



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS  
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco  
Departamento de Matemáticas

**Aplicaciones de la teoría de Morse a la enumeración  
de posiciones de equilibrio.**

**TESIS**

Que presenta

**Brandon Edwin Coronado Cordero**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias**

**En la especialidad de**

**Matemáticas**

Director de Tesis

**Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino**



# Agradecimientos

Agradezco a toda la gente que me apoyó en la realización de este trabajo, a mis padres Adriana Cordero Jurado y José Aurelio Coronado López y a mi hermano Kevin Alan Coronado Cordero que nunca dejaron de apoyarme en este proceso.

A mis amigos Higinio, Saúl, Ángel, Juanita, Alejandro Arteaga, Alejandro Soto, Issac, Jordi, David y demás compañeros de maestría que me ayudaron en las materias cursadas en la Maestría.

A mi asesor, el Dr. Miguel Alejandro Xicotécatl Merino por todas las horas dedicadas a poder presentar un trabajo de calidad, así como a los profesores Dr. Jesús González Espino Barros y Dr. Héctor Hugo García Compean por acceder a ser sinodales y a todos los profesores que me han guiado y enseñado.

Finalmente agradezco al CONACyT por la beca de maestría número 1035903 que me fue otorgada.



# Índice general

<b>1. Teoría de Morse</b>	<b>9</b>
1.1. La idea de la teoría de Morse . . . . .	9
1.2. El Lema de Morse . . . . .	11
1.3. Curvas integrales y grupos 1-paramétricos . . . . .	15
1.4. Tipo de homotopía y valores críticos . . . . .	16
1.5. Ejemplos . . . . .	23
1.6. Desigualdades de Morse . . . . .	24
<b>2. Equilibrios relativos en el problema de los <math>n</math> cuerpos</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. El Teorema de Smale . . . . .	30
2.3. Equilibrio Relativos . . . . .	31
2.4. Máximos de Potencial . . . . .	38
2.5. Índices de los puntos críticos de $P$ . . . . .	40
2.6. Relación con la homología de los espacios de configuraciones . . . . .	46
<b>3. Equilibrios de partículas cargadas en superficies</b>	<b>49</b>
3.1. Teoría de Morse en espacios de configuraciones . . . . .	49
3.2. Dos partículas cargadas en una superficies. . . . .	52
3.3. Tres partículas cargadas en una superficie. . . . .	54
3.4. Los números de Betti de $(X^3, \Phi)$ . . . . .	55
3.5. El caso de una superficie orientable . . . . .	59
3.6. Demostración del Teorema 3.5.1 . . . . .	60
<b>A. Espacios de Configuraciones</b>	<b>63</b>
A.1. Definiciones y resultados básicos . . . . .	63
A.2. La cohomología de $F(\mathbb{R}^n, k)$ . . . . .	65

## Resumen

La teoría de Morse relaciona la homología con los puntos críticos de cierto tipo de funciones suaves por medio de las desigualdades de Morse, por lo que es una buena herramienta para analizar los puntos críticos de funciones suaves sobre una variedad.

Estudiaremos el potencial gravitatorio de Newton de  $n$  cuerpos analizando el caso de configuraciones centrales planas que son cierto tipo de puntos críticos del potencial correspondiente y demostramos que las clases de equivalencia están en correspondencia biyectiva con los puntos críticos de otra función definida sobre un carta de  $\mathbb{C}P^{n-2}$ . Usamos las desigualdades de Morse para dar una cota inferior a de la cantidad de equilibrios relativos.

Por otra parte, estudiamos el potencial eléctrico de partículas cargadas sobre una superficie compacta y orientable, de manera que sus puntos críticos correspondan a posiciones de equilibrio. Usamos las desigualdades de Morse para dar una cota inferior de la cantidad de posiciones de equilibrio. Así el problema anterior se reduce a calcular la homología de los espacios de configuraciones sobre superficies orientables.

## Abstract

Morse theory gives a relation between homology and critical points of certain smooth functions via Morse inequalities; thus, Morse theory is a great tool to analyze critical points of smooth functions. We will study Newtonian gravitational potential  $n$ -bodies analyzing planar central configurations which are certain critical points and we will demonstrate that set equivalence class of central configurations have a bijection between critical points of a function defined in a chart of  $\mathbb{C}P^{n-2}$ , we apply Morse inequalities to obtain lower bounds of relative equilibrium. On the other hand, we analyze the electrical potential of charged particles in a compact, connected surface, in such a way that all the critical points correspond to a relative equilibrium. We use Morse inequalities to give a lower bound of equilibrium positions. Thus, the above problem is reduced to calculate the homology of configuration spaces on orientable surfaces.

# Introducción

La teoría de Morse desarrollada por Marston Morse en *The calculus of variations in the large* relaciona la topología de una variedad  $M$  con los puntos críticos de funciones suaves. Por ejemplo si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave y  $p$  un punto crítico no degenerado entonces existe una vecindad del punto  $p$  donde la función tiene la siguiente forma

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Más aún si todos los puntos críticos de la función son no degenerados, la variedad es homeomorfa a un  $CW$ -complejo donde cada  $\lambda$ -celda corresponde a un punto crítico de índice  $\lambda$ . Este tipo de funciones se llaman funciones de Morse y resultan ser densas en el espacio de funciones suaves sobre  $M$ .

Se ha tratado de generalizar estas ideas al definir las funciones de Morse-Bott o aplicar esta teoría a variedades de dimensión infinita como el espacio de curvas en una variedad compacta o de funcionales. También han servido para resolver problemas como la conjetura de Poincaré en dimensiones altas, el teorema de periodicidad de Bott.

El objetivo de la tesis es ilustrar el uso de la teoría de Morse para obtener cotas inferior para el número de equilibrios relativos y posiciones de equilibrio vistos como puntos críticos del potencial newtoniano y del potencial eléctrico de partículas cargadas. La tesis está dividida en tres capítulos, uno sobre Teoría de Morse, el segundo es sobre equilibrios relativos en el problema de los  $n$  cuerpos y el último sobre posiciones de equilibrio de partículas cargadas en una superficie compacta.

El primer capítulo está basado en [10], [11] y consta de los preliminares para relacionar la topología de una variedad con los puntos críticos por medio de la teoría de Morse, el objetivo es demostrar los siguientes teoremas

**Teorema 1.4.1.** *Sean  $M$  una variedad y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave. Sean  $a < b$  y supongamos que  $f^{-1}[a, b]$  es compacto y no contiene puntos críticos de  $f$ . Si  $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$ , entonces  $M^a$  es difeomorfo a  $M^b$ . Más aún,  $M^a$  es un retracto por deformación de  $M^b$ , de tal modo que el mapeo inclusión de  $M^a \rightarrow M^b$  es una equivalencia homotópica.*

**Teorema 1.4.2.** *Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $p$  un punto crítico no degenerado de índice  $\lambda$ . Sea  $f(p) = c$  y supongamos que  $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  es compacto y que no contiene puntos críticos de  $f$  además de  $p$ , para algún  $\varepsilon > 0$ . Entonces, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, el conjunto  $M^{c+\varepsilon}$  tiene la homotopía de  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ .*

A partir de los teoremas anteriores podemos describir a la variedad  $M$  como un  $CW$ -complejo en donde cada  $\lambda$ -celda está asociada a un punto crítico de índice  $\lambda$  de una función suave con puntos críticos no degenerados y a partir de esta descomposición se deducen las desigualdades de Morse

$$\begin{aligned}\beta_\lambda(M) - \beta_{\lambda-1}(M) + \dots \pm \beta_0(M) &\leq C_\lambda - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0 \\ \beta_\lambda(M) &\leq C_\lambda\end{aligned}$$

donde  $\beta_k(M)$  es el  $k$ -ésimo número de Betti de  $M$  y  $C_k$  es el número de puntos críticos de índice  $k$  de la función  $f$ .

El segundo capítulo está basado en [9] en donde se estudian aspectos particulares de problema de los  $n$  cuerpos en el plano. A saber, los equilibrios relativos son soluciones en las que la distancia entre las partículas permanece constante todo el tiempo. Una conjetura de Wintner y Smale afirma que el número (de clases de equivalencia) de tales soluciones es finito. En este capítulo vemos que el problema se puede reducir a analizar los puntos críticos de una cierta función de potencial. Usando las desigualdades de Morse encontramos cotas inferiores para el número de puntos críticos no degenerados de distintos índices.

El tercer capítulo se basa en [1] y el objetivo es dar cotas inferiores para el número puntos críticos del potencial de  $n$  partículas sobre una superficie compacta y conexa usando las desigualdades de Morse. Dicho potencial está definido sobre el espacio de configuraciones de  $n$  puntos distintos en  $X$ ,  $F(X, n)$ , para usar las desigualdades de Morse calculamos la homología de  $F(X, n)$ . Mostraremos que

$$H_i(F(X, n)) \cong H^{nm-i}(X^r, \Phi)$$

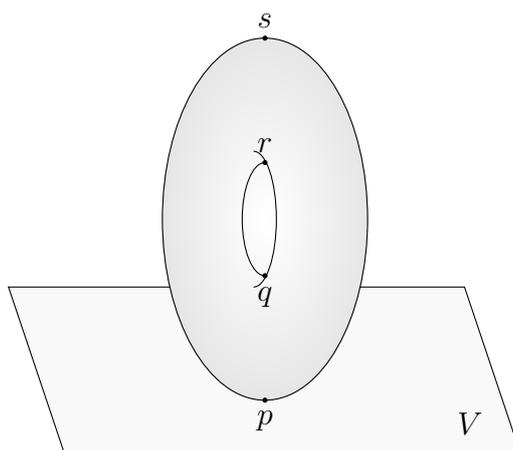
donde  $\Phi = X^n \setminus F(X, n)$  y hacemos un cálculo explícito de las cotas cuando  $X$  es una superficie con  $n = 2, 3$ . En el caso  $n = 2$  calculamos la homología de  $F(X, 2)$  a través de sucesión espectral de Serre y en el caso  $n = 3$  calculamos la homología del par  $(X^r, \Phi)$  con métodos puramente homológicos.

# Capítulo 1

## Teoría de Morse

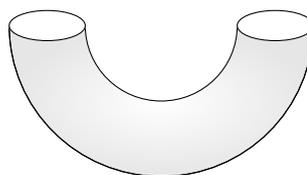
### 1.1. La idea de la teoría de Morse

En esta sección comenzamos ilustrando con un ejemplo específico, la teoría que desarrollaremos después para variedades más generales. Consideremos un toro  $M$ , tangente al plano  $V$ , como se indica en la figura siguiente.

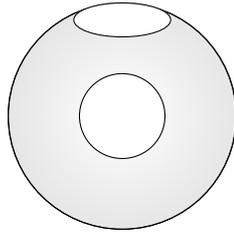


Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  la función altura respecto al plano  $V$  y sea  $M^a$  el conjunto de todos los puntos  $x \in M$  tales que  $f(x) \leq a$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si  $a < 0 = f(p)$ , entonces  $M^a = \emptyset$ .
2. Si  $f(p) < a < f(q)$ , entonces  $M^a$  es homeomorfo al disco  $D^2$ .
3. Si  $f(q) < a < f(r)$ , entonces  $M^a$  es homeomorfo a un cilindro.



4. Si  $f(r) < a < f(s)$ , entonces  $M^a$  es homeomorfo a una superficie compacta de género 1 con frontera un círculo.



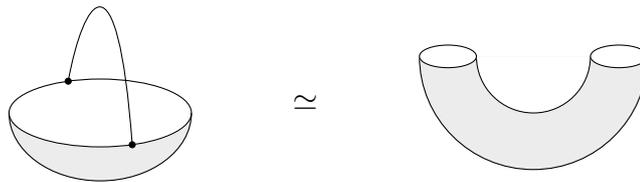
5. Si  $f(s) < a$ , entonces  $M^a$  es todo el toro.

Para poder describir el cambio de  $M^a$  cuando  $a$  que pasa por alguno de los puntos  $f(p), f(q), f(r), f(s)$  es conveniente considerar el tipo de homotopía en vez del tipo de homeomorfismo. En término del tipo de homotopía:

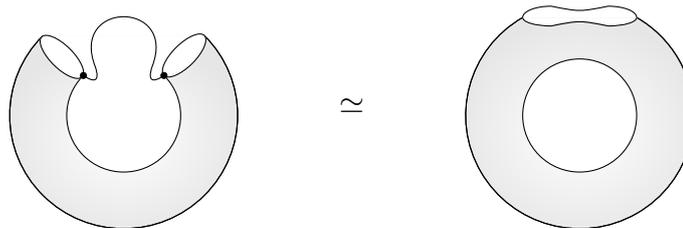
$1 \rightarrow 2$  es la operación de pegar una 0-celda. En cuanto a tipo de homotopía, el espacio  $M^a, f(p) < a < f(q)$ , no se puede distinguir de una 0-celda:



$2 \rightarrow 3$  es la operación de pegar una 1-celda:



$3 \rightarrow 4$  es de nuevo la operación de pegar una 1-celda



$4 \rightarrow 5$  es la operación de pegar una 2-celda.

Uno esperaría, los puntos  $p, q, r$  y  $s$  en donde el tipo de homotopía de  $M^a$  cambia, como tienen una caracterización simple en términos de  $f$ . Estos son los puntos críticos de la función  $f$ . Si tomamos cualquier sistema de coordenadas  $(x, y)$  cerca de estos puntos, sus derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  se anulan. En  $p$  podemos escoger un sistema de coordenadas  $(x, y)$  tal que  $f = x^2 + y^2$ , en  $s$  tal que  $f = c - x^2 - y^2$ . y en  $q$  y  $r$  de tal manera de que  $f = d + x^2 - y^2$ , con  $d, c$  constantes.

Notemos que el número de signos negativos en la expresión de  $f$  en cada punto es la dimensión de la celda que debemos de pegar para pasar de  $M^a$  a  $M^b$ , si  $a < f(t) < b$  para  $t = p, q, r, s$ . La teoría de Morse generaliza estas observaciones para cualquier función suave sobre una variedad.

## 1.2. El Lema de Morse

**Definición.** Sean  $M$  una variedad suave de dimensión  $n$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Dado  $p \in M$  escogemos una carta coordenada sobre  $p$ ,  $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in V$ . Sea

$$F = f\varphi^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

y su derivada

$$dF_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(\varphi(p))}\mathbb{R}.$$

Entonces

1. El Hessiano de  $f$  con respecto a  $\varphi$  es definido como la matriz simétrica de derivadas parciales de segundo orden

$$H_F = H(f\varphi^{-1}) = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}.$$

2.  $p$  es un punto crítico o un punto singular de  $f$  si  $dF_{\varphi(p)}$  no es suprayectiva, esto quiere decir que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\varphi(p)) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(\varphi(p)) = 0.$$

En este caso, el valor real  $f(p) = F(\varphi(p))$  se llama valor crítico de  $f$ .

3. Cualquier punto que no es punto crítico de  $f$  se le dice punto regular de  $f$  y cualquier valor real que no es un valor crítico de  $f$  se le llama valor regular de  $f$ .
4.  $p$  es un punto crítico no degenerado de  $f$  si el Hessiano es no singular, es decir,  $\det(H_F(X(p))) \neq 0$ .
5. Un punto crítico en el que el Hessiano sea singular se dice punto crítico degenerado.
6. El índice de un punto crítico  $p$  respecto a  $f$  es la dimensión del subespacio maximal de  $T_p M$  donde el Hessiano  $H_F$  es definido negativo
7. La nulidad de un punto crítico es la dimensión del espacio nulo del punto crítico, es decir, el subespacio formado por todos los  $v \in T_p M$ , tal que  $H_F(v, w) = 0$  para todo  $w \in T_p M$ .

**Lema 1.2.1.** Sea  $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función real suave en una vecindad convexa  $V$  de  $0$  en  $\mathbb{R}^n$ , con  $f(0) = 0$ . Entonces existen funciones suaves  $g_i : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  tales que  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$  y

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n).$$

**Demostración.**

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

y ponemos  $g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt$ .

Si  $j$  esta entre 1 y  $n$ , entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} x_i g_i = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + g_j \tag{1.1}$$

Evaluando en 0 se tiene que  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = g_j(0)$ .

□

**Lema 1.2.2** (Lema de Morse). *Sea  $p$  un punto crítico no degenerado de  $f$ . Entonces hay un sistema local de coordenadas  $(y^1, \dots, y^n)$  en una vecindad  $U$  de  $p$ , tal que  $y^i(p) = 0$  para toda  $i$  y se tiene la siguiente igualdad en  $U$*

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

donde  $\lambda$  es el índice de  $p$ .

**Demostración.** Mostremos primero que si existe una tal expresión para  $f$ , entonces  $\lambda$  tiene que ser el índice. Sean  $(z^1, \dots, z^n)$  un sistema de coordenadas, si

$$f(q) = f(p) - (z^1)^2 - \dots - (z^\lambda)^2 + (z^{\lambda+1})^2 + \dots + (z^n)^2$$

tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo que muestra es que la matriz que representa al Hessiano bajo la base  $\frac{\partial}{\partial z^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}|_p$  es

$$\begin{pmatrix} -2I_\lambda & 0 \\ 0 & 2I_{n-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto existe un subespacio de  $TM_p$  de dimensión  $\lambda$  donde el Hessiano es definido negativo y un subespacio  $V$  de dimensión  $n - \lambda$  donde el Hessiano es definido positivo. Si existiera un subespacio de  $TM_p$  de dimensión más grande que  $\lambda$  en el cual el Hessiano fuese definido negativo, entonces este subespacio intersectaria a  $V$ . Lo cual no puede ser. Por lo tanto  $\lambda$  es el índice del Hessiano en  $p$ .

Ahora mostraremos que existe un sistema de coordenadas adecuado  $(y^1, \dots, y^n)$ . Podemos suponer que  $p = 0$  y que  $f(p) = f(0) = 0$ . Por el lema 1.2.1, tenemos

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1, \dots, x_n)$$

para  $(x_1, \dots, x_n)$  en alguna vecindad del 0. Como asumimos que 0 es punto crítico:  $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$ . Por lo tanto, aplicando de nuevo el lema 1.2.1 a los  $g_j$  tendremos

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n\}$$

para funciones suaves  $h_{ij}$ . Se sigue que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

Podemos suponer que  $h_{ij} = h_{ji}$ , ya que podemos escribir  $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ , entonces tendremos  $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$  y  $f = \sum_{i,j}^k x_i x_j \bar{h}_{ij}$ . Más aún la matriz  $(\bar{h}_{ij}(0))_{ij}$  es igual a  $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)\right)_{ij}$ , por lo tanto es no singular.

Existe una transformación no singular de funciones coordenadas tales que dan la expresión deseada de  $f$ , posiblemente en una vecindad más pequeña del 0. Para ver esto vamos a imitar la prueba usual de diagonalización de las formas cuadráticas. El paso clave se puede describir de la siguiente forma.

Supongamos por inducción que existen coordenadas  $u_1, \dots, u_n$  en la vecindad de  $U_1$  del 0, tales que

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

en  $U_1$ ; donde las matrices  $H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$  son simétricas. Después de un cambio linear en las últimas  $n - r + 1$  coordenadas podemos asumir que  $H_{rr}(0) \neq 0$ . Sea  $g(u_1, \dots, u_n)$  la raíz cuadrada  $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ . Esta función será suave y distinta de 0 en una vecindad más pequeña  $U_2 \subseteq U_1$  de 0. Ahora introduciremos nuevas coordenadas  $v_1, \dots, v_n$  definidas de la forma siguiente

$$v_i = u_i \quad \text{para } i \neq r$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[ u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right].$$

Se sigue del teorema de la función inversa que  $v_1, \dots, v_n$  son funciones coordenadas en una vecindad suficientemente pequeña  $U_3$  de 0. Es fácil verificar que  $f$  puede se puede como

$$f = \sum_{i \leq r} \pm(v_i)^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n)$$

sobre  $U_3$ . Esto completa la inducción y prueba el lema. □

**Corolario 1.2.1.** *Los puntos críticos no degenerados son aislados.*

A continuación presentaremos ejemplos de puntos críticos degenerados para funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

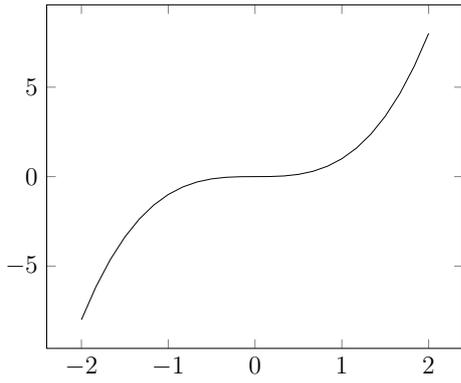


Figura 1.1:  $f(x) = x^3$  El origen es un punto crítico degenerado.

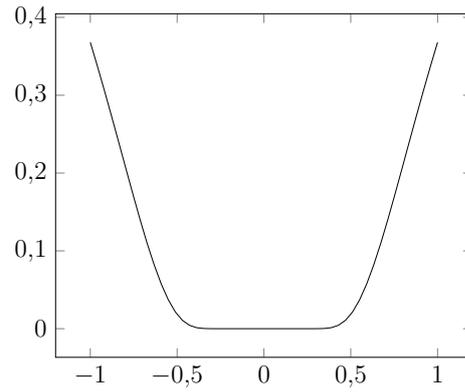


Figura 1.3:  $F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{sen}^2(\frac{1}{x})$ . El origen es un punto crítico degenerado y no aislado.

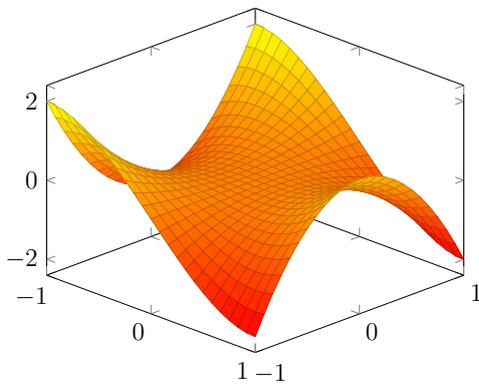


Figura 1.2:  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  la parte real de  $(x + iy)^3$ .  $(0, 0)$  es un punto crítico degenerado (“silla del mono”).

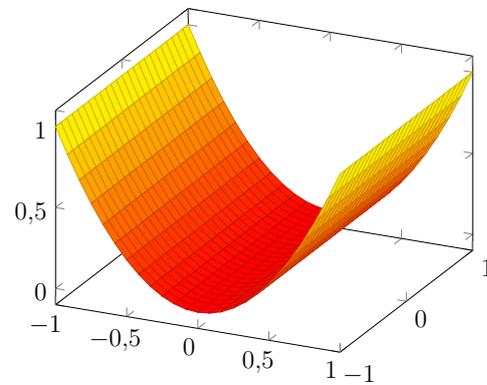


Figura 1.4:  $f(x, y) = x^2$ . El conjunto de puntos críticos es el eje  $x$ , los cuales son todos ellos degenerados y es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ .

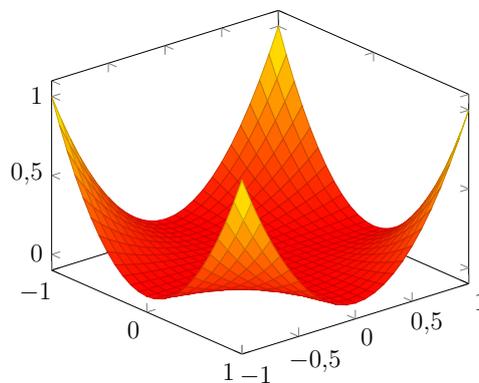


Figura 1.5:  $f(x, y) = x^2y^2$ . El conjunto de puntos críticos, todos degenerados, consiste de la unión de los ejes coordenados, y no es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.3. Curvas integrales y grupos 1-paramétricos

**Definición.** Un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos de una variedad  $M$  es una función  $C^\infty$

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

tal que

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$  la función  $\varphi_t : M \rightarrow M$  dada por  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  es un difeomorfismo de  $M$  en  $M$
2. Para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ , se tiene  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$

Dado un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos  $\varphi$  de  $M$ , definimos un campo vectorial  $X$  en  $M$  como sigue. Para toda función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sea

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}.$$

Diremos que este campo vectorial  $X$  genera al grupo  $\varphi$

**Lema 1.3.1.** *Dado  $X$  campo vectorial en  $M$  el cual se anula fuera de un conjunto compacto  $K \subseteq M$  genera un único grupo de difeomorfismos 1-paramétricos  $M$ .*

**Demostración.** Por el Teorema 3.10 de [17], pág. 95 se tiene que para todo  $q \in M$  existen  $\varepsilon_q > 0$  y  $U_q$  vecindad abierta de  $q$ , tales que para todo  $p \in U_q$  existe una única curva  $\phi_q : (-\varepsilon_q, \varepsilon_q) \rightarrow M$  que cumple lo siguiente:

- $\phi'_q = X(\phi_c)$ .
- $\phi_q(0) = q$

Ya que  $K$  es compacto, entonces existen  $q_1, \dots, q_l \in K$  tales que  $K \subseteq \cup_{k=1}^l U_{q_k}$ , sea  $\varepsilon := \min_{1 \leq k \leq l} \varepsilon_{q_k}$ . Para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\varphi_t(p) := \begin{cases} \phi_p(t) & \text{si } p \in \cup_{k=1}^l U_{q_k} \\ p & \text{si } p \notin \cup_{k=1}^l U_{q_k} \end{cases}.$$

Observe que se cumple la condición  $\varphi_t \varphi_s = \varphi_{t+s}$ , para  $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$  por la unicidad de las curvas. Además  $\varphi_t$  es difeomorfismo ya que  $\varphi_{-t} \varphi_t = \varphi_t \varphi_{-t} = id_M$ .

Por otro lado, dado  $l \in \mathbb{R}$  existen únicos  $k \in \mathbb{N}$  y  $|d| < \frac{\varepsilon}{2}$  tales que

$$l = k \frac{\varepsilon}{2} + d.$$

Sea

$$\varphi_l := \varphi_{\frac{k\varepsilon}{2}} + \varphi_d.$$

Si  $l < -\varepsilon$ , entonces de forma similar existen  $-k \in \mathbb{N}$  y  $|d| < \frac{\varepsilon}{2}$  tales que  $l = k \frac{\varepsilon}{2} + d$ . Definimos

$$\varphi_l := \varphi_{\frac{-k\varepsilon}{2}} + \varphi_d.$$

Las funciones anteriores son difeomorfismos ya que son composiciones de difeomorfismos, para terminar la demostración solo basta demostrar que

$$\varphi_t \varphi_s = \varphi_{t+s}, \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}.$$

Pero lo anterior es consecuencia de que  $\varphi_t \varphi_s = \varphi_{t+s} = \varphi_s \varphi_t$  para  $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$  y de las observaciones anteriores.  $\square$

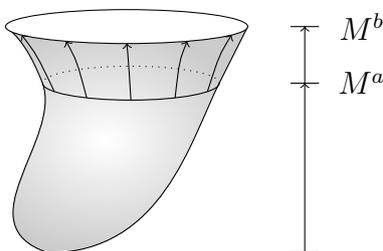
## 1.4. Tipo de homotopía y valores críticos

**Definición.** Dadas  $M$  una variedad y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}.$$

**Teorema 1.4.1.** Sean  $M$  una variedad y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave. Sean  $a < b$  y supongamos que  $f^{-1}[a, b]$  es compacto y no contiene puntos críticos de  $f$ . Entonces  $M^a$  es difeomorfo a  $M^b$ . Más aún,  $M^a$  es un retracto por deformación de  $M^b$ , de tal modo que el mapeo inclusión de  $M^a \rightarrow M^b$  es una equivalencia homotópica.

**Demostración.** La idea de la demostración reside en contraer  $M^b$  en  $M^a$  a través de las trayectoras ortogonales respecto a las hipersuperficies  $f = cte$ .



Elegimos una métrica Riemanniana sobre  $M$  y denotaremos por  $\langle X, Y \rangle$  el producto interno de dos vectores tangentes, determinado por la métrica. El gradiente de  $f$  es el campo vectorial  $\text{grad}(f)$  en  $M$  caracterizado por la siguiente ecuación:

$$\langle X, \text{grad}(f) \rangle = X(f)$$

(i.e. la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $X$ ) para todo campo vectorial  $X$  sobre  $M$ . Observemos que  $\text{grad}(f)$  se anula precisamente en los puntos críticos de  $f$ . Si  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva con vector velocidad  $\dot{c}$ , entonces se cumple

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \text{grad}(f) \right\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

Sea  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, que es igual a  $\frac{1}{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}$  sobre  $f^{-1}[a, b]$  y que se anule fuera de una vecindad compacta de este conjunto. Entonces el campo vectorial  $X$ , dado por

$$X := \rho \text{grad}(f) \quad X_q = \rho(q) \text{grad}(f)_q$$

satisface las condiciones del lema 1.3.1. Por lo tanto  $X$  genera un grupo 1-paramétrico de difeomorfismo

$$\varphi_t : M \rightarrow M.$$

Para un  $q \in M$  consideremos la función  $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ . Si  $\varphi_t(q)$  está en  $f^{-1}[a, b]$ , entonces

$$\frac{d(f \circ \varphi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d(\varphi_t(q))}{dt}, \text{grad}(f) \right\rangle = \langle X, \text{grad}(f) \rangle = 1.$$

De este modo, la correspondencia  $t \mapsto f(\varphi_t(q))$ , es lineal con derivada 1, si  $a < f(\varphi_t(q)) < b$ .

Ahora consideremos el difeomorfismo  $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ . Claramente manda  $M^a$  de manera difeomorfa sobre  $M^b$ . Esto prueba la mitad del teorema 1.4.1

Finalmente, definimos ahora una familia de funciones parametrizadas por  $t$  como

$$r_t : M_b \rightarrow M_b$$

$$r_t(q) = \begin{cases} q & \text{si } f(q) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } a \leq f(q) \leq b \end{cases}$$

Entonces  $r_0$  es la identidad y  $r_1$  es una retracción de  $M^b$  en  $M^a$ . Por lo tanto  $M^a$  es un retracto por deformación de  $M^b$ . Esto completa la demostración.  $\square$

*Nota.* La condición de que  $f^{-1}[a, b]$  sea compacto no puede ser omitida.

**Teorema 1.4.2.** Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $p$  un punto crítico no degenerado de índice  $\lambda$ . Ponemos  $f(p) = c$  y supongamos que  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  es compacto y que no contiene puntos críticos de  $f$  además de  $p$ , para algún  $\varepsilon > 0$ . Entonces, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, el conjunto  $M^{c+\varepsilon}$  tiene la homotopía de  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ .

**Demostración.** La idea de la demostración se muestra en la Fig. 1.4 en el caso especial de la función altura sobre el toro. La región  $M^{c-\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  es la del sombreado más oscuro. Vamos a introducir una nueva función  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ , que coincida con la función altura  $f$  excepto que  $F < f$  en una pequeña vecindad de  $p$ . Así la región  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  consistirá de  $M^{c-\varepsilon}$  junto con una región  $H$  cerca  $p$ . En el figura 1.4,  $H$  sería la región sombreada por líneas horizontales.

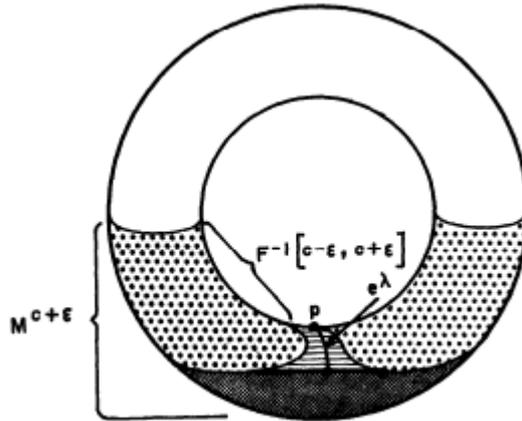


Figura 1.4

Escogiendo una celda adecuada  $e^\lambda \subseteq H$ , mostraremos (“empujando” sobre las líneas horizontales de la figura 1.4) que  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  es un retracto por deformación de  $M^{c-\varepsilon} \cup H$ . Finalmente, aplicando el Teorema 1.4.1 a la función  $F$  y la región  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  mostraremos que  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  es un retracto por deformación  $M^{c+\varepsilon}$ . Esto terminará la demostración.

Escojamos un sistema de coordenadas  $(u^1, \dots, u^n)$  en una vecindad  $U$  de  $p$  tal que  $f$  tiene la forma

$$f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$$

sobre  $U$ . De este modo el punto crítico  $p$  va tener las coordenadas

$$u^1 = \dots = u^n = 0.$$

Elegimos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que

1. La región  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  sea compacta y no contenga puntos críticos aparte de  $p$ .
2. La imagen de  $U$  bajo el encaje suave

$$(u^1, \dots, u^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

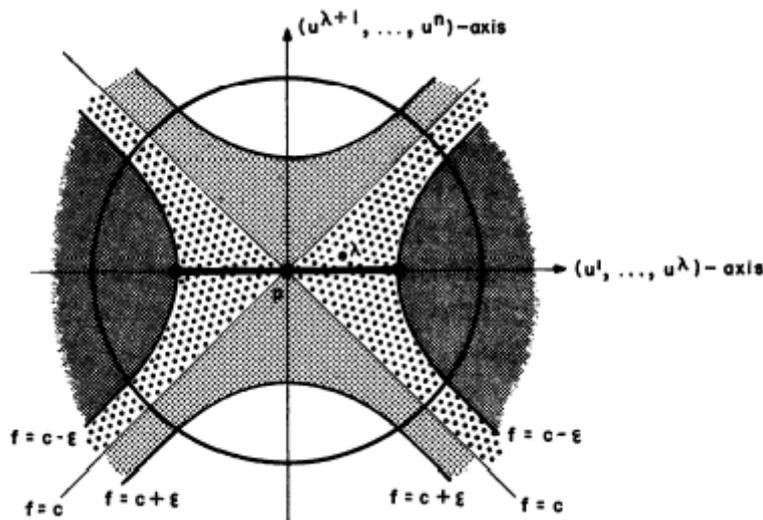
contenga a la bola cerrada

$$\left\{ (u^1, \dots, u^n) \mid \sum_{i=1}^n (u^i)^2 \leq 2\varepsilon \right\}.$$

Definimos  $e^\lambda$  como el conjunto de puntos en  $U$  tales que

$$(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \leq \varepsilon \quad y \quad u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0.$$

La situación resultante es ilustrada esquemáticamente en la siguiente figura



Los ejes coordenados representan los planos  $u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0$  y  $u^1 = \dots = u^\lambda = 0$  respectivamente; el círculo representa la frontera de la bola de radio  $\sqrt{2\varepsilon}$  y las hipérbolas representan a las hipersuperficies  $f^{-1}(c - \varepsilon)$  y  $f^{-1}(c + \varepsilon)$ . La región  $M^{c-\varepsilon}$  es la región con el sombreado más oscuro; la región  $f^{-1}[c - \varepsilon, c]$  es la más punteada; y la región  $f^{-1}[c, c + \varepsilon]$  es la menos punteada. La línea negra remarcada que pasa por  $p$  representa la celda  $e^\lambda$ .

Notemos que  $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$  es precisamente la frontera  $\partial e^\lambda$ , así que  $e^\lambda$  está pegada a  $M^{c-\varepsilon}$  como se requiere. Debemos probar que  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  es un retracto por deformación de  $M^{c+\varepsilon}$ . Construyamos una nueva función suave  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue. Sea

$$\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

( [2], pág 1).

una función suave que satisface las siguientes condiciones.

- $\mu(0) > \varepsilon$
- $\mu(r) = 0$  para  $r \geq 2\varepsilon$
- $-1 < \mu'(r) \leq 0$  para todo  $r$

donde  $\mu'(r)$  es la derivada de  $\mu$ . Sea  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F = f$  fuera de la vecindad coordenada  $U$  y por

$$F = f - \mu((u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2)$$

dentro esta vecindad coordenada. Es fácil ver que  $F$  es una función suave, bien definida sobre  $U$ .

Es conveniente definir las funciones.

$$\begin{aligned} \xi, \eta : U &\rightarrow [0, \infty) \\ \xi &= (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2. \end{aligned}$$

Entonces  $f = c - \xi + \eta$ , de modo que

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q))$$

para todo  $q \in U$ .

**Afirmación 1.** La región  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$  coincide con la región  $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}[-\infty, c + \varepsilon]$ .

**Demostración.** Fuera del elipsoide  $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$  las funciones  $f$  y  $F$  coinciden. Dentro del elipsoide tenemos que

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon.$$

Esto completa la prueba □.

**Afirmación 2.** Los puntos críticos de  $F$  son los mismos que los de  $f$ .

**Demostración.** Notemos que

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

Ya que

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta$$

donde las 1-forma  $d\xi$  y  $d\eta$  se anulan simultáneamente únicamente en el origen, 0, se sigue que  $F$  no tiene puntos críticos en  $U$  distintos del origen.

Ahora consideremos la región  $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ . Por la Afirmación 1 junto con la desigualdad  $F \leq f$  vemos que

$$F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subseteq f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon].$$

Por lo tanto esta región es compacta. No contiene puntos críticos de  $F$  excepto  $p$ . Pero

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon.$$

Luego,  $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  no contiene puntos críticos. Esto, junto con el Teorema 1.4.2 demuestra la siguiente afirmación.

**Afirmación 3.** *La región  $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$  es un retracto por deformación de  $M^{c+\varepsilon}$ .*

Expresemos a la región  $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon]$  como  $f^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] \cup H$ , donde  $H$  denota la cerradura de  $F^{-1}(-\infty, c-\varepsilon] \setminus M^{c-\varepsilon}$ .

**Observación 1.4.1.** En la terminología de Smale, la región  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  se describe como  $M^{c-\varepsilon}$  pegándole una asa. Se sigue del teorema anterior que la variedad con frontera  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  es difeomorfa a  $M^{c+\varepsilon}$ . Este hecho es importante en la teoría de Smale de variedades diferenciales. [16]

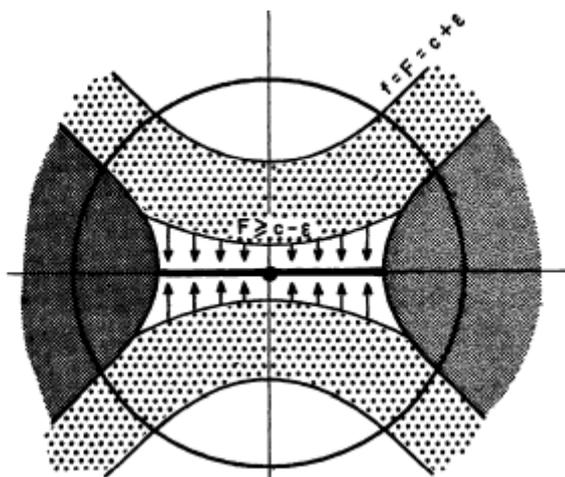
Consideremos ahora la celda  $e^\lambda$  que consiste de todos los puntos  $q$  tales que

$$\xi(q) \leq \varepsilon, \quad \eta(q) = 0.$$

Notemos que  $e^\lambda$  está contenida en la asa  $H$ . De hecho, ya que  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ , tenemos que

$$F(q) \leq F(p) \leq c - \varepsilon$$

pero  $f(q) \geq c - \varepsilon$  para  $q \in e^\lambda$ .



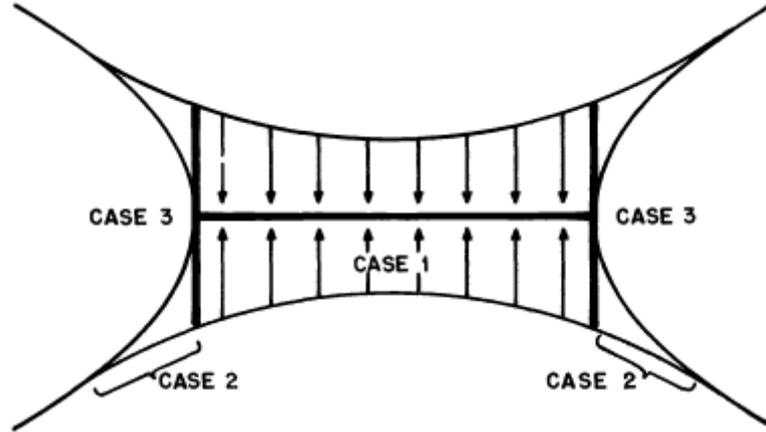
La situación se puede ver ilustrada en la figura anterior. La región  $M^{c-\varepsilon}$  es la región más sombreada; el asa  $H$  es sombreada por las flechas verticales y la región  $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$  está punteada.

**Afirmación 4.**  *$M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  es un retracto por deformación de  $M^{c-\varepsilon} \cup H$ .*

**Demostración.** Una retracción (por deformación)  $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$  está indicada esquemáticamente en la figura anterior por las flechas verticales. Más precisamente sea  $r_t$  la identidad fuera de  $U$  y definamos  $r_t$  dentro de  $U$  como sigue. Será necesario distinguir tres casos como se indica en la figura siguiente.

Caso 1. En la región donde  $\xi < \varepsilon$  sea  $r_t$  la siguiente transformación

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n).$$



Entonces  $r_1$  es la identidad y  $r_0$  manda a toda la región en  $e^\lambda$ . El hecho de que cada  $r_t$  manda a  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ .

Caso 2. En la región donde  $\varepsilon \leq \xi < \eta + \varepsilon$ ,  $r_t$  se define como

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n).$$

donde el número  $s_t \in [0, 1]$  se define por

$$s_t = t + (1 - t) \sqrt{\frac{\xi - \varepsilon}{\eta}}.$$

Así  $r_1$  es de nuevo la identidad y  $r_0$  manda toda la región a la hipersuperficie  $f = c - \varepsilon$ . Se puede verificar que las funciones  $s_t u^i$  permanecen continuas cuando  $\xi \rightarrow \varepsilon$  y  $\eta \rightarrow 0$ . Notemos que las definiciones coinciden con la del caso 1 cuando  $\xi = \varepsilon$ .

Caso 3. En la región dada por  $\eta + \varepsilon \leq \xi$  (es decir, en  $M^{c-\varepsilon}$ ) definimos a  $r_t$  como la identidad. Esta coincide con la definición anterior cuando  $\xi = \eta + \varepsilon$ .

Esto completa la demostración de que  $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$  es un retracto por deformación de  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ . Junto con la Afirmación 3, también completa la demostración del Teorema  $\square$  1.4.2

**Observación 1.4.2.** De manera más general supongamos que existen  $k$  puntos críticos no degenerados  $p_1, \dots, p_k$  con índices  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  en  $f^{-1}(c)$ . Entonces un argumento similar muestra que  $M^{c+\varepsilon}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$ .

**Observación 1.4.3.** Una modificación simple de la prueba del Teorema 1.4.2 demuestra que el conjunto  $M^c$  es también un retracto por deformación de  $M^{c+\varepsilon}$ . De hecho es un retracto por deformación de  $F^{-1}(-\infty, c]$ , el cual es un retracto por deformación de  $M^{c+\varepsilon}$

**Teorema 1.4.3.** Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en una variedad  $M$  con puntos críticos no degenerados y si todo  $M^a$  es compacto, para todo  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $M$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo, con una celda de dimensión  $\lambda$  por cada punto crítico de índice  $\lambda$ .

**Demostración.** Sean  $c_1 < c_2 < \dots$  los valores críticos de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . La sucesión  $\{c_i\}$  no tiene puntos de acumulación ya que todo  $M^a$  es compacto. El conjunto  $M^a$  es vacío, cuando  $a < c_1$ . Supongamos que  $a \neq c_1, c_2, \dots$  y que  $M^a$  es un CW-complejo. Sea  $c$  el valor crítico mínimo tal que  $a < c$ . Por los teoremas 1.4.1, 1.4.2 y la observación 1.4.3

$$M^{c+\varepsilon} \simeq M^{c-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup_{\varphi_2} e^{\lambda_2} \cup \dots \cup_{\varphi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$$

Para ciertas funciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Existe una equivalencia homotópica  $h : M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$ . Nosotros hemos asumido que existe una equivalencia homotópica  $h' : M^a \rightarrow K$  con  $K$  un CW-complejo.

Entonces  $h'h\varphi_i$  es homotópico por una aproximación celular a

$$\psi_j : \partial e^{\lambda_j} \rightarrow (\lambda_j - 1) - \text{esqueleto de } K.$$

Entonces  $K \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \cup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$  es un CW-complejo y tiene el mismo tipo de homotopía que  $M^{c+\varepsilon}$ .

Por inducción se sigue que todo  $M^a$  tiene el mismo tipo homotopía de un CW-complejo. Si  $M$  es compacto esto completa la demostración. En caso de  $M$  no es compacto pero todos los puntos críticos están en algún  $M^a$ , entonces por un argumento similar al del Teorema 1.4.1 se va a tener que  $M^a$  es un retracto por deformación de  $M$ , así la demostración sería nuevamente completada.

Si existe una cantidad infinita de puntos críticos entonces la construcción anterior nos dará una sucesión infinita de equivalencias homotópicas.

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \hookrightarrow & M^{a_2} & \hookrightarrow & \dots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ K_1 & \hookrightarrow & K_2 & \hookrightarrow & \dots & & \end{array}$$

cada una extendiendo al anterior. Sea  $K$  la unión de los  $K_i$  en la topología del límite directo, i.e, con la topología más fina posible, y sea  $g : M \rightarrow K$  el mapeo límite. Entonces  $g$  induce isomorfismo en todos los grupos de homotopía. Solo necesitamos aplicar el Teorema 1 Whitehead [20] para concluir que  $g$  es una equivalencia homotópica. (El teorema de Whitehead afirma que so  $M$  y  $K$  son ambos dominados por CW-complejos, entonces cualquier mapeo  $M \rightarrow K$  el cual índice isomorfismo en los grupos de homotopía es una equivalencia homotópica. Ciertamente  $K$  es dominado por si mismo. Para probar que  $M$  es domindo por un CW-complejo es solamente necesario considerar a  $M$  como un retracto de una vecindad tubular en algún espacio euclidiano.) Por lo tanto esto completa la demostración □

**Observación 1.4.4.** Probamos que todo  $M^a$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo finito, con una celda dimensión  $\lambda$  por cada punto crítico de índice  $\lambda$  en  $M^a$ . Esto es cierto aunque  $a$  sea un valor crítico. (Compare Observación 1.4.3)

## 1.5. Ejemplos

Como una aplicación de los teoremas de la sección 1.4 probaremos que:

**Teorema 1.5.1** (Reeb). *Si  $M$  es una variedad compacta y  $f$  es una función diferenciable en  $M$  con solo 2 puntos críticos, ambos no degenerados, entonces  $M$  es homeomorfa a la esfera.*

**Demostración.** Esto se sigue del Teorema 1.4.1 junto con el Lema de Morse 1.2.2. Los dos puntos críticos deben de ser el mínimo y máximo. Digamos que  $f(p) = 0$  sea el mínimo y  $f(q) = 1$  sea el máximo. Si  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño entonces el conjunto  $M^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$  y  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$  son  $n$ -celdas cerradas por el Lema 1.2.2. Pero  $M^\varepsilon$  es homeomorfo a  $M^{1-\varepsilon}$  por el Teorema 1.4.1. Por lo tanto  $M$  es la unión de dos  $n$ -celdas cerradas,  $M^{1-\varepsilon}$  y  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ , se pegados a lo largo de su frontera común. Ahora es fácil construir un homeomorfismo entre  $M$  y  $S^n$ .  $\square$

**Observación 1.5.1.** El teorema sigue siendo cierto si los puntos críticos son degenerados. Sin embargo, la demostración es más difícil. (Comparar [12] pág. 165-183, Teorema 1 o [14], pág. 380, Lema 1.)

**Observación 1.5.2.** No es cierto que  $M$  sea difeomorfo a  $S^n$  con la estructura diferenciable usual. (Comparar [13] en este artículo una 7-esfera con una estructura diferenciable no estandar se prueba ser topologicamente  $S^7$  al encontrar una función en ella con dos puntos críticos no degenerados.)

Como otra aplicación de los teoremas previos notemos que si una  $n$ -variedad tiene una función no degenerada que solo tiene 3 puntos críticos, entonces tienen índice 0,  $n$  y  $\frac{n}{2}$  (por Dualidad de Poincaré), y la variedad tiene el tipo de homotopía de una  $n/2$ -esfera con una  $n$ -celda pegada. Ver [5]. Tal función existe por ejemplo en el plano proyectivo real y complejo.

Sea  $\mathbb{C}P^n$  espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$ . Pensaremos a  $\mathbb{C}P^n$  como clases de equivalencia para  $(n + 1)$ -tuplas  $(z_0, \dots, z_n)$  de números complejos, con  $\sum_j \|z_j\|^2 = 1$ . Denotamos la clase de equivalencia de  $(z_0, \dots, z_n)$  por  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ . Definimos una función real valuada  $f$  en  $\mathbb{C}P^n$  por la identidad

$$f(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \sum_j c_j \|z_j\|^2$$

donde  $c_0, c_1, \dots, c_n$  son constantes reales distintas.

En orden de determinar los puntos críticos de  $f$ , considere el siguiente sistema local de coordenadas. Sea  $U_0$  el conjunto de los  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$  con  $z_0 \neq 0$ , y sea

$$\|z_0\| \frac{z_j}{z_0} = x_j + iy_j.$$

Entonces

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

son las funciones coordenada requeridas de  $f$ , mapeando  $U_0$  difeomorficamente a la esfera unitaria abierta en  $\mathbb{R}^{2n}$ . Claramente

$$\|z_j\|^2 = x_j^2 + y_j^2 \qquad \|z_0\|^2 = 1 - \sum_j (x_j^2 + y_j^2)$$

así que

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)(x_j^2 + y_j^2)$$

sobre la vecindad coordenada  $U_0$ . Por lo tanto el único punto crítico de  $f$  en  $U_0$  yace en el punto central

$$p_0 = (1 : 0 : \dots : 0)$$

del sistema de coordenadas. En este punto  $f$  es no degenerada y tiene un índice igual al doble del número  $j$  tales que  $c_j < c_0$ .

Similarmente uno puede considerar otro sistema de coordenadas centrado en los puntos

$$p_1 = (0 : 1 : 0 : \dots : 0), \dots, p_n = (0 : 0 : \dots : 0 : 1).$$

Se sigue que  $p_0, p_1, \dots, p_n$  son los únicos puntos críticos de  $f$ . El índice de  $f$  en  $p_k$  es igual al doble del número de  $j$  tales que  $c_j < c_k$ . Así que cualquier posible índice impar entre 0 y  $2n$  ocurre exactamente una vez.

Por el Teorema 1.4.3:

$\mathbb{C}P^n$  tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo de la forma

$$e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}.$$

Se sigue que los grupos homología entera de  $\mathbb{C}P^n$  están dados por

$$H_i(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## 1.6. Desigualdades de Morse

En el trabajo original de Morse, el Teorema 1.4.3 aún no se conocía. En vez de esto, la relación entre la topología de  $M$  y los puntos críticos de una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se describía por medio de una familia de desigualdades. En esta sección describiremos este enfoque original.

**Definición.** Sea  $S$  una función definida en ciertas parejas de espacios, con valores enteros.  $S$  se dice subaditiva si para cualesquiera  $X \supseteq Y \supseteq Z$ , se cumple la siguiente desigualdad

$$S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z).$$

Si se tiene la igualdad, decimos que  $S$  es aditiva.

Como ejemplo importante, usando coeficientes en un campo  $F$ , definimos

$$R_\lambda(X, Y) = \lambda - \text{ésimo núm. de Betti de } (X, Y).$$

para toda pareja  $(X, Y)$  tal que esta dimensión sea finita. Entonces  $R_\lambda$  es subaditiva, como puede observarse al examinar la sucesión exacta de la terna  $(X, Y, Z)$

$$\dots \longrightarrow H_\lambda(Y, Z) \longrightarrow H_\lambda(X, Z) \longrightarrow H_\lambda(X, Y) \longrightarrow \dots$$

La característica de Euler  $\chi(X, Y) := \sum_\lambda (-1)^\lambda \beta_\lambda(X, Y)$  es aditiva, ver ([7], pág. 129, lema 20.7).

**Lema 1.6.1.** *Sea  $S$  una función subaditiva y consideremos espacios  $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n$ . Entonces  $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$ . Si  $S$  es aditiva entonces se cumple la igualdad.*

**Demostración.** Vamos a proceder por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , se tiene la igualdad se tiene trivialmente y el caso  $n = 2$  es la definición de subaditividad y aditividad. Supongamos que se tiene el resultado para  $n - 1$ , entonces

$$S(X_n, X_0) \leq S(X_n, X_{n-1}) + S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1}). \quad (1.2)$$

y así es el resultado cierto para  $n$ . □

Definimos  $S(X) := S(X, \emptyset)$ . Tomando  $X_0 = \emptyset$  en el lema anterior podemos escribir el resultado de la siguiente forma

$$S(X) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$$

Con igualdad si  $S$  es aditiva.

Sea  $M$  una variedad compacta y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $M$  con puntos críticos aislados, no degenerados. Sean  $a_1 < \dots < a_k$  tales que  $M^{a_i}$  contenga exactamente  $i$  puntos críticos y  $M^{a_k} = M$ . Entonces

$$\begin{aligned} H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \quad \text{donde } \lambda_i \text{ es el índice del punto crítico,} \\ &= H_*(e^{\lambda_i}, \partial e^{\lambda_i}) \quad \text{por escisión,} \\ &= \begin{cases} \text{coeficientes} & \text{en dimensión } \lambda_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.6.1 a  $\emptyset = M^{a_0} \subseteq M^{a_1} \subseteq \dots \subseteq M^{a_k} = M$  con  $S = \beta_\lambda$ , se tiene lo siguiente

$$\beta_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k (M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda;$$

donde  $C_\lambda$  denota el número de puntos críticos de índice  $\lambda$ . Aplicando esta fórmula al caso en que  $S$  es la característica de Euler  $\chi$ , se tiene que

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \dots \pm C_n.$$

Por lo tanto, hemos probado el siguiente.

**Teorema 1.6.1** (Desigualdades de Morse débiles). *Si  $C_\lambda$  denota el número de puntos críticos de índice  $\lambda$  en la variedad compacta  $M$ , entonces*

$$\beta_\lambda(M) \leq C_\lambda \quad (1.3)$$

$$\sum_{\lambda} (-1)^\lambda \beta_\lambda(M) = \sum_{\lambda} (-1)^\lambda C_\lambda \quad (1.4)$$

El siguiente argumento se puede usar para obtener desigualdades ligeramente más precisas.

**Lema 1.6.2.** *La función  $S_\lambda$  dada por*

$$S_\lambda(X, Y) = \beta_\lambda(X, Y) - \beta_{\lambda-1}(X, Y) - \dots \pm \beta_0(X, Y)$$

*es subaditiva.*

**Demostración.** Dada una sucesión exacta

$$\dots \xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \dots \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

de espacios vectoriales, notemos que el rango del homomorfismo  $h$  más el rango de  $i$  es igual a la dimensión  $A$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{rg } h &= \dim A - \text{rg } i \\ &= \dim A - \dim B + \text{rg } j \\ &= \dim A - \dim B + \dim C - \text{rg } k \\ &\vdots \\ &= \dim A - \dim B + \dim C - \dots \pm \text{rg } D. \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión anterior es  $\geq 0$ . Consideremos ahora la sucesión exacta en homología de la terna  $X \supseteq Y \supseteq Z$ . Aplicando el mismo cálculo al homomorfismo

$$H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(X, Y)$$

tenemos que

$$\text{rg } \partial = \beta_\lambda(Y, Z) - \beta_\lambda(X, Z) + \beta_\lambda(X, Y) - \beta_{\lambda-1}(Y, Z) + \dots \geq 0$$

Reordenando los términos, se tiene que

$$S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y) \geq 0,$$

lo que completa la demostración. □

Aplicando esta función subaditiva  $S_\lambda$  a los espacios

$$\emptyset \subseteq M^{a_1} \subseteq M^{a_2} \subseteq \dots \subseteq M^{a_k}$$

Obtenemos las **desigualdades de Morse**:

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}})$$

o

$$\beta_\lambda(M) - \beta_{\lambda-1}(M) + \dots \pm \beta_0(M) \leq C_\lambda - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0. \quad (1.5)$$

Estas desigualdades son definitivamente más precisas que las anteriores. De hecho, sumando la desigualdad 1.5 con  $\lambda$  y  $\lambda - 1$ , uno puede obtener la desigualdad 1.3 y comparando 1.5 con  $\lambda$ ,  $\lambda - 1$  para  $\lambda > n$  obtenemos la igualdad 1.4.

Como un ejemplo para el uso de las desigualdades de Morse, supongamos que  $C_{\lambda+1} = 0$ . Entonces  $R_{\lambda+1}$  debe ser también 0. Vemos que

$$R_{\lambda}(M) - R_{\lambda-1}(M) + \dots \pm R_0(M) = C_{\lambda} - C_{\lambda-1} + \dots \pm C_0.$$

Ahora supongamos que  $C_{\lambda-1}$  también es 0. Entonces  $R_{\lambda-1} = 0$ , con un argumento similar se demostramos que

$$R_{\lambda-2}(M) - R_{\lambda-3}(M) + \dots \pm R_0(M) = C_{\lambda-2} - C_{\lambda-3} + \dots \pm C_0.$$

Substrayendo esta de la igualdad anterior obtenemos lo siguiente:

**Corolario 1.6.1.** *Si  $C_{\lambda+1} = C_{\lambda-1} = 0$ , entonces  $R_{\lambda} = C_{\lambda}$  y  $R_{\lambda+1} = C_{\lambda-1} = 0$ .*

(Claro que esto se sigue también del Teorema 1.4.3). Notemos que este corolario nos permite encontrar los grupos de homología de espacios proyectivos complejos (ver sección 1.5) sin hacer uso del Teorema 1.4.3.



# Capítulo 2

## Equilibrios relativos en el problema de los $n$ cuerpos

### 2.1. Introducción

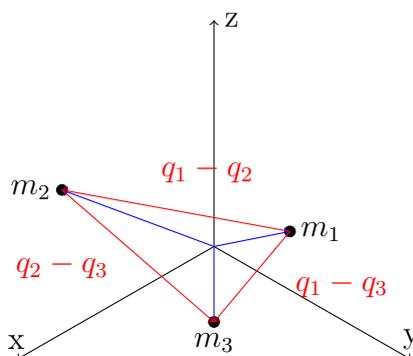
Este capítulo trata sobre un tipo de soluciones del problema de  $n$  cuerpos Newtoniano que llamaremos configuraciones centrales más aún a configuraciones centrales planas las cuales todas las partículas residen en un plano. Una pregunta fundamentada por Wintner y reformulada por S.Smale es si las clases de equivalencia de configuraciones planas son finitas.

En este capítulo también mostraremos que el problema anterior se puede reducir a calcular los puntos críticos de una función similar a la función potencial sobre una carta coordenada de un espacio proyectivo complejo de dimensión menor a  $n$ . Usando las desigualdades de Morse podemos dar una cota inferior sobre la cantidad de puntos críticos no degenerados, por otro lado mostraremos que el índice puntos críticos colineales, es decir, los cuales sus puntos como configuración son colineales, debe ser al menos 2.

Sean  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^3$  puntos distintos de  $\mathbb{R}^3$  a los cuales asignamos masas positivas  $m_1, \dots, m_n$  respectivamente. Sea

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

el potencial de Newton. Denotaremos las coordenadas de  $q_i = (q_{ix}, q_{iy}, q_{iz})$ .



**Definición.** Dados  $c_1, \dots, c_n$  puntos distintos en  $\mathbb{R}^3$ , diremos que  $c = (c_1, \dots, c_n)$  *configuración central* si

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_c = \left[ \frac{\partial V}{\partial q_{ix}}, \frac{\partial V}{\partial q_{iy}}, \frac{\partial V}{\partial q_{iz}} \right]_c = \sigma m_i c_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

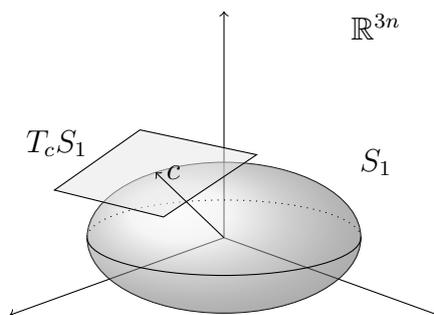
con  $\sigma \in \mathbb{R}$  independiente de  $i$ .

**Observación 2.1.1.** Si  $c = (c_1, \dots, c_n)$  es una configuración central, entonces  $T(c) = (T(c_1), \dots, T(c_n))$  también es una configuración central para toda  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dilatación/rotación en  $\mathbb{R}^3$ , i.e.,  $T(x) = \alpha \Omega x$  con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\Omega \in SO(3)$ . En tal caso, diremos que las configuraciones centrales  $c$  y  $T(c)$  pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Un aspecto del problema de los  $n$  cuerpos es la enumeración de clases de configuraciones centrales. En particular, se conjetura que solo hay un número finito de ellas.

## 2.2. El Teorema de Smale

**Teorema 2.2.1.** Sea  $S_1$  el elipsoide dado por la ecuación  $\sum_{i=1}^n m_i \|q_i\|^2 = 1$  en  $\mathbb{R}^{3n}$ . Un punto en  $c \in S_1$  es una configuración central si y sólo si  $c$  es un punto crítico de la restricción  $V|_{S_1}$ .



**Demostración.** Sea  $T_c S_1$  el espacio tangente a  $S_1$  en el punto  $c \in S_1$ , es decir,

$$T_c S_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3n} \mid \sum_{i=1}^n m_i \langle c_i, X_i \rangle = 0 \right\},$$

donde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_i \in \mathbb{R}^3$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto interno de  $\mathbb{R}^3$ , notemos  $\mathbb{R}^{3n} = T_c S_1 \oplus \mathbb{R}c$ . De este modo, dado  $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ , que la condición  $Z = rc$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , es equivalente a que  $\sum_{i=1}^n m_i \langle Z_i, X_i \rangle = 0$  para todo vector  $X \in T_c S_1$ .

Sea  $DV$  la derivada de  $V$ . Tenemos que para todo  $X \in T_c S_1$ :

$$D(V|_{S_1})(X) = DV(X) = \sum_{i=1}^n \left\langle \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_c, X_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n m_i \langle Z_i, X_i \rangle$$

con  $Z_i = \frac{1}{m_i} \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_c$ .

Por lo tanto  $c$  es un punto crítico de  $V|_{S_1}$  si y sólo si  $D(V|_{S_1})(X) = 0$  para todo  $X \in T_c S_1$ , lo cual sucede si y solo si el vector  $Z$  es un múltiplo de  $c$ .  $\square$

**Observación 2.2.1.** 1. Si  $c \in S_1$  es una configuración central, tenemos que

$$\sigma = \sigma \cdot \sum_{i=1}^n m_i \|c_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \sigma m_i c_i, c_i \rangle = \left\langle \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_c, c_i \right\rangle = -V(c),$$

ya que es  $V$  homogénea de grado  $-1$ .

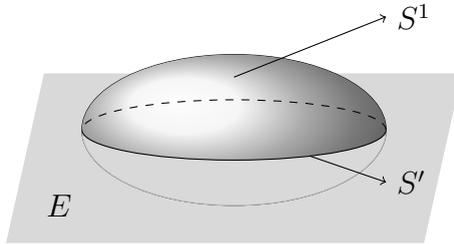
2. Por otro lado, en todo punto  $q \in \mathbb{R}^{3n}$ , se tiene  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$ . En efecto, un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^3} (q_i - q_j).$$

La igualdad  $\sum_{i=0}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$  se sigue de inmediato.

3. Para toda de configuración central  $c$ , se tiene que  $\sigma \sum_{i=1}^n m_i c_i = 0$ , de donde  $\sum_{i=1}^n m_i c_i = 0$ , ya que  $\sigma = -V(c) \neq 0$ .

De las observaciones anteriores tenemos que las configuraciones centrales se encuentran en la intersección  $S'$  de  $S_1$  con el subespacio vectorial  $E = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \sum_{i=1}^n m_i X_i = 0\}$



De hecho se tiene que:

**Lema 2.2.1.** *Un punto  $c \in S'$  es una configuración central si y sólo si  $c$  es un punto crítico de  $V|_{S'}$ .*

**Demostración.** Si  $c \in S'$ , el vector  $\left( \frac{1}{m_1} \left[ \frac{\partial V}{\partial q_1} \right]_c, \dots, \frac{1}{m_n} \left[ \frac{\partial V}{\partial q_n} \right]_c \right)$  en  $T_c S_1$  de hecho se encuentra en  $T_c S'$ , el espacio tangente a  $S'$  en  $c$ , ya que  $\sum_{i=0}^n \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_c = 0$ .  $\square$

Finalmente, notemos que la clase de equivalencia de una configuración central  $c \in S'$  está representada por la órbita  $SO(3) \cdot c$  de  $c$  en  $S'$ .

### 2.3. Equilibrio Relativos

A partir de ahora nos concentraremos en las *configuraciones centrales planas*, es decir, aquellas configuraciones tales que  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^2$ . Estas configuraciones centrales también suelen llamarse *equilibrios relativos*. En este trabajo, estos últimos están caracterizados por la existencia de una curva  $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow SO(2)$  con  $\Omega(0) = I_3$  tal que las trayectorias  $q_i(t) = \Omega(t)c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  satisfacen las ecuaciones de Newton:

$$m_i \ddot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se puede probar que si las  $q_i(t)$ , definidas como antes, satisfacen las ecuaciones de Newton, entonces los  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , deben estar en un plano y el movimiento es una rotación uniforme en dicho plano (ver [21] pág 287-292). Para un uso más general del término *equilibrio relativo*, ver [21] pág 286.

Consideremos entonces el conjunto  $S = \{q \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i=1}^n m_i \|q_i\|^2 = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^n m_i q_i = 0\}$ .

Por el Teorema 2.2.1, una configuración  $c = (c_1, \dots, c_n) \in S$  es un equilibrio relativo si y sólo si  $c$  es un punto crítico de la función  $V|_S$ . Por otra lado, la clase de equivalencia del equilibrio relativo  $c$  está representada por la órbita  $SO(2) \cdot c$  de  $c$  bajo el grupo de rotaciones del plano  $\mathbb{R}^2$ .

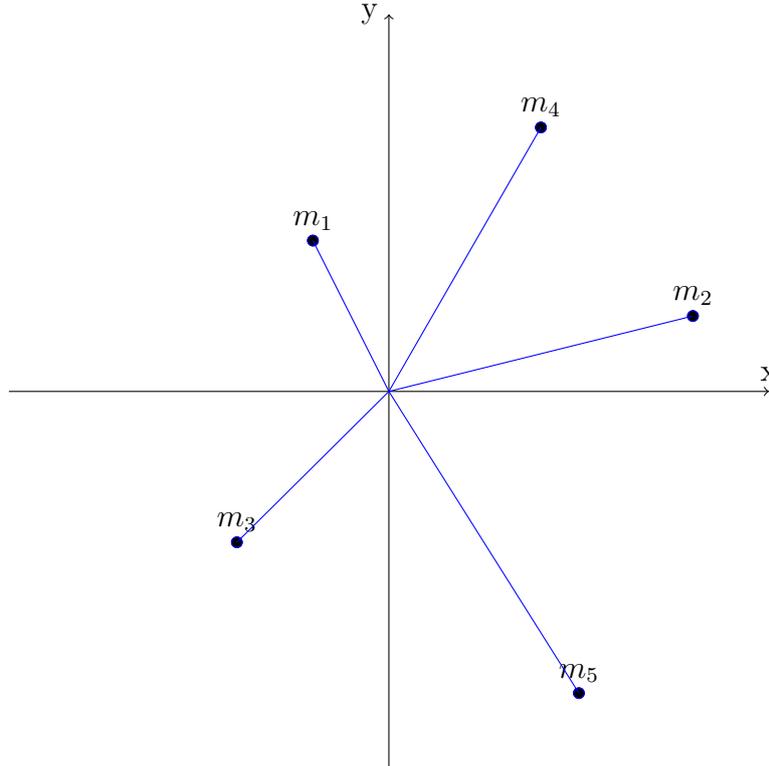


Figura 2.1: Configuración plana de 5 puntos

Es fácil ver que el espacio  $S$  es homeomorfo a la esfera unitaria  $S^{2n-3}$  por un homeomorfismo compatible con la acción de  $SO(2) \cong S^1$ . Por lo tanto, el correspondiente espacio de órbitas  $S/S^1$  es difeomorfo al espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^{n-2}$ . Identificando a  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , un difeomorfismo  $S/S^1 \rightarrow \mathbb{C}P^{n-2}$  está dado por:

$$(q_1, \dots, q_n) \mapsto [q_1 - q_n : \dots : q_{n-1} - q_n].$$

Ya que no todas las diferencias  $q_i - q_n$  son iguales a cero. De hecho, al suponer que los puntos  $q_1, \dots, q_n$  son distintos, se tiene en particular que  $q_{n-1} - q_n \neq 0$  y la imagen de dicha configuración cae sobre la carta

$$\{[z_1 : \dots : z_{n-2} : z_{n-1}] \mid z_{n-1} = 1\} = \mathbb{C}^{n-2} \subseteq \mathbb{C}P^{n-2}$$

Para restablecer la simetría entre las variables es útil introducir una variable ficticia:  $z_n = 0$ . Así, las fórmulas para obtener los  $q_i$ 's a partir de los  $z_i$ 's son

$$q_i = A(z_i - \zeta), \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

donde  $\zeta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$  y  $A$  es el real positivo dado por  $A^2 C = 1$ , con  $C = \sum_{i=1}^n m_i \|z_i - \zeta\|^2$

y  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ . En todas estas fórmulas  $z_{n-1} = 1$ ,  $z_n = 0$ .

Sea  $D = \{z \in \mathbb{C}^{n-2} \mid \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j) = 0\}$ . El potencial en  $M = \mathbb{C}^{n-2} \setminus D$  se transformara en

$$P = -\frac{1}{A} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|}.$$

**Proposición 1.** *Las derivadas parciales de  $P$  para  $i = 1, \dots, n$  están dadas por*

$$A \frac{\partial P}{\partial z_i} = \frac{AP}{C} m_i (z_i - \zeta) + \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} (z_i - z_j), \quad \text{para } i = 1, \dots, n-2.$$

**Demostración.**

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{A} = \frac{\partial}{\partial z_i} \sqrt{C} = \frac{1}{2\sqrt{C}} \frac{\partial}{\partial z_i} C = \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \sum_{k=0}^n m_k \|z_k - \zeta\|^2 \right).$$

Recordando que  $\frac{\partial}{\partial z_i} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} C &= \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial}{\partial x_i} \|z_k - \zeta\|^2 - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l z_l \frac{\partial}{\partial x_i} C \\ &= -\sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{2m_k m_i}{m} \right) (x_k - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l x_l) \right] + 2m_i (x_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l x_l) \\ &= 2 \left[ -\sum_{k=1}^n \frac{m_i}{m} m_k x_k + \frac{m_i}{m^2} \sum_{k=1}^n m_k \sum_{l=1}^n m_l x_l + m_i (x_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l x_l) \right] \\ &= 2 \left[ \frac{m_i}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k - \frac{m_i}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k \right] + 2m_i (x_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l x_l) \\ &= 2m_i (x_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l x_l) = 2m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Antes de seguir en esta capítulo denotaremos a  $\sqrt{-1}$  como  $i$ .

Análogamente se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} C = 2m_i (y_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l y_l) = 2m_i \langle z_i - \zeta, i \rangle.$$

Así que

$$\frac{\partial}{\partial z_i} C = 2m_i (z_i - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l z_l) = 2m_i (z_i - \zeta).$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{A} = Am_i(z_i - \zeta).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{m_k m_j}{\|z_k - z_j\|} &= \sum_{1 \leq k < j \leq n} m_k m_j \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{\|z_k - z_j\|} \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq n} m_k m_j \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \right) \\ &= \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1 \\ j=1}}^n m_k m_j \left( \frac{-1}{(\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2})^3} \right) ((x_i - x_k), (y_i - y_k)) \\ &= \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^n \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} (z_k - z_i). \end{aligned}$$

Derivemos  $P$  respecto de la variable  $x_i$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = - \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|} \frac{\partial}{\partial x_i} C^{\frac{1}{2}} + C^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|} \right].$$

Sustituyendo los valores de las parciales  $\frac{\partial C^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z_i} &= - \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|} \frac{\partial}{\partial z_i} C^{\frac{1}{2}} + C^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|} \right] \\ &= PC^{-1} m_i (z_i - \zeta) + C^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^n \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} (z_i - z_k). \end{aligned}$$

Multiplicando por  $A$  la expresión de arriba se tiene la igualdad deseada.  $\square$

Ya calculadas las derivadas parciales de primer podemos hacer el cálculo del Hessiano de  $P$  sobre sus puntos críticos.

**Proposición 2.** Sean  $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}'$  vectores de  $\mathbb{C}^{n-2}$ . Escribimos  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_{n-1}, Z_n)$  con  $Z_{n-1} = Z_n = 0$ . De igual manera  $\mathbf{Z}' = (Z'_1, \dots, Z'_{n-1}, Z'_n)$  con  $Z'_{n-1} = Z'_n = 0$ . Sean  $Z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i Z_i$ ,  $Z' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i Z'_i$ . Entonces

$$\begin{aligned} AD^2 P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \\ &\quad - 3 \frac{AP}{C^2} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle \langle z_j - \zeta, Z'_j - Z' \rangle \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle. \end{aligned}$$

**Demostración.** Para ver que la expresión anterior es efectivamente el Hessiano calcularemos las derivadas parciales de segundo orden y veremos si coinciden con la expresión de la proposición cuando evaluemos en los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \frac{\partial P}{\partial x_j} \left( C^{-1} m_i \left( x_i - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k \right) \right) + P m_i \left( x_i - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{C} \\ &\quad + P C^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} m_i \left( x_i - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k \right) \right) - \frac{\partial C^{\frac{1}{2}}}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial x_i} - C^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} L \end{aligned}$$

donde  $L = -AP$ . Como estamos calculando el Hessiano en un punto crítico, tenemos que  $\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , lo que produce la siguiente igualdad.

$$\sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} (x_k - x_i) = \frac{P}{C^{\frac{3}{2}}} \langle m_i (z_i - \zeta), 1 \rangle, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Luego, si  $j \neq i$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} (x_k - x_i) = \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_j\|^3} \left( 1 - 3 \frac{(x_j - x_i)^2}{\|z_i - z_j\|^2} \right).$$

Por lo tanto  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial x_i}$  es igual a lo siguiente:

$$\begin{aligned} &- m_i \frac{m_j P}{m C} - \frac{P m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle}{C^2} 2 m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle - \frac{m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle}{C^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} (x_k - x_i) \\ &- C^{\frac{1}{2}} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_j\|^3} \left( 1 - 3 \frac{(x_j - x_i)^2}{\|z_i - z_j\|^2} \right) = \\ &- m_i m_j \frac{P}{m C} - 2 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle - \frac{m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle}{C^{\frac{1}{2}}} \frac{P}{C^{\frac{3}{2}}} \langle m_i (z_i - \zeta), 1 \rangle \\ &- C^{\frac{1}{2}} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_j\|^3} \left( 1 - 3 \frac{(x_j - x_i)^2}{\|z_i - z_j\|^2} \right) = \\ &- m_i m_j \frac{P}{m C} - 3 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle - C^{\frac{1}{2}} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} \left( 1 - 3 \frac{(x_j - x_i)^2}{\|z_i - z_j\|^2} \right) \end{aligned}$$

$$A \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} = m_i m_j \left( -\frac{AP}{mC} - \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} - 3 \frac{AP}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle + 3 \frac{(x_j - x_i)^2}{\|z_i - z_j\|^5} \right)$$

Definamos  $\mathbf{Z}^{k,a} = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ , tal que  $Z_l = 0$ , cuando  $l \neq k$  y  $Z_k = a$ . Denotaremos a  $Z_l$  de  $\mathbf{Z}^{k,a}$  como  $Z_l^{k,a}$  y  $Z^{k,a} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n m_l Z_l^{k,a} = \frac{m_k}{m} a$ .

Evaluando  $AD^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}')$  en  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1})$  tenemos

$$\begin{aligned}
 D^2P(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1}) &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_k - z_l\|^3} \right) \langle Z_k^{i,1} - Z_l^{i,1}, Z_k^{j,1} - Z_l^{j,1} \rangle \\
 &\quad - 3 \frac{AP}{C^2} \sum_{k,l=1}^n m_k m_l \langle z_k - \zeta, Z_k^{i,1} - Z_l^{i,1} \rangle \langle z_l - \zeta, Z_l^{j,1} - Z_l^{j,1} \rangle \\
 &\quad - 3 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{m_k m_l}{\|z_k - z_l\|^5} \langle z_k - z_l, Z_k^{i,1} - Z_l^{i,1} \rangle \langle z_k - z_l, Z_k^{j,1} - Z_l^{j,1} \rangle.
 \end{aligned}$$

Sean  $B := \sum_{i=1}^n m_i \langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle$  y  $B' := \sum_{i=1}^n m_i \langle z_i - \zeta, Z'_i - Z' \rangle$ .

Notemos que

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{i=1}^n m_i \langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle = \sum_{i=1}^n \langle m_i(z_i - \zeta), Z_i \rangle - \langle m_i(z_i - \zeta), Z \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^n \langle m_i(z_i - \zeta), Z_i \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n m_i(z_i - \zeta), Z \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle m_i(z_i - \zeta), Z_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene  $B' = \sum_{i=1}^n \langle m_i(z_i - \zeta), Z'_i \rangle$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 AD^2P(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1}) &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_k - z_l\|^3} \right) \langle Z_k^{i,1} - Z_l^{i,1}, Z_k^{j,1} - Z_l^{j,1} \rangle - 3 \frac{AP}{C^2} BB' \\
 &\quad - 3 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{m_k m_l}{\|z_k - z_l\|^5} \langle z_k - z_l, Z_k^{i,1} - Z_l^{i,1} \rangle \langle z_k - z_l, Z_k^{j,1} - Z_l^{j,1} \rangle.
 \end{aligned}$$

El valor de  $B, B'$  en  $\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1}$  descritos anteriormente es igual

$$B = \sum_{l=1}^n \langle m_l(z_l - \zeta), Z_l \rangle = \langle m_i(z_i - \zeta), 1 \rangle,$$

ya que los demás terminos se vuelven 0, de la misma forma se obtiene

$$B' = \langle m_j(z_j - \zeta), 1 \rangle.$$

Notemos que  $\langle Z_l^{i,1} - Z_k^{i,1}, Z_l^{j,1} - Z_k^{j,1} \rangle = 0$ , si  $l \neq i$  o  $k \neq j$ , por lo que el único termino que sobrevive del primer sumando de  $AD^2P(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1})$  es  $\langle Z_i^{i,1} - Z_j^{i,1}, Z_i^{j,1} - Z_j^{j,1} \rangle$  haciendo un proceso análogo obtenemos que el único término no nulo del tercer sumando es  $\langle z_i - z_j, Z_i^{i,1} - Z_j^{i,1} \rangle \langle z_i - z_j, Z_i^{j,1} - Z_j^{j,1} \rangle$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 AD^2P(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1}) &= -m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) - 3 \frac{AP}{C^2} \langle m_i(z_i - \zeta), 1 \rangle \langle m_j(z_j - \zeta), 1 \rangle \\
 &\quad - 3 \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, 1 \rangle \langle z_i - z_j, -1 \rangle \\
 &= -m_i m_j \left[ -\frac{AP}{mC} - \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} - 3 \frac{AP}{C^2} \langle (z_i - \zeta), 1 \rangle \langle (z_j - \zeta), 1 \rangle \right] \\
 &\quad + 3 \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} (x_i - x_j)^2.
 \end{aligned}$$

De forma análoga se puede obtener que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{P}{C} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle + C^{\frac{1}{2}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \langle z_i - z_k, 1 \rangle \right) \\
 &= \frac{P}{C} m_i \frac{m - m_i}{m} - 2 \frac{P}{C^2} m_i^2 \langle z_i - \zeta, 1 \rangle^2 - \frac{\langle z_i - \zeta, 1 \rangle}{C^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \langle z_k - z_i, 1 \rangle \\
 &\quad + C^{\frac{1}{2}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \left( 1 - 3 \frac{\langle z_k - z_i, 1 \rangle}{\|z_i - z_k\|^2} \right) \\
 &= \frac{P}{C} m_i \frac{m - m_i}{m} - 3 \frac{P}{C^2} m_i^2 \langle z_i - \zeta, 1 \rangle^2 + C^{\frac{1}{2}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \left( 1 - 3 \frac{\langle z_k - z_i, 1 \rangle^2}{\|z_i - z_k\|^2} \right).
 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $A$  la igualdad anterior tenemos:

$$A \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} = \sum_{k \neq i} m_i m_k \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_k\|^3} \right) - 3 \frac{AP}{C^2} m_i^2 \langle z_i - \zeta, 1 \rangle^2 - 3 \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^5} \langle z_i - z_k, 1 \rangle^2.$$

Evaluando  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{i,1})$  en  $AD^2P$  es igual a

$$\sum_{k \neq i} m_i m_k \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_k\|^3} \right) - 3 \frac{AP}{C^2} m_i^2 \langle z_i - \zeta, 1 \rangle^2 - 3 \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^5} \langle z_i - z_k, 1 \rangle^2.$$

Para  $\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial P}{\partial x_i}$  tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= -2 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, i \rangle - \frac{m_j \langle z_j - \zeta, i \rangle}{C^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} \langle z_k - z_i, 1 \rangle \\
 &\quad - 3C^{\frac{1}{2}} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_j - z_i, 1 \rangle \langle z_i - z_j, i \rangle \\
 &= -3 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, i \rangle - 3C^{\frac{1}{2}} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, 1 \rangle \langle z_i - z_j, -i \rangle.
 \end{aligned}$$

Evaluando  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,i})$  en  $AD^2P$  es igual a

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i < j} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle - 3 \frac{AP}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle m_j \langle z_j - \zeta, i \rangle \\
 &\quad - 3 \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, 1 \rangle \langle z_i - z_j, -i \rangle.
 \end{aligned}$$

Para  $\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial P}{\partial x_i}$  tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} &= -2 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle \langle z_j - \zeta, i \rangle - \frac{m_i \langle z_i - \zeta, i \rangle}{C^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \langle z_k - z_i, 1 \rangle \\
&\quad - 3C^{\frac{1}{2}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^5} \langle z_i - z_k, 1 \rangle \langle z_i - z_k, i \rangle \\
&= -3 \frac{P}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle \langle z_j - \zeta, i \rangle - 3C^{\frac{1}{2}} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^5} \langle z_i - z_k, 1 \rangle \langle z_i - z_k, i \rangle.
\end{aligned}$$

Evaluando de  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{i,1})$  en  $AD^2P$  nos da:

$$-3 \frac{AP}{C^2} m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle \langle z_i - \zeta, i \rangle - 3 \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^5} \langle z_i - z_k, 1 \rangle \langle z_i - z_k, i \rangle$$

□

De lo anterior, las clases de equilibrios relativos están en correspondencia biyectiva con los puntos críticos de la función  $P$  definida sobre el espacio de configuraciones  $F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)$ .

**Definición.** Una configuración central  $c \in \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  se llamará colineal si los  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^2$  son colineales. De este modo las coordenadas  $z_1, \dots, z_{n-2}$  del punto crítico correspondiente, de la función  $P$  sobre  $M = F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)$ , son todas reales.

**Teorema 2.3.1** (Teorema de Moulton-Smale). *Existen  $\frac{n!}{2}$  clases de equivalencia de equilibrios relativos colineales.*

**Bosquejo.** La idea de la demostración es ver que los puntos críticos de  $P : \mathbb{C}^{n-2} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  que tienen puras entradas reales son puntos críticos de  $P|_{\mathbb{R}^{n-2} \setminus D}$ . Como  $\mathbb{R}^{n-2} \setminus D$  tiene  $n!/2$  componentes conexas y cada crítico es un máximo se va tener que solo hay un punto crítico por cada componente. Por lo tanto hay  $n!/2$  puntos críticos colineales.

## 2.4. Máximos de Potencial

**Proposición 3.** *Ninguno de los puntos críticos reales de  $P$  es un máximo.*

**Demostración.** Sea  $x = (x_1, \dots, x_{n-2})$  un punto crítico real de  $P$ . Podemos reindexar los  $x_i$ 's de tal manera que  $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-2} > 1$ . Consideremos el vector  $\mathbf{Z} = (i, 0, \dots, 0)$ . Es suficiente verificar que  $D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) > 0$ .

Sustituyendo los datos en la expresión de  $D^2P$  anterior (ver sección 3) y teniendo en cuenta que en este caso

$$\langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle = \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle = 0$$

obtenemos

$$AD^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \sum_{j=2}^n m_1 m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{(x_1 - x_j)^3} \right).$$

Sin embargo, tenemos

$$\frac{AP}{C}(x_1 - \zeta) + \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{(x_1 - x_i)^2} = 0.$$

y que  $x$  es un punto crítico de  $P$  y  $x_1 > x_i$ , para  $i = 2, \dots, n$ .

Sustituyendo en la expresión de  $D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{Am}{m_1}(x_1 - \zeta)D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) &= \sum_{i,j=2}^n m_i m_j \left( \frac{x_1 - x_i}{(x_1 - x_j)^3} - \frac{1}{(x_1 - x_i)^2} \right) \\ &= \sum_{2 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{x_1 - x_i}{(x_1 - x_j)^3} - \frac{1}{(x_1 - x_i)^2} + \frac{x_1 - x_j}{(x_1 - x_i)^3} - \frac{1}{(x_1 - x_j)^2} \right) \\ &= \sum_{2 \leq i < j \leq n} m_i m_j \frac{(x_i - x_j)((x_1 - x_j)^3 - (x_1 - x_i)^3)}{(x_1 - x_i)^3(x_1 - x_j)^3}. \end{aligned}$$

Como  $m(x_1 - \xi) = \sum_{i=2}^n m_i(x_1 - x_i) > 0$ , se sigue que  $D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) > 0$ .  $\square$

**Corolario 2.4.1.** *Siempre existen al menos 2 clases de equivalencia de equilibrios relativos no colineales que corresponden máximos de potencial.*

**Demostración.** En efecto, el potencial  $V$  tiende a  $-\infty$  cuando nos acercamos a una colisión, es decir, al conjunto dado por  $\prod_{i < j} \|q_i - q_j\| = 0$ . Por lo tanto,  $P$  debe tomar al menos un valor máximo en el espacio de configuraciones  $F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n - 2)$ . Por otra parte, si  $z \in F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n - 2)$  es un punto crítico de  $P$ ,  $\bar{z}$  y también pertenece a  $F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n - 2)$  también es punto crítico de  $P$  (y evidentemente  $z = \bar{z}$  si y sólo si  $z$  es real). Obtenemos así la existencia de al menos dos clases de equilibrios relativos no colineales.  $\square$

**Ejemplo.** Supongamos  $n = 3$ . Por el teorema de Moulton-Smale sabemos que existen  $\frac{1}{2}3! = 3$  equilibrios relativos colineales. Acabamos de ver que también hay al menos 2 equilibrios relativos no colineales. Se les encuentra fácilmente. Un tal punto  $z \in M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  debe ser solución de la ecuación

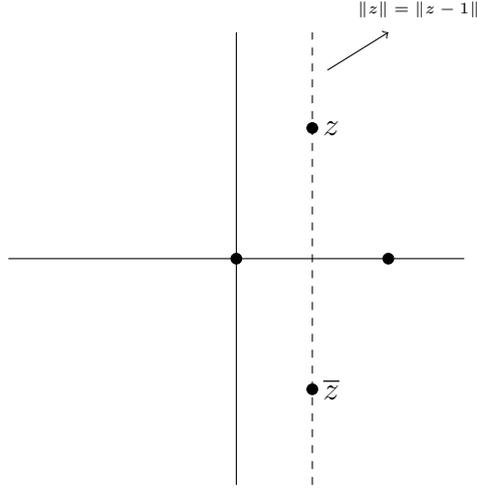
$$\frac{AP}{mC}(m_2(z - 1) + m_3z) + \frac{m_2}{\|z - 1\|^3}(z - 1) + \frac{m_3}{\|z\|^3}z = 0.$$

Como  $\frac{AP}{mC}$  y los  $m_i$  son reales, los coeficientes de  $z$  y 1 se deben anular de manera independiente, lo que nos da

$$\frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z - 1\|^3} = \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z\|^3} = 0.$$

De aquí se sigue que  $\|z - 1\| = \|z\|$ . Usando que  $mC = m_1m_2\|z - 1\|^2 + m_1m_3\|z\|^2 + m_2m_3$ , concluimos  $\|z - 1\| = \|z\| = 1$ .

Se puede ver que en este caso todos los puntos críticos de  $P$  son no degenerados.



## 2.5. Índices de los puntos críticos de $P$

Asumiendo que los puntos críticos de  $P$  son no degenerados, podemos hacer algunas observaciones sobre sus índices posibles. Como lo hicimos anteriormente pongamos

$$B = \sum_{i=1}^n m_i \langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle, \quad B' = \sum_{i=1}^n m_i \langle z_i - \zeta, Z'_i - Z' \rangle \text{ y sean}$$

$$w_i = -\frac{AB}{C}(z_i - \zeta) + A(Z_i - Z)$$

$$w'_i = -\frac{AB}{C}(z'_i - \zeta) + A(Z'_i - Z').$$

Entonces tenemos

**Proposición 4.** *La forma  $D^2P$  se puede expresar de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} AD^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \\ &\quad - 3A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} \langle q_i - q_j, w_i - w_j \rangle \langle q_i - q_j, w'_i - w'_j \rangle \end{aligned}$$

$$\text{donde } q_i = A(z_i - \zeta), \quad m\zeta = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad \text{y} \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

**Demostración.** Demostremos que la expresión anterior coincide con

$$\begin{aligned} AD^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \\ &\quad - 3 \frac{AP}{C^2} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \langle z_i - \zeta, Z_i - Z \rangle \langle z_j - \zeta, Z'_j - Z' \rangle \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \end{aligned}$$

en los vectores canónicos.

Notemos que para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 & \langle q_i - q_j, w_i - w_j \rangle \langle q_i - q_j, w'_i - w'_j \rangle \\
 &= \langle A(z_i - z_j), \frac{-AB}{C}(z_i - z_j) + A(Z_i - Z_j) \rangle \langle A(z_i - z_j), \frac{-AB'}{C}(z_i - z_j) + A(Z'_i - Z'_j) \rangle \\
 &= A^4 \left( \langle z_i - z_j, \frac{-B}{C}z_i - z_j \rangle + \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \right) \left( \langle z_i - z_j, \frac{-B'}{C}z_i - z_j \rangle + \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \right) \\
 &= A^4 \left( \frac{BB'}{C^2} \|z_i - z_j\|^4 - \frac{\|z_i - z_j\|^2}{C} (B\langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle + B'\langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle) \right) \\
 & \quad + A^4 \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A^5 \|z_i - z_j\|^5} \langle q_i - q_j, w_i - w_j \rangle \langle q_i - q_j, w'_i - w'_j \rangle = \\
 & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|} \frac{BB'}{C^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{AC \|z_i - z_j\|^3} (B\langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle + B'\langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle) \\
 & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle = \\
 & - \frac{PBB'}{C^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{AC \|z_i - z_j\|^3} (B\langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle + B'\langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle) \\
 & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Lo que implica que la expresión de la proposición se igual a:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle + 3A \frac{PBB'}{C^2} \\
 & - 3A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{AC \|z_i - z_j\|^3} (B\langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle + B'\langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle) \\
 & - 3A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle
 \end{aligned}$$

Evaluemos en  $\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1}$ . Recordemos que  $B = m_i \langle z_i - \zeta, 1 \rangle$  y  $B' = m_j \langle z_j - \zeta, 1 \rangle$  en  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1})$ .

$$\begin{aligned}
 \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle &= \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|z_i - z_k\|^3} \langle z_i - z_k, 1 \rangle = \frac{-P}{C^{\frac{3}{2}}} B \\
 \sum_{i < j} \frac{m_j m_k}{\|z_j - z_k\|^3} \langle z_j - z_k, Z'_j - Z'_k \rangle &= \sum_{k \neq j} \frac{m_j m_k}{\|z_j - z_k\|^3} \langle z_j - z_k, 1 \rangle = \frac{-P}{C^{\frac{3}{2}}} B'
 \end{aligned}$$

Las últimas igualdad se tienen de que  $z$  es punto crítico. Lo mismo si  $\mathbf{Z}^{i,i}$  o  $\mathbf{Z}^{j,i}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 AD^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle - 3A \frac{PBB'}{C^2} \\
 &\quad - 3A \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|^5} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Es decir que coinciden las dos expresiones del Hessiano.  $\square$

Más aún, nuevamente en los puntos críticos el Hessiano se puede expresar de la siguiente forma

**Proposición 5.** *La forma  $D^2P$  se puede expresar como sigue:*

$$\begin{aligned}
 D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \langle w_i - w_j, w'_i - w'_j \rangle \\
 &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} \langle q_i - q_j, w_i - w_j \rangle \langle q_i - q_j, w'_i - w'_j \rangle.
 \end{aligned}$$

**Demostración.** Comprobaremos que la expresión del inciso 1) es igual a la del inciso 2). Recordando la definición de los  $w_i$ 's y ( $w'_j$ )'s tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle w_i - w_j, w'_i - w'_j \rangle &= \left\langle -\frac{AB}{C}(z_i - z_j) + A(Z_i - Z_j), -\frac{AB}{C}(z_i - z_j) + A(Z'_i - Z'_j) \right\rangle \\
 &= \frac{A^2BB'}{C^2} \|z_i - z_j\|^2 - \frac{A^2B}{C} \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle - \frac{A^2B'}{C} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \\
 &\quad + A^2 \langle Z_i - Z_j, Z'_i - Z'_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Mostremos que la expresión:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i < j} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \left( \frac{A^2BB'}{C^2} \|z_i - z_j\|^2 - \frac{A^2B}{C} \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle \right. \\
 \left. - \frac{A^2B'}{C} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \right).
 \end{aligned}$$

Evaluando en  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1})$  es igual a 0. Notemos

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i < j} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \left( -\frac{A^2B'}{C} \right) \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle \\
 &= -\frac{A^2B'}{C} \sum_{k \neq i} \frac{m_i m_k}{\|q_i - q_j\|^3} \langle z_i - z_j, Z_i - Z_j \rangle - \frac{A^2B'}{C} \frac{P}{m} \sum_{k \neq j} m_k m_j \langle z_j - z_k, Z_j - Z_k \rangle \\
 &= \frac{A^2B'}{C} \frac{PB}{C^{\frac{3}{2}} A^3} - \frac{A^2B'}{C} m_i \sum_{k \neq i} \langle m_k (z_i - z_k), Z_i \rangle \\
 &= \frac{A^2B'}{C} PB - \frac{A^2B'}{C} \frac{P}{m} m m_j \langle z_i - \zeta, 1 \rangle \\
 &= \frac{A^2B'}{C} PB - \frac{A^2B'}{C} PB = 0.
 \end{aligned}$$

De la misma forma se puede deducir que

$$\sum_{i<j} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \left( -\frac{A^2 B}{C} \right) \langle z_i - z_j, Z'_i - Z'_j \rangle = 0,$$

en  $(\mathbf{Z}^{i,1}, \mathbf{Z}^{j,1})$ .

Luego

$$\sum_{i<j} m_i m_j \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \frac{A^2 B B'}{C^2} \|z_i - z_j\|^2 = \frac{B B'}{C^2} \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{A \|z_i - z_j\|} = -\frac{P B B'}{C^2}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{i<j} m_i m_j \|z_i - z_j\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_i m_j \|z_i - z_j\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j (\|z_i\|^2 - 2\langle z_i, z_j \rangle + \|z_j\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( m \sum_i m_i \|z_i\|^2 + m \sum_{j=1}^n m_j \|z_j\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle m_i z_i, m_j z_j \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 2m \sum_i m_i \|z_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle m_i z_i, m \zeta \rangle \right) \\ &= m \sum_i m_i \|z_i\|^2 - \langle m \zeta, m \zeta \rangle = m \left( \sum_{i=1}^n m_i \|z_i\|^2 - \langle \zeta, m \zeta \rangle \right). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^n m_i \|z_i - \zeta\|^2 = \sum_{i=1}^n (m_i \|z_i\|^2 - 2\langle m_i z_i, \zeta \rangle + m_i \|\zeta\|^2) = \sum_{i=1}^n m_i \|z_i\|^2 - 2\langle m \zeta, \zeta \rangle + m \|\zeta\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \|z_i\|^2 - m \|\zeta\|^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades anteriores tenemos

$$\sum_{i<j} m_i m_j \frac{P}{m} \frac{A^2 B B'}{C^2} \|z_i - z_j\|^2 = \frac{P B B'}{m C^3} \sum_{i<j} m_i m_j \|z_i - z_j\|^2 = \frac{P B B'}{m C^3} m C = \frac{P B B'}{C^2}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i<j} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \left( \frac{A^2 B B'}{C^2} \|z_i - z_j\|^2 \right) = -\frac{P B B'}{C^2} + \frac{P B B'}{C^2} = 0.$$

Por lo tanto las dos formas bilineales son iguales en los puntos críticos.  $\square$

A partir del resultado anterior se puede ver que en un punto crítico real  $D^2 P$  se descompone como suma directa de una forma definida negativa

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \sum_{i<j} m_i m_j \left( \frac{P}{m} - \frac{2}{\|q_i - q_j\|^3} \right) (U_i - U_j)(U'_i - U'_j)$$

donde  $\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{U}, \mathbf{U}'$  son las partes reales de  $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}', w's, (w')'s$  respectivamente y de una forma

$$G(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}') = \sum_{i < j} m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) (Y_i - Y_j)(Y'_i - Y'_j)$$

donde  $\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'$  son las partes imaginarias de  $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}'$ .

**Proposición 6.** *En un punto crítico real se tiene*

$$D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') = F(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \oplus G(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}')$$

**Demostración.** Para demostrar lo anterior, notemos  $w_i = U_i + iV_i$ ,  $w'_i = U'_i + iV'_i$ ,  $Z_i = X_i + iY_i$  y  $Z'_i = X'_i + iY'_i$

Sustituyendo en  $D^2P$  tenemos que

$$\begin{aligned} D^2P(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \langle w_i - w_j, w'_i - w'_j \rangle \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} \langle q_i - q_j, w_i - w_j \rangle \langle q_i - q_j, w'_i - w'_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \langle U_i - U_j + i(V_i - V_j), U'_i - U'_j + i(V'_i - V'_j) \rangle \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} \langle q_i - q_j, U_i - U_j + i(V_i - V_j) \rangle \langle q_i - q_j, U'_i - U'_j + i(V'_i - V'_j) \rangle. \end{aligned}$$

Recordemos que  $q_i - q_j \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) \langle U_i - U_j, U'_i - U'_j \rangle + \langle V_i - V_j, V'_i - V'_j \rangle \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} \langle q_i - q_j, U_i - U_j \rangle \langle q_i - q_j, U'_i - U'_j \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$(U_i - U_j) + i(V_i - V_j) = w_i - w_j = A(Z_i - Z_j) - \frac{AB}{C}(z_i - z_j) = A(X_i - X_j + i(Y_i - Y_j)) - \frac{B}{C}(q_i - q_j).$$

De lo anterior se puede concluir que  $V_i - V_j = Y_i - Y_j$ , de igual forma  $V'_i - V'_j = Y'_i - Y'_j$

$$\begin{aligned} D^2P(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}, \mathbf{X}' + i\mathbf{Y}') &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) (U_i - U_j)(U'_i - U'_j) \\ &\quad - 3 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|^5} (q_i - q_j)(U_i - U_j)(q_i - q_j)(U'_i - U'_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) (V_i - V_j)(V'_i - V'_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} - \frac{2}{\|q_i - q_j\|^3} \right) (U_i - U_j)(U'_i - U'_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \left( \frac{P}{m} + \frac{1}{\|q_i - q_j\|^3} \right) (Y_i - Y_j)(Y'_i - Y'_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto el Hessiano se puede escribir como la suma de las formas bilineales  $F$  y  $G$ .  
□

Si un punto crítico real es no degenerado, por lo anterior este tendrá un índice entre  $n - 2$  y  $2n - 5$  (el índice no puede ser  $2n - 4$  según la proposición 3).

Parece razonable conjeturar que en un punto crítico que no sea real el índice debe ser siempre mayor o igual a  $n - 2$ . En este sentido solamente podemos mostrar lo siguiente.

**Proposición 7.** *Para todo punto crítico  $z \in M$  que no sea real, existe un 2-plano  $\Gamma \subseteq T_z(M)$  tal que  $D^2P(Z, Z) < 0$  para todo  $Z \in \Gamma$ . Si  $z$  es no degenerado, éste debe ser de índice mayor igual a 2.*

**Demostración.** Definamos

$$a_{ij} = m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right)$$

para  $i \neq j$ , y

$$a_{ii} = - \sum_{j \neq i}^n a_{ij}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} A \frac{\partial P}{\partial z_i} &= \frac{AP}{C} m_i (z_i - \zeta) + \sum_{j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} (z_i - z_j) = \frac{AP}{mC} m_i m (z_i - \zeta) + \sum_{j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} (z_i - z_j) \\ &= \frac{AP}{mC} m_i \sum_{j \neq i}^n m_j (z_i - z_j) + \sum_{j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{\|z_i - z_j\|^3} (z_i - z_j) \\ &= \sum_{j \neq i}^n m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) (z_i - z_j) \\ &= \sum_{j \neq i}^n m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) z_i - \sum_{j \neq i}^n m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{\|z_i - z_j\|^3} \right) z_j \\ &= \sum_{j \neq i}^n a_{ij} z_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} z_j = - \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j. \end{aligned}$$

Recordemos que estamos suponiendo que  $z_{n-1} = 1$  y  $z_n = 0$ . Por lo tanto, si  $z$  es un punto crítico, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} z_j = -a_{i,n-1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Como los  $a_{ij}$  son reales, se tiene necesariamente que

$$\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-2} = 0$$

en un punto crítico complejo. Sea  $X = (X_1, \dots, X_{n-2}, 0, 0)$  una solución no trivial real de  $\sum_j a_{ij} X_j = 0$ . El plano  $\Gamma$  buscado es el conjunto de vectores  $tX + sY$  con  $Y = iX$ .

En efecto, para todo  $Z \in \Gamma$ , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} a_{ij} \langle Z_i - Z_j, Z_i - Z_j \rangle &= \sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle Z_i, Z_i \rangle - \sum_i \sum_{j \neq i} \langle Z_i, Z_j \rangle \\ &= - \sum_i \langle Z_i, \sum_j a_{ij} Z_j \rangle = - \sum_i \langle Z_i, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión para  $A \cdot D^2 P(Z, Z)$  se reduce al segundo término de la proposición 4, el cual es negativo.  $\square$

## 2.6. Relación con la homología de los espacios de configuraciones

En esta última sección y siempre bajo la hipótesis de que los puntos críticos de  $P$  son no degenerados, la topología del espacio de configuraciones  $M = F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)$  proporciona cotas inferiores para el número de puntos críticos de un índice dado. Comenzamos recordando el cálculo de los grupos de homología de  $M$ .

**Proposición 8.** *Sea  $W_m$  el “wedge”  $S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$  de  $m$  círculos. Entonces para  $n > 2$ , la homología del espacio de configuraciones  $M = F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)$  esta dada por*

$$H_*(F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)) \cong H_*(W_2) \otimes H_*(W_3) \otimes \dots \otimes H_*(W_{n-1})$$

y por lo tanto  $H_p(F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2))$  tiene rango  $S_p(2, 3, \dots, n-1)$ , donde  $S_p(t_1, \dots, t_{n-2})$  es la  $p$ -ésima función simétrica elemental en las variables  $t_1, \dots, t_{n-2}$ .

**Demostración.** El cálculo de la homología de  $M = F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, n-2)$  es similar al de la homología de  $F(\mathbb{C}, l)$  el cual se presenta en el apéndice. Bosquejamos aquí el cálculo correspondiente a  $M$  por completez.

Denotemos por  $M_{k,l}$  al espacio de configuraciones ordenadas de  $l$  puntos distintos en  $\mathbb{C}$ , distintos de  $k$  puntos fijos. Así por ejemplo  $M = M_{2,n-2}$ .

Consideremos el haz localmente trivial

$$\begin{array}{ccc} M_{k,l+1} & \longleftarrow & M_{k+l,1} \\ & \downarrow f & \\ & M_{k,l} & \end{array}$$

dado por  $f(q_1, \dots, q_{l+1}) = (q_1, \dots, q_l)$ . Notemos que la fibra  $M_{k+l,1}$  tiene el tipo de homotopía de un wedge  $W_{k+l}$  de  $k+l$  círculos. Más aún la proyección  $f$  admite una sección. Esto se sigue de que toda configuración de puntos distintos  $p_1, \dots, p_r$  en  $\mathbb{C}$  le podemos asociar (de manera canónica) un  $(r+1)$ -ésimo punto  $p_{r+1}$  distinto de  $p_1, \dots, p_r$  como función continua de  $p_1, \dots, p_r$ .

Se sigue de aquí que la sucesión espectral de Serre asociados a  $f$  se colapsa y dado que  $\pi_1(M_{k,l})$  actúa trivialmente sobre la homología de la fibra  $H_*(M_{k+l,1})$  entonces:

$$\begin{aligned} H_*(M_{k,l+1}) &\cong H_*(M_{k,l}) \otimes H_*(M_{k+l,1}) \\ &= H_*(M_{k,l}) \otimes H_*(W_{k+l}). \end{aligned}$$

Esto da el resultado por recursión sobre  $l$ . El calculo de los números de Betti se sigue del hecho de que el polinomio de Poincaré de  $W_m$  esta dado por  $1 + mt$ .  $\square$

**Corolario 2.6.1.** *Supongamos que  $P$  tiene solo un número finito de puntos críticos, todos no degenerados. Sea  $C_p$  el número de puntos críticos de  $P$  de índice  $p$ . Entonces*

$$C_p \geq S_{2n-4-p}(2, 3, \dots, n-1).$$

**Demostración.** El corolario se obtiene aplicando las desigualdades de Morse a la función  $-P$  teniendo en cuenta el hecho de que  $P$  tiende a  $-\infty$  en la vecindad del conjunto de colisiones.  $\square$

**Observación 2.6.1.** Sea  $\sum_{p=0}^{n-2} S_p(2, 3, \dots, n-1) = \frac{n!}{2}$  el número de Moulton-Smale. La conjetura tradicional según la cual hay “pocas” posiciones de equilibrios relativos no colineales, sugiere que los índices de los puntos críticos deberían estar igualmente distribuidos en el intervalo  $[[n-2, 2n-4]]$ . Sin embargo, este no es el caso para  $n=4$ .

**Ejemplo.** Supongamos que  $n=4$ . En este caso los puntos críticos reales son no degenerados y sus índices son todos iguales a 2. En efecto, en un tal punto  $D^2P$  esta dada por  $F \oplus G$  según la notación de la proposición 11 de la sección anterior, donde  $F$  definida negativa y  $G(Y, Y') = \sum_{i < j} a_{ij} \langle Y_i - Y_j, Y'_i - Y'_j \rangle$ , y  $a_{ij} = m_i m_j \left( \frac{AP}{mC} + \frac{1}{(x_i - x_j)^3} \right)$ . Podemos ordenar los 4 cuerpos de tal manera que  $x_1 > x_2 > 1$ . Entonces es suficiente mostrar que la matriz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tiene determinante positivo  $D$  (Cf. Prop. 3 Sección 2.4). Usando las fórmulas de Cramer  $D(x_1 - x_2) = a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}$ . Este término, salvo un factor positivo  $\frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{mC}$ , es igual a

$$AP \left( \frac{1}{(x_1 - 1)^3} + \frac{1}{x_2^3} - \frac{1}{(x_2 - 1)^3} - \frac{1}{x_1^3} \right) + mC \left( \frac{1}{(x_1 - 1)^3 x_2^3} - \frac{1}{(x_2 - 1)^3 x_1^3} \right).$$

Sustituimos en esta expresión la fórmula explícita de  $AP$  y la igualdad  $mC = \sum_{i < j} m_i m_j (x_i - x_j)^2$  obtenida en la sección anterior. Notando que el coeficiente de  $mC$  en la expresión anterior es negativo, ésta se puede escribir como  $\sum_{i < j} m_i m_j c_{ij}$  con  $c_{ij} \geq c_{14}$ , para todo  $i < j$ . Cálculo sobre  $c_{14}$  nos da

$$x_1 c_{14} = \frac{(x_1^3 - (x_1 - 1)^3)(x_1^3 - x_2^3)}{x_1^3 (x_1 - 1)^3 x_2^3} > 0.$$

Los  $12 = \frac{4!}{2}$  puntos críticos reales de  $P$  son por lo tanto no degenerados y de índice 2. Por otra lado, los puntos críticos complejos, en el caso de que fuesen no degenerados, son de índice de al menos 2. (Ver Proposición 7) .

Notemos que para  $n=4$ ,  $M_{2,n-2} = F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, 2)$  y en este caso se tiene:

$$H_q = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}^5 & q = 1 \\ \mathbb{Z}^6 & q = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y dado que  $H_2 = \mathbb{Z}^6$ , observamos que hay al menos 6 puntos críticos excedentes de índice 2.

Se sigue de aquí que si los *puntos críticos complejos* son no degenerados, éstos *deben ser al menos 14*. En efecto:

- Existen al menos 2 máximos (Corolario 2.4.1).
- Existen al menos 12 puntos críticos de índice 3 (índice 1 para la función  $-P$ ) donde
  1. 5 corresponden a que  $H_1(M) = \mathbb{Z}^5$  (desigualdad de Morse).
  2. 6 están presentes para compensar a los 6 puntos críticos *excedentes* de índice 2 (cancelación de asas).
  3. Al menos 1 extra ya que los puntos críticos complejos siempre son un número par, por simetría con respecto al eje real.

# Capítulo 3

## Equilibrios de partículas cargadas en superficies

En este capítulo exponemos en detalle el trabajo de R. Brown y J. White [1] sobre la homología y teoría de Morse de los espacios de configuraciones  $F(X, 3)$ , ver apéndice. A saber, se consideran encajes de una variedad suave y compacta  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  y se muestra que si el encaje satisface una cierta condición natural, entonces las desigualdades de Morse pueden usarse para obtener una cota inferior para el número de posiciones de equilibrio de  $r$  partículas igualmente cargadas en la variedad encajada. Dicha cota inferior depende solo de los números de Betti de  $F(X, r)$ .

Por su parte  $F(X; 2)$  es el complemento de la diagonal en  $X \times X$  entonces, para un espacio razonable  $X$ , la homología de  $F(X, 2)$  se deduce fácilmente de la homología de  $X$ . En [4], F.Cohen calculó la cohomología de  $F(X, r)$  para  $X = \mathbb{R}^m$ . Cohen y Taylor extendieron este resultado en [3] al calcular la cohomología de  $F(X, r)$  cuando  $X = S^m$  ó una variedad de la forma  $X' \times \mathbb{R}^l$ .

En este capítulo, mostramos que los números Betti de  $F(X, 3)$  pueden ser calculados, para  $X$  una variedad sin frontera, orientable, triangulada y compacta, si el álgebra de cohomología de  $X$  (con coeficientes reales) es conocida. En particular, calcularemos los números de Betti de  $F(X, 3)$  para  $X$  una superficie orientable y usamos dicha información para obtener una cota inferior para el número de posiciones de equilibrio de tres partículas igualmente cargadas en una superficie.

### 3.1. Teoría de Morse en espacios de configuraciones

Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), de una variedad suave de dimensión  $m$ , compacta y conexa en  $\mathbb{R}^n$ , con  $n > m > 1$ .

**Definición.** El encaje  $f$  se dice ser  $V$ -genérico si la función  $V_f : F(X; r) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$V_f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{1}{\|f(x_i) - f(x_j)\|}$$

satisface que todos sus puntos críticos en  $F(X, r)$  son no degenerados.

**Definición.** Si  $(x_1, \dots, x_r) \in F(X, r)$  es un punto crítico de  $V_f$ , diremos que la configuración desordenada  $\{x_1, \dots, x_r\}$  es una posición de equilibrio.

La función  $V_f$  puede reconocerse como el potencial para  $r$  partículas igualmente cargadas en  $X$  y por lo tanto sus puntos críticos corresponden a posiciones de equilibrio de dichas configuraciones de partículas cargadas.

Estudiando directamente los ceros del gradiente de  $V_f$ , es fácil ver que existe un número  $N$  tal que si  $V_f(x_1, \dots, x_r) \geq N$ , entonces  $(x_1, \dots, x_r)$  no puede ser punto crítico de  $V_f$ . Sea

$$\Phi_N = \{(x_1, \dots, x_r) \in X^r \mid V_f(x_1, \dots, x_r) \geq N\}.$$

Por escisión, tenemos

$$H_*(X^r \setminus \text{int}(\Phi_N), \partial\Phi_N) \cong H_*(X^r, \Phi_N)$$

donde  $\text{int}(\Phi_N)$  denota el interior de  $\Phi_N$  y  $\partial\Phi_N$  denota su frontera. Sea

$$\Phi = \{(x_1, \dots, x_r) \in X^r \mid x_i = x_j \text{ para algunos } i, j, \text{ con } i \neq j\}.$$

Entonces  $\Phi_N$  es una vecindad tubular de  $\Phi$  y puede contraerse continuamente a  $\Phi$ . Por lo tanto.

$$H_*(X^r, \Phi_N) \cong H_*(X^r, \Phi).$$

En todo este capítulo la homología y la cohomología se tomarán siempre con coeficientes reales.

**Definición.** El  $i$ -ésimo número de Betti de  $(X^r, \Phi_N)$  es la dimensión de  $H_i(X^r, \Phi_N)$ .

Notemos que  $F(X, r) = X^r \setminus \Phi$ . Por lo tanto, si  $X$  es orientable, el **Teorema de Dualidad de Lefschetz** [18, pág 297] implica que

$$H_i(F(X, r)) \cong H^{rm-i}(X^r, \Phi),$$

para todo  $i$ . Esto es, los números de Betti de la pareja  $(X^r, \Phi)$  determinan (y están determinados por) los números de Betti del espacio de configuraciones  $F(X, r)$ .

Ahora a cada posición de equilibrio le corresponden  $r!$  puntos críticos de  $V_f$ , pues si  $(x_1, \dots, x_r)$  es un punto crítico, entonces cualquier permutación de dicha  $r$ -tupla también lo es, ya que  $V_f$  es invariante bajo permutación de coordenadas. Esta observación motiva la siguiente definición

**Definición.** Definimos el índice de una posición de equilibrio  $\{x_1, \dots, x_r\}$  como el índice de cualquiera de los correspondientes puntos críticos  $(x_1, \dots, x_r)$ .

Por lo tanto, si  $c_i$  es el número de posiciones de equilibrio de índice  $i$ , entonces  $V_f$  tiene  $r!c_i$  puntos críticos de índice  $i$ . Finalmente, una aplicación de la teoría de Morse para variedades con frontera, en la cual la función es constante y no tiene puntos críticos, nos da el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $b_i$  el  $i$ -ésimo número de Betti de  $F(X, r)$  y sea  $c_i$  el número de posiciones de equilibrio de índice  $i$ , entonces*

$$r! \sum_{j=0}^i (-1)^j c_{i-j} \geq \sum_{j=0}^i (-1)^j b_{i-j}, \quad i = 0, \dots, rm$$

donde  $m$  es la dimensión de la variedad  $X$ . Para  $i = rm$ , se tiene la igualdad.

**Corolario 3.1.1.** *Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje  $V$ -genérico. Entonces una cota inferior para el número de posiciones de equilibrio es*

$$\left( 2 \sum_{i=0}^{rm} \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b_{i-j}}{r!} \right] \right) - \left[ \sum_{j=0}^{rm} (-1)^j \frac{b_{rm-j}}{r!} \right]$$

donde  $[k/r!]$  es el menor entero  $\geq k/r!$  y  $b_k$  el  $k$ -ésimo número de Betti de  $F(X, r) =$

**Demostración** (Del Corolario). Claramente el número mínimo de puntos críticos de índice cero ocurre cuando  $b_0$  está lo más cerca posible de  $r!c_0$ . Por lo tanto ponemos

$$(c_0)_{min} = [b_0/r!].$$

El número mínimo de posiciones de equilibrio de índice uno está dado como sigue. Primero  $c_0$  tiene que ser  $(c_0)_{min}$ . De la desigualdad del teorema anterior para que  $c_1$  sea mínimo  $r!c_1$  debe ser lo más cercano posible a  $r!(c_0)_{min} + b_1 - b_0$ . Por lo tanto

$$(c_1)_{min} = (c_0)_{min} + \left[ \frac{b_1 - b_0}{r!} \right].$$

Un análisis similar implica que

$$(c_2)_{min} = \left[ \frac{b_1 - b_0}{r!} \right] + \left[ \frac{b_2 - b_1 + b_0}{r!} \right]$$

y en general se tiene

$$(c_i)_{min} = \left[ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j b_{i-1-j}}{r!} \right] + \left[ \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j b_{i-j}}{r!} \right].$$

Se puede mostrar directamente que si existe una sucesión  $c_1, \dots, c_{rm}$  que satisfaga la desigualdad del teorema y para la cual  $\sum_i c_i$  es mínima, entonces  $c_i = (c_i)_{min}$ . Por lo tanto número mínimo de posiciones de equilibrio es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{rm} (c_i)_{min} &= \left[ \frac{b_0}{r!} \right] + \left( \sum_{i=1}^{rm} \left[ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j b_{i-1-j}}{r!} \right] + \left[ \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^j b_{i-j}}{r!} \right] \right) \\ &= \left[ \frac{b_0}{r!} \right] + \left( \left[ \frac{b_0}{r!} \right] + \left[ \frac{b_1 - b_0}{r!} \right] \right) + \dots + \left( \left[ \sum_{j=0}^{rm-2} \frac{(-1)^j b_{rm-2-j}}{r!} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{j=0}^{rm-1} \frac{(-1)^j b_{rm-1-j}}{r!} \right] \right) + \left( \left[ \sum_{j=0}^{rm-1} \frac{(-1)^j b_{rm-1-j}}{r!} \right] + \left[ \sum_{j=0}^{rm} \frac{(-1)^j b_{rm-j}}{r!} \right] \right) \\ &= \left( \left[ \frac{b_0}{r!} \right] + \left[ \frac{b_0}{r!} \right] \right) + \left( \left[ \frac{b_1 - b_0}{r!} \right] + \left[ \frac{b_1 - b_0}{r!} \right] \right) + \dots + \left( \left[ \sum_{j=0}^{rm-1} \frac{(-1)^j b_{rm-1-j}}{r!} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{j=0}^{rm-1} \frac{(-1)^j b_{rm-1-j}}{r!} \right] \right) + \left( \left[ \sum_{j=0}^{rm} \frac{(-1)^j b_{rm-j}}{r!} \right] + \left[ \sum_{j=0}^{rm} \frac{(-1)^j b_{rm-j}}{r!} \right] \right) \\ &\quad - \left[ \sum_{j=0}^{rm} \frac{(-1)^j b_{rm-j}}{r!} \right] \\ &= 2 \sum_{i=0}^{rm} \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b_{i-j}}{r!} \right] - \left[ \sum_{j=0}^{rm} (-1)^j \frac{b_{rm-j}}{r!} \right]. \square \end{aligned}$$

**Observación 3.1.1.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje  $V$ -genérico. Entonces una cota inferior para el número de posiciones de equilibrio es

$$\left( 2 \sum_{i=0}^{rm} \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b'_{rm-i+j}}{r!} \right] \right) - \left[ \sum_{j=0}^{rm} (-1)^j \frac{b'_j}{r!} \right]$$

donde  $[k/r!]$  es el menor entero  $\geq k/r!$  y  $b'_k$  el  $k$ -ésimo número de Betti de  $(X^r, \Phi)$

## 3.2. Dos partículas cargadas en una superficies.

Para calcular el número mínimo correspondiente a posiciones de equilibrio de dos partículas cargadas en una superficie de género  $g$ ,  $X = S_g$ , uno puede observar de entrada observemos que en  $F(X, 2)$  los puntos críticos de  $V_f$  son los mismos que los de la función  $V_f^{-2}$ , es decir, la función que asigna a  $(x_1, x_2)$  el número  $\|f(x_1) - f(x_2)\|^2$ . Usando esta observación, en [19] se obtuvo el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje  $V$ -genérico de una superficie de género  $g$  en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la cota inferior del número de posiciones de equilibrio de dos partículas igualmente cargadas en  $f(X)$  es  $2g^2 + 3g + 3$ .*

En el resto de la sección, probaremos el Teorema anterior usando directamente el Corolario 3.1.1, para lo cual necesitamos obtener los números de Betti de  $F(S_g; 2)$ . Con este propósito, calculamos la homología racional de  $F(S_g; 2)$  por medio de la sucesión espectral de Serre para la fibración

$$S_g \setminus \{*\} \longrightarrow F(S_g; 2) \longrightarrow S_g$$

En este caso tenemos:

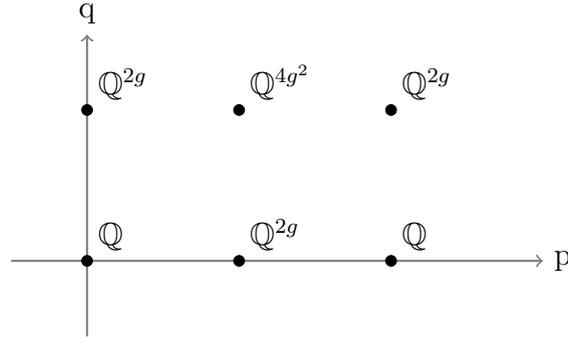
$$\begin{aligned} E_{p,q}^2 &= H_p(S_g; H_q(S_g \setminus \{*\})) \\ &\cong H_p(S_g) \otimes H_q(S_g \setminus \{*\}) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$H_p(S_g; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & p = 0 \\ \mathbb{Q}^{2g} & p = 1 \\ \mathbb{Q} & p = 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$H_q(S_g \setminus \{*\}; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & q = 0 \\ \mathbb{Q}^{2g} & q = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

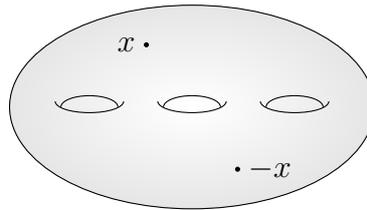
ya que  $S_g \setminus \{*\} \approx \bigvee_{2g} S^1$ . Así, el término  $E_{*,*}^2$  de la sucesión espectral de Serre tiene la siguiente forma



en donde todos los diferenciales son triviales. Esto se sigue del hecho de que la fibración  $p : F(S_g, 2) \rightarrow S_g$ , posee una sección. Suponiendo por ejemplo que  $S_g$  está encajada en  $\mathbb{R}^3$  de manera simétrica con respecto al origen, entonces una tal sección está dada por:

$$s : S_g \rightarrow F(S_g, 2)$$

$$x \mapsto (x, -x)$$



Así  $E_{*,*}^2 = E_{*,*}^\infty$  y se tiene:

$$H_n(F(S_g, 2); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & n = 0 \\ \mathbb{Q}^{4g} & n = 1 \\ \mathbb{Q}^{4g^2+1} & n = 2 \\ \mathbb{Q}^{2g} & n = 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los números de Betti para  $F(S_g, 2)$  son  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 4g$ ,  $b_2 = 4g^2 + 1$ ,  $b_3 = 2g$  y  $b_n = 0$  para  $n \geq 4$  y  $H_i(F(X, r)) \cong H^{rm-i}(X^r, \Phi)$ . Por el Corolario 3.1.1 la cota inferior para el número de posiciones de equilibrio, con  $r = 2$  y  $m = 2$ , está dada por:

$$2 \sum_{i=0}^4 \left[ \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b_{i-j}}{2} \right] - \left[ \sum_{j=0}^4 (-1)^j \frac{b_{4-j}}{2} \right]$$

En este caso, los sumandos  $B_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b_{i-j}}{2}$  están dados por:

$$B_0 = \frac{1}{2} \qquad B_1 = 2g - \frac{1}{2}$$

$$B_2 = 2g^2 - 2g + 1 \qquad B_3 = 3g - 2g^2 - 1$$

$$B_4 = -(3g - 2g^2 - 1).$$

de donde:

$$\begin{aligned} [B_0] &= 1 & [B_1] &= 2g \\ [B_2] &= 2g^2 - 2g + 1 & [B_3] &= 3g - 2g^2 - 1 \\ [B_4] &= -(3g - 2g^2 - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$2 \sum_{i=0}^4 [B_i] - [B_4] = 2g^2 + 3g + 3$$

### 3.3. Tres partículas cargadas en una superficie.

Para calcular el número mínimo de posiciones de equilibrio para tres partículas igualmente cargadas en una superficie de género  $g$ , usaremos:

**Teorema 3.3.1.** *Si  $X$  es una superficie orientable de género  $g \neq 1$ , entonces los números de Betti  $b_k$  de  $(X^3, \Phi)$  son:*

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$b_k$	0	0	$2g^2 + 3g$	$8g^3 + 2g^2 + g + 1$	$12g^2$	$6g$	1

y  $b_k = 0$  en otro caso. Si  $X = S^1 \times S^1$ , es decir el toro, entonces los números de Betti no nulos son  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = b_4 = 14$ ,  $b_5 = 6$  y  $b_6 = 1$ .

El teorema anterior es una consecuencia del material de las tres secciones siguientes. Como consecuencia inmediata obtenemos lo siguiente.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  un encaje  $V$ -genérico de una superficie de género  $g$ . Entonces la cota inferior para el número de posiciones de equilibrio de tres partículas igualmente cargadas en  $f(X)$  es*

- a)  $(4g^3 + 8g^2 + 5g + 12)/3 \quad g \equiv 0 \pmod{6}$ .
- b)  $(4g^3 + 8g^2 + 5g + 13)/3 \quad g \equiv 1 \pmod{6}, \quad g \equiv 5 \pmod{6}$ .
- c)  $(4g^3 + 8g^2 + 5g + 16)/3 \quad g \equiv 2 \pmod{6}, \quad g \equiv 4 \pmod{6}$ .
- d)  $(4g^3 + 8g^2 + 5g + 15)/3 \quad g \equiv 3 \pmod{6}$ .

**Demostración.** Definimos  $B'_i := \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{b'_{rm-i+j}}{3!}$ , donde  $b'_{rm-i+j}$  es el  $(rm - i + j)$ -ésimo número de Betti de  $(X^3, \Phi)$  dados por el teorema anterior ( $g \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} B'_0 &= \frac{1}{6} & B'_1 &= \frac{6g - 1}{6} & B'_2 &= \frac{12g^2 - 6g + 1}{6} \\ B'_3 &= \frac{8g^3 - 10g^2 + 7g}{6} & B'_4 &= B'_6 = \frac{-8g^3 + 12g^2 - 4g}{6} & B'_5 &= -B'_4 \end{aligned}$$

La prueba de (a),(b),(c),(d) son similares así que aquí presentaremos la prueba de (d), es decir el caso  $g \equiv 3 \pmod{6}$ . En este caso

$$[B_0] = 1 \quad [B_1] = g$$

Si  $g \equiv 3 \pmod{6}$ , entonces  $12g^2$  y  $6g$  es divisible por 6. Por lo tanto es suficiente añadir  $\frac{5}{6}$  para alcanzar el siguiente entero

$$[B_2] = \left\lceil \frac{12g^2 - 6g + 1}{6} \right\rceil = \frac{12g^2 - 6g + 6}{6}$$

Análogamente se puede ver que

$$\begin{aligned} [B_3] &= \frac{8g^3 - 10g^2 + 7g + 3}{6} & [B_4] &= \frac{-8g^3 + 12g^2 - 4g}{6} \\ [B_5] &= \frac{8g^3 - 12g^2 + 4g}{6} & [B_6] &= \frac{-8g^3 + 12g^2 - 4g}{6}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$2 \sum_{i=0}^6 [B_i] - [B_6] = 2 \left( \frac{14g^2 + 3g + 15}{6} \right) + \frac{8g^3 - 12g^2 + 4g}{6} = \frac{4g^3 + 8g^2 + 5g + 15}{3}$$

Esto completa la prueba de (d). En el caso especial del toro,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = b_4 = 14$ ,  $b_5 = 6$ ,  $b_6 = 1$ . Por lo que  $[B_0] = [B_1] = 1$ ,  $[B_2] = 2$ ,  $[B_3] = 1$ ,  $[B_4] = [B_5] = [B_6] = 0$ . Por lo tanto  $2 \sum_{i=0}^6 [B_i] - [B_6] = 10$ . □

### 3.4. Los números de Betti de $(X^3, \Phi)$

**Definición.** Sea  $X$  un poliedro finito. Definimos

$$\Phi^1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \mid x_1 = x_2\}$$

$$\Phi^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \mid x_1 = x_3\}$$

$$\Phi^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \mid x_2 = x_3\}$$

$$\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$$

Notemos  $\Phi$  es el conjunto definido en la sección 3.1 en el caso  $r = 3$

**Lema 3.4.1.** *Tenemos retracciones*

$$r'' : \Phi^1 \longrightarrow \Phi^1 \cap \Phi^2$$

y

$$r' : \Phi^3 \longrightarrow (\Phi^1 \cup \Phi^2) \cap \Phi^3.$$

**Demostración.** Como

$$\Phi^1 \cap \Phi^2 = (\Phi^1 \cup \Phi^2) \cap \Phi^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}.$$

podemos definir  $r''(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_1)$  y sea  $r'$  de igual forma.  $\square$

**Lema 3.4.2.** *Para todo  $k$ , existen sucesiones exactas, de la forma*

$$0 \longrightarrow H_k(\Phi^1 \cap \Phi^2) \xrightarrow{i''_*} H_k(\Phi^1) \oplus H_k(\Phi^2) \xrightarrow{j''_*} H_k(\Phi^1 \cup \Phi^2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_k((\Phi^1 \cup \Phi^2) \cap \Phi^3) \xrightarrow{i'_*} H_k(\Phi^1 \cup \Phi^2) \oplus H_k(\Phi^3) \xrightarrow{j'_*} H_k(\Phi) \longrightarrow 0$$

donde  $i''_*, j''_*, i'_*, j'_*$  están dados como en las sucesiones de Mayer-Vietoris.

**Demostración.** Recordando que la sucesión de Mayer-Vietoris se obtiene del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_k(\Phi^1 \cap \Phi^2) & \xrightarrow{i''_{1,k}} & H_k(\Phi^1) & \longrightarrow & H_k(\Phi^1, \Phi^1 \cap \Phi^2) & \longrightarrow & H_{k-1}(\Phi^1 \cap \Phi^2) & \longrightarrow \\ & \downarrow i''_{2,k} & & \downarrow j''_{1,k} & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & H_k(\Phi^2) & \xrightarrow{j''_{2,k}} & H_k(\Phi^1 \cup \Phi^2) & \longrightarrow & H_k(\Phi^1 \cup \Phi^2, \Phi^2) & \longrightarrow & H_{k-1}(\Phi^2) & \longrightarrow \end{array}$$

donde  $i''_* = (i''_{1,*} \oplus i''_{2,*})\Delta_*$  y  $\Delta$  es el mapeo diagonal sobre  $\Phi^1 \cap \Phi^2$ . Por el Lema 3.4.1 los homomorfismos  $(i''_{1,*})_* : H_*(\Phi^1) \rightarrow H_*(\Phi^1 \cap \Phi^2)$  y  $(i''_{2,*})_* : H_*(\Phi^2) \rightarrow H_*(\Phi^1 \cap \Phi^2)$  son inyectivos, además  $\Delta_*$  también es inyectivo, entonces  $i''_*$  es inyectiva. De la misma forma se puede deducir que  $i'_*$  es inyectiva.  $\square$

Usaremos la notación  $b_k(\ )$  para el  $k$ -ésimo número de Betti de un espacio o de un par.

**Lema 3.4.3.** *Para toda  $k$ ,  $b_k(\Phi) = 3b_k(X^2) - 2b_k(X)$ .*

**Demostración.** Como los  $\Phi^p$ , con  $p = 1, 2, 3$  son homeomorfos a  $X^2$  y  $\Phi^1 \cap \Phi^2 = (\Phi^1 \cup \Phi^2) \cap \Phi^3$  es homeomorfo a  $X$ , la sucesión exacta de espacios vectoriales del lema 3.4.2 implica que

$$\begin{aligned} b_k(\Phi^1 \cup \Phi^2) &= b_k(\Phi^1) + b_k(\Phi^2) - b_k(\Phi^1 \cap \Phi^2) \\ &= 2b_k(X^2) - b_k(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k(\Phi) &= b_k(\Phi^1 \cup \Phi^2) + b_k(\Phi^3) - b_k((\Phi^1 \cup \Phi^2) \cap \Phi^3) \\ &= (2b_k(X^2) - b_k(X)) + b_k(X^2) - b_k(X). \\ &= 3b_k(X^2) - 2b_k(X) \end{aligned} \quad \square$$

Sea  $I : X \rightarrow X$  el mapeo identidad,  $T : X^2 \rightarrow X^2$  la transposición de entradas  $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$  y  $\Delta : X \rightarrow X^2$  la función diagonal  $\Delta(x) = (x, x)$ . Definamos  $f^p : X^2 \rightarrow X^3$  para  $p = 1, 2, 3$  como

$$f^1 = \Delta \times I, \quad f^2 = (I \times T)(\Delta \times I) \quad y \quad f^3 = I \times \Delta.$$

Notemos que existen homeomorfismos  $h^p : \Phi^p \rightarrow X^2$  definidos por

$$h^1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3) \quad y \quad h^2(x_1, x_2, x_3) = h^3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2).$$

Sea  $i : \Phi \rightarrow X^3$  la inclusión. Para todo  $k$ , existe un diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_k(\Phi^1) \oplus H_k(\Phi^2) \oplus H_k(\Phi^3) & \xrightarrow{h_*^1 \oplus h_*^2 \oplus h_*^3} & H_k(X^2) \oplus H_k(X^2) \oplus H_k(X^2) \\ \rho_k \downarrow & & \downarrow \sigma_k \\ H_k(\Phi) & \xrightarrow{i_{*,k}} & H_k(X^3) \end{array}$$

donde  $\rho_k = j'_*(j''_* \oplus I)$ , para  $j''_*$  y  $j'_*$  como en el lema 3.4.2, y para  $z_1, z_2, z_3 \in H_k(X^2)$

$$\sigma_k(z_1, z_2, z_3) = f_*^1(z_1) + f_*^2(z_2) + f_*^3(z_3).$$

**Lema 3.4.4.** *El diagrama anterior es conmutativo*

**Demostración.** Considere el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} H_k(\Phi^1) \oplus H_k(\Phi^2) \oplus H_k(\Phi^3) & \xrightarrow{h_*^1 \oplus h_*^2 \oplus h_*^3} & H_k(X^2) \oplus H_k(X^2) \oplus H_k(X^2) \\ \downarrow j_*^1 \oplus j_*^2 \oplus j_*^3 & & \downarrow f_*^1 \oplus f_*^2 \oplus f_*^3 \\ H_k(\Phi) \oplus H_k(\Phi) \oplus H_k(\Phi) & \xrightarrow{i_* \oplus i_* \oplus i_*} & H_k(X^3) \oplus H_k(X^3) \oplus H_k(X^3) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha^3 \\ H_k(\Phi) & \xrightarrow{i_*} & H_k(X^3) \end{array}$$

donde  $j^p : \Phi^p \rightarrow \Phi$  son las inclusiones. Para  $w_1, w_2, w_3 \in H_k(\Phi)$  definimos  $\alpha(w_1, w_2, w_3) = w_1 + w_2 + w_3$  y  $\alpha^3$  se define de manera correspondiente. El primer cuadrado es conmutativo ya que

$$\begin{array}{ccc} \Phi^p & \xrightarrow{h^p} & X^2 \\ j^p \downarrow & & \downarrow f^p \\ \Phi & \xrightarrow{i} & X^3 \end{array}$$

conmuta para todo  $p$ . El cuadrado de abajo del diagrama conmuta ya que  $i_*$  es un homomorfismo. Por la definiciones de  $j_*''$  y  $j_*'$  en el teorema de Mayer-Vietoris,  $\rho_k = \alpha(j_*^1 \oplus j_*^2 \oplus j_*^3)$ . Por definición,  $\sigma_k = \alpha^3(f_*^1 \oplus f_*^2 \oplus f_*^3)$   $\square$

**Lema 3.4.5.** *Para todo  $k$ ,  $\text{Im}(i_{*,k}) = \text{Im}(\sigma_k)$ , donde  $\text{Im}$  denota la imagen.*

**Demostración.** Definamos  $C = H_k(\Phi^1) \oplus H_k(\Phi^2) \oplus H_k(\Phi^3)$ . Del Lema 3.4.4 se sigue que  $j_*''$  y  $j_*'$  son suprayectivas. y por lo tanto  $\rho_k$  es suprayectivo. Como  $h_*^1 \oplus h_*^2 \oplus h_*^3$  es un isomorfismo se obtienen las siguientes igualdades

$$\text{Im}(i_{*,k}) = i_{*,k}(\rho_k(C)) = \sigma_k(h_*^1 \oplus h_*^2 \oplus h_*^3)(C) = \text{Im}(\sigma_k).$$

$\square$

**Teorema 3.4.1.** *Denotemos por  $\text{rg}$  el rango de una transformación lineal. Para toda  $k$ ,*

$$b_k(X^3, \Phi) = b_k(X^3) + b_{k-1}(\Phi) - \text{rg}(\sigma_k) - \text{rg}(\sigma_{k-1}).$$

**Demostración.** De la sucesión exacta del par  $(X^3, \Phi)$ :

$$\longrightarrow H_k(\Phi) \xrightarrow{i_{*,k}} H_k(X^3) \xrightarrow{j_{*,k}} H_k(X^3, \Phi) \xrightarrow{\partial_{*,k}} H_{k-1}(\Phi) \xrightarrow{i_{*,k-1}} H_{k-1}(X^3) \longrightarrow$$

tenemos la siguiente sucesiones exactas de espacios vectoriales

$$0 \rightarrow \frac{H_k(X^3)}{\text{Ker}(j_{*,k})} \rightarrow H_k(X^3, \Phi) \rightarrow \text{Im}(\partial_{*,k}) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, si denotamos por  $\text{Dim}$

$$\begin{aligned} b_k(X^3, \Phi) &= \text{Dim} \left( \frac{H_k(X^3)}{\text{Ker}j_{*,k}} \right) + \text{Dim}(\text{Im}\partial_{*,k}) \\ &= b_k(X^3) - \text{Dim}(\text{Ker}j_{*,k}) + \text{Dim}(\text{Im}\partial_{*,k}). \end{aligned}$$

Por la exactitud y del Lema 3.4.5, tenemos que

$$\text{Ker}(j_{*,k}) = \text{Im}(i_{*,k}) = \text{Im}(\sigma_k).$$

También por la exactitud, se tiene que.  $\text{Im}(\partial_{*,k}) = \text{Ker}(i_{*,k-1})$  y como

$$\text{Dim}(\text{Ker}(i_{*,k-1})) = b_{k-1}(\Phi) - \text{Dim}(\text{Im}(i_{*,k-1}))$$

entonces, usando de nuevo el Lema 3.4.5,

$$\begin{aligned} b_k(X^3, \Phi) &= b_k(X^3) - \text{Dim}(\text{Im}(\sigma_k)) + (b_{k-1}(\Phi) - \text{Dim}(\text{Im}(i_{*,k-1}))) \\ &= b_k(X^3) + b_{k-1}(\Phi) - \text{rg} \sigma_k - \text{rg} \sigma_{k-1}. \end{aligned}$$

$\square$

**Nota** Si los número de Betti de  $X$  se conocen, entonces los números de Betti de  $X^2$  pueden ser calculados por el Teorema de Künneth y los números de Betti de  $\Phi$  se obtienen del Lema 3.4.3. Como el teorema de Künneth también nos permite calcular los números de Betti de  $X^3$ , el teorema anterior reduce el cálculo de los  $b_k(X^3, \Phi)$  a determinar los rangos de los  $\sigma_k$ .

Las propiedades del producto cruz [18, pág. 235] implican que el cálculo de los rangos de los  $\sigma_k$  requiere solo conocer  $\Delta_* : H_*(X) \rightarrow H_*(X^2)$ . Específicamente, la propiedad  $(f \times g)_* = f_* \times g_*$  implica, por la definición de  $\sigma_k$ , que necesitamos solo conocer como se comportan  $I_*$ ,  $T_*$  y  $\Delta_*$ . Obviamente  $I_*$  es la identidad. Si  $z \in H_p(X)$ ,  $z' \in H_q(X)$ , entonces  $T_*(z \times z') = (-1)^{pq}(z' \times z)$ .

El producto cup dado por el homomorfismo inducido en cohomología  $\Delta^* : H^*(X^2) \rightarrow H^*(X)$  por la función diagonal. Por el teorema de coeficientes universales,  $\Delta^*$  es la transformación lineal dual de  $\Delta_*$ . Consecuentemente, si conocemos la estructura de  $H^*(X)$  como álgebra graduada, entonces el teorema anterior reduce el cálculo de los números de Betti  $b_k(X^3, \Phi)$  a un problema de álgebra lineal.

### 3.5. El caso de una superficie orientable

Supongamos ahora que  $X$  es una superficie orientable de género  $g$ . El álgebra de cohomología  $H^*(X)$  tiene identidad  $\bar{1} \in H^0(X)$  y generadores  $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\alpha}_g, \bar{\beta}_g \in H^1(X)$  y  $\bar{\mu} \in H^2(X)$  tales que los únicos productos distinto de cero son:

$$\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i = -\bar{\beta}_i \bar{\alpha}_i = \bar{\mu} \quad i = 1, 2, \dots, g.$$

Vemos que  $b_0(X) = b_2(X) = 1$  y  $b_1(X) = 2g$  son números de Betti distintos de cero. Por lo tanto

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$b_k(X^2)$	1	$4g$	$4g^2 + 2$	$4g$	1	0	0
$b_k(X^3)$	1	$6g$	$12g^2 + 3$	$8g^3 + 12g$	$12g^2 + 3$	$6g$	1

El lema 3.4.3 implica entonces que los números de Betti de  $\Phi$  son:

$k$	0	1	2	3	4
$b_k(\Phi)$	1	$8g$	$12g^2 + 4$	$12g$	3

y  $b_k(\Phi) = 0$  en otro caso. La siguiente descripción de  $\Delta_* : H_*(X) \rightarrow H_*(X^2)$  es consecuencia de la estructura algebraica de  $H^*(X)$ :

$$\begin{aligned} \Delta_*(1) &= 1 \times 1 \\ \Delta_*(\alpha_i) &= (\alpha_i \times 1) + (1 \times \alpha_i) \\ \Delta_*(\beta_i) &= (\beta_i \times 1) + (1 \times \beta_i) \\ \Delta_*(\mu) &= (\mu \times 1) + (1 \times \mu) + \sum_{i=0}^g (\alpha_i \times \beta_i - \beta_i \times \alpha_i) \end{aligned}$$

donde la base  $1, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g, \mu$  para  $H_*(X)$  es dual a la base anterior para  $H^*(X)$ .

Por las observaciones al final de la sección anterior, para calcular los rangos  $\text{rg}(\sigma_k)$  aplicaremos la descripción anterior de  $\Delta_*$  y álgebra lineal a la definición de  $\sigma$ . Presentamos los resultados en el siguiente teorema. Los detalles del calculo se darán en la sección 3.6.

**Teorema 3.5.1.** *Si  $X$  es una superficie orientable de género  $g$ , entonces*

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(\sigma_0) &= 1 \\ \operatorname{rg}(\sigma_1) &= 6g \\ \operatorname{rg}(\sigma_2) &= 10g^2 - g + 3\end{aligned}$$

$$\operatorname{rg}(\sigma_3) = \begin{cases} 12g & \text{si } g \neq 1 \\ 10 & \text{si } g = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{rg}(\sigma_4) = 3$$

y  $\operatorname{rg}(\sigma_k) = 0$  en otro caso.

El Teorema 3.3.1 se prueba entonces sustituyendo los números de Betti de  $X^3$  y  $\Phi$  de arriba y los resultados del Teorema 3.5.1 en la fórmula del Teorema 3.4.1.

### 3.6. Demostración del Teorema 3.5.1

Sea  $X$  una superficie de género  $g$  y denotaremos  $H_k(X^2) \oplus H_k(X^2) \oplus H_k(X^2)$  por  $3H_k(X^2)$ . Deseamos calcular los rangos  $\operatorname{rg}(\sigma_k)$  para  $\sigma_k : 3H_k(X^2) \rightarrow H_k(X^3)$  definidos como sigue: para  $z = (z_1, z_2, z_3) \in 3H_k(X^2)$ ,

$$\sigma_k(z) = (\Delta_* \times I_*)(z_1) + (I_* \times T_*)(\Delta_* \times I_*)(z_2) + (I_* \times \Delta_*)(z_3).$$

Las propiedades de  $I_*$ ,  $T_*$ , y  $\Delta_*$  que requerimos se dieron en las secciones 3.4 y 3.5. Ya que  $H_k(X^2) = 0$  para  $k \geq 5$ , solo necesitamos calcular  $\operatorname{rg}(\sigma_k)$  para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Caso  $k = 0$ . El siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_0(X^2) & \xrightarrow{\iota} & 3H_0(X^2) & \xrightarrow{\sigma_0} & H_0(X^3) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \Delta_* \times I_* & \end{array}$$

donde  $\iota$  es la inclusión en el primer sumando. Como  $\Delta_* \times I_* = (\Delta \times I)_*$  es inducido por un mapeo de espacios conexos, es un isomorfismo de espacios vectoriales de dimensión 1. Concluimos entonces que  $\operatorname{rg}(\sigma_0) = 1$ .

Caso  $k = 1$ . Fijemos  $i$  y sea  $A_i$  el subespacio vectorial de  $H_1(X^2)$  con base  $\{(\alpha_i \times 1), (1 \times \alpha_i)\}$ . Notemos que

$$\begin{aligned}(\Delta_* \times I_*)(1 \times \alpha_i) &= 1 \times 1 \times \alpha_i \\ (I_* \times T_*)(\Delta_* \times I_*)(1 \times \alpha_i) &= 1 \times \alpha_i \times 1 \\ (I_* \times \Delta_*)(\alpha_i \times 1) &= \alpha_i \times 1 \times 1\end{aligned}$$

y por lo tanto  $\sigma_1$  manda el subespacio  $3A_i = A_i \oplus A_i \oplus A_i$  de  $3H_1(X^2)$  sobre el subespacio vectorial de  $H_1(X^3)$  con base  $\{(1 \times 1 \times \alpha_i), (1 \times \alpha_i \times 1), (\alpha_i \times 1 \times 1)\}$ .

La correspondiente conclusión es cierta para  $\beta_i$  en vez de  $\alpha_i$ . Como  $H_1(X^3)$  es un espacio vectorial de dimensión  $6g$  con base  $\{(1 \times 1 \times \alpha_i), (1 \times \alpha_i \times 1), (\alpha_i \times 1 \times 1), (1 \times 1 \times \beta_i), (1 \times \beta_i \times 1), (\beta_i \times 1 \times 1)\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, g$  vemos que la imagen de  $\sigma_1$  es  $H_1(X^3)$  y por lo tanto  $\text{rg}(\sigma_1) = 6g$ .

Caso  $k = 2$ . Para  $i$  fijo, definimos el subespacio  $3A'_i := A'_i \oplus A'_i \oplus A'_i$  de  $3H_2(X^2)$ , para  $i$  fijo, donde  $A'_i$  es el subespacio de  $H_2(X^2)$  generado por  $\alpha_i \times \alpha_i$ . Ahora supongamos  $g \geq 2$  y consideremos los conjuntos  $\{i, j\}$  donde  $1 \leq i < j \leq g$ . Sea  $3A_{(i,j)}$  el subespacio de  $3H_2(X^2)$  tal que  $A_{(i,j)} \subseteq H_2(X^2)$  tiene base  $\{(\alpha_i \times \alpha_j), (\alpha_j \times \alpha_i)\}$ . Remplazando  $\alpha$ 's por  $\beta$ 's, definimos  $3B'_i$  y cuando  $g \geq 2$ , definimos  $3B_{(i,j)}$  de la manera correspondiente.

Denotemos por  $V$  el subespacio de  $H_2(X^2)$  con base  $\{(\mu \times 1), (1 \times \mu), (\alpha_i \times \beta_j), (\beta_j \times \alpha_i)\}$ , para toda  $i, j = 1, \dots, g$  (sin restricciones sobre  $g$ ). Notemos que  $3H_2(X^2)$  admite una descomposición como suma directa

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq g} 3A'_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq g} 3A_{(i,j)} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq g} 3B'_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq g} 3B_{(i,j)} \oplus 3V$$

si  $g \geq 2$ , y

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq g} 3A'_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq g} 3B'_i \oplus 3V$$

en otro caso. El cálculo a partir de las definiciones muestra que la imagen de  $\sigma_2$  es la suma directa de imágenes de los sumandos en la descomposición anterior de  $3H_2(X^2)$ . Más aún, calculamos que la restricción de  $\sigma_2$  para algunos  $3A'_i$  o  $3B'_i$  tiene rango 2, para  $i$  y  $j$  se puede ver que la restricción de  $\sigma_2$  a  $3A_{(i,j)}$  o  $3B_{(i,j)}$ , tiene rango 5. Ya que hay  $g$  subespacios  $3A'_i$  y  $\frac{g^2-g}{2}$  subespacios  $A_{(i,j)}$  y los mismo es cierto para los  $B'$ 's, la restricción de  $\sigma_2$  a la suma directa de todos estos subespacios tienen rango

$$2g + 5 \left( \frac{g^2 - g}{2} \right) + 2g + 5 \left( \frac{g^2 - g}{2} \right) = 5g^2 - g.$$

Si  $g = 0$  o  $g = 1$ , no hay  $A_{(i,j)}$  y  $B_{(i,j)}$  pero los resultados siguen siendo válidos ya que  $\frac{g^2-g}{2} = 0$ .

Queda calcular el rango de la restricción de  $\sigma_2$  a  $3V$ . Consideremos los siguiente subespacio de  $H_2(X^3)$ :

1.  $M$  con base  $\{(\mu \times 1 \times 1), (1 \times \mu \times 1), (1 \times 1 \times \mu)\}$ .

2. Para todo  $i$ ,  $W_i$  con base

$$\{(\alpha_i \times \beta_i \times 1), (\alpha_i \times 1 \times \beta_i), (1 \times \alpha_i \times \beta_i), (\beta_i \times \alpha_i \times 1), (\beta_i \times 1 \times \alpha_i), (1 \times \beta_i \times \alpha_i)\}.$$

3. Asumiendo que  $g \geq 2$ , para todo par ordenado  $(i, j)$  con  $i \neq j$ ,  $W_{(i,j)}$  con base

$$\{(\alpha_i \times \beta_j \times 1), (\alpha_i \times 1 \times \beta_j), (1 \times \alpha_i \times \beta_j), (\beta_j \times \alpha_i \times 1), (\beta_j \times 1 \times \alpha_i), (1 \times \beta_j \times \alpha_i)\}.$$

De un cálculo directo a partir de las definiciones nos dice que  $\sigma_2$  manda  $3V$  a la suma directa de  $M$  con los  $W_i$ , y si  $g \geq 2$ , con los  $W_{(i,j)}$ . También vemos que  $M$  está en la imagen de  $\sigma_2$ , para todo  $i$  la imagen de  $\sigma_2$  en  $W_i$  que es de dimensión 5 y

para todo par  $(i, j)$  la imagen de  $\sigma_2$  en  $W_i$  también es de dimensión 5. Por lo tanto, como  $M$  es de dimensión 3, hay  $g$  subespacios  $W_i$ , y  $g^2 - g$  subespacios  $W_{(i,j)}$ . El rango de la restricción de  $\sigma_2$  a  $3V$  es

$$3 + 5g + 5(g^2 - g) = 5g^2 + 3.$$

Concluimos que

$$\text{rg}(\sigma_2) = (5g^2 - g) + (5g^2 + 3) = 10g^2 - g + 3.$$

Caso  $\mathbf{k} = \mathbf{3}$ . Si  $g = 0$ , entonces  $H_3(X^2) = 0$  así  $\text{rg}(\sigma_3) = 0$ . Si  $g = 1$ , entonces  $H_3(X^2) = \overline{A} \oplus \overline{B}$  donde una base para  $\overline{A}$  es  $\{(\mu \times \alpha), (\alpha \times \mu)\}$  y para  $\overline{B}$  es  $\{(\mu \times \beta), (\beta \times \mu)\}$  y por lo tanto  $3H_3(X^2) = 3\overline{A} \oplus 3\overline{B}$ . De un cálculo directo se demuestra que  $\sigma_3$  manda  $3\overline{A}$  en el subespacio de  $H_3(X^3)$  con base  $\{(1 \times \mu \times \alpha), (\mu \times 1 \times \alpha), (\mu \times \alpha \times 1), (1 \times \alpha \times \mu), (\alpha \times 1 \times \mu), (\alpha \times \mu \times 1), (\alpha \times \alpha \times \beta), (\alpha \times \beta \times \alpha), (\beta \times \alpha \times \alpha)\}$  y la restricción de  $\sigma_3$  a  $3\overline{A}$  es de rango 5. Por simetría,  $\sigma_3$  toma a  $3\overline{B}$  en un subespacio de  $H_3(X^3)$  es complementario al subespacio que contiene a la imagen de  $3\overline{A}$  y la restricción de  $\sigma_3$  a  $3\overline{B}$  es también de rango 5, así que  $\text{rg}(\sigma_3) = 10$  si  $g = 1$ .

Ahora asumamos que  $g \geq 2$ , entonces  $H_3(X^2)$  es la suma directa de los subespacios  $\overline{A}_i$ , con base  $\{(\mu \times \alpha_i), (\alpha_i \times \mu)\}$  y  $\overline{B}_i$ , con base  $\{(\mu \times \beta_i), (\beta_i \times \mu)\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, g$ . Un cálculo muestra que  $\sigma_3$  manda  $3\overline{A}_i$  en el subespacio  $W_i$  de  $H^3(X^3)$  definido como  $W_i := W'_i \oplus W_{(i,1)} \oplus \dots \oplus W_{(i,g)}$  donde  $W'_i$  con base  $\{(1 \times \mu \times \alpha_i), (\mu \times 1 \times \alpha_i), (\mu \times \alpha_i \times 1), (1 \times \alpha_i \times \mu), (\alpha_i \times 1 \times \mu), (\alpha_i \times \mu \times 1)\}$  y para toda  $j$ ,  $W_{(i,j)}$  tiene base  $\{(\alpha_i \times \alpha_j \times \beta_j), (\alpha_j \times \alpha_i \times \beta_j), (\alpha_j \times \beta_j \times \alpha_i), (\alpha_i \times \beta_j \times \alpha_j), (\beta_j \times \alpha_i \times \alpha_j), (\beta_j \times \alpha_j \times \alpha_i)\}$ . Encontramos que el rango de las restricciones de  $\sigma_3$  a  $3\overline{A}_i$  no cambia si consideramos solo la imagen en  $W'_i \oplus W_{(i,j)}$  para algún  $j \neq i$  fijo. La composición de la restricción de  $\sigma_3$  en  $3\overline{A}_i$  y la proyección de  $W_i$  en  $W'_i \oplus W_{(i,j)}$  para  $j$  se ve que es de rango 6. Por simetría, el rango de la restricción de  $\sigma_3$  en cada  $3\overline{B}_i$  es 6 también. Por lo tanto cuando  $g \geq 2$ , concluimos que  $\text{rg}(\sigma_3) = 12g$ .

Caso  $\mathbf{k} = \mathbf{4}$  Como  $\mu \times \mu$  genera  $H_4(X^2)$ , entonces  $z \in 3H_4(X^2)$  es de la forma

$$z = (m_1(\mu \times \mu), m_2(\mu \times \mu), m_3(\mu \times \mu))$$

para  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ . Encontramos que los  $\sigma_4(m_i(\mu \times \mu))$  son linealmente independientes en  $H_4(X^3)$ , para  $i = 1, 2, 3$ , así que  $\text{rg}(\sigma_4) = 3$ .

# Apéndice A

## Espacios de Configuraciones

### A.1. Definiciones y resultados básicos

**Definición.** Dado un espacio topológico  $X$ , definimos el espacio de configuraciones ordenadas de  $m$  puntos en  $X$  (en el sentido de Fadell and Neuwirth [6]) como

$$F(X, m) := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i \neq x_j, \text{ si } i \neq j\}.$$

Sea  $\Delta := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid \exists i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j \text{ tales que } x_i = x_j\}$ . Entonces es claro que  $F(X, m) = X^m \setminus \Delta$ .

Notemos que el grupo simétrico en  $m$  elementos  $\Sigma_m$ , actúa en  $F(X, m)$  por permutación de coordenadas:

$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_m) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$$

y que esta acción es libre. Definimos por

$$B(X, m) := F(X, m) / \Sigma_m$$

al espacio de órbitas bajo dicha acción, es decir, el espacio de  $m$ -tuplas desordenadas de puntos distintos de  $X$ .

**Ejemplo.** Si es  $(G, e)$  un grupo topológico, entonces existe un homeomorfismo  $F(G, m) \rightarrow F(G - e, m - 1) \times G$ .

**Demostración.** En efecto. Sea

$$\begin{aligned} \psi : F(G, m) &\rightarrow G \times F(G - e, m - 1) \\ (g, g_1, g_2, \dots, g_{m-1}) &\mapsto (g, g_1 g^{-1}, g_2 g^{-1}, \dots, g_{m-1} g^{-1}). \end{aligned}$$

Ya que  $G$  es un grupo topológico, entonces  $\varphi$  es continua y tiene como inversa a la función

$$\begin{aligned} \varphi : G \times F(G - e, m - 1) &\rightarrow F(G, m) \\ (g, (g_1, g_2, \dots, g_{m-1})) &\mapsto (g, g_1 g, g_2 g, \dots, g_{m-1} g) \end{aligned}$$

□

Por ejemplo  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  son grupos topológicos bajo la suma y la multiplicación de números complejos respectivamente. Por lo tanto

$$F(\mathbb{C}, 3) \cong F(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 2) \times \mathbb{C} \cong F(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, 1) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \simeq (S^1 \vee S^1) \times S^1.$$

Para  $X = \mathbb{R}^n$  el siguiente resultado básico sobre los espacios de configuraciones.

**Definición.** Sea  $Q_l = \{q_1, \dots, q_l\} \subseteq \mathbb{R}^n$  un subconjunto de cardinalidad  $l$  y denotemos  $F(\mathbb{R}^n, m, l) := F(\mathbb{R}^n \setminus Q_l, m)$ .

Esta definición no depende del conjunto  $Q_l$ , es decir, ya que si se toma otro conjunto  $Q'_l$ , entonces  $\mathbb{R}^n \setminus Q_l$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus Q'_l$ . Por lo tanto  $F(\mathbb{R}^n \setminus Q_l, m)$  es homeomorfo  $F(\mathbb{R}^n \setminus Q'_l, m)$ .

**Teorema A.1.1.** Si  $m > 1$  y  $k \leq m$ , entonces la proyección en las primeras  $k$  coordenadas  $pr_k : F(\mathbb{R}^n, m, l) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k, l)$ , dada por  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k)$  es un haz localmente trivial con fibra  $F(\mathbb{R}^n, m - k, l + k)$ . Además  $pr_k$  admite una sección continua  $\sigma : F(\mathbb{R}^n, k, l) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, m, l)$ .

**Demostración.** Procederemos con el caso  $k = 1$ , los casos con  $k > 1$  se demuestran con técnicas similares. Se puede encontrar la demostración explícita en [6]. Por definición,  $F(\mathbb{R}^n, 1, l) := \mathbb{R}^n \setminus Q_l$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_l$ , entonces

$$\begin{aligned} pr_1^{-1}(x) &= \{(y_1, y_2, \dots, y_m) \in F(\mathbb{R}^n, m, l) \mid y_1 = pr_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = x\} \\ &= \{(x, y_2, \dots, y_m) \in F(\mathbb{R}^n, m, l)\} \\ &\equiv F(\mathbb{R}^n, m - 1, l + 1). \end{aligned}$$

Sean  $x \in \mathbb{R} \setminus Q_l$  y  $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus Q_l$  una bola abierta centrada en  $x$ . En [15] pág. 92 se demuestra de la existencia de una función continua  $h : U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  tal que

- 1)  $\forall z \in U$ ,  $h_z : \bar{U} \rightarrow \bar{U}$  es un homeomorfismo que deja fija a la frontera.
- 2)  $\forall z \in U$ ,  $h(z, z) = x$ .

El homeomorfismo  $h_z$  mencionado en el inciso 1) se puede extender a un homeomorfismo sobre todo  $\mathbb{R}^n$  poniendo  $h_z(w) = w$ , para toda  $w \in \mathbb{R}^n \setminus U$ . Por lo que podemos extender a  $h$  a  $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Definamos la siguiente función.

$$\begin{aligned} \phi : U \times F(\mathbb{R}^n, m - 1, l + 1) &\rightarrow pr_1^{-1}(U) \\ (z, y_1, \dots, y_{m-1}) &\mapsto (z, h_z^{-1}(y_1), \dots, h_z^{-1}(y_{m-1})) \end{aligned}$$

Observemos que esta función está bien definida ya que  $pr_1(z, h_z^{-1}(y_1), \dots, h_z^{-1}(y_{m-1})) \in U$ ,  $\phi$  es continua ya que cada entrada es continua y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} \psi : pr_1^{-1}(U) &\rightarrow U \times F(\mathbb{R}^n, m - 1, l + 1) \\ (z, y_1, \dots, y_{m-1}) &\mapsto (z, h_z(y_1), \dots, h_z(y_{m-1})). \end{aligned}$$

Esta función está bien definida ya que la primera coordenada está en  $U$ , luego como  $h_z$  es un homeomorfismo entonces  $(h_z(y_1), \dots, h_z(y_{m-1})) \in F(\mathbb{R}^n, m-1, l+1)$  y como los  $y_i \neq z$ , entonces  $h_z(y_i) \neq x$ . Además  $\psi$  es continua ya que sus componentes son continuas. Claramente  $\psi = \phi^{-1}$ . Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times F(\mathbb{R}^n, m-1, l+1) & \xrightarrow{\phi} & pr_1^{-1}(U) \\ pr_1 \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

Ahora mostraremos la existencia de una sección. Supongamos que  $l > 0$ . Sean  $U = B(0, 1)$  y  $W = B(0, \frac{1}{2})$ . Anteriormente dijimos que  $F(\mathbb{R}^n, m, l)$  no depende de  $Q_l$ , supongamos que  $q_1 = 0$  y que  $q_j \notin \bar{U}$ , para  $j > 1$ . Sean  $y_2, y_3, \dots, y_m \in \partial W$ ,  $m-1$  puntos distintos a pares. Definamos  $f_j : \mathbb{R}^n \setminus Q_l \rightarrow \bar{U} \setminus Q_l$  de la siguiente forma:

$$x \mapsto \begin{cases} \|x\|y_j & \text{si } x \in \bar{U} \\ y_j & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

si  $j > 2$ , para  $j = 1$ , definimos  $f_1 = id_{\mathbb{R}^n \setminus Q_l}$ . Cada  $f_j$  es continua ya que pega bien en  $\partial U$ . Por último definimos por  $\sigma := (f_1, \dots, f_m) : F(\mathbb{R}^n, k, l) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, m, l)$  la cual es una sección.  $\square$

Este teorema se puede extender a variedades  $M$  conexas.

## A.2. La cohomología de $F(\mathbb{R}^n, k)$

**Teorema A.2.1.** *El anillo de cohomología de  $F(\mathbb{R}^n, k)$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  está generado por clases  $A_{i,j}$ , con  $1 \leq j < i \leq k$  y  $|A_{i,j}| = n-1$ , sujetas a las siguientes relaciones*

1.  $A_{i,j}^2 = 0$ .
2.  $A_{i,j}A_{i,l} = A_{l,j}(A_{i,l} - A_{i,j})$ .
3. *Asociatividad y conmutatividad graduadas.*

**Demostración.** Por el teorema A.1.1 sabemos que para  $k \geq 2$ , la proyección en la primera coordenada es un haz fibrado, por lo que tenemos la siguiente sucesión de haces fibrados.

$$\begin{array}{ccccc} F(\mathbb{R}^n, k) & \longleftarrow & F(\mathbb{R}^n, k-1, 1) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & F(\mathbb{R}^n, 1, k-1) \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow pr_1 & & & & \downarrow pr_1 \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \setminus Q_1 & & & & \mathbb{R}^n \setminus Q_{k-1} \end{array}$$

Nuevamente por el teorema A.1.1 sabemos que estos haces admiten secciones. Aplicando la sucesión espectral de Serre en cohomología tenemos que

$$\begin{aligned} H^*(F(\mathbb{R}^n, k)) &\cong \bigotimes_{i=1}^{k-1} H^*(\mathbb{R}^n \setminus Q_i) \\ &\cong \bigotimes_{i=1}^{k-1} H\left(\bigvee_{j=1}^i S^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cohomología de  $F(\mathbb{R}^n, k)$  está concentrada en los grados que son múltiplos de  $n - 1$ . Si  $A_{i_1,1}, \dots, A_{i_{i-1},i-1}$  denotan a los generadores del factor  $H^*(\bigvee S^{n-1}) = \mathbb{Z}^{i-1}$ , entonces  $H^{n-1}(F(\mathbb{R}^n, k))$ , está generado aditivamente por los monomios de la siguiente forma

$$A_{i_1,j_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_s,j_s} \quad \text{con} \quad 2 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k \quad \text{y} \quad 0 < j_s < i_s.$$

Los generadores  $A_{i,j}$  pueden obtenerse “geoméricamente” de la siguiente forma. Para  $j < i$  consideremos la siguiente función:

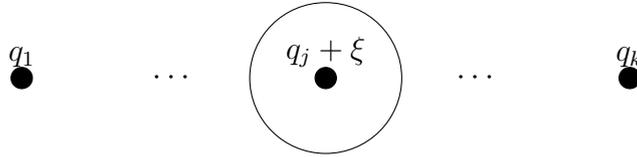
$$p_{i,j} : F(\mathbb{R}^n, k) \rightarrow S^{n-1} \\ (x_1, \dots, x_k) \mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}$$

Sea  $A_{i,j} \in H^*(F(\mathbb{R}^n, k))$  la imagen de la clase fundamental  $A_{i,j} = p_{i,j}^*(\iota_{n-1})$ . Es claro que estas clases no son nulas ya que existen funciones  $s_{ij} : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k)$

$$s_{ij} : S^{n-1} \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k) \\ \xi \mapsto (q_1, \dots, q_{j-1}, q_i + \xi, q_j, \dots, q_{k-1})$$

tales que la composición

$$S^{n-1} \xrightarrow{s_{i,j}} F(\mathbb{R}^n, k) \xrightarrow{p_{i,j}} S^{n-1}$$



es la identidad. Como  $A_{i,j}$  es imagen de una clase esférica, entonces  $A_{i,j}^2 = 0$ . Se puede probar que los  $A_{i,j}$  son linealmente independientes y son generadores de los grupos  $H^*(\bigvee_{i-1} S^{n-1}) = \mathbb{Z}^{i-1}$ . Por otro lado, notemos que toda permutación  $\sigma \in \Sigma_k$  induce un homeomorfismo:

$$\sigma : F(\mathbb{R}^n, k) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, k) \\ (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

Estos definen una acción derecha del grupo simétrico  $\Sigma_k$  en  $F(\mathbb{R}^n, k)$ . Por lo tanto, los isomorfismos inducidos  $\sigma^* : H^*(F(\mathbb{R}^n, k)) \rightarrow H^*(F(\mathbb{R}^n, k))$  definen una acción izquierda de  $\Sigma_k$  en  $H^*(F(\mathbb{R}^n, k))$ .

**Lema A.2.1.** *La acción de  $\Sigma_k$  en las clases  $A_{i,j}$  está dada por:*

$$\sigma A_{i,j} = \begin{cases} A_{\sigma(i),\sigma(j)} & \text{si } \sigma(i) > \sigma(j), \\ (-1)^n A_{\sigma(j),\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) < \sigma(j). \end{cases}$$

**Demostración.** Supongamos que  $i > j$  y que  $\sigma \in \Sigma_k$  es una permutación tal que  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^n, k) & \xrightarrow{\sigma} & F(\mathbb{R}^n, k) \\ p_{\sigma(i)\sigma(j)} \downarrow & & \swarrow p_{i,j} \\ S^{n-1} & & \end{array}$$

y por lo tanto en cohomología se tiene que

$$\sigma^*(A_{i,j}) = \sigma^* p_{i,j}^*(\iota_{n-1}) = p_{\sigma(i),\sigma(j)}^*(\iota_{n-1}) = A_{\sigma(i),\sigma(j)}$$

Supongamos ahora que  $\sigma(i) < \sigma(j)$ . Notemos que en este caso el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}^n, k) & \xrightarrow{\sigma} & F(\mathbb{R}^n, k) \\ p_{\sigma(i)\sigma(j)} \downarrow & & \downarrow p_{i,j} \\ S^{n-1} & \xrightarrow{a} & S^{n-1} \end{array}$$

donde  $a : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  es el mapeo antipodal, cuyo grado es  $(-1)^n$ . Se tiene que

$$\sigma^*(A_{i,j}) = \sigma^* p_{i,j}^*(\iota_{n-1}) = p_{\sigma(i),\sigma(j)}^*(a^*(\iota_{n-1})) = (-1)^n A_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

Resta probar la relación  $A_{i,j}A_{i,l} = A_{l,j}(A_{i,l} - A_{i,j})$ . Notemos que en el caso  $k = 3$ , la cohomología de  $F(\mathbb{R}^n, 3)$  está dada aditivamente por

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 3)) \cong \langle A_{2,1} \rangle \otimes \langle A_{3,1}, \times A_{3,2} \rangle$$

y el producto cup de los generadores en distintos factores está dado de la siguiente forma  $A_{2,1}A_{3,1} = A_{2,1} \otimes A_{3,1}$  y  $A_{2,1}A_{3,2} = A_{2,1} \otimes A_{3,2}$ . Para determinar completamente la estructura de multiplicativa de  $H^*(F(\mathbb{R}^n, 3))$  basta expresar el producto  $A_{3,1}A_{3,2}$  como combinación lineal de  $A_{2,1}A_{3,1}$  y  $A_{2,1}A_{3,2}$ . Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tales que

$$A_{3,1}A_{3,2} = \alpha A_{2,1}A_{3,1} + \beta A_{2,1}A_{3,2}.$$

Esta expresión debe ser compatible con la acción del grupo simétrico  $\Sigma_3$ . Aplicando las transposiciones (1, 2) y (2, 3) obtenemos que  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ . Por lo tanto

$$A_{3,1}A_{3,2} = A_{2,1}A_{3,2} - A_{2,1}A_{3,1} = A_{2,1}(A_{3,2} - A_{3,1}).$$

Ahora notemos que el resultado en el caso general se tiene por la naturalidad de la siguiente proyección.

$$\begin{aligned} p_{i,j,l} : F(\mathbb{R}^n, k) &\rightarrow F(\mathbb{R}^n, 3) \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x_l, x_j, x_i). \end{aligned}$$

Así, la estructura multiplicativa de la cohomología de  $F(\mathbb{R}^n, k)$  se sigue de la correspondiente para  $F(\mathbb{R}^n, 3)$ , ya que se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 F(\mathbb{R}^n, k) & \xrightarrow{p_{i,j,l}} & F(\mathbb{R}^n, 3) \\
 \downarrow p_{i,j}, p_{i,l}, p_{j,l} & \swarrow p_{3,2}, p_{3,1}, p_{2,1} & \\
 S^{n-1} & & 
 \end{array}$$

los cuales inducen los siguientes diagramas conmutativos en cohomología

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(F(\mathbb{R}^n, k)) & \xleftarrow{p_{i,j,l}^*} & H^*(F(\mathbb{R}^n, 3)) \\
 \uparrow p_{i,j}^*, p_{i,l}^*, p_{j,l}^* & \nearrow p_{3,2}^*, p_{3,1}^*, p_{2,1}^* & \\
 H^*(S^{n-1}) & & 
 \end{array}$$

Del diagrama anterior obtenemos

$$A_{i,j} = p_{i,j,l}^* = (A_{3,2}), \quad A_{i,l} = p_{i,j,l}^*(A_{3,1}) \quad A_{j,l} = p_{i,j,l}^*(A_{2,1}).$$

Con todo lo anterior, se tiene el inciso 2 del teorema. □

# Bibliografía

1. Brown, R. F. y White, J. H. Homology and Morse theory of third configuration spaces. *Indiana Univ. Math. J.* **30**, 501-512. ISSN: 0022-2518. <https://doi.org/10.1512/iumj.1981.30.30041> (1981).
2. Chhim, R. *Morse theory and applications. Tesis de Maestría* <http://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1008/565> (CIMAT, 2017).
3. Cohen, F. R. y Taylor, L. R. Configuration spaces: applications to Gelfand-Fuks cohomology. *Bull. Amer. Math. Soc.* **84**, 134-136. ISSN: 0002-9904. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1978-14440-1> (1978).
4. Cohen, F. Cohomology of braid spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **79**, 763-766. ISSN: 0002-9904. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1973-13306-3> (1973).
5. Eells Jr., J. y Kuiper, N. H. Manifolds which are like projective planes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 5-46. ISSN: 0073-8301. [http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1962\\_\\_14\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1962__14__5_0) (1962).
6. Fadell, E. y Neuwirth, L. Configuration spaces. *Math. Scand.* **10**, 111-118. ISSN: 0025-5521. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10517> (1962).
7. Greenberg, M. J. y Harper, J. R. *Algebraic topology A first course*, xi+311 pp. (loose errata). ISBN: 0-8053-3558-7; 0-8053-3557-9 (Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981).
8. Hirsch, M. W., Smale, S. y Devaney, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* Third, xiv+418. ISBN: 978-0-12-382010-5. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-382010-5.00001-4> (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013).
9. Kervaire, M. A. *La méthode de Smale pour le dénombrement des équilibres relatifs dans le problème des n corps* en *Proceedings of the C. Carathéodory International Symposium (Athens, 1973)* (Greek Math. Soc., Athens, 1974), 296-305.
10. Matsumoto, Y. *An introduction to Morse theory* Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics, xiv+219. ISBN: 0-8218-1022-7. <https://doi.org/10.1090/mmono/208> (American Mathematical Society, Providence, RI, 2002).
11. Milnor, J. *Morse theory* Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, vi+153 (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963).
12. Milnor, J. *Differential topology. Lectures on Modern Mathematics, Vol. II*, 165-183 (1964).
13. Milnor, J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)* **64**, 399-405. ISSN: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1969983> (1956).

14. Rosen, R. A weak form of the star conjecture for manifolds, Abstract 570-28. *Notices Amer. Math. Soc* **7**, 380 (1960).
15. Serrano García, H. *La topología de los espacios de configuración. Tesis de Licenciatura*. (Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, 2020).
16. Smale, S. Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math. (2)* **74**, 391-406. ISSN: 0003-486X. <https://doi.org/10.2307/1970239> (1961).
17. Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias* xvi+327 (Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979).
18. Spanier, E. H. *Algebraic topology* Corrected reprint of the 1966 original, xvi+528. ISBN: 0-387-94426-5 (Springer-Verlag, New York, [1995?]).
19. Takens, F. y White, J. Morse theory of double normals of immersions. *Indiana Univ. Math. J.* **21**, 11-17. ISSN: 0022-2518. <https://doi.org/10.1512/iumj.1971.21.21002> (1971/72).
20. Whitehead, J. H. C. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55**, 213-245. ISSN: 0002-9904. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09175-9> (1949).
21. Wintner, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* xii+448 (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941).