

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

PROGRAMA DE SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA

"Desarrollo y control de un vehículo aéreo no tripulado compuesto de aviones de ala fija"

T E S I S

Que presenta

M.C. JOSÉ ANTONIO BAUTISTA MEDINA

Para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

EN SISTEMAS AUTÓNOMOS DE NAVEGACIÓN AÉREA Y SUBMARINA

Directores de la Tesis: DR. ANTONIO OSORIO CORDERO DR. ROGELIO LOZANO LEAL Ciudad de México DICIEMBRE, 2022

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado a través del programa de Becas Nacionales para la realización de este proyecto.

Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) y al Departamento de Becas y Estímulos por el apoyo para la obtención de grado a través del programa de becas Elisa Acuña.

Al laboratorio UMI-LAFMIA y sus integrantes por su hospitalidad y apoyo durante mi estancia.

A mis asesores de tesis, el Dr. Antonio Osorio y el Dr. Rogelio Lozano, por su paciencia, constante apoyo y colaboración durante el desarrollo de esta investigación.

A los miembros del jurado de tesis y examen de grado por su tiempo y contribución a este trabajo.

A mis familiares y amigos que me han motivado y apoyado hasta alcanzar esta meta.

CONTENIDO

AGRAI	DECIMIENTOS	ш
LISTA	DE FIGURAS	IX
LISTA	DE TABLAS	XIII
LISTA	DE ABREVIATURAS	xv
RESUM	IEN	xvII
ABSTR	ACT	XIX
	1 CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES	
1.1.	Introducción	1
1.2.	Clasificación de los vehículos aéreos no tripulados	2
	1.2.1. Vehículos híbridos de ala rotativa	3
1.3.	Motivación del trabajo de investigación	7
1.4.	Planteamiento del problema	7
1.5.	Justificación	8
1.6.	Objetivos de la investigación	8
	1.6.1. Objetivo general	8
	1.6.2. Objetivos específicos	8
1.7.	Vehículo propuesto	9
	CAPÍTULO 2	
	2 MODELADO DEL SISTEMA	
2.1.	Introducción	11
2.2.	Descripción del sistema	12
	2.2.1. Restricciones	13
	2.2.2. Posición y velocidad	14
	2.2.3. Orientación del vehículo	15
	2.2.4. Energía cinética y energía potencial	17

2.3.	Fuerzas y momentos		
	2.3.1.	Fuerza de sustentación y de arrastre	19
	2.3.2.	Fuerza de empuje	20
	2.3.3.	Fuerzas y momentos generalizados	21
2.4.	Ecuac	iones de movimiento	24
	2.4.1.	Ecuaciones de movimiento simplificadas	28
	2.4.2.	Ecuaciones de movimiento en el plano horizontal	30
	3	CAPÍTULO 3 estrategia de control	
3.1.	Introd	ucción	33
3.2.	Coma	ndos de control	34
3.3.	Coma	ndos colectivo y cíclico	35
3.4.	El áng	ulo de guiñada	38
3.5.	Estrat	egia de control general	40
3.6.	Estrat	egia de control en el plano horizontal	42
	3.6.1.	Estrategia basada en un control PD cíclico	42
	3.6.2.	Estrategia basada en una función positiva	44
	4	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO	
4.1.	4 Introd	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO	49
4.1. 4.2.	4 Introd Metod	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49
4.1. 4.2.	4 Introd Metoc 4.2.1.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 49
4.1. 4.2.	4 Introd Metoc 4.2.1. 4.2.2.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 49 51
4.1. 4.2.	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 49 51 53
4.1. 4.2.	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 49 51 53 54
4.1. 4.2.	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 51 53 54 55
4.1.4.2.4.3.	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5. Protot	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 51 53 54 55 57
4.1.4.2.4.3.	4 Introd Metoc 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5. Protot	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO	49 49 51 53 54 55 57
4.1.4.2.4.3.5.1.	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5. Protot 5 Introd	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO	49 49 51 53 54 55 57 59
 4.1. 4.2. 4.3. 5.1. 5.2. 	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5. Protot 5 Introd Simul	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción	49 49 51 53 54 55 57 59 59
 4.1. 4.2. 4.3. 5.1. 5.2. 	4 Introd Metod 4.2.1. 4.2.2. 4.2.3. 4.2.4. 4.2.5. Protot 5 Introd Simula 5.2.1.	CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL PROTOTIPO ucción lología selección del motor Selección del perfil aerodinámico Selección del perfil aerodinámico Estimación del peso y carga alar Dimensionamiento geométrico Construcción del primer avión ipo final CAPÍTULO 5 RESULTADOS ucción simulación del control general	49 49 51 53 54 55 57 59 59 59

5.3.	Resultados experimentales		
	5.3.1. Componentes en el prototipo	71	
	5.3.2. Pruebas experimentales	72	
	6 CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES		
6.1.	Conclusiones	77	
6.2.	Trabajo futuro	78	
BIBLIO	OGRAFÍA	79	

LISTA DE FIGURAS

1.1.	Clasificación de los vehículos aéreos híbridos	2
1.2.	Vehículos aéreos no tripulados: Avión y helicóptero	3
1.3.	Sámara autorotante: Semilla de arce	4
1.4.	Vehículos con configuración de ala rotativa	6
1.5.	Vehículos de ala rotativa	6
1.6.	Ventajas del vehículo propuesto.	10
2.1.	Sistema de aviones con marcos de referencia	12
2.2.	Velocidades lineales, angulares y momentos en el marco del cuerpo	13
2.3.	Sistema visto como dos partículas unidas por una barra rígida	14
2.4.	Principales fuerzas actuando en el sistema.	19
2.5.	Elementos de la sección del ala	19
2.6.	Gráfica de coeficiente de empuje de una hélice 4.5x3	21
2.7.	Sistema de aviones en el plano horizontal	30
2.8.	Diagrama del sistema en el marco inercial	31
3.1.	Mecanismo de plato cíclico en un helicóptero	34
3.2.	Marco de referencia en un helicóptero y en el vehículo propuesto	35
3.3.	Marco de referencia del piloto.	35
3.4.	Comando de control colectivo.	36
3.5.	Comandos de control cíclico.	37
3.6.	Ángulo de guiñada del vehículo.	38
3.7.	Ángulo de guiñada del vehículo con ángulo de desacoplamiento μ .	39
3.8.	Trayectoria del vehículo	39
4.1.	Metodología de la construcción del sistema	50
4.2.	Motor DYS modelo FIRE 2206	50
4.3.	Hélices que se examinaron con el motor	51
4.4.	Prueba con la hélice DIATONE 6045	51
4.5.	Prueba con la hélice DALPROP 5046 X 3P	52
4.6.	Prueba con la hélice DALPROP 5045BN	52
4.7.	Curvas del coeficiente de levantamiento para tres perfiles	53
4.8.	Diseño CAD: Vista superior del primer avión.	54

4.9.	Diseño CAD: Vista lateral del primer avión	55
4.10.	Prototipo inicial del avión	56
4.11.	Diseño CAD: Vista superior del avión final	57
4.12.	Diseño CAD: Vista superior del prototipo	58
4.13.	Prototipo final con los dos aviones.	58
5.1.	Dinámica de la altitud	60
5.2.	Dinámica de la velocidad de guiñada.	60
5.3.	Seguimiento de la trayectoria angular deseada	61
5.4.	Dinámica de los controles de posición	61
5.5.	Dinámica de los controles de orientación	62
5.6.	Elevación del disco del rotor.	62
5.7.	Trayectoria del sistema	62
5.8.	Estado del vehículo en la condición inicial.	64
5.9.	Estado del vehículo después de girar.	64
5.10.	Trayectoria de los aviones	64
5.11.	Trayectoria del CG	65
5.12.	Velocidad angular de guiñada.	65
5.13.	Fuerzas de empuje en cada avión	66
5.14.	Variación del ángulo μ en grados	66
5.15.	Errores de posición.	66
5.16.	Norma del vector de posición	67
5.17.	Estado del vehículo en la condición inicial	67
5.18.	Estado del vehículo después de algunos giros.	67
5.19.	Trayectoria del vehículo.	68
5.20.	Trayectoria del CG.	69
5.21.	Velocidad angular de guiñada.	69
5.22.	Señales de control.	70
5.23.	Errores de posición.	70
5.24.	Norma de los estados de posición.	70
5.25.	Componentes utilizados en el prototipo	71
5.26.	Prueba experimental: Posición en el plano XY	72
5.27.	Prueba experimental: Ángulo de alabeo estimado.	73
5.28.	Prueba experimental: Velocidad de alabeo estimada	73
5.29.	Prueba experimental: Ángulo de cabeceo estimado.	73
5.30.	Prueba experimental: Velocidad de cabeceo estimada	74

5.31. Prueba experimental: Ángulo de guiñada estimado	74
5.32. Prueba experimental: Velocidad de guiñada estimada	74
5.33. Prueba experimental: Posición en z	75
5.34. Prueba experimental: Velocidades lineales	75

LISTA DE TABLAS

1.1.	Ventajas y desventajas de algunos UAVs híbridos	4
1.2.	Clasificación de las leyes de control de los UAV híbridos	5
5.1.	Parámetros de simulación del control general.	60
5.2.	Parámetros de simulación del control PD cíclico	63
5.3.	Parámetros de simulación para el control con la función positiva.	67

LISTA DE ABREVIATURAS

x, y, z	Ejes coorder	ados del marco inercial
x_b, y_b, z	, Ejes coordenados del marco en el cuerpo	
φ, θ, ψ	Ángulos de	Euler : Alabeo, Cabeceo y Guiñada.
u, v, u	Velocidad er	n los ejes del cuerpo
p, q, r	Velocidad ar	ngular en los ejes del cuerpo
L, M, N	Momentos a	lrededor de los ejes del cuerpo
T ₁ , T ₂	Fuerzas de e	empuje en los aviones
L ₁ , L ₂	Fuerzas de s	ustentación en los aviones
D ₁ , D ₂	Fuerzas de a	rrastre en los aviones
Va	Velocidad co	on respecto al aire
R ^b _i	Matriz de ro	tación del marco inercial al marco del cuerpo
R_{η}	Matriz que r	elaciona p, q, r con los ángulos de Euler
f_x, f_y, f_z	Fuerzas en l	os ejes del marco del cuerpo
F_X, F_Y, F	Z Fuerzas en l	os ejes del marco inercial
\mathcal{L}	Lagrangiand)
К, Р	Energías cin	ética y potencial
$\mathcal{K}_{tr}, \mathcal{K}_{ro}$	t Energías cin	éticas de traslación y rotación
q		Vector de coordenadas generalizadas
r		Vector de posición inercial
η		Vector de orientación
$J(\eta)$		Tensor de inercia en coordenadas generalizadas
Ι		Tensor de inercia
I _{xx} , I _{yy} ,	I _{zz}	Momentos de inercia de los ejes principales
I _{xy} , I _{yx} ,	$I_{yz}, I_{zy}, I_{zx}, I_{xz}$	Momentos de inercia
VANT	Vehículo Aéreo	no Tripulado
UAV	Unmanned Aer	ial Vehicle
HTOL	Horizontal Take	e-Off and Landing
VTOL	ГОL Vertical Take-Off and Landing	
PID	Proporcional-In	tegral-Derivativo
PD	Proporcional-D	erivativo

RESUMEN

En esta tesis se propone un vehículo aéreo no tripulado (UAV) con una configuración novedosa, que exhibe las características de vuelo más relevantes del avión y del helicóptero.

La propuesta consta de dos aviones de ala fija unidos por una barra rígida, configuración que por su geometría y manera de volar se parece a la de un rotor de gran tamaño.

Se analiza el vehículo propuesto, se obtienen las ecuaciones de movimiento en el espacio tridimensional y en el plano horizontal. Se desarrollan estrategias de control para la posición y orientación del vehículo, que emulan la función del plato cíclico del helicóptero.

Con el modelo obtenido y las estrategias de control propuestas, se realizan simulaciones numéricas que muestran un comportamiento dinámico de vuelo satisfactorio. Para complementar el estudio teórico, se presentan los detalles del diseño y la construcción del prototipo que se empleó en la realización de pruebas experimentales.

Los resultados de esta investigación evidencian que la configuración propuesta tiene un gran número de los valiosos atributos requeridos en la investigación y estudio de los vehículos aéreos no tripulados híbridos.

ABSTRACT

In this thesis a new configuration of an unmanned aircraft (UAV) that exhibits the most relevant flight characteristics of planes and helicopters is proposed.

The UAV proposed consists of two fix wing airplanes, joined by a rigid rod attached to their wings, configuration that due to its geometry and way of flying resembles a rotor of big size.

The resulting aircraft is analysed, and its motion equations are obtained in the tri dimensional space and in the plane. Control strategies for position and attitude are proposed, that emulate the behaviour of a cyclic plate of a helicopter.

Numerical simulations employing the model and the control strategies proposed showed a satisfactory dynamic behaviour. In order to complement the theoretical study, details of the design and construction of the prototype employed in the experimental tests are presented.

The results of this research make evident the fact that the proposed configuration possesses a big number of the valuable attributes required in the study of air unmanned hybrid vehicles.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

SECCIÓN 1.1

Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT) se pueden clasificar como vehículos de ala fija y de ala giratoria, o aviones y helicópteros. Una de las principales características de los aviones es que pueden volar largas distancias y consumir mucha menos energía que los helicópteros, pero a diferencia de los aviones, los helicópteros pueden flotar. Esta es la clasificación más común pues son las configuraciones más representativas en el mundo de los vehículos aéreos. Pero además, los VANT pueden clasificarse por sus características de rendimiento [1] como el peso, la envergadura, la carga de las alas, el alcance, la altitud máxima, la velocidad, la resistencia y los costes de producción. Incluso pueden clasificarse en función de sus tipos de motor, por ejemplo motores de combustión o eléctricos. En las últimas décadas, debido al desarrollo de los vehículos aéreos no tripulados y la creciente demanda de misiones con mayores requerimientos se han hecho esfuerzos para diseñar y fabricar drones con características especiales llamados vehículos convertibles. Este tipo de vehículos combinan características de las configuraciones convencionales, en general su objetivo es volar tan eficientemente como un avión y flotar como un helicóptero.

La siguiente sección expone una breve clasificación de los vehículos aéreos con un enfoque en los vehículos híbridos, sus ventajas y desventajas y las leyes de control que se utilizan. Se hace énfasis en el tipo de vehículo que se desarrollará en esta investigación, posteriormente se presenta la problemática, la justificación de la investigación y la propuesta del vehículo híbrido a desarrollar, además se establecen el objetivo general y los objetivos particulares de esta investigación.

SECCIÓN 1.2 **Clasificación de los vehículos aéreos no tripulados**

Los vehículos aéreos no tripulados se distinguen principalmente por su finalidad operativa, sin embargo esto puede variar mucho según su tamaño o la configuración. Por esta razón, a menudo es útil categorizarlos en términos de sus capacidades de misión. La forma de vuelo es una de estas capacidades mayormente valoradas, por ello es conveniente clasificar a los vehículos por esta cualidad (ver Figura 1.1), ya sea que pueden realizar despegue y aterrizaje horizontal (HTOL por sus siglas en inglés) tal como lo hacen los aviones de ala fija, despegue y aterrizaje vertical (VTOL) característica distintiva de los helicópteros y multirotores (ver Figura 1.2), o por tener cualidades híbridas de vuelo.

Los vehículos de ala fija poseen una gran eficiencia aerodinámica, debido a que



Figura 1.1 Clasificación de los vehículos aéreos híbridos

emplean un ala que ayuda a sustentar su propio peso, su estructura le hace tener características favorables como cubrir áreas extensas, tener estabilidad de vuelo por su aerodinámica, son silenciosos, pueden volar a mayor altura, tienen mayor tiempo de vuelo, estructura simple, recuperación segura en caso de pérdida de potencia en el motor; y al mismo tiempo tener carencias como necesitar una zona plana para aterrizar y despegar o un lanzador, su despegue es asistido por una persona de forma manual, no pueden mantener un vuelo estático suspendido, difícilmente pueden entrar en un lugar cerrado, precios más elevados, menos compactos, menos eficientes para mapeo.

Los helicópteros o multirotores son la contraparte a los vehículos de ala fija, es-

tos utilizan uno o varios rotores para sustentar su propio peso pudiendo despegar verticalmente, pero carecen de eficiencia aerodinámica. De sus cualidades más importantes es la de poder ingresar a zonas inaccesibles, despegar y aterrizar verticalmente, se pueden mantener con vuelo suspendido, precios bajos, son más económicos, y presentan algunas debilidades como tiempo de vuelo limitado, ruidoso, no es aerodinámico, no vuelan con lluvia o vientos fuertes.



Figura 1.2 Vehículos aéreos no tripulados: Avión y helicóptero.

El diseño de los **vehículos híbridos** busca tener las mejores y más valiosas cualidades de tal forma que sean de gran utilidad en sus misiones de vuelo. En la búsqueda de esas características se han presentado ciertas complejidades, en la Tabla 1.1 se enlista algunos tipos de vehículos híbridos con sus respectivas ventajas y desventajas [2].

Además es importante mencionar las principales técnicas de control que se han utilizado en los vehículos híbridos [2], estas estrategias se listan en la Tabla 1.2.

1.2.1. Vehículos híbridos de ala rotativa

En el mundo de los vehículos híbridos es común encontrar diseños que se han inspirado en el comportamiento de plantas o animales. Tal es el caso de algunos vehículos aéreos que han encontrado en la sámara características merecedoras de replicar. La sámara es una fruta o semilla con forma alada (ver Figura 1.3) que entra en autorotación cuando cae, esta forma de descenso ocasiona que la velocidad de caída sea más lenta y pueda alcanzar mayor distancia horizontal con ayuda del viento. El descenso en autorotación de la sámara posee autoestabilidad, esta cualidad valiosa ha sido el interés de investigaciones como [3, 4, 5, 6] donde se han analizado la aerodinámica, mecánica y propiedades estructurales inherentes a la autoestabilidad. Estos estudios han demostrado que la aerodinámica de las sámaras

Tipo	Ventajas	Desventajas
Tilt-Rotors	Controlabilidad y estabilidad, común en la investigación, fácil	Bajo rendimiento aerodinámi- co, complejidad estructural, ac-
Tilt-Wings	despegue y aterrizaje, simple Buen rendimiento aerodinámi- co, común en la investigación y la industria, mecanismo de	tuadores necesarios Vulnerable a los vientos cruza- dos, difícil de aterrizar en cu- biertas móviles, se requieren ac-
Rotor-Wings	Facilidad de despegue y aterri- zaje, peso ligero	Intentos anteriores infructuo- sos, mecanismo de transición complejo, inestable debido al rotor único
Tilt-Body	No se necesitan actuadores adi- cionales, vuelo eficiente hacia adelante, varias opciones de di- seño para la geometría del ala.	Vuelo vertical inestable, baja ve- locidad de crucero, sistemas de control complejos, baja capaci- dad de carga útil, menor tiempo de vuelo, se requieren mecanis- mos de aterrizaje de cola fuer- tes, vulnerable a los vientos cru- zados.

Tabla 1.1Ventajas y desventajas de algunos UAVs híbridos.

es muy similar en muchos aspectos a la de los helicópteros, autogiros u otras aeronaves similares. Los vehículos de ala rotativa, como el helicóptero, se caracterizan



Figura 1.3 Sámara autorotante: Semilla de arce

por utilizar alas o palas que a la vez forman parte de un rotor que gira sobre un eje fijo para proveer la fuerza de sustentación. Con frecuencia se puede encontrar a este tipo de vehículos con el nombre de rotor-wing, stop-rotor pero en general se basan en el mismo principio.

Con el paso del tiempo se han presentado diversas configuraciones de ala rotati-

Ley de control	Ventaja	Desventaja
PID	Fácil implementación, diseño de esquema de control muy común en aplicaciones de la vida real, no requiere el conocimiento del mo- delo del UAV	Poca capacidad de robustez en comparación con el con- trolador robusto cuando el sistema se enfrenta a múlti- ples retos, no es una solu- ción óptima
LQR	Maneja sistemas dinámicos com- plejos y múltiples actuadores, robusto frente a la incertidum- bre del proceso, asintóticamen- te estable para sistemas contro- lables, márgenes de estabilidad muy grandes frente a errores en el bucle	Requiere acceso al estado completo, lo que no siem- pre es posible
Backstepping	Muy robusto ante las perturba- ciones externas y las incertidum- bres de los parámetros irregula- res, trata todos los estados del sis- tema y tiene en cuenta las no li- nealidades	No es óptimo, es caro des- de el punto de vista compu- tacional para el funciona- miento en tiempo real
Gain-Scheduling	Permite una fácil comprensión y una sencilla aplicación de las le- yes de control en toda la envol- vente de vuelo	Computacionalmente caro para operar en tiempo real
NDI	Los bucles cerrados pueden ajus- tarse fácilmente	Requiere un conocimiento preciso de los coeficientes aerodinámicos

 Tabla 1.2
 Clasificación de las leyes de control de los UAV híbridos.

va, algunos de los modelos como [7, 8] aplicaron esta metodología y se enfrentaron a grandes retos para balancear las complejidades de diseño con respecto a la aerodinámica y la mecánica.

Las dificultades en cuanto al diseño de este tipo de vehículos se han mantenido, tanto para el desarrollo de aeronaves tripuladas como no tripuladas, sin embargo con ayuda de la tecnología emergente y la investigación se ha logrado hacer frente a estos retos. En la categoría de vehículos no tripulados se pueden mencionar algunos diseños que asemejan a la apariencia de la sámara reportados en [9, 10, 11, 12, 13, 14] y otros más recientes como F-SAM [15] que destaca por su innovación de poder plegarse y desplegarse. Es notorio que cada vez surgen más avances en este ramo permitiendo un mayor desarrollo en la dinámica de modelado, los parámetros de





(a) Sikorsky S-72 modificado como X-Wing [7].

(b) Boeing X-50 Dragonfly [8].

Figura 1.4 Vehículos con configuración de ala rotativa.



(c) F-SAM [15]. Figura 1.5 Vehículos de ala rotativa.

diseño y las estrategias de control.

SECCIÓN 1.3 **Motivación del trabajo de investigación**

El desarrollo de esta investigación responde a la necesidad de desarrollar nuevas configuraciones de vehículos aéreos no tripulados que incorporen características de vuelo híbridas para hacer frente a los principales requerimientos en misiones con vehículos aéreos, al mismo tiempo reducir la complejidad mecánica y aerodinámica. La motivación se centra en poder aportar conocimiento en el modelado y control de vehículos híbridos, que permita el avance de la investigación en esta área.

SECCIÓN 1.4

Planteamiento del problema

Los vehículos aéreos no tripulados se han tornado progresivamente imprescindibles para salvar vidas en misiones de búsqueda y rescate, trabajos medioambientales, agricultura, construcción, y mucho más. Las misiones que se realizan en algunos de estos sectores comúnmente se efectúan con helicópteros o aviones. Aunque algunas veces estas configuraciones satisfacen las necesidades requeridas, es común requerir las ventajas que proporcionan ambas configuraciones como un amplio rango de vuelo de un avión y a su vez el poder despegar de áreas reducidas y volar en un punto como lo hacen los helicópteros.

Ante esta necesidad de adquirir las mejores cualidades de un avión y un helicóptero, se ha desarrollado la línea de investigación de los vehículos híbridos. Ha habido intentos efectivos de diseños que logran unificar estas características deseables, pero también adquieren las desventajas propias de ambas configuraciones lo que aumenta la complejidad en cuanto al diseño mecánico y aerodinámico.

Los estudios sobre el diseño de vehículos híbridos han demostrado que mientras exista un desbalance en cuanto a la complejidad mecánica y desempeño aerodinámico, los vehículos híbridos no serán suficientemente eficientes para satisfacer los requerimientos de su cometido.

Abordar este problema tendrá beneficios para la investigación y contribuirá en el desarrollo de nuevas configuraciones para hacer frente ante los retos actuales de los vehículos híbridos. SECCIÓN 1.5

Justificación

Los vehículos aéreos híbridos en la búsqueda de unificar las mejores cualidades del mundo de los aviones y helicópteros siguen enfrentándose a retos que limitan el avance de su propósito. Esta limitante principalmente se debe a la complejidad que conlleva el diseño de una configuración con capacidades híbridas. El avance de la investigación muestra el esfuerzo por confrontar y hallar soluciones, pero aún no se ha podido desarrollar una resultado balanceado.

En esta investigación se pretende proponer y estudiar una configuración de vehículo aéreo no tripulado híbrido que integre las mejores cualidades de las configuraciones convencionales enfocándose en reducir la complejidad mecánica, mantener buenas propiedades aerodinámicas y procurando un sistema inherentemente estable. Además, el estudio de una nueva configuración aportará valiosa información al desarrollo y avance en la investigación de los vehículos híbridos.

SECCIÓN 1.6

Objetivos de la investigación

1.6.1. Objetivo general

El objetivo de esta investigación es desarrollar y controlar un vehículo aéreo no tripulado compuesto de aviones de ala fija con la habilidad de despegar en áreas reducidas, realizar vuelo estacionario, trasladarse y aterrizar.

1.6.2. Objetivos específicos

- Proponer el concepto del vehículo aéreo no tripulado.
- Obtener el modelo matemático del vehículo propuesto.
- Formular las estrategias de control para orientación y posición.
- Realizar simulaciones numéricas del sistema.
- Desarrollar la plataforma experimental.
- Realizar pruebas de vuelo del prototipo.
- Analizar el comportamiento de vuelo.

Vehículo propuesto

Descripción

El vehículo propuesto se asemeja a la dinámica de una sámara debido a que se encuentra en constante rotación y además se puede manipular la velocidad de rotación, la dirección y por ende su altura. El vehículo consta de dos aviones de ala fija, cada avión se une al extremo de una varilla rígida y ligera, este arreglo tiene la forma de un rotor como en los helicópteros donde cada avión juega el rol de una pala. Los aviones se equipan con los elementos típicos de esta configuración, como un ala, superficies de control, batería, motores, hélices, servomotores, hardware en general y sensores.

Operación de vuelo

La operación del vehículo se realiza mediante el control individual de los aviones y sus superficies de control, con lo cual se pueden producir dos tipos de movimientos, traslación vertical y traslación horizontal. La metodología para lograr estos movimiento sigue el principio de los comandos *colectivo* y *cíclico* en los helicópteros.

Desplazamiento vertical

El desplazamiento vertical usa el comando colectivo donde cada avión se configura para actuar de forma simultánea, ya sea incrementando o disminuyendo el empuje de los motores que en consecuencia cambia la velocidad angular del sistema o de otro modo se logra al ajustar el cabeceo de cada avión con ayuda del elevador.

Desplazamiento horizontal

El desplazamiento horizontal se logra con comandos cíclicos, donde las entradas de control se cambian de forma sinusoidal a lo largo de la rotación.

Beneficios del sistema

El vehículo combina las mejores características de un avión y un helicóptero convencional. Esta configuración tiene la ventaja de mantener una estructura mecánica bastante simple, conserva las características aerodinámicas de los aviones y posee estabilidad. Adicionalmente, no requiere una velocidad lateral para mantener la sustentación, por lo tanto puede cambiar de dirección rápidamente y puede hacer maniobras precisas. Las principales ventajas que aporta esta configuración se tienen:



Figura 1.6 Ventajas del vehículo propuesto.

Despegue y aterrizaje vertical - Vuelo estacionario: El vehículo es capaz de despegar y aterrizar verticalmente, esto lo hace idóneo en misiones con un área reducida para realizar maniobras. Además puede mantenerse suspendido en el aire.

Simplicidad mecánica: Al estar construidos por aviones su estructura mecánica es más simple que el mecanismo usado en un helicóptero.

Rigidez centrífuga: La rotación de los aviones generan fuerzas centrífugas que ayudan mitigar los momentos de flexión y la flexibilidad que normalmente se encuentran en los aviones de ala fija. También reduce la cantidad de material estructural necesario para agregar rigidez dentro de la sección del ala.

Eficiencia aerodinámica y energética: Al usar aviones para formar el vehículo se heredan sus características, se mantiene una buena aerodinámica y por consiguiente el consumo energético también se ve beneficiado.

Silencioso y menor turbulencia: La configuración puede ser tan silenciosa como un avión ya que se genera menor turbulencia debido a que el aire fluye con mayor suavidad a través de las alas.

Potencial de transportar carga útil: El vehículo ofrece el potencial de llevar cargas útiles relativamente pequeñas.

CAPÍTULO 2

MODELADO DEL SISTEMA

SECCIÓN 2.1

Introducción

El modelo dinámico del sistema unirotor se obtiene utilizando el enfoque de Euler-Lagrange con fuerzas generalizadas externas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{i}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{i}} = Q_{i} \quad 1 \leq i \leq n \tag{2.1}$$

donde \mathcal{L} es el Lagrangiano definido como $\mathcal{K} - \mathcal{P}$, \mathcal{K} es la energía cinética (relativa a los ejes inerciales), \mathcal{P} es la energía potencial, n es el número de grados de libertad, q₁ a q_n son las coordenadas generalizadas, Q₁ a Q_n son las fuerzas generalizadas y d/dt significa diferenciación de los términos escalares con respecto al tiempo. La diferenciación parcial con respecto a \dot{q}_i y q_i se lleva a cabo asumiendo que todos los otros \dot{q} , todos los q y el tiempo se mantienen fijos [16].

Un sistema de N partículas libres en un espacio tridimensional requerirá 3N coordenadas para especificar la configuración pero si hay limitaciones entre las coordenadas, el número de coordenadas independientes se reducirá. En general, si hay r ecuaciones de restricción, entonces se establece la relación n = 3N - r donde n será el número de grados de libertad.

En las secciones posteriores se presenta el desarrollo de las ecuaciones de movimiento para un vehículo aéreo no tripulado aplicando el enfoque de Euler-Lagrange. SECCIÓN 2.2

Descripción del sistema

El vehículo aéreo no tripulado está conformado por dos aviones de ala fija conectados entre ellos por una unión rígida (Véase Figura 2.1). Cada vehículo proporciona sustentación, propulsión y control para desplazar el sistema. Dada la configuración, el sistema pareciera un único rotor como el que poseen los helicópteros, donde los aviones serían equivalentes a las palas del rotor.

Los aviones se controlan individualmente a través de sus hélices y superficies de control, y el sistema de aviones se controla coordinando las fuerzas transmitidas por los vehículos. A la vez, esto permite controlar el sistema mediante el accionamiento combinado y sincronizado de motores eléctricos y las superficies aerodinámicas acopladas en cada uno de los aviones. Para representar al sistema de aviones en el espacio y cualquier elemento relacionado se utilizan dos sistemas de referencia, el marco inercial (x_i , y_i , z_i) y el marco en el cuerpo (x_b , y_b , z_b). Teniendo en cuenta



Figura 2.1 Sistema de aviones con marcos de referencia.

esta configuración, se utiliza el subíndice 1 para referirse al avión situado en dirección positiva del eje y_b y el subíndice 2 para el otro avión. Por tanto, las fuerzas de empuje generadas por los motores se denotan por T₁ y T₂. Cuando se accionan los motores, los aviones se mueven y el aire fluye alrededor de sus alas, esto provoca que se generen fuerzas aerodinámicas denotadas como L₁ y L₂ para indicar a las fuerzas de sustentación y D₁ y D₂ para indicar las fuerzas de arrastre. La masa asociada a los aviones se denota por m y la fuerza debido a su peso se denota con *W*, además se considera que el centro de masa se encuentra a la mitad de la varilla que une los aviones y a su vez coincide con el origen del marco en el cuerpo del sistema.

En el movimiento del sistema de aviones se establecen las variables de posición (x, y, z) definidas con respecto al marco inercial. Las variables de velocidad lineal (u, v, w) están asociadas con el movimiento de traslación. En forma similar, se establecen las variables de posición angular o ángulos de Euler (ϕ , θ , ψ) y las variables de velocidad angular (p, q, r) asociadas con el movimiento de rotación. La Figura 2.2 muestra las velocidades lineales, las velocidades angulares y los momentos (L, M, N) así como su sentido con respecto a los ejes del marco del cuerpo.



Figura 2.2 Velocidades lineales, angulares y momentos en el marco del cuerpo.

2.2.1. Restricciones

El sistema puede ser considerado como un sistema rígidamente conectado (Figura 2.3), es decir, dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra de masa despreciable de longitud 2l, la unión denota una restricción relacionada con las posiciones de las partículas en un tiempo específico, por tanto la restricción presente es *holonómica* y al mismo tiempo *esclerónoma* al no depender explícitamente del tiempo. De la figura se puede notar que el punto medio entre las partículas es considerado su centro de masa y coincide con el origen del marco de coordenadas O_b de tal manera que

$$|\mathbf{r}_1'| = |\mathbf{r}_2'| = \mathbf{l} \tag{2.2}$$

donde la distancia entre las partículas es

$$|\mathbf{r}_1'| + |\mathbf{r}_2'| = 2\mathbf{l} \tag{2.3}$$



Figura 2.3 Sistema visto como dos partículas unidas por una barra rígida.

los vectores \mathbf{r}'_1 y \mathbf{r}'_2 tienen la misma magnitud pero su dirección siempre será diferente.

La partícula de masa m_1 se representa mediante coordenadas cartesianas por (x_1, y_1, z_1) , de igual manera para la partícula de masa m_2 como (x_2, y_2, z_2) . Utilizando este sistema de coordenadas se obtiene una ecuación de restricción para este sistema de partículas [17] como

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 + (z_i - z_c)^2 = l^2$$
(2.4)

donde i representa el número de la partícula con posición en las coordenadas (x_i, y_i, z_i) la cual se encontrará posicionada en la superficie de una esfera con centro en (x_c, y_c, z_c) y de radio l. Similarmente la restricción de distancia entre una partícula y otra queda descrita por

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (21)^2$$
 (2.5)

de tal forma que si se conoce un punto, el otro punto debe estar en la superficie de una esfera de radio l.

2.2.2. Posición y velocidad

Considerando la figura anterior se puede notar que r es el vector que va del origen en el marco inercial al centro de masa, esto se puede definir como

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.6}$$

 r'_1 es el vector del centro de masa a la partícula 1, esto aplica de manera similar para la partícula 2. Entonces cualquier vector r_i de la partícula i con respecto al marco inercial es

$$\mathbf{r}_{i} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{i}^{\prime} \tag{2.7}$$

y su velocidad está dada por

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\mathbf{i}}^{\prime} \tag{2.8}$$

donde v'_i corresponde al movimiento de la masa m_i relativo al marco en movimiento \mathcal{O}_b . El primer término de la ecuación anterior se obtiene como

$$v = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}} \tag{2.9}$$

correspondiente a la velocidad del centro de masa relativo a 0, y el segundo término de velocidad es

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathbf{i}}'}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}' = (\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{i}}')_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i}}'$$
(2.10)

donde ω es la velocidad angular del marco \mathcal{O}_b y $(\dot{\mathbf{r}}'_i)_r$ es la velocidad de la masa \mathfrak{m}_i relativa al mismo marco de referencia [16].

El primer término en (2.10) se vuelve cero debido a que las masas se consideran en unión rígida por tanto su posición no varía con respecto al marco O_b como se estableció en (2.3) quedando la expresión anterior como

$$\mathbf{v}_{i}^{\prime} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{i}^{\prime}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{r}}_{i}^{\prime} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{i}^{\prime} \tag{2.11}$$

y al sustituir (2.11) en (2.8) se tiene que

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}} = \mathbf{v} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}_{\mathbf{i}}^{\prime} \tag{2.12}$$

es la velocidad absoluta de la masa m_i.

El momentum angular total del sistema tomando como referencia O_b está dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_{i} \times \mathbf{p}'_{i} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$
(2.13)

donde I es la matriz de inercia y \mathbf{p}'_i es el momentum lineal de la partícula *i* definido por

$$\mathbf{p}_{i}^{\prime} = \mathbf{m}_{i} \mathbf{v}_{i}^{\prime} \tag{2.14}$$

2.2.3. Orientación del vehículo

La orientación del vehículo se determina mediante una serie de rotaciones consecutivas, respetando el orden adecuado de la aplicación de éstas. Inicialmente se considera al vehículo orientado de tal forma que sus ejes son paralelos a los ejes del marco inercial, posteriormente se realizan rotaciones denotadas por los ángulos ψ , θ , ϕ comúnmente conocidos como ángulos de Euler [18].

El vector η se define utilizando estos ángulos, es decir

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{\theta} & \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.15}$$

donde cada ángulo está limitado por los siguientes valores

$$-\pi \leqslant \psi < \pi \quad o \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$-\pi \leqslant \phi < \pi \quad o \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$
$$(2.16)$$

dichos ángulos proporcionan una forma intuitiva de representar la orientación de un cuerpo en tres dimensiones. El conjunto de rotaciones permite formar la matriz de transformación R_i^b que lleva un elemento del marco inercial al marco en el cuerpo, esto es

$$\mathbf{R}_{i}^{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_{3}(\phi)\mathbf{R}_{2}(\theta)\mathbf{R}_{1}(\psi) \tag{2.17}$$

donde

$$R_{3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad R_{2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_{1}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son las rotaciones usando los ángulos de Euler. De manera similar, la transformación que lleva un elemento del marco en el cuerpo al marco inercial se obtiene siguiendo una secuencia de rotaciones en reversa a la anterior, esto es

$$\mathbf{R}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{i}} = \mathbf{R}_{1}(-\psi)\mathbf{R}_{2}(-\theta)\mathbf{R}_{3}(-\phi) \tag{2.18}$$

desarrollando las multiplicaciones resulta que

$$\mathbf{R}_{b}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi - \cos\psi\sin\theta\sin\phi & \cos\phi\cos\psi\sin\theta - \sin\phi\sin\psi\\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi - \sin\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi\\ -\sin\theta & -\cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}$$
(2.19)

mantiene una secuencia adecuada de las rotaciones.

La velocidad angular Ω se forma con las velocidades en los ejes del marco del cuerpo, es decir

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
(2.20)

también puede expresarse en términos de los ángulos de Euler y sus derivadas [18, 19] como

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi \\ \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$
(2.21)

a su vez se puede reescribir como

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_{\eta} \dot{\mathbf{\eta}} \tag{2.22}$$
donde la matriz de transformación

$$\mathbf{R}_{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$
(2.23)

relaciona las velocidades angulares con la derivada de los ángulos de Euler.

2.2.4. Energía cinética y energía potencial

El sistema presenta tanto movimiento de traslación como movimiento de rotación respecto al marco inercial, en consecuencia posee energía cinética y potencial. La energía cinética total del sistema se calcula como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{2} m_{i} v_{i}^{2}$$
(2.24)

retomando la ecuación (2.8) se tiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{2} m_{i} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_{i}') \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_{i}') = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} m_{i} \mathbf{v}_{i}' \cdot \mathbf{v}_{i}'$$
(2.25)

donde $m = m_1 + m_2$ y además se tiene que el término

$$v \sum_{i=1}^{2} m_i v'_i = 0$$
 (2.26)

debido a que $\sum_{i=1}^{2} m_i r'_i = 0$ cuando se considera el centro de masa como punto de referencia.

La ecuación (2.25) representa la energía total del sistema de partículas y puede ser reescrita reemplazando (2.11), esto es

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\mathbf{m}_{i}\mathbf{v}_{i}'\cdot(\mathbf{\omega}\times\mathbf{r}_{i}')$$
(2.27)

permutando los vectores del producto mixto¹ se obtiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\mathbf{m}_{i}\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}_{i}'\times\mathbf{v}_{i}') = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}_{i}'\times\mathbf{m}_{i}\mathbf{v}_{i}')$$
(2.28)

donde la cantidad que resulta del segundo término al sumar todos los valores de i es el momento angular del cuerpo respecto al origen O_b obtenido en (2.13), entonces la energía cinética puede escribirse como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{m}\dot{\mathbf{r}}^{\mathsf{T}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{T}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$$
(2.29)

donde el primer término es la energía cinética de traslación \mathcal{K}_{tr} , el segundo término es la energía cinética de rotación \mathcal{K}_{rot} e I es la matriz de inercia. Si el sistema se

¹Sean **a**, **b** y **c** vectores cuyo producto mixto cumple la propiedad $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

considera simétrico la matriz de inercia se escribe como

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$
(2.30)

para expresar la matriz de inercia en términos de las coordenadas generalizadas se aplica la transformación

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\eta) = \mathbf{R}_{\eta}^{\mathsf{T}} \mathbf{I} \mathbf{R}_{\eta} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix}$$
(2.31)

desarrollando se obtiene

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{xx} & \mathbf{0} & -\mathbf{l}_{xx}\sin\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{l}_{yy}\cos^2\phi + \mathbf{l}_{zz}\sin^2\phi & \cos\theta\sin\phi\cos\phi(\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \\ -\mathbf{l}_{xx}\sin\theta & \cos\theta\sin\phi\cos\phi(\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) & \mathbf{l}_{xx}\sin^2\theta + \cos^2\theta(\mathbf{l}_{yy}\sin^2\phi + \mathbf{l}_{zz}\cos^2\phi) \end{bmatrix}$$
(2.32)

que sirve como matriz de inercia del sistema.

La energía cinética de traslación, energía cinética de rotación y la energía potencial se escriben respectivamente como

$$\mathcal{K}_{\rm tr} = \frac{1}{2} \mathbf{m} \dot{\mathbf{r}}^{\rm T} \dot{\mathbf{r}} \tag{2.33}$$

$$\mathcal{K}_{\rm rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^{\rm T} J \dot{\eta}$$
 (2.34)

$$\mathcal{P} = \mathrm{mg}z \tag{2.35}$$

donde g corresponde a aceleración debido a la gravedad y z a la altura.

El lagrangiano se obtiene sumando la energía cinética y potencial del sistema como

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_{\rm tr} + \mathcal{K}_{\rm rot} - \mathcal{P} \tag{2.36}$$

y desarrollando cada uno de los términos resulta que

$$\mathcal{L} = m\left(\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2} + \dot{z}^{2}\right) + \frac{1}{2}I_{xx}\left(\dot{\phi} - \sin(\theta)\dot{\psi}\right)^{2} + \frac{1}{2}I_{yy}\left(\cos(\phi)\dot{\theta} + \cos(\theta)\sin(\phi)\dot{\psi}\right)^{2} + \frac{1}{2}I_{zz}\left(\sin(\phi)\dot{\theta} - \cos(\theta)\cos(\phi)\dot{\psi}\right)^{2} - mgz$$
(2.37)

es el Lagrangiano en términos de las variables de posición y ángulos de Euler.

SECCIÓN 2.3

Fuerzas y momentos

Las principales fuerzas y momentos que actúan en el sistema se deben al efecto del empuje de los motores y a la aerodinámica que se genera por el flujo de aire incidiendo sobre las alas de los aviones como se muestra en la Figura 2.4.



Figura 2.4 Principales fuerzas actuando en el sistema.

2.3.1. Fuerza de sustentación y de arrastre

El flujo de aire incidiendo en las alas de los aviones produce sustentación y arrastre, las cuales son normal y paralela respectivamente, a la velocidad del aire V_a (ver Figura 2.5). Se puede observar que el ángulo entre la dirección del flujo y el plano de rotación se denota por ξ_1 y es conocido como *inflow angle* [20].



El ángulo de cabeceo de la sección alar γ_1 se mide desde la línea de la cuerda de la sección alar al plano de rotación. Entonces el ángulo de ataque α_1 del ala se obtiene como

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \xi_1 \tag{2.38}$$

y las fuerzas de sustentación y arrastre se escriben como

$$L = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_L = \bar{q} S(C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e)$$
(2.39)

$$D = \frac{1}{2}\rho V_a^2 SC_D = \bar{q}S(C_{D_\alpha}\alpha + C_{D_{\delta_e}}\delta_e)$$
(2.40)

donde $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_a^2$ se denomina presión dinámica, ρ es la densidad del aire, V_a la velocidad del aire, S la superficie del ala, $C_L y C_D$ son los coeficientes de sustentación y arrastre respectivamente.

2.3.2. Fuerza de empuje

La fuerza de empuje en un motor [18, 21] puede obtenerse mediante la relación

$$\mathsf{T} = \rho n^2 \mathsf{D}^4 \mathsf{C}_{\mathsf{T}}(\mathsf{J}) \tag{2.41}$$

donde ρ es la densidad del aire, n corresponde a las revoluciones por segundo de la hélice, D es el diámetro de la hélice y $C_T(J)$ es el coeficiente de empuje el cual está en función de la razón de avance J definido por

$$J = \frac{V}{nD}$$
(2.42)

donde V es la velocidad que avanza la hélice a través del aire [22]. Para fines prácticos se considera que los motores operan bajo condiciones similares, la densidad es constante y las hélices son del mismo tamaño. Por tanto, las fuerzas de empuje en cada motor se definen como

$$T_1 = \rho n_1^2 D^4 C_{T_1}$$
(2.43)

$$T_2 = \rho n_2^2 D^4 C_{T_2}$$
(2.44)

donde cada motor posee la libertad de variar sus revoluciones independientemente. Entonces, si la velocidad angular de los motores es diferente, los coeficientes de empuje también serán diferentes.

El giro de los motores produce una fuerza de empuje que a su vez modifica la velocidad de rotación de todo el sistema. Por tanto, la velocidad de rotación de los motores se puede usar como una variable de control del sistema.

En la práctica es habitual caracterizar la fuerza de empuje en los motores en función del número de revoluciones. De [23] se obtienen los datos en funcionamiento estático para una hélice de 4,5 pulgadas de diámetro, Figura 2.6. Entonces la función



Figura 2.6 Gráfica de coeficiente de empuje de una hélice 4.5x3.

del coeficiente de empuje se obtiene como

$$C_{T} = \begin{cases} f(n) & \text{para } 1500 \le n \le 10800 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
(2.45)

donde

$$f(n) = -1.9743e \cdot 10n^2 + 3.8068e \cdot 06n + 0,1030$$
 (2.46)

depende de las revoluciones por segundo en los motores.

2.3.3. Fuerzas y momentos generalizados

En el enfoque de Euler-Lagrangre se establecen las fuerzas y momentos actuantes en el sistema como

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{F} \ \Gamma] \tag{2.47}$$

donde F es un vector de fuerzas representado en el marco inercial y Γ el vector de momentos. Las componentes de estas fuerzas se definen como

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_X & F_Y & F_Z \end{bmatrix}^T$$
(2.48)

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.49}$$

Las fuerzas en el cuerpo se obtienen de la Figura 2.4 como

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}} = \mathbf{F}_{\mathbf{a}} + \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \tag{2.50}$$

donde F_{α} y F_{p} son los vectores de fuerzas debido a efectos de la aerodinámica y la propulsión. Estos vectores se obtienen mediante

$$\mathbf{F}_{a} = \begin{bmatrix} L_{1} \sin \gamma_{1} \\ 0 \\ -L_{1} \cos \gamma_{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_{2} \sin \gamma_{2} \\ 0 \\ -L_{2} \cos \gamma_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_{1} \cos \gamma_{1} \\ 0 \\ -D_{1} \sin \gamma_{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{2} \cos \gamma_{2} \\ 0 \\ -D_{2} \sin \gamma_{2} \end{bmatrix}$$
(2.51)
$$\mathbf{F}_{p} = \begin{bmatrix} T_{1} \cos \xi_{1} \\ 0 \\ -T_{1} \sin \xi_{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_{2} \cos \xi_{2} \\ 0 \\ -T_{2} \sin \xi_{2} \end{bmatrix}$$
(2.52)

los ángulos de ataque se definen como

$$\alpha_1 = \gamma_1 - \xi_1 \tag{2.53}$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \xi_2 \tag{2.54}$$

por tanto, el vector de fuerzas relativo al cuerpo del vehículo se obtiene como

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} T_{1}\cos\xi_{1} - T_{2}\cos\xi_{2} + L_{1}\sin\gamma_{1} - L_{2}\sin\gamma_{2} - D_{1}\cos\gamma_{1} + D_{2}\cos\gamma_{2} \\ f_{y} \\ -T_{1}\sin\xi_{1} - T_{2}\sin\xi_{2} - L_{1}\cos\gamma_{1} - L_{2}\cos\gamma_{2} - D_{1}\sin\gamma_{1} - D_{2}\sin\gamma_{2} \end{bmatrix}$$
(2.55)

donde f_y representa cualquier fuerza en el eje y_b .

El vector de fuerza F en el marco inercial se obtiene aplicando la transformación (2.19) a F_b, es decir

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{i}} \mathbf{F}_{\mathbf{b}} \tag{2.56}$$

es el vector de fuerzas requerido en el enfoque de Lagrange.

Al considerar las fuerzas, el vector de momentos se expresa como

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (L_2 \cos \gamma_2 - L_1 \cos \gamma_1) l + (T_2 \sin \xi_2 - T_1 \sin \xi_1) l + (D_2 \sin \gamma_2 - D_1 \sin \gamma_1) l \\ M \\ (-T_1 \cos \xi_1 - T_2 \cos \xi_2) l + (-L_1 \sin \gamma_1 - L_2 \sin \gamma_2) l + (D_1 \cos \gamma_1 + D_2 \cos \gamma_2) l \end{bmatrix}$$
(2.57)

donde M es cualquier momento existente alrededor del eje y_b.

Las ecuaciones de fuerzas y momentos se simplifican considerando que la incidencia del viento en el vehículo es despreciable, por tanto las ecuaciones (2.53) y (2.54) se convierten en

$$\gamma_1 = \xi_1 \tag{2.58}$$

$$\gamma_2 = \xi_2 \tag{2.59}$$

i.e. el ángulo de ataque se define por el cabeceo de cada ala, además las fuerzas

laterales en los vehículos se contrarrestan entre sí.

Al desarrollar la ecuación (2.56) se obtienen sus componentes como

$$F_{X} = f_{x} \cos \theta \cos \psi - f_{z} \sin \theta \tag{2.60}$$

$$F_{Y} = f_{\chi}(\sin\theta\cos\psi\sin\phi - \sin\psi\cos\phi) + f_{z}\cos\theta\sin\phi \qquad (2.61)$$

$$F_{Z} = f_{\chi}(\sin\theta\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi) + f_{z}\cos\theta\cos\phi \qquad (2.62)$$

son las componentes del vector de fuerza expresado en el marco inercial.

Debido a la alta velocidad angular en el sistema de aviones, éste se modela como un disco en rotación en sentido anti horario [24] visto desde arriba. Entonces las ecuaciones (2.60)-(2.62) con $\xi \approx 0$ se reescriben como

$$f_x = T_1 - T_2 - D_1 + D_2 \tag{2.63}$$

$$f_y = 0$$
 (2.64)

$$f_z = -L_1 - L_2 \tag{2.65}$$

y considerando que las fuerzas de propulsión en los motores son mucho más grandes que las fuerzas de arrastre en cada vehículo, se puede hacer la siguiente aproximación

$$T_1 \approx T_1 - D_1 \tag{2.66}$$

$$T_2 \approx T_2 - D_2 \tag{2.67}$$

de ta forma que son las fuerzas que se consideran en el eje x del cuerpo.

Los componentes del vector de momentos con respecto a los ejes del marco inercial del cuerpo se simplifican como

$$L = l(-D_1 - T_1)\sin\xi_1 + l(D_2 + T_2)\sin\xi_2 + l(L_2\cos\xi_2 - L_1\cos\xi_1)$$
(2.68)

$$M = 0 \tag{2.69}$$

$$N = l(D_1 - T_1)\cos\xi_1 + l(D_2 - T_2)\cos\xi_2 + l(-L_1\sin\xi_1 - L_2\sin\xi_2)$$
(2.70)

SECCIÓN 2.4

donde

Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento se desarrollan utilizando el enfoque de Lagrange planteado en la ecuación (2.1), esto es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_{i}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{i}} = Q_{i} \quad i = 1, 6 \tag{2.71}$$

donde las coordenadas generalizadas q_i se seleccionan como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^\mathsf{T}$$
(2.72)

de tal forma que cada coordenada es independiente y el número de coordenadas es suficiente para especificar completamente la configuración del sistema.

El Lagrangiano \mathcal{L} que se obtuvo en (2.37) no presenta términos cruzados entre la dinámica traslacional y la dinámica rotacional por tanto es posible reescribirlo como

$$\mathcal{L}_{\rm tr} = \mathcal{K}_{\rm tr} - \mathcal{P} = \frac{1}{2} {\rm m} \dot{{\rm r}}^{\rm T} \dot{{\rm r}} - {\rm m} {\rm g} z \qquad (2.73)$$

$$\mathcal{L}_{\rm rot} = \mathcal{K}_{\rm rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^{\rm T} J \dot{\eta}$$
 (2.74)

por tanto la ecuación (2.71) se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{tr}}}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{F}$$
(2.75)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rot}}}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma}$$
(2.76)

donde una expresión permite obtener la dinámica traslacional y otra la dinámica rotacional.

A partir de (2.75) se obtienen las ecuaciones de traslación, realizando las operaciones correspondientes se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{tr}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{1}{2} \mathfrak{m} (2\dot{\mathbf{r}}) \qquad \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{tr}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mathfrak{m} \ddot{\mathbf{r}} \qquad \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_{tr}}{\partial \mathbf{r}} = -\mathfrak{m} g \boldsymbol{u}_z$$
$$\boldsymbol{u}_z = \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = [0 \ 0 \ 1]^T, \text{ por tanto}$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{m}\mathbf{g}\mathbf{u}_z = \mathbf{F} \tag{2.77}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}\mathbf{F} - g\mathbf{u}_z \tag{2.78}$$

al expresar cada elemento por separado se tiene que

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\mathbf{X}} \tag{2.79}$$

$$\mathbf{y} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\mathbf{Y}}
 \tag{2.80}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_Z - g \tag{2.81}$$

son las ecuaciones que representan el movimiento de traslación.

Para la dinámica de rotación se usa la ecuación (2.76), esto es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial(\frac{1}{2}\dot{\eta}^{\mathsf{T}}J\dot{\eta})}{\partial\dot{\eta}} - \frac{\partial(\frac{1}{2}\dot{\eta}^{\mathsf{T}}J\dot{\eta})}{\partial\eta} = \mathbf{\Gamma}$$

realizando las operaciones necesarias

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rot}}}{\partial \dot{\eta}} = J\dot{\eta} \qquad \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rot}}}{\partial \dot{\eta}} = J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} \qquad \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{rot}}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{1}{2} \dot{\eta}^{\mathsf{T}} J\dot{\eta})$$

resulta en

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathsf{T}}\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\Gamma}$$
(2.82)

al reescribir y despejar se obtiene

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(\dot{\mathbf{J}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\eta}}(\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathsf{T}}\mathbf{J})\right)\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{\Gamma}$$
(2.83)

$$J\ddot{\eta} + \mathbf{C}(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} = \mathbf{\Gamma}$$
(2.84)

donde el término $C(\eta, \dot{\eta})$ se denomina matriz de Coriolis y contiene los términos giroscópico y centrífugo asociados a η dependientes de J.

Para desarrollar la ecuación (2.83), primero se obtiene la derivada de J a partir de la ecuación (2.31) como

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{R}}_{\eta}^{\mathsf{T}} \mathbf{I} \mathbf{R}_{\eta} + \mathbf{R}_{\eta}^{\mathsf{T}} \mathbf{I} \dot{\mathbf{R}}_{\eta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
(2.85)

donde

$$\begin{split} a_{11} &= 0 \\ a_{12} &= 0 \\ a_{13} &= -l_{xx}\dot{\theta}\cos\theta \\ a_{21} &= 0 \\ a_{22} &= -\dot{\varphi}\sin(2\varphi)(l_{yy} - l_{zz}) \\ a_{23} &= \left(\dot{\varphi}\cos\theta\cos(2\varphi) - \dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\cos\varphi\right)(l_{yy} - l_{zz}) \\ a_{31} &= -l_{xx}\dot{\theta}\cos\theta \\ a_{32} &= \left(\dot{\varphi}\cos\theta\cos(2\varphi) - \dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\cos\varphi\right)(l_{yy} - l_{zz}) \end{split}$$

 $a_{33} = 2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\left(l_{xx} - l_{yy}\sin^2(\phi) - l_{zz}\cos^2(\phi)\right) + \dot{\phi}\cos^2\theta\sin(2\phi)(l_{yy} - l_{zz})$ continuando con el término $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\dot{\eta}^T J$ se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\dot{\eta}^{\mathsf{T}}\mathbf{J} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}[c_1 \ c_2 \ c_3]$$

donde

$$\begin{split} c_1 &= l_{xx}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta) \\ c_2 &= \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi\cos\phi(l_{yy} - l_{zz}) + \dot{\theta}(l_{yy}\cos^2\varphi + l_{zz}\sin^2\varphi) \\ c_3 &= -\dot{\varphi}l_{xx}\sin\theta + \dot{\psi}\left(\sin^2\theta l_{xx} + \cos^2\theta(l_{yy}\sin^2\varphi + l_{zz}\cos^2\varphi)\right) \\ &+ \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\cos\varphi\left(l_{yy} - l_{zz}\right) \end{split}$$

derivando parcialmente

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}[c_1 \ c_2 \ c_3] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial c_1}{\partial\theta} & \frac{\partial c_1}{\partial\psi} \\ \frac{\partial c_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial c_2}{\partial\theta} & \frac{\partial c_2}{\partial\psi} \\ \frac{\partial c_3}{\partial\varphi} & \frac{\partial c_3}{\partial\theta} & \frac{\partial c_3}{\partial\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_{11} \ b_{12} \ b_{13} \\ b_{21} \ b_{22} \ b_{23} \\ b_{31} \ b_{32} \ b_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{split} b_{11} &= 0 \\ b_{12} &= -\dot{\psi} l_{xx} \cos \theta \\ b_{13} &= 0 \\ b_{21} &= (l_{yy} - l_{zz}) \left(\dot{\psi} \cos \theta \cos(2\varphi) - 2\dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \right) \\ b_{22} &= -\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi (l_{yy} - l_{zz}) \\ b_{23} &= 0 \\ b_{31} &= \cos \theta (l_{yy} - l_{zz}) \left(\dot{\psi} \cos \theta \sin(2\varphi) + \dot{\theta} \cos(2\varphi) \right) \\ b_{32} &= \sin \theta \left(2\dot{\psi} \cos \theta (l_{xx} - l_{yy} \sin^2 \varphi - l_{zz} \cos^2 \varphi) + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi (l_{zz} - l_{yy}) \right) \\ &- \dot{\varphi} \cos \theta l_{xx} \\ b_{33} &= 0 \end{split}$$

entonces la matriz $C(\eta, \dot{\eta}) = \left(\dot{J} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\dot{\eta}^{T}J)\right)$ se construye como

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{1}{2}b_{11} & a_{12} - \frac{1}{2}b_{12} & a_{13} - \frac{1}{2}b_{13} \\ a_{21} - \frac{1}{2}b_{21} & a_{22} - \frac{1}{2}b_{22} & a_{23} - \frac{1}{2}b_{23} \\ a_{31} - \frac{1}{2}b_{31} & a_{32} - \frac{1}{2}b_{32} & a_{33} - \frac{1}{2}b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$
(2.86)

donde

$$\begin{split} c_{11} &= 0 \\ c_{12} &= \frac{1}{2} \dot{\psi} l_{xx} \cos \theta \end{split}$$

$$\begin{split} \mathbf{c}_{13} &= -\dot{\theta} \mathbf{l}_{xx} \cos \theta \\ \mathbf{c}_{21} &= -\frac{1}{2} (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \left(\dot{\psi} \cos \theta \cos(2\varphi) - 2\dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \right) \\ \mathbf{c}_{22} &= \frac{1}{4} \sin(2\varphi) (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \left(\dot{\psi} \sin \theta - 4\dot{\varphi} \right) \\ \mathbf{c}_{23} &= (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \left(\dot{\phi} \cos \theta \cos(2\varphi) - \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi \cos \varphi \right) \\ \mathbf{c}_{31} &= -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{l}_{xx} - \frac{1}{2} \cos \theta (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \left(\dot{\psi} \cos \theta \sin(2\varphi) + \dot{\theta} \cos(2\varphi) \right) \\ \mathbf{c}_{32} &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(2\dot{\psi} \cos \theta \left(-\mathbf{l}_{xx} + \mathbf{l}_{yy} \sin^2 \varphi + \mathbf{l}_{zz} \cos^2 \varphi \right) + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi (\mathbf{l}_{zz} - \mathbf{l}_{yy}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\phi} \cos \theta \left(\mathbf{l}_{xx} + 2 \cos(2\varphi) (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \right) \\ \mathbf{c}_{33} &= \cos \theta \left(2\dot{\theta} \sin \theta \left(\mathbf{l}_{xx} - \mathbf{l}_{yy} \sin^2 \varphi - \mathbf{l}_{zz} \cos^2 \varphi \right) + \dot{\phi} \cos \theta \sin(2\varphi) (\mathbf{l}_{yy} - \mathbf{l}_{zz}) \right) \end{split}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = (\mathbf{R}_{\eta}^{\mathsf{T}} \mathbf{I} \mathbf{R}_{\eta})^{-1} = \mathbf{R}_{\eta}^{-1} \mathbf{I}^{-1} (\mathbf{R}_{\eta}^{-1})^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} & \mathbf{h}_{13} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} & \mathbf{h}_{23} \\ \mathbf{h}_{31} & \mathbf{h}_{32} & \mathbf{h}_{33} \end{bmatrix}$$
(2.87)

donde

$$\begin{split} h_{11} &= \frac{1}{l_{xx}} + \tan^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{l_{yy}} + \frac{\cos^2 \varphi}{l_{zz}} \right) & h_{12} &= \frac{\tan \theta \sin \varphi \cos \varphi (l_{zz} - l_{yy})}{l_{yy} l_{zz}} \\ h_{13} &= \tan \theta \sec \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{l_{yy}} + \frac{\cos^2 \varphi}{l_{zz}} \right) & h_{21} &= \frac{\tan \theta \sin \varphi \cos \varphi (l_{zz} - l_{yy})}{l_{yy} l_{zz}} \\ h_{22} &= \frac{\cos^2 \varphi}{l_{yy}} + \frac{\sin^2 \varphi}{l_{zz}} & h_{23} &= \frac{\sec \theta \sin \varphi \cos \varphi (l_{zz} - l_{yy})}{l_{yy} l_{zz}} \\ h_{31} &= \tan \theta \sec \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{l_{yy}} + \frac{\cos^2 \varphi}{l_{zz}} \right) & h_{32} &= \frac{\sec \theta \sin \varphi \cos \varphi (l_{zz} - l_{yy})}{l_{yy} l_{zz}} \\ h_{33} &= \sec^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{l_{yy}} + \frac{\cos^2 \varphi}{l_{zz}} \right) \end{split}$$

además se define

$$[\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3]^{\mathsf{T}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \dot{\boldsymbol{\eta}}$$
(2.88)

al despejar $\ddot{\eta}$ de (2.84) se tiene

$$\ddot{\eta} = J^{-1} \Gamma - J^{-1} C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta}$$
(2.89)

esta ecuación representa a la dinámica de rotación del sistema.

Las ecuaciones que representan el movimiento en tres dimensiones del sistema de aviones se obtiene al reunir las ecuaciones de las dinámicas de traslación (2.78) y

rotación (2.89). Al desarrollar las ecuaciones se obtiene

$$\begin{split} \ddot{x} &= \frac{1}{m} \left(f_x \cos \theta \cos \psi - f_z \sin \theta \right) & (2.90) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} \left(f_x (\sin \theta \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) + f_z \cos \theta \sin \phi \right) & (2.91) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} \left(f_x (\sin \theta \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) + f_z \cos \theta \cos \phi \right) - g & (2.92) \\ \ddot{\phi} &= h_{11}L + h_{12}M + h_{13}N - \kappa_1 & (2.93) \\ \ddot{\theta} &= h_{21}L + h_{22}M + h_{23}N - \kappa_2 & (2.94) \\ \ddot{\psi} &= h_{31}L + h_{32}M + h_{33}N - \kappa_3 & (2.95) \end{split}$$

estas ecuaciones están expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.

2.4.1. Ecuaciones de movimiento simplificadas

El grupo de ecuaciones asociado a la dinámica traslacional tiene elementos que incluyen a la variable de guiñada ψ , la cual evoluciona mucho más rápido que las demás variables. Por tanto, se analizan los términos de las ecuaciones (2.90) a (2.92) que incluyen funciones de seno y coseno de ψ . Debido al comportamiento cíclico de estos términos y considerando que todas las demás variables permanecen contantes durante un ciclo, cuando son integradas en un ciclo de 0 a 2π el resultado es igual a cero. Es decir, la aportación de esas componentes en las ecuaciones anteriores es nula, por ende se pueden simplificar las ecuaciones de aceleración traslacional como

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m} \mathbf{f}_z \sin \theta \tag{2.96}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} f_z \cos \theta \sin \phi \tag{2.97}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} f_z \cos \theta \cos \phi - g \tag{2.98}$$

además, con el fin de simplificar la dinámica rotacional se usa el siguiente cambio de variable

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{J}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}$$
(2.99)

y al sustituir este cambio en la ecuación (2.89) se obtiene

$$\ddot{\eta} = J^{-1}C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} + J^{-1}J\tilde{\Gamma} - J^{-1}C(\eta,\dot{\eta})\dot{\eta} = \tilde{\Gamma}$$
(2.100)

donde

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \tau_{\boldsymbol{\varphi}} & \tau_{\boldsymbol{\theta}} & \tau_{\boldsymbol{\psi}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
(2.101)

es la nueva variable relacionada a los momentos del sistema [25].

En forma alternativa, las ecuaciones que describen el movimiento del cabeceo y alabeo se pueden obtener de la manera siguiente:

Considérese que los dos aviones están volado a una altura constante y el disco que describen al girar es horizontal. Suponga ahora que se introduce una señal sinusoidal al control de altura o elevador de cada uno de los aviones. La señal que se introduce al primer avión es tal que el desplazamiento del elevador es máximo cuando ese avión pasa por la parte norte del disco de giro y tiene su valor mínimo cuando pasa por la parte sur del disco de giro. Una señal similar es introducida al segundo avión pero desfasada 180°. De esta manera, el primer avión aumenta su altura al pasar del punto norte al punto este y regresa a su altura cuando llega al punto sur. El segundo avión hace algo similar teniendo la misma altura cuando pasa del punto sur al punto norte pero tiene una altura inferior al pasar por el punto oeste. El resultado de este medio ciclo es que el plano de giro de los dos aviones se ha inclinado ligeramente hacia el oeste, pivotando en el eje norte-sur. Al final de este medio ciclo, el conjunto de aviones está listo para comenzar un segundo medio ciclo en el cual se inclinara un poco más hacia el oeste. La magnitud de la inclinación depende de la amplitud de la señal sinusoidal que se introduce en los elevadores. La dirección del eje en que pivota el disco de giro puede ser modificada cambiando la fase de la señal sinusoidal.

Las fuerzas de sustentación en cada avión se consideran iguales, y el empuje total f_z actúa perpendicularmente al disco descrito por los dos aviones en rotación. Así, las ecuaciones del sistema se simplifican como

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m} \mathbf{f}_z \sin \theta \tag{2.102}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} f_z \cos \theta \sin \phi \qquad (2.103)$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} f_z \cos \theta \cos \phi - g \tag{2.104}$$

$$\ddot{\varphi} = \tau_{\varphi} \tag{2.105}$$

$$\ddot{\theta} = \tau_{\theta} \tag{2.106}$$

$$\ddot{\mathbf{b}} = \mathbf{\tau}_{\mathbf{b}} \tag{2.107}$$

donde x, y, z corresponden a las coordenadas de posición del sistema, y τ_{ϕ} , τ_{θ} , τ_{ψ} son los momentos de cabeceo, alabeo y guiñada relacionados a las momentos generalizados.

ι

2.4.2. Ecuaciones de movimiento en el plano horizontal

Las seis ecuaciones de movimiento se pueden desacoplar para analizar de forma independiente el desplazamiento vertical y horizontal de la configuración estudiada. Esto es conveniente ya que solo se requieren tres ecuaciones para describir varias condiciones de vuelo. Por tanto, a continuación se exponen las ecuaciones que describen el movimiento del vehículo en el plano horizontal, y posteriormente se desarrollará una estrategia de control que permita mover a voluntad a los aviones en este plano.

Se considera que el sistema de aviones se mueve libremente en el plano horizontal, como si estuviesen sobre una pista sin fricción como se ve en la Figura 2.7. El ala



Figura 2.7 Sistema de aviones en el plano horizontal.

de cada avión está atada a un extremo de una varilla, en la unión se considera una articulación. Cada avión tiene dos superficies de control, un elevador y un timón. Mientras que el elevador se puede utilizar para cambiar la altura, el timón produce una rotación en los aviones alrededor de la articulación. Este desplazamiento se denota con el ángulo μ , y en escenarios reales es diferente para cada avión pero con la finalidad de simplificar se considera que varía simultáneamente para ambos aviones. Con base en esta disposición, la articulación permite un rango de movimiento de $-90^{\circ} \leq \mu \leq 90^{\circ}$, por lo tanto, el ángulo entre los dos aviones está dado por

$$\mu_{a} = 180^{\circ} - 2\mu \tag{2.108}$$

medido desde el vector de empuje T_1 hacia el vector de empuje T_2 en sentido horario. Para este caso de estudio, se establece que las fuerzas de empuje T_1 y T_2 sean las variables de control, mientras que μ se considera como una perturbación.

Las principales fuerzas y momentos en el sistema que se consideran son las ge-

neradas por los motores de los aviones, y se expresan en los ejes del cuerpo como

$$\begin{bmatrix} f_{x} \\ f_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1} \cos(\mu) \\ T_{1} \sin(\mu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_{2} \cos(\mu) \\ T_{2} \sin(\mu) \end{bmatrix}$$
(2.109)

la fuerza f_x produce un momento alrededor del eje z_b , que se escribe como

$$N = lT_1 \cos(\mu) + lT_2 \cos(\mu)$$
(2.110)

y se considera como positivo el giro en sentido antihorario.

La posición con respecto al marco de referencia inercial se representa con el vector r_h , la orientación se denota por el ángulo ψ como se muestra en la Figura 2.8, y los aviones se representan como masas puntuales.



Figura 2.8 Diagrama del sistema en el marco inercial.

El vector de posición se define como

$$\mathbf{r}_{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.111}$$

y los vectores de posición de cada avión como

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
 $\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ (2.112)

además considerando que la posición de cada avión en el marco del cuerpo es

$$\begin{bmatrix} x_{m_1} & y_{m_1} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & l \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \qquad \begin{bmatrix} x_{m_2} & y_{m_2} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -l \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
(2.113)

la posición de cada avión con respecto al marco inercial se expresa como

$$\mathbf{r}_{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}_{b}^{i} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{l} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \qquad \mathbf{r}_{2} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}_{b}^{i} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{l} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
(2.114)

donde la matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{i}}$ fue definida en (2.19), y se reduce a

$$\mathbf{R}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} -\sin\psi & \cos\psi\\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}$$
(2.115)

la cual permite transformar la posición en el marco del cuerpo al marco inercial [26]. Las ecuaciones de movimiento en el plano horizontal se obtienen usando el enfoque de Euler-Lagrange, esto es aplicando la ecuación (2.71). El Lagrangiano se escribe como la suma de la energía cinética de traslación y rotación, es decir

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_{tr} + \mathcal{K}_{rot} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_{zz}\dot{\psi}^2$$
(2.116)

y el vector de coordenadas generalizas se define como

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{\psi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{2.117}$$

con x y y para representar la posición y ψ para representar el giro.

Las ecuaciones de la dinámica en este plano de vuelo se obtienen como

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\mathbf{X}} \tag{2.118}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} F_{Y} \tag{2.119}$$

$$\ddot{\Psi} = \frac{1}{I_{zz}} N \tag{2.120}$$

donde F_X y F_Y son las fuerzas representadas en el marco inercial. Estas fuerzas se obtienen aplicando la transformación R_b^i a las fuerzas en (2.109), esto es

$$\begin{bmatrix} F_{X} \\ F_{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x} \\ f_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{x}\sin\psi + f_{y}\cos\psi \\ f_{x}\cos\psi + f_{y}\sin\psi \end{bmatrix}$$
(2.121)
de inercia L se obtiene como

y el momento de inercia I_{zz} se obtiene como

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^{i=2} m_i r_i^2 = m_1 l^2 + m_2 l^2 = (m_1 + m_2) l^2 = m l^2$$
(2.122)

donde m es la masa total del vehículo, incluye la masa de los aviones, la varilla, etc.

Al desarrollar las ecuaciones de movimiento se obtiene lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} (-\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \sin \psi + \mathbf{f}_{\mathbf{y}} \cos \psi)$$
(2.123)

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} (f_x \cos \psi + f_y \sin \psi)$$
(2.124)

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}} (lT_1 \cos(\mu) + lT_2 \cos(\mu))$$
(2.125)

dos ecuaciones para el movimiento de traslación y una para la rotación.

CAPÍTULO 3

ESTRATEGIA DE CONTROL

SECCIÓN 3.1

Introducción

Este capítulo plantea el desarrollo de la estrategia de control para el sistema de aviones con el fin de lograr un vuelo satisfactorio. Comúnmente en el vuelo de vehículos aéreos se requiere un control de posición, orientación y velocidad. Esto muchas veces puede lograrse directamente manipulando las entradas de control, así como un avión puede manipular la orientación de guiñada a través del timón de dirección o un helicóptero lo puede hacer a través del rotor de cola.

En el vehículo propuesto surge el desafío de crear un algoritmo de control que traduzca el efecto de las entradas de control en un movimiento deseado. La operación del vehículo se realiza mediante el control individual de los aviones y sus superficies de control, con lo cual se pueden producir dos tipos de movimiento, traslación vertical y traslación horizontal. La metodología para lograr el movimiento sigue el principio de los comandos *colectivo* y *cíclico* en los helicópteros. El desplazamiento vertical usa el comando colectivo donde cada avión es configurado para actuar de forma simultánea, ya sea incrementando o disminuyendo el empuje de los motores que en consecuencia cambia la velocidad angular del sistema o de otro modo se logra al ajustar el cabeceo de cada avión con ayuda del elevador. El desplazamiento horizontal se logra con comandos cíclicos, donde las entradas de control se varían de forma sinusoidal a largo de la rotación. SECCIÓN 3.2

Comandos de control

El sistema de aviones posee la forma y una dinámica similar a la de un rotor de helicóptero convencional, donde cada avión sería equivalente a las palas del helicóptero. A diferencia de la configuración propuesta, un helicóptero utiliza un mecanismo conocido como plato cíclico o disco inclinado, este mecanismo transforma el movimiento del eje giratorio en un movimiento repetitivo hacia arriba y hacia abajo o hacia delante o hacia atrás, los dos movimientos opuestos conforman un ciclo como se ilustra en la Figura 3.1. El plato cíclico permite modificar el ángulo de las palas, y la manera en que se varía el cambio de este ángulo se conoce como comandos de control cíclico y colectivo [27]. El comando de paso colectivo aplica



el mismo ángulo a todas las palas, mientras que el comando de paso cíclico opera mediante la inclinación del plato generando una variación sinusoidal en el ángulo de las palas.

El plato cíclico es un mecanismo complejo que no está presente en la configuración propuesta, en su lugar el sistema de aviones cuenta con dos motores y dos superficies de control para controlar su movimiento.

Cuando se modela un helicóptero, se suele usar un marco de referencia fijo en el cuerpo del helicóptero donde las palas que forman el rotor principal giran alrededor del eje vertical de este marco, así la inclinación del plato cíclico define la dirección de movimiento del cuerpo del helicóptero. En cambio, el sistema de aviones usa un marco en el cuerpo que se encuentra girando en todo momento, como se muestra en la Figura 3.2.

Tomando en consideración los aspectos mencionados, se plantea imitar los comandos relacionados al plato cíclico para controlar el vehículo propuesto.



Figura 3.2 Marco de referencia en un helicóptero y en el vehículo propuesto.



Los comandos de control colectivo y cíclico interpretan las señales de referencia indicadas por un piloto, y posteriormente las transforman en comandos que generan un movimiento de ascenso/descenso o traslación en el vehículo. Las señales de referencia o de control τ_{ϕ} , τ_{θ} y τ_{c} se establecen con respecto a un sistema de referencia asociado a la posición del piloto como se muestra en la Figura 3.3. Las señales



Figura 3.3 Marco de referencia del piloto.

 τ_{ϕ} y τ_{θ} producen una inclinación en el disco que se forma por la rotación de los aviones, la señal τ_{c} produce un ascenso o descenso de todo el vehículo.

Para que el marco de referencia del piloto sea más intuitivo, éste se establece de forma que los ejes x_p y y_p son coincidentes con los ejes inerciales x y y, y el eje z_p

apunta en dirección contraria a z.

El **comando de control colectivo** puede ser generado de dos maneras, ya sea variando la fuerza de los motores simultáneamente para aumentar el giro del sistema que a su vez aumenta la fuerza de sustentación o alternativamente se utiliza el elevador de los aviones para aumentar o disminuir al mismo tiempo el cabeceo de los aviones, ambas formas provocan que la fuerza de sustentación cambie de tal modo que el vehículo aumenta o disminuye su posición vertical. Cuando se usan



Figura 3.4 Comando de control colectivo.

los elevadores con en la Figura 3.4, este valor se asigna como

$$\delta_{e_1} = \tau_c$$
$$\delta_{e_2} = \tau_c$$

donde a cada superficie de control se le asigna la misma cantidad.

El **comando de control cíclico** se divide en comando cíclico lateral y comando cíclico longitudinal. En otras palabras dependerá del valor de la señal de control τ_{ϕ} cuando el piloto requiere que el plano de rotación se incline hacia la izquierda o hacia la derecha, o de τ_{θ} cuando el piloto requiere que el plano de rotación se incline hacia enfrente o hacia atrás como se muestra en la Figura 3.5.

El *comando cíclico lateral* se genera usando una función cosenoidal, la cual varía con respecto al ángulo ψ o lo que es igual con respecto a la posición de los aviones durante su trayecto circular. Cuando la posición angular de los aviones es $\psi = 180$ o $\psi = 0$, se aplica una deflexión máxima al elevador de un avión y una deflexión mínima al otro avión, esto direcciona la inclinación del disco que describen los aviones hacia adelante o hacia atrás. El comando para generar un movimiento lateral, se obtiene



Figura 3.5 Comandos de control cíclico.

mediante

$$\delta_{e_1}(\tau_{\Phi}, \psi) = \tau_{\Phi} \cos(\psi) \tag{3.1}$$

$$\delta_{e_2}(\tau_{\phi}, \psi) = -\tau_{\phi} \cos(\psi) \tag{3.2}$$

El *comando cíclico longitudinal* se genera usando una función senoidal, también varía con respecto al ángulo ψ . Cuando la posición angular de los aviones es $\psi = 270$ o $\psi = 90$, se aplica una deflexión máxima al elevador de un avión y una deflexión mínima al otro avión, esto direcciona la inclinación del disco que describen los aviones hacia la izquierda o derecha. El comando para producir un movimiento longitudinal, y se obtiene mediante

$$\delta_{e_1}(\tau_{\theta}, \psi) = \tau_{\theta} \sin(\psi) \tag{3.3}$$

$$\delta_{e_2}(\tau_{\theta}, \psi) = -\tau_{\theta} \sin(\psi) \tag{3.4}$$

Al unificar los comandos colectivo y cíclico en una misma expresión se tiene,

$$\delta_{e_1}(\tau_{\phi}, \tau_{\theta}, \psi) = \tau_{\phi} \cos(\psi) + \tau_{\theta} \sin(\psi) + \tau_c$$
(3.5)

$$\delta_{e_2}(\tau_{\phi}, \tau_{\theta}, \psi) = -\tau_{\phi} \cos(\psi) - \tau_{\theta} \sin(\psi) + \tau_c$$
(3.6)

estas son las señales que se aplican a los elevadores para generar los movimientos a lo largo de los ejes referentes al piloto. SECCIÓN 3.4

El ángulo de guiñada

El ángulo de guiñada ψ se mide con respecto al norte magnético o lo que es igual con respecto al eje x del sistema de referencia inercial y el eje x_b del marco de referencia en el cuerpo del vehículo como se muestra en la Figura 3.6.



Los ángulos de guiñada de cada avión se definen como ψ_{a1} y ψ_{a2} , y se miden entre el eje longitudinal de cada avión y el eje x del sistema de referencia inercial, esto se puede expresar como

$$\psi_{\mathfrak{a}1} = \psi \tag{3.7}$$

$$\psi_{a2} = \psi + \pi \tag{3.8}$$

donde se puede notar que existe un desfase de π radianes o lo que es igual a 180 grados entre los vehículos.

Si se considera el ángulo μ descrito en la sección 2.4.2, el cual se forma en la unión del ala de los aviones con la varilla y asimismo se considera que este ángulo es diferente para cada avión como se muestra en la Figura 3.7, la orientación de cada avión se obtiene como

$$\psi_{a1} = \psi - \mu_1 \tag{3.9}$$

$$\psi_{a2} = \psi + \mu_2 + \pi \tag{3.10}$$

Además, si se quiere conocer la orientación del disco que forma la trayectoria de



Figura 3.7 Ángulo de guiñada del vehículo con ángulo de desacoplamiento μ .

los aviones con respecto al marco inercial, se hace uso del vector de velocidad del vehículo como se muestra en la Figura 3.8.



Figura 3.8 Trayectoria del vehículo.

El vector de velocidad v, se escribe como

$$\mathbf{v} = \mathbf{d}\mathbf{r}/\mathbf{d}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{x}} & v_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(3.11)

y al obtener la dirección del mismo se obtiene

$$\tilde{\psi} = \arctan(\frac{\nu_{\rm y}}{\nu_{\rm x}}) \tag{3.12}$$

donde esta variable representa la orientación del vehículo. Pero cuando el vehículo permanece en un solo lugar no es posible saber su dirección.

SECCIÓN 3.5

Estrategia de control general

En esta sección se presenta una estrategia de control para regular el movimiento del sistema. La estrategia busca regular las variables de estado en forma secuencial. Primeramente se busca estabilizar la altura y la velocidad angular, de tal forma que satisfagan la dinámica de un sistema lineal. Entonces se prosigue a controlar el ángulo de alabeo y el desplazamiento en el eje y, también se controla el ángulo de cabeceo y el desplazamiento en el eje x, para ambos se usa un control proporcional derivativo.

Se retoman las ecuaciones de traslación (2.102 - 2.104) y de rotación (2.105 - 2.107) que fueron desarrolladas en la sección 2.4.1. Se parte de la ecuación de movimiento vertical, es decir

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} f_z \cos \theta \cos \phi - g$$

se establece la siguiente entrada como el control de posición vertical

$$f_z = \frac{mu_z + mg}{\cos\theta\cos\phi} \tag{3.13}$$

donde u_z es un control PD, esto es

$$u_z = -a_{z_1} \dot{z} - a_{z_2} (z - z_d) \tag{3.14}$$

donde a_{z_1} y a_{z_2} son constantes positivas y z_d es la altitud deseada. La velocidad angular de guiñada se regula al aplicar el siguiente control

$$\tau_{\psi} = -a_{\psi}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) \tag{3.15}$$

donde a_{ψ} es una constante positiva y $\dot{\psi}_d$ es la velocidad angular de guiñada deseada. Al sustituir (3.13) en la ecuaciones (2.104), (2.103) y (2.104), la ecuación (3.15) en (2.107), y considerando que cos θ cos $\phi \neq 0$, se obtiene lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{1}{m} \frac{m\mathbf{u}_z + mg}{\cos\theta\cos\phi} \sin\theta = -(\mathbf{u}_z + mg) \frac{\tan\theta}{\cos\phi}$$
(3.16)

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} \frac{mu_z + mg}{\cos\theta\cos\phi} \cos\theta\sin\phi = (u_z + mg)\tan\phi$$
(3.17)

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} \frac{mu_z + mg}{\cos\theta\cos\phi} \cos\theta\cos\phi - g = u_z$$
(3.18)

$$\ddot{\psi} = -a_{\psi}(\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) \tag{3.19}$$

donde las ganancias a_{z_1} , a_{z_2} y a_{ψ} se seleccionan convenientemente para asegurar una respuesta estable en la posición vertical y guiñada.

Si z_d y $\dot{\psi}_d$ son constantes, z y $\dot{\psi}_d$ convergerán en un determinado tiempo, es decir

 $z \rightarrow z_{\rm d} \ {
m y} \ \dot{\psi} \rightarrow \dot{\psi}_{\rm d}$. En consecuencia, las ecuaciones (3.16) y (3.17) se reducen a

$$\ddot{\mathbf{x}} = -g \frac{\tan \theta}{\cos \phi} \tag{3.20}$$

$$\ddot{y} = g \tan \phi \tag{3.21}$$

debido a que los controles en (3.14) y (3.15) tienden a cero. Entonces la dinámica horizontal está dada por las ecuaciones (3.20-3.21) y (2.105 - 2.106), y para regular el movimiento en este plano se establecen los ángulos de referencia para el alabeo y la guiñada como sigue

$$\phi_{\rm d} = \arctan \frac{u_{\rm y}}{q} \tag{3.22}$$

$$\theta_{\rm d} = \arctan \frac{u_x \cos \phi}{q}$$
(3.23)

donde u_x y u_y son controles PD, es decir

$$u_{x} = -a_{x_{1}}\dot{x} - a_{x_{2}}(x - x_{d})$$
(3.24)

$$u_{y} = -a_{y_{1}}\dot{y} - a_{y_{2}}(y - y_{d})$$
(3.25)

donde a_{x_1} , a_{x_2} , a_{y_1} y a_{y_2} son constantes positivas. Considerando los ángulos de alabeo y cabeceo deseados, se proponen los controles de orientación como

$$\tau_{\phi} = -\mathfrak{a}_{\phi_1}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) - \mathfrak{a}_{\phi_2}(\phi - \phi_d) \tag{3.26}$$

$$\tau_{\theta} = -a_{\theta_1}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - a_{\theta_2}(\theta - \phi_d) \tag{3.27}$$

donde a_{ϕ_1} , a_{ϕ_2} , a_{θ_1} y a_{θ_2} son constantes positivas.

Cuando los ángulos de alabeo y cabeceo convergen a los valores deseados (3.22) y (3.23), la dinámica horizontal se convierte en

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}_{\mathbf{x}} \tag{3.28}$$

$$\ddot{\theta} = \tau_{\theta} \tag{3.29}$$

$$\ddot{y} = u_y \tag{3.30}$$

$$\hat{\Phi} = \tau_{\Phi} \tag{3.31}$$

donde el par $(\ddot{x}, \ddot{\theta})$ está asociado al movimiento longitudinal y el par $(\ddot{y}, \ddot{\phi})$ está asociado al movimiento lateral.

SECCIÓN 3.6

Estrategia de control en el plano horizontal

3.6.1. Estrategia basada en un control PD cíclico.

Esta estrategia para controlar la posición utiliza un control PD que se hace variar cíclicamente usando funciones sinusoidales, y además se le adiciona un control de velocidad angular con el fin de regular tanto el desplazamiento como la rotación.

Control de velocidad angular

El control de velocidad angular modifica simultáneamente y en igual proporción la fuerza de empuje en los motores, con esto se aumenta o disminuye el giro del vehículo. Entonces la señal de control para cada motor se define como

$$\tau_{\psi} = k_{\psi} \dot{e}_{\psi} \tag{3.32}$$

donde k_ψ es una constante positiva y \dot{e}_ψ es el error de velocidad angular definido como

$$\dot{e}_{\psi} = \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \tag{3.33}$$

donde ψ_d es la velocidad angular deseada.

Control cíclico de posición

El control de posición también utiliza los motores de los aviones, pero en este caso el control genera una fuerza de empuje variante en forma cíclica, para lograr este propósito se usa un control PD conjuntamente con funciones sinusoidales, con esto se obtiene la variación cíclica en el control. Las señales aplicadas a cada motor para lograr un desplazamiento en el eje x se establecen como

$$u_{1x} = +k_1 e_x \sin(\psi) + k_{d1} \dot{e}_x \sin(\psi) = (k_1 e_x + k_{d1} \dot{e}_x) \sin(\psi)$$
(3.34)

$$u_{2x} = -k_1 e_x \sin(\psi) - k_{d1} \dot{e}_x \sin(\psi) = -(k_1 e_x + k_{d1} \dot{e}_x) \sin(\psi)$$
(3.35)

de igual manera se establecen las señales para el desplazamiento en el eje y como

$$u_{1y} = -k_2 e_y \cos(\psi) - k_{d2} \dot{e}_y \cos(\psi) = -(k_2 e_y + k_{d2} \dot{e}_y) \cos(\psi)$$
(3.36)

$$u_{2y} = +k_2 e_y \cos(\psi) + k_{d2} \dot{e}_y \cos(\psi) = (k_2 e_y + k_{d2} \dot{e}_y) \cos(\psi)$$
(3.37)

donde k_1 , k_2 , k_{d1} y k_{d2} son constantes positivas, mientras que e_x y e_y son los errores

de posición definidos como

$$e_{\rm x} = x_{\rm d} - x \tag{3.38}$$

$$e_{\rm y} = y_{\rm d} - y \tag{3.39}$$

donde x_d y y_d son las coordenadas de la posición deseada.

Las ecuaciones (3.34) y (3.35) controlan el desplazamiento en el eje x, al modular la magnitud del control PD. Debido al arreglo geométrico del sistema, cuando el ángulo ψ vale cero grados los vectores de empuje se encuentran alineados con el eje y inercial, por tanto en este momento el controlador no genera ningún impulso, pero a medida que el ángulo ψ aumenta también lo hace el valor del control PD. El valor ψ aumenta de tal modo que cuando el valor llega a 90°, el controlador registra un pulso máximo, en este instante el vector de empuje se encuentra alineado con el eje x inercial. Después de presentarse el pulso máximo, la magnitud del controlador empieza a decrecer conforme ψ se acerca a 180°, al llegar a 180° el vector de empuje nuevamente está paralelo al eje y donde el valor del controlador se hace cero. Este comportamiento continúa al avanzar el giro de los aviones, de tal modo que cuando ψ llega a 270° la magnitud del control tiene otro máximo y posteriormente se vuelve cero cuando el ángulo llega a 360°, así la dinámica se repite con cada giro que completan los aviones. Esta dinámica se logra al multiplicar el valor del control PD por una función sinusoidal que tiene como argumento a ψ , de ahí que se ha nombrado como control cíclico o PD cíclico. Se obtiene un comportamiento similar con las ecuaciones (3.36), (3.37) que controlan el desplazamiento en el eje y. En este caso se utiliza una función coseno con argumento ψ que multiplica al control PD.

Señales de control

Considerando las ecuaciones anteriores se establece que la señal de control para cada motor queda expresada como

$$T_1 = \tau_{\psi} + u_{1\chi} + u_{1y} \tag{3.40}$$

$$T_2 = \tau_{\psi} + u_{2y} + u_{2y} \tag{3.41}$$

esto se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\psi} \dot{e}_{\psi} \\ k_{\psi} \dot{e}_{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_{d1} \\ -k_1 & -k_{d1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ \dot{e}_x \end{bmatrix} \sin \psi + \begin{bmatrix} -k_2 & -k_{d2} \\ k_2 & k_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ \dot{e}_y \end{bmatrix} \cos \psi \quad (3.42)$$

estas señales indican las revoluciones en cada motor para obtener la fuerza de empuje requerida para llevar al sistema a la posición deseada.

3.6.2. Estrategia basada en una función positiva

En esta sección se presenta una estrategia de control basada en una función positiva para regular el desplazamiento de los aviones en el plano x-y. Se retoma la ecuación de fuerza (2.109), y se considera que $\mu = 0$ resultando

$$f_x = T_1 - T_2 \tag{3.43}$$

$$f_y = 0 \tag{3.44}$$

entonces la ecuación de fuerza inercial (2.121) se simplifica como

de ahí que el sistema de ecuaciones (2.123-2.125) se reduce a

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{m}}(\mathbf{f}_{\mathbf{x}}\sin\psi) \tag{3.46}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} (f_x \cos \psi) \tag{3.47}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}}(\iota T_1 + \iota T_2) \tag{3.48}$$

y a partir de este sistema de ecuaciones, se define el vector de estado y las variables de estado como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & y & \dot{y} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
(3.49)

y se obtiene la derivada de las variables de estado resultando lo siguiente

$$\dot{p}_1 = p_2 \qquad \dot{p}_2 = -\frac{1}{m}u\sin(\psi) \qquad \dot{p}_3 = p_4$$

$$\dot{p}_4 = \frac{1}{m}u\cos(\psi) \qquad \dot{p}_5 = p_6 \qquad \dot{p}_6 = \frac{1}{I_{zz}}(lT_1 + lT_2)$$

Se define el vector de estado deseado como

$$\mathbf{p}_{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d} & * & \mathbf{y}_{d} & * & * & \dot{\mathbf{\psi}}_{d} \end{bmatrix}^{T}$$
(3.50)

donde * indica que no se establece algún valor particular o específico para dicho estado. También se establecen las siguientes funciones y funciones de error

$$r_x = \dot{e}_x + \alpha_x e_x = (\dot{x}_d - \dot{x}) + \alpha_x (x_d - x)$$
 (3.51)

$$\mathbf{r}_{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} + \alpha_{\mathbf{y}} \mathbf{e}_{\mathbf{y}} = (\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{y}}) + \alpha_{\mathbf{y}} (\mathbf{y}_{\mathbf{d}} - \mathbf{y})$$
(3.52)

$$\mathbf{r}_{\psi} = \alpha_{\psi} \dot{\mathbf{e}}_{\psi} = \alpha_{\psi} (\dot{\psi}_{d} - \dot{\psi}) \tag{3.53}$$

$$e_{\rm x} = x_{\rm d} - x \tag{3.54}$$

$$e_{y} = y_{d} - y \tag{3.55}$$

$$\dot{e}_{\psi} = \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \tag{3.56}$$

donde α_x , α_y y α_ψ son constantes positivas. Se establece la función positiva como

$$V(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}W^2$$
 (3.57)

donde

$$W = \sin(\psi)r_{x} + \cos(\psi)r_{y} + r_{\psi}$$
(3.58)

entonces, la ecuación (3.57) se puede reescribir en forma vectorial como

$$V(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \sin(\psi) & \cos(\psi) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\psi \end{bmatrix} \right)^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2$$
(3.59)

donde el vector v_1 está en términos de ψ la cual varía mucho más rápido que el vector v_2 , es decir la variable ψ realiza ciclos completos de 0 a 360 grados en un determinado tiempo mientras que las funciones r_x , r_y y r_{ψ} asociadas a los estados x, y y ψ varían lentamente como si permanecieran constantes. Este comportamiento se debe a la forma en que se desplaza el vehículo (véase la sección 3.3), el centro de gravedad se mueve más lento en comparación con la rotación que tiene el sistema. Por tanto es posible conocer valores de la función en algunos puntos, esto es

$$V_{1}(\mathbf{p})\Big|_{\psi=0} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{x} \\ r_{y} \\ r_{\psi} \end{bmatrix} \right)^{2}$$
(3.60)

$$V_4(\mathbf{p})\Big|_{\psi=1/2\pi} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\psi \end{bmatrix} \right)^2$$
(3.61)

$$V_{6}(\mathbf{p})\Big|_{\psi=\pi} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{x} \\ r_{y} \\ r_{\psi} \end{bmatrix} \right)^{2}$$
(3.62)

y como V(p) en (3.59) converge a cero y tomando en cuenta V₁, V₄ y V₆, se forma

$$\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{x} \\ r_{y} \\ r_{\psi} \end{bmatrix} \right)^{2} = 0$$
(3.63)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\psi \end{bmatrix} = 0 = C_1 r$$
(3.64)

donde la matriz formada C_1 es regular con valores propios {1 + i, 1 - i, -1} por tanto el vector **r** convergerá a cero.

Ahora al obtener la derivada temporal de (3.57) se tiene que

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{p}) = W(\sin(\psi)\dot{\mathbf{r}}_{x} + \dot{\psi}\cos(\psi)\mathbf{r}_{x} + \cos(\psi)\dot{\mathbf{r}}_{y} - \dot{\psi}\sin(\psi)\mathbf{r}_{y} + \dot{\mathbf{r}}_{\psi})$$
(3.65)

para lograr la estabilidad exponencial global, se requiere que

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{p}) = -\kappa \mathbf{V} \tag{3.66}$$

y esto ocurre al seleccionar $\kappa > 0$ [28].

Por lo tanto, el término en el paréntesis más a la derecha de (3.65) debe de cumplir que

$$(\sin(\psi)\dot{\mathbf{r}}_{x} + \dot{\psi}\cos(\psi)\mathbf{r}_{x} + \cos(\psi)\dot{\mathbf{r}}_{y} - \dot{\psi}\sin(\psi)\mathbf{r}_{y} + \dot{\mathbf{r}}_{\psi}) = -\frac{\kappa}{2}W$$
(3.67)

agrupando \dot{r}_{x} , \dot{r}_{y} y \dot{r}_{ψ} y sustituyendo sus valores se obtiene $\sin(\psi)\dot{r}_{x} + \cos(\psi)\dot{r}_{y} + \dot{r}_{\psi} = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y}$ (3.68)

$$\sin(\psi)(\ddot{e}_x + \alpha_x \dot{e}_x) + \cos(\psi)(\ddot{e}_y + \alpha_y \dot{e}_y) + \alpha_\psi \dot{e}_\psi = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_x + \dot{\psi}\sin(\psi)r_y$$
(3.69)

$$\sin(\psi)\ddot{e}_{x} + \cos(\psi)\ddot{e}_{y} + \alpha_{\psi}\dot{e}_{\psi} = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y}$$
(3.70)

además si x_d , y_d y $\dot{\psi}_d$ son constantes, \ddot{e}_x , \ddot{e}_y y \ddot{e}_ψ se simplifican, entonces (3.70) se convierte en

$$\sin(\psi)(-\ddot{x}) + \cos(\psi)(-\ddot{y}) + \alpha_{\psi}(-\ddot{\psi}) = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y}$$
(3.71)
$$\sin(\psi)(\frac{1}{2}f_{x}\sin(\psi)) + \cos(\psi)(\frac{1}{2}f_{x}\cos(\psi)) + \alpha_{\psi}(-\frac{1}{2}(T_{1} + T_{2})) = -\frac{\kappa}{2}G_{x}^{2} + \frac{\kappa}{2}G_{y}^{2} + \frac{$$

$$\int_{m} \frac{1}{m} \frac{1}{m$$

$$\frac{1}{m}f_{x}(\sin^{2}(\psi) + \cos^{2}(\psi)) - \frac{\alpha_{\psi}\iota}{I_{zz}}(T_{1} + T_{2}) = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y}$$
(3.73)

$$\frac{1}{m}(T_1 - T_2) - \frac{\alpha_{\psi}\iota}{I_{zz}}(T_1 + T_2) = -\frac{\kappa_{\psi}\iota}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_x + \dot{\psi}\sin(\psi)r_y - \sin(\psi)\alpha_x\dot{e}_x - \cos(\psi)\alpha_y\dot{e}_y$$
(3.74)

agrupando T_1 y T_2 se obtiene

$$\frac{1}{m}T_{1} - \frac{\alpha_{\psi}l}{I_{zz}}T_{1} - \frac{1}{m}T_{2} - \frac{\alpha_{\psi}l}{I_{zz}}T_{2} = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y} \qquad (3.75)$$
$$\frac{I_{zz} - m\alpha_{\psi}l}{mI_{zz}}T_{1} + \frac{-I_{zz} - m\alpha_{\psi}l}{mI_{zz}}T_{2} = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y} \qquad (3.75)$$

$$-\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y}$$
(3.76)

$$\frac{I_{zz} - \mathfrak{m}\alpha_{\psi}\mathfrak{l}}{\mathfrak{m}I_{zz}}\mathsf{T}_{1} + \frac{-I_{zz} - \mathfrak{m}\alpha_{\psi}\mathfrak{l}}{\mathfrak{m}I_{zz}}\mathsf{T}_{2} = \mathsf{F}(\mathbf{p}) \tag{3.77}$$

donde

$$F(\mathbf{p}) = -\frac{\kappa}{2}W - \dot{\psi}\cos(\psi)r_{x} + \dot{\psi}\sin(\psi)r_{y} - \sin(\psi)\alpha_{x}\dot{e}_{x} - \cos(\psi)\alpha_{y}\dot{e}_{y} \qquad (3.78)$$

y de (3.77) se puede ver que es conveniente seleccionar

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{mI_{zz}}{I_{zz} - m\alpha_{\psi} l} F(\mathbf{p})$$
(3.79)

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{mI_{zz}}{-I_{zz} - m\alpha_{\psi} l} F(\mathbf{p})$$
(3.80)

como los controles que pueden ser ajustados mediante los parámetros α_x , α_y , α_ψ y κ. Con esta selección se cumple que $\dot{V}(\mathbf{p})$ en (3.66) es definida negativa como se requiere para la estabilidad.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO DEL PROTOTIPO

SECCIÓN 4.1

Introducción

En este capítulo se presenta el desarrollo del prototipo, el proceso de diseño y construcción considera los requerimientos de la configuración propuesta y el análisis que se expuso en los capítulos previos. El prototipo utiliza dos aviones de ala fija que unidos forman un solo rotor de mayor tamaño, estos aviones presentan las características típicas de la configuración, como son motores para generar empuje, fuselaje, superficie alar, superficies de control con sus respectivos mecanismos, sistema de energía, entre otros componentes.

SECCIÓN 4.2

Metodología

La metodología para el desarrollo de la plataforma considera el proceso de diseño usado en aviones eléctricos de batería. Esta metodología empieza por seleccionar un motor ya existente, normalmente por el coste o la disponibilidad. Este motor se ha elegido para que tenga el empuje o la potencia adecuados para un típico avión de esa clase [29]. Debido a que el sistema completo requiere de dos aviones, se busca que éstos sean lo más ligero posible. Además de que todo el sistema sea construido de forma modular, a fin de ahorrar tiempo en la reparación ante cualquier daño que pudiese sufrir durante las pruebas de vuelo y que los elementos sean fácilmente sustituibles. Entonces el proceso que se sigue para llevar acabo este cometido se muestra en la Figura 4.1.

4.2.1. Selección del motor

La selección del motor se hace según la disponibilidad, este es elegido considerando el tamaño y empuje necesario para la aplicación en vehículos pequeños. La







Figura 4.2 Motor DYS modelo FIRE 2206

De las características del motor dadas por el fabricante, se puede notar que este motor puede funcionar con baterías de 3 o 4 celdas, cabe recordar que a mayor número de celdas implica mayor peso. Por tanto resulta conveniente seleccionar una batería de menor número de celdas posible para funcionar con el motor. A su vez, este arreglo se puede combinar con diferentes tipos de hélices, el fabricante indica que el motor soporta hélices de 5 o 6 pulgadas. Por eso, a continuación se muestra una prueba donde se pone a funcionar el motor con diferentes hélices.

Prueba del motor con diferentes hélices

Los datos proporcionados por el fabricante comúnmente varían según las condiciones y el lugar donde se realizan dichas pruebas. El desempeño del motor cambia con diversos factores como la altura sobre el nivel del mar, entre otras condiciones. Entonces con la finalidad de obtener valores más aproximados a las condiciones de operación locales se llevaron a cabo pruebas donde el motor se acopló con diferentes hélices. La mediciones se obtuvieron usando el banco de pruebas RCbenchmark Series 1580 y las hélices que se emplearon se muestran en la Figura 4.3.



Los resultados obtenidos de las pruebas se muestran en las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6. En ellas se muestra el empuje generado y la corriente consumida con respecto a las revoluciones por minuto.



Los resultados de las hélices que se sometieron a la prueba muestran que en general todas alcanzan aproximadamente 0.5 kgf de empuje y su eficiencia es similar. En particular, la hélice de 5 pulgadas y 2 palas DALPROP 5045BN presenta un buen balance entre el empuje y consumo de corriente.

4.2.2. Selección del perfil aerodinámico

El perfil del ala es la parte principal de un avión debido a que afecta la velocidad de vuelo en crucero, la distancia de despegue y aterrizaje, la velocidad de desplome



y la eficiencia aerodinámica en general durante todas las fases de vuelo. Un perfil genera levantamiento al cambiar la velocidad del aire que pasa alrededor de él. El ángulo de ataque del perfil o la curvatura del mismo benefician el aumento del levantamiento. Considerando dos principales casos, un perfil plano y uno curvado, es bien sabido que un perfil plano no genera levantamiento a un ángulo de ataque cero a diferencia de un perfil con curvatura incluso a ángulo cero produce levantamiento. En la Figura 4.7 se muestra la comparación del coeficiente de levantamiento entre un perfil plano y perfiles de la serie NACA [30].

Como se puede notar un perfil con curvatura presenta un mayor coeficiente de levantamiento pero su construcción puede llegar a ser complejo y requiere mayor práctica que a diferencia de un perfil plano. A pesar de su aparente desventaja, un perfil plano funciona y se adapta perfectamente a las necesidades de este proyecto pues aporta mayor simetría para todo el sistema y además puede ser fácilmente reemplazable. Por tanto para el prototipo se opta por utilizar un perfil plano y un ala con forma rectangular.


Figura 4.7 Curvas del coeficiente de levantamiento para tres perfiles.

4.2.3. Estimación del peso y carga alar

Además del perfil alar, dos de los parámetros más importantes que afectan el rendimiento del avión son la relación empuje-peso (T/W) y la relación de peso-superficie o carga alar (W/S), dichas relaciones están estrechamente interconecta-das.

Al pensar en la distancia de despegue, un requisito para un despegue corto puede cumplirse utilizando un ala grande (baja W/S) con un motor relativamente pequeño (baja T/W). El motor pequeño hará que la aeronave acelere lentamente, pero sólo necesita alcanzar una velocidad moderada para despegar del suelo. Por otra parte, la misma distancia de despegue podría alcanzarse con un ala pequeña (alta W/S) si se utiliza un motor grande (alta T/W). En este caso, la aeronave debe alcanzar una velocidad elevada para despegar, pero el motor grande puede acelerar rápidamente la aeronave a esa velocidad.

El T/W cambia durante el vuelo según varíe la configuración del empuje, la velocidad, la altitud, la temperatura o debido a cambios de peso de la carga útil. La relación peso-empuje T/W afecta directamente al rendimiento de la aeronave, un avión con una gran T/W acelerará más rápido, ascenderá más rápido, alcanzará la velocidad máxima más rápido y mantendrá vueltas de giro más rápidas. Por otra parte esto implica tener motores más grande por ende más pesados que tendrán mayor consumo energético durante la misión [31].

Esta relación puede dar una idea de si la combinación de motor, ala y peso del vehículo son adecuadas para el vuelo. Para el diseño del avión se define el peso bruto al despegue W_0 , el cual está formado por el peso del fuselaje del avión y el peso restante. Este último considera elementos fijos que incluyen a los motores, trenes de aterrizajes, aviónica o cualquier otra cosa no considerada en el fuselaje del avión. Esto es,

$$W_0 = W_f + W_r \tag{4.1}$$

y de las pruebas del motor con las hélices se sabe que el empuje estático máximo es

$$T_{S_{max}} = 0.47 \text{kgf} \tag{4.2}$$

estos dos valores permiten suponer que un peso de $W_0 = 0.5$ kgf máximo por vehículo cumplen los requerimiento mínimos para volar. Entonces el prototipo podría considerarse a tener un peso máximo $W_{0max} = 1.5$ kgf, lo cual incluye el peso de los aviones y un margen de peso adicional.

4.2.4. Dimensionamiento geométrico

Basado en los aspectos de diseño preliminares se procede a bosquejar el avión que conformará al sistema de vehículos, el modelado 3D se hace en Solidworks. Las superficies de control consideradas son el elevador y el timón, el ala no incluyen superficies de control como se muestra en la figura 4.8. Teniendo en cuenta que



Figura 4.8 Diseño CAD: Vista superior del primer avión.

un perfil de placa plana no produce levantamiento a un ángulo de ataque nulo, se diseñó el vehículo para que al despegue tenga un ángulo de ataque inicial entre cero



y diez grados. El la figura 4.9 se aprecia el vehículo con este ángulo.

Figura 4.9 Diseño CAD: Vista lateral del primer avión.

Del modelo CAD 3D del vehículo se obtienen los siguientes parámetros geométricos del avión

$$I_{xx} = 0,001238215 \text{ kg/m}^2$$

$$I_{xz} = 0,000047223 \text{ kg/m}^2$$

$$I_{yy} = 0,013909253 \text{ kg/m}^2$$

$$I_{zz} = 0,013030846 \text{ kg/m}^2$$

$$S = 0,0663 \text{ m}^2$$

$$b = 0,51 \text{ m}$$

$$c = 0,15 \text{ m}$$

que incluyen valores de los momentos de inercia, área del ala, envergadura y cuerda del ala.

4.2.5. Construcción del primer avión

La construcción del prototipo se hace teniendo en mente el uso de materiales ligeros que puedan ser fácilmente sustituibles en caso de sufrir algún daño durante las pruebas experimentales. Por tanto, para el primer avión se utiliza un tubo de fibra de carbón como parte del fuselaje, que además de ser resistente y es muy liviano. El ala, el empenaje y las superficies de control se construyen de una placa de foamboar de 5mm de grosor, este material es ligero y se puede manipular fácilmente. Para ensamblar todas las partes del avión se diseñaron algunas piezas en CAD, entre ellas una base para el motor, una pieza para sujetar el tren de aterrizaje, una pieza para sujetar el ala al tubo y otra para sujetar el empenaje. Posteriormente se fabricaron usando PLA con una impresora 3D. El prototipo construido con todos sus componentes se muestra en la Figura 4.10. Éste incluye el fuselaje del avión,



Figura 4.10 Prototipo inicial del avión.

ala, empenaje, motor con su hélice, ESC, batería, controlador de vuelo, servos y cables para realizar conexiones. Tomando en cuenta estos componentes equipados, el avión tiene un peso de 380 grms.

Se realizaron pruebas del funcionamiento del avión, en las cuales se detectaron aspectos que ayudarían a mejorar el vuelo del avión. La relación de peso-superficie W/S del avión se puede mejorar aumentando la superficie del ala para que el avión despegue en una menor distancia y al mismo tiempo se reduce la velocidad de rotación necesaria para mantener al avión en vuelo, también se puede mejorar la estructura del tren de aterriza para darle mejor soporte al despegue.

Prototipo final

Teniendo en cuenta los puntos de mejora encontrados en el prototipo anterior, se realizaron modificaciones principalmente en el incremento del tamaño del ala y el refuerzo del tren de aterrizaje. Los cambios al diseño del avión quedaron como se muestra en la Figura 4.11.



Figura 4.11 Diseño CAD: Vista superior del avión final.

Con este diseño como el final para el avión, el diseño con dimensiones del prototipo que incluye a los dos aviones queda como muestran las Figura 4.12. En la figura se puede notar que la distancia entres el ala de los aviones es de 250mm, pero por la forma en que se diseñó esta distancia se puede incrementar fácilmente a un mayor tamaño.

Al considerar los cambios en el diseño se construye el nuevo prototipo que incorpora los dos aviones, se usan materiales similares que en el prototipo construido previamente, el resultado final se muestra en la Figura 4.13.



Figura 4.12 Diseño CAD: Vista superior del prototipo.



Figura 4.13 Prototipo final con los dos aviones.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

SECCIÓN 5.1

Introducción

En esta sección se presentan los resultados de simulación, los cuales permiten validar el modelo matemático obtenido y las estrategias de control desarrolladas.

Principalmente se exponen dos simulaciones, una de ellas muestra la dinámica del vehículo en tres dimensiones y la otra en el plano horizontal. En el Capítulo 2 se presentaron los modelos para ambos espacios de movimiento, mientras que en el capítulo 3 se obtuvieron las estrategias de control que se aplican en cada caso. Y a continuación se listan los parámetros que se seleccionaron para cada simulación y las gráficas que exponen el comportamiento de la dinámica del vehículo al aplicarse las estrategias de control.

SECCIÓN 5.2

Simulación

5.2.1. Simulación del control general

Esta simulación utiliza el modelo simplificado, en él se emplea la estrategia de control general. El uso de este modelo permite analizar y entender la complejidad del sistema de forma intuitiva. Los parámetros de control y las condiciones utilizadas se listan en la tabla 5.1. Las ganancias de control se seleccionaron experimentalmente para satisfacer los requisitos de diseño del control de orientación y posición, principalmente se ajustaron las ganancias para asegurar que la dinámica vertical fuera más rápida que la dinámica horizontal.

En primer lugar, se busca estabilizar la altura del vehículo tal que alcance la altura deseada como muestra la Figura 5.1, al mismo tiempo se evita el sobreimpulso. También, se regula la velocidad angular de guiñada hasta alcanzar una velocidad constante como se muestra en la Figura 5.2. En la dinámica horizontal del vehículo,



se controlan los ángulos de alabeo y cabeceo para producir un desplazamiento en el plano x-y. Tal que, los ángulos de alabeo y cabeceo siguen las referencias ϕ_d y θ_d que fueron definidas en el diseño del control, esto se muestra la Figura 5.3. Las señales de control de posición tienen un comportamiento como muestra la Figura 5.4. Las señales de control de orientación permiten seguir la referencia de los ángulos de



alabeo y cabeceo, estas tienen un comportamiento como se muestra en la Figura 5.5. Los dos aviones generan una fuerza de sustentación total como se muestra en la Figura 5.6. En consecuencia, los controles de orientación y posición permiten que el vehículo alcance la posición deseada como muestra la Figura 5.7.



Figura 5.7 Trayectoria del sistema.

5.2.2. Simulación en el plano horizontal

En esta sección se implementan las dos estrategias de control las cuales utilizan los motores para controlar el movimiento del vehículo sobre el plano horizontal.

Simulación usando un control PD cíclico

Esta simulación implementa el control basado en el control PD cíclico, y utiliza los parámetros listados en la Tabla 5.2. Para el parámetro de la densidad del aire se consideró una altitud de 2240 m (altitud de la Ciudad de México) y se estableció de acuerdo al modelo ISA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m	1 kg	x _d	0.5 m	μ	0° a 15°
l	1 m	Yd	-0.5 m	k_{ψ}	3200
Izz	$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$\mathbf{x}(0)$	0 m	k_{ψ}	3200
ρ	0.982428 kg/m^3	y(0)	0 m	k ₁	2300
D	0.1016 m	$\psi(0)$	0 rad	k _{d1}	1100
		$\dot{\mathbf{x}}(0)$	$0 \mathrm{m/s}$	k ₂	1500
		ý(0)	$0 \mathrm{m/s}$	k _{d2}	1100
		ψ́(0)	0 rad/s		

 Tabla 5.2
 Parámetros de simulación del control PD cíclico.

Las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 muestran la trayectoria de la posición de los dos aviones, desde que parten de la condición inicial hasta que el vehículo llega al punto deseado. Los aviones describen una trayectoria circular y se mueven en sentido antihorario. En la Figura 5.11 se muestra la trayectoria del CG del vehículo, y se puede notar que al acercarse a la posición deseada tiene un comportamiento oscilante, que se debe a la naturaleza del vehículo. La Figura 5.12 muestra la evolución de la velocidad angular, hasta alcanzar el valor de referencia establecido.

En la figura 5.13 se pueden ver las señales de control actuando en cada motor, se puede notar que existe un efecto sinusoidal debido al uso de funciones seno y coseno en el controlador. También se puede ver que estas señales de control empiezan a actuar hasta que la velocidad angular se encuentra cerca a su valor deseado.

La variable μ se establece como muestra la figura 5.14, no se usa como parámetro de control, este ángulo varía desde cero a quince grados y provoca que el sistema se perturbe.

El error de posición decrece hasta cero por el efecto del controlador como muestra la Figura 5.15, también se puede notar el efecto oscilante debido a la forma del



controlador.

La norma del vector de posición tiende a cero como lo muestra la Figura 5.16, lo cual demuestra que el vehículo alcanza la posición deseada.



Simulación usando la función positiva

La simulación, cuando se implementa el control basado en la función positiva, usa los parámetros que se listan en la Tabla 5.3. En esta tabla se incluyen valores de referencia, condiciones iniciales y constantes del controlador.

Las Figuras 5.19, 5.17 y 5.18 muestran la trayectoria de la posición de los aviones,



ésta describe un movimiento circular en sentido contrarreloj desde que parten de su condición inicial y hasta que el sistema alcanza su posición deseada.

En la tabla anterior se estableció la condición inicial (x_0, y_0) y la posición deseada



Figura 5.16 Norma del vector de posición.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
x _d	0 m	ÿо	0 m/s
Yd	0 m	ψ́o	0 rad/s
$\dot{\psi}_d$	6.5 rad/s	α_{x}	0.5
\mathbf{x}_{0}	0.5 m	$\alpha_{\rm y}$	0.5
Yo	0.5 m	α_{ψ}	1.7
ψ_0	0 rad	к	2.0
$\dot{\mathbf{x}}_0$	$0 \mathrm{m/s}$		



Tabla 5.3 Parámetros de simulación para el control con la función positiva.

 (x_d, y_d) del CG del vehículo, y después de cumplir con estos criterios se registra su trayectoria como muestra la Figura 5.20. La Figura 5.21 muestra la evolución de la



velocidad de guiñada del sistema, se observa que alcanza el valor de referencia y se mantiene en ese valor.

Las señales de control que se asignan a los actuadores se muestran en la Figura 5.22, estas tienen un comportamiento similar.

A la par que se aplica el control, el error de posición disminuye como se muestra en la Figura 5.23, aquí también se puede notar un comportamiento sinusoidal.

La Figura 5.24 muestra el comportamiento de la norma del vector de posición, ésta tiene un comportamiento decreciente lo cual indica que el vehículo se aproxima a la posición deseada hasta alcanzarla.



Velocidad angular de guiñada.



Figura 5.24 Norma de los estados de posición.

Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las pruebas experimentales que se realizaron con el prototipo desarrollado en el Capítulo 4.

5.3.1. Componentes en el prototipo

Para realizar las pruebas, el vehículo se equipó con la electrónica y mecanismos necesarios para su correcto funcionamiento. La conexión de los componentes que se utilizaron en el vehículo se muestran en la Figura 5.25. Estos incluyen un controlador de vuelo Pixhawk, el cual es energizado mediante una batería de Litio y su respectivo modulo de poder, se incluye un buzzer que emite sonidos para indicar lo que hace el vehículo, también se usa un radicontrol con su respectivo receptor, se emplearon dos motores brushless con su respectiva hélice y dos servomotores para accionar el elevador en los aviones.



Figura 5.25 Componentes utilizados en el prototipo.

5.3.2. Pruebas experimentales.

Los resultados de las pruebas experimentales se muestran en las siguientes gráficas donde el prototipo fue controlado de forma manual. La Figura 5.26 muestra la posición del vehículo en el plano XY, se puede notar que el prototipo se mantiene en una región muy cercana al punto de partida. En las Figuras 5.27, 5.29, 5.31 se



Figura 5.26 Prueba experimental: Posición en el plano XY.

muestran los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente. Para los ángulos de alabeo y cabeceo se tienen ángulos relativamente pequeños, en cambio para el ángulo de guiñada se muestran valores de -180 a 180 grados lo que representa un giro completo del prototipo. Las Figuras 5.28, 5.30, 5.32 muestran las respectivas velocidades angulares de alabeo, cabeceo y guiñada.

La Figura 5.33 muestra la altura del vehículo, se observa que este valor tiende a derivar debido a que se utiliza el barómetro para estimar la posición. La Figura 5.34 muestra las velocidades lineales del vehículo. En las figuras se refiere a los datos como estimados debido a que las señales obtenidas de los sensores fueron procesadas por el controlador de vuelo.





Figura 5.28 Prueba experimental: Velocidad de alabeo estimada.



Figura 5.29 Prueba experimental: Ángulo de cabeceo estimado.





Figura 5.31 Prueba experimental: Ángulo de guiñada estimado.



Figura 5.32 Prueba experimental: Velocidad de guiñada estimada.







CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

SECCIÓN 6.1

Conclusiones

En este estudio se planteó que los vehículos aéreos no tripulados tras el objetivo de incorporar características de vuelo valiosas en un solo sistema y ser de utilidad en un mayor rango de misiones, continúan enfrentándose a retos relativos principalmente al diseño mecánico y la aerodinámica. Incluso con estas limitantes, el gran potencial que envuelve a los vehículos aéreos híbridos vale la pena el esfuerzo por desarrollar nueva investigación y aportar al progreso de esta área científica.

En este trabajo se propuso un vehículo aéreo no tripulado híbrido que incorpora características de configuraciones convencionales y al mismo tiempo reduce las complexidades que implica la creación de este tipo de vehículo. El vehículo que se presentó se enfoca en ser lo más simple posible, mecánicamente hablando, preservar la aerodinámica que caracteriza a los aviones y conseguir estabilidad como la que encontramos en algunos elementos de la naturaleza como la sámara. Para lograr este cometido se usaron dos aviones de ala fija unidos para formar un único rotor de mayor tamaño.

En el Capítulo 2 se desarrolló el modelo matemático, en éste se obtuvieron las ecuaciones de movimiento del sistema en tres dimensiones y también se obtuvo un modelo considerando el movimiento en un plano horizontal. En el Capítulo 3 se propuso la estrategia para controlar el vuelo del vehículo tanto en 3D como en el plano horizontal. Estas estrategias consideran el comportamiento periódico inherente del sistema, por tal fueron diseñadas para afrontar y adaptarse a esta característica. En el Capítulo 4 se presentó el diseño del vehículo propuesto, las características físicas y el resultado de su construcción. Y finalmente en el Capítulo 5 se expuso los resultados, los cuales incluyen: una simulación numérica que considera las ecuaciones de movimiento en el espacio 3D y su respectiva estrategia de control, una simulación que considera las ecuaciones de movimiento en el plano horizontal aplicando su respectiva estrategia de control y los resultados de las pruebas experimentales rea-

lizadas con el prototipo. Los resultados de simulación mostraron que las estrategias propuestas logran un buen desempeño al controlar el vuelo del sistema.

La investigación de la configuración propuesta se resumió y fue presentada en dos artículos. Estos se muestran a continuación, en ellos se obtienen comentarios



positivos, resulta ser una configuración novedosa e interesante al buscar implementar características valiosas en un solo vehículo.

– SECCIÓN 6.2 —

Trabajo futuro

El trabajo futuro se enfoca en las etapas de despegue y aterrizaje vertical, las etapas de transición del despegue/aterrizaje y el desplazamiento del vehículo. Implementar estas etapas de vuelo complementaría todo el análisis que se presentó del vehículo.

Como posible investigación, se sugiere la posibilidad de dotar al vehículo con celdas solares de tal forma que sea energizado mediante energía solar.

BIBLIOGRAFÍA

- M. Hassanalian and A. Abdelkefi. Classifications, applications, and design challenges of drones: A review. *Progress in Aerospace Sciences*, 91:99–131, 2017.
- [2] Adnan S. Saeed, Ahmad Bani Younes, Chenxiao Cai, and Guowei Cai. A survey of hybrid Unmanned Aerial Vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 98:91–105, April 2018.
- [3] R. Åke Norberg. AUTOROTATION, SELF-STABILITY, AND STRUCTURE OF SINGLE-WINGED FRUITS AND SEEDS (SAMARAS) WITH COMPARATIVE REMARKS ON ANIMAL FLIGHT. *Biological Reviews*, 48(4):561–596, November 1973.
- [4] Eui-Jae Lee and Sang-Joon Lee. Effect of initial attitude on autorotation flight of maple samaras (Acer palmatum). *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30(2):741–747, February 2016.
- [5] Mohamed Y. Zakaria, Carlos R. dos Santos, Abdallah Dayhoum, Flávio D. Marques, and Muhammad R. Hajj. Modeling and prediction of aerodynamic characteristics of free fall rotating wing based on experiments. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 610(1):012098, September 2019.
- [6] Kunio Yasuda and Akira Azuma. The Autorotation Boundary in the Flight of Samaras. *Journal of Theoretical Biology*, 185(3):313–320, April 1997.
- [7] Stanley S. McGowen. *Helicopters: an illustrated history of their impact*. Weapons and warfare series. ABC-CLIO, Santa Barbara, Calif, 2005. OCLC: ocm57594294.
- [8] D.R. Jenkins, T. Landis, and J. Miller. *American X-vehicles: An Inventory, X-1 to X-50*. Monographs in aerospace history. National Aeronautics and Space Administration, Office of External Relations, 2003.
- [9] Paul E. I. Pounds and Surya P. N. Singh. Integrated electro-aeromechanical structures for low-cost, self-deploying environment sensors and disposable uavs. In 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 4459–4466, 2013.

- [10] Jun En Low, Luke Thura Soe Win, Danial Sufiyan Bin Shaiful, Chee How Tan, Gim Song Soh, and Shaohui Foong. Design and dynamic analysis of a transformable hovering rotorcraft (thor). In 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 6389–6396, Singapore, Singapore, May 2017. IEEE, IEEE.
- [11] Shane Kyi Hla Win, Luke Soe Thura Win, Danial Sufiyan, Gim Song Soh, and Shaohui Foong. Dynamics and control of a collaborative and separating descent of samara autorotating wings. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 4(3):3067–3074, 2019.
- [12] Shane Kyi Hla Win, Luke Soe Thura Win, Danial Sufiyan, Gim Song Soh, and Shaohui Foong. An agile samara-inspired single-actuator aerial robot capable of autorotation and diving. *IEEE Transactions on Robotics*, pages 1–14, 2021.
- [13] Evan R Ulrich, Darryll J Pines, and J Sean Humbert. From falling to flying: the path to powered flight of a robotic samara nano air vehicle. *Bioinspiration & Biomimetics*, 5(4):045009, December 2010.
- [14] Luke Soe Thura Win, Shane Kyi Hla Win, Danial Sufiyan, Gim Song Soh, and Shaohui Foong. Achieving efficient controlled flight with a single actuator. In 2020 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), pages 1625–1631, 2020.
- [15] Shane Kyi Hla Win, Luke Soe Thura Win, Danial Sufiyan, and Shaohui Foong. Design and control of the first foldable single-actuator rotary wing micro aerial vehicle. *Bioinspiration & Biomimetics*, 16(6):066019, November 2021.
- [16] Donald T. Greenwood. Advanced dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, 2003. OCLC: 72673085.
- [17] Harrison H. R. Advanced Engineering Dynamics. *The Aeronautical Journal*, Second edition:pp-24, 1996.
- [18] Bernard Etkin and Lloyd D Reid. *Dynamics of flight*, volume 2. Wiley New York, 1959.
- [19] Randal W Beard and Timothy W McLain. *Small unmanned aircraft: Theory and practice*. Princeton university press, 2012.

- [20] Raymond W. Prouty. *Helicopter performance, stability, and control*. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 2005. OCLC: 1110223948.
- [21] W. Johnson. *Helicopter Theory*. Dover Books on Aeronautical Engineering Series. Dover Publications, 1994.
- [22] Barnes Warnock McCormick. Aerodynamics, aeronautics, and flight mechanics. Wiley, New York, 2nd ed edition, 1995.
- [23] J. B. Brandt, R. W. Deters, G. K. Ananda, O. D. Dantsker, and M. S. Selig. UIUC Propeller Database, Vols 1-3. retrieved from https://m-selig.ae.illinois. edu/props/propDB.html, March 2022.
- [24] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, and SC Sinha. Non-linear control for underactuated mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.*, 55(4):B67–B68, 2002.
- [25] P. Castillo, R. Lozano, and Alejandro E. Dzul. *Modelling and control of mini-flying machines*. Advances in industrial control. Springer, London ; New York, 2005. OCLC: ocm61141310.
- [26] Thomas R Yechout. Introduction to aircraft flight mechanics. Aiaa, 2003.
- [27] Gareth D Padfield. *Helicopter flight dynamics: the theory and application of flying qualities and simulation modelling*. John Wiley & Sons, 2008.
- [28] Alberto Isidori. Nonlinear control systems. Communications and control engineering series. Springer, Berlin ; New York, 3rd ed edition, 1995.
- [29] Daniel Raymer. *Aircraft design: a conceptual approach*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2018.
- [30] J.D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering. McGraw-Hill, 2011.
- [31] John P Fielding. *Introduction to aircraft design*, volume 11. Cambridge University Press, 2017.