



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO**

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Observadores adaptativos para una clase
de sistemas no lineales: Aplicación al Quimiostato**

T E S I S

QUE PRESENTA

M en C. Gerardo Arno Sonck Martínez

Para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS
EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO**

Director de Tesis:

Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz

Ciudad de México.

Marzo, 2021

Agradecimientos

Agradezco profundamente y de todo corazón:

- A mi madre, cuyas auténticas canas soy la principal causa.
- A mi familia, por su apoyo incondicional que siempre me han otorgado sin esperar nada a cambio.
- A todos mis compañeros de generación y amigos de otras generaciones, que de una u otra forma han pasado a formar parte de mi.
- Al Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz, por su paciencia a la hora de escucharme, sus consejos cuando andaba perdido y su apoyo durante todo este tiempo.
- A la Dra. Alma Rosa Domínguez Bocanegra a por su apoyo y dirección en el área de bioprocesos.
- Al Dr. Sergej Čelikovský por su apoyo durante las revisiones.
- Al Dr. Wen Yu, Dr. Ricardo Aguilar López y Dr. Juan Manuel Ibarra Zannatha por sus comentarios y correcciones de la tesis.
- A la Dra, Sabine Mondié Cuzange y Dr. Alejandro Justo Malo Tamayo por haber aceptado ser sinodales para el examen predoctoral.
- Al Departamento de Control Automático y sus integrantes, que tan amablemente me brindaron su ayuda cuando así lo necesite.
- Al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, por mantener un entorno apropiado para la investigación y desarrollo de futuros investigadores.
- Finalmente, pero no menos importantes, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo otorgado en el transcurso de mis investigaciones.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Justificación	4
1.2. Hipótesis de trabajo	5
1.3. Objetivo general	5
1.4. Objetivos particulares	6
2. Preliminares	7
2.1. Observador no lineal robusto	7
2.2. Observador adaptativo de ganancias constantes	11
2.2.1. Caso no lineal	13
2.2.2. Discusión sobre el uso de adaptación de ganancia constante en ob- servadores de alta ganancia no lineales	15
2.3. Sistemas con retardos	17
2.3.1. Clasificación de sistemas con retardo	18
2.3.2. Estabilidad en sistemas con retardos	20
2.4. El modelo del Quimiostato	23
2.4.1. Microorganismos y sus usos	23
2.4.2. Tipos de biorreactores	24
2.4.3. Por modelización matemática	24
2.4.4. Por modos de operación	24
2.4.5. Modelado por balance de masa	25
2.4.6. Esquema de reacción	25
2.4.7. Cinemática	27
2.4.8. Modelo dinámico de biorreactores	30
3. Observador adaptativo de ganancias constantes: Aplicación a la estima- ción de contaminantes en aguas residuales	31
3.1. Motivación	31

3.2.	Una propuesta de transformación de estado no lineal	34
3.2.1.	Propuesta de una transformación de estado: el caso del Quimiostato	36
3.2.2.	Observador adaptativo de ganancia constante para una clase de sistemas no lineales	39
3.2.3.	Aplicación a un bioproceso de remoción de contaminantes en aguas residuales	43
3.3.	Simulación numérica	46
4.	Observador adaptativo robusto de ganancia constante: Estimación de bio-etanol en un cultivo continuo de microorganismos	53
4.1.	Motivación del estudio de la producción de bio-combustibles	54
4.2.	Observador adaptable robusto de ganancia constante basado en LMIs . . .	56
4.3.	Aplicación al proceso de producción de bioetanol	61
4.3.1.	Consideraciones del diseño	62
4.4.	Resultados de Simulación Numérica	64
4.4.1.	Discusión de resultados	66
5.	Observador para sistemas con retardos	75
5.1.	Observadores para sistemas con retardo en la salida	75
5.2.	Observador con retardo en el estado	78
5.2.1.	Enfoque de Kharitonov	78
5.3.	Retardo en la salida y en el estado	80
5.3.1.	Estimados exponenciales	80
5.3.2.	Funcional de tipo completo	82
5.3.3.	Enfoque de Lyapunov–Krasovskii	82
6.	Conclusiones y trabajo futuro	85
6.1.	Conclusiones	85
6.2.	Publicaciones	86
6.3.	Trabajo futuro	87

Índice de figuras

2.1. Modos de operación de biorreactores	25
3.1. El biorreactor indica la respuesta para el estímulo de entrada/perturbación, La biomasa (x) es la línea continua y el sustrato (s) la línea discontinua.	48
3.2. Dinámica del estado observado (sustrato). Sistema (línea continua) y observador de ganancia constante (línea discontinua).	49
3.3. Estimación del sustrato por alta ganancia (HG). La línea continúa es el estado real, la línea discontinua es el estado HG con ruido de salida y la línea discontinua blanca es el estado HG sin ruido de salida.	50
3.4. Estimación de la perturbación de entrada δ del observador adaptativo de ganancia constante.	50
3.5. Errores de estimación por el observador adaptativo de ganancia constante: a) error en la biomasa, b) error en el sustrato, y c) error en la perturbación de entrada.	51
4.1. Comparación de tasas de crecimiento 1: Línea continua Haldane, línea discontinua Monod.	67
4.2. Comparación de tasas de crecimiento 2: Línea continua Moser, línea discontinua Moser perturbado	67
4.3. Planta.	68
4.4. Comparación del sustrato real y el estimado.	69
4.5. Comparación del producto real y el estimado.	69
4.6. Comparación de la perturbación externa real y la estimada.	70
4.7. Error de estimación de sustrato.	71
4.8. Error de estimación de etanol.	71
4.9. Error de estimación de la perturbación externa.	72
4.10. Comparación del sustrato real y el estimado en presencia de ruido aditivo en la salida.	73

4.11. Comparación del etanol real y el estimado en presencia de ruido aditivo en la salida.	73
4.12. Comparación de la perturbación externa real y la estimada, en presencia de ruido aditivo en la salida.	74

Abreviaturas

- HG.- Alta ganancia (del inglés High Gain)
- LMI.- Desigualdad matricial lineal (del inglés lineal Matrix Inequality)
- PE.- Excitación persistente (del inglés Persistent Excitation).
- SPR.- Estricto positivo real (del inglés Strictly Positive Real)
- STF.- Forma triangular estricta (del inglés Strict Triangular Form)
- STR.- Reactor de tanque agitado (del inglés Stirred Tank Reactor)
- VFA.- Ácidos grasos volátiles (del inglés Volatile Fatty Acids)

Abstract

The present work is focused on the study of observers for nonlinear systems, in the presence of constant perturbations at the input and with partially known dynamics. The objective of observing the state and estimating the unknown quantity at the input requires the use of adaptation laws as part of the observation process. Here, priority is given to the adaptation laws of constant gain since, on the one hand, it represents the simplest solutions in terms of the adaptation dynamics because only a differential equation of dimension equal to the unknown parameter to be estimated is required. On the other hand, this problem has interesting implications from the theoretical and practical point of view; the results reported in the literature require unrealistic conditions to be met. On the other hand, constant gains solutions involve the selection of a single design parameter.

The contributions of this work are the proposal of an adaptive observer with constant gain for a class of nonlinear systems (nonlinear in the state and linear in the input). In a first stage, it is shown that there is an adaptive observer with constant gain that allows estimating (asymptotically) and simultaneously identifying the state and the unknown input disturbance whenever a certain linear matrix inequality LMI is verified. In a second time it is shown that the proposed observer is robust to partial knowledge of the dynamics of the plant, in which case there will be observation of the state and the input disturbance in the sense of uniform boundedness. Likewise, it is shown that the proposed designs can be applied to a wide class of non-linear systems that model the process known as Chemostat, by means of a suitable state transformation. The design of the proposed observers is illustrated in a wastewater treatment process (for the case of disturbance at the input) and in a bioethanol production process (for the case of known partial dynamics and external disturbance at the input).

Resumen

El presente trabajo está centrado en el estudio de observadores para sistemas no lineales, en presencia de perturbaciones constantes en la entrada y de dinámica parcialmente conocida. El objetivo de observación del estado y de la estimación de la cantidad desconocida en la entrada impone el uso de leyes de adaptación como parte del proceso de observación. Aquí se da prioridad a las leyes de adaptación de ganancia constante ya que por una parte representa las soluciones más simples en términos de la dinámica de adaptación porque solo se requiere una ecuación diferencial de dimensión igual al parámetro desconocido que se desea estimar. Por otra parte, este problema tiene implicaciones interesantes desde el punto de vista teórico y práctico; los resultados reportados en la literatura, requieren de cumplir condiciones poco realistas. Por otra parte, las soluciones de ganancias constantes implican la selección de un solo parámetro de diseño.

Las aportaciones de este trabajo son la propuesta de un observador adaptable de ganancia constante para una clase de sistemas no lineales (no lineales en el estado y lineales en la entrada). En un primer tiempo, se muestra que existe un observador adaptable de ganancia constante que permite estimar (asintóticamente) e identificar de manera simultánea al estado y a la perturbación desconocida de entrada siempre que se verifique una cierta desigualdad matricial lineal LMI. En un segundo tiempo se muestra que el observador propuesto es robusto ante conocimiento parcial de la dinámica de la planta, en cuyo caso se tendrá observación del estado y de la perturbación de entrada en el sentido de acotamiento uniforme. Igualmente se demuestra que los diseños propuestos pueden ser aplicados a una clase amplia de sistemas no lineales que modelan al proceso conocido como Quimiostato, mediante una transformación de estado adecuada. El diseño de los observadores propuestos se ilustra en un proceso de tratamiento de agua residual (para el caso de perturbación en la entrada) y en un proceso de producción de bioetanol (para el caso de dinámicas parciales conocidas y perturbación externa en la entrada).

Capítulo 1

Introducción

Los observadores adaptativos se introdujeron inicialmente para sistemas lineales a principios de los setenta. En [26], se presentó el primer observador de sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO por sus siglas en inglés) con un algoritmo de adaptación de parámetros. Tanto el estado como el parámetro desconocido se pueden estimar asintóticamente siempre que se cumplan las propiedades de detectabilidad y excitación persistente (PE por sus siglas en inglés) de algunas señales internas del observador. Posteriormente, los observadores adaptativos con convergencia exponencial fueron propuestos en [27]. El análisis puede extenderse a sistemas con un término de inyección de entrada y salida posiblemente no lineal y la perturbación desconocida multiplicada por un vector constante en el lado derecho de la ecuación de estado, que es quizás el caso más general en el que PE se puede verificar mediante alguna prueba clara. Esta teoría del observador se extendió a los llamados sistemas de afinidad de estados asumiendo la existencia de algún observador nominalmente estable exponencialmente y la propiedad PE; esto último no es más fácil de probar, ver [8], [66], y [51]. La investigación sobre la teoría de los observadores para sistemas no lineales se desarrolló ampliamente a partir de la década de 1980 en [25], y en los 1990s con [57], [24], [53], y [58]. Se puede encontrar una descripción excelente y completa de los resultados fundamentales en la conocida monografía [44].

En este trabajo se consideran observadores no lineales adaptativos de ganancia constante, *i.e.*, observadores con una ecuación diferencial de adaptación de la misma dimensión que el vector de parámetro desconocido. Por otro lado, la clase de observadores no lineales adaptativos dinámicos requiere más ecuaciones diferenciales para que la ganancia adaptativa variable en el tiempo obtenga una mejor adaptación. Este último enfoque ha merecido más atención y ofrece una variedad de buenos resultados, entre ellos, los basados

en técnicas de alta ganancia que se ocupan de diferentes tipos de perturbaciones, retrasos de tiempo, etc.; ver [52] y [28].

La célebre teoría de los observadores adaptativos de alta ganancia trata con sistemas observables uniformemente o la clase de sistemas en la forma estrictamente triangular. [44] y [20]; esto es válido en tanto haya dependencia del lado derecho del estado y la entrada. Un hecho limitante es que se supone que el parámetro constante desconocido se multiplica por un campo vectorial que tiene la misma dependencia triangular del estado, mientras que, en general, la perturbación entra en cada fila del lado derecho del sistema. En [21], se presenta un observador adaptativo de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales con una salida uniformemente observable, en el que el uso obligatorio del parámetro de alta ganancia hace necesario analizar el caso cuando va al infinito, por lo tanto se conduce a una resolución de la condición de PE como se indica en [20].

En [37], basado en el Filtro de Kalman extendido, se propuso un observador adaptativo. En [10], el parámetro incierto se multiplica por un campo vectorial más general, y la prueba constructiva de la técnica básica de alta ganancia permite diseñar ganancias con valores razonables, *i.e.*, la ganancia no necesita ir al infinito, y la propiedad PE debe ser válida para valores de ganancia limitados. Este aspecto representa una clara ventaja respecto a otros enfoques, como los de [20, 21].

En contraste con el caso dinámico, hay pocos resultados disponibles para observadores adaptativos no lineales de ganancia constante. Hasta donde sabemos, los principales logros del caso lineal y una generalización parcial para los sistemas no lineales se recopilaron en la monografía [44]. En términos generales, se puede tener un observador adaptativo estático con identificación del parámetro desconocido siempre que la dinámica del error del observador sea estrictamente real positiva (SPR) desde el parámetro desconocido hasta el error observado. Al extender sistemas no lineales particulares que tienen dependencia lineal del estado, la posible inyección de entrada/salida no lineal y la perturbación desconocida constante se multiplican por un vector constante y una no linealidad escalar que depende solo de la salida. Desafortunadamente, la aparentemente rica posibilidad de \mathbf{q} parámetros desconocidos se comprimen en una sola cantidad escalar, que depende solo de cantidades medibles (salida, entrada). Además, la fuerte suposición adicional que permite el uso de la propiedad de realismo positivo estricto es una restricción severa. Además, no se pueden utilizar directamente los resultados [66] y [69] porque requieren que el campo vectorial dependa solo de la salida. Además, estos resultados requieren algunos supuestos de estabilidad *a priori* que pueden ser difíciles de lograr.

Debido al éxito de las técnicas de alta ganancia, uno puede tener la tentación de combinar esto con la adaptación estática siguiendo un enfoque pasivo estricto. Sin embargo, como se argumentó más adelante en la sección de motivación del problema, la estabilidad del observador adaptativo de HG y las condiciones de SPR conducen a objetivos simultáneos opuestos. Es decir, se puede obtener una alta ganancia estabilizadora sin ninguna posibilidad de satisfacer la condición SPR y viceversa.

En este manuscrito, se consideran observadores adaptativos de ganancia constante para sistemas no lineales. El análisis se refiere a sistemas afines no lineales donde la perturbación desconocida ingresa linealmente a través del mismo canal de entrada. El diseño del observador depende de la capacidad de solución de una Desigualdad de Matricial Lineal (LMI) sujeta a una condición de tipo SPR entre la perturbación y la salida del sistema. Nuestro objetivo es doble: primero, proporcionar una combinación del enfoque LMI con las condiciones de los observadores adaptativos de ganancia constante generalizando las de [44], y con condiciones menos restrictivas que las de [42] o [61]; segundo, para mostrar la aplicabilidad de la teoría a la observación de los estados desconocidos de una gran clase de sistemas no lineales, de Quimiostatos, con un componente constante desconocido en la entrada de la tasa de dilución del sustrato. Con este fin, se proporciona un cambio de coordenadas suave adecuado para el proceso no lineal del Quimiostato. Finalmente, el diseño del observador paso a paso se ilustra en un cultivo continuo de *Spirulina máxima* para el tratamiento de aguas residuales.

Finalmente abordaremos sistemas con retardos enfocándonos principalmente en los predictores desarrollados en [34] ya que estos abren todo un nuevo panorama en el desarrollo de observadores.

Resumiendo, las contribuciones de este trabajo son las siguientes:

1. Proponemos un observador de ganancia constante adaptativa para una clase de sistemas no lineales que generalizan logros anteriores que constituye un paso adelante en la búsqueda de soluciones factibles para sistemas afines no lineales.
2. Para la prueba de concepto, consideramos el desafiante bioproceso del Quimiostato.
3. Se propone una transformación de estado suave que lleve estas dinámicas complejas no lineales a una lineal en relación a la entrada.
4. El diseño y el rendimiento del observador adaptativo se validan en un sistema no lineal que modela un Quimiostato para la eliminación de contaminantes basado en un cultivo de *cellulomonascellulans nrrl b 4567*.

5. Observador lineal de un sistema con retardo en la entrada, salida y estado con análisis en el dominio del tiempo.

1.1. Justificación

Una infinidad de sustancias se obtiene mediante el uso de Quimiostatos ya que son producidas por microorganismos, a partir de otras más económicas, al ser sometidos a ciertas condiciones. La relación con que se produce suele obtenerse mediante modelos de ajuste. Estos modelos de ajuste no brindan información de como se comporta el microorganismo pero dan una modelo que permite predecir con razonable certeza la producción de algún elemento en particular.

Estos modelos de aproximación son útiles desde el punto de vista de control pero conllevan incertidumbre, por otra parte, sensores que permita la medición de los productos de interés suelen ser costosos o simplemente inexistentes por lo que el uso de observadores adaptables o robustos se ha popularizado.

En el presente trabajo se demuestra, para el caso de biorreactores operados en modo continuo, un cambio de coordenadas que permite la aplicación de un observador que solo requiere un modelo aproximado al del sistema real y aun así tener convergencia del error.

El primer objetivo es respuesta natural debido a la manera de obtener los parámetros de cada modelo. Estos se obtienen por una aproximación que provoca la existencia de un conjunto de parámetros que generen la misma curva aproximada.

El siguiente objetivo es tratar a la planta como la combinación entre el modelo de ajuste más un parámetro desconocido. Aquí se puede utilizar la forma particular que tienen las curvas de crecimiento/decaimiento de los biorreactores.

El ultimo objetivo es el desarrollar una teoría equivalente a la de (Vladimir Kharitonov) para el caso de observación.

1.2. Hipótesis de trabajo

El problema del diseño de observadores para sistemas no lineales de dinámicas complejas, parcialmente conocidos y en presencia de incertidumbres es un tópico de interés dentro de la teoría de control de sistemas. Por otra parte, es deseable mostrar la viabilidad de resultados teóricos por medio de aplicaciones a problemas de ingeniería que tengan pertinencia tecnológica y viabilidad práctica. Aquí supondremos las siguientes hipótesis:

H1: Contexto Teórico: Se supondrá que es posible transformar un sistema no lineal afín en el estado para poder diseñar observadores adaptables de estado de dinámica simple, es decir, de ganancia constante.

H2: Contexto Experimental: El Quimiostato es un sistema genérico de dinámica compleja que representa a una clase de bioprocesos ampliamente usados en la industria. Su uso eficaz requiere de observadores robustos en tiempo real para su monitoreo y control.

La dinámica de crecimiento de los Quimiostatos pasa por una fase exponencial y posteriormente se estabiliza. Cuando se quiere describir su comportamiento de forma matemática se recurre a un ajuste de una función que presenta este comportamiento, esta ajuste no tiene valores únicos para obtener el mismo resultado. Esto nos lleva a pensar que en general estas dinámicas no se alejan mucho unas de otras aun cuando matemáticamente utilicemos diferentes ecuaciones de ajuste. Si en efecto estas dinámicas se conservan lo suficientemente cerca, el observador usual tendrá un error constante y bien definido principiante una vez alcance la planta un equilibrio. Esto nos da la impresión que utilizar un termino adaptable corregiría este error.

1.3. Objetivo general

O1: Determinar condiciones suficientes de existencia de observadores adaptables (robustos) para una clase de sistemas no lineales

O2: Diseñar observadores no lineales adaptables para procesos biológicos complejos: el Quimiostato

1.4. Objetivos particulares

OP1: Propuesta de observadores adaptables de ganancia constante para la clase de sistemas no lineales en el estado pero lineales en la entrada.

OP2: Propuesta de una transformación de estado para una clase amplia de sistemas no lineales. El caso del Quimiostato

OP3: Estudio de la robustez del observador de ganancia constante propuesto en OP1 ante conocimiento parcial de la dinámica del Quimiostato.

OP4: Análisis de observadores para sistemas lineales con retardos.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentaran los principales preliminares sobre observadores para sistemas no lineales alrededor de los cuales se ha desarrollado el presente trabajo de investigación. Se recordara un resultado conocido sobre los observadores de alta ganancia y se discute la dificultad de relacionarlo con el concepto de adaptación de ganancia constante. En seguida se presenta un recuento de observadores adaptativos de ganancia constante cuyas condiciones de existencia son en general difíciles de comprobar. Se presenta los preliminares de estabilidad para sistemas lineales con retardos, motivados por el efecto de retrasos en el tiempo que presentan los procesos donde hay transformación "biológica" de la materia. Finalmente, se dan los antecedentes del modelado de balance de masa para introducir un modelo genérico de biorreactor continuo también conocido como Quimiostato.

2.1. Observador no lineal robusto

Ahora considere el sistema no lineal con una sola salida afín a la entrada conocida expresado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}$.

Suponga que:

- El mapeo de observabilidad de orden $n - 1$, cuando $u = 0$

$$\mathcal{O}_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

- es un difeomorfismo global.
 - es globalmente Lipschitz.
- El sistema es globalmente observable para cualquier entrada (uniformemente observable) lo que es una propiedad bastante fuerte para sistemas no lineales.

Gauthier mostró en [23, 24] que la transformación:

$$\xi = T(x) = \mathcal{O}_{n-1}(x)$$

lleva el sistema a la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_o \xi + \varphi(\xi, u) \\ y &= c_o \xi \end{aligned}$$

Donde:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\xi, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, u) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, u) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi, u) \end{bmatrix},$$

$$c_o = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Si $\varphi(\xi, u)$ es globalmente Lipschitz y el sistema (2.1) es uniformemente observable, entonces el observador (2.2) converge exponencialmente cuando $(A_o + lc_o)$ es Hurwitz, si r es lo suficientemente grande. La velocidad de convergencia es proporcional a r . También, la demostración de esto es similar a la anterior.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= A_o \hat{\xi} + \varphi(\hat{\xi}, u) + \Theta(r)lc_o(\hat{\xi} - \xi) \\ \hat{x} &= \mathcal{O}_{n-1}^{-1}(\hat{\xi}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

El error de estimación es:

$$\dot{e} = (A_o + \Theta(r)lc_o)e - v(t) \quad (2.3)$$

donde

$$v(t) = \varphi(\xi + e, u) - \varphi(\xi, u)$$

Para la variable de error transformada ($\zeta = \psi\Theta(r)^{-1}e$).

$$\dot{\zeta} = L(A_o + lc_o)\zeta - \psi\Theta^{-1}v(t)$$

La derivada de la función tipo Lyapunov $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ es:

$$\dot{V}(\zeta) = -r\zeta^T Q \zeta - 2\psi\zeta^T P \Theta^{-1}v(t)$$

Recuerde que se supuso que cada componente del vector $\varphi(\xi, u)$ es globalmente Lipschitz, uniformemente observable, esto es, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe una constante positiva k_i , independiente de (ξ, u) , tal que para toda ξ, z se cumple:

$$|\varphi_i(\xi_1 + z_1, \dots, \xi_i + z_i) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u)| \leq k_i \| [z_1 \ \dots \ z_i \ 0 \ \dots \ 0] \|^T$$

En adición a esto, los componentes de $\psi\Theta(r)^{-1}[\varphi(\xi + \psi^{-1}\Theta(r)\zeta, u) - \varphi(\xi, u)]$ satisfacen:

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{r^i} \left| \varphi_i \left(\xi_1 + \frac{r}{\psi} \zeta_1, \dots, \xi_i + \frac{r^i}{\psi} \zeta_i, u \right) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u) \right| &\leq \\ &k_i \frac{\psi}{r^i} \left\| \psi^{-1}\Theta(r) [\zeta_1 \ \dots \ \zeta_i \ 0 \ \dots \ 0]^T \right\| \end{aligned}$$

Para $r > 1$, y con la norma Euclidiana se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{r^i} \left\| \psi^{-1}\Theta(r) [\zeta_1 \ \dots \ \zeta_i \ 0 \ \dots \ 0]^T \right\| &= \frac{\psi}{r^i} \left\| \left[\frac{r}{\psi} \zeta_1 \ \dots \ \frac{r^i}{\psi} \zeta_i \ 0 \ \dots \ 0 \right]^T \right\| \\ &= \frac{\psi}{r^i} \sqrt{\left(\frac{r}{\psi} \zeta_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{r^i}{\psi} \zeta_i \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\zeta_1}{r^{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_2}{r^{i-2}} \right)^2 + \dots + \zeta_i^2} \\ &\leq \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_i^2} = \left\| [\zeta_1 \ \dots \ \zeta_i \ 0 \ \dots \ 0] \right\| \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$\|\psi\Theta(r)^{-1}v(t)\| \leq k\|\zeta\|, \quad k = \max_{0 \leq i \leq n} \{k_i\}$$

Como consecuencia se obtiene:

$$\dot{V}(\zeta) = -r\zeta^T Q \zeta - 2\psi\zeta^T P \Theta_{(r)}^{-1}v(t) \leq -[r\lambda_{\min}(Q) - 2k\lambda_{\max}(P)] \|\zeta\|^2 \leq -(r\gamma - 2k)V(\zeta)$$

donde:

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

Usando el principio de comparación se obtiene:

$$V(\zeta) \leq e^{-\left(r - \frac{2k}{\gamma}\right)\gamma(t-t_0)} V(\zeta_0)$$

Lo que significa que escogiendo $r > r_0 = \frac{2k}{\gamma}$ garantiza estabilidad asintótica, lo cual siempre es posible ya que P , Q , y k son independiente de r , de aquí se sigue:

$$\lambda_{\min}(P)\|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq e^{-\gamma(r-r_0)(t-t_0)} \lambda_{\max}(P)\|\zeta_{t_0}\|^2$$

↓

$$\|\zeta\| \leq c_p e^{-\frac{\gamma}{2}(r-r_0)(t-t_0)} \|\zeta_{t_0}\|$$

donde $c_p = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}$.

Para la variable de error original $\zeta = \psi\Theta(r)^{-1}e$ se tiene:

$$\|e\| \leq c_p e^{-\frac{\gamma}{2}(r-r_0)(t-t_0)} r^{n-1} \|e_{t_0}\|$$

Como en el resultado anterior, esto implica que la velocidad de convergencia del error de observación se incrementa al incrementar la ganancia r , es más, los efectos de la perturbación del sistema $\varphi(\xi, u)$ son superados con una ganancia lo suficientemente grande ($r > r_0$). Finalmente, los límites del error inicial (cuando $t \rightarrow t_0$) también se incrementa

con r , este es conocido como *Peaking Phenomenon*.

El sistema dinámico 2.2 es un observador de alta ganancia que es muy popular en la literatura de sistemas no lineales. sin embargo, como se vera mas adelante, el objetivo de alta ganancia combinado con leyes de adaptación pueden conducir a condiciones que son mutuamente excluyentes. A grandes rasgos, se puede obtener una alta ganancia que estabiliza el error de observación, pero sin ninguna posibilidad de satisfacer una condición tipo SPR esta situación motiva el estudio de una clase de observadores adaptativos cuyos preliminares se dan a continuación.

2.2. Observador adaptativo de ganancias constantes

Se utiliza el termino *estático* para resalta el hecho de que las ganancias del observador son constantes, ya que existen metodologías donde estas ganancias varían con el tiempo.

Caso lineal

Considere el sistema lineal (2.4).

$$\dot{x} = Ax + bu + b\delta, \quad y = cx \quad (2.4)$$

Donde $x, b, c \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna, mientras que y, u, δ son una salida escalar, entrada escalar y un parámetro de perturbación constante. El par (A, c) es detectable y existe un vector columna de ganancias $l \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$A + lc$$

es Hurwitz.

Un observador adaptativo esta dado por la expresión siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= [A + lc]\hat{x} + lc x + bu + b\phi, & e &:= \hat{x} - x, \\ \dot{\phi} &= -ce. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como consecuencia, el error e tiene la dinámica (2.6)

$$\dot{e} = [A + lc]e + b\epsilon, \quad \epsilon = \phi - \delta \quad (2.6)$$

Pero recuerde que δ es constante, por lo que:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\phi}$$

Note que (2.6) tiene la forma de un sistema lineal, donde ϵ juega el papel de señal de control, también podemos suponer que existe una señal de salida $y_e = c_o e$, donde $c_o = [1 \ \cdots \ 0]$. El vector de ganancias l se puede elegir de tal forma que la matriz $[A + lc]$ sea Hurwitz, pero se requiere verificar que (2.6) sea asintóticamente estable. Para lo cual se propone la siguiente función definida positiva,

$$V_L = \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}e^T P e \quad (2.7)$$

Donde P es la solución de la ecuación de Lyapunov:

$$P[A + lc] + [A + lc]^T P = -Q, \quad P = P^T > 0 \quad \& \quad Q = Q^T > 0$$

Lo que significa que:

$$\frac{dV_L}{dt} = \left(\frac{1}{2}\right) e^T \left[[A + lc]^T P + P [A + lc] \right] e + e^T P b \epsilon + \dot{\epsilon} \epsilon$$

lo anterior implica que

$$\frac{dV_L}{dt} < [e^T P b + \dot{\epsilon}] \epsilon = [e^T P b + \delta] \epsilon = [e^T P b - c e] \epsilon, \quad \forall e \neq 0.$$

Si $Pb = c^T$, entonces la derivada respecto del tiempo de V_L sería definida negativa. En adición a esto, (2.7) sería una función de Lyapunov, por lo que usando el teorema de LaSalle, se podría mostrar que $\phi \rightarrow \delta$ con forma $t \rightarrow \infty$ de la siguiente manera: $\dot{\epsilon} = [A + lc]e|_{e=0} + b\epsilon = p\epsilon \Rightarrow \epsilon = 0 \Rightarrow \delta - \phi = 0 \Rightarrow \phi = \delta$. Como consecuencia, las ganancias l deben ser restringidas de tal forma que (2.8) se mantenga.

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] = -Q, \quad Pb = C^T \quad (2.8)$$

Debido al hecho de que solamente P está restringida, es posible extender la búsqueda de l de la siguiente forma:

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] < 0, \quad Pb = C^T \quad (2.9)$$

Esto es una variación del lema de *Kalman-Yakubovich-Popov*.

Teorema 1 (Kalman-Yakubovich-Popov) *Considere una matriz de función de transferencia $G(s) = c(sI - A)^{-1}b + D$ de dimensión $p \times p$, donde el par (A, B) es controlable y el par (A, c) es observable. Entonces $G(s)$ es estrictamente positiva real (SPR de sus siglas en inglés) si y solo si existen $P = P^T > 0$, L y W , y una constante positiva ξ tales que:*

$$\begin{aligned}
PA + A^T P &= -L^T L - \xi P \\
Pb &= c^T - L^T W \\
W^T W &= D + D^T
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para ver su demostración consulte [32].

Regresando a (2.6), se puede apreciar que $D = 0$, por lo que $W = 0$. Es más, se puede suponer que existe una matriz $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} > L^T L + \xi P$ de forma tal que (2.10) se puede reescribir como (2.9).

Por otra parte, un sistema EPR debe satisfacer:

$$\mathbf{Re}\{c(j\omega I - A - lc)^{-1}b\} > 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty) \tag{2.11}$$

R. Marino y P. Tommei en [44] proponen una forma de escoger l para un tipo específico de sistemas de tal forma que la condición (2.11) se mantiene. Esto se discutirá más adelante.

Debido al hecho de que $\phi(t)$ es un término adaptable, (2.5) es un observador adaptable.

2.2.1. Caso no lineal

Consideraremos sistemas no lineales con una salida con un parámetro constante desconocido (2.12).

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + g(x, u) + \sum_{i=1}^p \theta_i q_i(x, u) \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, $g(x, 0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Nos restringiremos a sistemas que son transformables por difeomorfismos δ -independientes en un sistema observable lineal con términos de inyección de salida dependientes de δ .

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= A_o z + \gamma(y, u) + b\beta^T(y, u, t)\theta \\
y &= c_o z
\end{aligned} \tag{2.13}$$

con:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma(y, u) = \begin{bmatrix} \gamma_1(y, u) \\ \gamma_2(y, u) \\ \vdots \\ \gamma_n(y, u) \end{bmatrix},$$

$$c_o = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Donde $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}$, γ es una función suave que mapea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b = [b_1, \dots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es un vector con $b_1 > 0$ tal que el polinomio $b_1 s^{n-1} + \dots + b_n$ es Hurwitz, β es una función continua que mapea de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$. Para ver que condiciones son necesarias para transformar un sistema de (2.12) a (2.13), la cual es llamada forma *observador adaptable*, vea [44].

Dado un sistema de la forma observador adaptable (2.13), si $\beta(y, u, t)$ es uniformemente acotada para toda (y, u) acotada, entonces el sistema (2.14) es un observador adaptable global para (2.13), donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\delta} \in \mathbb{R}^p$, Γ es una matriz definida positiva y $l = [l_1, \dots, l_n]^T$ esta dado por (2.15) (ver [39]).

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= [A_o + lc_o]\hat{x} + \gamma(y, u) + b\beta^T(y, u, t)\phi - ly \\ \dot{\hat{\phi}} &= \Gamma\beta(y, u, t)(y - c_o\hat{x}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$l = \frac{1}{b_1}(A_o b + \lambda b) \quad (2.15)$$

donde λ es un número arbitrario positivo real.

La ecuación de error es:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= [A_o + lc_o]e + b\beta^T(y, u, t)\epsilon, \quad \epsilon = \phi - \delta \\ \dot{\phi} &= -\Gamma\beta(y, u, t)c_o e \end{aligned} \quad (2.16)$$

Debido a la restricción sobre p y por virtud de (2.15) es posible escribir

$$b_1(s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n) = (s + \lambda)(b_1 s^n + \dots + b_n)$$

lo que significa que

$$c_o(sI - A_o - lc_o)^{-1}b = \frac{b_1}{s + \lambda} \quad (2.17)$$

Esto por que hay $n - 1$ cancelaciones de polos y ceros. La matriz $[A_o + lc_o]$ es Hurwitz por que $\lambda > 0$ y por la suposición de que el polinomio $(b_1s^n + \dots + b_n)$ es Hurwitz. Es más, la tripleta $([A_o + lc_o], b, c_o)$ satisface (2.11) y como consecuencia, se puede aplicar (2.9). La demostración de esta proposición es una aplicación directa del teorema B.2.2 de [44, p. 366] con $\beta(y, u, t)$ considerada como γ y $\Gamma = \Lambda$.

2.2.2. Discusión sobre el uso de adaptación de ganancia constante en observadores de alta ganancia no lineales

Hasta el momento hemos visto que un observador de alta ganancia o HG (de sus siglas en ingles) nos permite atenuar los efectos de perturbaciones en los estados tales como las dinámicas no modeladas o los términos de alto orden de una linealización por series de Taylor, esto nos sugiere que podemos utilizar un observador HG con un termino de adaptación para lidiar con una perturbación constante, ya que podríamos aplicar una transformación al sistema de tal modo que obtengamos una forma *observador adaptable*, más una perturbación en los estados. De esta forma la alta ganancia lidiaría con la perturbación en los estados mientras que la parte adaptable lidiaría con la perturbación constante.

Considere el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, u, t) + b\beta^T(y, u, t)\delta \\ y &= cx, \quad c_o = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_q \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donde $f(x, u, t)$ depende de x de una forma triangular estricta o STF de sus siglas en ingles (Strictly Triangular Form).

Trataremos de unir los conceptos anteriormente mencionados. Primero suponga que b es tal que $b_1 > 0$, y $b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n$ es un polinomio Hurwitz, este es un requerimiento difícil de satisfacer en general, pues se debe verificar una relación algebraica específica la cual no se cumple para valores arbitrarios de b_i . En este caso, usando el

enfoque de Marino-Tomei, se tiene que existen $Q = Q^T > 0$ y $P = P^T > 0$ tales que escogiendo ganancias

$$l = \frac{1}{b_1}(Ap + \lambda p)$$

donde λ es un número arbitrario positivo real, se cumple

$$[A + lc]^T P + P[A + lc] = -Q < 0, \quad Pp = c^T$$

El problema crucial es como usar esta propiedad en conjunto con HG, donde se usan ganancias $\Theta(r)$ con $r > 0$ grande. Recuerde que $\Theta(r) = \text{diag}\{r, r^2, \dots, r^n\}$. Se utilizara la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \Theta(r) &= \text{diag}\{1, r^1, \dots, r^{n-1}\} & A(r) &= [A + r\Theta(r)lc] \\ P(r) &= \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1} & \Theta(r)^{-1}A(r)\Theta(r) &= r[A + lc] \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$\begin{aligned} A(r)^T P(r) + P(r)A(r) &= A(r)^T \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1} + \Theta(r)^{-1}P\Theta(r)^{-1}A(r) = \\ &= \Theta(r)^{-1}[\Theta(r)A(r)\Theta(r)^{-1}P + P\Theta(r)^{-1}A(r)\Theta(r)]\Theta(r)^{-1} = \\ &= \Theta(r)^{-1}[r[A + lc]^T P + Pr[A + lc]]\Theta(r)^{-1} = -r\Theta(r)^{-1}Q\Theta(r)^{-1} \end{aligned}$$

Esto atenuaría la influencia de los términos STF, pero la parte adaptable requiere que la matriz $P(r)$ satisfaga:

$$P(r)b = c^T \Leftrightarrow P\Theta(r)^{-1}b = \Theta(r)c^T$$

Como $c = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ se puede ver que $\Theta(r)c^T = c^T$ por lo que se necesitaría que:

$$P\Theta(r)^{-1}b = \Theta(r)c^T \Leftrightarrow P [b_1 \ r^{-1}b_2 \ \dots \ r^{1-n}b_n]^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Pero recuerde que inicialmente se había escogido P de forma tal que se cumpliera $Pb = c^T$, lo cual puede ser fácilmente contradictorio.

Se puede tratar de resolver esto de la siguiente manera. Note que $b_1 > 0$ y $b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n$ es un polinomio Hurwitz si y solo si $b_1 > 0$ y $b_1 s^{n-1} + b_2 r s^{n-2} + \dots + b_{n-1} r^{n-2} s + b_n r^{n-1}$ es un polinomio Hurwitz para toda $r > 0$. De hecho se cumple que:

$$b_1 s^{n-1} + b_2 r^{-1} s^{n-2} + \dots + b_{n-1} r^{2-n} s + b_n r^{n-1} = [b_1 (sr)^{n-1} + b_2 (rs)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (rs) + b_n] r^{1-n}$$

Por lo que las raíces del segundo polinomio son las mismas que del primero pero multiplicadas por $r > 0$. Ahora considere que escogemos ganancias de la siguiente manera:

$$l^r = \frac{1}{b_1} (A\Theta(r)^{-1}p + r^{-1}\lambda\Theta(r)^{-1}b)$$

Donde λ es cualquier número positivo real. Entonces existen matrices simétricas definidas positivas P_r y Q_r tales que:

$$[A + l^r c]^T P_r + P_r [A + l^r c] = -Q_r < 0$$

$$P_r \Theta(r)^{-1} b = c^T \Leftrightarrow P_r [b_1 \quad r^{-1}b_2 \quad \dots \quad r^{1-n}b_n]^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

Con dicha selección se cumple:

$$\begin{aligned} b_1 (s^n + l_1^r s^{n-1} + \dots + l_n^r) &= (s + r^{-1}\lambda)(b_1 s^{n-1} + b_2 r^{-1} s^{n-2} + \dots + b_n r^{1-n}) \\ &= ((sr) + \lambda)(b_1 (rs)^{n-1} + b_2 (rs)^{n-2} + \dots + b_n) r^{-n} \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$l_1^r = l_1 r^{-1}, \quad l_2^r = l_2 r^{-2}, \dots, l_n^r = l_n r^{-n} \tag{2.19}$$

$$b_1 (s^n + l_1 s^{n-1} + \dots + l_n) = (s + \delta)(b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)$$

Esto demuestra que podemos asignar ganancias l^r para cualquier $r > 0$ y la condición SPR se conserva, pero estas ganancias se vuelven pequeñas con r grande, lo que contrarresta el uso de HG por lo que regresamos a ganancias normales l_1, \dots, l_n . En otras palabras, *no es posible combinar de forma directa alta ganancia con un observador estático adaptable*, [11].

2.3. Sistemas con retardos

Los retardos se encuentran en muchos procesos biológicos y se han estudiado desde los inicios del ciclo pasado [41]. Primero se vieron en modelos epidemiológicos en 1911

(coincidencia que este año resalte su importancia), ver [56], posteriormente hubo muchas aportaciones entre 1920 y 1930 en modelos poblacionales, en [59] se pueden encontrar muchos de estos trabajos.

En el Quimiostato encontramos los retardos principalmente en la dinámica de crecimiento, esto es natural ya que los microorganismos requieren de un tiempo para crecer y poder reproducirse. También encontramos retardos al momento de medir concentraciones ya que la mayoría de estas no es fácil medirlas en tiempo real. En el presente trabajo solo mostraremos resultados en sistemas lineales ya que es usual linealizar en un punto de equilibrio deseado, usualmente el de máxima producción.

Los sistemas con retardos suelen considerarse problemáticos pero se ha visto que agregar un retardo puede ser beneficioso (ver [54]), por otro lado, su análisis de estabilidad suele ser complicado ya que se usa el sistema de D-particiones en el dominio de la frecuencia, esta complejidad aumenta con el grado del sistema a tratar. Por otro lado, también se han desarrollado métodos en el dominio del tiempo que nos permiten de forma más amigable determinar la estabilidad de un sistema (ver [33]).

El primer problema a tratar fue el retardo en el control, por lo que el desarrollo de un predictor (predictor de Smith [62]) fue una respuesta natural. Sin embargo, se sigue trabajando en el dominio de la frecuencia con una infinidad de raíces. Posteriormente, surgió la idea de tratar de eliminar la infinidad de raíces con un control de forma adecuada, esto se consigue en [43] pero aunque se muestra que pasa cuando la planta real y la nominal no son idénticas, se requiere un conocimiento preciso del sistema a tratar para en verdad anular la infinidad de polos.

Usando el enfoque de [33] se desarrolla en [34] una metodología en el dominio del tiempo para estabilizar este tipo de sistemas y se demuestra que es una generalización de [43]. Esta última, da la impresión de poderse aplicar para el caso de observadores por lo que se decidió investigar bajo que condiciones es aplicable.

Primero se describirá el predictor, luego se mostrara su uso para ciertos sistemas con retardos y finalmente el reto a superar.

2.3.1. Clasificación de sistemas con retardo

Utilizaremos la clasificación usada por Kharitonov en su libro [34] mostrada en orden de aparición en el mismo y definimos A_0 y A_1 como matrices reales de dimensión n, n .

Tipo retardado simple o retardado

El retardo esta en el estado, es decir, la derivada depende de condiciones pasadas, se puede resolver por intervalos y son descritos por:

$$\dot{X}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h), \quad t \geq 0$$

De este tipo serán los sistemas con los que trabajaremos más adelante.

Tipo retardado múltiple

La derivada depende de condiciones en diferentes puntos del pasado, son descritos por:

$$\dot{X}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^n A_i x(t - h_i), \quad t \geq 0$$

Aquí n pertenece a los números naturales y suele suponerse que $h_1 < h_2 < \dots < h_n$, note que no hay perdida de generalidad por la conmutatividad de la suma.

Retardo distribuido

Este tipo de retardos dependen no solamente de un punto en el pasado, sino de todo un intervalo usualmente con algún tipo de ponderación, se describen como:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h) + \int_{-h}^0 G(\theta)x(t + \theta)d\theta, \quad t \geq 0$$

donde $G(\theta)$ es una matriz real de $n \times n$ definida en el intervalo $[-h, 0]$.

Tipo Neutral

En estos sistemas la misma derivada depende del pasado, el caso linear es de la forma:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Dx(t - h)] = A_0x(t) + A_1x(t - h), \quad t \geq 0.$$

donde D es una matriz real de $n \times n$.

Tipo Neutral distribuido

Es una combinación de los dos anteriores, la derivada depende del pasado y de un intervalo, pueden ser de la forma:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Dx(t-h)] = A_0x(t) + A_1x(t-h) + \int_{-h}^0 G(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0.$$

nuevamente $G(\theta)$ es una matriz real de $n \times n$ definida en el intervalo $[-h, 0]$ y D es una matriz real de $n \times n$.

2.3.2. Estabilidad en sistemas con retardos

Matriz fundamental

Definición: Sea el sistema retardado (2.20).

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) \quad (2.20)$$

entonces su matriz fundamental $K(t)$ de $n \times n$ es aquella que satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} K(0) &= I \\ K(t) &= 0 \quad \forall t < 0 \\ \dot{K}(t) &= A_0K(t) + A_1K(t-h) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Matriz de Lyapunov retardada

Definición 1 Decimos que la matriz $U(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Lyapunov del sistema (5.15) asociada con la matriz simétrica W si satisface la siguientes propiedades:

1. Propiedad dinámica

$$\frac{dU(\xi)}{d\xi} = U(\xi)\hat{A}_0 + U(\xi-h)\hat{A}_1, \quad \xi \geq 0. \quad (2.22)$$

2. Propiedad simétrica

$$U(-\xi) = U^T(\xi). \quad (2.23)$$

3. Propiedad algebraica

$$-W = U(0)\hat{A}_0 + U(-h)\hat{A}_1 + \hat{A}_0^T U(0) + \hat{A}_1^T U(h). \quad (2.24)$$

Observación 1 (Teorema 2.6 [34]). Sea $K(t)_z$ la matriz fundamental del sistema (5.15), entonces la matriz:

$$U(\xi) = \int_0^\infty K(t)_z^T W K(t)_z dt$$

es la única solución de las ecuaciones (2.22), (2.23), (2.24).

Funcional de tipo completo

Dadas matrices positivas definidas W_j , $j = 0, 1, 2$, definimos en el espacio $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ un funcional de tipo completo de la forma:

$$\begin{aligned} v(\varphi) = & \varphi^T U(0) \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 U(-\theta - h) \hat{A}_1 \varphi(\theta) d\theta + \\ & \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta_1) \hat{A}_1^T \left(\int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2) \hat{A}_1 \varphi(\theta_2) d\theta_2 \right) d\theta_1 + \\ & \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) [W_1 + (h + \theta)W_2] \varphi(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.25)$$

Aquí la matriz $U(\xi)$ es la matriz de Lyapunov del sistema (5.15) asociada con la matriz $W = W_0 + W_1 + hW_2$.

La derivada del funcional a lo largo de las trayectorias del sistema (5.15) es tal que la siguiente igualdad se conserva:

$$\frac{dv(e_t)}{dt} = -\epsilon^T(t)W_0\epsilon(t) - \epsilon^T(t-h)W_1\epsilon(t-h) - \int_{-h}^0 \epsilon^T(t+\theta)W_2\epsilon(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0.$$

ver el teorema 2.13 en [34] para los detalles.

Existen constantes positivas δ_0 y δ_1 tales que el funcional (2.25) admite un estimado superior de la forma:

$$v(\varphi) \leq \delta_0 \|\varphi(0)\|^2 + \delta_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \quad (2.26)$$

Ver lema 2.13 en [34]. Como el sistema (5.15) es exponencialmente estable, existen constantes positivas β_0 , β_1 , tales que el funcional de tipo completo (2.25) admite un estimado inferior de la forma:

$$v(\varphi) \geq \beta_0 \|\varphi(0)\|^2 + \beta_1 \int_{-h}^0 \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta \quad (2.27)$$

ver lema 2.12 en [34].

Predictor

Históricamente la primera manera de lidiar con sistemas con retardo fue mediante el uso de predictores [62] partiendo de un análisis en el dominio de la frecuencia. Dicho enfoque se ha preservado por mucho tiempo y tiene el inconveniente de volverse complicado en relación al orden de las derivadas. En el 2012 Kharitonov [33] presenta un predictor con análisis en el dominio del tiempo que sistematiza su construcción y posterior análisis. Este predictor es mostrado en (2.28) y a continuación se presenta una variación que generaliza un poco el resultado de Kharitonov:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K(t_2 - \xi)x(\xi)}{\partial \xi} &= -K(t_2 - \xi - h)A_1x(\xi) + K(t_2 - \xi)A_1x(\xi - h) \\
\int_{t_1}^{t_2} dK(t_2 - \xi)x(\xi) &= -\int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \xi - h)A_1x(\xi)d\xi + \int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \xi)A_1x(\xi - h)d\xi \\
\int_{t_1}^{t_2} dK(t_2 - \xi)x(\xi) &= -\int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \xi - h)A_1x(\xi)d\xi + \int_{t_1-h}^{t_2-h} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\xi \\
x(t_2) &= K(t_2 - t_1)x(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \xi - h)A_1x(\xi)d\xi \\
&\quad + \int_{t_1-h}^{t_1} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\xi + \int_{t_1}^{t_2-h} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\theta \\
x(t_2) &= K(t_2 - t_1)x(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \xi - h)A_1x(\xi)d\xi \\
&\quad + \int_{t_1-h}^{t_1} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\theta + \int_{t_1}^{t_2} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\theta \\
x(t_2) &= K(t_2 - t_1)x(t_1) + \int_{t_1-h}^{t_1} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\theta \tag{2.28}
\end{aligned}$$

De (2.28) se puede apreciar que es posible conocer el estado en tiempo t_2 si lo conocemos en un intervalo $t_1 - h$ que sea anterior a t_2 . La importancia de esto radica en que bajo el caso donde tenemos acceso al estado completo pero con un retardo τ nos es posible conocer el estado en cualquier instante $t_2 > t_0$ si tomamos algún intervalo $(t_0 - \tau : t_0 - \tau - h)$ con $t_0 < t_2$ quedando de la siguiente manera:

$$x(t_2) = K(t_2 - t_0 - \tau)x(t_0 - \tau) + \int_{t_0-\tau-h}^{t_0-\tau} K(t_2 - \theta - h)A_1x(\theta)d\theta$$

2.4. El modelo del Quimiostato

Un Quimiostato es un caso particular de biorreactor, para el lector que empiece a involucrarse con biorreactores es recomendable consultar [14], aquí solo se mencionará lo estrictamente necesario para comprender las "bondades" de estos sistemas.

Un reactor es un sistema donde se llevan reacciones químicas por lo que al decir biorreactor nos enfocamos a sistemas cuyas reacciones químicas son debidas a seres vivos. Estos pueden ser macroscópicos o microscópicos, nos enfocaremos en los microscópicos, y se utilizan para obtener productos que solamente ellos son capaces de crear.

2.4.1. Microorganismos y sus usos

La fermentación microbiana es un proceso en el cual una población de microorganismos se cultivan utilizando ciertos elementos nutritivos en condiciones favorables (como luz, temperatura, pH, etc). Esto corresponde esquemáticamente a la transformación de sustancias en productos, resultantes de la actividad metabólica de las células. Los componentes principales de la reacción son:

- S_i Sustratos: Son el alimento del microorganismo, usualmente contienen fuentes de carbón como la glucosa, etanol, etc. y algunas veces nitrógeno (NO_3, NH_4 , etc.) y fósforo (PO_4 , etc.).
- X_i Biomasa microbiana. Algunos modelos utilizan la biomasa y otros la densidad de biomasa por unidad de volumen.
- P_i Productos finales: por ejemplo: aceites, queso y cerveza en el caso de alimentos; solventes, enzimas y aminoácidos en el caso de químicos; antibiótico, hormonas y vitaminas en el caso de medicinas; etanol y biogás para el caso de energía.

Cada tipo de microorganismo tiene características relacionadas con su herencia genética y su sistema regulatorio por lo que la fermentación puede tener varios usos, como:

- Crecimiento microbiano: Lo que interesa es el microorganismo, como ejemplo tenemos la levadura.
- Producción metabólica: La atención se centra en un producto del microorganismo, como el etanol o la penicilina.
- Consumo de sustrato: El objetivo aquí es procesar una sustancia, como ejemplo se encuentra el tratamiento de aguas.

- Estudio fenomenológico: se enfoca en el comportamiento de un microorganismo.

La mayoría de los procesos biotecnológicos desarrollados a nivel industrial, usan cultivos microbianos que están constituidos por una sola especie de microorganismo para la síntesis de un producto bien definido (cultivo puro). Sin embargo, en ciertos casos, se pueden hacer crecer varias especies simultáneamente, pero esto sólo es posible si no son demasiado competitivas.

2.4.2. Tipos de biorreactores

Existen diversas formas de clasificar biorreactores, entre ellas nos son útiles para el presente trabajo dos:

2.4.3. Por modelización matemática

Desde el punto de vista de la modelización matemática, los reactores biológicos se pueden dividir en dos clases principales:

- Reactores de tanque agitado o STR de sus siglas en ingles (stirred tank reactors). Estos se caracterizan por que el medio donde ocurre la reacción es homogéneo y la reacción es descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Reactores con un gradiente de concentración espacial, donde la reacción es descrita por ecuaciones en derivadas parciales.

2.4.4. Por modos de operación

Los modos de operación de los biorreactores se caracterizan generalmente por los intercambios de líquido, es decir, por el tipo de suministro de sustrato aplicado al reactor. Se pueden distinguir tres modos principales:

- Modo discontinuo (o por lote). Todos los elementos nutritivos necesarios para el crecimiento biológico se introducen en el comienzo de la reacción. Ni adición o remoción se llevan a cabo. La reacción tiene lugar a volumen constante. Las únicas acciones posibles del operador se refieren específicamente a las variables ambientales como el pH, la temperatura o la velocidad de agitación. Se requiere pocos recursos para su implementación, garantiza la pureza del producto, Una desventaja es que casi no hay medios de control que hagan posible operar el fermentador para optimizar el uso de los microorganismos. También adolece de una desventaja importante: el suministro inicial de una alta cantidad de sustrato en general inhibe el crecimiento de microorganismos que lo consumen, lo que resulta en un retraso.

- Modo semi-continuo (o lote realimentado). En este modelo se agrega varios elementos nutritivos conforme los necesite el microorganismo. El producto es extraído en intervalos y se recomienda cuando es peligroso liberar materia toxica residual, tiene la ventaja que se puede evitar la inhibición del crecimiento debido a altas concentraciones de sustrato.
- Modo continuo (o **Quimiostato**). Es el más ampliamente usado en el tratamiento de aguas, el proceso continuo trabaja en estado estable para las condiciones de suministro fijos. Generalmente opera en lazo abierto y se puede usar para estudiar los fenómenos transitorios. Además, se pueden obtener producciones significativas en reactores de tamaño pequeño.

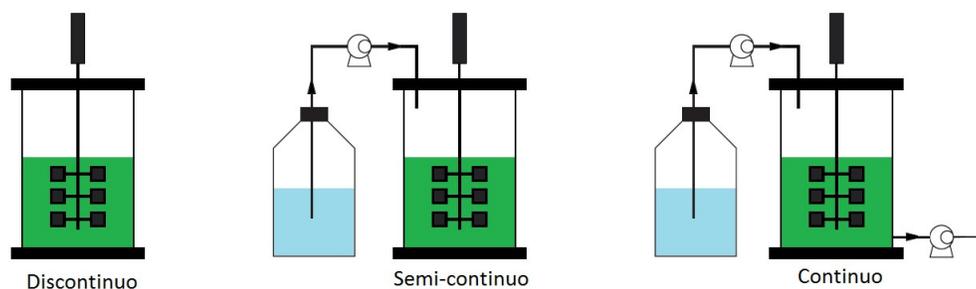


Figura 2.1: Modos de operación de biorreactores

2.4.5. Modelado por balance de masa

El modelado de sistemas biológicos es una tarea delicada porque no hay leyes que caracterizan la evolución de los microorganismos. Sin embargo, estos sistemas, al igual que todos los sistemas físicos, deben cumplir con normas, tales como la conservación de la masa, la electroneutralidad de soluciones, etc.

2.4.6. Esquema de reacción

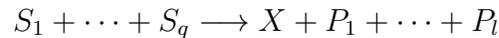
A nivel macroscópico, el esquema de reacción de un proceso bioquímico describe el conjunto de las principales reacciones biológicas y químicas. Adoptaremos el formalismo de [5] que es similar a la de la química, simplemente definiendo la transformación de dos reactivos A y B en un producto C en la forma siguiente:



Por convención, a diferencia de la química, no se consideran los coeficientes estequiométricos en estas reacciones. En general la velocidad de reacción corresponde a la tasa de crecimiento de la biomasa implícita.

Las principales reacciones de transformación de la masa en un bioproceso son las siguientes:

- crecimiento de los microorganismos y la biosíntesis.

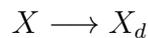


- síntesis de un producto a través de metabolismo primario.



En este caso, la fabricación de productos no es dependiente del crecimiento bacteriano, sino que generalmente depende de las enzimas producidas por microorganismo.

- Mortandad.



donde, X_d corresponde a una biomasa muerta (mientras que X es la biomasa viva).

Sin embargo, esta ecuación solamente puede ser completada por la adición de la velocidad de reacción y coeficientes estequiométricos a ella. Es por ello que se va a preferir expresar el esquema de reacción en una forma más completa:



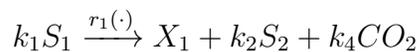
Donde φ es la velocidad de reacción, en este caso corresponde a la tasa de formación de biomasa. El ritmo de consumo de A es k_A , el de B es k_B mientras que el ritmo de producción de C es k_C . Entonces la tasa de producción de C es $K_C \varphi$ y las tasas de consumo de A y B son $k_A \varphi$ y $k_B \varphi$ respectivamente.

La elección del número de reacciones a tener en cuenta y los componentes que intervienen en estas reacciones es muy importante para el modelado. Se lleva a cabo basada en el conocimiento que tenemos sobre el proceso y las mediciones que podemos realizar. El esquema de reacción condicionará la estructura del modelo. Por lo tanto tienen que ser elegidos con cautela, teniendo en cuenta los objetivos del modelo y de la precisión que se espera. El número requerido de reacciones y el esquema de reacción puede ser determinada directamente a partir de un conjunto de datos experimentales [7, 6]. Se considera que el esquema de reacción resume la distribución de la masa y fluye entre varias reacciones que intervienen en el proceso, y que los coeficientes de rendimiento son constantes. A continuación se muestra un ejemplo de [17] para aterrizar estas ideas.

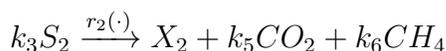
Ejemplo

Se va a considerar un ejemplo con digestión anaeróbica. Este proceso de tratamiento de aguas residuales utiliza bacterias anaeróbicas para degradar la materia orgánica (S_1). De hecho, es un proceso muy complejo, en el que un gran número de poblaciones bacterianas intervienen [48, 15]. Si el objetivo es el control de este ecosistema, necesitaremos un modelo relativamente simple. También vamos a limitarnos a considerar dos poblaciones bacterianas. Por lo tanto, se supone que la dinámica del sistema se pueden resumir en dos principales etapas:

- etapa de acidogénesis (velocidad de reacción $r_1(\cdot)$), durante el cual el sustrato S_1 es degradado por bacterias acidogénicas (X_1) y se transforma en ácidos grasos volátiles (S_2) y en CO_2 :



- etapa de metanogénesis (velocidad de reacción $r_2(\cdot)$), donde los ácidos grasos volátiles (VFA por sus siglas en inglés *volatile fatty acids*) son degradado en CH_4 y CO_2 por bacterias metanogénicas (X_2).



Las constantes k_1 , k_2 y k_4 representan los coeficientes estequiométricos asociados con el consumo del sustrato S_1 , la producción de VFA y CO_2 respectivamente en la etapa de acidogénesis. k_3 , k_5 y k_6 representan los coeficientes estequiométricos asociados a el consumo de VFA y la producción de CO_2 y CH_4 durante la etapa de metanogénesis.

Cabe señalar que este esquema de reacción no tiene ninguna realidad biológica ya que las biomazas X_1 y X_2 representan una flora de diferentes especies. Lo mismo sucede para los sustratos S_1 y S_2 que reúnen un grupo de compuestos heterogéneos. Hay muchos modelos para estos procesos que se pueden consultar en [30, 48, 45] para más detalles.

2.4.7. Cinemática

Positividad de las variables

A priori, sabemos que existen un cierto número de limitaciones físicas que el modelo debe respetar: las variables deben permanecer positivas y son acotadas si las entradas de masa al Quimiostato lo son. Estas limitaciones físicas impondrán restricciones a la estructura de $r_i(\cdot)$. Algunas cantidades tienen que permanecer entre dos límites conocidos.

A continuación se presenta una condición para garantizar que el modelo conserva esta propiedad.

Propiedad 1

Para cada variable de estado ξ_i , el campo $\frac{d\xi}{dt}$ en el eje $\xi_i = 0$ debe de apuntar hacia la parte aceptable del espacio, en otras palabras, la variable $\xi \in [L_{min}, L_{max}]$ debe de cumplir:

$$\begin{aligned} \xi = L_{min} &\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} \geq 0 \\ \xi = L_{max} &\Rightarrow \frac{d\xi}{dt} \leq 0 \end{aligned}$$

Propiedad 2

La segunda limitación importante que tendrá que respetar la cinética de bioquímicos se relaciona con el esquema de reacción. La reacción no puede tener lugar si falta uno de los reactivos necesarios para la reacción considerada. Esto se explica en la siguiente propiedad

Si ξ_j es un reactivo de la reacción i , entonces ξ_j puede ser factorizada en r_i .

$$r_i(\xi, u) = \xi_j v_{ij}(\xi, u)$$

Por lo que se puede verificar $\xi_j = 0 \Rightarrow r_i(\xi, u) = 0$.

De la misma manera, para las reacciones asociadas con una biomasa X , también vamos a tener la misma propiedad. Por lo tanto, se escribirá una reacción de crecimiento

$$r_i(\xi, u) = \mu_i(\xi, u)X$$

El termino μ_i es llamado tasa de crecimiento específico.

Tasa de crecimiento específico

La tasa de crecimiento específico depende fuertemente de las condiciones de operación y el medio reactivo. La expresión más utilizada es el modelo empírico de Monod [46] que, para describir el crecimiento bacteriano, se utiliza la ley introducida al comienzo del siglo 20 por Michaëlis Menten para la cinética enzimática.

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_S + S}$$

Esta expresión, donde μ_{max} es la tasa de crecimiento específico máximo ($1/h$) y K_S la constante de saturación media (g/l), nos permite describir el fenómeno de crecimiento limitado por la falta de sustrato y la ruptura completa cuando el sustrato ya no está disponible. Tengamos en cuenta que las analogías con la cinética enzimática se han utilizado a menudo para determinar un modelo de crecimiento [19, 60].

Además, los fenómenos de inhibición debido al exceso de sustrato se modelan generalmente por la expresión de Haldane, introducido para el caso de las reacciones enzimáticas, y retomado por Andrews [2] para el caso de reacciones biológicas:

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_i}}$$

donde K_i es la constante de inhibición (g/l).

Cabe señalar que se han establecido muchas otras relaciones algebraicas para describir estas restricciones o fenómenos de inhibición, pero su uso sigue siendo marginal. De igual manera, algunos modelos tienen en cuenta la influencia de la concentración de microorganismos, co-metabolitos, temperatura, pH (ver [14, 4, 63] para más ejemplos).

El caso del oxígeno es un poco diferente, de hecho, en el caso de procesos que funcionan en un ambiente aeróbico, el oxígeno corresponde a un co-sustrato de la reacción, y por lo tanto puede ser tratado como tal, es decir, interviene en la forma de un término tipo Monod en la expresión de tasa de crecimiento específico, lo que conduce a la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_{max} \left(\frac{S}{K_S + S} \right) \left(\frac{O_2}{K_{O_2} + O_2} \right)$$

Con concentración de oxígeno disuelto O_2 (g/l) y K_{O_2} la constante de saturación media para el oxígeno (g/l). Sin embargo, esta expresión se omite a menudo bajo la suposición de que el reactor está suficientemente aireado por lo que K_{O_2} es demasiado pequeño en comparación de la concentración de oxígeno disuelto presente en el reactor en circunstancias normales.

2.4.8. Modelo dinámico de biorreactores

Ya tenemos las ideas base necesarias para modelar cualquier tipo de biorreactor, lo que presentaremos en la presente subsección corresponde a modelos de Quimiostato (biorreactores operando en lote o modo continuo) ya que la única diferencia es la presencia de una tasa de dilución que será tomada como entrada de control. Empezaremos dando un modelo para un Quimiostato que se puede encontrar en [5] y es más general que el presentado en [17]:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)(D + \delta) \\ y &= h(\xi) = \xi_1\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde

$$f(\xi) = K\varphi(\xi); g(\xi) = (\xi_{in} - \xi)$$

En esta representación el estado es $\xi = [\xi_1(t), \dots, \xi_n]^T$ formado por las n concentraciones denotadas por ξ_i ; en tanto que ξ_{in} denota el vector de las posibles n -concentraciones de alimentación del Quimiostato. Por su parte, $\varphi(\xi)$ denota el vector de las m tasas de reacción. Mientras que K es una matriz real $n \times m$ de coeficientes de rendimiento, que pueden ser positivos o negativos dependiendo de si ξ_i es un reactivo o producto de la reacción respectivamente.

Como ejemplo podemos visualizar la dinámica de un sistema con un solo producto y una solo sustrato, este estaría definido por:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_1\mu(\xi_2) - \xi_1u \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{1}{Y}\xi_1\mu(\xi_2) + (\xi_{2in} - \xi_2)u\end{aligned}\tag{2.30}$$

Si realizamos las siguientes sustituciones: $K = [0 \quad -1/Y]^T$, $\varphi(\xi) = \xi_1\mu(\xi_2)$ y $\xi_{in} = [0 \quad \xi_{2in}]^T$ se aprecia por inspección directa que el sistema (2.30) se transforma en (2.29).

Capítulo 3

Observador adaptativo de ganancias constantes: Aplicación a la estimación de contaminantes en aguas residuales

En este capítulo se revisan los observadores adaptativos de ganancia constante para sistemas no lineales, para los cuales hay relativamente pocas soluciones disponibles y para algunos casos particulares. Se presenta un observador asintótico de ganancia constante para sistemas no lineales que tienen entrada lineal. Esto permite formular el diseño del observador dentro del paradigma de desigualdades matriciales lineales siempre que se cumpla una condición estricta positiva real entre la perturbación de entrada y la salida. El observador propuesto se aplica luego a una gran clase de sistemas dinámicos: Quimiostato que es no lineal y se utilizan ampliamente en procesos de fermentación, cultivos celulares, medicina, etc. De hecho, bajo ciertos supuestos prácticos, existe el cambio necesario de las coordenadas de estado del Quimiostato, lo que permite el uso del observador de ganancias constantes. La teoría desarrollada se ilustra estimando la concentración de contaminantes en una instalación de tratamiento de aguas residuales que utiliza la microalga *Spirulina maxima* como agente de reducción.

3.1. Motivación

Los observadores adaptativos se introdujeron inicialmente para sistemas lineales a principios de los setenta. En [26], se presentó el primer observador de sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) con un algoritmo de adaptación de

parámetros. Tanto el estado como el parámetro desconocido se pueden estimar asintóticamente siempre que se cumplan las propiedades de detectabilidad y excitación persistente (PE) de algunas señales internas del observador. Posteriormente, se propusieron los observadores adaptativos con convergencia exponencial en [27]. El análisis puede extenderse a sistemas con un término de inyección de entrada y salida posiblemente no lineal y la perturbación desconocida multiplicada por un vector constante en el lado derecho de la ecuación de estado, que es quizás el caso más general en el que la PE se puede verificar mediante alguna prueba clara. Esta teoría del observador se extendió a los llamados sistemas de afinidad de estado asumiendo la existencia de algún observador nominal exponencialmente estable y la propiedad PE; esto último no es más fácil de probar, vea [8], [66] y [51]. La investigación sobre la teoría de observadores para sistemas no lineales se desarrolló ampliamente a partir de la década de 1980 en [25], y en la década de 1990 en [57], [24], [53] y [58]. Se puede encontrar una descripción excelente y completa de los resultados fundamentales en la conocida monografía [44].

En esta sección consideramos un observador no lineal de ganancias constantes, esto es, un observador con una ecuación diferencial adaptable de la misma dimensión que el vector de parámetros desconocidos. Para obtener más información de observadores con técnicas para diferentes perturbaciones, sistemas retardados y demás por el estilo puede consultar [52] y [28].

La celebre teoría de observadores adaptables de alta ganancia lidia con sistemas uniformemente observables o que estén en forma estrictamente triangular, ver [44] y [20]; esto se refiere a la dependencia del lado derecho del estado y la entrada. Un hecho limitante es que se presupone que el parámetro constante desconocido se multiplica por un campo vectorial que tiene la misma dependencia triangular del estado, mientras que, en general, la perturbación entra en cada fila del lado derecho del sistema. En [21] se presenta un observador adaptativo de alta ganancia para una clase de sistemas no lineales de salida única uniformemente observable, en el que el uso obligatorio del parámetro de alta ganancia hace necesario analizar el caso cuando va al infinito, por lo tanto se conduce a una resolución de la condición de EP como se indica en [20].

En [37] se propone un observador adaptable basado en el filtro de Kalman Extendido cuyo análisis es simple pero sus ecuaciones contienen términos complicados. En [10] el parámetro de incertidumbre es multiplicado por un campo vectorial más general y la prueba constructiva de la técnica básica de alta ganancia permite diseñar ganancias con valores razonables, esto es, las ganancias no necesitan ir al infinito y la propiedad PE debe ser válida para valores de ganancia limitados. Este aspecto representa una clara ventaja

respecto a otros enfoques, como los de [20, 21].

En contraste con el caso dinámico, hay pocos resultados disponibles para observadores adaptativos no lineales de ganancia constante. Hasta donde sabemos, los principales logros del caso lineal y una generalización parcial para los sistemas no lineales se recopilaron en la monografía [44]. En términos generales, se puede tener un observador adaptativo estático con identificación del parámetro desconocido siempre que la dinámica del error del observador sea estrictamente positiva real (SPR) desde el parámetro desconocido hasta el error observado. Extendiéndonos a sistemas no lineales particulares que tienen dependencia lineal del estado, la posible inyección de entrada/salida y la perturbación desconocida constante se multiplican por un vector constante y un escalar no lineal que depende únicamente de la salida. Desafortunadamente, la aparentemente rica posibilidad de q parámetros desconocidos se comprime en una única cantidad escalar, que depende sólo de cantidades medibles (salida, entrada). Además, la fuerte suposición adicional que permite el uso de la propiedad estrictamente positiva real es una restricción severa. Además, no se pueden usar directamente los resultados [66] y [69] porque requieren que el campo vectorial dependa únicamente de la salida. Además, estos resultados requieren algunos supuestos de estabilidad *a priori* que pueden ser difíciles de lograr.

Debido al éxito de las técnicas de alta ganancia, uno puede tener la tentación de combinar esto con la adaptación estática siguiendo un enfoque pasivo estricto. Sin embargo, la estabilidad del observador adaptativo de HG y las condiciones de SPR conducen a objetivos simultáneos opuestos. Es decir, se puede obtener una alta ganancia estabilizadora sin ninguna posibilidad de satisfacer la condición SPR y viceversa. En este manuscrito, se consideran observadores adaptativos de ganancia constante para sistemas no lineales. El análisis se refiere a sistemas afines no lineales donde la perturbación desconocida ingresa linealmente a través del mismo canal de entrada. El diseño del observador depende de la capacidad de solución de una desigualdad matricial lineal (LMI) sujeta a una condición de tipo SPR entre la perturbación y la salida del sistema. Nuestro objetivo es doble: primero, proporcionar una combinación del enfoque LMI con las condiciones de los observadores adaptativos de ganancia constante generalizando las de [44] y con condiciones menos restrictivas que las de [42] o [61]; segundo, mostrar la aplicabilidad de la teoría a la observación de los estados desconocidos de una gran clase de sistemas no lineales del proceso del Quimiostrato con un componente constante desconocido simultáneamente en la entrada (tasa de dilución del sustrato). Con este fin, se proporciona un cambio de coordenadas suave adecuado para el proceso no lineal del Quimiostrato. Finalmente, el diseño del observador paso a paso se ilustra en un cultivo continuo de *Spirulina maxima* para el tratamiento de aguas residuales.

Resumiendo, esta sección contiene:

1. Una propuesta de observador adaptativo de ganancias constantes para una clase de sistemas no lineales que generalizan resultados previos y constituye un paso hacia adelante en la búsqueda de soluciones factibles.
2. Se considera una clase amplia de procesos biológicos que presentan dinámicas no lineales complejas conocido como Quimiostato para los cuales es posible aplicar la teoría desarrollada
3. Se presenta la validación del desempeño y diseño del observador en un modelo no lineal de un Quimiostato para la remoción de contaminantes en aguas residuales mediante cultivos de *Spirulina maxima*.

3.2. Una propuesta de transformación de estado no lineal

Hasta el momento las metodologías expuestas para lidiar con incertidumbre en los parámetros requieren de cierta forma en particular o de condiciones en el vector de entrada, por ejemplo estar en forma estrictamente triangular o en forma adaptable, además de satisfacer condiciones de tipo SPR para este ultimo caso, condiciones que no necesariamente satisface la dinámica del biorreactor (2.29). La idea base es buscar una transformación de estados de manera que podamos obtener un sistema no lineal respecto al estado pero lineal respecto a la entrada. Para el caso general de sistemas no lineales afines $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ no se tiene una respuesta a esta propuesta; sin embargo veremos que es posible encontrar una respuesta para el caso de sistemas dinámicos no lineales que modelan el cultivo continuo de microorganismos. Mas adelante veremos que la obtención de un vector constante en la entrada permitirá obtener a la condición tipo SPR.

A continuación proponemos el siguiente ejemplo para motivar la búsqueda de una transformación *ad-hoc* para el sistema biorreactor. Considere el sistema mostrado en [17] en la pagina 26, donde se describe la digestión anaerobia del proceso de digestión de un

proceso de tratamiento de aguas residuales.

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= r_1(\cdot) - X_1 u \\
 \dot{X}_2 &= r_2(\cdot) - X_2 u \\
 \dot{S}_1 &= -k_1 r_1(\cdot) + (S_{1in} - S_1)u \\
 \dot{S}_2 &= k_2 r_1(\cdot) - k_3 r_2(\cdot) + (S_{2in} - S_2)u \\
 \dot{C} &= k_4 r_1(\cdot) + k_5 r_2(\cdot) - qc(\xi) + (C_{in} - C)u
 \end{aligned}$$

el cual es un sistema de la forma $\dot{\xi} = K\varphi(\xi) + (\xi_{in} - \xi)u$, (sic. ec. (2.29)); donde $\xi = [X_1, X_2, S_1, S_2, C]^T$, $\varphi(\xi) = [r_1, r_2]^T$, k_i son y S_{in_i} , C_{in} representan concentraciones de sustratos y de contaminantes que alimentan al biorreactor, para mas detalles ver [17].

Proponemos el siguiente cambio de coordenadas;

$$x_1 = \ln(X_1); x_2 = \ln(X_2); x_3 = \ln(S_{1in} - S_1); x_4 = \ln(S_{2in} - S_2); x_5 = \ln(C_{in} - C); \quad (3.1)$$

de esta manera, se llega al sistema transformado:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{r_1(\cdot)}{\exp(x_1)} - u \\
 \dot{x}_2 &= \frac{r_2(\cdot)}{\exp(x_2)} - u \\
 \dot{x}_3 &= + \frac{k_1 r_1(\cdot)}{\exp(x_3)} - u \\
 \dot{x}_4 &= - \frac{k_2 r_1(\cdot)}{\exp(x_4)} + \frac{k_3 r_2(\cdot)}{\exp(x_4)} - u \\
 \dot{x}_5 &= - \frac{k_4 r_1(\cdot)}{\exp(x_5)} - \frac{k_5 r_2(\cdot)}{\exp(x_5)} + \frac{qc(\xi)}{\exp(x_5)} - u
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

el cual es un sistema de la siguiente forma;

$$\dot{x} = f(x) + bu \quad (3.3)$$

donde $b = [-1, -1, -1, -1, -1]^T$. El sistema anterior tiene la forma que buscamos, es decir no lineal en el estado x pero lineal respecto de la entrada u . En lo que sigue veremos que esta transformación de apariencia sencilla se puede extender al sistema general del biorreactor operando en modo continuo, ver sistema (2.29).

3.2.1. Propuesta de una transformación de estado: el caso del Quimiostato

La transformación (3.1) es de poca utilidad si solo se cumple para el ejemplo anterior, por lo cual surge la siguiente pregunta: ¿En qué medida la transformación es válida para sistemas generales no lineales? veremos que la idea introducida en la subsección anterior puede aplicarse a una clase grande procesos biológicos conocido como Quimiostato. Empezaremos recordando que el Quimiostato que es una generalización del concepto de biorreactor operado en modo continuo (2.29), cuya representación dinámica reproducimos enseguida:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)(u + \delta) \\ y &= h(\xi) = \xi_1,\end{aligned}\tag{3.4}$$

Con $f(\xi)$ y $g(\xi)$ descritos como:

$$\begin{aligned}f(\xi) &= K\varphi(\xi) \\ g(\xi) &= (\xi_{in} - \xi)\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde $\xi_1(t), \dots, \xi_n$ son las n concentraciones en el vector de estados ξ ; ξ_{in} denota un vector con las concentraciones de entrada en sus elementos. Por su parte, $\varphi(\xi)$ denota el vector de las m tasas de reacción. Mientras que K es una matriz real $n \times m$ de coeficientes de rendimiento, que pueden ser positivos o negativos dependiendo de si ξ_i es un reactivo o producto de la reacción respectivamente.

Se adopta un modelo estándar de φ basado en el hecho de que la reacción solo ocurre cuando todos los reactivos están presentes. Es decir, la tasa de reacción es necesariamente cero siempre que la concentración de sus reactivos sea cero. Esto lo representamos de la siguiente manera:

$$\varphi_j(\xi) \triangleq \varsigma_j(\xi) \left(\prod_{n \sim j} \xi_n \right)\tag{3.6}$$

$$0 \leq \varsigma_j(\xi) \leq \varsigma_{\text{máx}}\tag{3.7}$$

Aquí la notación $n \sim j$ se refiere a que la multiplicación toma lugar en los componentes n que son reactivos de la reacción j . A $\alpha_j(\xi)$ se le llama tasa de reacción específica ya que es la tasa de reacción por unidad de cada reactivo y debe ser una función acotada por consistencia.

Con esto en mente, podemos reescribir la ecuación (3.4) de la siguiente manera:

$$\dot{\xi} = KG(\xi)\varsigma(\xi) + g(\xi)(u + \delta) \quad (3.8)$$

Donde:

$$\varsigma^T = [\varsigma_1, \dots, \varsigma_M]$$

$$G(\xi) = \text{diag}_{j=1, \dots, M} \left\{ \prod_{n \sim j} \xi \right\}$$

Como los modelos dinámicos de los Quimiostatos también deben satisfacer algunas propiedades para hacer frente a un comportamiento biológico realista, como la estabilidad BIBS (bounded inputs bounded state), *es decir*, si las entradas son acotadas, los estados también deben ser acotados, se analizarán bajo los siguientes supuestos:

A1.- La tasa de dilución tiene la siguiente cota inferior:

$$0 < u_{min} \leq u(t) \quad \forall t$$

A2.- Las concentraciones de dilución están acotadas de la siguiente manera:

$$0 \leq \xi_{in_i} u \leq \xi_{max} \quad \forall i, \quad \forall t$$

A3.- Cada reacción involucra por lo menos un reactivo que no es un catalizador o auto-catalizador.

Ahora presentaremos una versión ligeramente diferente de estabilidad BIBS dado en [5] que nos ayudara a definir cotas de los estados.

Teorema 2 *Considere el sistema dinámico de un Quimiostato dado por (3.4) y que las suposiciones A1 a A3 se satisfacen. Entonces, para toda entrada cuadrática integrable $u(t)$ y perturbación de entrada constante δ , el estado del sistema es positivamente acotado para toda t .*

Una cota explicita del limite superior del estado se puede obtener si agregamos la siguiente suposición en las condiciones iniciales:

A4.- Las condiciones iniciales de las variables de estado $\xi_i(t)$ tiene la siguiente cota superior:

$$a_n \xi_n(0) + \sum_{i \in I} \xi_i(0) \leq \frac{(a_n + q) \xi_{max}}{u_{min}} \quad (3.9)$$

donde I y J son un conjunto de índices $I = (n_1, n_2, \dots, n_q)$, $J = (m_1, m_2, \dots, m_p)$, n_i ($i = 1 \dots, q$) son los índices de los componentes (excluyendo ξ_n) que intervienen en la reacción con el índice $m_j \in J$, m_i ($i = 1, \dots, p$) son los índices de la reacción que involucra a ξ_n como un reactivo (i.e. no un producto), y

$$a_n = \max_{j \in J} \frac{\sum_{i \in I} \bar{k}_{ij}}{-\bar{k}_{nj}} \geq 0$$

donde \bar{k}_{ij} denota la entrada (i, j) de la matriz K .

Corolario 1 Con las mismas condiciones del teorema anterior y suponiendo que A4 se satisface, entonces las variables de estado $\xi_i(t)$ del sistema dinámico del biorreactor (3.4) son no negativas y acotadas para todo t de la siguiente manera:

$$\xi_i \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{a_n} \right\} (a_n + q) \frac{F_{max}}{u_{min}} = \xi_{i_{max}}.$$

Las demostraciones se puede encontrar en la página 53 de [5].

Ahora que ya hemos definido limites de las concentraciones y tenemos certidumbre matemática de que nuestro modelo siempre estará en el ortante positivo y sera acotado, podemos utilizar la transformación antes vista sin temor alguno. Y en adición a eso podemos presentarla de manera formal.

Lema 1 Considere el sistema dinámico del Quimiostato (3.4) y suponga que se cumplen las condiciones A1 - A4. Entonces existe un una cambio de variable $x_i = \alpha(\xi_i(t))$ dado por:

$$\alpha(\xi_i(t)) = \begin{cases} \ln(\xi_i(t)) & \text{si } \xi_{in_i} = 0, \quad \forall t. \\ \ln(\xi_{in_i} - \xi_i(t)) & \text{si } \xi_{in_i} - \xi_i > 0, \quad \forall t. \end{cases}$$

tal que el sistema (3.4) es transformado en la forma de (3.10), propiamente dicho:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + b(u + \delta), \\ y &= cx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{diag}\{\exp(x_1), \dots, \exp(x_n)\}^{-1} K \bar{\varphi}(x) \\ b &= [-1, -1, \dots, -1]^T \end{aligned}$$

y $\bar{\varphi}(x) = \varphi(\xi)$ con $\xi_i = \alpha^{-1}(x_i)$.

Demostación 1 *Primero note que cualquier estado dado i o concentración del sistema (3.4) se puede reescribir de la siguiente manera:*

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j \sim i} (\pm) k_{ij} \varphi_j + (\xi_{in_i} - \xi_i) u,$$

Aquí la notación $j \sim i$ significa que la sumatoria se toma en las reacciones con índice j que involucran los componentes de índice i , para más detalles vea [17].

Ahora, de las condiciones del Lema, el teorema 2 y las propiedades del sistema se tiene que tanto ξ_i como $\xi_{in_i} - \xi_i$ son positivas. Por lo que la función $\alpha(\xi_i(t))$ esta bien definida. Con esto es posible analizar los dos casos posibles.

Para el caso en que $\xi_{in_i} = 0$ tenemos el cambio de variable $x_i = \ln(\xi_i(t))$, esto nos lleva a:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\exp(x_i)} \sum_{j \sim i} (\pm) k_{ij} \varphi_j - u.$$

Para el caso $\xi_{in_i} - \xi_i > 0$, el cambio de variable esta dado por $x_i = \ln(\xi_{in_i} - \xi_i(t))$ y por eso:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{\exp(x_i)} \sum_{j \sim i} (\pm) k_{ij} \varphi_j - u.$$

Se tiene que todos los elementos del vector de entrada p son -1 . Por su parte, los terminos derivativos en el lado derecho de la ecuación se pueen acomodar de la siguiente manera:

$$f(x) = \text{diag}\{\exp(x_1), \dots, \exp(x_n)\}^{-1} K \bar{\varphi}(x)$$

Donde $\bar{\varphi}(x)$ es $\varphi(\alpha^{-1}(x))$. □

Es importante mencionar que el cambio de coordenadas propuesto puede ser aplicado fácilmente a una gran cantidad de modelos de bioprocesos citados en la literatura, por ejemplo vea [17].

3.2.2. Observador adaptativo de ganancia constante para una clase de sistemas no lineales

Los observadores adaptables no lineales de ganancia contante son interesantes desde un punto de vista práctico por que son los mas rentables, en términos de la dinámica adicional,

ya que solo se requiere una dimensión igual al número de parámetros desconocidos. Por otra parte, su estudio representa un reto teórico interesante ya que las soluciones que existen en la literatura consideran sistemas no lineales de estructuras muy restringidas, cuyas condiciones de existencia son difíciles de verificar en la práctica, ver sección 3.2.1. Nuestra pretensión es la de proponer una solución alternativa de observador adaptable de ganancias constantes para una clase de sistemas no lineales, es decir aquellos que son transformables a sistemas no lineales en el estado pero lineales en la entrada. Este problema tiene sentido pues, como se vio en la sección anterior, existe una clase amplia de sistemas biológicos no lineales que satisfacen esta condición.

Para entrar en el tema, consideremos un sistema no lineal afín en el estado (2.29) para el cual existe un cambio de variables de estado $x_i = \alpha(\xi_i)$ de manera que el sistema transformado tenga la forma dado por,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + b(u + \delta), \\ y &= cx = c_1 x_1, \\ c &= [c_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde p es un vector constante, $x \in R^n$ es el vector de estados; entato que; y, u, δ representan la salida escalar, la entrada y la perturbación constante en la entrada, respectivamente.

El problema de observación considerado en este estudio se puede definir como sigue; determinar condiciones de existencia de un observador para el sistema (3.11) de manera que simultáneamente se estime el estado del sistema x y se identifique el parámetro desconocido δ .

Para abordar este problema, se puede notar que la adaptación es un requerimiento indispensable ya que la perturbación δ no puede ser considerada como una entrada de control activo. Por ello proponemos la estructura de observador tipo Luemberger (copia del sistema más una inyección de salida) más una ley de adaptación de ganancia constante para el parámetro desconocido, la cual está dada por,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + b(u + \phi) + lc(z - x) \\ \dot{\phi} &= -kce, \quad k > 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde k es una constante positiva que determina la ley de adaptación la cual es función del error de observación dado por $e = z - x$.

El principal resultado teórico de este capítulo es formulado como sigue.

Teorema 3 Considere el sistema (3.11) y sea A la matriz Jacobiana de $f(x)$ que se asume acotada en un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ahora, suponga que se satisfacen las desigualdades matriciales dadas por,

$$\begin{aligned} A^T P + PA + c^T Y^T + Yc &< -2Pk_L - Q < 0 \\ Pb &= c^T \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde P, Q son matrices simétricas definidas positivas, Y es un vector $n \times 1$ tal que $l = P^{-1}Y$ y k_L es una cota Lyptichitz de $Ax - f(x)$. Bajo esta condiciones el sistema (3.12) es un observador asintótico del sistema (3.11).

Demostración 2 Comencemos por determinar la dinámica del error, $e(\cdot) = z - x$, la cual esta dada por,

$$\frac{d}{dt}e(t) = f(z) - f(x) + lc(z - x) + b(\phi - \delta).$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = f(z) - f(z - e) + lce + b(\phi - \delta)$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = Ae + lce + b(\phi - \delta) + \mathcal{O}(e)$$

donde $A = \frac{\partial}{\partial t}f(z^*)$ y z^* es algún valor de estado dentro del conjunto acotado Ω . Por su parte el error de estimación del parámetro desconocido, denotado por ϵ , esta dado por,

$$\epsilon = \phi - \delta$$

de donde se deduce que,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\phi}$$

A continuación, considere la forma cuadrática siguiente,

$$V(t) = \frac{1}{2}ke^T(t)Pe(t) + \frac{1}{2}\epsilon^2(t), \quad k > 0$$

la derivada de ésta función candidata de Lyapunov a lo largo dela dinámica del error satisface la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \frac{1}{2}ke^T(t)[A^T P + PA + c^T Y^T + Yc]e + \dots \\ &\dots + ke^T(t)Pp\epsilon + ke^T(t)P\mathcal{O}(e) + \dot{\epsilon}\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \frac{1}{2}ke^T(t)[A^T P + PA + c^T Y^T + Yc]e + \dots \\ &\quad \dots + ke^T(t)P\mathcal{O}(e) \end{aligned}$$

ahora bien, de las condiciones del teorema se tiene que,

$$\frac{d}{dt}V(t) < -\frac{1}{2}ke^T(t)Qe(t) - ke^T(t)Pk_L e(t) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e)$$

$$\frac{d}{dt}V(t) < -ke^T(t)Pk_L e(t) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e)$$

$$\frac{d}{dt}V(t) < 0$$

Por lo cual se cumple que,

$$e \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Ahora falta mostrar que ϵ también converge a cero, para lo cual podemos usar el principio de invariancia de LaSalle.

Consideremos, entonces, la variable aumentada $[e, \epsilon]^T$, que de acuerdo con el principio de LaSalle, se debe mostrar que el conjunto $[0, \epsilon]^T$ no es invariante en el tiempo positivo. La dinámica en este conjunto esta dada por,

$$\dot{e} = be; \quad e = 0$$

de manera que, para cualquier $\epsilon \neq 0$, no es posible conservar la condición $e = 0$, es decir que el conjunto $[0, \epsilon]^T$ no es invariante en el tiempo positivo. Por lo anterior se tiene que,

$$\phi \rightarrow \delta \quad \text{siempre que} \quad t \rightarrow \infty,$$

esto significa que se obtiene el objetivo de observación adaptable con identificación del parámetro desconocido.

Conviene señalar que k no interviene en la desigualdad matricial condición (3.13) del Teorema, por lo cual puede ser escogida de manera independiente. Por lo anterior, un valor de k relativamente grande mejorara la velocidad de convergencia. \square

Comentario: La desigualdad matricial (3.13) no es una LMI puesto para las variables de decisión son P , Q y Y . No obstante, (3.13) es equivalente a la desigualdad siguiente,

$$P^{-1}A^T + AP^{-1} + bl^T + lb^T < -2P^{-1}k_L - Q \quad (3.14)$$

bajo la restricción $b = P^{-1}c^T$. Por lo cual, la estructura de una LMI se preserva con variables de decisión P^{-1} , Q y l .

3.2.3. Aplicación a un bioproceso de remoción de contaminantes en aguas residuales

Esta sección se refiere al diseño del observador adaptativo de ganancia constante desarrollado previamente, para el modelo de una instalación de tratamiento de aguas residuales basada en la dinámica de crecimiento de Monod. Primero, de acuerdo al Teorema 2, se conserva la propiedad de consistencia biológica de la invarianza de estado en el ortante positivo. Con base en esto, el sistema se transforma para abordar el diseño del observador adaptativo de ganancia constante.

Aquí, consideramos un cultivo de microorganismos continuo donde la biomasa (x) es, por principio, capaz de eliminar los contaminantes que sirven como sustrato (s). Comúnmente, las relaciones de balance de masa conducen a la siguiente descripción matemática,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x\mu(s) - x(u + \delta) \\ \dot{s} &= -a_3^{-1}x\mu(s) + (a_4 - s)(u + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

donde la ley del crecimiento de microorganismos de Monod viene dada por:

$$\mu(s) = \frac{a_1 s}{a_2 + s}, \quad (3.16)$$

y a_1 es la tasa de crecimiento máxima, a_2 es la constante de saturación, a_3 es el coeficiente de rendimiento y a_4 es la concentración de sustrato de entrada. La entrada de control es la tasa de dilución $u(t)$ que alimenta el biorreactor, y el canal de entrada está afectado por un factor de dilución constante desconocido $\delta \neq 0$.

Observe que, sin ningún factor de dilución adicional que sea variable en el tiempo de la entrada de sustrato, se puede considerar como un control activo. Luego, la perturbación desconocida constante ingresa al sistema para ser controlada y observada a través del mismo canal que la entrada conocida y controlada.

Debido a que las entradas permisibles $u(t)$ son todas funciones integrables al cuadrado, y la perturbación externa δ es un número constante, se pueden enunciar las siguientes afirmaciones:

- I El ortante positivo $\mathcal{O}^+ := \{x > 0, s > 0\}$ es invariante hacia adelante en el tiempo con respecto al sistema (3.15) para cada señal de entrada integrable $u(t)$ y perturbación δ .

II Cada solución del sistema (3.15) que comienza en el ortante positivo \mathcal{O}^+ está acotada para toda señal de entrada integrable $u(t)$ y perturbación δ acotadas.

Estas afirmaciones son una consecuencia directa del teorema 2. Se puede encontrar una prueba alternativa en [10].

Transformación del Sistema: A partir de los hechos anteriores, se pueden restringir los estados del sistema al conjunto $x > 0$ y $0 \leq s < a_4$. Entonces, según el Lema 1, existe una transformación de estado dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln(x), & x_2 &= \ln(a_4 - s), \\ x &= \exp(x_1), & s &= a_4 - \exp(x_2) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones (3.15) se pueden expresar como en (3.17), donde las perturbaciones externas y de entrada pasan por un vector de entrada constante. Por tanto, es posible utilizar un observador como el desarrollado anteriormente, es decir, la plante quedara como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} - (u + \delta) \\ \dot{x}_2 &= \frac{\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)} \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)} - (u + \delta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se puede apreciar que Eq. (3.17) no está en forma de observador adaptativo. Además, se puede ver que $b = [-1 \ -1]^T$, por lo que no sostiene que $b_1 > 0$ o que $b_1 s + b_2$ es Hurwitz. Como consecuencia, no es posible utilizar el enfoque dado en [44].

Diseño del observador: Para simplificar el diseño del observador, escribamos el sistema transformado (3.17) en la siguiente forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_1(x_2) f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} (u + \delta) \quad (3.18)$$

donde,

$$f_1(x_2) = \frac{a_1 a_4 - a_1 \exp(x_2)}{a_2 + a_4 - \exp(x_2)}; f_2(x_1, x_2) = \frac{\exp(x_1)}{a_3 \exp(x_2)}$$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 3, el observador de ganancias constantes está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ f_1(z_2)f_2(x_1, z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} (u + \phi) + lce \\ \dot{\phi} &= -kce\end{aligned}\quad (3.19)$$

Ahora, calculemos las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{12} &:= \frac{\partial f_1(z_2)}{\partial z_2} = \frac{-a_1 a_2 \exp(z_2)}{(a_2 + a_4 - \exp(z_2))^2} \\ \hat{f}_{22} &:= \frac{\partial f_1(z_2)f_2(x_1, z_2)}{\partial z_2} = \\ &= \exp(x_1) \frac{-a_2 a_4 + 2a_2 \exp(z_2) - (a_4 - \exp(z_2))^2}{a_3 \exp(z_2)(a_2 + a_4 - \exp(z_2))^2}\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que ambas derivadas parciales de $f_1(z_2)$ y $f_1(z_2) \cdot f_2(x_1, z_2)$ con respecto a z_1 son iguales a cero, lo cual se debe al hecho de que $z_1 = x_1$, porque este último está disponible para la medición.

Como consecuencia, el error $e(t) = z(t) - x(t)$ dinámica viene dado por:

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} c_1 l_1 & \hat{f}_{12}(z_2) \\ c_1 l_2 & \hat{f}_{22}(x_1, z_2) \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \epsilon + \mathcal{O}(e) \quad (3.20)$$

Ahora, recordando que $s < a_4$, luego $s \leq a_4 - s_\Delta$ para algún $s_\Delta > 0$, se pueden obtener los siguientes límites útiles:

$$-\frac{a_1 a_4}{a_2} < \hat{f}_{12}(z_2) < -\frac{a_1 a_2 s_\Delta}{(a_2 + a_4 - s_\Delta)^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 s_\Delta} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right) < \hat{f}_{22}(x_1, z_2) < 0. \quad (3.22)$$

En la búsqueda de una solución numérica para las desigualdades del Teorema 3, es más conveniente usar la formulación equivalente dada en la Observación 1, a saber:

$$P^{-1} \left[lc + \begin{bmatrix} 0 & \hat{f}_{12} \\ 0 & \hat{f}_{22} \end{bmatrix} \right]^T + \left[lc + \begin{bmatrix} 0 & \hat{f}_{12} \\ 0 & \hat{f}_{22} \end{bmatrix} \right] P^{-1} \quad (3.23)$$

$$< -2P^{-1}k_L - P^{-1}QP^{-1} < 0 \quad (3.24)$$

donde:

$$P = P^T > 0, \quad Q = Q^T > 0$$

de tal forma que:

$$Pb = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{c}^T.$$

Como se mencionó anteriormente, la búsqueda numérica se puede restringir al siguiente dominio:

$$\hat{f}_{12} \in \left\{ -\frac{a_1 a_4}{a_2}, -\frac{\alpha a_1 a_2}{(a_2 + a_4 - \alpha)^2} \right\},$$

$$\hat{f}_{22} \in \left\{ \frac{-a_1 a_4 \max\{x\}}{a_3 \alpha} \left(\frac{a_2 + a_4}{a_2^2} \right), 0 \right\}.$$

Por lo tanto, si existe alguna solución al LMI dado en la Ec. (3.24), entonces existirá un observador adaptativo de ganancia constante para system (3.17) o equivalentemente, system (3.15).

3.3. Simulación numérica

Los parámetros nominales del modelo se ajustaron a partir de los datos experimentales de un cultivo discontinuo de microalgas verdiazules *Spirulina maxima*; ver [10]. Para ser precisos, los parámetros nominales, las condiciones iniciales, la tasa de dilución de entrada (perturbada) u , el estado inicial y las ganancias del observador son las siguientes:

1. Parámetros nominales (obtenidos de [55]):

a_1	a_2	a_3	a_4	$\max(x)$
0.027	25	3.45	205	534.75

2. Condiciones iniciales del sistema y observador:

$x_1(0) = z_1(0)$	$x_2(0)$	$z_2(0)$
5	150	160

3. Resultados de LMI eqref LMI2solve para $s_{\Delta} = 0.1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -1.4 \times 10^{-6} \\ 0 & -3.985 \end{bmatrix}, \\ P &= \begin{bmatrix} 500.7501 & -499.7501 \\ -499.7501 & 499.7501 \end{bmatrix}, \\ Q &= \begin{bmatrix} 2.5048 & -2.5023 \\ -2.5023 & 2.4998 \end{bmatrix} \times 10^{11}, \\ k_L &= 3.984. \end{aligned} \tag{3.25}$$

4. Valores de entrada y perturbaciones:

$t(h)$	0 – 400	400 – 800	800 – 1200
$u(t)$	0.01	0.01	0.01
$\delta(t)$	0	0.001	-0.001

5. La dinámica del observador está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ f_1(z_2)f_2(x_1, z_2) \end{bmatrix} + p(u + \phi) + lce \\ \dot{\phi} &= -kce \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 4.6774 \\ 0.6924 \end{bmatrix}, \\ b &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 1. \end{aligned}$$

El software utilizado en la simulación numérica fue Matlab[®] con ode45, una tolerancia relativa de 1×10^{-3} , y una tolerancia absoluta de 1×10^{-3} , mientras que Yalmip y Sedumi se utilizaron para resolver el LMI Eq.(3.14).

Las ganancias del observador se calcularon dependiendo de la matriz jacobiana del campo vectorial $f(x)$ valorado en $z_1 = x_1 = 13.2312$ y $z_2 = 13.0869$. La salida medida se corrompió con una señal emitida por una función de generador de ruido Gaussiano **wgn** a cero dBW de magnitud $\pm 0.015 \text{ mgL}^{-1}$ de MATLAB.

El estado del biorreactor, formado por la concentración de biomasa (x) y la concentración de sustrato (s), con valores de entrada/perturbación ($u + \delta$) dados en la tabla del elemento 4, se muestra en la Figura 3.1. A su vez, el sustrato del biorreactor y el sustrato del observador de ganancia constante afectados por el ruido de salida se muestran en la Figura 3.2, donde es posible ver que después de un tiempo inicial, el observador adaptativo converge al sustrato del sistema. Tenga en cuenta que el estado observado es robusto frente a las perturbaciones de entrada de 10% ($u + \delta = 0,0015 \pm 10\%u$) en $t = 400, 800$.

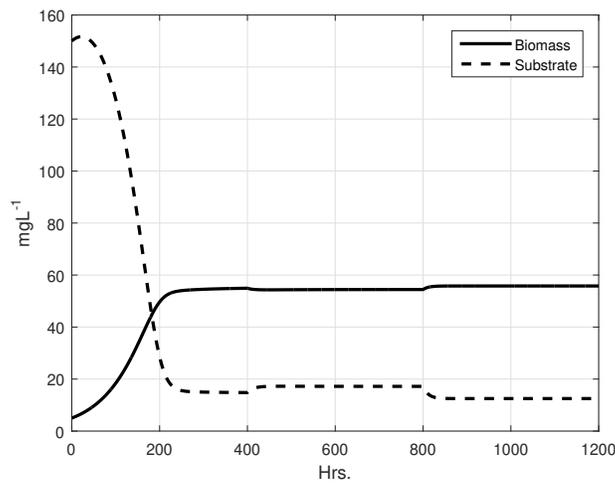


Figura 3.1: El biorreactor indica la respuesta para el estímulo de entrada/perturbación, La biomasa (x) es la línea continua y el sustrato (s) la línea discontinua.

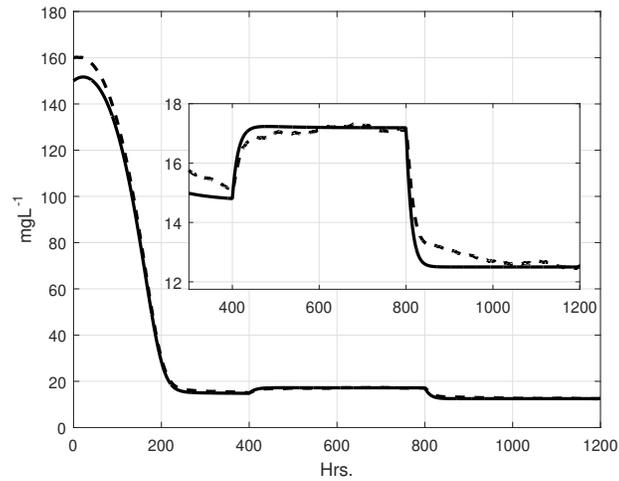


Figura 3.2: Dinámica del estado observado (sustrato). Sistema (línea continua) y observador de ganancia constante (línea discontinua).

Para ilustrar las ventajas de la adaptación propuesta, hemos elegido el observador clásico de alta ganancia dado en [24]. En la Figura 3.3, se puede ver que el observador de alta ganancia no puede dar una estimación razonable del sustrato en presencia de perturbaciones de entrada o ruido de salida. Como es sabido, el observador HG muestra fenómenos de picos (peaking phenomenon), incluso sin señales de salida ruidosas; tenga en cuenta que el sustrato estimado también muestra una brecha con respecto a los valores reales de concentración del sustrato; vea la línea discontinua blanca en el acercamiento de la Figura 3.3.

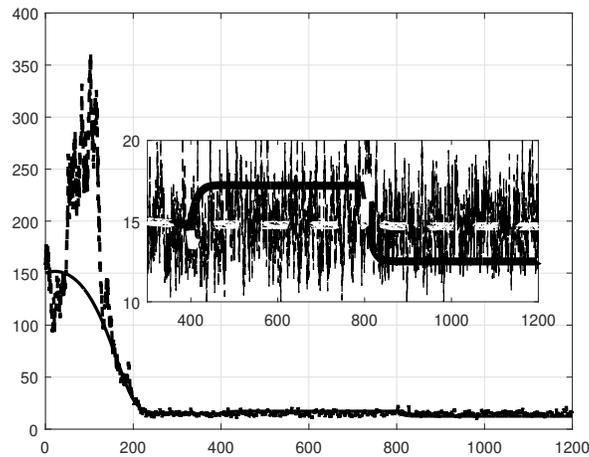


Figura 3.3: Estimación del sustrato por alta ganancia (HG). La línea continúa es el estado real, la línea discontinua es el estado HG con ruido de salida y la línea discontinua blanca es el estado HG sin ruido de salida.

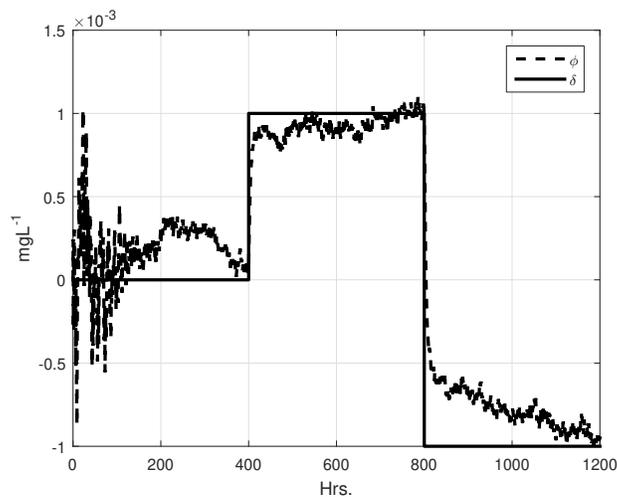


Figura 3.4: Estimación de la perturbación de entrada δ del observador adaptativo de ganancia constante.

La perturbación observada se muestra en la Figura 3.4. En ausencia de perturbaciones, el valor observado converge a cero en alrededor de 300 h. Cuando la perturbación está presente en el tiempo $t = 400, 800$ h, la perturbación observada sigue a la perturbación real después de un tiempo de convergencia relativamente corto, a pesar de la presencia de

ruido de salida.

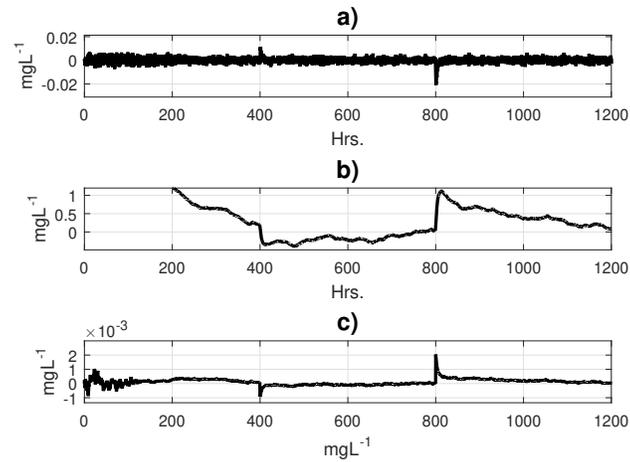


Figura 3.5: Errores de estimación por el observador adaptativo de ganancia constante: a) error en la biomasa, b) error en el sustrato, y c) error en la perturbación de entrada.

En la Figura 3.5, se pueden apreciar los diferentes errores entre los estados reales y observados. Tenga en cuenta que el error en la biomasa se debe a los términos de inyección de salida de corrección del observador; ver Eq. (3.19). Si bien los errores de sustrato y perturbación son relativamente pequeños, convergen a cero en poco tiempo en lo que respecta a la dinámica del sistema.

Capítulo 4

Observador adaptativo robusto de ganancia constante: Estimación de bio-etanol en un cultivo continuo de microorganismos

En este capítulo se presenta la extensión del observador adaptable de ganancias constantes al caso en que la dinámica $f(x)$ del sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ no se conoce con precisión, se asume que es acotado y que existe un campo suave, $\bar{f}(x)$, que es próximo a $f(x)$ en el sentido que la norma $\|\bar{f}(z) - f(x)\|$ es una función acotada. En nuestro caso, la motivación es que los bioprocesos se caracterizan por un comportamiento dinámico complejo, no linealidades, incertidumbre del modelo, variaciones de parámetros impredecibles, etc. Además, las variables más representativas suelen ser no accesible para la medición en línea. En este contexto, el desarrollo de algoritmos robustos y confiables para la observación de variables es de interés primordial, tanto para el control de procesos como para su monitoreo, [16], [22]. En esta sección nos concentraremos en las tasas de reacción $\varphi(\cdot)$ de la ecuación (2.29), también llamadas cinéticas de crecimiento, ya que estas determinan el comportamiento dinámico, son difíciles de estimar y con frecuencia las especificaciones de productividad y desempeño son dadas en términos de la tasa de crecimiento de los microorganismos [67].

Dentro del contexto planteado, el objetivo de esta sección es el análisis de las propiedades de robustez del observador adaptable de ganancia constante (3.12) ante dinámicas parcialmente conocidas o incertidumbres dinámicas y perturbaciones constantes externas en la entrada, tal que de manera simultánea se realice la observación del estado y la esti-

mación del parámetro desconocido. Como prueba de concepto, se presentara la aplicación de la teoría al caso de un proceso de producción de bio-etanol a partir de residuos agro-industriales cuyo modelado se basa en resultados experimentales reportados en [18].

4.1. Motivación del estudio de la producción de bio-combustibles

Los biocombustibles son una solución para superar los problemas ambientales, por ejemplo, el biodisel es una alternativa más limpia en comparación con los combustibles fósiles porque reduce en un 67% los gases de efecto invernadero [1], y el butano ofrece un mejor rendimiento del combustible y menores emisiones gaseosas y mayor contenido energético que los procesos actuales para la producción de etanol [35]. Hay muchas formas de obtener etanol a partir de cultivos verdes [50] pero controlar el proceso puede ser difícil.

Los biorreactores son dispositivos para el cultivo controlado de microorganismos, por lo que se presentan complejas reacciones biológicas y químicas. Frecuentemente el funcionamiento óptimo de tales procesos requiere de una estimación en línea de algunas variables esenciales como la biomasa, los sustratos o las concentraciones de bioproductos. Desafortunadamente, medir en tiempo real pueden ser muy costos o estar disponibles solo para una cuantificación a posteriori [9]. Una alternativa son los observadores dinámicos basados en modelos matemáticos, también conocidos como sensores suaves para la estimación de estados en tiempo real. El diseño de observadores puede ser una tarea difícil, porque los modelos dinámicos de biorreactores involucran dinámicas no lineales complejas, parcialmente conocidas, que operan en ambientes ruidosos y están expuestos a perturbaciones externas, [5]. Se pueden mencionar las técnicas de sensores suaves basado en redes neuronales [12] pero tienen algunas limitaciones como: necesitar muchos datos para entrenar la red, la topología y la forma de la red se suele elegir mucho sobre una base heurística, la determinación de una estructura “óptima” es a menudo un problema o una especificación excesiva de la red, ver [47]. Otros enfoques se basan en observadores dinámicos no lineales como los observadores de alta ganancia que son capaces de lidiar con las no linealidades de los cultivos dinámicos [29] [65] [10], donde el mayor inconveniente es la alta sensibilidad a mediciones de salida ruidosas [31].

En este capítulo, suponiendo que solo la concentración de biomasa está disponible para la medición en línea, se abordan el problema de estimar las concentraciones de sustrato y producto con la ayuda de un observador no lineal adaptativo. A grandes rasgos, consiste

en una transformación que lleva el sistema a la denominada forma integradora de tal manera que se puede diseñar un observador adaptativo no lineal basado en desigualdades de matrices lineales para estimar la concentración de sustrato. Entonces, suponiendo que tanto la biomasa como las concentraciones de sustrato están disponibles, el sensor suave se aplica nuevamente para estimar la concentración del producto (biocombustible) y rechazar las constantes perturbaciones de entrada que podrían estar presentes en el sustrato de entrada.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una metodología para el diseño fácil de un sensor suave robusto para la estimación en tiempo real del proceso de producción de etanol mostrado en [18], donde los desechos agroindustriales se utilizaron como fuente de glucosa para *Saccharomyces cerevisiae* CDBB 790.

El diseño se basa en un modelo matemático del cultivo biológico antes mencionado, por lo que existe una relación entre la completitud y la utilidad del modelo frente al control/observador, es decir, el modelo podría ser demasiado complejo para fines de observación o podría ser inexacto para reproducir un comportamiento biológico razonable. Tal situación nos lleva a considerar un modelo con incertidumbres paramétricas en presencia de posibles perturbaciones en la afluencia de alimentación. En este trabajo, la inexactitud de los parámetros se aborda usando un enfoque LMI mientras que las perturbaciones de entrada se manejan usando un enfoque adaptativo, [3] [36] [68] [38] [64]. Aquí nos ocupamos de la inexactitud utilizando características adaptativas y un LMI debido a su solidez [3] [36] [68] [38] [64].

El proceso de producción de bioetanol en un biorreactor con cultivo continuo para la producción de biotanol considerado en este trabajo se puede modelar por medio de las ecuaciones dinámicas del Quimiostato (3.4), es decir,

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f(\xi) + g(\xi)(u + \delta) \\ y &= h(\xi) = \xi_1,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $f(\xi)$ y $g(\xi)$ están dados por:

$$f(\xi) = \begin{bmatrix} x\mu_1(s) + x\psi^*p \\ -\frac{1}{Y_s}x(\mu_1(s) + \psi^*p) + \frac{1}{Y_p}x\mu_2(s) \\ x\mu_2(s) \end{bmatrix}; \quad g(\xi) = \begin{bmatrix} -x \\ (s_{in} - s) \\ -p \end{bmatrix}$$

el vector de estados $\xi^T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = [x, s, p]$ está formado por las concentraciones de biomasa x , sustrato s y etanol p respectivamente. Denotamos con $x\mu_1(s)$ y $x\mu_2(s)$ las

tasas de reacción de la biomasa y el etanol, respectivamente. La concentración de sustrato de entrada se denota como s_{in} , mientras que D es la tasa de dilución, c_1 es un parámetro constante real, δ es una perturbación de entrada constante, tal que $D + \delta \geq 0$. Conviene notar que $f(x)$, $g(x)$ $h(x)$ son un campos vectoriales suaves, globalmente uniformemente Lipschitz en un subconjunto Ω de R^n que es invariante en tiempo positivo bajo la dinámica del sistema anterior para cualquier entrada admisible, ver Teorema 2.

Se eligió este modelo [5] ya que representa un buen compromiso entre precisión y simplicidad, esto último facilita la simulación numérica y permite continuar con el tema del diseño del observador. Este modelo preserva la propiedad de que sus variables son positivas y acotadas (Teorema 2), por lo cual será posible realizar el cambio de coordenadas propuesto en el Lema 1. El contexto de robustez consiste en suponer la presencia de perturbaciones externas y que la dinámica del sistema ($f(\xi)$) no se conoce de manera precisa, *i.e.*, se considerará que el observador tiene velocidades de reacción ($x\mu_1(s)$ y $x\mu_2(s)$) diferentes a las de la planta, esto con el fin de tomar en cuenta la falta de precisión entre la planta nominal y el original.

El manuscrito está organizado de la siguiente manera. La sección posterior está dedicada al análisis y diseño del observador adaptable robusto de ganancia constante. Para esto el Jacobiano del sistema en torno a ciertas condiciones operativas permite llevar un análisis paramétrico robusto basado en desigualdades de matrices lineales comúnmente conocidas como LMI's, aquí se discuten brevemente los problemas de solución numérica de la solubilidad de los LMI's. Enseguida, con base en los resultados teóricos obtenidos, se presenta el diseño del observador propuesto para el modelo del cultivo continuo de *Saccharomyces cerevisiae* CDBB 790 para la producción de bioetanol a partir de desechos agroindustriales; dicho modelo esta basado en los resultados experimentales reportados en [18]. Finalmente, las propiedades de robustez del diseño propuesto se validan en un estudio de simulación que permitirá evaluar el desempeño del observador ante perturbaciones externas e incertidumbre en la dinámica del proceso.

4.2. Observador adaptable robusto de ganancia constante basado en LMIs

Esta sección tiene por objetivo mostrar que el observador adaptable de ganancia constante (3.12) presentado en la capítulo anterior posee ciertas propiedades de robustez ante dinámicas parcialmente conocidas.

Considere el sistema no lineal dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + b(u + \delta), \\ y &= cx = c_1 x_1, \\ c &= [c_1 \ 0 \ \cdots \ 0]\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde p es un vector constante. Además, $f(\cdot)$ es un campo vectorial suave, $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, mientras que y, u, δ son la salida escalar, entrada y perturbación de parámetro constante respectivamente.

Hipótesis 1: Suponga que existe un campo vectorial suave $\bar{f}(x) = f(x) + \Delta f(x)$ donde $f(x)$ y $\bar{f}(x)$ son Lypchitz. Mas aún, $\Delta f(x)$ es acotada, es decir $\|\Delta f(x)\| < \varrho$.

En lo que sigue necesitaremos la siguiente definición:

Las soluciones del sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ son:

- uniformemente acotadas si existe una constante c independiente de $t_0 > 0$, y para todo $\alpha \in (0, c)$ existe un $\beta = \beta(\alpha)$ independiente de t_0 tales que

$$\|x(t_0)\| \leq \alpha \implies \|x(t)\| \leq \beta \quad \forall t \geq t_0,$$

- ultimamente uniformemente acotadas, con cota ultima β , si existe una constantes β, c independientes de $t_0 > 0$, y para todo $\alpha \in (0, c)$ existe un $T = T(\alpha, \beta)$ independiente de t_0 tales que

$$\|x(t_0)\| \leq \alpha \implies \|x(t)\| \leq \beta \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Para abordar este problema retomaremos la misma estructura del observador adaptable de ganancia constante (3.12) con la diferencia de que solo se conoce la dinámica $\bar{f}(x)$ la cual no necesariamente coincide con la dinámica $f(x)$ del sistema (4.2). Por lo anterior proponemos el observador dado por,

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \bar{f}(z) + b(u + \phi) + lc(z - x) \\ \dot{\phi} &= -kce, \quad k > 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde k es una constante positiva que determina la ley de adaptación la cual es función del error de observación dado por $e = z - x$.

Ahora estamos en posición de presentar la contribución teórica de esta sección para el problema de estimación de estado robusta ante perturbaciones aditivas en la entrada y dinámica parcialmente conocida.

Teorema 4 *Considere el sistema (4.2) y denote \bar{A} como la matriz Jacobiana de $\bar{f}(x)$ la cual se asume acotada en cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponga que satisface la desigualdad lineal matricial (LMI) dada por,*

$$\begin{aligned} \bar{A}^T P + P \bar{A} + c^T Y^T + Y c &< -2Pk_L - Q < 0 \\ Pb &= c^T \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde P, Q son matrices definidas positivas, Y es un vector $n \times 1$ tal que $l = P^{-1}Y$ y k_L es la cota Lyptchitz de $Ax - f(x)$. Bajo estas condiciones el sistema dinámico dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \bar{f}(z) + b(u + \phi) + lc(z - x); \\ \dot{\phi} &= -kc(z - x), \quad k > 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

es un observador ultimamente uniformemente acotado de (4.2).

Demostración 3 *Comencemos por notar que el error de observación, $e = z - x$, satisface la siguiente dinámica:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e &= \bar{f}(z) - f(x) + lc(z - x) + b(\phi - \delta) \\ &= \bar{f}(z) - \bar{f}(x) + \Delta f(x) + lce + b(\phi - \delta) \\ &= \bar{A}e + lce + b(\phi - \delta) + \Delta f(x) + \mathcal{O}(z, e) \end{aligned}$$

donde $\bar{A} = \frac{\partial}{\partial t}\bar{f}(z^*)$, tal que z^* es algún valor del estado que pertence al conjunto acotado Ω . En lo que sigue denotaremos al error de estimación del parámetro desconocido como sigue,

$$\epsilon = \phi - \delta,$$

es decir,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\phi}.$$

Para continuar, propongamos la función candidata de Lyapunov siguiente,

$$V(t) = \frac{1}{2}ke^T(t)Pe(t) + \frac{1}{2}\epsilon^2(t), \quad k > 0$$

la derivada de ésta función evaluada en las trayectorias de la dinámica del error es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \frac{1}{2}ke^T(t)[\bar{A}^T P + P\bar{A} + c^T Y^T + Yc]e + \dots \\ &\dots + ke^T(t)Pbe + ke^T(t)P\Delta f(x) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e) + \dot{\epsilon}e \\ \frac{d}{dt}V(t) &= \frac{1}{2}ke^T(t)[\bar{A}^T P + P\bar{A} + c^T Y^T + Yc]e + \dots \\ &\dots + ke^T(t)P\Delta f(x) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e). \end{aligned}$$

De las condiciones del teorema, se llega a,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &< -\frac{1}{2}ke^T(t)Qe(t) - ke^T(t)Pk_L e(t) + \dots \\ &\dots + ke^T(t)P\Delta f(x) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e) \\ \frac{d}{dt}V(t) &< -ke^T(t)Pk_L e(t) + ke^T(t)P\Delta f(x) + ke^T(t)P\mathcal{O}(e) \\ \frac{d}{dt}V(t) &< -ke^T(t)Pk_L e(t) + ke^T(t)P\Delta f(x) \\ \frac{d}{dt}V(t) &< -k\|e\|^2 k_L \lambda_m(P) + k\|e\|\|P\|_{\rho} \\ \frac{d}{dt}V(t) &< -k\|e\|\{\|e\|k_L \lambda_m(P) - \|P\|_{\rho}\} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\frac{d}{dt}V(t) < 0 \quad \text{para toda } \|e\| > \nu; \quad \nu = \frac{\|P\|_{\rho}}{k_L \lambda_m(P)}$$

de esta manera la derivada en el tiempo de $V(t)$ será negativa fuera del conjunto compacto $\mathcal{B}_{\nu} = \{e; \|e\| \leq \nu\}$, es decir que todas las trayectorias de $e(t)$ que estén fuera de \mathcal{B}_{ν} entrarán en este conjunto en un tiempo finito T_1 y permanecerán dentro para todo $t \geq T_1$. De hecho, se puede escoger un ε tal que $\mu < \varepsilon < c$ de manera que $\dot{V}(t) < 0$ en el conjunto anular $\mathcal{A} = \{\varepsilon \leq V(t) \leq c\}$, lo que significa que $V(t)$ es decrece monótonamente respecto de t en \mathcal{A} hasta que la solución entra en el conjunto $\{V(t) \leq \varepsilon\}$. A partir de ese momento la trayectoria permanecerá en dicho conjunto ya que $\dot{V}(t)$ es negativa en la frontera $V(t) = \varepsilon$. Por lo anterior se concluye que $e(t)$ es últimamente uniformemente acotada.

Ahora bien, puesto $V(e, \epsilon)$ es negativa en la frontera de \mathcal{A} , se sigue que la dinámica del error en la frontera de \mathcal{A} esta dada por,

$$\begin{aligned}\dot{e} &= b\epsilon + \varsigma; \\ \dot{\epsilon} &= -kce\end{aligned}$$

de donde se puede concluir que $\epsilon(t)$ es acotado el conjunto invariante \mathcal{A} , ya que de otra manera se contradice que cualquier trayectoria $e(t)$ que inicie en dicho conjunto permanecerá en dicho conjunto, a partir de $t \geq T_1$. □

Observación 2 Conviene mencionar que para satisfacer la condición $Pb = c^T$ puede ayudar el hecho de que $y = [1 \ 0 \ \dots \ 0]x$ puede modificarse por $y = [c_1 \ 0 \ \dots \ 0]x$, donde c_1 es una constante arbitraria conocida, sin modificar las observabilidad del sistema transformado (5.16)

Observación 3 Se puede visualizar la extensión al caso en que la perturbación δ es variante en el tiempo, de variación acotada y diferenciable un numero suficiente de veces, para lo cual se podría considerar la misma función de Lyapunov bajo ciertas consideraciones adicionales se deduce que:

$$\frac{d}{dt}V(t) < -k\|e\| [\|e\|k_L\lambda_m(P) - \|P\|\delta] - \epsilon k^{-1}\dot{\delta}$$

Esto muestra que el error debido a la perturbación constante se puede minimizar al usar k grande y que la perturbación sea lo suficientemente suave.

Observación 4 Detalles de la LMI. En primer lugar, tenga en cuenta que la desigualdad matricial (4.4) esta sujeta a la restricción $Pb = c^T$ que es equivalente a $b = P^{-1}c^T$, la pregunta aquí es cómo inducir esta restricción durante la búsqueda de una solución de la LMI. Esta restricción se puede imponer en Yalmip y SeDuMi, pero es muy probable que SeDuMi no encuentre una solución viable. Por lo tanto, nuestra mejor opción es encontrar relaciones entre elementos de P de manera que se mantenga $Pb = c^T$ (ó bien, $b = P^{-1}c^T$). Por ejemplo, si se considera un sistema de dimensión $n = 2$, entonces:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies P = \begin{bmatrix} -P_2 - c_1 & P_2 \\ P_2 & -P_2 \end{bmatrix}$$

cuyo inverso es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c_1} & -\frac{1}{c_1} \\ -\frac{1}{c_1} & -\left(\frac{1}{c_1} + P_2^{-1}\right) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Este análisis es simple, pero para $n > 2$ es más complicado y generalmente los elementos de P^{-1} aparecen en una forma no lineal. Por ello, proponemos utilizarlo en forma de cascada.

4.3. Aplicación al proceso de producción de bioetanol

En esta sección se ve el diseño del observador adaptativo robusto de ganancia constante para el modelo de un cultivo continuo de microorganismos para la producción de bio-etanol a partir de residuos agro-industriales. Como primera paso se recordara la propiedad de invariancia positiva del sistema propuesto, y en un segundo tiempo se presentara la transformación del sistema a uno que sea lineal en la entrada, requisito indispensable para la aplicación del Teorema 4.

Recordemos el modelo del proceso de producción de bio-etanol dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\mu_1(s) + x\psi^*p \\ -\frac{1}{Y_s}x(\mu_1(s) + \psi^*p) + \frac{1}{Y_p}x\mu_2(s) \\ x\mu_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ (s_{in} - s) \\ -p \end{bmatrix} (u + \delta) \quad (4.7)$$

$$y = x$$

donde x es la biomasa del microorganismo, s es la concentración del sustrato que contiene los residuos agro-industriales y p es la concentración de bio-etanol, que es el producto por obtener.

A continuación se recuerda una propiedad del sistema anterior que es consistente con que en un biorreactor no es posible tener concentraciones negativas.

Proposición 1 *Considerando el sistema (4.7), se tienen las siguientes propiedades:*

- I) *El ortante positivo $\mathcal{O}^+ := \{x > 0, s > 0, p > 0\}$ es invariante en tiempo positivo respecto al sistema (4.7) para cada tasa de dilución positiva integrable D y perturbación acotada δ tal que $D + \delta \geq 0$.*
- II) *Cada solución del sistema (4.7) que inicia en el ortante positivo \mathcal{O}^+ es acotada para cada tasa de dilución integrable positiva D y perturbación acotada δ .*

Note que la prueba de esta enunciado es una consecuencia directa del Lema 2.

4.3.1. Consideraciones del diseño

En este momento conviene recordar que se ha supuesto que dinámica $f(x)$ del sistema 4.2 es parcialmente conocida, ver Hipótesis 1. Para el caso bajo estudio, esto lleva a considerar que dinámica del bio-proceso 4.7 y del observador 4.5 obedecen a razones de crecimiento diferentes y obedecen a las expresiones siguientes:

Dinámica del proceso Se considerarán, en el proceso 4.7, cinemáticas de crecimiento μ_1 y μ_2 de tipo Moser, es decir:

$$\mu_1(s) + \psi^* p = \frac{\mu_1^* s}{a_1 + s + s^2/b_1} + \psi^* p, \quad \mu_2 = \frac{\mu_2^* s^{\bar{n}_2}}{a_2 + s^{\bar{n}_2}} \quad (4.8)$$

Dinámica del observador Para la dinámica del observador (4.5) se considerarán $\bar{\mu}_1$ y $\bar{\mu}_2$ cinemáticas de crecimiento de tipo Monod y Moser, respectivamente, es decir:

$$\bar{\mu}_1 + \bar{\psi}^* p = \frac{\bar{\mu}_1^* s}{\bar{a}_1 + s} + \bar{\psi}^* p, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\bar{\mu}_2^* s^{\bar{n}_2}}{\bar{a}_2 + s^{\bar{n}_2}}. \quad (4.9)$$

Transformación del sistema para diseño del observador: De las propiedades de positividad del sistema 4.7, se pueden restringir los estados del sistema al conjunto $x > 0$, $p > 0$ y $0 \leq s < a_4$. Entonces, según el Lema 1, existe una transformación de estado dada por (4.7), esto es,

$$\begin{aligned} z_1 &= \ln(x), & z_2 &= \ln(s_{in} - s), & z_3 &= \ln(p) \\ x &= \exp(z_1), & s &= s_{in} - \exp(z_2), & p &= \exp(z_3) \end{aligned}$$

Por tanto, el modelo del quimiostato dado en (4.7) con tasas de reacción (4.9) se pueden expresar como en (4.10), donde las perturbaciones externas y de entrada pasan por un vector de entrada constante. Por tanto, es posible utilizar un observador como el

desarrollado anteriormente, es decir:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \frac{\bar{\mu}_1^*(S_{in} - \exp(z_2))}{\bar{a}_1 + S_{in} - \exp(z_2)} + \bar{\psi}^* \exp(z_3) - (u + \delta) \\
 \dot{z}_2 &= \frac{\exp(z_1)}{Y_s \exp(z_2)} \left\{ \frac{\bar{\mu}_1^*(S_{in} - \exp(z_2))}{\bar{a}_1 + S_{in} - \exp(z_2)} + \bar{\psi}^* \exp(z_3) \right\} + \frac{\exp(z_1)}{Y_p \exp(z_2)} \frac{\bar{\mu}_2^*(S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}}{\bar{a}_2 + (S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}} - (u + \delta) \\
 \dot{z}_3 &= \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_3)} \frac{\bar{\mu}_2^*(S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}}{\bar{a}_2 + (S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}} - (u + \delta)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Diseño del observador: Para simplificar el diseño del observador, escribamos el sistema transformado (4.10) en la siguiente forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} \left\{ \frac{1}{Y_s} f_1(z_2) + \frac{1}{Y_p} f_2(z_2) \right\} \\ \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_3)} f_2(z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} (u + \delta) \tag{4.11}$$

donde,

$$f_1(z_2) = \frac{\bar{\mu}_1^*(S_{in} - \exp(z_2))}{\bar{a}_1 + S_{in} - \exp(z_2)} + \bar{\psi}^* \exp(z_3); \quad f_2(z_2) = \frac{\bar{\mu}_2^*(S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}}{\bar{a}_2 + (S_{in} - \exp(z_2))^{\bar{n}_2}}$$

Entonces, de acuerdo con el Teorema 4, el observador constante ganado está dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \begin{bmatrix} f_1(z_2) \\ \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} \left\{ \frac{1}{Y_s} f_1(z_2) + \frac{1}{Y_p} f_2(z_2) \right\} \\ \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_3)} f_2(z_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} (u + \phi) + \mathbf{l}ce \\
 \dot{\phi} &= -\mathbf{k}ce
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

note que el observador dado en la expresión anterior resulta útil para el análisis de la estimación del estado y del parámetro de perturbación en la entrada. Sin embargo para la potencial aplicación en el proceso real, será indispensable regresar al sistema original.

4.4. Resultados de Simulación Numérica

A continuación se presentan los valores numéricos que fueron empleados para la validación del observador robusto propuesto en esta sección.

1. Cinéticas del Quimiostato y del observador

Planta: Tazas de reacción tipo Haladane $\mu_1(s) = \frac{\mu_1^* s}{a_1 + s + s^2/b_1}$, y Moser $\mu_2(s) = \frac{\mu_2^* s^{n_2}}{a_2 + s^{n_2}}$,

i	μ_i^*	a_i	$b_1; n_2$	Y_i	ψ^*
1	256.2462	6509.7512	31046.9866	3.8344	
2	1.47079192	19127.9127	3.61672999	10.8802	—

Los valores se ajustaron de [18] utilizando el solucionador de mínimos cuadrados no lineal de Matlab.

Observador: Tazas de reacción tipo Monod y Moser perturbado:

$$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1^* s / (\bar{a}_1 + s), \quad \bar{\mu}_2 = \bar{\mu}_2^* s^{\bar{n}_2} / (\bar{a}_2 + s^{\bar{n}_2}).$$

i	$\bar{\mu}_i$	\bar{a}_i	Y_i	\bar{n}_i	ψ^*
1	804.882235	21070.49782	3.8344	—	
2	1.54434	21040.70397	3.63481364	10.934601	—

Los valores se ajustaron de [18] utilizando el solucionador de mínimos cuadrados no lineal de Matlab.

2. Condiciones iniciales del sistema y observador:

$x(0) = \hat{x}(0)$	$s(0)$	$\hat{s}(0)$	$p(0)$	$\hat{p}(0)$
6.5	8	5	1.3807	0.5

3. Resultados de LMI (4.4) para Observador 1 y $s_\Delta = 0.1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -0.18168848 \\ 2.9613556 & -0.82607038 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 165.218 & -164.218 \\ -164.218 & 164.218 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 0.89226 & -0.89026 \\ -0.89026 & 0.89226 \end{bmatrix}, \\ k_{L_1} &= 500 \end{aligned} \tag{4.13}$$

4. Resultados de LMI (4.4) para Observador 2 y $s_\Delta = 0.1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 2312.8127 & -2312.8127 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 1.2927 & -0.29273 \\ -0.29273 & 0.29273 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_2 &= \begin{bmatrix} 0.00054975 & -0.00012209 \\ -0.00012209 & 0.00049871 \end{bmatrix}, \\ k_{L_2} &= 500 \end{aligned} \tag{4.14}$$

5. Valores de entrada y perturbaciones:

$t(h)$	0 – 400	400 – 800	800 – 1200
$u(t)$	0.1329	0.1329	0.1329
$\delta(t)$	0	0.0375	-0.0375

6. **Observador adaptable en las coordenadas originales:** Resulta recomendable contar con el observador (4.12) expresado en las coordenadas del sistema original (4.7), lo cual es posible por medio de la difeomorfismo del Corolario 1. Algunos calculos triviales nos permiten llegar a lo siguiente,

Primer Observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\mu_1(\hat{s}) \\ -\frac{1}{Y_s}x\mu_1(\hat{s}) + \frac{1}{Y_p}x\mu_2(\hat{s}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ (s_{in} - \hat{s}) \end{bmatrix} (D + \delta) + \mathbf{l}_1 \mathbf{c} (\ln \hat{x} - \ln x)$$

$$\dot{\phi} = -k_1 \mathbf{c} (\ln \hat{x} - \ln x) \quad (4.15)$$

Segundo Observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\mu_1(\hat{s}) \\ x\mu_2(\hat{s}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -\hat{p} \end{bmatrix} (D + \delta) + \mathbf{l}_2 \mathbf{c} (\ln \hat{x} - \ln x)$$

$$\dot{\phi} = -k_2 \mathbf{c} (\ln \hat{x} - \ln x) \quad (4.16)$$

donde:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} 625.6207 \\ 627.8394 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} 879.82379 \\ 1581.758 \end{bmatrix}, \quad k_1 = k_2 = 50.$$

El software utilizado en la simulación numérica fue Matlab[©] con ode113, una tolerancia relativa de 1×10^{-6} y una tolerancia absoluta de 1×10^{-6} , mientras que Yalmip y Sedumi se utilizaron para resolver la desigualdad matricial Eq.(4.4).

4.4.1. Discusión de resultados

En esta sección se presentan y discuten los resultados en simulación de la aplicación del observador robusto a la estimación de la concentración de bioetanol de acuerdo al modelo de la planta 4.7 cuya dinámica es parcialmente conocida y esta sujeta a perturbaciones externas en la entrada.

El **objetivo** es la estimación de la concentración de etanol y la estimación simultánea de la perturbación de entrada con conocimiento parcial de la dinámica de la planta.

En la Figuras 4.1-4.2, se muestran la comparación de las tasas de reacción de la planta del observador $\mu_i(s)$ y del observador $\bar{\mu}_i(s)$ para $i = 1, 2$, respectivamente. Es sabido que la dinámica de un biorreactor esta determinada por las tasas de reacción, para las cuales existen un gran numero de expresiones que son difíciles de ajustar o más aún no

necesariamente modelan correctamente a un cultivo continuo dado. En el caso bajo estudio se puede apreciar la diferencia que existe entre las tazas de reacción planta-observador que son netamente diferentes y de hecho corresponden a la hipótesis 1.

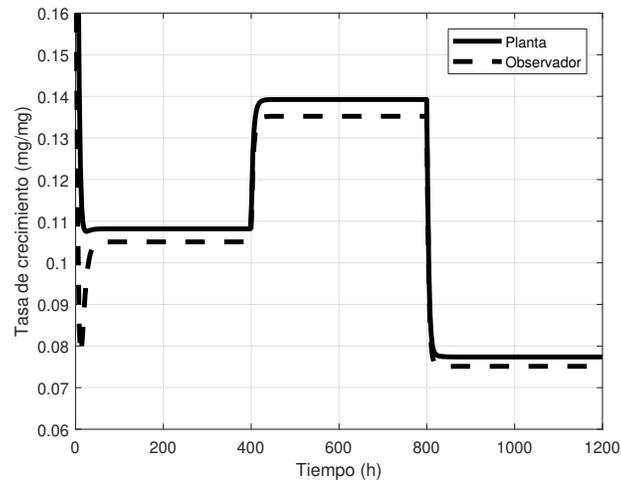


Figura 4.1: Comparación de tasas de crecimiento 1: Línea continua Haldane, línea discontinua Monod.

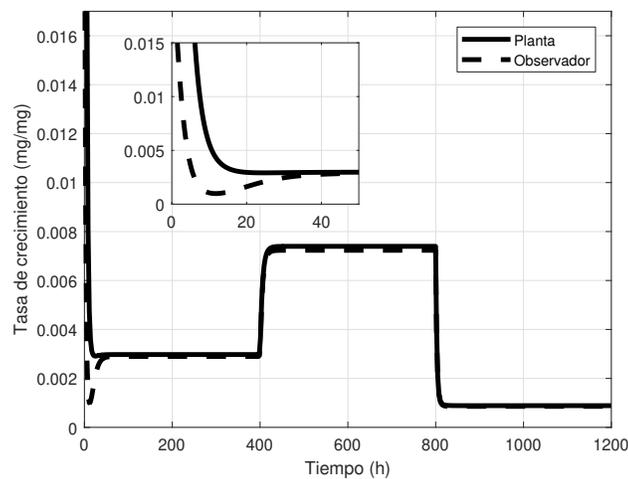


Figura 4.2: Comparación de tasas de crecimiento 2: Línea continua Moser, línea discontinua Moser perturbado

En cuanto a la perturbación externa δ presente en la entrada de la planta (4.7), su

efecto en el comportamiento dinámico de las variables de estado del biorreactor o del proceso real se presentan en la Figura 4.3. El estado medible es la biomasa $x(\cdot)$, en tanto que el sustrato $s(\cdot)$ y el etanol $p(\cdot)$ no son medibles. La planta esta sujeta a una perturbación en la entrada de aproximadamente el 30% de su valor nominal, en sentido positivo a las 400 hrs y en sentido negativo a las 800 hrs.

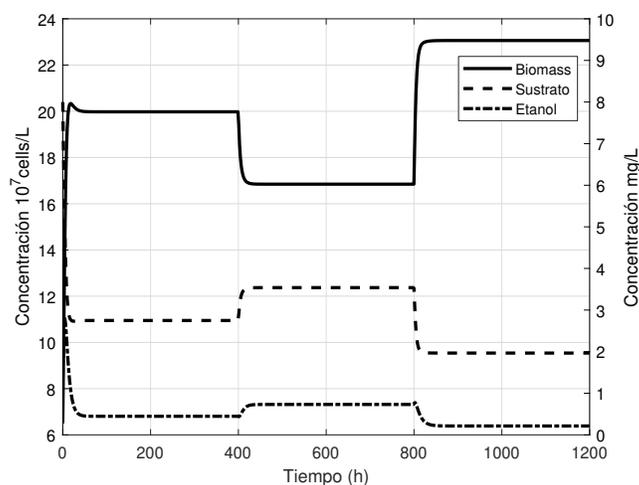


Figura 4.3: Planta.

La estimación del sustrato es una etapa intermedia que es requerida para la estimación del producto. Por la razón anterior, se muestra la evolución dinámica de dicha variable en la Figura 4.4. El error de estimación del sustrato $\|e\| \leq 0.00113$, lo que representa un porcentaje de error inferior al 0.06% respecto al valor de concentración del sustrato que es de 2mg/L a las 1000h .

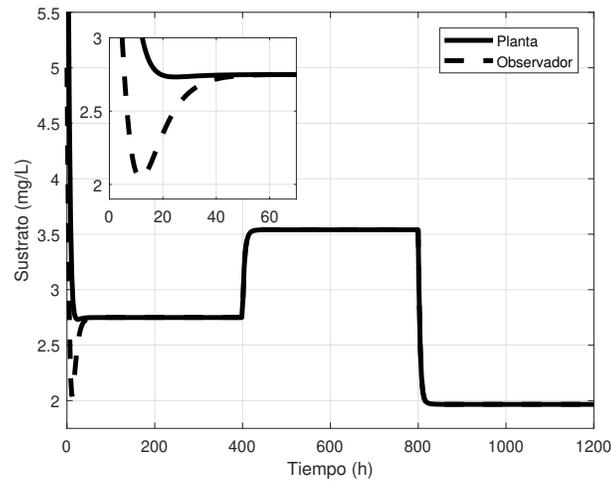


Figura 4.4: Comparación del sustrato real y el estimado.

La Figura 4.5 muestra la concentración del producto (etanol) del observador y de la planta, es claro que se tendrá una diferencia constante entre dichos valores, lo cual es debido al conocimiento parcial de las tasas de reacción, ver Figura 4.1-4.2. El error de estimación de etanol $\|e\| \leq 0.0123$, lo que representa un porcentaje de error inferior al 6.15 % respecto al valor de concentración de etanol que es de 0.2 mg/L a las 1000 h .

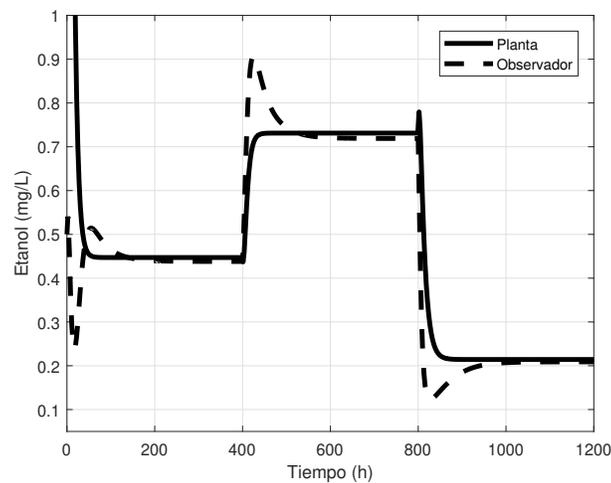


Figura 4.5: Comparación del producto real y el estimado.

Como se mencionó antes, la adaptación es necesaria para la estimación de la perturbación externa, Figura 4.6. En este caso se alcanza el objetivo de la estimación del

parámetro constante desconocido en el sentido de acotamiento uniforme último. El error de estimación de la perturbación $\|e\| \leq 0.0009$, lo que representa un porcentaje de error inferior al 2.5% respecto al valor de la perturbación que es de $0.03751/h$

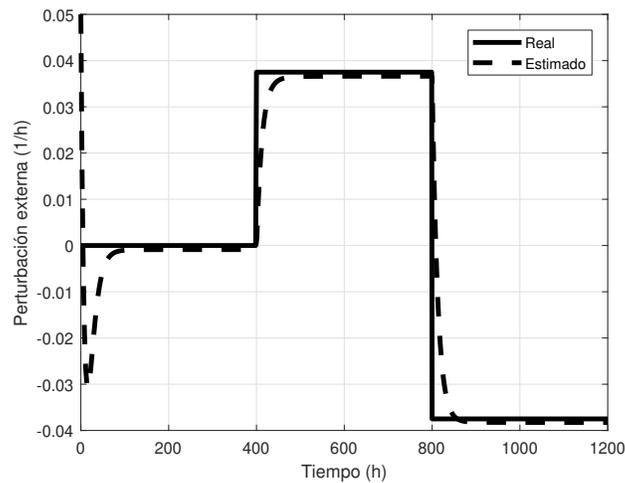


Figura 4.6: Comparación de la perturbación externa real y la estimada.

Para completar las simulaciones, se presentan las gráficas de error en la estimación del sustrato, del producto y de la perturbación externa para diferentes valores de la ganancia de adaptación constante, Figuras 4.7, 4.8 y 4.9. En el caso del sustrato, para $k = 100$ se alcanza el equilibrio en 100 horas, para $k = 50$ se alcanza el equilibrio en 120 horas, para $k = 25$ se alcanza el equilibrio en 150 horas.

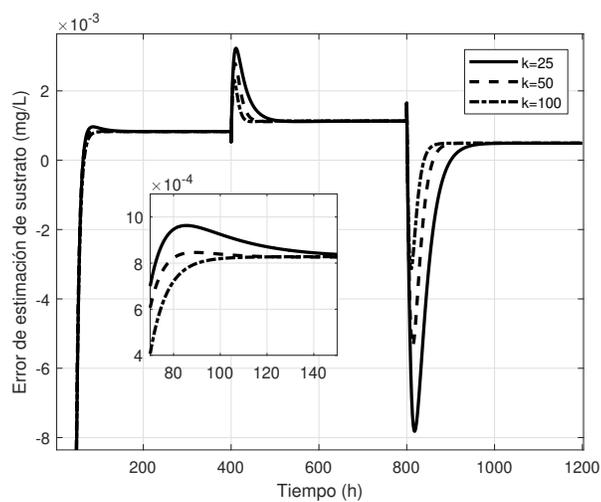


Figura 4.7: Error de estimación de sustrato.

En el caso del etanol, para $k = 100$ se alcanza el equilibrio en 125 horas, para $k = 50$ se alcanza el equilibrio en 200 horas, para $k = 25$ se alcanza el equilibrio en 300 horas.

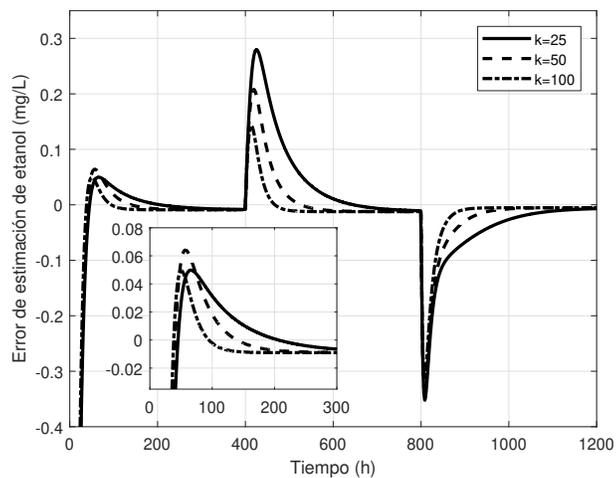


Figura 4.8: Error de estimación de etanol.

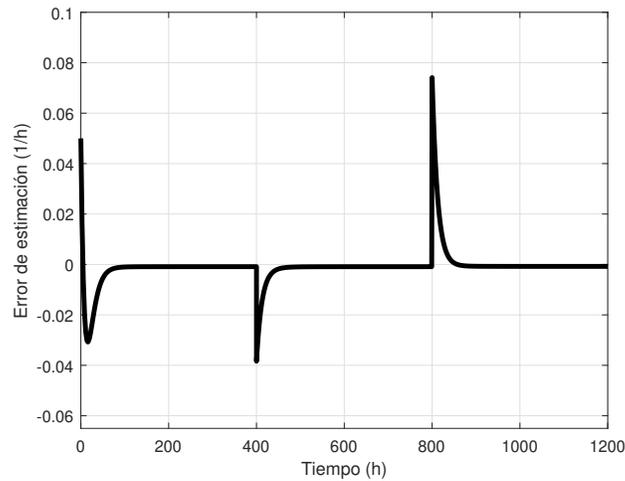


Figura 4.9: Error de estimación de la perturbación externa.

Note que el parámetro k de nuestros observadores no interviene en la desigualdad matricial, por lo que no afecta en la búsqueda de una solución. Esto no significa que la dinámica del error no se vea afectada. Se puede apreciar que mientras más grande sea k la perturbación estimada convergerá más rápidamente haciendo que los demás estados también aceleren su convergencia. Esto se puede apreciar en las Figuras 4.7, 4.8 y (4.9).

Presencia de ruido en la medición de biomasa

El ruido de medición es una cantidad aleatoria que, en el caso de los biorreactores, esta presente en los sensores de biomasa para la medición en línea de dicha variable. Por lo anterior, resulta pertinente revisar la efecto del ruido en la observación de estado bajo estudio.

A continuación se presentan los resultados en simulación de las estimaciones del sustrato, del producto y de la perturbación externa en presencia de ruido blanco por medio de la función generadora de ruido Gaussiano `wgn` de MATLAB, centrado en 0 dBW y de magnitud ± 0.001 mg/L, ver Figuras 4.10, 4.11, 4.12.

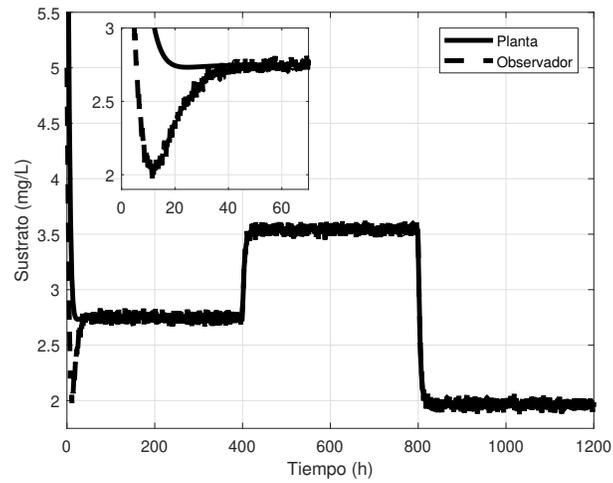


Figura 4.10: Comparación del sustrato real y el estimado en presencia de ruido aditivo en la salida.

Estimación de producto

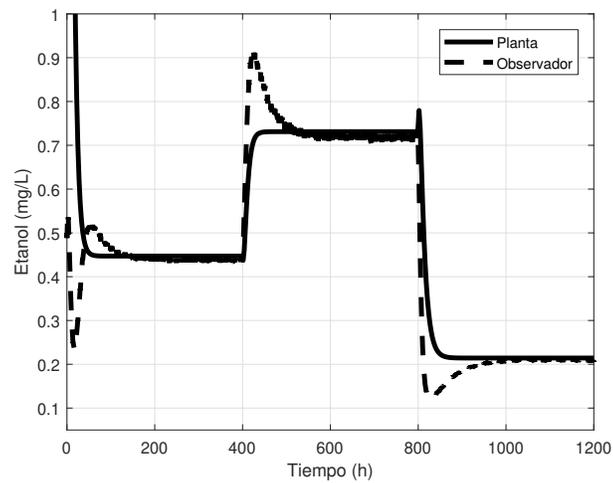


Figura 4.11: Comparación del etanol real y el estimado en presencia de ruido aditivo en la salida.

Estimación de la perturbación

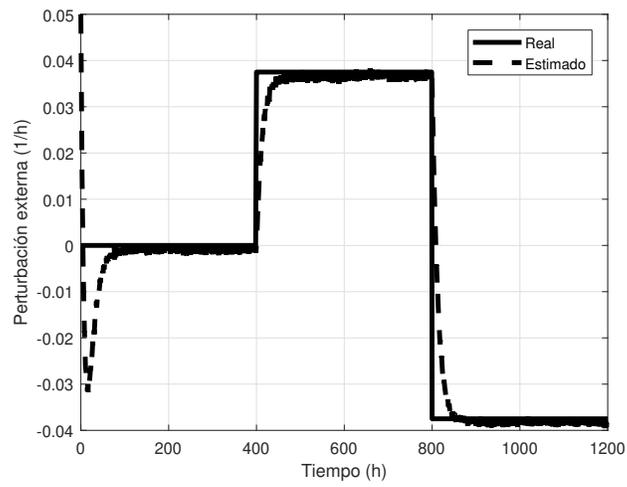


Figura 4.12: Comparación de la perturbación externa real y la estimada, en presencia de ruido aditivo en la salida.

Capítulo 5

Observador para sistemas con retardos

El modelo usual de biorreactores operando en modo continuo utiliza habitualmente la dinámica de crecimiento de Monod que tiende de forma asintótica y sin oscilaciones a su punto de equilibrio, la presencia de oscilaciones, que provoca la presencia de retardos, fue la primera sospecha de que estos sistemas debían de tener retardos [49], muchos otros ejemplos se pueden encontrar en [40] y [41], mientras que discusiones sobre la dificultad de introducir retardos en los modelos de Quimiostatos se pueden encontrar en [13]. En adición a esto, también tenemos retardos al momento de determinar las concentraciones ya que los métodos para su medición suelen ser fuera de línea.

Como se puede apreciar, los modelos de Quimiostatos pueden tener un mejor ajuste si se les considera con retardos, esto nos lleva a buscar metodologías para poder observar el estado considerando retardos. Aquí solo trabajaremos con los sistemas retardados, y consideraremos los casos salida libre de retardo y salida retardada.

5.1. Observadores para sistemas con retardo en la salida

Tratando de seguir con el desarrollo histórico de controladores pero ahora aplicado a observadores, se creó un observador utilizando la asignación de espectro finito. Por lo cual partiremos del sistema mostrado en (5.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) \\ y(t) &= cx(t - \tau)\end{aligned}\tag{5.1}$$

y proponemos un observador tipo Luenberger (5.2)

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_0 z(t) + lv(t) \\ \hat{y}(t) &= cz(t - \tau)\end{aligned}\tag{5.2}$$

Si definimos al error como $e(t) = z(t) - x(t)$ tenemos que su dinámica es la de (5.3).

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) + lv(t)\tag{5.3}$$

De aquí tenemos como propósito encontrar $v(t)$ tal que el espectro de la dinámica del error sea finito.

Primero aplicamos transformada de Laplace a (5.3).

$$sE(s) = A_0 E(s) + lV(s)$$

y proponemos la transformada de Laplace de $v(t)$ como:

$$V(s) = Dce^{-\tau s}M + Dce^{-\tau s}$$

Que de forma matricial es expresada como:

$$\begin{bmatrix} sI - A_0 & -l \\ -Dce^{-\tau s} & I - Dce^{-\tau s}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El espectro está dado por el determinante de la matriz del lado izquierdo de la ecuación anterior por lo que es invariante a la postmultiplicamos de:

$$\begin{bmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Dce^{-\tau s} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - MDce^{-\tau s} & -M \\ Dce^{\tau s} & I \end{bmatrix}$$

Obteniendo:

$$\begin{bmatrix} (sI - A_0) - (sI - A_0)MDce^{\tau s} - LDce^{\tau s} & -(sI - A_0)M - L \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

De aquí se aprecia que es necesario:

$$(sI - A_0)MDce^{-\tau s} = F - LDce^{-\tau s}$$

donde F no tienen raíces infinitas de s .

Proponemos:

$$M = \int_{-\tau}^0 e^{-(sI - A_0)\theta} d\theta L$$

De aquí se tiene:

$$\begin{aligned}
 (sI - A_0) \int_{-\tau}^0 e^{-(sI - A_0)\theta} d\theta LDc e^{-\tau s} &= -(I - e^{(sI - A_0)\tau} LDc e^{-\tau s}) \\
 &= -LDc e^{-\tau s} + e^{s\tau} e^{-A_0\tau} LDc e^{-s\tau} \\
 &= e^{-A_0\tau} LDc - LDc e^{-s\tau}
 \end{aligned}$$

De esto se ve que $F = e^{-A_0\tau} LDc$ por lo que espectro queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 (sI - A_0) - (sI - A_0) \int_{-\tau}^0 e^{-(sI - A_0)\theta} d\theta LDc e^{-\tau s} - LDc e^{-\tau s} \\
 = (sI - A_0) - e^{-A_0\tau} LDc + LDc e^{-\tau s} - LDc e^{-\tau s} \\
 = (sI - A_0) - e^{-A_0\tau} LDc
 \end{aligned}$$

Ya sabemos que forma debe tener $V(s)$ pero es necesario su forma en el dominio del tiempo, esto es:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= Dc e^{-\tau s} E(s) + Dc e^{-\tau s} \int_{-\tau}^0 e^{-(sI - A_0)\theta} d\theta l V(s) \\
 V(s) &= Dc e^{-\tau s} E(s) + Dc \int_{-\tau}^0 e^{A_0\theta} l e^{-(\tau + \theta)s} d\theta V(s) \\
 v(t) &= Dc e(t - \tau) u(t - \tau) + Dc \int_{-\tau}^0 e^{A_0\theta} l v(t - \tau - \theta) u(t - \tau - \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

donde:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Por lo que (5.2) queda explícitamente expresado como:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= A_0 z(t) + l v(t) \\
 \hat{y}(t) &= c z(t - \tau) \\
 v(t) &= D(\hat{y} - y) u(t - \tau) + Dc \int_{-\tau}^0 e^{A_0\theta} l v(t - \tau - \theta) u(t - \tau - \theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Resumiendo, el sistema (5.4) es observador de (5.1) si se escoge un vector l tal que (5.5) sea Hurwitz.

$$[sI - A_0 - e^{-A_0\tau} Lc] \tag{5.5}$$

Por otra parte, note que D puede ser cualquier matriz cuadrada incluyendo la identidad y que si $\tau = 0$ nos lleva al observador tipo Luenberger común.

Casos más generales se pueden ver en [43] pero no es nuestro objetivo tratar utilizar esta metodología.

5.2. Observador con retardo en el estado

Tomaremos el sistema (2.20) pero consideraremos que la salida es $y(t) = cx(t)$, es decir, el sistema es retardado pero no su salida. Siguiendo la filosofía de Luenberger utilizaremos una copia del sistema pero con un parámetro de corrección.

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(t-h) + l_0 (cz(t) - y(t)) \quad (5.6)$$

Procedemos a definir el error como la diferencia entre el estado de observador y el de la planta, esto es, $e(t) = z(t) - x(t)$. Es propicia que la dinámica del error quede definida como:

$$\dot{e}(t) = [A_0 + l_0 c] e(t) + [A_1] e(t-h) \quad (5.7)$$

Como podemos ver, no podemos influenciar la parte retardada de la dinámica del error y quedamos sujetos a la forma de A_1 . Esto nos indica que también es preciso conocer la salida de la planta en el tiempo $t-h$, por lo que redefinimos el observador tipo Luenberger (5.6) de la siguiente manera:

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + A_1 z(t-h) + l_0 (cz(t) - y(t)) + l_1 (cz(t-h) - y(t-h)) \quad (5.8)$$

Nuevamente definimos el error como $e(t) = z(t) - x(t)$ por lo que su dinámica esta dada por (5.9).

$$\dot{e}(t) = [A_0 + l_0 c] e(t) + [A_1 + l_1 c] e(t-h) \quad (5.9)$$

Con esto vemos que nos es posible alterar la parte libre de retardo y la retardada por medio de los vectores l_0 y l_1 . El problema aquí yace en que si en un principio solo tenemos acceso al estado presente de la planta tenemos que esperar h tiempo para obtener la dinámica de error deseada.

Que sucede en este intervalo de tiempo se mostrara más adelante en el caso en que tenemos retardo en el estado y en la salida por ser un caso más general.

5.2.1. Enfoque de Kharitonov

Para este caso usaremos la siguiente propuesta de observador:

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) + lv(t-\tau)$$

Por lo que la dinámica del error sería:

$$\dot{e}(t) = A_0 e(t) + l v(t - \tau)$$

Si utilizamos a $v(t) = c e(t + \tau)$, tenemos una dinámica en lazo cerrado:

$$\dot{e}(t) = (A_0 + lc) e(t)$$

Aplicando el predictor tendríamos que:

$$v(t) = cK(2\tau)e(t - \tau) + c \int_{t-2\tau}^{t-\tau} K(t - \theta) l c e(\theta) d\theta \quad (5.10)$$

Lo cual no nos es posible de obtener ya que no podemos conocer $cK(2\tau)e(t - \tau)$ sin conocer el estado del sistema. Por otro lado, conocer el estado en cualquier momento pasado nos permitiría usar el predictor para conocerlo en tiempo presente. Con esto en mente proponemos el observador tipo Luenberger

$$\dot{w}(t) = A_0 w(t) + l(cw(t) - y(t)) \quad (5.11)$$

Pero propondremos nuestro error como $\epsilon(t) = w(t) - x(t - \tau)$, es decir, trataremos de estimar el estado en el pasado. La dinámica de este error es:

$$\dot{\epsilon}(t) = A_0(w(t) - x(t - \tau)) + lc(w(t) - x(t - \tau))$$

$$\dot{\epsilon}(t) = (A_0 + lc)\epsilon(t) \quad (5.12)$$

Si escogemos l tal que $A_0 + lc$ sea Hurwitz entonces $\epsilon(t) \rightarrow 0$ lo cual implica $w(t) \rightarrow x(t - \tau)$ conforme $t \rightarrow \infty$. Podemos utilizar (5.11) para poder implementar (5.10) después de pasado el transitorio de (5.12). Note que al definir el error de esta manera logramos obtener un espectro finito de la dinámica del error, por lo que si deseáramos hacer una realimentación de estado tendríamos un problema equivalente a uno de retardo en la señal de control. Por otra parte, podemos reescribir (2.28) de a siguiente manera:

$$x(t) = K(\tau)x(t - \tau) + \int_{t-h}^t K(t + \tau - h - \xi) A_1 x(\xi - \tau) d\xi$$

Lo cual podemos expresarlo en términos de $w(t)$ y como estamos considerando el caso donde solo tenemos retardo en la salida esto se reduce a:

$$x(t) = K(\tau)w(t)$$

5.3. Retardo en la salida y en el estado

Ya se mostró que es posible obtener observación de los estados de un sistema retardado sin la necesidad de un predictor siempre y cuando no tengamos retardo en la salida. Por otro lado, si tenemos retardo en la salida podemos observar el estado con el mismo retardo al redefinir el error. A continuación consideraremos un sistema retardado con retardo en la salida, por lo que primero se muestra la forma de conocer el estado con este mismo retardo y posteriormente la forma de implementar el predictor.

El sistema a considerar es:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) \\ y(t) &= cx(t-\tau)\end{aligned}\tag{5.13}$$

El observador propuesto se muestra en (5.14).

$$\dot{z}(t) = A_0z(t) + A_1z(t-h) + l_0(cz(t) - y(t)) + l_1(cz(t-h) - y(t-h))\tag{5.14}$$

Nuevamente proponemos al error como $\epsilon(t) = z(t) - x(t-\tau)$, por lo que su dinámica queda de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon}(t) = (A_0 + l_0c)\epsilon(t) + (A_1 + l_1c)\epsilon(t-h)\tag{5.15}$$

Nuevamente surge el problema para $t = 0$ ya que no conocemos la salida para $t = -\tau$, es aquí donde retomamos la pregunta de que pasa en el intervalo $[0, \tau]$. Para ello primero recurriremos a estimados exponenciales.

5.3.1. Estimados exponenciales

Para facilitar este análisis es conveniente representar el observador (5.14) de la siguiente manera:

$$\dot{z}(t) = [A_0 + l_0c]z(t) + [A_1 + l_1c]z(t-h) - l_0y(t) - l_1y(t-h)$$

de aquí definimos a $K_z(t)$ como la matriz fundamental de:

$$\dot{z}(t) = \hat{A}_0z(t) + \hat{A}_1z(t-h), \quad \hat{A}_0 = [A_0 + l_0c] \quad \hat{A}_1 = [A_1 + l_1c]$$

Es decir, $K_z(t)$ satisface:

$$\dot{K}_z(t) = K_z(t)\hat{A}_0 + K_z(t-h)\hat{A}_1$$

De aquí podemos deducir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} K_z(t_2 - \xi)z(\xi) &= -[K_z(t_2 - \xi)\hat{A}_0 + K_z(t_2 - \xi - h)]z(\xi) + K_z(t_2 - \xi)[\hat{A}_0z(\xi) \\ &\quad + \hat{A}_1z(\xi - h) - l_0y(\xi) - l_1y(\xi - h)] \\ \frac{\partial}{\partial \xi} K_z(t_2 - \xi)z(\xi) &= -K_z(t_2 - \xi - h)z(\xi) + K_z(t_2 - \xi)\hat{A}_1z(\xi - h) \\ &\quad - K_z(t_2 - \xi)l_0y(\xi) - K_z(t_2 - \xi)l_1y(\xi - h)\end{aligned}$$

Integrando de t_1 a t_2 con $t_2 > t_1$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} dK_z(t_2 - \xi)z(\xi) &= -\int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi - h)z(\xi)d\xi + \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)\hat{A}_1z(\xi - h)d\xi \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)l_0y(\xi)d\xi - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)l_1y(\xi - h)d\xi \\ K_z(t_2 - t_2)z(t_2) &= K_z(t_2 - t_1)z(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi - h)z(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)\hat{A}_1z(\xi - h)d\xi - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)l_0y(\xi)d\xi \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)l_1y(\xi - h)d\xi \\ z(t_2) &= K_z(t_2 - t_1)z(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi - h)z(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_{t_1 - h}^{t_2 - h} K_z(t_2 - \xi - h)\hat{A}_1z(\xi)d\xi \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)[l_0y(\xi) + l_1y(\xi - h)]d\xi \\ z(t_2) &= K_z(t_2 - t_1)z(t_1) + \int_{t_1 - h}^{t_1} K_z(t_2 - \xi - h)\hat{A}_1z(\xi)d\xi - \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} K_z(t_2 - \xi)[l_0y(\xi) + l_1y(\xi - h)]d\xi \\ z(t) &= K_z(t)z(0) + \int_{-h}^0 K_z(t - \xi - h)\hat{A}_1z(\xi)d\xi - \\ &\quad \int_0^t K_z(t - \xi)[l_0y(\xi) + l_1y(\xi - h)]d\xi\end{aligned}$$

Primero supondremos que $\tau > h$ y que se tienen las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \quad \varphi \in ([-\tau, 0], \mathbb{R}) \\ z(t) &= \zeta(t) \quad t \in [-h, 0] \quad \zeta \in ([-h, 0], \mathbb{R})\end{aligned}$$

Para el intervalo $t \in [0, h]$ tenemos:

$$\begin{aligned}z(t) &= K_z(t)\zeta(0) + \int_{-h}^0 K_z(t - \xi - h)\hat{A}_1\zeta(\xi)d\xi - \\ &\quad \int_0^t K_z(t - \xi)[l_0c\varphi(\xi - \tau) + l_1c\varphi(\xi - \tau - h)]d\xi\end{aligned}$$

El termino $\varphi(\xi - \tau - h)$ corresponde a la salida retardada pero en este intervalo no se tiene acceso a ella por lo que se considerara cero. Aplicando mayorizaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\|z(t)\| &\leq \|K_z(t)\|\|\zeta(0)\| + \int_{-h}^0 \|K_z(t - \xi - h)\|\|\hat{A}_1\|\|\zeta(\xi)\|d\xi + \\ &\quad \int_0^t \|K_z(t - \xi)\|\|l_0c\|\|\varphi(\xi - \tau)\|d\xi\end{aligned}$$

Si definimos a η como:

$$\eta = \max_{t \in [0, h]} \|K_z(t)\|$$

Entonces podemos acotar la dinámica del observador de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \eta \|\zeta\|_h + \eta \|\hat{A}_1\| \|\zeta\|_h \int_{-h}^0 d\xi + \eta \|l_0 c\| \|\varphi\|_\tau \int_0^h d\xi \\ \|z(t)\| &\leq \eta (1 + h \|\hat{A}_1\|) \|\zeta\|_h + \eta h \|l_0 c\| \|\varphi\|_\tau \\ \|z(t)\| &\leq \eta \max\{1 + h \|\hat{A}_1\|, h \|l_0 c\|\} (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau) \\ \|z(t)\| &\leq \alpha (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau), \quad \alpha = \eta \max\{1 + h \|\hat{A}_1\|, h \|l_0 c\|\} \end{aligned}$$

Con esto nos es posible acotar la dinámica del error como sigue:

$$\begin{aligned} \|\epsilon(t)\| &\leq \|z(t)\| + \|x(t - \tau)\| \\ \|\epsilon(t)\| &\leq \alpha (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau) + \|\varphi\|_\tau \\ \|\epsilon(t)\| &\leq (\alpha + 1) (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau) \end{aligned}$$

Para $t > h$ se cumple (5.15) que es exponencialmente estable, por eso existen constantes positivas $\bar{\gamma}$, σ tales que:

$$\begin{aligned} \|\epsilon(t, \zeta, \varphi)\| &\leq \bar{\gamma} e^{\sigma(t-h)} \|\epsilon_t(\zeta, \varphi)\|_h \\ \|\epsilon(t, \zeta, \varphi)\| &\leq e^{\sigma(t-h)} \bar{\gamma} (\alpha + 1) (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau) \\ \|\epsilon(t, \zeta, \varphi)\| &\leq e^{\sigma(t-h)} \gamma (\|\zeta\|_h + \|\varphi\|_\tau), \quad \gamma = \bar{\gamma} (\alpha + 1), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

5.3.2. Funcional de tipo completo

A continuación se realizara un análisis de estabilidad tipo Lyapunov, pero las funciones cuadráticas usadas en sistemas libre de retardo no funcionan con sistemas retardados, para ello se pueden usar funcionales de Lyapunov-Krasovskii. Primero empezaremos con la definición formal de matriz de Lyapunov para estos sistemas (ver definición en [34]).

5.3.3. Enfoque de Lyapunov–Krasovskii

En esta sección presentamos un análisis de estabilidad de tipo Lyapunov del sistema (5.15). Para este fin aplicamos una simplificada versión de la transformación de backstepping a la inyección de salida que fue propuesta para la variable control en Krstic y Smyshlyaev (2008).

Para ello proponemos primero el cambio de variable $\omega(t) = x(t - \tau) + \epsilon(t)$ para el observador (5.14) lo que nos lleva a la siguiente dinámica del error.

$$\dot{\epsilon}(t) = \hat{A}_0\epsilon(t) + \hat{A}_1\epsilon(t-h) + l_0c(z(t) - \omega(t)) + l_1c(z(t-h) - \omega(t-h))$$

Reacomodando de forma matricial tenemos:

$$\dot{\epsilon}(t) = \hat{A}_0\epsilon(t) + \hat{A}_1\epsilon(t-h) + L\bar{C}E(t, t-h)$$

donde:

$$L = [l_0 \quad l_1], \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad E(t, t-h) = \begin{bmatrix} z(t) - \omega(t) \\ z(t-h) - \omega(t-h) \end{bmatrix}$$

Esto nos genera el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) &= \hat{A}_0\epsilon(t) + \hat{A}_1\epsilon(t-h) + L\bar{C}E(t, t-h) \\ E(t, t-h) &= 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Por lo que se repite el procedimiento del funcional completo.

Note que (5.16) es semejante al sistema (14) de [34] para cuando $\tau \rightarrow 0$.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

En el presente proyecto de tesis doctoral consta de una parte de investigación teórica y de otra de investigación aplicada ambas orientadas a la búsqueda de observadores robustos para sistemas no lineales y su potencial aplicación a procesos de cultivos continuos de microorganismos, respectivamente. Para tal propósito los esfuerzos se dedicaron a la búsqueda de observadores adaptables de dinámica sencilla, a saber, aquellos donde la ley de adaptación es de ganancia constante, ya que son los que requieren de la menor dimensión posible en la dinámica de adaptación; solo se requiere una dinámica de adaptación igual al número de parámetros desconocidos y es la menor dimensión a la que se puede aspirar.

En la primera parte se ha considerado una clase de sistemas no lineales en el estado pero lineales respecto de la entrada, la cual está afectada por una perturbación constante. Se ha mostrado que para dichos sistemas es posible encontrar condiciones de existencia de un observador adaptable de ganancia constante a partir de la existencia de solución de una desigualdad matricial sujeta a una condición tipo SPR (estricta positiva real) lo que permite asegurar la convergencia asintótica al vector de estado desconocido y la estimación asintótica simultánea del parámetro desconocido o perturbación constante de entrada. Para validar la posible utilidad del concepto encontrado se mostró que puede ser aplicado a una clase amplia de procesos biológicos conocido como Quimiostato. Para lo anterior se introdujo una transformación difeomórfica de estado tal que el sistema no lineal resultante será lineal en la entrada, *ergo* la observación con adaptación de ganancia constante es factible. Los resultados son evaluados en la estimación de la concentración de contaminantes en un cultivo continuo de *Spirulina maxima* para la remoción de con-

taminantes en aguas residuales.

En un segundo tiempo, adicional a la perturbación en la entrada, se considera que la dinámica del sistema es parcialmente conocida. Se dan condiciones suficientes para la existencia de un observador adaptable de ganancia constante con base en una dinámica distinta a la del sistema original. Se muestra que el error de estimación del estado y de la perturbación convergen de manera asintótica a un conjunto invariante cercano al cero, es decir que se satisface un criterio conocido como acotamiento uniforme último del error de estado y de estimación del parámetro desconocido. El observador propuesto es evaluado en un modelo de producción de bioetanol por medio de la levadura *Saccharomyces Cerevisiae* en un medio formado por residuos agro-industriales.

También se considero el predictor desarrollado por Kharitonov para sistemas lineales con retardos en el tiempo, para la propuesta de observadores que estimen el estado en cualquier instante de tiempo pasado y posteriormente utilizar el predictor para determinar el estado en el presente. Se vislumbra que es posible diseñar un controlador estabilizante y un observador asintótico por separado, de manera que al combinarlos en un esquema controlador-observador se siga asegurando la estabilidad de dicho esquema.

6.2. Publicaciones

A continuación se muestran los trabajos generados de las investigaciones realizadas durante esta tesis en orden cronológico ascendente:

- Jorge Torres, Arno Sonck, Sergej Čelikovský, and Alma R. Domínguez. An Useful Transformation for Observers Design on Bioreactors. 6th Congress of the International Society for Applied Phycology (2017).
- Torres, J.A., Sonck, A., Čelikovský, S. et al. Constant-gain nonlinear adaptive observers revisited: an application to chemostat systems. *Front Inform Technol Electron Eng* 22, 68–78 (2021). <https://doi.org/10.1631/FITEE.2000368>

Como podrá ver, primero se publico la transformación que nos permite tratar con una gran cantidad de sistemas no lineales que son utilizados en una gran variedad de bioprocesos como en el uso de microalgas para remoción de ciertos contaminantes durante el tratamiento de aguas residuales.

Posteriormente sometimos el observador desarrollado durante el Capítulo 3 que es aplicado al tipo de sistemas no lineales mencionados en el párrafo anterior, tomando

como ejemplo particular el uso de microalgas reportado en [55]. Lo cual nos permitió validar la efectividad del mismo en un problema real.

6.3. Trabajo futuro

El paso más inmediato es publicar el observador reportado en el Capítulo 4 que permite obtener observabilidad práctica aun con conocimiento parcial de la dinámica del proceso, esto facilitará el monitoreo de aplicaciones industriales como la producción de bioetanol.

Como segundo paso, someteremos a revisión nuestros resultados obtenidos de la teoría de Kharitonov enfocada a observadores para el caso lineal que abre una nueva rama en el análisis en el dominio del tiempo de observadores retardados.

Como tercer paso, es necesario desarrollar la teoría de predictores bajo el enfoque de Kharitonov a sistemas no lineales. De momento se puede recurrir a una linealización parcial para aplicar dichos métodos a procesos que involucren biorreactores operando en modo continuo, los cuales pueden presentar zonas de operación cuya dinámica es muy cercana a la lineal.

Bibliografía

- [1] United States Environmental Protection Agency. *A Comprehensive Analysis of Biodiesel Impacts on Exhaust Emissions*. BiblioGov, 2002.
- [2] J. F. Andrews. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrate. *Biotechnology and Bioengineering*, 10:707–723, 1968.
- [3] Stephen B., Laurent El G., E. Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [4] J.E. Bailey and D.F. Ollis. *Biochemical Engineering Fundamentals*. McGrawHill, 1986.
- [5] G. Bastin and D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [6] O. Bernard and G. Bastin. Identification of reaction networks for bioprocesses: determination of a partially unknown pseudo-stoichiometric matrix. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 27:293–301, 2005.
- [7] O. Bernard and G. Bastin. On the estimation of the pseudo-stoichiometric matrix for macroscopic mass balance modelling of biotechnological processes. *Mathematical Biosciences*, 193:51–77, 2005.
- [8] Besancon, G. Leon J. D., and Huerta G O. On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control*, 79:581–591, 2006.
- [9] Goodwin Graham C. Predicting the performance of soft sensors as a route to low cost automation. *Annual Reviews in Control*, 24:55–66, 2000.
- [10] Sergej Čelikovský, Jorge Antonio Torres-Muñoz, and Alma Rosa Dominguez-Bocanegra. Adaptive high gain observer extension and its application to bioprocess monitoring. *Kybernetika*, 54(1):155–174, 2018.

-
- [11] Sergej Č. Comunicación personal, Noviembre 2014.
- [12] Dong-Jin Choi and Heekyung Park. A hybrid artificial neural network as a software sensor for optimal control of a wastewater treatment process. *Water Research*, 35(16):3959–3967, 2001.
- [13] A Cunningham and RM Nisbet. Transients and oscillations in continuous culture, in “mathematics in microbiology” (ed. mj bazin), 77-103, 1984.
- [14] Denis D. *On line Parameter Estimation, Adaptive State Estimation and Control of Fermentation Processes*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, Belgium, 1986.
- [15] C. Delbes, R. Moletta, and J.-J. Godon. Bacterial and archaeal 16s rdna and 16s rrna dynamics during an acetate crisis in an anaerobic digester ecosystem. *FEMS Microbiology Ecology*, 35:19–26, 2001.
- [16] Denis Dochain. State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. *Journal of Process Control*, 13(8):801–818, 2003.
- [17] Denis Dochain. *Automatic Control of Bioprocesses*. Wiley, 2008.
- [18] Alma Rosa Domínguez-Bocanegra, Torres Jorge Antonio, and Ricardo Aguilar López. Production of bioethanol from agro-industrial wastes. *Fuel Journal*, 149:85–89, 2015.
- [19] L. Edelstein. *Mathematical Models in Biology*. Random House, 1988.
- [20] Mondher Farza, Ibtissem Bouraoui, Tomas Ménard, Ridha Ben Abdenmour, and Mohammed M’Saad. Adaptive observers for a class of uniformly observable systems with nonlinear parametrization and sampled outputs. *Automatica*, 50(11):2951–2960, 2014.
- [21] Mondher Farza, Mohammed M’Saad, Tarak Maatoug, and Mohamed Kamoun. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. *Automatica*, 45(10):2292–2299, 2009.
- [22] Fabricio Garelli, Ricardo J Mantz, and Hernán De Battista. *Advanced control for constrained processes and systems*. Institution of Engineering and Technology London, 2011.
- [23] J-P Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:922–926, 1981.

- [24] J-P Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:875–880, 1992.
- [25] Bastin Georges and Gevers Michael. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):650–658, 1988.
- [26] Luders Gerd and Narendra Kumpati. An adaptive observer and identifier for a linear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5):496–499, 1973.
- [27] Kreisselmeier Gerhard. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1):2–8, 1977.
- [28] Wu H. A class of adaptive robust state observers with simpler structure for uncertain non linear systems with time varying delays. *IET Control Theory Applications*, 7(7):218–227, 2013.
- [29] H Hammouri and M Nadr. An observer design for a class of implicit systems. *Systems & Control Letters*, 62(3):256–261, 2013.
- [30] D. T. Hill and C.L. Barth. A dynamic model for simulation of animal waste digestion. *Journal of the Water Pollution Control Association*, 10:2129–2143, 1977.
- [31] Khalil Hassan K. High-gain observers in nonlinear feedback control. In *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, pages xlvii–lvii. IEEE, 2008.
- [32] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hal, 2002.
- [33] Vladimir Kharitonov. *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [34] Vladimir L Kharitonov. An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay. *Automatica*, 50(1):211–217, 2014.
- [35] Kirsten AK Köhler, Jana Rühl, Lars M Blank, and Andreas Schmid. Integration of biocatalyst and process engineering for sustainable and efficient n-butanol production. *Engineering in Life Sciences*, 15(1):4–19, 2015.
- [36] Chang H. L. Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(8):1365–1370, 2004.

- [37] F. Lafont, E. Busvelle, and J.-P Gauthier. An adaptive high-gain observer for on-line estimation of kinetic rates in bioreactors. *Journal of Process Control*, 2011.
- [38] Massimiliano M. An LMI approach to the design of a robust observer with application to a temperature control problem for space vehicle testing. *Automatica*, 37:1979–1987, 2001.
- [39] Ricardo M. Adaptive observers for single output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9):1054–1058, 1990.
- [40] N MacDonald. Time delays in chemostat models. *Microbial population dynamics*, 1:33–53, 1982.
- [41] Norman MacDonald and N MacDonald. *Biological delay systems: linear stability theory*. Cambridge University Press, 2008.
- [42] P Mahdi and J M Vahid. A nonlinear adaptive resilient observer design for a class of Lipschitz systems using LMI. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 30:1401–1415, 2011.
- [43] Andrzej Manitius and A Olbrot. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):541–552, 1979.
- [44] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. Prentice Hall, 1995.
- [45] R. Moletta, D. Verrier, and G. Albagnac. Dynamic modelling of anaerobic digestion. *Water Research*, 20:427–434, 1986.
- [46] J. Monod. *Recherches sur la Croissance des Cultures Bactériennes*. PhD thesis, Hermann, Paris, 1942.
- [47] GA Montague, AJ Morris, and MT Tham. Enhancing bioprocess operability with generic software sensors. *Journal of Biotechnology*, 25(1-2):183–201, 1992.
- [48] F. E. Mosey. Mathematical modelling of the anaerobic digestion process: regulatory mechanisms for the formation of short-chain volatile acids from glucose. *Water Science and Technology*, 15:209–232, 1983.
- [49] EO Powell. Hypertrophic growth. *Journal of Applied Chemistry and Biotechnology*, 22(1):71–78, 1972.

- [50] Maddipati Prasanth, Atiyeh Hasan K, Bellmer Danielle D., and Huhnke Raymond L. Ethanol production from syngas by clostridium strain p11 using corn steep liquor as a nutrient replacement to yeast extract. *Bioresource technology*, 102(11):6494–6501, 2011.
- [51] Zhang Qinghua. Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3):525–529, 2002.
- [52] Karimi H R, Zapateiro M, and Luo N. A linear matrix inequality approach to robust fault detection filter design of linear systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations. *Journal of The Franklin Institute*, 347(6):957–973, 2010.
- [53] Marino R. and Tomei P. Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(7):1300–1304, 1995.
- [54] Adrián Ramírez, Sabine Mondié, Rubén Garrido, and Rifat Sipahi. Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order lti systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(6):1688–1693, 2016.
- [55] Domínguez Alma Rosa, Torres Jorge Antonio, Carmona Roberto, and Aguilar Ricardo. Estudio teórico practico de la remoción de contaminantes presentes en el rio de Los Remedios, Estado de México (in spanish). *Ingenieria hidráulica en México*, 24:81–91, 2009.
- [56] Ronald Ross. *The prevention of malaria*. John Murray, 1911.
- [57] Diop S. and Fliess M. Nonlinear observability, identifiability, and persistent trajectories. In *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 714–719, England, December 1991.
- [58] Raghavan S. and Hedrick J. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528, 1994.
- [59] FM Scudo and JR Ziegler. The golden age of theoretical ecology, 1923–1940, volume 22 of lecture notes in biomathematics, 1978.
- [60] L. A. Segel. *Modeling Dynamic Phenomena in Molecular and Cellular Biology*. Cambridge University Press,, 1984.

- [61] M Sharifuddin, G Chakraborty, and Kingshook Bhattacharyya. LMI approach to robust unknown input observer design for continuous systems with noise and uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 8(2):210–219, 2010.
- [62] Otto JM Smith. A controller to overcome dead time. *ISA Journal*, 6:28–33, 1959.
- [63] G.N. Stephanopoulos, A.A. Aristidou, and J. Nielsen. *Metabolic Engineering. Principles and Methodologies*. Academic Press, 1998.
- [64] Chee Pin Tan and Christopher Edwars. An lmi approach for designind sliding mode observers. *International journal of Control*, 16:1559–1568, 2001.
- [65] L. Torres, C. Verde, G. Besançon, and O. González. High-gain observers for leak location in subterranean pipelines of liquefied petroleum gas. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6):1127–1141, 2014.
- [66] Liang X., Zhang J., and Xia X. Adaptive synchronization for generalized lorenz systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(7):1740–1746, 2008.
- [67] Nicola Zamboni, Sarah-Maria Fendt, Martin Rühl, and Uwe Sauer. 13 c-based metabolic flux analysis. *Nature protocols*, 4(6):878, 2009.
- [68] J. Zarei and S. Ahmadizadeh. LMI-Based unknown input observer design for fault detection. In *2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, pages 1130–1135, 2011.
- [69] Qinghua Zhang. Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE transactions on automatic control*, 47(3):525–529, 2002.