



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

La Homología Racional de los Espacios de Lazos Iterados

TESIS

Que presenta

Ángel Martínez Avelar

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de
Matemáticas

Director de Tesis

Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino

Ciudad de México

Enero de 2023

*Dedicado a
Leticia y Ángel, mis padres.*

Agradecimientos

Mi principal agradecimiento es a mis padres. A mi madre Leticia por todo el amor, consejos y enseñanzas que dejaste en mí, tú sentaste las bases de la persona que soy ahora; a mi padre Ángel por estar siempre a mi lado y apoyarme en todo momento, gracias por ser mi ejemplo a seguir. Los amo infinitamente a ambos.

A mi familia en general. A mi abuelita Guille por darme el amor de una madre, cuidarme y estar siempre pendiente de mí. A mi abuelito Olegario por sus consejos y ser un ejemplo de superación y perseverancia. A mi hermano Uriel por alegrar mis días con tus ocurrencias. A mi tía Judith por su cariño y apoyo. A mis primos Juan, Beto, Dulce, Carlos y Héctor por ser como hermanos para mí y por todos los momentos que hemos compartido juntos.

A mis sinodales. Al Dr. Miguel Xicoténcatl por brindarme su apoyo, enseñanzas y consejos a lo largo de esta tesis, sin él este trabajo no habría sido posible. Al Dr. Jesús González y al Dr. Luis Jorge por tomarse el tiempo de revisar este trabajo y mejorarlo con sus comentarios y recomendaciones.

A las instituciones que me han formado como matemático. Quiero agradecer a la Escuela Superior de Física y Matemáticas por ser mi alma máter, gracias por mostrarme esta bella ciencia y por darme grandes amistades. Al Cinvestav por brindarme un postgrado de excelencia y por tanto darme la oportunidad de mejorar como matemático y como persona.

Finalmente quiero agradecer a CONACyT por el apoyo otorgado a lo largo de este posgrado por medio de la beca de maestría número 1036860.

Índice general

Agradecimientos	I
1. La homología de $\Omega\Sigma X$	1
1.1. El teorema de Bott-Samelson	1
1.2. La construcción de James	8
1.3. Aplicación: La sucesión EHP	12
2. El Teorema de Hilton-Milnor	15
2.1. El Teorema de Hilton	16
2.2. Un par de lemas topológicos	18
2.3. Conmutadores Generalizados	19
2.4. Demostración del Teorema de Hilton	20
2.5. La identidad de Jacobi	26
2.6. Una generalización del Teorema de Hilton	28
3. Operaciones en Espacios de Lazos	30
3.1. La transgresión y la suspensión homológica	31
3.2. El operad de n -cubitos \mathcal{C}_n	36
3.3. La operación de Browder λ_n	40
3.4. Demostración de las propiedades de λ_n	43
3.5. La cohomología de $F(\mathbb{R}^n, q)$	46
4. La Homología Racional de $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$	52
4.1. La homología de $\Omega^2\Sigma^2X$	53
4.2. El Paso Inductivo	57
4.3. Ejemplos	59
4.4. Relación con la homología de $F(\mathbb{R}^n, q)$	65
A. El Producto de Whitehead	70
B. Sobre la homología de los espacios cubrientes	74

Resumen

Sean V_* un espacio vectorial graduado y X un espacio arco-conexo. Definimos $s^n V_*$ como V_* pero con todos los grados elevados por n . Supongamos que $V_* = \overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$ y $n \geq 1$, entonces existe un isomorfismo de álgebras

$$S[s^{-n}L[s^n V_*]] \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X; \mathbb{Q}),$$

donde $L[W]$ y $S[W]$ denotan el álgebra de Lie libre generada por el espacio vectorial W y el álgebra simétrica generada por W , respectivamente. El objetivo de esta tesis es demostrar este isomorfismo por inducción. Esto se logra haciendo uso de los teoremas de Bott-Samelson, Hilton y el teorema de comparación de Zeeman junto con la sucesión espectral de Serre para la fibración $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \rightarrow P(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \Omega^n\Sigma^{n+1}X$ en la cual la operación de Browder $\lambda_n : H_p(\Omega^{n+1}) \times H_q(\Omega^{n+1}X) \rightarrow H_{p+q+n}(\Omega^{n+1}X)$ y la suspensión homológica $\sigma_* : H_{k-1}(\Omega X) \rightarrow H_k(K)$ son herramientas imprescindibles.

Abstract

Let V_* be a graded vector space and X an arcwise connected space. Define $s^n V_*$ to be V_* with all degrees raised by n . Next assume that $V_* = \overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$ and $n \geq 1$, then there is an isomorphism of algebras

$$S[s^{-n}L[s^n V_*]] \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X; \mathbb{Q}),$$

where $L[W]$ and $S[W]$ denote the free Lie algebra generated by the vector space W and the symmetric algebra generated by W , respectively. The aim of this thesis is to prove this isomorphism by induction. We can do this by using Bott-Samelson theorem, Hilton theorem and Zeeman comparison theorem together with the Serre spectral sequence for the fibration $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \rightarrow P(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \Omega^n\Sigma^{n+1}X$ in which the Browder operation $\lambda_n : H_p(\Omega^{n+1}) \times H_q(\Omega^{n+1}X) \rightarrow H_{p+q+n}(\Omega^{n+1}X)$ and the homology suspension $\sigma_* : H_{k-1}(\Omega X) \rightarrow H_k(K)$ are essential tools.

Introducción

El propósito de esta tesis es el cálculo de la homología racional del espacio $\Omega^n \Sigma^n X$ para $n \in \mathbb{N}$ el cual se hará por inducción sobre n , a saber

$$H_*(\Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X; \mathbb{Q}) \cong S[s^{-n} L(s^n V_*)],$$

donde $V_* = \overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$, $S[W]$ es el álgebra simétrica generada por el espacio vectorial W , $L[W]$ es el álgebra de Lie libre generada por el espacio vectorial W y s^i desfaza el grado de todos los elementos i lugares. La tesis se distribuye en cuatro capítulos, cada uno dando lugar a herramientas para la base inductiva y el paso inductivo.

En el Capítulo 1 el resultado principal es el Teorema de Bott-Samelson en el cual se hace el cálculo de la homología del espacio $\Omega \Sigma X$, específicamente se tiene que $H_*(\Omega \Sigma X) \cong T[\overline{H}_*(X)]$ donde $T[W]$ es el álgebra tensorial generada por el espacio vectorial W . Lo anterior sentará la base inductiva para la demostración del resultado principal de la tesis. Posteriormente mediante la construcción de James se encontrará un modelo combinatorio para $\Omega \Sigma X$, formalmente se hallará una equivalencia homotópica

$$\Sigma \Omega \Sigma X \simeq \bigvee_{k=0}^{\infty} \Sigma X^{\wedge k}.$$

Es importante notar que el modelo combinatorio anterior nos recupera el Teorema de Bott-Samelson de forma aditiva.

En el Capítulo 2 se estudiará el Teorema de Hilton, el cual nos dice que los grupos de homotopía de un wedge de esferas pueden ser calculados en términos de grupos de homotopía de esferas de dimensión adecuada. Para la demostración de este resultado inicialmente se introducirá la definición de una **base de Hall** y la noción de un producto básico los cuales se van a comportar como un producto de Whitehead; posteriormente definiendo una generalización de los productos básicos, llamados conmutadores generalizados se darán un par de resultados auxiliares y con un argumento sobre

recubrimientos se llega a una equivalencia homotópica débil

$$\Omega X \simeq \prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{q_i+1}$$

donde $X = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1}$ y $\{q_i\}$ es una sucesión de números que tiende a infinito. Como consecuencia de lo anterior y por el Teorema de Bott-Samelson al tomar homología racional se obtiene que el álgebra tensorial $T[W]$ generada por el espacio vectorial graduado $\overline{H}_*(S^{r_1} \vee \dots \vee S^{r_k}; \mathbb{Q})$ se descompone como producto tensorial de álgebras polinomiales

$$T[V] \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}[x_i] \quad \text{con } |x_i| = q_i.$$

En particular el resultado anterior será de vital importancia ya que por medio de éste se podrá calcular la homología racional de $\Omega^n \Sigma^n X$.

En el Capítulo 3 se introduce la noción de transgresión de una fibrición $p : E \rightarrow B$, en particular trabajaremos con la fibrición de trayectorias y lazos, a saber, si tenemos una fibrición $F \rightarrow E \rightarrow B$ con B arco-conexo, entonces existe una sucesión espectral de primer cuadrante (Sucesión Espectral de Serre) $\{E_{*,*}^r, d^r\}$ de tal forma que

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathcal{H}_q(F); G)$$

y que converge a $H_*(E; G)$, donde G es un grupo abeliano. Para nuestra fibrición $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ se obtendrá que la transgresión coincidirá con el diferencial $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ y además se definirá un mapeo $\sigma_* : H_{k-1}(\Omega X) \rightarrow H_k(X)$ el cual resultará ser la inversa de la transgresión. Posteriormente se introducirá el espacio de n -cubitos y se le dota de una estructura de operad para tener mapeos de estructura y por medio de éstos definir una operación homológica de dos variables conocida como **la operación de Browder** la cual tendrá propiedades importantes en el cálculo de la homología racional del espacio $\Omega^n \Sigma^n X$, tales resultados serán probados en la última sección del capítulo 3.

Finalmente en el Capítulo 4 se procede a hacer el cálculo de la homología racional del espacio $\Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X$ por medio de inducción sobre n . La idea para el caso base es utilizar la fibrición de trayectorias y lazos $\Omega^2 \Sigma^2 X \rightarrow P(\Omega \Sigma^2 X) \rightarrow \Omega \Sigma^2 X$ para la cual existe una sucesión espectral de Serre cuyo término $E_{p,q}^2$ está dado por $H_p(\Omega \Sigma^2 X; \mathbb{Q}) \otimes H_q(\Omega^2 \Sigma^2 X; \mathbb{Q})$ y que converge a la homología del espacio total, el cual por ser contraíble, sería la homología

de un punto. Como siguiente paso es definir una sucesión espectral auxiliar (algebraica) de tal forma que

$$'E_{p,q}^2 = T[sV_*] \otimes S[s^{-1}L[sV_*]]$$

y definir ciertos diferenciales los cuales es importante notar que por el Teorema de Bott-Samelson y el corolario dado por Teorema de Hilton se tendría que $H_*(\Omega\Sigma^2 X) \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}[x_i]$ como \mathbb{Q} -módulos por lo que podremos extender el diferencial por medio de la regla de Leibnitz. Es importante mencionar que para que todo esto funcione correctamente se deben probar resultados técnicos, además de utilizar la operación de Browder junto con sus propiedades, en particular una en la que involucra el mapeo σ_* , esto con la finalidad de ver que la sucesión espectral auxiliar que construimos converge a la homología de un punto y así utilizar un teorema de comparación de sucesiones espectrales para concluir que hay un isomorfismo en las fibras de ambas sucesiones y obtener el resultado.

Para el paso inductivo la idea de la demostración es la misma, sólo que ahora se usará la fibración $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \rightarrow P(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \Omega\Sigma^{n+1}X$ y la sucesión espectral auxiliar que usaremos estará dada por

$$E_{*,*}^2 = S[s^{-(n-1)}L[s^{n-1}sV_*]] \otimes S[s^{(n-1)}L[s^nV_*]].$$

La tesis concluye dando algunas aplicaciones del cálculo de dicha homología sobre el espacio de configuraciones $F(\mathbb{R}^n, k)$.

Capítulo 1

La homología de $\Omega\Sigma X$

En este capítulo probamos el teorema de Bott-Samelson sobre la homología del espacio de lazos de una suspensión. A saber si R es un anillo conmutativo y $H_*(X; R)$ es libre de torsión, entonces existe un isomorfismo de álgebras de Hopf

$$H_*(\Omega\Sigma X; R) \cong T[\overline{H}_*(X)]$$

donde $T[V]$ denota el álgebra tensorial generada por el R -módulo V . Motivados por este resultado, introducimos la construcción de James $J(X)$ de un espacio basado X y probamos el resultado clásico de I. James sobre la existencia de una equivalencia homotópica $J(X) \rightarrow \Omega\Sigma X$. De este modo, $J(X)$ puede interpretarse como un modelo combinatorio para el espacio de lazos $\Omega\Sigma X$. Más aún, al suspender el espacio $J(X)$ se obtiene la descomposición de James

$$\Sigma J(X) \simeq \bigvee_{n \geq 0} \Sigma X^{\wedge n}$$

de donde se recupera aditivamente el teorema de Bott-Samelson. Finalmente, como aplicación de la descomposición de James damos un bosquejo de la construcción de la sucesión EHP, la cual es una herramienta importante en el cálculo de los grupos de homotopía de las esferas. Las referencias principales para este capítulo son [1], [2], [8], [11], [16], [17], [18], [24].

1.1. El teorema de Bott-Samelson

El objetivo de esta sección es describir la homología del espacio de lazos basados de una suspensión $H_*(\Omega\Sigma X; R)$ en términos de $H_*(X; R)$, en el caso que X es un espacio arco-conexo y cuya homología es libre de torsión. A saber,

$H_*(\Omega\Sigma X)$ es el álgebra tensorial $T[\overline{H}_*(X; R)]$ generada por la homología reducida de X . La demostración que presentamos fue tomada de [10], en donde la estrategia consiste en analizar la fibración de trayectorias y lazos

$$\Omega\Sigma X \rightarrow P(\Sigma X) \rightarrow \Sigma X$$

y observar que ésta se puede descomponer como unión de dos fibraciones triviales. Este análisis reduce la demostración a un argumento puramente algebraico.

Definición 1.1 *Sea R un anillo conmutativo y V un R -módulo graduado. El álgebra tensorial*

$$T[V] := R \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots$$

es la R -álgebra asociativa libre generada por el módulo V .

El álgebra tensorial está caracterizada por la siguiente propiedad universal:

Proposición 1.1 *Dada un álgebra asociativa A y una transformación lineal $f : V \rightarrow A$ existe una única extensión de f a un homomorfismo de álgebras $\bar{f} : T[V] \rightarrow A$*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & T[V] \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

La fibración de trayectorias y lazos de un espacio con punto base $(Y, *)$ es una fibración de la forma

$$\Omega Y \rightarrow PY \xrightarrow{\pi} Y$$

donde PY es el espacio de trayectorias basadas equipado con la topología compacto-abierta, es decir, $PY = \{\gamma : I \rightarrow Y \mid \gamma \text{ es continua y } \gamma(0) = *\}$ y $\pi : PY \rightarrow Y$ está dada por $\pi(\delta) = \delta(1)$. Notemos que la fibra sobre el punto base $\pi^{-1}(*) = \Omega Y$ es el espacio de lazos basados de Y .

Definimos a $\mu : \Omega Y \times PY \rightarrow PY$ como el producto de trayectorias dado por la fórmula:

$$\mu(\gamma, \delta) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \end{cases}$$

de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega Y \times PY & \xrightarrow{\mu} & PY \\ & \searrow \pi \circ pr_2 & \swarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

Observación 1.1 *Notemos que la restricción $\mu|_{\Omega Y \times \Omega Y} : \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ es el producto de lazos usual en ΩY . Pasando a homología*

$$H_*(\Omega Y) \otimes H_*(\Omega Y) \rightarrow H_*(\Omega Y \times \Omega Y) \xrightarrow{\mu|_*} H_*(\Omega Y)$$

obtenemos un producto en $H_*(\Omega Y)$ conocido como el **producto de Pontryagin**.

Finalmente consideremos el pull-back

$$\begin{array}{ccc} PY \times_{\pi} PY & \xrightarrow{pr_1} & PY \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ PY & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

donde $PY \times_{\pi} PY = \{(\delta_1, \delta_2) \in PY \times PY \mid \pi(\delta_1) = \pi(\delta_2)\}$ y sobre este espacio definimos el producto de trayectorias

$$\nu : PY \times_{\pi} PY \rightarrow \Omega(Y)$$

por medio de la fórmula

$$\nu(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} \delta_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta_2(2t - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

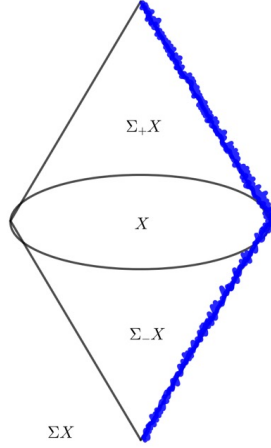
es decir, $\nu(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \cdot \delta_2^{-1}$.

Nos especializamos ahora en el caso en que Y es una suspensión. Sea $(X, *)$ un espacio topológico con punto base y ΣX la correspondiente suspensión reducida. Definimos los conos positivo y negativo dentro de ΣX como sigue (ver figura siguiente)

$$\Sigma_+ X = \{[x, t] \in \Sigma X \mid \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$$

$$\Sigma_- X = \{[x, t] \in \Sigma X \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$$

e identificamos a X con $\Sigma_+ \cap \Sigma_-$.



Restringimos la fibrición $\pi : P\Sigma X \rightarrow \Sigma X$ a los conos $\Sigma_{\pm}X$ para obtener fibriciones $\pi_{\pm} : E_{\pm} \rightarrow \Sigma_{\pm}X$, donde $E_{\pm} = \pi^{-1}(\Sigma_{\pm}X)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega\Sigma X & \xlongequal{\quad} & \Omega\Sigma X & \xlongequal{\quad} & \Omega\Sigma X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_+ & \longrightarrow & P\Sigma X & \longleftarrow & E_- \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 \Sigma_+ X & \longrightarrow & \Sigma X & \longleftarrow & \Sigma_- X
 \end{array}$$

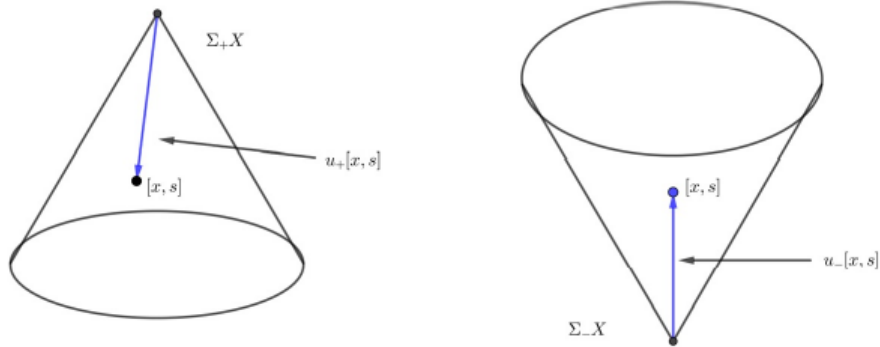
Afirmamos que estas nuevas fibriciones son homotópicamente triviales. Para ver esto, definimos mapeos f_{\pm}, g_{\pm} tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega\Sigma X \times \Sigma_{\pm} X & \xrightarrow{f_{\pm}} & E_{\pm} \\
 & \xleftarrow{g_{\pm}} & \downarrow \pi \\
 & \searrow pr_2 & \Sigma_{\pm} X
 \end{array}$$

Sean $u_{\pm} : \Sigma_{\pm} X \rightarrow E_{\pm}$ las secciones canónicas dadas por:

$$u_+[x, s](t) = [x, 1 - (1 - s)t]$$

$$u_-[x, s](t) = [x, st]$$



Definimos

$$f_{\pm} : \Omega\Sigma X \times \Sigma_{\pm}X \rightarrow E_{\pm}$$

$$f_{\pm}(\gamma, [x, s]) = \mu(\gamma, u_{\pm}([x, s]))$$

$$g_{\pm} : E_{\pm} \rightarrow \Omega\Sigma X \times \Sigma_{\pm}X$$

$$g_{\pm}(\delta) = (\nu(\delta, u_{\pm}(\pi(\delta))), \pi(\delta))$$

Lema 1.1 *Las funciones f_{\pm} y g_{\pm} son equivalencias homotópicas fibradas inversas una de la otra.*

Demostración

g_+f_+ y f_+g_+ son homotopías fibradas a los respectivos mapeos identidad pues $u_+[x, s]^{-1} \cdot u_+[x, s]$ y $u_+[x, s] \cdot u_+[x, s]^{-1}$ son homotópicos a los caminos constantes. ■

Finalmente sea $\beta : X \rightarrow \Omega\Sigma X$ el mapeo adjunto de la identidad $id : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ dado por $\beta(x)(t) = [x, t]$

Proposición 1.2 *Sea X un espacio con punto base arco-conexo. Si $H_*(X) = H_*(X; R)$ es libre de torsión, entonces la siguiente composición es un isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \overline{H}_*(X) & \xrightarrow{1 \otimes \beta_*} & H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \overline{H}_*(\Omega\Sigma X) \\
 & & \downarrow \phi \\
 & & \overline{H}_*(\Omega\Sigma X)
 \end{array}$$

donde ϕ es el producto de Pontryagin.

Demostración

Consideremos el siguiente diagrama, donde el primer morfismo horizontal y los morfismos de la columna derecha son isomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \bar{H}_*(X) & \xrightarrow{id \otimes \theta^{-1}} & H_*(\Omega\Sigma X) \otimes H_*(\Sigma_-X, X) \\
 \downarrow id \otimes (u_-)_* & & \downarrow \theta \\
 H_*(\Omega\Sigma X) \otimes H_*(E_+X) & \xrightarrow{(\mu)_* \theta} & \bar{H}_*(E_+X) \\
 \downarrow id \otimes (g_+)_* & & \downarrow (g_+)_* \\
 H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \bar{H}_*(\Omega\Sigma X \times \Sigma_+X) & & \bar{H}_*(\Omega\Sigma X \times \Sigma_+X) \\
 \downarrow id \otimes (pr_1)_* & & \downarrow (pr_1)_* \\
 H_*(\Omega\Sigma X) \otimes \bar{H}_*(\Omega\Sigma X) & \xrightarrow{\phi} & \bar{H}_*(\Omega\Sigma X)
 \end{array}$$

$\downarrow (f_-)_*$
 $H_*(\Omega\Sigma X \times \Sigma_-X, X)$
 \downarrow
 $H_*(E_-X, Y)$
 \downarrow
 excisión
 $H_*(P\Sigma X, E_+X)$
 \downarrow
 ∂

$id \otimes \beta_*$

donde Y es el conjunto de caminos que empiezan en el punto base de ΣX y terminan en X . Como $\beta : X \rightarrow \Omega\Sigma X$ coincide con la composición

$$X \xrightarrow{u_-} E_+ \xrightarrow{g_+} \Omega\Sigma X \times \Sigma_-X \xrightarrow{pr_1} \Omega\Sigma X$$

entonces el triángulo de la izquierda es conmutativo. El rectángulo superior es conmutativo por la relación que hay entre u_- y f_- y la naturalidad de los morfismos frontera. Finalmente como $\phi(id \otimes \beta_*)$ es composición de isomorfismos, dicho morfismo es un isomorfismo. ■

A primera vista, la proposición anterior sólo nos implica un isomorfismo como módulos graduados, pero éste es, de hecho, un isomorfismo de álgebras de Hopf, la anterior afirmación se sigue de la siguiente proposición:

Proposición 1.3 Sean C una R -coálgebra graduada conexa, A una R -álgebra de Hopf graduada conexa y sea $i : C \rightarrow A$ un morfismo de coálgebras tal que la siguiente composición es un isomorfismo

$$A \otimes I(C) \xrightarrow{id \otimes I(i)} A \otimes I(A) \xrightarrow{\phi(id)} I(A)$$

Entonces el único morfismo de álgebras de Hopf $f : T[I(C)] \rightarrow A$ inducido por $i : C \rightarrow A$, es un isomorfismo.

Aquí $I(A)$ es el ideal de aumentación.

Demostración

Tenemos que $A = R \oplus I(A)$ como módulos. Sumando R al diagrama anterior obtenemos:

$$R \oplus A \otimes I(C) \cong R \oplus I(A) \cong A.$$

Al tensorizar con $I(C)$ tenemos:

$$I(C) \oplus A \otimes I(C)^{\otimes 2} \cong A \otimes I(C) \cong I(A).$$

Iterando obtenemos que:

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} I(C)^{\otimes i} \oplus A \otimes I(C)^{\otimes n} \cong I(A),$$

donde la restricción a $\bigoplus_{i=1}^{n-1} I(C)^{\otimes i} \rightarrow I(A)$ es igual a la restricción de $f :$

$$T[I(C)] \rightarrow I(A) \text{ a } \bigoplus_{i=1}^{n-1} I(C)^{\otimes i}$$

Por la hipótesis de conectividad, entonces $I(C)^{\otimes n}$ es cero en grados menores a n , de esta manera dichas restricciones son isomorfismos para toda n y por tanto f es un isomorfismo. ■

Finalmente obtenemos el teorema principal de esta sección:

Teorema 1.1 (*Bott-Samelson*)

Sea X un espacio arco-conexo tal que $H_*(X) = H_*(X; R)$ es libre de torsión. Entonces el morfismo de coálgebras $\beta_* : \overline{H}_*(X) \rightarrow H_*(\Omega\Sigma X)$ se extiende de manera natural a un morfismo de álgebras de Hopf

$$T[\overline{H}_*(X)] \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega\Sigma X)$$

el cual es un isomorfismo.

Demostración

Aplicamos la proposición anterior con $C = H_*(X)$, $I(C) = \overline{H}_*(X)$, $A = H_*(\Omega\Sigma X)$, $I(A) = \overline{H}_*(\Omega\Sigma X)$ y $\phi(A)$ dado por el producto de Pontryagin en $H_*(\Omega\Sigma X)$. ■

1.2. La construcción de James

En esta sección introducimos la construcción de James $J(X)$ de un espacio basado X , dada por el monoide topológico libre generado por X y probamos que $J(X)$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio $\Omega\Sigma X$. Así, $J(X)$ puede verse como un modelo combinatorio del espacio de lazos $\Omega\Sigma X$.

Definición 1.2 Dado $(X, *)$ un espacio topológico basado, sea $J_n(X) = X^n / \sim$, donde la relación de equivalencia \sim identifica los puntos de la forma:

$$(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, *, x_{i+1}, \dots, x_n) \sim (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, *, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

Definimos la **construcción de James** de X , denotada por $J(X)$, como el espacio

$$J(X) = \bigcup_{n \geq 0} J_n(X).$$

Notemos que hay una inclusión canónica $X = J_1(X) \hookrightarrow J(X)$ y que $J(X)$ es un monoide topológico tal que todo mapeo de X en un monoide topológico M se extiende de manera única a un morfismo. Esto es, $X \hookrightarrow J(X)$ es universal con respecto a mapeos de X en monoides topológicos

$$\begin{array}{ccc} & J(X) & \\ & \uparrow i & \searrow \lambda \\ X & \longrightarrow & M \end{array}$$

Sea $X^{\wedge n}$ el producto smash de n -copias de X consigo mismo. De la definición se sigue de inmediato que $J_n(X)/J_{n-1}(X) \cong X^{\wedge n}$

Definición 1.3 Sea X un CW-complejo con punto base $*$, si $n \geq 2$ se define el **Fat Wedge** de X en dimensión n por

$$FW_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_j = * \text{ para algún } j \in \{1, \dots, n\}\}$$

y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} FW_n(X) & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{\wedge n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ J_{n-1}(X) & \longrightarrow & J_n(X) & \longrightarrow & X^{\wedge n} \end{array}$$

Teorema 1.2 (Descomposición de James)

Si X tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo, entonces

$$\Sigma(J(X)) \simeq \bigvee_{n \geq 0} \Sigma X^{\wedge n}$$

Este resultado es consecuencia del siguiente lema bien conocido, el cual incluimos por completez.

Lema 1.2 Si X e Y son CW-complejos conexos, entonces la cofibración

$$\Sigma(X \vee Y) \rightarrow \Sigma(X \times Y) \rightarrow \Sigma(X \wedge Y)$$

se escinde homotópicamente y por lo tanto

$$\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$$

Demostración

Ver [20], Proposición 7.7.6. ■

Demostración (del Teorema 1.2)

Por el lema anterior e inducción sobre n , se sigue que la cofibración

$$FW_n \rightarrow X^n \rightarrow X^{\wedge n}$$

del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} FW_n(X) & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & X^{\wedge n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ J_{n-1}(X) & \longrightarrow & J_n(X) & \longrightarrow & X^{\wedge n} \end{array}$$

se escinde homotópicamente después de suspender una vez. Por lo tanto la cofibración del renglón inferior también se escinde homotópicamente después de una suspensión y se tiene

$$\Sigma J_n(X) \simeq \Sigma J_{n-1}(X) \vee \Sigma X^{\wedge n} \simeq \Sigma X \vee \dots \vee \Sigma X^{\wedge(n-1)} \vee \Sigma X^{\wedge n}.$$

La afirmación del Teorema se sigue ahora al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

■

Observación 1.2 *Notemos que como consecuencia del argumento anterior, se sigue que la sucesión exacta larga en homología del par $(J_n(X), J_{n-1}(X))$ se descompone en sucesiones exactas cortas*

$$0 \rightarrow H_q(J_{n-1}(X)) \rightarrow H_q(J_n(X)) \rightarrow H_q(X^{\wedge n}) \rightarrow 0,$$

que se escinden para $q > 0$. En particular la inclusión natural $J_{n-1}(X) \hookrightarrow J_n(X)$ induce un monomorfismo en homología $H_*(J_{n-1}(X)) \rightarrow H_*(J_n(X))$ y se tiene que

$$H_q(J_n(X)) \cong H_q(J_{n-1}(X)) \oplus H_q(X^{\wedge n}) \cong H_q(X) \oplus \dots \oplus H_q(X^{\wedge(n-1)}) \oplus H_q(X^{\wedge n})$$

para $q > 0$.

Teorema 1.3 *Si X es un CW-complejo conexo y $H_*(X) = H_*(X; R)$ es libre de torsión, entonces*

$$H_*(J(X)) \cong T[\overline{H}_*(X)].$$

Demostración

Como $H_*(X)$ es libre de torsión, se tiene

$$\overline{H}_*(X^{\wedge n}) \cong \overline{H}_*(X)^{\otimes n}$$

para toda $n > 0$. Por lo tanto, por la observación anterior

$$\overline{H}_*(J_n(X)) \cong \overline{H}_*(X) \oplus \overline{H}_*(X)^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus \overline{H}_*(X)^{\otimes n}.$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene

$$\overline{H}_*(J(X)) \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} \overline{H}_*(X)^{\otimes m}.$$

Luego

$$H_*(J(X)) \cong T[\overline{H}_*(X)]. \blacksquare$$

Finalmente probamos que existe una equivalencia homotópica $J(X) \xrightarrow{\cong} \Omega \Sigma X$. Un detalle importante es que el producto de trayectorias en ΩX y PX no es estrictamente asociativo, sino únicamente **asociativo salvo homotopía**. Por este motivo es conveniente introducir espacios relacionados, con productos estrictamente asociativos.

Definición 1.4 El espacio de **lazos de Moore** de un espacio basado $(X, *)$, denotado por $\Omega'X$, se define por

$$\Omega'X = \{(s, w) \in [0, +\infty) \times X^{[0, +\infty)} \mid w(0) = * \text{ y } w(t) = * \quad \forall t \geq s\}$$

y el espacio de **trayectorias de Moore** de X , denotado por $P'X$, se define por

$$P'X = \{(s, w) \in [0, +\infty) \times X^{[0, +\infty)} \mid w(0) = * \text{ y } w(t) = w(s) \quad \forall t \geq s\}$$

Pensamos en los elementos de $\Omega'X$ y $P'X$ como trayectorias parametrizadas por $[0, s]$. Tales trayectorias poseen un producto estrictamente asociativo bajo el cual el producto de trayectorias de longitudes s y s' tiene longitud $s + s'$. La inclusión natural $\Omega X \hookrightarrow \Omega'X$ y el mapeo $\Omega'X \rightarrow \Omega X$ que reparametriza las trayectorias para corran de 0 a 1, son mapeos de H -espacios y son equivalencias homotópicas inversas una de la otra. Los espacios PX y $P'X$ también son homotópicamente equivalentes al ser ambos contraíbles.

Por la propiedad universal de $J(X)$, la composición

$$X \rightarrow \Omega\Sigma X \xrightarrow{\cong} \Omega'\Sigma X$$

se extiende a un mapeo $\lambda : J(X) \rightarrow \Omega'\Sigma X$.

Teorema 1.4 (Aproximación de James)

Si X es del tipo de homotopía de un CW-complejo, entonces la composición

$$\lambda : J(X) \rightarrow \Omega\Sigma X \xrightarrow{\cong} \Omega'\Sigma X$$

es una equivalencia homotópica.

Antes de proceder a la demostración, enunciamos un par de resultados que serán de utilidad.

Lema 1.3 Un mapeo $f : X \rightarrow Y$ induce isomorfismos en homología con coeficientes en \mathbb{Z} si y sólo si induce isomorfismos en homología con coeficientes en \mathbb{Q} y \mathbb{Z}_p para todo primo p .

Demostración

Ver [8], Corolario 3A.7. ■

Teorema 1.5 (de Whitehead para H -espacios)

Sean X, Y H -espacios arco-conexos y $f : X \rightarrow Y$ un **mapeo de H -espacios** que induce un isomorfismo en $H_n(-)$ para toda n . Entonces f es una equivalencia homotópica débil.

Demostración

Ver [24], Capítulo VII, Lema 2.9. ■

Demostración (del Teorema 1.4)

Por el Teorema 1.3 y el Teorema de Bott-Samelson, ambos tienen la misma homología, es decir, $T[\overline{H}_*(X)]$, cuando los coeficientes se toman en un campo. Más aún, el homomorfismo inducido en homología

$$\lambda_* : H_*(J(X)) \rightarrow H_*(\Omega'\Sigma X)$$

es un morfismo de álgebras cuya restricción a $\overline{H}_*(X)$ es la identidad. Por lo tanto dicho mapeo induce un isomorfismo con coeficientes en cualquier campo y por el Lema 1.3 también induce un isomorfismo con coeficientes en \mathbb{Z} . Luego por el Teorema de Whitehead para H -espacios, el mapeo $\lambda : J(X) \rightarrow \Omega'\Sigma X$ es una equivalencia homotópica débil. Finalmente, como $J(X)$ y $\Omega'\Sigma X$ tienen el tipo de homotopía de CW-complejos, entonces λ es una equivalencia homotópica. ■

1.3. Aplicación: La sucesión EHP

La sucesión EHP es una herramienta fundamental para el estudio de los grupos de homotopía inestables de las esferas. Aunque existen versiones para cada primo p , al concentrarnos en el primo 2 ésta es la sucesión exacta larga en homotopía de una fibración de la forma

$$S^n \xrightarrow{E} \Omega S^{n+1} \xrightarrow{H} \Omega S^{2n+1}$$

para $n > 0$, donde E representa la suspensión (Einhangung) y H el invariante de Hopf y la sucesión en cuesti3n está dada por

$$\dots \rightarrow \pi_q(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{q+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{q-1}(S^n) \rightarrow \dots$$

En esta secci3n indicamos c3mo obtener la sucesi3n EHP usando la construcci3n de James, para lo cual nos basamos en [8], secci3n 4.J.

Usando la identificaci3n natural $\pi_q(\Omega\Sigma X) = \pi_{q+1}(\Sigma X)$, la inclusi3n $X \hookrightarrow \Omega\Sigma X$ induce el morfismo suspensi3n $\pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$. Como esta inclusi3n se factoriza a través de $J(X)$, podemos identificar los grupos de homotopía relativos $\pi_q(\Omega\Sigma X, X)$ con $\pi_q(J(X), X)$. Si X es n -conexo, entonces el

par $(J(X), X)$ es $(2n - 1)$ -conexo, ya que podemos reemplazar a X por un complejo cuyo n -esqueleto es un punto y en este caso, el $(2n + 1)$ -esqueleto de $J(X)$ está contenido en X . Así tenemos:

Proposición 1.4 *Si X es un CW-complejo n -conexo, entonces el morfismo suspensión*

$$\pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$$

es un isomorfismo si $q \leq 2n$ y un epimorfismo si $q = 2n + 1$.

En el caso de la esfera $S^n = e^0 \cup e^n$, podemos describir lo que sucede en la primera dimensión en que la suspensión no es un isomorfismo, a saber $\pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \pi_{2n}(S^{n+1})$ el cual es un epimorfismo por la proposición anterior. La estructura CW de $J(S^n)$ consiste de una celda en cada dimensión múltiplo de n , luego de la exactitud de

$$\pi_{2n}(J(S^n), S^n) \xrightarrow{\delta} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{2n}(S^{n+1})$$

obtenemos que la suspensión $\pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{2n}(S^{n+1})$ está generada por el mapeo de pegado de la $2n$ -celda de $J(S^n)$. Podemos ver en [8] que este mapeo de pegado coincide con un producto de Whitehead $[\iota, \iota]$. Cuando n es par, podemos comprobar que el homomorfismo del invariante de Hopf $\pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ tiene valor ± 2 en $[\iota, \iota]$. Si no hubiera un mapeo con invariante de Hopf igual a ± 1 , se seguiría que $[\iota, \iota]$ aporta a \mathbb{Z} como sumando en $\pi_{2n-1}(S^n)$. Más aún, siempre es esta la situación para n par excepto cuando $n = 2, 4, 8$.

Cuando $n = 2$, tenemos $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ generado por el mapeo de Hopf $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ el cual tiene invariante de Hopf igual a 1, por lo tanto $2\eta = [\iota, \iota]$ y así generando el kernel de la suspensión, por lo tanto:

Proposición 1.5 *$\pi_{n+1}(S^n)$ es \mathbb{Z}_2 para $n \geq 3$ y es generada por la suspensión o la suspensión iterada del mapeo de Hopf.*

La situación para $n = 4$ y $n = 8$ es más sutil. Consultando una tabla de los grupos de homotopía de esferas podemos notar que la suspensión $\pi_7(S^4) \rightarrow \pi_8(S^5)$ es un mapeo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{24}$. Por las observaciones anteriores sabemos que este mapeo es suprayectivo con su kernel generado por el elemento $[\iota, \iota]$. Algebraicamente, lo que debe estar pasando es que la coordenada de $[\iota, \iota]$ en el sumando \mathbb{Z} es dos veces un generador, mientras que en la coordenada en el sumando \mathbb{Z}_{12} debe ser un generador. Por lo que un generador del sumando \mathbb{Z} , el cual tomamos como el mapeo de Hopf $S^7 \rightarrow S^4$,

se suspende a un generador de \mathbb{Z}_{24} . Para $n = 8$ la situación es completamente similar, con la suspensión $\pi_{15}(S^8) \rightarrow \pi_{16}(S^9)$ un homomorfismo de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{120} \rightarrow \mathbb{Z}_{240}$.

También podemos obtener de alguna forma información sobre la suspensión más allá del rango de dimensión estable. Como S^n es $(n-1)$ -conexo y $(J(S^n), S^n)$ es $(2n-1)$ -conexo, tenemos isomorfismos $\pi_i(J(S^n), S^n) \cong \pi_i(J(S^n)/S^n)$ para $i \leq 3n-2$ (véase Proposición 4.28, [8]). Además el grupo $\pi_i(J(S^n)/S^n)$ es isomorfo a $\pi_i(S^{2n})$ en el mismo rango $i \leq 3n-2$ pues $J(S^n)/S^n$ tiene a S^{2n} como su $(3n-1)$ -esqueleto. Por lo tanto parte final de la sucesión exacta larga del par $(J(S^n), S^n)$ que empieza con el término $\pi_{3n-2}(S^n)$ puede ser escrita de la forma

$$\pi_{3n-2}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{3n-1}(S^{n+1}) \rightarrow \pi_{3n-2}(S^{2n}) \rightarrow \pi_{3n-3}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{3n-2}(S^{n+1}) \rightarrow \dots$$

La cual notemos es una sucesión EHP. Además observemos que los términos $\pi_i(S^{2n})$ en la sucesión EHP son grupos de homotopía estables pues $i \leq 3n-2$. Por lo tanto los grupos de homotopía estable están midiendo la falta de estabilidad de los grupos $\pi_i(S^n)$ en el rango $2n-1 \leq i \leq 3n-2$.

Fijándonos en el caso $n = 2$, la sucesión se convierte en

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_4(S^2) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_5(S^3) & \longrightarrow & \pi_4(S^4) & \longrightarrow & \pi_3(S^2) \xrightarrow{\Sigma} \pi_4(S^3) \longrightarrow 0 \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ \mathbb{Z}_2 & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Del haz de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ tenemos que $\pi_4(S^2) \cong \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$, con $\pi_4(S^2)$ generado por la composición $\eta(\Sigma\eta)$ donde η es el mapeo de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$. De la exactitud de la última parte de la sucesión deducimos que $\pi_4(S^4) \rightarrow \pi_3(S^2)$ es inyectivo, y por lo tanto que la suspensión $\pi_4(S^2) \rightarrow \pi_5(S^3)$ es suprayectivo, por lo tanto $\pi_5(S^3)$ es o bien \mathbb{Z}_2 o bien 0. Por el Teorema de la suspensión sabemos que la suspensión $\pi_5(S^3) \rightarrow \pi_6(S^4)$ es también suprayectivo y el último grupo está en el rango estable. El grupo estable π_2^s es no cero (véase Proposición 4L.11, [8]) y por lo tanto concluimos que $\pi_{n+2}(S^2) \cong \mathbb{Z}_2$ para toda $n \geq 2$, generada por la composición $(\Sigma^{n-2}\eta)(\Sigma^{n-1}\eta)$. De hecho, si reemplazamos S^n por cualquier CW -complejo $(n-1)$ -conexo X , la derivación de la sucesión EHP finita se generaliza inmediatamente para dar una sucesión exacta

$$\pi_{3n-2}(X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{3n-1}(\Sigma X) \rightarrow \pi_{3n-2}(X \wedge X) \rightarrow \pi_{3n-3}(X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{3n-2}(\Sigma X) \rightarrow \dots$$

usando el hecho de que $J_2(X)/X = X \wedge X$.

Capítulo 2

El Teorema de Hilton-Milnor

Recordemos que si X y Y son dos espacios con puntos base no degenerados, entonces podemos expresar la homología del wedge de éstos en términos de las homologías de X y de Y , a saber

$$H_p(X \vee Y) \cong H_p(X) \oplus H_p(Y) \quad \text{para } p \geq 1.$$

Sin embargo, este resultado no es necesariamente cierto para grupos de homotopía, por ejemplo $\pi_4(S^2 \vee S^2)$ es un grupo infinito, mientras que $\pi_4(S^2) = \mathbb{Z}/2$ (véase [3]). Así, es natural tratar de determinar los grupos de homotopía de $X \vee Y$, si no en términos de los grupos de homotopía de X y Y , al menos en términos de grupos que se consideren conocidos. El primer paso en esta dirección fue dado por P. Hilton en [9] en el caso de un wedge de esferas. Explícitamente, si $X = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1}$, entonces el resultado de Hilton afirma que

$$\pi_n(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_n(S^{q_i+1})$$

donde $\{q_i\}$ es una sucesión de números naturales tales que $q_i \rightarrow \infty$. La inclusión

$$\pi_n(S^{q_i+1}) \rightarrow \pi_n(X)$$

está dada por $\beta \mapsto \alpha_i \circ \beta$ donde $\alpha_i \in \pi_{q_i+1}(X)$ es un producto de Whitehead iterado de las clases de homotopía ι_i de los mapeos inclusión $S^{r_i+1} \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k$. La estrategia de la demostración es mostrar que el espacio de lazos ΩX tiene el mismo tipo de homotopía débil que el producto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{q_i+1}$. Al tomar homología con coeficientes racionales, el teorema de Bott-Samelson implica entonces (como corolario) que el álgebra tensorial

$T[V]$ generada por el espacio vectorial graduado $V = \overline{H}_*(S^{r_1} \vee \dots \vee S^{r_k}; \mathbb{Q})$ se descompone como producto tensorial de álgebras polinomiales

$$T[V] \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}[x_i], \quad \text{con } |x_i| = q_i,$$

donde los x_i pueden elegirse como una base aditiva o base de Hall del álgebra de Lie libre $L[V]$ generada por V en $T[V]$. Esta descomposición será relevante en el capítulo 5 para el cálculo de la homología racional de $\Omega^n \Sigma^n X$

2.1. El Teorema de Hilton

Sea $S_i = S^{r_i+1}$ la esfera de dimensión $r_i + 1$ con $r_i \geq 1$, para $i = 1, \dots, k$ y consideremos el wedge $X = S_1 \vee \dots \vee S_k = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1}$, el cual claramente es simplemente conexo. El propósito de este capítulo es presentar el argumento de P. Hilton [9] para expresar los grupos de homotopía $\pi_n(X)$, como suma directa de grupos de homotopía de esferas de dimensiones apropiadas. La inclusión de cada sumando en $\pi_n(X)$ está dada por un **producto de Whitehead iterado**; los productos que aparecen serán llamados **productos básicos** y se introducen a continuación.

Sea $X_0 = S_{u_1} \vee S_{u_2} \vee \dots \vee S_{u_m}$, con $1 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_m \leq k$ y notemos que el homomorfismo $\pi_n(X_0) \rightarrow \pi_n(X)$ inducido por la inclusión es un monomorfismo sobre un sumando directo de $\pi_n(X)$. Identificaremos a los elementos de $\pi_n(X_0)$ con sus imágenes en $\pi_n(X)$ y diremos que un elemento en la imagen de $\pi_n(X_0)$ involucra a las esferas S_{u_1}, \dots, S_{u_m} . Con estas convenciones, definimos y ordenamos los productos básicos como sigue.

Definición 2.1 (*Productos Básicos*)

- (i) *Los productos básicos de peso 1 son los elementos ι_1, \dots, ι_k donde ι_i es el generador natural de $\pi_{r_i+1}(S_i)$, $i = 1, \dots, k$ y declaramos que $\iota_1 < \iota_2 < \dots < \iota_k$.*
- (ii) *Supongamos que los productos básicos de peso $< w$ han sido definidos y ordenados. Un producto básico de peso $w > 1$ es un producto de Whitehead $[a, b]$, donde a es un producto básico de peso u , b es un producto básico de peso v , $u + v = w$, $a < b$ y si b está dado como un producto de Whitehead $[c, d]$ de productos básicos c, d , entonces $c \leq a$.*
- (iii) *Los productos básicos de peso w se ordenan ahora de forma arbitraria entre sí y por convención se consideran mayores que todos los productos de peso menor.*

Observación 2.1 Más adelante se verá que cualquier producto básico de peso w es un corchete iterado de símbolos $\iota_{v_1}, \dots, \iota_{v_w}$, asociados de manera adecuada, donde $1 \leq v_j \leq k$, $j = 1, \dots, w$.

Definición 2.2 Supongamos que ι_i aparece w_i veces en la sucesión anterior. Entonces diremos que el producto básico en cuestión **involucra** a la esfera S_i w_i veces y definimos la **altura** de dicho producto básico como $q = \sum_{i=1}^k r_i w_i$.

Denotemos a los productos básicos por $p_1, p_2, \dots, p_s, \dots$ y sea q_s la altura de p_s . Entonces el teorema principal de [9] puede enunciarse como sigue.

Teorema 2.1 (Hilton) Los grupos de homotopía de la unión en un punto $X = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1}$ están dados por

$$\pi_n(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_n(S^{q_i+1})$$

donde el sumando directo $\pi_n(S^{q_i+1})$ está incluido en $\pi_n(X)$ por medio de la composición con el producto básico $p_i \in \pi_{q_i+1}(X)$

Nótese que para toda n hay sólo una cantidad finita de términos distintos de cero en el lado derecho de la ecuación anterior, ya que la sucesión $\{q_i\}$ tiende a infinito. Claramente hay diferentes opciones para definir los productos básicos. Sin embargo, por un teorema de E. Witt (véase [25]), el número de productos básicos de peso w que involucran a la esfera S_i w_i veces, $i = 1, \dots, k$, es

$$\frac{1}{w} \sum_{d|w_i} \frac{\mu(d)(w/d)!}{(w_1/d)! \dots (w_k/d)!},$$

donde $\mu(d)$ es la función de inversión de Möbius. Cada tal producto básico da lugar a un término $\pi_n(S^{q+1})$ en la descomposición en suma directa de $\pi_n(X)$, donde $q = \sum_{i=1}^k r_i w_i$. Por lo tanto el número de apariciones del término $\pi_n(S^{q+1})$ en el lado derecho del Teorema 2.1 no depende de la elección de los productos básicos y una elección diferente daría lugar a lo más a un reordenamiento de los sumandos y un cambio del isomorfismo de inclusión.

Ejemplo 2.1 Consideremos el caso $X = S_1 \vee S_2 \vee S_3$. Los productos básicos de peso 1 son $\iota_1, \iota_2, \iota_3$; los de peso 2 son $[\iota_1, \iota_2], [\iota_1, \iota_3], [\iota_2, \iota_3]$; los de peso 3 son $[\iota_1, [\iota_1, \iota_2]], [\iota_1, [\iota_1, \iota_3]], [\iota_2, [\iota_1, \iota_2]], [\iota_2, [\iota_1, \iota_3]], [\iota_2, [\iota_2, \iota_3]], [\iota_3, [\iota_1, \iota_2]],$

$[\iota_3, [\iota_1, \iota_3]], [\iota_3, [\iota_2, \iota_3]]$. Como se verá más adelante $[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]]$ no es un producto básico, por lo que puede ser expresado como combinación lineal de productos básicos. De hecho, se puede ver que $[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]]$ es combinación lineal de $[\iota_2, [\iota_1, \iota_3]]$ y $[\iota_3, [\iota_1, \iota_2]]$.

Más aún, en la sección 2.5 probaremos:

Teorema 2.2 Sean $\alpha \in \pi_p(X), \beta \in \pi_q(X), \gamma \in \pi_r(X)$. Entonces se cumple la **identidad de Jacobi**:

$$(-1)^{pq} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{qr} [[\gamma, \alpha], \beta] + (-1)^{rp} [[\alpha, \beta], \gamma] = 0$$

2.2. Un par de lemas topológicos

Sean X un espacio arco-conexo y ΩX el espacio de lazos basados de X . Consideremos el isomorfismo natural $\eta : \pi_{p+1}(X) \xrightarrow{\cong} \pi_p(\Omega X)$, h el homomorfismo de Hurewicz $h : \pi_p(\Omega X) \rightarrow H_p(\Omega X)$ y sea

$$\rho = h \circ \eta : \pi_{p+1}(X) \rightarrow H_p(\Omega X).$$

Recordemos que la composición de lazos en ΩX lo dota con una estructura de H -espacio, la cual induce el producto de Pontryagin en $H_*(\Omega X)$. Para $\xi \in H_p(\Omega X), \xi' \in H_q(\Omega X)$, este producto se denotará por $\xi \cdot \xi' \in H_{p+q}(\Omega X)$ o simplemente por $\xi\xi'$.

Sea ΩX el espacio de lazos de $X = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1}$ y sea $e_i = \rho(\iota_i) \in H_{r_i}(\Omega X)$, donde $\iota_i \in \pi_{r_i+1}(X), i = 1, \dots, k$. Entonces, por el Teorema de Bott-Samelson:

Lema 2.1 El anillo de Pontryagin $H_*(\Omega X) = H_*\Omega(S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1})$ es un álgebra asociativa libre, libremente generada por los elementos e_1, \dots, e_k .

Regresando al caso general, sean $\alpha \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X)$ de modo que $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$. El siguiente resultado relaciona el producto de Whitehead en $\pi_*(X)$ con el producto de Pontryagin en $H_*(\Omega X)$ y fue probado por H. Samelson en [19].

Lema 2.2 La imagen del producto de Whitehead $[\alpha, \beta]$ bajo ρ está dada por

$$\rho[\alpha, \beta] = (-1)^p ((\rho(\alpha) \cdot \rho(\beta) - (-1)^{pq} \rho(\beta) \cdot \rho(\alpha)))$$

2.3. Conmutadores Generalizados

Sean R un álgebra generada por e_1, \dots, e_k y $\varepsilon : R \times R \rightarrow \{1, -1\}$, $\lambda : R \times R \rightarrow \mathbb{Z}$ funciones arbitrarias. Para $a, b \in R$ definimos

$$[[a, b]] = \lambda(a, b) \cdot ab - \varepsilon(a, b) \cdot ba.$$

Llamamos a $[[a, b]]$ el **conmutador generalizado (cg)** de a y b y definimos los **conmutadores generalizados básicos (cgb)** de la misma forma que los productos básicos, iniciando con el conjunto ordenado $e_1 \dots, e_k$ como los cgb's de peso 1 y usando la operación $[[-, -]]$ en lugar del producto de Whitehead. Sea $b_1, b_2, \dots, b_s, \dots$ la sucesión de cgb's en R . Definimos un monomio en los cgb's como una palabra M de la forma $b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_r}$. El peso de M es su grado como un polinomio en e_1, \dots, e_k y el **desorden** de M es el número de parejas (u, v) , $1 \leq u < v \leq r$, con $i_u > i_v$. De este modo, el monomio M tiene desorden cero si y sólo si M es de la forma $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots$, $n_i \geq 0$.

Los resultados más importantes de esta sección son los siguientes.

Teorema 2.3 *Cualquier monomio en e_1, \dots, e_k de grado w se puede expresar como combinación lineal de monomios en cgb's de peso w y desorden cero.*

Teorema 2.4 *Si R es un álgebra asociativa libre generada libremente por e_1, \dots, e_k , entonces los monomios en los cgb's de desorden cero constituyen una base (aditiva) para R .*

Teorema 2.5 *El número de cgb's de peso w está dado por*

$$Q(w, k) = \frac{1}{w} \sum_{d|w} \mu(d) k^{w/d},$$

donde μ es la función de Möbius.

Estos tres teoremas fueron probados originalmente en el caso $\varepsilon \equiv -1$, $\lambda \equiv -1$ (véase [25]). Claramente el Teorema 2.5 no puede depender de la elección particular del "conmutador". Supongamos válido el Teorema 2.3. Entonces los monomios en los cgb's de desorden cero generan a R . Como R está graduada por el grado de los monomios en e_1, \dots, e_k y como el número de monomios que generan el subanillo de R de los elementos homogéneos, digamos de grado d , es finito y es el mismo para conmutadores como para conmutadores generalizados, el Teorema 2.4 se sigue de los hechos conocidos para conmutadores. La demostración del Teorema 2.3 en su forma general no presenta nuevas

dificultades y a continuación presentamos un bosquejo de la demostración, basado en las ideas de P. Hall y Magnus.

Demostración (Teorema 2.3)

Definimos el grado de un monomio $M = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_r}$ como r . Ahora sea b el primer cgb (en la sucesión b_1, b_2, \dots) que aparezca en desorden en M , en el sentido de que $b = b_{i_v}$ para una pareja (u, v) , $1 \leq u < v \leq r$, con $i_u > i_v$. Supongamos que b aparece por primera vez en desorden en M como b_{i_v} , por lo que $i_{v-1} > i_v$. Consideremos el cg $[[b_{i_v}, b_{i_{v-1}}]] = \lambda b_{i_v} b_{i_{v-1}} - \varepsilon b_{i_{v-1}} b_{i_v}$, entonces

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon \lambda b_{i_1} \cdots b_{i_{v-2}} b_{i_{v-1}} b_{i_{v+1}} \cdots b_{i_r} - \varepsilon b_{i_1} \cdots b_{i_{v-2}} ([[b_{i_v}, b_{i_{v-1}}]]) b_{i_{v+1}} \cdots b_{i_r} \\ &= \varepsilon \lambda M' - \varepsilon M'', \quad \text{digamos.} \end{aligned}$$

Ahora mostramos que si M proviene de un monomio en e_1, \dots, e_k mediante aplicaciones sucesivas de este proceso, entonces $[[b_{i_v}, b_{i_{v-1}}]]$ es un cgb. Claramente $b_{i_v} < b_{i_{v-1}}$. Notemos que hay conmutadores generalizados de peso > 1 que aparecen en este proceso y que no estaban presentes en un inicio, de modo que si $b_{i_{v-1}} = [[\alpha, \beta]]$, α debió haber sido en una etapa anterior el primer cgb en desorden. Obviamente este proceso, aplicado digamos a b , no introduce desorden en ningún $b' < b$, por lo que $\alpha \leq b_{i_v}$ y $[[b_{i_v}, b_{i_{v-1}}]]$ es un cgb. Por lo que M es expresado como $\varepsilon \lambda M' - \varepsilon M''$, donde M', M'' son monomios en cgb's, M' tiene desorden menor que M y M'' tiene grado menor. Notemos que M' aún tiene grado r y por supuesto, los pesos de M' y M'' son los mismos que el de M .

Hemos establecido pues la base de un argumento inductivo. Porque si suponemos que todos los monomios en cgb's de grado $< r$ pueden ser expresados como combinaciones lineales de monomios de desorden cero, contamos ahora con un proceso para disminuir progresivamente el desorden de un monomio de grado r . De este modo, completamos la demostración del teorema 2.3. ■

2.4. Demostración del Teorema de Hilton

Sea ΩX el espacio de lazos de $X = S^{r_1+1} \vee \dots \vee S^{r_k+1} = S_1 \vee \dots \vee S_k$. Por el Lema 2.1, $H_*(\Omega X)$ es el álgebra libre asociativa libremente generada por e_1, \dots, e_k . Sea $[[-, -]]$ el conmutador en $H_*(\Omega X)$ dado en elementos homogéneos

$$[[a, b]] = (-1)^{p(q+1)} ab - (-1)^p ba,$$

donde $a \in H_p(\Omega X)$ y $b \in H_q(\Omega X)$.

Es claro del Lema 2.2 que $\rho : \pi_{*+1}(X) \rightarrow H_*(\Omega X)$ manda a los productos básicos $p_1, p_2, \dots, p_s, \dots$ sobre un conjunto completo de cgb's $b_1, b_2, \dots, b_s, \dots$, donde $\rho(p_i) = b_i, i = 1, 2, \dots$.

Sea q_i la altura de p_i . Por abuso de notación usaremos el símbolo p_i para denotar un representante $S^{q_i+1} \rightarrow X$ en la clase de homotopía del producto $p_i \in \pi_{q_i+1}(X)$. Éste induce a su vez un mapeo $f_i : \Omega S^{q_i+1} \rightarrow \Omega X$ y por tanto un homomorfismo $f_{i*} : H_*(\Omega S^{q_i+1}) \rightarrow H_*(\Omega X)$. Sea η_i el isomorfismo natural $\eta_i : \pi_{q_i+1}(S^{q_i+1}) \xrightarrow{\cong} \pi_{q_i}(\Omega S^{q_i+1})$ y sea h_i el isomorfismo de Hurewicz:

$$\pi_{q_i+1}(S^{q_i+1}) \xrightarrow[\cong]{\eta_i} \pi_{q_i}(\Omega S^{q_i+1}) \xrightarrow[\cong]{h_i} H_{q_i}(\Omega S^{q_i+1}).$$

Entonces $H_*(\Omega S^{q_i+1})$ es el álgebra de polinomios generada por $b'_i = h_i(\eta_i(\iota))$, donde ι es el generador natural de $\pi_{q_i+1}(S^{q_i+1})$.

Lema 2.3 f_{i*} es un homomorfismo de anillos y $f_{i*}(b'_i) = b_i$

Demostración

El que f_{i*} sea un homomorfismo de anillos se sigue de que todo mapeo basado $X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo de los anillos de Pontryagin $H_*(\Omega X) \rightarrow H_*(\Omega Y)$. El hecho de que $f_{i*}(b'_i) = b_i$ se sigue de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_{q_i+1}(S^{q_i+1}) & \xrightarrow{p_{i*}} & \pi_{q_i+1}(X) \\ \eta_i \downarrow & & \downarrow \eta \\ \pi_{q_i}(\Omega S^{q_i+1}) & \xrightarrow{f_{i\#}} & \pi_{q_i}(\Omega X) \\ h_i \downarrow & & \downarrow h \\ H_{q_i}(\Omega S^{q_i+1}) & \xrightarrow{f_{i*}} & H_{q_i}(\Omega X), \end{array}$$

donde $p_{i*}, f_{i\#}$ son inducidos por p_i, f_i . ■

Se sigue del lema anterior que

$$f_{i*}(b_i'^n) = b_i^n.$$

Consideremos los mapeos $f_i : \Omega S^{q_i+1} \rightarrow \Omega X$ y $f_j : \Omega S^{q_j+1} \rightarrow \Omega X$, inducidos por p_i y p_j . Denotamos la composición de caminos en ΩX por $\omega \cdot \omega'$ y definimos $f_{ij} : \Omega S^{q_i+1} \times \Omega S^{q_j+1} \rightarrow \Omega X$ por

$$f_{ij}(\omega_i, \omega_j) = f_i(\omega_i) \cdot f_j(\omega_j)$$

donde $\omega_i \in \Omega S^{q_i+1}$, $\omega_j \in \Omega S^{q_j+1}$. Ahora sean $\gamma_i \in H_*(\Omega S^{q_i+1})$, $\gamma_j \in H_*(\Omega S^{q_j+1})$. Entonces $\gamma_i \otimes \gamma_j \in H_*(\Omega S^{q_i+1} \times \Omega S^{q_j+1})$.

Lema 2.4 $(f_{ij})_*(\gamma_i \otimes \gamma_j) = (f_{i*}(\gamma_i)) \cdot (f_{j*}(\gamma_j))$.

Demostración

Por la definición de f_{ij} tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega S^{q_i+1} \times \Omega S^{q_j+1} & \xrightarrow{f_{ij}} & \Omega X \\ f_i \times f_j \downarrow & \nearrow \mu & \\ \Omega X \times \Omega X & & \end{array}$$

donde μ es la concatenación de lazos en X . Pasando a homología obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega S^{q_i+1}) \otimes H_*(\Omega S^{q_j+1}) & \xrightarrow{(f_{ij})_*} & H_*(\Omega X) \\ (f_i \times f_j)_* \downarrow & \nearrow \mu_* & \\ H_*(\Omega X) \otimes H_*(\Omega X) & & \end{array}$$

Además $(f_i \times f_j)_*(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = f_{i*}(\gamma_1) \otimes f_{j*}(\gamma_2)$. Por lo tanto se obtiene

$$\begin{aligned} f_{i*}(\gamma_1) \cdot f_{j*}(\gamma_2) &= \mu_*(f_{i*}(\gamma_1) \otimes f_{j*}(\gamma_2)) \\ &= \mu_*((f_i \times f_j)_*(\gamma_1 \otimes \gamma_2)) \\ &= (f_{ij})_*(\gamma_1 \otimes \gamma_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Tenemos entonces mapeos $f_i : \Omega S^{q_i+1} \rightarrow \Omega X$, $i = 1, 2, \dots$. Éstos inducen mapeos

$${}_m f : \Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1} \longrightarrow \Omega X,$$

dados por

$${}_m f(\omega_1, \dots, \omega_m) = f_1(\omega_1) \cdot \dots \cdot f_m(\omega_m), \quad \omega_i \in \Omega S^{q_i+1}$$

donde por convención, los productos se asocian de manera natural a partir de la izquierda. Sea ω_i^0 el lazo trivial en ΩS^{q_i+1} . Entonces si $l < m$, podemos

identificar el producto $\Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_t+1}$ con el subespacio $\Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_t+1} \times \{\omega_{l+1}^0\} \times \dots \times \{\omega_m^0\}$ del espacio $\Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1}$. Como cada f_i manda ω_i^0 al lazo trivial en ΩX , se sigue que

$${}_m f \big|_{\Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_t+1}} \simeq \iota f : \Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_t+1} \rightarrow \Omega X.$$

Sea $Z = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{q_i+1}$. Recordemos que $H_*(\Omega S^{q_i+1})$ es el álgebra generada por b'_i . Como la dimensión de los b'_i tiende a infinito respecto a i , se sigue que $H_*(Z)$ está generada (como grupo abeliano) por los productos tensoriales (finitos) $b_1^{n_1} \otimes b_2^{n_2} \otimes \dots$ y la familia de mapeos ${}_m f$ induce un homomorfismo bien definido

$$\phi : H_*(Z) \rightarrow H_*(\Omega X).$$

Por el Lema 2.3 y una extensión del Lema 2.4 tenemos

$$\phi(b_1^{n_1} \otimes b_2^{n_2} \otimes \dots) = b_1^{n_1} \cdot b_2^{n_2} \cdot \dots$$

Como las expresiones $b_1^{n_1} b_2^{n_2} \dots$ forman una base libre (aditiva) de $H_*(\Omega X)$, por el Teorema 2.4, se sigue que ϕ es de hecho un isomorfismo de grupos abelianos $H_*(Z) \cong H_*(\Omega X)$.

Para simplificar la notación supongamos que las primeras t esferas en X tienen dimensión 2. Entonces la familia de mapeos $\{{}_m f\}$ induce un isomorfismo de $\pi_1(Z)$ en $\pi_1(\Omega X)$ el cual manda a cada $\eta_i(\iota_i)$ sobre $\eta(\iota_i)$, $i = 1, \dots, t$. Sean $\widetilde{\Omega X}$ la cubierta universal de ΩX y \widetilde{Z} la cubierta universal de Z ; entonces $\widetilde{Z} = \widetilde{\Omega S}^{q_1+1} \times \dots \times \widetilde{\Omega S}^{q_t+1} \times \Omega S^{q_{t+1}+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1}$, donde $\widetilde{\Omega S}^{q_i+1}$ es la cubierta universal de ΩS^{q_i+1} . Los mapeos ${}_m f$, $m = t, t+1, \dots$, pueden ser levantados de manera única a mapeos

$${}_m g : \widetilde{\Omega S}^{q_1+1} \times \widetilde{\Omega S}^{q_2+1} \times \dots \times \widetilde{\Omega S}^{q_t+1} \times \Omega S^{q_{t+1}+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1} \rightarrow \widetilde{\Omega X},$$

que mandan el punto base (la clase del lazo trivial en $\Omega S^{q_1+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1}$) en el punto base (la clase del lazo trivial en ΩX). Más aún, si denotamos por ${}_m \widetilde{Z}$ el dominio de ${}_m g$ y encajamos de la manera natural a ${}_l \widetilde{Z}$ en ${}_m \widetilde{Z}$, $t \leq l \leq m$, tenemos

$${}_m g \big|_{{}_l \widetilde{Z}} \simeq \iota g : {}_l \widetilde{Z} \rightarrow \widetilde{\Omega X}.$$

de este modo, los mapeos ${}_m g$ inducen un homomorfismo bien definido

$$\widetilde{\phi} : H_*(\widetilde{Z}) \rightarrow H_*(\widetilde{\Omega X})$$

Lema 2.5 $\tilde{\phi}$ es un isomorfismo $H_*(\tilde{Z}) \cong H_*(\widetilde{\Omega X})$.

Demostración

Sean $Z^{(0)} = Z$, $Z^{(u)} = \widetilde{\Omega S}^{q_1+1} \times \dots \times \widetilde{\Omega S}^{q_u+1} \times \Omega S^{q_{u+1}+1} \times \dots$, $\Omega^{(0)} X = \Omega X$ y $\Omega^{(u)} X$ el espacio cubriente de ΩX con grupo fundamental $\langle \eta(\iota_{u+1}), \dots, \eta(\iota_t) \rangle$, $u \leq t$. Entonces $Z^{(t)} = \tilde{Z}$, $\Omega^{(t)} X = \widetilde{\Omega X}$ y notemos que $Z^{(u)}$ es el espacio cubriente de $Z^{(u-1)}$ con grupo de transformaciones cubrientes $\langle \eta_u(\iota_u) \rangle$. Más aún, existen mapeos $\{m f^{(u)}\}$,

$$m f^{(u)} : \widetilde{\Omega S}^{q_1+1} \times \dots \times \widetilde{\Omega S}^{q_u+1} \times \Omega S^{q_{u+1}+1} \times \dots \times \Omega S^{q_t+1} \times \dots \times \Omega S^{q_m+1} \rightarrow \Omega^{(u)} X,$$

tal que $m f^{(u)}$ cubre a $m f^{(u-1)}$, $m f^{(0)} =_m f$, $m f^{(t)} =_m g$ y los $\{m f^{(u)}\}$ inducen un homomorfismo

$$\phi^{(u)} : H_*(Z^{(u)}) \rightarrow H_*(\Omega^{(u)} X),$$

y un isomorfismo de $\pi_1(Z^{(u)})$ en $\pi_1(\Omega^{(u)} X)$ que manda $\eta(\iota_s)$ en $\eta_s(\iota_s)$, para $u+1 \leq s \leq t$. Afirmamos que los grupos de transformaciones cubrientes actúan trivialmente en los grupos de homología de los espacios $Z^{(u)}$ y $\Omega^{(u)} X$. Esto se sigue del siguiente lema.

Lema 2.6 Si X es un H -espacio y $p : Y \rightarrow X$ es un recubrimiento, entonces Y es un H -espacio y el grupo cociente $\pi_1(X)/p_*(\pi_1(Y))$ actúa trivialmente en los grupos de homología de Y .

Demostración

Ver apéndice C. ■

Como ϕ es un isomorfismo entre $H_*(Z)$ y $H_*(\Omega X)$, la demostración del Lema 2.5 se sigue de aplicar t veces el siguiente resultado

Lema 2.7 Sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ un mapeo que induce isomorfismos

$$\phi : H_*(X_1) \cong H_*(X_2), \quad \pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2).$$

Sea π un subgrupo normal de $\pi_1(X_1)$ tal que $\pi^1 = \pi_1(X_1)/\pi$ es cíclico infinito y sea $\pi^2 = \pi_1(X_2)/\phi(\pi)$. Sean Y_1, Y_2 los recubrimientos de X_1 y X_2 con grupos de transformaciones cubrientes π^1, π^2 , los cuales actúan trivialmente en los grupos de homología de Y_1 y Y_2 y sea $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ el único levantamiento de f que manda la clase del lazo trivial en la clase del lazo trivial. Entonces g induce isomorfismos

$$\psi : H_*(Y_1) \cong H_*(Y_2), \quad \pi_1(Y_1) \cong \pi_1(Y_2)$$

Demostración

Ver apéndice C. ■

Continuando con la prueba del Teorema de Hilton 2.1, notemos que por una extensión del teorema de Whitehead (véase [21]), deducimos del Lema 2.5 que la familia de mapeos ${}_m g$ induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de \widetilde{Z} y los de $\widetilde{\Omega X}$, por lo que la familia de mapeos ${}_m f$ induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de Z y los de ΩX . Pero $\pi_{n-1}(Z) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{n-1}(\Omega S^{q_i+1})$.

Por lo que $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{n-1}(\Omega S^{q_i+1})$; más aún $\pi_{n-1}(\Omega S^{q_i+1})$ está incluido en $\pi_{n-1}(\Omega X)$ por composición con la clase de homotopía de f_i , de modo que, en el isomorfismo inducido

$$\pi_n(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_n(S^{q_i+1}),$$

$\pi_n(S^{q_i+1})$ está incluido en $\pi_n(X)$ por composición de p_i . Esto completa la prueba del Teorema de Hilton 2.1. ■

El teorema 2.5 no juega un papel importante en el enunciado del Teorema 2.1. $Q(w, k)$ es el número de productos básicos de peso w , pero, en general, diferentes productos básicos del mismo peso pertenecen a grupos de homotopía de X de dimensiones distintas. Sin embargo, en el caso especial cuando $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = r$, tenemos

Corolario 2.1 *Sea $X = \bigvee_k S^{r+1}$ la unión en un punto de k esferas de dimensión $r + 1$, $r \geq 1$. Entonces*

$$\pi_n(X) \cong \bigoplus_{w=1}^{\infty} (\text{suma de } Q(w, k) \text{ copias de } \pi_n(S^{wr+1})),$$

donde $Q(w, k) = \frac{1}{w} \sum_{d|w} \mu(d) k^{w/d}$.

Una consecuencia inmediata de los métodos utilizados en la demostración del teorema de Hilton es el siguiente resultado, el cual será de gran importancia en el capítulo 5 para el cálculo de la homología racional de $\Omega^n \Sigma^n X$.

Teorema 2.6 *Sea V un espacio vectorial graduado de dimensión finita sobre \mathbb{Q} , con una base dada por elementos homogéneos b_1, \dots, b_k . Entonces el*

álgebra tensorial $T[V]$ admite una descomposición como producto tensorial de álgebras polinomiales

$$T[V] \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}[x_i]$$

donde los x_i pueden elegirse como una base de Hall (base aditiva), asociada a los b_j , del álgebra de Lie libre $L[V]$ generada por V en $T[V]$.

2.5. La identidad de Jacobi

Como se mencionó al inicio del capítulo, si $X = S_1^{p+1} \vee S_2^{q+1} \vee S_3^{r+1}$, entonces $[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]]$ no es un producto básico. Esto significa que, en la descomposición en suma directa,

$$\pi_{p+q+r+1}(X) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{p+q+r+1}(S^{q_i+1}),$$

obtenemos una representación no trivial de $[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]]$,

$$[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]] = \sum_{i=1}^{\infty} [[p_i, \alpha_i]], \quad \alpha_i \in \pi_{p+q+r+1}(S^{q_i+1})$$

Supongamos ahora que $p_{j_1}, \dots, p_{j_\lambda}, \dots$ son los productos básicos que no involucran a la esfera S_3 . Contrayendo a S_3 a un punto, obtenemos

$$0 = \sum_{\lambda=1}^{\infty} [[p_{j_\lambda}, \alpha_{j_\lambda}],$$

de donde $\alpha_{j_\lambda} = 0$, $\lambda = 1, 2, \dots$. Similarmente, vemos que $\alpha_i = 0$ para cualquier producto básico p_i el cual no involucre todas las esferas S_1, S_2, S_3 . Para un producto básico p_i que involucre a S_1, S_2 y S_3 , tenemos $q_i + 1 > p + q + r + 1$, excepto por $[\iota_2, [\iota_1, \iota_3]]$ y $[\iota_3, [\iota_1, \iota_2]]$. Por lo tanto

$$[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]] = a[\iota_2, [\iota_1, \iota_3]] + b[\iota_3, [\iota_1, \iota_2]], \quad (*)$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Más aún, sólo puede existir una relación de este tipo, pues no hay relaciones no triviales entre los productos básicos. Por lo tanto, si ρ es el homomorfismo $\rho : \pi_{p+q+r+1}(X) \rightarrow H_{p+q+r}(\Omega X)$, entonces $\rho[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]]$ se puede expresar de manera única como una combinación lineal de $\rho[\iota_2, [\iota_1, \iota_3]]$ y $\rho[\iota_3, [\iota_1, \iota_2]]$ y la relación

$$\rho[\iota_1, [\iota_2, \iota_3]] = a\rho[\iota_2, [\iota_1, \iota_3]] + b\rho[\iota_3, [\iota_1, \iota_2]]$$

se cumple en $H_{p+q+r}(\Omega X)$ si y sólo si (*) se cumple en $\pi_{p+q+r+1}(X)$. El problema por lo tanto es encontrar una relación lineal entre $\rho[l_1, [l_2, l_3]]$, $\rho[l_2, [l_1, l_3]]$ y $\rho[l_3, [l_1, l_2]]$ en la cual el coeficiente de $\rho[l_1, [l_2, l_3]]$ sea ± 1 .

Cambiamos ligeramente la notación (en vista del resultado que queremos probar).

Sea $X = S_1^p \vee S_2^q \vee S_3^r$ y busquemos una relación lineal entre $\rho[[l_2, l_3], l_1]$, $\rho[[l_3, l_1], l_2]$ y $\rho[[l_1, l_2], l_3]$ en la cual el coeficiente de $\rho[[l_2, l_3], l_1]$ sea ± 1 ; es entonces claro que la misma relación lineal también será válida para $[[l_2, l_3], l_1]$, $[[l_3, l_1], l_2]$, $[[l_1, l_2], l_3]$.

Por el lema 2.2,

$$\begin{aligned} \rho[[l_2, l_3], l_1] &= (-1)^{q+r} (\rho[l_2, l_3] \cdot e_1 - (-1)^{(q+r)(p-1)} e_1 \cdot \rho[l_2, l_3]) \\ &= (-1)^{q+r} \{ (-1)^{q-1} (e_2 e_3 - (-1)^{(q-1)(r-1)} e_3 e_2) e_1 \\ &\quad - (-1)^{(q+r)(p-1)+(q-1)} e_1 (e_2 e_3 - (-1)^{(q-1)(r-1)} e_3 e_2) \} \\ &= (-1)^{r+1} e_2 e_3 e_1 + (-1)^{qr+q+1} e_3 e_2 e_1 \\ &\quad + (-1)^{pq+rp+q} e_1 e_2 e_3 + (-1)^{pq+rp+qr+r} e_1 e_3 e_2. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \rho[[l_3, l_1], l_2] &= (-1)^{p+1} e_3 e_1 e_2 + (-1)^{rp+r+1} e_1 e_3 e_2 \\ &\quad + (-1)^{qr+pq+r} e_2 e_3 e_1 + (-1)^{qr+pq+rp+p} e_2 e_1 e_3, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \rho[[l_1, l_2], l_3] &= (-1)^{q+1} e_1 e_2 e_3 + (-1)^{pq+p+1} e_2 e_1 e_3 \\ &\quad + (-1)^{rp+qr+p} e_3 e_1 e_2 + (-1)^{rp+qr+pq+q} e_3 e_2 e_1. \end{aligned}$$

Observamos que

$$(-1)^{pq} \rho[[l_2, l_3], l_1] + (-1)^{qr} \rho[[l_3, l_1], l_2] + (-1)^{rp} \rho[[l_1, l_2], l_3] = 0,$$

de donde

$$(-1)^{pq} [[l_2, l_3], l_1] + (-1)^{qr} [[l_3, l_1], l_2] + (-1)^{rp} [[l_1, l_2], l_3] = 0.$$

El Teorema 2.2 ahora se sigue mapeando $S_1^p \vee S_2^q \vee S_3^r$ en X por un mapeo que coincida en S_1^p con un representante de $\alpha \in \pi_p(X)$, en S_2^q con un representante de $\beta \in \pi_q(X)$ y en S_3^r con un representante de $\gamma \in \pi_r(X)$. ■

Notemos que cualquier otra relación entre los productos de Whitehead, implicaría una relación entre conmutadores generalizados; por el mismo argumento usado por Magnus en el caso de conmutadores ordinarios de anillos (véase [12]), tenemos

Corolario 2.2 *Todas las relaciones entre productos de Whitehead se sigue de la anticonmutatividad $[\alpha, \beta] = (-1)^{pq}[\beta, \alpha]$, $\alpha \in \pi_p(X)$, $\beta \in \pi_q(X)$ y la identidad de Jacobi, junto con las reglas de adición y distributividad del producto de Whitehead.*

2.6. Una generalización del Teorema de Hilton

Sean X, Y espacios topológicos con puntos base no degenerados. Sabemos que podemos calcular los grupos de homología de $X \vee Y$ en términos de los grupos de homología de X y de Y por medio de los isomorfismos

$$H_*(X \vee Y) \cong H_*(X) \oplus H_*(Y).$$

Sin embargo, como hemos visto, este resultado no necesariamente se cumple para grupos de homotopía. Una primera aproximación del cálculo de los grupos de homotopía de un "wedge" fue la dada por Hilton la cual vimos en este capítulo. Aunque este resultado estaba restringido al caso cuando X y Y eran esferas. Posteriormente Milnor generalizó este hecho para el caso de una suspensión arbitraria (véase [15]). La idea de la demostración se basa en conjuntos simpliciales. En esta sección sólo se enunciará el Teorema de Hilton-Milnor remitiendo al lector a la demostración de Milnor en [15] pues dicha demostración va más allá de los fines de esta tesis.

Teorema 2.7 *Hilton-Milnor*

Sean X_1, \dots, X_n espacios topológicos. Entonces existe una equivalencia homotópica (débil)

$$h : \Omega \bigvee_{i=1}^n \Sigma X_i \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \Omega \Sigma X^{(i)}$$

donde cada $X^{(i)}$ es un producto smash de los X_i 's, $i \leq n$.

En general la idea en todas las demostraciones es mostrar que el espacio de lazos $\Omega(X \vee Y)$ tiene el mismo tipo de homotopía débil que el producto infinito $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega \Sigma W_i$ donde W_i es un producto smash (producto reducido) de copias de X y Y .

Capítulo 3

Operaciones en Espacios de Lazos

A lo largo de este capítulo se estudiarán a detalle operaciones íntimamente relacionadas a los espacios de lazos, por ejemplo, hablaremos sobre la transgresión que está asociada a la sucesión espectral de Serre de una fibración, en particular usaremos la fibración de trayectorias y lazos

$$\Omega Y \hookrightarrow PY \rightarrow Y$$

y definiremos la transgresión τ la cual será un morfismo cuyo dominio será un subgrupo de $H_k(Y)$ y rango un cociente de $H_{k-1}(\Omega Y)$. También se definirá la suspensión homológica $\sigma_* : H_{k-1}(\Omega Y) \rightarrow H_k(Y)$ y se verá que bajo las hipótesis que tendremos serán inversas una de la otra. Posteriormente se hablará sobre el operad de n -cubitos y la acción que tiene sobre un espacio de n -lazos y por medio de dicha acción y la estructura de operad se definirá una operación homológica de dos variables conocida como la operación de Browder

$$\lambda_n : H_p(Y) \times H_q(Y) \rightarrow H_{n+p+q}(Y)$$

y serán probadas algunas propiedades de ésta, en particular veremos la relación que tiene ésta con la suspensión homológica y cómo el espacio $H_*(\Omega^n X)$ con el producto de Pontryagin y la operación de Browder (y dando una nueva graduación) forman un álgebra de Gerstenhaber.

3.1. La transgresión y la suspensión homológica

El diferencial $d_k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$ en la sucesión espectral (en homología) de una fibración tiene una interpretación geométrica conocida como la **transgresión**. Ésta se define como sigue. Supongamos que $f : E \rightarrow B$ es una fibración con fibra F y fijemos $k > 0$. La idea es combinar el homomorfismo $f_* : H_k(E) \rightarrow H_k(B)$, el isomorfismo $H_k(B) \cong H_k(B, b_0)$ y el morfismo de conexión $\partial : H_k(E, F) \rightarrow H_{k-1}(F)$ para definir, idealmente, un homomorfismo $\tau : H_k(B) \rightarrow H_{k-1}(F)$ por medio del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_k(E) & \longrightarrow & H_k(E, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(F) \\ \downarrow & & \downarrow f_* & \dashrightarrow & \downarrow \\ H_k(B) & \longrightarrow & H_k(B, b_0) & \longrightarrow & H_{k-1}(b_0). \end{array}$$

De manera más precisa, tomamos como dominio de τ a la imagen de $f_* : H_k(E, F) \rightarrow H_k(B, b_0) \cong H_k(B)$ y como rango de τ el cociente de $H_{k-1}(F)$ por $\partial(\ker f_* : H_k(E, F) \rightarrow H_k(B, b_0))$.

Definición 3.1 La **transgresión** τ es el homomorfismo

$$\tau : \text{im}(f_*) \rightarrow H_{k-1}(F) / \partial(\ker f_*)$$

dado por $\tau(z) = \partial(r) + \partial(\ker f_*)$, donde $z \in \text{im}(f_*)$ y $r \in f_*^{-1}(z)$.

Es fácil ver que con esta elección de dominio y rango, τ es un homomorfismo bien definido de un subgrupo de $H_k(B)$ en un cociente de $H_{k-1}(F)$. Supongamos por simplicidad que F es arco-conexo y consideremos el diferencial

$$d^k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$$

en la sucesión espectral de la fibración $f : E \rightarrow B$. Su dominio, es un subgrupo de $E_{k,0}^2 = H_k(B; H_0(F)) = H_k(B)$ ya que se trata de una sucesión espectral de primer cuadrante y por lo tanto, $E_{k,0}^k$ es la intersección de los núcleos de $d^r : E_{k,0}^r \rightarrow E_{0,k-1}^r$ para $r < k$. Similarmente, el rango $E_{0,k-1}^k$ de $d_k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$ es un cociente de $E_{0,k-1}^2$. El siguiente teorema identifica el diferencial $d^k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$ con la transgresión.

Teorema 3.1 El diferencial $d_k : E_{k,0}^k \rightarrow E_{0,k-1}^k$ en la sucesión espectral de la fibración $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ coincide con la transgresión

$$\begin{array}{ccc}
& & H_{k-1}(F) \\
& & \downarrow \\
dom(\tau) & \xrightarrow{\tau} & rang(\tau) = H_{k-1}(F)/\delta(ker(f_*)) \\
\downarrow & & \\
H_k(B) & &
\end{array}$$

La demostración de este resultado no es difícil y puede ser consultado en [14], Teorema 6.6.

A continuación analizaremos en detalle a la transgresión en el caso particular de la fibración de trayectorias y lazos sobre X

$$\Omega X \hookrightarrow PX \rightarrow X.$$

Recordemos que dado un espacio X , se define el cono reducido CX como cociente de $[0, 1] \times X$ e identificamos a X como subespacio de CX por medio de la inclusión $X \rightarrow CX$ dada por $x \mapsto (1, x)$. Tomamos a la suspensión reducida ΣX como CX/X y denotemos por $c : CX \rightarrow \Sigma X$ el mapeo cociente. Consideremos ahora los mapeos

$$s : X \rightarrow \Omega\Sigma X, \quad x \mapsto (t \mapsto (t, x))$$

y

$$\ell : \Sigma\Omega X \rightarrow X, \quad (t, \alpha) \mapsto \alpha(t).$$

Sea $S_* : H_{k-1}(Y) \rightarrow H_k(\Sigma Y)$ el isomorfismo suspensión, definido como la composición de los isomorfismos

$$S_* : H_{k-1}(Y) \xleftarrow{\partial} H_k(CY, Y) \xrightarrow{c_*} H_k(\Sigma Y, *) \cong H_k(\Sigma Y).$$

Notemos que el mapeo $\ell : \Sigma\Omega X \rightarrow X$ induce un homomorfismo

$$\ell_* : H_k(\Sigma\Omega X) \rightarrow H_k(X)$$

el cual podemos componer con el isomorfismo suspensión para obtener **la suspensión homológica**

$$\sigma_* = \ell_* \circ S_* : H_{k-1}(\Omega X) \rightarrow H_k(X).$$

Además tenemos que la transgresión para la fibración de trayectorias y lazos sobre X

$$\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{e} X,$$

es el homomorfismo dado por

$$\begin{array}{ccc} & & H_{k-1}(\Omega X) \\ & & \downarrow \\ \tau : \text{Im}(e_*) \xleftarrow{e_*} H_k(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(\Omega X) / \partial(\ker e_*) \\ \downarrow & & \\ H_k(X, *) & & \end{array}$$

El siguiente resultado nos da una relación entre la transgresión τ y la suspensión homológica σ_* .

Teorema 3.2 *La suspensión homológica $\sigma_* = \ell_* \circ S_*$ es un inverso izquierdo para τ en su dominio, es decir, $\sigma_* \circ \tau(x) = x$ para toda x en el dominio de τ . Por lo tanto τ es inyectiva. En particular, si $\tau : H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(\Omega X)$ es un isomorfismo (con $\partial(\ker e_*) = 0$), entonces τ y σ_* son inversas una de la otra.*

Demostración

En este caso haremos uso del mapeo $g : C\Omega X \rightarrow PX$ definido por

$$(t, \alpha) \mapsto (s \mapsto \alpha(st)).$$

Notemos que $g(0, \alpha)$ y $g(t, ct e_*)$ son ambos la trayectoria constante en $*$ así que en efecto tenemos un mapeo bien definido en el cono reducido. Más aún, $g(1, \alpha) = \alpha$ por lo que g define un mapeo de parejas $g : (C\Omega X, \Omega X) \rightarrow (PX, \Omega X)$ cuya restricción a ΩX es el mapeo identidad. Al ser $C\Omega X$ y PX ambos contraíbles se sigue que los morfismos entre las sucesiones exactas largas de estas parejas se reducen a triángulos conmutativos de isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} H_k(C\Omega X, \Omega X) & \xrightarrow{g_*} & H_k(PX, \Omega X) \\ & \searrow \partial & \swarrow \partial \\ & H_{k-1}(\Omega X) & \end{array}$$

La composición $e \circ g : C\Omega X \rightarrow X$ es el mapeo $(t, \alpha) \mapsto \alpha(t)$. Como ΩX es la fibra de la fibración $e : PX \rightarrow X$, $e \circ g|_{\Omega X}$ es el mapeo constante $*$ y $e \circ g$

se factoriza a través de la suspensión $\Sigma\Omega X$. De hecho, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C\Omega X & \xrightarrow{e \circ g} & X \\ & \searrow c & \nearrow \ell \\ & & \Sigma\Omega X \end{array}$$

Por lo tanto

$$\Sigma\tau = \ell_* S_* \partial(e_*)^{-1} = \ell_* S_* \partial(g_*)^{-1} (e_*)^{-1} = \ell_* S_* \partial(\ell_* c_*)^{-1} = \ell_* c_* (c_*)^{-1} (\ell_*)^{-1} = Id.$$

Es importante que todas las expresiones en este cálculo tengan sentido y para esto hay que identificar cuidadosamente los dominios y los rangos. ■

Nos interesa relacionar estos mapeos con la transgresión en el caso de la fibrición de trayectorias y lazos sobre ΣY :

$$\Omega\Sigma Y \hookrightarrow P(\Sigma Y) \xrightarrow{e} \Sigma Y$$

donde e evalúa a una trayectoria en su punto final. La transgresión para esta fibrición es la “composición” (con dominio un subgrupo de $H_k(\Sigma Y)$ y rango un cociente de $H_{k-1}(\Omega\Sigma Y)$):

$$\begin{array}{ccc} \tau : Im(e_*) & \xleftarrow{e_*} & H_k(P\Sigma Y, \Omega\Sigma Y) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(\Omega\Sigma Y) / \partial(kere_*) \\ & \downarrow & \\ & & H_k(\Sigma Y, *) \end{array}$$

Ahora, si en la suspensión homológica

$$\sigma_* : H_k(\Omega Z) \rightarrow H_{k+1}(Z)$$

tomamos el caso $Z = \Sigma X$, entonces podremos observar otra relación natural que tiene con el isomorfismo suspensión $S_* : H_{k-1}(X) \rightarrow H_k(\Sigma X)$. Consideremos el mapeo adjunto a la identidad $id : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$

$$s : X \rightarrow \Omega\Sigma X, \quad x \mapsto (t \mapsto (t, x)).$$

Entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(\Omega\Sigma X) & \xrightarrow{\sigma_*} & H_k(\Sigma X) \\ \uparrow s_* & \nearrow \cong S_* & \\ H_{k-1}(X) & & \end{array}$$

lo cual nos diría que en el caso especial de los lazos de una suspensión, σ_* es suprayectiva. La conmutatividad de dicho diagrama se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
H_k(\Omega\Sigma X) & \xleftarrow[\cong]{\partial} & H_{k+1}(C\Omega\Sigma X, \Omega\Sigma X) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{k+1}(\Sigma\Omega\Sigma X) & \xrightarrow{\ell_*} & H_{k+1}(\Sigma X) \\
\uparrow s_* & & \uparrow & & \uparrow (\Sigma s)_* & \nearrow & \\
H_k(X) & \xleftarrow[\cong]{\partial} & H_{k+1}(CX, X) & \xrightarrow[\cong]{} & H_{k+1}(\Sigma X) & &
\end{array}$$

En el caso de la fibración de trayectorias y lazos $\Omega\Sigma Y \rightarrow P(\Sigma Y) \rightarrow \Sigma Y$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *El dominio de la transgresión τ es todo $H_k(\Sigma Y)$. Más aún, el morfismo $s_* : H_{k-1}(Y) \rightarrow H_{k-1}(\Omega\Sigma Y)$ inducido por s es un levantamiento de $\tau \circ S_*$.*

$$\begin{array}{ccccc}
& & & & H_{k-1}(\Omega\Sigma Y) \\
& & & & \downarrow \\
H_{k-1}(Y) & \xrightarrow[\cong]{S_*} & H_k(\Sigma Y) & \xrightarrow{\tau} & H_{k-1}(\Omega\Sigma Y) / \partial(\ker e_*) \\
& \nearrow s_* & & &
\end{array}$$

En particular, si $\tau : H_k(\Sigma Y) \rightarrow H_{k-1}(\Omega\Sigma Y)$ es un isomorfismo (donde forzosamente $\partial(\ker e_*) = 0$), entonces $s_* : H_{k-1}(Y) \rightarrow H_{k-1}(\Omega\Sigma Y)$ también es un isomorfismo.

Demostración

Consideremos el mapeo $f : CY \rightarrow P\Sigma Y$ definido por

$$f(t, y) = (r \mapsto (rt, y)).$$

Entonces $ev \circ f : CY \rightarrow \Sigma Y$ resulta ser sólo el mapeo $(t, y) \mapsto (t, y)$, es decir, el mapeo cociente c . Más aún, la restricción de f a $Y = \{1\} \times Y \subset CY$ es el mapeo $y \mapsto (r \mapsto (r, y))$; el cual sólo es el mapeo s . En otras palabras, f induce un mapeo de pares $f : (CY, Y) \rightarrow (P\Sigma Y, \Omega\Sigma Y)$ cuya restricción a los subespacios es s . Por lo tanto f induce un mapeo de las sucesiones exactas largas de los pares; además como $P\Sigma Y$ y CY son contraíbles cada tercer término es cero por lo que obtenemos diagramas conmutativos cuyas flechas horizontales son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc}
H_k(CY, Y) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(Y) \\
f_* \downarrow & & s_* \downarrow \\
H_k(P\Sigma Y, \Omega\Sigma Y) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(\Omega\Sigma Y).
\end{array}$$

Como $e \circ f = c$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_k(CY, Y) & \xrightarrow{f_*} & H_k(P\Sigma Y, \Omega\Sigma Y) \\
& \searrow c_* & \swarrow e_* \\
& & H_k(\Sigma Y, *)
\end{array}$$

conmuta, donde c_* es un isomorfismo. Se sigue que e_* es suprayectivo, por lo que el dominio de τ es todo $H_k(\Sigma Y)$. Más aún, $\partial \circ f_* \circ (c_*)^{-1}$ es un levantamiento de τ , por lo que usando la definición de S_* y el cuadrado conmutativo anterior obtenemos que

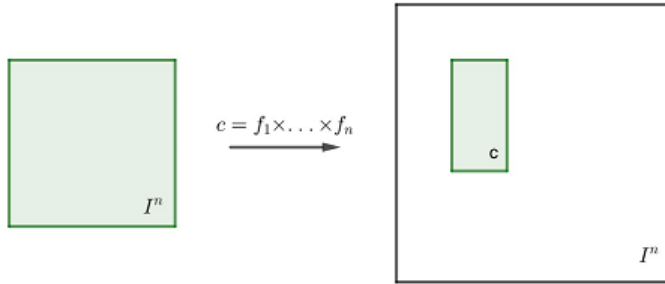
$$\tau \circ S_* = \partial \circ f_* \circ (c_*)^{-1} \circ S_* = \partial f_* \partial^{-1} = s_* \quad \blacksquare$$

3.2. El operad de n -cubitos \mathcal{C}_n

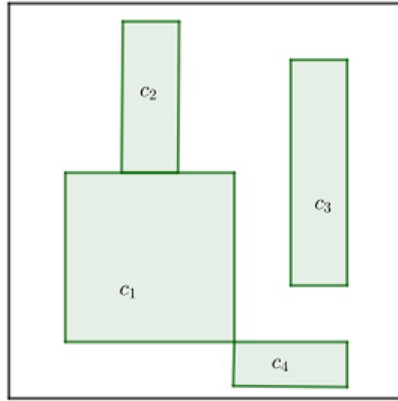
En esta sección introducimos los espacios de configuraciones de n -cubitos $\mathcal{C}_n(k)$ y estudiamos sus propiedades básicas. Históricamente estos espacios han probado ser fundamentales en la descripción de los espacios de lazos iterados de la forma $\Omega^n X$, ver [13]. Un hecho importante para nuestro trabajo es la equivalencia homotópica $\mathcal{C}_n(2) \simeq S^{n-1}$, la cual será usada en la siguiente sección para definir la operación de Browder.

Definición 3.2 Denotamos por $I = [0, 1]$. Un n -**cubito** c es un encaje afín $c : I^n \rightarrow I^n$ que preserva orientación y es de la forma $c = f_1 \times \dots \times f_n$, donde cada $f_i : I \rightarrow I$ es de la forma $f_i(t) = a_i t + b_i$ con $0 < a_i$, $0 \leq b_i$ y $a_i + b_i \leq 1$.

Podemos visualizar a un n -cubito de forma gráfica por medio de la siguiente figura



Definición 3.3 *El espacio de configuraciones de k n -cubitos $\mathcal{C}_n(k)$ es el conjunto de las k -tuplas $\langle c_1, \dots, c_k \rangle$ de n -cubitos tales que los interiores de $c_i(I^n)$ y $c_j(I^n)$ son disjuntos si $i \neq j$.*



Sea J^n el interior de I^n . Notemos que una tal configuración $\langle c_1, \dots, c_k \rangle$ se puede ver de manera natural como una función continua

$$\langle c_1, \dots, c_k \rangle: \prod_{i=1}^k J^n \rightarrow J^n$$

y dotamos así al espacio $\mathcal{C}_n(k)$ con la topología de subespacio del espacio de todas las funciones continuas $\prod_k J^n \rightarrow J^n$, provisto con la topología compacto-abierta.

Recordemos que dado un espacio M se define el espacio de configuraciones (ordenadas) de k -tuplas de puntos distintos en M como

$$F(M, k) = \{(m_1, \dots, m_k) \in M^k \mid m_i \neq m_j, \text{ si } i \neq j\}.$$

Notemos que existe un mapeo de evaluación $ev: \mathcal{C}_n(k) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k)$ dado por mandar a cada c_i a su centro, esto es, si $z_0 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in I^n$ definimos

$$ev \langle c_1, \dots, c_k \rangle = (c_1(z_0), \dots, c_k(z_0))$$

en donde identificamos el interior de I^n con \mathbb{R}^n . El siguiente resultado es claro y una demostración puede ser consultada en [13].

Lema 3.1 *El mapeo $ev : \mathcal{C}_n(k) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k)$ conmuta con la acción natural del grupo simétrico y es una equivalencia homotópica.*

En particular, $\mathcal{C}_n(2) \simeq F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$, donde la última equivalencia homotópica está dada por $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{\|x-y\|}$; una inversa homotópica está dada por $z \mapsto (z, -z)$.

Notemos que la composición de funciones define mapeos de la forma

$$\gamma : \mathcal{C}_n(k) \times \mathcal{C}_n(j_1) \times \dots \times \mathcal{C}_n(j_k) \rightarrow \mathcal{C}_n(j_1 + \dots + j_k).$$

Más aún

Teorema 3.4 *La colección de espacios $\mathcal{C}_n = \{\mathcal{C}_n(k)\}_{k \geq 0}$ tiene estructura de operad, esto es:*

1. $\mathcal{C}_n(0) = *$ consiste por convención de un solo punto, visto como el encaje del conjunto vacío en J^n .
2. Existen funciones continuas

$$\gamma : \mathcal{C}_n(k) \times \mathcal{C}_n(j_1) \times \dots \times \mathcal{C}_n(j_k) \rightarrow \mathcal{C}_n(j),$$

donde $j = j_1 + \dots + j_k$, que satisfacen la siguiente propiedad asociativa: para todo $c \in \mathcal{C}_n(k)$, $d_s \in \mathcal{C}_n(j_s)$ y $e_t \in \mathcal{C}_n(i_t)$

$$\gamma(\gamma(c; d_1, \dots, d_k); e_1, \dots, e_j) = \gamma(c; f_1, \dots, f_k),$$

donde $f_s = \gamma(d_s; e_{j_1+\dots+j_{s-1}+1}, \dots, e_{j_1+\dots+j_s})$ y $f_s = *$ si $j_s = 0$.

3. La función identidad $1 \in \mathcal{C}_n(1)$ satisface $\gamma(1; d) = d$ para $d \in \mathcal{C}_n(j)$ y $\gamma(c; 1^k) = c$ para $c \in \mathcal{C}_n(k)$, $1^k = (1, \dots, 1) \in \mathcal{C}_n(1)^k$.
4. Existe una acción derecha del grupo simétrico Σ_j en $\mathcal{C}_n(j)$ dada por

$$\langle c_1, \dots, c_j \rangle \sigma = \langle c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(j)} \rangle \quad \text{para } \sigma \in \Sigma_j$$

tal que para $c \in \mathcal{C}_n(k)$, $d_s \in \mathcal{C}_n(j_s)$, $\sigma \in \Sigma_k$ y $\tau_s \in \Sigma_{j_s}$ se cumple

$$\gamma(c\sigma; d_1, \dots, d_k) = \gamma(c; d_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, d_{\sigma^{-1}(k)})\sigma(j_1, \dots, j_k) \quad \text{y}$$

$$\gamma(c; d_1\tau_1, \dots, d_k\tau_k) = \gamma(c; d_1, \dots, d_k)(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k),$$

donde $\sigma(j_1, \dots, j_k)$ denota la permutación de j letras en la cual se permutan los k bloques de letras determinadas por la partición de j en la forma en que σ permuta k letras y $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_k$ denota la imagen de (τ_1, \dots, τ_k) bajo la inclusión natural de $\Sigma_{j_1} \times \dots \times \Sigma_{j_k}$ en Σ_j .

Definición 3.4 Dado un espacio basado X , una acción de \mathcal{C}_n en X es una colección de mapeos

$$\theta_j : \mathcal{C}_n(j) \times X^j \rightarrow X$$

para $j \geq 0$ ($\theta_0 : * \rightarrow X$), tales que

- a) Los siguientes diagramas son conmutativos, donde $\sum j_s = j$, $\Theta = 1 \times \theta_{j_1} \times \dots \times \theta_{j_k}$ y u denota el homeomorfismo natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_n(k) \times \mathcal{C}_n(j_1) \times \dots \times \mathcal{C}_n(j_k) \times X^j & \xrightarrow{\gamma \times 1} & \mathcal{C}_n(j) \times X^j \\ \downarrow 1 \times u & & \searrow \theta_j \\ \mathcal{C}_n(k) \times \mathcal{C}_n(j_1) \times X^{j_1} \times \dots \times \mathcal{C}_n(j_k) \times X^{j_k} & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{C}_n(k) \times X^k \\ & & \nearrow \theta_k \\ & & X \end{array}$$

- b) $\theta_1(1; x) = x$ para $x \in X$ y
c) $\theta_j(c\sigma; y) = \theta_j(c; \sigma y)$ para $c \in \mathcal{C}_n(j)$, $\sigma \in \Sigma_j$ y $y \in X^j$.

Ejemplo 3.1 Es un hecho clásico que todo espacio de n -lazos $\Omega^n X$ es un \mathcal{C}_n -espacio. En este caso los mapeos estructurales

$$\gamma : \mathcal{C}_n(j) \times (\Omega^n X)^j \rightarrow \Omega^n X$$

están dados por el producto (o combinación de los j n -lazos parametrizados por la configuración de j n -cubitos.

Recíprocamente, P. May probó en [13] que la existencia de una \mathcal{C}_n -acción en un espacio basado Y es un criterio para que Y sea equivalente a un espacio de n -lazos.

Teorema 3.5 (*Principio de reconocimiento de espacios de n -lazos*)

Sea X un espacio arco-conexo con punto base no degenerado. Entonces X tiene el tipo de homotopía débil de un espacio de n -lazos si y sólo si X admite una acción del operad de n -cubitos \mathcal{C}_n .

Dado un espacio basado Y existe una manera natural de construir el \mathcal{C}_n -espacio libre generado por Y .

Definición 3.5 Sea Y un espacio con punto base $*$. Definimos el espacio $C_n(Y)$ como

$$C_n(Y) = \left[\prod_{j=0}^{\infty} \mathcal{C}_n(j) \times_{\Sigma_j} Y^j \right] / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia dada por

$$(c_1, \dots, c_j; y_1, \dots, y_{i-1}, *, y_{i+1}, \dots, y_j) \sim (c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_j; y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_j).$$

Es claro que $C_n(Y)$ admite una estructura de \mathcal{C}_n -espacio. Más aún, el siguiente teorema fue probado por P. May en [13].

Teorema 3.6 (*de Aproximación de Peter May*)

Sea X un espacio arco-conexo con punto base no degenerado. Entonces existe una equivalencia homotópica débil

$$C_n(X) \simeq \Omega^n \Sigma^n X$$

3.3. La operación de Browder λ_n

La operación de Browder $\lambda_n : H_p(\Omega^{n+1}X) \times H_q(\Omega^{n+1}X) \rightarrow H_{n+p+q}(\Omega^{n+1}X)$ fue introducida por W. Browder en [4] como una herramienta para calcular la homología módulo 2 de los espacios de lazos iterados $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}Z$ en términos de $H_*(\mathbb{Z}; \mathbb{F}_2)$. En esta sección definimos la operación de Browder en la homología racional de un espacio de lazos $\Omega^{n+1}X$ y enunciamos sus propiedades básicas. En particular resaltamos el hecho de que λ_n conmuta con la suspensión homológica

$$\lambda_n(\sigma_*x, \sigma_*y) = \sigma_*\lambda_{n-1}(x, y).$$

Esta propiedad será de gran utilidad en el siguiente capítulo para describir $H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X; \mathbb{Q})$ en términos de $H_*(X; \mathbb{Q})$.

Recordemos que para todo espacio de lazos de la forma $\Omega^{n+1}X$ existe un mapeo

$$\theta : \mathcal{C}_{n+1}(2) \times \Omega^{n+1}X \times \Omega^{n+1}X \rightarrow \Omega^{n+1}X$$

donde $\mathcal{C}_n(2)$ es homotópicamente equivalente a S^n .

Definición 3.6 (*Operación de Browder*)

Dados $x \in H_p(\Omega^{n+1}; \mathbb{Q})$ y $y \in H_q(\Omega^{n+1}; \mathbb{Q})$, definimos un elemento en $H_{n+p+q}(\Omega^{n+1}; \mathbb{Q})$ por:

$$\lambda_n(x, y) := (-1)^{n|x|} \theta_*(\alpha \otimes x \otimes y),$$

donde α es un generador fijo de $\overline{H}_n(\mathcal{C}_{n+1}(2); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, digamos la clase fundamental.

La operación λ_n es análoga a un corchete de Lie. Más aún:

Proposición 3.1 *La operación de Browder cumple las siguientes propiedades:*

1. Para $n = 0$, $\lambda_0 : H_p(\Omega X) \times H_q(\Omega X) \rightarrow H_{p+q}(\Omega X)$ está dada por

$$\lambda_0(x, y) = x * y - (-1)^{|x||y|} y * x$$

donde $*$ es el producto de Pontryagin (para una elección particular de $\alpha \in \overline{H}_0(\mathcal{C}_1(2))$).

2. *Compatibilidad con la suspensión*

$$\sigma_* \lambda_n(x, y) = \lambda_{n-1}(\sigma_*(x), \sigma_*(y)).$$

3. *Antisimetría*

$$\lambda_n(x, y) = (-1)^{|x||y|+1+n(|x|+|y|+1)} \lambda_n(y, x).$$

4. *Estructura de álgebra de Poisson*

$$\lambda_n(x \cdot y, z) = x \cdot \lambda_n(y, z) + (-1)^{|y|(n+|z|)} \lambda_n(x, z) \cdot y.$$

5. Identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n+|x|)(n+|z|)} \lambda_n(x, \lambda_n(y, z)) + (-1)^{(n+|y|)(n+|x|)} \lambda_n(y, \lambda_n(z, x)) \\ & \quad + (-1)^{(n+|z|)(n+|y|)} \lambda_n(z, \lambda_n(x, y)) = 0. \end{aligned}$$

En el caso particular $n = 1$, podemos definir una nueva graduación en el álgebra $H_*(\Omega^2 X; \mathbb{Q})$ del modo siguiente: Si $x \in H_p(\Omega^2 X)$ ponemos $|x| := -p$.

Notemos que si $x \in H_p(\Omega^2 X)$ y $y \in H_q(\Omega^2 X)$, entonces $xy \in H_{p+q}(\Omega^2 X)$ por lo que $|xy| = -(p+q)$. Además de manera similar $\lambda_1(x, y) \in H_{1+p+q}(\Omega^2 X)$ implica que $|\lambda_1(x, y)| = -(1+p+q)$.

Por lo tanto:

1. $|x \cdot y| = |x| + |y|$
y
2. $|\lambda_1(x, y)| = |x| + |y| - 1$

Esto es, $H_*(\Omega^2 X)$ junto con el producto de Pontryagin $x \cdot y$ y la operación de Browder $\lambda_1(x, y)$ tiene estructura de **álgebra de Gerstenhaber**.

De manera más general, para $n \geq 1$ podemos introducir una nueva graduación en $H_*(\Omega^{n+1} X)$ como sigue: Para $x \in H_p(\Omega^{n+1} X)$ ponemos $|x| := -\frac{p}{n}$. En este caso, si $x \in H_p(\Omega^{n+1} X)$ y $y \in H_q(\Omega^{n+1} X)$ tenemos:

$$xy \in H_{p+q}(\Omega^{n+1} X) \quad \Rightarrow \quad |xy| = -\frac{(p+q)}{n}$$

$$\lambda_n(x, y) \in H_{n+p+q}(\Omega^{n+1} X) \quad \Rightarrow \quad |\lambda_n(x, y)| = -\frac{(n+p+q)}{n}$$

Así, con esta graduación fraccionaria se tiene

$$|x \cdot y| = |x| + |y|$$

$$|\lambda_n(x, y)| = |x| + |y| - 1.$$

Luego $H_*(\Omega^{n+1} X; \mathbb{Q})$ es un **álgebra de tipo Gerstenhaber**.

3.4. Demostración de las propiedades de λ_n

En esta sección demostraremos las primeras tres propiedades de la operación de Browder enunciadas en la Proposición 3.1 de la sección anterior. Éstas serán de relevancia para el cálculo de la homología racional de $\Omega^n \Sigma^n X$ en el siguiente capítulo.

1. Si X es un H -espacio, entonces

$$\lambda_0(x \otimes y) = x * y - (-1)^{|x||y|} y * x$$

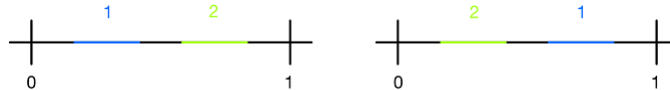
donde $*$ es el producto de Pontryagin (para una elección particular de $\alpha \in H_0(\mathcal{C}_1(2))$).

Demostración

Notemos que $\mathcal{C}_1(2)$ tiene dos componentes conexas

$$\mathcal{C}_1(2) = \mathcal{C}_1(2)^+ \amalg \mathcal{C}_1(2)^-$$

correspondiente al orden de los 1-cubitos.



Entonces $H_0(\mathcal{C}_1(2)) = H_0(\mathcal{C}_1(2))^+ \oplus H_0(\mathcal{C}_1(2))^- = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Sean e_1 y e_2 los generadores naturales de $H_0(\mathcal{C}_1(2))^+$ y $H_0(\mathcal{C}_1(2))^-$, respectivamente y tomemos $\alpha = e_1 - e_2$ como generador de $\bar{H}_0(\mathcal{C}_1(2)) \cong \mathbb{Z}$.

Recordemos que X es un \mathcal{C}_1 -espacio si y sólo si X es un espacio de lazos $X = \Omega Y$ y en tal caso, el mapeo $\theta : \mathcal{C}_1(2) \times X^2 \rightarrow X$ es el producto de lazos, parametrizado por los cubitos en $\mathcal{C}_1(2)$. Notemos que salvo homotopía, la restricción de θ a $\mathcal{C}_1(2)^+ \times X^2 \rightarrow X$ es el producto de lazos en $X = \Omega Y$ y la restricción de θ a $\mathcal{C}_1(2)^- \times X^2 \rightarrow X$ es el producto de lazos invirtiendo factores. Así, tenemos un diagrama homotópicamente conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_1(2)^+ \times X^2 & & \\
\downarrow & \searrow \mu & \\
\mathcal{C}_1(2) \times X^2 & \xrightarrow{\theta} & X \\
\uparrow & \nearrow \mu \circ \tau & \\
\mathcal{C}_1(2)^- \times X^2 & &
\end{array}$$

donde μ es la multiplicación de X y τ es la transposición $(x, y) \mapsto (y, x)$. Pasando a homología

$$\begin{array}{ccc}
H_*(\mathcal{C}_1(2)^+) \otimes H_*(X)^{\otimes 2} & & \\
\downarrow & \searrow \mu_* & \\
H_*(\mathcal{C}_1(2)) \otimes H_*(X)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\theta_*} & H_*(X) \\
\uparrow & \nearrow \mu_* \circ \tau_* & \\
H_*(\mathcal{C}_1(2)^-) \otimes H_*(X)^{\otimes 2} & &
\end{array}$$

donde μ_* es el producto de Pontryagin y τ_* es el morfismo dado por $\tau_*(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|}y \otimes x$. Luego

$$\begin{aligned}
\theta_*(\alpha \otimes x \otimes y) &= \theta_*(e_1 \otimes x \otimes y) - \theta_*(e_2 \otimes x \otimes y) \\
&= \mu_*(x \otimes y) - (\mu_* \circ \tau_*)(x \otimes y) \\
&= x * y - \mu_*((-1)^{|x||y|}y \otimes x) \\
&= x * y - (-1)^{|x||y|}y * x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda_0(x, y) = x * y - (-1)^{|x||y|}y * x$.

2. Antisimetría

$$\lambda_n(y \otimes x) = (-1)^{|x||y|+1+n(|x|+|y|+1)}\lambda_n(x \otimes y)$$

Demostración

Sabemos que $\mathcal{C}_{n+1}(2) \simeq S^n$ y que permutar cubitos corresponde al mapeo antipodal el cual es de grado $n + 1$. Además el mapeo $\tau : X \times X \rightarrow X \times X$ que permuta las coordenadas, induce el morfismo $\tau_* : H_*(X) \otimes H_*(X) \rightarrow H_*(X) \otimes H_*(X)$ dado por

$$\tau_*(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|}y \otimes x.$$

Más aún, sabemos que $\theta : \mathcal{C}_{n+1}(2) \times X^2 \rightarrow X$ es equivariante, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1}(2) \times X \times X & \xrightarrow{\theta} & X \\ \text{per} \times \tau \downarrow & \nearrow \theta & \\ \mathcal{C}_{n+1}(2) \times X \times X & & \end{array}$$

donde $\text{per} : \mathcal{C}_{n+1}(2) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(2)$ es el mapeo que permuta cubitos. Al pasar a homología obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) \otimes H_p(X) \otimes H_q(X) & \xrightarrow{\theta_*} & H_{n+p+q}(X) \\ a_* \otimes \tau_* \downarrow & \nearrow \theta_* & \\ H_n(S^n) \otimes H_p(X) \otimes H_q(X) & & \end{array}$$

donde, $a_* : H_*(S^n) \rightarrow H_*(S^n)$ es multiplicación por $(-1)^{n+1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_n(x \otimes y) &= (-1)^{n|x|} \theta_*(\alpha \otimes x \otimes y) \\ &= (-1)^{n|x|} (-1)^{n+1} (-1)^{|x||y|} \theta_*(\alpha \otimes y \otimes x) \\ &= (-1)^{n|x|} (-1)^{n+1} (-1)^{|x||y|} (-1)^{n|y|} (-1)^{n|y|} \theta_*(\alpha \otimes y \otimes x) \\ &= (-1)^{|x||y|+1+n(|x|+|y|+1)} (-1)^{n|y|} \theta_*(\alpha \otimes y \otimes x) \\ &= (-1)^{|x||y|+1+n(|x|+|y|+1)} \lambda_n(y \otimes x). \end{aligned}$$

3. Conmuta con suspensión

$$\sigma_* \lambda_n(x \otimes y) = \lambda_{n-1}(\sigma_*(x) \otimes \sigma_*(y))$$

Demostración

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_n(S^n) \otimes H_p(\Omega^{n+1}X) \otimes H_q(\Omega^{n+1}X) & \xrightarrow{\theta_*} & H_{n+p+q}(\Omega^{n+1}X) \\
\downarrow \Sigma_*^{-1} \otimes \Sigma_* \otimes \Sigma_* & & \downarrow \Sigma \\
H_{n-1}(S^{n-1}) \otimes H_{p+1}(\Sigma\Omega^{n+1}X) \otimes H_q(\Sigma\Omega^{n+1}X) & & H_{n+p+q+1}(\Sigma\Omega^{n+1}X) \\
\downarrow 1 \otimes e_* \otimes e_* & & \downarrow e_* \\
H_{n-1}(S^{n-1}) \otimes H_{p+1}(\Omega^n X) \otimes H_{q+1}(\Omega^n X) & \xrightarrow{\theta_*} & H_{p+q+n+1}(\Omega^n X)
\end{array}$$

donde Σ_* denota el isomorfismo de suspensión y e_* el inducido del mapeo $[t, \gamma] \mapsto \gamma(t)$. La demostración se basa en probar la conmutatividad de este diagrama usando un argumento a nivel de cadenas que puede ser consultado en [4], [6] y [7]. ■

3.5. La cohomología de $F(\mathbb{R}^n, q)$

Recordemos que si $n \geq 2$, el anillo de cohomología de $F(\mathbb{R}^n, q)$ está generado como álgebra por clases de la forma

$$A_{i,j}^*, \quad 1 \leq j < i \leq q,$$

donde $A_{i,j}^*$ es de grado $n - 1$, (ver [6]). Estos elementos provienen de considerar la equivalencia hootópica $S^{n-1} \simeq F(\mathbb{R}^n, 2)$ y considerar los mapeos de proyección

$$\pi_{i,j} : F(\mathbb{R}^n, q) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$$

dados por $(x_1, \dots, x_q) \mapsto (x_j, x_i)$, con $j < i$. Las clases de cohomología $A_{i,j}^*$ se definen por medio de la ecuación

$$A_{i,j}^* := \pi_{i,j}^*(\iota),$$

donde ι es la clase fundamental de $H^{n-1}(F(\mathbb{R}^n, 2)) \cong \mathbb{Z}$. Estas clases cumplen las siguientes relaciones

- a) $(A_{i,j}^*)^2 = 0$ para $1 \leq j < i \leq q$,
- b) $A_{i,j}^* A_{i,k}^* = A_{k,j}^* (A_{i,k}^* - A_{i,j}^*)$ si $j \leq k$ y
- c) Asociatividad y conmutatividad (en el sentido graduado).

Sea $A_{r,s}$ el elemento en $H_n(\mathcal{C}_{n+1}(l))$ dado por el mapeo

$$H_*(S^n) \xrightarrow{A_{r,s}} H_*(F(\mathbb{R}^{n+1}, l)) \xrightarrow{f_{l*}} H_*(\mathcal{C}_{n+1}(l))$$

donde f_l es la inclusión de $F(\mathbb{R}^{n+1}, l)$ en $\mathcal{C}_{n+1}(l)$ definido por P. May en ([13], Teorema 4.8). Sean $c_k \in \mathcal{C}_{n+1}(k), c_{i_m} \in \mathcal{C}_{n+1}(i_m)$. Definimos un mapeo

$$\phi_t : \mathcal{C}_{n+1}(i_t) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(k) \times \mathcal{C}_{n+1}(i_1) \times \dots \times \mathcal{C}_{n+1}(i_k), \quad 1 < t < k$$

por medio de

$$\phi_t(x) = (c_k, c_1, \dots, c_{i_t-1}, x, c_{i_t+1}, \dots, c_k).$$

Definimos otro mapeo

$$\psi : \mathcal{C}_{n+1}(k) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(k) \times \mathcal{C}_{n+1}(i_1) \times \dots \times \mathcal{C}_{n+1}(i_k)$$

de manera similar. Por convención $\phi_{t*}(A_{r,s}) := A_{r,a,i_t}$ y $\psi_*(A_{r,s}) = A_{r,s,k}$.

Lema 3.2 *Si $\gamma_* : H_*(\mathcal{C}_{n+1}(k)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(i_1)) \otimes \dots \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(i_k)) \rightarrow H_*(\mathcal{C}_{n+1}(j))$ es el inducido por el mapeo de estructura, con $j = i_1 + \dots + i_k$ entonces*

a) $\gamma_*(A_{r,s,i_t}) = A_{r+x,s+x}$, donde $x = i_1 + \dots + i_{t-1}$ (por convención $x = 0$ si $t = 1$).

b) $\gamma_*(A_{r,s,k}) = \sum_{l=0}^{i_{r+1}-1} \sum_{m=1}^{i_s} A_{i_1+\dots+i_r+l, i_1+\dots+i_{s-1}+m}$

Demostración

Véase ([7], Lema 12.1). ■

La íntima relación entre el espacio de configuraciones $F(\mathbb{R}^{n+1}, 2)$ y el operad \mathcal{C}_{n+1} nos permite demostrar las propiedades restantes de λ_n .

4. Identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n+|x|)(n+|z|)} \lambda_n(x, \lambda_n(y, z)) + (-1)^{(n+|y|)(n+|x|)} \lambda_n(y, \lambda_n(z, x)) \\ & \quad + (-1)^{(n+|z|)(n+|y|)} \lambda_n(z, \lambda_n(x, y)) = 0. \end{aligned}$$

Demostración

Nos fijamos en el siguiente diagrama conmutativo, en el cual $\Theta_* = 1 \otimes \theta_{2*} \otimes \theta_{1*}$

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(1)) \otimes H_*(X) & \xrightarrow{\gamma_* \otimes 1} & H_*(\mathcal{C}_{n+1}(3)) \otimes (H_*(X))^3 \\ \downarrow 1 \otimes T_* \otimes 1 & & \searrow \theta_{3*} \\ H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes (H_*(X))^2 \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(1)) \otimes H_*(X) & \xrightarrow{\Theta_*} & H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes (H_*(X))^2 \\ & & \nearrow \theta_{2*} \\ & & H_*(X) \end{array}$$

y observamos que

$$\theta_{2*}(1 \otimes \theta_{2*} \otimes \theta_{1*})(1 \otimes T_* \otimes 1)(A_{11} \otimes A_{11} \otimes e_0 \otimes x \otimes y \otimes z) = (-1)^{n|y|+n} \lambda_n(\lambda_n(x \otimes y) \otimes z) \quad (i)$$

Aprovechando la conmutatividad, calculamos $\gamma_*(A_{11} \otimes A_{11} \otimes e_0)$. Por el Lema 3.2, $\gamma_*(A_{11} \otimes e_0 \otimes e_0) = A_{21} + A_{22}$ y $\gamma_*(e_0 \otimes A_{11} \otimes e_0) = A_{11}$, donde e_0 es la clase natural en dimensión cero.

Dualizando esta información, usamos la estructura del producto cup para llegar a la fórmula

$$(-1)^n \gamma^*(A_{11}^* A_{21}^*) = (A_{11} \otimes e_0 \otimes e_0)^* \cdot (e_0 \otimes A_{11} \otimes e_0)^* = (A_{11} \otimes A_{11} \otimes e_0)^* \quad (ii)$$

Dualizando directamente (ii) obtenemos

$$\gamma_*(A_{11} \otimes A_{11} \otimes e_0) = (-1)^n [(A_{11}^* A_{21}^*)_* + (A_{11}^* A_{22}^*)_*] \quad (iii)$$

donde $(A_{11}^* A_{21}^*)_*$ es el elemento dual a $A_{11}^* A_{21}^*$. Sea A_I que denota $(A_{11}^* A_{21}^*)_*$ y A_J que denota $(A_{11}^* A_{22}^*)_*$. Combinamos las fórmulas (i) – (iii) y observamos que

$$\theta_{3*}[(A_I + A_J) \otimes x \otimes y \otimes z] = (-1)^{n|y|} \lambda_n(\lambda_n(x \otimes y) \otimes z) \quad (iv)$$

Ponemos $\sigma = \tau_1 \tau_2 \in \Sigma_3$ y recordamos que la acción de σ en la base dual está dada por

$$\langle \sigma A_K, x^* \rangle = \langle A_K, \sigma^{-1} x^* \rangle, \quad \text{para } A_K \text{ arbitrario:}$$

$$\langle A_I, \sigma^{-1} x^* \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x^* = A_{11}^* A_{21}^* \\ 1 & \text{si } x^* = A_{11}^* A_{22}^* \end{cases}$$

$$\langle A_J, \sigma^{-1} x^* \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } x^* = A_{11}^* A_{21}^* \\ -1 & \text{si } x^* = A_{11}^* A_{21}^* \end{cases}$$

Juntando esta información con el requisito de equivarianza y fijándonos en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1}(k) \times \mathcal{C}_{n+1}(i_1) \times X^{i_1} \times \dots \times \mathcal{C}_{n+1}(i_k) \times X^{i_k} & \xleftarrow{1 \times \tau \times 1} & \mathcal{C}_{n+1}(k) \times \mathcal{C}_{n+1}(i_1) \times \dots \times \mathcal{C}_{n+1}(i_k) \times X^j \\ \downarrow 1 \times \theta_{i_1} \times \dots \times \theta_{i_k} & & \downarrow \gamma \times 1 \\ \mathcal{C}_{n+1}(k) \times X^k & & \mathcal{C}_{n+1}(j) \times X^j \\ & \searrow \theta_k & \swarrow \theta_j \\ & X & \end{array}$$

el cual es conmutativo por ([13], 1.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_{3*}(A_I \otimes x \otimes y \otimes z) &= \theta_{3*}(\sigma^2 A_I \otimes \sigma^{-2}(x \otimes y \otimes z)) \\ &= (-1)^{1+|x|(|y|+|z|)} \theta_{3*}((A_I + A_J) \otimes y \otimes z \otimes x) \quad (v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{3*}(A_J \otimes x \otimes y \otimes z) &= \theta_{3*}(\sigma A_J \otimes \sigma^{-1}(x \otimes y \otimes z)) \\ &= (-1)^{1+|z|(|x|+|y|)} \theta_{3*}((A_I + A_J) \otimes z \otimes x \otimes y) \quad (vi) \end{aligned}$$

Juntando las fórmulas (iv) – (vi) junto con la antisimetría de λ_n obtenemos lo deseado. ■

5. Estructura de álgebra de Poisson

$$\lambda_n(x \cdot y, z) = x \cdot \lambda_n(y, z) + (-1)^{|y|(n+|z|)} \lambda_n(x, z) \cdot y.$$

Demostración

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2))^{\otimes 2} \otimes H_*(X)^{\otimes 4} & \xrightarrow{\gamma_* \otimes 1} & H_*(\mathcal{C}_{n+1}(4)) \otimes (H_*(X))^{\otimes 4} \\ \downarrow 1 \otimes T_* \otimes 1 & & \searrow \theta_{4*} \\ H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes (H_*(X))^{\otimes 2} \otimes H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes H_*(X)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\Theta_*} & H_*(\mathcal{C}_{n+1}(2)) \otimes (H_*(X))^{\otimes 2} \\ & & \nearrow \theta_{2*} \\ & & H_*(X) \end{array}$$

donde $\Theta_* = 1 \otimes \theta_{2*} \otimes \theta_{2*}$. Por el Lema 3.2, $\gamma_*(e_0 \otimes A_{11} \otimes e_0) = A_{11}$ y por lo tanto

$$\theta_{4*}(A_{11} \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) = (-1)^{n|x|+1} \lambda_n(x, y) \cdot u \cdot v.$$

Notemos también que

$$\gamma_*(A_{11} \otimes e_0 \otimes e_0) = A_{21} + A_{22} + A_{31} + A_{32}$$

y

$$\theta_{4*} \gamma_*(A_{11} \otimes e_0 \otimes e_0 \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) = (-1)^{n(|x|+|y|)+1} \lambda_n(x \cdot y, u \cdot v). \quad (3.1)$$

Recordemos la acción del grupo simétrico Σ_4 sobre las clases A_{ij} , tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1}(4) \times X^4 & & \\ \downarrow \rho \times \rho^{-1} & \searrow \theta_4 & \\ \mathcal{C}_{n+1}(4) \times X^4 & & X \\ & \nearrow \theta_4 & \end{array}$$

donde, $\rho \in \Sigma_4$. Usando el diagrama anterior calculamos

$$\begin{aligned}
\theta_{4*}(A_{21} \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) &= (-1)^{|y||u|} \theta_{4*}(A_{11} \otimes x \otimes u \otimes y \otimes v) \\
&= (-1)^{|y||u|+n|x|+1} \lambda_n(x, u) \cdot y \cdot v, \quad (3,2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{4*}(A_{22} \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) &= (-1)^{|x||y|} \theta_{4*}(A_{21} \otimes y \otimes x \otimes u \otimes v) \\
&= (-1)^{|x||y|+|x||u|+n|y|+1} \lambda_n(y, u) \cdot x \cdot v, \quad (3,3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{4*}(A_{31} \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) &= (-1)^{|u||v|} \theta_{4*}(A_{21} \otimes x \otimes y \otimes v \otimes u) \\
&= (-1)^{|u||v|+|y||v|+n|x|+1} \lambda_n(x, v) \cdot y \cdot u, \quad (3,4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{4*}(A_{32} \otimes x \otimes y \otimes u \otimes v) &= (-1)^{|u||v|} \theta_{4*}(A_{22} \otimes x \otimes y \otimes v \otimes u) \\
&= (-1)^{|u||v|+|x||y|+n|y|+1} \lambda_n(y, v) \cdot x \cdot u. \quad (3,5)
\end{aligned}$$

Usando las fórmulas (3.1)-(3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x \cdot y, u \cdot v) &= (-1)^{|y|(n+|u|)} \lambda_n(x, u) \cdot y \cdot v + (-1)^{|x|(n+|y|+|u|)} \lambda_n(y, u) \cdot x \cdot v \\
&\quad + (-1)^{|y|(n+|v|)+|u||v|} \lambda_n(x, v) \cdot y \cdot u + (-1)^{|x|(n+|v|+|y|)+|u||v|} \lambda_n(y, v) \cdot x \cdot u.
\end{aligned}$$

Luego, el resultado se sigue. ■

Capítulo 4

La Homología Racional de $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$

En este capítulo presentamos el cálculo de la homología racional del espacio de lazos iterados $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ en términos de la homología racional de X . A saber, probaremos el siguiente

Teorema 4.1 *Si $H_q(X; \mathbb{Q})$ es de dimensión finita para toda $q \geq 0$, entonces*

$$H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X; \mathbb{Q}) \cong S[s^{-n}L(s^n V_*)]$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $V_* = \overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$.

Aquí $S[W]$ representa el álgebra simétrica generada por el espacio vectorial graduado W y $L[W]$ representa el álgebra de Lie libre generada por W . El cálculo se llevará a cabo por inducción sobre n , usando la sucesión espectral de Serre de la fibración de trayectorias y lazos

$$\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \rightarrow P(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \Omega^n\Sigma^{n+1}X$$

comenzando con el Teorema de Bott-Samelson que implica que $H_*(\Omega\Sigma^2 X; \mathbb{Q}) \cong T[s\overline{H}_*(X; \mathbb{Q})]$. Formalmente consideramos dos casos: la fibración

$$\Omega^2\Sigma^2 X \rightarrow P(\Omega\Sigma^2 X) \rightarrow \Omega\Sigma^2 X$$

en donde la homología de la base es en general un álgebra no conmutativa y el paso inductivo en donde la fibra es $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ con $n \geq 2$. En ambos casos, el análisis de la sucesión espectral usa fuertemente las propiedades de la operación de Browder $\lambda_n : H_p(\Omega^{n+1}Z) \rightarrow H_{n+p+q}(\Omega^{n+1}Z)$ introducida en el capítulo anterior.

4.1. La homología de $\Omega^2\Sigma^2X$

En esta sección obtendremos la homología racional del espacio $\Omega^2\Sigma^2X$ a partir de la sucesión espectral de Serre de la fibración

$$\Omega^2\Sigma^2X \rightarrow P(\Omega\Sigma^2X) \rightarrow \Omega\Sigma^2X$$

cuya segunda página está dada por

$$H_p(\Omega\Sigma^2X) \otimes H_q(\Omega^2\Sigma^2X)$$

y converge a la homología de un punto.

Para empezar, notemos que el mapeo natural $\Sigma X \rightarrow \Omega\Sigma(\Sigma X)$ dado como el adjunto del mapeo identidad $\Sigma^2X \rightarrow \Sigma^2X$, induce un monomorfismo en homología

$$sV_* = s\overline{H}_*(X) = \overline{H}_*(\Sigma X) \rightarrow H_*(\Omega\Sigma^2X).$$

Del mismo modo, el mapeo natural $X \rightarrow \Omega^2\Sigma^2X$ induce una inclusión $V_* = \overline{H}_*(X) \rightarrow H_*(\Omega^2\Sigma^2X)$ y ambos morfismos son compatibles con la suspensión homológica, esto es, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_* & \longrightarrow & H_*(\Omega^2\Sigma^2X) \\ \sigma_* \downarrow & & \downarrow \sigma_* \\ (sV)_{*+1} & \longrightarrow & H_{*+1}(\Omega\Sigma^2X). \end{array}$$

Más aún, por el Teorema de Bott-Samelson tenemos

$$H_*(\Omega\Sigma^2X) \cong T[sV_*].$$

Por otro lado, como consecuencia de los métodos usados en el Teorema de Hilton sabemos que

$$T[sV_*] \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}[x_i],$$

donde $\{x_i\}$ es una base para el álgebra de Lie libre generada por sV_* en $T[sV_*]$. Por lo tanto los x_i son de la forma

$$x_i = [a_1, [a_2, [a_3, \dots],],]$$

para ciertos $a_j \in H_*(\Sigma X) \subset H_*(\Omega\Sigma^2X)$.

La relación con la sucesión espectral de Serre está dada por el siguiente

Lema 4.1 *Todos los x_i son transgresivos. De hecho, si $a_i = \sigma_* \alpha_i$ con $\alpha_i \in H_*(X) \subset H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X)$ y definimos $\xi_i = \lambda_1(\alpha_1, \lambda_1(\alpha_2, \lambda_1(\alpha_3, \dots), \dots))$, entonces se tiene $\sigma_*(\xi_i) = x_i$*

Demostración

Como la operación de Browder conmuta con la suspensión, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_*(\xi_i) &= \sigma_*(\lambda_1(\alpha_1, \lambda_1(\alpha_2, \lambda_1(\alpha_3, \dots), \dots))) \\ &= \lambda_0(\sigma_*(\alpha_1, \lambda_0(\sigma_*(\alpha_2), \lambda_0(\sigma_*(\alpha_3), \dots), \dots))) \\ &= [a_1, [a_2, [a_3, \dots], \dots]] = x_i. \end{aligned}$$

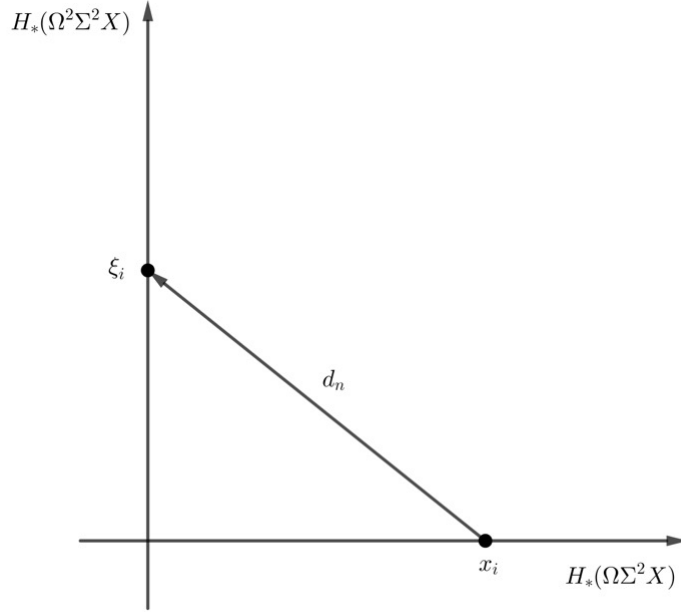
Más aún, analizando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_*(C\Omega^2 \Sigma^2 X, \Omega^2 \Sigma^2 X) & \longrightarrow & H_*(P\Omega^2 \Sigma^2 X, \Omega^2 \Sigma^2 X) & \xrightarrow{\partial_*} & \frac{H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X)}{\ker(e_*)} \\ & & \downarrow \cong & & \uparrow \tau \text{ (dashed)} \\ H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X) & \xrightarrow{\cong} & H_*(\Sigma\Omega^2 \Sigma^2 X, *) & \xrightarrow{\ell_*} & H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X, *) \\ & \searrow \sigma_* & & & \uparrow e_* \end{array}$$

vemos que la imagen de la suspensión homológica $\sigma_* : H_*(\Omega^2 \Sigma^2 X) \rightarrow H_{*+1}(\Omega^2 \Sigma^2 X)$ está contenida en el dominio de la transgresión. De aquí se sigue que los $x_i = \sigma_*(\xi_i)$ son todos transgresivos. ■

De este modo, como se vio en la sección 3,1, nos encontramos en la situación en que la suspensión σ_* y la transgresión (el diferencial de elementos de la base) son inversas una de la otra en la sucesión espectral. Por lo tanto

$$d^n(x_i) = d^n(\sigma_*(\xi_i)) = \xi_i.$$



De aquí se sigue que si los generadores x_i están dados por $x_i = [a_1, [a_2, \dots],]$ con $a_j = \sigma_*(\alpha_j)$, donde $a_i \in H_*(\Sigma X) \subset H_*(\Omega\Sigma^2 X)$ y $\alpha_j \in H_*(X) \subset H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$, entonces los a_j y los x_i son transgresivos y satisfacen

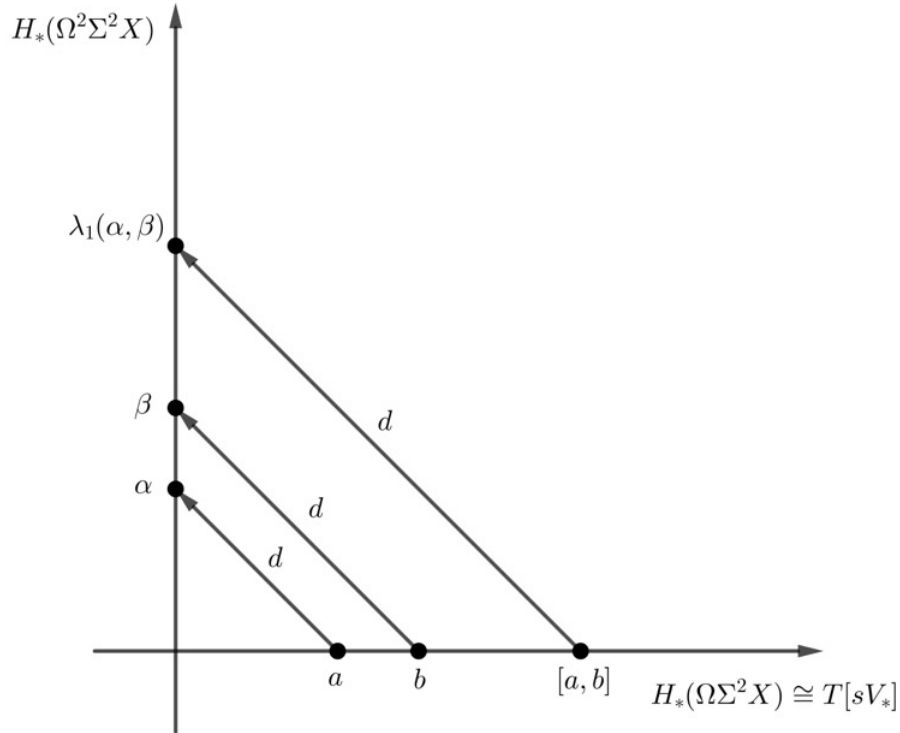
$$d(a_j) = \alpha_j \quad \text{y} \quad d(x_i) = \xi_i$$

donde $\xi_i = \lambda_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Así tenemos que si $\alpha, \beta \in H_*(X) \subset H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$ y $a, b \in H_*(\Sigma X) \subset H_*(\Omega\Sigma^2 X)$ son tales que $\sigma_*(\alpha) = a, \sigma_*(\beta) = b$, entonces

$$\sigma_*\lambda_1(\alpha, \beta) = \lambda_0(\sigma_*(\alpha), \sigma_*(\beta)) = [a, b].$$

Esto es, el conmutador de dos elementos transgresivos es también transgresivo y la transgresión (diferencial) manda a un tal conmutador en $H_*(\Omega\Sigma^2 X)$ en el correspondiente conmutador, con respecto a la operación de Browder λ_1 , en $H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$. Esto es suficiente para decidir la estructura de la suceión espectral.



Formalmente usaremos una sucesión espectral auxiliar la cual compararemos con la sucesión espectral de Serre en cuestión. Esta nueva sucesión espectral se construye de manera puramente algebraica, con la página dos dada por

$${}'E_{*,*}^2 = T[sV_*] \otimes S[s^{-1}L[sV_*]]$$

y los diferenciales en $T[sV_*] \cong \bigotimes_i \mathbb{Q}[x_i]$ están dados por

$$d[s\alpha_1, \dots, s\alpha_k] = s^{-1}[s\alpha_1, \dots, s\alpha_k].$$

Se extiende por la regla de Leibnitz. Los diferenciales en el segundo factor $S[s^{-1}L[sV_*]]$ son cero. Así la estructura de los diferenciales en $\{{}'E_{*,*}^n\}_n$ se sigue por completo de la regla de Leibnitz. Más aún, se puede ver que esta sucesión espectral converge a la homología de un punto, es decir, ${}'E_{*,*}^\infty = \mathbb{Q}$ concentrado en bigrado $(0, 0)$.

Consideremos ahora el morfismo de sucesiones espectrales

$$f : \{{}'E_{*,*}^n\} \rightarrow \{E_{*,*}^n\}$$

dado por

$$f(\xi \otimes \eta) = f_1(\xi) \otimes f_2(\eta)$$

donde

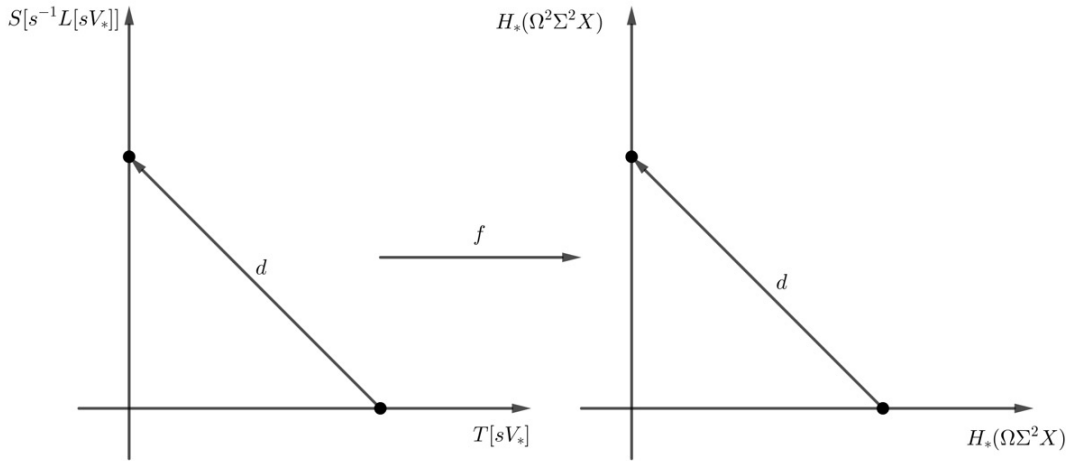
$$f_1 : T[sV_*] \rightarrow H_*(\Omega\Sigma^2 X)$$

está dado por el isomorfismo de Bott-Samelson y

$$f_2 : S[s^{-1}L[sV_*]] \rightarrow H_*(\Omega^2\Sigma^2 X)$$

está dado por

$$f_2(s^{-1}[s\alpha_1, \dots, s\alpha_k]) = \lambda_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$



Finalmente y dado que ambas sucesiones espectrales convergen a la homología de un punto y las bases son isomorfas, entonces por el Teorema de Comparación de Zeeman (véase [14], Teorema 3.26) se obtiene que las fibras son isomorfas, es decir,

$$H_*(\Omega^2\Sigma^2 X) \cong S[s^{-1}L[sV_*]].$$

4.2. El Paso Inductivo

En esta sección calcularemos la homología racional del espacio $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ usando ideas análogas a las de la sección anterior. De la misma forma que

en el caso base, usaremos la sucesión espectral de Serre, pero ahora de la fibración

$$\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X \rightarrow P(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \rightarrow \Omega^n\Sigma^{n+1}X$$

cuya segunda página está dada por

$$E_{p,q}^2 = H_p(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \otimes H_q(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X)$$

y converge a la homología de un punto.

Como $\Omega^n\Sigma^{n+1}X = \Omega^n\Sigma^n(\Sigma X)$, entonces por hipótesis de inducción

$$H_*(\Omega^n\Sigma^{n+1}X) \cong S[s^{-(n-1)}L[s^{n-1}sV_*]] \cong S[s^{-(n-1)}L[s^nV_*]].$$

Sea $\{t_i\}$ una base para el álgebra de Lie libre generada por s^nV_* , entonces los t_i son de la forma

$$t_i = [p_1, [p_2, [p_3, \dots],],]$$

para ciertos $p_j \in H_*(\Sigma^n X) \subset H_*(\Omega^n\Sigma^{n+1}X)$.

Usando el hecho de que $\sigma_*\lambda_n(x, y) = \lambda_{n-1}(\sigma_*(x), \sigma_*(y))$ y un tratamiento análogo al de la sección anterior, se demuestra que los t_i son transgresivos y que si $p_i = \sigma_*(\rho_i)$ con $\rho_i \in H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X)$ y $\chi_i := \lambda_n(\rho_1, \lambda_n(\rho_2, \lambda_n(\rho_3, \dots)), \dots)$, entonces $\sigma_*(\chi_i) = t_i$. De nuevo, como se vio en la sección 3,1, estamos en la situación en la que la suspensión σ_* y la transgresión (el diferencial de elementos de la base) son inversas una de la otra en la sucesión espectral. Por lo tanto

$$d^k(t_i) = d^k(\sigma_*(\chi_i)) = \chi_i.$$

Podemos concluir que el conmutador de dos elementos transgresivos es también transgresivo y que la transgresión (el diferencial) manda a un tal conmutador en $H_*(\Omega^n\Sigma^{n+1}X)$ en el correspondiente conmutador, con respecto a la operación de Browder λ_n en $H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X)$ y como vimos en la sección anterior esto es suficiente para decidir la estructura de la sucesión espectral.

Construiremos una sucesión espectral auxiliar que tiene como página dos

$${}'E_{*,*}^2 = S[s^{-(n-1)}L[s^nV_*]] \otimes S[s^{-n}L[s^nV_*]]$$

cuyos diferenciales en $S[s^{-(n-1)}L[s^nV_*]]$ están generados por

$$d(s^{-(n-1)}[s^n x_1, \dots, s^n x_q]) = s^{-n}[s^n x_1, \dots, s^n x_q],$$

los cuales se extienden por la regla de Leibnitz. Mientras que en $S[s^n L[s^n V_*]]$ los diferenciales son cero. Así la estructura de los diferenciales en $\{{}'E_{*,*}^n\}_n$ se sigue por completo por la regla de Leibnitz. Más aún, se puede ver que con esta elección de diferenciales la sucesión espectral converge a la homología de un punto, es decir, $'E_{*,*}^\infty = \mathbb{Q}$ concentrado en bigrado $(0, 0)$.

Consideremos el morfismo de sucesiones espectrales

$$f : \{E_{*,*}^n\} \rightarrow \{{}'E_{*,*}^n\}$$

dado por

$$f(\xi \otimes \eta) = f_1(\xi) \otimes f_2(\eta)$$

donde f_1 es el isomorfismo dado por la hipótesis de inducción y f_2 es el morfismo que manda corchetes básicos en productos de Whitehead $\lambda_n(\dots)$.

Finalmente y dado que los términos $E^\infty, {}'E^\infty$ son isomorfos y hay un isomorfismo entre las bases, obtenemos por el Teorema de Comparación de Zeeman ([14]) que las fibras son isomorfas, es decir

$$H_*(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X) \cong S[s^{-n}L[s^n V_*]]. \quad \blacksquare$$

4.3. Ejemplos

En esta sección calculamos la homología de los dobles lazos de S^3 y de S^4 analizando directamente la sucesión espectral de Serre de la fibración

$$\Omega^2 S^n \rightarrow P(\Omega S^n) \rightarrow \Omega S^n$$

y comparamos con el teorema probado en las secciones anteriores. Claramente estos resultados se generalizan al caso de los dobles lazos de una esfera arbitraria de dimensión par e impar. Finalmente presentamos el ejemplo de la homología de $\Omega^2(S^3 \vee S^4)$, cuyo análisis directo es más elaborado. En toda esta sección, $H_*(-)$ denotará homología racional $H_*(-, \mathbb{Q})$.

Ejemplo 4.1 *La homología $H_*(\Omega^2 S^3; \mathbb{Q})$ es isomorfa a un álgebra exterior $E[y_1]$ en una clase de dimensión 1.*

Consideremos la sucesión espectral de Serre asociada a la fibración

$$\Omega^2 S^3 \rightarrow P(\Omega S^3) \rightarrow \Omega S^3,$$

cuya página $E_{*,*}^2$ está dada por

$$E_{p,q}^2 = H_p(\Omega S^3) \otimes H_q(\Omega^2 S^3)$$

y que converge a la homología de un punto. Por el teorema de Bott-Samelson sabemos que

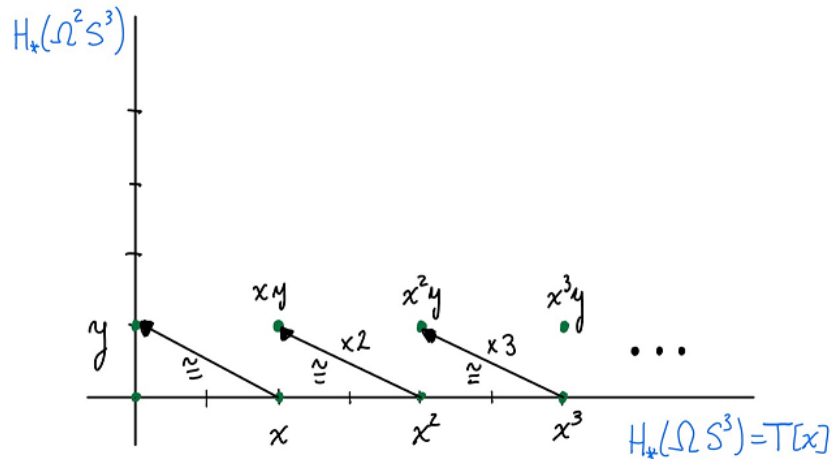
$$H_*(\Omega S^3) \cong H_*(\Omega \Sigma S^2) \cong T[\overline{H}_*(S^2)] \cong T[x],$$

donde x es una clase de dimensión 2.

En el término $E_{*,*}^2$ definimos $y := d^2(x)$, con $y \in H_1(\Omega^2 S^3)$ y notamos que por ejemplo

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dx)x + x(dx) = 2xy \\ dx^3 &= (dx)x^2 + x(dx^2) = 3x^2y. \end{aligned}$$

Procediendo por inducción se prueba que $d(x^n) = nx^{n-1}y$. Además como $|y| = 1$ y $H_*(\Omega^2 S^3)$ es un álgebra conmutativa graduada, se sigue que $y^2 = 0$ y la sucesión espectral se colapsa en el término $E_{*,*}^2$.



Por lo tanto la homología de la fibra está dada por $H_*(\Omega^2 S^3) = E[y]$, esto es, un álgebra exterior en un generador de dimensión 1.

Veamos ahora que este resultado es compatible con el teorema principal de este capítulo. Notemos que $\Omega^2 S^3 = \Omega^2 \Sigma^2 X$, con $X = S^1$. Por lo tanto:

- $\overline{H}_*(X) = \mathbb{Q}$, concentrada en dimensión 1,
- $s\overline{H}_*(X) = \mathbb{Q} \cdot x$, con x un generador de dimensión 2,
- $L[s\overline{H}_*(X)] = L[x] \subset T[x]$, donde el corchete $[x, x]$ está dado por $[x, x] = x \otimes x - x \otimes x$.

Por lo que $L[s\overline{H}_*(X)] = \mathbb{Q} \cdot x$, concentrada en dimensión 2, con el corchete trivial. Entonces $s^{-1}L[s\overline{H}_*(X)] = \mathbb{Q} \cdot y$, con y un generador de dimensión 1, con lo cual

$$S[s^{-1}L[s\overline{H}_*(X)]] = S[y] = E[y].$$

Ejemplo 4.2 La homología $H_*(\Omega^2 S^4; \mathbb{Q})$ es isomorfa a $\mathbb{Q}[y] \otimes E[z]$, donde $\mathbb{Q}[y]$ es un álgebra polinomial en una clase de dimensión 2 y $E[z]$ es un álgebra exterior en una clase de dimensión 5.

En este caso consideramos la sucesión espectral de Serre de la fibración

$$\Omega^2 S^4 \rightarrow P(\Omega S^4) \rightarrow \Omega S^4,$$

cuyo término $E_{*,*}^2$ está dado por

$$E_{p,q}^2 = H_p(\Omega S^4) \otimes H_q(\Omega^2 S^4)$$

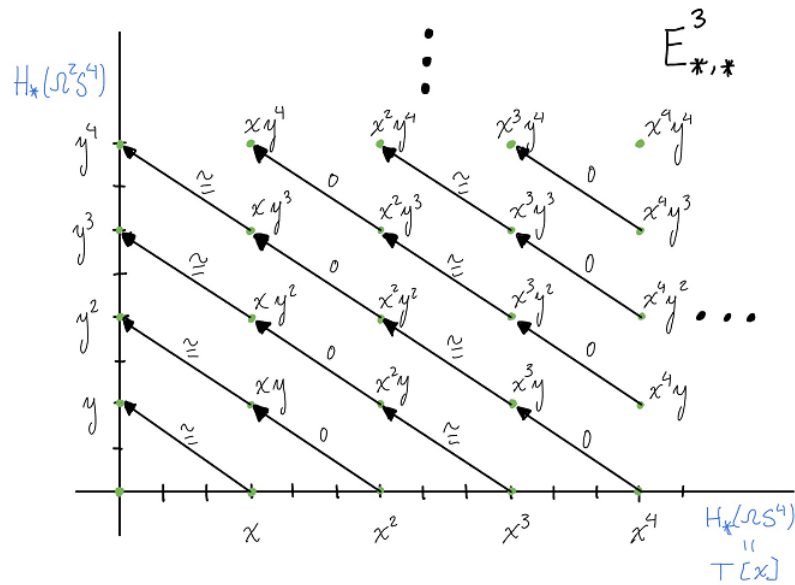
y que converge a la homología de un punto. Nuevamente por el teorema de Bott-Samelson tenemos que

$$H_*(\Omega S^4) \cong H_*(\Omega \Sigma S^3) \cong T[\overline{H}_*(S^3)] \cong T[x],$$

donde x es una clase de dimensión 3. Notemos que el primer diferencial no trivial aparece en la página $E_{*,*}^3$ y si ponemos $y := d^3(x) \in H_2(\Omega^2 S^4)$, entonces

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dx)x - x(dx) = xy - xy = 0 \\ dx^3 &= (dx)x^2 - x(dx^2) = x^2y \\ dx^4 &= d(x^2 \cdot x^2) = 0, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general se demuestra que $dx^{2n} = 0$ y $dx^{2n+1} = x^{2n}y$. Usando la regla de Leibnitz, veamos que el término $E_{*,*}^3$ tiene la siguiente forma:

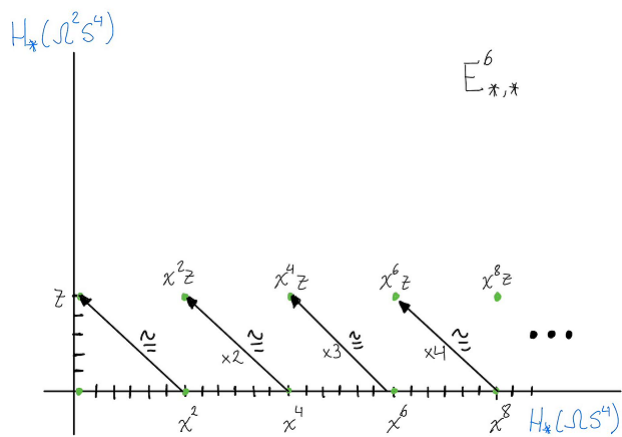


Notemos que los diferenciales de las clases $x^{2n}y^m$ son cero para toda $n, m \in \mathbb{N}$, por lo que estas clases sobreviven hasta la página $E_{*,*}^6$. En particular tenemos que x^2 es transgresivo y denotaremos a su diferencial en $E_{*,*}^6$ por $z := d^6(x^2) \in H_5(\Omega^2 S^4)$. Al calcular los diferenciales de x^{2n} en $E_{*,*}^6$ tenemos

$$d(x^4) = (dx^2)x^2 + x^2(dx^2) = 2x^2z$$

$$d(x^6) = (dx^2)x^4 + x^2(dx^4) = 3x^4z,$$

y en general, $d(x^{2n}) = nx^{2n-2}z$. Como $|z| = 5$, entonces $z^2 = 0$ y por lo tanto no habrá diferenciales más allá de $E_{*,*}^6$.



Concluimos entonces que la homología de la fibra está dada por $H_*(\Omega^2 S^4) = \mathbb{Q}[y_2] \otimes E[z_5]$.

Por otro lado, como $\Omega^2 S^4 = \Omega^2 \Sigma^2 X$, con $X = S^2$, tenemos que

- $s\overline{H}_*(X) = \mathbb{Q} \cdot x$, con $|x| = 3$
- $L[s\overline{H}_*(X)] = L[x] \subset T[x]$ donde el corchete está dado por

$$\begin{aligned} [x, x] &= x \otimes x + x \otimes x = 2(x \otimes x) \\ [[x, x], x] &= [x, x] \otimes x - x \otimes [x, x] = 0 \end{aligned}$$

y similarmente los corchetes de peso mayor que 2 son cero.

Por lo tanto, $L[s\overline{H}_*(X)] = \mathbb{Q} \cdot x \oplus \mathbb{Q} \cdot [x, x]$ con x en dimensión 3 y $[x, x]$ en dimensión 6, de donde

$$s^{-1}L[s\overline{H}_*(X)] = \mathbb{Q} \cdot y \oplus \mathbb{Q} \cdot z$$

con y en dimensión 2 y z en dimensión 5. Concluimos así que

$$S[s^{-1}L[s\overline{H}_*(X)]] = S[y, z] = \mathbb{Q}[y] \otimes E[z].$$

Ejemplo 4.3 *La homología racional del espacio $\Omega^2(S^3 \vee S^4)$.*

Consideremos la sucesión espectral de Serre de la fibración

$$\Omega^2(S^3 \vee S^4) \rightarrow P\Omega(S^3 \vee S^4) \rightarrow \Omega(S^3 \vee S^4),$$

cuyo término $E_{*,*}^2$ está dado por

$$E_{p,q}^2 = H_p(\Omega(S^3 \vee S^4)) \otimes H_q(\Omega^2(S^3 \vee S^4)).$$

Por el teorema de Bott-Samelson la homología de la base es

$$H_*(\Omega(S^3 \vee S^4)) = H_*(\Omega\Sigma(S^2 \vee S^3)) = T[x, y],$$

donde $|x| = 2$ y $|y| = 3$. En la página $E_{*,*}^2$ notemos que

- El diferencial $d^2 : E_{2,0}^2 \rightarrow E_{0,1}^2$ es un isomorfismo. En particular, x es un elemento transgresivo y ponemos $d^2(x) := a$.
- $d^2(y) = 0$ y por lo tanto y será transgresivo en la página $E_{*,*}^3$.

- Haciendo cálculos de rutina podemos ver que $d^2([x, y]) = 0$.
- De igual forma, es fácil ver que $d^2([x, [x, y]]) = 0$.
- El diferencial $d^2 : E_{2,2}^2 \rightarrow E_{0,3}^2$ está dado por $d^2(x \otimes b) = ab$.
- El diferencial $d^2 : E_{2,4}^2 \rightarrow E_{0,5}^2$ está dado por $d^2(x \otimes c) = ac$.

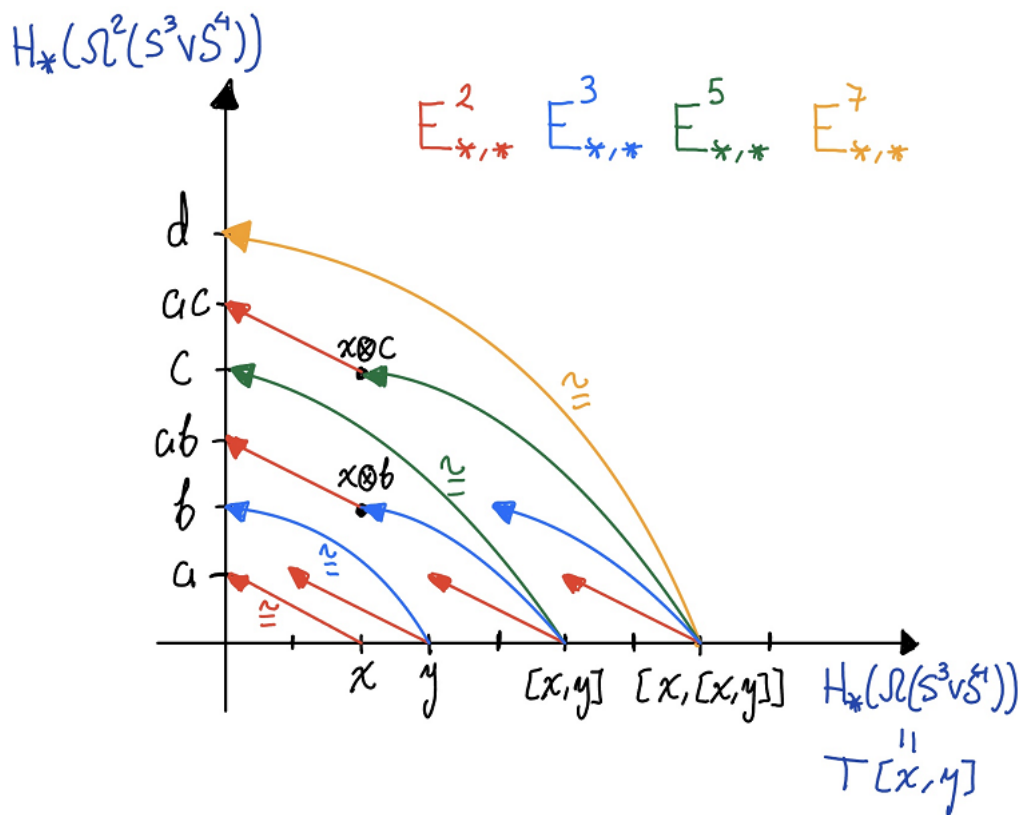
En la página $E_{*,*}^3$ tenemos que

- El diferencial $d^3 : E_{3,0}^3 \rightarrow E_{0,2}^3$ es un isomorfismo. En particular el elemento y es transgresivo y ponemos $d^3(y) := b$.
- $d^3([x, y]) = 0$ y por tanto el corchete $[x, y]$ sobrevive hasta la página $E_{*,*}^5$ en donde será transgresivo.
- Por cuestiones de dimensión $d^3([x, [x, y]]) = 0$.

En la página $E_{*,*}^5$ tenemos que

- El diferencial $d^5 : E_{5,0}^5 \rightarrow E_{0,4}^5$ es un isomorfismo. En particular, $[x, y]$ es transgresivo y ponemos $d^5([x, y]) := c$.
- $d^5([x, [x, y]]) = 0$ por lo que sobrevive hasta la página $E_{*,*}^7$ en donde será transgresivo.

En la página $E_{*,*}^7$ tenemos que el diferencial $d^7 : E_{2,0}^7 \rightarrow E_{0,6}^7$ es un isomorfismo y ponemos $d^7([x, [x, y]]) := d$. Haciendo un análisis como el anterior en las páginas subsecuentes se puede ver que los corchetes básicos, que definen una base para $L[x, y] \subset T[x, y]$, son transgresivos. Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente diagrama:



Dado que los diferenciales en los elementos transgresivos disminuyen el grado total por 1, es claro que éstos pueden modelarse por medio de la desuspensión algebraica. Por otro lado la estructura de álgebra de Lie se traslada de la homología de la base a la homología de la fibra por el hecho de que la suspensión $\sigma_* = \tau^{-1}$ conmuta con las respectivas operaciones de Browder λ_1 , λ_0 y que $\lambda_0(u, v) = [u, v]$ en $H_*(\Omega(S^3 \vee S^4))$. Por lo tanto:

$$H_*(\Omega^2(S^3 \vee S^4)) \cong S[a, b, c, d, \dots] \cong S[s^{-1}L[x, y]] \cong S[s^{-1}L[s\bar{H}_*(X)]],$$

donde $X = S^1 \vee S^2$.

4.4. Relación con la homología de $F(\mathbb{R}^n, q)$

Recordemos que si X es un espacio arco-conexo con punto base no degenerado, entonces por el Teorema de Aproximación de P. May (Teorema 3,6) el espacio de lazos $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ es homotópicamente equivalente a

$$C_{n+1}(X) = \left[\coprod_{j=0}^{\infty} C_{n+1}(j) \times_{\Sigma_j} X^j \right] / \sim,$$

donde $C_{n+1}(j)$ es el espacio de j $(n+1)$ -cubitos y \sim es la relación de equivalencia especificada al final de la sección 3,2. Dado que $C_{n+1}(j)$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio de configuraciones $F(\mathbb{R}^{n+1}, j)$, se tiene que

$$C_{n+1}(X) \simeq \left[\coprod_{j=0}^{\infty} F(\mathbb{R}^{n+1}, j) \times_{\Sigma_j} X^j \right] / \sim.$$

Notemos que esta última construcción está filtrada por subespacios dados por longitud de configuraciones

$$\left[\coprod_{j=0}^k F(\mathbb{R}^{n+1}, j) \times_{\Sigma_j} X^j \right] / \sim$$

y que los cocientes sucesivos resultan ser de la forma

$$D_k(\mathbb{R}^{n+1}, X) = \frac{F(\mathbb{R}^{n+1}, k) \times_{\Sigma_k} X^k}{F(\mathbb{R}^{n+1}, k) \times_{\Sigma_k} *}.$$

Más aún, V. Snaitth probó en [23] la correspondiente generalización de la descomposición de James.

Teorema 4.2 (*Snaith*)

La filtración anterior se escinde al pasar a espectros suspensión. Esto es, se tiene una equivalencia homotópica

$$\Sigma^{\infty}(\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X) \simeq \bigvee_{j \geq 1} \Sigma^{\infty}D(\mathbb{R}^{n+1}, j).$$

Es claro entonces que la descripción de la homología racional del espacio $\Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$ debe tener una relación muy estrecha con la homología de los espacios de configuraciones $F(\mathbb{R}^{n+1}, q)$.

Recordemos que una base para $H^{nk}(F(\mathbb{R}^{n+1}, q); \mathbb{Z})$ está dada por monomios de la forma:

$$A_I^* = A_{i_1, j_1}^* A_{i_2, j_2}^* \dots A_{i_k, j_k}^* \quad \text{con} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad j_t < i_t.$$

Denotemos por A_I al correspondiente elemento de la base dual en homología. Recordemos que el elemento $\lambda_n(x, y)$ en $H_*(\Omega^{n+1}X)$ fue definido como

$$\lambda_n(x, y) = (-1)^{n|x|}\theta_*(\alpha \otimes x \otimes y),$$

donde $\alpha = A_{2,1}$ es el generador correspondiente a la clase fundamental en $H_n(F(\mathbb{R}^{n+1}, 2)) \cong H_n(S^n)$.

Las iteraciones de λ_n son obtenidas por medio de los mapeos

$$\gamma : \mathcal{C}_{n+1}(2) \times \mathcal{C}_{n+1}(j) \times \mathcal{C}_{n+1}(k) \rightarrow \mathcal{C}_{n+1}(j+k).$$

Así, por ejemplo, $\lambda_n(\lambda_n(x, y), z)$ está dado, salvo signo, por

$$\theta_*(\gamma_*(A_{2,1} \otimes A_{2,1} \otimes 1) \otimes x \otimes y \otimes z)$$

donde $1 \in H_0(\mathcal{C}_{n+1}(1)) \cong \mathbb{Z}$ es un generador.

Se puede verificar directamente de las definiciones que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{n+1}(2) \times \mathcal{C}_{n+1}(j) \times \mathcal{C}_{n+1}(k) \times (\Omega^{n+1}X)^{j+k} & \xrightarrow{\gamma \times id} & \mathcal{C}_{n+1}(j+k) \times (\Omega^{n+1}X)^{j+k} \\ \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathcal{C}_{n+1}(2) \times \mathcal{C}_{n+1}(j) \times (\Omega^{n+1}X)^j \times \mathcal{C}_{n+1}(k) \times (\Omega^{n+1}X)^k & & \Omega^{n+1}X \\ \downarrow id \times \theta \times \theta & & \downarrow id \\ \mathcal{C}_{n+1}(2) \times \Omega^{n+1}X \times \Omega^{n+1}X & \xrightarrow{\theta} & \Omega^{n+1}X \end{array}$$

Un cálculo directo usando las proyecciones

$$\pi_{i,t} : F(\mathbb{R}^{n+1}, j+k) \rightarrow F(\mathbb{R}^{n+1}, 2),$$

donde $1 \leq t < i \leq j+k$, nos da fórmulas para calcular el morfismo inducido por γ en homología. Por ejemplo

$$\gamma_*(A_{2,1} \otimes A_{2,1} \otimes 1) = (-1)^n [(A_{2,1}A_{3,1}) + (A_{2,1}A_{3,2})]$$

como se verifica en [7], pág 316. La aplicación de la acción del grupo simétrico Σ_{j+k} en $H_*(\mathcal{C}_{n+1}(j+k))$ junto con el hecho de que θ es equivariante termina la demostración de la identidad de Jacobi para λ_n .

Este tipo de argumento nos da más información. A saber, usando inducción se prueba que

$$\theta_*(A_I \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_k)$$

es una combinación lineal de elementos de la forma

$$\lambda_n[\dots [\lambda_n[\lambda_n[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}], \dots], x_{\sigma(k)}] \quad (4.1)$$

con $\sigma \in \Sigma_k$ y $q = k+1$. Más aún, si B es cualquier elemento de $H_{nt}(F(\mathbb{R}^{n+1}, q))$ para $0 \leq t < q - 1$, entonces $\theta_*(B \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_q)$ es una combinación lineal de expresiones de la forma (4.1). Así, al conmutar con las iteraciones de la suspensión homológica obtenemos un isomorfismo entre

$$H_{(k-1)n}(F(\mathbb{R}^{n+1}, k); \mathbb{Q}) \otimes_{\Sigma_k} V^{\otimes k}$$

y el subespacio vectorial de $s^{-n}L[s^nV]$ generado por los elementos de la forma

$$s^{-n}[\dots [s^n x_1, s^n x_2], s^n x_3] \dots, s^n x_k]$$

donde $V_* = \overline{H}_*(X)$.

Adicionalmente, existe una descomposición de $T[s^nV_*]$ más fina que la dada por el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt y que se obtiene de las observaciones anteriores. A saber, el álgebra $S[s^{-n}L[s^nV]]$ está filtrada por los pesos de los corchetes de Lie. Esta filtración corresponde a la filtración de

$$H_*(F(\mathbb{R}^{n+1}, k); \mathbb{Q}) \otimes_{\Sigma_k} V^{\otimes k}$$

que se obtiene a partir del grado homológico en el factor de la izquierda [5].

Denotemos por $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ al elemento $s^{-n}[\dots [s^n x_1, s^n x_2], s^n x_3 \dots], s^n x_k]$. Para k, l naturales fijos sea $S_{k,l}(n)$ el subespacio vectorial de $S[s^{-n}L[s^nV_*]]$ generado por los elementos de la forma

$$\lambda(x_1 \dots, x_{i_1}) \cdot \lambda(x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2}) \dots \lambda(x_{i_{j-1}+1}, \dots, x_{i_j})$$

donde:

1. $i_1 + i_2 + \dots + i_j = k$ y
2. $i_1 + i_2 + \dots + i_j - j = k - j = l$.

Notemos que entonces $S[s^{-n}L[s^nV_*]]$ se descompone como una suma directa

$$\bigoplus_{k,l \geq 0} S_{k,l}(n).$$

Así, el grado homológico en el espacio de configuraciones corresponde a una estratificación más fina del álgebra tensorial que la usualmente esperada a partir del teorema clásico de Poincaré-Birkhoff-Witt. Estas observaciones se prueban en el Teorema 12,3 de [7], pág. 302.

Apéndice A

El Producto de Whitehead

En esta sección recordamos la definición y las propiedades básicas del producto de Whitehead en los grupos de homotopía de un espacio basado X .

$$[-, -] : \pi_{p+1}(X) \times \pi_{q+1}(X) \rightarrow \pi_{p+q+1}(X).$$

Sean $\alpha \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X)$ representados por mapeos $f : (D^{p+1}, S^p) \rightarrow (X, *)$, $g : (D^{q+1}, S^q) \rightarrow (X, *)$, respectivamente. Notemos que la frontera $F = \partial(D^{p+1} \times D^{q+1}) = (D^{p+1} \times S^q) \cup (S^p \times D^{q+1})$ es una $(p + q + 1)$ -esfera orientada y el mapeo $h : (F, *) \rightarrow (X, *)$ dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D^{p+1}, \quad y \in S^q, \\ g(y) & \text{si } x \in S^p, \quad y \in D^{q+1} \end{cases}$$

representa un elemento $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$. Como la notación lo sugiere, este elemento sólo depende de las clases de homotopía α, β (ver [24]).

Definición A.1 *La clase de homotopía $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q+1}(X)$ representada por el mapeo $h : (F, *) \rightarrow (X, *)$ se conoce como **el producto de Whitehead** de las clases $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$ y $\beta \in \pi_{q+1}(X)$.*

Una definición alternativa para el producto de Whitehead se obtiene al considerar el mapeo $[f, g] : S^{p+q+1} \rightarrow X$ dado por la composición

$$S^{p+q+1} \rightarrow S^{p+1} \vee S^{q+1} \xrightarrow{f \vee g} X$$

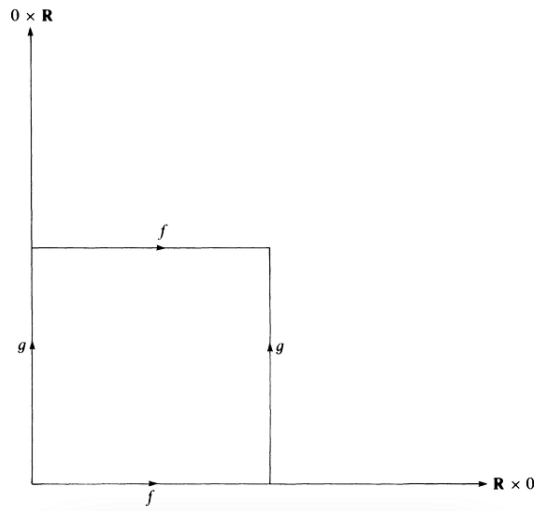
donde la primera función es el mapeo de pegado de la $(p + q + 2)$ -celda del producto $S^{p+1} \times S^{q+1}$, equipado con la estructura natural de CW-complejo.

La operación $(\alpha, \beta) \mapsto [\alpha, \beta]$ es claramente natural, es decir:

Proposición A.1 Si $\phi : X \rightarrow Y$, $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$, $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, entonces

$$\phi_*[\alpha, \beta] = [\phi_*(\alpha), \phi_*(\beta)] \in \pi_{p+q+1}(Y).$$

En el caso especial $p = q = 0$ el producto de Whitehead está dado por la figura siguiente

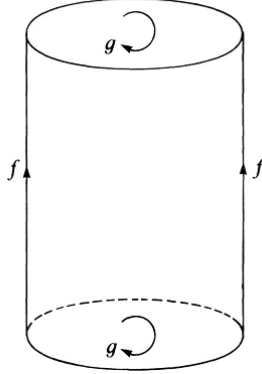


En este caso $\partial(D^1 \times D^1)$ es la frontera del cuadrado unitario $I \times I$ en \mathbb{R}^2 , con la orientación positiva y el origen como punto base. Los mapeos f, g son lazos que representan a α, β respectivamente y es claro que

Proposición A.2 Si $p = q = 0$, entonces $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1(X)$.

Así la notación $[\alpha, \beta]$ para el producto de Whitehead es consistente con la notación usual para el conmutador de dos elementos en teoría de grupos.

En el caso $0 = p < q$ (ver figura siguiente) tenemos que $\partial(D^1 \times D^{q+1})$ es la frontera del cilindro $I \times D^{q+1}$, orientada de manera coherente con $\{1\} \times D^{q+1}$ y el punto base es $(0, *) \in \{0\} \times \partial D^{q+1}$.



El punto $h(t, y)$ es independiente de $y \in \partial D^{q+1}$ y el mapeo $t \mapsto h(t, y)$ es el lazo f que representa a $\alpha \in \pi_1(X)$. La restricción $h|_{\{1\} \times D^{q+1}}$ representa a $\beta \in \pi_{q+1}(X)$ y el conjunto $D = (I \times \partial D^{q+1}) \cup (\{1\} \times D^{q+1})$ es un disco de dimensión $q + 1$ que orientamos de manera coherente con $\{1\} \times D^{q+1}$. Por el comportamiento de h en $I \times \partial D^{q+1}$ descrito anteriormente, es claro que $h|_D$ es homotópico, vía la trayectoria de f , a un representante para β . Como $h|_{\{0\} \times D^{q+1}}$ representa a β , se sigue que.

Proposición A.3 Si $p = 0 < q$, entonces $[\alpha, \beta] = \tau_\alpha(\beta) - \beta$, donde $\tau_\alpha : \pi_{q+1}(X) \rightarrow \pi_{q+1}(X)$ representa la acción de $\alpha \in \pi_1(X)$ en $\pi_{q+1}(X)$.

Notemos que el mapeo $T : D^{q+1} \times D^{p+1} \rightarrow D^{p+1} \times D^{q+1}$ que intercambia los factores tiene grado $(-1)^{(p+1)(q+1)}$ y si $h : \partial(D^{p+1} \times D^{q+1}) \rightarrow X$ es el representante de $[\alpha, \beta]$ construido anteriormente, entonces $h \circ T : \partial(D^{q+1} \times D^{p+1}) \rightarrow X$ es el correspondiente representante de $[\beta, \alpha]$. Por lo tanto

Proposición A.4 Si $\alpha \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X)$, entonces

$$[\beta, \alpha] = (-1)^{(p+1)(q+1)}[\alpha, \beta].$$

Finalizamos esta sección enunciando las propiedades de bilinealidad y la identidad de Jacobi del producto de Whitehead. Las demostraciones se pueden consultar en [24].

Teorema A.1 Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_{p+1}(X), \beta \in \pi_{q+1}(X)$ y $p > 0$, entonces

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta],$$

$$[\beta, \alpha_1 + \alpha_2] = [\beta, \alpha_1] + [\beta, \alpha_2].$$

Teorema A.2 Si $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$, $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, $\gamma \in \pi_{r+1}(X)$ y p, q, r son todos positivos, entonces

$$(-1)^{r(p+1)}[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{p(q+1)}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{q(r+1)}[\gamma, [\alpha, \beta]] = 0.$$

Apéndice B

Sobre la homología de los espacios cubrientes

En este apéndice probamos un par de resultados técnicos sobre la homología de los espacios cubrientes que son usados en el capítulo 2 para la demostración del Teorema de Hilton.

Lema B.1 *Si X es un H -espacio y $p : Y \rightarrow X$ es un recubrimiento, entonces Y es un H -espacio y el grupo cociente $\pi_1(X)/p_*(\pi_1(Y))$ actúa trivialmente en los grupos de homología de Y .*

Demostración

El argumento es parecido al expuesto en la página 478 de [22]. Denotemos por π al subgrupo $p_*(\pi_1(Y))$ como el subgrupo de $\pi_1(X)$ y por PX al espacio de caminos en X que inician en el punto base $e \in X$. Definimos una operación $f * g$ en PX por

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t),$$

donde la operación de la derecha es la dada por la estructura de H -espacio de X . Ahora Y se obtiene a partir de PX al identificar $f, f' \in PX$ si y sólo si $f(1) = f'(1)$ y el lazo h , dado por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f'(2 - 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

representa un elemento de π . Si escribimos esta equivalencia como $f \simeq_\pi f'$ tenemos que mostrar que si $f \simeq_\pi f'$ y $g \simeq_\pi g'$, entonces $f * g \simeq_\pi f' * g'$. Ahora el lazo k , dado por

$$k(t) = \begin{cases} g(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g'(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

representa un elemento de π y el lazo $h * k$ representa el producto de los elementos representados por h y k , pero

$$(h * k)(t) = \begin{cases} (f * g)(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (f' * g')(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

por lo que Y admite un producto inducido por el producto en PX . Denotemos por $e \in PX$ al lazo constante de valor $e \in X$ y sea $\rho_t : (X, e) \rightarrow (X, e)$ una homotopía tal que $\rho_0 = 1$ y $\rho_1(x) = x * e$. Entonces $\rho'_t : (PX, e) \rightarrow (PX, e)$ dada por $(\rho'_t f)(u) = \rho_t f(u)$, es tal que $\rho'_0 = 1$ y $\rho'_1 f = f * e$. Más aún, se verifica fácilmente que ρ'_t induce una homotopía $Y \rightarrow Y$ de $[f]$ en $[f] * [e]$, rel $[e]$, donde $[f], [e]$ son las clases de equivalencia (puntos de Y) que contienen a f y e respectivamente. Similarmente $[f]$ se puede deformar en $[e] * [f]$, rel $[e]$, y por tanto Y es un H -espacio.

Que $\pi_1(X)/p_*(\pi_1(Y))$ actúa trivialmente sobre los grupos de homología de Y también se sigue casi inmediatamente del razonamiento expuesto en la página 478 de [22]. Sólo es necesario observar que el segundo paso de Serre continúa siendo válido en este caso más general porque $p_*(\pi_1(Y))$ es normal en $\pi_1(X)$ ya que el grupo fundamental de un H -espacio resulta ser abeliano. Esto completa la prueba del lema B.1. ■

Lema B.2 *Sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ un mapeo que induce isomorfismos*

$$\phi : H_*(X_1) \cong H_*(X_2), \quad \pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2).$$

Sea π un subgrupo normal de $\pi_1(X_1)$ tal que $\pi^1 = \pi_1(X_1)/\pi$ es cíclico infinito y sea $\pi^2 = \pi_1(X_2)/\phi(\pi)$. Sean Y_1, Y_2 los recubrimientos de X_1 y X_2 con grupos de transformaciones cubrientes π^1, π^2 , los cuales actúan trivialmente en los grupos de homología de Y_1 y Y_2 y sea $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ el único levantamiento de f que manda la clase del lazo trivial en la clase del lazo trivial. Entonces g induce isomorfismos

$$\psi : H_*(Y_1) \cong H_*(Y_2), \quad \pi_1(Y_1) \cong \pi_1(Y_2)$$

Demostración

Es trivial que g induce el isomorfismo $\pi_1(Y_1) \cong \pi_1(Y_2)$. Sea σ_i un generador de π^i y sea $k_i : Y_i \rightarrow X_i$ la proyección, $i = 1, 2$. Serre demostró en la página 509 de [22] que la sucesión

$$0 \rightarrow C(Y_i) \xrightarrow{1-\sigma_i} C(Y_i) \xrightarrow{k_i} C(X_i) \rightarrow 0 \quad (\text{B.1})$$

es exacta, donde C es el grupo de cadenas del espacio correspondiente. Más aún, claramente se tiene conmutatividad en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(Y_1) & \xrightarrow{1-\sigma_1} & C(Y_1) & \xrightarrow{k_1} & C(X_1) \longrightarrow 0 \\ & & g \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C(Y_2) & \xrightarrow{1-\sigma_2} & C(Y_2) & \xrightarrow{k_2} & C(X_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Y se sigue de la sucesión B.1 y del hecho de que π^i actúa trivialmente en los grupos de homología de Y_i que existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_n(Y_i) \xrightarrow{k_{i*}} H_n(X_i) \xrightarrow{\partial_i} H_{n-1}(Y_i) \rightarrow 0,$$

y de la conmutatividad del diagrama anterior se sigue la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(Y_1) & \xrightarrow{k_{1*}} & H_n(X_1) & \xrightarrow{\partial_1} & H_{n-1}(Y_1) \longrightarrow 0 \\ & & \psi \downarrow & & \phi \downarrow & & \psi \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_n(Y_2) & \xrightarrow{k_{2*}} & H_n(X_2) & \xrightarrow{\partial_2} & H_{n-1}(Y_2) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por lo tanto $\phi k_{1*} = k_{2*} \psi$, $\psi \partial_1 = \partial_2 \phi$. Como ϕ y k_{1*} son inyectivas, la primera ecuación muestra que ψ es inyectiva y de la misma manera, como ∂_2 y ϕ son suprayectivas, la segunda ecuación muestra que ψ es suprayectiva. Esto concluye la demostración del lema. ■

Bibliografía

- [1] V. Bolaños. *La homología de $\Omega^2 S^n$* . Tesis de Maestría, Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, 2002.
- [2] R. Bott and H. Samelson. On the Pontryagin product in spaces of paths. *Comment. Math. Helv.*, 27, 320-330, 1953.
- [3] R. Bott and L. W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [4] W. Browder. Homology operations and loop spaces. *Illinois J. Math.*, 4 (1960), 347-357.
- [5] F. R. Cohen. *Applications of loop spaces to some problems in topology*. Advances in homotopy theory (Cortona 1988), 11-20. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 139, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [6] F. R. Cohen. On configuration spaces, their homology, and Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 100(1-3):19-42, 1995.
- [7] F. R. Cohen, T. J. Lada, and J. P. May. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 533. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math. Soc.*, 30(1955), 154-172.
- [10] D. Husemoller. *Fibre bundles*, volume 20. Graduate Texts in Mathematics, 20. Springer-Verlag, New York, third edition, 1994.
- [11] I. M. James. Reduced Product Spaces. *Ann. of Math.*, (2)62(1955), 170-197.

- [12] W. Magnus. Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren. *J. Reine Angew. Math.*, 177(1937), 105-115.
- [13] J. P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [14] J. McCleary. *A user's guide to spectral sequences*, volume 58 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [15] J. W. Milnor. *On the construction FK*. Algebraic Topology A Student's Guide by J.F. Adams, 119-136, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 4, Cambridge University Press, 1972.
- [16] R. E. Mosher and M. C. Tangora. *Cohomology operations and applications in homotopy theory*. Harper & Row, Publishers, New York-London, 1968.
- [17] J. Neisendorfer. *Algebraic methods in unstable homotopy theory*, volume 12 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [18] D. Ravenel. A guided tour of the EHP sequence. University of Rochester. <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/mypapers/ehp.pdf>, 2005.
- [19] H. Samelson. A connection between the Whitehead and the Pontryagin product. *Amer. J. Math.*, 75(1953), 744-752.
- [20] P. Selick. *Introduction to homotopy theory*, volume 9 of *Fields Institute Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [21] J. P. Serre. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math.*, (2) 58 (1953), 258-294.
- [22] J. P. Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math.*, (2) 54 (1951), 425-505.
- [23] V. Snaith. *A stable decomposition of $\Omega^n \Sigma^n X$* . J. London Math. Soc., (2) 7 (1974), 577-583.
- [24] G. W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*. Graduate Texts in Mathematics, 61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [25] E. Witt. Treue Darstellung Liescher Ringe. *J. Reine Angew. Math.*, 177 (1937), 152-160.