



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Control de formación evitando colisiones para agentes de segundo orden

Tesis que presenta:
Andrés Parra Marín

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis:
Dr. Eduardo Aranda Bricaire
Dr. Jaime González Sierra

Agradecimientos

Quiero agradecerle a toda mi familia por apoyarme y estar conmigo en los momentos más difíciles, por no dejarme nunca solo y guiarme por el camino correcto, quiero agradecer en especial a mis padres que siempre me dieron todo su amor, apoyo y esfuerzo para verme salir adelante. Agradezco a mi madre Alejandrina, por siempre tener las palabras correctas para animarme, apoyarme y no haberme dejado caer en el momento más difícil de mi vida, a mi padre Andrés, que se quedó dormido en el velo, esperando verme triunfar en la vida, quién siempre estuvo orgulloso de mi y que me apoyo en todo momento y que estuvo conmigo hasta el final, esto es por y para usted padre mío.

A mis hermanos, Emmanuel, Raúl y Olivia, quienes siempre me brindaron su apoyo y estuvieron ahí cuando los necesite y a toda mi familia que siempre me apoyo y creyó en mi, gracias por todo.

También quiero agradecer al Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN unidad Zacatenco, a los profesores que compartieron su conocimiento, en especial a mis asesores, el Dr. Eduardo Aranda Bricaire y al Dr. Jaime González Sierra, quienes me apoyaron y guiaron durante todo este trabajo, por el apoyo y sabiduría compartida.

Al final pero no por ello menos importante, quiero agradecer a todos mis amigos, con quienes pasamos momentos de diversión y estrés, pero que nos apoyamos en todo momento, desde lo más sencillo hasta lo más complicado. Gracias a Eduardo, Gustavo, Talí, Marco e Iván, gracias a todos por todo el apoyo y buenos momentos.

A CONACYT por el apoyo económico que me brindó a través de la beca con el número de CVU 1079421 y al apoyo parcial del proyecto CB-CONACYT A1-S-31628 para poder realizar mis estudios de Maestría y concluir con este trabajo.

Gracias a todos.

Resumen

En este trabajo, se presenta el diseño de una ley de control para la formación y evasión de colisiones en Sistemas Multi-Agente, por sus siglas en ingles (MAS). La estrategia de control propuesta en este trabajo tiene dos objetivos principales, el primero es la convergencia a la formación deseada de los agentes basado en el Algoritmo Fundamental de Consenso, el segundo es la evasión de obstáculos y colisiones posibles entre los agentes del sistema para el cual se emplean los Campos Vectoriales Artificiales (AVF) por sus siglas en ingles.

Para lograr el escalamiento de los AVF, es necesario calcular un parámetro de diseño ϵ el cual esta implicado en la respuesta del sistema para determinar la evasión de las colisiones entre los agentes. Los cálculos que se muestran más adelante determinaran una ecuación general de ϵ para n agentes, con la cual, podremos obtener un ϵ constante que nos asegure la no colisión entre los agentes.

Posteriormente, para probar que la ley de control diseñada funciona, se hace uso de aeronaves tipo quadrirotor, haciendo uso de su modelo dinámico al cual se le acoplará la ley de control para evasión de colisiones.

Para validar la ley de control propuesta, se realizan simulaciones numéricas. Para las simulaciones, se presentan los casos en los cuales se encuentran involucrados dos y tres agentes en el sistema, para los cuales se proponen condiciones iniciales arbitrarias para que los agentes lleguen a la formación deseada evadiendo las colisiones durante el comportamiento transitorio del sistema. Con lo que podremos observar como es que los agentes convergen a la formación deseada, mientras que estos tratan de evadir las colisiones entre los agentes del sistema o con algún obstáculo u objeto fijo que se interponga en su camino.

Para las simulaciones con el modelo dinámico de la aeronave tipo quadrirotor, se consideran un grupo de dos y tres agentes que se mueve en el plano a una altura constante, con el objetivo de cambiar sus posiciones iniciales mientras estos evaden las colisiones durante su trayectoria.

Abstract

In this work, we present the design of a control law for formation and collision avoidance in Multi-Agent Systems (MAS). The control strategy proposed in this work has two main objectives, the first one is the convergence to the desired formation of the agents based on the Fundamental Consensus Algorithm, and the second one is the avoidance of obstacles and collisions between the agents of the system for which Artificial Vector Fields (AVF) are employed.

To achieve AVF scaling, it is necessary to calculate a design parameter ϵ which is involved in the system response to determine collision avoidance between agents. The calculations shown below will determine a general ϵ equation for n agents, with which, we will be able to obtain a constant ϵ that ensures no collision between agents.

Subsequently, to prove that the designed control law works, quadrotor aircraft are used, making use of their dynamic model to which the collision avoidance control law is coupled.

To validate the proposed control law, numerical simulations are performed. For the simulations, cases are presented in which two and three agents are involved in the system, for which arbitrary initial conditions are proposed for the agents to reach the desired formation while avoiding collisions during the transient behavior of the system. Thus, we can observe how the agents converge to the desired formation, while they try to avoid collisions between agents in the system or with an obstacle or fixed object that gets in their way.

For the simulations with the dynamic model of the quadrotor aircraft, a group of two and three agents moving in the plane at a constant height are considered, to change their initial positions while avoiding collisions during their trajectory.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Objetivos	5
1.4. Justificación	6
1.5. Organización de la tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Teoría de grafos	7
2.2. Algoritmo fundamental de consenso	9
2.2.1. Agentes de primer orden	9
2.3. Funciones potenciales repulsivas	10
2.4. Robots aéreos tipo quad	12
2.4.1. Modelo dinámico de un robot aéreo tipo quad	13
3. Estrategia de control para evasión de colisiones	17
3.1. Algoritmo fundamental de consenso para agentes de segundo orden	17
3.1.1. Algoritmo fundamental de consenso para agentes de segundo orden con entradas acotadas	18
3.2. Estrategia de control para 2 agentes	19
3.3. Estrategia de control para 3 agentes	22
3.4. Generalización de la estrategia de control para un grupo de n agentes	27
4. Simulaciones numéricas	31
4.1. Simulaciones numéricas para dos agentes	31
4.2. Simulaciones numéricas para tres agentes	34
4.3. Simulaciones numéricas para dos robots aéreos	39
4.4. Simulaciones numéricas para tres robots aéreos	42
5. Conclusiones	47
Bibliografía	49

Índice de figuras

2.1. Grafo G	8
2.2. Tipos de grafos.	8
2.3. Campo vectorial tipo foco inestable.	11
2.4. Sentido de giro de las helices de un robot aéreo.	12
2.5. Ángulos de Euler.	13
2.6. Ángulos de Euler.	15
3.1. Grafo no dirigido del agente R_a y R_b	19
3.2. Plano $[p_{ab} \ q_{ab}]^T$	20
3.3. Grafo no dirigido del agente R_a , R_b y R_c	23
3.4. Grafo no dirigido para un grupo de n agentes.	28
4.1. Trayectoria de los agentes en el plano $p_{ab} - q_{ab}$	32
4.2. Trayectorias de los agentes en el plano XY	32
4.3. Comportamiento de los agentes en el plano $\sigma_{ab} - \dot{\sigma}_{ab}$	33
4.4. Entradas de control.	33
4.5. Error de posición de los agentes.	34
4.6. Error de velocidad de los agentes.	35
4.7. Trayectoria de los agentes R_a , R_b y R_c en el plano $p - q$	35
4.8. Trayectorias de los agentes R_a , R_b y R_c en el plano XY	36
4.9. Comportamiento de los agentes en el plano $\sigma - \dot{\sigma}$	36
4.10. Posición de los agentes en diferentes tiempos.	37
4.11. Entradas de control.	38
4.12. Error de posición de los agentes.	38
4.13. Error de velocidad de los agentes.	39
4.14. Trayectorias de dos UAV's.	39
4.15. Posición de dos UAV's en diferentes tiempos.	40
4.16. Entradas de control de ambos UAV's.	41
4.17. Error de posición de ambos UAV's.	41
4.18. Error de velocidad de ambos UAV's.	42
4.19. Trayectorias de tres robots aéreos.	43
4.20. Posición de los tres robots en diferentes tiempos.	44
4.21. Entradas de control de los tres robots.	45
4.22. Errores de posición de los tres robots.	45
4.23. Errores de velocidad de los tres robots.	46

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día los robots terrestres y aéreos aportan muchas oportunidades de trabajo en el sector industrial debido a las amplias tareas que estos pueden realizar. Sin embargo, debido a la complejidad de las tareas que se les pueden asignar, es necesario diseñar e implementar los controles necesarios para que éstos puedan desarrollarlas sin riesgo alguno para los operadores de los robots y que a su vez los robots no estén en peligro entre si. Actualmente, el diseño de controladores para estos robots son un tema de gran interés dentro de la investigación. Es por eso que existen controladores robustos que permiten a los robots realizar las tareas asignadas y lograr su objetivo de regulación o de seguimiento.

Un Sistema Multi-Agente o Multi-Agent System, por sus siglas en ingles (MAS), es un sistema compuesto por múltiples agentes inteligentes que interactúan entre ellos. Los MAS pueden ser utilizados para resolver problemas que son difíciles o imposibles de resolver para un agente individual. El organismo fundamental de un MAS, como es de esperarse, son los agentes. Aunque no existe una definición formal de lo que es un agente, por lo general se reconocen como entidades inteligentes en un sistema operativo y que se pueden comunicar a través de un mecanismo de comunicación inter proceso, usualmente un sistema de red, utilizando protocolos de comunicación.

El problema de control de movimiento (formación y/o marcha), con evasión de colisiones, tiene una larga historia en la literatura especializada. Khatib proponía modelar el grupo de robots como robots omni direccionales de primer orden imponiendo una estrategia de control de movimiento y una ley de control para evitar las posibles colisiones entre los robots. Su enfoque estaba basado en el empleo del gradiente negativo de funciones potenciales artificiales. Sin embargo, el principal inconveniente es que la suma de la ley de control de movimiento y la ley reactiva que evita colisiones puede dar lugar a equilibrios no deseados o mínimos locales. Este problema fue estudiado en todo detalle en [1]. Posteriormente, el problema fue completamente resuelto en [2–4]. La técnica empleada se conoce como campos vectoriales artificiales. Los campos vectoriales artificiales obligan a cualquier grupo de agentes en peligro de colisión a evadirse siguiendo trayectorias espirales divergentes (focos inestables). Esta novedosa técnica permite resolver el problema para cualquier número de agentes y evitar, al mismo tiempo, la existencia de equilibrios no deseados. Con lo que se busca resolver el siguiente problema.

Los agentes en un MAS tienen algunas características importantes:

- Los agentes son al menos parcialmente autónomos.
- Ningún agente tiene una visión global del sistema, debido a la complejidad y cantidad de

agentes que pueden estar presentes en el sistema; con lo cual, la gran cantidad de información puede llevar a una carga computacional demasiado alta.

Debido a la complejidad que conllevan algunas tareas, los sistemas de un único agente se vuelven incapaces de resolver el problema, provocado por sus limitaciones en el espacio de trabajo [5]. A partir de aquí se nota la gran importancia de los MAS para resolver tareas más complejas.

Es por ello que en este trabajo se aborda el problema de control de formación con evasión de colisiones para un grupo de robots móviles terrestres o aéreos que involucren dos o más agentes, los cuales son modelados por ecuaciones diferenciales de segundo orden.

1.1. Estado del arte

El estudio de los MAS se ha vuelto más popular en los últimos años debido a la gran utilidad que estos sistemas ofrecen para resolver problemas cada vez más complejos, los cuales un solo agente no sería capaz de resolver, haciéndolos perfectos para llevar a cabo diversas tareas. Existen diversas aplicaciones que se les pueden dar a los MAS entre los cuales se encuentran la manipulación de objetos [6], búsqueda y rescate [7], formación de UAV's [8], redes de sensores [9], redes inteligentes [10], entre otras. Para los MAS, los problemas de coordinación de movimiento y de consenso a las formaciones deseadas se resuelven comúnmente con la teoría de grafos [11] [12].

El modelo más simple que podemos encontrar sobre los MAS son los que se encuentran descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden, en donde solo se consideran las velocidades que repercuten sobre cada agente [2], despreciando los efectos inerciales que se tienen en consideración en sistemas de segundo orden. En la literatura hay muchos trabajos relacionados al control de MAS, en algunos se modelan con ecuaciones diferenciales de segundo orden [13–18]. Sin embargo, en todo MAS debe existir coordinación y colaboración para que los agentes logren realizar la tarea asignada, a su vez, los agentes del sistema deben considerar y evadir las colisiones entre agentes o los posibles obstáculos que se encuentren en el entorno y aún así lograr un consenso. En algunos sistemas, para lograr consenso se proponen algoritmos de control de líder-seguidor en una red de agentes con dinámicas no lineales de segundo orden, en donde todos los agentes en la red se centran en seguir al líder, mientras que el líder busca llegar al objetivo. Además, se desarrollan protocolos de consenso para integradores dobles acoplados con una velocidad de referencia constante [14] [15]. Por otro lado, considerando que cada agente esta sujeto a perturbaciones y tienen una red de comunicación dirigida se puede hacer uso de un protocolo basado en la técnica de backstepping, donde se utiliza el método de control de estructura variable cooperativa distribuida para manejar las perturbaciones acotadas [16].

Los primeros estudios sobre los MAS fueron propuestos por Khatib, en los años 90 [19]. Khatib proponía modelar el grupo de robots como robots omni direccionales de primer orden; imponer una estrategia de control de movimiento; y, posteriormente, una ley de control reactiva para evitar las posibles colisiones entre los robots. Su enfoque esta basado en el empleo del gradiente negativo de funciones potenciales artificiales.

Los MAS están sujetos a ciertas restricciones que se relacionan con el intercambio de información entre los agentes. La forma más fácil de modelar un MAS es considerando que cada agente es capaz de medir únicamente su posición. La cual, se envía a los vecinos con tasas de muestreo aperiódicas y asíncronas [20].

Otros de los problemas a los que se enfrentan los MAS, son las colisiones que se pueden dar entre los agentes del sistema. Para lo cual, hay distintas formas de abordar este problema, como lo puede ser un control por modelo predictivo distribuido para la formación de múltiples agentes de segundo orden con evasión de colisiones y obstáculos [21]. En algunos casos, los MAS tienen la configuración líder-seguidor, en donde, solo algunos agentes seguidores tienen acceso al estado de información del líder, por lo cual su control se divide en dos pasos, uno está dedicado a la estimación del estado del líder por cada seguidor que tiene acceso a su información y el segundo paso se basa en la estimación del estado del líder, donde cada seguidor calcula su ley de control para ubicar al líder en un tiempo finito [17] [18].

1.2. Planteamiento del problema

El problema de evasión de colisiones está presente en todos los escenarios compartidos por diversos robots móviles mientras desarrollan diversas tareas. En el caso de agentes modelados por ecuaciones diferenciales de primer orden, las leyes de control diseñadas se basan en campos vectoriales tipo foco inestable que garantizan la evasión de colisiones, teniendo en consideración la posición de todos los agentes en cualquier instante de tiempo mientras que los agentes se encuentren en su estado transitorio [3].

Por lo tanto, este trabajo aborda el problema de control de movimiento (formación) con evasión de colisiones, para un grupo de robots móviles modelados como robots puntuales omni direccionales de segundo orden.

Sea $N = \{R_1, \dots, R_n\}$ un grupo de agentes móviles los cuales se mueven en el plano con coordenadas $\mathbf{z}_i = [x_i \ y_i]^\top \in \mathbb{R}^2$, para $i = 1, \dots, n$ y $N_i \subset N$ es el conjunto de aquellos agentes que pueden ser detectados por R_i . Cada agente R_i está descrito por un modelo de segundo orden, dado por

$$\ddot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{u}_i = [u_{ix} \ u_{iy}]^\top \in \mathbb{R}^2$ corresponde a las entradas de control.

Suposición 1.1 *En este trabajo se considera una gráfica de formación no dirigida, es decir, el agente R_i recibe información del agente R_j y viceversa, por lo tanto, $N_i = \{R_j\}$ y $N_j = \{R_i\}$.*

El problema de interés consiste en diseñar una estrategia de control de tal manera que

- Los agentes evadan colisiones entre ellos, *i.e.*,

$$\|z_i(t) - z_j(t)\| > d, \forall t \geq 0,$$

donde d es la distancia de seguridad.

- Los agentes logren posicionarse en un patrón geométrico, *i.e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i^*) = 0,$$

donde, considerando una gráfica de formación G no dirigida, la posición deseada de cada agente está definida como

$$\mathbf{z}_i^* = \mathbf{z}_j + \mathbf{c}_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \neq i,$$

con $\mathbf{c}_{ji} = [c_{ji_x} \ c_{ji_y}]^\top \in \mathbb{R}^2$ vectores de posición constantes los cuales especifican la posición relativa deseada entre los agentes.

Para lograr la formación, se deben atender dos objetivos por separado, para el tema de la convergencia, consideraremos el requisito mínimo que el gráfico de comunicación debe contener un árbol de expansión no dirigido [3] [4]. Este primer objetivo se soluciona al considerar que no existe riesgo de colisión entre agentes. Por otra parte se diseña una ley de control complementaria para atender el problema de la colisión basada en AVF [2].

Control de formación con no colisión

La ley de control propuesta está dada por

$$u_i = \gamma_i + \beta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

donde γ_i es la parte del control que logra la convergencia a la formación deseada y está basada en el Algoritmo Fundamental del Consenso [11] mientras que β_i son los Campos Vectoriales Repulsivos para lograr la evasión de colisiones, los cuales se definirán más adelante. En primera instancia se considera que γ_i está dada por

$$\gamma_i = -k_0 \tilde{z}_i - k_1 \dot{\tilde{z}}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

donde $\tilde{z}_i = z_i - z_i^*$ se define como el error de posición, $\dot{\tilde{z}}_i$ es el error de velocidad, k_0 y k_1 son constantes definidas positivas las cuales se obtienen a partir de proponer polos reales para evitar oscilaciones en el sistema ya que estas pueden generar entradas innecesarias en la zona de detección de los agentes.

Observación 1.1 *Es bien sabido que al aplicar la estrategia de control (1.3) al sistema (1.1) y, considerando la Suposición 1.1, los agentes convergerán a la formación deseada si $0 < k_0 < k_1$ [11].*

Es importante destacar que la ley de control (1.3) no está acotada, por lo que al aplicarla a algún sistema físico puede causar daños en los actuadores. En ese sentido, se propone una versión de (1.3) acotada, dada por

$$\gamma_i = -k_0 \phi(\tilde{z}_i) - k_1 \phi(\dot{\tilde{z}}_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

con $\phi(\cdot)$ una función de saturación del tipo sigmoide, en este caso la tangente hiperbólica.

Evasión de colisiones

Para resolver el problema de las colisiones se utiliza el enfoque de AVF. En ese sentido, un campo vectorial es una representación matemática de la velocidad instantánea de las soluciones de un sistema dinámico. El adjetivo repulsivo significa que las soluciones divergen de un punto de equilibrio. Los AVF se han diseñado tradicionalmente como el gradiente de una función potencial. El principal inconveniente de estos campos vectoriales es que a menudo conducen a la aparición

de equilibrios no deseados, sin embargo en este caso se propone una estructura de foco inestable, lo que nos permite diseñar trayectorias de tipo espiral para evitar colisiones y en consecuencia, descartar equilibrios no deseados [2] [22] [23].

Una vez definida la convergencia de los agentes, es necesario evitar las colisiones entre los agentes durante el comportamiento transitorio. Por lo tanto, para el caso de dos agentes, los AVF se definen como

$$\beta_i = \epsilon \sum_{j \in N} \delta_{ij} \begin{bmatrix} (x_i - x_j) - (y_i - y_j) \\ (x_i - x_j) + (y_i - y_j) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \neq i, \quad (1.5)$$

donde $\epsilon > 0$ es un parámetro de diseño que se definirá más adelante, $N = \{z_j \mid \|z_i - z_j\| \leq D\}$ es el conjunto de agentes en riesgo de colisión i -ésimo agente, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ es una función que depende de la distancia entre los agentes R_i y R_j dada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \|z_i - z_j\| \leq D, \\ 0, & \text{si } \|z_i - z_j\| > D, \end{cases} \quad (1.6)$$

donde D es la distancia de sensado.

1.3. Objetivos

Diseñar, analizar e implementar una estrategia de control para un MAS formado por agentes de segundo orden de tal manera que se logre la evasión de colisiones entre los agentes y además los agentes logren posicionarse en un patrón geométrico deseado.

Para lograr el objetivo principal de este trabajo, es necesario llevar a cabo los siguientes objetivos específicos:

Objetivos Específicos

- Diseñar un parámetro que permita escalar de manera adecuada los campos vectoriales repulsivos.
- Diseñar una ley de control para la formación y evasión de colisiones en un caso específico de dos agentes, considerando una gráfica de formación no dirigida.
- Extender el análisis de no colisión para un grupo de n agentes.
- Implementar la ley de control para formación y evasión de colisiones al modelo dinámico de un robot tipo aéreo.
- Probar el desempeño del control propuesto mediante simulaciones numéricas en MatLab Simulink.

1.4. Justificación

La evasión de colisiones para agentes de primer orden ha sido ampliamente estudiada y abordada, presentando diferentes metodologías y enfoques [24–30]. Sin embargo, aplicar estos enfoques a agentes de segundo orden no resulta trivial debido a que en este tipo de agentes no es posible modificar sus trayectorias de manera instantánea debido a la inercia que presentan. En ese sentido, se proponen dos circunferencias alrededor de cada uno de los agentes: un círculo de radio D correspondiente a la zona de sensado y un círculo de menor radio d correspondiente a la zona de seguridad. La idea es que cuando un agente entre en la zona de sensado de otro agente, se active la acción repulsiva y se evite la colisión. Para lograr esto, se diseñó un parámetro constante que permite escalar de manera adecuada los campos vectoriales repulsivos.

Por lo cuál, en esté trabajo se tiene por objetivo generalizar los estudios realizados para agentes de primer orden e implementarlas al caso de robots móviles de segundo orden. Aunque el problema podría parecer que solo se debe a la manera en que expresamos las dinámicas de orden uno a orden dos, esto representa grandes dificultades.

Una razón para aplicar el enfoque usado en agentes modelados por un sistema de primer orden y desarrollarlo en agentes de segundo orden es para tener un sistema con condiciones en las que no se dependa únicamente de la posición relativa de los agentes, y así, tener en consideración la velocidad y aceleración con la que se mueven en el plano y poder cumplir con la tarea asignada al grupo de agentes mientras que a su vez los mismos buscan evadir las colisiones entre agentes y obstáculos que se puedan encontrar en el entorno.

Finalmente, en este trabajo se utiliza el enfoque aplicado en trabajos anteriores para un sistema de n agentes modelado por ecuaciones diferenciales de segundo orden, donde, se garantiza la convergencia asintótica a la formación deseada mientras que durante el comportamiento transitorio de los agentes estos evaden la colisión; debido al correcto escalamiento de los AVF. También se propone una ecuación general del parámetro de diseño que nos asegura la no colisión entre los agentes.

1.5. Organización de la tesis

El trabajo de tesis está estructurado de la siguiente manera:

- El Capítulo 2 presenta los conceptos, definiciones, modelos y preliminares matemáticos necesarios para el desarrollo de la parte teórica de este trabajo de tesis.
- El Capítulo 3 ilustra el diseño y desarrollo de la ley de control de formación con evasión de colisiones, teniendo en consideración que las colisiones pueden darse entre los agentes del sistema u objetos estáticos que se encuentren presentes en el plano, y así determinar la forma en la que se obtiene el parámetro que nos permite escalar los AVF.
- El Capítulo 4 muestra los resultados obtenidos al realizar simulaciones numéricas que validen las leyes de control propuestas en el capítulo anterior.
- Finalmente, en el Capítulo 5 se mencionan las conclusiones y posibles trabajos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

En este Capítulo se introduce el concepto de gráficas de formación y su aplicación al diseño y análisis de las estrategias de control, específicamente al algoritmo fundamental de consenso de sistemas de primer orden. Posteriormente, se da una descripción de las funciones potenciales repulsivas y, finalmente, se presenta el modelo dinámico de un UAV.

2.1. Teoría de grafos

Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y aristas que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas). Un SMA puede ser modelado por medio de la teoría de grafos, donde los agentes son representados por los vértices y el intercambio de información entre los agentes por las aristas.

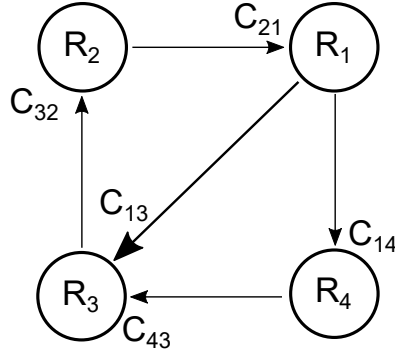
Definición 2.1 Una gráfica de formación $G = \{N, E, C\}$ que describe la comunicación entre agentes, está compuesta por los siguientes parámetros [11] [31]

1. Un conjunto de vértices N que corresponde a los n agentes en el sistema.
2. Un conjunto de vértices $E = \{(R_i, R_j, \dots, R_n) \in N \times N, j \neq i\}$, los cuales denotan que el agente R_i recibe información de R_j .
3. Un conjunto de etiquetas $C = \{c_{ji} \in \mathbb{R}^2 \mid (R_j, R_i) \in N \times N, j \neq i\}$ donde c_{ji} es un vector que especifica la posición relativa de R_i con respecto a R_j .

Con base en la Figura 2.1, y recordando que N_i es el subconjunto de agentes detectados por R_i , dichos subconjuntos están dados por

- $N_1 = \{R_3, R_4\}$ $N_2 = \{R_1\}$ $N_3 = \{R_2\}$ $N_4 = \{R_3\}$
- $N = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ $E = \{(R_1R_2), (R_2R_3), (R_3R_1), (R_3R_4), (R_4R_1)\}$

Dentro de la teoría de grafos, existen tres tipos de grafos para determinar la información que los agentes pueden recibir.

Figura 2.1: Grafo G .

1. **Grafo no dirigido (Undirected graph UG)**

Donde las aristas c_{ji} tienen un flujo de información bidireccional entre los agentes del sistema, ver Figura 2.2a.

2. **Grafo dirigido (Directed graph DG)**

A diferencia de los grafos no dirigidos, en este caso, no existe un intercambio bidireccional de información entre los agentes, es decir, que el agente R_i puede recibir información del agente R_j , pero el agente R_j no recibe información del agente R_i , ver Figura 2.2b.

3. **Grafo mixto (Mixed graph MG)**

Estos grafos son una combinación de los dos casos anteriores, donde hay agentes que tienen información bidireccional y otros que no, ver Figura 2.2c.

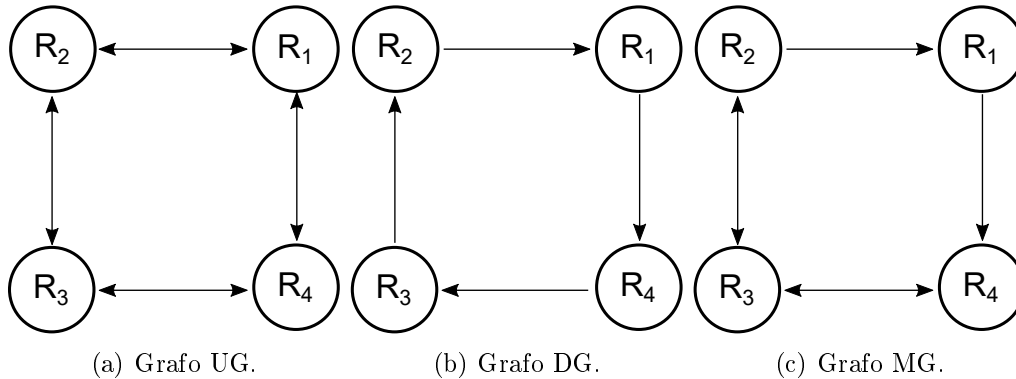


Figura 2.2: Tipos de grafos.

Cualquier tipo de grafo puede ser representado de manera algebraica en forma matricial, esta representación es importante para obtener características y propiedades que son de gran utilidad para obtener la información necesaria para la comunicación de los agentes.

Definición 2.2 *Matriz de adyacencia*

Se trata de una matriz cuadrada de $n \times n$ siendo n el número de vértices del grafo. Para construir la matriz de adyacencia, cada elemento $a_{ij} = 1$ cuando haya una arista que una los vértices i y j , de lo contrario $a_{ij} = 0$ y está denotada por A_d

Definición 2.3 *Matriz de grados*

Es una matriz diagonal cuadrada denotada por $\Delta^{n \times n}$ definida como

$$\Delta = \text{diag}\{n_1, \dots, n_n\}, \quad (2.1)$$

donde n_i es el número de aristas dirigidas a cada nodo R_i

Definición 2.4 *Laplaciano* Dado una gráfica de formación $G = \{N, E, C\}$, el Laplaciano que corresponde al grafo G , está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \Delta - A_d, \quad (2.2)$$

Para cualquier grafo de orden n , la suma de cualquiera de los renglones del Laplaciano debe ser cero. Por lo que, $\mathcal{L}(G)$ siempre tendrá un valor propio en cero que se encuentra asociado con $\mathbf{1}_n = [1, \dots, 1]^T$.

2.2. Algoritmo fundamental de consenso

Un algoritmo de consenso es un mecanismo que permite a los agentes que se encuentran involucrados en el sistema, coordinarse en un entorno distribuido que debe garantizar que todos los agentes lleguen a un acuerdo para lograr el objetivo y, por lo tanto, llegar a un consenso. El consenso de información garantiza que los agentes que comparten información a través de una topología de red tengan una visión coherente de la información que es crítica para la tarea de coordinación. Para que exista consenso, debe existir una variable de interés compartida, denominada estado de la información.

Los agentes actualizan el valor de sus estados de información en función de los estados de información de los agentes a su alrededor. El objetivo es diseñar una ley de control para que los estados de información de todos los vehículos de la red converjan a un valor común.

2.2.1. Agentes de primer orden

El consenso bajo topologías de interacción fijas puede lograrse asintóticamente si y solo si la topología de interacción dirigida tiene un árbol de expansión dirigido [11]. En teoría de grafos, un árbol de expansión es un árbol compuesto por todos los vértices y algunas o quizá todas de las aristas de G . Un árbol de expansión dirigido de G es una selección de aristas de G que forman un árbol que cubre todos los vértices que conectan la información que fluye entre los agentes de manera bidireccional, es decir, que todos los agentes están conectados y la información fluye en ambos sentidos.

Suponiendo que tenemos n agentes en el sistema. Usamos un grafo dirigido $G = \{N, E, C\}$, donde $N_n = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos y $E_n \subseteq N_n \times N_n$ es el conjunto de aristas, para modelar la interacción entre un número n de agentes que determinará la comunicación entre los agentes.

Considere estados de información con dinámica de un solo integrador dada por

$$\dot{z}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

donde $z_i \in \mathbb{R}^m$ es el estado de información y $u_i \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control de información del i -ésimo vehículo. El algoritmo de consenso en tiempo continuo está dado por

$$u_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(z_i - z_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

donde $a_{ij}(t)$ son las entradas (i, j) de la matriz de adyacencia, $A_d(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en el tiempo t . Note que $a_{ij}(t) > 0$ si $(i, j) \in E_n$ en el tiempo t y $a_{ij}(t) = 0$ de lo contrario, $\forall j \neq i$. Los estados de información de cada agente se dirige hacia los estados de información de sus vecinos. Las ecuaciones (2.3) y (2.4) se pueden expresar de forma matricial de la siguiente manera

$$\dot{z}_i = -[\mathcal{L}_n(t) \otimes I_m]z_i, \quad (2.5)$$

donde $z_i = [z_1^T, \dots, z_n^T]^T$, $\mathcal{L}_n(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz Laplaciana no simétrica en el tiempo t y \otimes denota el producto de Kronecker. Con (2.4) el grupo de agentes logra o alcanza el consenso si, para todos $z_i(0)$ y todos $i, j = 1, \dots, n$, $\|z_i(t) - z_j(t)\| \rightarrow 0$, con $t \rightarrow \infty$.

2.3. Funciones potenciales repulsivas

La evasión de obstáculos es una parte importante de un sistema de navegación autónomo. Un método para evitar obstáculos es el uso de campos vectoriales simples. Los campos vectoriales simples utilizados para evitar obstáculos consisten en una fuerza repulsiva centrada en el obstáculo que guía al vehículo lejos del obstáculo. Existen diferentes técnicas para la evasión de colisiones para permitir una navegación segura mediante la detección y localización de los obstáculos mediante el modelado del entorno, construyendo un mapa o representación de este último, y conocer la posición precisa de los agentes involucrados. Esta etapa puede requerir el uso de diversos sensores, tales como, ultrasonido, sistemas láser o cámaras de vídeo. Por otra parte, la aplicación del control difuso en los sistemas de navegación permite tomar decisiones en forma de razonamiento aproximado al ser humano de acuerdo a la información obtenida [32] [33] [34].

Un método para la evasión de colisiones es el de generar un campo vectorial artificial, en torno de un obstáculo o de un agente, forzando al agente a evadir la posible colisión cuando estos entren en la zona de influencia del campo vectorial.

Es posible diseñar el campo vectorial para determinar la dirección y el área de influencia en las que el campo puede actuar, sin embargo, las alteraciones de diseño que tenga el campo vectorial puede o no conducir a una mejora de rendimiento en lazo cerrado. La idea de añadir un campo vectorial, consiste en que cada agente sepa en todo momento si existe un obstáculo u otro agente con el que pueda estar en peligro de colisión, es decir, en caso de riesgo de colisión entre los mismos agentes o algún obstáculo el campo vectorial debe activarse para evadir la colisión. Por otra parte, mientras los agentes estén fuera de peligro, el campo vectorial permanecerá inactivo durante todo el comportamiento transitorio.

Kathib propuso una función potencial repulsiva, dada por

$$V_{ij} = \begin{cases} \eta \left(\frac{1}{\beta_{ij}} - \frac{1}{d^2} \right)^2, & \text{si } \beta_{ij} \leq d^2, \\ 0, & \text{si } \beta_{ij} > d^2, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $\eta > 0$, β_{ij} es el cuadrado de la distancia entre dos agentes, d es la zona de influencia de cada agente y V_{ij} esta en función de la distancia entre los agentes R_i y R_j [35].

Con base en lo anterior, para resolver el problema de evasión de colisiones se utiliza el enfoque de AVF. Los AVF se han diseñado tradicionalmente como el gradiente de una función potencial. El principal inconveniente de estos campos vectoriales es que a menudo conducen a la aparición de equilibrios no deseados, sin embargo en este caso se propone una estructura de foco inestable, lo que nos permite diseñar trayectorias de tipo espiral para evitar colisiones y en consecuencia, descartar equilibrios no deseados como lo podemos observar en la Figura 2.3 [2] [22] [23].

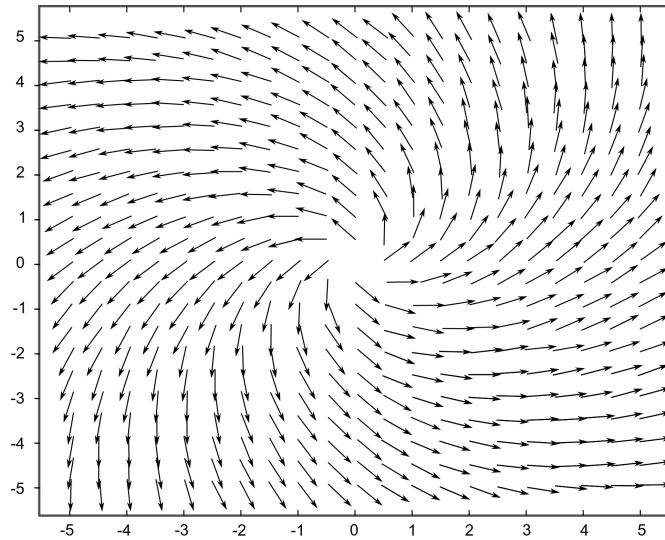


Figura 2.3: Campo vectorial tipo foco inestable.

2.4. Robots aéreos tipo quad

Un robot aéreo tipo quad es una aeronave que obtiene su elevación y propulsión debido a sus cuatro rotores. Los quadrotors se pueden clasificar como rotorcraft¹, en comparación con las aeronaves de ala fija. A diferencia del helicóptero estándar, el robot aéreo es capaz de utilizar palas de cabeceo fijo, cuyo ángulo de ataque no varía cuando las palas giran, sin embargo, el movimiento del robot aéreo se obtiene mediante la variación de velocidad relativa de cada uno de sus rotores para cambiar la orientación y el par producido por cada uno de ellos, para esto, un par de motores gira en sentido horario y el par restante lo hace en sentido antihorario como lo podemos ver en la Figura 2.4.

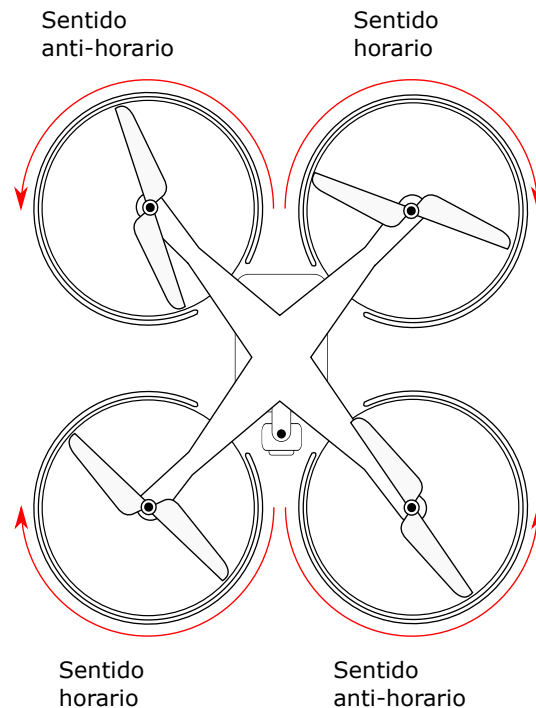


Figura 2.4: Sentido de giro de las helices de un robot aéreo.

Los robots aéreos tipo quad, usan un sistema de control y sensores para estabilizarse. Así mismo, debido a su tamaño y maniobrabilidad estos pueden ser volados en interiores como en exteriores, por lo tanto, estos presentan las siguientes ventajas:

- Los quadrotors no requieren de ningún enlace mecánico que varíe el ángulo de ataque del rotor.
- El uso de cuatro rotores permite que estos sean de un diámetro menor que un rotor equivalente de un helicóptero.
- Debido al tamaño de los quadrotor, es posible añadir un marco de protección fijado al marco de la aeronave para evitar el riesgo de daño a los rotores por una posible colisión.

¹Aeronave con alas giratorias o palas de rotor, que generan sustentación al girar alrededor de un mástil vertical.

Hay varias maneras de modelar la orientación de un robot aéreo tipo quad en el espacio, ya sea por medio de matrices de rotación, cuaterniones unitarios o los ángulos de Euler. Para este trabajo se hace uso de los ángulos de Euler de cabeceo, alabeo y guiñada. Considere la Figura 2.5 que define los ángulos de Euler como:

- Alabeo (ϕ), ángulo de rotación sobre el eje X .
- Cabeceo (θ), ángulo de rotación sobre el eje Y .
- Guiñada (ψ), ángulo de rotación sobre el eje Z .

Al modificar el par generado por los rotores de un quad pueden modificarse sus ángulos de Euler y así producir un desplazamiento.

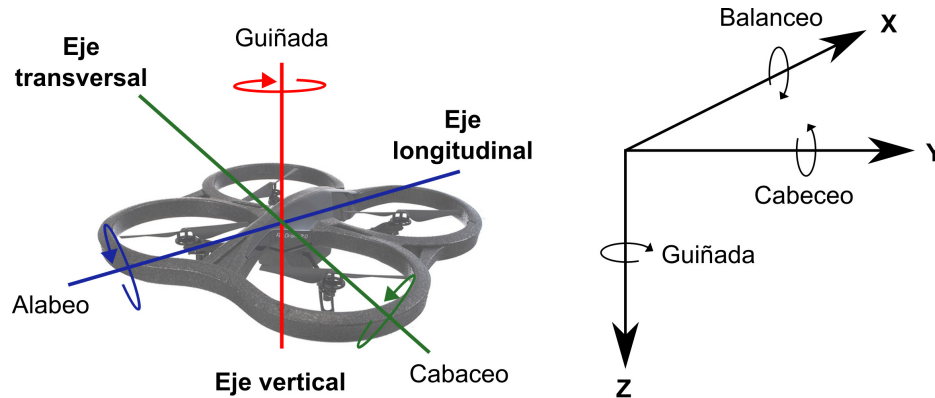


Figura 2.5: Ángulos de Euler.

2.4.1. Modelo dinámico de un robot aéreo tipo quad

Para obtener el modelo dinámico es necesario representar al quad como un cuerpo rígido capaz de moverse en un espacio tridimensional. Con lo cual, haremos uso de un marco inercial F_e del tipo NED² que es un sistema con su origen fijo en el centro de gravedad de la aeronave. Sus ejes están orientados a lo largo de las direcciones geodésicas definidas por la superficie de la tierra y un marco F_b del cuerpo rígido del quad del tipo XYZ . Con respecto al marco inercial del tipo NED, tenemos que

- El eje x apunta al norte paralelo a la superficie del geoide, en la dirección polar.
- El eje y apunta al este paralelo a la superficie del geoide, a lo largo de una curva de latitud.
- El eje z apunta hacia abajo, hacia la superficie de la Tierra.

²Sistema inercial Norte-Este-Abajo (NED) por sus siglas en inglés, donde origen del sistema de coordenadas se elige como un punto por debajo del centro de gravedad de la aeronave.

Como se muestra en la Figura 2.6, para representar la posición del centro de masa del quad respecto al marco de referencia fijo, tenemos el vector $\xi = [x \ y \ z]^\top$ y la orientación con respecto al marco inercial del quad mediante el vector $\eta = [\psi \ \theta \ \phi]^\top$ donde ψ , θ y ϕ son los ángulos de Euler de guiñada, cabeceo y alabeo respectivamente. La dinámica no lineal del quad se puede expresar como

$$m\ddot{\xi} = -mgD + RF_s, \quad (2.7)$$

$$I\dot{\Omega} = -\Omega \times I_q\Omega + \tau, \quad (2.8)$$

donde m es la masa del quad, g es la constante de gravedad, $D = [0 \ 0 \ -1]^\top$, $R \in SO$ es una matriz de rotación que relaciona el marco inercial F_e con el marco del cuerpo rígido F_b dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

$F_s = [0 \ 0 \ u]^\top$, I_q es la matriz de inercia, $\Omega = [r \ q \ p]^\top$ representa la velocidad angular del quad respecto al marco de cuerpo F_b dada por

$$\Omega = W\dot{\eta}, \quad (2.10)$$

$$W = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

y τ es el par total.

Definimos un vector auxiliar $\tilde{\tau}$ relacionado al par total τ , basado en (2.8)

$$\tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix} = I^{-1}W^{-1}(-I\dot{W}\dot{\eta} - W\dot{\eta} \times IW\dot{\eta} + \tau). \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.7) podemos representar el modelo dinámico de un quad como

$$m\ddot{x} = -u(\sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi), \quad (2.13)$$

$$m\ddot{y} = -u(\sin \theta \cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \psi), \quad (2.14)$$

$$m\ddot{z} = -u(\cos \theta \cos \phi) + mg, \quad (2.15)$$

$$\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_\theta, \quad (2.16)$$

$$\ddot{\phi} = \tilde{\tau}_\phi, \quad (2.17)$$

$$\ddot{\psi} = \tilde{\tau}_\psi, \quad (2.18)$$

donde u , $\tilde{\tau}_\theta$, $\tilde{\tau}_\phi$, $\tilde{\tau}_\psi$ son las entradas de control del sistema.

Algunos drones cuentan con un controlador interno, encargado de posicionarlo al ángulo solicitado, debido a que se trabaja en el plano XY solo es necesario usar las entradas de control de ϕ , ψ , alabeo y guiñada, respectivamente. Para simplificar el modelo presentado en las ecuaciones

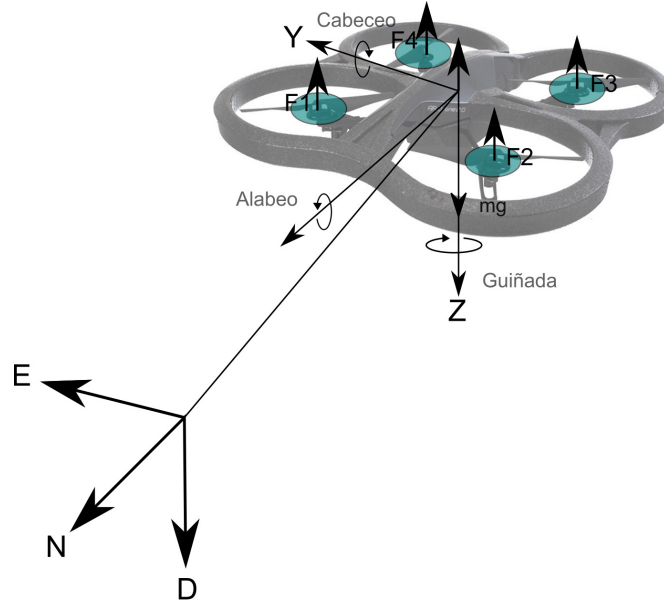


Figura 2.6: Ángulos de Euler.

(2.13)-(2.18) y considerando que se trabaja sobre el plano XY es necesario hacer pequeños cambios en los ángulos que corresponden las entradas de control ϕ , ψ en un rango de -4° a 4° , con esto tenemos que, $\sin(*) = *$ y $\cos(*) = 1$. Simplificando las ecuaciones (2.13)-(2.15)

$$m\ddot{x} = -u(\theta \cos \psi + \phi \sin \psi), \quad (2.19)$$

$$m\ddot{y} = -u(\theta \sin \psi - \phi \cos \psi), \quad (2.20)$$

$$m\ddot{z} = -u + mg, \quad (2.21)$$

de la ecuación 2.21 podemos obtener la fuerza necesaria para mantener al quad a una altura constante, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} m(0) &= -u + mg, \\ u &= mg, \end{aligned} \quad (2.22)$$

sustituyendo (2.22) en (2.19) y (2.20)

$$\ddot{x} = -g(\theta \cos \psi + \phi \sin \psi), \quad (2.23)$$

$$\ddot{y} = -g(\theta \sin \psi - \phi \cos \psi), \quad (2.24)$$

de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Una vez obtenido el modelo dinámico del quad, podemos acoplar la ley de control para la formación con evasión de colisiones, que se definirá más adelante.

Capítulo 3

Estrategia de control para evasión de colisiones

En este Capítulo se analizan dos casos para determinar el valor mínimo que debe tomar el parámetro de diseño ϵ , teniendo en consideración que la magnitud de los AVF debe escalarse de manera correcta, de no ser así la fuerza que implementa el AVF puede ser excesiva, haciendo que el agente evada la colisión mucho antes de que esta se considere, si la fuerza empleada no es suficiente, el riesgo de colisión es mucho mayor aunque este riesgo sea detectado a tiempo. En el primero de los casos se desarrolla el análisis para un caso específico en el que solo se encuentran dos agentes en el sistema, es decir, que el agente R_b está en peligro de colisión con el agente R_a , por lo tanto solo se propone una superficie de seguridad en el plano que corresponde a los agentes que se encuentren en peligro de colisión.

En el segundo caso, el análisis lleva el mismo enfoque que en el caso anterior, introduciendo más agentes en el sistema. Por lo que se consideran tres agentes, suponiendo que los agentes R_b y R_c están en peligro de colisión con el agente R_a , con lo cual, a diferencia del caso anterior; en este surgen dos superficies, una por cada agente que se encuentra en riesgo de colisión, a partir de este punto se lleva a cabo el análisis de manera similar que en el caso anterior para encontrar un $\epsilon^* > 0 : \|z_i(t) - z_j(t)\| > d, \forall t \geq 0$, es decir, un ϵ que nos garantice que la distancia entre los agentes R_a, R_b y R_c sea mayor a una distancia d de seguridad asegurando la no colisión entre los agentes en el plano.

Finalmente se plantea una formula general para establecer el correcto escalamiento de los AVF cuando hay n agentes en el sistema, debido a que se generan superficies con cada agente que entra en riesgo de colisión. Dadas las superficies que se generan, es necesario garantizar la formación con evasión de colisiones, por lo tanto, es necesario calcular un ϵ que nos asegure la no colisión entre los agentes.

3.1. Algoritmo fundamental de consenso para agentes de segundo orden

El algoritmo de consenso para la dinámica de doble integrador tiene en cuenta los movimientos de los estados de información de los agentes y sus derivadas. Partiendo del algoritmo fundamental de consenso para agentes de primer orden, derivando las condiciones bajo las cuales el sistema llega

al consenso se obtienen los estados de información necesarios para modelar los agentes de segundo orden [11]. A diferencia del caso de un integrador, para la dinámica de doble integrador el tener un árbol de expansión es una condición necesaria más que suficiente para la búsqueda de consenso.

Considere estados de información con doble integrador

$$\dot{x}_i = z_i, \quad \dot{z}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^m$ es la información del estado, $z_i \in \mathbb{R}^m$ es la información del estado derivado y $u_i \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control de información asociada con el i -ésimo agente. Usamos un grafo de comunicación dirigida $G_n^A = (N, E_n^A, C)$, donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos y $E_n^A \subseteq N_n \times N_n$ las aristas, $G_n^B = (N, E_n^B, C)$ donde N es el mismo conjunto de nodos y $E_n^B \subseteq N_n \times N_n$ es el conjunto de aristas para modelar z_i y \dot{z}_i respectivamente entre los n vehículos.

Obteniendo el algoritmo de consenso para (3.1)

$$u_i = - \sum_{j=1}^n [K_0(z_i - z_j) + K_1(\dot{z}_i - \dot{z}_j)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

donde K_0 y K_1 son ganancias definidas positivas, z_i y \dot{z}_i representan las posiciones y velocidades del i -ésimo agente respectivamente, (3.2) representa la aceleración de ese agente en particular. Con (3.2) el grupo de agentes alcanza el consenso, para todo $z_i(0)$, $\dot{z}_i(0)$ y $(i, j) = 1, \dots, n$, $\|z_i(t) - z_j(t)\| \rightarrow 0$ y $\|\dot{z}_i(t) - \dot{z}_j(t)\| \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$.

Si $z_i = [z_1^\top, \dots, z_n^\top]^\top$ y $\dot{z} = [\dot{z}_1^\top, \dots, \dot{z}_n^\top]^\top$. Aplicando el algoritmo (3.2), (3.1) puede escribirse en forma matricial con la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = (\Theta(t) \otimes I_m) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -K_0 \mathcal{L}_n(t) & -K_1 \mathcal{L}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

con $\mathcal{L}_n(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz Laplaciana no simétrica asociada con G_n en un tiempo t .

3.1.1. Algoritmo fundamental de consenso para agentes de segundo orden con entradas acotadas

Note que (3.2) no tiene en cuenta explícitamente un esfuerzo de control acotado, por lo que proponemos un algoritmo de consenso para (3.1) con entradas de control acotadas

$$u_i = - \sum_{j=1}^n \{\tanh [K_0(z_i - z_j)] + \tanh [K_1(\dot{z}_i - \dot{z}_j)]\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

donde K_0 y K_1 son constantes definidas positivas. Teniendo en cuenta que (3.5), u_i esta acotado por $\tanh(\cdot)$.

El algoritmo (3.5) para sistemas con dinámica de doble integrador logra consenso asintótico y asegura que los errores de posición y velocidad converjan a cero de la misma manera.

3.2. Estrategia de control para 2 agentes

Para este primer análisis, se considera un grupo compuesto por dos agentes $N = \{R_a, R_b\}$ cuya comunicación está dada por un grafo no dirigido (ver la Figura 3.1). Tomando en cuenta la ley de control (1.2) y aplicándola al sistema (1.1) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

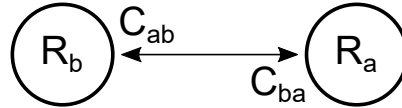


Figura 3.1: Grafo no dirigido del agente R_a y R_b .

$$\ddot{z}_a = -k_0\phi(\tilde{z}_a) - k_1\phi(\dot{\tilde{z}}_a) + \epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} (x_a - x_b) - (y_a - y_b) \\ (x_a - x_b) + (y_a - y_b) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{z}_b = -k_0\phi(\tilde{z}_b) - k_1\phi(\dot{\tilde{z}}_b) + \epsilon\delta_{ba} \begin{bmatrix} (x_b - x_a) - (y_b - y_a) \\ (x_b - x_a) + (y_b - y_a) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde $0 < k_0 < k_1$ son ganancias definidas positivas, \tilde{z}_a y \tilde{z}_b corresponden a los errores de posición del agente R_a y R_b respectivamente, mientras que $\dot{\tilde{z}}_a$ y $\dot{\tilde{z}}_b$ corresponde a los errores de velocidad de los agentes R_a y R_b , $\phi(\cdot)$ es una función de saturación, $\epsilon > 0$ es un parámetro de diseño que definiremos más adelante, $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ es una función que depende de la distancia entre los agentes R_a y R_b dada por 1.6.

Para el diseño del parámetro ϵ , se propone un cambio de variables de distancia relativa entre los agentes, dada por

$$\begin{bmatrix} p_{ab} \\ q_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Con base en la Figura 3.2, D es la distancia de sensado y d es la distancia de seguridad, con $D > d$ y el origen corresponde a la colisión entre dos agentes. Así mismo, se puede definir la siguiente superficie

$$\sigma_{ab} = p_{ab}^2 + q_{ab}^2 - d^2 > 0. \quad (3.9)$$

Con esto, las trayectorias definidas por p_{ab} y q_{ab} deben de permanecer fuera de la región dada por $\sigma_{ab} > 0$. Esto significa que cuando las trayectorias dadas por p_{ab} y q_{ab} entran a la superficie D , los AVF se activan por lo que se tiene que asegurar que la superficie $\sigma_{ab} = 0$ es repulsiva desde la región exterior, es decir, que todas las trayectorias que intenten entrar a la zona de seguridad d deben ser repelidas. Con esto, podemos proponer el siguiente teorema que denota la principal contribución de este trabajo.

Teorema 3.1 *Sea el control (1.2) aplicado al sistema (1.1) con las definiciones dadas en (1.4)-(1.6) y considerando la Suposición 1.1. Se asume que en el tiempo t_0 el agente R_a entra en la zona de sensado de R_b , es decir, hay peligro de colisión. Si se escoge a ϵ de la siguiente manera*

$$\epsilon > \frac{D^2 v^2}{d^2(D^2 - d^2)} + \frac{DK}{d^2}, \quad (3.10)$$

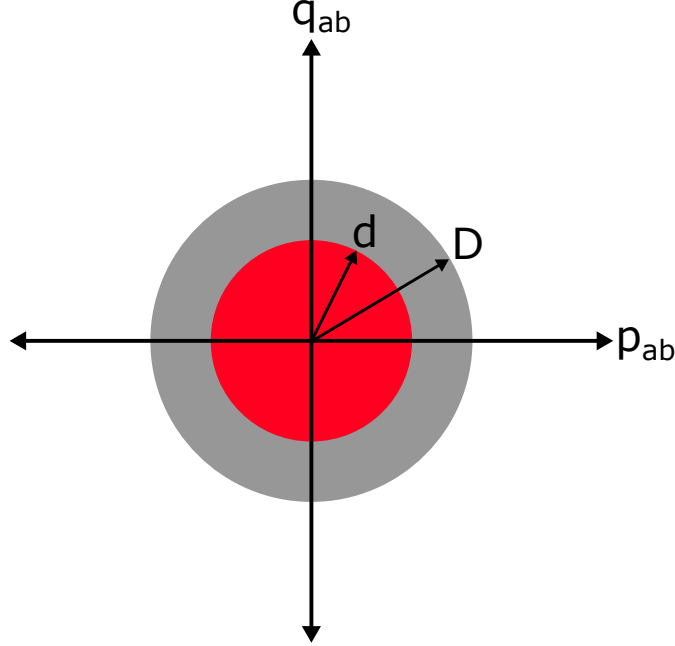


Figura 3.2: Plano $[p_{ab} \ q_{ab}]^T$.

donde $\nu = \text{máx} \left(\sqrt{r_{ab}^2 + s_{ab}^2} \right)$, con $r_{ab} = (\dot{x}_a - \dot{x}_b)$ y $s_{ab} = (\dot{y}_a - \dot{y}_b)$ la velocidad de los agentes en $[x \ y]^T$, y K una ganancia que depende de los valores de k_0 y k_1 , entonces, se puede garantizar que los agentes no colisionarán entre ellos, es decir, $\|\mathbf{z}_a(t) - \mathbf{z}_b(t)\| > d$ para todo $t > t_0$.

Demostración. Para realizar el análisis de colisión en el plano de los agentes R_a y R_b , derivamos con respecto al tiempo la ecuación (3.8) y realizamos un cambio de coordenadas, tal que

$$\begin{bmatrix} r_{ab} \\ s_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ab} \\ \dot{q}_{ab} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

donde $r_{ab} = \dot{x}_a - \dot{x}_b$ y $s_{ab} = \dot{y}_a - \dot{y}_b$. Ya que se está trabajando con un sistema de segundo orden, derivamos nuevamente la ecuación (3.11), obteniendo el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{p}_{ab} \\ \ddot{q}_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_a} - u_{x_b} \\ u_{y_a} - u_{y_b} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Partiendo de la ecuación (3.12), considerando (3.6) podemos obtener la dinámica de (3.8) que involucra ambos agentes dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} = -k_0 (\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b)) - k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b)) + 2\epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Por otra parte, derivando dos veces la superficie dada en (3.9), se obtiene lo siguiente

$$\dot{\sigma}_{ab} = 2 [p_{ab} \ q_{ab}] \begin{bmatrix} r_{ab} \\ s_{ab} \end{bmatrix}, \quad (3.14a)$$

$$\ddot{\sigma}_{ab} = 2 [p_{ab} \ q_{ab}] \begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} + 2 (r_{ab}^2 + s_{ab}^2). \quad (3.14b)$$

Reemplazando la ecuación (3.13) en (3.14b) obtenemos la dinámica de la superficie de influencia de los agentes, dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{ab} = & -2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} [k_0(\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b))] - 2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} [k_1(\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b))] \\ & + 4\epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} + 2(r_{ab}^2 + s_{ab}^2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Calculando el operador norma de los errores de posición y velocidad, se tiene

$$\begin{aligned} \|(\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b))\| & \leq \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_b)\|. \\ \|(\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b))\| & \leq \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_b)\|. \end{aligned}$$

Debido a que $\phi(\tilde{z}_i) = \tanh(\tilde{z}_i)$ y $\phi(\dot{\tilde{z}}_i) = \tanh(\dot{\tilde{z}}_i)$, entonces, $\|\phi(\tilde{z}_i)\| \leq \sqrt{2}$ y $\|\phi(\dot{\tilde{z}}_i)\| \leq \sqrt{2}$, por lo tanto, se obtienen las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_b)\| & \leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b)\| & \geq -2\sqrt{2}, \\ \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_b)\| & \leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b)\| & \geq -2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

y, debido a que se está analizando el caso cuando la distancia entre los agentes es menor o igual a D , es decir $\|z_a - z_b\| \leq D$, entonces, $\delta_{ab} = 1$, por lo que (3.15) se puede acotar por abajo de la siguiente manera

$$\ddot{\sigma}_{ab} \geq -4\sqrt{2}k_0\| \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \| - 4\sqrt{2}k_1\| \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \| + 4\epsilon \left\| \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \right\|. \quad (3.16)$$

Note que el término $(r_{ab}^2 + s_{ab}^2)$ de (3.15) es siempre positivo por lo que su cota está dada por $(r_{ab}^2 + s_{ab}^2) \geq 0$ y, por lo tanto, ese término no aparece en (3.16). Por otra parte, el término $-\| \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \|$ está acotado por $-\| \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \| \geq -D$ mientras que $\left\| \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \right\|$ está acotado por $\left\| \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \right\| \geq d^2$, entonces (3.16) está acotado por abajo por la siguiente expresión

$$\ddot{\sigma}_{ab} \geq -4DK + 4\epsilon d^2, \quad (3.17)$$

con $K = 2\sqrt{2}(k_0 + k_1)$. Integrando (3.17) se obtiene lo siguiente

$$\dot{\sigma}_{ab}(t) \geq (-4DK + 4\epsilon d^2)(t - t_0) + \dot{\sigma}_{ab}(t_0) > 0. \quad (3.18)$$

Debido a que cuando los agentes se aproximan uno a otro, entonces, $\dot{\sigma}_{ab}(t_0) = -|\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|$, por lo tanto, (3.18) se reescribe como

$$\dot{\sigma}_{ab}(t) \geq (-4DK + 4\epsilon d^2)(t - t_0) - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)| > 0. \quad (3.19)$$

Integrando (3.19), se obtiene lo siguiente

$$\sigma_{ab}(t) - \sigma_{ab}(t_0) \geq \frac{1}{2}(-4DK + 4\epsilon d^2)(t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|(t - t_0).$$

Considerando que el análisis se realiza cuando los agentes entran a la zona de senado, entonces $\sigma_{ab}(t_0) = D^2 - d^2$, por lo tanto,

$$\sigma_{ab}(t) \geq D^2 - d^2 + (-2DK + 2\epsilon d^2)(t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|(t - t_0) > 0. \quad (3.20)$$

Note que (3.20) está en función del tiempo por lo que se utiliza (3.19) para despejar $t - t_0$. En ese sentido, (3.19) se iguala a cero y se despeja para $t - t_0$, obteniendo lo siguiente

$$(t - t_0) = \frac{|\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|}{(-4DK + 4\epsilon d^2)}, \quad (3.21)$$

y, sustituyendo (3.21) en (3.20) se tiene que

$$\sigma_{ab}(t) \geq D^2 - d^2 - \frac{\dot{\sigma}_{ab}^2(t_0)}{2(2\epsilon d^2 - 2DK)} > 0. \quad (3.22)$$

Por otra parte, note que (3.14a) tiene la siguiente cota

$$\dot{\sigma}_{ab} \leq 2D\nu, \quad (3.23)$$

con $\nu = \text{máx} \left(\sqrt{r_{ab}^2 + s_{ab}^2} \right)$, entonces $\dot{\sigma}_{ab}^2$ está acotada por $\dot{\sigma}_{ab}^2 \leq 4D^2\nu^2$. Por lo tanto, a partir de (3.22), y, considerando (3.23), se despeja para ϵ , obteniendo la siguiente expresión

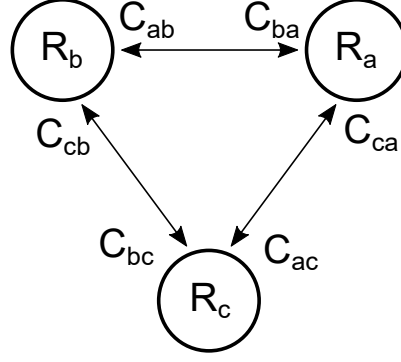
$$\epsilon > \frac{D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)} + \frac{DK}{d^2}. \quad (3.24)$$

Con este valor de ϵ se asegura que los agentes no colisionarán entre ellos, es decir, $\|\mathbf{z}_a(t) - \mathbf{z}_b(t)\| > d$ para todo $t > t_0$. ■

3.3. Estrategia de control para 3 agentes

Mientras más agentes se encuentren involucrados en el MAS, la estrategia de control para evasión de colisiones debe tener en consideración las nuevas zonas de influencia de cada uno de los agentes, es decir, por cada agente que se agregue al sistema se genera una nueva superficie de influencia σ_{ij} correspondiente al i -ésimo agente.

Teniendo en cuenta lo anterior, para este análisis, se considera un grupo compuesto por tres agentes, $N = \{R_a, R_b, R_c\}$, con un grafo de comunicación no dirigido (ver Figura 3.3). Tomando en cuenta la ley de control (1.2) y aplicándola al sistema (1.1) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado, considerando en este caso que el agente R_a se encuentra en peligro de colisión con los agentes R_b y R_c , sin embargo, R_b y R_c no se encuentran en peligro de colisión, con lo que tenemos lo siguiente

Figura 3.3: Grafo no dirigido del agente R_a , R_b y R_c .

$$\ddot{z}_a = -k_0\phi(\tilde{z}_a) - k_1\phi(\dot{\tilde{z}}_a) + \epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} (x_a - x_b) - (y_a - y_b) \\ (x_a - x_b) + (y_a - y_b) \end{bmatrix} + \epsilon\delta_{ac} \begin{bmatrix} (x_a - x_c) - (y_a - y_c) \\ (x_a - x_c) + (y_a - y_c) \end{bmatrix}, \quad (3.25a)$$

$$\ddot{z}_b = -k_0\phi(\tilde{z}_b) - k_1\phi(\dot{\tilde{z}}_b) + \epsilon\delta_{ba} \begin{bmatrix} (x_b - x_a) - (y_b - y_a) \\ (x_b - x_a) + (y_b - y_a) \end{bmatrix} + \epsilon\delta_{bc} \begin{bmatrix} (x_b - x_c) - (y_b - y_c) \\ (x_b - x_c) + (y_b - y_c) \end{bmatrix}, \quad (3.25b)$$

$$\ddot{z}_c = -k_0\phi(\tilde{z}_c) - k_1\phi(\dot{\tilde{z}}_c) + \epsilon\delta_{ca} \begin{bmatrix} (x_c - x_a) - (y_c - y_a) \\ (x_c - x_a) + (y_c - y_a) \end{bmatrix} + \epsilon\delta_{cb} \begin{bmatrix} (x_c - x_b) - (y_c - y_b) \\ (x_c - x_b) + (y_c - y_b) \end{bmatrix}, \quad (3.25c)$$

con k_0 y k_1 ganancias definidas positivas, $\phi(\cdot)$ es la función de saturación, \tilde{z}_a , \tilde{z}_b y \tilde{z}_c corresponden a los errores de posición de los agentes, $\dot{\tilde{z}}_a$, $\dot{\tilde{z}}_b$ y $\dot{\tilde{z}}_c$, son los errores de velocidad, $\epsilon > 0$, finalmente, $\delta_{ab} = \delta_{ac} = \delta_{ba} = \delta_{bc} = \delta_{ca} = \delta_{cb}$ es la función de activación de los AVF que depende de la distancia entre los agentes.

Ya que en el sistema se encuentran involucrados más de dos agentes, es necesario calcular el ϵ que nos asegure la no colisión entre cualquier agente. Se propone el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} p_{ab} \\ q_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{bmatrix}. \quad (3.26a)$$

$$\begin{bmatrix} p_{ac} \\ q_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_c \\ y_a - y_c \end{bmatrix}. \quad (3.26b)$$

A diferencia de la sección anterior, en este caso tendremos una superficie propuesta por cada

agente que se encuentre en peligro de colisión, por lo que proponemos las siguientes superficies

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{ab} \\ \sigma_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{ab}^2 + q_{ab}^2 - d^2 \\ p_{ac}^2 + q_{ac}^2 - d^2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Con base en lo anterior, se propone el siguiente Teorema.

Teorema 3.2 *Sea el control (1.2) aplicado al sistema (1.1) con las definiciones dadas en (1.4)-(1.6) y considerando la Suposición 1.1. Se asume que en el tiempo t_0 el agente R_a entra en la zona de sensado de R_b y de R_c , es decir, hay peligro de colisión. Si se escoge ϵ de la siguiente manera*

$$\epsilon > \frac{2D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)(2 + \sqrt{2})} + \frac{2DK}{d^2(2 + \sqrt{2})}, \quad (3.28)$$

donde $\nu = \max \left(\sqrt{r_{ij}^2 + s_{ij}^2} \right)$ y K una ganancia que depende de los valores de k_0 y k_1 , entonces, se puede garantizar que los agentes no colisionarán entre ellos, es decir, $\|\mathbf{z}_a(t) - \mathbf{z}_i(t)\| > d$ para todo $t > t_0$.

Demostración. La dinámica de (3.26) está dada por

$$\begin{bmatrix} r_{ab} \\ s_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ab} \\ \dot{q}_{ab} \end{bmatrix}, \quad (3.29a)$$

$$\begin{bmatrix} r_{ac} \\ s_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ac} \\ \dot{q}_{ac} \end{bmatrix}, \quad (3.29b)$$

donde $r_{ab} = \dot{x}_a - \dot{x}_b$, $s_{ab} = \dot{y}_a - \dot{y}_b$, $r_{ac} = \dot{x}_a - \dot{x}_c$, $s_{ac} = \dot{y}_a - \dot{y}_c$, diferenciando nuevamente (3.29) con respecto al tiempo, se obtiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{p}_{ab} \\ \ddot{q}_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_a} - u_{x_b} \\ u_{y_a} - u_{y_b} \end{bmatrix}, \quad (3.30a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_{ac} \\ \dot{s}_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{p}_{ac} \\ \ddot{q}_{ac} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_a} - u_{x_c} \\ u_{y_a} - u_{y_c} \end{bmatrix}, \quad (3.30b)$$

considerando las ecuaciones (3.25) y reemplazándolas en (3.30), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} &= -k_0 (\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b)) - k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b)) \\ &\quad + 2\epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} + \epsilon\delta_{ac} \begin{bmatrix} p_{ac} - q_{ac} \\ p_{ac} + q_{ac} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ac} \\ \dot{s}_{ac} \end{bmatrix} &= -k_0 (\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_c)) - k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_c)) \\ &\quad + \epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} + 2\epsilon\delta_{ac} \begin{bmatrix} p_{ac} - q_{ac} \\ p_{ac} + q_{ac} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31b)$$

Por otra parte, derivamos dos veces las superficies dadas en (3.27)

$$\dot{\sigma}_{ab} = 2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix}, \quad (3.32a)$$

$$\ddot{\sigma}_{ab} = 2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ab} \\ \dot{s}_{ab} \end{bmatrix} + 2 (r_{ab}^2 + s_{ab}^2), \quad (3.32b)$$

$$\dot{\sigma}_{ac} = 2 \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ac} \\ \dot{s}_{ac} \end{bmatrix}, \quad (3.33a)$$

$$\ddot{\sigma}_{ac} = 2 \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{ac} \\ \dot{s}_{ac} \end{bmatrix} + 2 (r_{ac}^2 + s_{ac}^2), \quad (3.33b)$$

reemplazando las ecuaciones de (3.31) en (3.32b) y 3.33b

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{ab} = & -2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} [k_0 (\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b))] - 2 \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} [k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b))] \\ & + 4\epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} + 2\epsilon\delta_{ac} \begin{bmatrix} p_{ac} - q_{ac} \\ p_{ac} + q_{ac} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix} + 2 (r_{ab}^2 + s_{ab}^2). \end{aligned} \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{ac} = & -2 \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} [k_0 (\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_c))] - 2 \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} [k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_c))] \\ & + 2\epsilon\delta_{ab} \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} + 4\epsilon\delta_{ac} \begin{bmatrix} p_{ac} - q_{ac} \\ p_{ac} + q_{ac} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix} + 2 (r_{ac}^2 + s_{ac}^2). \end{aligned} \quad (3.34b)$$

Calculando el operador norma de los errores de posición y velocidad de las ecuaciones 3.34 como en el sección anterior, así como también el operador norma de los vectores que se encuentran en los AVF, se obtienen las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \|\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b)\| &\leq \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_b)\|. \\ \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b)\| &\leq \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_b)\|. \\ \|\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_c)\| &\leq \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_c)\|. \\ \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_c)\| &\leq \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_c)\|. \end{aligned}$$

Debido a que $\phi(\tilde{z}_i) = \tanh(\tilde{z}_i)$ y $\phi(\dot{\tilde{z}}_i) = \tanh(\dot{\tilde{z}}_i)$, entonces, $\|\phi(\tilde{z}_i)\| \leq \sqrt{2}$ y $\|\phi(\dot{\tilde{z}}_i)\| \leq \sqrt{2}$, por lo tanto, se obtienen las siguientes cotas

$$\begin{aligned} \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_b)\| &\leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_b)\| &\geq -2\sqrt{2}, \\ \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_b)\| &\leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_b)\| &\geq -2\sqrt{2}, \\ \|\phi(\tilde{z}_a)\| + \|\phi(\tilde{z}_c)\| &\leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\tilde{z}_a) - \phi(\tilde{z}_c)\| &\geq -2\sqrt{2}, \\ \|\phi(\dot{\tilde{z}}_a)\| + \|\phi(\dot{\tilde{z}}_c)\| &\leq 2\sqrt{2}, & -\|\phi(\dot{\tilde{z}}_a) - \phi(\dot{\tilde{z}}_c)\| &\geq -2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\begin{bmatrix} p_{ab} & q_{ab} \end{bmatrix}\| &= d = \|\begin{bmatrix} p_{ac} & q_{ac} \end{bmatrix}\|, \\ \left\| \begin{bmatrix} p_{ab} - q_{ab} \\ p_{ab} + q_{ab} \end{bmatrix} \right\| &= d\sqrt{2} = \left\| \begin{bmatrix} p_{ac} - q_{ac} \\ p_{ac} + q_{ac} \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

Siendo el análisis para el caso donde la distancia entre los agentes es menor o igual a D , de tal manera que, $\delta_{ab} = 1$ y dado que los términos $(r_{ab}^2 + s_{ab}^2) \geq 0$ y $(r_{ac}^2 + s_{ac}^2) \geq 0$ de las ecuaciones 3.34 siempre son positivos, estos pueden ser omitidos, por lo tanto, podemos acotar las ecuaciones de (3.34) por abajo, de la siguiente manera

$$\ddot{\sigma}_{ab} \geq -4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2}), \quad (3.35a)$$

$$\ddot{\sigma}_{ac} \geq -4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2}), \quad (3.35b)$$

con $K = 2\sqrt{2}(k_0 + k_1)$. Integrando las ecuaciones de (3.35) con respecto al tiempo

$$\dot{\sigma}_{ab}(t) \geq \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0) + \dot{\sigma}_{ab}(t_0) > 0, \quad (3.36a)$$

$$\dot{\sigma}_{ac}(t) \geq \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0) + \dot{\sigma}_{ac}(t_0) > 0, \quad (3.36b)$$

dado que los agentes están en peligro de colisión, entonces $\dot{\sigma}_{ab}(t_0) = -|\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|$ y $\dot{\sigma}_{ac}(t_0) = -|\dot{\sigma}_{ac}(t_0)|$, por lo que, las ecuaciones en (3.36) pueden reescribirse como

$$\dot{\sigma}_{ab}(t) \geq \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0) - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)| > 0, \quad (3.37a)$$

$$\dot{\sigma}_{ac}(t) \geq \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0) - |\dot{\sigma}_{ac}(t_0)| > 0, \quad (3.37b)$$

integrando nuevamente a (3.37)

$$\sigma_{ab}(t) - \sigma_{ab}(t_0) \geq \frac{1}{2} \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|(t - t_0) > 0, \quad (3.38a)$$

$$\sigma_{ac}(t) - \sigma_{ac}(t_0) \geq \frac{1}{2} \left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ac}(t_0)|(t - t_0) > 0, \quad (3.38b)$$

debido a que se esta analizando en caso cuando los agentes entran a la zona de sensado D , entonces, $\sigma_{ab}(t_0) = \sigma_{ac}(t_0) = D^2 - d^2$, por lo tanto

$$\sigma_{ab}(t) \geq D^2 - d^2 + \left(-2DK + \epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|(t - t_0) > 0, \quad (3.39a)$$

$$\sigma_{ac}(t) \geq D^2 - d^2 + \left(-2DK + \epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right) (t - t_0)^2 - |\dot{\sigma}_{ac}(t_0)|(t - t_0) > 0, \quad (3.39b)$$

sabiendo que las ecuaciones en (3.39) aún dependen del tiempo, retomamos las ecuaciones de (3.37) para despejar $t - t_0$, con lo que igualamos a cero y despejamos

$$t - t_0 = \frac{|\dot{\sigma}_{ab}(t_0)|}{\left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right)}, \quad (3.40a)$$

$$t - t_0 = \frac{|\dot{\sigma}_{ac}(t_0)|}{\left(-4DK + 2\epsilon d^2 (2 + \sqrt{2})\right)}, \quad (3.40b)$$

reemplazando las ecuaciones de (3.40) en las de (3.39)

$$\sigma_{ab}(t) \geq D^2 - d^2 - \frac{\dot{\sigma}_{ab}^2(t_0)}{2(-2DK + \epsilon d^2(2 + \sqrt{2}))} > 0. \quad (3.41a)$$

$$\sigma_{ac}(t) \geq D^2 - d^2 - \frac{\dot{\sigma}_{ac}^2(t_0)}{2(-2DK + \epsilon d^2(2 + \sqrt{2}))} > 0. \quad (3.41b)$$

Por otra parte (3.32a) y (3.33a) tienen la siguiente cota

$$\dot{\sigma}_{ab} = 2D\nu, \quad (3.42a)$$

$$\dot{\sigma}_{ac} = 2D\nu, \quad (3.42b)$$

con $\nu = \max(\sqrt{r_{ab}^2 + s_{ab}^2})$, $\max(\sqrt{r_{ac}^2 + s_{ac}^2})$, entonces $\dot{\sigma}_{ab}^2$ esta acotada por $\dot{\sigma}_{ab}^2 = 4D^2\nu^2$. A partir de (3.41) y considerando las cotas en (3.42) podemos despejar para ϵ con lo que obtenemos

$$\epsilon_{ab} > \frac{2DK}{d^2(2 + \sqrt{2})} + \frac{2D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)(2 + \sqrt{2})}. \quad (3.43a)$$

$$\epsilon_{ac} > \frac{2DK}{d^2(2 + \sqrt{2})} + \frac{2D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)(2 + \sqrt{2})}. \quad (3.43b)$$

Con estos valores de ϵ , podemos garantizar que los agentes no colisionaran entre ellos. \blacksquare

A diferencia de la sección anterior, donde aparecía un solo ϵ , en esta sección podemos observar que aparece un parámetro ϵ por cada agente que se encuentre en peligro de colisión, por lo cual elegimos a ϵ^* de tal manera que

$$\epsilon^* = \max(\epsilon_{ab}, \epsilon_{ac}), \quad (3.44)$$

sea el mayor ϵ que nos asegura la evasión de colisiones entre los agentes.

3.4. Generalización de la estrategia de control para un grupo de n agentes

A partir de este punto podríamos agregar más agentes para realizar el análisis el problema de colisión, el caso más común podría ser cuando un agente R_a se encuentra rodeado por R_i agentes con $i = 1, \dots, n$.

Ya se realizo el análisis del caso más sencillo que puede presentarse donde se encuentran involucrados unicamente dos agentes, al igual que un caso un poco más complejo al encontrarse tres agentes, de los cuales dos de ellos se encuentran en riesgo de colisión con un tercero, con base en esto, podemos enunciar un procedimiento por inducción para solucionar la evasión de colisiones a un problema general donde se vean involucrados tantos agentes como sea posible tener dentro de un área de trabajo.

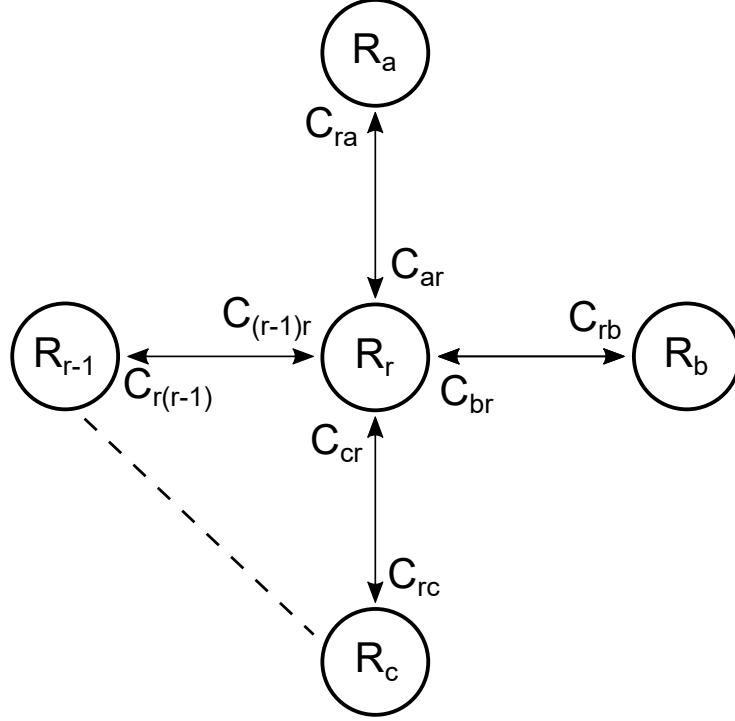


Figura 3.4: Grafo no dirigido para un grupo de n agentes.

Teorema 3.3 Considerando el sistema (1.1) y la ley de control (1.2) con las definiciones dadas en (1.4)-(1.6) y teniendo en cuenta la suposición 1.1

Se asume que en el tiempo t_0 el agente R_a entra en la zona de sensado de R_i con $i = 1, \dots, n$, es decir, hay peligro de colisión entre $n - 1$ agentes, por lo tanto, si se escoge a ϵ de la siguiente manera

$$\epsilon > \frac{2D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)(2 + (n - 1)\sqrt{2})} + \frac{2DK}{d^2(2 + (n - 1)\sqrt{2})}, \quad (3.45)$$

donde $\nu = \max(\sqrt{r_{ij}^2 + s_{ij}^2})$, K una ganancia que depende de los valores de k_0 y k_1 y n es el número de agentes que se encuentran en peligro de colisión con R_a , entonces, se puede garantizar que los agentes no colisionarán entre ellos, es decir, $\|\mathbf{z}_a(t) - \mathbf{z}_i(t)\| > d$ para todo $t > t_0$.

Demostración. Para simplificar, denotemos el agente R_r en el centro de la configuración como se muestra en la Figura 3.4, suponiendo que hay $n - 1$ robots en riesgo de colisión alrededor de R_a . Ahora analizamos el caso de $n - 1$ posibles colisiones entre los agentes, con lo que podemos definir las siguientes superficies

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{a1} \\ \sigma_{a2} \\ \vdots \\ \sigma_{an-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{a1}^2 + q_{a1}^2 - d^2 \\ p_{a2}^2 + q_{a2}^2 - d^2 \\ \vdots \\ p_{an-1}^2 + q_{an-1}^2 - d^2 \end{bmatrix} > 0, \quad (3.46)$$

de acuerdo con la figura 3.4, $\delta_{a1} = \delta_{a2} = \delta_{an-1} = 1$, entonces, la dinámica de las variables de posición relativa es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_{ri} \\ \dot{q}_{ri} \end{bmatrix} &= -k_0 (\phi(\tilde{z}_r) - \phi(\tilde{z}_i)) - k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_r) - \phi(\dot{\tilde{z}}_i)) \\ &+ 2\epsilon \begin{bmatrix} p_{ri} - q_{ri} \\ p_{ri} + q_{ri} \end{bmatrix} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon \begin{bmatrix} p_{rj} - q_{rj} \\ p_{rj} + q_{rj} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

de igual manera, la dinámica de σ dada en (3.46)

$$\dot{\sigma}_{rn-1} = 2 \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{rn-1} \\ s_{rn-1} \end{bmatrix}, \quad (3.48a)$$

$$\ddot{\sigma}_{rn-1} = 2 \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_{rn-1} \\ \dot{s}_{rn-1} \end{bmatrix} + 2(r_{rn-1}^2 + s_{rn-1}^2), \quad (3.48b)$$

evaluando (3.47) en (3.48b)

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{rn-1} &= -2 \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} [k_0 (\phi(\tilde{z}_r) - \phi(\tilde{z}_i))] - 2 \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} [k_1 (\phi(\dot{\tilde{z}}_r) - \phi(\dot{\tilde{z}}_i))] \\ &+ 4\epsilon \begin{bmatrix} p_{rn-1} - q_{rn-1} \\ p_{rn-1} + q_{rn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \epsilon \begin{bmatrix} p_{rj} - q_{rj} \\ p_{rj} + q_{rj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} \\ &+ 2(r_{rn-1}^2 + s_{rn-1}^2). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Calculando el operador que corresponde a las distancias de seguridad d

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} \right\| &= d_{rn-1} = \left\| \begin{bmatrix} p_{rn-1} & q_{rn-1} \end{bmatrix} \right\|. \\ \left\| \begin{bmatrix} p_{rn-1} - q_{rn-1} \\ p_{rn-1} + q_{rn-1} \end{bmatrix} \right\| &= d\sqrt{2} = \left\| \begin{bmatrix} p_{rn-1} - q_{rn-1} \\ p_{rn-1} + q_{rn-1} \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

De igual manera que en los casos anteriores, se analiza el caso donde la distancia entre los agentes es menor o igual a D de tal manera que $\delta_{rn-1} = 1$ y dado que el término $(r_{rn-1}^2 + s_{rn-1}^2)$ siempre es positivo, puede ser omitido, por lo tanto, podemos acotar (3.49) por abajo, de la siguiente manera

$$\ddot{\sigma}_{rn-1} \geq -4DK + 2\epsilon d^2 \left(2 + (n-1)\sqrt{2} \right). \quad (3.50)$$

Integrando dos veces, partiendo que se analiza cuando los agentes entran a la zona de sentido D y considerando que (3.48a) tiene la siguiente cota

$$\dot{\sigma}_{rn-1} = 2D_{rn-1}\nu_{rn-1}, \quad (3.51)$$

donde $\nu_{rn-1} = \max(\sqrt{r_{rn-1}^2 + s_{rn-1}^2})$ es la velocidad máxima que pueden alcanzar los agentes, podemos despejar para ϵ de la siguiente manera

$$\epsilon^* > \frac{2D^2\nu^2}{d^2(D^2 - d^2)(2 + (n-1)\sqrt{2})} + \frac{2DK}{d^2(2 + (n-1)\sqrt{2})}, \quad (3.52)$$

donde ϵ^* es el máximo valor obtenido, que nos asegura la evasión de colisiones. ■

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

En este Capítulo se presentan los resultados al implementar las leyes de control de formación con evasión de colisiones obtenidas en los capítulos anteriores mediante simulaciones numéricas. La primera parte se enfoca en mostrar que la ley de control propuesta en (1.2) logra el consenso a la formación deseada evadiendo las colisiones entre agentes, para lo cual se hacen simulaciones numéricas para los casos en donde se encuentran dos y tres agentes en el sistema. Posteriormente, se realizan simulaciones numéricas en las cuales se aplica la ley de control propuesta al modelo dinámico del robot aéreo (UAV), considerando de igual manera la colisión de dos y tres agentes, logrando la formación y evasión de colisiones; las primeras dos secciones de simulaciones numéricas se realizaron en Matlab[®] / Simulink[®].

4.1. Simulaciones numéricas para dos agentes

Las simulaciones numéricas se realizaron en MATLAB[®] / Simulink[®] con un tiempo de muestreo de 0.01[s]. Las condiciones iniciales de los agentes son $z_1(0) = [3 \ 0]^T$, $z_2(0) = [-3 \ 0]^T$, la distancia de sensado se ajustó a $D = 2$ [m] mientras que la distancia de seguridad se ajustó a $d = 1.5$ [m], $k_0 = 2$, $k_1 = 3$ y $\nu = 0.8$. Con estos valores, $\epsilon > 6.9356$, por lo tanto, se escoge un valor de $\epsilon = 7$. Por otra parte, los vectores de formación están dados por $c_{21} = [-3 \ 0]^T$ y $c_{12} = -c_{21}$. Cabe destacar que con esta selección de los vectores de formación, la gráfica de formación corresponde a una gráfica no dirigida.

La Figura 4.1 ilustra el comportamiento de los agentes en el plano $p_{ab} - q_{ab}$ donde se visualiza como la distancia entre agentes empieza a disminuir. Cuando llegan a la zona de sensado $p_{ab}^2 + q_{ab}^2 = D^2$ los AVF se prenden y empieza la maniobra de evasión. Además, se aprecia que la distancia entre los agentes siempre es mayor a la distancia de seguridad. Finalmente, cuando los agentes se encuentran cerca de la posición deseada, la parte atractiva es mayor lo cual hace que converjan a la posición deseada.

La Figura 4.2 muestra la trayectoria en el plano de los dos agentes. Es evidente que cuando se están acercando, al llegar a la zona de sensado, los AVF se activan y los agentes se mueven en una trayectoria circular en sentido antihorario. Una vez que salen de la zona de sensado, convergen a la formación deseada.

Por otra parte, en la Figura 4.3 se ilustra el comportamiento de la superficie σ_{ab} y su derivada $\dot{\sigma}_{ab}$. Observe que cuando la distancia entre los agentes es mayor que la distancia de sensado, σ_{ab}

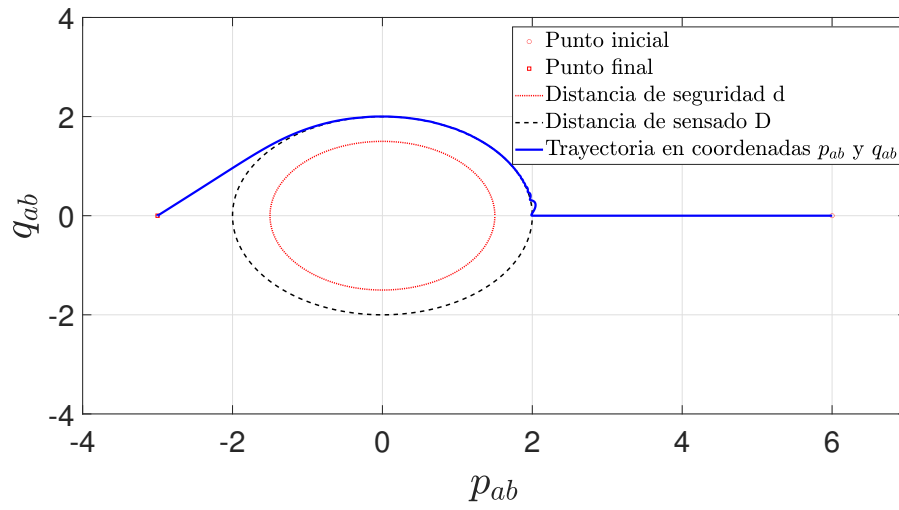


Figura 4.1: Trayectoria de los agentes en el plano $p_{ab} - q_{ab}$.

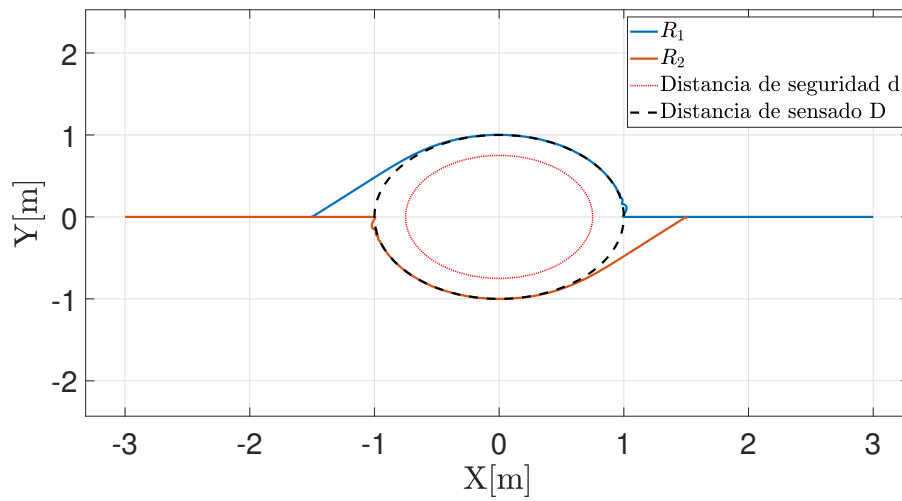


Figura 4.2: Trayectorias de los agentes en el plano XY .

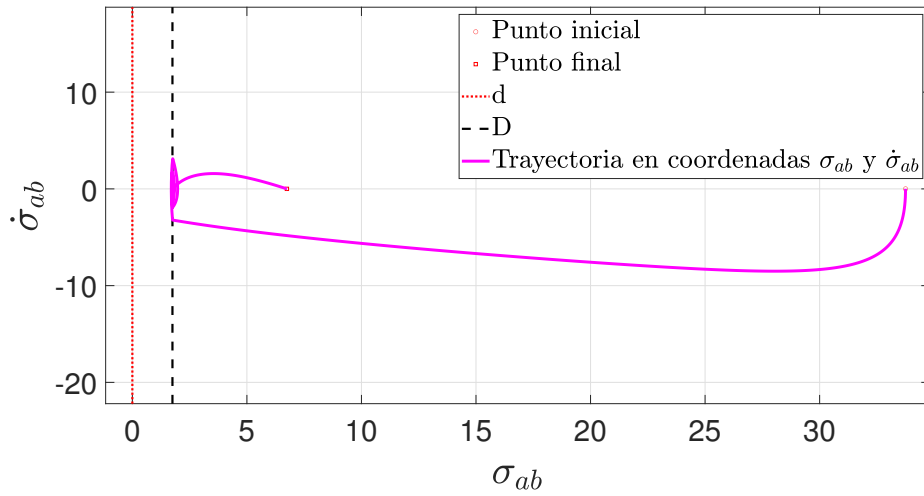


Figura 4.3: Comportamiento de los agentes en el plano $\sigma_{ab} - \dot{\sigma}_{ab}$.

es positiva y va disminuyendo su valor conforme la distancia entre los agentes va disminuyendo, mientras que $\dot{\sigma}_{ab}$ inicia con un valor de cero y tiene un valor negativo conforme los agentes se van acercando. Cuando la distancia entre los agentes es menor o igual a D , debido al valor de ϵ , $\sigma_{ab} > 0$ y $\dot{\sigma}_{ab}$ pasa de un valor negativo a un valor positivo. Dicho comportamiento se repite varias veces, lo que indica que la distancia entre los agentes se mantiene oscilando alrededor de la distancia de sensado.

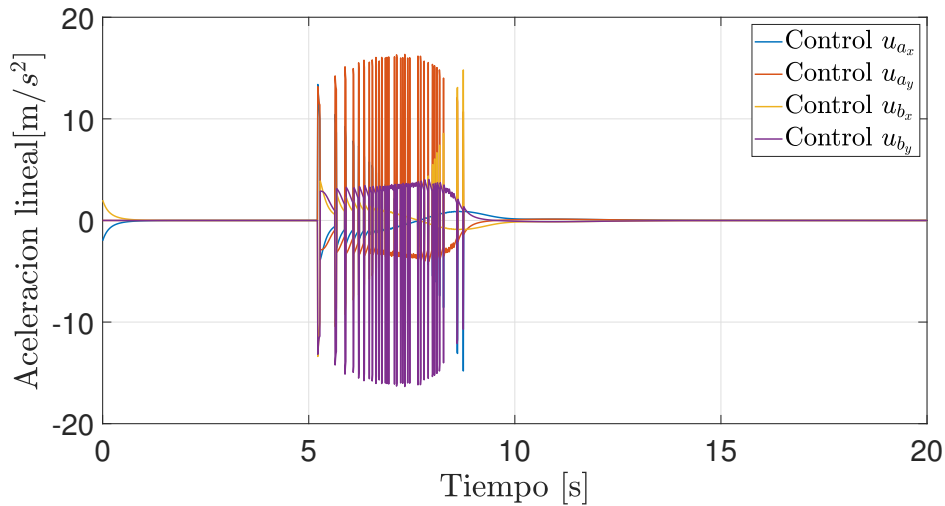


Figura 4.4: Entradas de control.

La Figura 4.4 ilustra las entradas de control necesarias para que los agentes realicen su movimiento. Es evidente que cuando la distancia entre los agentes es menor o igual a la distancia de sensado, la ley de control empieza a tener oscilaciones de mayor amplitud, y, una vez que los

agentes están cerca de su posición deseada, la entrada de control empieza a converger a cero.

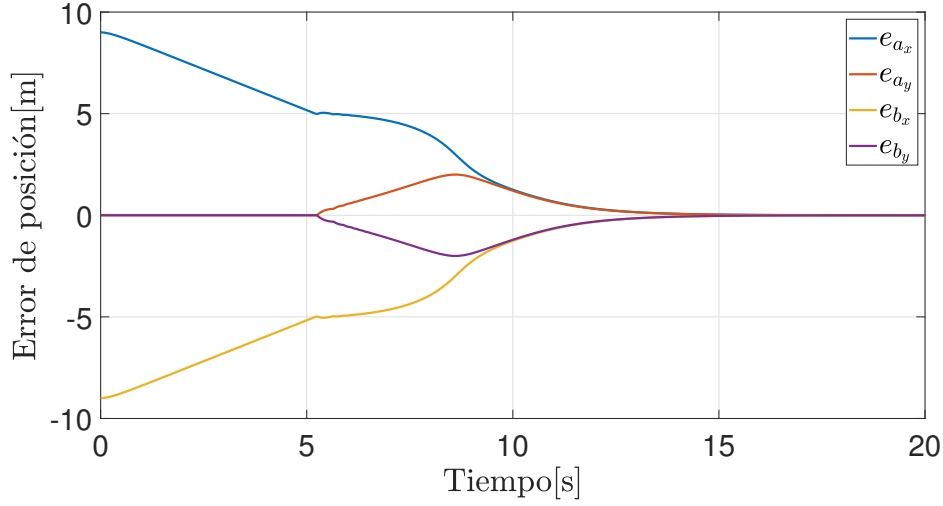


Figura 4.5: Error de posición de los agentes.

A partir de la Figura 4.5, se ilustra cómo el error de posición de los agentes R_a y R_b convergen a cero cuando $t \rightarrow \infty$, permitiendo a los agentes alcanzar la formación deseada.

Finalmente, en la Figura 4.6 se presentan los errores de velocidad, los cuales también convergen a cero.

4.2. Simulaciones numéricas para tres agentes

Las condiciones iniciales de los agentes son $z_1(0) = [-3 \ 0]^\top$, $z_2(0) = [3 \ 0]^\top$, $z_3(0) = [0 \ 6]^\top$, la distancia de sensado se ajustó a $D = 2[\text{m}]$ mientras que la distancia de seguridad se ajustó a $d = 1.5[\text{m}]$, $k_0 = 2$, $k_1 = 3$ y $\nu = 0.8$. Con estos valores, $\epsilon = 4.0628$, por lo tanto, se escoge un valor de $\epsilon \geq 4.0628$. Por otra parte, los vectores de formación están dados por $c_{21} = [6 \ 0]^\top$, $c_{32} = [-3 \ 6]^\top$, $c_{13} = [-3 \ -6]^\top$, debido a que la grafica de formación es no dirigida, entonces, $c_{12} = -c_{21}$, $c_{23} = -c_{32}$, $c_{31} = -c_{13}$.

La Figura 4.7 ilustra el comportamiento de los agentes en el plano $p-q$ del agente R_a con respecto a R_b y de R_a con R_c donde se visualiza como la distancia entre agentes empieza a disminuir. Cuando los agentes llegan a la zona de sensado $p_{ab}^2 + q_{ab}^2 = D^2$ y $p_{ac}^2 + q_{ac}^2 = D^2$ los AVF se activan comenzando la maniobra de evasión. Además, se aprecia que la distancia entre los agentes siempre es mayor a la distancia de seguridad, ya que los agentes no sobrepasan por mucho la distancia de sensado de D . También podemos observar que los agentes R_a y R_c a pesar de estar en riesgo de colisión, es menor al riesgo de colisión que existe entre el agente R_a con R_b , haciendo evidente el momento en que los AVF se encuentran activos así como el momento en que este se desactiva. Finalmente, cuando los agentes se encuentran cerca de la posición deseada, la parte atractiva es mayor lo cual hace que converjan a la posición deseada.

La Figura 4.8 muestra la trayectoria en el plano de los tres agentes. Como se puede observar, cuando alguno de los agentes se encuentra en riesgo de colisión y entra en la zona de sensado, los

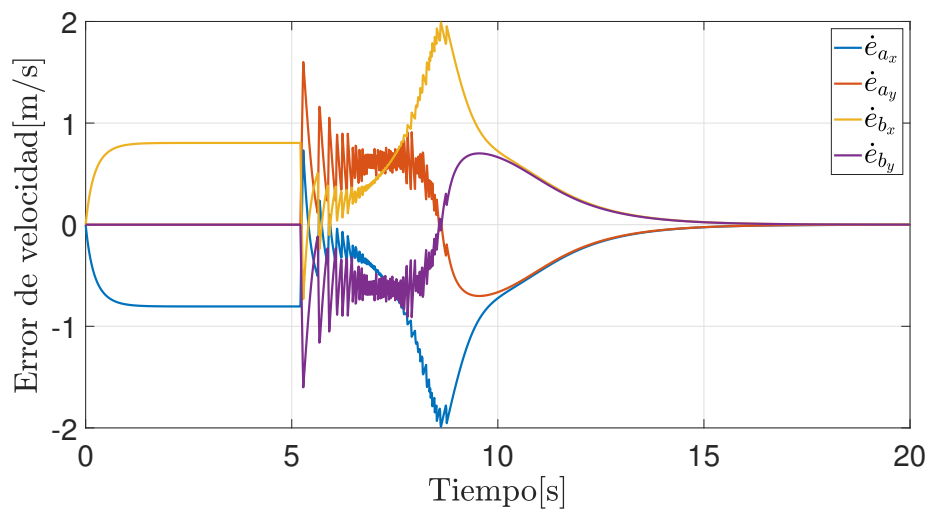


Figura 4.6: Error de velocidad de los agentes.

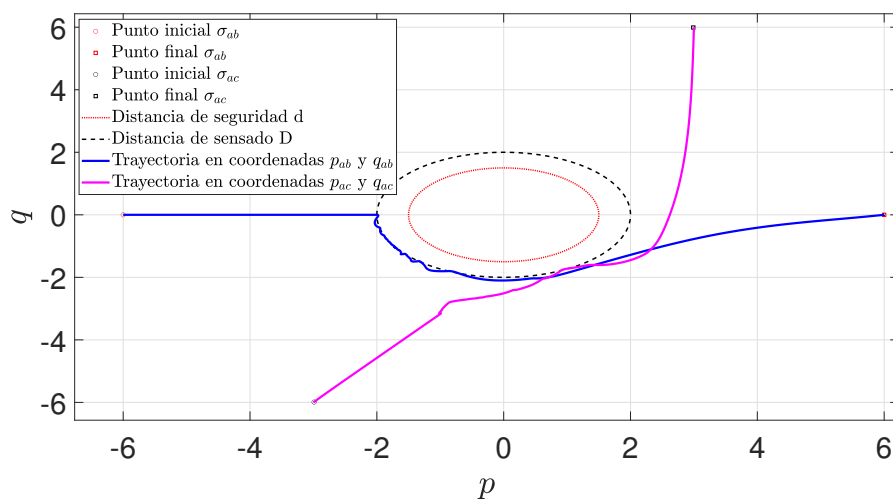


Figura 4.7: Trayectoria de los agentes R_a , R_b y R_c en el plano $p - q$.

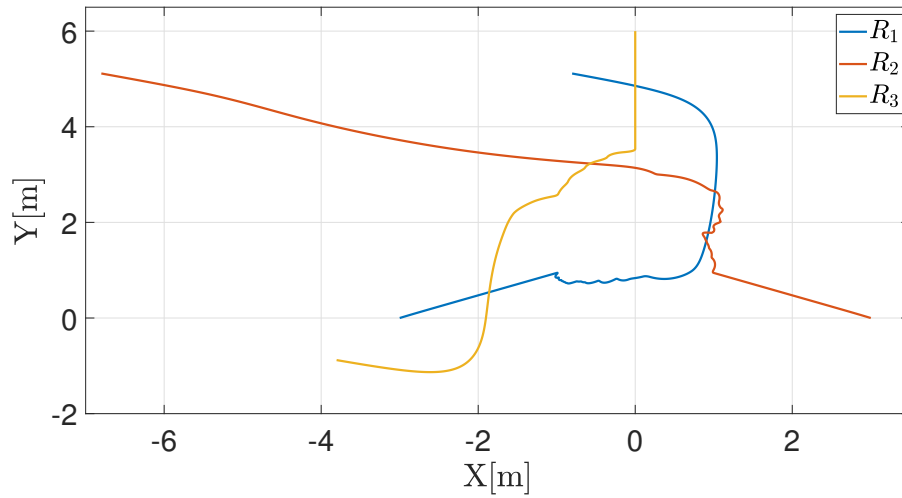


Figura 4.8: Trayectorias de los agentes R_a , R_b y R_c en el plano XY .

AVF se activan y los agentes se mueven en una trayectoria circular en sentido antihorario para evadir las colisiones entre los agentes, por lo tanto, podemos ver que la trayectoria de los agentes siempre se encuentran separadas por nuestra distancia de sensado D . Una vez que salen de la zona de sensado, convergen a la formación deseada.

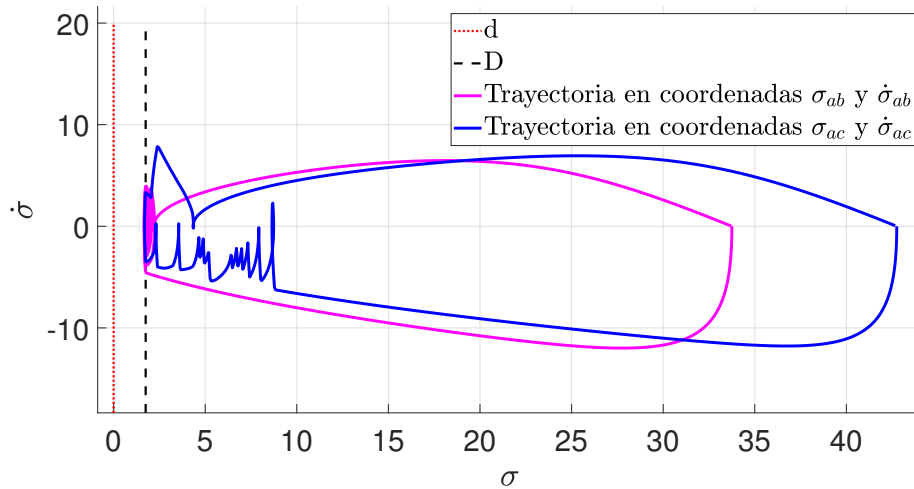


Figura 4.9: Comportamiento de los agentes en el plano $\sigma - \dot{\sigma}$.

Por otra parte, en la Figura 4.9 se ilustra el comportamiento de la superficies σ_{ab} , σ_{ac} y sus derivadas $\dot{\sigma}_{ab}$, $\dot{\sigma}_{ac}$. Observe que cuando la distancia entre los agentes es mayor que la distancia de sensado D , σ_{ab} y σ_{ac} son positivas y van disminuyendo su valor a su vez que la distancia entre los agentes va disminuyendo, mientras que $\dot{\sigma}_{ab}$ y $\dot{\sigma}_{ac}$ inicia con un valor de cero, este tiende a un valor negativo conforme los agentes se van acercando a la distancia de sensado. Cuando la distancia

entre los agentes es menor o igual a D , debido al valor de ϵ , $\sigma_{ab}, \sigma_{ac} > 0$ y $\dot{\sigma}_{ab}$ pasa de un valor negativo a un valor positivo. Dicho comportamiento se repite varias veces, lo que indica que la distancia entre los agentes se mantiene oscilando alrededor de la distancia de sensado durante un instante de tiempo t hasta que los agentes se encuentran fuera de riesgo de colisión.

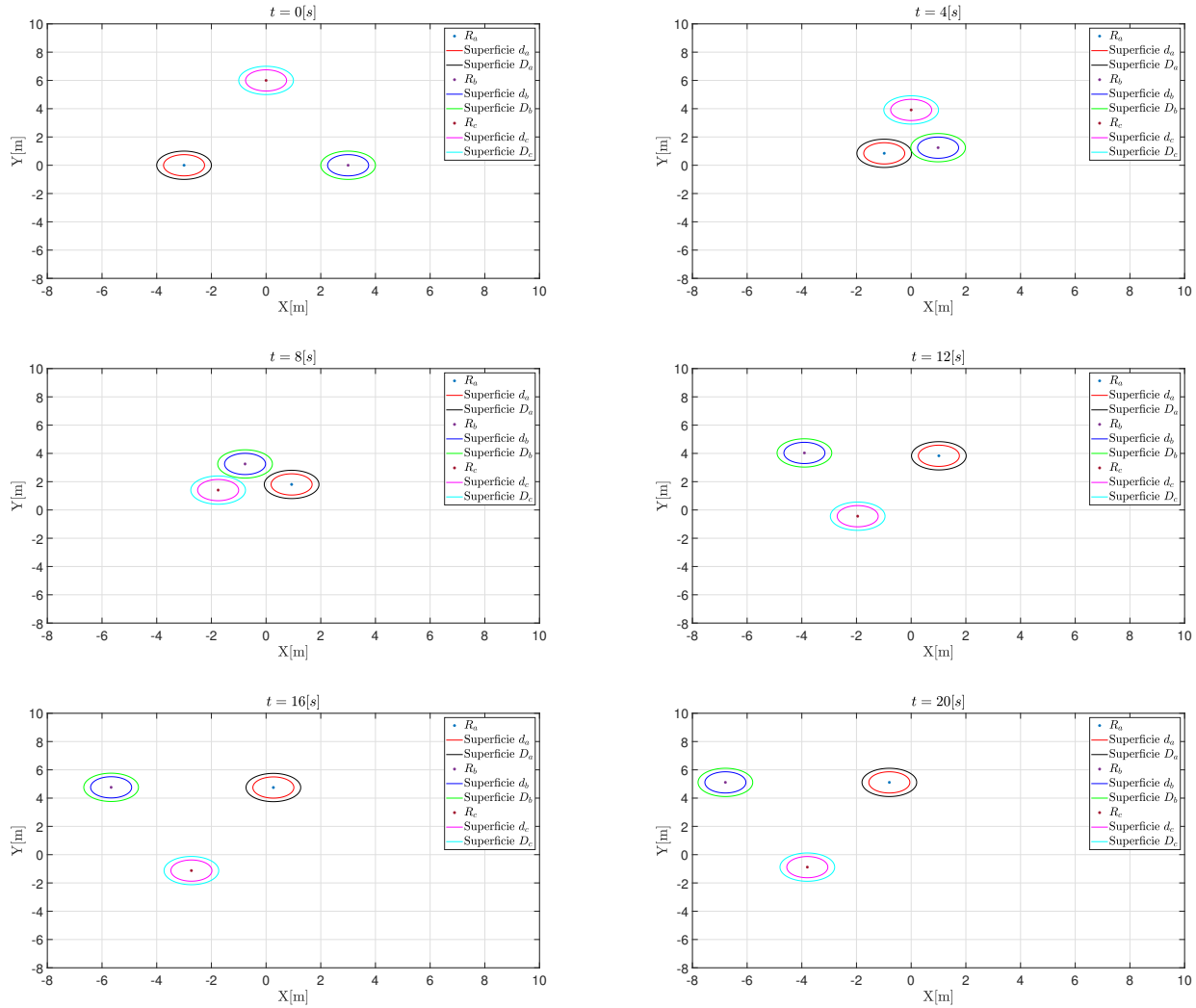


Figura 4.10: Posición de los agentes en diferentes tiempos.

La Figura 4.10 muestra las posiciones de los agentes en diferentes instantes de tiempo, como podemos observar los agentes comienzan a una distancia mayor que la zona de sensado D y para la formación deseada los agentes deben intercambiar su posición, cada agente cuenta con sus respectivas superficies de seguridad y de sensado, cuando los agentes comienzan a acercarse los AVF se activan comenzando las maniobras para evadir las colisiones entre los agentes que se encuentren en peligro. También podemos observar que los agentes se encuentran fuera de la zona de seguridad d en todo momento, una vez que los agentes se encuentran fuera de riesgo, el campo vectorial se desactiva, por lo que los agentes siguen su trayectoria hasta lograr la posición deseada.

La Figura 4.11 ilustra las entradas de control necesarias para que los agentes realicen su movimiento. Es evidente que cuando la distancia entre los agentes es menor o igual a la distancia de

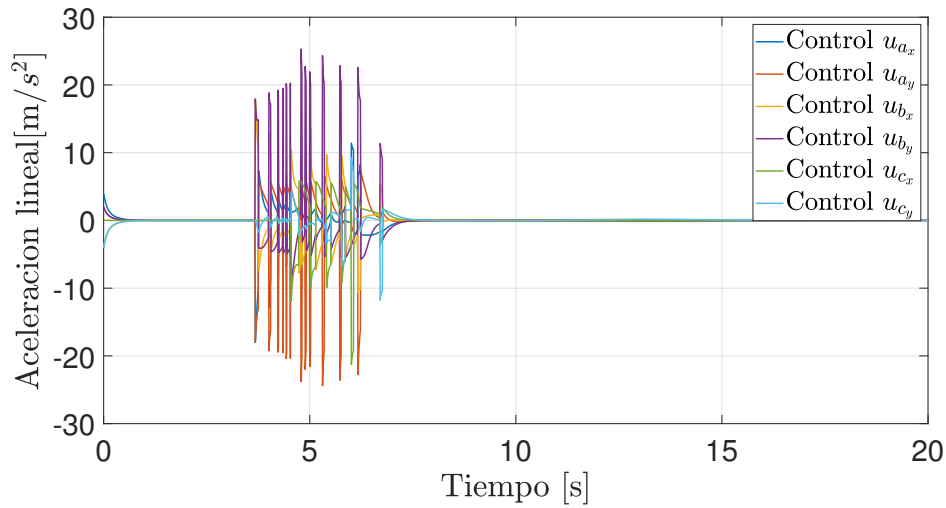


Figura 4.11: Entradas de control.

sensado, la ley de control empieza a tener oscilaciones durante el momento en que los agentes se encuentren en ruta de colisión y una vez que los agentes están cerca de su posición deseada y fuera de peligro, las entradas de control empiezan a converger a cero.

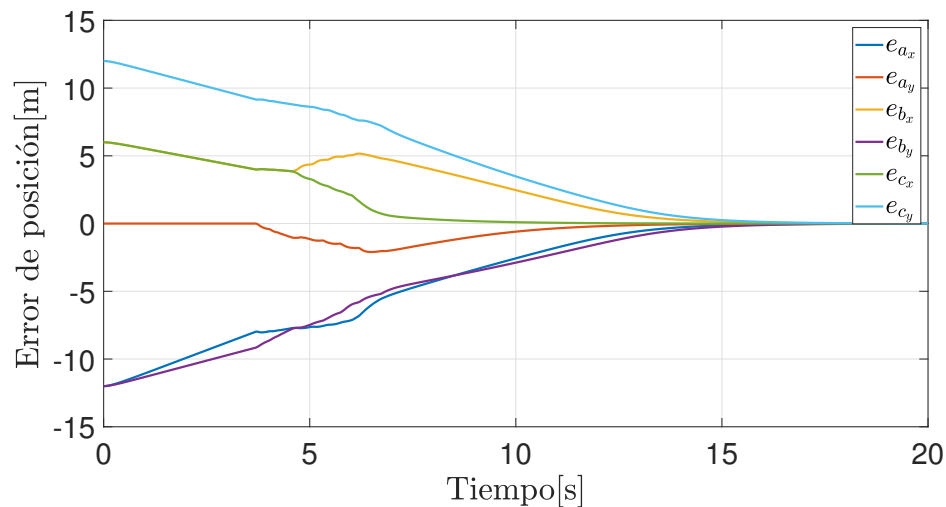


Figura 4.12: Error de posición de los agentes.

A partir de la Figura 4.12, se ilustra cómo el error de posición de los agentes R_a , R_b y R_c convergen a cero cuando $t \rightarrow \infty$, permitiendo a los agentes alcanzar la formación deseada al mismo tiempo que evaden la colisión.

Finalmente, en la Figura 4.13 se presentan los errores de velocidad, los cuales también convergen a cero.

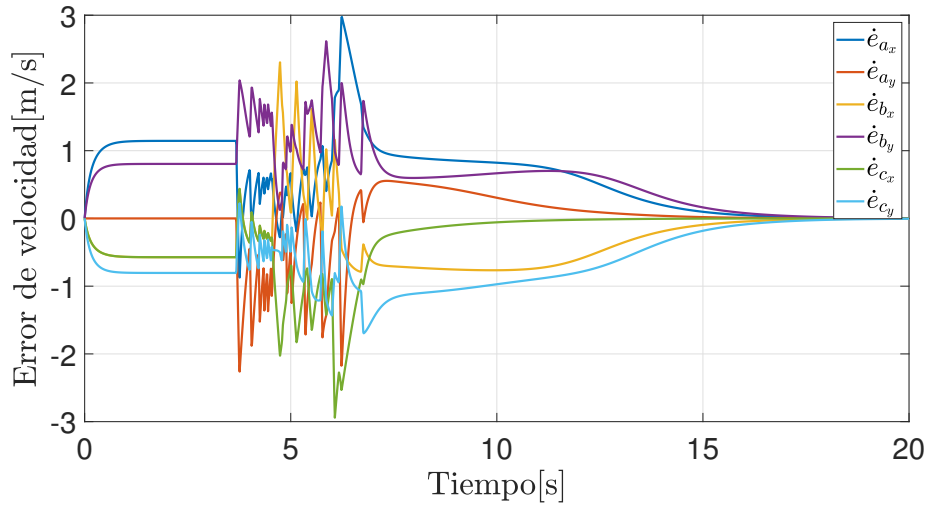


Figura 4.13: Error de velocidad de los agentes.

4.3. Simulaciones numéricas para dos robots aéreos

Las condiciones iniciales de los agentes son $z_1(0) = [3 \ 0 \ 0]^\top$, $z_2(0) = [-3 \ 0 \ 0]^\top$, la distancia de sensado se ajustó a $D = 2[\text{m}]$ mientras que la distancia de seguridad se ajustó a $d = 1.5[\text{m}]$, $k_0 = 2$, $k_1 = 3$ y $\nu = 0.8$ y considerando que los robots aéreos mantendrán una altura constante.

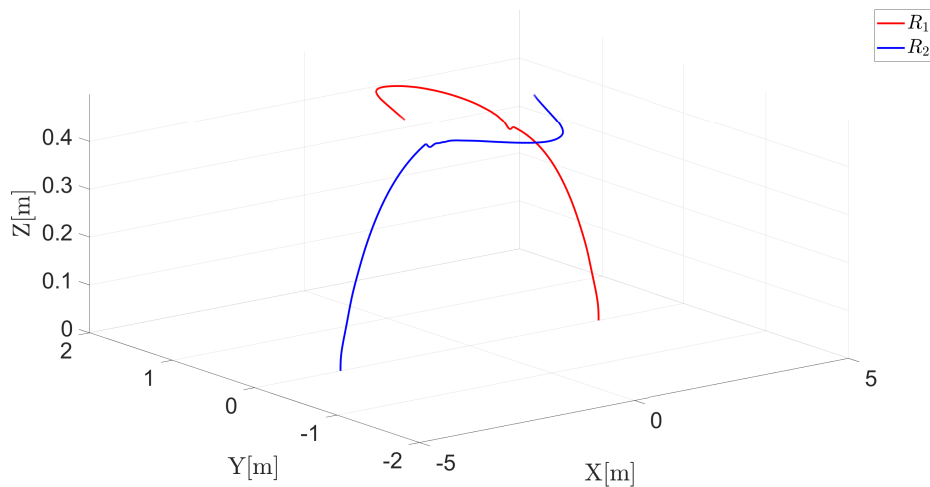


Figura 4.14: Trayectorias de dos UAV's.

En la Figura 4.14 podemos observar las trayectorias que realizan los UAV's, desde el momento en que comienzan a elevarse los agentes buscan consenso para llegar a la posición deseada, en el momento en que los agentes se detectan, el AVF se activa, comenzando las maniobras de evasión

entre los agentes. Es evidente que los agentes se encuentran en todo momento a una distancia mayor a la distancia de seguridad d .

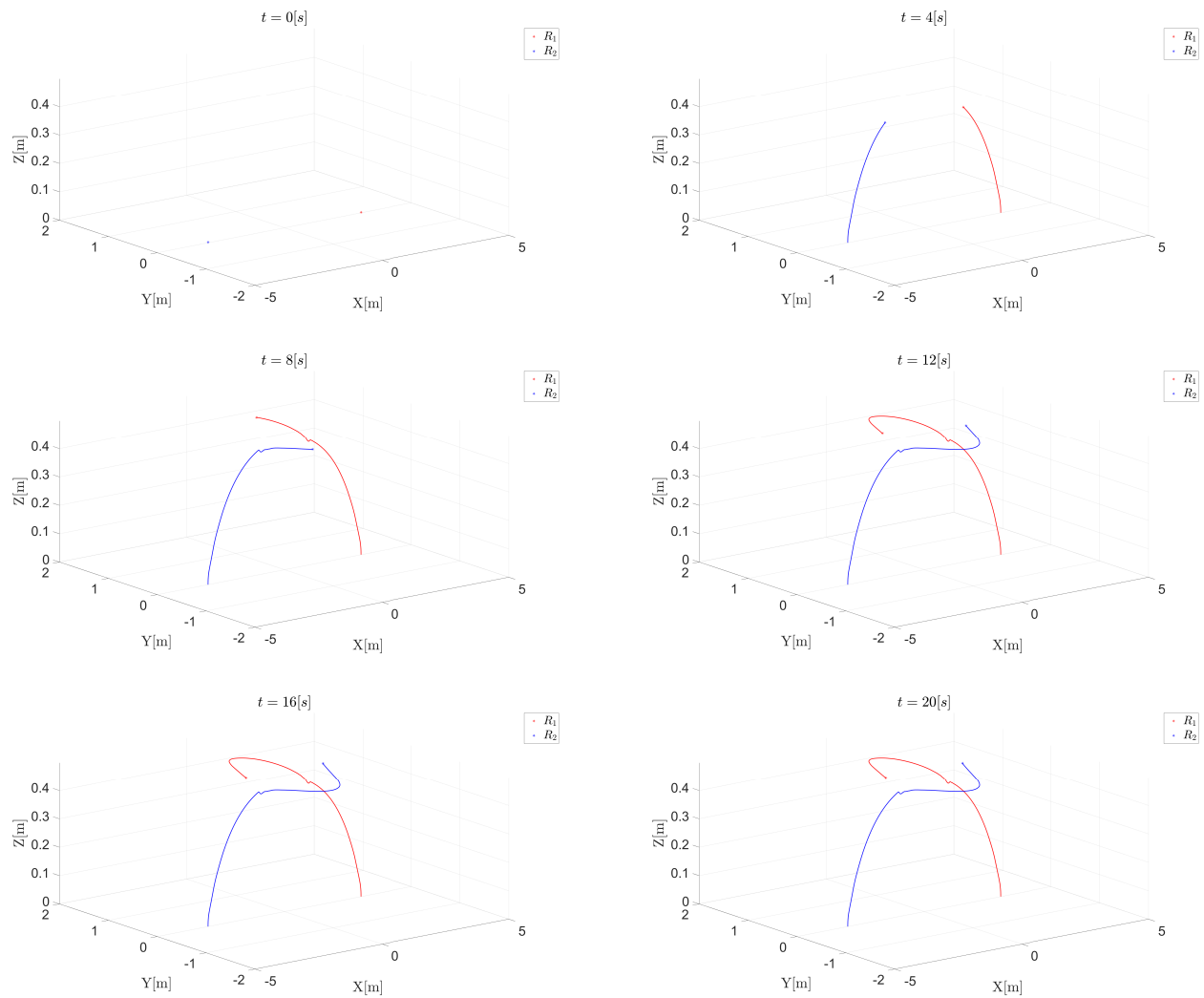


Figura 4.15: Posición de dos UAV's en diferentes tiempos.

La Figura 4.15 nos ilustra las trayectorias de los agentes en distintos tiempos, desde un comienzo los UAV's se encuentran fuera de la zona de seguridad D , podemos observar que desde que los UAV's despegan, comienzan su trayecto a las posiciones deseadas, sin embargo, cuando los agentes de detectan, comienza la maniobra de evasión, los AVF se encuentran activos mientras que los agentes se encuentren en riesgo de colisión, una vez que los agentes se alejan de la zona de sentido D el AVF se desactiva permitiendo a los agentes pueden continuar su trayecto hasta las posiciones deseadas.

En la Figura 4.16 se ilustran las entradas de control de los agentes realicen su movimiento de evasión y así evitar la colisión. Se puede notar el momento en que los AVF se activan, debido a que cuando la distancia de sensado de los agentes es menor o igual, las entradas de control comienzan a tener oscilaciones, esto se debe a la respuesta del sistema para evadir las colisiones.

En la Figura 4.17 los errores de posición llegan a cero, debido a que los agentes logran la posición

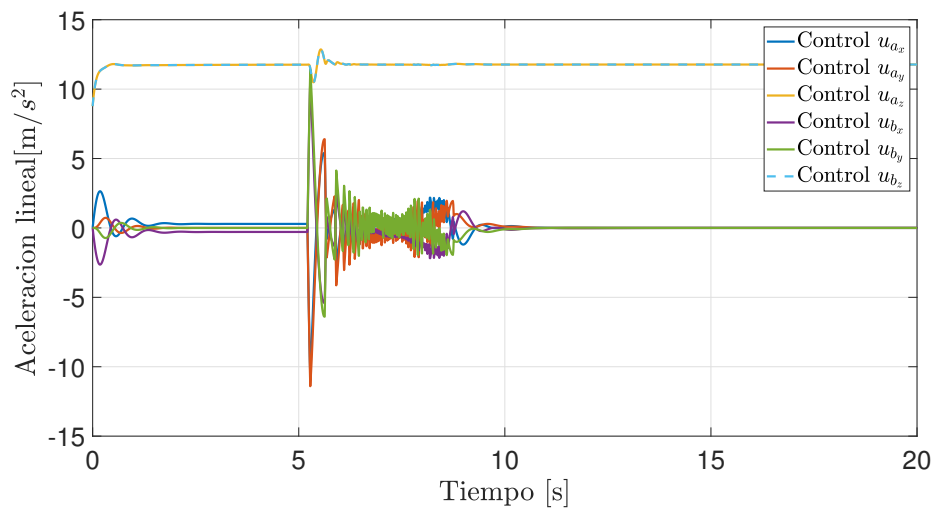


Figura 4.16: Entradas de control de ambos UAV's.

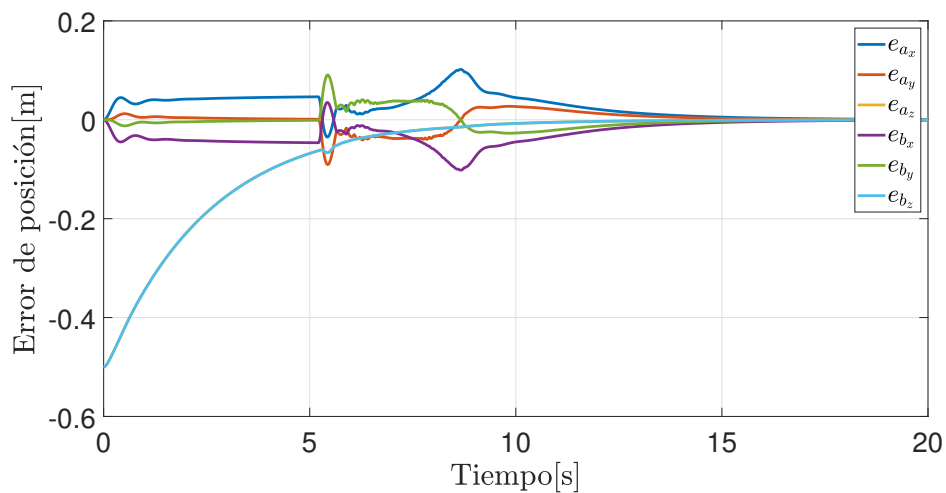


Figura 4.17: Error de posición de ambos UAV's.

deseada, cuando los agentes comienzan su trayectoria, la distancia que existe entre ellos comienza a llegar a disminuir, al ser una trayectoria de colisión el AVF se activa, por lo que los agentes se ven forzados a cambiar su trayectoria por un breve momento, hasta que estos se encuentran fuera de peligro, para así llegar finalmente a su posición deseada.

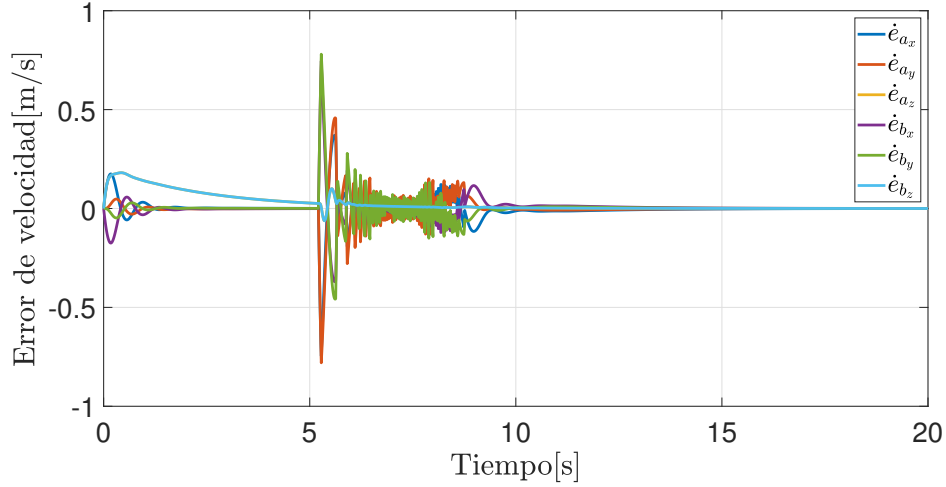


Figura 4.18: Error de velocidad de ambos UAV's.

Finalmente la Figura 4.18 nos muestra los errores de velocidad de los UAV's y como estos llegan a cero cuando los agentes logran la formación.

4.4. Simulaciones numéricas para tres robots aéreos

Las condiciones iniciales de los agentes para este caso son las siguientes $z_1(0) = [3 \ 0 \ 0]^T$, $z_2(0) = [-3 \ 0 \ 0]^T$, $z_3(0) = [0 \ 6 \ 0]^T$, la distancia de sensado se ajustó a $D = 2[\text{m}]$ mientras que la distancia de seguridad se ajustó a $d = 1.5[\text{m}]$, $k_0 = 2$, $k_1 = 3$ y $\nu = 0.8$ y considerando que los robots aéreos mantendrán una altura constante.

La Figura 4.19 nos muestra las trayectorias que los UAV's desarrollan desde el momento en que se elevan, es evidente ver que mientras los UAV's no se encuentran en riesgo de colisión, no modifican su dirección, sin embargo, en el momento en que estos se acercan y son detectados por las zonas de sensado D de otro agente, estos comienzan la maniobra de evasión, cuando el tercer UAV entra en la zona de sensado de los otros dos UAV's, estos vuelven a modificar sus trayectorias para evitar la colisión entre el grupo de UAV's que se encuentren en las zonas de sensado D de cualquier UAV que se encuentre cerca de él.

En la Figura 4.20 observamos las posiciones de los UAV's en distintos tiempos, podemos observar como es que a medida que los agentes se acercan, las trayectorias comienzan a cambiar, corrigiendo el rumbo para evadir las colisiones y permanecer siempre a una distancia mayor a la zona de seguridad d .

La Figura 4.21 son las entradas de control que los UAV's implementan para llevar a cabo las maniobras de evasión de colisiones, las oscilaciones que se observan se deben a que las zonas de

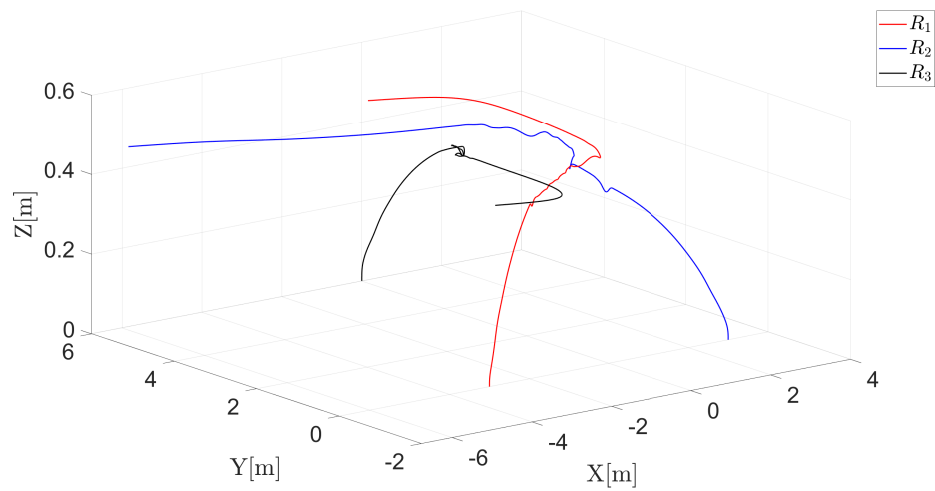


Figura 4.19: Trayectorias de tres robots aéreos.

sensado detectaron a otro agente en riesgo de colisión, activando el AVF, una vez que los UAV's salen del riesgo de colisión, las entradas de control se estabilizan.

La Figura 4.22 podemos observar los errores de posición de los UAV's.

Y finalmente la Figura 4.23 nos muestra los errores de velocidad de los UAV's.

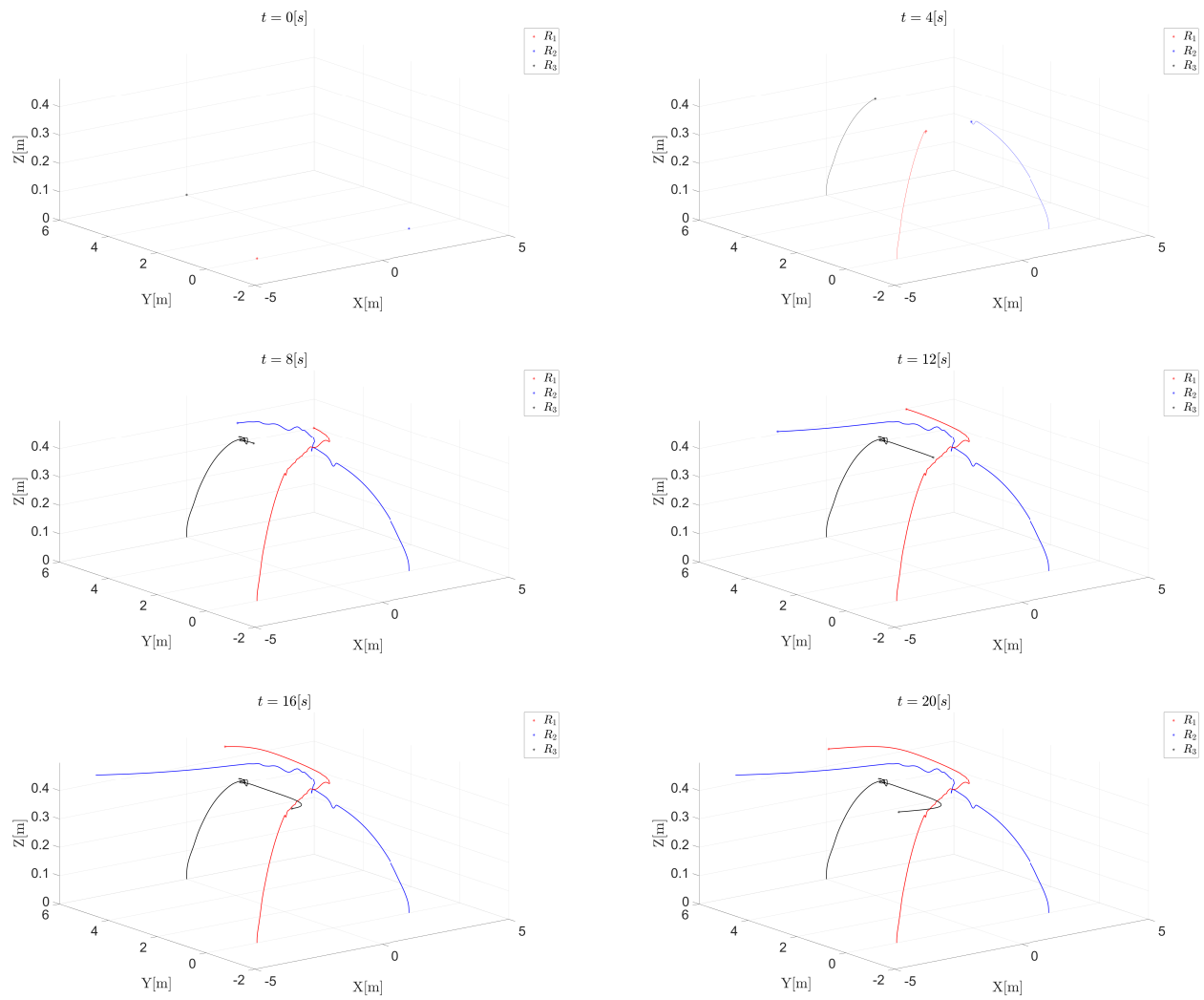


Figura 4.20: Posición de los tres robots en diferentes tiempos.

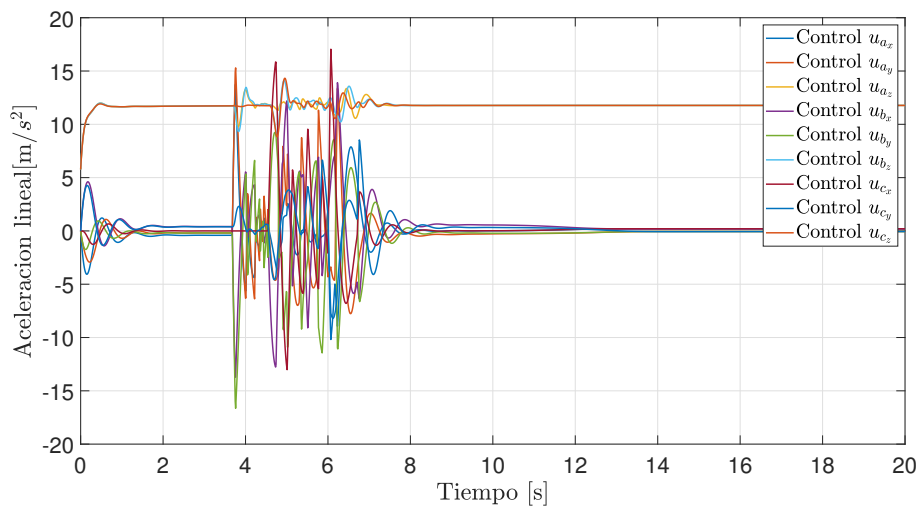


Figura 4.21: Entradas de control de los tres robots.

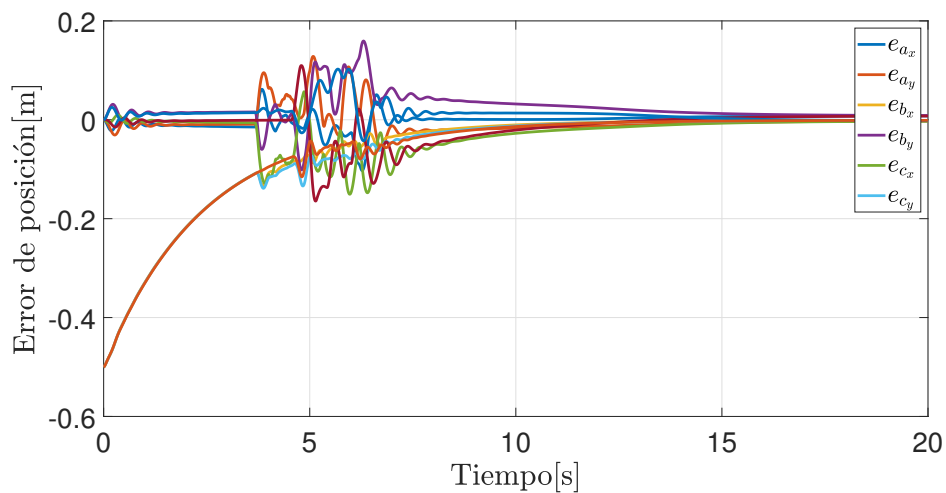


Figura 4.22: Errores de posición de los tres robots.

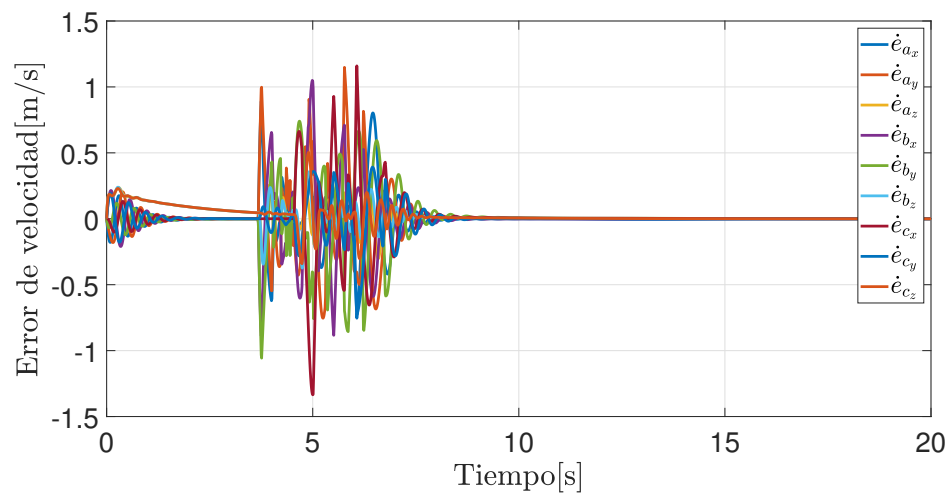


Figura 4.23: Errores de velocidad de los tres robots.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se propuso una estrategia de control para la formación con evasión de colisiones para un grupo de robots móviles modelados por un sistema de segundo orden, para lo cual, se propusieron dos superficies en torno a cada agente con la finalidad de que en el instante que uno o más agentes entren en la zona de sensado D y se encuentren en riesgo de colisión los AVF se activen y den comienzo a la evasión de colisiones, de tal manera que, los agentes siempre se encuentren a una distancia mayor a la distancia de seguridad d .

Para lograr esto, fue necesario llevar a cabo el análisis de la dinámica de las superficies y de las posiciones relativas entre los agentes y así poder encontrar el parámetro de diseño ϵ constante que nos permita escalar de manera adecuada los AVF, con lo que podemos asegurar que la distancia entre los agentes siempre será mayor a la distancia de seguridad d , por lo tanto, los agentes no estarán en riesgo de colisión.

Con base en esto, se realizaron distintas simulaciones, en una de ellas se presenta el caso más sencillo, en el cual solo hay dos agentes en el sistema, los cuales se encuentran a una distancia mayor a la zona de sensado D y deben intercambiar su posición mientras evaden la colisión en el momento en que entren en riesgo de colisión. La segunda simulación presenta el caso para un grupo de tres agentes cuya posición final es un triángulo, de igual manera los agentes deben evadir la colisión mientras buscan llegar a un consenso en la formación. Las últimas simulaciones, a diferencia que las anteriores, se realizan aplicándolas al modelo dinámico de un robot aéreo tipo quad-rotor o UAV, demostrando que los UAV comienzan las maniobras de evasión al momento en que entran en la zona de sensado D de cualquier agente.

Con estos resultados, validamos que las leyes de control propuestas para un grupo de n agentes, cumplen con el objetivo de lograr una formación mientras que, a su vez, los agentes evaden las posibles colisiones que se pudieran presentar entre los agentes.

Como trabajo futuro, se propone analizar la evasión de colisiones para un grupo de n agentes considerando las velocidades de cada agente y la manera en que influyen en los AVF, de manera que el campo repulsivo no dependa únicamente de las posiciones relativas entre los agentes, si no también de sus velocidades.

Finalmente, se propone realizar pruebas en tiempo real del control, en un grupo de UAV tipo quad-rotor. Dichos experimentos en tiempo real no pudieron completarse durante este trabajo de tesis. La razón es que los drivers requeridos para realizar la comunicación entre los robots aéreos y el sistema de cámaras OptiTrack ya no son actualizados por el fabricante.

Bibliografía

- [1] E. G. Hernández-Martínez and E. Aranda-Bricaire. *Convergence and Collision Avoidance in Formation Control: A Survey of the Artificial Potential Functions Approach*, pages 103–126. IntechOpen, London, United Kingdom, 2011.
- [2] J. F. Flores-Resendiz and E. Aranda-Bricaire. A general solution to the formation control problem without collisions for first-order multi-agent systems. *Robotica*, 38:1–15, 2019.
- [3] J. F. Flores-Resendiz, E. Aranda-Bricaire, J. González-Sierra, and J. Santiaguillo-Salinas. Finite-time formation control without collisions for multiagent systems with communication graphs composed of cyclic paths. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:1–17, 2015.
- [4] J. F. Flores-Resendiz and E. Aranda-Bricaire. Cyclic pursuit formation control without collisions in multiagent systems using discontinuous vector fields. *Congreso Latinoamericano de Control Automático, Cancún, México*, pages 941–946, 2014.
- [5] Y. U. Cao, A. S. Fukunaga, and A. B. Kahng. Cooperative mobile robotics: antecedents and directions. *Autonomous Robots*, 4, 1997.
- [6] D. Fyler, B. Sullivan, and I. A. Raptis. Distributed object manipulation using a mobile multi-agent system. In *2015 IEEE International Conference on Technologies for Practical Robot Applications (TePRA)*, pages 1–6, 2015.
- [7] D. Vallejo, P. Remagnino, D. N. Monekosso, L. Jiménez, and C. González. A multi-agent architecture for multi-robot surveillance. In *Computational Collective Intelligence. Semantic Web, Social Networks and Multiagent Systems*, pages 1–6. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [8] D. Xiwang, Z. Yan, R. Zhang, and Z. Yisheng. Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64, 06 2016.
- [9] Q. Jiahu, F. Weiming, G. Huijun, and Z. W. Xing. Distributed k-means algorithm and fuzzy c-means algorithm for sensor networks based on multiagent consensus theory. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47, 03 2016.
- [10] K. Javad and N. D. Hoa. Multi-agent consensus design for heterogeneous energy storage devices with droop control in smart grids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, PP, 2017.
- [11] W. Ren and R. Beard. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications. *Communications and Control Engineering Series, Springer, London, UK*, 2008.

- [12] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(2), 2007.
- [13] L. Shihua, D. Haibo, and L. Xiangze. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 47(8):1706–1712, 2011.
- [14] Z. Zuo. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks. *Automatica*, 54(8):305–309, 2015.
- [15] Q. Song, J. Cao, and W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control. *Systems and Control Letters*, 59(9):553–562, 2010.
- [16] H. Hong and H. Wang. Fixed-time formation control for second-order disturbed multi-agent systems under directed graph. *Symmetry*, 13(12), 2021.
- [17] M. A. Trujillo, R. Aldana-López, D. Gómez-Gutiérrez, M. Defoort, J. Ruiz-León, and H. M. Becerra. Autonomous and non-autonomous fixed-time leader–follower consensus for second-order multi-agent systems. *Nonlinear Dynamics*, 102, 2020.
- [18] J. A. Colunga, H. M. Becerra, C. R. Vázquez, and D. Gómez-Gutiérrez. Robust leader-following consensus of high-order multi-agent systems in prescribed time. *IEEE Access*, 8:195170–195183, 2020.
- [19] O. Khatib. *Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots*, pages 396–404. Springer New York, New York, NY, 1990.
- [20] S. A. Ajwad, E. Moulay, M. Defoort, T. Ménard, and P. Coirault. Leader-following consensus of second-order multi-agent systems with switching topology and partial aperiodic sampled data. *IEEE Control Systems Letters*, 5(5):1567–1572, 2021.
- [21] L. Dai, Q. Cao, Y. Xia, and Y. Gao. Distributed mpc for formation of multi-agent systems with collision avoidance and obstacle avoidance. *Journal of the Franklin Institute*, 354(4):2068–2085, 2017.
- [22] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [23] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [24] O. S. Reza and M. Richard. Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 35, 2002.
- [25] L. Zhentao, W. Zhengxin, and F. Yuanzhen. Fixed-time consensus of first-order multi-agent systems over signed directed graphs. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 43, 04 2021.
- [26] Z. Kanghua, F. Huijin, L. Lei, and C. Zhongtao. Triggered finite-time consensus of first-order multi-agent systems with input saturation. *IET Control Theory and Applications*, 16, 03 2022.

- [27] J. Cortés and F. Bullo. Nonsmooth coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM Review*, 51:163–189, 02 2009.
- [28] M. Dunbabin and L. Marques. Robots for environmental monitoring: Significant advancements and applications. *IEEE Robotics and Automation Magazine - IEEE ROBOT AUTOMAT*, 19:24–39, 2012.
- [29] J. Fax and R. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49:1465 – 1476, 2004.
- [30] X. Ge and Q. L. Han. 2017.
- [31] C. Godsil and G. Royle. Algebraic graph theory. *Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, USA*, 207, 2001.
- [32] O. Booij, B. Terwijn, Z. Zivkovic, and B. Krose. Navigation using an appearance based topological map. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Rome, Italy*, pages 3927–3932, 2007.
- [33] M. N. Ibarra-Bonilla, J. M. Ramírez-Cortés, A. Díaz-Méndez, J. Martínez-Carballido, R. Enríquez-Caldera, and I. J. García-Enríquez. Navegación autónoma de un robot guiado por visión con operaciones básicas de localización y mapeo en un ambiente controlado. *Congreso Mexicano de Robótica. Celaya, Guanajuato, México*, 2009.
- [34] R. Lopez-Padilla, V. Ayala, and R. Sanchez-Yanez. Some experiments on reactive obstacle avoidance for a mobile robot. *Universidad de Guanajuato, 18th International Conference on Electronics Communications and Computers, IEEE Computer Society*, pages 193 – 196, 2008.
- [35] O. Khatib. *The Potential Field Approach And Operational Space Formulation In Robot Control*, pages 367–377. Springer US, Boston, MA, 1986.