

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

**Diseño de Estrategias de Observación de Estado e Identificación  
Paramétrica Aplicadas al Control Robusto-Adaptativo de una  
Clase de Sistemas Electromecánicos**

T E S I S

Que presenta

**M. en M. Bonifacio Sánchez Resendiz**

para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

en la especialidad de

**Control Automático**

*Directores de tesis:*

**Dr. Alexander Poznyak Gorbach**

**Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver**



## Agradecimientos

*Agradezco a Dios, cuya presencia confío se manifiesta en el amor de mi familia...*

*A Sol y Lia, mi esposa e hija, por el amor incondicional, la paciencia, el apoyo y el respaldo que me han brindado desde que nos encontramos en el camino...*

*A Elda y Felipe, mis padres, por traerme hasta este punto del camino, y acompañarme en cada momento...*

*A Dr. Alexander Poznyak y Dr. Patricio Ordaz, mis asesores, por los consejos y las enseñanzas, por la humildad con la que me han compartido su conocimiento...*

*Al Departamento de Control Automático de CINVESTAV-IPN, por la gran experiencia que me han permitido vivir...*

*Al Conacyt, por el soporte económico que recibí en el periodo correspondiente, como becario con número de CVU 558201...*





## ABSTRACT

### DESIGNING OBSERVER AND PARAMETER ESTIMATION STRATEGIES FOR ROBUST AND ADAPTIVE CONTROL OF A CLASS OF ELECTROMECHANICAL SYSTEMS

Robotics is one of the applied engineering sciences that has most favored the technological development of our time for several decades now, mainly motivated by the evolution of production systems in industry, in turn driven by the constant and growing demand for the satisfaction of human needs, population growth and overexploitation of natural resources. Although manipulative robots are the most widely used in the industry, today robotic systems are responsible for a large number and diversity of tasks inside and outside the industrial environment. Consider for example military, medical, transportation and communication systems, etc. In a broader range, mechatronics and electromechanics as applied engineering sciences deal with the automation of physical processes through computational intelligence; robotics is an important part of his field of study. We can describe a robot as a reprogrammable and reconfigurable electromechanical system capable of transmitting controlled movements for the automation of a task. It is basically made up of a mechanism, a perception system, the instrumentation and the control system. Actuators are part of instrumentation and are electrical machines of some kind: DC motors, stepper motors, induction motors, and brushless motors are usually the most common. This is mainly due to the state of knowledge, since the theory available for the control of this type of machine is very mature, in addition to the fact that the instrumentation required for the adequacy of the signals is relatively simple.

Robotics has been a very important field of applied engineering for many decades. This has been motivated by the increase in the demand for the fulfillment of human's basic necessities due to the population growth, and natural resources overexploitation. Under this scenario, robots have been used to substitute the human hand on hard, dangerous and tedious activities. A robot is a machine with controlled motions on configuration space, driven by actuators for the automation of a particular task. When the dimension of the configuration space is greater than the number of independent actuators the system is said to be underactuated. Mobile robots such as walking and wheeled robots, aerial, water and underwater robots, as well as flexible and elastic arm-type robots, are some examples. Underactuated robots put many challenging situations together from the control point of view and serve as excellent test-bench systems. Pendular-type robots are the most usual ones when novel control strategies are designed, mainly due to the simplicity of its construction. The control-objective for this class of systems is stabilization, as they result to be controllable only in some regions of the configuration-space. When the number of undriven joints is less than the driven ones the control problem for experimental systems may be solved using linear-approximation techniques. However, in the other case, the problem turns out to be more complicated. Firstly, its linear approximation is not robust-enough to perform stabilization in practice, as it may become uncontrollable or unstabilizable in presence of small-disturbances effects. Furthermore, on a real-time experimental environment, many adverse effects may appear. Consider, for example, model and parameters uncertainties, matched and unmatched disturbances, the unavailability of the some of the internal variables, or the drawbacks of approximating them using traditional techniques such as filters, differentiators and dirty derivative. Hence, the enhancement of robust properties of the closed-loop control system is the most important objective. There exist basically two approaches to this aim. The first one is based on the inclusion of dominant terms, whose effect eclipse the uncertain ones.

This is referred to as Robust Control. The second one consists of estimating the system's parameters in real-time, such that the disturbances or uncertain effects are included in the nominal model. A control policy is thus computed, each time that the system's model is updated. This practice is known as Adaptive Control. A robust strategy produces high-gain control signals. In most cases, they can not be directly implemented on real systems. Hence, some techniques which help to relax these conditions must be also adopted. In the case of the control of mechanical systems, electric machines are used as actuators in most cases. The common practice is to use a nested-loop control structure. This is, an outer loop is used to control the mechanical part, while an inner one is used for the actuators. This practice may produce a very dangerous effect, as some robust techniques produce high-frequency components, which are amplified by means of the actuator dynamics. Besides this, robust control tends to generate an aggressive-response. This is a nice feature in view that underactuated systems have a fast-dynamic behavior. However, it may produce vibration and heating, damaging or reducing the life-time of the system. Thereby, it is an important objective to relax the hard-response of the controller. Thus, the problem of stabilizing Pendular-type Underactuated Robots driven by electric machines under real-time experimental conditions is addressed using a robust structure, while the resulting adverse dangerous effects are reduced using adaptation and considering the actuator's model into the control design. Numerical and experimental results are presented for different platforms.

# RESUMEN

## CONTROL ROBUSTO Y ADAPTABLE PARA UNA CLASE DE SISTEMAS ELECTROMECÁNICOS

La Robótica es una de las ciencias de la ingenierı́a aplicada que más ha propiciado el desarrollo tecnológico de nuestra época desde hace ya varias décadas, motivado principalmente por la evolución de los sistemas de producción en la industria, a su vez impulsado por la constante y creciente demanda por la satisfacción de las necesidades del ser humano, el crecimiento poblacional y la sobreexplotación de los recursos naturales. Aunque son los robots manipuladores los de mayor aplicación en la industria, hoy los sistemas robóticos son responsables de una gran cantidad y diversidad de tareas dentro y fuera del ambiente industrial. Considere por ejemplo las aplicaciones militares, médicas, sistemas de transporte y comunicación, etc. En un márgen más amplio, la mecatrónica y la electromecánica como ciencias de la ingenierı́a aplicada tratan de la automatización de los procesos fı́sicos a través de la inteligencia computacional; la robótica forma parte importante de su campo de estudio. Podemos describir a un robot como un sistema electromecánico reprogramable y reconfigurable capaz de transmitir movimientos controlados para la automatización de una tarea. Se conforma fundamentalmente de un mecanismo, un sistema de percepción, la instrumentación y el sistema de control. Los actuadores forman parte de la instrumentación y regularmente son máquinas eléctricas de algún tipo: motores de CD, motores a pasos, motores de inducción y los motores brushless suelen ser los más comunes. Esto se debe principalmente al estado del conocimiento, pues la teorı́a disponible para el control de este tipo de máquinas es muy madura, además de que la instrumentación requerida para la adecuación de las señales es relativamente simple. Por otro lado, la maniobrabilidad de un robot se describe por la movilidad del mecanismo, a su vez descrita por las variables de configuración o grados de libertad. Cuando la dimensión del espacio de configuración es mayor que el número de actuadores independientes se dice que el sistema es subactuado. Ejemplos de éstos son los robots móviles andantes y con ruedas, los vehı́culos aéreos, robots marinos y submarinos, ası́ como los brazos robóticos con eslabones flexibles o elásticos. Los robots subactuados reúnen muchas situaciones desafiantes desde el punto de vista de control, por lo que, además de sus importantes aplicaciones, resultan de gran utilidad como plataformas de pruebas. Entre otras caracterı́sticas, éstos poseen una *dinámica rápida* y altamente no lineal, son controlables solo en pequeñas regiones del espacio del estado, comunmente tienen un alto grado relativo y poseen una fase no mínima. Las estrategias de control para esta clase de sistemas regularmente persiguen el objetivo de estabilización y son basadas en el modelo dinámico. Por este motivo, el control de sistemas completamente actuados puede ser abordado usando técnicas de control para subactuados que mejoran la eficiencia de sus movimientos. Cuando el número de articulaciones pasivas es menor o igual al número de articulaciones activas el problema de control en sistemas experimentales puede ser resuelto mediante técnicas basadas en la aproximación lineal. Lo que es más, su modelo puede ser linealizado a través de una retroalimentación linealizante no colocada, y posteriormente la dinámica residual se trata mediante técnicas lineales tradicionales. En el caso opuesto, la aproximación lineal suele no ser lo suficientemente robusta para conseguir la estabilización en un entorno experimental, pues pequeñas perturbaciones puede hacerla inestabilizable, además de que una retroalimentación linealizante no es aplicable. En un ambiente experimental suelen aparecer efectos adversos, como la presencia de incertidumbres paramétricas y de modelo, perturbaciones acopladas y no acopladas, la indisponibilidad de algunas variables internas, o las desventajas de su aproximación usando técnicas tradicionales tales como filtros, diferenciadores o deri-

vada sucia. Resulta entonces importante mejorar la robustez del lazo de control ante estas condiciones. Existen fundamentalmente dos enfoques para este fin. El Control Robusto se basa en la inclusión de términos dominantes, cuyos efectos eclipsan los de los fenómenos adversos. El Control Adaptable por otro lado consiste en estimar los parámetros del sistema en tiempo real, de modo que los efectos de las perturbaciones e incertidumbres aparecen en el modelo nominal. La política de control se determina entonces cada vez que se actualiza el modelo. Las técnicas de control robusto conducen casi de forma unívoca a controladores de alta ganancia, las cuales regularmente no pueden implementarse directamente en un sistema real. Por lo tanto deben adoptarse algunas técnicas adicionales que ayuden a relajar estos efectos. En el control de sistemas mecatrónicos, la práctica común es una estructura de control anidado. Ésto es, se usa un lazo de control para controlar la parte mecánica y un lazo interno para el control de los actuadores. Esta práctica sin embargo, para la clase de sistemas abordados, puede introducir efectos peligrosos; por ejemplo, algunas estructuras de control suelen introducir componentes de alta frecuencia, que se amplifican a través de la dinámica del actuador. Además, las políticas de control robusto tienden a generar una respuesta agresiva, lo cual puede producir vibraciones en la estructura del mecanismo y sobrecalentamiento de los instrumentos, produciendo daños irreversibles o reduciendo considerablemente su tiempo de vida. Es entonces un tema importante la relajación de la respuesta violenta del controlador. Nuestra contribución principal aborda el problema de estabilización para Robots Subactuados tipo pendulares impulsados por máquinas eléctricas en las condiciones experimentales descritas, usando estrategias robustas fundamentadas en Modos Deslizantes y el Método del Elipsoide Atractivo, mientras se reducen los efectos adversos usando en conjunto técnicas de adaptación y considerando el modelo de los actuadores en el diseño de control. Se contribuye entonces con técnicas sofisticadas de control Robusto-Adaptable basadas en observadores y el modelo dinámico del sistema electromecánico. Los resultados son demostrados numérica y experimentalmente para diferentes plataformas.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Notación</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista of Acrónimos</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Descripción de la Contribución . . . . .	4
1.2.1. Motivación . . . . .	4
1.2.2. Planteamiento del problema . . . . .	9
1.2.3. Objetivos . . . . .	10
1.3. Metodología . . . . .	11
1.4. Organización de la tesis . . . . .	12
1.5. Conclusiones . . . . .	12
<b>2. Preliminares teóricos y de modelado</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Normas de vectores y matrices . . . . .	13
2.2.1. Vectorización, productos de Kronecker y de Khatri-Rao . . . . .	14
2.3. Modelado de los sistemas mecánicos . . . . .	15
2.3.1. El enfoque de Euler-Lagrange . . . . .	16
2.3.2. Comentarios sobre otras representaciones dinámicas . . . . .	18
2.4. Actuadores Electromecánicos . . . . .	19
2.4.1. Motor de CD de Imanes Permanentes . . . . .	19
2.4.2. Motor Paso a Paso de Imanes Permanente . . . . .	20
2.4.3. Motores de CD sin Escobillas . . . . .	22
2.5. Modelo acoplado de robots impulsados por máquinas eléctricas . . . . .	23
2.5.1. Forma general de segundo orden . . . . .	23
2.5.2. Representación en el espacio del estado: robots impulsados por motores PMDC . . . . .	25
2.5.3. La representación lineal paramétrica . . . . .	28
2.6. Nociones de Control Robusto . . . . .	29
2.6.1. Definiciones y condiciones de estabilidad . . . . .	29

2.6.2.	Método de la Elipsoide Atractiva (AEM)	33
2.6.3.	Modos Deslizantes	35
2.7.	Control Adaptable	36
2.7.1.	Control Adaptable Indirecto	36
2.7.2.	Control Adaptable Directo	37
2.8.	Conclusiones	37
<b>3.</b>	<b>Estimación del Estado e Identificación Paramétrica</b>	<b>39</b>
3.1.	Introducción	39
3.1.1.	Trabajo relacionado	40
3.1.2.	Descripción de la Contribución	40
3.2.	Preliminares y Planteamiento del Problema	41
3.2.1.	Suposiciones aceptadas	42
3.2.2.	Problema general de estimación del estado	42
3.3.	Observador Robusto de Orden Completo Basado en AEM	42
3.4.	Observador de Orden Reducido Basado en AEM	45
3.5.	Observador de Orden Reducido Basado en el Modelo no Lineal	48
3.6.	Observador de Orden Completo Basado en AEM y Modos Deslizantes	53
3.7.	Estimación paramétrica	56
3.7.1.	Identificador paramétrico con disposición del estado	56
3.8.	Resultados Experimentales	59
3.8.1.	El Sistema Mecatrónico Péndulo de Furuta	59
3.8.2.	El sistema TLIP impulsado por un motor de CD	64
3.9.	El Péndulo Doble Sobre el Carro con Articulación Restringida	66
3.10.	Conclusiones	70
<b>4.</b>	<b>Diseño de Control</b>	<b>75</b>
4.1.	Introducción	75
4.1.1.	Trabajo relacionado	76
4.1.2.	Descripción de la contribución	77
4.2.	Preliminares y Planteamiento del Problema	77
4.2.1.	Suposiciones aceptadas	77
4.2.2.	Problema general	78
4.3.	Control Robusto	78
4.3.1.	Control basado en el método del elipsoide atractivo	78
4.3.2.	Diseño de control por modos deslizantes	81
4.4.	Diseño de control robusto usando el modelo no-lineal	83
4.4.1.	Descripción del sistema	83
4.4.2.	Controlador basado en modelo no lineal usando AEM	83
4.5.	Ubicación de Polos Adaptable	87
4.5.1.	Descripción del sistema	87
4.5.2.	APPC con disposición plena del estado	89
4.6.	Resultados numéricos y experimentales	94
4.6.1.	Resultados numéricos para el sistema TLIPs	94
4.6.2.	Resultados numéricos para el sistema mecatrónico Pendubot	99
4.7.	Resultados experimentales	99
4.8.	Conclusiones	101

<b>5. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>105</b>
5.1. Conclusiones Generales . . . . .	105
5.2. Lista de publicaciones . . . . .	107
5.3. Trabajo Futuro . . . . .	108
<b>Bibliography</b>	<b>108</b>
<b>Apéndice</b>	<b>112</b>
<b>Apéndice A. La plataforma experimental</b>	<b>113</b>
A.1. Descripción . . . . .	113
<b>Apéndice B. Modelado Dinámico y Análisis...</b>	<b>115</b>
B.1. El sistema <i>Pendubot</i> y <i>Acrobot</i> . . . . .	115
B.1.1. Descripción del sistema . . . . .	115
B.1.2. Modelo de energía . . . . .	116
B.1.3. Análisis del modelo . . . . .	117
B.2. El Péndulo Rotativo . . . . .	119
B.2.1. Descripción del sistema . . . . .	119
B.2.2. Modelo de energía . . . . .	119
B.2.3. Análisis del modelo . . . . .	120
B.3. El Triple Péndulo Invertido . . . . .	122
B.3.1. Descripción del sistema . . . . .	122
B.3.2. Energía del sistema . . . . .	123
B.3.3. Análisis del modelo . . . . .	125
B.4. El péndulo doble sobre un carro con restricciones elásticas . . . . .	127
B.4.1. Descripción del sistema . . . . .	127
B.4.2. Energía del sistema . . . . .	127
B.4.3. Modelo dinámico . . . . .	128





# Notación

- $\mathbb{R}$  : El conjunto de los números reales.  
 $\mathbb{R}^{n \times m}$  : El conjunto de las matrices con dimensiones  $n \times m$  con elementos reales.  
 $\det \mathbf{A}$  : El determinante de una matriz cuadrada  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
 $\mathbf{A}^\top$  : La transpuesta de una matriz  $\mathbf{A}$ .  
 $\mathbf{A}^\perp$  :=  $\text{null}(\mathbf{A})$  es el espacio nulo de la matriz  $\mathbf{A}$ .  
 $\text{rank } \mathbf{A}$  : El número mínimo de renglones o columnas linealmente independientes de  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$   
 $\text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] := \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  es la matriz diagonal con los elementos dados.  
 $\mathbf{I}_n$  :=  $\text{diag}[1, 1, \dots, 1]$  es la matriz identidad de tamaño  $n \times n$ .  
 $\mathbf{A}^{-1}$  : La inversa de la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
 $\mathbf{A}^+$  :=  $[\mathbf{A}^\top \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}$  es la pseudoinversa de Moore-Penrose de la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .  
 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  : El producto de Kronecker de dos matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ .  
 $\mathbf{0}_{m \times n}$  : Una matriz rectangular de dimensión  $m \times n$  cuyos todos elementos son cero.  
 $\text{tr}(\mathbf{A})$  :=  $\sum_{i=1}^n a_{ii}$  es la traza de una matriz cuadrada  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
 $\sup \alpha$  := El supremo de  $\alpha$ .  
 $\|x\|_1$  :=  $\max |x_i|$  es la norma vectorial modulo-suma.  
 $\|x\|_2$  :=  $\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$  es la norma Euclidiana.  
 $\eta_\tau$  : denota dependencia, i.e.,  $\eta_\tau = \eta(\tau)$ .  
 $\alpha \otimes \beta$  : denota el producto de Kronecher  
 $\alpha \odot \beta$  : denota el producto de Khatri-Rao por columna  
 $\text{vec}(\mathbf{A})$  : El operador de vectorización de una matriz por columnas.  
 $\text{vec}_{mm}^{-1}(\alpha)$ : La antivectorización de un vector, para la conformación de una matriz.



# Lista of Acrónimos

<b>DoF</b>	Degrees of freedom (Grados de libertad).
<b>EL</b>	Euler-Lagrange.
<b>AEM</b>	Attractive Ellipsoid Method (Método del Elipsoide Atractivo).
<b>SM</b>	Sliding Modes (Modos deslizantes).
<b>SMC</b>	Sliding Mode Control (Control por modo deslizante).
<b>SMO</b>	Sliding Mode Observer (Observador por modo deslizante).
<b>dSM</b>	Dynamic Sliding Modes (Modos deslizantes dinámico).
<b>iSM</b>	Integral Sliding Modes (Modos deslizantes integrales).
<b>eTLIPS</b>	Electromechanical Triple-Link Inverted Pendulum (Pendulo triple invertido electromecánico).
<b>DC</b>	Direct Current (Corriente directa)
<b>PMDC</b>	Permantent Magnet DC (De corriente directa e imanes permanentes).
<b>PMSDC</b>	Permanent Magnet Stepper DC (A pasos de imanes permanentes).
<b>BLDC</b>	Brushless DC (Motores de cd sin escobillas).
<b>LMI</b>	Linear Matrix Inequality (Desigualdad Matricial Lineal).
<b>BMI</b>	Bilinear Matrix Inequality (Desigualdad Matricial Bilineal).
<b>UUB</b>	Ultimately Uniformly Bounded (Últimamente, uniformemente acotada).



# Índice de figuras

1.1. Control anidado de robots. . . . .	5
1.2. Trayectorias del sistema: posición y velocidad del péndulo para ambos enfoques. . . . .	7
1.3. Señal de control: (a) enfoque de control anidado, (b) enfoque de modelo electromecánico. . . . .	7
1.4. Enfoque de control Robusto-Adaptable de sistemas electromecánicos. . . . .	10
2.1. Construcción de un motor a pasos. From Chiasson, J. (2005). Modeling and high performance control of electric machines (Vol. 26). John Wiley & Sons. Section 9.4 [7]. . . . .	21
2.2. Control Adaptable Indirecto . . . . .	36
2.3. Control Adaptable Directo . . . . .	37
3.1. El Péndulo de Furuta: estimación de la corriente de armadura. . . . .	61
3.2. El Péndulo de Furuta: estimación de la posición angular del brazo. . . . .	61
3.3. El Péndulo de Furuta: reconstrucción de la posición angular del péndulo. . . . .	61
3.4. El Péndulo de Furuta: estimación de la velocidad del brazo. . . . .	62
3.5. El Péndulo de Furuta: estimación de la velocidad del péndulo. . . . .	62
3.6. Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) reconstrucción de la posición del brazo, (b) estimación de la velocidad del brazo. . . . .	63
3.7. Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) estimación de la posición del péndulo, (b) estimación de velocidad del péndulo. . . . .	63
3.8. Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) estimación de la corriente de armadura, (b) evolución de la variable deslizante. . . . .	64
3.9. Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) variable deslizante, (b) estimación de la corriente de armadura. . . . .	64
3.10. Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) estimación de la posición del brazo, (b) estimación de la velocidad del brazo. . . . .	65
3.11. Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) estimación de la posición del péndulo, (b) estimación de la velocidad del péndulo. . . . .	65
3.12. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetro $-\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{R}_a$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	66
3.13. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros $-\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	66
3.14. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque $\mathbf{A}_{31}$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	67
3.15. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque $\mathbf{A}_{32}$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	67
3.16. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque $\mathbf{A}_{33}$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	68

3.17. Respuesta de la estimación paramétrica: parámetro $\mathbf{L}_a^{-1}$ de la matriz $\mathbf{B}$ de la aproximación cuasi lineal. . . . .	68
3.18. Corriente de armadura. . . . .	68
3.19. Posición angular del primer péndulo. . . . .	68
3.20. Posición angular del segundo péndulo. . . . .	69
3.21. Posición angular del tercer péndulo. . . . .	69
3.22. Velocidad del primer péndulo. . . . .	69
3.23. Velocidad del segundo péndulo. . . . .	69
3.24. Velocidad del tercer péndulo. . . . .	70
3.25. Esquema de la plataforma experimental . . . . .	70
3.26. Estudio comparativo sobre el desempeño de los observadores propuestos. . . . .	71
3.27. Reconstrucción de la corriente de armadura. . . . .	71
3.28. Reconstrucción de la velocidad del carro. . . . .	72
3.29. Reconstrucción de la velocidad del primer péndulo. . . . .	72
3.30. Reconstrucción de velocidad del segundo péndulo. . . . .	72
3.31. Error de estimación de la velocidad del carro. . . . .	72
3.32. Error de estimación de la velocidad del primer péndulo. . . . .	73
3.33. Error de estimación de la velocidad del segundo péndulo. . . . .	73
4.1. Trayectorias de posición del sistema triple-péndulo invertido . . . . .	95
4.2. Comportamiento de velocidad. . . . .	96
4.3. Corriente de armadura del motor. . . . .	96
4.4. Señal de control de voltaje. . . . .	96
4.5. Variable de deslizamiento para el dSMC. . . . .	97
4.6. Variable de deslizamiento para el iSMC. . . . .	97
4.7. Elipsoide atractiva para el primer eslabón. . . . .	98
4.8. Elipsoide atractiva para el segundo eslabón. . . . .	98
4.9. Elipsoide atractiva para el tercer eslabón . . . . .	98
4.10. Respuesta de posición para el sistema Pendubot. . . . .	100
4.11. Respuesta de velocidad del sistema Pendubot. . . . .	100
4.12. Señales eléctricas del actuador del sistema Pendubot. . . . .	100
4.13. Elipsoide atractiva correspondiente a la respuesta del Pendubot. . . . .	101
4.14. Elipsoide atractiva correspondiente a la respuesta del Pendubot. . . . .	101
4.15. Instrumentación del péndulo sobre el carro. . . . .	102
4.16. Respuesta de desplazamiento del carro ante la acción de control robusto-adaptable. . . . .	102
4.17. Respuesta de desplazamiento del péndulo ante la acción de control robusto-adaptable. . . . .	102
4.18. Respuesta de desplazamiento del carro ante la acción de control robusto por <b>AEM</b> . . . . .	103
4.19. Respuesta de desplazamiento del péndulo ante una acción de control robusto por <b>AEM</b> . . . . .	103
4.20. Seguimiento de trayectoria del carro usando <b>APPC</b> . . . . .	103
4.21. Seguimiento de trayectoria del péndulo usando <b>APPC</b> . . . . .	103
4.22. Respuesta del control robusto de seguimiento de trayectoria del carro. . . . .	104
4.23. Respuesta del control robusto de seguimiento de trayectoria del péndulo. . . . .	104
A.1. Diagrama de bloques del sistema experimental. . . . .	113

A.2.	(a) Motor de alta precisión Maxon DC motor 218009, (b) controlador-Amplificador Maxon Servo-Amplifier LSC 30/2. . . . .	114
A.3.	Tarjeta de adquisición de datos NI-USB 6363. . . . .	114
A.4.	Encoder óptico SCANCON. . . . .	114
B.1.	El sistema péndulo doble de PendCON Company. . . . .	115
B.2.	El péndulo rotativo(péndulo de Furuta). . . . .	119
B.3.	El péndulo invertido triple. . . . .	122
B.4.	Esquemático del péndulo invertido triple. . . . .	122
B.5.	El péndulo doble sobre un carro con restricciones elásticas. . . . .	127





# Capítulo 1

## Introducción

*“It is not knowledge, but the act of learning,  
not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment”.*  
— CARL FRIEDRICH GAUSS.

### 1.1. Antecedentes

El estudio de los sistemas mecánicos es uno de los tópicos más importantes en ingeniería y ha sido objeto intensivo de desarrollo a lo largo de por lo menos tres siglos. Muchas mentes prodigiosas en la historia de la ciencia moderna tales como Isaac Newton (1643-1727), Leonhard P. Euler (1707-1783), Joseph L. Lagrange (1736-1813), William M. Hamilton (1805-1865), entre otros, sentaron las bases del entendimiento del movimiento hacia finales del siglo XVII y la primera mitad del siglo XVIII. Su trabajo resultó en distintos enfoques para expresar el comportamiento dinámico de los cuerpos en la forma de un objeto matemático. Sin embargo, fue a partir de la Revolución Industrial que tuvo lugar del siglo XVIII al XIX, que su uso fue extendido para la automatización de los procesos de manufactura en la industria y se volvió de particular interés para muchos investigadores y académicos alrededor del mundo. El detonante de este movimiento muy probablemente fue la invención de la máquina de vapor, la principal fuente de poder en la industria en esa época, y que dio origen al control de los sistemas mecánicos. El buque de vapor, el ferrocarril y la bomba de vapor son solo algunos ejemplos.

A lo largo del siglo XX, la máquina de vapor fue gradualmente sustituida por motores de calor, máquinas eléctricas, y actuadores neumáticos e hidráulicos. Estos nuevos sistemas de potencia se volvieron populares debido a su confiabilidad, precisión y costo reducido. Aunque la automatización ya era posible antes de estos inventos, principalmente basada en mecanismos muy ingeniosos, fue el alto nivel de entendimiento y control de la energía eléctrica lo que hizo posible el grado de industrialización de nuestra época. Además, la invención de los transistores, los circuitos integrados y las computadoras permitió mejorar los sistemas de control y desencadenó el desarrollo tecnológico. Investigadores en industrias y universidades comenzaron a trabajar en el control de los sistemas mecánicos, para la automatización de actividades peligrosas, tediosas y duras para el ser humano. Esto condujo al desarrollo de una nueva disciplina en ingeniería; en este sentido, la invención de diferentes transductores diseñados para aprovechar las fuerzas físicas, y la posibilidad de manejarlos mediante señales eléctricas, permitió sustituir la mano del hombre por sistemas mecánicos automatizados para

realizar trabajos duros. Además, el desarrollo de los sensores para la cuantificación de los fenómenos físicos, permitió diseñar sistemas que responden a cambios en las condiciones de operación, para mantener un margen de desempeño aceptable. Estos novedosos sistemas mecánicos con movimientos controlados se denominaron *Robots*.

Un robot es un sistema electromecánico programable y reconfigurable construido para desarrollar una tarea de forma autónoma. La robótica es una disciplina de la ingeniería dedicada al estudio y desarrollo de robots y es básicamente una combinación de matemáticas y física y ha sido responsable del alto rango de industrialización de la vida moderna. Los robots están compuestos fundamentalmente por cuatro partes estructurales: una parte mecánica, un sistema de percepción, la instrumentación electrónica y un controlador. La *parte mecánica* se refiere al mecanismo ideado para transmitir potencia mecánica en forma de movimiento; su comportamiento se captura en la forma de un objeto matemático utilizando distintos enfoques, como las ecuaciones de movimiento de Newton, o los formalismos de Euler-Lagrange y Hamilton; los dos primeros resultan equivalentes, ya que concluyen con el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden. El formalismo de Hamilton sin embargo conduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. En robótica, se prefiere el formalismo de Euler-Lagrange por su simplicidad en comparación con el enfoque de Newton, en vista de que es un método analítico, y también se prefiere por sobre el enfoque hamiltoniano por la naturalidad de las variables (posición, velocidad y aceleración). Los sistemas mecánicos modelados de este modo se denominan sistemas Lagrangianos y toman una forma matricial muy particular denominada *forma estándar de robótica*. Por otro lado, el *sistema perceptivo* de un robot se encarga de dotar al sistema de los dispositivos apropiados para realimentar la información necesaria para generar algún tipo de autonomía en su desempeño. La instrumentación de un robot tiene que ver con la parte eléctrica, donde se trata principalmente con el acondicionamiento y procesamiento de señales. Para la tecnología de nuestra época, la parte eléctrica es inherente de los robots, sin importar que los actuadores pudieran tener otra naturaleza. La razón principal es que casi cualquier tipo de actuador tiene una parte electrónica para manejarse. Finalmente, la parte orientada al diseño del controlador se dedica al análisis matemático del modelo y su manipulación para realizar el trabajo deseado, así como de su ejecución a través de algoritmos programados.

El desarrollo de robots es un tópico de la ingeniería aplicada ampliamente estudiado por varias décadas y de gran interés aún en la actualidad. El sector industrial ha sido el principal impulsor de esta tecnología, y a partir de la tercera revolución industrial han ocupado los espacios de sus procesos de producción con sistemas robóticos avanzados. Después de aproximadamente cincuenta años, los robots en la industria han alcanzado un alto grado de desarrollo, disponiendo de robots tan rápidos y precisos que quizá su estado actual no precisa de actualizaciones significativas. Sin embargo de forma general, los principales estudios en el campo de robótica se vuelcan sobre dos temas específicos: robots cooperativos y sistemas de movilidad. En el ambiente industrial el primero se refiere al uso de un conjunto de robots para desarrollar una tarea común de tal modo que poseen un espacio de trabajo compartido, más aún, también describe las aplicaciones en las que un operador humano interactúa con el robot durante el cumplimiento de una labor. En cualquier caso el principal objetivo es garantizar la seguridad de los agentes ante el riesgo evidente de colisión, a través de técnicas de evasión de colisiones y absorción de impacto. Este requisito ha impulsado la necesidad por rediseñar las grandes máquinas robóticas utilizadas en los procesos automatizados hasta ahora; los enfoques principales sugieren que la eliminación de bordes afilados y principalmente una reducción en la masa de los eslabones que componen al mecanismo contribuyen considerablemente al mejoramiento de la seguridad. Esta reducción de masa conduce a ro-

bots mucho mas ligeros hechos a la medida de cada aplicación, aunque la necesidad por mantener sus características de precisión y velocidad generan flexibilidad o elasticidad en sus componentes. Este efecto también suele introducirse deliberadamente para absorber parte del impacto ante una colisión (como es el caso de los actuadores elásticos). Por otro lado respecto de las aplicaciones de movilidad, los sistemas de transporte industrial, los vehículos autónomos, las operaciones de búsqueda y rescate a través de UAVs, la exploración, etc., refieren directamente a la robótica móvil y que actualmente también son objeto de investigación principalmente desde el punto de vista del control automático y la Inteligencia Artificial. Las aplicaciones de robótica cooperativa y robótica móvil comparten una característica que los ponen en la perspectiva del presente trabajo: el fenómeno de subactuación. Por un lado, la elasticidad introducida en el mecanismo y los actuadores introducen la variable de deformación, sobre la cual no se actúa directamente. Por otro lado, la robótica móvil posee restricciones no holonómicas de primer y segundo orden de manera natural.

De modo general, cuando por algún motivo el número de actuadores es menor que el número de grados de libertad<sup>1</sup> resultan distintos desafíos; a esta clase de robots se les llama subactuados y han encontrado muchas aplicaciones en la vida real. Esta clase de sistemas posee restricciones no holonómicas de segundo orden (restricciones de aceleración), por lo que resultan controlables o estabilizables solo en algunas regiones del espacio de configuración; dos situaciones complican seriamente la tarea de estabilización: primero, para sistemas de orden superior, las propiedades fundamentales de control del modelo lineal no están aseguradas, por lo que una aproximación lineal controlable (o estabilizable) puede volverse incontrolable (inestabilizable) en presencia de pequeñas perturbaciones; segundo, cuando el sistema dinámico no está acoplado inercialmente<sup>2</sup>, el radio de estabilizabilidad es muy reducido y la estabilización puede no lograrse en la práctica utilizando técnicas tradicionales basadas en el modelo lineal. Por tanto, para estos casos es necesario mejorar la robustez y utilizar el modelo no lineal directamente en el diseño de control. Existen principalmente dos enfoques para mejorar la robustez de un sistema de control en lazo cerrado. El primero implica estimar la dinámica desconocida, con el fin de hacer adaptativo el controlador y responder a los cambios que tienen lugar en tiempo real. El segundo consiste en incluir un término que domine los efectos desconocidos; respecto de este último enfoque, un par de estrategias novedosas que han demostrado su eficacia y simplicidad son el método del elipsoide atractivo (**AEM**, *Attractive Ellipsoid Method*) y el control por modo deslizante (**SMC**, *Sliding Mode Control*). Los controladores de modo deslizante han dominado el campo de aplicación en los últimos tiempos, debido a su eficacia y a lo interesante de los problemas que de aquí resultan desde el punto de vista teórico. Sin embargo, esta técnica tiene una forma de conmutación de alta frecuencia, lo que resulta demasiado peligroso para los sistemas electromecánicos, ya que produce vibraciones y controladores de muy alta ganancia, que a su vez genera sobrecalentamiento en las máquinas eléctricas y reduce su vida útil. El método del elipsoide atractivo posee la ventaja principal en su simplicidad, ya que se trata de un controlador por retroalimentación estática del estado que genera robustez en la respuesta, aunque su sintonización a menudo resulta compleja, y del mismo modo tiende a producir señales de control de alta ganancia. El problema de alta ganancia resulta típico en los sistemas de control robusto, por lo que para el caso de control de robots el modelo de actuadores juega un papel importante.

---

<sup>1</sup>El término *grados de libertad* define la movilidad de un mecanismo y alude al número de coordenadas generalizadas (conjunto mínimo de variables necesarias para describir completamente la configuración del sistema).

<sup>2</sup>Un sistema está acoplado inercialmente si el número de articulaciones activas es mayor o igual que el número de pasivas.

Una gran mayoría de las aplicaciones halladas en la literatura respecto del control de robots o sistemas mecatrónicos omiten la contribución dinámica de los actuadores. Ésta es una buena aproximación en vista de que las dinámicas eléctricas son mucho más rápidas que las mecánicas, que dominan el comportamiento dinámico del modelo electromecánico. Sin embargo, se encuentran algunas características interesantes cuando se considera el modelo del actuador eléctrico en conjunto con el mecanismo del robot. La afinidad de la entrada de control y la posibilidad de implementar controladores de conmutación de alta frecuencia directamente, reduciendo los efectos dañinos que esto produce son los más importantes. Los motores eléctricos de CD de imanes permanentes (**PMDC**, *permanent magnet direct-current*), los motores paso a paso de imanes permanentes (**PMS**, *permanent magnet stepper*) los motores de CD sin escobillas (**BLDC**, *brushless dc*) y los motores de CA de inducción son los actuadores más utilizados en la industria y resultan de particular interés. Por otro lado, la aplicación de un sistema de control en lazo cerrado para sistemas físicos requiere de la disponibilidad de sus variables internas. El control de sistemas robóticos precisa del conocimiento de las variables de configuración, velocidades y corrientes eléctricas. Los sensores para medir directamente algunas de éstas resultan demasiado costosos y no lo suficientemente confiables, por lo que el problema de estimación del estado aplicado los robots subactuados sigue siendo un desafío en ingeniería, con el objetivo de construir algoritmos que permitan estimar algunas de estas variables en tiempo real, en lugar de medirlas directamente a través de un dispositivo físico. Pese a las evidentes bondades que ésto supone desde el punto de vista práctico, su implementación puede generar situaciones complejas en las que debe ponerse especial cuidado; el proceso de observación debe cumplir dos requisitos fundamentales para la implementación de control; por un lado, este debe ser rápido, de modo que la trayectoria del sistema a partir de la condición inicial no abandone la región de controlabilidad o estabilizabilidad; por el otro, esta característica respecto de la velocidad de la respuesta puede producir el fenómeno de pico, un efecto de sobreimpulso en la estimación que genera altas ganancias de control que inestabilizan al sistema de control en lazo cerrado, lo que genera la necesidad por acotar la respuesta del observador de forma global.

La descripción previa hace evidente la necesidad por el diseño de nuevos algoritmos para el control de esta clase de sistemas que relajen estas desventajas. El presente trabajo sirve como un aporte para solucionar estos problemas: el control robusto de una clase de robots subactuados impulsados por máquinas eléctricas, en presencia de incertidumbres y perturbaciones, cuando el estado completo no está disponible basado en un algoritmo de control adaptativo y utilizando los conceptos del método elipsoide atractivo y modos deslizantes.

## 1.2. Descripción de la Contribución

### 1.2.1. Motivación

Las técnicas tradicionales para el control de robots usan una estructura anidada; el lazo de control principal se ocupa del mecanismo, por lo cual la señal de control requerida está definida por un par de fuerza, mientras que un lazo anidado adicional regula la corriente requerida para generarlo, a través de la modulación del voltaje de alimentación (ver Figura 1.1). Estos algoritmos de control han demostrado ser eficaces en condiciones reservadas y poco comprometidas, como en el caso de robots completamente actuados o subactuados inercialmente acoplados de bajo orden [43]. Sin embargo, conforme el orden del sistema subactuado aumenta y el número de articulaciones pasivas es mayor que el número de activas, las propiedades de la aproximación lineal no son lo suficientemente robustas para lograr el

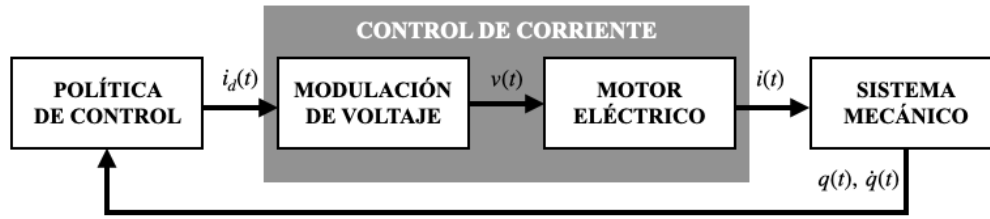


Figura 1.1: Control anidado de robots.

objetivo de control en un ambiente experimental. La aproximación lineal puede volverse incontrolable (inestabilizable) en presencia de pequeñas perturbaciones o efectos inciertos. El problema consiste en mejorar la robustez del sistema de control de lazo cerrado en torno a las soluciones de equilibrio inestable. En este sentido, los controladores no lineales de alta frecuencia han demostrado su robustez y eficacia, sin embargo, esta práctica tiene algunos inconvenientes cuando se aplica directamente al mecanismo, es decir, cuando la entrada de control se da en la forma de un par de fuerza.

Describamos las ideas anteriores en términos matemáticos para el caso de un sistema mecánico impulsado por motores eléctricos. Primero, considere el caso en el que el sistema mecánico es impulsado directamente por una entrada de torque. De forma general, considere que el modelo dinámico nominal de la parte mecánica, con  $n$ -grados de libertad, se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden como:

$$\ddot{q}_t = \phi_1(q_t, \dot{q}_t, t) + \phi_2(q_t, \dot{q}_t, t)\tau_t,$$

donde  $q_t \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\phi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\phi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  representan la dinámica no-lineal, y  $\tau_t \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de torque de control. Permítase usar un controlador de alta frecuencia  $\tau(t) = \alpha(\beta)$ , donde  $\beta = \omega t$ ,  $\omega \uparrow \infty$ . El objetivo de control podría alcanzarse usando este controlador, sin embargo, es necesario estudiar la implementabilidad del control en la práctica. Para ello, considérese que este controlador es implementado por medio de  $m$ -motores eléctricos independientes, cuyo modelo puede escribirse de modo general como:

$$\dot{I}_t = \vartheta_1(I_t, \dot{q}_t, t) + \vartheta_2(I_t, \dot{q}_t, t)v_t,$$

donde  $I_t \in \mathbb{R}^{mN}$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^{mN}$  son los vectores de corriente y voltaje del motor de  $N$  fases, respectivamente,  $\vartheta_1 : \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{mN}$  y  $\vartheta_2 : \mathbb{R}^{mN} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{mN \times mN}$  definen el comportamiento dinámico; la última expresión muestra que el voltaje de armadura es directamente proporcional a la derivada temporal de la corriente eléctrica. Por otro lado, el par de control de la parte mecánica se relaciona con la corriente de armadura de los actuadores mediante la siguiente relación:

$$\tau_t = \mathbf{k}(q_t, \dot{q}_t, t)I_t, \quad 0 < \mathbf{k} \in \mathbb{R}^{m \times mN},$$

en una pequeña región alrededor del origen del sistema. En virtud que se ha propuesto un par de control de alta frecuencia, la última expresión conduce a  $I_t = \mathbf{k}^+(q_t, \dot{q}_t, t)\tau(t)$ , donde  $\mathbf{k}^+(\cdot)$  denota alguna forma de la inversa de la matriz de acoplamiento  $\mathbf{k}(\cdot)$ ; luego:

$$\frac{dI_t}{dt} = \frac{d}{dt}\{\mathbf{k}^+(q, \dot{q})\}\alpha(\beta) + \omega\mathbf{k}^+(q, \dot{q})\frac{\partial\alpha(\beta)}{\partial\beta},$$

note como  $\dot{I}_t$ , y por lo tanto también el voltaje de entrada, es amplificado por la presencia de las componentes de alta frecuencia en el par de control. Por lo tanto, en vista de que el par

de control es proporcional a la corriente de armadura, y éste se deriva a través de la dinámica del actuador, el efecto de esta alta frecuencia es amplificado, produciendo sobrecalentamiento en los devanados de los actuadores y daños irreversibles. Considere ahora el modelo acoplado del sistema robótico; en estas condiciones, la entrada de control es voltaje. Si se aplica una entrada de control de alta frecuencia, la máquina eléctrica actúa como un filtro pasa bajas cuando se obtiene la corriente de armadura (y por tanto el par de control), por lo que los controladores de conmutación de alta frecuencia, como los basados en el modo deslizante convencional, pueden aplicarse directamente al sistema de control.

Para ilustrar el problema descrito, considere el caso de la estabilización de un péndulo simple en el punto de equilibrio inestable a modo de ejemplo, con una masa  $m$ , longitud  $l$  y par de control  $\tau(t)$ . El desplazamiento  $\theta$  se mide en sentido antihorario a partir del punto de interés. Su modelo dinámico se da en la forma estándar de Lagrange como:

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin(\theta) = \tau(t). \quad (1.1)$$

El ejemplo consiste en conseguir la estabilización a través de la dinámica lineal, usando un controlador por modo deslizante tradicional que compense los términos de orden superior de la linealización por series de Taylor. Se definen las variables de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  y  $u(t) = \tau(t)$  como entrada de control, la representación cuasi-lineal  $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u(t) + \varphi(x, t)$  queda como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 \\ \frac{g}{l} & , & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{l} [\sin(x_1) - x_1] \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Note que el vector de términos de orden superior cumple  $\|\varphi(\cdot)\| \leq \delta_0 + \delta_0\|x_1\|$ , con  $\delta_0 = \frac{g}{l}$ . Si la variable deslizante se define como  $\sigma(x) = \mathbf{K}x$ , donde  $\mathbf{K} = [k_1, k_2]$  es la ganancia de la retroalimentación del estado sintonizada por LQR para el sistema nominal, y la función de energía  $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$ , resulta el siguiente control de modo deslizante:

$$u(t) = -\frac{ml^2}{k_2} \left\{ \frac{k_2g}{l}x_1 + k_1x_2 + \delta_0|k_2|(1 + \|x_1\|) + \rho \operatorname{sign}(\sigma) \right\}, \quad 0 < \rho \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Este controlador debe ser implementado como un par de torque para el sistema mecánico; supóngase que debe implementarse a través de un motor de cd de imanes permanentes, como un control de corriente. Éste a su vez está comandado por una entrada de voltaje, de acuerdo con el siguiente modelo en función de transferencia:

$$\frac{I_a(s)}{V_a(s)} = \frac{Js}{JL_a s^2 + JR_a s + K_e K_t},$$

donde  $L_a$  y  $R_a$  son la inductancia y resistencia de la armadura, respectivamente,  $K_e$  es la constante de la fuerza contra-electromotriz y  $J$  es el momento de inercia del rotor. Además, el par de control en (1.1) se relaciona con la corriente de armadura como  $\tau(t) = K_\tau I_a$ , donde  $K_\tau$  es la constante de torque. Considere ahora un enfoque similar, haciendo uso del modelo del mecanismo (1.1) acoplado con el modelo de un motor de CD, descrito como:

$$\begin{aligned} L_a \dot{I}_a + R_a I_a + K_e \dot{\theta} &= v_a, \\ J \ddot{\theta} &= \tau(t) - \tau_L(t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $\dot{\theta}$  es la velocidad angular del eje,  $v_a$  es el voltaje de entrada, y  $\tau_L$  el torque de carga directamente acoplado al eje del motor; queda entonces  $\tau_L = ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta$ . Seleccione

las variables de estado como  $x_1 = I_a$ ,  $x_2 = \theta$  y  $x_3 = \dot{\theta}$ . La entrada de control se define por  $u(t) = v_a(t)$ . La representación cuasi-lineal queda:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & 0 & \frac{-K_e}{La} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_\tau}{J+ml^2} & \frac{mgl}{J+ml^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mgl}{J+ml^2} [\sin(x_2) - x_2] \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Se obtiene un controlador por modos deslizantes usando el procedimiento previo. Resulta como:

$$u(t) = -\frac{La}{k_1} \left\{ \left( \frac{k_3 K_\tau}{J+ml^2} - \frac{k_1 Ra}{La} \right) x_1 + \frac{k_3 mgl}{J+ml^2} x_2 + \left( k_2 - \frac{k_1 K_e}{La} \right) x_3 + \eta_0 |k_3| (1 + \|x_2\|) + \rho \text{sign}(\sigma) \right\}, \quad (1.6)$$

donde  $\eta_0 = mgl/(J + ml^2)$ . Se ha realizado una simulación numérica con los parámetros  $m = 0.1[Kg]$ ,  $l = 0.49[m]$ ,  $J = 11.6 \times 10^{-6}[Kg \cdot m^2]$ ,  $La = 0.000612[H]$ ,  $Ra = 2.44[\Omega]$ ,  $K_\tau = 0.0822[N \cdot m/A]$  y  $K_e = 116[rpm/V]$ . Primero, los parámetros  $\mathbf{Q} = 10\mathbf{I}_2$  y  $R = 1$  fueron utilizados para sintonizar el LQR del modelo mecánico nominal. Luego se usó una ubicación de polos para sintonizar la ganancia del modelo electromecánico, de modo que los polos de la parte mecánica fueran los mismos resultantes del primer enfoque; el polo del subsistema eléctrico se ubicó como  $s_1 = -5200 + 0j$ . La trayectoria del estado se muestra en la figura 1.2. Como era de esperarse por el enfoque adoptado, las trayectorias lucen muy similares en ambos casos, y el objetivo de control se alcanza satisfactoriamente. Sin embargo, basta dar un vistazo en la figura 1.3 donde se muestra los voltajes de armadura requeridos para alcanzar tales resultados.

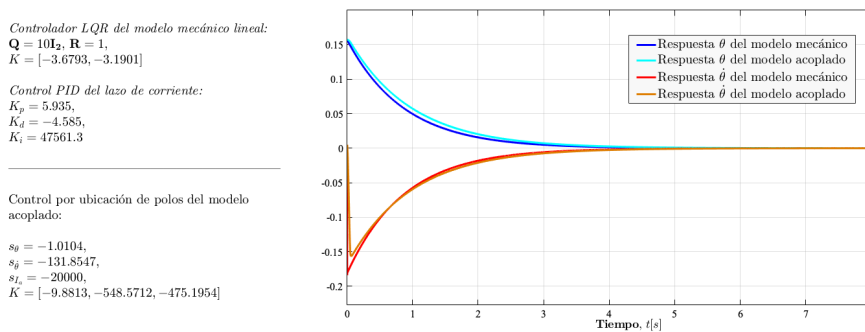


Figura 1.2: Trayectorias del sistema: posición y velocidad del péndulo para ambos enfoques.

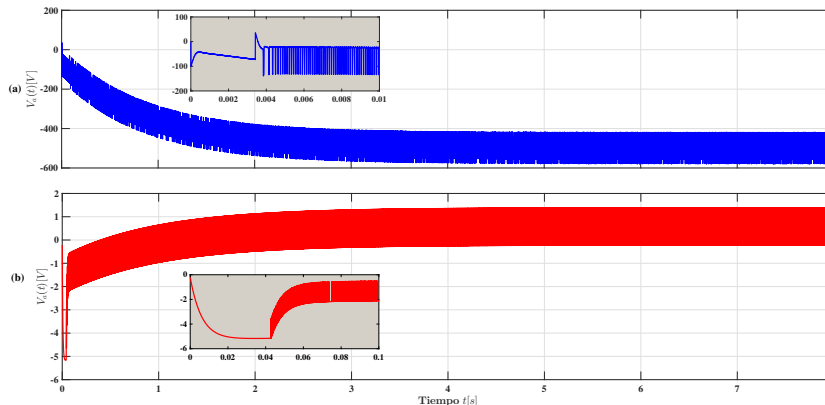


Figura 1.3: Señal de control: (a) enfoque de control anidado, (b) enfoque de modelo electromecánico.

Como se ve en el ejemplo anterior, al considerar el modelo del actuador de motor de corriente continua se obtienen algunas ventajas desde el punto de vista del control. Primero,



el sistema dinámico en la representación del espacio del estado resulta afín al control, dada la naturaleza lineal del motor de cd; segundo, la ley de control robusto de alta frecuencia obtenida se aplica directamente al sistema sin requerir un lazo de retroalimentación adicional.

Ahora bien, además de los desafíos que suponen los sistemas subactuados de manera natural, la instrumentación física requerida para la experimentación en tiempo real es también un tema importante; la implementación de un controlador requiere de un sistema de percepción mínimo sofisticado. Los sensores numéricos representan una buena alternativa cuando no se dispone de un dispositivo físico para la cuantificación de las variables de interés, tales como observadores de estado, filtros y diferenciadores. Por ejemplo, para los sistemas mecánicos es común instrumentar únicamente la adquisición de datos de posición, y estimar las velocidades de alguna manera. La práctica más extendida para los sistemas experimentales es utilizar la denominada derivada sucia, con un *filtro pasa bajas* adicional en la salida. Esta técnica se ha utilizado ampliamente y se ha demostrado que funciona en muchas situaciones, aunque produce algunos efectos nocivos, como *sobreimpulsos* que afectan de modo proporcional al lazo de control, que a su vez provocan que las trayectorias del sistema salgan de la región de atracción y genera inestabilizabilidad. Incluso si el filtro atenúa estos saltos, éste actúa uniformemente sobre la señal y puede producir atenuación en la región restante, lo que genera imprecisión de la señal completa. Los diferenciadores por otro lado, han demostrado ser muy eficientes en la estimación del estado ya que muestran cierto grado de robustez ante incertidumbres y efectos de perturbaciones de algún tipo. Sin embargo, en algunos casos las variables de estado no disponibles pueden no tener una relación directa con las disponibles y no pueden reconstruirse utilizando esta técnica. El principal inconveniente de los dos últimos enfoques es que el canal de medición casi siempre se ve perturbado por ruido eléctrico. Estas técnicas tienden a amplificar los efectos del ruido a medida que se utiliza la diferenciación directa. El uso de filtros es una excelente alternativa, ya que incorporan cierto grado de robustez mientras se estiman las variables de estado, y evita la diferenciación directa del canal de medición. El más utilizado es el célebre Filtro de Kalman, que provee un equilibrio entre el tiempo y costo de convergencia, por lo que se mejora algunos efectos no deseados en la tarea de control, como el conocido fenómeno de pico [28]. Los observadores por otro lado han sido muy utilizados para la estimación del estado; en este caso se usa el modelo del sistema para estimar las variables del estado, por lo que resulta en una mejora considerable en el tiempo de convergencia y la precisión de la estimación; además, las principales características de los efectos de incertidumbres y perturbaciones se incluyen en el diseño del observador, permitiendo mantener un mejor control sobre las características de la respuesta. Por esta razón, se obtienen funciones de observación robustas que resultan en observadores de alta ganancia que provocan la aparición de los correspondientes efectos adversos.

El uso de estrategias de control robusto es entonces un requisito indispensable para el control de robots subactuados en un ambiente experimental. Estas estrategias suponen del uso de un término dominante, cuyo objetivo principal es compensar los términos no lineales de la dinámica, las perturbaciones y los efectos inciertos, por lo que genera señales de alta ganancia. Los esquemas adaptativos suelen relajar los efectos adversos que genera la robustez de la respuesta en lazo cerrado pues permiten adecuar la función de control al comportamiento del sistema en cada instante de tiempo. El control robusto produce una respuesta violenta cuando aparecen las perturbaciones, mientras que el control adaptativo produce una señal a la medida del sistema dinámico en cada instante. Las estrategias de control robusto-adaptativo se motivan para garantizar los objetivos de control mediante señales físicamente implementables, haciendo uso extensivo del modelo dinámico para ajustar las señales de con-



trol robusto. Mientras que las técnicas de control robusto mejoran la robustez del sistema en lazo cerrado, el control adaptable podría relajar las propiedades violentas del control robusto.

Los siguientes apartados formalizan el trabajo de tesis.

### 1.2.2. Planteamiento del problema

El problema por resolver consiste en mejorar la robustez del sistema de control en lazo cerrado diseñado para la estabilización de una clase de robots subactuados, cuyas articulaciones activas son impulsadas directamente por medio de motores eléctricos independientes, alrededor de un punto de equilibrio inestable del modelo nominal, utilizando técnicas robustas y adaptativas. El objetivo principal es proporcionar condiciones suficientes para la aplicación exitosa en sistemas experimentales en tiempo real.

La clase de sistemas abordados se describe mejor a través de las siguientes características:

- sistemas de cadena cinemática abierta (sistemas pendulares); se considera el caso inercialmente acoplado y se trata primordialmente el caso en el que el número de articulaciones pasivas es mayor que el número de activas;
- el modelo dinámico del mecanismo está dado en la forma estándar de robótica;
- se usa el modelo mecánico acoplado al modelo de los actuadores a través de relaciones electromecánicas; los actuadores considerados para el estudio son motores de corriente directa de imanes permanentes;
- se generan las condiciones para tratar el caso en el que los actuadores son motores a pasos de imanes permanentes, motores de cd sin escobillas y motores de inducción.

Se consideran además las siguientes características para describir las condiciones de un ambiente experimental:

- incertidumbres de parámetros y de modelo, así como la presencia de perturbaciones de energía finita, acopladas y no acopladas al control, con efecto no desvaneciente sobre la dinámica del sistema;
- el vector de estado no está completamente disponible para su medición.

En estos casos, se espera conseguir los siguientes requerimientos:

- el radio de estabilizabilidad debe ser lo suficientemente grande para proveer algún tipo de estabilidad;
- la señal de control debe ser implementable en la práctica;
- la respuesta violenta proveniente de la aplicación de una política robusta debe ser relajada.

Desde el punto de vista del control, el problema se aborda dirigiendo las trayectorias del sistema hacia una zona de estabilidad. Después de algún tiempo, se encierran en un conjunto positivamente invariante, mientras que las incertidumbres y perturbaciones están latentes. El trabajo considera principalmente el uso del método del elipsoide atractivo, y Modos Deslizantes para concluir con los requisitos prácticos establecidos.

### 1.2.3. Objetivos

El propósito de este trabajo es realizar la estabilización de sistemas mecánicos no actuados de tipo pendular accionados por motores eléctricos, alrededor de una configuración inestable. Esto está destinado a plataformas experimentales en tiempo real, de tal manera que se proporcione un comportamiento seguro y adecuado. Las condiciones experimentales en tiempo real incluyen la latencia de las incertidumbres y los efectos de perturbaciones acopladas y no acopladas, así como la imposibilidad de adquirir el vector de estado completo y la presencia de más articulaciones pasivas que activas. Esto se aborda mediante la inclusión del modelo de los actuadores en el concepto de control, mediante el uso de relaciones electromecánicas, y mediante la mejora de las propiedades de robustez del sistema de circuito cerrado, utilizando principalmente el método elipsoide atractivo. Los modos deslizantes y las estructuras de control adaptables son útiles para concluir con algunos requisitos en la práctica, como el tema del consumo de energía y la dureza de la respuesta de circuito cerrado. El diagrama de bloques de la *Figura 1.4* describe el enfoque de control general previsto en este trabajo de tesis.

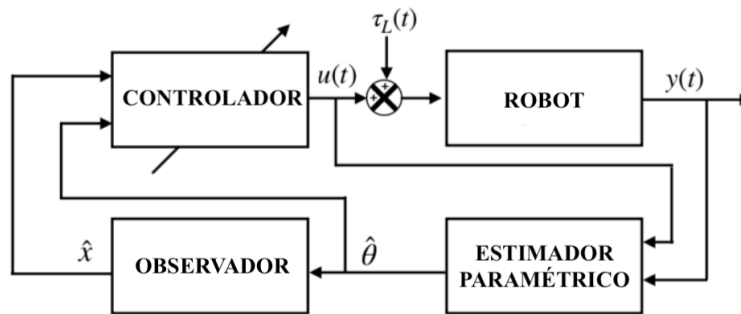


Figura 1.4: Enfoque de control Robusto-Adaptable de sistemas electromecánicos.

Las siguientes líneas formalizan los objetivos del trabajo de tesis.

#### Objetivo general

Diseñar algoritmos de control robusto-adaptable para la estabilización de robots subactuados accionados por motores eléctricos, en condiciones de experimentación en tiempo real, alrededor de una configuración de equilibrio inestable. Por lo tanto, el objetivo de control es algún tipo de estabilidad práctica, estabilidad Últimamente-Uniformemente Acotada, de modo que se mejoren las propiedades de robustez del lazo cerrado y las trayectorias del sistema se dirijan hacia un conjunto invariante de tamaño mínimo, mientras que los efectos de perturbaciones e incertidumbres están latentes.

#### Objetivos específicos

1. Propiciar la reducción de los efectos de alta ganancia y dureza de la respuesta del sistema en lazo cerrado, proveniente de la aproximación de algunas variables de estado no disponibles al utilizar técnicas tradicionales como filtros y diferenciadores, mediante el diseño de observadores tipo Luemberguer sujetos a condiciones experimentales en tiempo real.
2. Realizar estimación de parámetros en línea para el sistema experimental. Esto servirá para mejorar la robustez de los sistemas mediante la adaptación, y para reducir la respuesta agresiva del sistema bajo la acción de un controlador robusto.

3. Estabilizar la clase de sistemas subactuados propuesta, en un entorno experimental, alrededor de una configuración de equilibrio inestable del sistema nominal, mientras se cumplen algunos requisitos de rendimiento.

### 1.3. Metodología

El cumplimiento de los objetivos anteriores precisa de la siguiente metodología de trabajo:

- I) Estudiar las implicaciones de usar el modelo de los actuadores, acoplado al mecánico en el concepto de control para la clase de sistemas de interés.
- II) Estudiar las principales propiedades de los robots accionados por máquinas eléctricas, desde el punto de vista del control.
- III) Autodocumentarse sobre la plataforma experimental de la empresa PendCon, para sistemas pendulares subactuados, así como probar el sistema de adquisición de datos y el driver del actuador.
- IV) Ensamblar los diferentes sistemas disponibles. También se requiere el modelado del sistema y la validación experimental para cada caso.
- V) Resolver el problema de estimación del estado. Para cumplir con los requisitos en objetivo general, este proceso tiene la siguiente estructura:
  - Diseñar un observador de orden completo, donde la dinámica no lineal también es compensada por la acción robusta.
  - Diseñar un observador de orden reducido con reducción de perturbaciones. La dinámica no lineal también está dominada por el término robusto del observador.
  - Diseñar un observador de orden completo basado en el modelo no lineal.
  - Diseñar un observador de orden reducido robusto para el modelo no lineal.
- VI) Para la clase de sistemas abordada, diseñar un control estabilizante robusto en presencia de incertidumbres y perturbaciones. Se propone la siguiente metodología:
  - Diseñar un control robusto, donde los términos de orden superior del modelo no lineal están dominados por la función de control.
  - Resolver el problema de control robusto usando el modelo no lineal.
  - Implementar el control basado en observadores.
- VII) Lograr la estimación de parámetros para la clase de sistemas estudiada. Se propone la siguiente metodología:
  - A partir de la representación cuasi lineal, el problema es estimar los parámetros del sistema utilizando el método de mínimos cuadrados.
  - Realizar un estudio sobre la solución de este problema utilizando el modelo no lineal.
- VIII) Mejorar los algoritmos observadores diseñados en la primera etapa, utilizando técnicas adaptativas.
- IX) Complementar los controladores diseñados con técnicas adaptativas.

## 1.4. Organización de la tesis

El trabajo de tesis se organiza como sigue: en el segundo capítulo se encuentran las principales herramientas necesarias para concluir con los principales resultados del trabajo. Se presenta el formalismo de Euler-Lagrange utilizado para modelar la clase de sistemas abordados. Además, se incluyen las principales propiedades del modelo resultante. A continuación, se incluye el modelo dinámico de las máquinas eléctricas más utilizadas. Finalmente, se presentan los antecedentes teóricos de los esquemas de control utilizados en este trabajo. Se incluyen las principales definiciones y teoremas sobre el método elipsoide atractivo, modos deslizantes y control adaptativo. El estado del conocimiento se presenta al comienzo de cada capítulo como *trabajo relacionado*. En el Capítulo 3, se presentan algunos de los principales resultados del trabajo: el diseño de observadores. Primero, se presenta un observador robusto de orden completo, basado en el método del elipsoide atractivo. Después, se presenta la versión de orden reducido y un diseño híbrido que utiliza el método elipsoide atractivo y los modos deslizantes. En este, el subvector de estado disponible se reconstruye en tiempo finito, usando modos deslizantes, mientras que el método elipsoide atractivo se usa para observar las variables de estado no disponibles. El cuarto capítulo trata sobre el diseño de controladores. Primero, se utiliza el método elipsoide atractivo. En el primer diseño, la dinámica no lineal del modelo se compensa mediante la técnica robusta. En el segundo, se introduce el modelo no lineal en el concepto de control. El último diseño del capítulo presenta un controlador adaptativo de ubicación de polos para la misma clase de sistemas. La última sección presenta resultados numéricos y experimentales. En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y los trabajos futuros. Los apéndices contienen material adicional relativo al modelado y algunas pruebas.

## 1.5. Conclusiones

En este capítulo se ha planteado la formulación del problema de tesis. Se presentó una breve motivación sobre algunos de los principales problemas que se encuentran al controlar una clase de robots. Asimismo, se brindó un marco general sobre la estrategia adoptada para resolver la problemática planteada, así como los requisitos mínimos que debe cumplir el sistema controlado, para garantizar su aplicabilidad en la experimentación en tiempo real. También se establecieron los principales objetivos. Se propone una metodología general para resolver con éxito el problema planteado. El próximo capítulo brinda los antecedentes teóricos que resultan indispensables para formular los principales resultados de la tesis.

# Capítulo 2

## Preeliminarios Teóricos y de Modelado

*“Science, my lad, is made up of mistakes, but they are mistakes which it is useful to make, because they lead little by little to the truth.”*  
— JULIO VERNE.

### 2.1. Introducción

Este capítulo contiene los preliminares teóricos esenciales para concluir con los principales resultados de la tesis. En este sentido, la siguiente sección presenta algunos fundamentos matemáticos. Posteriormente se introduce a los antecedentes teóricos del modelado del mecanismo del robot: el formalismo de Euler-Lagrange y el enfoque de Hamilton. La sección posterior presenta el modelo dinámico de las máquinas eléctricas más usadas en el campo de la robótica, así como la representación vectorial para definir un conjunto de éstos que actúan de forma independiente sobre el mecanismo del robot. Este contenido se aprovecha para presentar algunos resultados sobre el modelado de robots parcial o totalmente actuados, conjuntando el modelo del mecanismo con el de los actuadores del robot, formulando además algunas propiedades importantes. La última sección presenta los fundamentos del control robusto: el Método del Elipsoide Atractivo y la teoría de control por Modos Deslizantes, relacionados con los conceptos de estabilidad *Últimamente-Uniformemente-Acotada* y la *estabilidad en Tiempo-Finito*, respectivamente.

### 2.2. Normas de vectores y matrices

En la teoría de control robusto con frecuencia se usan normas matriciales y normas vectoriales, cuyos fundamentos pueden consultarse en las referencias [27, 36, 21]. En esta sección se presentan algunos antecedentes al respecto que resultan de particular interés en este trabajo.

**Definición 2.2.1 (Norma de Hölder[21]).** Sea  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ , entonces la función  $\|\vartheta\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada como:

$$\|\vartheta\|_p = \left( \sum_{i=1}^n \vartheta_i^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|\vartheta\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |\vartheta_i|,$$

define la norma vectorial de Hölder.

Cuando  $p = 2$ , la definición anterior describe la *norma euclidiana*, ampliamente utilizada en este texto. Por otro lado, para el caso de matrices considere las siguientes definiciones:

**Definición 2.2.2 (Norma inducida y norma de Frobenius [21]).** *La norma matricial inducida de  $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sobre el campo vectorial  $\vartheta \in \mathbb{R}^n$  está dada como:*

$$\|\Theta\|_p = \sup_{\vartheta \neq 0} \frac{\|\Theta\vartheta\|_p}{\|\vartheta\|_p}.$$

Cuando  $p = 2$  resulta la *norma matricial euclidiana*. Por otro lado, la *norma de Frobenius* se define por:

$$\|\Theta\|_F = \sqrt{\text{tr}(\Theta^T \Theta)}.$$

La norma matricial euclidiana y la norma de Frobenius se relacionan como [20]:

$$\|\Theta\|_2 \leq \|\Theta\|_F, \quad \|\Theta\|_F \leq \sqrt{q} \|\Theta\|_2, \quad q = \text{rank}(\Theta)$$

El siguiente lema establece un par de reglas de correspondencia adicionales.

**Lema 2.1.** *La norma matricial Euclideana y la de Frobenius generan las siguientes relaciones:*

**F1.**

$$\vartheta^T \Theta^T \Theta \vartheta \leq \text{tr}(\Theta^T \Theta) \|\vartheta\|^2,$$

**F2.**

$$\text{tr}(\Theta^T \Theta) \|\vartheta\|^2 \leq q \vartheta^T \Theta^T \Theta \vartheta, \quad q = \text{rank}(\Theta).$$

*Demostración.* Primero, note que:

$$\vartheta^T \Theta^T \Theta \vartheta = \|\Theta\vartheta\|_2^2 \implies \vartheta^T \Theta^T \Theta \vartheta \leq \|\Theta\|_2^2 \|\vartheta\|_2^2,$$

que al aplicar el hecho  $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_F$  resulta directamente en la primer expresión del lema. Ahora, usando la relación entre ambas normas se sigue que:

$$\text{tr}(\Theta^T \Theta) \leq q \sup_{\vartheta \in \mathbb{R}^n, \vartheta \neq 0} \frac{\|\Theta\vartheta\|}{\|\vartheta\|},$$

que resulta en la segunda expresión. ■

### 2.2.1. Vectorización, productos de Kronecker y de Khatri-Rao

La siguiente definición introduce el operador de *vectorización* de una matriz y su inverso.

**Definición 2.2.3 (El operador de vectorización).** *Sea  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz de la forma:*

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \cdots & \theta_{1m} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \cdots & \theta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \theta_{n2} & \cdots & \theta_{nm} \end{bmatrix}.$$

*El operador de vectorización  $\text{vec}(\Theta) : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$  define un vector a partir de  $\Theta$  como:*

$$\text{vec}(\Theta) = [\theta_{11}, \theta_{21}, \dots, \theta_{n1}, \theta_{12}, \theta_{22}, \dots, \theta_{n2}, \dots, \theta_{1m}, \theta_{2m}, \dots, \theta_{nm}]^T.$$

Por otro lado, la antivectorización  $\text{vec}_{n \times m}^{-1}(\vartheta) : \mathbb{R}^{n \cdot m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  de un vector  $\vartheta \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$  de la forma  $\vartheta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n \cdot m}]^\top$  queda como:

$$\text{vec}_{n \times m}^{-1}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_{n+1} & \theta_{2n+1} & \cdots & \theta_{n(m-1)+1} \\ \theta_2 & \theta_{n+2} & \theta_{2n+2} & \cdots & \theta_{n(m-1)+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_n & \theta_{2n} & \theta_{3n} & \cdots & \theta_{n \cdot m} \end{bmatrix}.$$

La siguiente definición describe el producto de Kronecker, y permite introducir algunas relaciones importantes con el operador de vectorización.

**Definición 2.2.4 (El producto de Kronecker [36]).** Considere dos matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{o \times p}$ . El producto de Kronecker, escrito como  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  se define como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2m}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix} = [a_{ij}\mathbf{B}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{n \cdot o \times m \cdot p}$$

Además, el producto de *Khatri-Rao* se define como un producto de Kronecker efectuado por columnas. Considere la siguiente definición.

**Definición 2.2.5 (El producto de Khatri-Rao).** Sean  $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_m] \in \mathbb{R}^{p \times m}$  un par de matrices, donde  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_j \in \mathbb{R}^p$ . El producto de *Khatri-Rao*, expresado como  $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$  se determina por:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [a_1 \otimes b_1 \quad a_2 \otimes b_2 \quad \cdots \quad a_m \otimes b_m] = [a_i \otimes b_i]_{i=1}^m.$$

El operador de vectorización y el producto de Kronecker cumplen algunas relaciones importantes; considere ahora las matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ; se cumple que:

- $\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$ ,
- $\text{vec}(\mathbf{X}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{I}_m) \text{vec}(\mathbf{X})$ ,
- $\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}) = [(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{I}_m)] \text{vec}(\mathbf{X})$ ,
- $\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$ .

## 2.3. Modelado de los sistemas mecánicos

El modelo dinámico de un sistema mecánico puede hallarse a través del enfoque de las leyes del movimiento de Newton, el formalismo de Hamilton, el de Euler-Lagrange, entre otros. Este último es el de mayor aplicación en robótica; los sistemas descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales resultantes de la aplicación de este método se denominan sistemas Lagrangianos, y la forma matricial de segundo orden de este modelo se conoce en la literatura como la *forma estándar de robótica*. En este apartado se presentan los principales antecedentes de esta metodología; sus fundamentos pueden consultarse en [44, 23, 38].

### 2.3.1. El enfoque de Euler-Lagrange

Considere un sistema mecánico con  $n$  grados de libertad, y sea  $q \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  el *vector de coordenadas generalizadas* que conforma el espacio de configuración  $\mathcal{M}$ , que a su vez define un conjunto compacto. El Lagrangiano del sistema se define por la diferencia entre su energía cinética total y su energía potencial total:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q), \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función Lagrangiana,  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la energía cinética total y  $\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la energía potencial total. El teorema de Kőening establece la forma de la energía cinética para un único cuerpo rígido en movimiento complejo.

**Teorema 2.3.1** (Kőening [38]). *Sea  $O$  el origen del marco de referencia inercial y  $O'$  el correspondiente a un marco relativo. La energía cinética de un sistema de partículas  $S$  se determina como:*

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}_{O'}(q, \dot{q}) + \mathcal{T}_{rel,O'}(q, \dot{q}) + M \langle V_{O'}, V_{CI,O'} \rangle, \quad (2.2)$$

donde  $M$  denota la masa total del sistema de partículas y:

- $V_{O'}$  es la velocidad absoluta de  $O'$ .
- $V_{CI,O'}$  es la velocidad del centro de inercia de  $S$  respecto a  $O'$ .
- $\mathcal{T}_{O'} := \frac{1}{2} M v_{O'}^2$  es la energía cinética de la masa total de  $S$  como si ésta estuviera concentrada en  $O'$ .
- $\mathcal{T}_{rel,O'} := \frac{1}{2} \sum_{i \in S} m_i v_{i,O'}^2 = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$ ,  $\omega = \dot{q}$ . es la energía cinética de  $S$  respecto a  $O'$ , con  $v_{i,O'}$  la velocidad del punto  $i \in S$  respecto a  $O'$ .

*Demostración.* Refiérase a [38]. ■

Por otro lado, La energía potencial se debe a las fuerzas conservativas, tales como las fuerzas gravitacionales y los elementos elásticos. Para los objetivos perseguidos solo se consideran las fuerzas gravitacionales por lo que cada eslabón tiene una energía potencial:

$$\mathcal{U}_i(q) = g^\top r_{ci} m_i, \quad (2.3)$$

donde  $g$  denota el vector de aceleración gravitacional descrito en el marco de referencia inercial, y  $r_{ci}$  es el vector que da las coordenadas del centro de masa del eslabón. La energía potencial del sistema se da entonces como:

$$\mathcal{U}(q) = \sum_{i=1}^n g^\top r_{ci} m_i. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen usando el formalismo de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_k} = \tau_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

donde  $\tau_k(t)$  es el par de control. De acuerdo con el desarrollo en [44]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i d_{ki} \ddot{q}_i + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q_k}. \quad (2.6)$$



Al definir el vector de fuerzas y torques gravitacionales  $g_k = \frac{\partial U(q)}{\partial q_k}$ , las ecuaciones de movimiento en la forma general de segundo orden se derivan como sigue [33]:

$$\sum_i d_{ki}(q)\ddot{q}_i + \sum_{i,j} \Gamma_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k, \quad (2.7)$$

donde  $\Gamma_{ijk}(q)$  se conocen como *símbolos de Christoffel*, y se definen por:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}(q)}{\partial q_k} \right). \quad (2.8)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales queda descrito en la *forma estándar de robótica*:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \mathbf{W}\tau_t, \quad (2.9)$$

donde  $\tau_t \in \mathbb{R}^m$  contiene los pares de control, con una distribución dada por  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  conocida como la matriz de acoplamiento entrada-estado, que permite distinguir entre un sistema parcial o totalmente actuado. También se tiene la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas  $\mathbf{C}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , cuyos elementos toman la siguiente forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{kji}(q)\dot{q}_k.$$

El vector  $\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}$  contiene dos tipos de términos, de acuerdo con la forma del producto  $\dot{q}_i\dot{q}_j$ . En los términos cuando  $i = j$  se conocen como fuerzas centrífugas, en el otro caso que  $i \neq j$  se llaman fuerzas de Coriolis. Aunque la expresión (2.9) que define el comportamiento del sistema dinámico es un tanto compleja, ésta satisface ciertas propiedades interesantes. Para los objetivos que se persiguen en este trabajo, considere las siguientes [23]:

- 1) La matriz de inercia es definida positiva. Lo que es más, sean  $0 < \lambda_1(q) \leq \lambda_2(q) \leq \dots \leq \lambda_n(q) < \infty$  los valores propios de  $\mathbf{M}(q)$ . Se sigue que:

$$\lambda_1(q)\mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}(q) \leq \lambda_n(q)\mathbf{I}_n.$$

Dado que el vector de configuración está acotado ( $q \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}$  compacto), i.e.,  $\|q\| \leq \delta_q < \infty$ ,  $\|\dot{q}\| \leq \delta_v < \infty$ , entonces existen escalares constantes  $0 < \lambda_m \leq \lambda_M < \infty$  que proveen cotas uniformes, como:

$$\lambda_m\mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}(q) \leq \lambda_M\mathbf{I}_n.$$

De acuerdo con *Ghorbel, F., Srinivasan, B. y Spong, M.* en [18] la matriz de inercia puede descomponerse como:

$$\mathbf{M}(q) = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}(k)$$

donde  $\mathbf{M}(k)$  son matrices positivas definidas. Además, los elementos  $M_{ij}(k)$  de cada matriz son cero cuando  $i > k$  o  $j > k$ . También  $M_{kk} > 0$ . Las cotas de la matriz de inercia se dan entonces como:

$$\lambda_m = \frac{(n-1)^{(n-1)} \prod_{k=1}^n d_{kk}(k)}{\overline{\mathcal{T}}_M}, \quad (2.10)$$

con  $\overline{\mathcal{T}}_M = \limsup \{\text{tr}(\mathbf{M}(q))\}$ . También:

$$\lambda_M = \overline{\mathcal{T}}_M - \frac{(n-1)^n \prod_{k=1}^n d_{kk}(k)}{\overline{\mathcal{T}}_M^{n-1}}, \quad (2.11)$$

- II) La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis no es única, pero si lo es el vector  $\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}$ . Defínase  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . El vector  $\mathbf{C}(q, x)y$  es lineal con respecto del segundo argumento:

$$\mathbf{C}(q, x)y = \mathbf{C}(q, y)x.$$

Por otro lado, el vector  $\mathbf{C}(q, x)y$  puede expresarse como:

$$\mathbf{C}(q, x)y = \begin{bmatrix} x^\top C_1(q)y \\ x^\top C_2(q)y \\ \vdots \\ x^\top C_n(q)y \end{bmatrix},$$

donde  $C_k(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices simétricas. De hecho, las entradas  $i, j$  de  $C_k(q)$  corresponden al símbolo de Christoffel  $\Gamma_{jik}$ , previamente definido. Ahora bien, como el espacio de configuración es compacto, se sigue que:

$$\mathbf{C}(q, x)y \leq k_c \|x\| \|y\|, \quad k_c = n^2 \left[ \max_{k,i,j,q} |C_{kij}(q)| \right].$$

- III) La matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis se relaciona con la matriz de inercia a través de la propiedad de antisimetría:

$$x^\top \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(q) - \mathbf{C}(q, \dot{q}) \right] x = 0, \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta propiedad también puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{M}}(q) = \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{C}^\top(q, \dot{q}).$$

- IV) Bajo la consideración que el espacio de configuración es compacto, el vector de fuerzas y pares gravitacionales está acotado como:

$$G(q) \leq k_g \|q\|, \quad k_g \geq n \left[ \max_{i,j,q} \left| \frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} \right| \right].$$

- v) El modelo dinámico de un mecanismo en la forma estándar de robótica es lineal respecto de los parámetros dinámicos, esto es, el modelo puede reescribirse como:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \mathbf{M}(q, \theta)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}, \theta)\dot{q} + G(q, \theta), \quad (2.12)$$

donde  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , y  $\theta \in \mathbb{R}^p$  es el vector de parámetros del modelo.

### 2.3.2. Comentarios sobre otras representaciones dinámicas

La formulación del modelo dinámico de un sistema mecánico a través del enfoque de Newton y la metodología de Euler-Lagrange concluyen con un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden prácticamente idéntico. Alternativamente, considere la transformación de Legendre [33] con respecto a  $\dot{q}$ :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \mathbf{M}(q)\dot{q},$$

que dadas las propiedades de la matriz de inercia, define un difeomorfismo. El modelo dinámico (2.9) puede entonces reescribirse como:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \mathbf{M}^{-1}(q)p, \\ \dot{p} &= \tilde{\mathbf{C}}^\top(q, p)\mathbf{M}^{-1}(q)p - G(q) + \mathbf{W}u_t,\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde  $\tilde{\mathbf{C}}(q, p) = \mathbf{C}(q, \mathbf{D}^{-1}(q)p)$ . Esta última expresión se conoce como la forma normal de Legendre, cuya ventaja principal respecto de la forma estándar de robótica se aprecia mejor cuando se transforman a la representación en el espacio del estado, pues conduce directamente a una representación afín al control, lo que resulta particularmente atractivo cuando existen términos de perturbación e incertidumbre latentes. Por esta razón, la forma normal de Legendre podría resultar más apropiada, aunque las variables de estado no resultan tan naturales y deben ser estimadas de algún modo. Otra metodología común para modelar sistemas mecánicos es el formalismo de Hamilton. De modo similar al formalismo de Euler-Lagrange, se define una función Hamiltoniana como:

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}p^\top \mathbf{M}^{-1}(q)p + \mathcal{U}(q).$$

El modelo dinámico se deduce por:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial q} + \mathbf{W}u_t.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Esta expresión es equivalente a la forma normal (2.13); pese a que estas representaciones poseen ventajas respecto a la forma estándar de robótica, ésta ha sido usada en el control de robots principalmente por lo que se conoce muy bien sus propiedades, lo que resulta una ventaja importante en el diseño de controladores robustos.

## 2.4. Actuadores Electromecánicos

En esta sección se describen los modelos matemáticos de algunas de las máquinas eléctricas más importantes utilizadas para impulsar la industria moderna. Se consideran los motores de CD de imán permanente, los motores a pasos de CD y los motores de CD sin escobillas.

### 2.4.1. Motor de CD de Imanes Permanentes

El motor de CD de imanes permanentes es una de las máquinas eléctricas más simples y han encontrado un alto rango de aplicabilidad debido a sus características. Su modelo se aproxima muy bien mediante una ecuación diferencial lineal, por lo que resultan fácil de controlar. Su modelo dinámico está dado por:

$$\begin{aligned}l_a \frac{di_a(t)}{dt} + r_a i_a(t) + e_{emf}(\dot{\theta}) &= v_a(t), \\ j \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -f \frac{d\theta}{dt} + \tau(i_a) - \tau_L(t),\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde  $\theta$  define la posición angular del eje del motor,  $i_a(t)$  la corriente de su armadura,  $v_a(t)$  su voltaje y  $e_{emf}(\dot{\theta})$  el voltaje contra-electromotriz; también,  $\tau(i_a)$  denota el par de fuerza

desarrollado por el eje del motor y  $\tau_L(t)$  el torque de carga acoplado al eje. Considere además los parámetros físicos:

- $l_a$  : es la inductancia de armadura,
- $r_a$  : es la resistencia de armadura,
- $j$  : es el momento de inercia del eje del motor,
- $f$  : el coeficiente de fricción viscosa en el eje del motor.

El funcionamiento de esta máquina está descrito por las relaciones electromecánicas:

$$e_{emf}(\dot{\theta}) = k_e \frac{d\theta}{dt}, \quad \tau(i_a) = k_\tau i_a(t),$$

donde  $0 < k_e$ ,  $0 < k_\tau$  son las constantes de voltaje contra-electromotriz y de torque, respectivamente.

**Proposición 2.1 (Modelo de un conjunto de  $m$ -motores PMDC independientes).**  
*El modelo dinámico de un conjunto de motores PMDC se da en forma matricial como:*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{R}_a I_a + \mathbf{K}_e \dot{\theta} &= V_a \\ \mathbf{J} \ddot{\theta} &= \mathbf{K}_\tau I_a - \tau_L(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $I_a = [i_{a_1}, \dots, i_{a_m}]^\top$  es el vector de corrientes de armadura, y  $V_a = [v_{a_1}, \dots, v_{a_m}]^\top$  es el vector de voltajes de armadura. Además:

- $\mathbf{L}_a = \text{diag}(l_{a_1}, \dots, l_{a_m})$  contiene las inductancias de la armadura;
- $\mathbf{R}_a = \text{diag}(r_{a_1}, \dots, r_{a_m})$  es la matriz de resistencias de armadura;
- $\mathbf{K}_e = \text{diag}(k_{e_1}, \dots, k_{e_m})$  la matriz de constantes de fuerza contraelectromotriz;
- $\mathbf{K}_\tau = \text{diag}(k_{\tau_1}, \dots, k_{\tau_m})$  contiene las constantes de torque;
- $\mathbf{J} = \text{diag}(j_1, \dots, j_m)$  es la matriz de momentos de inercia de los ejes de los motores.

*Demostración.* Dada la linealidad del modelo (2.15), y la condición de independencia de cada motor respecto del resto, la expresión resulta evidente. ■

## 2.4.2. Motor Paso a Paso de Imanes Permanente

Un motor paso a paso (**PMSM**, *Permanent Magnet Stepper Motor*) es un tipo de máquina eléctrica síncrona. Esta clase de motores fue diseñada para operación en lazo abierto porque pueden adoptar un conjunto de posiciones discretas con alta precisión sin usar retroalimentación. Un motor paso a paso de imanes permanente consta de un estator hecho de hierro dulce y devanados montados en él. El rotor, por otro lado, tiene dos juegos de dientes. Uno está magnetizado como polos sur y el otro como polos norte. La figura 2.1 muestra una vista transversal del motor a pasos de imán permanente con cinco pares de dientes. El motor es operado como una máquina de dos fases al conectar las bobinas  $a_1$ ,  $a_2$  en serie para hacer la fase A, y las bobinas  $b_1$ ,  $b_2$  para la fase B. Una descripción detallada de su operación puede revisarse en [7]. Su modelo dinámico viene dado como:

$$\begin{aligned} l_s \frac{di_{s_a}}{dt} + r_s i_{s_a} - k_m \frac{d\theta}{dt} \sin(n_p \theta) &= v_{s_a}, \\ l_s \frac{di_{s_b}}{dt} + r_s i_{s_b} + k_m \frac{d\theta}{dt} \cos(n_p \theta) &= v_{s_b}, \\ j \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -i_{s_a} k_m \sin(n_p \theta) + i_{s_b} k_m \cos(n_p \theta) - \tau_L(t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

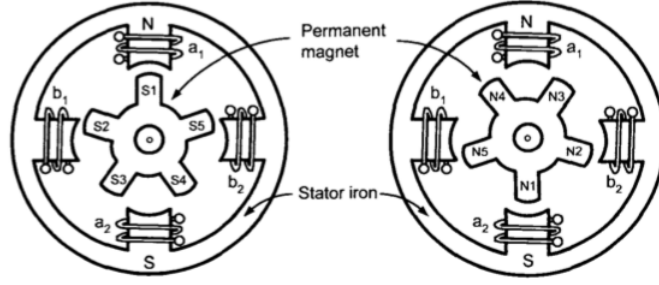


Figura 2.1: Construcción de un motor a pasos. From Chiasson, J. (2005). Modeling and high performance control of electric machines (Vol. 26). John Wiley & Sons. Section 9.4 [7].

donde:

- $\theta$  : Es la posición angular del eje del motor;
- $i_{s_a}, i_{s_b}$  : es la corriente en las fases A y B, respectivamente;
- $v_{s_a}, v_{s_b}$  : son los voltajes en las fases A y B;
- $l_s$  : es la autoinductancia de cada fase;
- $r_s$  : es la resistencia eléctrica en cada fase;
- $k_m$  :  $= n_p \lambda_M$ , con  $\lambda_M$  constante;
- $j$  : es el momento de inercia del eje del motor;
- $n_p$  : el número de pares de polos,
- $\tau_L$  : es el par de carga aplicado al eje del motor.

En la forma vectorial:

$$\begin{aligned} l_s \dot{I}_s + r_s I_s + K_e(\theta) \dot{\theta} &= V_s \\ j \ddot{\theta} &= K_e^T(\theta) I_s - \tau_L(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, I_s, t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $I_s = \begin{bmatrix} i_{s_a} \\ i_{s_b} \end{bmatrix}$ ,  $V_s = \begin{bmatrix} v_{s_a} \\ v_{s_b} \end{bmatrix}$ ,  $K_e(\theta) = k_m \begin{bmatrix} -\sin(n_p \theta) \\ \cos(n_p \theta) \end{bmatrix}$  y  $\tau_L(\cdot)$  es el torque de la carga.

La siguiente proposición describe el modelo dinámico de un conjunto de motores **PMSDC** independientes.

**Proposición 2.2 (Modelo dinámico de un conjunto de  $m$ -motores PMSDC independientes).** *El modelo dinámico de un conjunto de  $m$ -motores PMSDC independientes puede escribirse en forma matricial como:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \dot{I}_s + \mathcal{R}_s I_s + \mathcal{K}_e(\theta) \dot{\theta} &= V_s \\ \mathcal{J} \ddot{\theta} &= \mathcal{K}_e^T(\theta) I_s - \tau_L \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde:

- $I_s = [i_{s_{a_1}}, i_{s_{b_1}}, \dots, i_{s_{a_m}}, i_{s_{b_m}}]^T$
- $V_s = [V_{s_{a_1}}, V_{s_{b_1}}, \dots, V_{s_{a_m}}, V_{s_{b_m}}]^T$
- $\mathcal{L}_s = \text{diag}([l_{s_1}, \dots, l_{s_m}]) \otimes \mathbf{I}_2$  contiene las inductancias de cada motor;
- $\mathcal{R}_s = \text{diag}([r_{s_1}, \dots, r_{s_m}]) \otimes \mathbf{I}_2$  se conforma por las resistencias de fase de cada motor;
- $\mathcal{J} = \text{diag}([j_{s_1}, \dots, j_{s_m}]) \otimes \mathbf{I}_2$  denota la matriz de momentos de inercia de los actuadores;

- $\mathcal{K}_e(\theta) = \mathbf{I}_m \odot \text{vec}_{2,m}^{-1}(K_s(\theta))$ , define el acoplamiento electromecánico no lineal para el conjunto de motores independientes, con:

$$K_s(\theta) = \begin{bmatrix} -k_{s_1} \sin(n_{p_1} \theta_1) \\ k_{s_1} \cos(n_{p_1} \theta_1) \\ \vdots \\ -k_{s_m} \sin(n_{p_m} \theta_m) \\ k_{s_m} \cos(n_{p_m} \theta_m) \end{bmatrix}.$$

*Demostración.* El producto de *Kronecker* acopla las inductancias y resistencias con cada fase de cada motor; del mismo modo el producto de *Khatri-Rao* por columnas distribuye apropiadamente las funciones de acoplamiento electromecánico no lineales para cada fase de cada **PMSM**. ■

### 2.4.3. Motores de CD sin Escobillas

Un motor de CD sin escobillas (**BLDC**, Brushless DC) es un motor síncrono de corriente trifásica y de imanes permanentes cuyo voltaje contraelectromotriz tiene forma trapezoidal; su modelo dinámico cuando las corrientes del estator  $i_{s_1}$ ,  $i_{s_2}$  e  $i_{s_3}$ , se encuentran en balance ( $i_{s_1} + i_{s_2} + i_{s_3} = 0$ ) se da como sigue [7]:

$$\begin{aligned} (l_s + M) \frac{di_{s_1}}{dt} + r_s i_{s_1} - e(\theta) e_p \dot{\theta} &= v_{s_1}, \\ (l_s + M) \frac{di_{s_2}}{dt} + r_s i_{s_2} - e(\theta - 2\pi/3) e_p \dot{\theta} &= v_{s_2}, \\ (l_s + M) \frac{di_{s_3}}{dt} + r_s i_{s_3} - e(\theta - 4\pi/3) e_p \dot{\theta} &= v_{s_3}, \\ j\ddot{\theta} &= -e(\theta) e_p i_{s_1} - e(\theta - 2\pi/3) e_p i_{s_2} - e(\theta - 4\pi/3) e_p i_{s_3} - \tau_L, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $l_s$  denota la autoinductancia de cada fase,  $M$  la inductancia mutua entre fases,  $r_s$  el la resistencia de fase,  $\theta$  denota la posición del eje del motor,  $\tau_L$  el par de carga y  $v_{s_i}$  el voltaje aplicado a cada fase. Además  $e(\theta)$  describe la forma del voltaje contra-electromotriz como:

$$e(\theta) = \begin{cases} \frac{6\theta}{\pi}, & -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6 \\ 1, & \pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6 \\ -\frac{6(\theta - \pi)}{\pi}, & 5\pi/6 \leq \theta \leq 7\pi/6 \\ -1, & 7\pi/6 \leq \theta \leq 11\pi/6 \end{cases}$$

y  $e_p \dot{\theta}$  establece su valor pico. En forma vectorial queda:

$$\begin{aligned} (l_s + M) \dot{I}_s + r_s I_s - e_s(\theta) e_p \dot{\theta} &= V_s \\ j\ddot{\theta} &= -e_s^T(\theta_R) e_p I_s - \tau_L(\theta_R, \dot{\theta}_R, \ddot{\theta}_R), \end{aligned} \quad (2.21)$$

aquí  $I_s = [i_{s_1}, i_{s_2}, i_{s_3}]^T$ ,  $V_s = [v_{s_1}, v_{s_2}, v_{s_3}]^T$  y  $e_s(\theta) = [e(\theta), e(\theta - 2\pi/3), e(\theta - 4\pi/3)]^T$ . Note que la estructura resulta similar a la de un motor a pasos. Considere entonces la siguiente proposición.

**Proposición 2.3 (Modelo dinámico de un conjunto de  $m$ -motores BLDC independientes).** *El modelo dinámico de un conjunto de  $m$ -motores **BLDC** independientes puede escribirse en forma matricial como:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s \dot{I}_s + \mathcal{R}_s I_s + \mathcal{K}_e(\theta) \mathbf{E}_p \dot{\theta} &= V_s \\ \mathcal{J} \ddot{\theta} &= \mathcal{K}_e^T(\theta) I_s - \tau_L \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde:

- $\mathcal{L}_s = \text{diag}([l_{s_1} + M_1, \dots, l_{s_m} + M_m]) \otimes \mathbf{I}_3$  contiene las inductancias de cada motor;
- $\mathcal{R}_s = \text{diag}([r_{s_1}, \dots, r_{s_m}]) \otimes \mathbf{I}_3$  se conforma por las resistencias de fase de cada motor;
- $\mathcal{J} = \text{diag}([j_{s_1}, \dots, j_{s_m}]) \otimes \mathbf{I}_3$  denota la matriz de momentos de inercia de los actuadores;
- $\mathbf{E}_p = \text{diag}([e_{p_1}, \dots, e_{p_m}])$
- $\mathcal{K}_e(\theta) = \mathbf{I}_3 \odot \text{vec}_{3,m}^{-1}(K_s(\theta))$ , define el acoplamiento electromecánico no lineal para el conjunto de motores independientes, con:

$$K_s(\theta) = \begin{bmatrix} e_1(\theta_1) \\ e_1(\theta_1 - 2\pi/3) \\ e_1(\theta_1 - 4\pi/3) \\ \vdots \\ e_m(\theta_m) \\ e_m(\theta_m - 2\pi/3) \\ e_m(\theta_m - 4\pi/3) \end{bmatrix}.$$

*Demostración.* Refiérase a la proposición 2.2. ■

## 2.5. Modelo acoplado de robots impulsados por máquinas eléctricas

En esta sección se establece la dinámica de los sistemas electromecánicos con mayor aplicación en los sistemas de automatización modernos. Las proposiciones realizadas aquí permiten extender los resultados del trabajo de tesis, que se enfoca en sistemas mecánicos Lagrangianos parcialmente impulsados por motores de CD de imanes permanentes.

### 2.5.1. Forma general de segundo orden

**Proposición 2.4 (Mecanismo subactuado con motores PMDC).** *El modelo dinámico de un robot de  $n$ -DoF descrito por (2.9), impulsado por un conjunto de  $m$ -motores **PMDC** independientes(2.16), esta dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(q) \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) &= \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau I_a + \vartheta(t), \\ \mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{R}_a I_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W}^T \dot{q} &= v_a(t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $\mathbf{D}(q) = \mathbf{M}(q) + \mathbf{W} \mathbf{J} \mathbf{W}^T$  es la matriz de inercias, con  $\mathbf{J} = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_m]$  la matriz de momentos de inercia de los motores,  $I_a \in \mathbb{R}^m$  es el vector de corrientes de armadura,  $v_a \in \mathbb{R}^m$  el vector de voltajes de armaduar,  $\mathbf{L}_a = \text{diag}[L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{a_m}]$  la matriz

de inductancias de armadura,  $\mathbf{R}_a = \text{diag}[R_{a_1}, R_{a_2}, \dots, R_{a_m}]$ , la matriz de resistencias de la armadura  $\mathbf{K}_e = \text{diag}[K_{e_1}, K_{e_2}, \dots, K_{e_m}]$  la matriz de constantes de la fuerza contraelectromotriz. Además,  $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de perturbaciones e incertidumbres, que se considera acotado como  $\|\vartheta(t)\| \leq \delta_0$ .

*Demostración.* Considérese el conjunto  $m$  motores PMDC independientes de la forma:

$$\mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{R}_a I_a + \mathbf{K}_e \dot{q}_a = v_a,$$

donde  $q_a \in \mathbb{R}^m$  es el subvector de las coordenadas generalizadas activas, que se obtiene a partir del vector de coordenadas generalizadas como  $q_a = \mathbf{W}^\top q$ . Por otro lado, considere el modelo del sistema mecánico de  $n$ -DoF(2.9). Para acoplar la dinámica del mecanismo con la de los actuadores se introducen las relaciones electromecánicas:

$$\tau(t) = \mathbf{K}_\tau I_a(t), \quad E_{emf}(t) = \mathbf{K}_e \dot{q}_a(t),$$

La siguiente transformación de similitud permite separar las variables de configuración activas de las pasivas: matrix, such that  $\begin{bmatrix} q_a \\ q_u \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma} q = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^\top \\ \mathbf{W}^\perp \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Esta transformación conduce a:

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{M}(q) \mathbf{\Gamma}^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \mathbf{\Gamma} h(q, \dot{q}) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{W} u + \mathbf{\Gamma} \vartheta(\cdot),$$

donde  $h(q, \dot{q}) = \mathbf{C}(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q)$ . Con lo cual se adopta la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11}(q) & \bar{\mathbf{M}}_{12}(q) \\ \bar{\mathbf{M}}_{21}(q) & \bar{\mathbf{M}}_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1(q, \dot{q}) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_1(\cdot) \\ \bar{\vartheta}_2(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Entonces, el modelo de los actuadores se introduce solo en el primer conjunto de ecuaciones, referido a la parte activa. Resulta:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11}(q) + \mathbf{J} & \bar{\mathbf{M}}_{12}(q) \\ \bar{\mathbf{M}}_{21}(q) & \bar{\mathbf{M}}_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1(q, \dot{q}) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\vartheta}_1(\cdot) \\ \bar{\vartheta}_2(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Se define

$$\bar{\mathbf{D}}(q) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{11}(q) + \mathbf{J} & \bar{\mathbf{M}}_{12}(q) \\ \bar{\mathbf{M}}_{21}(q) & \bar{\mathbf{M}}_{22}(q) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}}(q) + \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar la transformación inversa resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(q) &= \mathbf{\Gamma}^{-1} \bar{\mathbf{M}}(q) \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ &= \mathbf{M}(q) + [\mathbf{W} \quad (\mathbf{W}^\perp)^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^\top \\ \mathbf{W}^\perp \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que es la expresión principal de la proposición. ■

La siguiente proposición describe el modelo dinámico de un robot impulsado por motores a pasos de CD.



**Proposición 2.5 (Mecanismo subactuado con motores PMSDC).** *El modelo dinámico de un robot con  $n$ -DoF descrito por (2.9) parcialmente impulsado por un conjunto de  $m$ -motores **PMSDC** independientes como se describe en la Proposición 2.2, esta dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \mathcal{K}_e^\top(\theta)I_s + \vartheta(t), \\ \mathcal{L}_s\dot{I}_s + \mathcal{R}_s I_s + \mathcal{K}_e(\theta)\dot{\theta} &= V_s(t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{D}(q) = \mathbf{M}(q) + \mathbf{W}\mathcal{J}\mathbf{W}^\top$  define la matriz de inercias del robot, como en el caso descrito en la proposición previa.

*Demostración.* Considere el desarrollo de la proposición previa. ■

Finalmente la proposición siguiente describe el modelo dinámico de un robot impulsado por motores de cd sin escobillas.

**Proposición 2.6 (Mecanismo subactuado con motores BLDC).** *El modelo dinámico de un robot con  $n$ -DoF descrito por (2.9) parcialmente impulsado por un conjunto de  $m$ -motores **BLDC** independientes descrito por la Proposición 2.3 esta dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \mathcal{K}_e^\top(\theta)I_s + \vartheta(t), \\ \mathcal{L}_s\dot{I}_s + \mathcal{R}_s I_s + \mathcal{K}_e(\theta)\dot{\theta} &= V_s(t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{D}(q) = \mathbf{M}(q) + \mathbf{W}\mathcal{J}\mathbf{W}^\top$  define la matriz de inercias del robot.

*Demostración.* Tal como en las Proposición 2.4. ■

El siguiente corolario se obtiene a partir de las proposiciones hechas en esta sección.

**Corolario 2.1 (Sobre las cotas de la matriz de inercia).** *En vista de que  $\mathbf{D}(q) = \mathbf{M}(q) + \mathbf{W}\mathcal{J}\mathbf{W}^\top$ , esta resulta acotada como:*

$$\bar{\lambda}_m \mathbf{I}_n \leq \mathbf{D}(q) \leq \bar{\lambda}_M \mathbf{I}_n,$$

donde  $\bar{\lambda}_m = \lambda_m + \text{mín}(\mathbf{J})$  y  $\bar{\lambda}_M = \lambda_m + \text{máx}(\mathbf{J})$  para escalares constantes  $0 < \lambda_m < \lambda_M$  dadas en la primer propiedad de la sección 2.3.

*Demostración.* Se deduce directamente de la primera propiedad descrita en la sección 2.3 acerca de las cotas de la matriz de inercias y por el hecho de que los valores propios de  $\mathbf{W}\mathcal{J}\mathbf{W}^\top$  son los mismos momentos de inercia de los ejes de los motores. ■

### 2.5.2. Representación en el espacio del estado: robots impulsados por motores PMDC

En esta sección se presenta el modelado de robots impulsados por motores **PMDC** independientes en el espacio del estado. Los resultados provistos por las proposiciones y lemas de esta sección pueden extenderse para robots impulsados con motores **PMSDC** y **BLDC** con los ajustes apropiados.

**Proposición 2.7** (*La representación no lineal en el espacio del estado*). Defínase las variables de estado como  $x_1(t) = I_a(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x_2(t) = q \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_3(t) = \dot{q} \in \mathbb{R}^n$  y la entrada de control  $u_t = v_a(t) \in \mathbb{R}^m$ . La representación en el espacio del estado queda expresada en la forma clásica no lineal afín al control  $\dot{x}_t = f(x_t) + \mathbf{B}u_t + \zeta(x_t, t)$  como:

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_a^{-1}\{\mathbf{R}_a x_1 + \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top x_3\} \\ x_3 \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2)\{\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau x_1 - \mathbf{C}(x_2, x_3)x_3 - G(x_2)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2)\vartheta(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde claramente,  $x_t = [x_1^\top, x_2^\top, x_3^\top]^\top \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^r$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $r = 2n + m$  es el vector de estado.

Considere las proposiciones siguientes que brindan un conjunto de representaciones más simples de tratar desde el punto de vista de control.

**Proposición 2.8** (*La representación cuasi-lineal*). Considere el modelo no lineal (2.27). La aproximación lineal alrededor de la solución de equilibrio  $x_{eq} \in \mathcal{D}$  es determinada para el modelo nominal, i.e., cuando  $\vartheta(x_t, t) = 0$ , usando expansión en series de Taylor como  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t=x_{eq}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ . Al sumar y restar el término  $\mathbf{A}x_t$  en la representación no lineal previa queda el problema de Cauchy  $\dot{x}_t = \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t + \xi(x_t, t)$ ,  $x(0) = x_0$ , como sigue:

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{R}_a & \mathbf{0}_{m \times n} & -\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top \\ \mathbf{0}_{n \times m} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a^{-1} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{O}(x_t) + \mathbf{D}^{-1}(x_2)\tau_L(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{O}(x_t) = \mathbf{D}^{-1}(x_2)\{\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau x_1 - \mathbf{C}(x_2, x_3)x_3 - G(x_2)\} - [\mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{32}, \mathbf{A}_{33}]x_t, \quad (2.28)$$

donde  $\mathcal{O}(x_t)$  es conocida y contiene los términos no lineales del modelo nominal, i.e.:

$$\lim_{x_t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x_t)}{x_t} = 0,$$

y  $\mathbf{A}_{31} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{A}_{32} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{A}_{33} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  provienen de la aproximación lineal de la parte mecánica.

Usando esta última representación, no se requiere tener un conocimiento pleno del modelo no lineal, aunque se requiere tener cierta información sobre el vector de perturbaciones, incertidumbres y términos no lineales  $\xi(x_t, t)$ ; es posible demostrar que se trata de un término tipo cuasi-Lipschitz. El siguiente lema establece este resultado.

**Lema 2.2** (*Sobre las cotas del término  $\xi(x_t, t)$* ). Se define  $\mathbf{A}_3 = [\mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{33}, \mathbf{A}_{32}]$ . El vector de perturbaciones, incertidumbres y términos no lineales  $\xi(x_t, t) \in \mathbb{R}^n$  es cuasi-Lipschitz, i.e., está acotado como:

$$\begin{aligned} \|\xi(x_t, t)\|^2 &\leq \gamma_0 + \gamma_1 \|x_t\|^2, \\ \gamma_0 &= 2 \left( \frac{\delta_0}{\lambda_m} \right)^2, \\ \gamma_1 &= 2 \left( \frac{\delta_f \sqrt{r}}{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{A}_3^\top \mathbf{A}_3)} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

*Demostración.* Es claro que:

$$\begin{aligned} \|\xi(x_t, t)\| &= \|\mathbf{D}^{-1}(x_2) \{\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau x_1 - \mathbf{C}(x_2, x_3)x_3 - G(x_2) + \vartheta(t)\} - \mathbf{A}_3 x_t\|, \\ &\leq \|\mathbf{D}^{-1}(x_2)\| \{ \|\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau x_1\| + \|G(x_2)\| + \|\mathbf{C}(x_2, x_3)x_3\| + \|\vartheta(t)\| \} + \|\mathbf{A}_3 x_t\| \end{aligned}$$

Observe que, a partir de las propiedades mecánicas  $\lambda_m \leq \|\mathbf{D}(x_2)\| \implies \|\mathbf{D}^{-1}(x_2)\| \leq \frac{1}{\lambda_m}$ . También note que  $\|\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau x_1\| \leq \max(k_{\tau_j}) \|x_1\|$ ,  $j = \overline{[1, m]}$ , en virtud de que  $\mathbf{W}^\top \mathbf{W} = \mathbf{I}_m$ . Se sigue:

$$\|\xi(x_t, t)\| \leq \frac{1}{\lambda_m} \{ \max(k_{\tau_j}) \|x_1\| + \delta_G \|x_2\| + \delta_c \|x_3\|^2 + \delta_0 \} + \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_3^\top \mathbf{A}_3)} \|x_t\|.$$

Se aborda el problema de estabilización. Por lo tanto  $\|x_3\|^2 \leq \|x_3\|$ , ien una vecindad  $\|x_3\| \leq 1$ . Defínase el escalar  $0 < \delta_f \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\max\{\max(k_{\tau_j}), \delta_G, \delta_c\} \leq \delta_f,$$

y puesto que  $\|\phi\|_2 \leq \|\phi\|_1$ ,  $\phi \in \mathbb{R}^r$ ,  $\|\phi\|_1 \leq \sqrt{r} \|\phi\|_2$ , resulta

$$\begin{aligned} \|\xi(\cdot)\| &\leq \frac{\delta_0}{\lambda_m} + \frac{\delta_f}{\lambda_m} \|x_t\|_1 + \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_3^\top \mathbf{A}_3)} \|x_t\|_2, \\ &\leq \frac{\delta_0}{\lambda_m} + \left( \frac{\delta_f \sqrt{r}}{\lambda_m} + \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}_3^\top \mathbf{A}_3)} \right) \|x_t\| \end{aligned}$$

Finalmente como  $2ab \leq a^2 + b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$ , resulta la ecuación (2.29). ■

Además, el lema siguiente presenta una representación alternativa del sistema dinámico en el espacio de estados. De esta forma, algunos de los términos dinámicos no lineales se incluyen en el modelo nominal, a diferencia del modelo previo donde los términos no lineales se incluyen en el término  $\xi(x_t, t)$ . De esta manera, solo el término perturbaciones e incertidumbres junto con los pares gravitacionales se van a tratar con técnicas robustas.

**Proposición 2.9 (Una representación no lineal alternativa del modelo).** *Considere nuevamente el modelo no lineal (2.27). Una representación no lineal conveniente, en forma similar a la representación lineal,  $\dot{x}_t = \mathcal{A}(x_t, t)x_t + \mathbf{B}u_t + \varphi(x_t, t)$  se obtiene como:*

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{R}_a & \mathbf{0}_{m \times n} & -\mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top \\ \mathbf{0}_{n \times m} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2) \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau & \mathbf{0}_{n \times n} & -\mathbf{D}^{-1}(x_2) \mathbf{C}(x_2, x_3) \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a^{-1} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2) \{ \vartheta(t) - G(x_2) \} \end{bmatrix},$$

Luego, para la representación del espacio de estados propuesta, se analiza el vector de perturbaciones e incertidumbres.

**Lema 2.3 (Sobre las cotas del término  $\varphi(x_t, t)$ ).** *El vector de perturbaciones, incertidumbres y términos no lineales  $\varphi(x_t, t)$  es quasi-Lipschitz, i.e.:*

$$\begin{aligned} \|\varphi(x_t, t)\|^2 &\leq \gamma_2 + \gamma_3 \|x_t\|^2, \\ \gamma_2 &= 2 \left( \frac{\delta_0}{\lambda_m} \right)^2, \\ \gamma_3 &= 2 \left( \frac{\delta_G}{\lambda_m} \right)^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

*Demostración.* Note que:

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_t, t)\| &= \|\mathbf{D}^{-1}(x_2) [\vartheta(t) - G(x_2)]\|, \\ &\leq \|\mathbf{D}^{-1}(x_2)\{\|\vartheta(t)\| + \|G(x_2)\|\}, \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} (\delta_0 + \delta_G \|x_2\|),\end{aligned}$$

sigue que  $\|\varphi(x_t, t)\|^2 \leq 2 \left(\frac{\delta_0}{\lambda_m}\right)^2 + 2 \left(\frac{\delta_G}{\lambda_m}\right)^2 \|x_2\|^2$ . Puesto que  $\|x_2\|^2 \leq \|x_t\|^2$ , resulta la ecuación (2.30). ■

### 2.5.3. La representación lineal paramétrica

Considere el modelo dinámico nominal del sistema mecatrónico descrito en el **Proposición 2.4** de la Sección 2.5.1 (i.e., con  $\vartheta(t) \equiv 0$ ). Para favorecer la legibilidad del documento, permítase reescribir la expresión a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= \mathbf{W}^\top \mathbf{K}_\tau I_a, \\ \mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{R}_a I_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \dot{q} &= V_a(t).\end{aligned}\tag{2.31}$$

La siguiente proposición establece la representación paramétrico-lineal para esta clase de sistemas.

**Proposición 2.10 (La forma paramétrico-lineal de un robot impulsado por motores PMDC).** *La dinámica de un sistema mecatrónico dado por (2.31) puede describirse como:*

$$\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, I_a, \dot{I}_a) \vartheta = \mathbf{W}^\top V_a(t)\tag{2.32}$$

donde  $\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, I_a, \dot{I}_a) \in \mathbb{R}^{n \times q}$  es el regresor,  $\vartheta \in \mathbb{R}^q$  es el vector de parámetros y  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de control. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, I_a, \dot{I}_a) &= \left\{ \mathbf{W} \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{J} \mathbf{W}^\top + \left[ \mathbf{W} \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{W}^\top + (\mathbf{W}^\perp)^\top \mathbf{W}^\perp \right] \mathbf{D}(q) \right\} \ddot{q} \\ &\quad + \left[ \mathbf{W} \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{W}^\top + (\mathbf{W}^\perp)^\top \mathbf{W}^\perp \right] h(q, \dot{q}) + \mathbf{W} \mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{W} \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top \dot{q}\end{aligned}\tag{2.33}$$

*Demostración.* De acuerdo con la *Proposición 2.4*, el modelo desacoplado del mecanismo del robot está descrito como se expresa en (2.24). Para obtener la representación paramétrico-lineal del robot, permítase despejar la corriente de armadura del modelo de los motores **PMDC** dado en la expresión (2.16) de la *Proposición 2.1*, e introducirse en el modelo mecánico, como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{M}_{aa}(q) & \mathbf{M}_{au}(q) \\ \mathbf{M}_{ua}(q) & \mathbf{M}_{uu}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1(q, \dot{q}) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\tau \mathbf{R}_a^{-1} \left[ -\mathbf{L}_a \dot{I}_a - \mathbf{K}_e \dot{q}_a + V_a(t) \right] \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}.$$

En este punto, el objetivo es trasladar todos los parámetros del sistema al lado izquierdo del modelo, y dejar la entrada de control  $V_a(t)$  como único término del lado derecho; queda entonces:

$$\Lambda \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{M}_{aa}(q) & \mathbf{M}_{au}(q) \\ \mathbf{M}_{ua}(q) & \mathbf{M}_{uu}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1(q, \dot{q}) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a \dot{I}_a + \mathbf{K}_e \dot{q}_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a(t) \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}.$$

donde:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} & \mathbf{0}_{m \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{m \times (n-m)} & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}.$$

En virtud de que  $\Gamma$  es una transformación ortogonal, se tiene que  $\Gamma^{-1} = \Gamma^\top = [\mathbf{W}^\top, \mathbf{W}^\perp]$ . Al aplicar esta transformación inversa por el lado izquierdo en cada término, sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}\Lambda \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{J} + \mathbf{M}_{aa}(q) & \mathbf{M}_{au}(q) \\ \mathbf{M}_{ua}(q) & \mathbf{M}_{uu}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1(q, \dot{q}) \\ \bar{h}_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \right\} + \mathbf{W}^\top \left( \mathbf{L}_a^{-1} \dot{I}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \dot{q} \right) &= \mathbf{W}^\top V_a(t) \\ \Gamma^{-1}\Lambda \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Gamma + \Gamma \mathbf{M}(q) \Gamma^{-1} \Gamma \right\} \ddot{q} + \Gamma^{-1} \Lambda \Gamma h(q, \dot{q}) + \mathbf{W}^\top \left( \mathbf{L}_a^{-1} \dot{I}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \dot{q} \right) &= \mathbf{W}^\top V_a(t) \\ &+ \left[ \mathbf{W}^\top \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{J} \mathbf{W} + \left( \mathbf{W}^\top \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp (\mathbf{W}^\perp)^\top \right) \mathbf{M}(q) \right] \ddot{q} \\ &+ \left( \mathbf{W}^\top \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp (\mathbf{W}^\perp)^\top \right) h(q, \dot{q}) + \mathbf{W}^\top \left( \mathbf{L}_a^{-1} \dot{I}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \dot{q} \right) = \mathbf{W}^\top V_a(t) \end{aligned}$$

Finalmente puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \{ \mathbf{W}^\top \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{J} \mathbf{W} \} \ddot{q} + \{ \mathbf{W}^\top \mathbf{R}_a \mathbf{K}_\tau^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp (\mathbf{W}^\perp)^\top \} [\mathbf{M}(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q})] \\ + \mathbf{W}^\top \left( \mathbf{L}_a^{-1} \dot{I}_a + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \dot{q} \right) = \mathbf{W}^\top V_a(t) \end{aligned}$$

Al usar la propiedad (2.12) de la forma estándar de robótica para el segundo término del lado izquierdo y notando que el resto cumplen con ser lineales respecto a los parámetros, es claro que es posible concluir con la representación paramétrico lineal (2.32). ■

El apéndice B muestra la obtención de esta forma para cada sistema mecatrónico.

## 2.6. Nociones de Control Robusto

### 2.6.1. Definiciones y condiciones de estabilidad

Los sistemas de control robusto encuentran sus fundamentos en la teoría de *estabilidad práctica*. Para introducir brevemente este tópico, considere el sistema dinámico no lineal autónomo en la forma de *Cauchy* del espacio del estado sujeto de efectos de algún tipo de perturbación:

$$\dot{x} = f(x(t)) + \xi(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad (2.34)$$

donde  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  denota el vector de estado,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua en el sentido de *Lipschitz* y define el comportamiento dinámico del sistema nominal, y  $\xi : \mathcal{D} \times \overline{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \mathcal{D}$  contiene los efectos de perturbación. La expresión (2.34) define un sistema dinámico con flujo  $s : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , es decir,  $s(\cdot, x) : \mathbb{R} \times \mathcal{D}$  define la trayectoria del sistema a través del punto  $x \in \mathcal{D}$ . La trayectoria u órbita positiva de un punto  $x(0) = x_0 \in \mathcal{D}$  se describe por:

$$\mathcal{O}_{x_0}^+ := \{x \in \mathcal{D} : x(t) = s(t, x_0), \forall t \geq 0\}.$$

**Definición 2.6.1 (Conjunto límite positivo).** *Un punto  $p \in \mathcal{D}$  es un punto límite positivo de la trayectoria  $s(\cdot, x)$  del sistema (2.34) si existe una secuencia  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$  de números positivos, con  $t \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $s(t_n, x) \rightarrow p$ . El conjunto de todos los puntos límite positivos de  $s(t, x)$ ,  $t \geq 0$  define el conjunto límite positivo  $w(x)$  de  $s(\cdot, x)$  del sistema (2.34).*

**Definición 2.6.2 (Conjunto positivamente invariante).** *Un conjunto  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  es positivamente invariante con respecto al sistema no lineal (2.34) si  $s_t(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$  para todo  $t \geq 0$ , donde*

$$s_t(\mathcal{M}) := \{s_t(x) : x \in \mathcal{M}\}.$$

Esto es análogo a la definición de estabilidad de un conjunto. Considere la definición de conjunto atractivo.

**Definición 2.6.3 (Conjunto atractivo[21]).** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$  un conjunto compacto y positivamente invariante del sistema no lineal (2.34). Se dice que  $\mathcal{M}$  es estable en el sentido de Lyapunov si para toda vecindad abierta  $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$  de  $\mathcal{M}$  existe una vecindad abierta  $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_0$  de  $\mathcal{M}$  tal que  $x(t) \in \mathcal{D}_0$ ,  $t \geq 0$  para todo  $x_0 \in \mathcal{D}_1$ . Además,  $\mathcal{M}$  es atractivo si existe una vecindad abierta  $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}$  de  $\mathcal{M}$  tal que el conjunto límite positivo cumple  $w(x_0) \subseteq \mathcal{M}$  para todo  $x_0 \in \mathcal{D}_2$ . El conjunto  $\mathcal{M}$  es asintóticamente estable si es Lyapunov estable y atractivo.

Note como estas definiciones permiten extender los conceptos de estabilidad descritos en la teoría de Lyapunov para puntos de equilibrio. La siguiente definición describe algunos tipos de *estabilidad práctica* que resultan fundamentales en la teoría de control robusto.

**Definición 2.6.4 (Estabilidad Uniformemente Acotada (UB) y Uniformemente Últimamente Acotada (UUB)).** Las trayectorias de solución de (2.34) son:

- uniformemente acotadas si existe  $c > 0$  independiente de  $t_0$  y para toda  $a \in (0, c)$  existe  $\beta > 0$  dependiente de  $a$  pero independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a, \implies \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0; \quad (2.35)$$

es decir,  $\Omega_\beta = \{x : \|x\| \leq \beta\}$  define un conjunto positivamente invariante para todo  $x_0 \in \Omega_0 = \{x : \|x\| \leq a\} \subset \Omega_\beta$ .

- globalmente uniformemente acotadas si (2.35) se cumple para  $a$  arbitrariamente grande;
- uniformemente últimamente acotadas con cota última  $b > 0$  si existe una constante positiva  $c$  independiente de  $t_0$ , y para cada  $a \in (0, c)$  existe un  $T \geq 0$ , dependiente de  $a$  y  $b$  pero independiente de  $t_0$  tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq a \implies \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T, \quad (2.36)$$

o bien,  $\Omega_b = \{x : \|x\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T\}$  es un conjunto asintóticamente estable (invariante y atractivo), para  $x_0 \in \Omega_0 = \{x : \|x\| \leq a\}$ .

- globalmente uniformemente últimamente acotadas si (2.36) se cumple para  $a$  arbitrariamente grande;

Los teoremas siguientes (cuyos detalles se pueden consultar en [25]) establecen las condiciones suficientes para garantizar los tipos de estabilidad práctica previamente descritos.

**Teorema 2.6.1.** Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathcal{B}_\mu$ , y sea  $V(x)$  una función continuamente diferenciable tal que:

$$\begin{aligned} \alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \\ \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x), \forall x \in \mathcal{D} \text{ con } \|x\| \geq \mu, \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $\mathcal{K}$  (estrictamente crecientes [25, 21]) y  $W(x)$  es una función continua y positiva definida. Se elige alguna  $c > 0$  tal que  $\Omega_c = \{V(x) \leq c\}$  es compacto y contenido en  $\mathcal{D}$  y suponga que  $\mu = \alpha_2^{-1}(c)$ . Entonces  $\Omega_c$  es positivamente invariante

Bonifacio Sánchez Resendiz

para (2.34) y existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  tal que para todo estado inicial  $x_0 \in \Omega_c$  se satisface:

$$\|x(t)\| \leq \max\{\beta(\|x_0\|, t - t_0), \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y  $V(x)$  es radialmente no acotada entonces esto se cumple para cualquier estado inicial.

*Demostración.* Refiérase a [25]. ■

**Teorema 2.6.2.** Considere que las suposiciones del teorema previo se cumplen para el sistema nominal descrito en (2.34), con:

$$\begin{aligned} c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial x}f(x, t) \leq -c_3\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D} \text{ con } \|x\| \geq \mu, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

para las constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $\mu < \sqrt{c/c_2}$ . Entonces el conjunto  $\Omega_c = \{V(X) \leq c\}$  es positivamente invariante para (2.34) y toda condición inicial  $x_0 \in \omega_c$  se satisface:

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq \max\{V(x(t_0))e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)}, c_2\mu^2\}, \quad \forall t \geq t_0, \\ \|x(t)\| &\leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \max\{\|x(t_0)\|e^{-(c_3/c_2)(t-t_0)/2}, \mu\}, \quad \forall t \geq t_0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Si las suposiciones se cumplen globalmente, entonces estas propiedades se cumplen para cualquier estado inicial, sin restricción en la magnitud de  $\mu$ .

*Demostración.* Refiérase a [25]. ■

El lema siguiente establece las condiciones para garantizar estabilidad uniformemente últimamente acotada, así como las características de la respuesta.

**Lema 2.4.** Considere el sistema no lineal perturbado (2.34). donde  $f$  y  $\xi$  son funciones localmente Lipschitz en  $x$ , y  $\xi$  es continua por tramos en  $t$ , para todo  $t \geq 0$  y  $x \in \mathcal{B}_r$ . Sea el origen del sistema nominal un punto de equilibrio exponencialmente estable, y sea  $V(x)$  una función de Lyapunov que satisface:

$$c_1\|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2\|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x}f(x) \leq -c_3\|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\|, \quad (2.40)$$

para todo  $x \in \mathcal{B}_3$  con algunas constantes positivas  $c_1$  a  $c_4$ . Suponga además que  $\xi(x, t)$  satisface:

$$\|\xi(x, t)\| \leq \delta \leq \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r$$

para todo  $t \geq 0$  y  $x \in \mathcal{B}_3$ , para alguna constante positiva  $\theta < 1$ . Entonces, para todo  $x(t_0) \in \{V(x) \leq c_1 r^2\}$ , la solución  $x(t)$  del sistema perturbado satisface:

$$\|x(t)\| \leq \max\{ke^{-\gamma(t-t_0)}\|x(t_0)\|, b\}, \quad \forall t \geq t_0,$$

donde:

$$k = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad \gamma = \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}, \quad b = \frac{\delta c_4}{\theta c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}.$$

*Demostración.* Refiérase a [25]. ■



El término  $b$  se conoce como cota última y es proporcional a  $\delta$  (la cota superior del término de perturbación), lo que demuestra cierto grado de robustez del sistema nominal.

A continuación se muestra otro tipo de estabilidad de gran aplicación en control robusto.

**Definición 2.6.5 (Convergencia en tiempo finito[21]).** *Considere el sistema dinámico no lineal (2.34). La solución cero  $x(t) = 0$  es estable en tiempo finito si existe una vecindad del origen dada por un conjunto abierto  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{D}$  y una función  $T : \mathcal{N} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$  llamada función de tiempo de asentamiento, tal que se cumplen las siguientes declaraciones:*

- I) *Convergencia en tiempo finito. Para todo  $x \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ ,  $s^x(t)$  se define sobre  $[0, T(x))$ ,  $s^x(t) \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$  para todo  $T \in [0, T(x))$ , y  $\lim_{t \rightarrow T(x)} s(x, t) = 0$ .*
- II) *Estabilidad de Lyapunov. Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{B}_\delta(0) \subset \mathcal{N}$  y para todo  $x \in \mathcal{B}_\delta(0) \setminus \{0\}$ ,  $s(t, x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(0)$  para todo  $t \in [0, T(x))$ .*

*La solución cero  $x(t) = 0$  es globalmente estable en tiempo finito si es estable en tiempo finito con  $\mathcal{N} = \mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ .*

Las condiciones suficientes para concluir con este tipo de estabilidad vienen dadas por el siguiente teorema.

**Teorema 2.6.3 (Condiciones de estabilidad en tiempo finito[21]).** *Considere el sistema dinámico no lineal (2.34). Se asume que existe una función continuamente diferenciable  $V : \mathcal{D} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ , escalares constantes  $c > 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$ , y una vecindad  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$  del origen tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(x) &> 0, \quad x \in \mathcal{M} \setminus \{0\}, \\ V'(x)f(x) &\leq -c(V(x))^\alpha, \quad x \in \mathcal{M} \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

*Entonces la solución cero  $x(t) = 0$  es estable en tiempo finito. Además, existe una vecindad abierta  $\mathcal{N}$  del origen y una función de tiempo de establecimiento  $T : \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty)$  tal que*

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)}(V(x_0))^{1-\alpha}, \quad x_0 \in \mathcal{N}, \tag{2.42}$$

*y  $T(\cdot)$  es continuo en  $\mathcal{N}$ . Si además  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ ,  $V(\cdot)$  es radialmente no acotada y la última condición en (2.41) se cumple en  $\mathbb{R}^n$  la solución cero  $x(t) = 0$  es globalmente estable en tiempo finito.*

Finalmente, a continuación se introduce el celebrado *Lema de Barbalat*, que permite relajar las condiciones de Lyapunov para garantizar convergencia asintótica, en casos específicos como sistemas no autónomos y sujetos de perturbación.

**Lema 2.5 (El lema de Barbalat).** *Sea una función  $f(t)$  diferenciable y con límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ ; si  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*



## 2.6.2. Método de la Elipsoide Atractiva (AEM)

Las siguientes definiciones introducen el *Método del Elipsoide Atractivo*, el cual se encuentra estrechamente relacionado con el concepto de estabilidad uniformemente últimamente acotada. El problema es diseñar un controlador tal que el sistema de control en lazo cerrado satisfaga las condiciones previas. Ahora, con el objetivo de dilucidar el método del elipsoide atractivo, considere que el sistema no lineal se da en el formato cuasi-lineal:

$$\dot{x}_t = \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t + \xi(x_t, t), x(0) = x_0, \quad (2.43)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector del estado,  $u_t \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control, el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es la aproximación lineal del modelo no lineal nominal, alrededor de alguna solución de equilibrio, y  $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la función vectorial de perturbaciones e incertidumbres. Éste se asume cuasi-Lipchitz, es decir:

$$\|\xi(x_t, t)\|^2 \leq \delta_0 + \delta_1 \|x_t\|^2, \quad 0 < \delta_0, \delta_1.$$

El método **AEM** consiste en definir una retroalimentación del estado  $u_t = \mathbf{K}x_t$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , de modo que se concluye con estabilidad **UUB**, para la función candidata de Lyapunov en la forma cuadrática clásica  $V(x_t) = x_t^\top \mathbf{P}x_t$ ,  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . En este sentido, el conjunto atractivo último tiene la forma particular:

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top \mathbf{P}_{\text{att}} x \leq 1\}, \quad \mathbf{P}_{\text{att}} = \mu \mathbf{P}.$$

que tiene la forma de un elipsoide, donde  $0 < \mathbf{P}_{\text{att}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  da la forma de la elipsoide atractiva. Cuando aparecen los efectos de las incertidumbres y las perturbaciones, las trayectorias del sistema permanecen en este conjunto y proporcionan robustez. La longitud de los semiejes de la elipsoide es inversamente proporcional a los valores propios de  $\mathbf{P}_{\text{att}}$ . Por esta razón, el método **AEM** trata de la solución del siguiente problema de minimización restringida:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{1}{\mu} \text{trace}(\mathbf{P}^{-1}), \\ & \text{sujeto a} \quad 0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top, 0 < \mu. \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $\mathbf{\Gamma}$  es el conjunto de restricciones que determina la clase de matrices admisibles  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}$ .

Para concluir con las condiciones tipo-Lyapunov de estabilidad **UUB**, las restricciones del problema de minimización requieren de la solución de desigualdades matriciales. Para esto considere los siguientes preliminares.

**Teorema 2.6.4 (Sobre la realizabilidad de una desigualdad matricial).** *Sea  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{l \times n}$  y  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{k \times n}$  un par de matrices, y  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica.*

1. *Si*

$$\text{rank}(\mathcal{P}) \text{ y } \text{rank}(\mathcal{Q}) = r_Q < n,$$

*entonces la desigualdad matricial*

$$\Psi + \mathcal{P}^\top \Lambda \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^\top \Lambda \mathcal{P} < 0, \quad (2.45)$$

*tiene una solución con respecto a  $\Lambda \in \mathbb{R}^{k \times l}$  si y solo si*

$$\mathcal{W}_{\mathcal{Q}}^\top \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} < 0,$$

donde las columnas de la matriz  $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}}$  constituyen la base del kernel

$$\mathcal{N}(\mathcal{Q}) = \ker(\mathcal{Q}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Q}x = 0\},$$

de la matriz  $\mathcal{Q}$ , esto es,  $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}}$  satisface:

$$\mathcal{Q}\mathcal{W}_{\mathcal{Q}} = 0.$$

2. Si

$$\text{rank}(\mathcal{P}) := r_{\mathcal{P}} < n, \text{ and } \text{rank}(\mathcal{Q}) := r_{\mathcal{Q}} < n,$$

entonces la desigualdad matricial (2.45) tiene una solución con respecto a  $\Lambda \in \mathbb{R}^{k \times l}$  si y solo si

$$\mathcal{W}_{\mathcal{P}}^T \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{P}} < 0 \text{ and } \mathcal{W}_{\mathcal{Q}}^T \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} < 0,$$

donde las columnas de la matriz  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$  constituyen la base del kernel

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}) = \ker(\mathcal{P}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{P}x = 0\},$$

de la matriz  $\mathcal{P}$ , esto es,  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}$  satisface:

$$\mathcal{P}\mathcal{W}_{\mathcal{P}} = 0.$$

Una vez que se ha demostrado que la desigualdad matricial resultante tiene solución, el problema es encontrarla numéricamente. El enfoque principal es encontrar una Desigualdad Matricial Lineal (**LMI**, Linear Matrix Inequality) equivalente. Los siguientes teoremas son de gran ayuda para este proceso.

**Teorema 2.6.5 (El complemento de Schur).** Sea  $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{H}$  una función afín que se particiona de acuerdo con:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix},$$

donde  $F_{11}$  y  $F_{22}$  son cuadradas. Los siguientes resultados son equivalentes:

a)

$$F(x) < 0.$$

b)

$$\begin{cases} F_{11}(x) < 0, \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)F_{11}^{-1}(x)F_{12}(x) < 0. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} F_{22}(x) < 0, \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{21}(x) < 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Refiérase a [36, 37]. ■

**Teorema 2.6.6 (Desigualdad  $\Lambda$ ).** Para cualesquiera dos matrices  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , y cualquier matriz simétrica y definida positiva  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{X}^T \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T \mathcal{X} \leq \mathcal{X}^T \Lambda \mathcal{X} + \mathcal{Y}^T \Lambda^{-1} \mathcal{Y}.$$

*Demostración.* Refiérase a [37]. ■

El principal inconveniente de este método es la complejidad de tratar las desigualdades matriciales. Sin embargo, en términos de robustez e implementación, ofrece algunas características interesantes. Una vez que las trayectorias del sistema llegan al elipsoide, éstas permanecen allí, sin importar si aparecen incertidumbres o efectos de perturbaciones. También es posible incluir restricciones adicionales, como la cantidad de control para aplicaciones prácticas. Por otro lado, note que se obtiene un controlador de retroalimentación de estado clásico, por lo cual la implementación en un sistema experimental es muy simple.

### 2.6.3. Modos Deslizantes

El control por modos deslizantes es una técnica de que se utiliza para proporcionar robustez a un sistema de control de lazo cerrado. En los últimos años, ha sido una de las técnicas más utilizadas para muchas aplicaciones, ya que proporciona un excelente rendimiento y es muy fácil de implementar. Sin embargo, el trasfondo teórico detrás de esto es más sofisticado y requiere algunas consideraciones particulares cuando se aplican técnicas similares a Lyapunov para proporcionar estabilidad. La característica principal de esta clase de control robusto es que proporciona estabilidad en tiempo finito del lazo de control en presencia de efectos inciertos, por medio de un control de retroalimentación discontinua. Como se mencionó anteriormente, el control del modo deslizante se obtiene introduciendo un controlador discontinuo. Esto da como resultado una ecuación diferencial ordinaria con el lado derecho discontinuo. Por esta razón, la definición de una solución para esta clase de sistemas debe introducirse de una manera diferente[15]. Considere el sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, u, \xi), \quad x(0) = x_0, \quad (2.46)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $u \in \mathbb{R}^m$  la entrada de control. Se considera que  $f$  es diferenciable respecto a  $x$  y continua respecto al tiempo  $t$ . También  $\xi \in \mathbb{R}^n$  denota los efectos de perturbación y se considera de energía finita. Sea una superficie definida en el espacio del estado como:

$$\mathcal{S} = \{x : \sigma(x) = 0\}.$$

**Definición 2.6.6 (Modo deslizante ideal).** *Se tiene un modo deslizante ideal en (2.46) si la trayectoria del estado  $x(t)$  evoluciona de tal modo que  $\sigma(x(t_r)) = 0$  para algún  $t_3 \in \mathbb{R}^+$  finito y  $\sigma(x) = 0$  para todo  $t \geq t_r$ .*

Considere el caso en el que  $u = u(x)$  es discontinuo. La ecuación diferencial resultante que describe el sistema de control en lazo cerrado se reescribe como:

$$\dot{x} = f^c(x), \quad x(0) = x_0,$$

donde  $f^c$  es una función discontinua respecto al estado, por lo que la teoría clásica de ecuaciones diferenciales, que requiere de que el lado derecho sea continua en el sentido de Lipschitz, no es aplicable. Un concepto de solución propuesto por Filippov [40, 47] para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo permite construir una solución como el promedio de las soluciones obtenidas al acercarse al punto de discontinuidad en diferentes direcciones. Suponga que  $x_0$  es un punto de discontinuidad de  $\mathcal{S}$ , y defina  $f_-^c(x_0)$  y  $f_+^c(x_0)$  como los límites de  $f^c(x)$  cuando  $x_0$  es aproximado desde direcciones opuestas del plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $x_0$ . La solución propuesta por Filippov está dada por:

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)f_-^c(x) + \alpha f_+^c(x), \quad (2.47)$$

donde  $0 < \alpha < 1$  se elige de modo que  $f_a^c := (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c$  es tangencial a  $\mathcal{S}$ . La ecuación (2.47) puede verse como una ecuación diferencial cuyo lado derecho se define por el conjunto convexo  $F(x) = \{(1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c : \forall \alpha \in (0, 1)\}$ , queda:

$$\dot{x}(t) \in F(x).$$

Los valores de  $\alpha$  que aseguran  $\dot{\sigma}(t) = 0$  pueden determinarse explícitamente de (2.47). Por simplicidad considere  $\sigma(t) = Sx(t)$ , con  $S^T \in \mathbb{R}^n$ . Sigue que:

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} = (1 - \alpha)Sf_-^c + \alpha Sf_+^c = 0$$

y queda:

$$\alpha = \frac{Sf_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

de modo que:

$$\dot{x}(t) = \frac{Sf_-^c f_+^c - Sf_+^c f_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c},$$

permite obtener una solución promedio del sistema discontinuo.

## 2.7. Control Adaptable

Ante la imposibilidad de disponer de un modelo dinámico que represente perfectamente el comportamiento de un sistema experimental real, las técnicas de control adaptable están diseñadas para estimar los parámetros inciertos, así como el efecto de las perturbaciones sobre el modelo nominal aproximado, de modo que sea posible determinar una política de control que responde a los cambios de parámetros en línea. En general, el control adaptable se puede clasificar como directo e indirecto. La siguiente sección contiene las principales definiciones y herramientas para el control adaptativo indirecto por ubicación de polos y algunos preliminares sobre control adaptable directo.

### 2.7.1. Control Adaptable Indirecto

Las técnicas de control adaptable indirecto usan un aproximador numérico para estimar los efectos de las incertidumbres y perturbaciones en el modelo nominal de la planta. Estos parámetros se utilizan para actualizar los parámetros de control. La figura 2.2 muestra de forma gráfica la implementación de esta arquitectura de control. Esta clase de adaptación

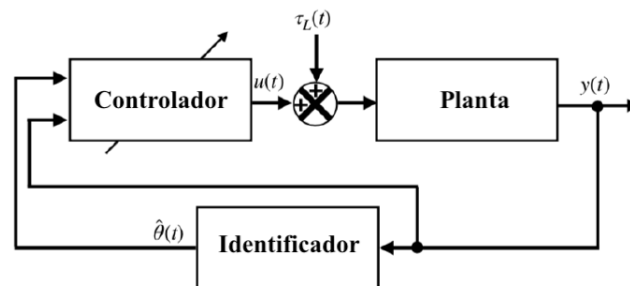


Figura 2.2: Control Adaptable Indirecto

puede utilizarse para sistemas de fase mínima y de fase no mínima. También suele referirse a este tipo de estructuras de control como *control adaptable explícito*.

## Ubicación de Polos Adaptable

El control por ubicación de polos es una de las formas más sencillas de estabilizar sistemas no lineales alrededor de una solución de equilibrio. Se utilizan muchas metodologías para calcular la ley de control de retroalimentación con este propósito. Cuando un control de ubicación de polos se combina con un estimador de parámetros, se obtiene un *control por ubicación de polos adaptable*. Aunque es posible diseñar un control de ubicación de polos adaptable directo e indirecto, el primero está restringido a plantas escalares. Sin embargo, el último es fácil de implementar y aplicable a una amplia clase de sistemas. Considere el sistema dinámico descrito en la forma cuasi-lineal:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \xi(x, t), \quad x(0) = x_0$$

Aquí el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  se conoce de manera aproximada. Sea  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$  el estimado de las matrices de parámetros correspondientes. Al sumar y restar apropiadamente queda:

$$\dot{x} = \hat{\mathbf{A}}(t)x + \hat{\mathbf{B}}(t)u + \tilde{\Theta}(t)\varphi(x, u) + \xi(x, t), \quad x(0) = x_0.$$

Si es posible construir una dinámica

$$\dot{\tilde{\Theta}} = f(\tilde{\Theta}, x, u), \quad \tilde{\Theta}(0) = \tilde{\Theta}_0,$$

convergente, se puede entonces diseñar un polinomio característico robusto, usando  $\hat{\mathbf{A}}(0)$  y  $\hat{\mathbf{B}}(0)$ , y efectuar una ubicación de polos con los valores de  $\hat{\mathbf{A}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  para todo  $t > 0$ .

### 2.7.2. Control Adaptable Directo

El control adaptable directo utiliza los parámetros de control para parametrizar el modelo de la planta. Luego, los parámetros de control se estiman directamente sin utilizar un aproximador. La principal diferencia con el control adaptable indirecto es que, en el caso del control adaptable directo es posible diseñar una estructura para cumplir con los principales objetivos de control (estabilidad y seguimiento), solo si el sistema cumple con ser de fase mínima. En general, una parametrización conveniente de la planta, en términos de los parámetros del controlador no es posible para sistemas de fase no mínima. Así, para el caso

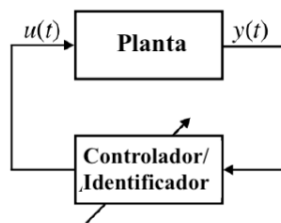


Figura 2.3: Control Adaptable Directo

abordado, considerando sistemas electromecánicos poco accionados, este tipo de adaptación no es factible y no se considera en este trabajo.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los principales preliminares teóricos. Primero, se trató el modelado de sistemas mecánicos usando la formulación de Euler-Lagrange. Además, se

formularon las principales propiedades del modelo resultante. Se dieron los modelos dinámicos de algunos motores eléctricos importantes, con lo cual se presentó el modelo dinámico de sistemas mecánicos en la forma estándar de robótica impulsado por un conjunto de motores **PMDC**. Las principales definiciones y teoremas sobre el método elipsoide atractivo se presentaron a continuación. Se dieron los conceptos de estabilidad última uniformemente acotada, la viabilidad de desigualdades matriciales y afines. Finalmente, se introdujeron algunos conceptos de control adaptativo.

Los siguientes capítulos presentan los principales resultados del trabajo. El siguiente es sobre la observación del estado, mientras que el cuarto describe los resultados para el diseño del controlador. Ambos incluyen resultados numéricos y experimentales.

# Capítulo 3

## Estimación del Estado e Identificación Paramétrica

*“Nothing takes place in the universe  
whose meaning is not that of some maximum or minimum.”*  
— LEONHARD EULER.

### 3.1. Introducción

El problema de estimación del estado para sistemas no lineales sigue siendo un campo activo en la ingeniería moderna en virtud de su reelevancia y ante las dificultades que esto supone en diferentes situaciones reales. Permítase poner en la perspectiva uno de los problemas más interesantes y con mayor aplicación en robótica: el fenómeno de subactuación. Como se ha tratado antes, esta clase de sistemas exhiben diferentes situaciones desafiantes entre las que destacan la rapidez de su dinámica comparado con un sistema completamente actuado, la naturaleza de sus restricciones no holonómicas de segundo orden, la imposibilidad para implementar una retroalimentación total o parcialmente linealizante (dado que resultan en sistemas de fase no mínima), la complejidad para tratar sistemas de orden superior mediante estrategias tradicionales basadas en la aproximación lineal, etc.. Además, en los sistemas experimentales en tiempo real suceden problemas de forma común, tales como lo son la imposibilidad de medir directamente todas las variables internas que describen su comportamiento dinámico, la presencia de incertidumbres paramétricas y de modelo, así como efectos de perturbación de naturaleza exógena. El uso de estrategias de control basadas en el modelo dinámico integral del robot y su sistema de actuación relaja algunos efectos que producen estas situaciones adversas, pero precisa de estimar las variables correspondientes a los actuadores que regularmente son máquinas eléctricas. En estas circunstancias se construye un observador que permite estimar las variables no medidas por medio de software en tiempo real, lo que resulta en un sistema fiable y más económico. La observación destinada al control de los sistemas subactuados es un tópico crucial, a entenderse por sus características más importantes: por un lado, la tarea de estabilización sugiere la necesidad por reconstruir el vector del estado completo rápidamente para evitar que las trayectorias del sistema abandonen la región de estabilizabilidad; por el otro, la respuesta transitoria del observador debe ser lo suficientemente suave para evitar en la mayor medida posible el fenómeno de pico que genera a menudo inestabilizabilidad en el lazo de control. En presencia de perturbaciones e incertidumbres, conseguir estas características de la respuesta es un proceso complejo que precisa de particular cuidado.

### 3.1.1. Trabajo relacionado

En la actualidad, el desarrollo de sensores de alto rendimiento, tanto físicos como numéricos, es un tema fundamental en muchas áreas de la ingeniería como la electrónica industrial, las comunicaciones, la robótica, la ingeniería aeroespacial y automotriz, los procesos de fabricación, entre otras, con el objetivo de tener una buena aproximación de las variables que describen su comportamiento en tiempo real y garantizar la efectividad de su control [4, 1, 42, 32, 16]. Actualmente, el diseño de algoritmos computacionales para una medición o estimación de información precisa se trata mediante dos enfoques diferentes: primero, a través del filtrado de señales o procesamiento de datos avanzado, y segundo, la estimación de variables no medibles contenidas en el vector de estado utilizando observadores [30, 41]. El diseño de observadores para la estimación del estado es uno de los problemas de control más estudiados en la literatura [30, 41, 2, 6], principalmente ante la necesidad por reducir considerablemente los efectos del ruido de las señales medidas [41, 3] usando de las características del modelo dinámico. En robótica el problema se concentra en obtener una aproximación de variables que no se miden directamente mediante algún sensor físico [30, 2, 40, 46, 9, 48, 51, 31, 39, 45] a fin de disponer de la información necesaria para la implementación de un algoritmo de control; recientemente también han sido utilizados para la identificación de fallas en diferentes áreas de la ingeniería [11, 40]. En el caso de los sistemas lineales, los observadores de estado han demostrado su efectividad [30, 46, 9], sin embargo cuando se aplican en procesos no lineales reales esta clase de observadores ven comprometido su desempeño, por lo que se requiere generar robustez en los algoritmos para extender su funcionalidad para el sistema no lineal [2, 40, 51, 31, 29, 5, 10]; para la clase de sistemas de interés, esta robustez debe ser introducida poniendo cuidado en la respuesta transitoria. Los observadores por modos deslizantes han sido en años recientes ampliamente utilizados con el objetivo de rechazar los efectos producidos por las perturbaciones en el espacio del estado y el canal de medición [40, 51]. Aunque estas estrategias suelen cumplir satisfactoriamente con el objetivo de observación en la mayoría de los casos, en un sistema experimental en tiempo real su desempeño violento compromete en gran medida los objetivos de control. Por tanto, es importante estudiar el error de estimación desde el punto de vista del concepto de estabilidad Uniformemente Acotada (UUB) para mejorar el comportamiento de la convergencia, pues permite mantener cierto grado de control sobre la forma de la respuesta. Se han presentado algunos algoritmos de estimación del estado basados en enfoques robustos [45, 37, 34, 10]. Además, en algunos trabajos se usa el concepto de método elipsoide atractivo (AEM) y desigualdades matriciales lineales (LMI) para obtener un desempeño del observador experimentalmente viable [40, 37, 50, 17].

### 3.1.2. Descripción de la Contribución

Las contribuciones enmarcadas en este capítulo se describen a continuación:

- I) El diseño de un algoritmo para estimar el vector de estado completo para sistemas Lagrangianos impulsados por motores de cd independientes, en presencia de perturbaciones e incertidumbres con compensación de la dinámica no lineal, basado en el método elipsoide atractivo;
- II) un observador de orden reducido para estimar las variables de estado no disponibles únicamente, para la clase de sistemas abordados, bajo efectos inciertos y utilizando un método elipsoide atractivo;



- III) un observador de orden reducido para estimar las variables de velocidad y corriente eléctrica basado en el modelo no lineal, para la clase de sistemas abordados, bajo efectos inciertos y utilizando el método elipsoide atractivo;
- IV) un algoritmo novedoso para estimar el vector de estado completo, con reducción de efectos de perturbaciones e incertidumbres acopladas y no acopladas, utilizando modos deslizantes y el método elipsoide atractivo;
- V) establecer las condiciones suficientes para la aplicabilidad de los resultados teóricos en sistemas experimentales;
- VI) un estudio comparativo de las metodologías diseñadas a partir de resultados experimentales para dos sistemas electromecánicos subactuados, en diferentes situaciones. El péndulo de Furuta y el sistema de Péndulo Invertido Triple, impulsados por motores de corriente continua de imanes permanentes.

## 3.2. Preliminares y Planteamiento del Problema

El diseño de un observador para la estimación del estado en condiciones de experimentación en tiempo real es de vital importancia para el control de una clase de sistemas robóticos subactuados en presencia de perturbaciones e incertidumbres debido a la imposibilidad de implementar sensores físicos que permitan medirlo por completo directamente. Es importante entonces mostrar que resulta posible diseñar el observador de forma independiente al lazo de control, y al mismo tiempo, que resulta necesario actuar en esta parte del diseño para reducir los efectos no modelados para generar un estimado del estado lo suficientemente preciso. En el caso de los sistemas lineales se dispone del *principio de separación*<sup>1</sup>; considere la descripción de la dinámica del sistema en la forma cuasi-lineal  $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \xi(x, t)$ ,  $x(0) = x_0$ . Un estimador en la forma clásica de Luenberger de orden completo se da por:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_t &= \mathbf{A}\hat{x}_t + \mathbf{B}u_t - \mathbf{L}(y_t - \hat{y}_t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \hat{y}_t &= \mathbf{C}\hat{x}_t,\end{aligned}$$

donde  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  es el estimado del estado,  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$  la ecuación de salida del observador y  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  la ganancia fija correspondiente al factor de corrección. El error de estimación se define apropiadamente como  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ; la dinámica del error de estimación queda como:

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{x} + \xi(x, t), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0.$$

De este modo, el criterio de observabilidad dado por el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  garantiza la existencia de la ganancia  $\mathbf{L}$ , de modo que la matriz  $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$  es Hurwitz. El caso particular en el que  $u(t) = \mathbf{K}\hat{x}$  es un tanto más simple. Al aplicar la función de control, queda la siguiente dinámica de estado extendido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{\tilde{x}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{x}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \xi(x, t).$$

Ésto permite formular las siguientes conclusiones acerca de la necesidad por construir observadores robustos:

<sup>1</sup>En un caso más general, refiérase a [26].

- a. en virtud de que los efectos de perturbaciones e incertidumbres se reflejan tanto en la ecuación del estado, como en la dinámica de error de observación, se requiere implementar estrategias robustas para la estimación del estado; esto a pesar de la robustez introducida en el diseño del controlador;
- b. la robustez introducida en el estimador permite desarrollar estrategias de control ignorando las perturbaciones introducidas por el canal de medición;
- c. la necesidad por una función de observación de naturaleza robusta implica que el efecto de pico estará latente en el lazo de control, y debe ser un objetivo importante en la sintonización del observador.

### 3.2.1. Suposiciones aceptadas

- I) El sistema dinámico evoluciona en una variedad compacta del espacio del estado<sup>2</sup>  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^r$  que contiene la solución trivial (para el sistema nominal, i.e., cuando  $\vartheta(t) = 0$ );
- II) el sistema no lineal nominal considerado es observable al menos en una vecindad local de la solución considerada;
- III) la dinámica puede reescribirse en la representación cuasi-lineal. Además, el vector de perturbaciones, incertidumbres y términos no lineales es cuasi-Lipschitz;
- IV) el sistema puede también representarse en la forma no lineal, estilo lineal. Del mismo modo, el vector de perturbaciones, incertidumbres y términos fuerzas y torques gravitacionales es acotado.

### 3.2.2. Problema general de estimación del estado

A continuación se muestra la formulación del problema abordado en este capítulo.

**Problema 3.2.1.** *Para los sistemas robóticos considerados en la forma estándar de robótica accionados parcial o totalmente por motores eléctricos de corriente directa de imanes permanentes, bajo el cumplimiento de los supuestos anteriores, el problema es obtener una buena estimación de las variables de estado desconocidas utilizando observadores no lineales para su implementación práctica, mientras que los efectos de perturbaciones e incertidumbres paramétricas o de modelo están latentes.*

## 3.3. Observador Robusto de Orden Completo Basado en AEM

Una forma estructuralmente simple de resolver el problema de estimación del estado atendiendo a un desempeño robusto es usando el método de elipsoide atractivo, **AEM**. Para tal efecto se considera el sistema dinámico en la forma cuasi-lineal (2.28) descrita

---

<sup>2</sup>En este punto se requiere de esta suposición en virtud de que el sistema dinámico se opera en lazo abierto; cuando se establezca una ley de control en lazo cerrado, esta condición será establecida

en la *Proposición 2.8*. El observador de orden completo tipo Luenberger tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_t &= \mathbf{A}\hat{x}_t + \mathbf{B}u_t + \mathbf{L}(y_t - \hat{y}_t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \hat{y}_t &= \mathbf{C}\hat{x}_t,\end{aligned}\quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es una ganancia fija por diseñar. El comportamiento del error de estimación, dado por  $\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t$  queda:

$$\dot{\tilde{x}}_t = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{x}_t + \xi(x_t, t), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0. \quad (3.2)$$

**Proposición 3.1 (Observador de orden completo basado en AEM).** *Considere el sistema no lineal en su representación en el espacio del estado cuasi-lineal descrita la Proposición 2.8. Si existe una solución  $(\mathbf{P}, \mathbf{L}|\alpha, \varepsilon)$  para la desigualdad matricial:*

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top\mathbf{L}^\top\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\mathbf{P} - \alpha\mathbf{P} & , & -\mathbf{P} \\ & & \varepsilon\mathbf{I}_n \\ & & -\mathbf{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.3)$$

para las matrices constantes  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , y los escalares positivos  $\alpha, \varepsilon$ , entonces el estimado del estado  $\hat{x}_t$ , dado por la solución de la ecuación diferencial (3.1), converge a un conjunto invariante alrededor del estado real  $x_t$ , definido por la elipsoide:

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}_{\text{att}}) = \{\tilde{x}_t \in \mathbb{R}^r : \tilde{x}_t^\top \mathbf{P}_{\text{att}} \tilde{x}_t \leq 1\}, \quad \mathbf{P}_{\text{att}} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{P}\right), \quad (3.4)$$

donde  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \in \mathbb{R}^{r \times r}$  define la función de Lyapunov  $V(\tilde{x}_t) \leq \tilde{x}_t^\top \mathbf{P} \tilde{x}_t$  de la forma cuadrática clásica. En estas condiciones se concluye con estabilidad **UUB** al conjunto invariante con:

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1})}, \\ T &= \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\alpha V(\tilde{x}_0) - \beta}{\alpha \kappa} \right\},\end{aligned}\quad (3.5)$$

para una constante  $0 < \kappa \ll 1$  suficientemente pequeña.

*Demostración.* Para la función candidata de Lyapunov descrita, su derivada temporal a lo largo de las trayectorias dadas por la dinámica del error de estimación (3.2) queda:

$$\dot{V}(\tilde{x}_t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) + (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})^\top \mathbf{P} & , & \mathbf{P} \\ & & \mathbf{0}_{r \times r} \\ & & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}.$$

Permítase aplicar aquí **AEM**, al sumar y restar los términos  $\alpha V(\tilde{x}_t)$  y  $\varepsilon \|\xi(x_t, t)\|^2$ , para constantes escalares positivos  $\alpha, \varepsilon$ , y usando el resultado del Lema 4.1. Sigue que:

$$\dot{V}(\tilde{x}_t) \leq - \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}^\top \Theta \begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix} - \alpha V(\tilde{x}_t) + \beta, \quad \beta = \varepsilon \eta_0,$$

para la matriz  $\Theta \in \mathbb{R}^{2r \times 2r}$  dada en la proposición. Si la desigualdad matricial (3.3) se cumple, resulta que:

$$\dot{V}(\tilde{x}_t) \leq -\alpha V(\tilde{x}_t) + \beta,$$

que permite concluir con estabilidad UUB, en vista de que su solución se halla como:

$$V(\tilde{x}_t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(\tilde{x}_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t}.$$

Al tomar el límite superior para  $t \rightarrow \infty$ , sigue:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(\tilde{x}_t) \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

el cual, al tomar en cuenta la forma de la candidata de Lyapunov resulta la elipsoide invariante (3.4). Finalmente, las cotas y tiempo de convergencia son determinados. A partir de la última expresión sigue que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_t^\top \mathbf{P} \tilde{x}_t \leq \frac{\beta}{\alpha} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_t\| \leq b,$$

para el escalar constante positivo  $b$  dado en la proposición. Además, el tiempo de convergencia  $T$  a la elipsoide obtenida se encuentra al resolver la siguiente expresión:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(\tilde{x}_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha T} = \frac{\beta}{\alpha} + \kappa, \quad 0 < \kappa,$$

que se resuelve para  $T$ , cuando el escalar constante  $\kappa$  es positivo y lo suficientemente pequeño. ■

El problema ahora es verificar la factibilidad de la desigualdad matricial obtenida. Considere para tal efecto el lema siguiente.

**Lema 3.1 (Sobre la factibilidad de la desigualdad matricial).** *Si para la desigualdad matricial (3.3), se eligen las siguientes matrices*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , & \varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \Theta_{11} = -\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})^\top \mathbf{P} - \alpha \mathbf{P} - \varepsilon \eta_1 \mathbf{I}_r,$$

y

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0}_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \implies \mathcal{W}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{r \times r} \end{bmatrix}.$$

Las siguientes condiciones resultan:

- $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}^\top \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{P}} > 0 \implies \varepsilon \mathbf{I}_r > 0$ , que es evidentemente cierta, pues  $0 < \varepsilon$ .
- $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}}^\top \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} > 0 \implies \Theta_{11} > 0$ , que sugiere la necesidad de la existencia de una matriz  $\mathbf{L}$  de modo que  $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$  sea Hurwitz i.e., se requiere que el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  sea observable, lo cual es una suposición aceptada en el planteamiento del problema actual..

Con estas condiciones se concluye que la desigualdad matricial (3.3) es factible.

Además, para simplificar el proceso numérico requerido para resolver este problema, la desigualdad matricial se transforma en una LMI.

**Lema 3.2 (Sobre la solución de la desigualdad matricial).** *Considerese nuevamente la desigualdad (3.3). Si se define un nuevo conjunto de variables como  $\mathbf{X} = \mathbf{P}$  y  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{L}$ , resulta la siguiente LMI:*

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top \mathbf{Y}^\top - \mathbf{X}\mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^\top \mathbf{X} - \alpha \mathbf{X} - \varepsilon \eta_1 \mathbf{I}_r \\ -\mathbf{X} \end{array} \right\} & , & \begin{bmatrix} -\mathbf{X} \\ \varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0, \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y las ganancias originales se determinan como  $\mathbf{P} = \mathbf{X}$  y  $\mathbf{L} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}$ .

Finalmente, el siguiente problema de minimización restringida es resuelto.

**Lema 3.3 (Sobre la solución numérica de la LMI).** *De la definición de la elipsoide (3.4) se aprecia que la longitud de los semiejes de la elipsoide es inversamente proporcional a los valores propios de  $\mathbf{P}_{\text{att}}$ ; para determinar las ganancias constantes  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$  de modo que la LMI (3.6) se satisface, es suficiente resolver el siguiente problema de minimización restringida:*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{\beta}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}), \\ & \text{sujeto a} \quad \bar{\Theta} > 0, \mathbf{L}, 0 < \mathbf{P}, 0 < \alpha, \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.7)$$

seleccionando  $\alpha$  tan grande como sea posible, y  $\varepsilon$ , tan pequeña como se permita.

El enfoque presentado en esta sección provee la estimación del estado completo de forma robusta en presencia de perturbaciones, incertidumbres y ante los términos no lineales del modelo. Resulta en una metodología relativamente simple de implementar. Además permite mantener un control sobre la respuesta transitoria, a través de los términos  $\alpha$  y  $\varepsilon$ .

### 3.4. Observador de Orden Reducido Basado en AEM

Considérese nuevamente el sistema no lineal en el espacio del estado, en la forma cuasi-lineal descrita en la *proposición 2.8*. Se propone un observador de orden reducido para resolver el problema expuesto. Para esto, es necesario obtener una forma regular, donde la dinámica del subvector de estado medible y el correspondiente al no medible sean separadas. Para esto se introduce la transformación de coordenadas:

$$z_t = \mathbf{\Gamma}x_t = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c^\top \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} x_t, \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{N}_c \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$  es el espacio nulo de la matriz de salida  $\mathbf{C}$ . En esta nueva representación la variable  $z_t$  tiene dos componentes:

$$z_t = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

donde  $z_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$  contiene las variables de estado no medibles y  $z_2 \in \mathbb{R}^p$  las medibles. Con este enfoque, el subvector  $z_1$  debe ser estimado en línea usando solo el subvector  $z_2 \in \mathbb{R}^p$ . El sistema puede expresarse en las nuevas coordenadas como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_t &= \bar{\mathbf{A}}z_t + \bar{\mathbf{B}}u_t + \bar{\xi}(x_t, t), \quad z(0) = z_0 = \mathbf{\Gamma}x_0, \\ y_t &= \bar{\mathbf{C}}z_t, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}^{-1}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}^{-1}$  y  $\bar{\xi} = \mathbf{\Gamma}\xi(x_t, t)$ . Éstas poseen la siguiente estructura

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}(x_t, t) = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

donde  $\bar{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{21} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m}$  y  $\bar{\mathbf{B}}_2 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . También,  $\bar{\xi}_1(\cdot) \in \mathbb{R}^{n-p}$  y  $\bar{\xi}_2(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ . Para estimar el subvector de estado desconocido  $z_1$  usando AEM, el acotamiento del vector de términos exógenos y no lineales debe expresarse en las nuevas coordenadas. Considere el siguiente lema.

**Lema 3.4.** *El vector de perturbaciones, incertidumbres y términos no lineales  $\xi(x_t, t)$  es cuasi-Lipschitz, como se vio en el Lema 2.1. Esta condición puede también ser expresado en el marco de referencia de  $z_t$  como:*

$$\|\bar{\xi}(\cdot)\|^2 \leq \kappa_0 + \kappa_1 \|z_t\|^2, \quad \kappa_0 = \eta_0 \lambda_{\max}^2(\mathbf{\Gamma}), \quad \kappa_1 = \eta_1 \left( \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma})}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma})} \right)^2. \quad (3.11)$$

*Demostración.* Después de la transformación de coordenadas,  $\bar{\xi} = \mathbf{\Gamma}\xi(\mathbf{\Gamma}^{-1}z_t, t)$ . Usando las cotas establecidas en la Proposición 2.8, sigue que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Gamma}\xi(x_t, t)\|^2 &= \xi^\top(x_t, t)\mathbf{\Gamma}^\top\mathbf{\Gamma}\xi(x_t, t), \\ &\leq \lambda_{\max}^2(\mathbf{\Gamma}) \|\xi(x_t, t)\|^2, \\ &\leq \lambda_{\max}^2(\mathbf{\Gamma}) (\eta_0 + \eta_1 \|\mathbf{\Gamma}^{-1}z_t\|^2), \end{aligned}$$

sigue que:

$$\|\mathbf{\Gamma}\xi(x_t, t)\|^2 = \lambda_{\max}^2(\mathbf{\Gamma}) (\eta_0 + \eta_1 \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}^{-2}) \|z_t\|^2)$$

que resulta en la expresión principal del lema. ■

Considere la siguiente proposición acerca del diseño del observador de orden reducido.

**Proposición 3.2.** *Considérese el sistema electromecánico en la forma cuasi-lineal (2.28). Si existe un conjunto solución  $(\alpha, \varepsilon | \mathbf{P}, \mathbf{L})$  para la desigualdad matricial:*

$$\Theta(\alpha, \varepsilon | \mathbf{P}, \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_{11} + \bar{\mathbf{A}}_{11}^\top\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21} \\ -\bar{\mathbf{A}}_{21}^\top\mathbf{L}^\top\mathbf{P} + \alpha\mathbf{P} + \varepsilon\eta_1\mathbf{I}_{n-p} \end{array} \right\} & \mathbf{P}\mathbf{N}_c^\top - \mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{C} \\ \mathbf{N}_c\mathbf{P} - \mathbf{C}^\top\mathbf{L}^\top\mathbf{P} & -\varepsilon\mathbf{I}_{n-p} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

entonces, el sub-vector de estado no disponible  $z_1 \in \mathbb{R}^{r-p}$  es aproximado mediante la solución del observador de orden reducido:

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_t &= \Theta_1\varrho_t + \Theta_2y_t + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{L}\bar{\mathbf{B}}_2)u_t, \quad \varrho(0) = \varrho_0, \\ \hat{z}_1 &= \varrho_t + \mathbf{L}y_t, \\ \Theta_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}, \\ \Theta_2 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{22}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

sin la necesidad de reconstruir el sub-vector de estado medible  $z_2 \in \mathbb{R}^p$ . Aquí,  $0 < \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(r-p) \times (r-p)}$  y  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(r-p) \times p}$  son matrices constantes, mientras que  $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$  son escalares positivos. Entonces, el estimado del sub-vector del estado  $\hat{z}_1$ , converge a un conjunto invariante alrededor del real  $z_1$ , dado por la elipsoide:

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}_{\text{att}}) = \{ \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^{r-p} : \tilde{z}_1^\top \mathbf{P}_{\text{att}} \tilde{z}_1 \leq 1 \}, \quad \mathbf{P}_{\text{att}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mathbf{P}. \quad (3.14)$$

Con estas condiciones se concluye con estabilidad UUB, con los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1})}, \\ T &= \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\alpha V(\tilde{x}_0) - \beta}{\alpha \kappa} \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

para  $0 < \kappa \ll 1$  suficientemente pequeña.

*Demostración.* Note que la segunda ecuación de la forma normalizada (3.9) toma la forma

$$\dot{z}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{21}z_1 + \bar{\mathbf{A}}_{22}z_2 + \bar{\mathbf{B}}_2u_t + \bar{\xi}_2(\cdot),$$

y se refiere a la dinámica del sub-vector de estado medible, en virtud de que  $y_t = z_2$ . Esta expresión puede reescribirse como:

$$\dot{y}_t - \bar{\mathbf{A}}_{22}y_t - \bar{\mathbf{B}}_2u_t = \bar{\mathbf{A}}_{21}z_1 + \bar{\xi}_2(x_t, t)$$

donde el lado izquierdo de la ecuación representa la información disponible, y el lado derecho la desconocida. Esta expresión puede usarse como factor de corrección para el observador tipo Luenberger. Se propone la estructura siguiente:

$$\dot{\hat{z}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\hat{z}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}y_t + \bar{\mathbf{B}}_1u_t + \mathbf{L} (\dot{y}_t - \bar{\mathbf{A}}_{22}y_t - \bar{\mathbf{B}}_2u_t - \bar{\mathbf{A}}_{21}\hat{z}_1)$$

que se reescribe al introducir el cambio de variable  $\varrho = \hat{z}_1 - \mathbf{L}y$  en la forma establecida en la proposición, para evitar la diferenciación de la salida. Se define el error de observación como  $\tilde{z}_1 = z_1 - \hat{z}_1$ . Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema queda:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\tilde{z}_1 + \bar{\xi}_1(x_t, t) - \mathbf{L} [\bar{\mathbf{A}}_{21}\tilde{z}_1 + \bar{\xi}_2(x_t, t)], \\ &= (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}) \tilde{z}_1 + (\mathbf{N}_c^\top - \mathbf{L}\mathbf{C}) \xi(x_t, t), \end{aligned}$$

Se define la función candidata de Lyapunov en la forma clásica  $V(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_1^\top \mathbf{P} \tilde{z}_1$ ,  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ . Su derivada temporal queda:

$$\dot{V}(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_1^\top \{ \mathbf{P} (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}) + (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21})^\top \mathbf{P} \} \tilde{z}_1 + 2\tilde{z}_1^\top (\mathbf{N}_c^\top - \mathbf{L}\mathbf{C}) \xi(x_t, t).$$

Al definirse ahora el vector extendido  $\varphi_t = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}$  y aplicar el método AEM se sigue que:

$$\dot{V}(\tilde{z}_1) = \varphi_t^\top \Theta(\alpha\varepsilon | \mathbf{P}, \mathbf{L}) \varphi_t - \alpha V(\tilde{z}_1) + \beta, \quad \beta = \varepsilon\eta_0.$$

Al suponer que se cumple la desigualdad matricial, resulta:  $\dot{V}(\tilde{z}_1) \leq -\alpha V(\tilde{z}_1) + \beta$ , que permite concluir con estabilidad UUB, i.e.:

$$V(\tilde{z}_1) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(\tilde{z}_{10}) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t}.$$

Al tomar el límite superior cuando  $t$  se dirige al infinito, resulta la elipsoide de la proposición. A partir de esta es inmediato determinar la cota superior  $b$  del conjunto invariante. Además, de la expresión anterior se obtiene el tiempo de convergencia, al determinar la intersección de la solución con  $V(\tilde{z}_1) = \frac{\beta}{\alpha} + \kappa$ ,  $0 < \kappa \ll 1$ . Ésto es:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(\tilde{z}_{10}) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha T} = \frac{\beta}{\alpha} + \kappa,$$

que resulta como se establece en la proposición. ■

**Lema 3.5** (Sobre la factibilidad de la desigualdad matricial). *Si para la desigualdad matricial (3.3), se definen las siguientes matrices:*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , & \varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \Theta_{11} = -\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{11}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21} + \bar{\mathbf{A}}_{21}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{P} - \alpha \mathbf{P} - \varepsilon\eta_1 \mathbf{I}_{n-p},$$

y

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0}_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{N}_c^\top \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{r \times r} \end{bmatrix}.$$

Resultan las siguientes condiciones:



- $\mathcal{W}_p^\top \Psi \mathcal{W}_p > 0 \Rightarrow \varepsilon \mathbf{I}_r > 0$ , que es una conclusión evidentemente cierta, puesto que  $0 < \varepsilon$ .
- $\mathcal{W}_q^\top \Psi \mathcal{W}_q > 0 \Rightarrow \Theta_{11} > 0$ , que requiere de que  $\bar{\mathbf{A}}_{11} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}$  sea Hurwitz, i.e., se requiere que el par  $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{21})$  defina una distribución observable.

Con estas condiciones se concluye la factibilidad de la desigualdad matricial (3.3).

El siguiente lema trata de la solución de la desigualdad matricial a través de una LMI.

**Lema 3.6** (Sobre la solución de la desigualdad matricial). *Considere nuevamente la desigualdad matricial(3.3). Si se define un nuevo conjunto de variables como  $\mathbf{X} = \mathbf{P}$  y  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{L}$ , resulta la siguiente LMI:*

$$\Theta(\alpha, \varepsilon | \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}\bar{\mathbf{A}}_{11} + \bar{\mathbf{A}}_{11}^\top \mathbf{X} - \mathbf{Y}\bar{\mathbf{A}}_{21} \\ -\bar{\mathbf{A}}_{21}^\top \mathbf{Y}^\top + \alpha \mathbf{X} + \varepsilon \eta_1 \mathbf{I}_{n-p} \end{array} \right\} & \mathbf{X}\mathbf{N}_c^\top - \mathbf{Y}\mathbf{C} \\ \mathbf{N}_c \mathbf{X} - \mathbf{C}^\top \mathbf{Y}^\top & -\varepsilon \mathbf{I}_{n-p} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

mientras que las ganancias originales se obtienen como  $\mathbf{P} = \mathbf{X}$  y  $\mathbf{L} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}$ .

Finalmente debe garantizarse la solución del siguiente problema de minimización restringida.

**Lema 3.7** (Sobre la solución numérica de la LMI). *De la definición de la elipsoide(3.4), el problema es determinar las ganancias constantes  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$  de modo que se cumpla la LMI (3.6) . Es entonces suficiente resolver el siguiente problema numérico:*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{\beta}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}), \\ & \text{sujeto a} \quad \bar{\Theta} > 0, \mathbf{L}, 0 < \mathbf{P}, 0 < \alpha, \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

tomando  $\alpha$  tan grande como sea posible, y  $\varepsilon$ , que resulta directamente proporcional a  $\beta$ , muy pequeño.

Existe un problema importante con este enfoque. La forma de las señales reconstruidas parece ser la misma. Sin embargo, existe un error de estado estable considerado, como se muestra en los resultados experimentales. It is due to the fact that disturbances and uncertainties appear in the dynamic equation of the output ( $z_2$ ). Este inconveniente se resuelve en la siguiente sección. Allí, la información disponible se reconstruye primero utilizando la observación en modo deslizante, para construir un término de corrección que no incluya los efectos no deseados.

### 3.5. Observador de Orden Reducido Basado en el Modelo no Lineal

La siguiente proposición resume el diseño de un observador de orden reducido, similar al anterior, pero basado en el modelo no lineal. Aquí sin embargo, se requiere la medición directa del sub-vector de posición, lo que garantiza la observabilidad de la representación, por lo menos en una vecindad de la solución trivial.



**Proposición 3.3.** *Considere el sistema mecatrónico en el espacio del estado:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\mathbf{L}_a^{-1} \{ \mathbf{R}_a x_1 + \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top x_3 - u(t) \}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= \mathbf{D}^{-1}(x_2) \{ \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau x_1 - \mathbf{C}(x_2, x_3) x_3 - G(x_2) + \vartheta(x, t) \},\end{aligned}\tag{3.18}$$

con salida  $y = x_2$  y las propiedades mecánicas en el Lemma anterior. Si existe una solución  $(\alpha_2, \varepsilon_2, \mu | \mathbf{P}_{11}, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$  de la desigualdad matricial

$$\Theta = \begin{bmatrix} (2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) \mathbf{X}_2 & \left\{ \begin{array}{l} -\mu \mathbf{X}_2 \mathbf{K}_\tau \mathbf{W} \\ + \mathbf{K}_e \mathbf{W} + \mathbf{L}_a \mathbf{L}_{21} \end{array} \right\} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} & \mathbf{0}_{m \times p} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\mu \mathbf{W}^\top \mathbf{K}_\tau \mathbf{X}_2 \\ + \mathbf{W}^\top \mathbf{K}_e + \mathbf{L}_{21}^\top \mathbf{L}_a \end{array} \right\} & \mu (\mathbf{Q} - \lambda_M^2 \mathbf{R} - \kappa \mathbf{I}_p) & -\mu \mathbf{I}_p & \mathbf{Q} & \mathbf{L}_{22}^\top \\ \mathbf{0}_{p \times m} & -\mu \mathbf{I}_p & \varepsilon_2 \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p \times p} & \mathbf{0}_{p \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{p \times p} & \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{p \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0}_{p \times p} & \mathbf{0}_{p \times p} & \frac{1}{\mu} \mathbf{R} \end{bmatrix} > 0, \tag{3.19}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{P}_{11}^{-1}, \quad \kappa = \alpha_2 \lambda_M + 2\delta_C (1 + \delta_v),$$

para los escalares constantes  $\alpha_2, \varepsilon_2, \mu \in \mathbb{R}$ , las ganancias del observador  $\mathbf{L}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{L}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , y las matrices auxiliares simétricas  $0 < \mathbf{P}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $0 < \{ \mathbf{Q}, \mathbf{R} \} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , entonces, el observador tipo Luenberger de orden reducido para las combinaciones lineales  $\varrho_{21} = x_1 - \mathbf{L}_{11} y$  y  $\varrho_{22} = x_3 - \mathbf{L}_{21} y$  en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\varrho}}_{21} &= -\mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{R}_a \hat{\varrho}_{21} - (\mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{W} + \mathbf{L}_{11}) \hat{\varrho}_{22} - [\mathbf{L}_a^{-1} (\mathbf{R}_a \mathbf{L}_{11} + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \mathbf{L}_2) + \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_2] y + \mathbf{L}_a^{-1} u(t), \\ \dot{\hat{\varrho}}_{22} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}^\top \mathbf{K}_\tau \hat{\varrho}_{21} - [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}(y, \hat{\varrho}_{22} + \mathbf{L}_{21} y) + \mathbf{L}_{22}] \hat{\varrho}_{22} \\ &\quad + \{ \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{W}^\top \mathbf{K}_\tau \mathbf{L}_{11} - \mathbf{C}(y, \hat{\varrho}_{22} + \mathbf{L}_{21} y) \mathbf{L}_2] - \mathbf{L}_{22} \mathbf{L}_2 \} y - \mathbf{D}^{-1} G(y),\end{aligned}\tag{3.20}$$

con condiciones iniciales  $\hat{\varrho}_{21}(0) = \hat{\varrho}_{21,0}$ ,  $\hat{\varrho}_{22}(0) = \hat{\varrho}_{22,0}$ , permite reconstruir la corriente de armadura y el sub-vector de velocidad  $\hat{x}_1$  and  $\hat{x}_3$ , respectivamente, sin hacer uso de la derivada de la salida y en presencia de términos exógenos. Se garantiza la convergencia de la trayectoria del error de estimación  $e_2 = [e_{21}^\top, e_{22}^\top]^\top$ , con  $e_{21} = x_1 - \hat{x}_1$  y  $e_{22} = x_3 - \hat{x}_3$ , a la elipsoide invariante:

$$\mathcal{E}_2(\alpha, \beta, \mu, \mathbf{P}_{11}) = \{ e_2 \in \mathbb{R}^{p-r} : e_2^\top \mathbf{P}_{\text{att}_2} e_2 \leq 1 \},$$

$$\mathbf{P}_{\text{att}_2} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \mathbf{P}(y), \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a & \mathbf{0}_{m \times p} \\ \mathbf{0}_{p \times m} & \mu \mathbf{D}(y) \end{bmatrix},$$

con  $\beta_2 = \varepsilon_2 (\delta_0 + \delta_1 \delta_x^2)$  en el tiempo:

$$T_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{\alpha V(e_2(0)) - \beta}{\alpha \zeta} \right], \quad 0 < \zeta \ll 1.$$

*Demostración.* El comportamiento dinámico del subvector  $x_2$  de variables del estado disponibles se da en el Lema 2. Ésta puede reescribirse en la forma de un descriptor como  $\dot{y} - x_3 = 0$ , cuyo conocimiento es de utilidad como factor de corrección en el diseño del estimador del subvector de variables desconocidas. El estimador de estado se da entonces del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\mathbf{L}_a^{-1} [\mathbf{R}_a \hat{x}_1 + \mathbf{K}_e \mathbf{W} \hat{x}_3 - u(t)] + \mathbf{L}_{21} (\dot{y} - \hat{x}_3), \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \mathbf{D}^{-1}(y) [\mathbf{W}^\top \mathbf{K}_\tau \hat{x}_1 - \mathbf{C}(y, \hat{x}_3) \hat{x}_3 - G(y)] + \mathbf{L}_{22} (\dot{y} - \hat{x}_3),\end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10}$  y  $\hat{x}_3(0) = \hat{x}_{30}$ . Se propone entonces el cambio de variable dado por las combinaciones lineales  $\varrho_{21} = \hat{x}_1 - \mathbf{L}_{21}x_2$  y  $\varrho_{22} = \hat{x}_3 - \mathbf{L}_{22}x_2$ , con  $\mathbf{L}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{L}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para evitar el uso de la derivada de la salida. Esto concluye con la forma del observador dado en la proposición, cuya solución permite hallar el estimado  $\hat{x}_1$  and  $\hat{x}_3$  de los subvectores disponibles. El problema es entonces hallar las ganancias del observador. Permítase definir el error de estimación en términos de las variables  $\varrho_{21}$  y  $\varrho_{22}$ , i.e.,  $e_{21} = \varrho_{21} - \hat{\varrho}_{21}$  y  $e_{22} = \varrho_{22} - \hat{\varrho}_{22}$ . Sigue que  $e_{21} = x_1 - \mathbf{L}_{21}y - \hat{x}_1 + \mathbf{L}_{21}y = x_1 - \hat{x}_1$ , y por lo tanto  $e_{22} = x_3 - \hat{x}_3$ . Procede que

$$\begin{aligned} \dot{e}_{21} &= -\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{R}_a e_{21} - [\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{W} + \mathbf{L}_{21}] e_{22}, \\ \dot{e}_{22} &= \mathbf{D}^{-1}(y) [\mathbf{W}^\top\mathbf{K}_\tau e_{21} - \mathbf{C}(y, x_3)x_3 + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)\hat{x}_3] - \mathbf{L}_{22}e_{22} + \mathbf{D}^{-1}(y)\xi(x, t). \end{aligned}$$

En este punto resulta de gran utilidad la propiedad de linealidad de la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(y, x_3)x_3 - \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)\hat{x}_3 &= \mathbf{C}(y, x_3)(e_{22} + \hat{x}_3) - \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)\hat{x}_3, \\ &= \mathbf{C}(y, x_3)e_{22} + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)e_{22}. \end{aligned}$$

Las trayectorias del error de estimación  $e_{22}$  son ahora descritas por:

$$\dot{e}_{22} = \mathbf{D}^{-1}(y) \{ \mathbf{W}^\top\mathbf{K}_\tau e_{21} - [\mathbf{C}(y, x_3) + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)] e_{22} \} - \mathbf{L}_{22}e_{22} + \mathbf{D}^{-1}(y)\xi(x, t)$$

En forma vectorial, las ecuaciones diferenciales del error pueden expresarse como  $\dot{e}_2 = \mathbf{\Lambda}(\hat{x}, y)e_2 + \vartheta(x, t)$ , con:

$$\mathbf{\Lambda}(\hat{x}, y) = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{R}_a & , & -(\mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{K}_e\mathbf{W} + \mathbf{L}_{21}) \\ \mathbf{D}^{-1}(y)\mathbf{W}^\top\mathbf{K}_\tau & , & -\mathbf{D}^{-1}(y) [\mathbf{C}(y, x_3) + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3)] - \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}(y)\xi(x, t) \end{bmatrix}.$$

En este punto se define la función candidata de Lyapunov en la forma clásica  $V_2(e_2) = e_2^\top \mathbf{P}_2 e_2$ , donde  $\mathbf{P}_2$  tiene la estructura expuesta en la proposición. Claramente resulta que:  $\dot{V}_2(e_2) = e_2^\top \mathbf{\Xi}_1 e_2 + 2e_2^\top \mathbf{P}_2 \vartheta$ , donde  $\mathbf{\Xi}_1 = \mathbf{P}_2 \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}^\top \mathbf{P}_2 + \dot{\mathbf{P}}_2$  tiene la forma:

$$\mathbf{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} -2\mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a & , & (\mu\mathbf{K}_\tau - \mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_e)\mathbf{W} - \mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a\mathbf{L}_{21} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^\top(\mu\mathbf{K}_\tau - \mathbf{K}_e\mathbf{P}_{11}) \\ -\mathbf{L}_{21}^\top\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{11} \end{array} \right\} & , & \left\{ \begin{array}{l} -\mu[\mathbf{C}(y, x_3) + \mathbf{C}^\top(y, x_3) \\ + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3) + \mathbf{C}^\top(y, \hat{x}_3) \\ + \mathbf{D}(y)\mathbf{L}_{22} + \mathbf{L}_{22}^\top\mathbf{D}(y) - \dot{\mathbf{D}}(y)] \end{array} \right\} \end{bmatrix},$$

y  $2e_2^\top \mathbf{P}_2 \vartheta = 2\mu e_2^\top \xi(x, t)$ . Notese que en el bloque matricial (2, 2) de  $\mathbf{\Xi}_1$  puede aplicarse la propiedad de antisimetría:

$$\left[ \mathbf{C}(y, x_3) + \mathbf{C}^\top(y, x_3) - \dot{\mathbf{D}}(y) \right] = 0.$$

Se define ahora el vector de estado extendido  $\eta = (e_2^\top, \xi^\top)^\top$ . Se obtiene entonces la representación de vector extendido como  $\dot{V}_2(e_2) = -\eta^\top \mathbf{\Xi}_2 \eta$ , con:

$$\mathbf{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} 2\mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a & \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_e - \mu\mathbf{K}_\tau)\mathbf{W} \\ + \mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a\mathbf{L}_{21} \end{array} \right\} & \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^\top(\mathbf{K}_e\mathbf{P}_{11} - \mu\mathbf{K}_\tau) \\ + \mathbf{L}_{21}^\top\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{11} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \mu[\mathbf{D}(y)\mathbf{L}_{22} + \mathbf{L}_{22}^\top\mathbf{D}(y)] \\ + \mathbf{C}(y, \hat{x}_3) + \mathbf{C}^\top(y, \hat{x}_3) \end{array} \right\} & -\mu\mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Se suman y restan los términos  $\alpha_2 V_2(e_2)$  y  $\varepsilon_2 \|\xi(x, t)\|^2$ . Sigue que  $\dot{V}_2(e_2) = -\eta^\top \Xi_3 \eta - \alpha V_2(e_2) + \varepsilon_2 \|\xi(x, t)\|^2$ , donde:

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} (2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) & \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_e - \mu \mathbf{K}_\tau) \mathbf{W} \\ + \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a \mathbf{L}_{21} \end{array} \right\} & \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^\top (\mathbf{K}_e \mathbf{P}_{11} - \mu \mathbf{K}_\tau) \\ + \mathbf{L}_{21}^\top \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{11} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \mu [\mathbf{D}(y) \mathbf{L}_{22} + \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{D}(y)] \\ + \mu [\mathbf{C}(y, \hat{x}_3) + \mathbf{C}^\top(y, \hat{x}_3)] \\ - \mu \alpha \mathbf{D}(y) \end{array} \right\} & -\mu \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I}_p & \varepsilon_2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

El segundo bloque matricial de la diagonal matricial contiene términos dinámicos, y debe tratarse de tal modo que resulte positivo definido, de acuerdo con el *criterio de Sylvester*. Considérese los siguientes comentarios:

- Las propiedades de acotamiento de las matrices de inercias y Coriolis pueden ser introducidas el bloque matricial en cuestión; con ello sería suficiente garantizar que la ganancia matricial  $\mathbf{L}_{22}$  es positiva definida, y dominante con respecto a los otros términos. Sin embargo, en vista de que esta ganancia se multiplica por el valor propio mínimo de la matriz de inercia (que representa el peor de los casos, en el afán de concluir con positividad), que es muy pequeño, y el resto de los términos se multiplican por el valor propio máximo y la cota de la matriz de Coriolis, que son términos relativamente grandes, se obtiene entonces un observador de alta ganancia.
- Alternativamente permítase asumir que, en el peor de los casos, todos los términos del bloque son definidos negativos. Con esto en mente se incluye el término  $\mu \mathbf{Q}$ ,  $0 < \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  sumando y restando. Se consideran además las siguientes minorizaciones:

1. usando la *desigualdad*  $\Lambda$  matricial como:

$$\mathbf{D}(y) \mathbf{L}_{22} + \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{D}(y) \leq \mathbf{D}(y) \mathbf{R} \mathbf{D}(y) + \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_{22},$$

para cualquier matriz simétrica y definida positiva  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . También es cierto que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(y) \mathbf{L}_{22} + \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{D}(y) &\geq -\mathbf{D}(y) \mathbf{R} \mathbf{D}(y) - \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_{22}, \\ &\geq -\lambda_M^2 \mathbf{R} - \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_{22} \end{aligned}$$

2. también se tiene que

$$-\mu \alpha \mathbf{D}(y) \geq -\mu \alpha \lambda_M \mathbf{I}_p;$$

3. y

$$\mu [\mathbf{C}(y, \hat{x}_3) + \mathbf{C}^\top(y, \hat{x}_3)] \geq -2\mu \delta_c \|\hat{x}_3\|$$

Al introducir estos términos en la matriz  $\Xi_3$ , queda que  $\dot{V}_2(e_2) \leq -\eta^\top (\Xi_{4A} - \Xi_{4B}) \eta - \alpha_2 V_2(e_2) + \varepsilon_2 \|\xi(x, t)\|^2$ , con:

$$\Xi_{4A} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} (2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) & \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_e - \mu \mathbf{K}_\tau) \mathbf{W} \\ + \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a \mathbf{L}_{21} \end{array} \right\} & \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}^\top (\mathbf{K}_e \mathbf{P}_{11} - \mu \mathbf{K}_\tau) \\ + \mathbf{L}_{21}^\top \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{11} \end{array} \right\} & \mu (\mathbf{Q} - \lambda_M^2 \mathbf{R} - \kappa \mathbf{I}_p) & -\mu \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I}_p & \varepsilon_2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{4B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & , & \mathbf{0} & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , & \mu (\mathbf{Q} + \mathbf{L}_{22}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_{22}) & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , & \mathbf{0} & , & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Para facilitar la aplicación del complemento de Schur, note que:

$$\Xi_{4B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{1/2} & \mathbf{L}_{22}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Sigue que  $\dot{V}_2(e_2) \leq -\eta^\top \Xi_5 \eta - \alpha_2 V_2(e_2) + \varepsilon_2 \|\xi(x, t)\|^2$ , donde:

$$\Xi_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} (2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) & \left\{ (\mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_e - \mu \mathbf{K}_\tau) \mathbf{W} \right\} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \left\{ \mathbf{W}^\top (\mathbf{K}_e \mathbf{P}_{11} - \mu \mathbf{K}_\tau) \right\} & \mu (\mathbf{Q} - \lambda_M^2 \mathbf{R} - \kappa \mathbf{I}_p) & -\mu \mathbf{I}_p & \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{L}_{22}^\top \\ \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I}_p & \varepsilon_2 \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \frac{1}{\mu} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{\mu} \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Finalmente se concluye con la desigualdad matricial dada en la proposición, al introducir la transformación no singular:  $\Gamma^\top \Xi_5 \Gamma > 0$ , con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

En estas condiciones se concluye con estabilidad Última-Uniformemente Acotada, cuya cota última y tiempo de convergencia se determinan apropiadamente. ■

Considere los siguientes comentarios acerca del desarrollo previo.

**Observación 3.1.** *Note que:*

- la matriz  $\mathbf{P}_2$  es variable, en virtud de la dependencia explícita de la matriz de inercia;
- la sub-matriz  $\mathbf{P}_{11}$  es constante y define la elipsoide de la parte eléctrica;
- la elipsoide resultante para la estimación de la velocidad se da por  $\mu \mathbf{D}(y)$ . La solución numérica sin embargo, permite determinar la elipsoide más grande al considerar las cotas de la matriz de inercia.

**Lema 3.8 (Factibilidad de la LMI).** *La desigualdad matricial lineal  $\Theta > 0$  dada en la proposición anterior, puede expresarse como  $\Theta = \Psi_2 + \mathcal{P}_2^\top \Lambda_2^\top \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_2^\top \Lambda_2 \mathcal{P}_2 > 0$ , con:*

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \text{diag} \left\{ [(2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) \mathbf{X}_2, \mu (\mathbf{Q} - \lambda_M^2 \mathbf{R} - \kappa \mathbf{I}_p), \varepsilon_2 \mathbf{I}_p, \frac{1}{\mu} \mathbf{Q}, \frac{1}{\mu} \mathbf{R}] \right\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \mathbf{I}_n, \\ \mathcal{Q}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{K}_e - \mu \mathbf{X}_2 \mathbf{K}_\tau) \mathbf{W} + \mathbf{L}_a \mathbf{L}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I}_p & \mathbf{Q} & \mathbf{L}_{22}^\top \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se sigue que  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}_2}^\top = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_p]$  y  $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}_2}^\top = [\mathbf{I}_p, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$ . Resultan las siguientes condiciones:

- $\mathcal{W}_{\mathcal{P}_2}^\top \Psi_2 \mathcal{W}_{\mathcal{P}_2} = \varepsilon_2 \mathbf{I}_p + \frac{1}{\mu} (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) > 0$ , que es claramente cierto pues  $\varepsilon_2$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son positivos definidos;
- $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}_2}^\top \Psi_2 \mathcal{W}_{\mathcal{Q}_2} = (2\mathbf{R}_a - \alpha_2 \mathbf{L}_a) \mathbf{X}_2 > 0$ , se cumple al seleccionar  $\alpha_2$  apropiadamente.

**Lema 3.9 (Sobre la solución numérica de la LMI).** Debe resolverse el siguiente problema de minimización.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{\alpha_2}{\beta_2} \left\{ \frac{1}{\min(L_a)} \text{tr}(\mathbf{P}_{11}^{-1}) + \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{\mu} \right\} \\ & \text{sujeto a} && 0 < \Theta, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}, 0 < \mathbf{P}_{11}, 0 < \mathbf{Q}, 0 < \mathbf{R}, \\ & && 0 < \alpha_2, \varepsilon_2, \mu \end{aligned}$$

con  $\alpha_2$  y  $\mu$  tan grande como posible  $\beta_2$  tan pequeño como posible.

### 3.6. Observador de Orden Completo Basado en AEM y Modos Deslizantes

El enfoque adoptado en esta sección puede describirse brevemente del siguiente modo. El sub-vector correspondiente a la información disponible se reconstruye primero en tiempo finito usando una estrategia de modos deslizantes. Este proceso permite caracterizar el factor de corrección para un observador tipo Luenberger, que se usa para estimar el sub-vector de estado no medible, y que es sintonizado usando el método AEM. De este modo se concluye con estabilidad UUB en la estimación del sub-vector desconocido.

Se quiere una observador con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_t &= \bar{\mathbf{A}} \hat{z}_t + \bar{\mathbf{B}} u_t + \mathbf{L} \phi(z_t), \quad \hat{z}(0) = \hat{z}_0, \\ \hat{y}_t &= \bar{\mathbf{C}} \hat{z}_t, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{r \times p}$  es una ganancia matricial constante de la forma:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

El problema ahora es diseñar una función  $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^p$  de modo que los efectos de los términos exógenos se reducen usando la señal de salida  $y(t)$ . El problema se aborda usando Modos Deslizantes y Elipsoide Atractivo. El primero permite reconstruir el sub-vector del estado disponible en tiempo finito, mientras que el segundo permite estimar el sub-vector desconocido. Defínase el error de estimación como  $e = z_t - \hat{z}_t$ . Sus trayectorias están dadas por la ecuación diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{\Gamma,1} \\ \xi_{\Gamma,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \phi(z_t), \quad (3.23)$$

donde  $e_1 = z_1 - \hat{z}_1 \in \mathbb{R}^{r-p}$  y  $e_2 = z_2 - \hat{z}_2 \in \mathbb{R}^p$ , es el error de estimación de las variables no medibles ( $e_1$ ) y medibles ( $e_2$ ) respectivamente. Para obtener una estimación apropiada de la salida del sistema dado en la forma cuasi lineal, la superficie de deslizamiento se diseña como:

$$S(\sigma) = \{\sigma_t = e_2 : \sigma_t = 0, \dot{\sigma}_t = 0\};$$

**Proposición 3.4.** Si la función  $\phi(\cdot)$  tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\phi(\sigma_t) &= \bar{\mathbf{A}}_{22}\sigma_t + \rho_0 \text{Sign}(\sigma_t) + \rho_1, \\ 0 < \rho_0 &\in \mathbb{R}^{p \times p}, \rho_1 = \eta + \delta_4 \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}}_{12}^T \bar{\mathbf{A}}_{12})},\end{aligned}\quad (3.24)$$

entonces, en la región  $\|e_1\| \leq \delta_4$ , el estimado del sub-vector del estado  $\hat{z}_2$  converge al sub-vector de estado real  $z_2$  en el tiempo finito:

$$t_r = \frac{\sqrt{2}}{\text{tr}(\rho_0)} V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0)) + t_0, \quad (3.25)$$

donde la función de almacenamiento  $V_1(\sigma_t)$  está dada en la forma cuadrática clásica  $V_1(\sigma_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^T \sigma_t$ .

*Demostración.* Considere la variable de deslizamiento como  $\sigma_t = e_2$ , y la función de almacenamiento  $V(\sigma_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^T \sigma_t$ . A partir de (3.23) procede que:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\cdot) \Big|_{(3.23)} &= \sigma^T \dot{\sigma}, \\ &= \sigma^T \{ \bar{\mathbf{A}}_{21} e_1 + \bar{\mathbf{A}}_{22} \sigma + \bar{\xi}_2 - \phi(\sigma) \}, \\ &\leq \|\sigma_t\| \{ \|\bar{\mathbf{A}}_{21} e_1 + \bar{\xi}_2\| \} + \sigma_t^T \{ \bar{\mathbf{A}}_{22} \sigma_t - \phi(\sigma_t) \}.\end{aligned}$$

En este punto se introduce la función de observación discontinua (3.24). Con la condición  $0 < \rho_0$  resulta que  $\rho_0 \leq \text{tr}(\rho_0)$ . Esto conduce a::

$$\dot{V}(\cdot) \Big|_{(3.23)} \leq -\|\sigma_t\| \{ \text{tr}(\rho_0) + \rho_1 - \sqrt{\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{A}}_{12}^T \bar{\mathbf{A}}_{12})} \|e_1\| - \sqrt{\kappa_0 + \kappa_1 \|z_t\|^2} \}.$$

En una pequeña región  $\|e_t\| \leq \delta_2$  y  $\|x_t\| \leq \delta_3$ , resulta la expresión (3.24). Entonces:

$$\dot{V}(\cdot) \Big|_{(3.23)} \leq -\text{tr}(\rho_0) \|\sigma\|,$$

que concluye con convergencia en tiempo finito. De hecho, por la definición de la función de almacenamiento  $V_1(\sigma)$ , entonces  $|\sigma| = \sqrt{2V_1(\sigma)}$ . Sigue que:

$$\frac{dV_1(\sigma(t))}{dt} \leq -\text{tr}(\rho_0) \sqrt{2V_1(\sigma(t))}$$

que se resuelve como:

$$\int_{t_0}^{t_r} \frac{dV_1(\sigma(t))}{\sqrt{V_1(\sigma(t))}} \leq -\sqrt{2} \text{tr}(\rho_0) \int_{t_0}^{t_r} dt$$

y se concluye:

$$2\sqrt{V_1(\sigma(t))} \Big|_{t_0}^{t_r} \leq -\sqrt{2} \text{tr}(\rho_0) (t_r - t_0)$$

en virtud de que  $\lim_{t \rightarrow t_r} V_1(\sigma(t_r)) = 0$ , el tiempo de convergencia se concluye como en (3.25). ■

La proposición anterior establece la forma de la función discontinua  $\phi(\sigma)$  de modo que  $z_2$  se reconstruye satisfactoriamente. Para estimar  $z_1$  with (3.21), debe diseñarse la ganancia  $\mathbf{L}_1$ . Considérese la función de almacenamiento:

$$V_2(e_1) = e_1^T \mathbf{P} e_1, \quad 0 < \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}. \quad (3.26)$$

**Proposición 3.5.** Si para los escalares positivos  $\alpha$  y  $\beta$ , existe una solución de la LMI:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{11}^T\mathbf{P} - \mathbf{Y}\mathcal{A}_{21} - \mathcal{A}_{21}^T\mathbf{Y}^T + \alpha\mathbf{P} & \mathbf{P} & -\mathbf{Y} \\ \mathbf{P} & -\varepsilon\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{0} & -\varepsilon\mathbf{I}_p \end{pmatrix} < 0, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{P} > 0, \mathbf{Y} = \mathbf{P}\mathbf{L}_1,$$

entonces, para  $t \geq t_r$  la función de almacenamiento  $V_2(e_1)$  satisface:

$$V_2(e_1(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left\{ V_2(e_1(t_r)) - \frac{\beta}{\alpha} \right\} e^{-\alpha(t-t_r)} \quad (3.28)$$

donde  $\beta = \varepsilon\eta$ , y se concluye con estabilidad UUB, para:

$$b = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1})}, \quad (3.29)$$

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\alpha V_2(t_r) - \beta}{\alpha \zeta} \right\} + \frac{\sqrt{2}}{\text{tr}(\rho_0)} V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma_0) + t_0,$$

para el escalar  $\zeta \in \mathbb{R}^+$  lo suficientemente pequeño.

*Demostración.* A partir de la Proposición 1, se concluye que en el tiempo  $t \geq t_r$  se converge a la superficie de deslizamiento  $S = \{e : \sigma = 0, \dot{\sigma} = 0\}$ . Entonces, la dinámica del error (3.23) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_{\Gamma,1} \\ \vartheta_{\Gamma,2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \phi(z), \quad (3.30)$$

y resulta que:

$$\dot{e}_1 = (\mathcal{A}_{11} - \mathbf{L}_1\mathcal{A}_{21})e_1 + [\mathbf{I}_p, -\mathbf{L}_1]\vartheta_{\Gamma}(x,t). \quad (3.31)$$

Para concluir con estabilidad UUB para  $e_1$ , definase la función energética de la forma clásica  $V_2(e_1) = e_1^T \mathbf{P} e_1$ , con  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$  una ganancia fija. Al definir el estado extendido  $\eta = [e_1^T, \vartheta_{\Gamma}^T]^T$ , y aplicar AEM la evolución de la función energética a lo largo de las trayectorias del sistema se describe por:

$$\dot{V}_2(\cdot) = \eta^T \Theta \eta - \alpha V_2(e_1) + \beta, \beta = \varepsilon\eta_1 \quad (3.32)$$

donde  $\Theta(\cdot)$  está dada como (3.27). Si se cumple con la LMI, procede que  $\dot{V}_2(\cdot) \leq -\alpha V_2(e_1) + \beta$ , cuya solución se halla como:

$$\int_{t_r}^t dV_2(e_1(\tau))e^{\alpha\tau} \leq \beta \int_{t_r}^t e^{\alpha\tau} d\tau \quad (3.33)$$

se concluye con (3.28). Entonces es claro que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_2(\cdot) \leq \frac{\beta}{\alpha}$ , y se concluye con la expresión (3.29). ■

**Lema 3.10** (Sobre la factibilidad de la LMI (3.27)). Defínase:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\varepsilon\mathbf{I}_{n-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\varepsilon\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \mathcal{P}\Lambda^T\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{L}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

donde  $\Lambda = \mathbf{I}_{n-p}$ , y

$$\mathcal{P} = [\mathbf{I}_{n-p} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}], \quad \mathcal{Q} = [\mathbf{0}, \ \mathbf{P}, \ \mathbf{P}\mathbf{L}_1], \quad (3.35)$$

con sus respectivos kernel asociados:

$$\mathcal{W}_P^\top = [\mathbf{0}, \ \mathbf{0}, \ \mathbf{I}_{n-p}], \quad \mathcal{W}_Q^\top = [\mathbf{I}_{n-p}, \ \mathbf{L}_1, \ \mathbf{I}_{n-p}]. \quad (3.36)$$

Por lo tanto, la desigualdad matricial (3.27) toma la forma (2.45). Por lo tanto, la LMI (3.27) es factible si y solo si se cumple

$$\mathcal{W}_Q^\top \Psi \mathcal{W}_Q = \Theta_{11} - \varepsilon \mathbf{I}_{n-p} < 0, \quad (3.37)$$

De ser así, existe una ganancia matricial  $\mathbf{L}_1$ , tal que los valores propios de  $(\mathcal{A}_{11} - \mathbf{L}_1 \mathcal{A}_{21})$  pueden ubicarse arbitrariamente.

**Lema 3.11** (Sobre la solución numérica de la LMI). *A partir de (3.29) es claro que para obtener las ganancias constantes  $\alpha, \varepsilon, \mathbf{P}, \mathbf{L}_1$  de modo que la LMI (3.27) sea satisfecha, es suficiente resolver el siguiente problema de minimización restringida:*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \frac{\beta}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}), \\ & \text{sujeto a} && \Theta(\cdot) < 0, \mathbf{L}, 0 < \mathbf{P}, 0 < \alpha, \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.38)$$

eligiendo  $\alpha$  lo más grande posible y  $\varepsilon$  muy pequeño. Del mismo modo, la cota última  $b$  en (3.29) es inversamente proporcional a los valores propios de  $\mathbf{P}$ , por lo cual  $\mathbf{P}^{-1}$  debe minimizarse.

La relación entre el estado real y su estimado están dados por la función de error de estimación  $e = z - \hat{z}$ . Note que esta función se divide en los sub-vectores  $e_1$  y  $e_2$ , donde  $e_2$  converge en tiempo finito  $t \leq t_r < \infty$ , y  $e_1$  converge al conjunto compacto  $\Omega = \{e_1 | e_1^\top \mathbf{P} e_1 \leq \frac{\beta}{\alpha}\}$ . De este modo, al resolver el problema de minimización (3.38), el observador diseñado da una aproximación del estado real.

## 3.7. Estimación paramétrica

### 3.7.1. Identificador paramétrico con disposición del estado

La siguiente proposición presenta el diseño de un estimador paramétrico de la representación cuasi-lineal del espacio del estado.

**Proposición 3.6** (Mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido basado en el modelo cuasi-lineal). *Considere el sistema dinámico en la forma cuasi-lineal (2.28) descrito en la Proposición 2.8. La representación lineal paramétrica se da como:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Theta \varphi(x, u) + \xi(x, t), x(0) = x_0, \\ y &= x, \quad \Theta = [\mathbf{A}, \mathbf{B}], \quad \varphi(x, u) = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sea entonces  $\vartheta = \text{vec}(\Theta) \in \mathbb{R}^{n \cdot (n+m)}$  y  $z = \dot{x}$ . La solución del estimador paramétrico:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}}_t &= \mathbf{P} \left[ \text{vec}(z_t \varphi_t^\top) - (\varphi_t \varphi_t^\top \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\vartheta}_t \right], \quad \hat{\vartheta}(0) = \hat{\vartheta}_0, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \beta \mathbf{P} - \mathbf{P} (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \end{aligned} \quad (3.40)$$



permite reconstruir la matriz de parámetros, con  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \cdot (n+m) \times n \cdot (n+m)}$ , y minimizando el funcional de costo:

$$J(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left( z_\tau - \hat{\Theta}_\tau \varphi_\tau \right)^2 d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \text{tr} \left\{ \left( \hat{\Theta}_t - \hat{\Theta}_0 \right)^\top \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Theta}_t - \hat{\Theta}_0 \right) \right\}. \quad (3.41)$$

Donde  $0 < \beta \in \mathbb{R}$  se conoce como factor de olvido.

*Demostración.* De acuerdo con la representación lineal paramétrica provista en (3.39) se propone el estimador paramétrico en la forma  $\hat{z} = \hat{\Theta} \varphi$ , para generar el error de estimación.

$$\varepsilon = z - \hat{\Theta} \varphi.$$

Del método del gradiente  $\nabla_{\hat{\Theta}} J(\varepsilon) = 0$  queda que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\Theta}} J(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \nabla_{\hat{\Theta}} \left( z^\top z - 2z^\top \hat{\Theta} \varphi + \varphi^\top \hat{\Theta}^\top \hat{\Theta} \varphi \right) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \nabla_{\hat{\Theta}} \text{tr} \left\{ \hat{\Theta}^\top \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta} - 2\hat{\Theta}^\top \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 + \hat{\Theta}_0 \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right\} \\ &= \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left( -z \varphi^\top + \hat{\Theta} \varphi \varphi^\top \right) d\tau + e^{-\beta t} \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Theta} - \hat{\Theta}_0 \right) \end{aligned}$$

Sigue que:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left( -z \varphi^\top + \hat{\Theta} \varphi \varphi^\top \right) d\tau + e^{-\beta t} \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\Theta} - \hat{\Theta}_0 \right) &= 0 \\ \hat{\Theta} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \varphi \varphi^\top d\tau + e^{-\beta t} \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta} &= \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau + e^{-\beta t} \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \end{aligned}$$

Al introducir el operador de vectorización en ambos lados de la ecuación, es posible aislar la vectorización de  $\hat{\Theta}$ , dada la siguiente propiedad [36]:

$$\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}) = [(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{I}_m)] \text{vec}(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Queda el estimador por *mínimos cuadrados no recursivos* como:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= \mathbf{P} \left[ \text{vec} \left( \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau \right) + e^{-\beta t} \text{vec} \left( \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right) \right], \\ \mathbf{P} &= \left[ (\mathbf{I}_{n+m} \otimes e^{-\beta t} \mathbf{Q}_0) + \left( \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \varphi \varphi^\top d\tau \otimes \mathbf{I}_n \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Usando el hecho que  $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ , procede que:

$$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} \} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = 0 \implies \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P} \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} \mathbf{P}$$

Sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1} &= -\beta \left[ e^{-\beta t} (\mathbf{I}_{n+m} \otimes \mathbf{Q}_0) + \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \varphi \varphi^\top d\tau \otimes \mathbf{I}_n \right] + \varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n \\ &= -\beta \mathbf{P}^{-1} + (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{P}} = \beta \mathbf{P} - \mathbf{P} (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}} &= \dot{\mathbf{P}} \left[ \text{vec} \left( \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau \right) + e^{-\beta t} \text{vec} \left( \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right) \right] \\ &\quad + \mathbf{P} \left[ \text{vec} \left( z \varphi^\top - \beta \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau \right) - \beta e^{-\beta(t-\tau)} \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right], \\ &= \left( \dot{\mathbf{P}} - \beta \mathbf{P} \right) \left[ \text{vec} \left( \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau \right) + e^{-\beta t} \text{vec} \left( \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right) \right] + \mathbf{P} \text{vec} (z \varphi^\top), \\ &= -\mathbf{P} (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P} \left[ \text{vec} \left( \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} z \varphi^\top d\tau \right) + e^{-\beta t} \text{vec} \left( \mathbf{Q}_0 \hat{\Theta}_0 \right) \right] + \mathbf{P} \text{vec} (z \varphi^\top), \\ &= -\mathbf{P} (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\vartheta} + \mathbf{P} \text{vec} (z \varphi^\top). \end{aligned}$$

Considere ahora la función cuadrática  $V(\tilde{\vartheta}) = \frac{1}{2} \tilde{\vartheta}^\top \tilde{\vartheta}$ ; dado que  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$  y se trata de un sistema invariante en el tiempo, procede el análisis de sus trayectorias como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\vartheta}) &= -\tilde{\vartheta}^\top \mathbf{P} \left[ \text{vec}(z \varphi^\top) - (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} \right], \\ &= -\tilde{\vartheta}^\top \mathbf{P} \left[ \text{vec}(\Theta \varphi \varphi^\top + \xi \varphi^\top) - (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} \right], \\ &= -\tilde{\vartheta}^\top \mathbf{P} \left[ (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \vartheta + \text{vec}(\xi \varphi^\top) - (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} \right], \\ &= -\tilde{\vartheta}^\top \mathbf{P} (\varphi \varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} - \tilde{\vartheta}^\top \mathbf{P} (\varphi \otimes \mathbf{I}_n) \xi, \end{aligned}$$

donde puede apreciarse cierto grado de robustez del estimador respecto de los efectos de perturbación; considere el desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\vartheta}) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \tilde{\vartheta}^\top (\varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n)^\top (\varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} - \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \tilde{\vartheta}^\top (\varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \xi, \\ &\leq -\left\| \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} (\varphi^\top \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\vartheta} + \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{2\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \xi \right\|^2 - \frac{\lambda_{\max}^2(\mathbf{P})}{4\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

por lo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\vartheta} \rightarrow 0$  aún en presencia de perturbaciones externas en el espacio del estado. ■

La siguiente proposición muestra un estimador paramétrico basado en el modelo no lineal acoplado del robot.

**Proposición 3.7 (Mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido basado en el modelo no lineal).** *Considere la representación paramétrica lineal (2.32) descrita en el Lema 2.9. La solución del estimador paramétrico:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\vartheta}}_t &= \mathbf{P} \eta^\top(\cdot) \left[ \mathbf{W}^\top V_a - \eta(\cdot) \hat{\vartheta} \right], \quad \hat{\vartheta}(0) = \hat{\vartheta}_0, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \beta \mathbf{P} - \mathbf{P} \eta^\top(\cdot) \eta(\cdot) \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

permite reconstruir el vector de parámetros  $\vartheta \in \mathbb{R}^p$ , con  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , y minimizando el funcional de costo:

$$J(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \left( \mathbf{W}^\top V_a(\tau) - \eta_\tau(\cdot) \hat{\vartheta}_\tau \right)^2 d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \left( \hat{\vartheta}_t - \hat{\vartheta}_0 \right)^\top \mathbf{Q}_0 \left( \hat{\vartheta}_t - \hat{\vartheta}_0 \right). \quad (3.44)$$

Aquí  $0 < \beta \in \mathbb{R}$  denota el factor de olvido.

*Demostración.* El desarrollo se conduce como en la proposición previa. ■

## 3.8. Resultados Experimentales

En esta sección, se presentan los resultados experimentales para dos sistemas electro-mecánicos subactuados. En primer lugar, el *péndulo de Furuta*, impulsado por un *motor de CD de imán permanente (PMDC)* en la primera articulación. En este caso se consideran diferentes escenarios. Por un lado, se considera que ambas posiciones están disponibles para ser medidas. Se observan las velocidades correspondientes y la corriente de armadura del actuador. Por otro lado, se considera el escenario donde solo está disponible la posición del brazo. Por tanto, se estiman cuatro señales. La corriente de la armadura, la posición del péndulo y ambas velocidades. En este caso, los resultados también se presentan en el caso de que la señal disponible se corrompa intencionalmente, utilizando el tercer observador diseñado en este capítulo. En una segunda parte, se presentan los resultados del *péndulo triple*, impulsado por un motor *PMDC* único en la primera articulación. Para este caso, los resultados se presentan bajo el escenario de que se miden las posiciones de los enlaces. Se observan todas las velocidades y la corriente del inducido del actuador.

### 3.8.1. El Sistema Mecatrónico Péndulo de Furuta

#### Resultados de observación

Considere el sistema mecatrónico *Péndulo Rotativo* o *Péndulo de Furuta* descrito en el apéndice **B.2**. Las posiciones angulares y la corriente de la armadura se obtienen utilizando el sistema de adquisición de datos. Sin embargo, se consideran diferentes escenarios. Primero, la posición angular del brazo y el péndulo están disponibles en la ecuación de salida. Por lo tanto, se reconstruyen la corriente de la armadura y las velocidades angulares. En un segundo escenario, se considera que solo la posición del brazo se obtiene directamente del experimento, que es una condición mínima para la observabilidad del sistema linealizado.

La posición del brazo se mide en sentido antihorario desde el eje  $x$ , y la del péndulo se toma desde la posición hacia abajo. Se consideran las incertidumbres y perturbaciones externas dadas por el proceso de adquisición de datos, y cuyos efectos se reducen. Las cotas correspondientes de la dinámica no lineal se encuentran numéricamente, utilizando datos obtenidos experimentalmente. La tabla 3.1 resume estos resultados. Las ganancias se

Parámetro	Valor numérico
Cota del vector de posición	$\delta_q = 5$
Cota del vector de velocidad	$\delta_V = 45$
Cota del vector de corriente	$\delta_i = 10$
Cota de la matriz de Coriolis	$\delta_C = 25$
Cota del vector de fuerzas gravitacionales	$\delta_G = 0.0629$
Cota inferior de la matriz de inercia	$\lambda_m = 0.0092$
Cota del vector de términos exógenos	$\delta_1 = 0.5$

Tabla 3.1: Valores numéricos debido a las propiedades mecánicas.

obtienen usando *Matlab 2015* y *cvx 2.1-toolbox*. Se aplicó el siguiente algoritmo numérico en cada caso:

1. Se elije  $0 < \alpha \leq 1$  y  $0 < \varepsilon \leq 1$ .
2. Resolver el problema de optimización (3.38) numéricamente usando *cvx*.

3. Si existe solución, incrementar  $\alpha$  y decrementar  $\varepsilon$  para mejorar la robustez.
4. Ir al paso 2.
5. La solución es dada una iteración antes de que el paso 2 indique que no hay solución para (3.38).

Esto conduce a las ganancias dadas en la tabla 3.2 En cada gráfica se usa color *azul* para

Orden Completo AEM	Orden Reducido AEM	Orden Completo SM-AEM
$\alpha = 60, \varepsilon = 0.0004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.1822 & -0.0014 \\ 0.0461 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0456 \\ 5.4099 & 0.0406 \\ 0.0410 & 5.4642 \end{bmatrix} \times 10^6$	$\alpha = 60, \varepsilon = 0.0004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2.016 & -0.0127 \\ 59.8339 & 0.3757 \\ 0.3759 & 61.0246 \end{bmatrix}$	$\alpha = 60, \varepsilon = 0.0004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1.9957 & -0.0125 \\ 59.2305 & 0.3757 \\ 0.3722 & 60.4100 \end{bmatrix}$

Tabla 3.2: Ganancias numéricas para los observadores diseñados.

representar los datos provenientes de la medición directa, que son los desplazamientos angulares y la corriente de armadura. También se usa para trazar el comportamiento de las velocidades, cuando se reconstruyen usando derivada sucia . Se usa color *rojo* para trazar las señales obtenidas usando el observador de orden completo basado en AEM , el color *cyan* se usa para los resultados del observador de orden reducido, y el color *morado* para las señales provenientes del observador basado en AEM y SMC. Se observan los siguientes resultados:

- La figura 3.1 muestra la reconstrucción de la corriente de armadura. Observe como el observador de orden completo basado en **AEM** converge más rápido que las técnicas restantes, en aproximadamente  $40ms$ , contra  $65ms$ . EL comportamiento en estado estacionario de todas es muy similar.
- La figura 3.2 muestra la reconstrucción de la posición angular del brazo. En este caso no se muestra el resultado del observador de orden reducido, ya que la señal es medible y no se reconstruye. Note que el observador de orden completo basado en AEM ofrece mejores resultados, pues converge en aproximadamente  $0.5ms$ , mientras que la técnica SM-AEM lo hace en  $6ms$ .
- Se obtienen resultados similares para la reconstrucción de la posición angular del péndulo en la figura 3.3. El observador AEM converge en  $0.5ms$  mientras que SM-AEM lo hace en  $9ms$ .

El robot péndulo de Furuta										
	1er Experimento						2o Experimento		3er Experimento	
	$t_r[ms]$			$PO/PU[\%]$			$t_r[ms]$	$PO/PU[\%]$	$t_r[ms]$	$PO/PU[\%]$
$I_a(t)$	40	70	70	0.83	0.50	0.30	600	3	200	0.13
$q_1(t)$	0.5	—	6	0.2	—	0.2	20	1	15	0.3
$q_2(t)$	0.5	—	8	0.30	—	0.30	800	7.5	40	3
$\dot{q}_1(t)$	40	70	70	0.27	0.12	0.10	400	36	300	12
$\dot{q}_2(t)$	40	65	65	0.35	0.17.5	0.14	500	15	10	8.3
	<b>P3.1</b>	<b>P3.2</b>	<b>P3.3</b>	<b>P3.1</b>	<b>P3.2</b>	<b>P3.3</b>	<b>P3.3</b>	<b>P3.3</b>	<b>P3.3</b>	<b>P3.3</b>

Tabla 3.3: Resultados numéricos del robot péndulo de Furuta.

- La figura 3.4 muestra la velocidad angular del brazo. Aquí se toma como referencia la estimación de la velocidad utilizando la derivada sucia. Note que el observador de orden completo converge más rápido que el resto con  $40ms$ , contra aproximadamente  $70ms$  del observador de orden reducido y el basado en SM-AEM. Sin embargo, esta tiene un sobre impulso más grande, de aproximadamente el doble, respecto del observador de orden reducido, que en este sentido se comporta de modo similar al basado en SM-AEM.
- La figura 3.5 muestra la estimación de la velocidad del péndulo, con un comportamiento similar al de la velocidad del brazo.

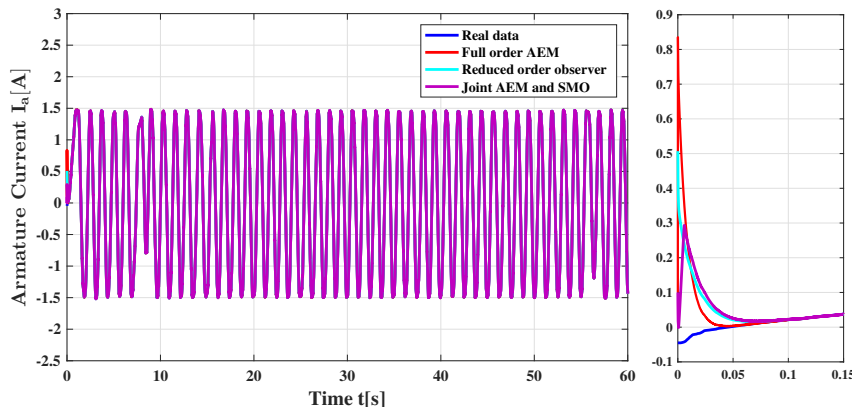


Figura 3.1: El Péndulo de Furuta: estimación de la corriente de armadura.

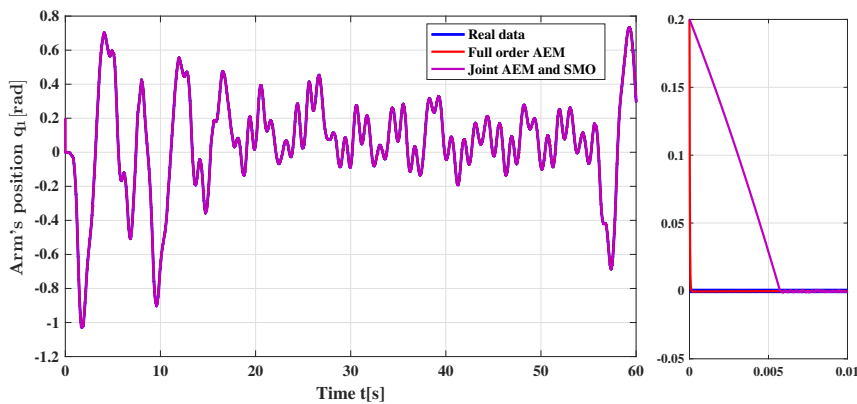


Figura 3.2: El Péndulo de Furuta: estimación de la posición angular del brazo.

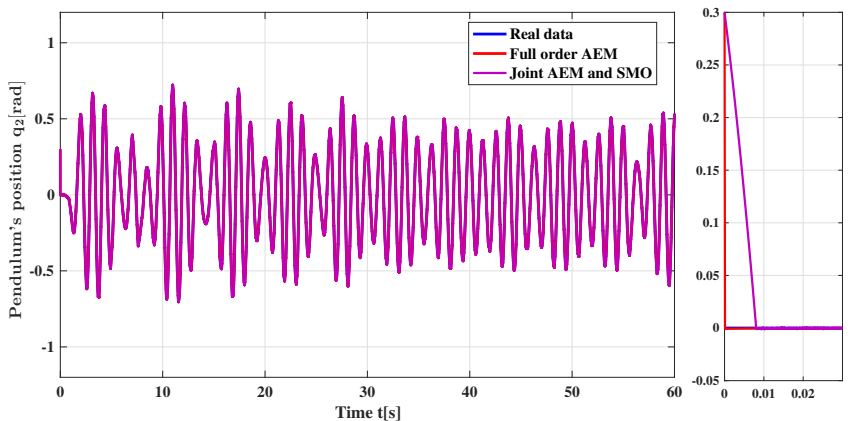


Figura 3.3: El Péndulo de Furuta: reconstrucción de la posición angular del péndulo.

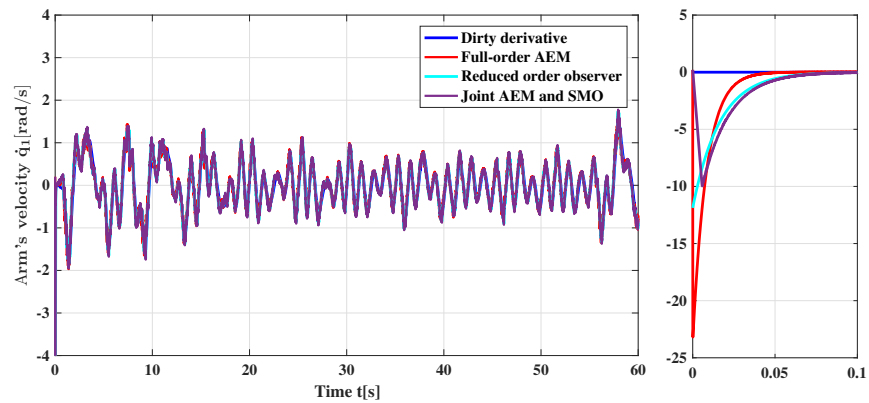


Figura 3.4: El Péndulo de Furuta: estimación de la velocidad del brazo.

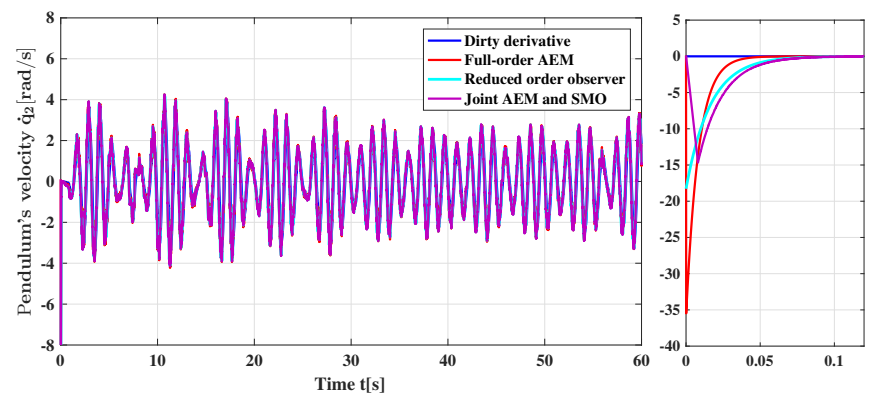


Figura 3.5: El Péndulo de Furuta: estimación de la velocidad del péndulo.

Se reporta un segundo experimento para este sistema cuando se conoce unicamente la posición del péndulo. Por tanto se estima la corriente de armadura, la posición angular del péndulo y ambas velocidades, usando el observador de orden completo basado en SM-AEM.

- La figura 3.6 muestra la reconstrucción de la posición angular del brazo y la estimación de su velocidad. La parte (a) muestra como se reconstruye la posición satisfactoriamente. La parte (b) muestra la señal estimada de su velocidad.
- La figura 3.7 muestra la estimación de la posición del péndulo en (a) y su velocidad en (b). Note como la estimación de la posición mantiene un buen comportamiento. Sin embargo, en algunos instantes (alrededor de los 3s, 10s, 15s, y 27s principalmente), se observan errores muy grandes, de aproximadamente 20 grados.
- En la figura 3.8 se muestra la estimación de la corriente de armadura. Se aprecia como el estimado converge en aproximadamente 0.6s a la señal real, cuando el error en estado estacionario se mantiene pequeño. La segunda parte muestra el comportamiento de la variable de deslizamiento. Note que la variable converge en 15ms aproximadamente.

Finalmente se repite el experimento anterior, introduciendo un pequeña perturbación en el péndulo, en el intervalo  $t \in [40, 45]$  segundos.

- La figura 3.9-(a) muestra la evolución de la variable deslizante. Se muestra una vista ampliada del comportamiento transitorio, al inicio del experimento y cuando se presentan las perturbaciones. Al inicio del experimento se presenta un tiempo de convergencia de 15ms. Cuando se introducen las perturbaciones en el instante 40s, le toma 15ms a la variable deslizante reincorporarse a la superficie de deslizamiento. Por otro lado, la figura 3.9-(b) muestra la estimación de la corriente de armadura, con un tiempo de convergencia de unos 200ms, mientras que el tiempo de recuperación después de

la perturbación es de  $80ms$ . El error en estado estacionario es pequeño, mostrando un comportamiento aceptable.

- La figura 3.10 la reconstrucción de la posición del brazo **(a)** y la estimación de su velocidad angular **(b)**. En el primero se nota que el tiempo de convergencia es aproximadamente de  $12ms$ , mientras que el tiempo de recuperación es de unos  $0.7s$ . La estimación de la velocidad tiene un comportamiento similar..
- Finalmente, la figure 3.11 muestra la estimación de la posición del péndulo y su velocidad. Note como la posición estimada alcanza una zona de estabilidad alrededor del valor real en  $0.27s$  aproximadamente. Sin embargo se puede apreciar un error considerable entre los  $10s$  y  $20s$ . Además, cuando se introduce la perturbación a los  $40s$  existe un sobre impulso de aproximadamente  $63$  grados. Por lo tanto, la condición de que solo esté disponible la posición del brazo es peligrosa bajo la acción de este observador. La parte **(b)** muestra el comportamiento de la estimación de velocidad.

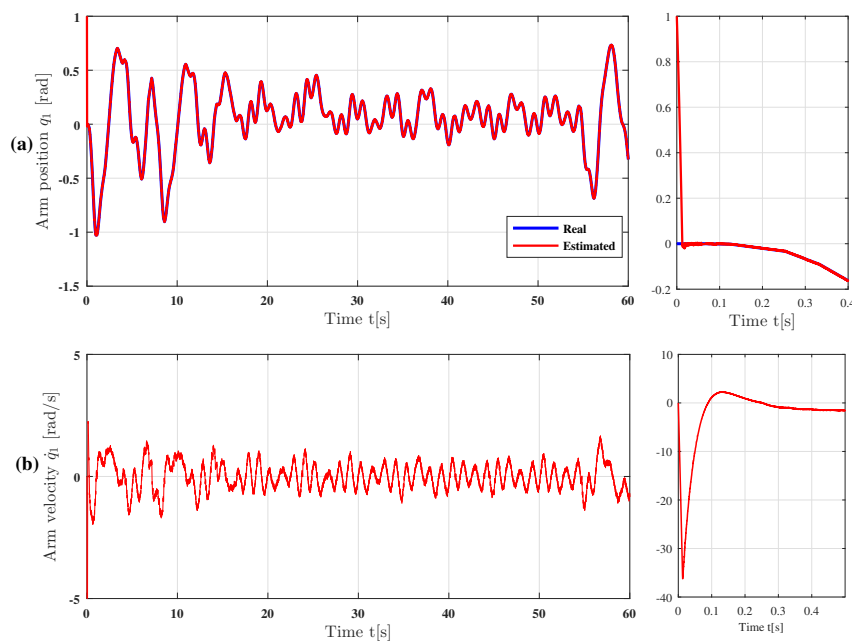


Figura 3.6: Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) reconstrucción de la posición del brazo, (b) estimación de la velocidad del brazo.

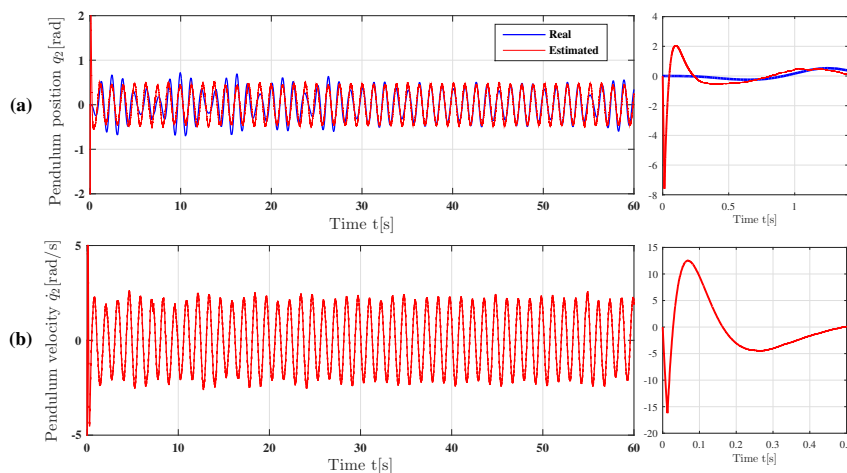


Figura 3.7: Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) estimación de la posición del péndulo, (b) estimación de velocidad del péndulo.



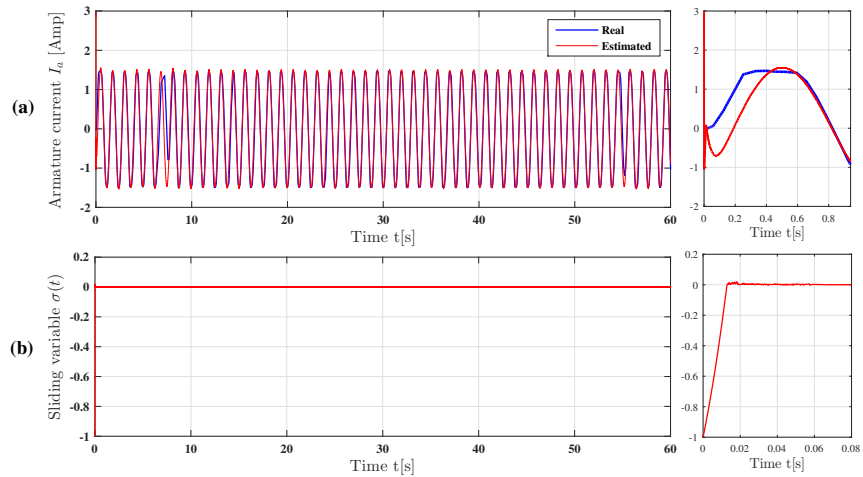


Figura 3.8: Resultados experimentales con modos deslizantes convencionales: (a) estimación de la corriente de armadura, (b) evolución de la variable deslizante.

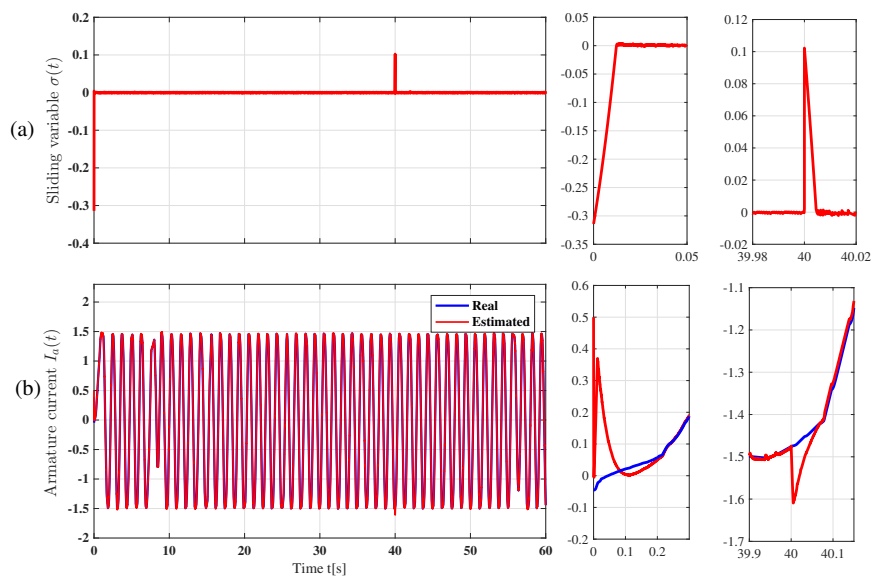


Figura 3.9: Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) variable deslizante, (b) estimación de la corriente de armadura.

### Resultados de estimación paramétrica

Para la estimación de parámetros, considere primero el caso en el que se dispone por completo del estado del sistema para su medición; además es posible construir su derivada temporal, usando un *diferenciador de Levant*. En una primera instancia, considere los resultados numéricos descritos a continuación:

#### 3.8.2. El sistema TLIP impulsado por un motor de CD

El *Triple Péndulo Invertido (TLIP)* es un sistema subactuado desafiante desde el punto de vista de control, puesto que cuenta con dos articulaciones pasivas por una sola directamente actuada. Por este motivo, los enfoques tradicionales para conseguir su estabilización alrededor de un punto de equilibrio inestable basadas en la aproximación lineal del modelo, o una retroalimentación linealizante son ineficaces en situaciones prácticas, donde se presentan múltiples efectos adversos a la vez. En tales condiciones, la estabilización de esta clase de sistemas se convierte en un problema difícil de resolver.

En este experimento de estimación del estado se consideran conocidas las variables de posición de los tres eslabones; se calcula entonces las tres velocidades articulares y la corriente de armadura del motor de CD. Vea las figuras 3.18-3.24. Las ganancias del observador se ob-



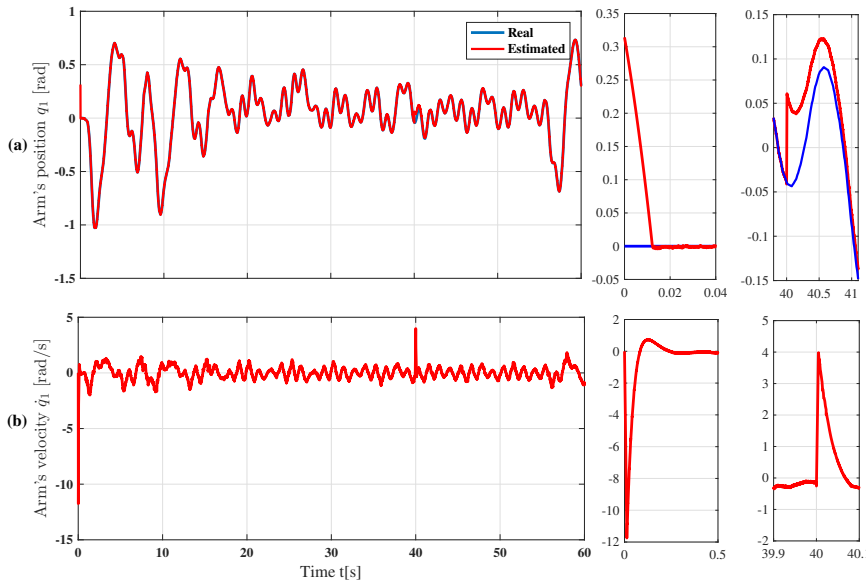


Figura 3.10: Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) estimación de la posición del brazo, (b) estimación de la velocidad del brazo.

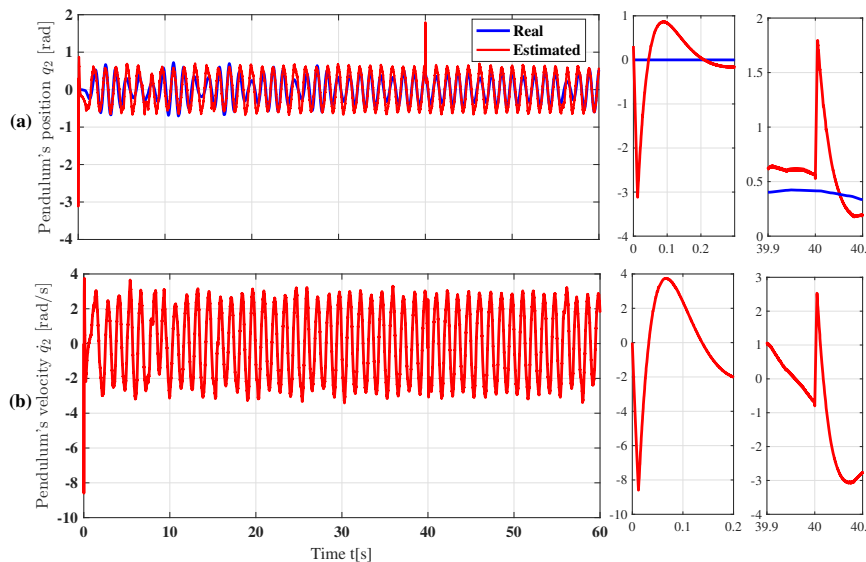


Figura 3.11: Resultados experimentales con efectos inciertos: (a) estimación de la posición del péndulo, (b) estimación de la velocidad del péndulo.

tienen usando *Matlab 2015* y *cvx 2.1-toolbox*, igual que en el último ejemplo. Los parámetros utilizados se muestran en la tabla 3.4. Aquí se aplica el problema de optimización restringida de forma similar al ejemplo previo, obteniéndose las ganancias del observador de la tabla 3.2

Orden completo AEM	Orden reducido	Orden completo SMO-AEM
$\alpha = 45, \varepsilon = 0.004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -35.244 & -0.443 & -0.337 \\ 12.64 & -0.04 & 0.037 \\ -0.04 & 12.72 & -0.008 \\ 0.037 & -0.008 & 12.84 \\ 1109.5 & 22.06 & 4.55 \\ 21.87 & 1147.5 & -0.71 \\ 4.6 & -0.77 & 1158.5 \end{bmatrix} \times 10^3$	$\alpha = 45, \varepsilon = 0.004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.00 & 0.034 & 0.0017 \\ 58.94 & 1.004 & 0.05 \\ 1.00 & 60.14 & 0.001 \\ 0.05 & 0.001 & 60.125 \end{bmatrix}$	$\alpha = 65, \varepsilon = 0.004,$ $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2.15 & 0.0034 & 0.0017 \\ 63.72 & 1.00 & 0.05 \\ 1.02 & 65.07 & 0.0008 \\ 0.05 & 0.0008 & 65.06 \end{bmatrix}$

Tabla 3.4: Resultados numéricos para el robot TLIPs.

Pueden apreciarse los siguientes detalles:

- La figura 3.18 muestra la estimación de la corriente de armadura del motor de CD. Note como en los tres casos la estimación parece converger al mismo tiempo en aproxi-

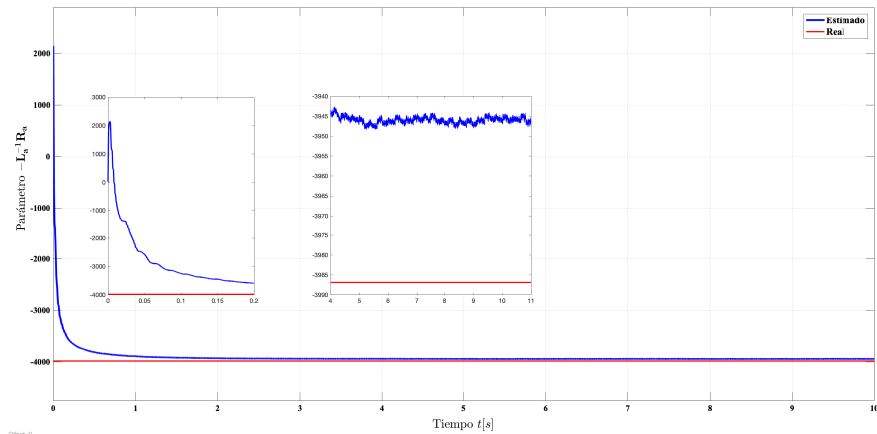


Figura 3.12: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetro  $-L_a^{-1}R_a$  de la aproximación cuasi lineal.

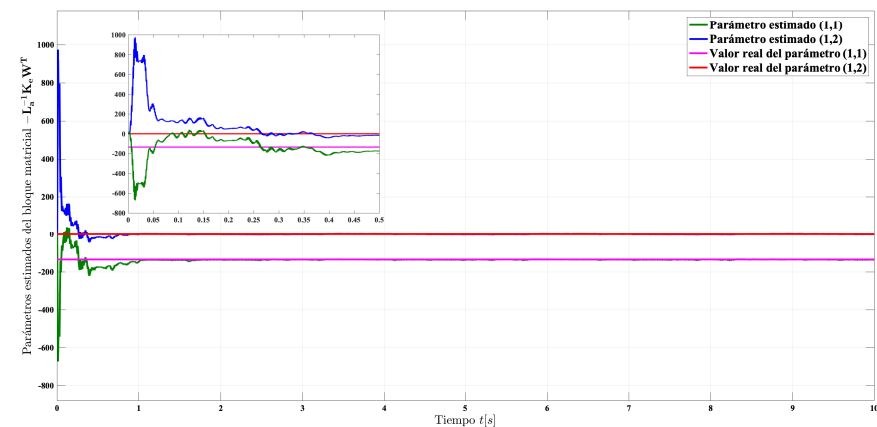


Figura 3.13: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros  $-L_a^{-1}K_eW^T$  de la aproximación cuasi lineal.

madamente  $60ms$ . Sin embargo note que el comportamiento de la señal estimada por el observador de orden completo basado en **AEM-SM** es más suave.

- Las figuras 3.19-3.21 muestran la reconstrucción de las señales de posición de ambos eslabones con los observadores de orden completo. Note que para estas posiciones angulares, el observador basado en **AEM** converge en unos  $40\mu s$  en cada caso, mientras que el observador basado en **AEM-SM** lo hace en  $3.8ms$ ,  $5.2ms$  y  $3.7s$  respectivamente.
- Las figuras 3.22-3.24 muestran la estimación de las velocidades angulares. El primer diseño converge un poco más rápido en todos los casos. Sin embargo, el sobre impulso es aproximadamente  $50\%$  más grande que en los dos diseños restantes. El comportamiento en estado estacionario es muy similar en todos los casos y el error de estimación es pequeño.

### 3.9. El Péndulo Doble Sobre el Carro con Articulación Restringida

En esta sección se muestran los resultados de la estimación de los observadores diseñados en la plataforma *Péndulo Doble sobre el Carro* modificada, y mostrada en la figura 3.25. Sus parámetros numéricos se muestran en la tabla 3.5. Los resultados se obtienen fuera de línea y se comparan con un observador de orden completo de la misma naturaleza. La tabla 3.6 muestra las ganancias obtenidas y los parámetros de ajuste en cada caso. El comportamiento se muestra en las figuras 3.20-3.27. En todos los casos, las señales de color rojo muestran

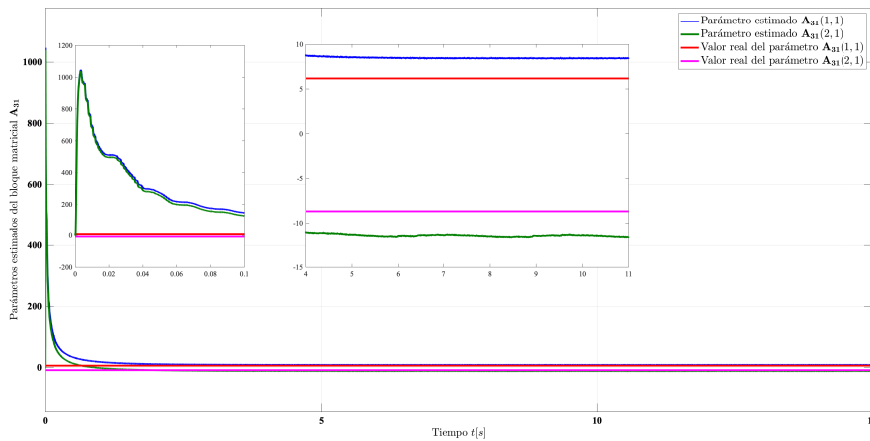


Figura 3.14: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque  $\mathbf{A}_{31}$  de la aproximación cuasi lineal.

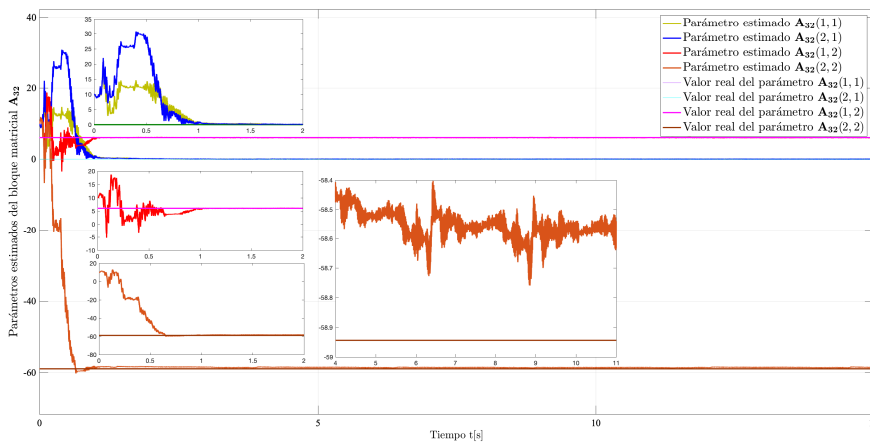


Figura 3.15: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque  $\mathbf{A}_{32}$  de la aproximación cuasi lineal.

el comportamiento del observador de orden completo basado en **AEM**, el azul se usa para el observador de orden reducido basado en la representación cuasi-lineal y el color magenta muestra los resultados del observador de orden reducido basado en el modelo no lineal. Las señales medidas directamente se muestran en color amarillo. Las velocidades son estimadas también usando la derivada sucia y se usan como referencia para comparar los resultados de los observadores. También se presentan en color amarillo. Se ha desarrollado un estudio comparativo respecto de las señales de error; se comparan las señales referentes a las velocidades provenientes de la derivada sucia y los observadores. Los resultados se resumen en la tabla 3.7, donde se exhibe la comparativa del desempeño en términos de algunos parámetros de respuesta transitoria y en estado estacionario:

- $\|e_{ss}\|$  es la magnitud de el error en estado estacionario pico a pico, cuyas unidades se dan en  $[\frac{m}{s}]$  o  $[\frac{rad}{s}]$ ;
- $t_s$  es el tiempo de establecimiento en segundos;
- $M_p$  es el máximo sobreimpulso/mínimo subimpulso, medido con respecto del error en estado estacionario máximo.

La figura 3.26 ilustra los resultados del estudio comparativo. La línea roja en un nivel de 100 % revela los resultados del **FOO**. Las barras de color azul corresponden al observador de orden reducido basado en la representación cuasi-lineal, mientras que las barras en magenta muestran los resultados del observador de orden reducido basado en el modelo no lineal. Se formulan las siguientes conclusiones respecto al observador basado en el modelo no lineal:

- se reduce drásticamente el radio de la banda de error en estado estacionario;

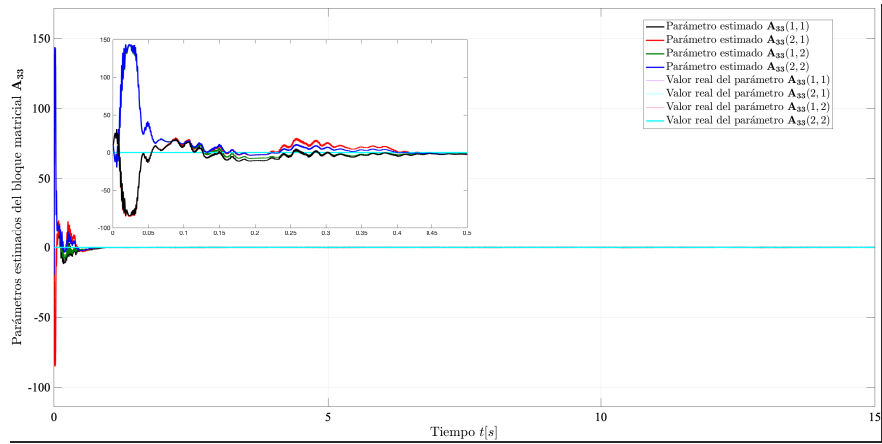


Figura 3.16: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetros del bloque  $A_{33}$  de la aproximación cuasi lineal.

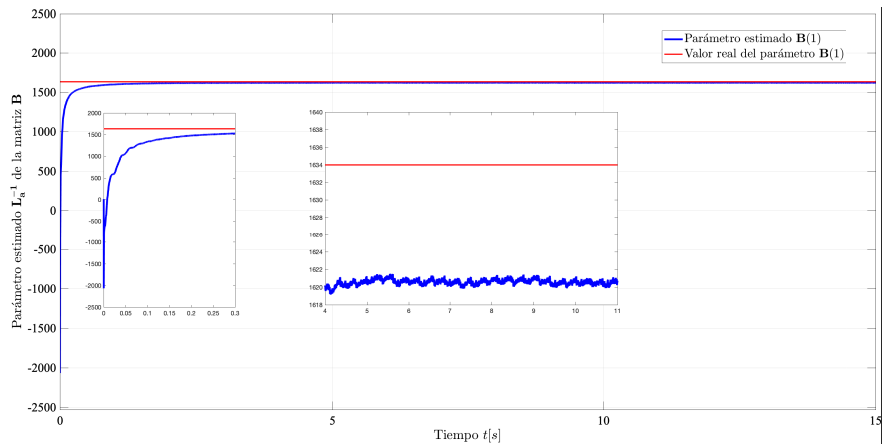


Figura 3.17: Respuesta de la estimación paramétrica: parámetro  $L_a^{-1}$  de la matriz  $B$  de la aproximación cuasi lineal.

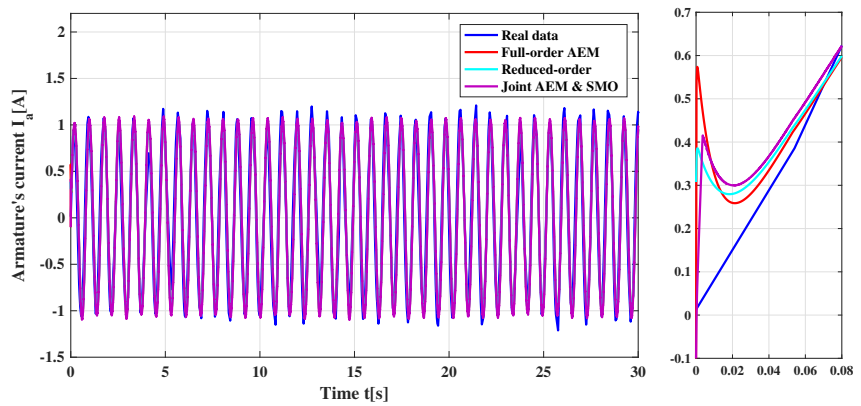


Figura 3.18: Corriente de armadura.

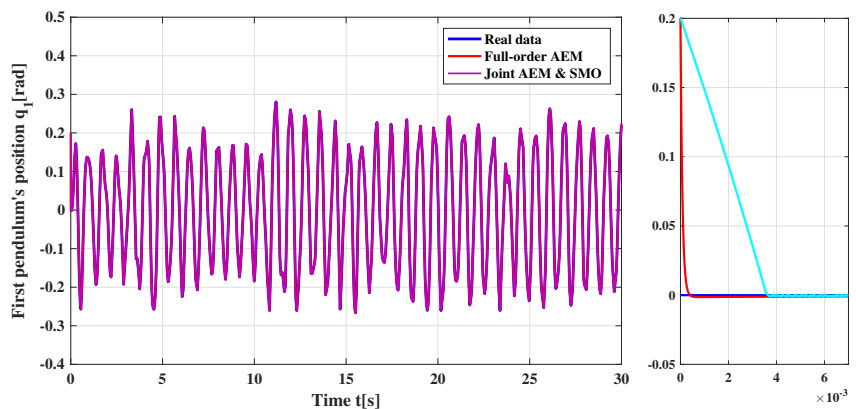


Figura 3.19: Posición angular del primer péndulo.

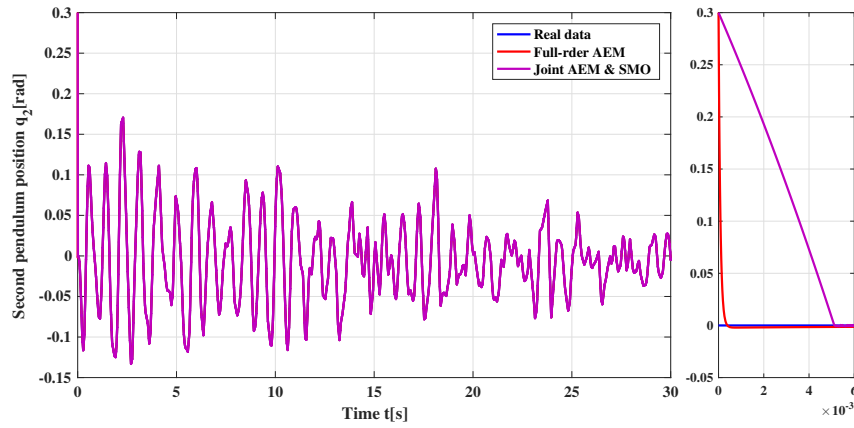


Figura 3.20: Posición angular del segundo péndulo.

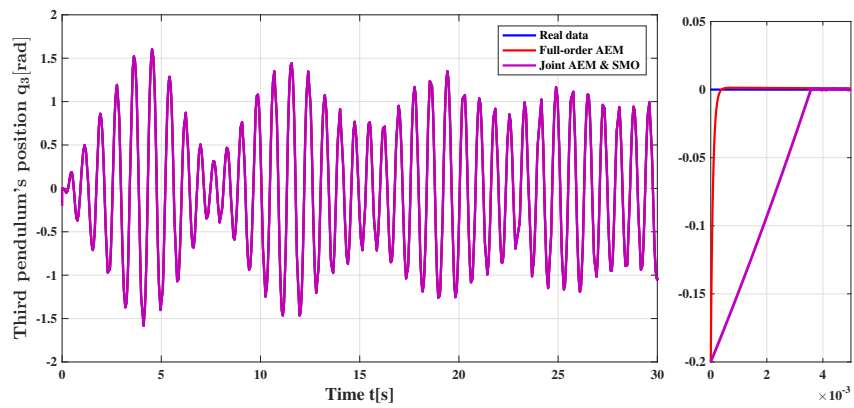


Figura 3.21: Posición angular del tercer péndulo.

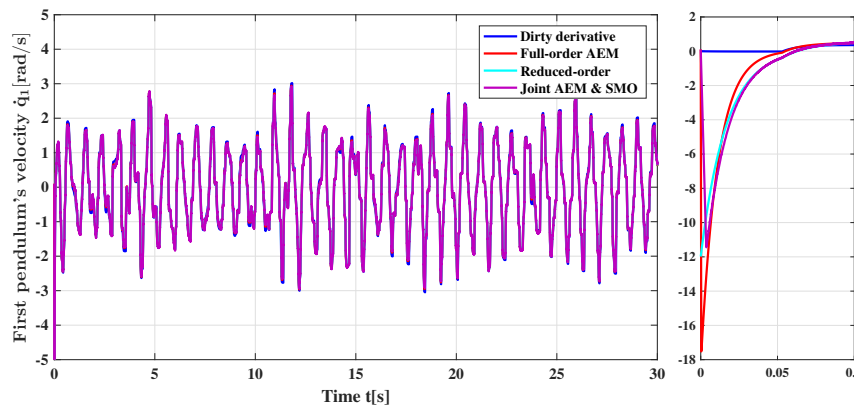


Figura 3.22: Velocidad del primer péndulo.

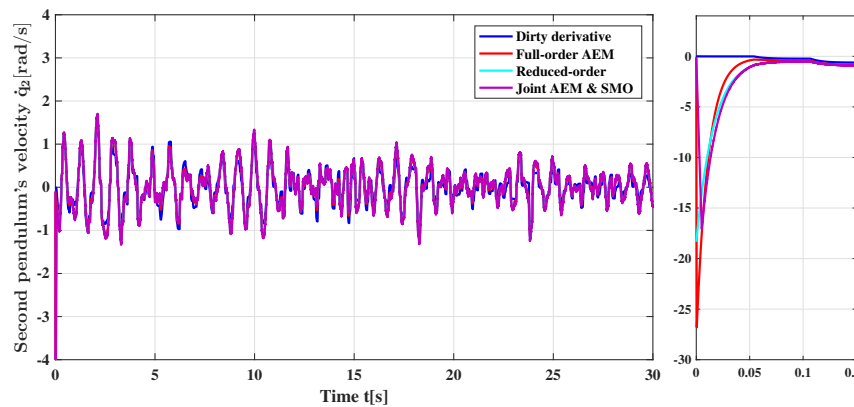


Figura 3.23: Velocidad del segundo péndulo.

- se reduce de forma significativa el tiempo de sostenimiento en la estimación de la velocidad del carro y la del primer péndulo, mientras que para el segundo péndulo se

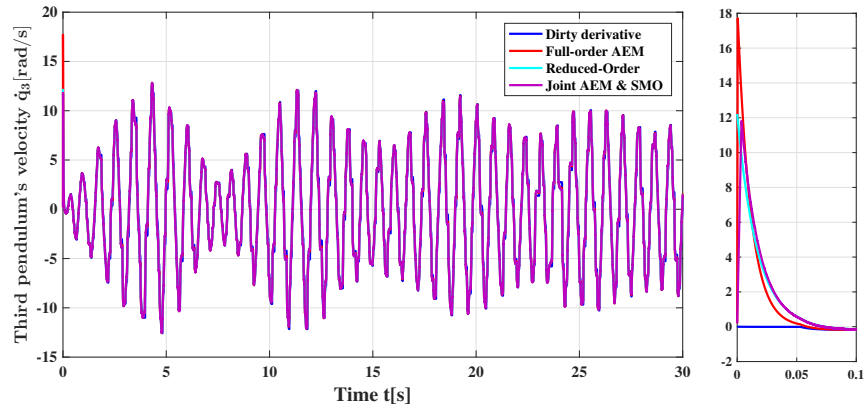


Figura 3.24: Velocidad del tercer péndulo.

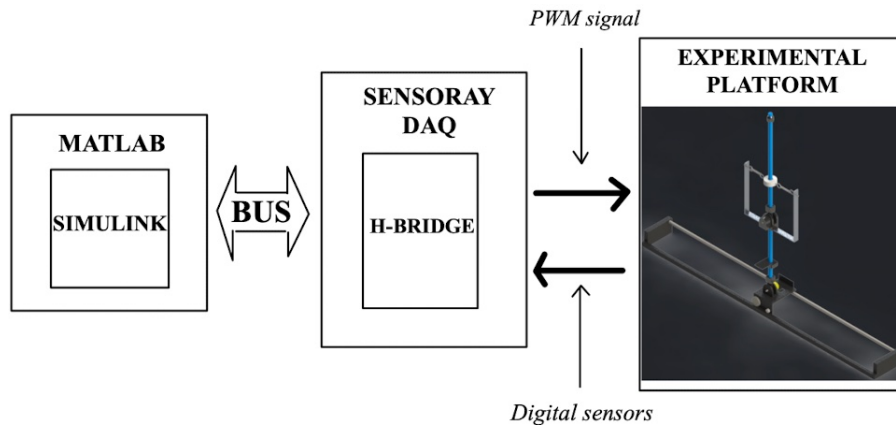


Figura 3.25: Esquema de la plataforma experimental

mantiene casi en el mismo valor;

- se reduce el sobreimpulso en la estimación de la velocidad del carro, aunque se incrementa en los otros casos. Para el primer péndulo es el doble, mientras que para el segundo es aproximadamente un 9.7% mayor. Cabe resaltar sin embargo que en vista de que el valor de  $M_p$  se determina respecto del radio de la banda de error en estado estacionario, los efectos adversos pueden considerarse como no peligrosos. Por ejemplo, para el caso del primer péndulo, el observador de orden completo muestra un sobreimpulso de 11.8% ( $0.04755 \frac{rad}{s}$ ), mientras que con el **NLROO** es de 24.7% ( $0.0215 \frac{rad}{s}$ ).

### 3.10. Conclusiones

En este capítulo se han diseñado diferentes técnicas para la estimación de las variables de estado desconocidas para diferentes casos, usando técnicas robustas en presencia de efectos

Tabla 3.5: Parámetros numéricos de la plataforma experimental.

$M = 0.8 [kg]$	$l_2 = 0.2 [m]$	$l_p = 0.05 [m]$
$m_1 = 0.2 [kg]$	$l_{c1} = 0.2 [m]$	$l_0 = 0.1 [m]$
$m_2 = 0.1 [kg]$	$l_{c2} = 0.1 [m]$	$k_1 = 100 [N/m]$
$m_{j1} = 0.2 [kg]$	$l_s = 0.05 [m]$	$k_2 = 100 [N/m]$
$l_1 = 0.2 [m]$	$l_a = 0.05 [m]$	

Tabla 3.6: Ganancias y parámetros de ajuste de los observadores.

Orden completo	Orden reducido (cuasi-lineal)	Orden reducido (No lineal)
$\alpha = 1,$ $\varepsilon = 1 \times 10^{-6},$ $\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -0.0063 & -0.0334 & -0.0082 \\ 0.0167 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0167 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0167 \\ 0.0128 & 0.0679 & 0.0167 \\ 0.0674 & 3.5228 & 0.0779 \\ 0.0166 & 0.0779 & 3.2252 \end{bmatrix} \times 10^9,$	$\alpha = 1,$ $\varepsilon = 10 \times 10^{-9}$ $\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0.5689 & 1.5262 & 0.3754 \\ 1.1598 & 3.0976 & 0.7618 \\ 4.6673 & 47.5633 & 4.8547 \\ 1.1479 & 4.8547 & 29.0181 \end{bmatrix},$	$\alpha = 10,$ $\varepsilon = 100 \times 10^{-15}$ $\mu = 100 \times 10^{-12}$ $\mathbf{P}_{11} = 0.012,$ $\mathbf{L}_1 = [-42.6667, 0, 0]$ $\mathbf{L}_2 = 101.8253\mathbf{I}_3.$

Tabla 3.7: Resultados experimentales.

Técnica	Parámetros								
	$\ e_{ss}\  [\cdot/s]$			$t_s [s]$			$M_p [\%]$		
FOO	0.364	0.403	0.833	4.40	1.654	1.514	62.58	11.8	22.88
QLROO	0.406	0.437	2.57	4.63	5.07	3.4	65.54	56.5	23.57
NROO	0.013	0.087	0.267	0.257	1.187	1.520	43.1	24.7	25.1
Señales	$\dot{q}_1 - \hat{q}_1$	$\dot{q}_2 - \hat{q}_2$	$\dot{q}_3 - \hat{q}_3$	$\dot{q}_1 - \hat{q}_1$	$\dot{q}_2 - \hat{q}_2$	$\dot{q}_3 - \hat{q}_3$	$\dot{q}_1 - \hat{q}_1$	$\dot{q}_2 - \hat{q}_2$	$\dot{q}_3 - \hat{q}_3$

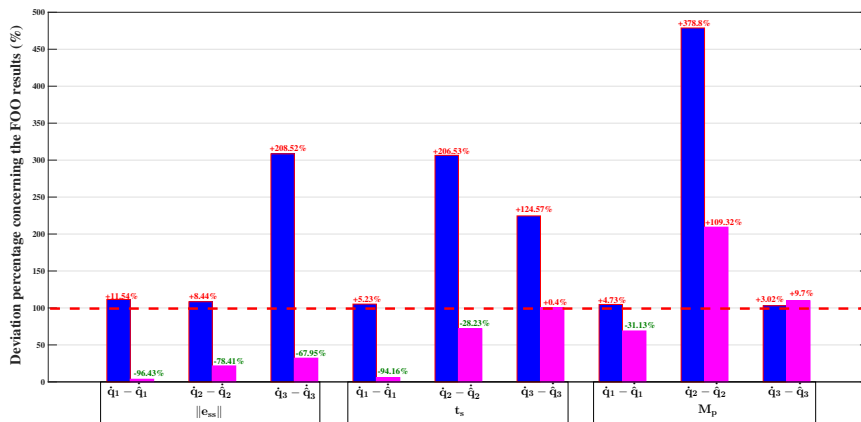


Figura 3.26: Estudio comparativo sobre el desempeño de los observadores propuestos.

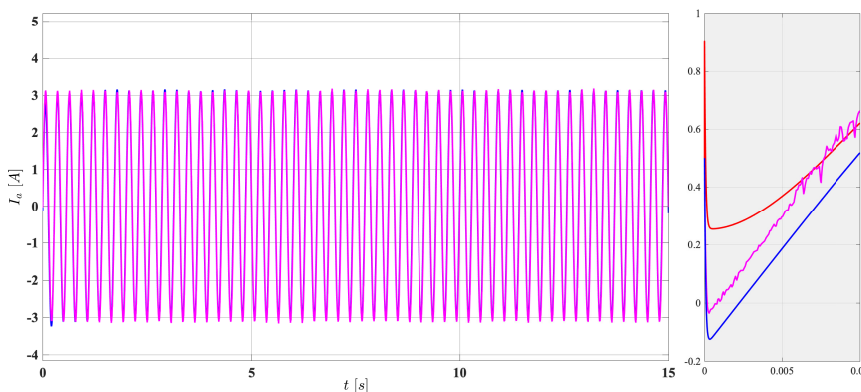


Figura 3.27: Reconstrucción de la corriente de armadura.

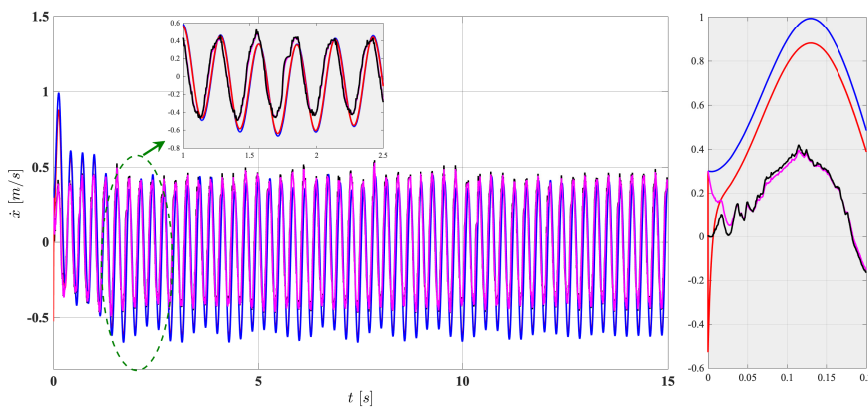


Figura 3.28: Reconstrucción de la velocidad del carro.

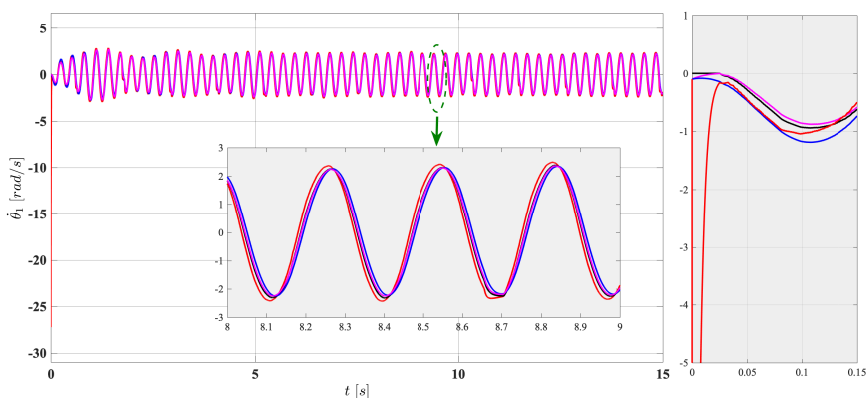


Figura 3.29: Reconstrucción de la velocidad del primer péndulo.

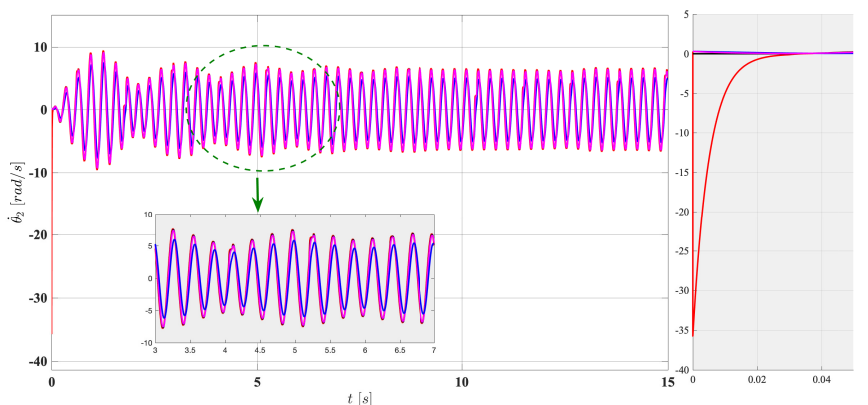


Figura 3.30: Reconstrucción de velocidad del segundo péndulo.

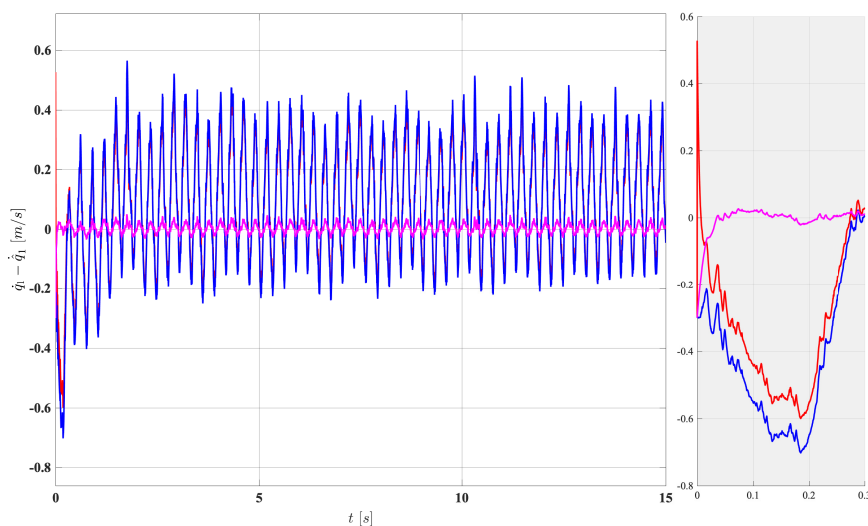


Figura 3.31: Error de estimación de la velocidad del carro.



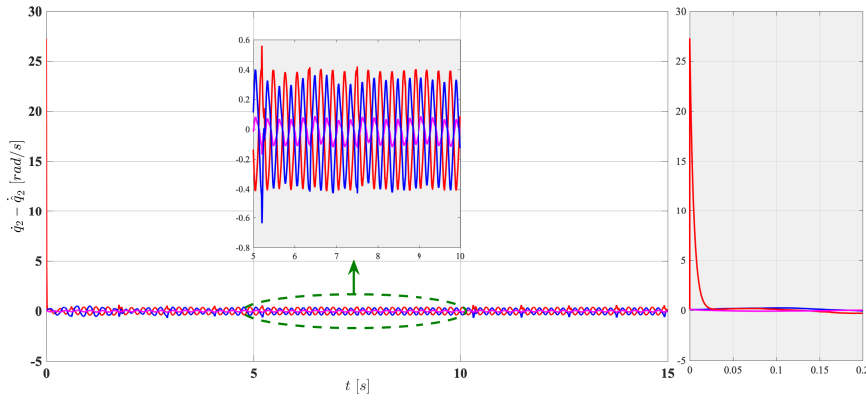


Figura 3.32: Error de estimación de la velocidad del primer péndulo.

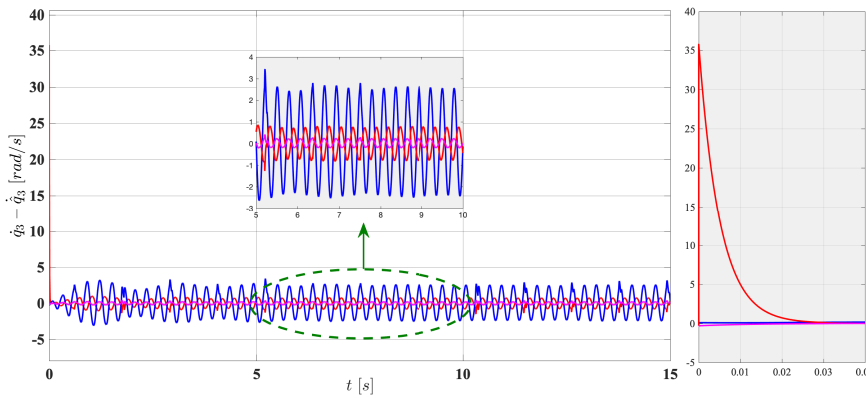


Figura 3.33: Error de estimación de la velocidad del segundo péndulo.

de perturbaciones e incertidumbres de diferente naturaleza sobre la ecuación de evolución del estado. En este estudio se ha usado un observador tradicional en la forma de Luenberger, sintonizado con el método de Elipsoide Atractivo, el cual posee la estructura más simple, aunque tiene algunas desventajas importantes, entre las cuales destaca el hecho de que deben también reconstruirse las señales medibles. Por este motivo se diseñan observadores de orden reducido basados en la forma cuasi-lineal y directamente desde el modelo no lineal. Se muestra que este último muestra mejores características en la estimación de las señales desconocidas.



# Capítulo 4

## Diseño de Control

*“To raise new questions, new possibilities, to regard old problems from a new angle,  
requires creative imagination and marks real advance in science.”*

— ALBERT EINSTEIN.

### 4.1. Introducción

El estudio de control de los robots subactuados es un tema particularmente importante en el presente y futuro de la ingeniería aplicada en situaciones reales. Tal como se aborda en la *Sección 1.1*, el desarrollo actual en el campo de la robótica se concentra en gran medida en las aplicaciones de cooperatividad y movilidad. Los sistemas cooperativos de robots han requerido de inducir flexibilidad y elasticidad en sus eslabones para mejorar las condiciones de seguridad de los *agentes* ante el latente riesgo de colisión; en las aplicaciones relacionadas con la movilidad aparecen inherentemente sistemas de robótica móvil. Ambas aplicaciones conducen al estudio de robots subactuados; los sistemas pendulares son una clase de sistemas subactuados de bajo orden diseñados para generar experiencia en el diseño de algoritmos para su control que posteriormente se aplican a sistemas más complejos con las consideraciones apropiadas. En el capítulo previo se trató el problema de estimación del estado para esta clase de robots, donde se ha dejado claro la motivación para poner atención particular en esta tarea, además de la importancia por resolverse apropiadamente mostrando una mirada hacia las complicaciones en el control. En este sentido, el caso particular de control de robots de sistemas subactuados presenta diferentes circunstancias para tomar en cuenta: (a) poseen restricciones no holonómicas de aceleración, lo cual impide desarrollar movimientos controlados en cualesquiera dirección en un momento dado; (b) la propiedad fundamental de controlabilidad o estabilizabilidad se cumple únicamente en algunas regiones del espacio del estado, y conforme se incrementa el orden del sistema y se viola la propiedad de *acoplabilidad inercial*, la región de controlabilidad o estabilizabilidad se reduce considerablemente, por lo que la aproximación lineal resulta insuficientemente robusta para estabilizarlo; (c) poseen un grado relativo no estricto y resultan en sistemas de fase no mínima en su gran mayoría, por lo cual es imposible compensar la dinámica no lineal. Además de estas propiedades desafiantes bien reconocidas, en un ambiente no controlado de experimentación en tiempo real suceden fenómenos inciertos que complican el procedimiento de control, perturbaciones externas, modificaciones en los parámetros de la dinámica, etc. Las propiedades y situaciones previamente descritas sugieren la necesidad por el diseño de estrategias de control no lineales para la estabilización de los robots subactuados, que mejoren las propiedades de la aproximación lineal y que respondan a la latencia de incertidumbres y perturbaciones. Los algoritmos de

control robusto permiten rechazar los efectos de perturbación o reducir los efectos que estos producen sobre la dinámica a través de una señal de control de alta ganancia que implica un uso excesivo de energía y podría resultar en señales de control complejas de instrumentar en la realidad. Tal como se ha tratado antes, la incorporación del modelo dinámico de los actuadores en el diseño del control relaja considerablemente estos efectos, al actuar como un filtro pasabajos y resultando en señales de control apropiadas. Adicionalmente, los sistemas de control adaptativo ajustan las señales de control robusto a las cualidades del sistema mediante un proceso de identificación paramétrica que reduce la violencia natural de una señal que genera robustez.

#### 4.1.1. Trabajo relacionado

Los sistemas subactuados han sido objeto intensivo de estudio durante las últimas décadas en el campo del control automático debido a que presentan características desafiantes, además de que han encontrado multitud de aplicaciones en la industria, la medicina, tecnología espacial, etc. (vea [35] y [33] para una reseña completa). Un mecanismo subactuado posee más grados de libertad que actuadores independientes ([14], [33], [49], [43]), es decir, algunas coordenadas generalizadas no son impulsadas directamente por un actuador. Esta condición puede surgir por diferentes motivos, tales como la anulación de uno o más actuadores en un sistema completamente actuado por fallas, por la naturaleza dinámica, como es el caso de robots móviles, etc. Además de estas circunstancias, a lo largo de los años se han diseñado robots subactuados de laboratorio que contribuyen a ganar experiencia en sistemas complejos de control. La clase de sistemas experimentales más común son los sistemas tipo péndulo, como el sistema *Pendubot*, el *Acrobot*, el *péndulo de Furuta*, el de *Kapitza*, el *péndulo invertido sobre un carro*, etc.; en las referencias [14] y [49] clásicas de sistemas subactuados encontrará ejemplos adicionales. El *Péndulo Invertido Triple* por su parte ha sido ampliamente utilizado para demostrar teorías de control automático, tal como en [12] donde se presenta un controlador estabilizante por retroalimentación robusta del estado, y [13] donde se hace uso de un control óptimo de horizonte infinito. Sin embargo, en la mayoría de los casos que se puedan citar, el modelo dinámico utilizado para la sintonización del control supone que la masa de cada eslabón se encuentran concentradas a lo largo de su longitud, sin tomar en cuenta la contribución inercial de la geometría de los eslabones. En la mayoría de las aplicaciones, y particularmente en el caso de los controladores basados en el modelo, se requiere de un modelo matemático lo suficientemente preciso que describa su comportamiento dinámico. En el caso de robots eslabonados es aconsejable considerar la geometría de los eslabones en el concepto de control; vea por ejemplo [19], donde se desarrolla un estudio sobre el control de balanceo y estabilización del péndulo triple sobre un carro. Vea también [8], donde se obtiene un modelo dinámico del péndulo invertido triple usando derivadas fraccionales. El control de los sistemas subactuados, y quizá sea posible generalizar a los sistemas robóticos, ha sido abordado considerando únicamente el modelo del mecanismo sin tomar en cuenta el modelo dinámico que gobierna a los actuadores, lo cual resulta en una práctica funcional, dado que la dinámica de esta parte del sistema es muy lenta, en comparación con la parte eléctrica que opera en los actuadores electromecánicos. Sin embargo, debido a que la gran mayoría de las aplicaciones considera el uso de motores de CD con o sin escobillas, el acoplamiento del modelo del sistema mecánico con el de los actuadores conduce a diferentes ventajas, entre las cuales se encuentra el hecho de que éstos poseen una dinámica predominantemente lineal, con lo cual se obtiene afinidad respecto de la entrada de control, insensibilidad a los controladores de alta ganancia, etc. Particularmente,

el caso del diseño de control robusto por AEM resulta en un proceso considerablemente más simple ([37]). El control robusto de sistemas mecánicos subactuados sujetos de efectos de perturbaciones es un tópico importante en vista de que éstos pueden afectar directamente a las articulaciones no actuadas, por lo que la condición de acoplamiento de las perturbaciones deja de cumplirse y complica su compensación. Por este motivo, y aunado a las situaciones que suelen ocurrir en un ambiente experimental, el problema de control robusto para esta clase de sistemas es un tema desafiante e interesante.

### 4.1.2. Descripción de la contribución

El capítulo enmarca las siguientes contribuciones:

- El diseño de una estrategia de control robusto por retroalimentación estática del estado para la estabilización de robots subactuados o completamente actuados impulsados por motores **PMDC** independientes usando **AEM** y el concepto de estabilidad **UUB**.
- Un estudio comparativo sobre la aplicación de distintas estrategias de control por modos deslizantes en los sistemas de interés.
- Un algoritmo de control novedoso basado en el modelo no lineal y **AEM** para la clase de sistemas abordada.
- Una estrategia de control por robusto-adaptable por ubicación de polos, basada en el método de elipsoide atractivo que genera robustez en la respuesta y reduce considerablemente el efecto violento de la señal de control.

## 4.2. Preliminares y Planteamiento del Problema

### 4.2.1. Suposiciones aceptadas

Considere el sistema robótico descrito en la representación del espacio del estado, dados en la sección 2.5.2. Las siguientes suposiciones permiten concluir con los resultados propuestos.

- I) El sistema dinámico se desenvuelve en una variedad compacta del espacio del estado  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^r$ , que contiene la solución trivial del sistema nominal (i.e., cuando  $\vartheta(t) = 0$ );
- II) el sistema nominal no lineal considerado es controlable, al menos en la vecindad local de la solución deseada;
- III) la entrada de control es una función del estimado del estado, del cual se sabe, posee cierto grado de error respecto al estado real;
- IV) el robot puede ser descrito en la forma estándar de robótica acoplada con los actuadores tratada en la *sección 2.5*;

El problema se formula entonces como sigue:

### 4.2.2. Problema general

**Problema 4.2.1.** *El problema de control consiste en estabilizar sistemas mecánicos elaborados de cadena cinemática abierta, subactuados y de orden superior, impulsados por motores eléctricos independientes de CD de imanes permanentes, alrededor de una configuración de equilibrio del sistema nominal, en presencia de perturbaciones externas, incertidumbres paramétricas y de modelo, e indisponibilidad de algunas variables de estado para su medición directa.*

## 4.3. Control Robusto

### 4.3.1. Control basado en el método del elipsoide atractivo

Considere el sistema dinámico en la representación cuasi-lineal descrita en el Remark 2.8. Dado que no se dispone del estado completo, se propone el controlador por retroalimentación estática del estimado del estado  $u_t = \mathbf{K}\hat{x}_t$ , con  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , que conduce a la estructura general del sistema de control en lazo cerrado:

$$\dot{x}_t = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x_t + \xi(x_t, t) - \mathbf{BK}\tilde{x}_t, \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

lo cual sugiere tratar al error de estimación por medio del controlador robusto. La siguiente proposición resuelve el problema propuesto.

**Proposición 4.1.** *Considere la representación cuasi-lineal del sistema electromecánico en la forma (2.28). Si existe la solución  $(\alpha, \varepsilon, \mathbf{P}, \mathbf{K})$  para la desigualdad matricial:*

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{PA}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha^\top \mathbf{P} + \mathbf{PBK} + \mathbf{K}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_r & , & \mathbf{P} \\ & & \mathbf{P} \\ & & , & -\varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_r$ , entonces la función de almacenamiento en la forma cuadrática clásica  $V(x_t) = x_t^\top \mathbf{P} x_t$ , satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t^\top \mathbf{P}_{\text{att}} x_t \leq 1, \quad \mathbf{P}_{\text{att}} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{P} \quad (4.3)$$

esto es, las trayectorias del sistema convergen a la elipsoide invariante:

$$\mathcal{E}(0, \mathbf{P}_{\text{att}}) = \{x_t \in \mathbb{R}^r : x_t^\top \mathbf{P}_{\text{att}} x_t \leq 1\}, \quad (4.4)$$

Por lo tanto se concluye con estabilidad **UUB**, con los parámetros:

$$b = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1})}, \quad (4.5)$$

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\alpha V(x_0) - \beta}{\alpha \kappa} \right\},$$

para el escalar constante  $0 < \kappa$  suficientemente pequeño.

*Demostración.* Considere la función energética en a forma cuadrática clásica  $V(x_t) = x_t^\top \mathbf{P} x_t$ ,  $0 < \mathbf{P} = \mathbf{P}^\top \in \mathbb{R}^{r \times r}$ . Al tomar la derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}(x_t) = x_t^\top [\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A}^\top + \mathbf{K}^\top \mathbf{B}^\top) \mathbf{P}] x_t + 2x_t^\top \mathbf{P} [\xi(x_t, t) - \mathbf{BK}\tilde{x}_t].$$

La representación de estado extendido se obtiene como:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A}^\top + \mathbf{K}^\top \mathbf{B}^\top) \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix},$$

Permítase aplicar aquí el método del elipsoide atractivo, al sumar y restar los términos  $\alpha V(x_t)$  y  $\varepsilon \|\xi(x_t, t)\|^2$ . Sigue que:

$$\dot{V}(x_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix}^\top \Theta \begin{bmatrix} x_t \\ \xi(x_t, t) \end{bmatrix} - \alpha V(x_t) + \beta, \quad \beta = \varepsilon \delta 0,$$

donde  $\Theta$  está dada en el cuerpo de la proposición. Si se satisface la desigualdad matricial procede:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\alpha V(x_t) + \beta,$$

que permite concluir con estabilidad **UUB**, pues se halla la solución como:

$$V(x_t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t}.$$

Al tomar el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , sigue que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x_t) \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

lo cual, al tomar en cuenta la forma de la función de Lyapunov candidata resulta en la elipsoide invariante (4.4). Finalmente se determina la cota y el tiempo de convergencia que permiten concluir con estabilidad UUB. A partir de la expresión previa sigue que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t^\top \mathbf{P} x_t \leq \frac{\beta}{\alpha} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t\| \leq b,$$

para el escalar constante positivo  $b$  dado en la proposición. El tiempo de convergencia  $T$  a la elipsoide invariante se halla al resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \left[ V(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha T} = \frac{\beta}{\alpha} + \kappa, \quad 0 < \kappa,$$

para el escalar constante  $\kappa$  positivo lo suficientemente pequeño. ■

El siguiente lema trata de la factibilidad de la desigualdad matricial.

**Lema 4.1** (Sobre la factibilidad de la desigualdad matricial). *Considere la desigualdad matricial  $-\Theta > 0$ . Se elige:*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{K}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^\top = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix},$$

y claramente  $\Lambda = \mathbf{I}_r$ , de modo que:

$$\mathcal{W}_\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Con ésto resultan las siguientes condiciones para la factibilidad de la desigualdad matricial:

- $\mathbf{W}_{\mathcal{P}}^{\top} \Psi \mathbf{W}_{\mathcal{P}} > 0$ : ésta condición resulta en  $\varepsilon \mathbf{I}_r > 0$ , que resulta cierta, dado que  $0 < \varepsilon$ .
- $\mathbf{W}_{\mathcal{Q}}^{\top} \Psi \mathbf{W}_{\mathcal{Q}} > 0$ : que concluye con  $0 < \mathbf{P} \mathbf{A}_{\alpha} + \mathbf{A}_{\alpha}^{\top} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} + \mathbf{K}^{\top} \mathbf{B}^{\top} \mathbf{P} + \varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_r$  lo que establece la controlabilidad del par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , lo cual se satisface a través de las suposiciones.

Por lo que la desigualdad matricial es factible.

El siguiente lema establece la solución de la desigualdad a través de una LMI.

**Lema 4.2 (Sobre la solución de la desigualdad matricial).** *Considere el siguiente cambio de variable  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1}$ , la desigualdad matricial (4.2) es equivalente a resolver la siguiente LMI.*

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\alpha} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{A}_{\alpha}^{\top} - \mathbf{B} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{\top} \mathbf{B}^{\top} & -\mathbf{I}_n & \mathbf{X} \\ & -\mathbf{I}_n & \varepsilon \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \frac{1}{\varepsilon \delta_1} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0, \quad (4.6)$$

donde  $\mathbf{A}_{\alpha} = \mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}_n$ . La solución se obtiene como  $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1}$ .

*Demostración.* Considérese la transformación de similitud:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

de modo que  $\Xi = \mathbf{T}^{\top} \Theta \mathbf{T}$  queda:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\alpha} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_{\alpha}^{\top} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}^{\top} \mathbf{B}^{\top} + \varepsilon \delta_1 \mathbf{P}^{-2} & \mathbf{I}_r \\ & \mathbf{I}_r \\ & & -\varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0,$$

que al introducir el cambio de variable  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1}$ , es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\alpha} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{A}_{\alpha}^{\top} - \mathbf{B} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^{\top} \mathbf{B}^{\top} & -\mathbf{I}_r \\ & -\mathbf{I}_r \\ & & \varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \delta_1 \mathbf{X}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} > 0.$$

La segunda matriz del lado izquierdo de la última expresión puede descomponerse como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \delta_1 \mathbf{X}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, al aplicar el complemento de Schur queda la desigualdad matricial (4.6). ■

La solución del algoritmo implica resolver el siguiente problema de minimización restringida:

**Lema 4.3 (Sobre la solución numérica de la desigualdad matricial).** *Tomando la definición de la elipsoide (4.4), y en vista de que la longitud de sus semiejes es inversamente proporcional a los valores propios de  $\mathbf{P}_{\text{att}}$ , el problema consiste en determinar las constantes  $\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{K}$  tales que la LMI(4.6) se satisface, para lo cual debe resolverse el problema de minimización restringida:*

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \frac{\beta}{\alpha} \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}), \\ & \text{sujeto a} \quad \bar{\Theta} > 0, \mathbf{K}, 0 < \mathbf{P}, 0 < \alpha, \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.7)$$

al elegir  $\alpha$  tan grande como sea necesario, y  $\varepsilon$ , que es directamente proporcional a  $\beta$ , tan pequeña como sea posible.



### 4.3.2. Diseño de control por modos deslizantes

Considere nuevamente la representación cuasi-lineal dada en la *Proposición 2.8*. Se define la función de almacenamiento como  $V(\sigma_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^T \sigma_t$ , donde  $\sigma_t \in \mathbb{R}^r$  se llama variable deslizante. El objetivo de control es que las trayectorias del sistema converjan a la superficie de deslizamiento dada como:

$$S(x_t) = \{x_t \in \mathbb{R}^r : \sigma(x_t) = 0, \dot{\sigma}_t = 0\}, \quad (4.8)$$

en tiempo finito. Dependiendo de los objetivos de control  $\sigma(x_t)$  puede adoptar diferentes configuraciones. En las secciones siguientes se proponen algunas formas particulares para la clase de sistemas abordados.

#### Modos deslizantes dinámicos

En controlador por modo deslizante dinámico (**dSMC**, *dynamic Sliding Mode Control*) la función de control se encuentra contenida en la variable de deslizamiento. Esta práctica permite reducir considerablemente el efecto de “chattering”, en virtud de que esta señal es integrada antes de ser aplicada a la planta. La siguiente proposición muestra un control estabilizante para la clase de sistemas propuesta, haciendo uso de este tipo de control.

**Proposición 4.2.** *Considere el sistema robótico dado en la forma cuasi-lineal descrita en la Proposición 2.8 y la variable de deslizamiento:*

$$\sigma_t = \mathbf{K}x_t + u_t, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times r} \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la retroalimentación estática del estado obtenida para el sistema nominal usando la fórmula de Ackerman-Utkin[47]. Esta ganancia tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3], \quad \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (4.10)$$

El control discontinuo

$$\begin{aligned} \dot{u}_t = & -\rho \text{Sign}(\sigma_t) + u_{nom}, \quad 0 < \rho \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ \text{tr}(\rho) > & \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_3^T \mathbf{K}_3)} (\eta_0 + \eta_1 \|x\|^2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

con

$$\begin{aligned} u_{nom} = & [\mathbf{K}_1 \mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{R}_a - \mathbf{K}_3 \mathbf{A}_{31}] x_1 - \mathbf{K}_3 \mathbf{A}_{32} x_2 \\ & + [\mathbf{K}_1 \mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{W}^T - \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_3 \mathbf{A}_{33}] x_3 - \mathbf{K}_1 \mathbf{L}_a^{-1} u_t, \end{aligned} \quad (4.12)$$

y

$$\text{Sign}(\sigma_t) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(\sigma_m) \end{bmatrix},$$

garantiza que las trayectorias del sistema alcanzan la variedad de deslizamiento (4.8) en el tiempo finito:

$$t_r = \frac{\sqrt{2}}{\text{tr}(\rho)} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0)) + t_0, \quad (4.13)$$

donde la función de almacenamiento  $V(\sigma_t)$  ha sido definida como  $V(\sigma_t) = \frac{1}{2}\sigma_t^T \sigma_t$ .

*Demostración.* La derivada de la variable de deslizamiento a lo largo de las trayectorias del sistema se determina como:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_t &= -\mathbf{K}_1 [\mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{R}_a x_1 + \mathbf{L}_a^{-1} \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top x_3 - \mathbf{L}_a^{-1} u_t] + \mathbf{K}_2 x_3 \\ &\quad + \mathbf{K}_3 [\mathbf{A}_{31} x_1 + \mathbf{A}_{32} x_2 + \mathbf{A}_{33} x_3 + \xi_3(x_t, t)] + \dot{u}_t.\end{aligned}$$

Por otro lado, las trayectorias de la función energética:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma_t) &= \sigma_t^\top \{ \mathbf{K}_1 [\mathbf{A}_{11} x_1 + \mathbf{A}_{13} x_3 + \mathbf{B}_1 u_t] + \mathbf{K}_2 x_3 \\ &\quad + \mathbf{K}_3 [\mathbf{A}_{31} x_1 + \mathbf{A}_{32} x_2 + \mathbf{A}_{33} x_3 + \xi_3(x_t, t)] + \dot{u}_t \}.\end{aligned}$$

Si  $\dot{u}_t$  se da como  $\dot{u}_t = u_{nom} + u_{\sigma_t}$ , para el control nominal dado en la proposición, sigue que:

$$\dot{V}(\sigma_t) = \sigma_t^\top \{ u_{\sigma_t} + \mathbf{K}_3 \xi_3(x_t, t) \}$$

Permítase introducir el control discontinuo  $u_{\sigma_t} = -\rho \text{Sign}(\sigma)$ ,  $0 < \rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Procede que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma_t) &= \sigma_t^\top \{ -\rho \text{Sign}(\sigma_t) + \mathbf{K}_3 \vartheta_3(x_t, t) \} \\ &= -\sigma_t^\top \rho \text{Sign}(\sigma_t) + \|\sigma_t\| \|\mathbf{K}_3 \vartheta_3(x_t, t)\|\end{aligned}$$

En vista de que  $\rho \leq \text{tr}(\rho)$ , entonces:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma_t) &\leq -\|\sigma_t\| \left\{ \text{tr}(\rho) - \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_3^\top \mathbf{K}_3)} \|\vartheta_{3,x,t}\| \right\} \\ &\leq -\|\sigma_t\| \left\{ \text{tr}(\rho) - \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_3^\top \mathbf{K}_3)} (\eta_0 + \eta_1 \|x\|^2) \right\}.\end{aligned}$$

Bajo la condición que  $\text{tr}(\rho) > \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_3^\top \mathbf{K}_3)} (\eta_0 + \eta_1 \|x\|^2)$  dada en (4.11), se demuestra la proposición. ■

La ventaja de esta clase de control por modos deslizantes es la reducción de el efecto de chattering, debido a que el efecto del control discontinuo se oculta tras la integral, que actúa como filtro pasa-bajas. Esto lo hace una buena opción para implementarse en tiempo real. Sin embargo, la siguiente sección muestra una alternativa un tanto más atractiva.

### Control por modos deslizantes integrales

La proposición siguiente resuelve el problema de control robusto usando modos deslizantes integrales (**iSMC**, *integral Sliding Modes Control*).

**Proposición 4.3.** *Para el sistema considerado en la forma cuasi lineal se define la función de control de modo que  $u_t = u_0 + u_1$ . Al diseñar la variable de deslizamiento como:*

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \mathbf{G} (x_t - x_n) \\ \dot{x}_n &= \mathbf{A} x_t + \mathbf{B} u_0, \quad x_n(t_0) = x_{n_0},\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde  $u_0$  es el control lineal diseñado para la parte nominal<sup>1</sup>. Aquí la ganancia estática  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times r}$  se elige de modo que  $\mathbf{G}\mathbf{B} = \mathbf{L}_a^{-1}$  y  $\mathbf{G}\xi(x_t, t) = \xi_3(x_t, t)$ . Por lo que el control conmutado:

$$\begin{aligned}u_t &= u_0 - \mathbf{L}_a \rho \text{Sign}(\sigma_t), \quad 0 < \rho \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ &\quad \text{tr}(\rho) > \sqrt{\eta_0 + \eta_1 \|x_t\|^2}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

<sup>1</sup>Ésta puede ser diseñada para el modelo nominal, usando por ejemplo un *regulador cuadrático lineal (LQR)*

*Demostración.* Se diseña una estrategia de control por modos deslizantes integrales **iSMC**; considérese la variable deslizante (4.14). Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema dado en la forma cuasi lineal queda:

$$\dot{\sigma}_t = \mathbf{G} [\mathbf{A}x_t + \mathbf{B}(u_0 + u_1) + \xi(x_t, t)] - \mathbf{A}x_t - \mathbf{B}u_0 \quad (4.16)$$

Se define a función de energía en la forma cuadrática clásica  $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^\top\sigma$ . Sigue que:

$$\dot{V}(\sigma, t) = \sigma \{ \mathbf{G}\mathbf{B}u_1 + \mathbf{G}\xi(x, t) \}$$

Se propone el controlador por modos deslizantes, como:

$$u_{1,t} = -(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \rho \text{Sign}(\sigma) \quad (4.17)$$

Por lo tanto, la derivada de la función energética queda:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma) &= \sigma \{ -\rho \text{Sign}(\sigma) + \mathbf{G}\xi_t \} \\ &\leq -\{ \text{tr}(\rho) - \|\mathbf{G}\xi_t\| \} \|\sigma_t\| \end{aligned} \quad (4.18)$$

sigue que:

$$\dot{V}(t, \sigma) \leq -\left( \text{tr}(\rho) - \sqrt{\eta_0 + \eta_1 \|x_t\|^2} \right) \|\sigma_t\|$$

El controlador **iSMC** adopta la forma dada en (4.15). ■

El sistema se comporta de forma similar a la respuesta ante el controlador **dSMC** previamente propuesto, tal como puede constatarse en los resultados de simulación al final del capítulo. Note que hasta el momento se ha considerado la forma cuasi-lineal del modelo dinámico, donde los términos de orden superior, junto con las dinámicas inciertas y las perturbaciones han sido dominadas por un término de robustez. En la siguiente sección se presenta un controlador robusto basado en el modelo no lineal usando **AEM**.

## 4.4. Diseño de control robusto usando el modelo no-lineal

### 4.4.1. Descripción del sistema

Considérese el sistema no lineal en la forma(?); aquí se asume que el vector del estado está disponible para su medición directa. Se diseñará un controlador por retroalimentación estática del estado  $u_t = \mathbf{K}x_t$ ,  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_3] \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $r = 2n + m$ . Aquí  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La representación en lazo cerrado queda  $\dot{x}_t = \mathbf{A}x_t + \kappa(x_t, t)$ , como:

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a^{-1}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{R}_a) & \mathbf{L}_a^{-1}\mathbf{K}_2 & \mathbf{L}_a^{-1}(\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2)\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau & \mathbf{0} & -\mathbf{D}^{-1}(x_2)\mathbf{C}(x_2, x_3) \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{D}^{-1}(x_2)[\vartheta(t) - G(x_2)] \end{bmatrix}.$$

### 4.4.2. Controlador basado en modelo no lineal usando AEM

La siguiente proposición permite resolver el problema de control descrito, usando el concepto de estabilidad últimamente-uniformemente acotada.

**Proposición 4.4.** *Considérese el sistema mecánico pendular de  $n$ -GDL en la forma estándar de robótica, parcialmente actuado por un conjunto de  $m$  motores de cd independientes, descrito en la forma no lineal, tipo lineal. Si existe una solución  $(\alpha, \varepsilon, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 | \mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}_1)$  para la desigualdad matricial:*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Phi_{12}^\top & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ \Phi_{13}^\top & \Phi_{23}^\top & \mu \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \varepsilon \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0, \quad (4.19)$$

donde se han establecido las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \mu &= 2(\lambda_M - \delta_C \delta_q) - \alpha \lambda_M - \varepsilon \delta_1, \quad \|x_2\| \leq \delta_q, \\ \Phi_{11} &= \mathbf{P}_{11} \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_a \mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^\top \mathbf{P}_{11} - \alpha \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a - \varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_m, \\ \Phi_{12} &= -\mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top - \mathbf{K}_1^\top \mathbf{P}_{12} + \mathbf{R}_a \mathbf{P}_{12} - \alpha \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12}, \\ \Phi_{13} &= \mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top - \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top - \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_3, \\ \Phi_{22} &= -\mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^\top \mathbf{P}_{12} - \alpha \mathbf{P}_{22} - \varepsilon \delta_1 \mathbf{I}_n, \\ \Phi_{23} &= \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top - \mathbf{P}_{22} - \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{K}_3 - \alpha \lambda_m \mathbf{I}_n, \end{aligned} \quad (4.20)$$

para las ganancias matriciales  $0 < \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $0 < \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $0 < \mathbf{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y los escalares constantes  $0 < \alpha, \varepsilon < \infty$ . Entonces, las trayectorias del sistema alcanzan la elipsoide invariante:

$$\mathcal{E}(x_t) = \left\{ x_t \in \mathbb{R}^r : x_t^\top \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} \mathbf{P}_{x_t, t} \right) x_t \leq 1 \right\}, \quad (4.21)$$

para la ganancia matricial definida positiva  $\mathbf{P}_{x_t, t} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de la forma:

$$\mathbf{P}_{x_t, t} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a & \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{L}_a & \mathbf{P}_{22} & -\mathbf{D}(x_2) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D}(x_2) & \mathbf{D}(x_2) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

concluyendo con estabilidad últimamente-uniformemente acotada.

*Demostración.* Con el objetivo de proveer robustez al sistema de control en lazo cerrado, se define la función de energía en la forma cuadrática clásica  $V(x_t) = x_t^\top \mathbf{P}_{x_t, t} x_t$ , donde  $0 < \mathbf{P}_{x_t, t} = \mathbf{P}_{x_t, t}^\top \in \mathbb{R}^{r \times r}$  tiene la forma establecida en la proposición. La derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema queda:

$$\dot{V}(x_t) = x_t^\top \Theta(x_t) x_t + 2x_t^\top \mathbf{P}_{x_t, t} \kappa(x_t, t),$$

donde  $\Theta(x_t) = \mathbf{P}_{x_t, t} \Lambda + \Lambda^\top \mathbf{P}_{x_t, t} + \dot{\mathbf{P}}_{x_t, t}$  se da como:

$$\Theta(x_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{R}_a) & \mathbf{P}_{11} \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top & \mathbf{P}_{11} (\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top) \\ + (\mathbf{K}_1^\top - \mathbf{R}_a) \mathbf{P}_{11} & + (\mathbf{K}_1^\top - \mathbf{R}_a) \mathbf{P}_{12} & + \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top \\ \mathbf{K}_2^\top \mathbf{P}_{11} - \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau & \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2^\top \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{12}^\top (\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top) \\ + \mathbf{P}_{12}^\top (\mathbf{K}_1 - \mathbf{R}_a) & & + \mathbf{P}_{22} + \mathbf{C}(x_2, x_3) - \dot{\mathbf{D}}(x_2) \\ (\mathbf{K}_3^\top - \mathbf{W} \mathbf{K}_e) \mathbf{P}_{11} & (\mathbf{K}_3^\top - \mathbf{W} \mathbf{K}_e) \mathbf{P}_{12} & -2\mathbf{D}(x_2) - \mathbf{C}(x_2, x_3) \\ + \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{L}_a + \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau & + \mathbf{P}_{22} + \mathbf{C}(x_2, x_3) - \dot{\mathbf{D}}(x_2) & -\mathbf{C}^\top(x_2, x_3) + \dot{\mathbf{D}}(x_2) \end{bmatrix}.$$

Aquí es claro que  $2x_t^\top \mathbf{P}_{x_t, t} \kappa(x_t, t) = 2(x_3 - x_2)^\top [\vartheta(t) - G(x_2)]$ . Después de aplicar las propiedades dinámicas de los sistemas Lagrangianos para lidiar con los términos no lineales restantes en  $\Theta(x_t)$ . Las trayectorias de la función energética se describen por:

$$\dot{V}(x_t) = -x_t^\top \bar{\Theta} x_t + 2(x_3 - x_2)^\top [\vartheta(t) - G(x_2)]$$

donde:

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_{11}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{R}_a) & -\mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top & -\mathbf{P}_{11}(\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top) \\ -(\mathbf{K}_1^\top - \mathbf{R}_a) \mathbf{P}_{11} & -(\mathbf{K}_1^\top - \mathbf{R}_a) \mathbf{P}_{12} & -\mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12} + \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top \\ -\mathbf{K}_2^\top \mathbf{P}_{11} + \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau & -\mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^\top \mathbf{P}_{12} & -\mathbf{P}_{12}^\top (\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_e \mathbf{W}^\top) \\ -\mathbf{P}_{12}^\top (\mathbf{K}_1 - \mathbf{R}_a) & & -\mathbf{P}_{22} \\ -(\mathbf{K}_3^\top - \mathbf{W} \mathbf{K}_e) \mathbf{P}_{11} & -(\mathbf{K}_3^\top - \mathbf{W} \mathbf{K}_e) \mathbf{P}_{12} & \\ -\mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{L}_a - \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau & -\mathbf{P}_{22} & -\varkappa \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Aquí  $\varkappa = 2(\lambda_m - \delta_C \delta_q)$ . Se define el vector de estado extendido como  $z_t = [x_t^\top, \vartheta(t)^\top, G^\top(x_2)]^\top$ . Al sumar y restar los términos  $\alpha V(x_t)$  y  $\varepsilon [\|\vartheta(t)\|^2 + \|G(x_2)\|^2]$ , para los escalares constantes positivos  $\alpha, \beta$  las trayectorias del sistema se describen por:

$$\dot{V}(x_t) \leq -z_t^\top \Phi z_t - \alpha V(x_t) + \beta, \quad \beta = \varepsilon (\delta_0 + \delta_G^2),$$

para  $\Phi$  como se muestra en la proposición. En este punto se asume la existencia de  $0 < \Psi \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ ,  $\rho = 4n + m$ , cuya estructura se define en las líneas siguientes, de modo que si  $\Xi = \Phi - \Psi > 0$  entonces claramente  $\Phi > 0$ . Bajo esta suposición, queda finalmente:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\alpha V(x_t) + \beta,$$

por lo que se concluye con estabilidad UUB. ■

Ahora el problema recae en la solución de la desigualdad matricial. Para tal efecto, considere el lema siguiente:

**Lema 4.4** (Sobre la solución de la desigualdad matricial). *Considere la desigualdad matricial dada en la proposición previa. Su solución es equivalente a la de el siguiente conjunto de desigualdades matriciales lineales.:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{R}_a & \mathbf{K}_\tau \mathbf{W}^\top + \mathbf{R}_a \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11} \\ -\frac{\alpha}{2} \mathbf{P}_{11} \mathbf{L}_a & -\frac{\alpha}{2} \mathbf{L}_a \mathbf{P}_{12} & \\ \mathbf{W} \mathbf{K}_\tau + \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{R}_a & \mathbf{Q}_1 - \frac{\alpha}{2} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{12}^\top \\ -\frac{\alpha}{2} \mathbf{P}_{12}^\top \mathbf{L}_a & -\frac{\varepsilon}{2} \delta_1 \mathbf{I}_n & \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2^{-1} & \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{K}_3^\top & \frac{\mu}{2} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \mathbf{Y}_{13} & 0 & 0 & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{K}_1^\top & 0 \\ \mathbf{Y}_{12}^\top & \mathbf{Y}_{22} & \mathbf{Y}_{23} & \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{K}_2^\top & \mathbf{P}_{12}^\top & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{Y}_{31}^\top & \mathbf{Y}_{23}^\top & \frac{\mu}{2} \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & 0 & \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P}_{11} & \mathbf{K}_2 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{P}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_3^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.23)$$

con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= \mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a - \frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_m, \\ \mathbf{Y}_{12} &= -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12}, \\ \mathbf{Y}_{13} &= \mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top - \mathbf{K}_\tau\mathbf{W}^\top - \mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12}, \\ \mathbf{Y}_{22} &= \mathbf{Q}_3 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{22} - \mathbf{Q}_1 - \frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_n, \\ \mathbf{Y}_{23} &= \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top - \mathbf{P}_{22} - \alpha\lambda_m\mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

*Demostración.* Se define la matriz  $\Psi$  del siguiente modo:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a & \mathbf{K}_\tau\mathbf{W}^\top + \mathbf{R}_a\mathbf{P}_{12} & -\mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_3 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_m & -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & & & \\ \mathbf{W}\mathbf{K}_\tau + \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{R}_a & \mathbf{Q}_1 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{22} & -\mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_3 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_n & & & \\ -\mathbf{K}_3^\top\mathbf{P}_{11} & -\mathbf{K}_3^\top\mathbf{P}_{12} & \frac{\mu}{2}\mathbf{I}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{I}_n \end{bmatrix},$$

donde  $0 < \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante. Por lo tanto, primero se resuelve  $\Psi > 0$  usando el *complemento de Schur*. Nótese que, en vista que  $0 < \varepsilon$ , la expresión previa puede simplificarse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a & \mathbf{K}_\tau\mathbf{W}^\top + \mathbf{R}_a\mathbf{P}_{12} & -\mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_3 \\ -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_m & -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & \\ \mathbf{W}\mathbf{K}_\tau + \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{R}_a & \mathbf{Q}_1 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{22} & -\mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_3 \\ -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_n & \\ -\mathbf{K}_3^\top\mathbf{P}_{11} & -\mathbf{K}_3^\top\mathbf{P}_{12} & \frac{\mu}{2}\mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0,$$

Usando el complemento de Schur, procede que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a & \mathbf{K}_\tau\mathbf{W}^\top + \mathbf{R}_a\mathbf{P}_{12} \\ -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_m & -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{W}\mathbf{K}_\tau + \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{R}_a & \mathbf{Q}_1 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{22} \\ -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_n \end{bmatrix} - \frac{2}{\mu} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \\ \mathbf{P}_{12}^\top \end{bmatrix} [\mathbf{K}_3\mathbf{K}_3^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \end{bmatrix} > 0,$$

Aquí se define la matriz constante  $0 < \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tal que  $\frac{\mu}{2}(\mathbf{K}_3\mathbf{K}_3^\top)^{-1} > \mathbf{Q}_2$ . Esto resulta en las primeras dos LMI del lema, con lo que la matriz  $\Xi = \Phi - \Psi$  ahora se define apropiadamente. Permítase particionar  $\Xi = \Xi_A - \Xi_B$  aplicando la desigualdad Lambda para los términos bilineales restantes:

$$\begin{aligned} -\mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^\top\mathbf{P}_{11} &\leq -\mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{11} - \mathbf{K}_1^\top\mathbf{K}_1, \\ -\mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^\top\mathbf{P}_{12} &\leq -\mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{P}_{12} - \mathbf{K}_2^\top\mathbf{K}_2, \end{aligned}$$

resulta:

$$\Xi_A = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{R}_a - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{11}\mathbf{L}_a & -\frac{\alpha}{2}\mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_m & & -\mathbf{K}_\tau\mathbf{W}^\top - \mathbf{L}_a\mathbf{P}_{12} & & \\ -\frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{L}_a & \mathbf{Q}_3 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_e\mathbf{W}^\top & \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ & -\mathbf{Q}_1 - \frac{\varepsilon}{2}\delta_1\mathbf{I}_n & -\mathbf{P}_{22} - \alpha\lambda_m\mathbf{I}_n & & \\ \mathbf{W}\mathbf{K}_e\mathbf{P}_{11} & \mathbf{W}\mathbf{K}_e\mathbf{P}_{12} & & \frac{\mu}{2}\mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{W}\mathbf{K}_\tau - \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{L}_a & -\mathbf{P}_{22} - \alpha\lambda_m\mathbf{I}_n & & & & \\ 0 & \mathbf{I}_n & & -\mathbf{I}_n & & \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_n & & \mathbf{I}_n & & 0 & \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

con  $0 < \mathbf{Q}_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y:

$$\Xi_B = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^2 + \mathbf{K}_1^\top\mathbf{K}_1 & \mathbf{P}_{11}\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1^\top\mathbf{P}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_2^\top\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{K}_1 & \mathbf{Q}_3 + \mathbf{P}_{12}^\top\mathbf{P}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto  $\Xi_B = \Gamma\Delta\Gamma^\top$ , con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{K}_1^\top & 0 \\ \mathbf{K}_2^\top & \mathbf{P}_{12}^\top & \mathbf{I}_n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente  $\Xi = \Xi_A - \Gamma\Delta\Gamma^\top$ . Al aplicar el complemento de Schur, resulta la tercer desigualdad del lema.  $\blacksquare$

La siguiente sección muestra una primera versión de un controlador robusto-adaptable, ideado para reducir los efectos violentos propios de las políticas robustas. Específicamente se presenta el diseño de un controlador por ubicación de polos adaptable sintonizada por el método de elipsoide atractivo.

## 4.5. Ubicación de Polos Adaptable

### 4.5.1. Descripción del sistema

Considere de una forma general el sistema dinámico no lineal perturbado en la forma del espacio del estado:

$$\dot{x}_t = f(x_t) + g(x_t)u_t + \zeta(x_t, t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.24)$$

donde  $x_t \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  es el vector de estado,  $u_t \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  la entrada de control admisible, mientras que  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  definen el comportamiento no lineal. La aproximación lineal alrededor de una solución de equilibrio  $x_t = x_{eq}$  del modelo nominal se halla usando la expansión en series de Taylor, como: expansion

as  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f(x_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t=x_{eq}}$ ,  $\mathbf{B} = g(x_t)|_{x_t=x_{eq}}$ . Al sumar y restar los términos correspondientes en (4.24), resulta la representación cuasi-lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t + \xi(x_t, u_t, t), \quad x(0) = x_0, \\ \xi(x_t, t) &= f(x_t) - \mathbf{A}x_t + [g(x) - \mathbf{B}]u_t + \zeta(x_t, t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note que el término  $\xi(x_t, t)$  contiene los términos de orden superior de la serie, así como los efectos de perturbaciones e incertidumbres. Para los objetivos deseados, considerese el caso en el que las matrices que definen el modelo lineal real  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  son desconocidas, aunque se conoce una aproximación de estas en el instante  $t = 0$  como  $(\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0)$ . Se construirá un estimador dinámico para obtener  $(\hat{\mathbf{A}}_t, \hat{\mathbf{B}}_t)$  en línea. Al incluir estos términos en la última expresión, resulta el sistema variante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \hat{\mathbf{A}}_t x_t + \hat{\mathbf{B}}_t u_t + \tilde{\Theta}_t \varphi_t + \xi(x_t, t), \quad x(0) = x_0, \\ \tilde{\Theta}_t &= [\tilde{\mathbf{A}}_t | \tilde{\mathbf{B}}_t], \quad \varphi_t = \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde los términos  $\tilde{\mathbf{A}}_t = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}_t$  y  $\tilde{\mathbf{B}}_t = \mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_t$  definen el error de estimación. La aproximación lineal de el modelo real es constante, mientras que los parámetros del modelo estimado provienen de un estimador. Finalmente, la entrada de control es una retroalimentación de estado clásica  $u_t = \hat{\mathbf{K}}_t x_t$ , donde  $\hat{\mathbf{K}}_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se calcula como la ubicación de polos de  $(\hat{\mathbf{A}}_t, \hat{\mathbf{B}}_t)$  para un polinomio deseado robusto. Esto deja la representación en lazo cerrado:

$$\dot{x}_t = \left( \hat{\mathbf{A}}_t + \hat{\mathbf{B}}_t \hat{\mathbf{K}}_t \right) x_t + \tilde{\Theta}_t \varphi_t + \xi(x_t, t), \quad x(0) = x_0. \quad (4.27)$$

### Suposiciones generales

Debe tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- a1. el espacio del estado definido por  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ , es compacto y contiene la solución trivial del modelo nominal;
- a2. el sistema no lineal nominal es Lipschitz;
- a3. el término de perturbaciones e incertidumbres tiene energía limitada, es decir:

$$\|\zeta(x_t, t)\| \leq \delta_0; \quad (4.28)$$

- a4. En consecuencia de la consideración anterior, el término  $\xi(x_t, t)$ , que contiene los términos no lineales, las perturbaciones e incertidumbres, es cuasi-Lipschitz:

$$\|\xi(x_t, t)\|^2 \leq \delta_1 + \delta_2 \|x_t\|^2;$$

- a5. el modelo lineal inicial  $(\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0)$  es controlable.



### Planteamiento del problema

Considere el sistema dinámico no lineal sujeto de perturbaciones (4.24) en su forma adaptativa (4.27) y bajo las consideraciones **A1-A5**. Si se conoce su modelo lineal aproximado cuando  $t = 0$ , dado por  $(\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0)$ , el problema consiste en atrapar las trayectorias del sistema en un pequeño conjunto invariante alrededor de una solución de equilibrio inestable, en presencia de efectos de perturbaciones e incertidumbres, mientras se obtiene cierto grado de adaptación usando un controlador adaptable por ubicación de polos.

#### 4.5.2. APPC con disposición plena del estado

La siguiente proposición resuelve el problema establecido.

**Proposición 4.5.** *Considere el sistema dinámico no lineal en la forma (4.27), donde se conoce una aproximación inicial del modelo dinámico como  $(\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0)$ , y ante las consideraciones (a1) – (a5). El algoritmo de control robusto-adaptable  $u_t = \hat{\mathbf{K}}_t x_t$ ,  $\hat{\mathbf{K}}_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$  para estabilizar apropiadamente el equilibrio inestable se da como sigue[22]:*

1. *Se halla un polinomio característico robusto  $p_d(\lambda)$  para el sistema nominal en lazo cerrado cuando  $t = t_0$ , i.e., para  $\hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{K}_0$ , en presencia de las perturbaciones e incertidumbres  $\xi(x_t, u_t, t)$ , si existe un conjunto de solución  $(\alpha, \varepsilon | \mathbf{P}_1, \Gamma, \hat{\mathbf{K}}_0)$  para la desigualdad matricial:*

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_0^\top \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{K}}_0 + \hat{\mathbf{K}}_0^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top \mathbf{P}_1 \\ + \alpha \mathbf{P}_1 + \varepsilon \delta_2 \mathbf{I}_n + 2\alpha n^3 (\mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 \\ + n^4 \mathbf{P}_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_0^\top \hat{\mathbf{K}}_0 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_1) \end{array} \right\}, & \mathbf{P}_1 \\ & \\ & \mathbf{P}_1, & -\varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} < 0, \quad (4.29)$$

para las ganancias matriciales positivas  $0 < \mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $0 < \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y los escalares constantes  $0 < \alpha, \varepsilon$ .

2. *Los parámetros reales del modelo dinámico  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  se aproximan a través de la siguiente expresión:*

$$\hat{\Theta}_t = 2\Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top, \quad \hat{\Theta}(0) = [\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0]. \quad (4.30)$$

3. *La ganancia del controlador por retroalimentación del estado se determina en línea usando la fórmula de Ackerman, para los nuevos valores de  $(\hat{\mathbf{A}}_t, \hat{\mathbf{B}}_t)$ , que provienen del estimador anterior, esto es:*

$$\hat{\mathbf{K}}_t = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{C}_t^{-1} p_d(\hat{\mathbf{A}}_t),$$

donde  $\mathbf{C}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la distribución de controlabilidad del par  $(\hat{\mathbf{A}}_t, \hat{\mathbf{B}}_t)$ , y  $p_d(\hat{\mathbf{A}}_t)$  es el polinomio característico robusto deseado que depende de  $\hat{\mathbf{A}}_t$ .

*Demostración.* Considérese la función candidata de Lyapunov:

$$V(x_t, \tilde{\vartheta}_t) = x_t^\top \mathbf{P}_1 x_t + \frac{1}{2} \tilde{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t$$

para las matrices constantes simétricas y positivas definidas  $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ , y con  $\tilde{\vartheta}_t = \mathbf{vec}(\tilde{\Theta}_t)$ , donde  $\mathbf{vec}(\cdot)$  es el operador de vectorización[36]. Sus variaciones a lo largo de las trayectorias del sistema se determinan como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, \tilde{\vartheta}_t) &= 2x_t^\top \mathbf{P}_1 \dot{x}_t + \dot{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t, \\ &= x_t^\top \{ \mathbf{P}_1 (\hat{\mathbf{A}}_t + \hat{\mathbf{B}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) + (\hat{\mathbf{A}}_t^\top + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{B}}_t^\top) \mathbf{P}_1 \} x_t + 2x_t^\top \mathbf{P}_1 \{ \tilde{\Theta}_t \varphi_t + \xi(\cdot) \} + \dot{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t, \\ &= \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_t + \hat{\mathbf{A}}_t^\top \mathbf{P}_1 \\ + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_t \hat{\mathbf{K}}_t + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{B}}_t^\top \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix} + 2x_t^\top \mathbf{P}_1 \tilde{\Theta}_t \varphi_t + \dot{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t, \end{aligned}$$

En este punto, considérese el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} 2x_t^\top \mathbf{P}_1 \tilde{\Theta}_t \varphi_t &= 2\text{tr} \left( x_t^\top \mathbf{P}_1 \tilde{\Theta}_t \varphi_t \right) \\ &= 2\text{tr} \left[ (\mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top)^\top \tilde{\Theta}_t \right] \\ &= 2\mathbf{vec}^\top (\mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top) \mathbf{vec} (\tilde{\Theta}_t) \end{aligned}$$

La evolución de la función candidata queda entonces como:

$$\dot{V}(x_t, \tilde{\vartheta}_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_t + \hat{\mathbf{A}}_t^\top \mathbf{P}_1 \\ + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_t \hat{\mathbf{K}}_t + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{B}}_t^\top \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix} + \left[ \dot{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 + 2\mathbf{vec}^\top (\mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top) \right] \tilde{\vartheta}_t.$$

Al aplicar el método de elipsoide atractivo, sumando y restando los términos  $\alpha V(x_t, \tilde{\vartheta}_t)$  y  $\|\xi(x_t, t)\|^2$  en la última expresión queda que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, \tilde{\vartheta}_t) &\leq \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_t + \hat{\mathbf{A}}_t^\top \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_t \hat{\mathbf{K}}_t \\ + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{B}}_t^\top \mathbf{P}_1 + \alpha \mathbf{P}_1 + \varepsilon \delta_2 \mathbf{I}_n \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix} \\ &\quad + \left[ \dot{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 + 2\mathbf{vec}^\top (\mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top) \right] \tilde{\vartheta}_t - \alpha V(x_t, \tilde{\vartheta}_t) + \frac{\alpha}{2} \tilde{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t + \beta, \quad \beta = \varepsilon \delta_1. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Se define el estimador dinámico:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_t = -2\mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{vec} (\mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top).$$

Se propone  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}_n \otimes \Gamma$ ,  $0 < \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Usando las propiedades del producto de Kronecker, resulta que:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_t = \mathbf{vec} (\Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top),$$

y en vista de que  $\dot{\tilde{\vartheta}}_t = \mathbf{vec} (\dot{\tilde{\Theta}}_t)$ , resulta:

$$\dot{\tilde{\Theta}}_t = -2\Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top.$$

Usando el hecho de que  $\tilde{\Theta}_t = \Theta_t - \hat{\Theta}_t$ , y dado que el sistema real dado por el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es invariante, resulta el estimador de parámetros (4.30). Por otro lado, considere el siguiente resultado acerca del error de estimación.

**Lema 4.5 (Sobre las cotas del estimado del error).** *Bajo la condición de que  $\mathcal{D} \ni x_t$  define un conjunto compacto, el error de estimación paramétrica  $\tilde{\Theta}_t$  está acotado como:*

$$\|\tilde{\Theta}_t\|^2 \leq 4\text{tr} \left\{ \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) \right\} \|x_t\|^4. \quad (4.32)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_t^\top \Gamma \tilde{\Theta}_t \right) &\leq 2\alpha n^3 \{ x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \\ &\quad + n^4 x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_1 x_t \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

*Demostración.* A partir de la definición del estimador paramétrico, sigue que:

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\Theta}}_t\|^2 &= 4\text{tr} (\varphi_t x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 x_t \varphi_t^\top), \\ &= 4\varphi_t^\top \varphi_t x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 x_t. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Entonces:

$$\|\dot{\tilde{\Theta}}_t\|^2 = 4x_t^\top \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) x_t x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 x_t. \quad (4.35)$$

Usando el hecho **F1)** en la última expresión del Lema 2, queda que:

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\Theta}}_t\|^2 &\leq 4\text{tr} \left\{ \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) x_t x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \right\} \|x_2\|^2, \\ &\leq 4x_t^\top \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) x_t \|x_t\|^2, \\ &\leq 4\text{tr} \left\{ \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) \right\} \|x_t\|^4. \end{aligned} \quad (4.36)$$

En una región pequeña  $\|x_t\|^2 \leq 1$ , se cumple que  $\|x_t\|^4 \leq \|x_2\|^2$ . Por lo tanto, usando el teorema del valor principal queda que:

$$\|\tilde{\Theta}_t\|^2 \leq 4\text{tr} \left\{ \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \left( \mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right) \right\} \|x_t\|^4. \quad (4.37)$$

Por otro lado, es claro que:

$$\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\Theta}_t^\top \Gamma \tilde{\Theta}_t \right\} = \frac{\alpha}{2} \|\tilde{\Theta}_t\|_F^2. \quad (4.38)$$

Usando la propiedad de que  $\|\mathbf{MN}\|_F \leq \|\mathbf{M}\|_2 \|\mathbf{N}\|_F$  resulta:

$$\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\Theta}_t^\top \Gamma \tilde{\Theta}_t \right\} \leq \frac{\alpha}{2} \text{tr} (\Gamma) \|\tilde{\Theta}_t\|_2^2. \quad (4.39)$$

al combinar esta expresión con (4.32), sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\Theta}_t^\top \Gamma \tilde{\Theta}_t \right\} &\leq 2\alpha \text{tr} (\Gamma) \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{P}_1 \Gamma^{-2} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \right\} \|x_t\|^4, \\ &\leq 2\alpha \text{tr} (\Gamma^{-1}) \text{tr} \left( \mathbf{P}_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{P}_1 \right) \|x_t\|^4, \\ &\leq 2\alpha n^2 x_t^\top \Gamma^{-1} x_t x_t^\top \left( \mathbf{P}_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{P}_1 \right) x_t. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Procede que:

$$\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_t^\top \Gamma \tilde{\Theta}_t \right) \leq 2\alpha n^2 \text{tr} \left\{ \left( \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{K}}_t^\top \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{P}_1 \right) \Gamma^{-1} \right\} \|x_t\|^4.$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_t^T \Gamma \tilde{\Theta}_t \right) &\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} \left( \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \right) \|x_t\|^4 \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} \left( \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 \right) \text{tr} \left( \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \right) \|x_t\|^4 \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} \left( \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1^2 \right) \text{tr} \left( \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \right) \|x_t\|^4 \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^2 x_t^T \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1^2 x_t x_t^T \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t x_t \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^2 \text{tr} \left( \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1^2 \right) \|x_t\|^4 \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_t^T \Gamma \tilde{\Theta}_t \right) &\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^2 \text{tr} \left( \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-1} \right) \text{tr} \left( \mathbf{P}_1^2 \right) \|x_t\|^4 \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^4 x_t^T \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-\frac{1}{2}} x_t x_t^T \mathbf{P}_1^2 x_t \right\} \\
&\leq 2\alpha n^2 \left\{ n x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^4 \text{tr} \left( \mathbf{P}_1^2 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-\frac{1}{2}} \right) \|x_t\|^4 \right\}
\end{aligned}$$

y resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_t^T \Gamma \tilde{\Theta}_t \right) &\leq 2\alpha n^3 \left\{ x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 x_t \right. \\
&\quad \left. + n^4 x_t^T \mathbf{P}_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_t^T \hat{\mathbf{K}}_t \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_1 x_t \right\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

■

Este resultado y el estimador de parámetros convierten (4.31) en:

$$\dot{V}(x_t, \tilde{\vartheta}_t) \leq z_t^T \mathbf{W}_t z_t - \alpha V(x_t, \tilde{\vartheta}_t) + \beta, \tag{4.42}$$

donde la matriz  $\mathbf{W}_t \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  esta dada en la proposición para cuando  $t = t_0$ , y  $z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_{x_t, t} \end{bmatrix}$ .

Se propone ahora la matriz negativa definida  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  tal que  $\mathbf{W}_t < \mathbf{\Pi} < 0$ . La expresión previa se convierte en:

$$\dot{V}(x_t, \tilde{\vartheta}_t) \leq -\alpha V(x_t, \tilde{\vartheta}_t) + \beta, \tag{4.43}$$

cuya solución coincide con el concepto de estabilidad *UUB* [37, 21]. A partir de este resultado, y en vista de que el error de estimación se encuentra acotado y las trayectorias de la función de Lyapunov convergen a una zona de estabilidad, sigue que  $\mathbf{W}_t \leq \mathbf{W}_0 \leq 0$ . Con ello resulta suficiente la solución de la desigualdad matricial  $\mathbf{W}_0 < 0$  dada en la proposición. ■

**Lema 4.6 (Sobre la factibilidad de la desigualdad matricial).** Permítase descomponer

la desigualdad matricial como sigue:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_0^\top \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top \mathbf{P}_1 \\ + \alpha \mathbf{P}_1 + \varepsilon \delta_2 \mathbf{I}_n + 2\alpha n^3 (\mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 \\ + n^4 \mathbf{P}_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_0^\top \hat{\mathbf{K}}_0 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_1) \end{array} \right\}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & -\varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\mathcal{P} = [\mathbf{P}_1, \mathbf{0}], \quad \mathcal{Q} = [\mathbf{0}, \mathbf{I}_n], \quad \Lambda = \mathbf{I}_n,$$

Los Kernels en cada caso se hallan como:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{P}} = [\mathbf{0}, \mathbf{I}_n]^\top, \quad \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} = [\mathbf{I}_n, \mathbf{0}]^\top, \quad (4.45)$$

y resultan las siguientes condiciones de factibilidad:

1.  $\mathcal{W}_{\mathcal{P}}^\top \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{P}} = -\varepsilon \mathbf{I}_n < 0$ , la cual resulta cierta en virtud de que  $0 < \varepsilon$ .
2.  $\mathcal{W}_{\mathcal{Q}}^\top \Psi \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} = \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{A}}_0^\top \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top \mathbf{P}_1 + \alpha \mathbf{P}_1 + \varepsilon \delta_2 \mathbf{I}_n + 2\alpha n^3 (\mathbf{P}_1 \Gamma^{-1} \mathbf{P}_1 + n^4 \mathbf{P}_1 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{K}}_0^\top \hat{\mathbf{K}}_0 \Gamma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_1)$ , lo que es equivalente a la controlabilidad del par  $(\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0)$ .

Por lo que la desigualdad matricial es factible.

**Lema 4.7 (Sobre la solución de la desigualdad matricial).** *Se define la siguiente transformación de coordenadas:*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{-1} & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & , & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Es claro que  $\Delta = \mathbf{T}^\top \mathbf{W} \mathbf{T} < \mathbf{0}$  entonces  $\mathbf{W} < \mathbf{0}$ . Al mismo tiempo se define  $\mathbf{X} = \mathbf{P}_1^{-1}$  y  $\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{K}}_0 \mathbf{P}_1^{-1}$ . Del mismo modo se propone  $\Gamma = \gamma^2 \mathbf{P}_1^2$ . Resulta la desigualdad siguiente:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{X} + \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{Y} \\ + \mathbf{Y}^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top + \alpha \mathbf{X} + \\ \left( \varepsilon \delta_2 + \frac{2\alpha n^3}{\gamma^2} \right) \mathbf{X}^2 + \frac{2\alpha n^7}{\gamma^2} \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} \end{array} \right\}, & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n, & -\varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} < 0$$

que puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{X} - \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{Y} & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{Y}^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top - \alpha \mathbf{X} & \varepsilon \mathbf{I}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \eta_2 \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{0} \end{bmatrix} > 0$$

usando el complemento de Schur resulta que:

$$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{A}}_0 \mathbf{X} - \mathbf{X} \hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{Y} & , & -\mathbf{I}_n & , & \mathbf{X} & , & \mathbf{Y}^\top \\ -\mathbf{Y}^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top - \alpha \mathbf{X} & , & \varepsilon \mathbf{I}_n & , & \mathbf{0} & , & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_n & , & \varepsilon \mathbf{I}_n & , & \mathbf{0} & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & , & \mathbf{0} & , & \eta_1^{-1} \mathbf{I}_n & , & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y} & , & \mathbf{0} & , & \mathbf{0} & , & \eta_2^{-1} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} > 0$$

que define una desigualdad matricial lineal.

**Lema 4.8 (Sobre el problema de minimización restringida).** *Considere la solución de la desigualdad diferencial (4.43):*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(x_t, \tilde{\vartheta}_t) \leq \frac{\beta}{\alpha},$$

Se obtiene la siguiente expresión

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ x_t^\top \left( \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{P}_1 \right) x_t + \frac{\alpha}{2\beta} \tilde{\vartheta}_t^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\vartheta}_t \right\} < 1.$$

Sea el estado extendido  $z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \tilde{\vartheta}_t \end{bmatrix}$ . La función de la elipsoide se convierte en:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ z_t^\top \left( \frac{\alpha}{\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \right) z_t \right\} \leq 1. \quad (4.46)$$

Para obtener una elipsoide de tamaño pequeño, y usando el hecho de que  $\text{tr}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{I}_n) \text{tr}(\mathbf{P})$ , resulta el siguiente problema de minimización restringida

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \frac{1}{2\gamma} \right) \text{tr}(\mathbf{P}_1), \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{W}_0 < 0, 0 < \mathbf{P}_1, 0 < \alpha, \varepsilon, \gamma \end{aligned} \quad (4.47)$$

tomando  $\alpha, \frac{1}{\beta}$  tan grande como sea posible.

## 4.6. Resultados numéricos y experimentales

### 4.6.1. Resultados numéricos para el sistema TLIPs

Considere los parámetros numéricos del sistema **TLIPS**, aplicados para probar los algoritmos diseñados. La simulación numérica fue desarrollada en Matlab/Simulink usando un

$M_1 = 0.2Kg$	$l_1 = 0.2m$	$\delta_2 = 0.05$
$M_2 = 0.2Kg$	$l_2 = 0.25m$	$\delta_c = 0.1$
$M_3 = 0.25Kg$	$l_3 = 0.29m$	$\delta_i = 7$
$L_a = 0.612mH$	$Ra = 2.44\Omega$	$\delta_v = 4$
$K_\tau = 82.2mNm/A$	$K_{emf} = 116rpm/V$	$\lambda_m = 0.0001$

Tabla 4.1: Parámetros numéricos del **TLIPS**.

solucionador de paso fijo tipo Runge-Kutta con tamaño de paso 0.0001. La desigualdad matricial es resuelta numéricamente mediante *cvx-sedumi* al aplicar un cambio de variable que la transforma en una desigualdad lineal. Para todas las pruebas de simulación se considera la condición inicial  $x_0 = [0, -0.023\pi, 0.02\pi, -0.001\pi, 0, 0, 0]$ , mientras se induce el siguiente término en la perturbación en el intervalo de tiempo  $t_p \in [2.5, 3]$ :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} 0.001 \sin(30t) + 0.005 \cos(60t + 0.2) \\ 0.0001 \cos(5t) + 0.005 \sin(120t + 0.1) \\ 0.0001 \sin(2t) + 0.0001 \cos(10t + 0.4) \end{bmatrix},$$

como

$$\psi(t) = H_{t_{2.5}} - H_{t_3},$$

donde  $H_{t_s}$  es la función escalón de Heaviside definida como:

$$H_{t_s} = \begin{cases} 1, & \text{if } t_s \geq 0 \\ 0, & \text{if } t_s < 0 \end{cases}$$

de modo que  $\delta_1 = 0.001$ . Las figuras 4.1-4.4 muestran el desempeño del sistema de control en lazo cerrado; aquí, las líneas azules refieren la respuesta a un controlador sintonizado por **AEM**, mientras que las líneas rojas y verdes indican la respuesta ante el controlador **SMC** dinámico y **SMC** integral, respectivamente. La figura Fig. 4.1 muestra el comportamiento de las variables articulares  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$ , donde puede apreciarse un comportamiento por demás similar en cada caso.

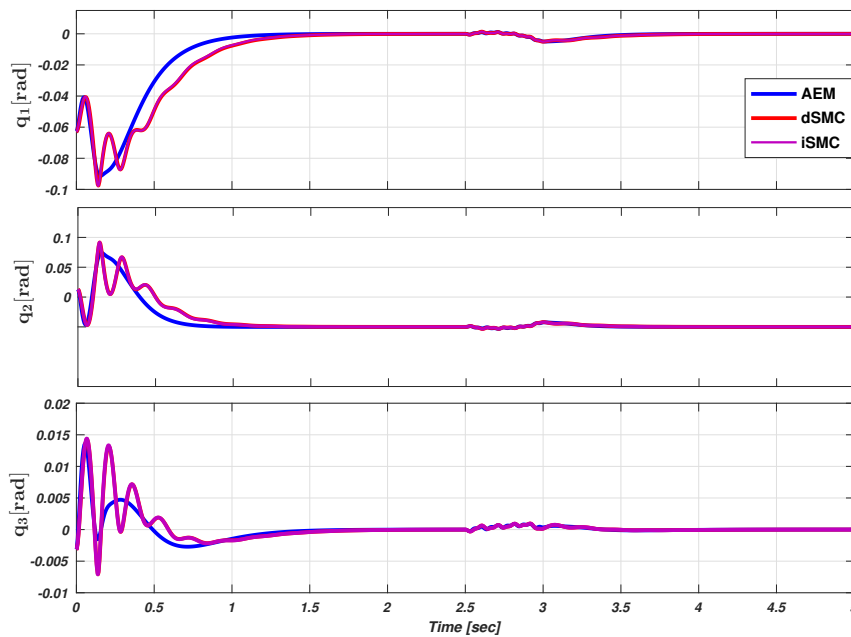


Figura 4.1: Trayectorias de posición del sistema triple-péndulo invertido

La figura 4.2 muestra el comportamiento de velocidad; puede apreciarse que la velocidad cae a un valor muy próximo a cero cuando  $t = 0.5$  segundos en el caso del controlador basado en **AEM**, mientras que para las estrategias basadas en **SMC** esto ocurre alrededor de los 0.75 segundos.

La figura Fig. 4.3 muestra la forma de la corriente de armadura del motor de cd. Note como en el caso de la estrategia basada en el método de elipsoide atractivo ésta alcanza un valor cercano a los 3.8 amperes mientras que los controladores por modos deslizantes la llevan a un nivel máximo de 3.5 amperes. La figura 4.4 muestra que la estrategia basada en **AEM** demanda una señal de control de hasta 27 volts, y las estrategias de **SMC** requieren de un máximo de 8 volts aproximadamente.

La figura 4.5 muestra el comportamiento de las variables de deslizamiento para el controlador por modo deslizante dinámico; puede apreciarse que se alcanza la superficie de deslizamiento en 0.025 segundos; en el caso del controlador por **iSMC** esto sucede a los 1.2 segundos aproximadamente, como se ve en la figura 4.6.

La tabla 4.2 resume algunos de los parámetros más importantes de la respuesta para cada controlador, donde  $t_s$  define el tiempo de asentamiento,  $M_p$  y  $m_p$  el sobreimpulso máximo y subimpulso mínimo, respectivamente, considerando un nivel de tolerancia del 2%. Estos

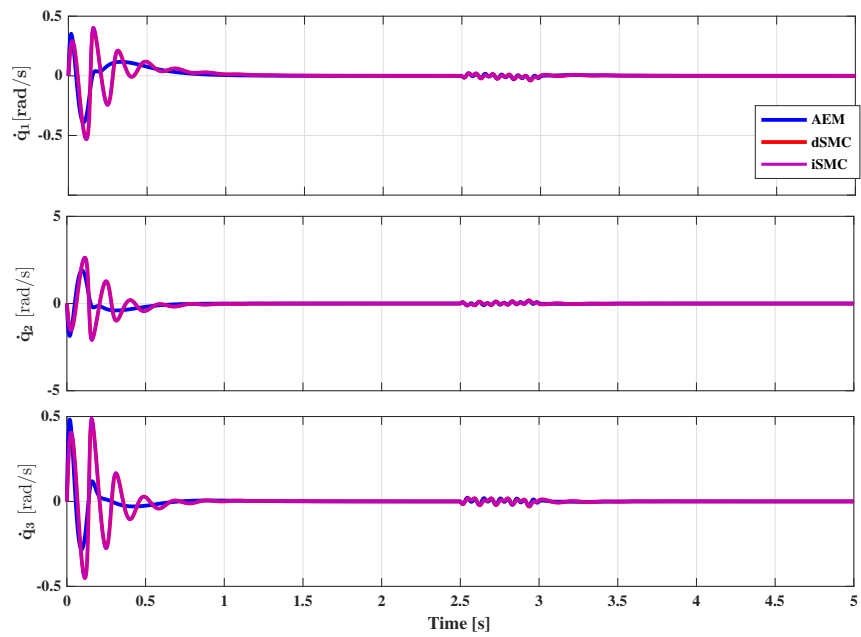


Figura 4.2: Comportamiento de velocidad.

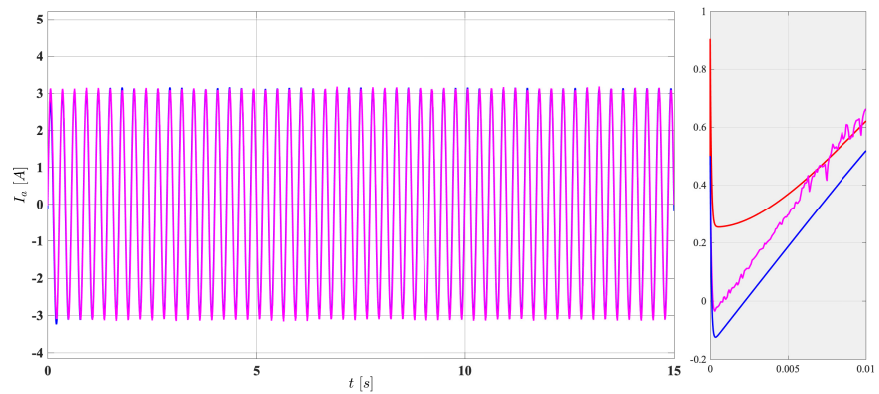


Figura 4.3: Corriente de armadura del motor.

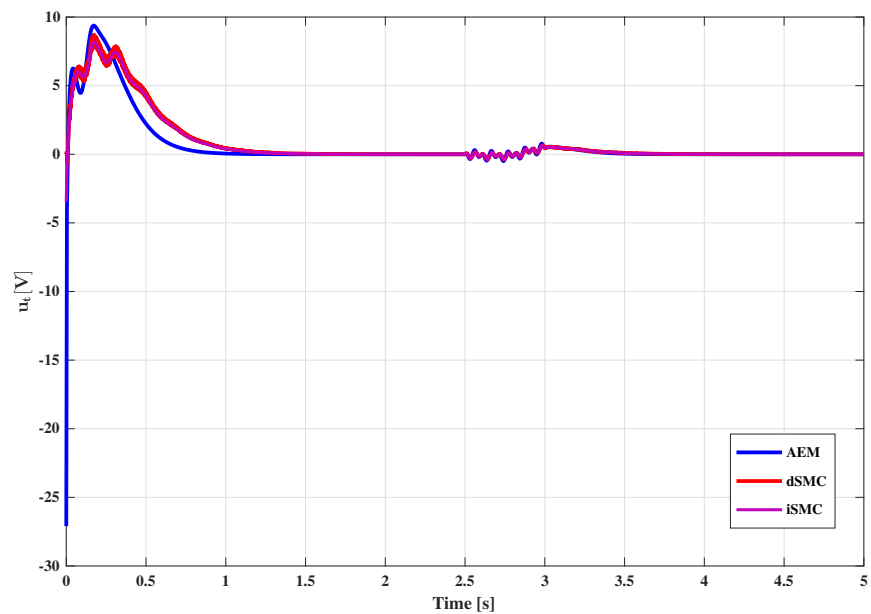


Figura 4.4: Señal de control de voltaje.



parámetros se miden a partir de la respuesta de posición del tercer eslabón, en virtud de que esta variable es afectada de manera pobre por la entrada de control. Finalmente,  $|u|_{max}$  representa el nivel máximo de control en cada caso.

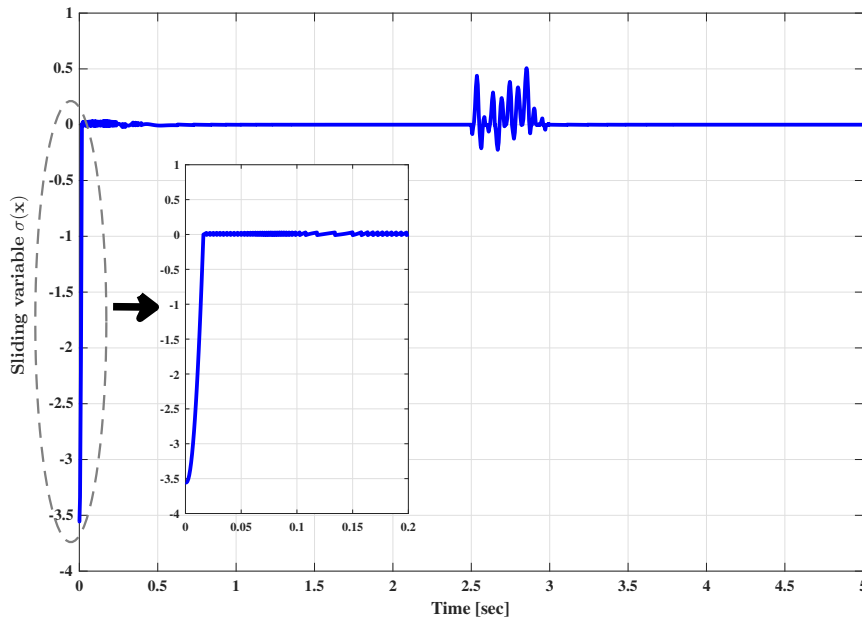


Figura 4.5: Variable de deslizamiento para el dSMC.

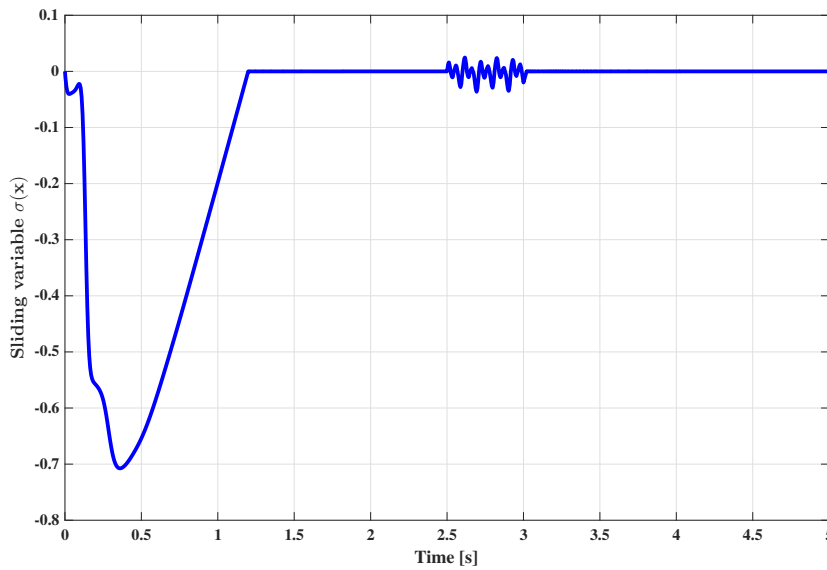


Figura 4.6: Variable de deslizamiento para el iSMC.

	Control por AEM	dSMC	iSMC
$t_s$	1.72 s	1.975 s	1.975 s
$M_p$	0.0136 rad	0.0143 rad	0.0144 rad
$m_p$	-0.0031 rad	-0.007 rad	0.007 rad
$ u _{max}$	27.92 V	8.68 V	8.15 V

Tabla 4.2: Características de la respuesta en lazo cerrado.

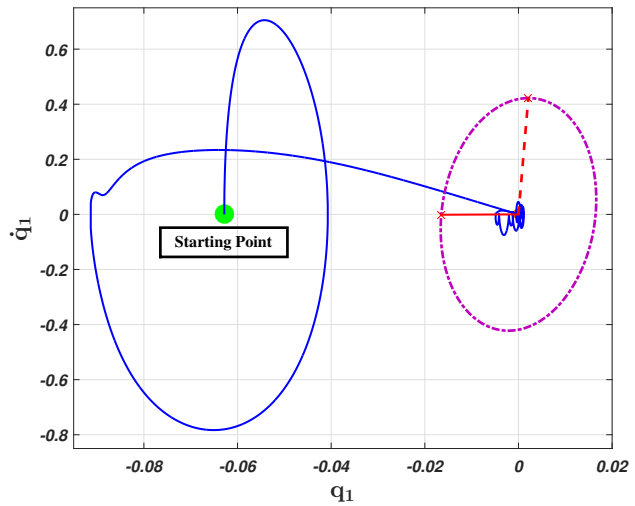


Figura 4.7: Elipsoide atractiva para el primer eslabón.

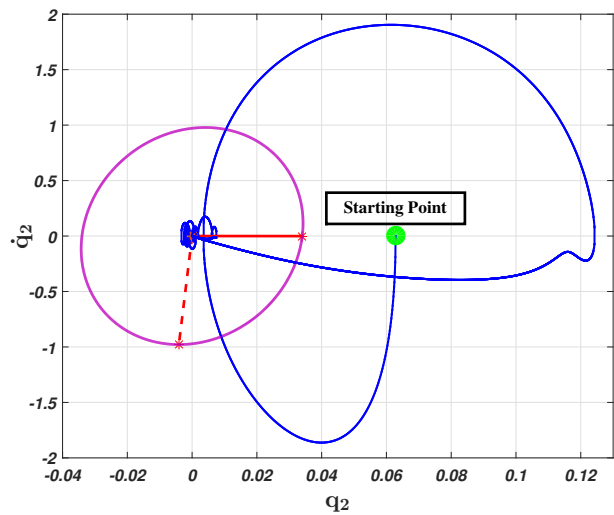


Figura 4.8: Elipsoide atractiva para el segundo eslabón.

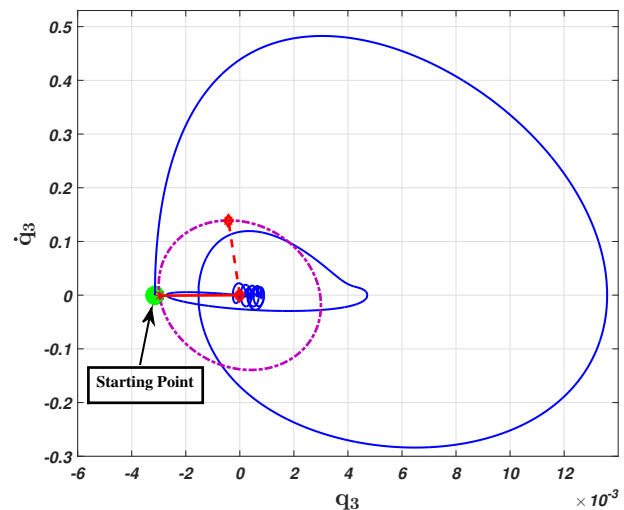


Figura 4.9: Elipsoide atractiva para el tercer eslabón

Por otro lado, las figuras 4.7-4.9 muestran proyecciones de la elipsoide invariante. Se muestran las elipsoides definidas por posición y velocidad de cada uno de los eslabones, y es posible apreciar que las trayectorias se mantienen dentro de la elipsoide una vez que son atraídas.

### 4.6.2. Resultados numéricos para el sistema mecatrónico Pendubot

En esta sección se muestran los resultados numéricos del *Pendubot* actuado por motores PMDC. Aquí se ha aplicado el controlador robusto diseñado en la sección 4.4. Los parámetros numéricos se muestran en la tabla 4.4. Para el vector de perturbaciones e incertidumbres,

$m_1 = 0.13Kg$	$l_{c_2} = 0.108m$	$K_\tau = 0.0822 \left[ \frac{Nm}{A} \right]$
$m_2 = 0.08Kg$	$J_1 = 11.6 \times 10^{-6} [kgm^2]$	$g = 9.81m/s^2$
$l_1 = 0.275m$	$L_a = 612\mu H$	$\lambda_m = 0.00154, \lambda_M = 0.011$
$l_2 = 0.292m$	$R_a = 2.44\Omega$	$\delta_C = 0.01, \delta_G = 0.1$
$l_{c_1} = 0.206m$	$K_{emf} = 116rpm/V$	$\delta_q = 0.6$

Tabla 4.3: Parámetros numéricos del Pendubot.

que se considera cuasi-Lipschitz, se toma  $\delta_1 = 0.1$  and  $\delta_2 = 0.1$ . Se obtienen las siguientes ganancias numéricas

$$\varepsilon = 3 \times 10^{-9}, \alpha = 1 \times 10^{-3}, \rho_1 = 1 \times 10^{12}, \rho_2 = 10 \times 10^6,$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2.5426 & 0.0044 \\ 0.0044 & 2.5429 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{11} = 4.3519, \mathbf{P}_{12} = [152.338 \quad 0.883],$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 3.3572 & 0 \\ 0 & 3.3572 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = [2.2620 \quad -216.5245 \quad -229.9265 \quad -35.8202 \quad -32.8927],$$

En este caso la experimentación numérica consiste en la introducción de incertidumbre en los parámetros del sistema. La condición inicial se establece en  $x_0 = [0 \quad 0.06\pi \quad -0.06\pi \quad 0 \quad 0]$ . La figura 4.10 muestra el comportamiento de posición de los eslabones, y la figura 4.11 el comportamiento de velocidad; puede apreciarse que las trayectorias del sistema convergen a una elipsoide en alrededor de 4 segundos. La figura 4.12 muestra el voltaje y corriente de armadura, donde puede apreciarse que el nivel máximo de voltaje requerido es de alrededor de  $12V$ , mientras que la demanda de corriente es menor a los  $5A$ . Estos resultados sugieren que es posible aplicar esta señal de control en el sistema de experimentación en tiempo real. Las figuras 4.13 y 4.14 corresponden a la elipsoide de la parte mecánica y sirven como evidencia para concluir con estabilidad **UUB**.

## 4.7. Resultados experimentales

Considere el péndulo sobre el carro cuyos parámetros aproximados están dados en la tabla 4.4. La figura 4.15 muestra un diagrama acerca de su instrumentación electrónica. La plataforma experimental cuenta con un encoder óptico que mide el desplazamiento angular del péndulo y un potenciómetro de precisión para cuantificar el desplazamiento del carro. Ambos sensores han sido parametrizados numéricamente usando el método de mínimos cuadrados.

Los resultados experimentales se obtuvieron en dos escenarios distintos. En el primero se considera la estabilización alrededor del origen, es decir,  $q_d = (0, 0)$ ,  $\dot{q}_d = (0, 0)$ , con las condiciones iniciales en posición  $q_0 = (0.1, 0)$ , y velocidad cero. Los resultados se muestran en las figuras 4.16-4.19.

Por otro lado se cuenta con un experimento de seguimiento de trayectoria. Las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23 muestran el desempeño del sistema experimental.

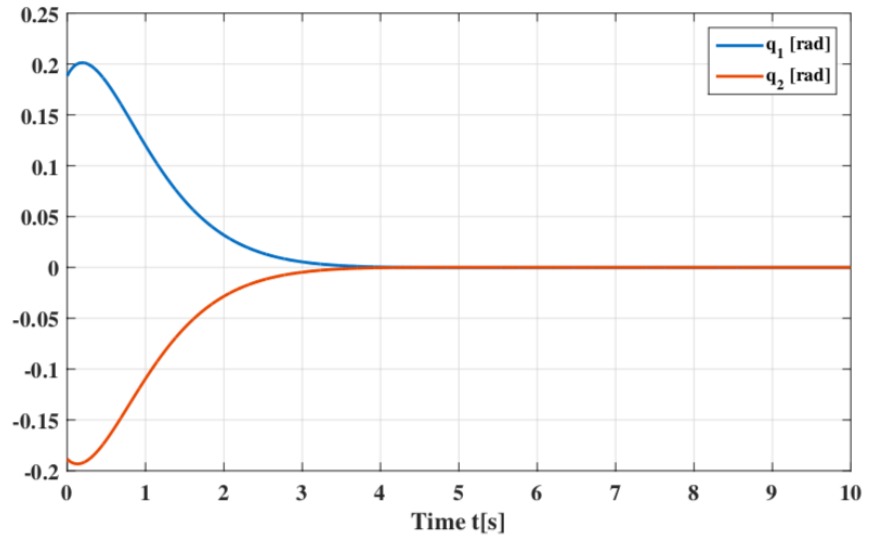


Figura 4.10: Respuesta de posición para el sistema Pendubot.

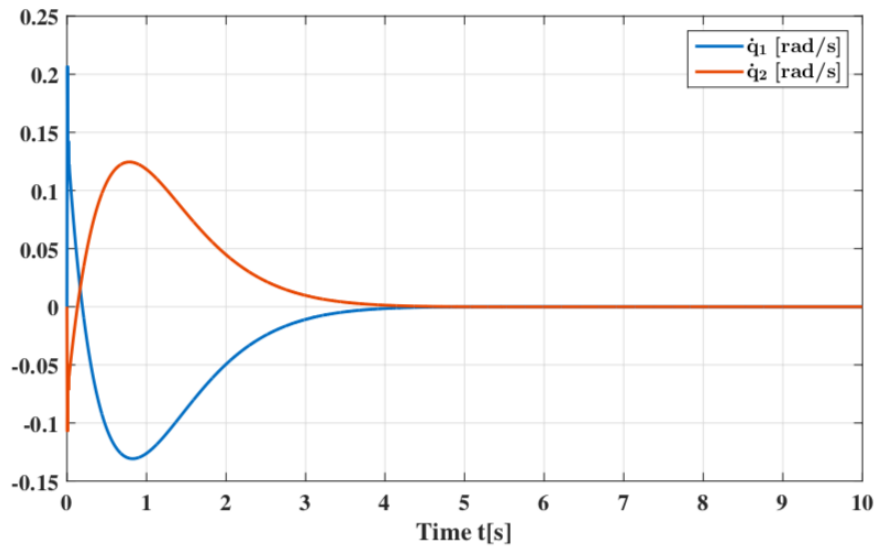


Figura 4.11: Respuesta de velocidad del sistema Pendubot.

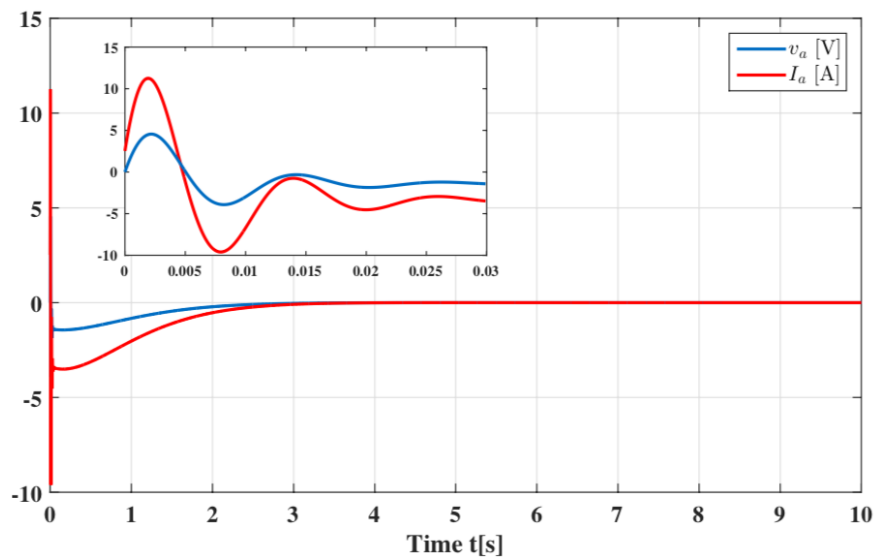


Figura 4.12: Señales eléctricas del actuador del sistema Pendubot.

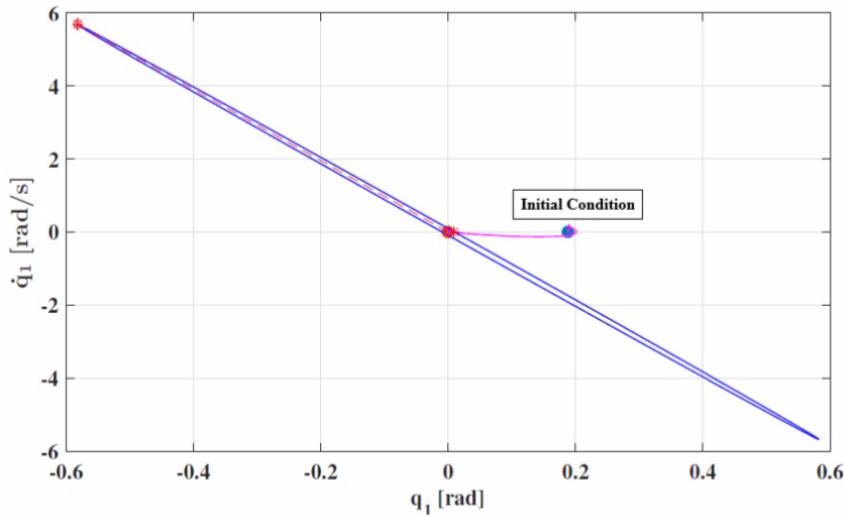


Figura 4.13: Elipsoide atractiva correspondiente a la respuesta del Pendubot.

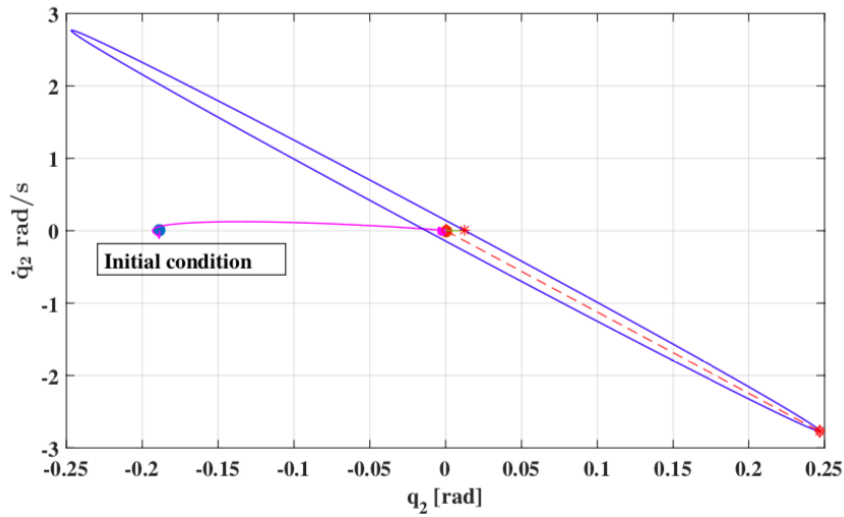


Figura 4.14: Elipsoide atractiva correspondiente a la respuesta del Pendubot.

## 4.8. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el diseño de algunas estrategias de control para sistemas pendulares subactuados impulsados por motores de cd de imanes permanentes usando el método de elipsoide atractivo y teoría de modos deslizantes tomando en cuenta la representación lineal(cuasi-lineal) del robot. Las estrategias de control robusto tienen como propósito mejorar la robustez respecto de la propiedad de controlabilidad de la aproximación lineal.

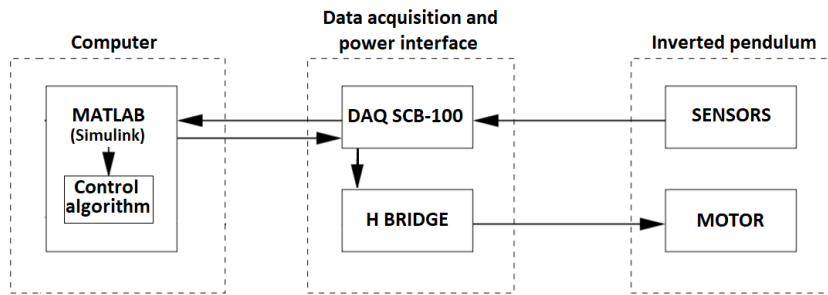


Figura 4.15: Instrumentación del péndulo sobre el carro.

Parámetros físicos	Valor numérico
$M$ : masa del carro.	$0.3 [kg]$
$m$ : masa del péndulo.	$0.221 [kg]$
$l$ : longitud del péndulo.	$0.65 [m]$
$l_c$ : distancia al centro de masa.	$0.325 [m]$
$g$ : aceleración de la gravedad.	$9.81 [\frac{m}{s^2}]$

Tabla 4.4: Parámetros numéricos del sistema real.

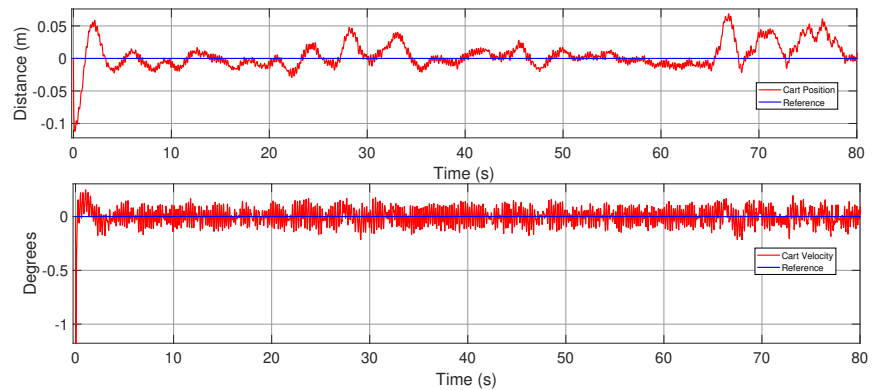


Figura 4.16: Respuesta de desplazamiento del carro ante la acción de control robusto-adaptable.

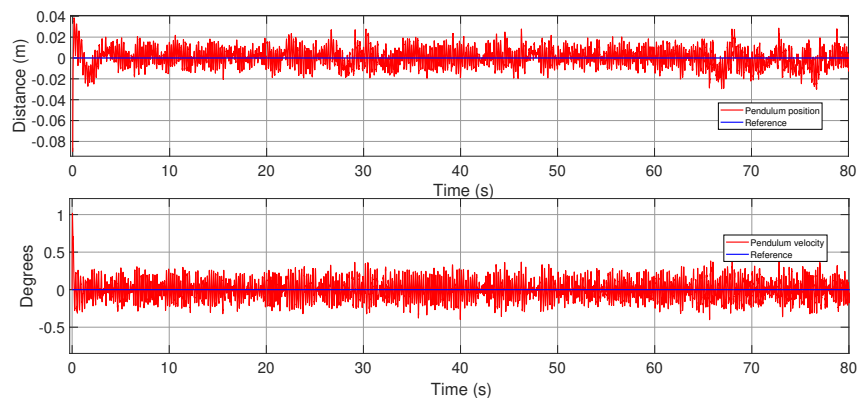


Figura 4.17: Respuesta de desplazamiento del péndulo ante la acción de control robusto-adaptable.

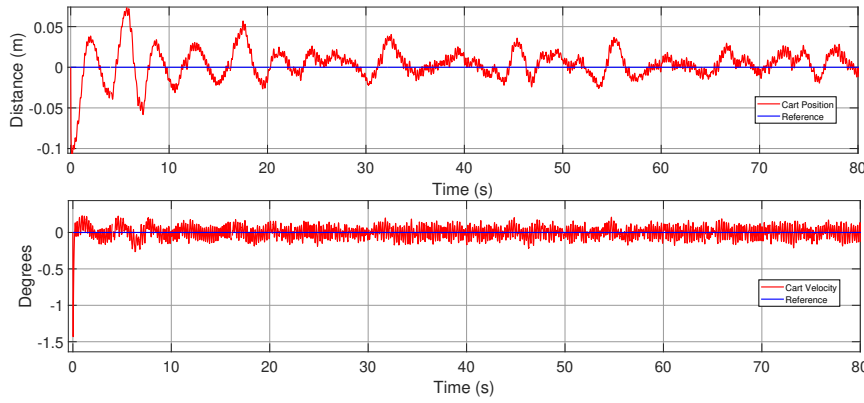


Figura 4.18: Respuesta de desplazamiento del carro ante la acción de control robusto por **AEM**.

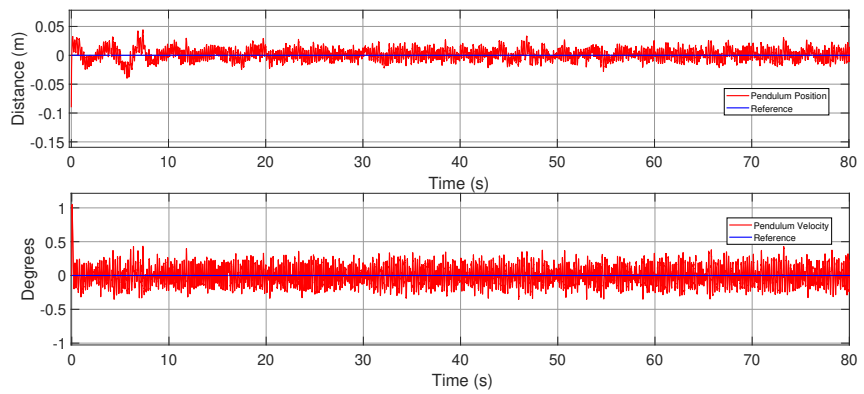


Figura 4.19: Respuesta de desplazamiento del péndulo ante una acción de control robusto por **AEM**.

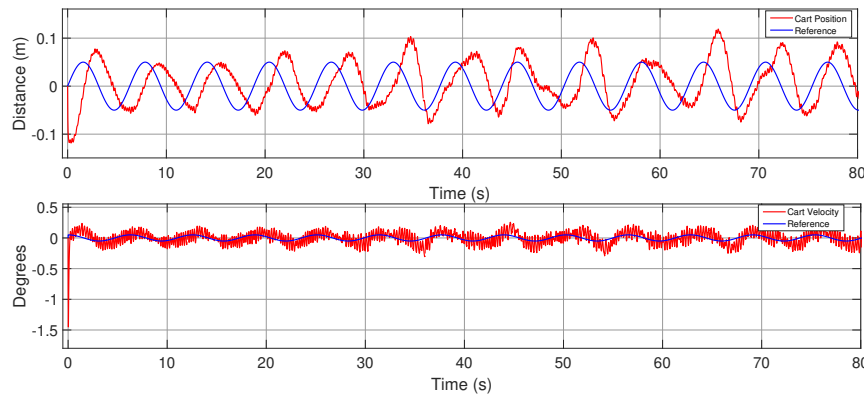


Figura 4.20: Seguimiento de trayectoria del carro usando **APPC**.

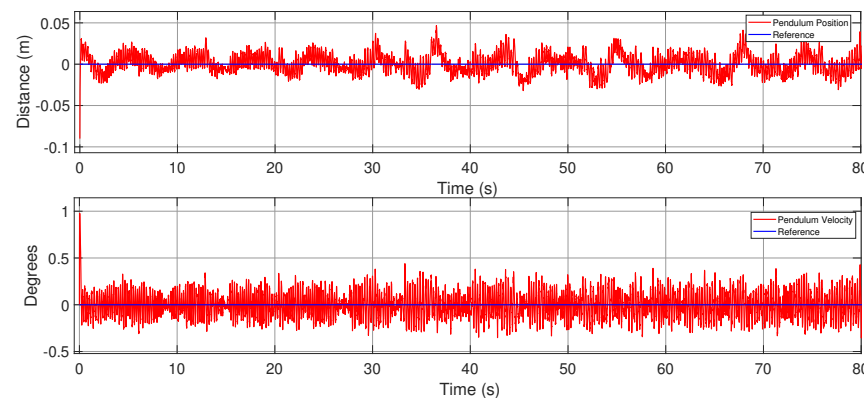


Figura 4.21: Seguimiento de trayectoria del péndulo usando **APPC**.

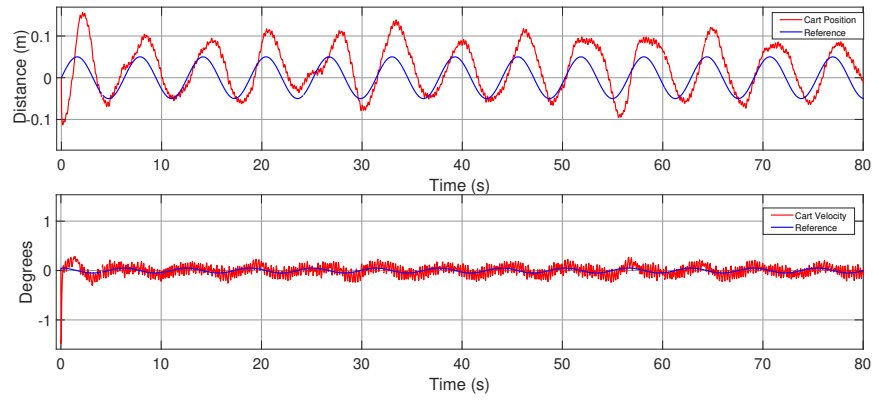


Figura 4.22: Respuesta del control robusto de seguimiento de trayectoria del carro.

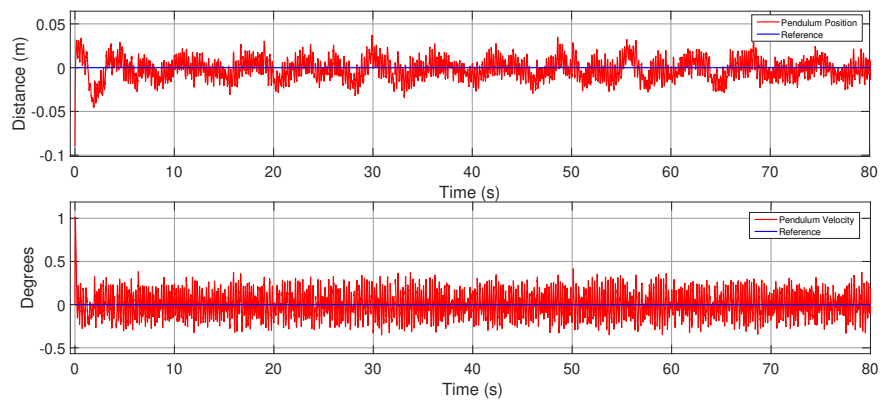


Figura 4.23: Respuesta del control robusto de seguimiento de trayectoria del péndulo.



# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 5.1. Conclusiones Generales

El trabajo desarrollado trata del diseño y aplicación de técnicas de estimación del estado e identificación paramétrica para el control de robots subactuados del tipo pendular directamente actuados por motores de CD de imanes permanentes, en presencia de perturbaciones externas. El enfoque adoptado considera las diferentes circunstancias que suelen aparecer en un entorno de experimentación real, tales como incertidumbre paramétrica y de modelado, inexactitud en la medición, la imposibilidad para medir todas las variables del estado, perturbaciones externas, entre otras afines. De acuerdo con los resultados reportados, se generan las conclusiones que se enumeran a continuación.

- **Modelado y análisis:** el *Capítulo 2* contiene el desarrollo relacionado con el modelado y análisis de los sistemas mecánicos subactuados impulsados por motores eléctricos. Un conjunto de 10 proposiciones han sido desarrolladas, acompañadas de algunos lemas y corolarios que ayudan a establecer propiedades útiles en el diseño de control robusto.
  - La *Proposición 2.1*, *Proposición 2.2* y *Proposición 2.3* contienen los modelos vectoriales para un conjunto de motores de cd de imanes permanentes, motores a pasos de imanes permanentes y motores de cd sin escobillas, respectivamente.
  - Las proposiciones *Proposición 2.4*, *Proposición 2.5* y *Proposición 2.6* describen el acoplamiento del modelo del mecanismo subactuado con los actuadores eléctricos descritos en las proposiciones *2.1*, *2.2* y *2.3*; los resultados también son aplicables para el caso completamente actuado.
  - La *Proposición 2.7* muestra la representación no lineal en el espacio del estado del sistema mecatrónico subactuado impulsado por motores de cd de imanes permanentes (descrito en la proposición 2.4). La *Proposición 2.8* y *Proposición 2.9* muestran dos representaciones alternativas en el espacio del estado de gran utilidad: *la representación cuasi-lineal* y *la representación no lineal alternativa* respectivamente; esta última aprovecha la afinidad del control y del modelo no lineal para incluir los efectos de la matriz de inercia y Coriolis, así como los parámetros eléctricos en la matriz del sistema.
  - La *Proposición 2.10* contiene la forma paramétrico lineal para los sistemas mecánicos subactuados impulsados por motores de cd de imanes permanentes descrito en la *Proposición 2.4*.

- **Estimación del estado:** el *Capítulo 3* concentra los resultados obtenidos respecto a la observación del estado. Un total de 5 proposiciones reflejan los resultados principales en este caso, acompañadas por 11 lemas desarrollados para dar soporte a la validez de los algoritmos diseñados.
  - La *Proposición 3.1* contiene el diseño de un observador de orden completo basado en la forma cuasi-lineal y el método del elipsoide atractivo, que garantiza la reconstrucción de las variables medibles y la estimación de las no disponibles en condiciones experimentales. Los lemas *Lema 3.1*, *Lema 3.2* y *Lema 3.3* acompañan a este resultado para garantizar la solución del problema de observación a través de este método.
  - La *Proposición 3.2* contiene el diseño de un observador de orden reducido basado en la forma cuasi-lineal y el método de elipsoide atractivo, que permite estimar únicamente las variables no medibles. Los lemas *Lema 3.4*, a *Lema 3.7* acompañan a la proposición para garantizar los resultados esperados.
  - La *Proposición 3.3* describe el diseño de un observador de orden reducido basado en el modelo no lineal y el método del elipsoide atractivo. Este algoritmo permite estimar las variables eléctricas (corrientes de armadura) de los actuadores y las velocidades articulares del sistema mecánico, con el conocimiento pleno de las variables que describen la configuración del mismo. Los lemas *Lema 3.8* y *Lema 3.9* sirven de apoyo para mostrar la aplicabilidad del método descrito en la proposición para garantizar los resultados esperados.
  - Las proposiciones *Proposición 3.4* y *Proposición 3.5* en conjunto definen un observador de orden completo basado en la forma cuasi-lineal, modos deslizantes y el método del elipsoide atractivo, que permite reconstruir las variables medibles en tiempo finito y estimar las no medibles de forma precisa, y en presencia de efectos de perturbaciones acopladas y no acopladas. Los lemas *3.10* y *3.11* soportan la funcionalidad del algoritmo.
- **Estimación paramétrica:** la *Sección 3.7* del *Capítulo 3* describe los resultados obtenidos en el diseño de estimadores paramétricos para la case de sistemas propuesta, a través de dos proposiciones debidamente demostradas.
  - La *Proposición 3.6* describe el diseño de un estimador paramétrico por mínimos cuadrados recursivos con factor de olvido, que permite estimar la matriz del sistema y de salida de la representación cuasi-lineal apropiadamente; la demostración muestra que los parámetros estimados convergen de forma asintótica a los valores reales de la dinámica, mostrando cierto grado de robustez respecto a efectos de perturbación e incertidumbre.
  - La *Proposición 3.7* muestra un estimador del mismo tipo, que permite estimar los parámetros del sistema propuesto dado en la representación paramétrico-lineal.
- **Diseño de control** El *Capítulo 4* concentra el trabajo relativo a el diseño de control para la clase de sistemas propuestos; estos resultados se definen en 5 proposiciones y 8 lemas de apoyo.
  - La *Proposición 4.1* define un controlador robusto basado en **AEM**, que garantiza la convergencia de las trayectorias del sistema hacia una vecindad de un equilibrio inestable, en presencia de efectos de perturbación, incertidumbre paramétrica y

de modelo, así como defectos en la reconstrucción de las variables del estado. Los lemas *Lema 4.1* al *Lema 4.3* sirven de apoyo para la solución del problema y la obtención de los resultados esperados.

- Las proposiciones *Proposición 4.2* y *Proposición 4.3* describen un par de métodos basados en modos deslizantes dinámicos e integrales, respectivamente, para el control robusto de la clase de sistemas de interés a partir de la representación cuasi-lineal. En ambos casos se hace mención sobre la aplicabilidad de los resultados en un sistema experimental, dada la bondad de que la estrategia de control se hace pasar a través de la dinámica de los actuadores eléctricos.
- En la *Proposición 4.4* se presenta el diseño de un controlador por retroalimentación estática del estado a partir del modelo no lineal descrito en la *Proposición 2.9* y basado en el método del elipsoide atractivo. El *Lema 4.4* muestra la forma en la que se resuelve el problema de minimización a través de la solución de una desigualdad matricial equivalente.
- La *Proposición 4.5* muestra el diseño de un controlador robusto-adaptable por ubicación de polos, donde el proceso de adaptación se hace de forma indirecta a través de un estimador paramétrico de la dinámica cuasi-lineal. Los lemas *Lema 4.5* a *Lema 4.8* garantizan la solución del método para la obtención de los resultados esperados.

Además, los capítulos 2 y 3 muestran resultados numéricos y experimentales para los diseños propuestos. Estos se muestran a través de gráficas y tablas que evidencian la funcionalidad de los algoritmos desarrollados.

## 5.2. Lista de publicaciones

El trabajo desarrollado ha concluido con la publicación de los trabajos siguientes.

- I) Sanchez B., Ordaz P. and Poznyak G., *Robust Stabilizing Control for the Electromechanical Triple-Link Inverted Pendulum System*, Second Conference on Modeling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON), Guadalajara, Mexico, June, 2018.
- II) Sanchez B., Ordaz P. and Poznyak G., *Pendubot Robust Stabilization Based on Attractive Ellipsoid Method Using Electromechanical Model*, 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Mexico City, Mexico, September, 2018.
- III) *Full-Order Observer for a Class of Nonlinear Systems With Unmatched Uncertainties: Joint Attractive Ellipsoid and Sliding Mode Concepts*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019.
- IV) *Robust State-Estimation for Underactuated Systems Using Sliding Modes and Attractive Ellipsoid Method: A Comparative Experimental Survey*, 1th Latin-American Symposium on Industrial and Robotic Systems, 2020.
- V) *Model based reduced-order observers for a class of mechatronic systems with mitigation of disturbances effects using the Attractive Ellipsoid Method*, Mechatronics, 2022

VI) *Robust and Adaptive Pole-Placement Control Using Attractive Ellipsoid Method*, The Institution of Engineering and Technology, *En construcción*.

### 5.3. Trabajo Futuro

De acuerdo con las conclusiones establecidas y los resultados descritos en cada sección puede entenderse que existe un gran campo de aplicación de los métodos desarrollados en diferentes áreas de la ingeniería, y que no se limitan a la clase de sistemas descritas en este trabajo. En perspectiva de la línea de investigación que se podría seguir, es posible considerar lo siguiente:

- los algoritmos desarrollados para sistemas mecánicos subactuados impulsados por motores de cd de imanes permanentes pueden extenderse (con los ajustes y consideraciones pertinentes) para la misma clase de sistemas, impulsados por motores a pasos y motores de cd sin escobillas, que representan el futuro de la ingeniería aplicada;
- el trabajo desarrollado y reportado en este documento no ha concluido con alguna técnica de estimación paramétrica en el caso que el estado del sistema no se encuentra plenamente disponible para su medición. Pese a que existen técnicas en la literatura que resuelven este problema en casos específicos, para el caso de sistemas mecatrónicos subactuados es aún un problema abierto y que resulta de gran interés;
- el control por ubicación de polos adaptable para sistemas dinámicos en general con indisposición plena del estado y con parámetros variantes en el tiempo son de gran interés, sobre todo desde el punto de vista del control robusto basado en el método del elipsoide atractivo;
- el control predictivo de modelo de esta clase de sistemas y en las condiciones experimentales que exhibe el trabajo, es un caso de estudio interesante.

Además, la aplicabilidad de los resultados obtenidos en situaciones experimentales, y su extensión hacia diferentes campos de la ciencia y la ingeniería aplicada, producen campos de investigación; la robótica cooperativa y la introducción de componentes flexibles en sustitución de ejes y eslabones para robots industriales completamente actuados, en un esfuerzo por garantizar la seguridad de los agentes, es un ejemplo claro sobre la aplicabilidad de los resultados de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] Bikramjit S Bhangu, Paul Bentley, David A Stone, and Christopher M Bingham. Non-linear observers for predicting state-of-charge and state-of-health of lead-acid batteries for hybrid-electric vehicles. *IEEE transactions on vehicular technology*, 54(3):783–794, 2005.
- [2] J Birk and M Zeitz. Extended luenberger observer for non-linear multivariable systems. *International Journal of Control*, 47(6):1823–1836, 1988.
- [3] Gary Bishop, Greg Welch, et al. An introduction to the kalman filter. *Proc of SIG-GRAPH, Course*, 8(27599-23175):41, 2001.
- [4] Raúl Campos-Rodríguez, Mildreth Alcaraz-Mejía, and José Mireles-García. Supervisory control of discrete event systems using observers. In *2007 Mediterranean Conference on Control & Automation*, pages 1–7. IEEE, 2007.
- [5] Asif Chalanga, Shyam Kamal, Leonid M Fridman, Bijnan Bandyopadhyay, and Jaime A Moreno. Implementation of super-twisting control: Super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(6):3677–3685, 2016.
- [6] Jie Chen, Ron J Patton, and Hong-Yue Zhang. Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of control*, 63(1):85–105, 1996.
- [7] John Chiasson. *Modeling and high performance control of electric machines*, volume 26. John Wiley & Sons, 2005.
- [8] A Coronel-Escamilla, JF Gómez-Aguilar, MG López-López, VM Alvarado-Martínez, and GV Guerrero-Ramírez. Triple pendulum model involving fractional derivatives with different kernels. *Chaos, Solitons & Fractals*, 91:248–261, 2016.
- [9] Mohamed Darouach, Michel Zasadzinski, and Shi Jie Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE transactions on automatic control*, 39(3):606–609, 1994.
- [10] Jorge Davila, Leonid Fridman, and Alexander Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262, 2006.
- [11] Christopher Edwards, Sarah K Spurgeon, and Ron J Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4):541–553, 2000.

- [12] Khaled Gamal Eltohamy and Chen-Yuan Kuo. Real time stabilisation of a triple link inverted pendulum using single control input. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 144(5):498–504, 1997.
- [13] Khaled Gamal Eltohamy and Chen-Yuan Kuo. Nonlinear optimal control of a triple link inverted pendulum with single control input. *International Journal of Control*, 69(2):239–256, 1998.
- [14] Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2001.
- [15] Aleksej Fedorovič Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] Graham C Freeland and Tariq S Durrani. Nonlinear state observers for chaotic systems and their application to communications. In *IEE Colloquium on Exploiting Chaos in Signal Processing*, pages 10–1. IET, 1994.
- [17] Pascal Gahinet and Pierre Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $h_\infty$  control. *International journal of robust and nonlinear control*, 4(4):421–448, 1994.
- [18] Fathi Ghorbel, B Srinivasan, and Mark W Spong. On the positive definiteness and uniform boundedness of the inertia matrix of robot manipulators. In *Proceedings of 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1103–1108. IEEE, 1993.
- [19] Tobias Glück, Andreas Eder, and Andreas Kugi. Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation. *Automatica*, 49(3):801–808, 2013.
- [20] Gene H Golub and Charles F Van Loan. *Matrix computations*. JHU press, 2013.
- [21] Wassim M Haddad and VijaySekhar Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, 2011.
- [22] Petros A Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*. Courier Corporation, 2012.
- [23] Rafael Kelly, Victor Santibáñez Davila, and Julio Antonio Loría Perez. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [24] Rafael Kelly and Víctor Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003.
- [25] Hassan K Khalil. *Nonlinear control*. Pearson New York, 2015.
- [26] Hassan K Khalil. *High-gain observers in nonlinear feedback control*. SIAM, 2017.
- [27] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [28] Hassan K Khalil and Laurent Praly. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6):993–1015, 2014.
- [29] Qingsong Liu and Bin Zhou. Extended observer based feedback control of linear systems with both state and input delays. *Journal of the Franklin Institute*, 354(18):8232–8255, 2017.

- [30] David Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6):596–602, 1971.
- [31] Johanna L Mathieu, Stephan Koch, and Duncan S Callaway. State estimation and control of electric loads to manage real-time energy imbalance. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(1):430–440, 2012.
- [32] Lazaros Moysis, Aggelos Giakoumis, Mahendra Kumar Gupta, Christos Volos, Vikas K Mishra, and Viet-Thanh Pham. Observers for rectangular descriptor systems with output nonlinearities: application to secure communications and microcontroller implementation. *International Journal of Dynamics and Control*, 9(2):530–540, 2021.
- [33] Reza Olfati-Saber. *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [34] Patricio Ordaz and Alex Poznyak. ‘kl’-gain adaptation for attractive ellipsoid method. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 32(3):447–469, 2015.
- [35] Romeo Ortega, Julio Antonio Loría Perez, Per Johan Nicklasson, and Hebertt J Sira-Ramirez. *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] Alex Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*, volume 1. Elsevier, 2010.
- [37] Alexander Poznyak, Andrey Polyakov, and Vadim Azhmyakov. *Attractive ellipsoids in robust control*. Springer, 2014.
- [38] AS Poznyak. Modelado matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos, 2005.
- [39] Philip Roan, Nikhil Deshpande, Yizhou Wang, and Benjamin Pitzer. Manipulator state estimation with low cost accelerometers and gyroscopes. In *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 4822–4827. IEEE, 2012.
- [40] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, and Arie Levant. Conventional sliding mode observers. In *Sliding Mode Control and Observation*, pages 105–141. Springer, 2014.
- [41] Dan Simon. *Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [42] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [43] Mark W Spong. Underactuated mechanical systems. In *Control problems in robotics and automation*, pages 135–150. Springer, 1998.
- [44] Mark W Spong, Seth Hutchinson, Mathukumalli Vidyasagar, et al. *Robot modeling and control*. 2006.

- [45] Changyin Sun, Wei He, Weiliang Ge, and Cheng Chang. Adaptive neural network control of biped robots. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics: systems*, 47(2):315–326, 2016.
- [46] V Sundarapandian. Reduced order observer design for nonlinear systems. *Applied mathematics letters*, 19(9):936–941, 2006.
- [47] Vadim Utkin, Jürgen Guldner, and Jingxin Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, 2009.
- [48] Kalyana C Veluvolu, MY Kim, and Dongik Lee. Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation. *International Journal of Systems Science*, 42(7):1065–1074, 2011.
- [49] Xin Xin and Yannian Liu. *Control design and analysis for underactuated robotic systems*. Springer Science & Business Media, 2014.
- [50] Ali Zemouche, Rajesh Rajamani, Boulaïd Boukroune, Hugues Rafaralahy, and Michel Zasadzinski.  $H_\infty$  circle criterion observer design for lipschitz nonlinear systems with enhanced lmi conditions. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 131–136. IEEE, 2016.
- [51] Jinhui Zhang, Xinwei Liu, Yuanqing Xia, Zhiqiang Zuo, and Yijing Wang. Disturbance observer-based integral sliding-mode control for systems with mismatched disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(11):7040–7048, 2016.



# Apéndice A

## La plataforma experimental

### A.1. Descripción

Los resultados teóricos son probados experimentalmente en la plataforma descrita en la figura A.1 de la compañía *PendCon*, la cual es impulsada en su primer articulación mediante un motor *Maxon 218009*, usando un controlador *Maxon 4-Q-DC Servo Control LSC 30/2*. Además, se usa una tarjeta de adquisición de datos *NI-USB 6363* como interfaz para el controlador del motor y los sensores de posición disponibles.

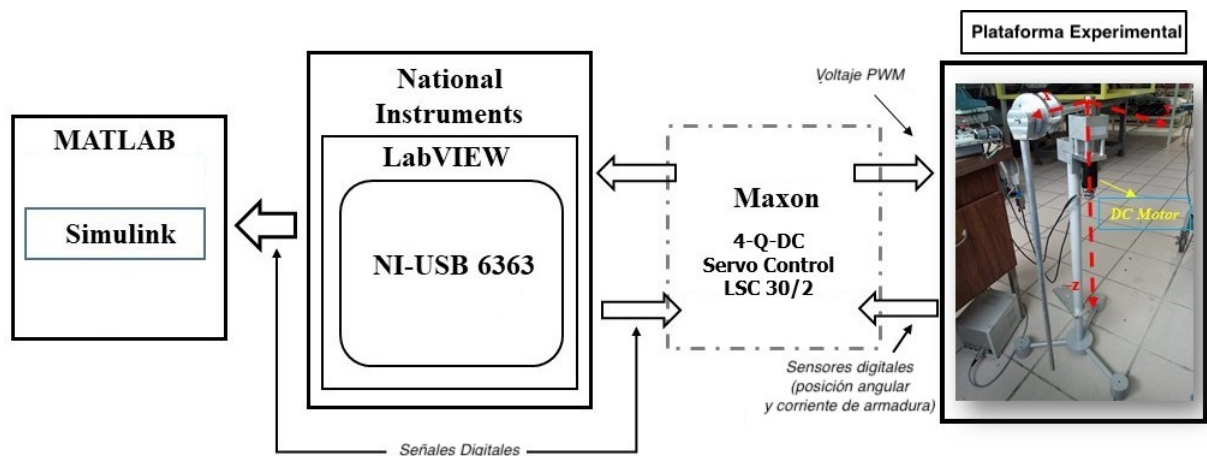


Figura A.1: Diagrama de bloques del sistema experimental.

Los parámetros físicos del motor se muestran en la tabla B.1.

Características		Parámetros	
Descripción	Valor numérico	Parámetro	Valor de referencia
Voltaje nominal	48[V]	Resistencia terminal	2.44[Ω]
Velocidad sin carga	5560[rpm]	Inductancia terminal	0.612[mH]
Corriente sin carga	43.7[mA]	Constante de par de fuerza	82.2[mNm/A]
Velocidad nominal	4930[rpm]	Constante de tensión contraelectromotriz	116[rpm/V]
Par nominal	$180 \times 10^{-3}[N \cdot m]$	Gradiente de velocidad/par	3.45[rpm/mNm]
Corriente nominal	2.23[A]	Constante de tiempo mecánica	4.19[ms]
Par máximo	$1620 \times 10^{-3}[N \cdot m]$	Inercia del rotor	116[g · cm <sup>2</sup> ]
Corriente de arranque	19.7[A]		
Eficiencia máxima	91%		

Tabla A.1: Parámetros físicos del motor de cd.



Figura A.2: (a) Motor de alta precisión Maxon DC motor 218009, (b) controlador-Amplificador Maxon Servo-Amplifier LSC 30/2.

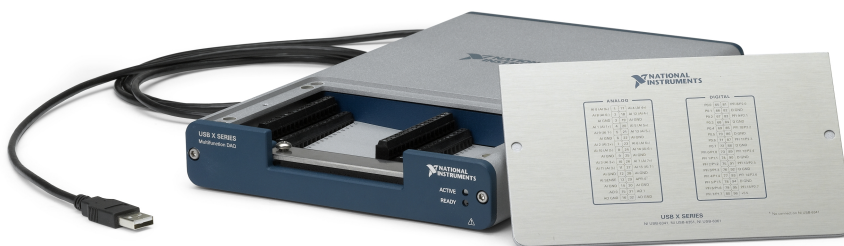


Figura A.3: Tarjeta de adquisición de datos NI-USB 6363.



Figura A.4: Encoder óptico SCANCON.

# Apéndice B

## Modelado Dinámico y Análisis de los Sistemas Experimentales

### B.1. El sistema *Pendubot* y *Acrobot*

#### B.1.1. Descripción del sistema

Considérese el robot planar de dos **DoF** (Pendubot/Acrobot) mostrado en la figura B.1.

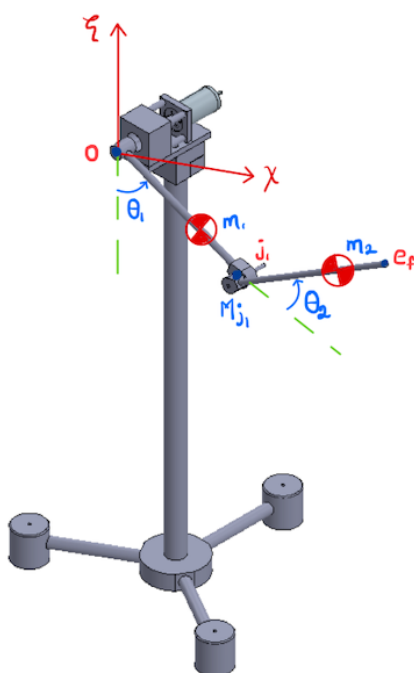


Figura B.1: El sistema péndulo doble de PendCON Company.

Sus parámetros físicos se describen como sigue:

- $m_1$  : masa del primer péndulo;
- $M_{j_1}$  : masa de la articulación péndulo-péndulo;
- $m_2$  : masa del segundo péndulo;
- $l_1$  : longitud del primer péndulo  $(\overline{O, j_1})$ ;
- $l_{c_1}$  : ubicación del centro de masa del primer péndulo  $(\overline{O, m_1})$ ;
- $l_2$  : longitud del segundo péndulo  $(\overline{j_1, e_f})$ ;
- $l_{c_2}$  : ubicación del centro de masa del segundo péndulo  $(\overline{j_1, m_2})$ ;
- $I_{\omega_1}$  : momento de inercia del primer péndulo;
- $I_{\omega_2}$  : momento de inercia del segundo péndulo;
- $\theta_1$  : posición angular del primer péndulo;
- $\theta_2$  : posición angular del segundo péndulo.

Las variables articulares describen el vector de coordenadas generalizadas como:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Este vector define el espacio vectorial de configuración  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ . Note que ambas posiciones articulares se miden positivamente en sentido antihorario, y  $q_1$  se mide a partir del eje  $\zeta$  negativo.

### B.1.2. Modelo de energía

#### Energía cinética

En base al teorema de Kőening, la energía cinética del primer eslabón queda descrita como:

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} I_{\omega_1} \dot{q}_1^2.$$

Para la masa en la articulación  $j_1$  se tiene el siguiente análisis cinemático:

$$p_{M_{j_1}} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}, \implies V_{M_{j_1}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

queda que:

$$T_{M_{j_1}} = \frac{1}{2} M_{j_1} l_1^2 \dot{q}_1^2$$

También:

$$p_{m_2, j_1} = \begin{bmatrix} l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \\ -l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \implies V_{m_2, j_1} = \begin{bmatrix} l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}$$

queda que:

$$\begin{aligned} T_{m_2} &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 \langle V_{j_1, O}, V_{m_2, j_1} \rangle, \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2). \end{aligned}$$

#### Energía potencial

Por otro lado, la energía potencial queda expresada como:

$$P(q) = -m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) - m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)]$$

#### Energía total

La energía del sistema queda descrita como:

$$\begin{aligned} E(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2) l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad - m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) - m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \end{aligned}$$

#### Lagrangiano

Por otro lado, la función de Lagrange queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2) l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad + m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \end{aligned}$$

#### Modelo Dinámico

Al aplicar el formalismo de Euler-Lagrange queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2) l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) & , & m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \\ m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) & , & I_{\omega_2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & , & -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & , & 0 \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} -m_1 g l_{c_1} \sin(q_1) - M_1 g l_1 \sin(q_1) - m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c_2} \sin(q_1 + q_2)) \\ -m_2 g l_{c_2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### B.1.3. Análisis del modelo

#### Propiedades del modelo mecánico

**Lema B.1 (Sobre las cotas de  $\mathbf{M}(q)$ ).** La magnitud de la contribución de la matriz de inercias está acotada como  $\lambda_m \leq \|\mathbf{M}(q)\| \leq \lambda_M$ , donde:

$$\lambda_m = \frac{I_{\omega_1} I_{\omega_2}}{I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} + I_{\omega_2}}, \quad (\text{B.1})$$

y

$$\lambda_M = \frac{(I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} + I_{\omega_2})^2 - I_{\omega_1} I_{\omega_2}}{I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} + I_{\omega_2}} \quad (\text{B.2})$$

*Demostración.* La matriz de inercia se descompone como:

$$\mathbf{M}(q) = \begin{bmatrix} I_{\omega_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) & , & m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \\ & , & I_{\omega_2} \end{bmatrix}.$$

Queda entonces que  $M_{11}(1) = I_{\omega_1}$ ,  $M_{22}(2) = I_{\omega_2}$ . También  $M_{11}(q) = I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2)$  y  $M_{22}(q) = I_{\omega_2}$ . Aplicando las expresiones (2.10) y (2.11) resultan las expresiones principales del lema. ■

**Lema B.2 (Sobre la cota del vector  $\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}$ ).** La matriz de inercia es radialmente no acotada, como sigue:

$$\|\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}\| \leq \delta_c \|\dot{q}\|, \quad \delta_c = 4m_2 l_1 l_{c_2}.$$

*Demostración.* Note que el vector de fuerzas de Coriolis y centrípetas  $\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}$  puede reescribirse como:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\top \mathbf{C}_1(q)\dot{q} \\ \dot{q}^\top \mathbf{C}_2(q)\dot{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c_2} S_2 \\ -m_2 l_1 l_{c_2} S_2 & -m_2 l_1 l_{c_2} S_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2(q) = \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{c_2} S_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sigue que:

$$\delta_c = \sum_{i=1}^2 \sum_{j_1}^2 \sum_{k=1}^2 \max_q \mathbf{C}_{i(jk)} = 4m_2 l_1 l_{c_2},$$

tal como se establece en el lema. ■

**Lema B.3 (Sobre la cota del vector  $G(q)$ ).** El vector de fuerzas y torques potenciales  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  está acotado como:

$$\|G(q)\| \leq \delta_G, \quad \delta_G = g \sqrt{(m_1 l_{c_1} + (M_1 + m_2)l_1 + m_2 l_{c_2})^2 + (m_2 l_{c_2})^2}.$$

*Demostración.* Mayorizando las funciones trigonométricas y calculando la norma Euclidiana, queda la expresión descrita en el presente lema. ■

### La representación lineal paramétrica

La forma lineal paramétrica del modelo determinado queda como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & 2C_2\ddot{q}_1 + C_2\ddot{q}_2 - S_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) & 0 & -gS_1 & -gS_{12} \\ 0 & C_2\ddot{q}_1 + S_2\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_2 & 0 & -gS_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 \\ m_2l_1l_{c_2} \\ I_{\omega_2} \\ m_1l_{c_1} + (M_1 + m_2)l_1 \\ m_2l_{c_2} \end{bmatrix} = \mathbf{W}\tau \quad (\text{B.3})$$

En el caso del Pendubot, la parte actuada se acopla con el motor de cd, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & 2C_2\ddot{q}_1 + C_2\ddot{q}_2 - S_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) & -gS_1 & -gS_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_m + I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2 \\ m_2l_1l_{c_2} \\ m_1l_{c_1} + (M_1 + m_2)l_1 \\ m_2l_{c_2} \end{bmatrix} = k_\tau I_a$$

y que finalmente resulta:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \eta_{12}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{I}_a) & -gS_1 & -gS_{12} & \dot{I}_a & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_a k_\tau)^{-1} [J_m + I_{\omega_1} + (M_{j_1} + m_2)l_1^2] \\ (R_a k_\tau)^{-1} m_2l_1l_{c_2} \\ (R_a k_\tau)^{-1} [m_1l_{c_1} + (M_1 + m_2)l_1] \\ (R_a k_\tau)^{-1} m_2l_{c_2} \\ L_a \\ K_e \end{bmatrix} = V_a \quad (\text{B.4})$$

con  $\eta_{12}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{I}_a) = 2C_2\ddot{q}_1 + C_2\ddot{q}_2 - S_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)$ .

## B.2. El Péndulo Rotativo

### B.2.1. Descripción del sistema

Considérese el péndulo rotativo (comúnmente conocido como péndulo de Furuta) mostrado en la figura B.2.

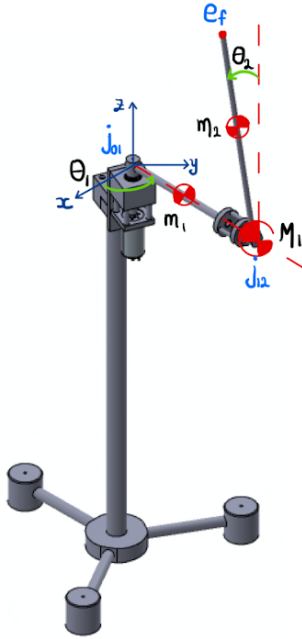


Figura B.2: El péndulo rotativo(péndulo de Furuta).

Sus parámetros físicos se describen como:

$m_1$  : masa del brazo;

$M_1$  : masa de la articulación brazo-péndulo;

$m_2$  : masa del péndulo;

$l_1$  : longitud del brazo ( $\overline{j_{01}, j_{12}}$ );

$l_{c_1}$  : ubicación del centro de masa del brazo;  
( $\overline{j_{01}, m_1}$ );

$l_2$  : longitud del péndulo ( $\overline{j_{12}, e_f}$ );

$l_{c_2}$  : ubicación del centro de masa del péndulo  
( $\overline{j_{12}, m_2}$ );

$I_{\omega_1}$  : momento de inercia del brazo;

$I_{\omega_2}$  : momento de inercia del péndulo;

$\theta_1$  : posición angular del brazo;

$\theta_2$  : posición angular del péndulo;

Las variables articulares describen el vector de coordenadas generalizadas como:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Note que ambas posiciones articulares se miden positivamente en sentido antihorario, respecto al eje  $x$  y al  $z$  respectivamente.

### B.2.2. Modelo de energía

#### Energía cinética

Usando el teorema de Kőening, en virtud de que el polo del brazo ubicado en  $j_{01}$  coincide con el marco de referencia inercial, la energía cinética del brazo queda simplemente:

$$T_{m_1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_{\omega_1} \dot{q}_1^2$$

Por otro lado, la masa de la articulación en  $j_{12}$  se considera puntual para efectos prácticos, por lo cual se tiene:

$$p_{j_{12}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \implies V_{j_{12}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la energía cinética queda en la forma tradicional:

$$T_{M_1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_1 l_1^2 \dot{q}_1^2,$$

Finalmente para la masa del péndulo, su velocidad respecto de su polo ubicado en  $j_{12}$  se obtiene como:

$$p_{m_2, j_{12}} = \begin{bmatrix} -l_{c_2} \sin(q_1) \sin(q_2) \\ l_{c_2} \cos(q_1) \sin(q_2) \\ -l_{c_2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \implies V_{m_2, j_{12}}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -l_{c_2} \cos(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 - l_{c_2} \sin(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ -l_{c_2} \sin(q_1) \sin(q_2) \dot{q}_1 + l_{c_2} \cos(q_1) \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

sigue que:

$$\begin{aligned} T_{m_2}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{j_{12}}^2 + m_2 \langle V_{j_{12}}, V_{m_2, j_{12}} \rangle, \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2. \end{aligned}$$

## Energía potencial

El eslabón correspondiente al brazo del sistema pendular evoluciona en el plano horizontal sobre el marco de referencia inercial, por lo cual no posee energía potencial. Para el péndulo se tiene que:

$$P_{m_2}(q) = -m_2 g l_{c_2} \cos(q_2).$$

## Energía total

La energía total del sistema se da como:

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_1 + m_2) l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c_2} \cos(q_2)$$

## Lagrangiano

Por otro lado, la función Lagrangiano se encuentra como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_1 + m_2) l_1^2] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g l_{c_2} \cos(q_2)$$

## Modelo dinámico

Al aplicar el formalismo de Euler-Lagrange resulta el modelo dinámico en la forma estándar de robótica, con:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + (M_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) \\ m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2) & I_{\omega_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g l_{c_2} \sin(q_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

### B.2.3. Análisis del modelo

#### Propiedades del modelo mecánico

**Lema B.4 (Sobre las cotas de  $\mathbf{M}(q)$ ).** La magnitud de la contribución de la matriz de inercias está acotada como  $\lambda_m \leq \|\mathbf{M}(q)\| \leq \lambda_M$ , donde:

$$\lambda_m = \frac{(I_{\omega_1} + M_1 l_1^2) I_{\omega_2}}{I_{\omega_1} + I_{\omega_2} + (M_1 + m_2) l_1^2}, \tag{B.6}$$



y

$$\lambda_M = \frac{[I_{\omega_1} + I_{\omega_2} + (M_1 + m_2)l_1^2]^2 - (I_{\omega_1} + M_1l_1^2)I_{\omega_2}}{I_{\omega_1} + I_{\omega_2} + (M_1 + m_2)l_1^2} \quad (\text{B.7})$$

*Demostración.* La matriz de inercias puede reescribirse como sigue:

$$\mathbf{M}(q) = \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + M_1l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2l_1^2 & m_2l_1l_{c_2} \cos(q_2) \\ m_2l_1l_{c_2} \cos(q_2) & I_{\omega_2} \end{bmatrix}$$

Resulta que  $M_{11}(1) = I_{\omega_1} + M_1l_1^2$ ,  $M_{22}(2) = I_{\omega_2}$ . También  $M_{11}(q) = I_{\omega_1} + M_1l_1^2 + m_2l_1^2$  y  $M_{22}(q) = I_{\omega_2}$ . Al aplicar las expresiones (2.10) y (2.11), quedan los resultados descritos en el lema. ■

**Lema B.5 (Sobre la cota de Coriolis).** *La matriz de inercia es radialmente no acotada, como sigue:*

$$\|\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}\| \leq \delta_c \|\dot{q}\|, \quad \delta_c = m_2l_1l_{c_2}.$$

*Demostración.* Note que el vector de fuerzas de Coriolis y centrípetas  $\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q}$  puede reescribirse como:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\top \mathbf{C}_1(q)\dot{q} \\ \dot{q}^\top \mathbf{C}_2(q)\dot{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2l_1l_{c_2}S_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2(q) = \mathbf{0}_{2 \times 2},$$

sigue que:

$$\delta_c = \sum_{i=1}^2 \sum_{j_1}^2 \sum_{k=1}^2 \max_q \mathbf{C}_{i(jk)} = m_2l_1l_{c_2},$$

tal como se establece en el lema. ■

**Lema B.6 (Sobre las cotas del vector de fuerzas y torques potenciales).** *El vector de fuerzas y torques potenciales  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  está acotado como:*

$$\|G(q)\| \leq \delta_G, \quad \delta_G = m_2gl_{c_2}.$$

*Demostración.* En vista que el vector  $G(q)$  contiene un solo elemento distinto de cero, usando la definición de la norma Euclidiana, con  $|\sin(q_2)| \leq 1$ , el resultado es inmediato. ■

## La representación lineal paramétrica

El modelo dado en la forma estándar de robótica puede reescribirse en la forma lineal paramétrica como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(q_2)\ddot{q}_2 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_2)\ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & \sin(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + (M_1 + m_2)l_1^2 \\ m_2l_1l_{c_2} \\ I_{\omega_2} \\ m_2gl_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La dinámica de la parte mecánica activa, impulsada por motores **PMDC** queda:

$$\frac{R_a}{K_\tau} \{ [I_{\omega_1} + (M_1 + m_2)l_1^2] \ddot{q}_1 + m_2l_1l_{c_2} \cos(q_u)\ddot{q}_2 - m_2l_1l_{c_2} \sin(q_2)\dot{q}_2^2 \} + L_a \dot{I}_a + k_e \dot{q}_1 = V_a$$

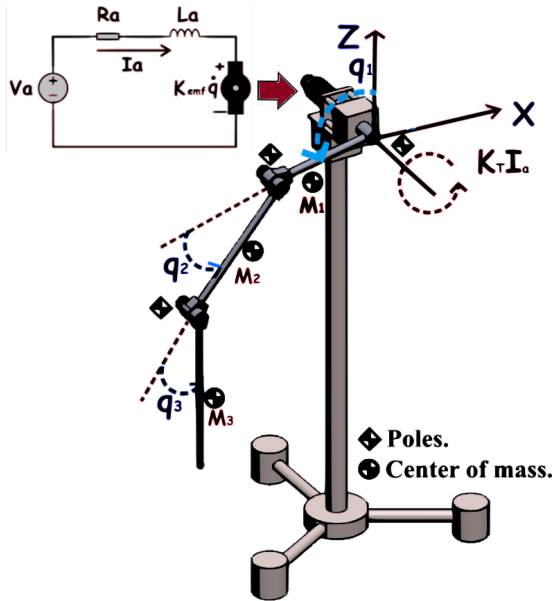
que se reescribe en la forma paramétrico-lineal:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(q_2)\ddot{q}_2 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2 & \dot{I}_a & \dot{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_a k_\tau^{-1}) (I_{\omega_1} + (M_1 + m_2)l_1^2) \\ (R_a k_\tau^{-1}) m_2l_1l_{c_2} \\ L_a \\ K_e \end{bmatrix} = V_a$$

### B.3. El Triple Péndulo Invertido

#### B.3.1. Descripción del sistema

Considere el sistema Triple Péndulo Invertido (**TLIP**) impulsado por un único motor de cd de imanes permanentes mostrado en la figura B.3. Sus parámetros físicos se describen a continuación:



- $m_1$  : Masa del primer péndulo.
- $M_1$  : Masa de la segunda articulación.
- $m_2$  : Masa del segundo péndulo.
- $M_2$  : Masa de la tercera articulación.
- $m_3$  : Masa del tercer péndulo.
- $l_1$  : Longitud del primer péndulo.
- $l_{c_1}$  : Centro de masa del primer péndulo.
- $l_2$  : Longitud del segundo péndulo.
- $l_{c_2}$  : Centro de masa del segundo péndulo.
- $l_3$  : Longitud del tercer péndulo.
- $l_{c_3}$  : Centro de masa del tercer péndulo.

Se define el vector de coordenadas generalizadas en función de las variables articulares como sigue:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Figura B.3: El péndulo invertido triple.

El esquemático de la figura B.4 muestra una vista simplificada del sistema **TLIP**.

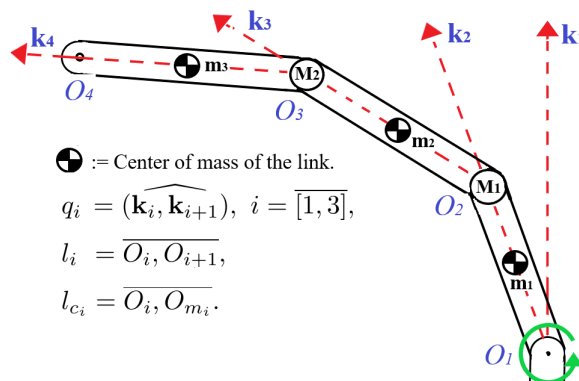


Figura B.4: Esquemático del péndulo invertido triple.

La notación introducida en la tabla B.1 permite obtener una expresión más compacta del modelo dinámico.

Notación ( $\forall j, k = 1, 2, 3$ )	Ecuaciones paramétricas.
$S_j = \sin(q_j)$	$\theta_1 = m_2 l_1 l_{c_2} S_{21} + (M_2 + m_3) l_1 l_2 S_2$
$C_j = \cos(q_j)$	$\theta_2 = m_3 l_2 l_{c_3} S_{321}$
$S_{jk} = \sin(q_j + q_k)$	$\theta_3 = m_3 l_1 l_{c_3} S_{31}$
$C_{jk} = \cos(q_j + q_k)$	$\theta_4 = l_1 S_1 + l_{c_2} S_{12}$
$S_{kj} = \sin(q_k - q_j)$	$\theta_5 = l_1 S_1 + l_2 S_{12}$
$C_{kj} = \cos(q_k - q_j)$	$\theta_6 = \theta_5 + l_{c_3} S_{123}$

Tabla B.1: Notación y parametrización adoptada para el sistema TLIP.

### B.3.2. Energía del sistema

#### Energía cinética

El teorema de *Köening* permite determinar la energía cinética de cada elemento de una forma precisa; primero, dado que el polo  $O_1$  coincide con el marco de referencia, queda que

$$T_{m_1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_{\omega_1} \dot{q}_1^2. \quad (\text{B.8})$$

Para el análisis correspondiente a la masa  $M_1$ , resulta que:

$$p_{O_2}(q) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) \\ l_1 \cos(q_1) \end{pmatrix} \implies V_{O_2} = \begin{pmatrix} -l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{pmatrix},$$

por lo que la expresión de la energía cinética resulta:

$$T_{M_1}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_1 l_1^2 \dot{q}_1^2. \quad (\text{B.9})$$

De forma similar para la masa  $m_2$ :

$$p_{ci_2, O_2} = \begin{bmatrix} -l_{c_2} \sin(q_2) \\ l_{c_2} \cos(q_2) \end{bmatrix} \implies V_{ci_2, O_2} = \begin{bmatrix} -l_{c_2} \cos(q_2) \dot{q}_2 \\ l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

y su energía cinética queda como:

$$T_{m_2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_2} \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (\text{B.10})$$

En el caso de la masa puntual  $M_2$  en el polo  $O_3$  resulta:

$$p_{O_3} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \implies V_{O_3} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix},$$

por lo tanto:

$$T_{M_2}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M_2 [l_1^2 + l_2 (l_2 + 2l_1 \cos(q_2))] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + M_2 l_2 (l_2 + l_1 \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2. \quad (\text{B.11})$$

Finalmente para la masa  $m_3$ :

$$p_{ci_3, O_3} = \begin{bmatrix} -l_{c_3} \sin(q_3) \\ l_{c_3} \cos(q_3) \end{bmatrix} \implies V_{ci_3, O_3} = \begin{bmatrix} -l_{c_3} \cos(q_3) \dot{q}_3 \\ -l_{c_3} \sin(q_3) \dot{q}_3 \end{bmatrix},$$

resulta:

$$\begin{aligned} T_{m_3}(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m_3 [l_1^2 + l_2 (l_2 + 2l_1 \cos(q_2))] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{\omega_3} \dot{q}_3^2 \\ & + m_3 l_2 (l_2 + l_1 \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3 - q_2 - q_1) \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ & + m_3 l_{c_3} (l_1 \cos(q_3 - q_1) + l_2 \cos(q_3 - q_2 - q_1)) \dot{q}_1 \dot{q}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

### Energía potencial

La energía potencial debida a los efectos gravitacionales se determina como sigue:

$$\begin{aligned}
 U_{m_1}(q) &= m_1 g l_{c_1} \cos(q_1), \\
 U_{M_1}(q) &= M_1 g l_1 \cos(q_1), \\
 U_{m_2}(q) &= m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)], \\
 U_{M_2}(q) &= M_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)], \\
 U_{m_3}(q) &= m_3 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)].
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

### Energía total

La energía total del sistema, dada por la suma de las energías cinética y potencial, resulta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_1 + m_2 + M_2 + m_3)l_1^2 + (M_2 + m_3)l_2^2 \\
 &\quad + 2(M_2 + m_3)l_1 l_2 \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [I_{\omega_2} + (M_2 + m_3)l_2^2] \dot{q}_2^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_{\omega_3} \dot{q}_3^2 + [m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2 - q_1) + (M_2 + m_3)l_2 (l_2 + l_1 \cos(q_2))] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 &\quad + m_3 l_{c_3} [l_1 \cos(q_3 - q_1) + l_2 \cos(q_3 - q_2 - q_1)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
 &\quad + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3 - q_2 - q_1) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) + M_1 g l_1 \cos(q_1) \\
 &\quad + m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] + M_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \\
 &\quad + m_3 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)]
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

### Lagrangiano

El *Lagrangiano* del mecanismo queda expresado como sigue:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [I_{\omega_1} + (M_1 + m_2 + M_2 + m_3)l_1^2 + (M_2 + m_3)l_2^2 \\
 &\quad + 2(M_2 + m_3)l_1 l_2 \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [I_{\omega_2} + (M_2 + m_3)l_2^2] \dot{q}_2^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_{\omega_3} \dot{q}_3^2 + [m_2 l_1 l_{c_2} \cos(q_2 - q_1) + (M_2 + m_3)l_2 (l_2 + l_1 \cos(q_2))] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 &\quad + m_3 l_{c_3} [l_1 \cos(q_3 - q_1) + l_2 \cos(q_3 - q_2 - q_1)] \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
 &\quad + m_3 l_2 l_{c_3} \cos(q_3 - q_2 - q_1) \dot{q}_2 \dot{q}_3 - m_1 g l_{c_1} \cos(q_1) - M_1 g l_1 \cos(q_1) \\
 &\quad - m_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] - M_2 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \\
 &\quad - m_3 g [l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_{c_3} \cos(q_1 + q_2 + q_3)].
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

### Modelo dinámico

Al aplicar el formalismo de Euler-Lagrange queda el modelo dinámico en la forma estándar de robótica, con la matriz de inercia:

$$\mathbf{M}(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & , & \mathbf{M}_{12} & , & m_3 l_{c_3} (l_1 C_{31} + l_2 C_{321}) \\ \otimes & , & I_{\omega_2} + (M_2 + m_3) l_2^2 & , & m_3 l_2 l_{c_3} C_{321} \\ \otimes & , & \otimes & , & I_{\omega_3} \end{bmatrix}$$

donde  $\otimes$  denota simetría; también:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{11} &= I_{\omega_1} + (m_1 + M_1 + m_2 + M_2 + m_3) l_1^2 \\
 &\quad + (M_2 + m_3) l_2^2 + 2(M_2 + m_3) l_1 l_2 C_2, \\
 \mathbf{M}_{12} &= m_2 l_1 l_{c_2} C_{21} + l_2 (M_2 + m_3) (l_2 + l_1 C_2).
 \end{aligned}$$

La matriz de fuerzas de Coriolis y centrípetas resulta como:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2(M_2 + m_3) l_1 l_2 S_2 \dot{q}_2 & , & -\theta_1 \dot{q}_2 & , & -(\theta_2 + \theta_3) \dot{q}_3 \\ \theta_1 \dot{q}_1 & , & 0 & , & -\theta_2 \dot{q}_3 \\ (\theta_2 + \theta_3) \dot{q}_1 + \theta_2 \dot{q}_2 & , & \theta_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & , & 0 \end{bmatrix},$$

y el vector de fuerzas y torques potenciales:

$$G(q) = \begin{bmatrix} -m_1gl_{c_1}S_1 - M_1gl_1S_1 - m_2g\theta_4 - M_2g\theta_5 - m_3g\theta_6 \\ -m_2gl_{c_2}S_{12} - M_2gl_2S_{12} - m_3g(l_2S_{12} + l_{c_3}S_{123}) \\ -m_3gl_{c_3}S_{123} \end{bmatrix}.$$

### B.3.3. Análisis del modelo

#### Propiedades del modelo mecánico

**Lema B.7 (Sobre las cotas de la matriz de inercias).** *La magnitud de la contribución de la matriz de inercias está acotada como  $\lambda_m \mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}(q) \leq \lambda_M \mathbf{I}_n$ , con:*

$$\lambda_m = \frac{4(I_{\omega_1} + m_1l_1^2)I_{\omega_2}I_{\omega_3}}{[I_{\omega_1} + (m_1 + M_1 + m_2)l_1^2 + (M_2 + m_3)(l_1 + l_2)^2]^2} \quad (\text{B.16})$$

y

$$\lambda_M = \frac{[I_{\omega_1} + (m_1 + M_1 + m_2)l_1^2 + (M_2 + m_3)(l_1 + l_2)^2]^3 - 8(I_{\omega_1} + m_1l_1^2)I_{\omega_2}I_{\omega_3}}{[I_{\omega_1} + (m_1 + M_1 + m_2)l_1^2 + (M_2 + m_3)(l_1 + l_2)^2]^2} \quad (\text{B.17})$$

*Demostración.* Permítase escribir la matriz de inercia en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(q) &= \mathbf{M}(1) + \mathbf{M}(2) + \mathbf{M}(3) \\ &= \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + m_1l_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_{c_2}C_{21} & 0 \\ m_2l_1l_{c_2}C_{21} & I_{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (M_2 + m_3)(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2C_2) & (M_2 + m_3)(l_2^2 + l_1l_2C_2) & m_3l_{c_3}(l_1C_{31} + l_2C_{321}) \\ \circledast & (M_2 + m_3)l_2^2 & m_3l_2l_{c_3}C_{321} \\ \circledast & \circledast & I_{\omega_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resulta que  $M_{11}(1) = I_{\omega_1} + m_1l_1^2$ ,  $M_{22}(2) = I_{\omega_2}$ ,  $M_{33}(3) = I_{\omega_3}$ , que al aplicarse en las expresiones (2.10) y (2.11) junto con el límite superior de la traza de la matriz de inercia, quedan las cotas descritas en este lema. ■

De acuerdo con el material contenido en [24], el vector de fuerzas de Coriolis y centrípetas puede escribirse como:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}^\top \mathbf{C}_1(q)\dot{q} \\ \dot{q}^\top \mathbf{C}_2(q)\dot{q} \\ \dot{q}^\top \mathbf{C}_3(q)\dot{q} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -(M_2 + m_3)l_1l_2S_2 & 0 \\ \circledast & -\theta_1 & 0 \\ \circledast & \circledast & -\theta_2 - \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ \circledast & 0 & 0 \\ \circledast & \circledast & -\theta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \theta_2 + \theta_3 & \theta_2 & 0 \\ \circledast & \theta_2 & 0 \\ \circledast & \circledast & 0 \end{bmatrix}$$

Sigue que:

$$\delta_c = 3^2 \max \{ (M_2 + m_3)l_1l_2 + m_2l_1l_{c_2}, m_3l_{c_3}(l_1 + l_2) \} \quad (\text{B.18})$$

### Sobre la cota del vector de fuerzas y torques gravitacionales

La matriz Jacobiana del vector  $G(q)$  respecto del vector de coordenadas generalizadas se halla como:

$$J_q \{G\} = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} m_1 g l_{c_1} + m_2 g (l_1 + l_{c_2}) \\ + M_1 g l_1 + M_2 g (l_1 + l_2) \end{array} \right\} & , & \left\{ \begin{array}{l} m_2 g l_{c_2} + M_2 g l_2 \\ + m_3 g (l_2 + l_{c_3}) \end{array} \right\} & , & m_3 g l_{c_3} \\ & \otimes & & & \\ & \otimes & & & \\ & & & \otimes & , & m_2 g l_{c_3} \\ & & & & & , & m_3 g l_{c_3} \end{bmatrix} ,$$

y resulta evidente que:

$$\begin{aligned} \delta_G &= 3\theta_7 \text{ máx} \{m_1 g l_{c_1} + (M_1 + m_2 + M_2) g l_1, m_3 g (l_2 + l_{c_3})\} , \\ \theta_7 &= m_2 g l_{c_2} + M_2 g l_2. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

### La representación lineal paramétrica

El modelo descrito previamente en la forma estándar de robótica puede expresarse en la forma lineal paramétrica  $\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, I_a)\vartheta = \mathbf{W}\tau$ , con:

$$\eta^\top(\cdot) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & 0 & 0 \\ C_2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} C_2 \ddot{q}_2 - S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} S_2 \dot{q}_2^2 & \frac{1}{2} C_2 \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} S_2 \dot{q}_1^2 & 0 \\ \ddot{q}_2 & \ddot{q}_1 & 0 \\ C_{21} \ddot{q}_2 - S_{21} \dot{q}_2^2 & C_{21} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + S_{21} \dot{q}_1^2 & 0 \\ C_{31} \ddot{q}_3 - S_{31} \dot{q}_3^2 & 0 & C_{31} \ddot{q}_1 + S_{31} \dot{q}_1^2 \\ C_{321} \ddot{q}_3 - S_{321} \dot{q}_3^2 & C_{321} \ddot{q}_3 - S_{321} \dot{q}_3^2 & C_{321} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + S_{321} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ 0 & \ddot{q}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{q}_3 \\ S_1 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & 0 \\ S_{123} & S_{123} & S_{123} \end{bmatrix} , \quad (\text{B.20})$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} I_{\omega_1} + (m_1 + M_1 + m_2) l_1^2 + (M_2 + m_3) (l_1^2 + l_2^2) \\ 2(M_2 + m_3) l_1 l_2 \\ (M_2 + m_3) l_2^2 \\ m_2 l_1 l_{c_2} \\ m_3 l_1 l_{c_3} \\ m_3 l_2 l_{c_3} \\ I_{\omega_2} \\ I_{\omega_3} \\ -g [m_1 l_{c_1} + (M_1 + m_2 + M_2 + m_3) l_1] \\ -g [m_2 l_{c_2} + (M_2 + m_3) l_2] \\ -g m_3 l_{c_3} \end{bmatrix}$$

## B.4. El péndulo doble sobre un carro con restricciones elásticas

### B.4.1. Descripción del sistema

La figura B.5 muestra el esquemático del sistema péndulo doble sobre el carro, cuyo segundo péndulo está restringido en su movimiento mediante dos resortes lineales.

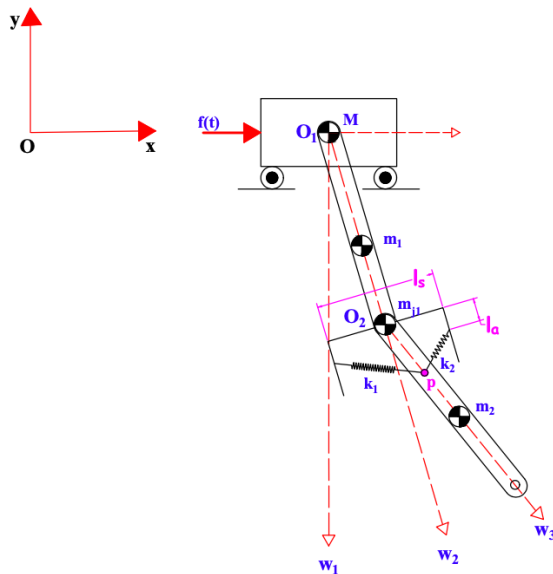


Figura B.5: El péndulo doble sobre un carro con restricciones elásticas.

Sus parámetros físicos se dan como:

- $M$  : Masa del primer carro.
- $m_1$  : Masa del primer eslabón.
- $m_{j1}$  : Masa de la articulación entre los péndulos.
- $m_2$  : Masa del segundo eslabón.
- $l_1$  : Longitud del primer eslabón.
- $l_2$  : Longitud del segundo eslabón.
- $l_{c1}$  : Centro de masa del primer péndulo.
- $l_{c2}$  : Centro de masa del segundo péndulo.
- $l_s, l_a$  : Dimensiones de horquilla de sujeción.
- $l_p$  : Distancia al punto de unión de los resortes.

El vector de coordenadas generalizadas se da como:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Aquí  $x$  denota la posición lineal del carro,  $\theta_1$  el desplazamiento angular del primer péndulo, medido en sentido antihorario a partir de la posición vertical hacia abajo, y  $\theta_2$  el desplazamiento angular del segundo péndulo, medido a partir de la línea proyectada del primer péndulo.

### B.4.2. Energía del sistema

#### Energía cinética

Para la masa del carro  $M$ , se tiene que:

$$p_M = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies V_M = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como  $M$  es una masa puntual, resulta que:

$$T_M(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} M \dot{q}_1^2.$$

Al aplicar el teorema de Kőening para el primer péndulo, con:

$$p_{m_1, O_1} = \begin{bmatrix} l_{c1} S_2 \\ -l_{c1} C_2 \end{bmatrix} \implies V_{m_1, O_1} = \begin{bmatrix} l_{c1} C_2 \dot{q}_2 \\ l_{c1} S_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

se determina la energía cinética como:

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_{\omega_1}\dot{q}_2^2 + m_1l_{c_1}C_2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

La masa de la unión entre los péndulos  $m_{j_1}$  también se considera puntual. Su energía cinética queda entonces:

$$p_{m_{j_1},O} = \begin{bmatrix} q_1 + l_1S_2 \\ -l_1S_2 \end{bmatrix} \implies V_{m_{j_1},O} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + l_1C_2\dot{q}_2 \\ l_1S_2\dot{q}_2 \end{bmatrix},$$

y resulta:

$$T_{m_{j_1}} = \frac{1}{2}m_{j_1}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_{j_1}l_1^2\dot{q}_2^2 + m_{j_1}l_1C_2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Finalmente, la posición del centro de masa  $m_2$  respecto del polo en  $m_{j_1}$  queda:

$$p_{m_2,O_2} = \begin{bmatrix} l_{c_2}S_{23} \\ -l_{c_2}C_{23} \end{bmatrix} \implies V_{m_2,O_2} = \begin{bmatrix} l_{c_2}S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ l_{c_2}C_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix},$$

por lo que queda la energía cinética:

$$T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2 + 2l_1l_{c_2}C_3)\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_{\omega_2}\dot{q}_3^2 + m_2(l_1C_2 + l_{c_2}C_{23})\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_2l_{c_2}C_{23}\dot{q}_1\dot{q}_3 + m_2l_1l_{c_2}C_3\dot{q}_2\dot{q}_3.$$

## Energía potencial

La energía potencial gravitatoria para cada masa del sistema se determina como:

$$\begin{aligned} U_M &= 0, \\ U_{m_1} &= -m_1gl_{c_1}C_2, \\ U_{m_{j_1}} &= -m_{j_1}gl_1C_2, \\ U_{m_2} &= -m_2g(l_1C_2 + l_{c_2}C_{23}). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Los resortes lineales almacenan energía potencial, de acuerdo con la *ley de Hooke*  $U_k = \frac{1}{2}k\Delta l^2$ . Resulta que:

$$\begin{aligned} U_{k_1} &= \frac{1}{2}k_1 \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{2}l_s\right)^2 + l_p^2 + l_a^2 + l_sl_pS_3 - 2l_al_pC_3} - l_0 \right]^2, \\ U_{k_2} &= \frac{1}{2}k_2 \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{2}l_s\right)^2 + l_p^2 + l_a^2 - l_sl_pS_3 - 2l_al_pC_3} - l_0 \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

### B.4.3. Modelo dinámico

Al aplicar el formalismo de Euler-Lagrange con el Lagrangiano del sistema, queda el modelo dinámico en la forma estándar de robótica, con la matriz de inercia:

$$\mathbf{D}(q) = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_{j_1} + m_2 & [m_1l_{c_1} + (m_{j_1} + m_2)l_1]C_2 + m_2l_{c_2}C_{23} & m_2l_{c_2}C_{23} \\ \otimes & I_{\omega_1} + (m_{j_1} + m_2)l_1^2 + 2m_2l_1l_{c_2}C_3 & m_2l_1l_{c_2}C_3 \\ \otimes & \otimes & I_{\omega_2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.23})$$

la matriz de Coriolis:

$$\mathbf{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -\{[m_1l_{c_1} + (m_{j_1} + m_2)l_1]S_2 + m_2l_{c_2}S_{23}\}\dot{q}_2 - m_2l_{c_2}S_{23}\dot{q}_3 & -m_2l_{c_2}S_{23}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ 0 & -m_2l_1l_{c_2}S_3\dot{q}_3 & -m_2l_1l_{c_2}S_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ 0 & m_2l_1l_{c_2}S_3\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.24})$$



y el vector de fuerzas y torques potenciales:

$$G(q) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ g [m_1 l_{c_1} + (m_{j_1} + m_2) l_1] S_2 + m_2 g l_{c_2} S_{23} \\ \left. \begin{array}{l} m_2 g l_{c_2} S_{23} + \frac{1}{2} k_1 l_p (l_s C_3 + 2l_a S_3) \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{(\frac{1}{2} l_s)^2 + l_p^2 + l_a^2 + l_p (l_s S_3 - 2l_a C_3)}} \right) \\ + \frac{1}{2} k_2 l_p (2l_a S_3 - l_s C_3) \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{(\frac{1}{2} l_s)^2 + l_p^2 + l_a^2 - l_p (l_s S_3 + 2l_a C_3)}} \right) \end{array} \right\} \end{array} \right] \quad (\text{B.25})$$