



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

SECCIÓN DE MECATRÓNICA

**Seguimiento de caminos para la dinámica
lateral-direccional de una aeronave de ala fija**

Tesis que presenta

Marco Antonio Martínez Ramírez

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis

Dr. Hugo Rodríguez Cortés

Agradecimientos

Antes que nada, me gustaría agradecer a mi familia, especialmente a mi madre Ángela y a mi padre Roberto, por apoyarme a lo largo de mi vida y acompañarme tanto en mis momentos de éxito como en mis momentos más difíciles. Muchas de las cosas que he logrado ha sido gracias a ellos, sus enseñanzas, su apoyo y su confianza en mí.

Agradecimientos a mis hermanos y a mi hermana, mis primos y primas, mis tíos y tías, y a toda mi familia que me ha apoyado de manera incondicional.

Un agradecimiento a mi casa de estudios, el Instituto Politécnico Nacional, a los docentes del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos 7 y de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad profesional Ticomán, así como a los doctores del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, unidad Zacatenco. Un gran agradecimiento al Dr. Rogelio Gerardo Hernández García, quien creyó en mí lo suficiente como para impulsarme a entrar al CINVESTAV a cursar el posgrado en el departamento de Mecatrónica, y quien me apoyó, no sólo como asesor de tesis en la licenciatura, sino también de manera personal.

Un especial agradecimiento al Dr. Hugo Rodríguez Cortés, quien me apoyó profesionalmente, además de ser uno de los principales pilares en el desarrollo de este trabajo.

Gracias a todos mis amigos y colegas, quienes me han dado lecciones de vida y me han ayudado a ver la vida con diferentes puntos de vista. Sin ellos mi vida no habría sido igual, sea esto bueno o malo, agradezco su presencia a lo largo del tiempo que los he conocido.

Un muy grande agradecimiento a CONACYT por el apoyo económico que me brindó con el CVU 1079221.

Muchas gracias a todos.

Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	XII
Resumen	XV
Abstract	XVII
1. Introducción	1
1.1. Configuración básica de una aeronave de ala fija	1
1.2. ¿Por qué un VANT de ala fija?	3
1.3. Aplicaciones para VANTs de ala fija	4
1.4. Seguimiento de caminos vs seguimiento de trayectoria	6
1.5. Estado del arte	7
1.6. Objetivos	9
Objetivos Específicos	9
1.7. Organización de la tesis	10
2. Modelo dinámico y cinemático	11

2.1.	Modelo dinámico de una aeronave de ala fija	11
2.1.1.	Sistemas de referencia	11
2.1.2.	Cinemática rotacional	13
2.1.3.	Dinámica traslacional	14
2.1.3.1.	Fuerza de gravedad	15
2.1.3.2.	Fuerzas aerodinámicas	15
2.1.3.3.	Fuerza de propulsión	16
2.1.3.4.	Ecuaciones de fuerza en ejes cuerpo	16
2.1.4.	Dinámica rotacional	16
2.1.4.1.	Momentos aerodinámicos	17
2.1.4.2.	Momentos de propulsión	19
2.1.4.3.	Ecuaciones rotacionales	20
2.1.5.	Cinemática traslacional	21
2.2.	Suposiciones sobre el modelo del vehículo	21
2.2.1.	Separación de la dinámica y cinemática longitudinal y lateral- direccional	21
2.2.2.	Controlador de la dinámica longitudinal	22
2.2.3.	Ángulos aerodinámicos pequeños	24
3.	Diseño del control	27
3.1.	Estructuras de lazos de control	27
3.2.	Diseño del lazo de control interno	28
3.3.	Diseño del lazo de control externo	31

3.3.1.	Seguimiento de caminos	33
3.3.2.	Caso particular	34
3.3.3.	Caso general	42
4.	Simulaciones numéricas	49
4.1.	Plataforma de simulación	49
4.2.	Obtención de los coeficientes aerodinámicos de control	52
4.3.	Planeación de la ruta	57
4.4.	Resultados de la simulación	58
5.	Conclusiones y trabajo a futuro	69
5.1.	Conclusiones	69
5.2.	Trabajo futuro	70
A.	Configuración de software	73
A.1.	Configuración de X-Plane	74
A.2.	Configuración de Matlab Simulink	75

Índice de figuras

1-1. Entradas de control básicas para una aeronave de ala fija.	2
1-2. Airbus Zephyr, dron de ala fija que cuenta con paneles solares, lo cual lo hace capaz de volar por semanas.	5
2-1. Sistema de referencias no inercial, conocido como sistema de ejes cuerpo $0x^b y^b z^b$, y sistema de ejes inercial, comunmente usado el sistema de ejes NED (North, East, Down) $0x^i y^i z^i$	12
2-2. Diagrama de velocidad del viento, V , ángulo de ataque, α , y ángulo de derrape, β	18
2-3. Diagrama de fuerzas aerodinámicas en ejes cuerpo y en ejes viento	19
2-4. Diagrama del ángulo de vuelo, γ , ángulo de ataque, α , y ángulo de cabeceo, θ	23
2-5. Diagrama del ángulo dirección de vuelo, χ , ángulo de derrape, β , y ángulo de guiñada, ψ	24
3-1. Error lateral de la aeronave \tilde{y}	28
3-2. Diagrama a bloques del control en cascada.	29
3-3. Error lateral de la aeronave, \tilde{y} , para el caso particular.	35
3-4. Rotación del sistema de ejes	43

3-5.	Error lateral de la aeronave en el sistema de ejes auxiliar, \tilde{y}^r	44
4-1.	Telemaster modelado en Plane Maker dentro del simulador X-Plane.	50
4-2.	Perfil aerodinámico Telemaster P1, utilizado en el ala de la aeronave Telemaster	51
4-3.	Datos principales del primer vuelo para caracterización de los coeficientes de alabeo y guiñada.	54
4-4.	Coefficiente de alabeo obtenido con los datos del primer vuelo y con el modelo creado a partir de los coeficientes obtenidos por los mínimos cuadrados. 54	54
4-5.	Coefficiente de guiñada obtenido con los datos del primer vuelo y con el modelo creado a partir de los coeficientes obtenidos por los mínimos cuadrados.	55
4-6.	Datos principales del segundo vuelo para predicción de los coeficientes de alabeo y de guiñada.	55
4-7.	Coefficiente de alabeo obtenido con los datos del segundo vuelo y el predicho con los datos de la caracterización del primer vuelo.	56
4-8.	Coefficiente de guiñada obtenido con los datos del segundo vuelo y el predicho con los datos de la caracterización del primer vuelo.	56
4-9.	Trayectoria seguida por la aeronave en la simulación numérica.	61
4-10.	Error lateral, \tilde{y}	62
4-11.	Ángulo de alabeo requerido por la aeronave, ϕ	62
4-12.	Error de orientación, $(P_a(\tilde{R}_\psi))^\vee$	63
4-13.	Aceleración lateral de la aeronave.	63
4-14.	Error de velocidad rotacional de alabeo, \tilde{p}	64
4-15.	Error de velocidad rotacional de guiñada, \tilde{r}	64

4-16. Deflexión requerida del alerón, δ_a	65
4-17. Deflexión requerida del timón, δ_r	66
4-18. Zona lineal de la cura de levantamiento de la aeronave Telemaster	66
4-19. Ángulo de alabeo máximo para cada ángulo de ataque de la aeronave Telemaster	67
A-1. Barra de menús de X-Plane	74
A-2. Pantalla de configuración de IP para salida y entrada de datos	74
A-3. Pantalla de configuración de salida de datos	76
A-4. Bloque de configuración para la recepción de datos provenientes de X-Plane, bloque para sincronizar la simulación en tiempo real y demultiplexor para selección de datos.	77
A-5. Configuración recomendada del bloque receptor de datos.	78
A-6. Bloques de envío de señal de Matlab Simulink a X-Plane.	79
A-7. Configuración del bloque para envío de señales de control.	79
A-8. Configuración del bloque para enviar la señal de los motores.	81

Índice de tablas

4.1. Momentos de inercia del Telemaster, obtenidos a través del modelo hecho en CAD.	50
4.2. Características geométricas principales del Telemaster.	51
4.3. Perfiles aerodinámicos utilizados en cada superficie del Telemaster.	52
4.4. Coeficientes aerodinámicos de estabilidad y de control obtenidos con el software SIDPAC.	53
4.5. Valores de las ganancias utilizados en las simulaciones numéricas	59
A.1. Dirección para enviar las señales de control deseadas a X-Plane.	80

Resumen

Esta tesis presenta una solución al problema de la guía de vuelo de una aeronave, tomando en cuenta las propiedades geométricas de la cinemática de la misma. Al diseñar el control, se consideró que se cuenta con un control de la dinámica longitudinal que mantiene el ángulo de vuelo, así como la velocidad de la aeronave, a valores constantes de referencia.

El algoritmo de la guía de vuelo propuesto sigue el enfoque de lazos de control interno y externo. El lazo interno está basado en una técnica de control de modos deslizantes de segundo orden, mientras que el lazo externo es diseñado siguiendo un método de control geométrico no lineal.

Simulaciones numéricas en conjunto, entre Matlab-Simulink y X-Plane flight simulator, son presentadas con el fin de verificar el desempeño del algoritmo de guía lateral de la aeronave.

Abstract

This thesis presents a solution to the guidance problem, taking into account the geometric properties of the aircraft kinematics. The control design considers a longitudinal dynamics controller that holds the flight path angle and aerodynamic speed at some constant references.

The proposed guidance algorithm follows the inner-outer control loops approach. The inner control loop is based on a second-order sliding mode technique, while the outer control loop is designed following a nonlinear geometric control method.

Numerical co-simulations employing Matlab-Simulink and X-Plane flight simulator are presented in order to verify the performance of the guidance algorithm.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Configuración básica de una aeronave de ala fija

En una aeronave de ala fija, la superficie aerodinámica que genera la fuerza de sustentación principal no tiene movimiento relativo al fuselaje. En la aeronave que se ilustra en la Figura 1-1 la superficie principal que genera fuerza de sustentación se ubica a lo largo del eje lateral y se conoce como ala. Puede observarse que la aeronave tiene una ala y una semi ala en la parte posterior paralelas a los ejes lateral y vertical, respectivamente, cuya función no es generar la fuerza de sustentación principal. Esta aeronave está equipada también con un ala con movimiento relativo al fuselaje acoplada al motor. Esta ala se conoce como ala rotativa, en esta configuración no genera fuerza de sustentación, sino una fuerza casi paralela al eje longitudinal de la aeronave.

Las entradas de control básicas para pilotar una aeronave de ala fija son cuatro. No en orden de importancia, la primera es el acelerador. Esta entrada de control permite modificar la fuerza, a lo largo del eje longitudinal que produce el ensamble motor-hélice, permitiendo modificar la velocidad de la aeronave sobre este eje. Las otras tres entradas de control se conocen como superficies de control, su efecto es modificar la geometría de las alas que integran a la aeronave. La primera, conocida como elevador, ilustrada en color azul, permite generar un momento alrededor del eje lateral de la aeronave. Este momento se utiliza para

elear o descender a la aeronave. La segunda, conocida como timón de dirección, ilustrada en color verde, genera un momento alrededor del eje vertical. Su efecto es modificar la dirección de vuelo de la aeronave en el plano Cartesiano. La tercer superficie, conocida como alerones, ilustrada en color rojo, genera un momento alrededor del eje longitudinal. Esta superficie de control funciona de forma anti simétrica. Cuando el alerón sobre el eje lateral positivo sube, el alerón en la posición contraria baja, esto hace que la fuerza de levantamiento en la semi ala en la dirección positiva del eje lateral disminuya mientras que en la otra semi ala aumenta generando el momento alrededor del eje longitudinal. Existen aeronaves de tres canales que no incluyen el uso del timón. La aeronave gira solamente con la acción de los alerones, un ejemplo de este tipo de aeronave es el F959 Sky king de WLtoys.

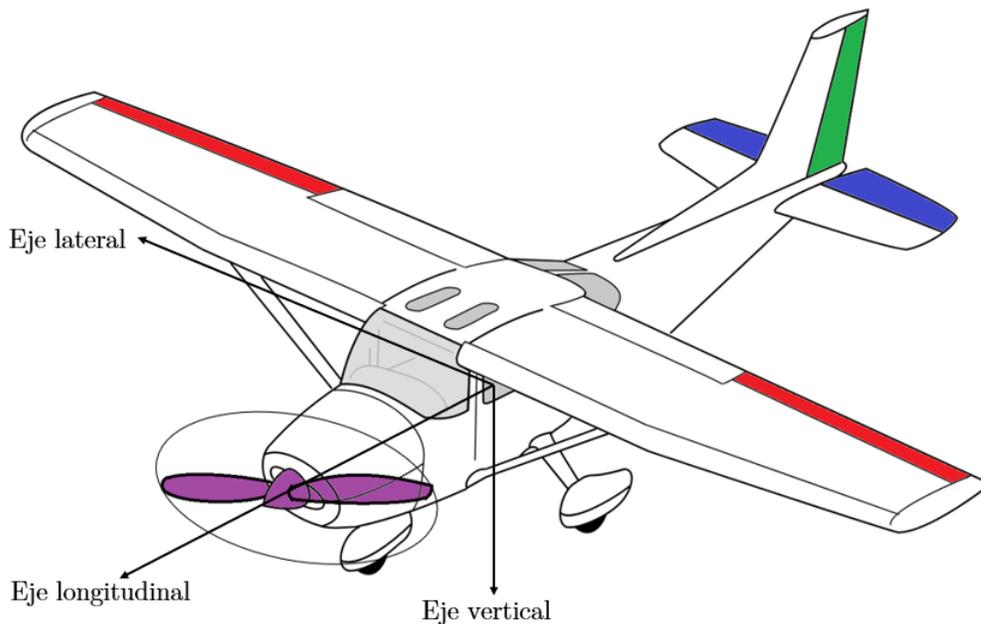


Figura 1-1: Entradas de control básicas para una aeronave de ala fija.

Además de estas entradas de control básicas, algunas aeronaves de ala fija cuentan con flaps, los cuales se encuentran sobre el ala, más cerca al fuselaje que los alerones. Los flaps modifican la cuerda y la combadura del ala, produciendo mayor fuerza de levantamiento pero, como consecuencia, también generan mayor resistencia al avance. Con el uso de flaps

y utilizando mayor potencia es posible realizar despegues con menor distancia de pista, mientras que con el uso de flaps, al disminuir la potencia, se puede lograr un descenso más rápido. Algunas aeronaves, están provistas de la capacidad para combinar la acción de los alerones y flaps, esta configuración se conoce como flaperones.

Otra superficie de control clásica son los spoilers, también conocidos como aero frenos. Su principal trabajo es “romper” la sustentación del ala, al separar el flujo de aire, su uso principal es durante la operación de aterrizaje. La configuración básica y las superficies de control adicionales pueden encontrarse tanto en aeronaves tripuladas como no tripuladas. Esta tesis se centra en vehículos aéreos no tripulados (VANTs) de ala fija.

1.2. ¿Por qué un VANT de ala fija?

Los VANTs de ala fija, en comparación con los VANTs de ala rotativa como los cuatirotores o helicópteros, presentan ventajas para ciertas tareas. Las ventajas principales son [1], [2]:

Velocidad. Una aeronave de ala fija puede trasladarse de un punto a otro más rápido en comparación con una aeronave de ala rotativa, ya que casi toda la tracción producida por la planta motriz se emplea para acelerar a la aeronave, mientras que el levantamiento es producido por el ala. En una aeronave de ala rotativa, más del 50 % de la tracción de la planta motriz se emplea para generar fuerza de levantamiento.

Altitud de vuelo. A mayor altitud la densidad del aire disminuye, afectando la capacidad del ala para generar fuerza de sustentación. Por esta razón, un VANT de ala rotatoria, al utilizar la mayor parte de su tracción para levantar la aeronave, no puede alcanzar grandes altitudes sin deteriorar su capacidad para moverse en el plano Cartesiano.

Capacidad de carga. La tracción que generan los motores en una aeronave de ala rotativa debe compensar el peso total de la aeronave, limitando la carga de paga. Por otro lado, las aeronaves de ala fija pueden transportar más peso, hasta cierto límite, apelando a dos grados de libertad extra, la velocidad y el ángulo de vuelo.

Estabilidad en condiciones climáticas complicadas. La operación de una aeronave de ala rotativa es afectada considerablemente por el viento. Por otro lado, una aeronave de ala fija

tiene la capacidad de operar, hasta cierto límite, bajo los efectos del viento.

Seguridad ante fallas de motores. Una aeronave de ala fija tiene una mejor tolerancia a fallas de motor debido a su capacidad de planeo. Por otro lado, si en una aeronave de ala rotativa se pierde la potencia en uno solo de los motores, el resultado puede ser catastrófico pues, además de descender en caída libre, la aeronave puede entrar en espiral debido a la descompensación de fuerzas y momentos.

1.3. Aplicaciones para VANTs de ala fija

Las aplicaciones que se describen a continuación empatan mejor con las características de los VANT de ala fija [2], [3].

Reconocimiento de terreno e identificación de fugas. Para reconocer y mapear zonas geográficas grandes, una aeronave de ala fija es ideal debido a su autonomía. Además, si se trata de zonas con una alta densidad de flora, como lo pueden ser los bosques, y se requiere del uso del LIDAR, la aeronave de ala fija puede apelar a su capacidad de carga. En conclusión, una aeronave de ala fija en tareas de reconocimiento destaca debido a su autonomía y capacidad de carga. Por otro lado, la detección de fugas en tuberías es también una tarea para VANTs de ala fija, en particular en sistemas de tuberías que recorren varios kilómetros. En este caso, es necesaria una aeronave de alta velocidad y gran autonomía.

El reconocimiento geográfico en zonas costeras es una tarea difícil por los vientos predominantes. La velocidad que puede alcanzar un VANT de ala fija le proporciona mayor margen de operación que a un VANT de ala rotativa.

Reforestación/Forestación. El proceso de reforestación, o de forestación, puede ser un proceso tardado y caro si se lleva a cabo por humanos. Es por eso que los VANTs son necesarios en esta clase de tareas, sobresaliendo el VANT de ala fija por su autonomía. Además, la aeronave también se puede utilizar para monitorear el proceso de reforestación/forestación.

Extensión de sistemas de comunicación. Los sistemas de comunicación suelen utilizar redes de torres celulares para ampliar la zona de cobertura de comunicaciones. Un VANT

de ala fija puede colocarse en la estratosfera, zona que se encuentra entre los 12 y 50km de altitud, con el fin de sustituir torres celulares, proveyendo la misma cobertura que 200 de ellas. El VANT puede ser capaz de volar por meses sin repostar si se utiliza un sistema de propulsión eficiente. Un ejemplo de esta aplicación puede ser la aeronave de Airbus, el Zephyr, el cual se muestra en la figura 1-2.

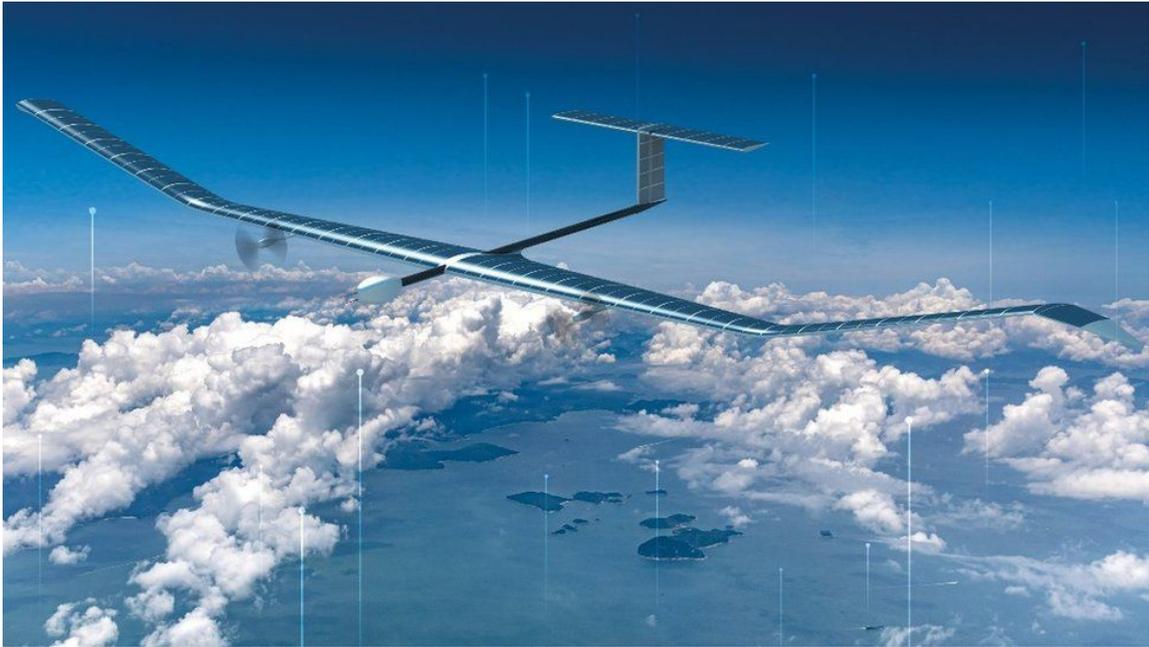


Figura 1-2: Airbus Zephyr, dron de ala fija que cuenta con paneles solares, lo cual lo hace capaz de volar por semanas.

Repostado de combustible. Debido a su velocidad y capacidad de carga, un dron de ala fija es mucho mas conveniente en la tarea de repostado de aeronaves en vuelo, pudiendo utilizar incluso el mismo combustible de repostado para extender su capacidad de vuelo. Un dron de ala rotativa no puede hacer dicha tarea para repostar aeronaves de ala fija, pues estas requieren mantener una velocidad de vuelo para generar sustentación necesaria para seguir en el aire. Además, el peso del combustible puede ser demasiado para la capacidad de carga que tiene un dron de ala rotativa.

Operaciones BVLOS e ISTAR. Las tareas “Más allá de la línea de visión” (BVLOS -

Beyond Visual Line Of Sight) se pueden desarrollar con mayor facilidad haciendo uso de aeronaves de ala fija, pues alcanzan la zona objetivo en menor tiempo y tienen mayor alcance, que significa mayor distancia de la zona al operador, lo cual es crucial si la zona objetivo se encuentra adentrada en el mar o en una zona peligrosa.

Mientras que las operaciones militares de Inteligencia, Reconocimiento, Adquisición de Objetivos y Exploración (ISTAR - Intelligence, Surveillance, Target Acquisition and Reconnaissance) suelen utilizar vehículos de toda clase, desde vehículos submarinos hasta vehículos espaciales. Sin embargo, en cuanto a vehículos aéreos, los VANT de ala fija son los elegidos por excelencia, debido a la capacidad de carga que permite llevar sensores necesarios que el reconocimiento y exploración requieren. La capacidad para planear agrega el beneficio de la discreción a este tipo de operaciones.

1.4. Seguimiento de caminos vs seguimiento de trayectoria

Las aplicaciones listadas en la sección anterior requieren, como principal objetivo, que el VANT de ala fija pueda ser pilotado para transitar a lo largo de un camino geométrico. Un segundo objetivo, tal como satisfacer restricciones de velocidad mientras el VANT recorre el camino geométrico podría considerarse como secundario y tal vez sacrificable. De acuerdo al grado de independencia entre los objetivos mencionados la solución a este problema se encuentra entre los conceptos de seguimiento de trayectorias (trajectory tracking) y seguimiento de caminos (path following).

En seguimiento de trayectorias se impone satisfacer simultáneamente que el vehículo transite sobre un camino geométrico y cumpla restricciones dinámicas. De tal forma que las tareas de ubicarse en un punto en el espacio en un instante de tiempo definido deben satisfacerse simultáneamente. Por el contrario, en seguimiento de caminos el objetivo de que el vehículo transite sobre el camino geométrico se resuelve de forma independiente a las restricciones dinámicas que se impongan mientras se transita sobre el camino. Desde este punto de vista el seguimiento de caminos es más flexible que el seguimiento de trayectorias [4]. Esta flexibilidad puede aprovecharse para resolver problemas de seguimiento de

caminos en vehículos subactuados o que satisfacen restricciones no holonómas.

Debido a que en un VANT de ala fija la velocidad a lo largo del eje longitudinal es mucho mayor a la velocidad a lo largo de los otros dos ejes, es práctica común dividir el estudio de las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del vehículo en dos conjuntos de ecuaciones dinámicas. La dinámica longitudinal que describe el movimiento traslacional de la aeronave en el plano formado por los ejes longitudinal y vertical y rotacional, alrededor del eje lateral. En este modelo longitudinal se resuelven los problemas de controlar la velocidad y ángulo de vuelo de la aeronave siendo las entradas de control el acelerador y el elevador. Al controlar el ángulo de vuelo se puede establecer la altura de vuelo de la aeronave. Bajo la suposición de que la aeronave vuela a una velocidad y ángulo de vuelo constantes, la dinámica lateral-direccional modela el movimiento traslacional de la aeronave en el plano formado por los ejes longitudinal y lateral y su rotación alrededor de los ejes longitudinal y vertical. El control de la posición de la aeronave en el plano Cartesiano, formado por los ejes longitudinal y lateral, y su orientación, alrededor de un eje vertical inercial, se plantea utilizando el modelo de la dinámica lateral-direccional con dos entradas de control disponibles, los alerones y el timón. Por lo tanto, se tiene un sistema subactuado. Esta es la razón por la cual en este trabajo se sigue el enfoque de seguimiento de caminos.

1.5. Estado del arte

La solución tradicional al problema de guía de vuelo y control de la dinámica lateral-direccional involucra dos lazos de control. Un lazo de control interno que regula la velocidad angular de la aeronave alrededor de los ejes longitudinal y vertical utilizando la acción de los alerones y el timón. Un lazo de control externo determina la referencia de las velocidades angulares a partir de regular en cero a la distancia al camino geométrico que debe seguirse. Es importante notar que el lazo de control interno tiene una estructura completamente actuada, regula dos velocidades angulares utilizando dos entradas de control. Sin embargo, el lazo de control externo debe regular la posición de la aeronave sobre dos ejes, longitudinal y lateral así como su orientación alrededor de los ejes vertical y longitudinal a partir de dos velocidades angulares, por lo tanto tiene una estructura subactuada. Desde el punto de vista de la teoría de control, el problema más complejo es el diseño

de lazo externo de control. Como se evidenciará en los Capítulos siguientes la cinemática lateral-direccional traslacional de la aeronave es igual a la de un robot móvil tipo $(2, 0)$ desplazándose a velocidad constante [5].

Los siguientes trabajos se centran en el diseño del lazo de control externo. En [6] se propone un control convencional proporcional-derivativo (PD) con términos no lineales para mejorar el seguimiento en diferentes condiciones de vuelo, especialmente para corregir de errores de seguimiento laterales importantes. En [7] se reporta un control lógico que aproxima el comportamiento de un controlador PD para seguimiento de caminos rectos, agregando términos de prealimentación se logra el seguimiento de caminos curvos. El trabajo [8] propone una ley de control lateral de tipo proporcional-integral-derivativo (PID) con una componente lineal invariante en el tiempo en el lazo de prealimentación y una ganancia variante en el tiempo en el lazo de retroalimentación; el análisis de estabilidad se basa en el criterio del círculo. En [5] se emplea el enfoque de función de Lyapunov de control (FLC) para diseñar un control para seguimiento de trayectorias para el modelo cinemático de una aeronave de ala fija. Se propone una FLC restringida, para considerar, por ejemplo, que la velocidad de la aeronave no puede ser cero o negativa, mientras que el conjunto factible provee la entrada de control. En [9] se desarrolla una ley de control para la dinámica lateral-direccional basada en el comportamiento del "buen timonel". Se asegura que la integración de esta ley de control con la dinámica de la aeronave preserve las propiedades de estabilidad. Se utiliza un observador para estimar el viento y orientar la trayectoria de referencia con el objetivo.

Los siguientes trabajos consideran el diseño de los dos lazos de control. En [10] se desarrolla un algoritmo para seguimiento de trayectorias en tres dimensiones. La alta precisión de seguimiento se obtiene combinando una trayectoria de referencia al menos dos veces diferenciable con prealimentación basada en planitud diferencial y un control no lineal basado en inversión dinámica. El desempeño y la factibilidad del algoritmo se evalúan a través de pruebas de vuelo. En [11] se presenta un control lateral direccional de orden fraccionario. El algoritmo de control se evalúa experimentalmente en un UAV de configuración ala voladora. En [12] se presenta un algoritmo para guía de vuelo y control basado en regímenes deslizantes de segundo orden. El control se complementa con un observador basado en regímenes deslizantes de alto orden para estimar superficies deslizantes inciertas. En [13]

se reporta un lazo externo de control basado en una superficie de conmutación no lineal que genera las referencias para el ángulo de alabeo. El lazo interno de control se basa en una superficie deslizante lineal y el algoritmo de super twisting. El algoritmo propuesto se valida con vuelos experimentales.

Este documento presenta una solución al problema de guía de vuelo y control de la dinámica lateral-direccional bajo el enfoque de dos lazos de control. Se propone un algoritmo de super twisting para el control de lazo interno. El control de lazo externo se basa en el método de control no lineal geométrico. El desempeño del algoritmo se evalúa con una simulación numérica cooperativa entre Matlab-Simulink y el simulador de vuelo X-Plane.

1.6. Objetivos

Diseñar una guía de vuelo y control para seguir un camino geométrico definido a partir de puntos de referencia en una aeronave de ala fija utilizando el enfoque de seguimiento de caminos.

Objetivos Específicos

- Proponer una ley de control para el controlador de lazo interno, el cual tenga convergencia en tiempo finito, a fin de convertir las referencias provenientes del control de lazo externo a señales tangibles, traducibles a deflexiones de las superficies de control de la aeronave.
- Proponer una ley de control para lazo externo que genere referencias en forma de velocidades angulares, que posteriormente alimentan al lazo interno, que garantice convergencia en tiempo finito y controle la posición lateral de la aeronave, no la orientación.
- Probar el desempeño del control propuesto en una simulación cooperativa entre Matlab Simulink y X-Plane, y, de ser posible, probar el desempeño del control en la plataforma experimental con la que se cuenta en CINVESTAV.

1.7. Organización de la tesis

La tesis está dividida en cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presenta, de manera breve, las ventajas de una aeronave de ala fija con respecto a una de ala rotativa, así como las aplicaciones en las que una aeronave de ala fija destaca, además de mostrar, de manera rápida, el estado del arte de controladores y guías de vuelo en vehículos aéreos no tripulados. El Capítulo 2 se destina al desarrollo de las ecuaciones del modelo dinámico y cinemático de una aeronave. Durante el Capítulo 3 se detalla el diseño del controlador y el algoritmo de la guía de vuelo propuestos. El Capítulo 4 muestra, de manera detallada, el proceso de conexión de la plataforma de simulación y de la plataforma de computación del algoritmo de guía de vuelo y del controlador, así como el proceso de obtención de los datos necesarios para llevar a cabo la simulación del seguimiento de caminos. Al final se presentan los resultados obtenidos con el controlador y la guía de vuelo propuestos en el trabajo. Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones, así como posibles mejoras al controlador y la guía de vuelo propuestos, que pueden servir como continuación de este trabajo.

Capítulo 2

Modelo dinámico y cinemático

Este capítulo presenta el modelo dinámico de una aeronave de ala fija y describe el efecto de un sistema de control para la dinámica longitudinal en la dinámica lateral-direccional. Además, se proponen y justifican algunas simplificaciones al modelo dinámico lateral-direccional resultante.

2.1. Modelo dinámico de una aeronave de ala fija

2.1.1. Sistemas de referencia

Para describir el modelo dinámico de un vehículo terrestre o aéreo se requieren necesariamente dos sistemas de referencia. Un sistema de referencia inercial $0x^i y^i z^i$ con respecto al cual se puede expresar la posición traslacional y angular del vehículo y un sistema de referencia no inercial $0x^b y^b z^b$ pegado al centro de gravedad del vehículo, ver Figura 2-1. El sistema de referencia no inercial se conoce en aeronáutica como sistema de referencia cuerpo o simplemente ejes cuerpo. Respecto al sistema de referencia cuerpo pueden expresarse de forma sencilla las fuerzas y momentos que actúan sobre el vehículo. Además, las ecuaciones que describen la dinámica rotacional de un vehículo se simplifican al expresarse en coordenadas del sistema de referencia cuerpo.

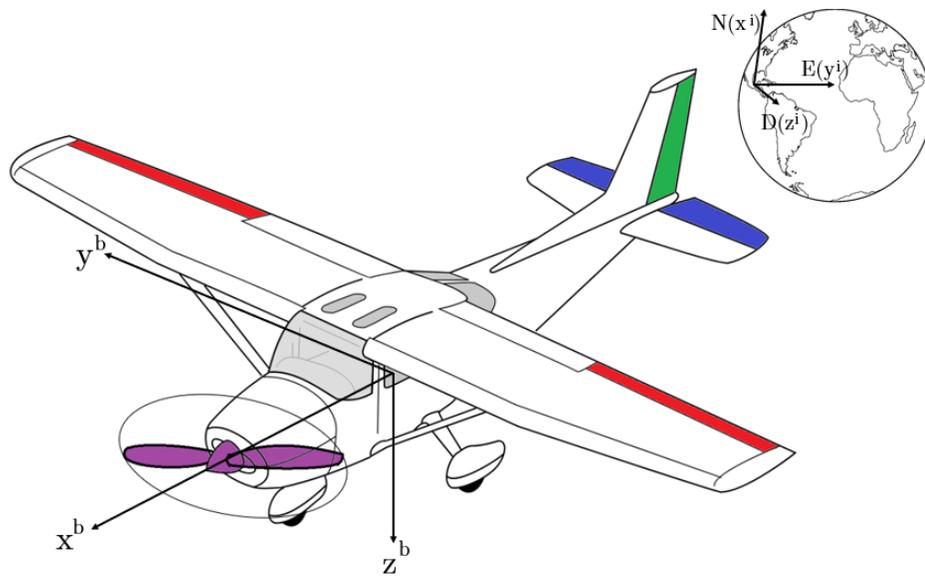


Figura 2-1: Sistema de referencias no inercial, conocido como sistema de ejes cuerpo $0x^b y^b z^b$, y sistema de ejes inercial, comunmente usado el sistema de ejes NED (North, East, Down) $0x^i y^i z^i$.

El uso adecuado de estos dos sistemas de referencia precisa de una transformación que permita expresar cantidades vectoriales tanto en el sistema de referencia inercial como en el sistema de referencia cuerpo. Esta transformación debe preservar la magnitud y dirección de las cantidades vectoriales por lo que debe ser una matriz que pertenezca al grupo especial ortogonal de dimensión tres, definido como

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}$$

con $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ la matriz identidad. Utilizando esta matriz de transformación, conocida en el área de vehículos como matriz de rotación se pueden expresar cantidades dadas en ejes inerciales en ejes cuerpo, por ejemplo,

$$F^i = R F^b \quad (2.1)$$

con F^i y F^b vectores fuerza expresados en ejes inerciales y ejes cuerpo, respectivamente.

Al considerar los ángulos de Euler y en particular los ángulos de Tait Bryan resultado de la secuencia de rotación z^i, y^i, x^i , la matriz de rotación R puede expresarse como¹

$$R = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

con ψ el ángulo de guiñada, θ el ángulo de cabeceo y ϕ el ángulo de alabeo, estos ángulos especifican la posición angular del vehículo alrededor de los ejes z^i, y^i, x^i , respectivamente.

2.1.2. Cinemática rotacional

Debido a que el sistema de referencia cuerpo se encuentra fijo al vehículo, la cinemática rotacional del vehículo puede considerarse igual a la cinemática del sistema de referencia cuerpo con respecto al sistema de referencia inercial. El espacio tangente en el elemento identidad de $SO(3)$ es

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_1 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \forall a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\}$$

¹En el resto del documento se considera la notación siguiente. $\sin(a) = s_a$, $\cos(a) = c_a$ y $\tan(a) = t_a$ para cualquier ángulo a .

El espacio tangente en cualquier punto de una trayectoria $R(t)$ parametrizada con $t \in \mathbb{R}$ puede definirse como la proyección por la izquierda de $\mathfrak{so}(3)$, esto es,

$$T_{SO(3)} = \{RS(a), \mid R \in SO(3), S(a) \in \mathfrak{so}(3), a \in \mathbb{R}^3\}$$

Los elementos en $T_{SO(3)}$ son tangentes a los elementos en $SO(3)$ con respecto al producto interno para matrices definido como

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}(A^\top B), \forall A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Notar que

$$\langle R, RS(a) \rangle = \text{traza}(R^\top RS(a)) = \text{traza}(S(a)) = 0$$

Por lo tanto, dada una velocidad angular en ejes cuerpo igual a $\Omega = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^\top$, la cinemática rotacional del vehículo es

$$\dot{R} = RS(\Omega) \quad (2.3)$$

Al expresar, la ecuación cinemática en (2.3) en términos de (2.2) se obtiene

$$\dot{\Phi} = W(\Phi)^{-1}\Omega \quad (2.4)$$

con

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad W(\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & t_\theta c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}$$

2.1.3. Dinámica traslacional

El modelo de la dinámica traslacional de la aeronave, al considerar que la aeronave se mantiene rígidamente unida, puede obtenerse de la aplicación directa de la segunda ley de Newton como sigue

$$m\ddot{X} = F_g^i + F_p^i + F_a^i$$

con m la masa de la aeronave, $X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top$ la posición espacial de la aeronave con respecto al sistema de referencia inercial, F_g^i la fuerza de gravedad, F_p^i la fuerza de propulsión y F_a^i la fuerza aerodinámica, todas las fuerzas expresadas en ejes inerciales.

Si $V^b = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^\top$ es la velocidad de la aeronave en ejes cuerpo, a partir de (2.1) se tiene

$$\dot{X} = RV^b \quad (2.5)$$

Es fácil verificar que la siguiente ecuación de balance de fuerzas, en ejes cuerpo, se satisface

$$m\dot{V}^b = -mS(\Omega)V^b + F_g^b + F_p^b + F_a^b \quad (2.6)$$

2.1.3.1. Fuerza de gravedad

La fuerza de gravedad actúa a lo largo del eje z^i y de acuerdo a la convención de ejes utilizada tiene dirección positiva, esto es,

$$F_g^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

Al considerar (2.1) se tiene que la fuerza de gravedad, en ejes cuerpo, está dada por

$$F_g^b = R^\top F_g^i = \begin{bmatrix} -mgs_\theta \\ mgc_\theta s_\phi \\ mgc_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.3.2. Fuerzas aerodinámicas

Las fuerzas aerodinámicas en ejes cuerpo, pueden modelarse como sigue

$$F_a^b = \bar{q}S \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde $\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V^2$ es la presión dinámica con ρ la densidad del aire, S la superficie alar de la aeronave, y ²

$$V = \|\dot{X}\| = \|V^b\|$$

Además, C_i , con $i = X, Y, Z$, son coeficientes adimensionales de fuerza que dependen de las fuerzas de levantamiento, arrastre y lateral de la aeronave.

²En lo que sigue $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana para cualquier vector \cdot .

2.1.3.3. Fuerza de propulsión

Para la aeronave que se considera en este trabajo se puede asumir que la fuerza de propulsión se aplica a lo largo del eje x^b , es decir

$$F_p^b = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

con T la fuerza de tracción/empuje del motor. En caso de que el motor no se encuentre perfectamente alineado con el eje x^b , se debe considerar que la fuerza puede tener componentes en los otros ejes.

2.1.3.4. Ecuaciones de fuerza en ejes cuerpo

Sustituyendo a las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) en (2.6) se obtiene

$$m\dot{u} = m(rv - qw) + \bar{q}SC_X - mgs_\theta + T \quad (2.10)$$

$$m\dot{v} = m(pw - ru) + \bar{q}SC_Y + mgc_\theta s_\phi \quad (2.11)$$

$$m\dot{w} = m(qu - pv) + \bar{q}SC_Z + mgc_\theta c_\phi \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10)-(2.12) describen la dinámica de un vehículo aéreo en ejes cuerpo. Es importante notar que los coeficientes C_i , $i = X, Y, Z$ no son constantes sino funciones de la velocidad V^b y de la orientación del vehículo Φ .

2.1.4. Dinámica rotacional

La dinámica rotacional de un vehículo puede obtenerse de la aplicación directa de la segunda ley de Newton para movimiento rotacional en ejes cuerpo, esto es,

$$\frac{d}{dt}(J\Omega) = M_g^b + M_p^b + M_a^b \quad (2.13)$$

con J la matriz de inercia del vehículo y M_a^b , M_g^b y M_p^b los momentos aerodinámicos, de gravedad y de propulsión con respecto al centro de gravedad del vehículo. Al desarrollar el

término del lado izquierdo en la ecuación (2.13) se obtiene

$$J\dot{\Omega} = -\Omega \times J\Omega + M_p^b + M_a^b \quad (2.14)$$

donde M_p^b y M_a^b son los momentos de propulsión y aerodinámicos que actúan sobre la aeronave. Debido a que el origen del sistema de ejes cuerpo se considera en el centro de gravedad, la fuerza de gravedad no produce ningún momento.

2.1.4.1. Momentos aerodinámicos

Los momentos aerodinámicos en ejes cuerpo pueden caracterizarse como sigue

$$M_a^b = \bar{q}S \begin{bmatrix} bC_l \\ \bar{c}(C_m + C_{m_g}) \\ bC_n \end{bmatrix} + \bar{q}S \begin{bmatrix} 0 \\ C_{m_g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde b es la envergadura del ala, \bar{c} es la cuerda media aerodinámica, la cual se puede calcular de manera sencilla a través de una integral, mientras que para el caso de estudio, la cuerda de raíz, la cuerda de punta y la cuerda media aerodinámica es la misma. Además, C_i , con $i = l, m, n$, son los coeficientes de momento de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente. Estos momentos son funciones de las velocidades traslacional V^b y rotacional Ω .

En las aeronaves de ala fija aparece un momento debido a la diferencia de posición entre el centro de gravedad de la aeronave y el centro aerodinámico C_{m_g} . En el centro aerodinámico se aplican las fuerzas de levantamiento

$$L = \bar{q}SC_L$$

con C_L el coeficiente de levantamiento, y de resistencia al avance

$$D = \bar{q}SC_D$$

con C_D el coeficiente de resistencia al avance.

Las fuerzas L y D son perpendicular y paralela, respectivamente, a la dirección de la velocidad de la aeronave V^b . Para describir estas fuerzas se introducen dos ejes de referencia

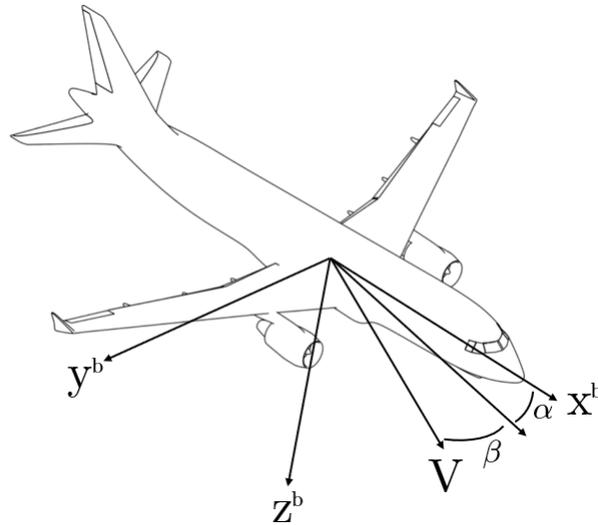


Figura 2-2: Diagrama de velocidad del viento, V , ángulo de ataque, α , y ángulo de derrape, β .

más, los ejes de estabilidad y los ejes viento. En la Figura 2-2, se puede observar que para ir de los ejes cuerpo a los ejes viento se hace una rotación, en sentido negativo y de magnitud α , alrededor del eje y^b , con α el ángulo de ataque definido como

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w}{u}\right) \quad (2.16)$$

Posteriormente una rotación, de sentido positivo y magnitud β , del eje vertical de los ejes de estabilidad, con β el ángulo de derrape definido como

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v}{V}\right) \quad (2.17)$$

genera los ejes viento. Notar que las rotaciones anteriores alinean al eje x^w con la dirección del vector velocidad V^b .

De la figura 2-3 no es muy difícil identificar que

$$\begin{aligned} F_{a_x}^b &= -Dc_\alpha + Ls_\alpha \\ F_{a_z}^b &= -Ds_\alpha - Lc_\alpha \end{aligned}$$

en forma normalizada, se tiene

$$C_X = -C_D c_\alpha + C_L s_\alpha \quad (2.18)$$

$$C_Z = -C_D s_\alpha - C_L c_\alpha \quad (2.19)$$

De tal forma que, al asumir que el centro de gravedad se encuentra a una distancia x_{ac} del centro aerodinámico del ala y el centro de gravedad se encuentra a una distancia x_{hc} del centro aerodinámico del estabilizador horizontal, ambos sobre el eje x^b , se tiene

$$C_{m_g} = -x_{ac} C_{Z_a} + x_{hc} C_{Z_h} \quad (2.20)$$

donde C_{Z_a} y C_{Z_h} representan el coeficiente de fuerza que produce el ala y el estabilizador horizontal, respectivamente.

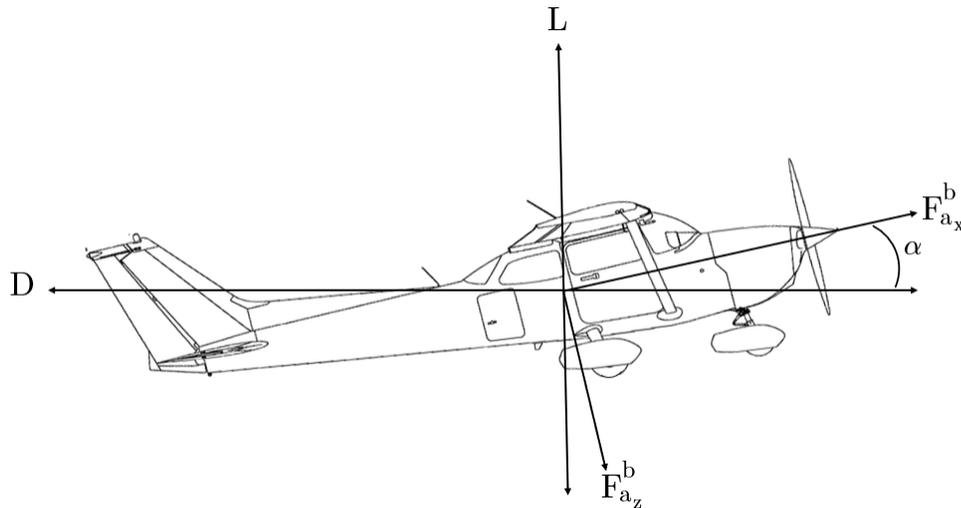


Figura 2-3: Diagrama de fuerzas aerodinámicas en ejes cuerpo y en ejes viento

2.1.4.2. Momentos de propulsión

Los momentos producidos por el motor al no estar alineado con el eje x^b generan momentos de propulsión, por ejemplo en aeronaves con los motores montados bajo el ala. Sin

embargo, para el caso de estudio en este trabajo, se considera que el motor se encuentra perfectamente alineado con el eje x^b .

Por otro lado, es necesario considerar los efectos de la masa rotatoria en el sistema de propulsión, como lo puede ser una hélice en una aeronave ligera con motor alternativo, o el sistema de compresores y turbinas de un motor turbofán, o el sistema de compresores, turbinas y hélice para un motor turbohélice [14].

Dado que se supuso que el vector de propulsión actúa alineado al eje x^b , el momento angular de la masa rotatoria, en ejes cuerpo, está dada por

$$h_p = \begin{bmatrix} I_p \Omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

donde I_p es la inercia de la masa rotatoria, y Ω_p es la velocidad angular. Si la velocidad angular de la masa rotatoria es constante, entonces $I_p \dot{\Omega}_p = 0$, por lo tanto, el momento giroscópico de la masa rotatoria del sistema de propulsión, en ejes cuerpo, está dado por

$$M_p^b = \frac{d}{dt}(h_p) = \dot{h}_p + \Omega \times h_p = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \Omega_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces, se tiene

$$M_p^b = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \Omega_p r \\ I_p \Omega_p q \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.4.3. Ecuaciones rotacionales

Expandiendo la ecuación (2.14) y sustituyendo los momentos aerodinámicos y de propulsión, se tiene

$$\dot{p}J_{xx} - \dot{r}J_{xz} = \bar{q}SbC_l - (J_{zz} - J_{yy})qr + J_{xz}qp \quad (2.23)$$

$$\dot{q}J_{yy} = \bar{q}S\bar{c}C_m - (J_{xx} - J_{zz})pr - J_{xz}(p^2 - r^2) + I_p \Omega_p r \quad (2.24)$$

$$\dot{r}J_{zz} - \dot{p}J_{xz} = \bar{q}SbC_n - (J_{yy} - J_{xx})pq - J_{xz}qr - I_p \Omega_p q \quad (2.25)$$

Para un cuerpo rígido simétrico respecto al plano Oxz , se tiene $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ [15]. Por lo tanto, la matriz de inercia de la aeronave toma la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$$

2.1.5. Cinemática traslacional

La posición inercial del vehículo se obtiene a partir de la ecuación (2.5), esto es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

donde se considera $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^\top$. Al expandir la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{x} = uc_\psi c_\theta + v(c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi) + w(c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta) \quad (2.26)$$

$$\dot{y} = us_\psi c_\theta + v(s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi) + w(s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi) \quad (2.27)$$

$$\dot{z} = -us_\theta + vc_\theta s_\phi + wc_\theta c_\phi \quad (2.28)$$

2.2. Suposiciones sobre el modelo del vehículo

En esta sección detalla las suposiciones que se consideran para simplificar el modelo dinámico de la aeronave.

2.2.1. Separación de la dinámica y cinemática longitudinal y lateral-direccional

En la mayoría de las condiciones de vuelo de una aeronave de ala fija la velocidad sobre el eje x^b , u es mucho mayor que la velocidad sobre el eje lateral y^b . La velocidad sobre el eje

z^b se encuentra en un punto intermedio, aún bastante menor que la velocidad sobre el eje x^b . Así, una práctica común en la aeronáutica es la separación de las ecuaciones dinámicas del vehículo en: dinámica longitudinal y dinámica lateral-direccional.

Las ecuaciones de la cinemática y dinámica longitudinal son aquellas que describen el movimiento en el plano $0x^i z^i$, y la rotación alrededor del eje y^b , es decir

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= m(rv - qw) + \bar{q}SC_X - mgs_\theta + T \\ m\dot{w} &= m(qu - pv) + \bar{q}SC_Z + mgc_\theta c_\phi \\ \dot{q}I_{yy} &= \bar{q}S\bar{c}C_m - (I_{xx} - I_{zz})pr - I_{xz}(p^2 - r^2) + I_p\Omega_p r \\ \dot{\theta} &= c_\phi q - s_\phi r \\ \dot{z} &= -us_\theta + vc_\theta s_\phi + wc_\theta c_\phi \end{aligned}$$

Es importante notar que en la cinemática traslacional no se considera la velocidad sobre x^i . Esta velocidad es de mayor utilidad en la dinámica lateral-direccional.

Las ecuaciones restantes describen la dinámica y cinemática lateral-direccional, las cuales son

$$m\dot{v} = m(pw - ru) + \bar{q}SC_Y + mgc_\theta s_\phi \quad (2.29)$$

$$\dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} = \bar{q}SbC_l - (I_{zz} - I_{yy})qr + I_{xz}qp \quad (2.30)$$

$$\dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} = \bar{q}SbC_n - (I_{yy} - I_{xx})pq - I_{xz}qr - I_p\Omega_p q \quad (2.31)$$

$$\dot{\phi} = p + t_\theta s_\phi q + t_\theta c_\phi r \quad (2.32)$$

$$\dot{\psi} = \frac{s_\phi}{c_\theta} q + \frac{c_\phi}{c_\theta} r \quad (2.33)$$

$$\dot{x} = uc_\psi c_\theta + v(c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi) + w(c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\theta) \quad (2.34)$$

$$\dot{y} = us_\psi c_\theta + v(s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi) + w(s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi) \quad (2.35)$$

Bajo esta suposición, en este trabajo no son de interés las ecuaciones de la dinámica y cinemática longitudinal.

2.2.2. Controlador de la dinámica longitudinal

Dado que se puede separar la dinámica longitudinal y la lateral direccional, este trabajo se desarrolla suponiendo que existe un controlador para la dinámica longitudinal que mantiene

a la velocidad de la aeronave en el plano $0x^i z^i$, $V_l = \sqrt{u^2 + w^2}$, y al ángulo de vuelo

$$\gamma = \theta - \alpha \quad (2.36)$$

en valores constantes \bar{V}_l y $\bar{\gamma}$, respectivamente. La relación de la ecuación (2.36) se muestra gráficamente en la Figura 2-4

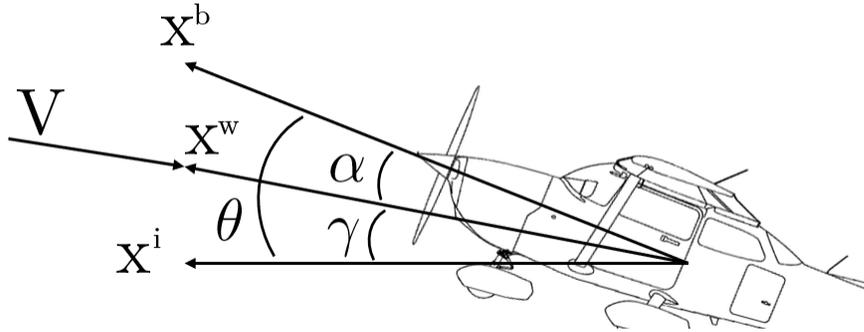


Figura 2-4: Diagrama del ángulo de vuelo, γ , ángulo de ataque, α , y ángulo de cabeceo, θ .

Partiendo de que el controlador mantiene la aeronave a una velocidad y un ángulo de vuelo constantes, entonces se considera que

$$\begin{aligned} \bar{V}_l &= \sqrt{u^2 + w^2} \\ \bar{\gamma} &= \theta - \alpha \end{aligned} \quad (2.37)$$

Siendo \bar{V}_l , la ecuación (2.37) implica que u y w deben tomar valores constantes \bar{u} y \bar{w} , respectivamente. Por otro lado, de la ecuación (2.16) se puede concluir que el ángulo de ataque debe tomar un valor constante $\bar{\alpha}$. Finalmente, de la segunda ecuación en (2.37) se concluye que el ángulo de cabeceo debe tomar un valor constante $\bar{\theta}$.

Es decir, el ángulo de cabeceo y el ángulo de ataque son constantes. Al ser el ángulo de cabeceo constante, entonces su derivada es cero.

$$0 = c_\phi q - s_\phi r \quad (2.38)$$

De la ecuación (2.38) se puede despejar la velocidad angular de cabeceo, q , en función de ϕ y la velocidad angular de guiñada, r .

$$q = t_\phi r \quad (2.39)$$

Bajo la acción del control para la dinámica longitudinal, la dinámica lateral-direccional toma la siguiente forma

$$m\dot{v} = m(p\bar{w} - r\bar{u}) + \bar{q}SC_Y + mgc_{\bar{\theta}}s_{\phi} \quad (2.40)$$

$$\dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} = \bar{q}SbC_l - (I_{zz} - I_{yy})t_{\phi}r^2 + I_{xz}t_{\phi}rp \quad (2.41)$$

$$\dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} = \bar{q}SbC_n - (I_{yy} - I_{xx})t_{\phi}rp - I_{xz}t_{\phi}r^2 - I_p\Omega_p t_{\phi}r \quad (2.42)$$

$$\dot{\phi} = p + t_{\bar{\theta}} \frac{r}{c_{\phi}} \quad (2.43)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{c_{\bar{\theta}}} \frac{r}{c_{\phi}} \quad (2.44)$$

$$\dot{x} = \bar{u}c_{\psi}c_{\bar{\theta}} + v(c_{\psi}s_{\bar{\theta}}s_{\phi} - s_{\psi}c_{\phi}) + \bar{w}(c_{\psi}s_{\bar{\theta}}c_{\phi} + s_{\psi}s_{\bar{\theta}}) \quad (2.45)$$

$$\dot{y} = \bar{u}s_{\psi}c_{\bar{\theta}} + v(s_{\psi}s_{\bar{\theta}}s_{\phi} + c_{\psi}c_{\phi}) + \bar{w}(s_{\psi}s_{\bar{\theta}}c_{\phi} - c_{\psi}s_{\bar{\theta}}) \quad (2.46)$$

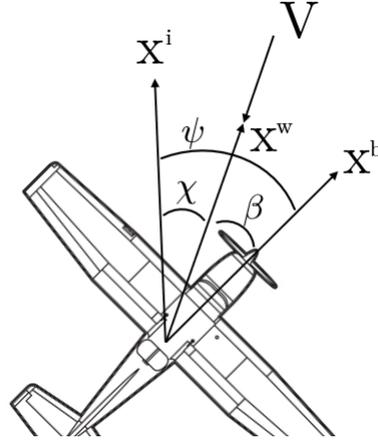


Figura 2-5: Diagrama del ángulo dirección de vuelo, χ , ángulo de derrape, β , y ángulo de guiñada, ψ .

2.2.3. Ángulos aerodinámicos pequeños

Esta suposición puede considerarse un poco controversial y, quizá, generosa. Sin embargo, sin esta consideración, es demasiado complicado trabajar con las ecuaciones cinemáticas (2.45)-(2.46), pues son una combinación de senos y cosenos de los diferentes ángulos involucrados. Para simplificar las ecuaciones cinemáticas de translación se considera que los

ángulos aerodinámicos, α y β , son pequeños, lo suficiente como para ser considerados cero, es decir

$$\alpha \approx 0, \quad \beta \approx 0 \quad (2.47)$$

A partir de las ecuaciones (2.16) y (2.17) puede verificarse que la condición en (2.47) implica que \bar{w} y v son aproximadamente igual a cero. Bajo estas suposiciones, las ecuaciones de la dinámica lateral-direccional (2.40)-(2.46) quedan como sigue

$$m\dot{v} = -mr\bar{u} + \bar{q}SC_Y + mgc_{\bar{\theta}}s_{\phi} \quad (2.48)$$

$$\dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} = \bar{q}SbC_l - (I_{zz} - I_{yy})t_{\phi}r^2 + I_{xz}t_{\phi}rp \quad (2.49)$$

$$\dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} = \bar{q}SbC_n - (I_{yy} - I_{xx})t_{\phi}rp - I_{xz}t_{\phi}r^2 - I_p\Omega_p t_{\phi}r \quad (2.50)$$

$$\dot{\phi} = p + t_{\bar{\theta}} \frac{r}{c_{\phi}} \quad (2.51)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{c_{\bar{\theta}}} \frac{r}{c_{\phi}} \quad (2.52)$$

$$\dot{x} = \bar{u}c_{\psi}c_{\bar{\theta}} \quad (2.53)$$

$$\dot{y} = \bar{u}s_{\psi}c_{\bar{\theta}} \quad (2.54)$$

Para mantener en cero a la velocidad lateral \bar{v} , la aeronave debe realizar maniobras de giro de tal forma que la suma de fuerzas a lo largo del eje x^b sea igual a cero, esto es,

$$m\dot{v} - \bar{q}SC_Y = 0 \Rightarrow -r\bar{u} + gs_{\phi}c_{\bar{\theta}} = 0 \quad (2.55)$$

La segunda igualdad en la implicación (2.55) puede expresarse como

$$r = \frac{g}{\bar{u}} s_{\phi} c_{\bar{\theta}} \quad (2.56)$$

Por otro lado, al sustituir a la ecuación (2.38) en la tercera ecuación de (2.4) se obtiene

$$\dot{\psi} = \frac{r}{c_{\phi}c_{\bar{\theta}}} \quad (2.57)$$

Sustituyendo (2.57) en (2.56) se tiene

$$\dot{\psi} = \frac{g}{\bar{u}} t_{\phi} \quad (2.58)$$

Las ecuaciones (2.56) y (2.58) describen la condición de giro coordinado en términos de r y $\dot{\psi}$, respectivamente. Si esta condición de giro coordinado se satisface es posible no

considerar a la ecuación (2.48), de tal forma, que el problema de seguimiento de caminos puede abordarse a partir del siguiente modelo dinámico direccional del vehículo

$$\dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} = \bar{q}SbC_l - (I_{zz} - I_{yy})t_\phi r^2 + I_{xz}t_\phi rp \quad (2.59)$$

$$\dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} = \bar{q}SbC_n - (I_{yy} - I_{xx})t_\phi rp - I_{xz}t_\phi r^2 - I_p\Omega_p t_\phi r \quad (2.60)$$

$$\dot{\phi} = p + t_\theta \frac{r}{c_\phi} \quad (2.61)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{c_\theta} \frac{r}{c_\phi} \quad (2.62)$$

$$\dot{x} = \bar{u}c_\theta c_\psi \quad (2.63)$$

$$\dot{y} = \bar{u}c_\theta s_\psi \quad (2.64)$$

El objetivo de control es que la aeronave siga referencias en el plano Cartesiano, es decir, conducir la posición x, y de la aeronave a seguir una referencia geométrica. En las ecuaciones (2.63) y (2.64) puede observarse que la posición cartesiana de la aeronave es subactuada. El control para la dinámica longitudinal fija los valores constantes de velocidad \bar{u} y ángulo de cabeceo $\bar{\theta}$, de tal forma que en (2.63) y (2.64) solamente el ángulo de guiñada puede manipularse a través de la acción de las velocidades rotacionales p y r . Es importante mencionar que p y r no están completamente libres ya que para reducir el modelo lateral-direccional (2.48)-(2.54) a un modelo direccional (2.59)-(2.64) debe satisfacerse la condición de giro coordinado (2.56). Las entradas de control para este modelo dinámico, alerones y timón de dirección, entran a través de los coeficientes aerodinámicos C_l y C_n por lo que asignar comportamientos deseados a p y r es una tarea fácil.

Capítulo 3

Diseño del control

Este capítulo aborda el diseño de los algoritmos de guía de vuelo y control para la dinámica lateral-direccional (2.48)-(2.54). Tomando en cuenta la estructura del modelo dinámico, el proceso de diseño del algoritmo de control se divide en el diseño de un lazo de control interno que regula a las velocidades angulares p y q a referencias que son fijadas por un lazo de control externo. El lazo de control externo define las referencias para las velocidades angulares r_d y p_d de tal forma que se garantice que la aeronave sigue, en cierto sentido, una trayectoria geométrica y que la condición de giro coordinado se satisface.

3.1. Estructuras de lazos de control

Como puede observarse en las ecuaciones (2.63) y (2.64) no es posible controlar de forma independiente a la posición cartesiana de la aeronave ya que únicamente el ángulo de guiñada ψ puede manipularse. Esta situación obliga a buscar una solución que no implique que la posición x, y de la aeronave deba regularse en posiciones deseadas x_d y y_d simultáneamente. La estrategia que se considera en este trabajo es la de seguimiento de caminos o rutas. En el enfoque de seguimiento de caminos pueden sacrificarse algunas características de la solución clásica de seguimiento de trayectorias, tales como, velocidad y aceleración sobre la trayectoria a cambio de garantizar otros objetivos, en el caso de este trabajo que la

dinámica subactuada sea al menos estable.

El proceso de diseño inicia con la síntesis del algoritmo de control interno. En un segundo paso se diseña el algoritmo de control externo bajo el enfoque de seguimiento de caminos.

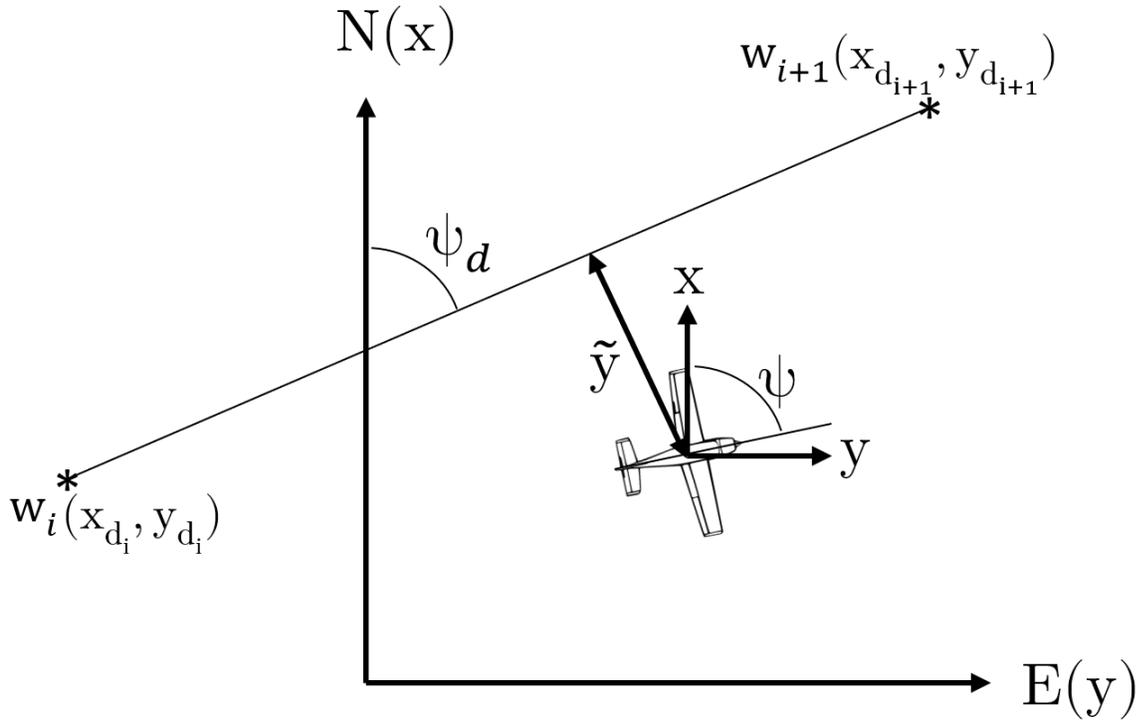


Figura 3-1: Error lateral de la aeronave \tilde{y} .

3.2. Diseño del lazo de control interno

El objetivo del lazo de control interno es regular a las velocidades angulares p y r en sus respectivas referencias p_d y r_d . Las ecuaciones (2.59) y (2.60) describen la dinámica de estas velocidades angulares con [14]

$$\begin{aligned} c_l &= c_{l_0} + c_{l_\beta} \beta + \frac{b}{2V} c_{l_p} p + \frac{b}{2V} c_{l_r} r + c_{l_{\delta_a}} \delta_a + c_{l_{\delta_r}} \delta_r \\ c_n &= c_{n_0} + c_{n_\beta} \beta + \frac{b}{2V} c_{n_p} p + \frac{b}{2V} c_{n_r} r + c_{n_{\delta_a}} \delta_a + c_{n_{\delta_r}} \delta_r \end{aligned} \quad (3.1)$$

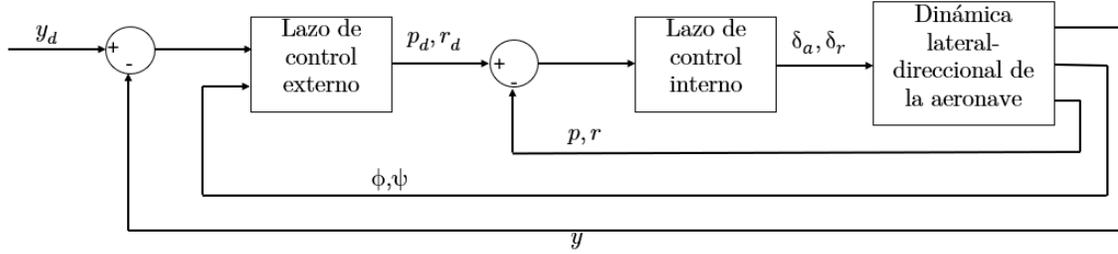


Figura 3-2: Diagrama a bloques del control en cascada.

con c_{i_0} , c_{i_β} , c_{i_p} y c_{i_r} , con $i = l, n$, los coeficientes aerodinámicos de estabilidad, $c_{i_{\delta_a}}$ y $c_{i_{\delta_r}}$, con $i = l, n$, los coeficientes aerodinámicos de control, δ_a el ángulo de deflexión de los alerones y δ_r el ángulo de deflexión del timón.

El objetivo del lazo de control interno se define como sigue.

Objetivo de control para el lazo interno. Dadas referencias continuas para p_d y r_d , diseñar leyes de control para δ_a y δ_r tales que

$$\lim_{t \rightarrow T} \tilde{p} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow T} \tilde{r} \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

con $T \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{p} = p - p_d$ y $\tilde{r} = r - r_d$.

Un controlador de convergencia finita, basado en modos deslizantes de segundo orden, se diseña como se detalla a continuación.

La dinámica rotacional, descrita por las ecuaciones (2.59) y (2.60) puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= c_{l_0} + c_{l_\beta} \beta + \frac{b}{2V} c_{l_p} p + \frac{b}{2V} c_{l_r} r \\ \varphi_2 &= c_{n_0} + c_{n_\beta} \beta + \frac{b}{2V} c_{n_p} p + \frac{b}{2V} c_{n_r} r \\ B &= \bar{q} S b \begin{bmatrix} I_x & -I_{xz} \\ -I_{xz} & I_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_{l_{\delta_a}} & c_{l_{\delta_r}} \\ c_{n_{\delta_a}} & c_{n_{\delta_r}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Seleccionando la superficie deslizante como $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \tilde{p} & \tilde{r} \end{bmatrix}^\top$, se tiene

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ \dot{r}_d \end{bmatrix}$$

El algoritmo de super-twisting propone la entrada de control de la forma [16]¹

$$B \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} = -\Lambda_2 \int_0^t \mathbf{sign}(\mathbf{S}(\tau)) d\tau - \Lambda_1 \mathbf{abs}(\mathbf{S})^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\mathbf{S}) \quad (3.4)$$

con

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{21} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

donde λ_{11} , λ_{12} , λ_{21} y λ_{22} son todas ganancias positivas.

Considerando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S} \\ \mathbf{S}_2 &= \Theta(\beta, p, r, t) - \Lambda_2 \int_0^t \mathbf{sign}(\mathbf{S}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde

$$\Theta(\beta, p, r, t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\beta, p, r) \\ \varphi_2(\beta, p, r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{p}_d \\ \dot{r}_d \end{bmatrix}$$

De esta manera, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_1 &= -\Lambda_1 \mathbf{abs}(\mathbf{S}_1)^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\mathbf{S}_1) + \mathbf{S}_2 \\ \dot{\mathbf{S}}_2 &= -\Lambda_2 \mathbf{sign}(\mathbf{S}_1) + \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Proposición 1 *Suponiendo que B es conocida, y*

$$|\dot{\Theta}| \leq \Theta_0 \quad (3.7)$$

con Θ_0 una constante positiva. Entonces, existen matrices positivas definidas Λ_1 y Λ_2 tales que la dinámica de lazo cerrado (3.3) y (3.4) satisfacen (3.2).

¹Los operadores en letras negritas se evalúan elemento a elemento, e.g. para un vector $\chi \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{sign}(\chi) = \begin{bmatrix} \mathbf{sign}(\chi_{11}) \\ \mathbf{sign}(\chi_{12}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{abs}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\chi) = \begin{bmatrix} |\chi_{11}|^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\chi_{11}) \\ |\chi_{12}|^{\frac{1}{2}} \mathbf{sign}(\chi_{12}) \end{bmatrix}$$

Prueba. La ecuación (3.6) puede ser expandida como

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{s}}_{11} &= -\lambda_{11}|\mathbf{s}_{11}|^{\frac{1}{2}}\mathbf{sign}(\mathbf{s}_{11}) + \mathbf{s}_{21} \\
 \dot{\mathbf{s}}_{12} &= -\lambda_{12}|\mathbf{s}_{12}|^{\frac{1}{2}}\mathbf{sign}(\mathbf{s}_{12}) + \mathbf{s}_{22} \\
 \dot{\mathbf{s}}_{21} &= -\lambda_{21}\mathbf{sign}(\mathbf{s}_{11}) + \dot{\Theta}_1 \\
 \dot{\mathbf{s}}_{22} &= -\lambda_{22}\mathbf{sign}(\mathbf{s}_{12}) + \dot{\Theta}_2
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde se considera que $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{s}_{11} \ \mathbf{s}_{12}]^\top$, $\mathbf{S}_2 = [\mathbf{s}_{21} \ \mathbf{s}_{22}]^\top$ y $\Theta = [\Theta_1 \ \Theta_2]^\top$. Entonces, $(\mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{21})$ y $(\mathbf{s}_{12}, \mathbf{s}_{22})$ definen dos algoritmos de super-twisting [16]. Como se ha demostrado en [17], si (3.7) se mantiene, los estados $(\mathbf{s}_{11}, \mathbf{s}_{21})$ y $(\mathbf{s}_{12}, \mathbf{s}_{22})$ convergen a cero en tiempo finito de tal manera que \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 convergen a cero en tiempo finito. \triangleleft

3.3. Diseño del lazo de control externo

Dado que el lazo de control interno llevará las velocidades angulares p y r a las referencias deseadas p_d y r_d , el modelo cinemático traslacional/rotacional descrito por las ecuaciones (2.61)-(2.64) puede expresarse en términos de \tilde{p} y \tilde{r} . Por lo tanto, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}c_{\bar{\theta}}c_{\psi} \\ \bar{u}c_{\bar{\theta}}s_{\psi} \\ p_d + t_{\bar{\theta}}\frac{r_d}{c_{\phi}} \\ \frac{1}{c_{\bar{\theta}}}\frac{r_d}{c_{\phi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{p} + t_{\bar{\theta}}\frac{\tilde{r}}{c_{\phi}} \\ \frac{1}{c_{\bar{\theta}}}\frac{\tilde{r}}{c_{\phi}} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Dado que la condición de giro coordinado, dada por la ecuación (2.56), debe mantenerse, se selecciona

$$r_d = \frac{g}{\bar{u}}c_{\bar{\theta}}s_{\phi} \tag{3.10}$$

De esta manera, la condición de giro coordinado se impone. Debido a que el control de lazo interno asegura convergencia en tiempo finito hacia las referencias, i.e. $\tilde{p} \rightarrow 0$ y $\tilde{r} \rightarrow 0$. En $t > T$, la ecuación (3.9) toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}c_{\bar{\theta}}c_{\psi} \\ \bar{u}c_{\bar{\theta}}s_{\psi} \\ p_d + \frac{g}{\bar{u}}s_{\bar{\theta}}t_{\phi} \\ \frac{g}{\bar{u}}t_{\phi} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Está claro que la ecuación (3.11) tiene una sola entrada de control, la cual es p_d . Entonces, definiendo una referencia para el ángulo de alabeo, ϕ , el ángulo de guiñada, ψ , puede ser modificado de tal manera que la posición lateral de la aeronave pueda ser dirigida a la referencia deseada y_d . Este problema es el considerado en [18]. Si la velocidad \bar{V} no es constante, la cinemática traslacional de la aeronave es igual a la cinemática traslacional del robot unicycle, como se estudió en [5], con la diferencia de que la velocidad de una aeronave no puede tomar valores negativos, a diferencia del robot unicycle.

De la ecuación (3.11), pareciese que el espacio de configuración del ángulo de guiñada, ψ , es \mathbb{R} . Sin embargo, el espacio de configuración es \mathbb{S}^1 , i.e. el círculo unitario. El círculo unitario puede proyectarse en el grupo de Lie $SO(2)$ como en [19]³.

$$\forall \psi \in [0, 2\pi] \quad \exists \quad R_\psi \in SO(2)$$

donde

$$SO(2) = \{R_\psi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid R_\psi^\top R_\psi = I, \det(R_\psi) = 1\}$$

con $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matriz identidad. En coordenadas locales

$$R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La cinemática de la aeronave de (3.11) en términos de (3.12) es expresada como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}c_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi \\ s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{u}t_\phi \\ \frac{g}{u}t_\phi & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\phi} &= p_d + \frac{g}{u}s_\theta t_\phi \end{aligned} \quad (3.13)$$

En forma compacta, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{X} &= R_\psi \mathcal{V} \\ \dot{R}_\psi &= R_\psi \bar{r}^\wedge \\ \dot{\phi} &= p_d + \bar{r} s_\theta \end{aligned} \quad (3.14)$$

² $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p^\top p = 1\}$

³El ángulo de alabeo, ϕ , también tiene su espacio de configuración en \mathbb{S}^1 . Sin embargo, en este trabajo no se considera este hecho, pues se considera que dicho ángulo se encuentra en el conjunto $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

con

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{r}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{v} = \bar{u}c_{\bar{\theta}}$$

y

$$\bar{r} = \frac{g}{\bar{u}}t_\phi \tag{3.15}$$

además, el mapeo $(\cdot)^\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{so}(2)$ que proyecta la velocidad angular \bar{r} al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ de $SO(2)$ es caracterizado como en [20]

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix}, \forall \bar{r} \in \mathbb{R} \right\}$$

3.3.1. Seguimiento de caminos

El modelo cinemático de la aeronave (3.14) tiene una sola entrada de control por lo que no es posible diseñar un algoritmo para seguimiento de trayectorias de la posición cartesiana de la aeronave, solamente una de las dos coordenadas traslacionales puede regularse.

Para resolver el problema de que solamente una de las coordenadas cartesianas puede regularse se utiliza el enfoque de seguimiento de caminos, en particular, en este trabajo se considera el seguimiento de un camino generado a partir de puntos de referencia. Se impone como objetivo que la aeronave recorra el camino al regular en cero a la distancia lateral entre la aeronave y la geometría del camino deseada, sin importar la velocidad sobre el camino ni el valor del error en la coordenada longitudinal. Por ejemplo, si la aeronave debe seguir una línea recta, el algoritmo de control ubicará a la aeronave sobre la recta sin importar el punto en el que la aeronave y la recta coincidan por primera ocasión.

Bajo estas condiciones, el objetivo de control para el lazo interno puede expresarse como sigue.

Objetivo de control para el lazo interno. Dada una serie ordenada de puntos de referencia, diseñar una estrategia de guía de vuelo y control para que la aeronave pueda recorrer la

mayor distancia perimetral de la figura geométrica generada por las líneas que unen a los puntos de referencia.

Notar que el objetivo de control para el lazo interno no especifica el instante de tiempo en el que la aeronave debe iniciar el recorrido tampoco la línea sobre la cual la aeronave debe iniciar el recorrido. Además, la aeronave debe seguir la mayor distancia perimetral no exactamente el perímetro de la geometría, este grado de libertad permite definir un radio de acercamiento a cada punto de referencia, para conmutar a la siguiente línea.

En las siguientes secciones se presenta una solución para satisfacer el objetivo de control planteado. La primera considera el caso más sencillo en el que se tienen dos puntos de referencia que definen una línea paralela al eje x^i . El segundo caso presenta la solución para una línea con orientación arbitraria respecto al eje x^i . A partir de esta solución y definiendo un radio de aproximación a los puntos de referencia es posible seguir geometrías tales como un cuadrado.

3.3.2. Caso particular

Dada una referencia lateral y_d , se genera una señal de referencia p_d que alimenta el control interno de manera que el error lateral, \tilde{y} , converja a cero asintóticamente. Esto se ilustra en la Figura 3-3.

De la ecuación (3.14), está claro que el error lateral, \tilde{y} , puede ser llevado a cero a través de la matriz R_{ψ} . Definiendo el error de orientación, utilizando la matriz de orientación actual de la aeronave, R_{ψ} , y una matriz de referencia, R_{ψ_c} , la cual queda por definir, se tiene

$$\tilde{R}_{\psi} = R_{\psi_c}^{\top} R_{\psi} \quad (3.16)$$

Despejando R_{ψ}

$$R_{\psi} = R_{\psi_c} \tilde{R}_{\psi} \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en la primer ecuación de (3.14), se tiene

$$\dot{X} = R_{\psi_c} \tilde{R}_{\psi} \mathcal{V}$$

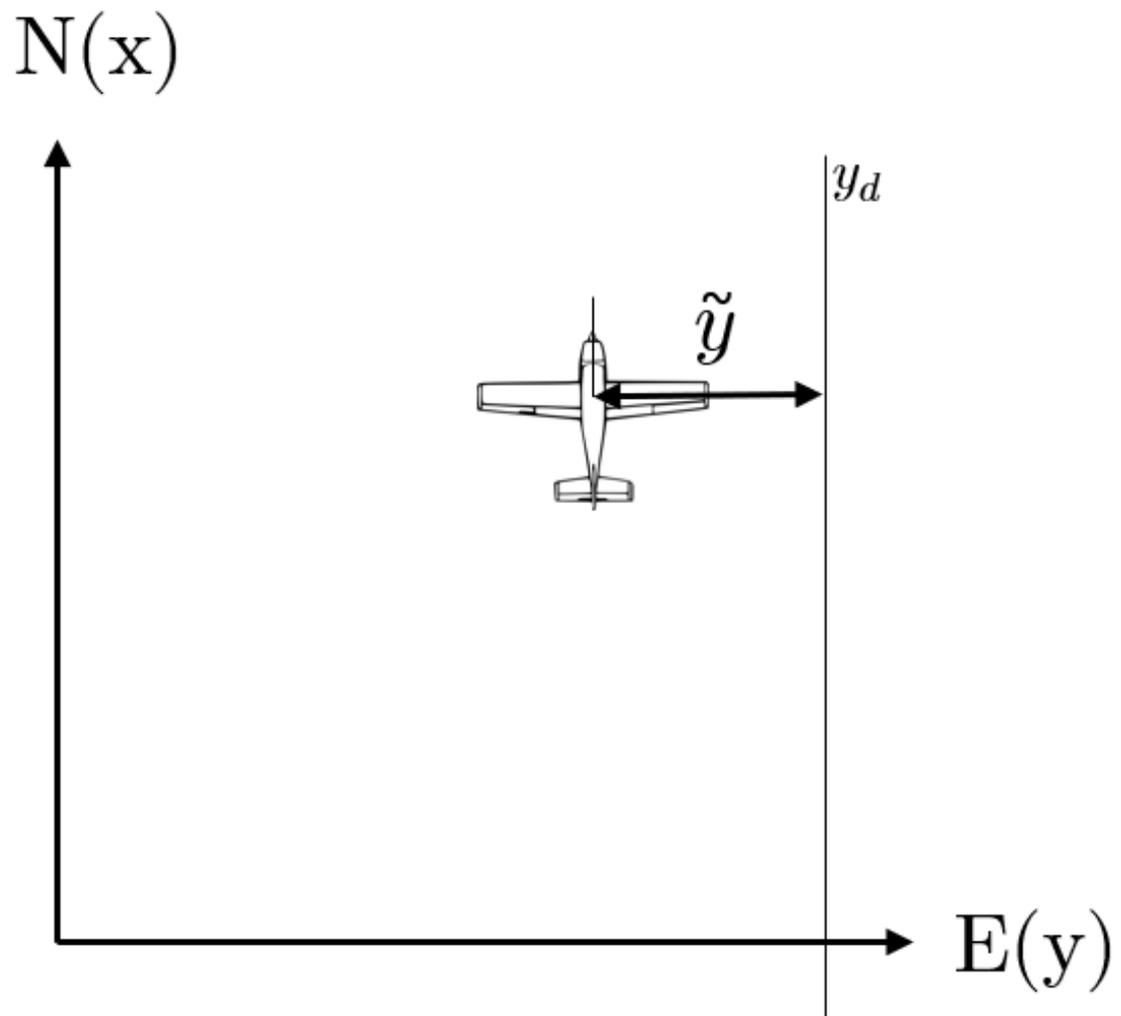


Figura 3-3: Error lateral de la aeronave, \tilde{y} , para el caso particular.

El objetivo de control es llevar \tilde{R}_ψ a la matriz identidad, I , de manera que la cinemática traslacional se vuelva, de manera asintótica,

$$\dot{X} = R_{\psi_c} \mathcal{V} \quad (3.18)$$

Con el fin de definir la matriz de corrección de error lateral, R_{ψ_c} , se considera que la ecuación (3.18) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{v} c_{\psi_c} \\ \dot{y} &= \bar{v} s_{\psi_c} \end{aligned} \quad (3.19)$$

De la ecuación (3.19), queda claro que la entrada de control virtual es s_{ψ_c} , la cual es una señal que toma valores dentro del conjunto $[-1, 1]$. Considerando la entrada de control virtual, la cual satisface $s_{\psi_c} \in [-1, 1]$,

$$s_{\psi_c} = -\tanh(k\tilde{y})$$

con k una ganancia positiva constante. Por lo tanto, la matriz de corrección toma la forma

$$R_{\psi_c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} & \tanh(k\tilde{y}) \\ -\tanh(k\tilde{y}) & \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \end{bmatrix}$$

Es sencillo demostrar que R_{ψ_c} pertenece al grupo $SO(2)$. Por lo tanto, la definición de la matriz de error de la ecuación (3.16) asegura que \tilde{R}_ψ también pertenece a $SO(2)$.

De la segunda ecuación de (3.14) se puede determinar la dinámica de la matriz de error, la cual tiene la forma

$$\dot{\tilde{R}}_\psi = \tilde{R}_\psi \tilde{r}^\wedge \quad (3.20)$$

donde

$$\tilde{r} = \bar{r} - \bar{r}_d, \quad \bar{r}_d = (R_{\psi_c}^\top \dot{R}_{\psi_c})^\vee$$

con

$$\dot{R}_{\psi_c} = k\dot{\tilde{y}} \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) & 1 - \tanh(k\tilde{y})^2 \\ -(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) & -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) \end{bmatrix}$$

con

$$\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_d$$

En este caso, dado que la referencia es constante, entonces

$$\dot{\tilde{y}} = \dot{y}$$

Además, el mapeo $(\cdot)^\vee : \mathfrak{so}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ es el mapeo inverso de $(\cdot)^\wedge$, definido como en [20]

$$(\bar{r}^\wedge)^\vee = \left(\begin{bmatrix} 0 & -\bar{r} \\ \bar{r} & 0 \end{bmatrix} \right) = \bar{r}, \forall \bar{r}^\wedge \in \mathfrak{so}(2), \bar{r} \in \mathbb{R}$$

Definiendo

$$\bar{r} = \bar{r}_d - k_R P_a(\tilde{R}_\psi)^\vee \quad (3.21)$$

con $P_a(\tilde{R}_\psi) = \frac{1}{2}(\tilde{R}_\psi - \tilde{R}_\psi^\top)$ y k_R una ganancia positiva.

Proposición 2 *Considerando la dinámica de la matriz de error de la ecuación (3.20) con la ley de control (3.21), existe una ganancia k_R tal que el punto de equilibrio $\tilde{R}_\psi = -I$ es inestable y el punto de equilibrio deseado $\tilde{R}_\psi = I$ es casi globalmente asintóticamente estable.⁴*

Prueba. El error de \bar{r} está dado por

$$\tilde{\bar{r}} = \bar{r}_d - k_R P_a(\tilde{R}_\psi)^\vee - \bar{r}_d$$

entonces, la dinámica en lazo cerrado de (3.20) está dada por

$$\dot{\tilde{R}}_\psi = -k_R \tilde{R}_\psi P_a(\tilde{R}_\psi) \quad (3.22)$$

Las soluciones de la siguiente ecuación matricial caracterizan los puntos de equilibrio

$$0 = -k_R \tilde{R}_\psi P_a(\tilde{R}_\psi)$$

Multiplicando \tilde{R}_ψ^\top por la izquierda y multiplicando por $\frac{1}{-k_R}$, se tiene

$$0 = P_a(\tilde{R}_\psi) \quad (3.23)$$

entonces,

$$\tilde{R}_\psi = P_s(\tilde{R}_\psi) \quad (3.24)$$

⁴En [21] y [22] se ha usado el término «casi globalmente asintóticamente estable» para referirse a los sistemas dinámicos con múltiples puntos de equilibrio, pero sólo un único punto de equilibrio estable.

con $P_s(\tilde{R}_\psi) = \frac{1}{2}(\tilde{R}_\psi + \tilde{R}_\psi^\top)$. Nótese que la igualdad en la ecuación (3.23) se sigue manteniendo.

Multiplicando la ecuación (3.24) por \tilde{R}_ψ^\top por la izquierda

$$I = P_s(\tilde{R}_\psi)P_s(\tilde{R}_\psi)$$

El teorema de Cayley-Hamilton [23] establece que, para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A^2 - \text{traza}(A)A + \det(A)I = 0$$

Para $A = P_s(\tilde{R}_\psi)$, se tiene

$$I - \text{traza}(P_s(\tilde{R}_\psi))P_s(\tilde{R}_\psi) + \det(P_s(\tilde{R}_\psi))I = 0$$

despejando $P_s(\tilde{R}_\psi)$

$$P_s(\tilde{R}_\psi) = \frac{1 + \det(P_s(\tilde{R}_\psi))}{\text{traza}(P_s(\tilde{R}_\psi))} I \quad (3.25)$$

Dado que $P_s(\tilde{R}_\psi) \in SO(2)$, las siguientes restricciones deben mantenerse

$$\det(\tilde{R}_\psi) = 1, \quad \text{traza}(P_s(\tilde{R}_\psi)) \in [-2, 2] \quad (3.26)$$

Es claro que las únicas matrices simétricas que cumplen las restricciones de (3.26), y tienen la forma de (3.25), son $\tilde{R}_\psi = \pm I$.

Es necesario demostrar que el punto de equilibrio $\tilde{R}_\psi = -I$ es inestable. Considerando una perturbación, de magnitud pequeña, en términos de ϵ , para $\tilde{R}_\psi = -1$, i.e.

$$\tilde{R}_\psi^\epsilon = -I e^{(\Delta_\psi)^\wedge} \quad (3.27)$$

donde $\Delta_\psi \in \mathbb{R}$. La dinámica en lazo cerrado de (3.22), en función de (3.27), toma la siguiente forma

$$\dot{\tilde{R}}_\psi^\epsilon = -k_R \tilde{R}_\psi^\epsilon P_a(\tilde{R}_\psi^\epsilon) \quad (3.28)$$

La aproximación lineal de la dinámica de lazo cerrado de (3.25) se obtiene al diferenciar con respecto a ϵ y evaluando $\epsilon = 0$. Dado que,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\psi^\epsilon|_{\epsilon=0} &= -I e^0 = -I \\ \frac{\partial}{\partial \epsilon} \tilde{R}_\psi^\epsilon|_{\epsilon=0} &= -I e^{(\Delta_\psi)^\wedge} (\Delta_\psi)^\wedge|_{\epsilon=0} = -I (\Delta_\psi)^\wedge \\ \frac{\partial}{\partial \epsilon} P_a(\tilde{R}_\psi^\epsilon)|_{\epsilon=0} &= \frac{1}{2}(-I (\Delta_\psi)^\wedge + ((\Delta_\psi)^\wedge)^\top I) = -(\Delta_\psi)^\wedge \end{aligned}$$

Entonces

$$(\dot{\Delta}_\psi)^\wedge = k_R(\Delta_\psi)^\wedge \quad (3.29)$$

De (3.29), está claro que $\tilde{R}_\psi = -I$ es inestable.

Ahora, considerando la siguiente función de Lyapunov [24]

$$\Phi = \frac{1}{2}\text{traza}(I - \tilde{R}_\psi) \quad (3.30)$$

Al derivar respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{\Phi} = -\frac{1}{2}\text{traza}(\dot{\tilde{R}}_\psi)$$

utilizando la ecuación (3.22), se tiene

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2}k_R = \frac{1}{2}k_R\text{traza}(\tilde{R}_\psi P_a(\tilde{R}_\psi))$$

Considerando la siguiente identidad

$$\text{traza}(Ab^\wedge) = \text{traza}((P_s(A) + P_a(A))b^\wedge) = \text{traza}(P_a(A)b^\wedge) = -2b(P_a(A))^\vee$$

se tiene

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2}k_R\text{traza}((P_s(\tilde{R}_\psi) + P_a(\tilde{R}_\psi))P_a(\tilde{R}_\psi))$$

Dada la forma de $P_a(\tilde{R}_\psi)$, es posible aplicar la última parte de la identidad, entonces

$$\dot{\Phi} = -k_R(P_a(\tilde{R}_\psi)^\vee)^2$$

Entonces, las siguientes trayectorias convergen al siguiente conjunto

$$\mathcal{D} = \{\tilde{R}_\psi \in SO(2) | P_a(\tilde{R}_\psi) = 0\}$$

Por lo tanto, se confirma la ecuación (3.24). Así pues, se puede verificar que

$$\dot{P}_s(\tilde{R}_\psi) = \frac{1}{2}P_a(\tilde{R}_\psi)P_a(\tilde{R}_\psi)$$

entonces, $P_s(\tilde{R}) = C$, siendo C una matriz constante. Dado que $C \in SO(2)$, la siguiente identidad debe mantenerse

$$\det(C) = 1, \quad C^\top C = 1$$

entonces, $C = \pm I$ y \tilde{R}_ψ converge a I o $-I$. Dado que el punto de equilibrio $\tilde{R}_\psi = -I$ ya se demostró inestable, se comprueba que \tilde{R} converge de manera casi globalmente asintóticamente estable al punto de equilibrio deseado $\tilde{R}_\psi = I$, terminando así la prueba. \triangleleft

Con el fin de propagar la acción hacia el ángulo de alabeo, de la ecuación (3.15) se define

$$\zeta = \frac{g}{\bar{u}} t_\phi - \bar{r} \quad (3.31)$$

derivando respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{\bar{u}} (1 + t_\phi^2) \dot{\phi} - \dot{\bar{r}}$$

Sustituyendo la tercera ecuación de (3.13), se tiene

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{\bar{u}} (1 + t_\phi^2) (p_d + \frac{g}{\bar{u}} s_{\bar{\theta}} t_\phi) - \dot{\bar{r}} \quad (3.32)$$

donde

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{R}_{\psi_c}^\top \dot{R}_{\psi_c} + R_{\psi_c}^\top \ddot{R}_{\psi_c})^\vee - \frac{1}{2} k_R (\dot{\tilde{R}}_\psi - \dot{\tilde{R}}_\psi^\top)^\vee$$

con

$$\dot{\tilde{R}}_\psi = \dot{R}_{\psi_c}^\top R_\psi + R_{\psi_c}^\top \dot{R}_\psi$$

Donde ya se han definido todas las matrices, salvo \ddot{R}_{ψ_c} , la cual está dada por

$$\ddot{R}_{\psi_c} = k\ddot{\tilde{y}} \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) & 1 - \tanh(k\tilde{y})^2 \\ -(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) & -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) \\ \dot{r}_{11} & -2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) \\ 2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) & \dot{r}_{11} \end{bmatrix} + k^2 \dot{\tilde{y}}^2 \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & -2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) \\ 2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) & \dot{r}_{11} \end{bmatrix}$$

con

$$\dot{r}_{11} = \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y})^2 - \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} (1 - \tanh(k\tilde{y})^2)$$

Además, $\ddot{\tilde{y}}$ está dado por

$$\ddot{\tilde{y}} = \bar{u} c_{\bar{\theta}} c_\psi \dot{\psi}$$

Proposición 3 *Asúmase que $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$. El sistema dinámico en (3.32) en lazo cerrado, con la ley de control*

$$p_d = -\frac{g}{\bar{u}} s_{\bar{\theta}} t_\phi + \frac{\bar{u}}{g(1 + t_\phi^2)} (-K\zeta + \dot{\bar{r}}) \quad (3.33)$$

con K una ganancia constante positiva, tiene un punto de equilibrio localmente exponencialmente estable en el punto $\zeta = 0$.

Prueba. La dinámica en lazo cerrado de (3.32), con la ley de control (3.33), está dada por

$$\dot{\zeta} = -K\zeta$$

Dado que, cuando $\phi = \pm\pi/2$, t_ϕ no está definido, es necesario mantener la restricción $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Si dicha restricción se mantiene, está claro que ζ converge de manera exponencial a cero, finalizando así la prueba. \triangleleft

Ha quedado clara la desventaja de no considerar el verdadero espacio de configuración de ϕ . Sin embargo, dadas las capacidades de la mayoría de las aeronaves privadas y comerciales, las cuales no están diseñadas para operar con ángulos de alabeo de 90° o mayores, no hay razón para restringir el ángulo ϕ al conjunto $[-\pi, \pi]$.

Proposición 4 *Considere la dinámica y cinemática lateral-direccional dada por las ecuaciones (2.59)-(2.64) en lazo cerrado con los controles (3.4) y (3.33) y el algoritmo de guía lateral (3.21). Existen ganancias Λ_1 , Λ_2 , k , k_R y K tales que el error de la distancia lateral de la aeronave, \tilde{y} , converja localmente asintóticamente a cero.*

Prueba. De las Proposiciones 1, 2, 3 y 4, ninguna señal puede divergir al infinito. De tal manera que, para lograr que el error lateral de la aeronave, \tilde{y} , converja asintóticamente a cero, las ganancias de control deben ser elegidas de manera que los errores $\tilde{p}\tilde{y}\tilde{r}$ converjan a cero más rápido de lo que ζ converge a cero y \tilde{R}_ψ converge a I . Además, las ganancias k_R deben ser elegidas de tal manera que ζ converja a cero más rápido que \tilde{R}_ψ convergiendo a I . El valor de control que lleva \tilde{y} a cero es el ángulo de guiñada de la aeronave, el cual no puede tomar grandes valores, Por lo tanto, la ganancia de menor valor debe ser k .

Si los errores \tilde{p} , \tilde{r} , ζ y \tilde{R}_ψ convergen a sus referencias, de la ecuación (3.18), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{v}\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \\ \dot{y} &= -\bar{v}\tanh(k\tilde{y}) \end{aligned} \tag{3.34}$$

De estas ecuaciones queda claro que el error lateral de la aeronave, \tilde{y} , converge a cero. Además, la velocidad \dot{x} no puede tomar velocidades mayores a \bar{v} , mientras que esta última mejora la convergencia de \tilde{y} . \triangleleft

3.3.3. Caso general

Dada una secuencia ordenada de puntos de referencia W_i , con coordenadas (x_{d_i}, y_{d_i}) en el plano Cartesiano, se genera una referencia p_d que alimenta al control interno, de tal manera que la distancia lateral \tilde{y} entre el eje longitudinal de la aeronave y la línea que une dos puntos de referencia, W_i y W_{i+1} , converja a cero de manera asintótica. Esto se ilustra en la Figura 3-1.

De manera muy similar al caso particular, donde la trayectoria deseada es una línea paralela al eje x , el error lateral se lleva a cero utilizando la matriz de rotación R_{ψ} . Sin embargo, es necesario remarcar el hecho de que la aeronave lleva una orientación, la cual no está definida por la matriz de corrección R_{ψ_c} . La matriz R_{ψ_c} lo único que hace es reducir el error lateral, al lograr el objetivo, la aeronave volverá a una orientación predefinida por una matriz, la cual no fue tomada en cuenta durante el caso particular, más adelante se explicará a fondo este hecho.

Para lograr el objetivo, primero se utiliza un sistema de ejes auxiliar, el cual tiene el eje x^r paralelo a la línea que conecta los puntos W_i y W_{i+1} . En la Figura 3-5 se ilustra el sistema de ejes auxiliar. Con el fin de expresar las velocidades de la aeronave del sistema $N(x), E(y)$ en el sistema $N(x^r), E(y^r)$, se obtiene la matriz de rotación del sistema $N(x^r), E(y^r)$ al sistema $N(x), E(y)$ de la siguiente manera.

De la Figura 3-4, está claro que $N(x)$ y $E(y)$ están dados por

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x^r)c_{\psi_d} - E(y^r)s_{\psi_d} \\ E(x) &= N(x^r)s_{\psi_d} + E(y^r)c_{\psi_d} \end{aligned}$$

En forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} N(x) \\ E(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\psi_d} & -s_{\psi_d} \\ s_{\psi_d} & c_{\psi_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x^r) \\ E(y^r) \end{bmatrix}$$

y en forma compacta

$$[x] = R_{\psi_d}[x^r]$$

donde

$$[x] = \begin{bmatrix} N(x) \\ E(y) \end{bmatrix}, \quad R_{\psi_d} = \begin{bmatrix} c_{\psi_d} & -s_{\psi_d} \\ s_{\psi_d} & c_{\psi_d} \end{bmatrix}, \quad [x^r] = \begin{bmatrix} N(x^r) \\ E(y^r) \end{bmatrix}$$

Ahora, para pasar del sistema de ejes $N(x)$, $E(y)$ al sistema $N(x^r)$, $E(y)$ se utiliza la matriz transpuesta, es decir,

$$[x^r] = R_{\psi_d}^\top [x]$$

Utilizando esta rotación para hacer el cambio de coordenadas de la posición de la aeronave, se tiene

$$X^r = R_{\psi_d}^\top X$$

Entonces, la primera ecuación de (3.14) en el sistema de ejes auxiliar, se expresa de la siguiente manera

$$\dot{X}^r = R_{\psi_d}^\top R_{\psi} \mathcal{V} \quad (3.35)$$

ya que se considera que la orientación deseada es constante para cada par de puntos de referencia.

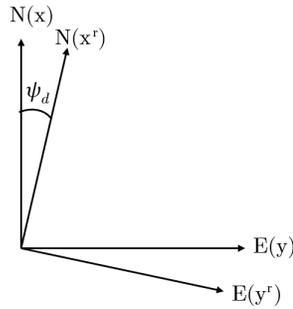


Figura 34: Rotación del sistema de ejes

Se define el error de orientación utilizando la matriz de orientación actual de la aeronave, R_{ψ} , y una matriz de rotación, R_r , la cual está compuesta por la matriz de orientación deseada, R_{ψ_d} , y la matriz de corrección del error lateral, R_{ψ_c} . Se tiene,

$$\tilde{R}_{\psi} = R_r^\top R_{\psi} \quad (3.36)$$

con

$$R_r = R_{\psi_d} R_{\psi_c}$$

Al despejar R_{ψ} de (3.36), se tiene

$$R_{\psi} = R_r \tilde{R}_{\psi}$$

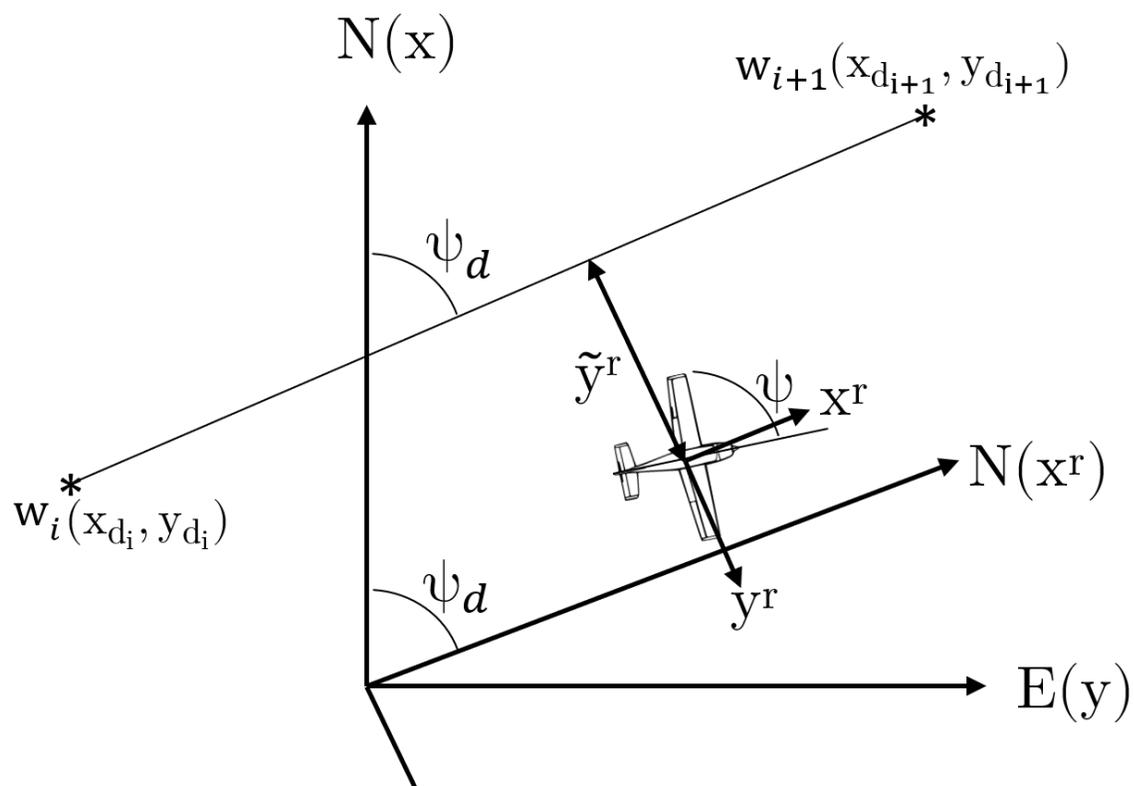


Figura 3-5: Error lateral de la aeronave en el sistema de ejes auxiliar, \tilde{y}^r .

Así, la ecuación (3.35) puede expresarse de la siguiente manera

$$\dot{X}^r = R_{\psi_d}^\top R_{\psi_d} R_{\psi_c} \tilde{R}_{\psi} \mathcal{V}$$

Dadas las propiedades de las matrices que pertenecen al grupo $SO(2)$, y tomando en cuenta que el objetivo de control es llevar \tilde{R}_{ψ} a la matriz identidad, se tiene

$$\dot{X}^r = R_{\psi_c} \mathcal{V} \quad (3.37)$$

Ahora, se debe definir la distancia lateral entre la aeronave y la línea que conecta los puntos de referencia en el sistema de ejes auxiliar. Es claro que la posición $y_{d_i}^r = y_{d_{i+1}}^r$, entonces, se puede trabajar con la posición del punto de referencia W_i o W_{i+1} sin diferencia alguna. Por comodidad, se trabajara con el punto W_i .

Al pasar la posición de la aeronave al sistema de ejes auxiliar, así como la posición del punto de referencia, se tiene

$$\tilde{X} = R_{\psi_d}^\top X - R_{\psi_d}^\top X_{d_i}$$

Aunque $y_{d_i} = y_{d_{i+1}}$, es claro que $x_{d_i} \neq x_{d_{i+1}}$. Sin embargo, sólo es de interés la distancia lateral, por lo tanto, se toma la distancia lateral, y^r , de la siguiente manera

$$\tilde{y}^r = \tilde{X}^\top e_2$$

Donde $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$. De forma explícita, el error de la distancia lateral, en el sistema de ejes auxiliares, está dado por

$$\tilde{y}^r = (X^r - R_{\psi_d}^\top X_{d_i})^\top e_2$$

En este punto cabe remarcar el uso de la matriz de orientación deseada, R_{ψ_d} . Esta matriz se usa para que la aeronave se oriente en la misma dirección que la línea que conecta los puntos de referencia. Durante el caso particular no se consideró la matriz de orientación deseada, pues se seguía una línea de referencia paralela al eje x , esto es, 0° , que en representación matricial está dada por la matriz identidad, I . En conclusión, aunque en el caso particular no se utilizó de manera explícita la matriz de orientación deseada, su existencia es innegable. En el caso general, de no utilizarse la matriz de orientación deseada, la aeronave trataría de reducir el error lateral pero siempre tratando de estar orientada hacia el norte, i.e., con un ángulo de guiñada de 0° .

Continuando con el procedimiento de diseño del control externo, la ecuación (3.37) puede expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{x}^r &= \bar{v}c_{\psi_c} \\ \dot{y}^r &= \bar{v}s_{\psi_c}\end{aligned}\quad (3.38)$$

Al igual que en el caso particular, se considera que la entrada de control virtual es s_{ψ_c} , señal que se encuentra dentro del conjunto $[-1, 1]$. Se propone

$$s_{\psi_c} = -\tanh(k\tilde{y}^r)$$

siendo k una constante positiva. Entonces, se tiene

$$E_{\psi_c} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2} & \tanh(k\tilde{y}^r) \\ -\tanh(k\tilde{y}^r) & \sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2} \end{bmatrix}$$

La dinámica de la matriz de error está dada por

$$\dot{\tilde{R}}_{\psi} = \tilde{R}_{\psi} \tilde{r}^{\wedge} \quad (3.39)$$

donde

$$\tilde{r} = \bar{r} - \bar{r}_d, \quad \bar{r}_d = (R_r^{\top} \dot{R}_r)^{\vee}$$

con

$$\dot{R}_r = k\dot{y}^r \begin{bmatrix} c_{\psi_d} & -s_{\psi_d} \\ s_{\psi_d} & c_{\psi_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2} \tanh(k\tilde{y}^r) & 1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2 \\ -(1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2) & -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y}^r)^2} \tanh(k\tilde{y}^r) \end{bmatrix}$$

con

$$\dot{y}^r = \dot{X}^{r\top} e_2$$

desarrollando, se tiene

$$\dot{y}^r = \bar{u}c_{\bar{\theta}}(-c_{\psi}s_{\psi_d} + s_{\psi}c_{\psi_d})$$

Se propone la ley de control

$$\bar{r} = (R_r^{\top} \dot{R}_r)^{\vee} - k_R P_a (\tilde{R}_{\psi})^{\vee} \quad (3.40)$$

Esta ley de control es muy similar a la ecuación (3.21), que se utilizó en el caso particular.

La Proposición 2, así como la prueba de dicha proposición, son aplicables para el caso general.

Para propagar la acción de control hacia los alerones, se utiliza, de nuevo, la ecuación (3.31)

$$\zeta = \frac{g}{\bar{u}} t_\phi - \bar{r}$$

al derivar respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{\zeta} = \frac{g}{\bar{u}} (1 + t_\phi^2) (p_d + \frac{g}{\bar{u}} s_\theta t_\phi) - \dot{\bar{r}}$$

donde

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{R}_r^\top \dot{R}_r + R_r^\top \ddot{R}_r)^\vee - \frac{1}{2} k_R (\dot{R}_\psi - \dot{R}_\psi^\top)^\vee$$

con

$$\dot{R}_\psi = \dot{R}_r^\top R_\psi + R_r^\top \dot{R}_\psi$$

Para el caso general, \ddot{R}_r es un poco más grande que en la matriz utilizada en el caso particular, pues contiene la matriz de orientación deseada, R_{ψ_d} , sin embargo, no es mucho más compleja, dado que la orientación deseada se considera constante.

$$\ddot{R}_{\psi_c} = k\ddot{y}^r \begin{bmatrix} -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) & 1 - \tanh(k\tilde{y})^2 \\ -(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) & -\sqrt{1 - \tanh(k\tilde{y})^2} \tanh(k\tilde{y}) \end{bmatrix} + k^2 \dot{y}^r{}^2 \begin{bmatrix} \ddot{r}_{11} & -2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) \\ 2(1 - \tanh(k\tilde{y})^2) \tanh(k\tilde{y}) & \ddot{r}_{11} \end{bmatrix}$$

con

$$\ddot{y}^r = \bar{u} c_{\bar{\theta}} (s_\psi s_{\psi_d} + c_\psi c_{\psi_d}) \dot{\psi}$$

La Proposición 3, así como su prueba, son aplicables en el caso general. Entonces, se utiliza ley de control (3.33)

$$p_d = -\frac{g}{\bar{u}} s_\theta t_\phi + \frac{\bar{u}}{g(1 + t_\phi)} (-K\zeta + \dot{\bar{r}})$$

La Proposición 4 y su prueba son aplicables al caso general, demostrando así que el error lateral, \tilde{y}^r , converge a cero.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

4.1. Plataforma de simulación

Debido a que la idea es implementar cada control diseñado en la plataforma experimental conocida como Telemaster, la cual se encuentra en las instalaciones de CINVESTAV, durante trabajos pasados se hizo un modelo en CAD, del cual fue posible obtener los momentos de inercia de la aeronave. Además, la misma aeronave se modeló en Plane Maker, software que viene incluido con X-Plane, la configuración de X-plane y Matlab Simulink necesaria para llevar a cabo la conexión se detalla en el Apéndice. En la Figura 4-1 se muestra la aeronave Telemaster, la imagen fue tomada del simulador X-Plane.

De manera muy general, en el software Plane Maker se puede diseñar el fuselaje a través de puntos de control para darle la forma en cada sección, el software interpola las posiciones automáticamente. Las características y posiciones del ala y los estabilizadores se pueden seleccionar de manera muy sencilla. Los perfiles aerodinámicos utilizados se pueden introducir a través de una nube de puntos en Airfoil Maker, software también incluido con X-Plane. Sin embargo, estos perfiles son meramente visuales, pues las características aerodinámicas no se calculan ni en Airfoil Maker ni en Plane Maker. Las características aerodinámicas del perfil se introducen en Plane Maker a través de datos numéricos a fin de caracterizar las curvas de levantamiento, arrastre y momento del perfil.



Figura 4-1: Telemaster modelado en Plane Maker dentro del simulador X-Plane.

La caracterización del motor también puede llegar a ser algo compleja, pues se debe seleccionar la máxima potencia que da este, así como introducir las curvas características de la hélice utilizada.

En la Tabla 4.1 se indican los valores de los momentos de inercia utilizados durante la programación del control.

I_{xx}	11.671kgm ²	I_{yy}	6.076kgm ²
I_{zz}	17.285kgm ²	I_{xz}	-0.024kgm ²

Tabla 4.1: Momentos de inercia del Telemaster, obtenidos a través del modelo hecho en CAD.

Por otro lado, en la Tabla 4.2 se muestran los principales valores de las superficies de la aeronave, es decir, el ala, el estabilizador horizontal y el estabilizador vertical. Cada subíndice indica si se trata del ala (W), del estabilizador horizontal (H) o del estabilizador vertical (V). Siendo S la superficie de una vista en planta para el ala y el estabilizador horizontal, y

vista lateral para el estabilizador vertical, b la envergadura, \bar{c} la cuerda aerodinámica media, la cual es la misma que la cuerda de raíz y de punta para superficies rectangulares, como es el caso del ala y del estabilizador horizontal del Telemaster, i el ángulo de incidencia, Λ el ángulo de flechado del borde de ataque y Γ el ángulo de diedro.

Algunos valores no se indican porque son de poca importancia o por su obviedad, como es el caso de la conicidad del ala y del estabilizador horizontal, la cual es, claramente, cero.

m	5.5 kg	S_W	0.858 m ²	b_W	2.386 m
\bar{c}_W	0.359 m	S_H	0.4151 m ²	S_V	0.0509 m ²
b_H	0.9 m	\bar{c}_H	0.225 m	Γ_W	4 deg
i_W	4.5 deg	i_H	2 deg	Λ_V	16 deg

Tabla 4.2: Características geométricas principales del Telemaster.

En la Tabla 4.3 se indican los perfiles aerodinámicos utilizados en cada superficie. El ala utiliza un perfil modificado, llamado Telemaster P1, el cual su forma se encuentra en la Figura 4-2. El estabilizador horizontal utiliza el perfil Clark Y, el cual es conocido y fácil de encontrar tanto su nube de puntos como sus curvas aerodinámicas. Por otro lado, el estabilizador vertical no utiliza un perfil aerodinámico en su construcción, sino una placa plana.

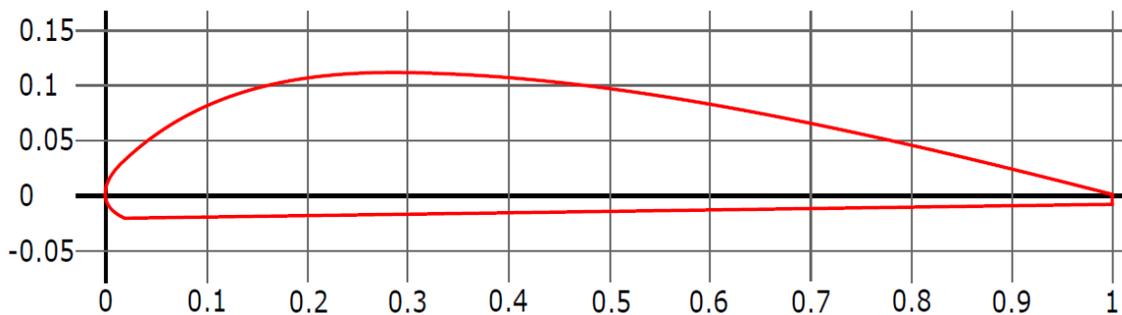


Figura 4-2: Perfil aerodinámico Telemaster P1, utilizado en el ala de la aeronave Telemaster

Superficie	Perfil Aerodinámico
Ala	Telemaster P1
Estabilizador horizontal	Clark Y
Estabilizador vertical	Placa plana

Tabla 4.3: Perfiles aerodinámicos utilizados en cada superficie del Telemaster.

4.2. Obtención de los coeficientes aerodinámicos de control

Es sabido que los coeficientes aerodinámicos de control son de los más complejos de obtener. Estos elementos son $C_{l_{\delta_a}}$, $C_{l_{\delta_r}}$, $C_{n_{\delta_a}}$ y $C_{n_{\delta_r}}$. Estos valores son necesarios para programar el control de lazo interno de la aeronave, y la manera de obtenerlos puede ir desde modelar la aeronave en el software Digital Datcom y así obtener dichos valores, como se hizo en [25], hasta utilizar métodos de estimación asumiendo una estructura concreta de los coeficientes de alabeo (c_l) y de guiñada (c_n), como en la ecuación (3.1).

En cuanto a los métodos de estimación, se puede utilizar alguna variación del DREM (Dynamic Regressor Extension and Mixing), como la creación de nueva información a través del uso de retrasos de señal, o a través de la aplicación de filtros, o el método utilizado en [26] y el cual se detalla en más profundidad en [27], el cual consiste en combinar la información y así garantizar que los valores converjan incluso si la condición de excitación persistente no se cumple en todo momento.

Sin embargo, durante este trabajo se utilizó el software SIDPAC (System IDentification Programs for AirCrafts), utilizado también en [14].

Para lograrlo, se voló la aeronave en X-Plane con el uso del transmisor conectado a la computadora. Se trataron de enviar señales de deflexión de alerones máximas tanto en su límite superior como en su límite inferior, de igual manera se mandaron señales al timón de dirección. Estas señales, entre otras, se pueden ver en la Figura 4-3. Se guardaron los datos de este primer vuelo y se corrió uno de los programas de SIDPAC, a fin de caracterizar los coeficientes aerodinámicos de estabilidad y de control del modelo, los cuales se presentan

4.2. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES AERODINÁMICOS DE CONTROL

en la Tabla 4.4.

c_{l_0}	0.0185	c_{n_0}	-0.0260
c_{l_β}	0.1905	c_{n_β}	-1.4878
c_{l_p}	-1.3457	c_{n_p}	0.5440
c_{l_r}	-0.4278	c_{n_r}	-0.3496
$c_{l_{\delta_a}}$	0.8507	$c_{n_{\delta_a}}$	-0.4762
$c_{l_{\delta_r}}$	0.0154	$c_{n_{\delta_r}}$	1.5888

Tabla 4.4: Coeficientes aerodinámicos de estabilidad y de control obtenidos con el software SIDPAC.

Una vez el programa se corre, es posible observar el comportamiento del coeficiente de alabeo y guiñada obtenidos al despejar las ecuaciones de la dinámica rotacional. Así mismo, es posible observar el comportamiento del coeficiente de alabeo y guiñada calculado usando los coeficientes aerodinámicos obtenidos a través de un método de estimación que usa mínimos cuadrados. La comparación entre el coeficiente de alabeo obtenido de las ecuaciones de la dinámica rotacional y el coeficiente obtenido a través del modelo obtenido por los mínimos cuadrados se puede ver en la Figura 4-4. Así mismo, la comparación del coeficiente de guiñada puede verse en la Figura 4-5.

Posteriormente se hizo otro vuelo con el transmisor, pero esta vez, durante el vuelo, se hicieron maniobras arbitrarias. Los datos de este último vuelo se guardaron para ser comparados con una estimación creada a partir de los datos del modelo caracterizado previamente obtenido.

Las entradas de control, así como el comportamiento, del segundo vuelo se pueden observar en la figura 4-6. Esta vez se puede notar que las deflexiones ya no intentan ser señales cuadradas, ni intentan alcanzar la máxima deflexión posible de la superficie de control.

Finalmente, en las Figuras 4-7 y 4-8 se pueden observar los coeficientes de alabeo y de guiñada, respectivamente, obtenidos mediante los datos de vuelo y los coeficientes predichos por el modelo caracterizado a través de los datos del primer vuelo.

Es claro que la estimación no es perfecta, sin embargo, es lo suficientemente buena como

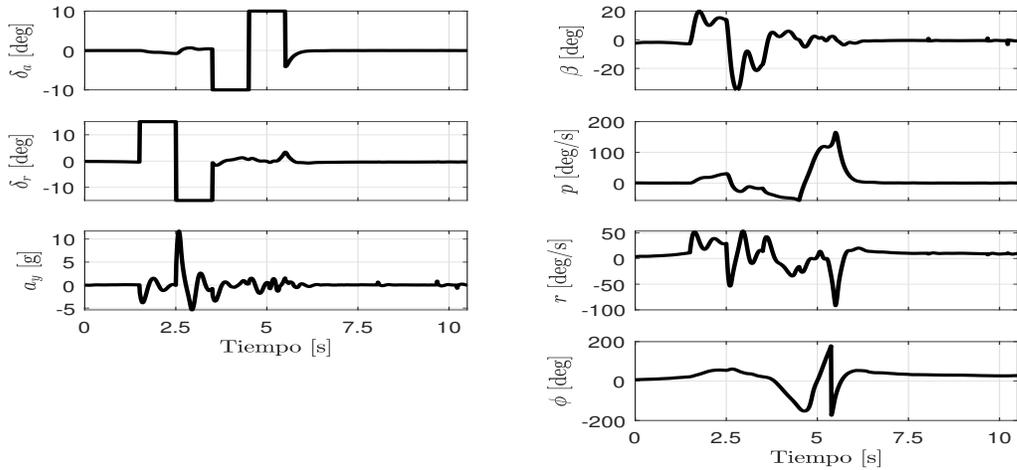


Figura 4-3: Datos principales del primer vuelo para caracterización de los coeficientes de alabeo y guiñada.

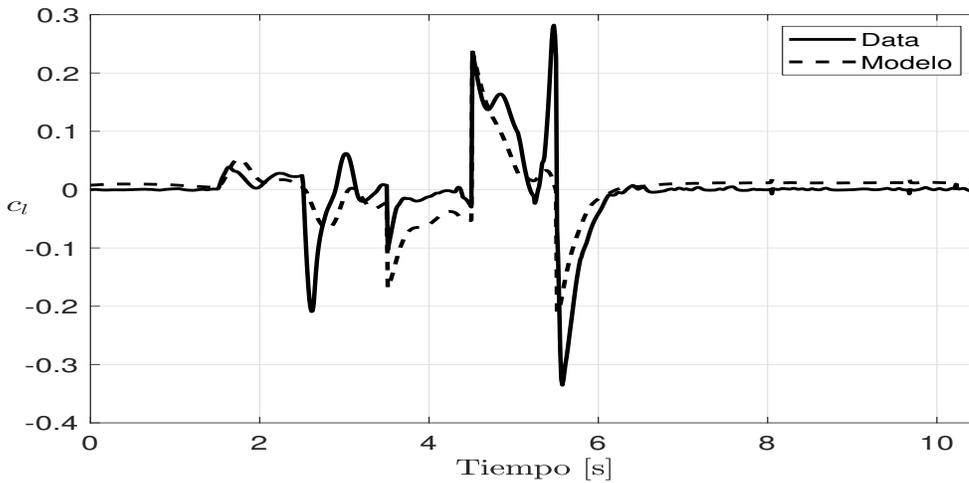


Figura 4-4: Coeficiente de alabeo obtenido con los datos del primer vuelo y con el modelo creado a partir de los coeficientes obtenidos por los mínimos cuadrados.

4.2. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES AERODINÁMICOS DE CONTROL 5

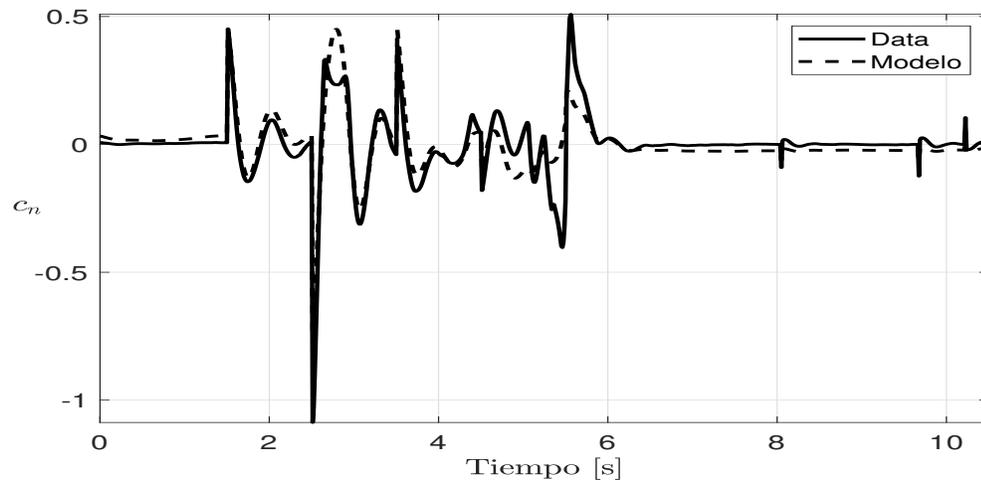


Figura 4-5: Coeficiente de guiñada obtenido con los datos del primer vuelo y con el modelo creado a partir de los coeficientes obtenidos por los mínimos cuadrados.

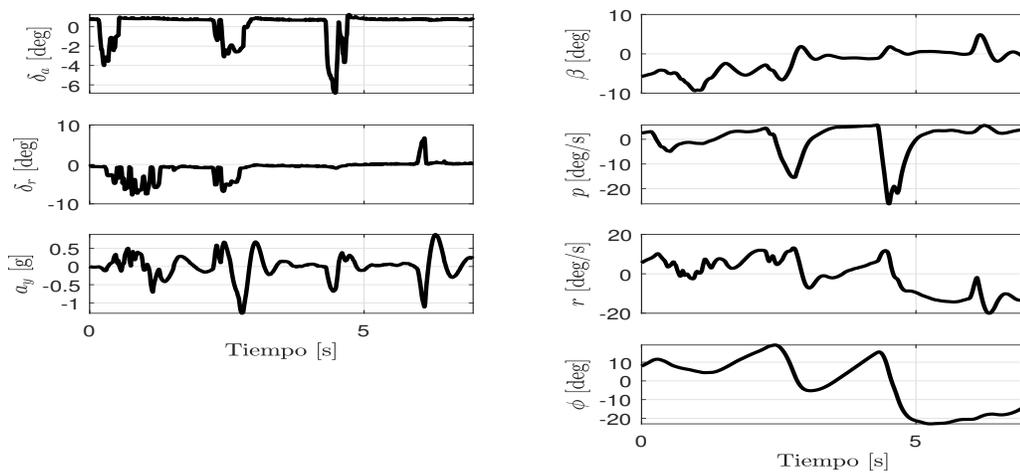


Figura 4-6: Datos principales del segundo vuelo para predicción de los coeficientes de alabeo y de guiñada.

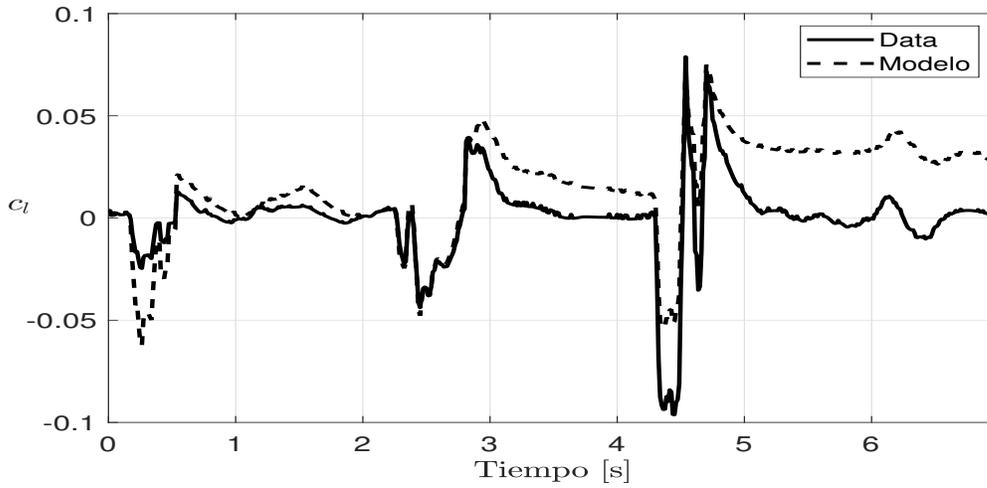


Figura 4-7: Coeficiente de alabeo obtenido con los datos del segundo vuelo y el predicho con los datos de la caracterización del primer vuelo.

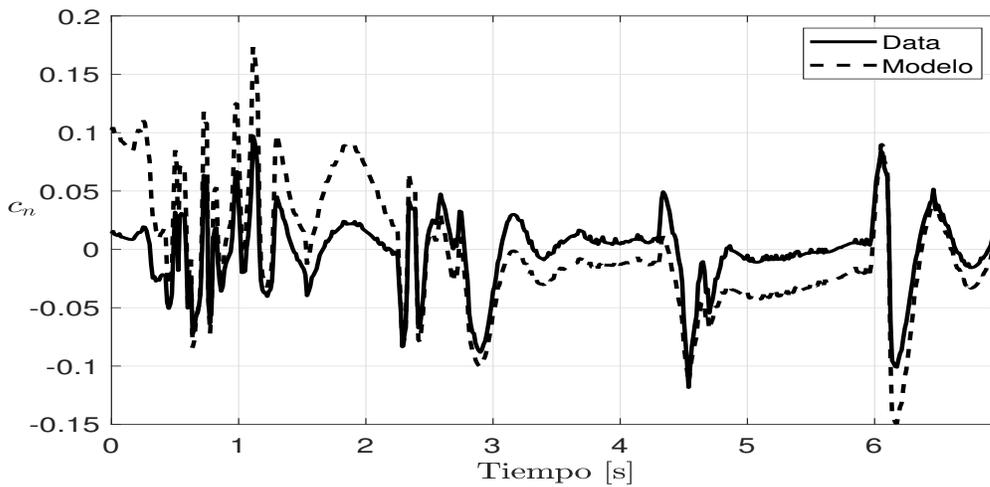


Figura 4-8: Coeficiente de guiñada obtenido con los datos del segundo vuelo y el predicho con los datos de la caracterización del primer vuelo.

para poder utilizar los valores obtenidos de los coeficientes aerodinámicos de control para la aplicación del controlador del lazo interno.

4.3. Planeación de la ruta

Para las simulaciones, la aeronave despegue del aeropuerto de Atizapán de Zaragoza (MMJC), donde la densidad reportada es de $\rho = 0.9629\text{kg/m}^3$, la cual puede ser conocida desde el propio simulador X-Plane. La pista de aterrizaje donde despegue la aeronave esta orientada a, aproximadamente, 47 grados.

Conociendo estos detalles, se diseño una ruta para asegurar que la aeronave puede seguir cualquier linea de referencia, es decir, una linea con una pendiente igual a cero, una linea con pendiente indefinida y una linea con pendiente diferente de cero pero finita.

La aeronave inicia en el punto $W_0 = (-47774, 21685)$, y dado que despegue siguiendo la pista, primero se eligió un punto W_1 de manera que le de suficiente tiempo a la aeronave para ganar altura, además de que la corrección de orientación y el error lateral no sea demasiado alta durante las primeras pruebas, dicho esto, el punto seleccionado fue $W_1 = (-46774, 22685)$. Con estos dos primeros puntos se crea una linea de referencia con pendiente igual a 1, es decir, una orientación de 45 grados.

Existe, además, otro parámetro que es necesario considerar. En la realidad, con tantas ráfagas de viento, es difícil que la aeronave logre pasar exactamente arriba del waypoint W_{i+1} , es por esta razón que se recomienda seleccionar un radio alrededor de dicho waypoint dentro del cual se considera que la aeronave ha alcanzado el punto deseado y se hace el cambio de referencia hacia el siguiente punto.

La selección de un radio pequeño hará que la aeronave haga el cambio de referencia de manera muy brusca, llevando a oscilaciones de alta amplitud en el error lateral si la diferencia de orientación de la lineas de referencia es de 90 grados o mayor. Un radio mayor ayuda a hacer que la aeronave haga un cambio de referencia mucho mas suave, logrando cambios de referencia con diferencia de orientación de hasta 145 grados sin generar oscilaciones de alta amplitud en el error lateral. Sin embargo, sin importar demasiado el tamaño del radio,

es muy difícil, por no decir casi imposible, lograr cambios de referencia con diferencia de orientación cercanos a 180 grados sin producir altas oscilaciones de alta amplitud en el error lateral.

Para el trabajo aquí reportado, se seleccionó un radio de 150m, el cual depende, también, en gran medida del desempeño de la aeronave, para así lograr giros coordinados sin exceder sus capacidades aerodinámicas. Además, los cambios de referencia se planearon a tener máximo una diferencia de orientación de 90 grados.

Aclarado todo, los siguientes waypoints se seleccionaron para formar un cuadrado, de esta manera se prueban las dos tipos de rectas restantes, con pendiente igual a cero y pendiente indefinida, con cada lado del cuadro de 800m. Los waypoints se seleccionaron con las posiciones $W_2 = (-45974, 22685)$, $W_3 = (-45974, 21885)$ y $W_4 = (-46774, 21885)$.

4.4. Resultados de la simulación

Finalmente, el último preparativo de la simulación es la sintonización de las ganancias. Para la sintonización de las ganancias del controlador del lazo interno, Λ_1 y Λ_2 , simplemente se mandaron señales de referencia de forma cuadrada y se modificaron dichas ganancias a manera de que la respuesta convergiera de manera rápida a la referencia y no generara demasiadas oscilaciones al alcanzar la referencia.

Después de varias pruebas se llegó a la conclusión de que Λ_2 modifica la velocidad en que las señales p y r alcanzan la referencia deseada, mientras que Λ_1 modifica las oscilaciones alrededor de la referencia una vez se ha alcanzado dicha referencia. Valores pequeños en Λ_1 y Λ_2 producen una respuesta lenta con oscilaciones de gran amplitud, mientras que valores muy altos en las ganancias producen una respuesta rápida pero con oscilaciones de muy alta frecuencia, aunque de baja amplitud. Entonces, la sintonización de las ganancias es un compromiso entre la velocidad de respuesta y las oscilaciones al rededor de la referencia, pues si se eligen valores demasiado altos, el controlador se puede volver inestable.

Las ganancias K , k_R y k también requirieron un par de pruebas, donde el principal criterio de sintonización fue el evitar deflexiones muy altas del alerón. Por un lado, la ganancia k

debió ser disminuida poco a poco para lograr hacer los cambios de referencia sin saturar el alerón, pues un valor demasiado alto provocara una matriz de rotación con un ángulo bastante grande de giro, exigiéndole demasiado a la aeronave. Por otro lado, un valor demasiado pequeño lograra alcanzar referencias mucho mas alejadas de la aeronave, pero también de manera más lenta. De nuevo, se trata de un compromiso entre velocidad de convergencia del error lateral a cero y la distancia máxima a la cual puede detectar la referencia y converger a ella sin saturar el alerón y provocar un desplome de la aeronave. Es por esta razón que se recomienda hacer la sintonización de acuerdo a las características de la misión.

Por otro lado, las ganancias K y k_R tienen un margen un poco más amplio de selección de valores, pues el efecto dentro del controlador no es tan brusco como lo es el valor de la ganancia k . Aunque una selección correcta de estas ganancias mejora el desempeño de la aeronave durante los giros.

En la Tabla 4.5 se presentan los valores de las ganancias utilizados en la simulación numérica, tanto para el controlador del lazo interno así como del controlador del lazo externo.

Λ_1	$\text{diag}\{2, 3\}$	Λ_2	$\text{diag}\{5, 8\}$
K	1.7	k_R	0.7
k	0.015		

Tabla 4.5: Valores de las ganancias utilizados en las simulaciones numéricas

La simulación comienza haciendo despegar la aeronave. Para lograrlo se aplica un controlador de altitud que obtiene el ángulo de vuelo de referencia de la aeronave, que posteriormente alimenta al controlador de la dinámica longitudinal, el cual es una variación del controlador presentado en [25]. Además, junto con el controlador “improvisado” para despegue, se tiene un control PD que mantiene la aeronave orientada en la misma dirección que la pista.

El controlador de altitud, el controlador longitudinal y el controlador PD para la orientación son implementados durante los primeros 45s, tiempo en el que la aeronave ha alcanzado la suficiente altura para hacer maniobras sin chocar con montañas cerca de los waypoints.

Después de los 45s se activa el controlador de la dinámica lateral-direccional propuesto, mientras que el controlador de la dinámica longitudinal mantiene referencias de velocidad y ángulo de vuelo de $\bar{V} = 20\text{m/s}$ y $\bar{\gamma} = 2\text{deg}$, a partir de ese momento comienzan a computarse todas las señales para futuro análisis.

Finalmente, la trayectoria descrita por la aeronave se muestra en la Figura 4-9. La línea punteada es la referencia, mientras la línea sólida es la trayectoria que siguió la aeronave.

En la Figura 4-10 se puede observar el error de posición lateral, \tilde{y} . Al activarse el controlador de la dinámica lateral-direccional, el error lateral es pequeño, de alrededor de 15m, mientras que el segundo cambio de referencia tiene un error lateral de poco más de 100m, y los demás cambios de referencia tienen un error de 150m. Sin importar la diferencia de orientación entre las referencias, ni la distancia inicial del error lateral al cambio de referencia, se puede ver como el error converge a cero de manera asintótica en todos los casos.

En la Figura 4-11 se ve el ángulo de alabeo requerido por la aeronave para conseguir reducir el error lateral, ϕ , el cual es de poco más de 0.6 rad, lo cual es menos de 40 grados, lo cual es un valor comprensible y alcanzable para la aeronave con la que se cuenta, sin tener una pérdida de altitud considerable. De hecho, la aeronave se mantiene casi a la misma altura incluso después de seguir el cuadrado por más de cuatro veces.

La Figura 4-12 muestra el error de orientación, dado por $(P_a(\tilde{R}_\psi))^v$, el cual es un valor adimensional. Sin embargo, se puede ver que este error también converge a cero. En la Figura 4-13 se muestra la aceleración de la velocidad lateral, la cual tiene oscilaciones a alta frecuencia alrededor de cero. Se puede observar que durante los virajes la aceleración alcanza valores de 0.04m/s^2 y una aceleración máxima de 0.1m/s^2 , las cuales son aceleraciones bajas, suficientes para comprobar que las consideraciones tomadas son suficientemente acertadas y que la condición de giro coordinado es válida.

En las Figuras 4-14 y 4-16 se tiene el comportamiento de los errores de velocidad rotacional de alabeo, \tilde{p} , y de guiñada, \tilde{r} , respectivamente. Estas gráficas demuestran el desempeño del controlador del lazo interno. Se puede apreciar que las referencias convergen a cero y, a pesar de que tienen oscilaciones de alta frecuencia al rededor del punto de equilibrio, las oscilaciones son de baja amplitud. Este es un comportamiento esperable de un controlador de modos deslizantes.

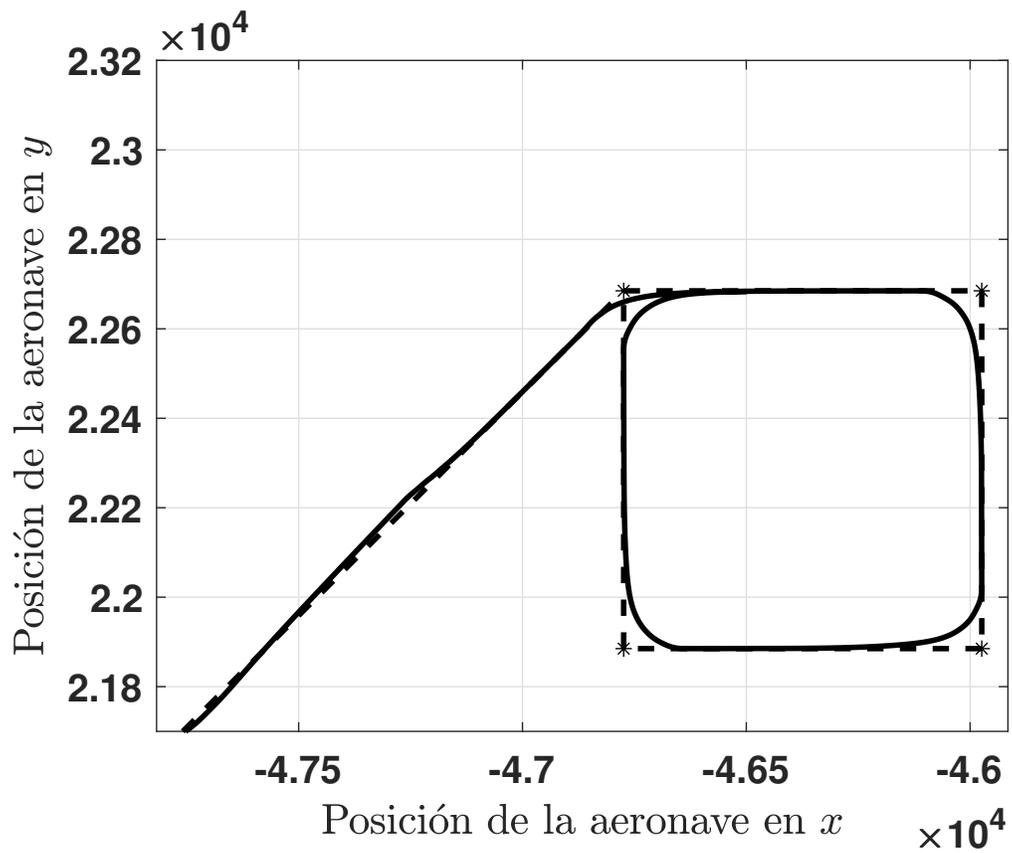
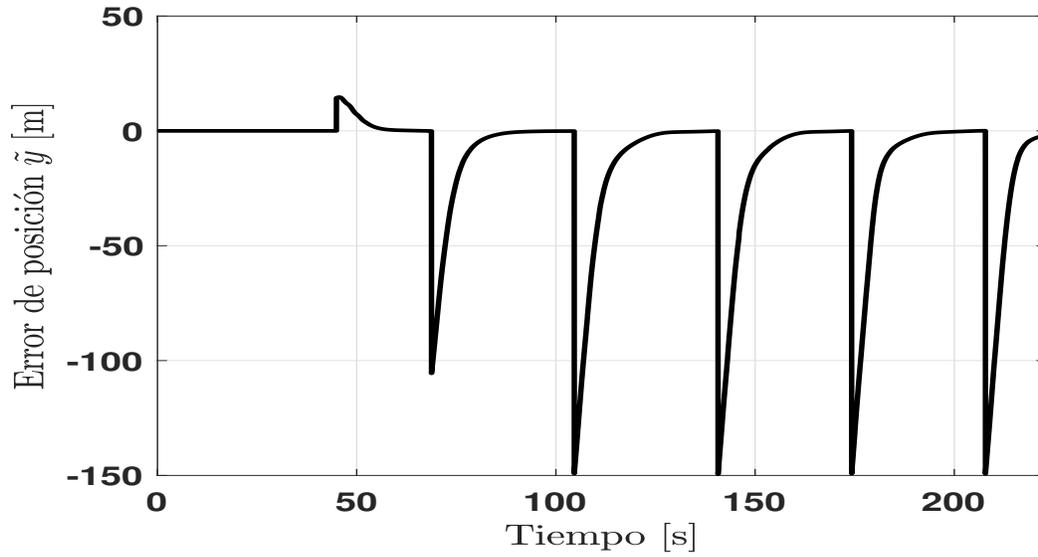
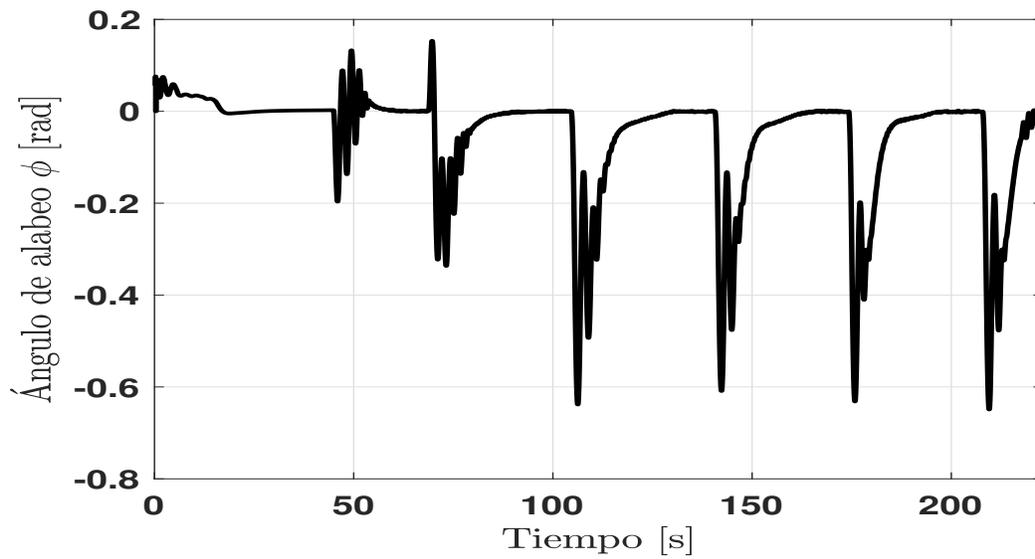


Figura 4-9: Trayectoria seguida por la aeronave en la simulación numérica.

Figura 4-10: Error lateral, \tilde{y} .Figura 4-11: Ángulo de alabeo requerido por la aeronave, ϕ .

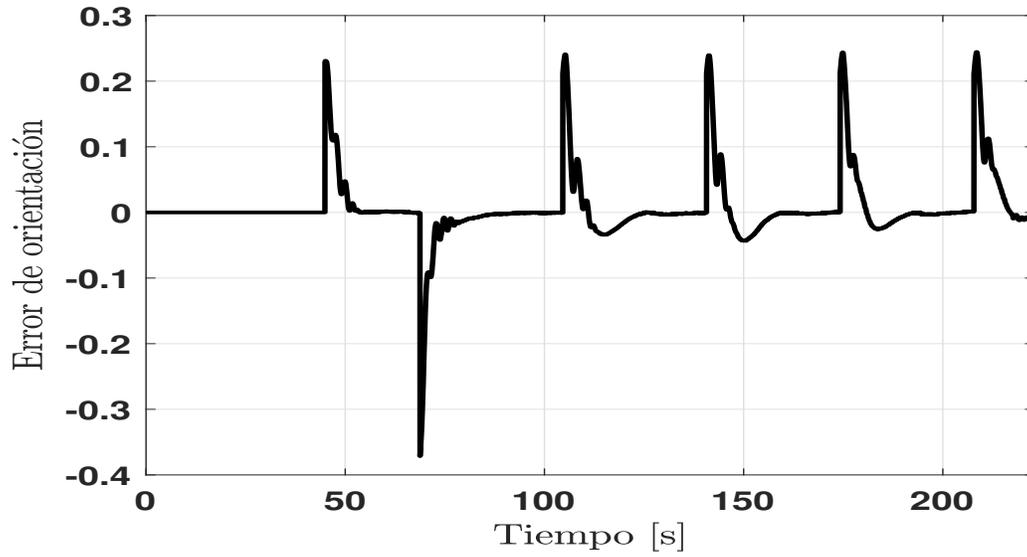
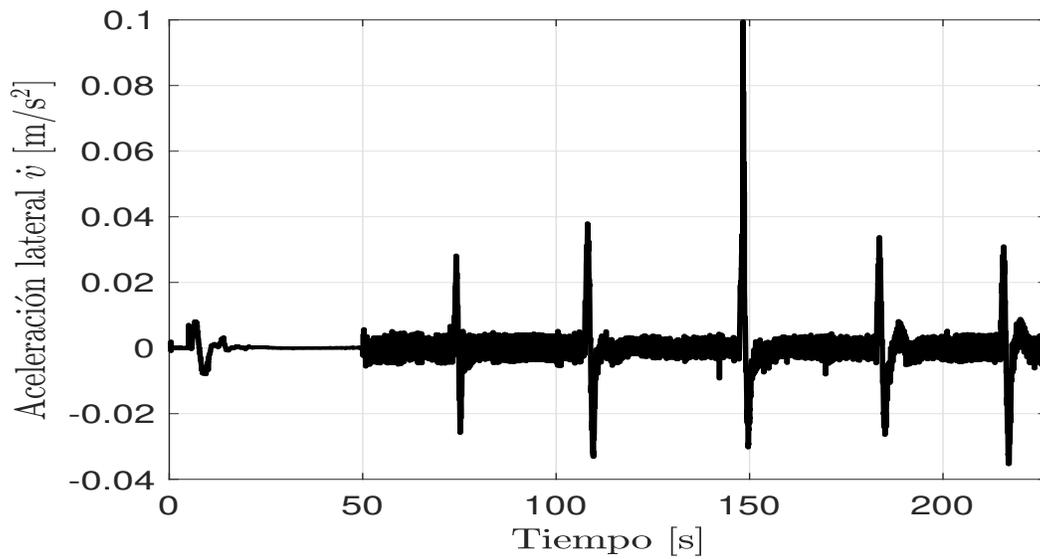
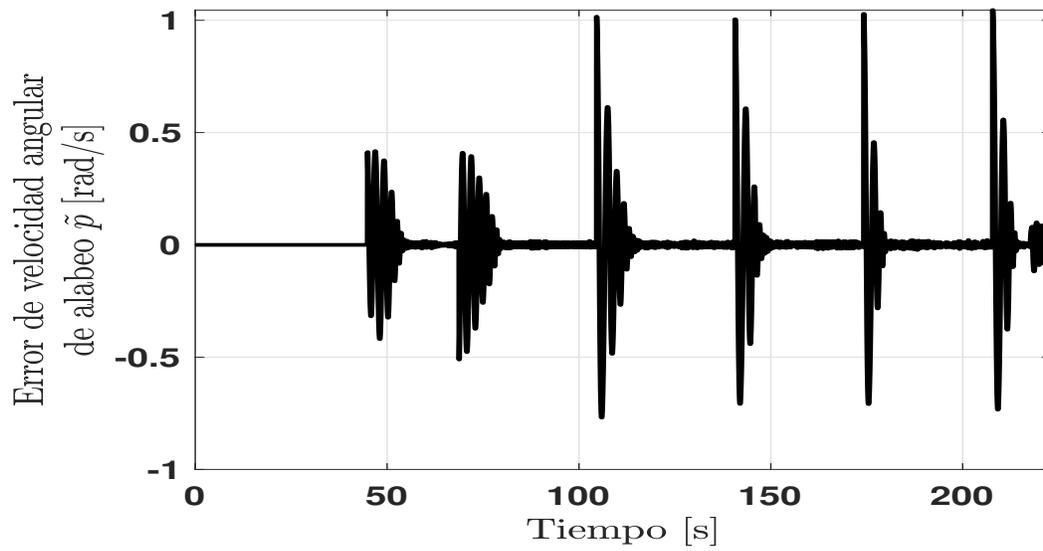
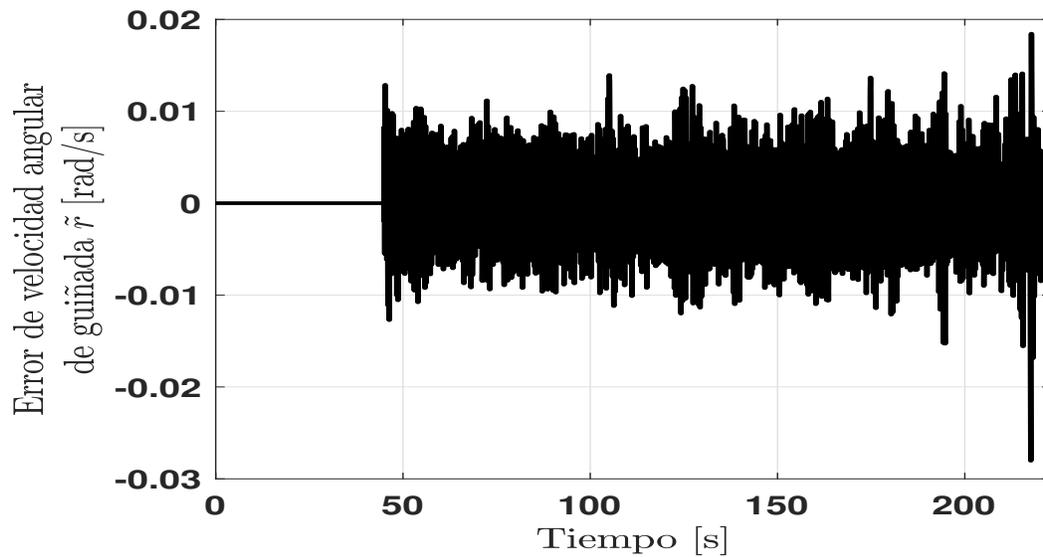
Figura 4-12: Error de orientación, $(P_a(\tilde{R}_\psi))^V$.

Figura 4-13: Aceleración lateral de la aeronave.

Figura 4-14: Error de velocidad rotacional de alabeo, \tilde{p} .Figura 4-15: Error de velocidad rotacional de guiñada, \tilde{r} .

Finalmente, en las Figuras 4-16 y 4-17 se aprecia el comportamiento de los alerones y el timón. Está claro que ninguna de las superficies de control requiere una deflexión mayor a su límite físico, el cual es ± 10 grados en los alerones y ± 15 grados en el timón. Sin embargo, en las deflexiones se puede ver que existen muchas oscilaciones, provenientes, principalmente, por el controlador utilizado en el lazo interno. Estas oscilaciones se pueden reducir utilizando otro controlador que tenga convergencia en tiempo finito, diferente al Super-twisting.

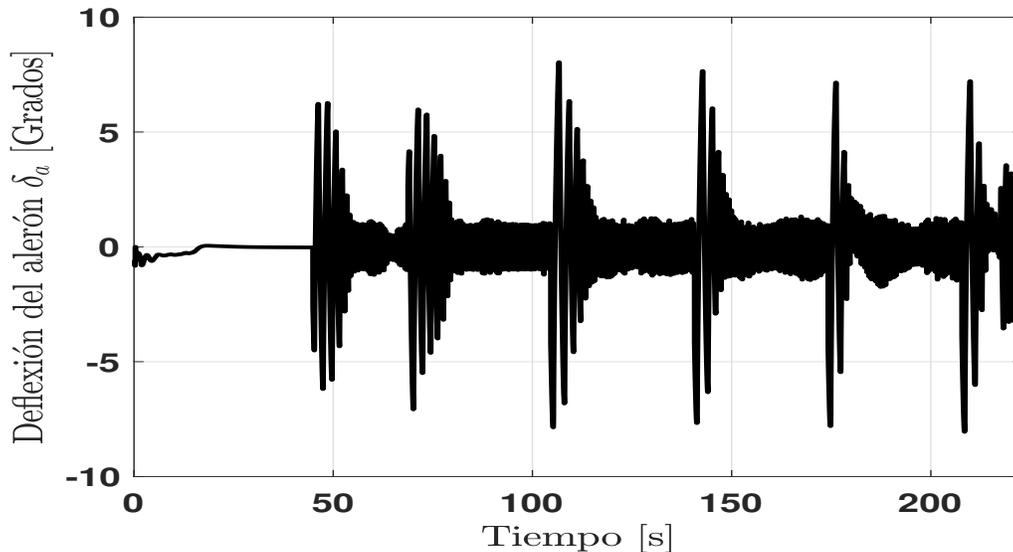


Figura 4-16: Deflexión requerida del alerón, δ_a .

Para comprobar que el ángulo de alabeo requerido por el controlador propuesto no supera el ángulo de alabeo máximo de la aeronave, se utilizó la ecuación de giro a altitud constante [28]

$$\phi_{max} = \frac{2W}{\rho V^2 S C_L} \quad (4.1)$$

El coeficiente de levantamiento, C_L , se obtuvo por el método de corrección por alargamiento [29], donde la parte lineal de la curva de levantamiento de la aeronave se puede ver en la Figura 4-18.

Dado que para cada ángulo de ataque existe un coeficiente de levantamiento, para cada

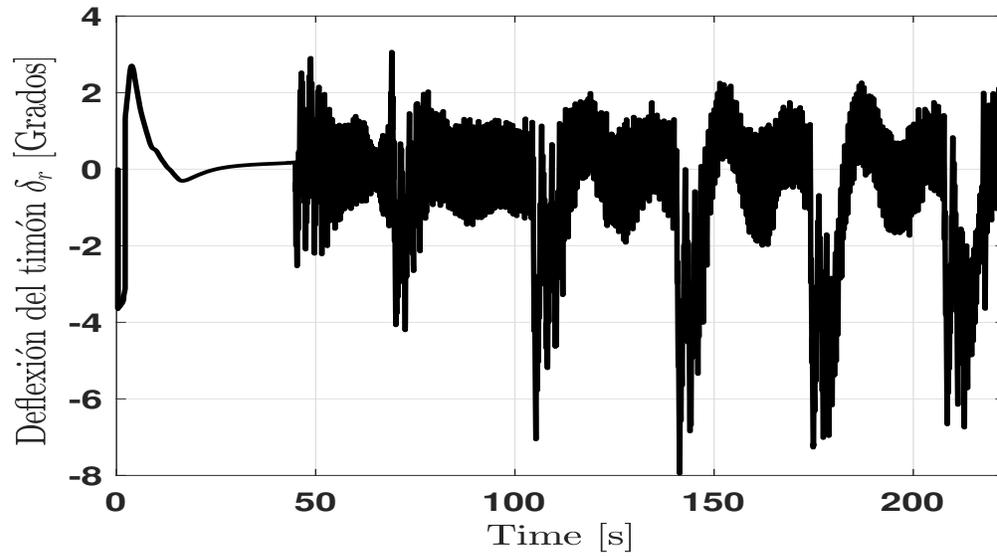
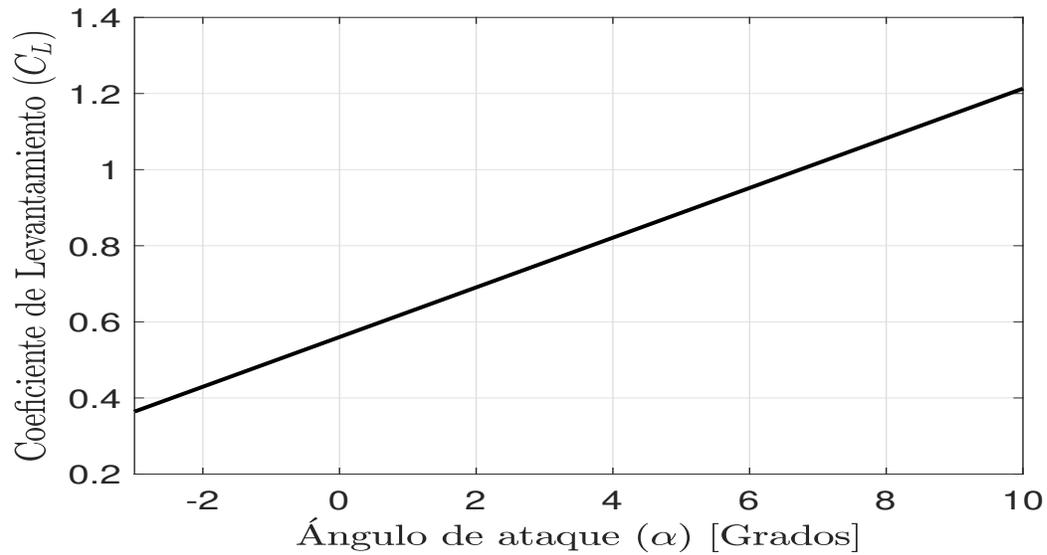
Figura 4-17: Deflexión requerida del timón, δ_r .

Figura 4-18: Zona lineal de la curva de levantamiento de la aeronave Telemaster

ángulo de ataque existe también un ángulo de alabeo máximo, el cual se puede ver en la Figura 4-19.

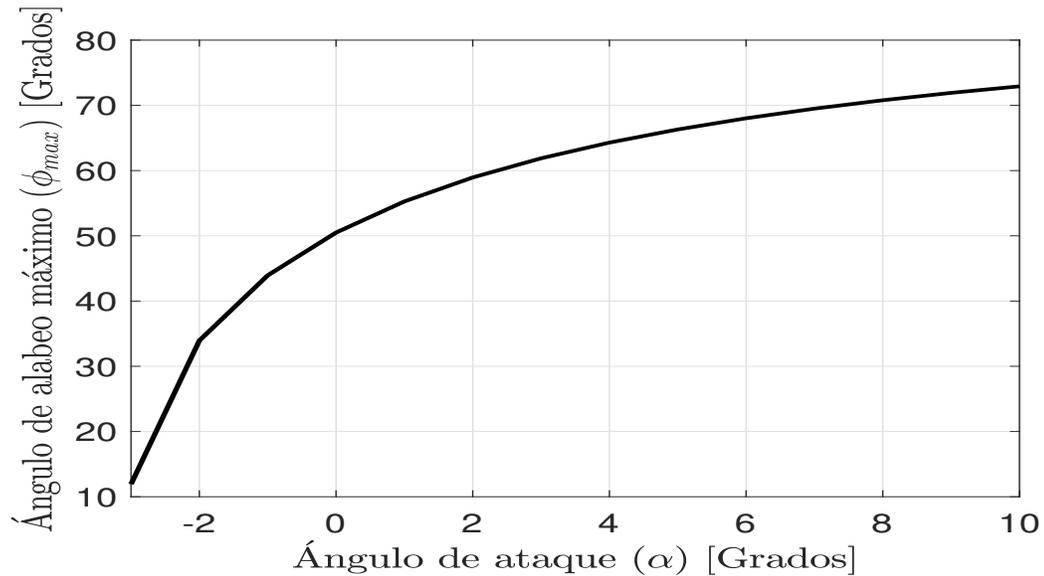


Figura 4-19: Ángulo de alabeo máximo para cada ángulo de ataque de la aeronave Telemaster

Como se puede observar, el ángulo de alabeo máximo, ϕ_{max} , a ángulos de ataque altos puede alcanzar valores de hasta 70 grados. Sin embargo, la aeronave suele volar a ángulos de ataque bajos gracias a su ala con alta incidencia. La aeronave suele volar, con velocidades de 20m/s, a ángulos de ataque de entre -1 grados y 1 grados, donde el ángulo ϕ_{max} va desde 43 grados hasta 55 grados, aproximadamente. Comprobando que el ángulo de alabeo requerido por el controlador, de 0.62rad ó 35.5 grados, está por debajo del ángulo de alabeo máximo posible para el Telemaster.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo, así como posibles mejoras que se pueden aplicar con el fin de mejorar el comportamiento del controlador y la guía de vuelo propuestos.

5.1. Conclusiones

El diseño de controladores y guías de vuelo de aeronave se plantea, principalmente, para controlar la orientación de la aeronave y llevarla a un punto deseado. Para el seguimiento de caminos se utiliza el mismo enfoque, con la única diferencia de que ahora se tiene un punto de referencia cambiante en el tiempo. En este trabajo se propuso un controlador diseñado a partir del error lateral entre la posición de la aeronave y el camino de referencia.

La principal ventaja que presenta el controlador y la guía de vuelo propuestos en este trabajo es que la aeronave es capaz de seguir un camino con desviaciones mínimas de la referencia, al igual que puede converger a la referencia desde una gran distancia, sin comprometer una ventaja a fin de lograr la otra. A comparación de otros enfoques, en los que si la aeronave es capaz de converger de una gran distancia, la precisión y el tiempo de convergencia del error lateral aumentan en gran medida, comprometiendo incluso el

seguimiento del camino en caminos curvos.

Además, la guía de vuelo propuesta en este trabajo toma en cuenta el espacio de configuración del ángulo de guiñada, ψ , evitando así el comportamiento no deseado de desenrollado, haciéndolo de manera matemática y no con el uso de control por lógica difusa.

Finalmente, el controlador y el algoritmo de la guía de vuelo propuestos fueron programados en Matlab-Simulink para correr una simulación cooperativa con el simulador de vuelo X-Plane, para así observar el desempeño del controlador y la guía de vuelo propuestos, el cual fue satisfactorio, pues demostró convergencia en tiempo finito, logrando completar así el objetivo general y los objetivos particulares establecidos al principio de este trabajo.

5.2. Trabajo futuro

Como trabajo a futuro para el controlador de la dinámica lateral-direccional, se plantea:

- Proponer un nuevo controlador del lazo interno con convergencia en tiempo finito, con la finalidad de reducir las oscilaciones en las señales \tilde{p} , \tilde{r} , δ_a y δ_r .
- Probar la ley de control propuesta en aeronaves de diferentes características aerodinámicas, micro vehículos aéreos y aeronaves comerciales (Simulación).
- Complementar el controlador del lazo externo y las ecuaciones cinemáticas para tomar en cuenta la dirección del viento.
- Complementar el algoritmo de guía de vuelo para lograr seguir referencias circulares (Ha sido comprobado que es posible, siguiendo una referencia circular con un error estático de 9m, sólo se requiere un desarrollo más profundo de las ecuaciones para reducir dicho error a cero) y curvas compuestas.
- Generalizar la ley de control propuesta para su utilización en vehículos terrestres y marinos.

- Proponer una mejora al controlador para agregar robustez.
- Generalizar la ley de control y la guía de vuelo con el fin de seguir referencias en el espacio.

Apéndice A

Configuración de software

En esta sección se reporta la conexión entre Matlab Simulink y X-Plane, así como los resultados obtenidos al implementar el algoritmo de guía de vuelo y el control lateral diseñado en el capítulo anterior. En Matlab Simulink se resuelve el algoritmo y el control, mientras que en X-Plane se corre el modelo dinámico de la aeronave.

La comunicación entre Matlab-Simulink y X-Plane se hizo utilizando el User Datagram Protocol (UDP), el cual, a pesar de no ser un protocolo de transmisión de datos robusto y suele tener pérdidas de datos cuando se generan “cuellos de botella” en la red, sigue siendo un protocolo confiable para la transmisión de datos [30].

El conjunto de bloques utilizado, desarrollado por Peter R. Thomas, permite recibir datos de X-Plane en Simulink, así como mandar datos a X-plane desde Simulink. Este conjunto es particularmente útil para hacer simulaciones en Hardware in the loop o en Software in the loop.

Los bloques utilizados fueron diseñados para trabajar, principalmente, con X-Plane versión 10, es sabido que los bloques no funcionan en versiones anteriores pero la mayoría de bloques funcionan en la versión 11. Durante las pruebas que se mostrarán más adelante, se trabajó con X-Plane versión 10.

A.1. Configuración de X-Plane

Para lograr la conexión, es necesario primero entrar a la barra de menús de X-Plane, mostrado en la Figura A.1.

Al entrar en *Ajustes* » *Conexiones de red* » *Datos* se muestra la pantalla de la Fi-



Figura A-1: Barra de menús de X-Plane

gura A-2.

Si se va a hacer software in the loop, la dirección IP para la salida de datos debe

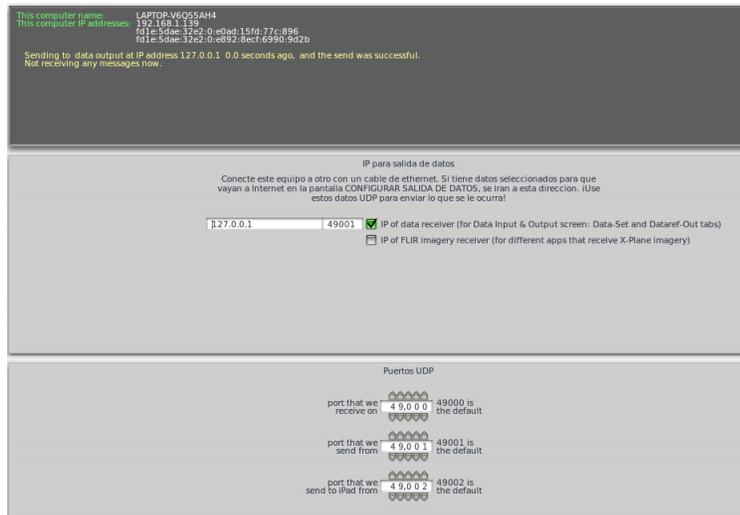


Figura A-2: Pantalla de configuración de IP para salida y entrada de datos

mantenerse en 127.0.0.1. Sin embargo, en caso de hacer hardware in the loop, la dirección

IP debe ser la de la computadora en la cual se va a implementar y resolver el algoritmo en Matlab Simulink. Dicha dirección IP puede ser fácilmente conocida al abrir la ventana de comandos ( +  » *cmd*) y teclear *ipconfig*. La dirección IP a utilizar es la que está etiquetada como *Dirección IPv4*.

Es importante notar que, mientras los puertos UDP por default no se modifiquen, el puerto de salida junto a la IP para salida de datos debe mantenerse en 49001. También hay que notar que el puerto para recibir datos es 49000.

La última configuración importante se realiza en la entrada y salida de datos, a la cual se accede a través de la barra de menús en *Ajustes » Entrada y salida de datos » Configurar*. Esta pantalla muestra todos los datos de los que dispone X-Plane (Velocidades lineales, posición, datos atmosféricos, velocidades angulares, orientación, etc.). Todos los datos tienen cuatro recuadros que se pueden activar. El primer cuadro activa la opción para mandar los datos a través del protocolo UDP, mientras que el segundo recuadro permite almacenar todos los valores en un archivo *.txt*. El tercer recuadro permite visualizar de manera gráfica los datos de vuelo dentro del mismo software, X-Plane. Finalmente, el último cuadro manda los datos en tiempo real a la pantalla principal, mientras se lleva a cabo la simulación.

Nota: Es importante cuidar la activación del último recuadro. Mientras puede ser útil durante las primeras configuraciones del software, al tener muchos datos en la pantalla, el rendimiento de la PC puede verse altamente reducido, impidiendo que se tenga una simulación en tiempo real y a la frecuencia deseada, afectando el resultado final de las simulaciones con el control propuesto y las ganancias sintonizadas.

A.2. Configuración de Matlab Simulink

El conjunto de bloques utilizados cuenta con varios bloques de utilidad. Sin embargo, los bloques principales son los bloques receptores y los bloques transmisores de datos. En la Figura A-4 se muestra el bloque donde se configura la dirección IP de la máquina en la

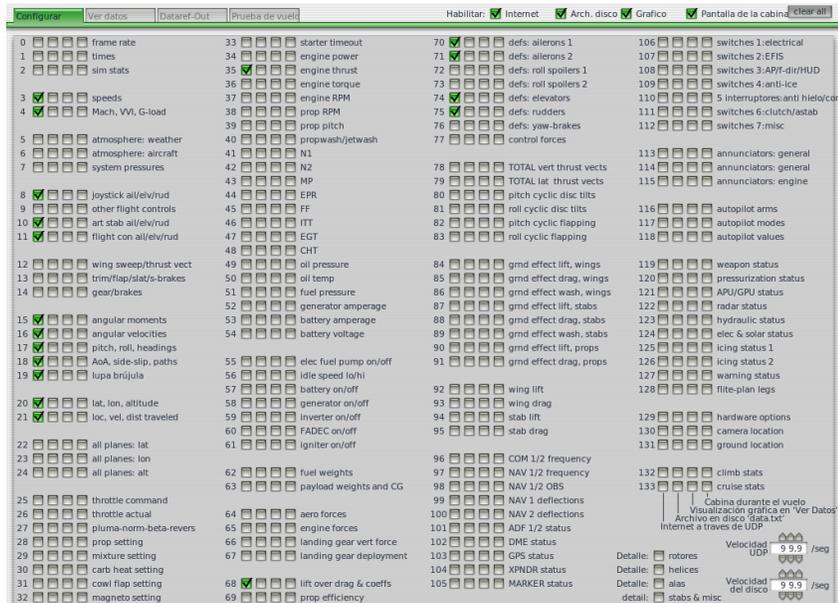


Figura A-3: Pantalla de configuración de salida de datos

que se corre el simulador, así como el puerto en el cual se mandan los datos desde dicho simulador. El demultiplexor permite seleccionar que datos se requieren de una manera muy sencilla, mientras que el bloque llamado "Set pace" hace la sincronización entre Matlab Simulink y X-Plane para lograr una simulación en tiempo real.

En la Figura A-5 se muestra la pantalla de configuración del bloque receptor de datos. En el primer campo, *X-Plane server port*, se coloca la dirección IP de la maquina en la que se encuentra el simulador. Si se esta trabajando con Software in the loop, la maquina donde corre Matlab Simulink y X-Plane es la misma, de ser ese el caso, la dirección IP a utilizar es 127.0.0.1. En los campos *X-Plane server port* y *Host data port*, de haber mantenido los puertos por default en la configuración en X-Plane, se debe colocar el valor 49001. Finalmente, en el campo *Sample time (secs)* se debe colocar cada cuanto tiempo se va a realizar el calculo del control. El tiempo de muestro de este bloque se recomienda que sea el mismo tiempo de muestreo que se coloca en la configuración del solver de Matlab Simulink.

En la Figura A-6 se muestran los dos bloques principales para enviar señales de control a

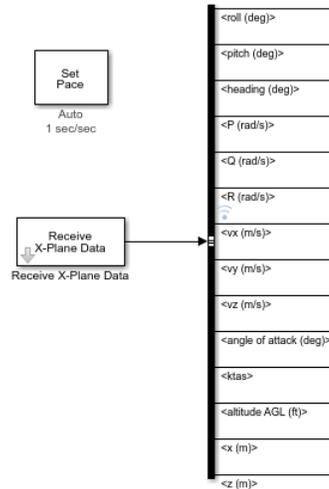


Figura A-4: Bloque de configuración para la recepción de datos provenientes de X-Plane, bloque para sincronizar la simulación en tiempo real y demultiplexor para selección de datos.

X-Plane. El primero es un bloque universal, ya que con la configuración correcta puede enviar señales a las superficies de control principales, secundarias, al freno y a los motores. Mientras que el segundo bloque está enfocado a los motores, pues permite enviar una señal única a varios motores a la vez. Sin embargo, si se trate de un cuadirrotor, este último bloque no es tan útil, pues en un cuadirrotor no se manda la misma señal a los cuatro rotores.

La pantalla de configuración del bloque “universal” se muestra en la Figura A-7. Se debe poner la dirección IP de la maquina en la que se corre el simulador, así como el puerto al que se envían los datos. Este puerto debe coincidir con el configurado en X-Plane, y en caso de haber dejado los puertos por default, el valor debe ser 49000. En el campo *Dataref path* se coloca la dirección a la cual se va a enviar la señal dentro de X-Plane. El campo debe llenarse de la siguiente manera, *'sim/cockpit2/controls/[dirección de la entrada de control]'*.

En la Tabla A.1 se presenta la dirección que debe colocarse para las principales señales

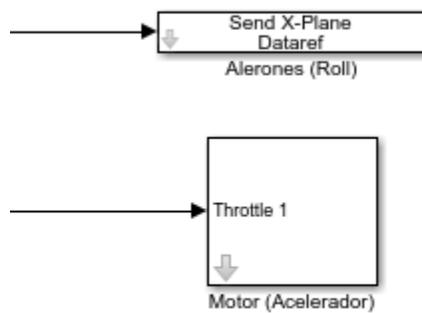


Figura A-6: Bloques de envío de señal de Matlab Simulink a X-Plane.

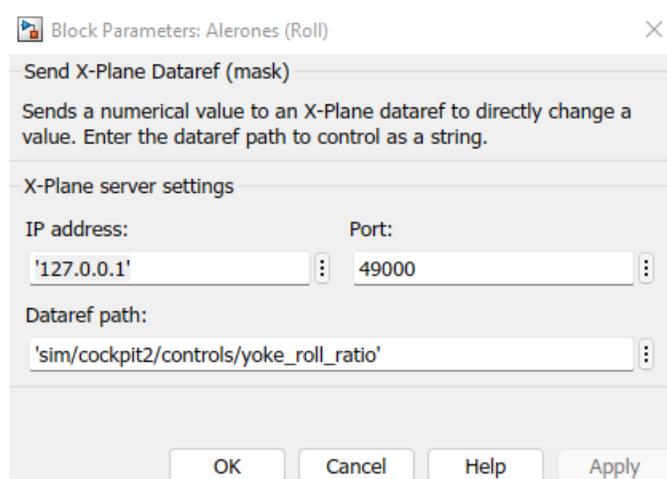


Figura A-7: Configuración del bloque para envío de señales de control.

de control. Cabe aclarar que el valor n representa el motor al cual se va a enviar la señal. Por ejemplo, si se va a enviar una señal al motor 3, la dirección completa se vería como `'sim/cockpit2/controls/throttle_ratio[2]'`.

Alerón	yoke_roll_ratio
Timón	yoke_heading_ratio
Elevadores	yoke_pitch_ratio
Elevadores	parking_brake_ratio
Motor	throttle_ratio[$n - 1$]

Tabla A.1: Dirección para enviar las señales de control deseadas a X-Plane.

Finalmente, la configuración del bloque diseñado para enviar las señales a los motores se encuentra en la Figura A-8. Al igual que el bloque universal, requiere de la dirección IP y del puerto de recepción de datos de la maquina que contiene al simulador. Además, hay un campo donde se mete la cantidad de motores que tiene la aeronave, que puede ser un máximo de 8. La configuración interna la produce el bloque automáticamente, enviando solo las señales a los motores requeridos.

A grandes rasgos, esta es la configuración básica para recibir y mandar datos a X-Plane. Cabe mencionar que las superficies de control toman valores de -1 a 1 , mientras el motor toma valores de 0 a 1 , o de -1 a 1 si se considera un motor con reversa. El freno toma el valor de 0 para no tenerlo activado, y de 1 para activarlo.

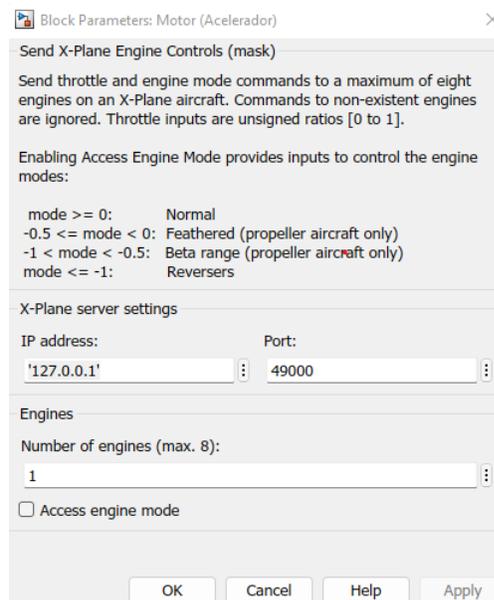


Figura A-8: Configuración del bloque para enviar la señal de los motores.

Bibliografía

- [1] UAV Systems International. <https://uavsystemsinternational.com/blogs/drone-guides/what-is-a-fixed-wing-drone-advantages-and-uses-of-fixed-wing-drones>, 2018.
- [2] COPTRZ. <https://coptrz.com/blog/5-situations-where-fixed-wing-drones-will-do/>, 2019.
- [3] thecoronawire.com. <https://www.thecoronawire.com/awesome-fixed-wing-uav-applications-explained/>, 2021.
- [4] M. Breivik and T.I. Fossen. Principles of guidance-based path following in 2d and 3d. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 627–634, 2005.
- [5] Wei Ren and Randy W Beard. Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(5):706–716, 2004.
- [6] R Samar, Shakil Ahmed, and Faisal Aftab. Lateral control with improved performance for uavs. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(7):37–42, 2007.
- [7] Sanghyuk Park, John Deyst, and Jonathan How. A new nonlinear guidance logic for trajectory tracking. In *AIAA guidance, navigation, and control conference and exhibit*, pages 1–16, 2004.
- [8] Mehdi Golestani and Iman Mohammadzaman. Pid guidance law design using short time stability approach. *Aerospace Science and Technology*, 43:71–76, 2015.

- [9] Rolf Rysdyk. Unmanned aerial vehicle path following for target observation in wind. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(5):1092–1100, 2006.
- [10] Johannes Stephan, Ole Pfeifle, Stefan Notter, Federico Pinchetti, and Walter Fichter. Precise tracking of extended three-dimensional dubins paths for fixed-wing aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 43(12):2399–2405, 2020.
- [11] Ying Luo, Haiyang Chao, Long Di, and YangQuan Chen. Lateral directional fractional order (π) α control of a small fixed-wing unmanned aerial vehicles: controller designs and flight tests. *IET control theory & applications*, 5(18):2156–2167, 2011.
- [12] Takeshi Yamasaki, SN Balakrishnan, and Hiroyuki Takano. Integrated guidance and autopilot design for a chasing uav via high-order sliding modes. *Journal of the Franklin Institute*, 349(2):531–558, 2012.
- [13] Syed Ussama Ali, Raza Samar, M. Zamurad Shah, Aamer I. Bhatti, Khalid Munawar, and Ubaid M. Al-Sggaf. Lateral guidance and control of uavs using second-order sliding modes. *Aerospace Science and Technology*, 49:88–100, 2016.
- [14] Eugene A Morelli and Vladislav Klein. *Aircraft system identification: theory and practice*, volume 2. Sunflyte Enterprises Williamsburg, VA, 2016.
- [15] Michael V. Cook. *Flight Dynamics Principles*. Elsevier, 2007.
- [16] A. Chalanga, S. Kamal, L. M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A. Moreno. Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6):3677–3685, 2016.
- [17] Jaime A. Moreno and Marisol Osorio. Strict lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4):1035–1040, 2012.
- [18] Marius Niculescu. Lateral track control law for aerosonde uav. In *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, pages 1–11, 2001.
- [19] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Texts in applied mathematics. Springer, 1999.

- [20] Marián Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [21] Anders Rantzer. Almost global stability of phase-locked loops. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001*, 1(18):899–900, 2001.
- [22] Anders Rantzer. A dual lyapunov’s stability theorem. *Systems & Control Letters*, pages 161–168, 2001.
- [23] Donald Sullivan. The square roots of 2×2 matrices. *Mathematics Magazine*, 66(5):314–316, 1993.
- [24] Daniel E. Koditschek. The application of total energy as a Lyapunov function for mechanical control systems. *Contemporary Mathematics*, 97:131, 1989.
- [25] I. Rosario-Gabriel and H. Rodríguez Cortés. Aircraft longitudinal control based on the lanchester’s phugoid dynamics model. In *2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 924–929, 2018.
- [26] R. Ortega, S. Aranovskiy, A. A. Pyrkin, A. Astolfi, and A. Bobtsov. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66:2265 – 2272, 2020.
- [27] I. Cortés-Benito, Y. Tlatelpa-Osorio, M. Martínez-Ramírez, J. G. Romero, and H. Rodríguez-Cortés. Quadrotor physical parameters online estimation. *Congreso Nacional de Control Automático 2022*, 2022.
- [28] N. Harris McClamroch. *Steady Aircraft Flight and Performance*. Princeton University Press, 2011.
- [29] John Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 2017.
- [30] Peter Thomas. *X-Plane Blockset*. MATLAB Central File Exchange, Retrieved February 25, 2022.
- [31] Taeyoung Lee. Global exponential attitude tracking controls on $so(3)$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10):2837–2842, 2015.

- [32] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N Harris McClamroch. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on SE(3). *Asian Journal of Control*, 15(2):391–408, 2013.
- [33] E. M. Coates and T. I. Fossen. Geometric reduced-attitude control of fixed-wing uavs. *Applied Sciences*, 11(7), 2021.
- [34] Iman Mohammad Zaman and Hamid Reza Momeni. Pi guidance law design using circle criterio. *Journal of Control*, 4(2):11–19, 2010.
- [35] Pini Gurfil, Mario Jodorkovsky, and Moshe Guelman. Finite time stability approach to proportional navigation systems analysis. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(6):853–861, 1998.
- [36] P Zarchan. Tactical and strategic missile guidance fourth edition. *PROGRESS IN ASTRONAUTICS AND AERONAUTICS*, 199, 2002.
- [37] José J Corona-Sánchez, Óscar Roberto Guzmán Caso, and H Rodríguez-Cortés. A coordinated turn controller for a fixed-wing aircraft. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 233(5):1728–1740, 2019.
- [38] Brian L Stevens, Frank L Lewis, and Eric N Johnson. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. John Wiley & Sons, 2015.
- [39] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [40] Sanghyuk Park. Rendezvous guidance on circular path for fixed-wing uav. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 22(1):129–139, 2021.
- [41] Lowenberg Mark. *Fixed-Wing Lateral and Directional Dynamic Stability*, chapter Flight Mechanics, pages 1–14. Wiley Online Library, 2010.
- [42] Lloyd Reid Bernard Etkin. *Dynamics of flight*, chapter General equations of unsteady motion, pages 93–128. John Wiley & Sons, Inc, 1996.
- [43] Romeo Ortega, Vladislav Gromov, Emmanuel Nuño, Anton Pyrkin, and Jose Guadalupe Romero. Parameter estimation of nonlinearly parameterized regressions:

-
- Application to system identification and adaptive control. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):1206–1212, 2020. 21st IFAC World Congress.
- [44] H. Rodríguez-Cortés and M. Velasco-Villa. A new geometric trajectory tracking controller for the unicycle mobile robot. *Systems Control Letters*, 168, 2022.
- [45] Guilherme Pelizer, Natassya Silva, and Kalinka Castelo Branco. 3d path-following algorithms for unmanned aerial vehicles adjusted with genetic algorithm. pages 63–80, 07 2017.
- [46] P.B. Sujit, Srikanth Saripalli, and Joao Borges Sousa. Unmanned aerial vehicle path following: A survey and analysis of algorithms for fixed-wing unmanned aerial vehicles. *IEEE Control Systems Magazine*, 34(1):42–59, 2014.