar que los estudiantes se confundan con el procedimiento para resolver una multiplicación y puedan diferenciarlo del procedimiento para resolver una división, dejando de lado la explicación o justificación del algoritmo.

La maestra lo usa para especificar que se trata de una operación de división y resuelve multiplicando extremo por extremo y medio por el medio, que finalmente es una variante de los productos cruzados, por otra parte, identificamos que ella pone especial atención en la unidad de medida y el uso de leyes de exponentes para simplificar la literal utilizada para representar la unidad de medida. Incluye contenidos del álgebra para fundamentar sus procedimientos, como el despeje de una ecuación de primer grado y la simplificación de exponentes.

A continuación, presentamos los procedimientos para resolver el problema realizado por el profesor Carlos, en la figura 4.23 es posible mostrar lo que él hizo.



**Figura 4.23.** Los procedimientos de Carlos.

Para poder analizar lo que mencionó Carlos en la figura 4.24 presentamos fragmentos del diálogo entre Carlos y la investigadora, cuando el profesor manifestó sus decisiones para resolver el problema en un plano aritmético de la manera que él mostró.

*Carlos: A diferencia de las profesoras yo no llegué a divisiones, lo trate de resolver con multiplicaciones.*

*Tengo tercios por ¿? = 1/2, es como la fórmula, pero sin letras y con signos, saben los estudiantes que 2/3 multiplicado por un número da 1/2, ese es el primer dato, luego les digo, lo podemos hacer por prueba y error, es decir, 2/3 x 1/1 = 2/3, pero 2/3 es mayor que 1/2, entonces debemos pensar en una fracción menor, utilizando fracciones fáciles, 2/3 x 3/4 = 6/12, simplificamos es igual a 1/2, la respuesta es 3/4.*

*La comprobación la realicé con una ecuación, 2/3 x a = 1/2, entonces 2/3 habría que multiplicarlo por el inverso utilizando las propiedades de la igualdad, es decir si de un lado de la ecuación multiplico por tres mitades entonces del otro lado de la igualdad multiplico por tres mitades, es decir, simplificando, usé el inverso de 2/3 para convertirlo en 1 y ese mismo inverso lo usé para multiplicarlo con 1/2. Así entonces a= 1/2 x 3/2 que es el inverso y así obtenemos que a= 3/4.*

*Lo traté de hacer como una ecuación, pero usando las propiedades de la igualdad, no diciendo está multiplicando pasa dividiendo, porque si*

*hubiera sido ese el caso nos habiéramos encontrado con la división, pero como lo hice con las propiedades de la igualdad entonces nada más estuve en el contexto de multiplicación de fracciones.*

**Investigadora:** ... ¿a qué se refiere con números fáciles?

**Carlos:** *Son fracciones que de acuerdo a mi experiencia son más fáciles de recordar y de representar para los estudiantes, por ejemplo, con doblez de papel, lo que son mitades, cuartos, octavos dieciseisavos, los tercios, son fracciones que son más accesibles a diferencia de fracciones como 13/17, no son tan sencillas de representar. Las fracciones que mencioné al principio son fáciles de representar como números decimales,  $\frac{1}{2} = 0.5$ ,  $\frac{3}{4} = 0.75$ ,  $\frac{1}{8} = 0.125$ , y entonces tienes sus representaciones equivalentes, eso sirve para hacer un tanteo.*

**Figura 4.24.** Fragmentos del diálogo entre Carlos y la investigadora.

Del fragmento presentado en la figura 4.24 podemos mencionar que los conocimientos que Carlos hace evidentes se refieren a una forma incipiente de mostrar el inverso multiplicativo, además de apoyar sus decisiones en tratar de hacer más sencilla la enseñanza de este tema, sin embargo, no logra mostrar la regla de invierte y multiplica, sólo se apoya en el valor neutro de la multiplicación.

Como reflexión final de la resolución del problema anterior, y del intercambio de ideas en torno a la forma de resolverlo y explicarlo ante los estudiantes los docentes expresaron sus ideas mediante los diálogos que presentamos en los fragmentos que se encuentran en la figura 4.25.

Del fragmento del diálogo de los profesores y la investigadora podemos decir que los profesores son conscientes de la dificultad cognitiva que representa para estudiantes y docentes el estudio y la enseñanza de problemas multiplicativos que implican números fraccionarios. Son conscientes de la necesidad de hacer propios los conocimientos para poder justificar las explicaciones de cómo resolver los problemas multiplicativos, asimismo, sugieren que los materiales que proporciona la Secretaría de Educación no resuelven la situación anterior, sin embargo, lo asumen como

un área que es necesario fortalecer, y si tiene la oportunidad de realizarla de manera colectiva consideran que puede apoyar su práctica educativa.

**Investigadora:** *¿Cómo reflexión final a lo que hemos realizado hasta el momento, ¿qué consideran ustedes que aportó el trabajo colectivo a su práctica educativa?,*

**Rosa:** *Se hace visible la necesidad de recuperar información para fundamentar los procedimientos en el aula, enseñar aquellos que dan las bases a los niños para poder entender temas más adelante.*

**Fátima:** *Considero que es importante ir más allá de lo que marca el Plan y Programa de Estudios, y los libros de texto, entender que son apoyo. Las aportaciones de cada uno de nosotros permitieron llegar a un análisis más profundo de ciertos temas que tienen un alto grado de complejidad al momento de impartirlos, enriquece saber el procedimiento que utilizó el otro.*

**Marina:** *Yo considero que, si es importante saber más, pero la propuesta que tiene la SEP es una guía, hay algunas deficiencias que nosotros podemos ir complementando, por ejemplo, las propiedades de operaciones. También es necesario tener la sensibilidad para tratar de hacer las cosas más fáciles para los alumnos.*

**Carlos:** *Es importante hacer un análisis sobre cómo enseñamos, el mismo docente puede tener conceptos erróneos que obviamente se van transmitiendo a los alumnos y eso hace difícil tanto la enseñanza como el aprendizaje de esta materia, es importante este tipo de espacios para reflexionar y compartir las experiencias de los profesores, eso enriquece mucho la labor que hacemos.*

**Figura 4.25.** La reflexión final de los profesores acerca de las Jornadas Académicas.

En torno a la reflexión que realizamos con los profesores, podemos decir que la definición de problemas multiplicativos que implican fracciones, ellos consideran que pueden intervenir números enteros y fraccionarios, situación que fue evidente en el diseño de problemas.

Relacionado con la producción que ellos presentaron, observamos que los diseños de Rosa y Marina promueven procedimientos como es la suma de partes y la suma repetida, sin embargo, no sabemos, si ellas son conscientes de esta situación. Los problemas de división muestran dificultades por el

contexto del enunciado del problema y los elementos que intervienen para el planteamiento de la situación que presentan, como es el caso de Carlos.

En lo que se refiere a la solución de los problemas los profesores utilizan recursos gráficos para asignar significado a la operación, no obstante, apoyan sus procedimientos en *reglas* como el *producto cruzado*, procedimientos apoyados en *ensayo y error*, arreglos que a su consideración favorecen que los alumnos recuerden los procedimientos, pero sin justificar en hechos matemáticos los procedimientos que realizan.

#### **4.7 Consideraciones parciales de las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas**

En este capítulo presentamos el análisis de las tareas que se desarrollaron durante las Jornadas Académicas con profesores, situaciones que implicaron el análisis, diseño y resolución de problemas, lo anterior se desarrolló en un ambiente de colaboración e intercambio de ideas con el fin de retroalimentar y fortalecer los conocimientos de los profesores. Identificamos la necesidad de continuar con la reflexión acerca de los pensamientos que los profesores manifiestan ante la resolución y diseño de tareas, con la finalidad de promover una mejora y fortalecer su práctica educativa.

Presentamos el análisis de los diálogos derivados de interacción de la investigadora y los profesores de matemáticas en ejercicio, así como aquellos contenidos de la matemática educativa que están implícitos en el discurso del maestro.

Las actividades desarrolladas nos permitieron identificar los *procesos cognitivos* de los profesores durante el análisis de tareas, el *diseño y resolución de problemas multiplicativos* relacionados con los números fraccionarios. A continuación, mencionamos los hallazgos obtenidos.

Los docentes manifestaron errores conceptuales en el análisis y diseño de tareas, dichos errores están referidos al *concepto de unidad, fracción, la operación de división y sus significados*. Tuvieron dificultades para diseñar

situaciones que implicaran números fraccionarios, los diseños incluían otras operaciones y el uso de otros conjuntos numéricos como los números naturales y los números enteros.

Identificamos el uso preponderante de los números naturales para asignar los datos del problema en los diseños que presentaron los maestros, así como los recursos gráficos (figuras geométricas como el rectángulo) para apoyar el planteamiento de los problemas multiplicativos.

Por otra parte, identificamos problemas que implicaron el *producto de medidas, suma iterada de cocientes, isomorfismo de medidas*.

En lo que se refiere a la **resolución de problemas**, fue posible identificar procedimientos fundamentados en la *regla de tres*, el *producto cruzado*, procedimientos como el *ensayo y error*, el uso de recursos gráficos para apoyar la resolución, acomodos alternativos para justificar la división con números fraccionarios.

En este sentido, podemos ver que los profesores no dan importancia a la unidad de referencia; están centrados en un plano algebraico por los procedimientos que utilizan para pasar de una multiplicación a una división, sin llegar a justificar esta transformación.

Consideramos pertinente indagar a través de entrevistas individuales con retroalimentación aquellos aspectos de la resolución y diseño de problemas multiplicativos con dos profesores, en este caso nos referimos a Rosa y Carlos, por la disposición e interés que manifestaron en el desarrollo de esta investigación. En el próximo capítulo mostraremos las entrevistas de los profesores de Matemáticas con experiencia en la enseñanza.

# CAPÍTULO 5

---

## LOS PROCESOS COGNITIVOS DE ROSA Y CARLOS

En este capítulo presentamos datos obtenidos durante dos entrevistas, una realizada a la maestra Rosa (en dos partes) y la otra aplicada al profesor Carlos; éstas se llevaron a cabo de manera individual y en diferente horario, mediante la plataforma Meet. La información que aquí presentamos se refiere a los *procesos cognitivos y núcleos de significación* identificados en cada docente durante el desarrollo de cada entrevista (una para cada maestro) en un ambiente de resolución de *problemas multiplicativos* relacionados con los *números fraccionarios*, además de las *reflexiones* sobre los *diseños* y *procedimientos* presentados por ambos *profesores de matemáticas* en la escuela secundaria con amplia experiencia en el campo de la enseñanza.

Elegimos a Rosa porque manifestó la disposición de participar durante el proceso de la investigación y porque nos permitió tenerla como referente en torno a las reflexiones que surgieron a lo largo de la aplicación de los instrumentos utilizados para este estudio como son la entrevista inicial y las Jornadas Académicas con profesores de matemáticas.

Por otra parte, Carlos fue invitado para aplicar la entrevista por su desempeño y la fluidez de sus ideas durante el trabajo colectivo con profesores; él manifestó conocimientos sólidos relacionados con los números fraccionarios y sus operaciones. Este instrumento se aplicó en momentos posteriores a las *Jornadas Académicas con profesores de matemáticas*.

Para el análisis de los datos que vamos a presentar en este capítulo hemos considerado el modelo de análisis presentado en el capítulo 4, donde tomamos en consideración aquellos conocimientos que surgieron durante la resolución de problemas y las razones que los profesores manifestaron para mostrar y determinar los procedimientos utilizados, asimismo, analizamos los diseños y reflexiones identificadas de acuerdo a su experiencia docente.

A continuación, escogimos un problema de este capítulo para abordarlo en la siguiente sección, presentamos a cada uno de los profesores según el tratamiento dado a dicho problema por Rosa y después Carlos.

## **5.1 La resolución del problema sobre el inverso multiplicativo del número fraccionario y su vinculación como las operaciones de multiplicación y división (cociente de cocientes)**

En lo que sigue, mostramos fragmentos de la entrevista realizada a la profesora Rosa y al profesor Carlos, los tres problemas multiplicativos seleccionados fueron aplicados a ambos maestros para que ellos los resolvieran durante la entrevista, dichos instrumentos se aplicaron de manera individual, en diferentes momentos y de manera independiente, se llevaron a cabo mediante la plataforma Meet (como ya hemos mencionado, utilizamos este medio virtual como alternativa de comunicación y con la finalidad de atender las sugerencias por la condición sanitaria que estábamos viviendo por el COVID-19 durante el desarrollo de esta investigación).

El diseño de la entrevista semiestructurada de corte didáctico con retroalimentación Valdemoros et al. (2015, 2017), consistió en presentar tres problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios para que los maestros resolvieran y nos comunicaran la forma en que ellos podrían presentar y resolver los problemas en su clase de matemáticas. Para complementar esta actividad, solicitamos el diseño de un problema de división dadas dos fracciones.

Para el desarrollo de esta entrevista, utilizamos el mismo formato de las entrevistas anteriores, es decir, fue una entrevista semiestructurada de corte didáctico con retroalimentación que nos permitió establecer un diálogo profundo en torno a aquellos aspectos de la resolución del problema y de la experiencia del profesor cuando enseña contenidos relacionados con el tema de esta investigación.

En las entrevistas de Rosa, esperamos a que ella leyera el problema y lo resolviera, cuando terminó ella mostró sus procedimientos. Luego sobre las operaciones realizadas por la profesora continuamos con la entrevista, es decir, realizamos preguntas acerca de las razones en las que Rosa fundamentó sus acciones para resolver la situación, además de conocer la forma en que lo llevaría a sus estudiantes.

### **5.1.1 La resolución propuesta por Rosa**

Para la entrevista con Rosa establecimos un diálogo para tener la posibilidad de identificar y profundizar en torno a aquellos aspectos relacionados con la enseñanza y, en este caso, la resolución de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

A continuación, en la figura 5.1 mostramos un problema relacionado con el área, se incluye la resolución propuesta por Rosa. Presentamos este problema porque consideramos que permite identificar cómo los docentes interpretan el inverso de la multiplicación con números fraccionarios y la forma en que ellos le darían uso durante su clase de matemáticas.

Esta pieza de madera se utilizará para hacer una repisa.

Área:  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados.



Ancho:  $\frac{2}{3}$  de metro

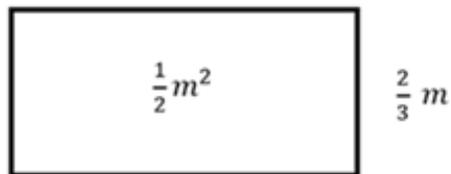
Alto ¿... metros?

¿Cómo realizaste el cálculo del lado desconocido?

¿Qué clase de números usaste? ¿por qué?

¿Cómo verificaste la respuesta?

(Tomado de Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. 2015)



$$A = bh$$

$$\frac{1}{2} = b \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$b = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$$

$$b = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$$

$$b = \frac{3}{4} m$$

$$A = bh$$

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{3}{4} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Figura 5.1.** La resolución expresada por Rosa para el problema del área.  
Tomado de Valdemoros et al. (2015)

Después de resolver el problema le solicitamos a Rosa nos mencionara la forma de resolución, ella comentó lo siguiente, *“lo primero es tener la figura para anotar los datos”,* y señaló la imagen con el rectángulo y agregó *“como normalmente lo hago con los niños, utilizamos la fórmula para el área, es base por altura les pido que vean cuáles son los datos del problema para sustituir en la fórmula los datos del problema”*.

La maestra fue indicando las expresiones numéricas después de la fórmula, *“yo le pregunto a mis alumnos ¿qué podemos hacer para encontrar el valor de b?, y si no contestan les digo que necesitamos despejar b”,* en este caso, volvimos a preguntar a la maestra Rosa si tendría otra forma de mencionar a sus alumnos la forma de resolver la situación anterior, es decir, sin utilizar el despeje de una ecuación, ella agregó *“pues, en este caso se me facilita decir que un despeje, porque ellos ya vieron ecuaciones sencillas”*. La investigadora volvió a insistir, pero, ¿usted tiene otra forma de resolver esa situación?, *“...no se me ocurre ahora, este tipo de ejercicios los resuelvo así, no había pensado en otra”*.

Los fragmentos del diálogo anterior nos hacen pensar cómo la profesora se encuentra ante un *conflicto cognitivo de enseñanza*, debido a la ausencia de expresiones que le permitan explicar el *cociente de cocientes*.

Posteriormente la maestra continuó explicando sus procedimientos, *“el despeje, con este procedimiento, llegamos a una división”,* Rosa hizo referencia a las operaciones que se encuentran en el tercer renglón, ha sido consistente con este arreglo particular de la división con números fraccionarios. Cuando preguntamos acerca de la resolución, ella comentó lo siguiente *“uso esta forma de resolver [haciendo referencia al arreglo particular de la división], multiplicar extremos y medios, porque los niños lo recuerdan con más facilidad, si uso esta otra forma [ella señaló el arreglo que tenía a la derecha] los niños lo resuelven como una multiplicación”*.

Y usted ¿ha considerado alguna otra forma de resolución de problemas para evitar esta situación?, *“pues con lo que ya dije, con este arreglo de multiplicar extremos por extremos y medios con medios y con ejercicios de repaso”*. Ella insiste

en el procedimiento inicial, que recargado sobre la operación de la multiplicación. Es posible identificar que Rosa apela a su experiencia de enseñanza y con base en ella decide utilizar un arreglo particular para mostrar el procedimiento para dividir fracciones, y la resuelve mediante la *regla* de los *productos cruzados*. Por otra parte, notamos que ella expresa el cociente de cocientes, y sustituye la transformación de multiplicación a división de cocientes a partir del despeje de una ecuación.

Para continuar con el diálogo de la entrevista la profesora mencionó las preguntas que estaban presentes en el problema *“se me dificultó responder a las preguntas que se me plantearon, acerca de porqué use esos números”*. Le preguntamos a que se refería con la dificultad y ella respondió, *“porque pensé en convertir fracciones en números decimales, para los estudiantes es más fácil trabajar con decimales que con fracciones”*. En este caso, consideramos que Rosa identificó que al convertir las fracciones a número decimal podía obtener números decimales infinitos, así lo mencionó *“si divido 2 entre 3 obtengo un número que no es exacto”*, situación que le complicaría la representación gráfica, por lo que decidió continuar con los números fraccionarios.

Preguntamos a Rosa que hacía cuando se enfrentaba a situaciones en donde podía utilizar la expresión de una fracción equivalente a número decimal, ella mencionó lo siguiente *“para los estudiantes es más fácil usar números decimales porque al realizar las operaciones son más parecidas a los números naturales y ellos están más acostumbrados a estos números desde la primaria”* ¿pero usted que decisión toma cuando diseña sus actividades, anticipa problemas en donde sea posible utilizar fracciones o decimales? Y ella mencionó *“pues no, cuando resolvemos ejercicios en la clase he notado que a los alumnos no les gusta usar fracciones porque no saben o no recuerdan los algoritmos, pero tengo que ver ese tema de fracciones porque lo indica el programa de matemáticas”*.

Insistimos acerca de las razones sobre las que ella determina los datos numéricos que van a intervenir un determinado problema (refiriéndonos a los números naturales, racionales en su expresión decimal o fracciones) y ella agregó *“en el libro de texto y en el programa vienen problemas dependiendo del tema que se debe enseñar, y sobre eso yo le digo a los niños que resuelvan los problemas que vienen ahí”*. Con base en esta respuesta podemos inferir la importancia e influencia que tienen los materiales que proporciona la Secretaría de Educación Pública.

Para finalizar el problema ella mencionó los procedimientos sobre los cuáles verificó la respuesta, *“para comprobar la respuesta, les diría a los niños que se sustituye el número encontrado en la fórmula, y se deben hacer las operaciones y si sale lo mismo quiere decir que estamos bien en el resultado”*. En las sesiones de trabajo previas, Rosa no había manifestado la necesidad de comprobar los resultados, la evidencia que deja es el producto de cocientes mediante el algoritmo canónico.

En la resolución de este problema identificamos que Rosa es consistente con las representaciones que ha realizado a lo largo de la aplicación de los instrumentos utilizados para esta investigación, en lo relacionado con la resolución de problemas donde interviene la división con números fraccionarios, ella utiliza una representación que de acuerdo a su experiencia les permite a los estudiantes *reconstruir el procedimiento* para resolver una división de números fraccionarios.

Sin embargo, a diferencia de sesiones previas, ella hace explícitas sus razones *“están dos representaciones”* [señala la composición de las operaciones en el renglón 3 de su resolución] *“y con los alumnos se trabaja más esta”* [señala el arreglo particular *“la operación me da  $\frac{3}{4}$  de metro que es lo que sería la base”*]. Es evidente la ausencia de recursos que permitan dar sentido a la operación de cociente de cocientes, sustituyéndolo por la memorización de un procedimiento sin llegar a la comprensión de la operación.

Lo que ella agrega a la resolución de este problema es la comprobación de sus procedimientos, lo que previamente en otros momentos de resolución no había realizado porque no lo habíamos solicitado. Por otra parte, identificamos que se apoya de contenidos algebraicos para resolver el problema, sin embargo, no considera la unidad de medida, como referencia para justificar sus procedimientos, no promueve la comprensión de la operación, la sustituye por la mecanización de procedimientos.

### 5.1.2 Acerca de la preparación profesional de Carlos

Para tener la posibilidad de contrastar los datos que aportan los profesores consideramos necesario indagar acerca de la formación docente y de la experiencia de Carlos. Como ya hemos mencionado, el profesor estuvo presente y resolvió diversas tareas durante las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas, y queremos mencionar algunos aspectos que consideramos importantes acerca de su formación docente.

El profesor Carlos se formó en una Escuela Normal de la Ciudad de México con el programa de estudios 1988, al momento de la entrevista Carlos tenía 25 años de experiencia como profesor de Matemáticas en la Escuela Secundaria.

A continuación, en la figura 5.2. mostramos algunos fragmentos de la entrevista semiestructurada con retroalimentación realizada a Carlos en donde nos permitió conocer aspectos de su formación docente y continua.

*E: En el programa de estudios que usted se formó, ¿cuántos semestres estaban relacionados con contenidos de aritmética?*

*Carlos: Dos semestres*

*E: ¿En ese programa tuvo información de contenidos acerca del tratamiento didáctico de las fracciones?*

*Carlos: Sí, pero muchos temas era necesario investigarlos por nuestra cuenta.*

*E: ¿Actualmente tiene acceso a información de los números racionales explorados desde la aritmética?*

*Carlos: Tengo libros que he comprado y me apoyo con ellos para los temas*

*que identifico que necesito conocer.*

*E: ¿A qué instancia acude cuando desea tomar alguna actualización?*

*Carlos: Busco en internet, o acudo a los Centros de Maestros.*

**Figura 5.2.** La formación docente y continua de Carlos.

De acuerdo a lo que identificamos acerca de la formación de Carlos es posible suponer que es un profesor autogestivo y autodidacta desde su etapa de formación como docente, notamos que sus acciones están fundadas en su propia experiencia acerca de contenidos matemáticos que a su consideración necesitan los estudiantes, situación que es consistente a lo largo de esta investigación.

### **5.1.3 Acerca de la experiencia profesional de Carlos durante la enseñanza**

La entrevista nos permitió indagar acerca de los conocimientos relacionados con los números fraccionarios. En la siguiente figura 5.3 presentamos aspectos relacionados con la experiencia de Carlos durante la enseñanza de los números fraccionarios y sus operaciones y que le han permitido tomar decisiones.

*E: Desde su perspectiva como educador ¿qué conocimientos considera necesarios por parte del docente para la enseñanza de las matemáticas, específicamente lo relacionado a las operaciones de multiplicación y división con números fraccionarios?*

*Carlos: ... que los alumnos entiendan que significa una fracción, es un tema complicado, desde el momento que el profesor explique bien claro que es una fracción podemos avanzar, este tema se presta a muchas confusiones.*

*E: ¿A qué tipo de confusiones?*

*Carlos: Tan solo la definición, por ejemplo: a los alumnos se les hace fácil escribir números decimales por lo general en el denominador de la fracción.*

*E: ¿A qué atribuye esta situación?*

*Carlos: Pues a que no se especifica bien claro el concepto de fracción, es  $a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales y por lo tanto no es posible escribir números decimales, porque no se cumple la definición.*

**Figura 5.3.** La experiencia de Carlos durante la enseñanza de los números fraccionarios.

En este fragmento es posible inferir que Carlos ha identificado errores conceptuales por parte de los estudiantes durante sus años de experiencia y, con base en ellos toma decisiones didácticas, él considera necesario enfatizar aquellos *contenidos matemáticos* que le permiten establecer definiciones y con base en ellas fundamentar los contenidos conceptuales de su discurso durante la enseñanza, lo que de acuerdo a su experiencia le ha permitido evitar *errores conceptuales* en los estudiantes.

A continuación, en la figura 5.4. presentamos los contenidos relacionados con las fracciones que de acuerdo con la experiencia de Carlos son indispensables para que sus alumnos accedan a las operaciones como la multiplicación y división.

*E: En cuanto a la enseñanza de los problemas multiplicativos relacionados con las fracciones ¿qué contenidos previos considera como elementales para el estudio de este tema?*

*Carlos: La habilidad para las operaciones básicas, como sumar, restar, bueno las operaciones básicas,*

*E: ¿A qué contenidos recurre para la enseñanza de las fracciones y sus operaciones?*

*Carlos: Lo más importante es que el alumno comprenda el significado de la fracción, todas las formas de representación como en la recta numérica y con figuras, la equivalencia de fracciones, son conocimientos importantes y elementales para pasar a las operaciones con fracciones.*

*E: ¿Cuándo usted realiza la planeación de su clase considera necesaria la comprensión por parte de los estudiantes?*

*Carlos: Cuando hago mi programa para la clase tengo claro que es lo que debo enseñar y que deben aprender los estudiantes.*

*E: ¿Qué elementos considera para la planeación de su clase?*

*Carlos: Utilizo el programa, en este caso el programa 2017.*

*E: ¿Qué papel representan los problemas dentro de su práctica educativa cuando diseña situaciones relacionadas a la enseñanza de problemas multiplicativos con números fraccionarios?*

*Carlos: Los problemas nos ayudan a presentar un tema nuevo, a explorar lo que el alumno sabe, por ejemplo: cuando inicio un tema pienso en un problema en donde los alumnos puedan resolver con los antecedentes.*

**Figura 5.4.** Los contenidos necesarios para resolver problemas.

De acuerdo con lo que menciona el profesor Carlos identificamos que esta apegado a lo que menciona el enfoque del programa de estudios proporcionado por la Secretaría de Educación Pública, cuando él agrega la importancia que tiene la resolución de problemas para su clase, asimismo, considera indispensable tener el concepto de la fracción bien definido y comprendido por sus estudiantes, así como las operaciones básicas.

Por otra parte, es posible inferir que el maestro es consciente de la importancia de promover la comprensión de contenidos Matemáticos específicos de las fracciones para que con base en esas ideas bien fundamentadas el profesor pueda desarrollar un plan de trabajo para sus estudiantes.

#### 5.1.4 La propuesta de resolución al problema del área expresada por Carlos

A continuación, en la figura 5.5. presentamos la resolución propuesta por el profesor Carlos, en el mismo problema que resolvió la maestra Rosa previamente.

Esta pieza de madera se utilizará para hacer una repisa.

Area:  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados. 

Ancho:  $\frac{2}{3}$  de metro

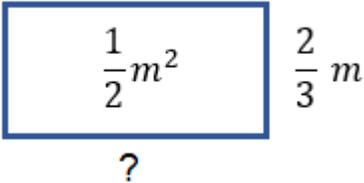
Alto ¿... metros?

¿Cómo realizaste el cálculo del lado desconocido?

¿Qué clase de números usaste? ¿por qué?

¿Cómo verificaste la respuesta?

(Tomado de Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. 2015)



Comprobación

A = b x h       $\frac{1}{2} m^2 = \left(\frac{3}{4} m\right) \left(\frac{2}{3} m\right)$

$$\frac{1}{2}m^2 = ? \left(\frac{2}{3}m\right) \quad \frac{1}{2}m^2 = \left(\frac{6}{12}m^2\right)$$

$$\frac{\frac{1}{2}m^2}{\frac{2}{3}m} = ? \quad \frac{1}{2}m^2 \div \frac{2}{3}m^2$$

$$\frac{3}{4}m = ?$$

Figura 5.5. La resolución al problema del área realizada por Carlos.

El maestro comenzó con el comentario siguiente *“presento una figura de rectángulo,  $\frac{1}{2}$  metros cuadrados que representan el área de la figura, el dato que si tengo es el ancho y son  $\frac{2}{3}$  de metro, lo que yo hago aquí es que pongo un signo de interrogación en lugar de poner una letra, porque a veces los estudiantes no han visto las ecuaciones”*. En el diálogo sostenido con Carlos y por las representaciones que utiliza identificamos que él asigna importancia a la unidad de referencia, utiliza representaciones geométricas para dar sentido a la operación, tiene en cuenta los contenidos que posiblemente sus estudiantes han estudiado antes de este tema.

Por otra parte, de acuerdo a su experiencia el profesor no utiliza contenidos de álgebra de manera explícita, pero la representación numérica que realizó sugiere el uso del producto con un valor faltante, así lo mencionó *“es simplemente que manejo las letras de  $\frac{1}{2}$  de  $m^2$  es igual al producto de un valor desconocido y  $\frac{2}{3}$  del  $m$ ”*.

Cuando le preguntamos acerca del algoritmo para resolver el cociente de cocientes él manifestó las siguientes ideas *“He notado que el representar la división de esta forma”* [se refiere al arreglo similar que hemos reportado con Rosa], *“se llega a la multiplicación de extremo por extremo y medio por medio, en mi experiencia, los alumnos no se equivocan y recuerdan cómo se multiplica”*. Identificamos que Carlos al igual que Rosa se apoya en la memorización de procedimientos, dejando de lado la comprensión de la operación.

Cuestionamos al profesor acerca de las razones para realizar el procedimiento de medios por extremos y agregó *“cuando se ve la división de esta forma [arreglo particular], evito que se confundan, cuando resuelven  $\frac{1}{2} m^2 \div \frac{2}{3} m^2$ , los alumnos aplican la forma de resolver la multiplicación en lugar de una división”*, Cuando preguntamos otra forma de resolver, el maestro mencionó *“en ocasiones utilizó el procedimiento de multiplicar por el inverso de la segunda fracción, pero he notado que los estudiantes quieren resolver todo con la multiplicación”*.

Del fragmento anterior podemos decir lo siguiente: de acuerdo a su experiencia ha tomado la decisión de apoyarse en procedimientos que de momento pueden resolver el problema, dejando de lado el sentido de la división en sí. El maestro presenta procesos de resolución apoyado en los patrones de resolución de sus estudiantes, con esto, reafirma la ausencia de sentido y significado en las operaciones además de la mecanización de procedimientos. Por otra parte, inferimos que se encuentra ante un conflicto cognitivo de enseñanza cuando no propone una resolución apoyada en contenidos matemáticos que le permitan resolver la problemática como es el caso de los estudiantes cuando no identifican la operación que implica el problema.

Por la importancia que representa esta situación para la investigación, agregamos la siguiente pregunta *¿a qué atribuye la tendencia de los estudiantes a tener errores para resolver un problema de división con números fraccionarios?*, Carlos mencionó *“he notado que la multiplicación es más fácil para los estudiantes, ellos se guían por la jerarquía de las operaciones, las suma y la resta son más fáciles y luego la multiplicación y para ellos es más difícil la división, por eso creo que prefieren usar la multiplicación, ... también ellos no se detienen a pensar si el resultado es correcto”*. Lo que podemos decir es que Carlos es consciente del conflicto cognitivo de sus estudiantes, pero no es consciente de las limitaciones que promueve en ellos con la propuesta de resolución que presenta.

Identificamos que en los procedimientos utilizados por Carlos están implícitas decisiones didácticas como apoyarse en las composiciones verbales para promover la comprensión, tal es el caso de mencionar extremos por extremos y medios por medios, y que deja de lado el algoritmo relacionado con el inverso del divisor porque de acuerdo con su experiencia prefiere evitar errores comunes por parte de los estudiantes cuando resuelven con un algoritmo.

Es posible suponer que para Carlos es importante la validación de los resultados, dado que dejó evidencia de la comprobación en los procedimientos.

## 5.2 El problema de la división cuotativa

Como ya hemos mencionado, aplicamos tres problemas multiplicativos a los docentes, en lo que sigue, analizaremos lo relacionado con la división cuotativa.

### 5.2.1 La resolución del problema de división cuotativa expresada por Rosa

En lo que sigue presentaremos los procedimientos y los fragmentos de los diálogos que sostuvimos con cada uno de los docentes con la finalidad de poder mostrar los *procesos cognitivos* y *núcleos de significación* manifestados por los docentes.

A continuación, en la figura 5.6 presentamos el problema de división cuotativa y la forma de resolución expresada por Rosa.

Una fábrica de jabón quiere lanzar un nuevo producto, para darlo a conocer deciden regalar muestras de  $\frac{2}{5}$  kg. Para la distribución de las muestras utilizan cajas que resisten un peso de  $12\frac{7}{10}$  kg.

a) ¿Cuántas muestras se pueden enviar en cada caja?

$$12\frac{7}{10} \div \frac{2}{5} =$$

$$\frac{127}{10} = 12.7 \div 0.4$$

$$\frac{4}{10}$$

$12.7 \div 0.4 = 31.75 \text{ kg}$

La caja tiene 31 muestras.

b) Si se añaden volantes para la promoción, ¿cuál es el peso máximo que se puede aumentar?

Se puede agregar un peso de 0.75 kg

**Figura 5.6.** El problema de la división cuotativa, la resolución expresa por Rosa.

Cuando Rosa termino la resolución, le pedimos nos comentara la forma de resolver el problema, ella mencionó lo siguiente: *“para resolver se requiere una división, yo les diría a los estudiantes que tenemos que dividir  $12 \frac{7}{10} \div \frac{2}{5}$ , y también lo representamos de la forma que pueda aplicar la ley del sándwich, en que decimos medios con medios y extremos con extremos”*. Rosa es consistente con la representación sintáctica, es decir, expresa el cociente de cocientes mediante un arreglo particular, al igual que Carlos, ella utiliza una expresión coloquial para indicar el *producto cruzado*. Sin embargo, en las representaciones sintácticas identificamos un algoritmo que hasta entonces no habíamos reconocido, nos referimos al de obtener denominadores comunes para dividir los numeradores.

Disculpe maestra, lo que observamos no corresponde con lo que escribió inicialmente, nos puede mencionar ¿qué fue lo que realizó?, ella agregó, *“...convertí el número mixto  $12 \frac{7}{10}$  a fracción impropia, ... lo que yo les diría a los alumnos es que aquí se pueden usar fracciones equivalentes, así  $\frac{2}{5}$  es equivalente a  $\frac{4}{10}$ ”*. ¿Cuál es la razón para utilizar fracciones equivalentes?, ella respondió *“..., podemos convertir esas fracciones a números decimales, por eso puse  $12.7 \div 0.4$ ”*.

Rosa pasa de un arreglo particular a una representación de división con números decimales, no tiene en consideración la unidad de referencia,

también tiene la posibilidad de utilizar el algoritmo de convertir los denominadores en común denominador, y dividir los numeradores, sin embargo, ella apuesta a la conversión de números fraccionarios a números decimales, situación que en lo sucesivo la llevará a tener una interpretación diferente del resultado de la división.

Para continuar con el diálogo le preguntamos acerca del tratamiento didáctico que ella da a estos contenidos. ¿Cómo justifica este procedimiento con sus estudiantes? Ella mencionó *“cuando estudiamos fracciones, el programa de primer grado está el de fracciones decimales, para convertir a número decimal, y este problema yo les diría a los estudiantes que pueden utilizar ese tema”*.

Es posible pensar que Rosa prefiere la *resolución de problemas multiplicativos* con *número decimales* sobre los *números fraccionarios*, porque ha manifestado que anticipa situaciones relacionadas con facilitar los contenidos para los alumnos, podemos pensar que la maestra se apoya en estas ideas porque para ella y sus estudiantes es más sencillo operar con números decimales que con fracciones.

Rosa continuó con la resolución del problema *“realizamos la división, y el resultado es 31.75 kg. Con esto podemos responder las preguntas del problema, como son 31 enteros, quiere decir que caben 31 bolsas, y le pueden agregar 0.75 kg más”*.

Es posible identificar cómo la omisión de la unidad de referencia lleva a la maestra a no poder discernir la naturaleza de la unidad de medida en la respuesta, es decir, la docente utiliza de manera indiferente la cantidad de bolsas y el peso de cada bolsa.

### **5.2.2 La resolución expresada por Carlos para el problema de la división cuotativa**

En lo que sigue presentamos la figura 5.7. en mostramos la propuesta de resolución de Carlos para el problema de división cuotativa.

Una fábrica de jabón quiere lanzar un nuevo producto, para darlo a conocer deciden regalar muestras de  $\frac{2}{5}$  kg. Para la distribución de las muestras utilizan cajas que resisten un peso de  $12\frac{7}{10}$  kg.

¿Cuántas muestras se pueden enviar en cada caja?

Si se añaden volantes para la promoción, ¿cuál es el peso máximo que se puede aumentar?

$$12\frac{7}{10} \text{ kg} \div \frac{2}{5} \text{ kg} = \frac{127}{10} \div \frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{127}{10} \text{ kg}}{\frac{2}{5} \text{ kg}} = \frac{635}{20}$$

*Obtenemos una reducción de la fracción  $\frac{635}{20} = \frac{127}{4}$*

*como ya no es posible reducir  $\frac{127}{4}$*

*convertimos a número mixto  $31\frac{3}{4}$  bolsas*

*Pero aquí hay que tener cuidado, no sobran  $\frac{3}{4}$  de kg*

*Sobran  $\frac{3}{4}$  de la bolsa que es de  $\frac{2}{5}$  kg.*

*Para saber qué cantidad sobra hacemos  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \text{ kg} = \frac{6}{20} \text{ kg}$*

*$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$  kg se pueden agregar.*

**Figura 5.7.** Los procedimientos de Carlos para el problema de división cuotativa. Producción de la investigadora.

Por la experiencia que hemos tenido con Rosa, le dimos tiempo al maestro para resolver el problema y después le solicitamos que nos mostrara la forma de resolverlo y sobre sus procedimientos fuimos reflexionando. El maestro Carlos nos mostró la resolución, la consigna era resolver el problema considerando la forma en que él llevaría este problema a su salón de clase, el mencionó lo siguiente: “normalmente dejo que los estudiantes lean el problema y comprendan lo que se tiene que hacer, ... se necesita una división, 12

$7/10 \div 2/5$ , siempre me fijo que ellos realicen y anoten todo el procedimiento, para la solución la fracción que tiene enteros se debe convertir a fracción impropia para hacer la operación.” En las expresiones sintácticas de Carlos identificamos el cociente de cocientes con la unidad de referencia establecida, y el arreglo particular para la división, que en resoluciones previas utiliza para apoyar la regla del producto cruzado.

Preguntamos a Carlos acerca de las operaciones: maestro, identificamos en el segundo renglón un arreglo particular para la división con números fraccionarios, ¿nos podría mencionar cuál es la razón para utilizar esta representación procedimiento y como lo resuelve? Carlos agrego “¿esta división?, solo se debe poner una fracción sobre otra, es una forma que me permite decir a los alumnos el por qué se simplifican los kilogramos, porque muchas veces los alumnos solo ponen la respuesta con número y para mí es un resultado incompleto...para resolver ellos saben que deben multiplicar los números del extremo,  $127 \times 5$  y corresponde al numerador, y los números internos  $10 \times 2$  es el denominador, y en ese mismo procedimiento se ve como se simplifican los kg” señaló el resultado obtenido en las operaciones del segundo renglón. Es posible pensar que tiene la noción bien definida de la relación entre número y medida (Vergnaud, 1991). Por otra parte, Carlos deja de lado la relación del cociente y los opera como números naturales.

En el análisis de la resolución presentada por Carlos, identificamos que él tiene presente en todo momento la idea del todo, cuando señala en su procedimiento “hay que tener cuidado, no sobran  $\frac{3}{4}$  kg” le cuestionamos esta situación y respondió “los alumnos llegan a pensar que el sobrante es lo que falta para completar el peso de la caja, y es una respuesta equivocada, porque el sobrante es una fracción del peso original de una bolsa”.

¿Usted que acciones realiza para evitar ese tipo de errores?, el profesor agrego: “...por eso es muy importante tener en cuenta las medidas que se pueden simplificar, en este caso se pudo simplificar los kg, y el resultado son bolsas, los estudiantes no toman en cuenta si son kilos, focos, etc. sólo se ponen a hacer

*operaciones, por eso, al mismo tiempo que trabajo fracciones, trabajo las medidas que se simplifican y hago que ellos piensen si el resultado es correcto”.*

Es posible identificar que el profesor tiene bien definida la idea de unidad y la unidad de referencia, por otra parte, la resolución de problemas no está centrada en el uso del algoritmo de la división de fracciones, apoya su discurso y sus procedimientos es conceptos como las fracciones equivalentes, y el análisis de los resultados, además de la comprobación de los mismos.

### **5.3 El problema del factor escalar**

En lo que sigue vamos a presentar los procedimientos de los profesores Rosa y Carlos cuando resuelven una tarea que implica un *factor escalar*, este problema nos permitió conocer las concepciones de los maestros acerca de la operación de multiplicación con números fraccionarios, es decir, el *producto de cocientes*.

#### **5.3.1 La resolución mediante la suma iterada propuesta por Rosa para resolver el problema**

A continuación, presentamos los procedimientos aportados por la profesora Rosa para la resolución de problema del factor escalar, para esta tarea ella dejó evidencia de diferentes representaciones, por ellos mostramos sus procedimientos en dos figuras, la primera es la figura 5.8 donde hacemos la interpretación de la representación gráfica y la figura 5.9 donde realizamos el análisis de las representaciones sintácticas.

En la figura 5.8 la maestra realizó representaciones pictóricas para mostrar la interpretación y resolución que ella hizo del problema de factor escalar, cuando terminó de resolver el problema le solicitamos nos mencionara sus procedimientos, ella comenzó “...como dice  $2\frac{1}{2}$  veces más grande que la medida original, yo les pregunto a los niños qué podemos hacer para resolver, y es una multiplicación”. En la representación pictórica, Rosa representa gráficamente la transformación de la figura, es decir, el aumento de medida en forma

proporcional, porque la medida de la figura original está representada  $2\frac{1}{2}$  veces en la reproducción.

Para el diseño de una invitación de fiesta infantil Aurora utilizó una imagen con las siguientes dimensiones



$\frac{3}{5}$  dm

$\frac{3}{4}$  dm

Le solicitaron que la invitación fuera  $2\frac{1}{2}$  veces más grande que las dimensiones originales (largo y ancho).

¿Qué medidas tendrá la invitación?

Alto:  $\frac{2}{5}$  dm

Original

Largo:  $\frac{3}{4}$  dm

Copia:  $2\frac{1}{2}$  o  $\frac{5}{2}$  veces más grande.

$\frac{3}{5}$		
$\frac{3}{5}$	Copia	
$\frac{3}{5}$		

**Figura 5.8.** Las representaciones pictóricas de Rosa. Adaptación de la investigadora. Inspirado en Children's Understanding of Mathematics: 11-16

Para indagar acerca de sus procedimientos continuamos con las preguntas, ¿profesora, nos puede comentar como utilizaría usted la representación gráfica que tiene? *“este, yo la uso para que los niños vean que la medida de la tarjeta tiene que crecer dos veces y media” y pueden sumar las medidas”*.

De acuerdo a las representaciones pictóricas de Rosa, es posible inferir que identifica el factor escalar y pretende asociarlo con la representación de  $n$  veces en el rectángulo de mayor magnitud (esto lo interpretamos de su representación geométrica), sin embargo, ella lo relaciona mediante la suma de fracciones.

Identificamos una forma consistente se resolución a lo largo de todos los instrumentos que ella ha presentado, en el sentido de utilizar la representación geométrica para justificar y mostrar el procedimiento que llevaría a sus estudiantes.

En la figura 5.9. mostramos el procedimiento y las evidencias sintácticas de lo realizado por Rosa, en donde podemos identificar las dos formas de resolución, *mediante suma iterada y factor escalar*.

Esto es tener dos veces el original más la mitad de éste.

Alto:

Sumando:  $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ dm}$

Multiplicando:  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ dm}$

Largo:

Sumando:  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{6+6+3}{8} = \frac{15}{8} \text{ dm} = 1.875 \text{ dm}$

Multiplicando:  $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1.875 \text{ dm}$

**Figura 5.9** El problema que implica el uso de un factor escalar y la suma reiterada.

La profesora sugiere dos formas de resolución y las presenta de manera paralela. En primera instancia vamos a analizar la suma iterada, ella utilizó la representación del rectángulo para justificar la suma, es decir que  $2\frac{1}{2}$  (ella se equivocó al anotar  $\frac{3}{5}$  en lugar de  $\frac{2}{5}$ , no mencionamos nada porque no queríamos desviar la atención de la explicación de sus procedimientos), así lo dijo *“es lo mismo que sumar dos veces la misma fracción más la mitad de ésta”*, como lo había hecho en la resolución de un problema anterior ella pasa de una representación fraccionaria a número decimal, aprovechando que la fracción corresponde a una fracción decimal en la medida que ella refiere como alto del rectángulo.

Preguntamos acerca de este procedimiento y ella agregó, *“pues, es que en este problema se puede usar una fracción equivalente porque hay denominador 10, y sumarían  $\frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{15}{10}$  y como es fracción decimal, los alumnos fácilmente la convierten a número decimal, y pueden poner 1.5 dm”*. ¿Usted privilegia algún conjunto de números? ¿Es decir, prefiere utilizar fracciones o números decimales para la resolución de problemas como éste?, *“no, en este caso, por la naturaleza de las fracciones”*.

En la operación donde se refiere al largo de la figura, es posible pensar que obtuvo *fracciones equivalentes* para sumar fracciones con denominadores iguales, ella no hace explícitos este tipo de decisiones.

Es posible inferir que ella apoya sus justificaciones del uso de algoritmo en una suma iterada, en palabras de ella *“la multiplicación de fracciones es lo mismo que sumar varias veces la misma fracción”*.

Por otra parte, Rosa utilizó el algoritmo de multiplicación, cuando hace una interpretación de factor escalar (porque no asigna unidad de medida a  $2\frac{1}{2}$ ) como alternativa de resolución, es posible notar que no es tan importante la unidad de referencia, porque solo la agrega al resultado. Es posible notar que pasa de una representación fraccionaria a una decimal, sería importante conocer si estas acciones las utiliza cuando trabaja con sus estudiantes problemas de este tipo.

Rosa es consistente con los procedimientos utilizados de manera previa en el sentido de apoyarse en recursos gráficos como el rectángulo, sin embargo, en ocasiones no logró justificar y relacionar la representación pictórica con lo que realiza mediante las representaciones numéricas.

### 5.3.2. La propuesta de resolución por parte de Carlos al problema de factor escalar

A continuación, presentamos el análisis de los procedimientos presentados por el profesor Carlos para el problema del factor escalar, en la figura 5.10. podemos ver las representaciones gráficas y numéricas realizadas por Carlos, con la consigna de pensar que estos problemas los va a presentar a sus estudiantes.

Para el diseño de una invitación de fiesta infantil Aurora utilizó una imagen con las siguientes dimensiones

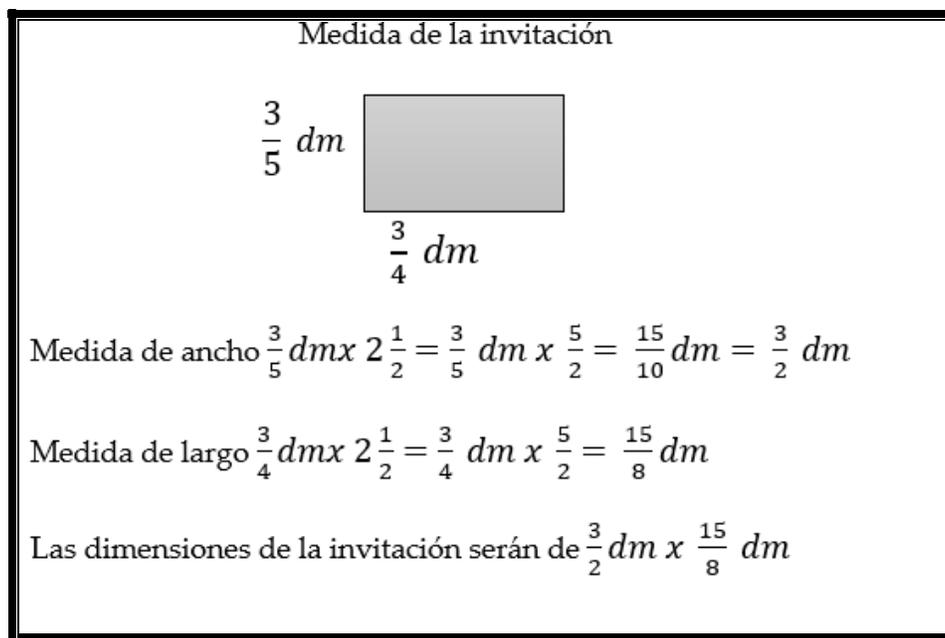


$\frac{3}{5}$  dm

$\frac{3}{4}$  dm

Le solicitaron que la invitación fuera  $2\frac{1}{2}$  veces más grande que las dimensiones originales (largo y ancho).

¿Qué medidas tendrá la invitación?



**Figura. 5.10.** El problema de factor escalar, resolución de Carlos.  
Adaptación de la investigadora. Inspirado en Children's Understanding of Mathematics: 11-16).

Para este problema del factor escalar Carlos nos presentó la siguiente propuesta de resolución, mencionó lo siguiente *“para lograr las medidas que solicita el problema es necesario utilizar una multiplicación de cada medida de la imagen original por  $2\frac{1}{2}$ , pero para multiplicar una fracción por un número mixto primero se debe convertir el número mixto a fracción impropia y así entonces es posible hacer la multiplicación, numerador por numerador y denominador por denominador, sin olvidar que se trata de decímetros”*.

Por las representaciones de Carlos es posible inferir que él otorga un sentido de factor escalar porque la imagen original va a tener un ampliación, la ampliación de la foto posiblemente la asocia a la multiplicación, por otra parte, inferimos que la interpretación que él hace tiene relación con el factor escalar, porque no le asocia una unidad de medida a  $2\frac{1}{2}$ , él hace notar que este número carece de dimensión, como ya hemos visto el maestro hace énfasis en la unidad de medida que interviene en los problemas que resuelve.

## 5.4 Los problemas multiplicativos diseñados por los profesores con experiencia en la enseñanza

La consigna para los profesores fue realizar un problema de división con los números fraccionarios  $\frac{7}{8}$  y  $\frac{3}{5}$ , ellos podían usarlos de manera indistinta, es decir sin importar qué número fraccionario designan para el dividendo y el divisor. Esto último se propició para detectar cuáles son sus reflexiones sobre la no conmutatividad de la división de fracciones.

### 5.4.1 El diseño de división realizado por Rosa

En la figura 5.11. presentamos el diseño de división con números fraccionarios presentado por Rosa

En una dulcería se venden bolsas de caramelos surtidos, cada bolsa pesa  $\frac{3}{4}$  kg, pero en la bodega solo tienen  $\frac{15}{8}$  kg. ¿Cuántas bolsas se pueden hacer?, y ¿cuánto sobra?

*El total es de  $\frac{15}{8}$  y se tiene que dividir en  $\frac{3}{4}$*

$$\text{Hacemos la división } \frac{15}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{60}{24} = 2\frac{12}{24} = 2\frac{1}{2}$$

*Para saber cuánto sobra solo debemos restar los de la fracción con números mixtos, sobra  $\frac{1}{2}$ .*

Figura 5.11. El diseño de división de Rosa.

Identificamos que el diseño del problema corresponde a un problema de división cuotativa, en donde el dividendo es mayor que el divisor, inferimos esta situación debido a que en planteamientos previos como es el caso de las Jornadas Académicas la profesora presentó la misma situación, es decir, asigna al dividendo el número mayor y al divisor el número menor. Asimismo, es posible suponer la dificultad que representa para Rosa el diseño de un problema en donde los valores son menores a la unidad.

Por otra parte, ella mostró la resolución del problema y en su propuesta de resolución identificamos la misma omisión en el sentido de utilizar la

unidad de referencia, situación que la lleva a tener una interpretación equivocada del número fraccionario resultante.

#### 5.4.2 El diseño del problema de división presentado por Carlos

Carlos presentó un problema de división ligado a los números fraccionarios, sin embargo, en los datos que involucran el problema se incorporaron números enteros.

En la figura 5.12 presentamos el diseño realizado por Carlos, es una adaptación de las paradojas de Zenón.

La liebre del cuento ha recorrido las  $\frac{3}{5}$  partes del camino pactado para su carrera contra la tortuga. Si esta última lleva  $\frac{7}{8}$  del camino,

¿Quién ganará la carrera? Si la velocidad de la liebre es tres veces la velocidad de la tortuga.

Si la distancia del camino a recorrer es de 400m. ¿Quién ganó la carrera? y ¿Cuánta distancia será la que separe a ambos corredores en el momento en que uno de los 2 cruce la meta?

A la tortuga le falta  $\frac{1}{8}$  de camino

A la liebre  $\frac{2}{5}$  de camino

Si dividimos estas cantidades  $(\frac{2}{5}) / (\frac{1}{8}) = \frac{16}{5} = 3 \frac{1}{5}$

Así  $\frac{1}{5}$  por  $\frac{1}{8} = \frac{1}{40}$

Este valor equivale a 10 metros de los 400.

Entonces gana la tortuga y la distancia que la separa de la liebre cuando cruza la meta es de 10 m.

Adaptación de las paradojas de Zenón

**Figura 5.12.** El diseño del problema de la liebre y la tortuga.

Adaptación del Profesor Carlos

De la misma forma como hemos trabajado con el diseño de Rosa, el profesor Carlos consideró pertinente presentar la solución del problema, presentó

una adaptación de las paradojas de Zenón, es decir adapta los personajes a su diseño del problema e incluye números fraccionarios y naturales.

En torno a la resolución que él sugiere identificamos que es posible utilizar la comparación de fracciones, y el producto de medidas, la propuesta de Carlos implica varias operaciones como la resta, multiplicación y división.

Inferimos que el sugiere dividir utilizando la división cuotativa, es decir, saber cuántas veces cabe una distancia (las distancias restantes) en otra, para ello sugiere dividir  $\frac{2}{5} \div \frac{1}{8}$ , cuando preguntamos por la forma de resolver la división que presentó, el mencionó que los estudiantes pueden utilizar el arreglo particular que él sugiere o bien los productos cruzados, en sus registros no dejó evidencia de este tipo de resolución en el diseño de su problema, sin embargo, lo hizo de manera verbal.

Es posible inferir que Carlos asume aspectos de la división como sucedió con Rosa, en el sentido de que el número mayor se asocia con el dividendo y el número menor con el divisor. Por otra parte, con el resultado que obtiene de la división con números fraccionarios  $3\frac{1}{5}$  que de manera implícita asigna un significado de factor escalar. Le preguntamos el significado de este resultado, y el mencionó lo siguiente *“los tres enteros corresponden al número de veces que es más rápida la liebre, porque cabe tres veces y una quinta parte más la distancia que tendrá la tortuga con respecto a la liebre en la llegada, así sabemos que la liebre es tres veces más rápida que la tortuga, entonces  $\frac{1}{5}$  corresponde a la distancia que habrá entre la llegada de la tortuga con respecto a la liebre, por eso digo que  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{40}$ , así sabemos que este valor equivale a 10 metros de los 400 metros”*.

Por la respuesta del profesor identificamos que el cociente es interpretado como el número de veces que es más rápida la liebre en el recorrido de la tortuga, y determina mediante la multiplicación cuánto es una cantidad de otra, es decir, a cuánto corresponde  $1/40$  de 400 m.

Es posible pensar que Carlos promueve la verificación y análisis de resultados durante la resolución de problemas multiplicativos durante su enseñanza en la escuela secundaria.

## **5. 5 Los procesos cognitivos de los maestros**

A continuación, con fines de análisis haremos un comparativo acerca de la formación profesional, la experiencia y los procesos de resolución y diseño de problemas multiplicativos presentados por Rosa y Carlos. Es importante recordar que consideramos *procesos cognitivos a todas aquellas representaciones, procedimientos, verbalizaciones y reflexiones que realicen los profesores.*

### **5.5.1 El contraste del proceso de formación profesional de Rosa y Carlos y su experiencia de enseñanza**

En contraste con Rosa y lo que se refiere a su formación, ambos maestros se formaron en el plan de estudios de 1988 para escuelas normales, en donde el programa estaba organizado en un tronco común y un diferencial para cada especialización.

Es posible suponer que Carlos tiene ya una historia de autorreflexión que le ha permitido gestionar su propia formación académica y continua, a diferencia de Rosa, quien manifiesta confianza en torno a los documentos como el programa de estudios y material de apoyo, libros de texto, cursos proporcionados por la Secretaría de Educación Pública. Ella ha identificado dificultades en torno a la enseñanza y ante la propuesta generada por un curso de la SEP, identificó otra forma de explicar la operación de números fraccionarios como la multiplicación a partir de representaciones geométricas.

Rosa y Carlos apoyan sus decisiones pedagógicas en su experiencia docente, en este caso, ellos han identificado errores conceptuales o de interpretación por parte de los estudiantes, y ponen en práctica estrategias que les permitan resolver dichas dificultades, por ejemplo: en el caso de la división de

números fraccionarios utilizan un arreglo particular para la división, con la finalidad de facilitar y hacer que el estudiante comprenda el procedimiento para dividir fracciones.

Rosa y Carlos manifestaron de forma explícita la dificultad que representan las definiciones poco precisas en torno a los números fraccionarios y sus representaciones, sin embargo, Carlos fue contundente en torno a los conceptos y fue consistente con la resolución de los problemas.

### **5.5.2 Los hallazgos en torno a los núcleos de significación y procesos cognitivos durante la resolución y diseños de los problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios presentados por Rosa y Carlos**

A continuación, mencionamos los conocimientos matemáticos presentes, así como Procesos Cognitivos durante la resolución y diseño de tareas relacionadas con los problemas multiplicativos, resaltamos lo que consideramos relevante para la investigación.

Para los problemas de multiplicación identificamos uso de representaciones pictóricas, tanto como la asignación de representaciones concretas a las fracciones como números.

Observamos la representación geométrica como un medio para significar la operación de la multiplicación, sin embargo, la división está fundamentalmente sustentada en el algoritmo, por la dificultad que representa una representación concreta del problema.

De manera implícita, Carlos asume el significado de factor escalar, lo anterior apoyado en la importancia que otorga a la unidad de medida como referencia para proporcionar e interpretar el resultado del problema.

Otra interpretación asociada a la multiplicación es la suma iterada presentada por Rosa, sin embargo, no explicita la forma en que el estudiante puede discernir entre utilizar una suma iterada y un factor escalar, dado que

no siempre es posible resolver una multiplicación de fracciones mediante una suma iterada.

En relación con los algoritmos de división identificamos el producto cruzado, y el producto por el inverso del divisor (este procedimiento no es considerado por los profesores como una alternativa para resolver este tipo de problemas). Podemos pensar que esta decisión está fundada en la necesidad de facilitar los contenidos relacionados con la división con fracciones a los estudiantes.

Es posible suponer que ambos profesores asocian el número mayor con el dividendo y el número menor con el divisor, situación reportada en investigaciones como la de Fischbein, 1985.

El trabajo con maestros en ejercicio fue concebido como un espacio de construcción de conocimiento por parte de los docentes a través del diálogo, durante las entrevistas y las Jornadas Académicas así como un medio para identificar los procesos cognitivos de los maestros de secundaria en la materia de Matemáticas durante sesiones de trabajo colectivo e individual, en donde intervinieron los conocimientos, la experiencia y la reflexión sobre la enseñanza y diseño de tareas para la clase de Matemáticas con el tema de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

En el siguiente capítulo en síntesis presentamos un análisis global de los instrumentos utilizados durante el desarrollo de esta investigación, es decir, el análisis de los datos obtenidos la entrevista inicial realizada con la profesora Rosa (se realizó en tres partes), las seis sesiones de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas y las dos entrevistas durante la fase final de la investigación que aplicamos de manera individual (una a la profesora Rosa que se realizó en dos partes y una al profesor Carlos).

## **CAPÍTULO 6**

---

### **ANÁLISIS FINAL DE LOS DATOS**

En este capítulo presentamos un análisis global de los resultados obtenidos durante el desarrollo de esta investigación, es decir, el análisis de los datos obtenidos de la entrevista inicial realizada con la profesora Rosa, las seis sesiones de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas y las dos entrevistas aplicadas de manera individual (una a la profesora Rosa y una al profesor Carlos). La información que obtuvimos de la aplicación de estos instrumentos nos va a permitir dar respuesta a las preguntas planteadas para este estudio.

El trabajo con maestros en ejercicio fue concebido como un espacio académico de construcción de conocimiento y reflexión por parte de los docentes a través del diálogo de los docentes con la investigadora y entre pares. Las Jornadas Académicas no corresponden a un curso, seminario o taller de capacitación de profesores, nuestro interés estuvo centrado en la expresión oral y escrita de las ideas y conocimientos específicos del tema de

multiplicación y división con números fraccionarios en un ambiente de colaboración y debate por parte de los profesores de Matemáticas.

Consideramos las entrevistas y las Jornadas Académicas como un medio para identificar los procesos cognitivos de los maestros de secundaria en la materia de Matemáticas durante sesiones de trabajo colectivo e individual, en donde intervinieron los conocimientos, la experiencia y la reflexión sobre la enseñanza y diseño de tareas para la clase de Matemáticas con el tema de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

Relacionado con los instrumentos que aplicamos durante la investigación y los datos obtenidos de dichos materiales a continuación presentamos el análisis final de acuerdo a los diferentes momentos de aplicación de los instrumentos. Resaltaremos aquellos datos que aportan evidencia de los significados y sentidos otorgados por parte de los docentes durante el desarrollo de los procedimientos de resolución y diseño de tareas ya sea de manera escrita o verbal, además de identificar los procesos cognitivos de los profesores con experiencia.

Cuando hablamos de *procesos cognitivos* por parte de los docentes nos referimos a los antecedentes, pensamientos, lenguaje verbal, las diversas representaciones que el docente posee para enseñar contenidos relacionados con la multiplicación y división, en un ámbito de resolución de problemas que involucran a los números fraccionarios. Por otra parte, los *procesos cognitivos* de los profesores implican las representaciones que utilizan los maestros, los procedimientos que surgen, así como los significados que se atribuyen a las representaciones utilizadas, cómo son justificados los procedimientos de resolución, así como la reflexión que hace cada maestro de su propia práctica y sus diseños.

Es importante mencionar que estamos interesados en lo que se refiere al contenido matemático para la enseñanza, lo consideramos porque nos va a permitir identificar los conocimientos del profesor acerca de la materia que

enseña a través de problemas multiplicativos que implican a los números fraccionarios y sus operaciones.

El conocimiento de contenido de la materia en este trabajo lo consideramos como conocimiento de las matemáticas escolares que se refieren específicamente a los números fraccionarios y las operaciones de multiplicación y división, en donde están considerados los conocimientos relacionados con lo pedagógico y didáctico además de la reflexión por parte del profesor como medio de mejora de su propia práctica docente.

En las siguientes secciones presentaremos los pilares que hemos reconocido y que sostienen los aspectos básicos del análisis de esta investigación.

## **6.1 El modelo de análisis**

Antes de entrar al análisis integral de los resultados vamos a señalar las bases fundamentales que nos permitieron identificar los *Procesos Cognitivos* de los profesores de matemáticas.

Para identificar los conocimientos que emergen durante el desarrollo de las actividades programadas durante esta investigación presentamos un modelo de análisis apoyado en las investigaciones de Valdemoros (1993) y Valdemoros et al. (2015, 2017).

Este modelo de análisis nos permitió observar, identificar e interpretar aspectos de la práctica educativa del docente desde tres ángulos, es decir, durante la resolución del problema, el diseño de problemas y la reflexión de manera individual y colectiva sobre su propia práctica docente.

A continuación, presentamos los aspectos centrales en el modelo de análisis.

### **6.1.1 En el plano semántico de la división y la multiplicación**

Pretendemos identificar los significados asociados a la multiplicación y división con números fraccionarios durante la resolución de problemas multiplicativos. A continuación, ampliamos lo que mencionamos anteriormente.

### *Significados de la multiplicación*

En la semántica de la multiplicación nos referimos al significado parte-parte Piaget et al. (1960) y Valdemoros et al. (2015, 2017).

El producto de medidas, Vergnaud (1983, 1991); Valdemoros et al. (2015, 2017).

### *Los significados de la división*

Identificamos el *cociente de cocientes* significado general y básico que emerge de esta tesis.

*El inverso del producto de medidas* como número racional Valdemoros et al. (2015, 2017).

La *división cuotativa*. Fischbein (1985) y Ramírez (2012) en donde el significado se refiere a ¿Cuánto cabe  $\frac{a}{b}$  en  $\frac{c}{d}$ ?

#### **6.1.2 El plano sintáctico de la multiplicación y la división**

Las representaciones asociadas a los procedimientos y algoritmos que surgen durante la resolución de problemas, tanto como las reglas sintácticas que se aplican.

#### **6.1.3 En el plano de la traducción de un lenguaje a otro**

Consideraremos las expresiones con contenido Matemático y que son reiteradas a lo largo de la experiencia, la traducción del lenguaje matemático al lenguaje verbal como un medio de transmisión de conocimiento.

#### **6.1.4 En el plano pragmático**

Nos interesa identificar los enunciados con contenido matemático, los significados que se asignan, así como la interpretación de esos significados durante la resolución de problemas multiplicativos, para esta investigación consideramos relevantes las aportaciones de Valdemoros et al. (2015) porque se refieren a “los núcleos de significación y pensamiento” en donde

consideran la importancia del contenido de los enunciados cargados de sentido y significado.

Para identificar los contenidos matemáticos que emergen durante la resolución y diseño de problemas multiplicativos ligados a las fracciones nos apoyamos en las aportaciones realizadas por Kieren (1983) y que se refieren a subconstructos con cuatro significados: medida, cociente, razón operador multiplicativo y la relación parte-todo.

## **6.2 Análisis de los fundamentos teóricos**

Por otra parte, consideramos a Vergnaud (1983) porque sus aportaciones están orientadas a la comprensión de cómo se adquieren y desarrollan los conocimientos a partir de los problemas multiplicativos mediante la definición de los campos conceptuales como un “conjunto de problemas y situaciones para el tratamiento de conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos, pero estrechamente interconectados” (p. 127). En este sentido, hemos tomado como elemento para el análisis de esta investigación lo que a continuación mencionamos.

### **6.2.1 El producto de medidas**

Consiste en una relación de tres cantidades, donde una es el producto de otras dos en un contexto numérico y en un plano dimensional (Vergnaud, 1991), para la multiplicación encontrar la medida del producto cuando se conocen las medidas elementales, y para la división cuando es necesario encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y la medida del producto.

### **6.2.2 El isomorfismo de medidas**

Es considerada “una estructura que se refiere a una proporción directa simple entre dos espacios de medida  $M_1$  y  $M_2$ ” (Vergnaud, 1991, p. 129) y que permite representar situaciones de la vida diaria.

Asimismo, la relación multiplicativa se refiere a “una relación-cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de cierto tipo” (Ibidem, p. 197).

En esta categoría se identifican cuatro subclases de problemas:

*Multiplicación:* donde se tiene una relación de cuatro términos, y donde los datos son operados como números y magnitudes, se puede usar un operador escala  $r$ .

*La división de primer tipo:* consiste en encontrar un valor unitario.

*División de segundo tipo:* consiste en encontrar  $x$  y conocer  $f(x)$  y  $f(1)$ , estos problemas en la mayoría de los casos se resuelven a través de invertir el operador.

*La regla de tres:* estos problemas se resuelven mediante diferentes procedimientos, usando propiedades de la relación de cuatro términos.

Los planteamientos de Vergnaud forman parte fundamental para el análisis de esta investigación debido a que están considerados como parte de los contenidos del programa de estudios para la educación secundaria.

Por otra parte, también consideramos los modelos de división presentados por Fischbein (1985), la división como partición y la división como medida, lo anterior debido a la relevancia que tienen dentro de los procesos de resolución de problemas multiplicativos.

Pretendemos identificar aspectos relacionados con los procedimientos de resolución, así como el significado que se otorga a la interpretación de los datos del problema. Para lograr lo anterior consideramos aportaciones como lo que a continuación se menciona.

### **6.2.3 Inverso multiplicativo del producto o el inverso multiplicativo del producto de medidas**

Valdemoros et al. (2015, 2017) en este caso se refiere a situaciones de división donde dada el área de un rectángulo y un lado se puede utilizar la operación inversa de la multiplicación para encontrar el valor del lado faltante,

permitiendo que derive de esa operación el inverso del producto de medidas como un número racional, esto es, con el alcance semántico de cociente de cocientes consolidado a través de la división entre fracciones.

**El cociente:** se refiere a los problemas donde identificamos la subdivisión y conservación del todo, la subdivisión se refiere a partes equivalentes.

### **6.3 Análisis del diseño y resolución de problemas**

Lo que a continuación presentamos se refiere al diseño y resolución de problemas durante la aplicación de los instrumentos diseñados para esta investigación.

Pretendemos señalar contenidos que están presentes durante estas actividades, para ello, hemos considerado identificar en la resolución de problemas los siguientes aspectos.

#### **6.3.1 Resolución de problemas**

Las representaciones, los algoritmos utilizados para resolver las tareas, y los esquemas utilizados por los profesores para la interpretación de los problemas.

En el diseño hemos considerado las situaciones que presentan los enunciados, las estructuras multiplicativas involucradas y los modelos de división que implican, los posibles métodos de resolución, reglas y algoritmos que propician la resolución de dichos enunciados.

#### **6.3.2 El diseño de los problemas**

Para el diseño de problemas por parte de los profesores de Matemáticas queremos identificar la estructura del problema, los algoritmos y procedimientos sugeridos para la resolución, las representaciones usadas tales como figuras geométricas y numéricas.

#### **6.3.3 La reflexión que hacen los docentes de su propia práctica**

Por otra parte, en lo relacionado con la práctica de enseñanza por parte de los docentes consideramos las siguientes categorías:

**Conflicto cognitivo de enseñanza:** se refiere a los conocimientos y las explicaciones que surgen para sustentar los procedimientos que utiliza el profesor cuando expresa de manera oral las razones para la toma de decisiones al momento de resolver las tareas.

Lo anterior se presenta cuando los medios que utiliza el maestro para explicar el procedimiento para la resolución de un problema no le permiten dar las razones matemáticas suficientes para respaldar lo que realiza, o en su caso la ausencia de conocimientos de contenido matemático que le permitan mostrar las relaciones de multiplicación para resolver problemas, ante esta situación los docentes pueden utilizar una nueva estrategia de resolución sin estar apoyados en contenidos matemáticos.

**Patrones de enseñanza:** Nos referimos a repeticiones o modos sistemáticos durante la práctica de la enseñanza, que implican formas específicas de justificar los hechos matemáticos apoyados en el uso de definiciones correctas o incorrectas o que no están apoyadas en contenidos matemáticos relacionados con los números fraccionarios y sus operaciones.

## 6.4 Análisis de las entrevistas

El modelo de análisis que hemos mencionado nos permitió identificar los conocimientos matemáticos presentes que los profesores tienen en correspondencia con los problemas multiplicativos relacionados a las fracciones. Lo que queremos identificar en los procesos cognitivos de los profesores durante la resolución, el diseño de problemas es lo que a continuación se menciona:

- Los constructos aportados por Kieren (1985) y que se refieren a la relación parte-todo, el operador, la razón, la medida y el cociente.
- Identificar la estructura de los problemas que diseña el docente con base en las estructuras multiplicativas aportadas por Vergnaud (1983).
- Identificar los algoritmos que intervienen durante la resolución de los problemas por parte del profesor. Las representaciones que surgen para

modelar los problemas presentados y los diseños propuestos por los docentes.

Durante el diálogo sostenido con los profesores pudimos identificar los núcleos de significación y pensamientos emitidos por ellos, las formas de justificación si es que justifican sus problemas, además de aspectos relacionados con su preparación profesional y su experiencia docente.

Queremos identificar las relaciones que se establecen entre las representaciones numéricas o arreglos para las operaciones y las representaciones y los significados que se asignan a dichas representaciones ya sea de manera implícita o explícita.

#### **6.4.1 La entrevista inicial a Rosa**

A continuación, haremos el análisis de la expresión de sus ideas y pensamientos, la interpretación de los contenidos sintácticos y semióticos a través de las estrategias que ella manifestó para definir las actividades relacionadas con el diseño y resolución de problemas.

En la parte final del análisis de las entrevistas de Rosa y Carlos vamos contrastar los datos con los procedimientos y diseños presentados por Carlos.

##### **6.4.1.a Resolución problemas efectuada por Rosa**

###### ***El problema del producto de medidas***

En el análisis de la resolución del problema del producto de medidas identificamos que Rosa establece relaciones entre las cantidades que intervienen en el enunciado del problema, la representación geométrica y la operación que interviene para resolver la situación.

Observamos conocimientos relacionados a los números fraccionarios como la idea de equipartición en las representaciones geométricas, es decir, representa parte iguales para indicar los datos del problema y para asignar

significado a los números fraccionarios. En este sentido identificamos la presencia de los constructos parte-todo y medida.

En el plano de las representaciones que expresó Rosa es posible inferir que le permiten relacionar lo que sucede a nivel de las operaciones, utilizó el doble sombreado para indicar la intersección de las partes, y con ello relacionar el procedimiento para resolver el problema y justificar el resultado de la operación.

El algoritmo presente en la resolución del problema hace referencia a multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador. Identificamos que la profesora estableció una relación entre lo semántico y lo sintáctico para que surja el sentido de la operación.

Las representaciones propuestas por la profesora están alojadas en el nivel semántico porque en la fracción que obtiene como respuesta ella asocia el número del denominador con el total de partes en que se dividió la figura y el numerador esté asociado con las partes de doble sombreado, con base en esta relación del uso del algoritmo y la representación geométrica la docente justifica la multiplicación de fracciones sin enfocarse únicamente en aspectos sintácticos.

Suponemos que en el plano sintáctico están apoyados aquellos contenidos que sugieren conflictos cognitivos de enseñanza, es decir, conceptos y contenidos para los cuáles ella no hace propuestas explícitas para justificar los procedimientos. Lo anterior debido a que la docente sólo utilizaba el algoritmo para resolver los problemas multiplicativos ligados a las fracciones durante su clase.

### ***El problema de división con números fraccionarios***

El análisis de las acciones de la maestra nos permitió identificar aspectos semánticos y sintácticos como el uso de la recta numérica porque tenía la intención de representar cuantas veces cabe un a fracción en otra, mediante la suma iterada.

En este problema es posible observar lo que denominamos conflicto cognitivo, porque intentó varias formas de resolución del problema mediante representaciones, utilizó como alternativa las composiciones numéricas para interpretar el problema.

Identificamos que la maestra fue reflexionando sobre sus propios procedimientos para validar sus estrategias de resolución, finalmente sus decisiones se alojaron en el uso del algoritmo.

Observamos conocimientos implícitos del concepto de fracción, caracterización de la unidad en un contexto continuo, la idea de partición y división cuotativa.

Observamos la presencia del algoritmo de la división a través de multiplicar por la fracción inversa del divisor, procedimientos que implican números naturales con la finalidad de extender este procedimiento a los números fraccionarios.

Documentamos un procedimiento que implica una variación de multiplicar medios y extremos en una composición numérica particular, como procedimiento alternativo para hacer la división con fracciones.

Rosa hizo evidente el uso de modelos lineales, geométricos y representaciones numéricas para dar significado al producto de medidas, la partición y la división cuotativa con números fraccionarios.

### ***El problema del inverso multiplicativo del producto de fracciones (relación parte-todo)***

En la resolución de este problema identificamos el uso de representaciones geométricas para modelar el problema, por parte de Rosa.

El problema corresponde a la estructura del producto de medidas, la profesora dejó evidencia de resolución mediante la inversión de un factor en la multiplicación.

Es posible suponer la importancia que representa para Rosa la comprensión de la operación y con esta finalidad utilizó representaciones geométricas y composiciones numéricas que incluyen números naturales y fraccionarios, sin embargo, para esta investigación no será posible corroborar la comprensión de los estudiantes, sólo conocer la propuesta pedagógica de la profesora y la modalidad de resolución de problemas que ella adopta. Es posible señalar que a pesar de la importancia que Rosa otorga a la comprensión de las operaciones, con los diseños y formas de resolución no logra este objetivo, posiblemente por la presencia de errores conceptuales, y lo que en este estudio nombramos como *conflictos cognitivos* de enseñanza porque la profesora no logra proponer una explicación que permita la comprensión de las operaciones. Ella sugiere un tratamiento algorítmico para resolver el problema.

Como parte de análisis, identificamos la ausencia de significado en las unidades de medida, a lo largo de la resolución dejaron de ser consideradas para enfocarse únicamente a la composición numérica y la aplicación del algoritmo de división relacionado a la variante de producto de medios y extremos.

### *El problema del valor faltante*

Es posible observar conocimientos relacionados con contenidos de geometría como las fórmulas del área, y son utilizados como medio para dar significado a la operación de multiplicación de números fraccionarios.

Identificamos que el problema está interpretado como una situación de valor faltante, utiliza un método de resolución mediante un arreglo lineal y se resolvió mediante la inversión de la multiplicación. El algoritmo utilizado en la resolución de este problema fue con el producto cruzado para dividir fracciones.

### **6.4.2 Las representaciones de Rosa**

Mediante el diálogo sostenido con la docente durante la entrevista, ella manifestó ideas acerca de las representaciones pictóricas y numéricas que utiliza, porque de acuerdo a su experiencia, dichas representaciones le permiten mostrar lo que ocurre a nivel de números y sus operaciones, lo pudimos constatar durante la resolución de problemas. La profesora resuelve las tareas mediante la modelación de los problemas apoyándose en representaciones geométricas, en este caso el rectángulo.

Por otra parte, ella utiliza la recta numérica para mostrar de manera incipiente una suma iterada o bien para indicar cuántas veces cabe una cantidad en otra, como es el caso de la resolución de la división, posiblemente vinculando con la suma y resta repetida.

### **6.4.3 La reflexión de su práctica docente**

Identificamos cómo Rosa, mediante la reflexión sobre su experiencia docente, mencionó limitaciones relacionadas con la enseñanza de temas que implican los números fraccionarios y las operaciones como la división y multiplicación en una situación de problemas.

Por otra parte, es consciente de promover la mecanización y el uso de algoritmos ante la ausencia de recursos para otorgar significados a las operaciones multiplicativas con números fraccionarios.

Mediante el diálogo Rosa toma conciencia de que mediante su experiencia ella ha ido fortaleciendo el uso de los algoritmos por encima de los significados de las relaciones multiplicativas.

De acuerdo con lo que Rosa manifestó, nosotros identificamos que sus propuestas de problemas están limitados a la división, donde asigna el número mayor al dividendo y el número menor al divisor, así como situaciones donde no hace énfasis a la naturaleza del producto, cuando se trata de la multiplicación de cocientes, es decir, situaciones donde no

siempre se obtiene un número mayor cuando se multiplican dos números fraccionarios (Fischbein, 1985).

## **6.5 La resolución de problemas de Rosa y Carlos**

En lo que sigue, mencionaremos los hallazgos identificados en el comparativo de resolución de problemas de Rosa y Carlos durante dos entrevistas, una a cada uno, esta actividad se realizó en momento posterior a las Jornadas Académicas.

Para Rosa, durante la resolución de los problemas, observamos que ella utilizó la conversión a números decimales para evitar el uso de fracciones, y esta situación permitió la reflexión por parte de Rosa acerca de que al convertir a número decimal podía obtener números decimales infinitos, situación que le dificultaría la representación gráfica, hasta ahora la profesora utilizó figuras geométricas para mostrar en un plano de dos dimensiones lo que sucede cuando opera con números fraccionarios. Sin embargo, es posible suponer que en ocasiones la maestra prefiere sustituir al número fraccionario por uno decimal con la finalidad de facilitar la resolución del problema.

Es posible suponer que Rosa prefiere la resolución de problemas multiplicativos mediante los números decimales sobre los números fraccionarios, inferimos lo anterior porque de acuerdo a su experiencia docente ella anticipa dificultades de aprendizaje por parte de los estudiantes, y para resolver esa situación, ella pretende facilitar los contenidos para los alumnos, incluso relacionar temas como es el caso de la conversión de fracciones decimales y números fraccionarios.

Identificamos que en los procedimientos utilizados por Carlos están implícitas decisiones didácticas tales como apoyarse en las composiciones verbales para promover la comprensión, tal es el caso de mencionar extremos por extremos y medios por medios, y que deja de lado el algoritmo

relacionado con el inverso del divisor porque de acuerdo con su experiencia prefiere evitar errores comunes.

Para los problemas de multiplicación identificamos el uso de representaciones pictóricas, la asignación de representaciones concretas para la fracción por parte de Carlos, en este caso están vinculadas con representaciones geométricas como el círculo o el rectángulo, asignando mayor importancia a las que mostró a través del rectángulo debido a la situación del problema.

Observamos que la representación geométrica utilizada por Rosa y Carlos es utilizada como un medio para dar sentido a la operación de la multiplicación, sin embargo, la división está sustentada en el algoritmo, por la dificultad que representa una representación concreta del problema. En relación con los algoritmos de división identificamos el producto cruzado, el producto por el inverso del divisor.

En el caso de Rosa y Carlos, identificamos que su experiencia les ha permitido reconocer errores conceptuales en los estudiantes y con base en estos hallazgos ellos toman decisiones didácticas, Carlos considera necesario enfatizar aquellos contenidos matemáticos que le permiten establecer definiciones y con base en ellas fundamentar los contenidos conceptuales de su discurso durante la enseñanza, lo que de acuerdo a su experiencia le ha permitido evitar errores conceptuales en los estudiantes. Para Rosa es posible suponer que aún no ha establecido una estrategia que le permita resolver las dificultades de sus estudiantes.

Es posible identificar que Rosa no asigna importancia a la unidad de referencia, esta situación lleva a la maestra a no poder discernir la naturaleza de la unidad de medida en las respuestas de los problemas. Por el contrario, Carlos en todo momento de la resolución del problema no pierde de vista la unidad de referencia, situación que lo lleva a discernir con certeza la solución de los problemas.

Es posible identificar que el profesor tiene bien definida la idea de unidad y la unidad de referencia, por otra parte, la resolución de problemas no está centrada en el uso del algoritmo de la división de fracciones, apoya su discurso y sus procedimientos en conceptos como las fracciones equivalentes, y el análisis de los resultados, además de la comprobación de los mismos.

Es posible inferir que Rosa identifica el factor escalar y pretende asociarlo con la representación geométrica de un rectángulo, situación que no le permite justificar sus procedimientos.

Identificamos una forma consistente de resolución a lo largo de todos los instrumentos que Rosa ha resuelto, en el sentido de utilizar la representación geométrica para justificar y mostrar el procedimiento a sus estudiantes.

Por otra parte, Rosa apoya sus justificaciones del uso de algoritmo en una suma iterada, porque en palabras de ella, le permite mostrar que la multiplicación de fracciones es lo mismo que sumar varias veces la misma fracción más la fracción de una fracción.

Por las representaciones de Carlos es posible inferir que él otorga un sentido de factor escalar a la ampliación de la foto, porque hace notar que este número carece de dimensión, como ya hemos visto, este maestro hace énfasis en la unidad de medida que interviene en los problemas que resuelve.

## **6.6 Las Jornadas Académicas**

Las Jornadas Académicas con profesores de Matemáticas las consideramos como un medio para obtener datos empíricos de la práctica docente de los profesores, porque mediante la explicitación de los pensamientos de los maestros es posible desarrollar discusiones en torno a las ideas matemáticas que expresan con base en sus conocimientos formales y la experiencia durante la enseñanza. En las *Jornadas Académicas* se promovió la reflexión con base en las intervenciones de los maestros de manera individual,

mediante el diálogo con la investigadora, y de manera colectiva. La investigadora tuvo el de coordinar cada una de las seis sesiones.

En el diseño de este instrumento contemplamos el análisis, la resolución y diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios, así como la reflexión sobre las ideas propias y la de sus colegas.

### **6.6.1 El análisis de los problemas durante las Jornadas Académicas**

La intención de analizar los problemas consistió en promover la discusión en torno a los procedimientos y significados de las operaciones de los problemas, así como los procedimientos de resolución, reflexionamos acerca de los contenidos matemáticos expresados en los procesos de resolución.

La intención de presentar problemas y que ellos analizaran la estructura consistió en conocer la propuesta de resolución y la justificación de sus procedimientos, específicamente los que se refieren a los algoritmos de las operaciones, en este caso fue posible indagar acerca del uso de los números fraccionarios.

A través del desarrollo de las sesiones de trabajo colectivo también solicitamos el diseño de problemas para conocer la estructura del planteamiento que ellos ofrecían, además de los conocimientos relacionados con los números fraccionarios que ellos hacían evidentes en sus diseños.

Solicitamos que a partir de dos fracciones los profesores presentaran un problema, mostrando y justificando la forma de resolverlo, con esta actividad pretendíamos identificar las dificultades de los profesores (si es que las hay) ante el diseño de problemas y el porqué. Orientamos el momento para que los docentes comentaran acerca de las dificultades que ellos encuentran en la enseñanza de problemas multiplicativos, además de las dificultades de los estudiantes.

A continuación, presentamos las categorías identificadas de acuerdo a los diseños presentados por los profesores de Matemáticas que participaron en las Jornadas Académicas.

- Diseño de problemas con el planteamiento de situaciones forzadas, es decir, que no corresponden con la realidad y con dificultades de sintaxis.
- Diseño de situaciones que no corresponden a problemas multiplicativos con fracciones.
- Diseño de problemas con recursos gráficos que en su mayoría hacen referencia a representaciones geométricas, y al todo continuo y discreto.

En lo que se refiere a la resolución de problemas hemos identificado categorías derivadas de los procesos de resolución presentados por los docentes, en lo que sigue mencionaremos dichas categorías.

- Uso de recursos gráficos para justificar los procedimientos.
- Resolución de problemas apoyados en errores conceptuales.
- Uso preponderante del algoritmo para la resolución de los problemas, en este caso observamos la tendencia de apoyar sus procedimientos en representaciones sintácticas y representaciones particulares que impiden la comprensión de las operaciones al resolver problemas.

De acuerdo con los contenidos semánticos y sintácticos, a continuación, presentamos el análisis de los datos obtenidos durante el desarrollo de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas con experiencia en la Enseñanza de Problemas Multiplicativos.

- Identificamos conocimientos mostrados por parte de los docentes que nos hace suponer que la partición está asociada a la división. Asimismo, es posible inferir que los maestros no tienen bien definido y no dan importancia al concepto de unidad.

En lo que se refiere a las operaciones, para el caso de la multiplicación realizan el producto de cocientes, sin embargo, cuando se presentan

situaciones como el factor escalar pueden resolver sin reparar o hacer observaciones acerca de este tipo de problemas. En la resolución de problemas de multiplicación intervienen números decimales sin justificar las decisiones que los orientan a realizar el cambio del conjunto de números fraccionarios a los decimales numérico.

Para la división, identificamos dificultades para mostrar justificaciones que permitan dar sentido a la operación de cociente de cocientes, debido a que se enfocan al uso de reglas para que los alumnos las memoricen.

Relacionado con los patrones de enseñanza identificamos el valor preponderante asignado a la representación gráfica de los problemas como un medio de análisis, comprensión y justificación de sus procedimientos, es decir, cuando los profesores tenían que resolver un problema que implicaba una división, trataban de promover la identificación de la operación mediante recursos gráficos como las figuras geométricas (rectángulo), sin embargo, en la mayoría de los casos, las situaciones que presentaron los docentes no les permitió el proceso de resolución de la división o bien mostrar la posibilidad de pasar de la división a su operación inversa. Identificamos la relación que establecen con palabras clave del enunciado y las operaciones que se pueden realizar para resolverlo. Es posible inferir la prioridad que asignan a la resolución y uso de operaciones, posiblemente de manera inconsciente, sólo Rosa lo menciona de manera explícita.

Por otra parte, durante las actividades colectivas fue posible conocer los *conflictos cognitivos* relacionados con la enseñanza, cuando manifestaron la dificultad de pasar de una representación gráfica a un contenido abstracto, es decir, pasar de la representación gráfica a resolver una operación.

Los conocimientos identificados durante el diálogo se refieren a la tendencia de los maestros a asociar la partición con la división de números naturales, y conceptos como la reducción y el uso de fracciones equivalentes.

De acuerdo a lo que se refieren a las falacias relacionadas con las fracciones y la unidad, identificamos *conflictos cognitivos* que enfrentan los docentes, los patrones de enseñanza y los conocimientos implícitos en el diálogo. Los instrumentos aplicados en esta investigación nos permitieron identificar lo anterior, es decir, durante el diálogo sostenido con la profesora Rosa, notamos que ella es consciente de dificultades de enseñanza en torno a los contenidos con números fraccionarios. Por otra parte, durante el análisis resolución y diseño de los problemas, los profesores se dieron cuenta de las dificultades que les generó resolver las tareas, reflexionaron de manera colectiva y esto les permitió tomar conciencia de las áreas de oportunidad que tenían en torno al este contenido.

Durante la reflexión con los profesores es posible suponer dificultades que ellos han identificado través de su experiencia en la enseñanza de las fracciones y las operaciones de multiplicación y división, sin que haya una propuesta bien definida por parte de ellos para resolver esta situación.

Los docentes sugieren que la parte se convierte en el todo para volver a ser dividida, utilizan lo anterior para justificar la división de una fracción y un número entero.

Identificamos errores vinculados con el concepto de fracción, cuando un profesor menciona representaciones como “1.5/6”, esta situación sugiere una falacia por parte de los docentes y que posiblemente este fundamentado en su experiencia de enseñanza, sin embargo, sólo una profesora expresa la forma en que puede resolver dicha situación durante la clase, es decir, Marina fue muy clara al mencionar que no es posible representar un número decimal como numerador o denominador de una fracción porque no cumple con la definición de fracción.

Es posible identificar que los maestros son conscientes de las dificultades que representa para los profesores explicar la conservación de la unidad. En este sentido Rosa sólo sugiere el conflicto cognitivo para los estudiantes, sin

asumir que dicha dificultad tiene su origen en la enseñanza que ellos promueven.

Cuando una docente menciona la falta de recursos para poder explicitar a los estudiantes cómo puede relacionar una representación gráfica, en este caso a través de figuras geométricas como el rectángulo, con una expresión numérica, es posible suponer que las representaciones son consideradas como un medio para asignar significado a las operaciones, situación que se presenta cuando se trata de dar sentido a la división con fracciones. Sin embargo, ante la ausencia de poder representar la división mediante particiones y relacionarla con la operación de división, implica para ella un *conflicto cognitivo* de enseñanza.

Como patrón de enseñanza identificamos el uso de las representaciones a través de figuras geométricas para promover la comprensión, solución y validación de la resolución de problemas multiplicativos. Otro aspecto es la asociación de palabras clave para determinar la operación que se va a utilizar para dar respuesta a la situación que se plantea.

Los conocimientos implícitos durante el intercambio de ideas entre colegas se refieren a la asociación de la partición con la división, posiblemente derivado del tipo de planteamientos que se encuentran en los libros de texto. Como ya hemos mencionado en los libros de texto para secundaria el tratamiento didáctico que se da las operaciones de la multiplicación está relacionado con las reglas de multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador en la multiplicación y el de invierte y multiplica para la división. Está presente el concepto de fracción  $a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales.

### **6.6.2 Limitaciones semánticas de las propuestas de los profesores**

Los maestros manifestaron dificultades para la enseñanza de números fraccionarios y sus operaciones como la multiplicación y división a través de

la resolución de problemas, las dificultades se observaron cuando ellos no mostraron razones para justificar y dar sentido a la operación de división con números fraccionarios. Los profesores pretendían hacerlo de la misma forma que presentamos la multiplicación, recordemos que la multiplicación, la trabajamos a través de problemas de parte de partes, sin embargo, para la división no fue posible establecer ese vínculo a través de la modelación del problema. Las dificultades están relacionadas con la forma de mostrar a los estudiantes procedimientos y justificaciones apoyadas en razones matemáticas que les permitan dar sentido a la relación de la representación con las operaciones.

Relacionado con los diseños presentados, identificamos diseños que implicaron diversos contenidos, los profesores produjeron enunciados que se referían a multiplicación y división con números naturales, observamos además que los planteamientos no involucraron la multiplicación y división, es decir, estaban implicadas operaciones como la suma y la resta. Algunos otros diseños se relacionaron con la multiplicación y división de una fracción y un número natural. La unidad de referencia, en la resolución de problemas generan nuevas unidades lo que lleva a un error conceptual.

## **6.7 El diseño de problemas**

A continuación, mencionaremos los resultados del análisis de los diseños propuestos por los docentes de Matemáticas.

Los profesores presentaron problemas que no implican multiplicación o división con números fraccionarios, sus planteamientos se alojaron en el conjunto de los números naturales.

Los constructos y esquemas presentes en los diseños presentados por los profesores están en contextos forzados para incluir números fraccionarios, así como la idea del todo en un conjunto discreto y continuo. Los diseños sugieren conjuntos discretos, así como identificar una parte del todo.

Como ya hemos mencionado, identificamos que los diseños de los profesores implicaban problemas multiplicativos en donde intervienen operaciones con números naturales y fraccionarios, situaciones donde las operaciones que involucraban era la suma cuando pretendían una multiplicación, o una resta cuando querían relacionar la operación de división.

La representación gráfica que presentaron los profesores correspondía a una composición de áreas, los conocimientos que identificamos y que están presentes en sus diseños se refieren a la equipartición y a la suma iterada de fracciones.

Por otra parte, las representaciones sintácticas dan cuenta del uso del algoritmo para resolver una multiplicación de fracciones mediante el algoritmo canónico. Para la división identificamos el uso de reglas sobre los algoritmos, tales como el producto cruzado.

Identificamos diseños de problemas que corresponden a la división cuotativa, en donde el dividendo es mayor que el divisor, estas situaciones escritas indicaban los valores que intervinieron en el problema, es decir asignaban al dividendo un mayor valor que al divisor.

Por otra parte, identificamos una interpretación del residuo en el caso de la operación de cociente de cocientes, posiblemente porque los profesores tienen errores conceptuales referentes al concepto de unidad y a la interpretación del residuo.

El significado de factor escalar está implícito en la interpretación de los problemas, lo anterior apoyado en las representaciones sintácticas de los profesores, porque cuando representaron la multiplicación de cocientes, a un factor del producto no le asignaron dimensión.

Otra interpretación asociada a la multiplicación es la suma iterada presentada por Rosa, sin embargo, no explicita la forma en que el estudiante puede discernir entre utilizar una suma iterada y un factor escalar, dado que

no siempre es posible resolver una multiplicación de fracciones mediante el modelo repetido de una suma.

En relación con los algoritmos de división identificamos el producto cruzado, y el producto del inverso del divisor este procedimiento no es considerado por los profesores como una alternativa para resolver este tipo de problemas ya que solo lo mencionó Carlos.

Producto de medios y extremos como un enunciado coloquial, sin embargo, los docentes se apoyan en este tipo de estrategias para promover la comprensión de la operación de división (que es inexistente) podemos pensar que esta decisión está fundada en la necesidad de facilitar los contenidos relacionados a la división con fracciones a los estudiantes.

En lo que se refiere al diseño de problemas encontramos coincidencias con las aportaciones de Fischbein et al. (1985) en el sentido de mostrar el papel que juega la interpretación de la multiplicación como una suma repetida, debido a que en el diseño de problemas multiplicativos por parte de los docentes dejaron evidencia del planteamiento de problemas en donde la propuesta de resolución en mediante representaciones de partes de partes que al sumarse repetidamente conducen a la multiplicación implícita de fracciones.

De los fragmentos donde mostramos el diálogo de los profesores y la investigadora podemos decir que los docentes son conscientes de la dificultad cognitiva que representa para los estudiantes y para ellos mismos, el estudio y la enseñanza de problemas multiplicativos que implican números fraccionarios. Son conscientes de la necesidad de hacer un análisis de los contenidos teóricos para poder justificar las explicaciones de cómo resolver los problemas multiplicativos, asimismo, sugieren que los materiales que proporciona la Secretaría de Educación Pública no resuelven la situación anterior, sin embargo, lo asumen como un área que es necesario fortalecer, y si tienen la oportunidad de realizarla de manera colectiva, ellos consideran que puede apoyar su práctica educativa.

En torno a la reflexión que realizamos con los profesores, podemos decir que la definición de problemas multiplicativos que implican fracciones, ellos consideran que pueden intervenir números naturales y fraccionarios, situación que fue evidente en el diseño de problemas.

Relacionado con la producción que ellos presentaron, observamos que sus diseños promueven procedimientos como es la suma de partes y la suma repetida, sin embargo, no sabemos, si ellos son conscientes de esta situación. Los problemas de división muestran dificultades por el contexto y los elementos que intervienen para el planteamiento de la situación que presentan.

En lo que se refiere a la solución de los problemas, los profesores utilizan recursos gráficos para asignar significado a la operación, sin embargo, apoyan sus procedimientos en reglas y arreglos que a su consideración favorecen que los alumnos recuerden los procedimientos, pero sin justificar en hechos matemáticos los procedimientos que realizan.

Los docentes manifestaron errores conceptuales en el análisis y diseño de tareas, dichos errores están referidos al concepto de unidad, fracción y sus significados. Tuvieron dificultades para diseñar situaciones que implicaran números fraccionarios, los diseños incluían otras operaciones y el uso de otros conjuntos numéricos. Identificamos el uso preponderante de los números naturales para los diseños, así como los recursos gráficos (figuras geométricas como el rectángulo) para apoyar el planteamiento del problema.

En lo que se refiere a la resolución de problemas es posible identificar procedimientos fundamentados en la regla de tres, el uso de recursos gráficos para apoyar la resolución, acomodos alternativos para justificar la división con números fraccionarios. En lo que sigue presentaremos las conclusiones de la presente investigación con Profesores de Matemáticas con experiencia en la enseñanza.



## CONCLUSIONES

---

En esta sección vamos a presentar las conclusiones finales de este trabajo, es necesario mencionar el objetivo general de la presente investigación, que estuvo relacionado con la identificación de los *procesos cognitivos* de profesores con experiencia en la enseñanza, en torno a *problemas multiplicativos con números fraccionarios*, lo cual incluye los conocimientos de contenido matemático y pedagógico, las representaciones y los significados que se asignan ante la resolución y diseño de problemas, así como el papel que representa la reflexión sobre la práctica docente y los diseños que los maestros elaboraron. En lo que sigue, mencionaremos aspectos que hemos identificado y consideramos relevantes.

En esta investigación ya hemos presentado los resultados obtenidos durante la aplicación de instrumentos metodológicos, así como los perfiles de formación de los docentes con experiencia en la enseñanza de matemáticas, en la educación secundaria, las aportaciones teóricas de diferentes investigaciones relacionadas con las fracciones y sus operaciones de multiplicación y división, además de aspectos relacionados con el *conocimiento de los profesores* para la enseñanza. Lo anterior nos permitió realizar un análisis profundo de los procesos cognitivos de los profesores

cuando resuelven y diseñan problemas multiplicativos ligados a las fracciones, así como la reflexión de su propia práctica docente.

Presentamos los datos de acuerdo a las fases de aplicación, es decir, en la primera fase presentamos los datos relevantes de la entrevista individual con retroalimentación (en tres partes) que aplicamos a la profesora Rosa, las que consistieron en la resolución y diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios. En la segunda fase mostramos la información relacionada con las seis sesiones de las *Jornadas Académicas con Profesores* de matemáticas en donde consideramos el *análisis, resolución y diseño de problemas multiplicativos* vinculados a los números fraccionarios por parte de los docentes. En la tercera fase realizamos el contraste de los datos de las entrevistas finales con Rosa y Carlos.

El trabajo con maestros en ejercicio fue concebido como un espacio de comunicación y reflexión de sus conocimientos a través de la resolución de los diferentes instrumentos metodológicos, así como un medio para identificar los procesos cognitivos de los maestros de secundaria en la materia de matemáticas, durante sesiones de trabajo colectivo e individual, en donde intervinieron los conocimientos, la experiencia y la reflexión sobre la enseñanza y diseño de tareas para la clase de matemáticas, con el tema de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.

El diseño y aplicación de los instrumentos permitió generar representaciones y procesos de resolución, así como establecer diálogos sobre el trabajo individual, colectivo y entre pares. Asimismo, promovió la reflexión sobre los diseños y los procedimientos que surgieron durante el desarrollo de la investigación.

Los procesos reflexivos dejaron evidencia de mejoramiento en los diseños de problemas y posiblemente en los futuros planes de clase para estudiar los problemas multiplicativos con números fraccionarios en la escuela secundaria.

A continuación, presentamos hallazgos relacionados con las acciones de los profesores con experiencia docente en la clase de matemáticas.

- La primera fase corresponde a las tres entrevistas realizadas a la profesora Rosa, que implicó un diálogo sobre las estrategias y procedimientos para la resolución de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.
- La segunda fase corresponde a las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas en donde se programaron actividades como las que a continuación se mencionan:
  - a) Análisis del planteamiento de problemas aritméticos.
  - b) Resolución de problemas multiplicativos referidos a los números fraccionarios.
  - c) Diseño de problemas multiplicativos por parte de los docentes.
  - d) La reflexión colectiva y entre pares se fue manifestando durante el desarrollo de las tareas programadas, durante las Jornadas Académicas.
- Entrevistas posteriores a las Jornadas Académicas con profesores donde se estableció el contraste de los datos durante las dos fases anteriores.

### **El trabajo individual con Rosa**

Relacionado con los datos iniciales queremos mencionar los *conocimientos matemáticos* presentes, así como *procesos cognitivos* durante la resolución y diseño de tareas relacionadas con los problemas multiplicativos resueltos por Rosa, resaltamos lo que consideramos relevante para la investigación.

#### ***Problemas de multiplicación***

Para la resolución de problemas de multiplicación que implican el producto de medidas con números fraccionarios, identificamos el uso de representaciones pictóricas para organizar los datos del problema en la

figura geométrica, con esta acción la profesora trató de asignar significado al número fraccionario a través de la representación realizada sobre la figura.

La profesora utilizó la representación geométrica (rectángulo cuando se refieren al modelo didáctico de área) para resolver problemas de multiplicación con números fraccionarios, es decir, las partes de partes, asimismo, el doble sombreado le permitió relacionar y justificar el resultado de la operación como un medio para dar sentido al planteamiento del problema y a la operación de multiplicación de números fraccionarios.

En la resolución de los problemas, la profesora promovió la lectura del problema para generar la comprensión del enunciado como estrategia para determinar la forma de resolver la situación, en este caso para determinar la operación que interviene en la resolución.

Para el tratamiento de esta clase de problemas la maestra privilegia el uso del algoritmo canónico para la multiplicación, las justificaciones que aporta se realizan sobre el procedimiento de resolución, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador.

### ***Problemas de división***

En lo relativo a los problemas de división, identificamos tentativas de modelar el problema mediante figuras geométricas y sobre la recta numérica, sin embargo, ante la dificultad de este tipo de representaciones, Rosa toma conciencia de no poder llevar la situación planteada a un plano de representación pictórica, y en lo sucesivo ella utiliza composiciones numéricas, es decir, representa la operación de división con fracciones, sin hacer referencia a algún tipo de justificación de sus procesos.

Para la resolución de tales problemas de división de fracciones ella utiliza los productos cruzados sin tomar en cuenta la unidad de referencia para representar la respuesta del problema, posiblemente por la necesidad de concentrarse en el aspecto numérico, dejando de lado el planteamiento global del problema y el sentido de las operaciones.

La forma de sustentar los procedimientos de la profesora está alojada en ejemplos particulares de operaciones con números naturales y posteriormente amplía dichos procedimientos a los números fraccionarios, omitiendo mencionar las restricciones que implica las operaciones con este conjunto numérico. Por ejemplo, no hace explícita la definición de fracción, es decir, en un número fraccionario  $a/b$ , donde  $b > 0$ , así cuando ella representa una división con números fraccionarios no recurre a la definición de número fraccionario.

### *El diseño de problemas*

En el diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios observamos dificultades para estructurar los enunciados, en esta actividad solicitamos a la profesora el diseño de un problema de multiplicación y uno de división.

Para la multiplicación, Rosa presentó un problema relacionado con el área de un rectángulo, es decir, el problema tenía una estructura de producto de medidas, en este caso, ella presentó la medida de los lados y había que obtener el área del rectángulo. Es necesario mencionar que este tipo de problemas son los que se presentan en los libros texto para educación secundaria.

Para la división, la profesora realizó un problema que correspondía a una adición y sustracción; suponemos que ella asigna una equivalencia de significado a la partición de un número natural comparado con la división de números fraccionarios.

Lo anterior sugiere limitaciones para la enseñanza desde la perspectiva del diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios, sin dejar de lado las expresiones dentro del lenguaje hablado y escrito durante su práctica docente. Rosa trata de promover la comprensión y el significado de las operaciones, como fue el caso de la representación del producto de

medidas en la multiplicación, para este trabajo, sería interesante verificar si logra el objetivo cuando se apliquen dichos planteamientos a los estudiantes.

### **El trabajo colectivo durante las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas**

El análisis de las tareas que se desarrollaron durante la segunda fase de la investigación corresponde a las *Jornadas Académicas* con cuatro profesores, donde el objetivo no era promover la enseñanza, sino establecer un espacio para realizar el análisis, diseño y resolución de problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios, lo anterior se desarrolló en un ambiente de colaboración e intercambio de ideas con el fin de identificar, retroalimentar, fortalecer y reflexionar acerca de los *conocimientos de los profesores* de matemáticas con experiencia en la enseñanza.

Las actividades desarrolladas nos permitieron identificar los *procesos cognitivos* de los profesores con experiencia. Nos referimos a los procesos cognitivos cuando hablamos de conocer los antecedentes teóricos con los que cuenta el docente para enseñar el contenido relacionado con la multiplicación y división de números fraccionarios, a través de la resolución de problemas, así como todas las representaciones que surgieron.

Lo anterior nos permitió conocer los recursos didácticos que los maestros utilizan e identifican los elementos que orientan la toma de decisiones y los *conocimientos implícitos* que plasman para el *diseño de problemas* que llevarán a su clase; las *representaciones* que utilizan, y los *significados* asignados a las representaciones, cómo son justificados los procedimientos de resolución, así como la *reflexión* que hacen de su propia práctica y sus diseños de manera individual y colectiva. A continuación, mencionamos los hallazgos obtenidos.

#### *Acerca de los materiales didácticos*

De lo que hemos mencionado anteriormente podemos concluir lo siguiente: lo referente al material didáctico, los profesores tienen influencia de los

documentos proporcionados por la Secretaría de Educación Pública, como el Plan y Programas de estudio, los libros de texto, entre otros. Lo anterior lo retomamos de lo que los docentes mencionaron durante la primera sesión de las Jornadas Académicas.

Por otra parte, nos dió oportunidad de saber acerca de los conocimientos relacionados con los números fraccionarios y sus operaciones expresados tanto en el diseño, como la reflexión dejan ver que se apoyan en definiciones erróneas, posiblemente relacionadas con la práctica reiterada y la falta de capacitación enfocada a los contenidos teóricos de la materia que enseña. Posiblemente por la ausencia de conceptos bien definidos las representaciones y justificaciones tiene poca oportunidad de tener una estructura sólida y clara para los estudiantes.

### *Análisis de problemas*

Durante esta actividad identificamos aspectos relacionados con el tratamiento de los conjuntos numéricos, es decir, para los docentes no es importante establecer la diferencia entre números naturales y fraccionarios al presentar los problemas; como es el caso cuando en el resultado se obtiene una fracción, para ellos es suficiente asumir que se trata de un problema multiplicativo con fracciones. Esta situación se vio reflejada durante el diseño de problemas.

### *Resolución de problemas multiplicativos*

Durante la resolución de problemas identificamos las representaciones geométricas para establecer el análisis del problema.

Identificamos el uso preponderante de los números naturales para los diseños, así como los recursos gráficos (figuras geométricas como el rectángulo) para apoyar el planteamiento del problema.

El uso preponderante de los algoritmos sobre el significado de las operaciones es lo que reconocimos en Rosa, así como la justificación de los procedimientos en el algoritmo canónico para la multiplicación de los

números fraccionarios. En lo que se refiere al diseño identificamos dificultades para presentar enunciados o situaciones que implicaran la división de dos fracciones, la falta de interpretación del resultado de la división de dos cocientes.

### ***Diseño de problemas multiplicativos en la etapa 1***

El diseño de problemas se llevó a cabo en dos etapas, en la primera etapa los profesores presentaron problemas que no correspondían a números fraccionarios, las situaciones planteadas en los problemas estaban apoyadas en los números decimales.

Por otra parte, los diseños de problemas implicaban suma (no era suma iterada) y sustracción. O en su caso, el planteamiento se refería sólo a la comparación de fracciones o a obtener el complemento de la unidad.

Por lo anterior, solicitamos en una segunda etapa el diseño de problemas multiplicativos con números fraccionarios. Durante esta etapa lo que identificamos fue lo siguiente.

### ***Diseño problemas de multiplicación en la etapa 2***

Para este tipo de problemas identificamos problemas dentro de situaciones aritméticas comúnmente apoyadas en recursos geométricos. La estructura de los problemas estuvo centrada en el producto de medidas. La modelación de los problemas se apoyó en figuras geométricas como el rectángulo.

Para la multiplicación con números fraccionarios identificamos la tendencia en estos docentes hacia la selección de un mismo tipo de problemas; los profesores se enfocaron en el modelo del área para redactar problemas de multiplicación, aunque no realizaron figuras como apoyo pictórico.

### ***Diseño de problemas de división***

Para los problemas de división, identificamos que preferentemente se referían a contextos aritméticos, la estructura de los problemas era de

división partitiva, dicha situación limita la comprensión más amplia de la operación de división con fracciones.

Estos problemas no estaban apoyados con modelaciones geométricas. Los docentes manifestaron errores conceptuales en el análisis y diseño de tareas, dichos errores están referidos al concepto de unidad, fracción y sus significados.

En la división donde intervienen números fraccionarios se plantearon situaciones de división partitiva, es posible suponer la influencia de los materiales didácticos que ofrece la Secretaría de Educación Pública, por otra parte, se observó en todos los casos la tendencia de presentar situaciones donde el dividendo es mayor que el divisor, es decir, dividir el número mayor entre el menor.

### *La reflexión entre pares y colectiva*

En lo que se refiere a la resolución de problemas es posible identificar procedimientos fundamentados en la regla de tres, el uso de recursos gráficos para apoyar la resolución, acomodos alternativos para justificar la división con números fraccionarios sin tender hacia la abstracción del *cociente de cocientes*.

De acuerdo a lo anterior consideramos pertinente indagar a través de futuras entrevistas individuales con retroalimentación a aquellos aspectos de la resolución y diseño de problemas multiplicativos con dos profesores, en este caso nos referimos a Rosa y Carlos.

### **Los maestros y sus conocimientos: el contraste entre las entrevistas de Rosa y Carlos**

A continuación, con fines de análisis haremos un comparativo acerca de la formación profesional, la experiencia y los procesos de resolución y diseño de problemas multiplicativos presentados por Rosa y Carlos.

En contraste con Rosa y lo que se refiere a su formación, ambos maestros se formaron con el plan de estudios de 1988 para escuelas normales; tal programa estaba organizado en un tronco común y un diferencial para cada especialización.

Es posible suponer que Carlos tiene ya una historia de autorreflexión que le ha permitido gestionar su propia formación académica y continua, a diferencia de Rosa, quien manifiesta confianza en torno a los documentos como el programa de estudios y material de apoyo, libros de texto, cursos proporcionados por la Secretaría de Educación Pública. Ella ha identificado dificultades en torno a la enseñanza y ante la propuesta generada por un curso de la SEP, donde ella identificó otra forma de explicar la operación de números fraccionarios como la multiplicación a partir de representaciones geométricas.

Rosa y Carlos apoyan sus decisiones pedagógicas en su experiencia docente, en este caso, ellos han identificado errores conceptuales o de interpretación por parte de los estudiantes, y ponen en práctica estrategias que les permitan resolver dichas dificultades, por ejemplo: en el caso de la división de números fraccionarios utilizaron un arreglo particular para la división, con la finalidad de facilitar y hacer que el estudiante comprenda el procedimiento para dividir fracciones, sin embargo, las estrategias que ellos utilizan dejan de lado la comprensión de la división en sí.

Rosa y Carlos manifestaron de forma explícita la dificultad que representan las definiciones poco precisas en torno a los números fraccionarios y sus representaciones, sin embargo, Carlos fue contundente en torno a los conceptos y propuso el desarrollo de la resolución de los problemas.

Los conocimientos matemáticos presentes, así como *procesos cognitivos* durante la resolución y diseño de tareas relacionadas con los problemas multiplicativos, resaltamos lo que consideramos relevante para la investigación.

Para los problemas de multiplicación identificamos uso de representaciones pictóricas, y la asignación de representaciones concretas para la fracción.

Observamos la representación geométrica como un medio para asociar la operación de la multiplicación, sin embargo, la división está sustentada en el algoritmo, por la dificultad que conlleva una representación concreta del problema.

De manera implícita, Carlos asume el significado de factor escalar, como vimos en la resolución del problema de la invitación, en donde él presentó la resolución del problema mediante el producto, y dejando al multiplicador sin unidad de medida, lo anterior apoyado en la importancia que otorga al número que funge como transformador, es decir el número que le permitió obtener una medida mayor o menor de las que estaban dadas originalmente, y tomando la medida como referencia para proporcionar e interpretar el resultado del problema.

Otra interpretación asociada a la multiplicación es la suma iterada presentada por Rosa, sin embargo, no explicita la forma en que el estudiante puede discernir entre utilizar una suma iterada y un factor escalar, dado que no siempre es posible resolver una multiplicación de fracciones mediante una suma iterada.

En relación con los algoritmos de división identificamos el producto cruzado, y el producto por el inverso del divisor (este procedimiento no es considerado por los profesores como una alternativa para resolver este tipo de problemas). Podemos pensar que esta última decisión está fundada en la necesidad de facilitar los contenidos relacionados con la división con fracciones a los estudiantes.

Es posible suponer que ambos profesores asocian el número mayor con el dividendo y el número menor con el divisor, situación reportada en otras investigaciones como la de Fischbein, (1985).

## **Implicaciones para la enseñanza**

Como lo hemos mencionado, los docentes son una parte fundamental para promover una enseñanza de calidad incluyendo los contenidos que favorezcan el aprendizaje de los temas señalados en el programa de estudios. Por lo anterior, en esta investigación, aportamos señalamientos realizados desde la importancia de planear situaciones didácticas a partir del diseño de las tareas que involucran problemas multiplicativos apoyados en un análisis reflexivo en torno significado y la comprensión que se puede asignar a las operaciones a partir de la resolución de problemas, tomando en cuenta que la reflexión sobre su propia práctica y diseños puede favorecer la mejora de sus acciones en la enseñanza.

Por otra parte, los resultados de esta investigación pueden ser tomados como parte de la formación de profesionales de la educación en las diferentes instituciones como las escuelas normales, la universidad pedagógica en otras. Asimismo, puede considerarse como un complemento para la formación continua de los docentes a lo largo de su vida profesional, en los centros de maestros, cursos de formación continua por parte de la dirección general de educación secundaria entre otras instancias.

En el ámbito internacional investigadores como Vergnaud realizó aportaciones sobre la semántica de los problemas multiplicativos, nosotros estamos buscando establecer contenidos semánticos relacionados con el producto de cocientes y el cociente de cocientes.

### **Futuras investigaciones**

En esta investigación tuvimos oportunidad de trabajar con profesores de matemáticas en ejercicio, con las producciones escritas y los diálogos que establecimos de manera individual y colectiva, así como el intercambio de ideas que permitieron retroalimentar la práctica de cada uno de ellos. Sería interesante conocer de qué manera impacta un trabajo como este en el aula. Para ello, consideramos que en trabajos futuros es posible indagar que sucede con la resolución de problemas por parte de los estudiantes cuando

se les presentan los diseños propuestos por los docentes que han tenido un proceso de reflexión sobre su práctica.

Asimismo, presentar diseños de tareas con la finalidad de promover los significados de las operaciones a través de problemas presentados por los maestros, quienes tuvieron un proceso reflexivo acerca las situaciones de los contenidos teóricos que implican el estudio del producto de cocientes y el cociente de cocientes a través de la resolución de problemas.

A nivel de las conclusiones generales podemos decir que hay una escasa correspondencia de sintaxis con semántica hablando de las operaciones, cuando se debe entender al número en sí.

Identificamos que hay un mundo sintáctico muy afianzado en los profesores con experiencia en la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Se puede advertir cierta certeza en la sintaxis porque la consideran fuera de toda réplica. En lo que se refiere a la naturaleza de los números no se piensa más allá de la sintaxis buscando encontrar significado en las operaciones.

En este estudio, consideramos que, si bien los profesores cuentan con preparación profesional, es necesaria la actualización permanente del magisterio, porque de acuerdo a los resultados presentados en esta investigación, cuando los profesores se enfrentan al estudio de las operaciones de multiplicación y división con números fraccionarios, el docente no cuenta con los recursos didácticos y teóricos que le permitan promover la comprensión de las operaciones con números fraccionarios.

Por lo anterior, el docente recurre al uso preponderante de reglas y representaciones pictóricas, omitiendo los contenidos semánticos y sintácticos que ofrecen la oportunidad de dar sentido y significado a las tareas de la clase de matemáticas.



## Referencias Bibliográficas

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. y Novotra, J. (2005). Reflections on an Emerging field: Researching Mathematics Teacher Investigation. *Educational Studies in Mathematics*. 60(3), 359-381.
- Álvarez - Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. México: Paidós Educador.
- Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Ball, D. (2000). Bridging Practices: Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher of Education*, 51(3), 241-247.
- Ball, D., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using Mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. (pp. 83 - 114). Westport, CT: Ablex.
- Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher of Education*, 59(5), 389-407.
- Berh, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh and Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concept and Processes*. (pp. 91 - 125). New York: Academic Press.
- Berh, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan, New York, pp.296-333.
- Briones, G. (2001). *Métodos y técnicas de investigación para las ciencias sociales*. México: Trillas.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*. Guía práctica. Barcelona: Ediciones CECA. 87-89.
- Castañeda, A. (2015). *Retos matemáticos 1*. México: Ediciones SM.
- Cohen, L., y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación Educativa*. Madrid, España: La Muralla.
- Coll, C. (1992). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. Madrid, España: Siglo XXI.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Sabala, A. (1999). El constructivismo en el aula. España: Graó. 25-45.

- Charalambous, C. Y., y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study student's understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Gimeno, J. (1988). El currículum una reflexión sobre la práctica. Madrid, España: Morata.
- Da Ponte, J. P. (2012). *Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas*. Teoría crítica y práctica de la educación matemática. España: Graó. 83-95.
- Elliot, J. (1993). El cambio educativo desde la investigación-acción. Madrid, España: Morata.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., y Marino, M. (1985). The role of implicit in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-21.
- Freudenthal, H. (1983). Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados, México: CINVESTAV.
- Gómez, B., Figueras, O. y Contreras, M. (2016). Modelos de enseñanza de los algoritmos de la división de fracciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*. 9, 43-63.
- Hart, K. (1981). Fractions. En Anthony Rowe Publishing (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: 11 – 16, 66 – 81. London: John Murray.
- Hill, H., y Ball, D. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teacher's Topic-Specific Knowledge of students. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 39(4), 372-400.
- Hubbard, R., Instone, S., Noonan, Jim., Rothery, A., Stuard, H. (1984). *Children Reading Mathematics*. 24- 44.
- Isikal, M., y Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teacher's pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 14(3), 213-230.
- Jensen, A., y Hohensee, Ch. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 503-522.
- Jiménez, L. (2015). *Matemáticas 1*. México: Grupo Editorial Patria.

- Kieren, T. (1983). Partitioning, equivalence and the construction of rational number ideas. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, y M. Suyman (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical education* (pp. 506-525). Boston, EUA: Birkhauser.
- Kieren, T., Nelson, D., y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in partitioning Tasks. *The Journal of Mathematics Behavior* 4. 25-36
- Kieren, T., (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Berh (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, EUA: Laurence Erlbaum Associates, Inc., & National Council of Teachers of Mathematics.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). *Fracciones: Relación parte-todo*. Madrid. Síntesis. pp. 145-164.
- Llinares, S. (2012). *Del análisis de la práctica al diseño de tareas para la formación de maestros*. Teoría crítica y práctica de la educación matemática. España: Grao. 99-113.
- Meneses, F. R. (1991). *Las fracciones: un dominio de significación múltiple. Análisis de una colección de problemas de multiplicación y división de fracciones elaborados por profesores-alumnos de la Escuela Normal Superior de México* (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Mosterín, J. (2000). Los lógicos. Madrid, España: Espasa. 18-23
- Piaget, J. e Inherlder, B. (1975). *Psicología del niño*. Madrid, España: Morata.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York. EE. UU.
- Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies of Mathematics*, 30(1), 5-38.
- Ramírez, M. (2012). *El aprendizaje autónomo de la división en cuarto grado de primaria*. (Tesis Doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Secretaría de Educación Pública. (2006). *Libro para el maestro 2006. Educación Básica Secundaria*. México: SEP.
- Secretaría de Educación Pública. (2009). *Programas de estudio 2009. Educación Básica primaria*. México: SEP.

- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011*. Educación Básica Secundaria. México: SEP.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schön, D.A. (1987). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en los profesionales*. España: Paidós Educador.
- Sharp, J., y Welder, R. (2014). Reveal limitations through fraction division problema posing. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(9), 490-490.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Schwartz, H., y Jacobs, J. (2006). *Sociología Cualitativa. Método para la reconstrucción de la realidad*. México. Trillas.
- Smith, M., Bill, V., y Raith, M. (2018). Promote a conceptual understanding of mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(1), 36-43.
- Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25. 109-135.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.
- Taylor, S., y Bogdan, R. (1984). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. España: Paidós, 100-132.
- Tirosh, D., y Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher's thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 125-147.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 125-147.
- Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*. (Tesis Doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Valdemoros, M. (1998). La constancia de la unidad en la suma de fracciones. Estudio de caso. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (465-481). México, México: Editorial Iberoamericana.
- Valdemoros, M. y Ruiz, E. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, II(1), 127-157.

- Valdemoros, M., Ramírez, M. & Lamadrid P. (2015). Núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de fracciones. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Educación Matemática en las Américas, 1*, 195-204: Formación Inicial para Profesores de Primaria. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.
- Valdemoros, M., Lamadrid, P y Ramírez, M. (2017). The future teacher, multiplication and división of fracctions. *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Eduaction*, 915-918.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
- Villoro, L. (2011). *Crear, saber, conocer*. México. Siglo XXI. pp. 127-220.
- Vygotski, L.S. (1982). Pensamiento y Palabra. En Lev Semiónovich Vygotski, *Obras Escogidas II. Pensamiento y Lenguaje*. Madrid, España: Visor. 246 -324.
- Webel, C., y DeLeeuw, W. (2016). Meaning for fraction multiplication: Thematic analysis of mathematical talk in three fifth grade clases. *The Journal Mathematics Behavior*. 41, 123-140.
- Woods, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa*. España: Paidós, 50 – 76.
- Flores, A. (2014). División de fracciones como comparación multiplicativa a partir de los métodos de los alumnos. *Educación Matemática*, (), 227-244. (fecha de consulta 22 de agosto de 2022). ISSN:0187-8298. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articunp.oa?=40540854012>
- [http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS\\_NACIONALES\\_PLANEA2017.pdf](http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf) recuperado el 16 de dic 2020 4:36 pm.
- <https://www.aefcm.gob.mx/dgenam/ENSM/oferta-educativa-lic.html> recuperado el 15 de agosto de 2020.
- <http://ensech.edu.mx/docs/plan.pdf> recuperado el 15 de agosto de 2020.



## APÉNDICE A

En este apartado presentamos los contenidos relacionados con el estudio de las fracciones en la educación básica.

Tercer grado: Promueven el uso de las fracciones en medios, cuartos, octavos, para expresar de manera verbal y escrita el uso de medidas diversas.

Los alumnos elaboran e interpretan las representaciones gráficas de los números fraccionarios además de incorporar actividades para reflexionar sobre la unidad de referencia.

Cuarto grado: Promueven la resolución de problemas que impliquen la partición en tercios quintos y sextos.

Análisis de escrituras aditivas equivalentes y de fracciones mayores o menores que la unidad.

Representación de fracciones de magnitudes continuas, identificación de la unidad dada una fracción.

Identificación de fracciones equivalentes al resolver problemas de reparto y medición

Resolución de problemas a través de procedimientos informales de sumas y restas de fracciones con diferente denominador en casos sencillos.

Uso de fracciones para expresar partes de una colección, cálculo del total poniendo una parte.

Obtener fracciones equivalentes partiendo de la idea de multiplicar o dividir el numerador y el denominador por el mismo número.

Expresiones equivalentes y calcular el doble la mitad la cuarta parte, el cuádruple.

Para primer grado de secundaria sugieren la representación de las fracciones en la recta numérica además de la conversión de fracciones a números decimales.

Resolución de problemas de suma, resta, multiplicación y división con números fraccionarios utilizando el algoritmo.

Para segundo grado retoman la resolución de problemas que implican la multiplicación y división con fracciones y números decimales.

En tercer grado el tratamiento de las fracciones esta implícito en temas de jerarquía de operaciones, contenidos de álgebra y manejo de la información.



## APÉNDICE B

A continuación, integramos la información que nos permitió identificar los cambios realizados en los contenidos del programa de estudios de la Escuela Normal en la especialidad de Matemáticas, presentamos una tabla con los contenidos del Programa de Estudios en tres periodos de Reformas a sus contenidos.

PROGRAMA DE MATEMATICAS 1983	PROGRAMA DE MATEMATICAS 1999	PROGRAMA DE MATEMATICAS 2018
PRIMER SEMESTRE	PRIMER SEMESTRE	PRIMER SEMESTRE
Taller de Lectura y Redacción	Bases filosóficas, legales y organizativas del sistema educativo mexicano	Desarrollo den la adolescencia
Comunicación Educativa	Estrategias para el estudio y la comunicación I	Problemas socioeconómicos y políticos de México
Psicología Educativa	Problemas y políticas de la educación básica	Pensamiento algebraico
Historia Contemporánea de México	Propósitos y contenidos de la educación básica I (Primaria)	Sentido numérico
Aritmética	Desarrollo de los adolescentes I. Aspectos generales	Herramientas para la observación y análisis de la escuela y la comunidad
Geometría	Escuela y contexto social	Inglés: inicio de la comunicación básica
SEGUNDO SEMESTRE	SEGUNDO SEMESTRE	SEGUNDO SEMESTRE
Taller de Lectura y Redacción II	La educación en el desarrollo histórico de México I	Desarrollo socioemocional y aprendizaje
Comunicación Educativa II	Estrategias para el estudio y la comunicación II	Teorías y modelos de aprendizaje
Psicología del Aprendizaje	La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas I	Álgebra y funciones
El Estado Mexicano y la Educación	Introducción a la enseñanza de: Matemáticas	Magnitudes y medidas
Aritmética II	Propósitos y contenidos de la educación básica II (Secundaria)	Tratamiento de la información
Geometría II	Desarrollo de los adolescentes II. Crecimiento y	Observación y análisis de la cultura escolar

	sexualidad	
	Observación del proceso escolar	Inglés: desarrollo de conversiones elementales
		Optativo
<b>TERCER SEMESTRE</b>	<b>TERCER SEMESTRE</b>	<b>TERCER SEMESTRE</b>
Introducción a las Técnicas de Investigación Educativa	La educación en el desarrollo histórico de México II	Planeación y evaluación
Investigación Educativa	La enseñanza en la escuela secundaria. Cuestiones básicas II	Teoría de la aritmética
Didáctica General	Pensamiento Algebraico	Pensamiento estocástico
Conocimiento del Educando Adolescente	Los números y sus relaciones	Didáctica de las Matemáticas en la Educación Básica
Problemas Económicos, Sociales y Políticos de México	La expresión oral y escrita en el proceso de enseñanza y aprendizaje	Práctica docente en el aula
Álgebra I	Desarrollo de los adolescentes III. Identidad y relaciones sociales	Inglés: Intercambio de información e ideas
Geometría III	Observación y práctica docente I	optativo
<b>CUARTO SEMESTRE</b>	<b>CUARTO SEMESTRE</b>	<b>CUARTO SEMESTRE</b>
Análisis del Sistema Educativo Nacional	Seminario de temas selectos de historia de la pedagogía y la educación I	Neurociencia en la adolescencia
Tecnología Educativa	Figuras y cuerpos geométricos	Gestión del centro educativo
Formación del Educando Adolescente	Plano cartesiano y funciones	Trigonometría
Técnicas de Proyección de la Escuela a la Comunidad.	Procesos de cambio y variación	Geometría plana y del espacio
Algebra II	Planeación de la enseñanza y evaluación del aprendizaje	Innovación de la enseñanza de las matemáticas
Trigonometría	Desarrollo de los adolescentes IV. Procesos cognitivos	Estrategias de trabajo docente
	Observación y práctica docente II	Inglés: Fortalecimiento de la confianza en la conversación
		Optativo
<b>QUINTO SEMESTRE</b>	<b>QUINTO SEMESTRE</b>	<b>QUINTO SEMESTRE</b>
Seminario: Pedagogía	Seminario de temas selectos	Educación inclusiva

Comparada I	de historia de la pedagogía y la educación II	
Evaluación Educativa	Medición y calculo geométrico	Metodología de la investigación
Técnicas de Acercamiento a los Problemas del Educando Adolescente	Procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia	Estadística inferencial
Demografía y Educación	Escalas y semejanza	Geometría analítica
Algebra Superior I	Opcional I	Matemáticas en la ciencia y la tecnología
Geometría Analítica I	Atención educativa a los adolescentes en situaciones de riesgo	Innovación para la docencia
	Observación y práctica docente III	Inglés: Hacia nuevas perspectivas globales
		Optativa
<b>SEXTO SEMESTRE</b>	<b>SEXTO SEMESTRE</b>	<b>SEXTO SEMESTRE</b>
Seminario: Pedagogía Comparada II	Seminario de investigación en educación matemática	Fundamentos de la educación
Diseño Curricular	Seminario de temas selectos de historia de las matemáticas	Pensamiento pedagógico
Laboratorio de Docencia I	Tecnología y didáctica de las matemáticas	Calculo diferencial
Algebra Superior II	La predicción y el azar	Trabajo multidisciplinar cone la física
Problemas Matemáticos de la Ciencia I	Presentación y tratamiento de la información	Historia y filosofía de las matemáticas
Geometría Analítica II	Opcional II	Proyectos de intervención docente
	Gestión escolar	Optativo
	Observación y práctica docente IV	
<b>SEPTIMO SEMESTRE</b>	<b>SEPTIMO SEMESTRE</b>	<b>SEPTIMO SEMESTRE</b>
Seminario: Aportes de la Educación Mexicana a la Pedagogía. Modelos Educativos Contemporáneos	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente I	Retos actuales de la educación en México
Taller de Estadística Aplicada a la Educación I.	Trabajo docente I	Modelación
Laboratorio de Docencia II		Calculo integral

Laboratorio de Docencia III		Proyecto multidisciplinario
Problemas Matemáticos de la Ciencia II		Didáctica de las matemáticas en la educación obligatoria
Cálculo Diferencial e Integral I		Práctica profesional y vida escolar
OCTAVO SEMESTRE	OCTAVO SEMESTRE	OCTAVO SEMESTRE
Taller de Estadística Aplicada a la Educación II	Taller de diseño de propuestas didácticas y análisis del trabajo docente II	Aprendizaje en el servicio
Laboratorio de Docencia IV	Trabajo docente II	Trabajo de titulación
Laboratorio de Docencia V		
Seminario: Evolución del Cocimiento del Área.		
Programación y Computación		
Cálculo Diferencial e Integral 2		

## APÉNDICE C

En este apartado integramos los protocolos y diseños de actividades que utilizamos en cada una de las seis sesiones propuestas para el desarrollo de las Jornadas Académicas con Profesores de Matemáticas.

### Protocolo primer sesión

<b>Título:</b> Jornadas Académicas para profesores <b>Coordinadora:</b> Marta Ramírez Cruz
---

Hora	Tiempo	Tema	Actividad propuesta	Responsable	Procedimiento
12:00	15 min.	Presentación y bienvenida	La coordinadora mencionará el objetivo y agenda de las Jornadas Académicas.	Coordinadora	Presentación Power point con el objetivo general de las Jornadas Académicas
12:15	10 min.	Presentación de los participantes	Cada uno de los participantes	Profesores	En orden los profesores van a mencionar datos generales como: nombre, formación profesional, tiempo de servicio en la educación.
12:25	15 min.	Relevancia de los problemas en la educación Matemática	Mediante la pregunta ¿Qué papel representa la resolución de problemas en la enseñanza de contenidos Matemáticos?	Profesores	De manera grupal y en plenaria los docentes mencionan cual es la relevancia para ellos de acuerdo a su experiencia la de enseñanza a través de los problemas.
12:40	10 min.	Definición de los problemas multiplicativos	Se van a definir los problemas multiplicativos ligados a los números fraccionarios.	Coordinadora y los profesores	Retomando los comentarios de los profesores se van a contextualizar los problemas

					multiplicativos con números fraccionarios.
12:50	20 min.	Análisis de problemas	Se van a presentar 3 problemas de división. Se va a analizar el diseño de los mismos.	Coordinadora	Reflexión individual
13:10	40 min.		<p>a) Tenemos 15 peras y las partimos a la mitad ¿cuántas mitades tenemos?</p> <p>b) Enviaron de la pastelería 16 pasteles, los que se repartirán entre 64 niños ¿Qué fracción tocará a cada uno?</p> <p>c) En un terreno de <math>27/24</math> m<sup>2</sup> se requiere repartir a dos hombres en partes iguales. ¿cuánta parte del terreno le corresponde a cada uno?</p> <p>d) Si de un pastel entero me quedan <math>3/4</math> partes y lo deseo repartir entre dos niños ¿qué parte del pastel le tocará a cada niño?</p> <p>Problemas tomados de la tesis de Fortunato Meneses</p> <p>Juan tiene en un bote</p>	Profesores	Puesta en común de la reflexión sobre los problemas con base en su experiencia en la enseñanza.

			de $\frac{6}{8}$ partes de pintura, y desea pintar $\frac{3}{5}$ partes de una barda. ¿Alcanzará con la pintura que tiene? o ¿qué parte de la barda se puede pintar?		
13:50	10 min.	Cierre de la sesión	Síntesis de la sesión	Coordinadora	Recuperar aspectos relevantes de la sesión, se mencionará la agenda de la siguiente sesión.
Observaciones generales			De acuerdo al desarrollo de la sesión se considera tener flexibilidad en cuanto al tiempo designado para las actividades donde los profesores manifiestan sus conocimientos y experiencias en torno a la enseñanza.		

### Protocolo tercer sesión

<b>Título:</b> Jornadas Académicas para profesores <b>Coordinadora:</b> Marta Ramírez Cruz				
<p><b>Consigna:</b> Los profesores van a reflexionar acerca de lo que hasta ahora se ha revisado, es decir, acerca del análisis de los problemas presentados (de la tesis de Fortunato Meneses). Los profesores van a presentar los ajustes de dos problemas (de la tesis de Fortunato Meneses). Van a presentar la forma de resolver los problemas en su clase.</p> <p>Los profesores ¿Cómo se imagina que lo resolverían sus estudiantes?</p> <p>A partir de dos fracciones los profesores van a diseñar un problema, lo van a mostrar y justificar la forma de resolver. Encontrar una aplicación</p> <p>Los profesores mencionaran las dificultades que encuentran en el diseño de problemas y mencionar el porqué.</p> <p>Los profesores van a mencionar las dificultades que ellos encuentran en la enseñanza de problemas multiplicativos y lo que identifican en relación a las dificultades de los estudiantes.</p> <p>Los profesores van a debatir un problema de área.</p>				
Hora/ Tiempo	Tema	Actividad propuesta	Responsable	Procedimiento
12:00 – 12:05 5 min.	Síntesis	Mencionar aspectos importantes de	Coordinadora y profesores.	La coordinadora dará la bienvenida a la sesión tres, y mencionará aspectos importantes

		las sesiones anteriores.		que se han observado a lo largo de las dos sesiones anteriores. Invitar a los profesores a comentar aspectos que ellos consideren relevantes.
12:05 – 12:10 5 min.	Presentar objetivos	Presentar los objetivos de las Jornadas Académicas.	Coordinadora y profesores.	La coordinadora va a presentar nuevamente una diapositiva con los objetivos de las Jornadas. Invitar a los participantes a comentar acerca de las reflexiones que han realizado hasta ese momento.
12:10 – 12:40 30 min.	Análisis de problemas	Presentación de problemas.	Profesores.	De manera voluntaria los maestros van a presentar el diseño de sus problemas. Los que modificaron. Como lo resolvería, como se imagina la forma de resolver de sus estudiantes. Que implica dividir.
12:40 – 13:00 20 min.	Ajustes problemas	Mencionar las modificaciones de los problemas revisados.	Profesores.	De la reunión anterior quedaron dos problemas a los que realizarían ajustes para cumplir las condiciones de problema multiplicativo, además de presentar la resolución de un problema. Es importante reflexionar acerca de cómo se puede modificar el problema con la operación inversa. Pedir que lo fundamenten. ¿Con que tiene que ver? Ellos pueden hacer sugerencias del cambio de preguntas. ¿La pregunta es apropiada para el enunciado del problema? Ustedes consideran que los estudiantes lo pueden entender. ¿Cómo se puede justificar el problema?

13:00 – 13:50 50 min.	Diseño y resolución de problemas	Los profesores presentarán el diseño y justificarán la estrategia de resolución del problema.	Coordinadora y profesores.	Se van a proponer dos fracciones y los profesores presentarán un diseño y la propuesta de resolución, la van a explicar y justificar sus procedimientos.
13:50 – 14:00 10 min.	Síntesis y tarea	Recuperar aspectos importantes de la sesión y las actividades para la siguiente sesión.	Coordinadora y profesores	La coordinadora va a recuperar los aspectos importantes de la sesión en curso. Invitar a los participantes a mencionar las reflexiones que tienen respecto a las actividades desarrolladas durante la sesión. La coordinadora va a mencionar la actividad para la siguiente reunión (los profesores van a resolver 2 problemas) y van a enviar vía correo electrónico la resolución del problema.
		Calcular la altura de un rectángulo sabiendo que su área es $\frac{9}{2}$ y su base es $\frac{5}{3}$ .  Si un rollo de telas mide $63\frac{1}{4}$ metros. Y se sabe que la hechura de un pants se lleva $1\frac{1}{2}$ . ¿Cuántos pants saldrán del rollo de tela?		Debatir acerca del problema del área
Observaciones generales		De acuerdo al desarrollo de la sesión se considera tener flexibilidad en cuanto al tiempo designado para las actividades donde los profesores manifiestan sus conocimientos y experiencias en torno a la enseñanza.		



# Apéndice D

## Congresos y cartas de aceptación



**CIAEM**  
**CME**

Organización Afiliada - Organização Afiliada - Affiliate Organization  
International Commission on Mathematical Instruction



Comité Interamericano de Educación Matemática  
Comitê Interamericano de Educação Matemática  
Inter American Committee of Mathematics Education

Fundado **Founded**: 1961

### Executive Committee

#### President

Angel Ruiz (Costa Rica)  
[ruizz.angel@gmail.com](mailto:ruizz.angel@gmail.com)  
<http://angelruizz.com>

#### Vice-presidents

Eduardo Mancera (México)  
[eduardo\\_mancera@prodigy.net.mx](mailto:eduardo_mancera@prodigy.net.mx)

Patrick Scott (United States)  
[pscott@nmsu.edu](mailto:pscott@nmsu.edu)

#### Secretary

Claudia Groenwald (Brasil)  
[claudia1959@yahoo.com.br](mailto:claudia1959@yahoo.com.br)

#### Regional Members at Large

##### North America

Eduardo Basurto (México)  
[basurtoemat@hotmail.com](mailto:basurtoemat@hotmail.com)

##### Central America

Hugo Barrantes (Costa Rica)  
[habarran@gmail.com](mailto:habarran@gmail.com)

##### The Caribbean

Sarah González (República Dominicana)  
[sarahgonzalez@pucmmsti.edu.do](mailto:sarahgonzalez@pucmmsti.edu.do)

##### Andean Region

Jhony A. Villa (Colombia)  
[jhonvvilla@gmail.com](mailto:jhonvvilla@gmail.com)

##### Souther Cone

Gustavo Bermúdez (Uruguay)  
[gbermudez@adinet.com.uy](mailto:gbermudez@adinet.com.uy)

##### Luso American Region

Alessandro Ribeiro (Brasil)  
[alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br](mailto:alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br)

### Expresidents

Ubiratan D'Ambrosio (Brasil)  
[ubi@usp.br](mailto:ubi@usp.br)

Eduardo Luna (República Dominicana-USA)  
[Eduardo\\_luna@comcast.net](mailto:Eduardo_luna@comcast.net)

Fidel Oteiza (Chile)  
[fidel.oteiza@gmail.com](mailto:fidel.oteiza@gmail.com)

Carlos Vasco (Colombia)  
[carlosovasco@gmail.com](mailto:carlosovasco@gmail.com)

Salett Biembengut (Brasil)  
[maria.salett@gmail.com](mailto:maria.salett@gmail.com)

<http://www.ciaem-iacme.org>

December 09, 2018  
San José, Costa Rica

Professor  
**Marta Ramírez Cruz**  
**Marta Elena Valdemoros Álvarez**  
**México**

Dear professor,

I am very pleased to inform you that your submission with the title “Estrategias de enseñanza para fracciones y problemas multiplicativos” has been accepted by the *International Program Committee of our XV Inter American Conference on Mathematics Education (XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)*, to be held in Medellín, Colombia, May 5-10, 2019.

As you should know, for a definitive inclusion of a contribution in the scientific program at least one of its authors must pay the conference fees before March the 1st 2019.

Thank you very much for accompanying us in our conference. We are looking forward to see you in Medellín.

Best regards

**Angel Ruiz**  
President  
International Program Committee IACME XV CIAEM  
Inter-American Committee on Mathematics Education

5<sup>o</sup>

Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa



**Reconocimiento a**

**Marta Ramírez Cruz**

**por su ponencia:**

*Los Problemas Multiplicativos con Números Fraccionarios  
en Secundaria: El Caso de la Profesora Rosa*

Handwritten signature of Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez.

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Handwritten signature of Dra. Ana María Ojeda Salazar.

Dra. Ana María Ojeda Salazar

Handwritten signature of Dr. Luis Enrique Moreno Armella.

Dr. Luis Enrique Moreno Armella

Cd. de México, 25 al 29 de noviembre de 2019, Auditorio *José Adem*, Campus Zacatenco

Fondo: www.shutterstock.com 243489131

**Mensaje**

**Fecha:** 23 de mayo de 2020 4:50 am

**Desde:** Ana Isabel Sacristán

**A:** MARTA RAMIREZ CRUZ, Marta Elena Valdemoros Alvarez

**Tema:** Notificación de aceptación de envío de PME-NA 42

[Versión en español al final del mensaje en inglés]

**\*\*\* Información importante contenida. Lea este mensaje con atención y en su totalidad. \*\*\***

Estimada MARTA RAMIREZ CRUZ:

Esperamos que esto te encuentre bien y seguro.

**1. Aceptación a la 42ª Reunión Anual del Capítulo de América del Norte del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática**

Nos complace informarle que hemos aceptado su propuesta titulada

**"Los Procesos Cognitivos de Profesores Durante la Enseñanza de Fracciones y Problemas Multiplicativos"** como

**Breve informe de investigación**

para su inclusión en la 42ª Conferencia PME-NA. Es posible que sus coautores no hayan recibido esta notificación, así que infórmeles reenviando este mensaje. Recibimos 500 propuestas y debido a limitaciones de asignación, no pudimos aceptar muchas buenas propuestas en el tipo presentado. Al final, alrededor de un tercio (35%) de las propuestas presentadas para el Informe de Investigación fueron aceptadas como tales; aproximadamente la mitad de los Informes breves de investigación fueron aceptados como tales; y el 82% de los carteles fueron aceptados.

Puede ver los comentarios realizados por los revisores accediendo a

AllAcademic ( <https://convention2.allacademic.com/one/pmena/pmena20>): Vaya a "Menú del remitente"> "Enviar o editar una propuesta"> "Cargar o realizar un seguimiento de los envíos"> "Envíos" o "Participaciones": en la columna Acción a la derecha de la propuesta, haga clic en "resumen de revisión".