

XX (113553.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Seguimiento de Trayectorias para un Manipulador Robótico por Medio de Control Difuso tipo Takagi-Sugeno

Tesis que presenta:
Javier Garrido Meléndez

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis
Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Guadalajara, Jal., Septiembre del 2003.

CLASIF.: TK165.68 (37) 2003
ADQUIS.: 551-308
FECHA: 28-VI-2004
PROCED.: Nov.-2004
\$ _____

#: 113630-2001

**Seguimiento de Trayectorias para un Manipulador
Robótico por Medio de Control Difuso tipo
Takagi-Sugeno**

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Javier Garrido Meléndez

Ingeniero Electrónico

Instituto Tecnológico de Minatitlán

1996 - 2000

Becario del CONACyT, expediente no. 165155

Directores de Tesis

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos

Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre del 2003.

Dedicado a:

Mis Padres

Gracias por su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme terminar mis estudios de maestría.

A mis padres, hermanos y Anita, por su cariño, apoyo y motivación.

A Tere por apoyarme todo este tiempo.

A mi asesor, Dr. Edgar Sánchez por todo el tiempo y apoyo ofrecido; por sus consejos para la realización de esta tesis.

Al Dr. Alexander Georgievich Loukianov por sus comentarios y sugerencias que ayudaron a enriquecer esta tesis.

A los amigos y compañeros del CINVESTAV, especialmente a los compañeros de la generación 2001 de control Automático.

A mis amigos, Rodrigo, Juan, Felipe, Irving, y todos los que no están en esta lista, por confiar en mi.

A mis amigos del grupo Shekina por hacer mi estancia en Guadalajara más agradable.

A todos ellos muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos Fundamentales	3
2.1. Modelo Difuso Takagi-Sugeno.	3
2.1.1. Análisis de Estabilidad.	6
2.2. El Problema de Regulación Lineal.	7
2.2.1. Problema de Regulación Lineal con Disposición de Toda la Información.	9
2.3. Control por Bloques con Modos Deslizantes.	10
2.3.1. Análisis de Estabilidad.	12
2.4. Estructura del Controlador Propuesto.	14
2.4.1. Estructura de un Controlador Difuso Takagi-Sugeno con la Teoría del Regulador Lineal.	14
2.4.2. Estructura de un Controlador Difuso Takagi-Sugeno con Control por Bloques con Modos Deslizantes.	15
3. Modelo del Robot	16
3.1. Características del Manipulador.	16
3.2. Actuadores.	17
3.3. Dimensiones.	19
3.4. Modelo Dinámico.	20
3.5. Representación en Variables de Estado.	22
4. Control Difuso con Regulación Lineal	24
4.1. Aproximación Lineal del Modelo.	24
4.2. Diseño del Controlador para la Primera Señal de Referencia. .	25
4.2.1. Modelo del Exosistema.	25
4.2.2. Modelos Lineales.	26
4.2.3. Modelo Difuso.	27
4.2.4. Par Nominal.	28
4.2.5. Controlador Difuso.	28
4.2.6. Análisis de Estabilidad por LMI.	29
4.3. Diseño del controlador para la segunda señal de referencia.	30
4.3.1. Modelo del exosistema.	30
4.3.2. Modelos Lineales.	31
4.3.3. Modelo Difuso.	32
4.3.4. Par Nominal.	33
4.3.5. Controlador Difuso.	33

4.3.6. Análisis de estabilidad por LMI.	34
4.4. Resultados en Simulación.	34
4.4.1. Simulaciones para la primera señal de referencia.	35
4.4.2. Simulaciones para la segunda señal de referencia.	37
5. Control Difuso con Control por Bloques con Modos Deslizantes	41
5.1. Control por bloques con modos deslizantes.	41
5.1.1. Modelos lineales.	41
5.1.2. Modelo Difuso.	42
5.1.3. Sistema en la forma no lineal controlable a bloques.	44
5.1.4. Dinámica del error	45
5.1.5. Análisis de Estabilidad Local	47
5.2. Controlador Difuso	48
5.2.1. Primera Señal de Referencia .	48
5.2.2. Segunda Señal de Referencia.	49
5.3. Resultados en Simulación.	49
5.3.1. Simulaciones para la primera señal de referencia.	50
5.3.2. Simulaciones para la segunda señal de referencia.	53
6. Conclusiones	56
Apendice A. Sistemas Lineales	60
Apendice B. Ganancias del Regulador Lineal	63
Apendice C. Programas para calcular la matriz L_i	66
Apendice D. Programas para probar estabilidad	70
Apendice E. Programas para calcular la superficie deslizante	76

Capítulo 1

Introducción

Las necesidades que existen actualmente de controlar sistemas exigen la implementación de técnicas de control más robustas, en las cuales sin importar el tipo de perturbaciones externas que afecten al sistema, el controlador sea capaz de seguir una señal de referencia dada.

El objetivo principal de este trabajo es diseñar un controlador para realizar seguimiento de trayectorias, aplicado a un robot manipulador con dos grados de libertad completamente actuado. Para el diseño de este controlador se utilizaron las siguientes técnicas:

- Controlador difuso Takagi Sugeno [1], aplicando la Teoría de Regulación Lineal [2], [3], [4]
- Controlador difuso Takagi Sugeno con Control por Bloques con Modos Deslizantes [5].

Es necesario tomar en cuenta que dentro de las funciones que debe realizar un manipulador robótico está la de realizar movimientos en espacios muy reducidos, además de mover objetos de distintas masas. Por eso es necesario diseñar un controlador que sea capaz de cubrir estas necesidades.

Uno de los problemas para la implementación de sistemas de control no lineal es obtener un modelo que describa la dinámica del sistema a ser controlado. Normalmente este modelo no está disponible o es demasiado complicado para propósitos de diseño. Por ello es importante disponer de un modelo lo suficientemente simple para trabajar con él, pero que retenga las características esenciales del proceso.

Una forma de aproximar ó de obtener las características de los modelos no lineales es a través de los modelos difusos tipo Takagi-Sugeno. Para esto es necesario linealizar el sistema en varios puntos de operación. Una vez que se linealizó el sistema es necesario unir los sistemas linealizados a través de conjuntos difusos para poder interpolar entre los puntos donde no se linealizó la planta; esto para obtener una aproximación del sistema no lineal dentro de una región específica. Una vez obtenidos los modelos lineales, se pueden diseñar los controladores para cada sistema lineal. Una vez calculados los controladores locales, el controlador total es una combinación difusa de los controladores locales.

Como contribución principal en este trabajo de tesis se aplican dos estructuras de Control Difuso Takagi-Sugeno aplicado a un manipulador Robotico.

Esta memoria de tesis se organiza como sigue:

En el capítulo 2 se presentan los conceptos fundamentales sobre el modelo difuso Takagi-Sugeno y se discute la estabilidad de este modelo. Además se presentan conceptos fundamentales sobre la teoría del Regulador Lineal y la teoría de Control por Bloques con Modos Deslizantes. Al final del capítulo se derivan los esquemas de control que se proponen en esta tesis.

El capítulo 3 describe un robot manipulador con dos grados de libertad, se explican las características generales del mismo, se presentan las características mecánicas de los actuadores electromecánicos que proveen el movimiento para sus dos articulaciones. Además se incluyen las dimensiones del robot y posteriormente se muestra como se obtiene el modelo dinámico del robot considerando los parámetros de fricción. Por último se presenta el modelo del robot en variables de estado.

En el capítulo 4 se describe el diseño del controlador difuso Takagi-Sugeno basado en el Regulador Lineal para el seguimiento de trayectorias. Para poder diseñar dicho controlador, se hace una aproximación lineal del sistema por medio de series de Taylor de primer orden. Esto se hace para llevar el sistema a la forma que se requiere para poder aplicar el controlador propuesto en el capítulo 1.

Para el diseño de este controlador es necesario primero proponer el modelo del exosistema, obtener los modelos lineales del robot en varios puntos de operación, proponer los conjuntos difusos, calcular los pares nominales, y finalmente diseñar el controlador difuso. En este capítulo se presenta el diseño de dos controladores para realizar el seguimiento de dos señales de referencia distintas. Por último se presenta el resultado en simulación al aplicar los controladores al robot.

En el capítulo 5 se describe el diseño del controlador por Bloques con Modos Deslizantes para el seguimiento de trayectorias aplicado a un robot actuador. Para el diseño de este controlador es necesario, obtener los modelos lineales del robot en varios puntos de operación y proponer los conjuntos difusos.

Para aplicar el control por bloques es necesario llevar el sistema a la forma no lineal controlable por bloques. Cuando se encuentra en esta forma, se calcula la dinámica del error para obtener la superficie deslizante, y se hace un análisis de estabilidad local, se presenta el controlador difuso y por último se presenta el resultado en simulación al aplicar los controladores al robot.

Finalmente, en el capítulo 6 se exponen las conclusiones y comentarios sobre los resultados obtenidos al aplicar los esquemas propuestos al robot. También se dan algunas perspectivas generales sobre el trabajo futuro.

Capítulo 2

Conceptos Fundamentales

En este capítulo, se presentan algunos conceptos fundamentales que se utilizan en la estructura del controlador Takagi-Sugeno; también se explican las diferentes técnicas de control que se van a emplear en el desarrollo de esta tesis, para realizar el seguimiento de trayectorias de señales de referencia variables en el tiempo, aplicadas a un robot completamente actuado con dos grados de libertad.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2.1, se explica el modelo difuso Takagi-Sugeno en su forma más general y se presentan los principales resultados sobre estabilidad aplicados a sistemas difusos tipo Takagi-Sugeno. En la sección 2.2, se dan algunos conceptos sobre la teoría de Regulación Lineal. En la Sección 2.3, se presentan los conceptos de la estructura de Control por Bloques con Modos Deslizantes. En la Sección 2.4, se presentan las estructuras de los controladores propuesto para realizar seguimiento de trayectorias.

2.1. Modelo Difuso Takagi-Sugeno.

En esta sección se define inicialmente lo que es un Sistema Difuso Funcional [6], del cual el sistema difuso Takagi-Sugeno es un caso particular.

El sistema difuso funcional tiene i -ésimas reglas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1 \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g \text{ es } M_{ig} \\ \text{ENTONCES } b_i = h_i(\cdot) \end{array} \quad (2.1)$$

donde $z_1(t) \dots z_g(t)$ son las variables premisa; M_{ij} son los conjuntos difusos del antecedente de la regla i ; $j = 1, 2, \dots, g$; (\cdot) representa el argumento de la función h_i ; $i = 1, 2, \dots, r$; y r es el número de reglas

El antecedente de las reglas está definido como un sistema difuso normal; sin embargo, en los consecuentes de las reglas, en lugar de un término lingüístico asociado con una función de pertenencia, se usa una función $b_i = h_i(\cdot)$ (de ahí el nombre de "sistema difuso funcional"), que no tiene asociada una función de pertenencia.

El argumento de h_i contiene los términos z_j , pero también se pueden usar otras variables. Cualquier función puede ser usada en la parte consecuente, lo cual hace al sistema difuso funcional muy general. Información sobre los conceptos básicos de lógica difusa se pueden encontrar en [7] y [8].

Para el sistema difuso funcional, se puede usar una operación apropiada para representar el antecedente (p.e. mínimo o producto), y de esta forma la desdifusificación puede ser calculada usando el método del centroide (centro de área o de gravedad), como:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}] \cdot b_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}]} \quad (2.2)$$

donde $\lambda_i[\mathbf{z}] = \prod_{j=1}^g M_{ij}[z_j]$ si se usa el producto, $M_{ij}[z_j]$ es el grado de pertenencia de z_j en M_{ij} y $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_g]$.

Se supone que el sistema difuso funcional esta definido para que independientemente del valor de la entrada, se tenga que $\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}] \neq 0$. Se puede ver al sistema difuso funcional como una interpolación no lineal entre las transformaciones que son definidas por las funciones en el consecuente de las reglas[6].

Cuando

$$b_i = h_i(\cdot) = a_{i0} + a_{i1}z_1 + \dots + a_{ig}z_g$$

(donde a_{ig} son números reales) el sistema difuso funcional es referido como Sistema Difuso Takagi-Sugeno. Este sistema realiza una interpolación no lineal entre transformaciones lineales.

A partir de las reglas, se observa que cuando z_g esta caracterizado por la parte **SI** de la regla, la salida es una función lineal de las variables de entrada; por lo tanto el sistema difuso puede ser visto como una función continua por partes, donde el cambio de una función a otra se efectúa de forma continua, de acuerdo al grado de pertenencia en la función de membresía.

El consecuente de las reglas del sistema difuso Takagi-Sugeno puede ser cualquier transformación lineal. Una transformación que ha probado ser particularmente útil es el de un sistema dinámico lineal como consecuente. De esta forma, se puede representar en forma efectiva a un sistema dinámico no lineal [6]. El modelo del sistema es descrito por reglas difusas **SI-ENTONCES**, las cuales representan relaciones lineales locales entrada-salida, mediante conjuntos difusos en el antecedente y sistemas lineales invariantes en el tiempo en el consecuente.

El modelo difuso Takagi-Sugeno se obtiene fácilmente mediante la linealización de la planta no lineal alrededor de diferentes puntos de operación. Las i -ésimas reglas de los modelos difusos son de la siguiente forma:

i -ésima regla de la planta:

$$\begin{array}{l} \mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g \text{ es } M_{ig} \\ \mathbf{ENTONCES} \ \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \end{array} \quad (2.3)$$

donde $i = 1, 2, \dots, r$; r es el numero de reglas; $z_1(t) \dots z_g(t)$ son las variables premisa ó algunas variables medibles del sistema; M_{ij} son los conjuntos difusos; $j = 1, 2, \dots, g$; $x(t) \in R^n$ es el

vector de estado; $u(t) \in R^m$ es el vector de entrada; $y(t) \in R^p$ es el vector de salida; $A_i \in R^{n \times n}$; $B_i \in R^{n \times m}$ y $C_i \in R^{p \times n}$ son respectivamente la matriz de estado, de entrada y de salida.

De acuerdo a lo anterior, el modelo difuso Takagi-Sugeno permite representar a un sistema no lineal como una interpolación no lineal entre r sistemas lineales. Las funciones de pertenencia del antecedente en cada regla cuantifican que tanto, el sistema lineal en el consecuente, es válido para una región específica en el espacio de estado.

El estado final y la salida final del sistema difuso total son inferidos como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \\ y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\lambda_i[\mathbf{z}(t)] = \prod_{j=1}^g M_{ij}[z_j(t)]$, $M_{ij}[z_j(t)]$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en M_{ij} y $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_g(t)]$.

Una vez que el sistema no lineal a ser controlado es representado por un modelo difuso Takagi-Sugeno, se diseña cada regla de control correspondiente a cada regla del modelo difuso de la planta. El controlador difuso diseñado comparte en el antecedente los mismos conjuntos difusos que el modelo difuso de la planta. Las reglas difusas para el controlador son:

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ \text{ENTONCES } u(t) = -K_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.5)$$

De (2.5) se puede ver que las reglas del controlador difuso se expresan por leyes de retroalimentación lineales en la parte consecuente. Para el diseño de la ley de control de cada regla, se puede utilizar cualquiera de las diferentes técnicas existentes para sistemas lineales. El controlador difuso total se representa por

$$u(t) = \frac{-\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad (2.6)$$

El controlador total resultante, que en general es no lineal, es una combinación difusa de cada controlador lineal local.

A continuación se presenta el análisis de estabilidad así como algunos Teoremas sobre estabilidad del controlador difuso en lazo cerrado.

2.1.1. Análisis de Estabilidad.

Una propiedad importante de los sistemas de control es la estabilidad. En [10], se obtienen teoremas para la estabilidad de un modelo difuso Takagi-Sugeno con sistemas lineales invariantes en el tiempo como consecuentes, utilizando el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Mediante estos teoremas [11] sólo se obtienen condiciones suficientes.

El sistema en lazo abierto de (2.4) se define como sigue

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad (2.7)$$

Para el análisis de estabilidad se presentan los siguientes teoremas, éstos nos sirven para analizar la estabilidad en el sistema en lazo cerrado (2.7).

Teorema 1 *El equilibrio de un sistema difuso continuo descrito por (2.7) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz común P_L simétrica definida positiva ($P_L = P_L^T > 0$) tal que*

$$A_i^T P_L + P_L A_i < 0 \quad (2.8)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$. □

Este teorema se reduce al teorema de estabilidad de Lyapunov para sistemas lineales continuos cuando $r = 1$. El teorema 1 solo da condiciones suficientes para asegurar estabilidad de (2.7).

Definiendo $h_i[\mathbf{z}(t)] = \frac{\lambda_i[\mathbf{z}(t)]}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]}$ y reemplazando (2.6) en (2.4), se obtiene la siguiente ecuación

para el sistema en lazo cerrado.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i[\mathbf{z}(t)] h_j[\mathbf{z}(t)] \{A_i - B_i K_j\} x(t) \quad (2.9)$$

donde K_j es una ganancia de retroalimentación que puede ser calculada de acuerdo a la teoría de sistemas lineales para estabilizar cada modelo lineal local.

Teorema 2 *El sistema difuso en lazo cerrado (2.9) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz definida positiva común P_L la cual satisface las siguientes desigualdades.*

$$(A_i - B_i K_i)^T P_L + P_L (A_i - B_i K_i) < 0 \quad (2.10)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$ y

$$\frac{((A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i))^T}{2} P_L + P_L \frac{((A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i))}{2} \leq 0$$

para $i, j = 1, 2, \dots, r$ sin tomar en cuenta el conjunto de funciones difusas que dependen de la planta linealizada i que no se intersectan con el conjunto de funciones de la planta linealizada j . **Prueba.** (ver ([11])) $\square \blacksquare$

Los teoremas anteriores se basan en la elección de una función de Lyapunov cuadrática. Procedimientos de prueba y error fueron primeramente propuestos por [10] para el cálculo de la matriz P_L . Otros autores [12], [13], [14], [15], [16], [17] establecen que el problema de diseño de la matriz común P_L puede ser resuelto numéricamente; esto es, las desigualdades (2.10) pueden ser expresadas como desigualdades lineales de matrices LMI "Linear Matrix Inequalities"[19].

Si no existe una matriz P_L no significa que no existe un controlador difuso que pueda estabilizar la planta, sino que la función de Lyapunov elegida, no permite demostrar estabilidad. Por lo tanto, es necesario elegir una función de Lyapunov diferente, de tal forma que sea posible probar que el controlador estabiliza la planta.

En este trabajo de Tesis, se utiliza una combinación de la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la Teoría del Regulador Lineal. A continuación se presenta el Problema de Regulación Lineal.

2.2. El Problema de Regulación Lineal.

Un problema muy importante en control automático es el de hacer que la salida de un sistema siga una referencia dada [4]. En el caso de una planta descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

en la cual $u(t) \in R^m$ denota la entrada por la cual la acción de control es puesta en la planta, $y(t) \in R^p$ denota el valor de la salida a ser controlada y $x(t) \in R^n$ es el vector que representa el estado interno de la planta, el problema en cuestión es encontrar para cualquier salida de referencia $y_{ref}(t)$, una ley de control $u(t)$, tal que la respuesta $y(t)$ de la planta satisfaga:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| y(t) - y_{ref}(t) \| = 0 \tag{2.12}$$

para cualquier estado inicial $x(0)$.

La ley de control destinada a este propósito debe ser provista por un controlador retroalimentado, el cual es un dispositivo que reciba cierta información acerca del estado del sistema $x(t)$ y posiblemente de la señal de referencia $y_{ref}(t) \in R^p$ con las cuales es posible generar el valor requerido de la ley de control $u(t)$.

En muchas situaciones prácticas, la respuesta está influenciada no solo por la entrada $u(t)$ sino también por otras entradas exógenas que en general son perturbaciones. Si $\tilde{w}(t) \in R^j$

denota el vector de perturbaciones, la planta puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D\tilde{w}(t) \\ y(t) &= Cx(t) + E\tilde{w}(t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

En este caso, la tarea del controlador es hacer que la salida del sistema $y(t)$ siga la señal de referencia aún con las perturbaciones $\tilde{w}(t)$. La señal de referencia $y_{ref}(t)$ puede también ser expresada en términos de otra señal externa, es decir

$$y_{ref}(t) = Rz(t)\tag{2.14}$$

donde se considera que $z(t) \in R^k$ es generada por un sistema dinámico externo.

Una vez que las familias de señales de referencia y perturbaciones han sido definidas el problema en cuestión se puede plantear como el de encontrar una ley de control $u(t)$ para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

donde

$$P = [D \ 0], \quad Q = [E \ -R], \quad w(t) = \begin{bmatrix} \tilde{w}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

y $e(t) = y(t) - y_{ref}(t)$ denota el error de seguimiento de referencia tal que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En este contexto se supondrá que $w(t) \in R^r$ es generada por un sistema dinámico

$$\dot{w}(t) = Sw(t)\tag{2.16}$$

Este sistema es llamado *exosistema*.

En lo que sigue, se supondrá que el exosistema satisface las siguientes hipótesis:

(H1) El exosistema es neutralmente estable; esto es, los valores propios de S están en el eje imaginario del plano complejo.

La situación más favorable, desde el punto de vista de retroalimentación, sucede cuando todos los estados de la planta $x(t)$ y los del exosistema $w(t)$ están disponibles para ser medidos. En este caso se dice que el controlador está provisto de toda la información; es decir, la señal de control está dada por:

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)\tag{2.17}$$

En la figura 2.1 se presenta un diagrama a bloques del sistema y el controlador

La combinación de (2.15) con el controlador produce un nuevo sistema llamado *sistema en lazo cerrado*. El propósito del controlador es garantizar que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable y que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, para cualquier condición inicial posible y cualquier entrada exógena posible de una familia prescrita de funciones del tiempo. Cuando este es el caso el sistema a lazo cerrado se dice tener la propiedad de *regulación de salida*. Note

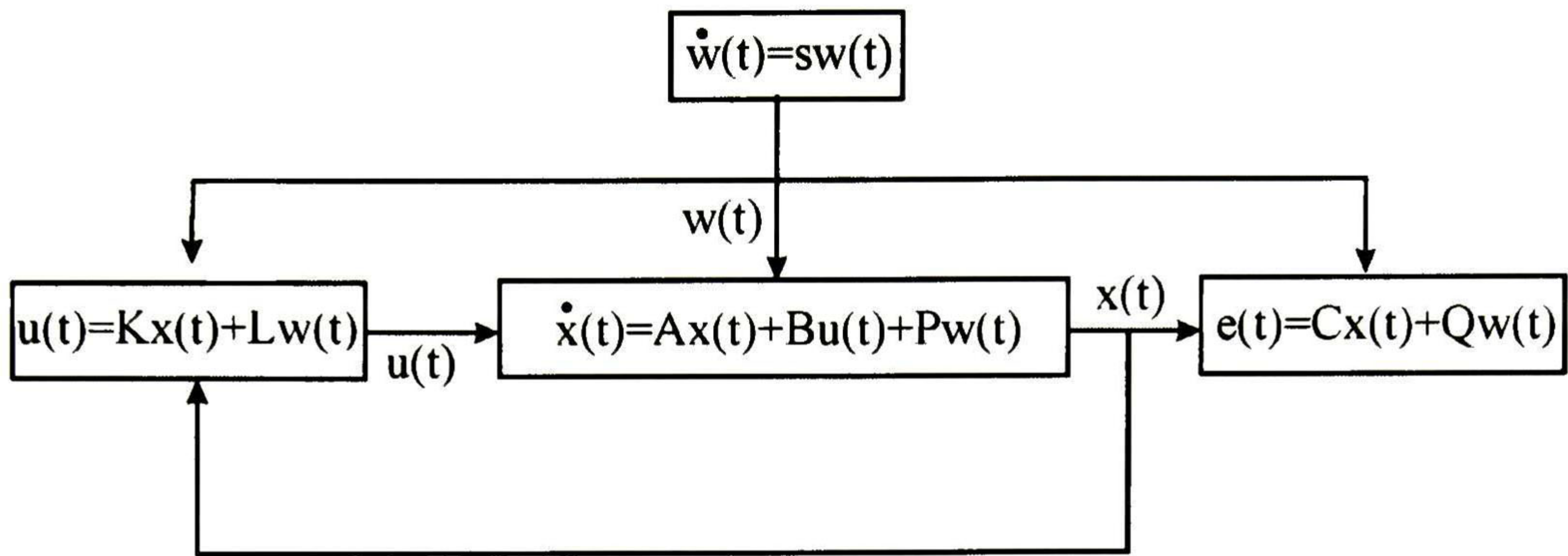


Figura 2.1: Controlador por retroalimentación del estado.

que el requisito en cuestión es esencialmente que cada entrada $w(t)$ induzca un estado estable bien definido $x_{ss}(t)$ tal que:

$$e(t) = Cx_{ss}(t) + Qw(t) = 0 \quad (2.18)$$

para todo $t \geq 0$.

Los problemas para lograr los objetivos deseados pueden ser enunciados formalmente de la siguiente manera [4]:

Regulación por retroalimentación del estado. Dadas $[A, B, C, P, Q, S]$ encontrar si es posible, dos matrices K, L tales que:

(S)_{fi} La matriz $(A + BK)$ es Hurwitz.

(R)_{fi} Para cada condición inicial $(x(0), w(0))$ la solución $(x(t), w(t))$ de:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= Sw(t) \\ e(t) &= Cx(t) + Qw(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde

$$u(t) = Kx(t) + Lw(t)$$

es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

A continuación se mostrará como el problema de regulación con disposición del vector de estado y la manera en que este puede ser resuelto.

2.2.1. Problema de Regulación Lineal con Disposición de Toda la Información.

Se presenta primero un simple pero importante resultado el cual, proporciona la llave para la solución del problema en cuestión [4].

Lema 3 *Asuma que para alguna $u(t) = Kx(t) + Lw(t)$, $(S)_{fi}$, se satisface y **(H1)** se satisface entonces $(R)_{fi}$ también se satisface si y solo si existe una matriz Π que resuelve las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\Pi S &= (A + BK)\Pi + (P + BL) \\ 0 &= C\Pi + Q\end{aligned}\tag{2.20}$$

Prueba. (ver [4]). ■

Entonces si se encuentran matrices Π y L tales que, para una K que estabiliza la matriz $(A + BK)$, se satisfacen las ecuaciones anteriores el problema del regulador lineal con disposición de toda la información está solucionado.

Note que para $(S)_{fi}$ se satisfaga se debe cumplir que el par (A, B) sea estabilizable esto es que los modos no controlables sean estables. Por lo que lo anterior se pone como hipótesis que:
(H2) El par (A, B) es estabilizable.

Teorema 4 *Suponga que **(H1)** y **(H2)** se satisfacen, entonces existe una solución al problema de regulación de la salida por medio de retroalimentación del estado si y solo si existen matrices Π y Γ tales que resuelven las ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 &= C\Pi + Q\end{aligned}\tag{2.21}$$

Prueba. (ver [18]) ■

En este trabajo de Tesis, se utiliza una combinación de la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Control por Bloques con Modos Deslizantes. A continuación se presentan conceptos fundamentales sobre el Control por Bloques con Modos Deslizantes.

2.3. Control por Bloques con Modos Deslizantes.

Consideremos el caso de un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + D(x, t)w(t)\tag{2.22}$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado; $w(t) \in R^p$ es un disturbio originado por un sistema externo; $u(t) \in R^m$ es el vector de control que está acotado por

$$\begin{aligned}\dot{w} &= s(x) \\ \|u\| &\leq u_0, \quad u_0 > 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

El campo vector $f(x, t)$, $D(x, t)$ y las columnas de la matriz $B(x, t) = [b_1(x, t) \ b_2(x, t) \ \dots \ b_m(x, t)]$ son funciones suficientemente suaves. Supongamos que $f(0, t) = 0$

Definición 5 *Sea el sistema*

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + B_1(x_1, t)x_2 + D_1(x_1, t)w \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)x_3 + D_2(x_1, x_2, t)w \\
 \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + B_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1} + D_i(x_1, \dots, x_i, t)w \quad i = 3, \dots, r-1 \\
 \dot{x}_r &= f_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t) + B_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)u + D_r(x_1, \dots, x_{r+1}, t)w
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Con la salida

$$y = h(x) = x_1$$

Si el sistema (2.22) se puede representar de la forma (2.24) se dice que está en la Forma No Lineal Controlable por Bloques, para esto es necesario que la matriz B_i es de rango pleno, esto es

$$\text{rango}[B_i] = n_i \quad \forall x \in X \subset R^n \text{ y } t \in [0, \infty), \quad i = 1, \dots, r \tag{2.25}$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ y los índices (n_1, n_2, \dots, n_r) definen la estructura del sistema y satisfacen la siguiente condición.

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq m$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^{r+1} n_i = n$$

El propósito es encontrar una ley de control por modos deslizantes para el sistema (2.22) que se encuentra en la forma (2.24), que asegure estabilidad en el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema en lazo cerrado, y lo podemos definir con la siguiente preposición.

Proposición 6 *Suponga que en el sistema (2.24)*

1. $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ y $B_i(x_1, \dots, x_i, t)$ son funciones continuamente diferenciables de orden $(i-1)$, $i = 1, \dots, r$, con respecto a todos los argumentos sobre el intervalo $t \in [0, \infty)$, y todas las derivadas son acotadas;
2. La condición (2.25) se cumple, y
3. Se tiene la estructura

$$n_1 = n_2 = \dots = n_r = m$$

entonces existe una transformación difeomórfica

$$z = \phi(x, w, t), \quad \phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T \tag{2.26}$$

una superficie

$$s(x, w, t) = 0, \quad s \in R^{n_r} \tag{2.27}$$

y una ley de control discontinua

$$u = -u_o \text{sign}[M(x, t)s] \tag{2.28}$$

que garantiza modos deslizantes sobre la superficie (2.27) en tiempo finito, tal que el movimiento de modos deslizantes con respecto a la nueva variable z está descrito por una ecuación de orden $(n - n_r)$:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\ \dot{z}_i &= K_i z_i + B_i z_i \\ \dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1}\end{aligned}\tag{2.29}$$

tal que el punto de equilibrio $z_i = 0$, $x_r = 0$ es asintóticamente estable, donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $z_i \in R^{n_i}$, $i = 2, \dots, r - 2$ con $s = z_r$ y todas las K_i son matrices Hurwitz, $M(x, t)$ es una matriz no singular tal que $\text{rango}[MB_r] \neq 0$.

Prueba. (Ver [20]) ■

2.3.1. Análisis de Estabilidad.

Para hacer el análisis de estabilidad se elegirá el control como en (2.28) y se probará la estabilidad del movimiento del sistema en lazo cerrado sobre la superficie $s(x, t) = 0$. Para esto, elegimos una función definida positiva como

$$v_0 = \frac{1}{2} s^T s\tag{2.30}$$

que será la función candidata de Lyapunov. Derivando esta función sobre las trayectorias del subsistema (2.29), resulta

$$\dot{v} = s^T \bar{f}_r(x, t) + s^T B_r(x, t)u\tag{2.31}$$

Recordando que $B_r(x, t)$ es una matriz no singular y tomando en cuenta el acotamiento (2.23), se selecciona el control como una función discontinua de la forma (2.28):

$$u = -u_o \text{sign}[\bar{s}]\tag{2.32}$$

con

$$\bar{s} = B_r^T(x, t)s \quad y \quad s^T = \bar{s}^T B_r^{-1}(x, t)\tag{2.33}$$

donde $M = B_r^T$ Tomando en cuenta que

$$\bar{s}^T \text{sign}(\bar{s}) = |\bar{s}|$$

y

$$\|\bar{s}\|_1 \geq \|\bar{s}\|_2$$

las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) quedan de la forma

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= \bar{s}^T B_r^{-1} \bar{f}_r - u_o \text{sign}[\bar{s}] \\ &\leq \|\bar{s}\|_2 \|B_r^{-1} \bar{f}_r - u_o\|_1\end{aligned}$$

Tenemos que $\|\bar{s}\|_2 = \|B_r^T s\|_2$ y $\|B_r^T s\|_2 \leq \|B_r^T\|_2 \|s\|_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &\leq -(u_o - \|B_r^{-1} \bar{f}_r\|_2) \|\bar{s}\|_2 \\ &\leq -(u_o - \|B_r^{-1} \bar{f}_r\|_2) \|B_r^T\|_2 \|s\|_2\end{aligned}\tag{2.34}$$

Bajo la condición del acotamiento (2.23) existe una constante positiva q_0 tal que

$$\|B_r^{-1}(x, t)\bar{f}_r(x, t)\|_2 \leq q_0$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov será definida negativa si

$$u_0 > q_0 \quad (2.35)$$

y el movimiento del sistema en lazo cerrado es estable sobre la variedad $\bar{s} = 0$ y también sobre la variedad $s = 0$ ya que la matriz B_r es no singular. Por lo tanto el modo deslizante aparece en el sistema.

De la ecuación (2.30), tenemos.

$$\|s\|_2 = \sqrt{2v_0}$$

Sustituyendo el valor anterior en la ecuación (2.34) resulta

$$\dot{v}_0 \leq -\beta\sqrt{2v_0} \quad \beta = (u_0 - q_0)l_0 \quad (2.36)$$

donde la constante positiva l_0 es la cota de la norma de la matriz B_r , $\|B_r^T\|_2 \leq l_0$. Esta constante existe bajo la condición (2.23). Ahora, empleando el Principio de Comparación [20] para la desigualdad diferencial (2.36) usamos la siguiente ecuación:

$$\dot{\zeta} = -\beta\sqrt{2\zeta} \quad (2.37)$$

con

$$v_0(t_0) \leq \zeta(t_0)$$

tal que

$$v_0(t) \leq \zeta(t)$$

Entonces la solución $\zeta(t)$ de (2.37) es

$$\zeta(t) = \left[-\frac{\beta}{\sqrt{2}}(t - t_0) + \sqrt{\zeta(t_0)}\right] \quad (2.38)$$

De la ecuación (2.38), podemos encontrar el tiempo t_s :

$$t_s \leq t_0 + \frac{\sqrt{2}}{\beta} \sqrt{v_0(t_0)} \quad (2.39)$$

en que ocurre el modo deslizante. Para todo $t > t_s$, $\zeta(t)$ será igual a cero, por lo tanto $v_0(t)$ se desvanecerá en un tiempo finito. Esto sucede cuando s es igual a cero, garantizando así los modos deslizantes sobre la superficie $s = 0$.

Después de la presencia de los modos deslizantes en el sistema transformado (2.29), resultan $n - n_r$ ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\ \dot{z}_i &= K_i z_i + B_i z_i \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

las cuales representan la dinámica de modos deslizantes, donde $z = (z_1, \dots, z_r)^T$

Mientras suceden los movimientos del sistema sobre la superficie $s = 0$, el control u es igual al control equivalente u_{eq} que se obtuvo de la última ecuación $\dot{s} = 0$ (2.29), y tiene la siguiente forma

$$u_{eq}(x, t) = -B_r^{-1}(x, t)\bar{f}_r(x, t) \quad (2.41)$$

Sustituyendo (2.41) en el sistema (2.40), la dinámica de modos deslizantes sobre la variedad $s = 0$ será

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_1 z_1 + B_1 z_2 \\ \dot{z}_i &= K_i z_i + B_i z_i \quad i = 2, \dots, r-2 \\ \dot{z}_{r-1} &= K_{r-1} z_{r-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

que coincide con (2.29), de esta manera se demuestra que el sistema (2.42) se estabiliza al escoger los valores adecuados de ganancias K , para que hagan Hurwitz el sistema.

2.4. Estructura del Controlador Propuesto.

En esta sección, se describe la estructura de los controladores que se proponen, los cuales permiten realizar el seguimiento de trayectoria en un sistema no lineal. Básicamente, el algoritmo combina la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Regulador Lineal en un primer caso. También se utilizó una segunda técnica para hacer más robusto el control; para esto, se aplicó la combinación de la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Control por Bloques con Modos Deslizantes.

2.4.1. Estructura de un Controlador Difuso Takagi-Sugeno con la Teoría del Regulador Lineal.

De acuerdo a (2.3), (2.16) y (2.18), el modelo difuso de la planta queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ &\text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ \dot{w}(t) = S w(t) \\ e(t) = C_i x(t) + Q_i w(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las reglas difusas para el controlador de acuerdo a (2.5) y (2.18) son:

i-ésima regla del controlador :

$$\begin{aligned} &\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ &\text{ENTONCES } u(t) = K_i x(t) + L_i w(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde K_i es cualquier matriz que estabiliza el sistema lineal local, $L_i = (\Gamma_i - K_i \Pi_i)$, Γ_i y Π_i que satisface el teorema 4 para cada sistema lineal local.

El controlador difuso total es representado por

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot [K_i x(t) + L_i w(t)]}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad (2.45)$$

En esta tesis se utiliza el siguiente diseño del controlador difuso en el cual consiste en determinar las ganancias de retroalimentación K_i y L_i en la parte consecuente.

2.4.2. Estructura de un Controlador Difuso Takagi-Sugeno con Control por Bloques con Modos Deslizantes.

De acuerdo a (2.3), (2.22) y (2.28), el modelo difuso de la planta queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ e(t) = C_i x(t) - x_{ref} \end{cases} \end{array} \quad (2.46)$$

Las reglas para calcular el controlador de acuerdo a (2.5) y (2.28) son:

i-ésima regla del controlador :

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } M_{ig} \\ \text{ENTONCES } u(t) = -u_o \text{sign}[B_i^T s_i] \quad i = 1, 2, \dots, r \end{array} \quad (2.47)$$

Para el diseño de este controlador es necesario seleccionar la superficie de modos deslizantes s_i , determinar el valor de u_o que estabilice el sistema y finalmente de los sistemas linealizados seleccionar la matriz B_i que debe ser no singular

El controlador difuso total es representado por

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot [-u_o \text{sign}[B_i^T s_i]]}{\sum_{i=1}^r \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad (2.48)$$

Una vez que se está en la superficie de modos deslizantes, el sistema queda como un sistema lineal para el que se selecciona una matriz de ganancia K_i que lo estabiliza.

Capítulo 3

Modelo del Robot

Los manipuladores robóticos son sistemas usados comúnmente en la industria en tareas como: soldadura, pintura, manipulación de materiales en líneas de manufactura, etc. En general, se desea que el manipulador conduzca su elemento final a lo largo de una trayectoria. Uno de los problemas que enfrentan las leyes de control desarrolladas es que las trayectorias no cubren toda el área de trabajo, otro problema es el manejar masas de diferente tamaño y peso lo cual hace que cambie la dinámica del robot.

En este capítulo se presenta el modelo matemático de un manipulador robótico completamente actuado que se encuentra localizado en El Instituto Tecnológico de la Laguna, Torreón, Coahuila. En la sección 3.1, se explican las características generales del manipulador. En la sección 3.2, se explican las características de los actuadores electromecánicos que lo componen. En la sección 3.3, se presentan las dimensiones del brazo. En la sección 3.4, se presenta el modelado dinámico del robot; este modelo considera la fricción que existe en cada una de las uniones. En la sección 3.5, se presenta en variables de estado el modelo no lineal del robot manipulador

3.1. Características del Manipulador.

El manipulador cuenta con dos eslabones de aluminio colocados en posición vertical formando un brazo y antebrazo como se muestra en la figura 3.1. El primer eslabón se encuentra unido mediante un motor eléctrico a un pedestal vertical cuya base se localiza firmemente sobre una superficie horizontal. El segundo eslabón se conecta al extremo final del primer eslabón a través de un segundo motor eléctrico.

Los motores poseen el soporte electrónico en cajas separadas necesarios para suministrar la potencia eléctrica requerida, así como el instrumental para la medición de las posiciones angulares de sus respectivos rotores.

Los manejadores se encuentran acoplados a una tarjeta electrónica basada en un procesador digital de señales (TMS320C31) cuyo papel es ejecutar los algoritmos de control programados¹. Esta tarjeta se encuentra montada sobre una computadora personal en la cual se realizan las tareas de programación del algoritmo de control, monitoreo de variables de interés y cambio de los parámetros del controlador.

¹La frecuencia de muestreo recomendada es de 400 Hz, pudiendo ser incrementada adicionalmente hasta 2 kHz.

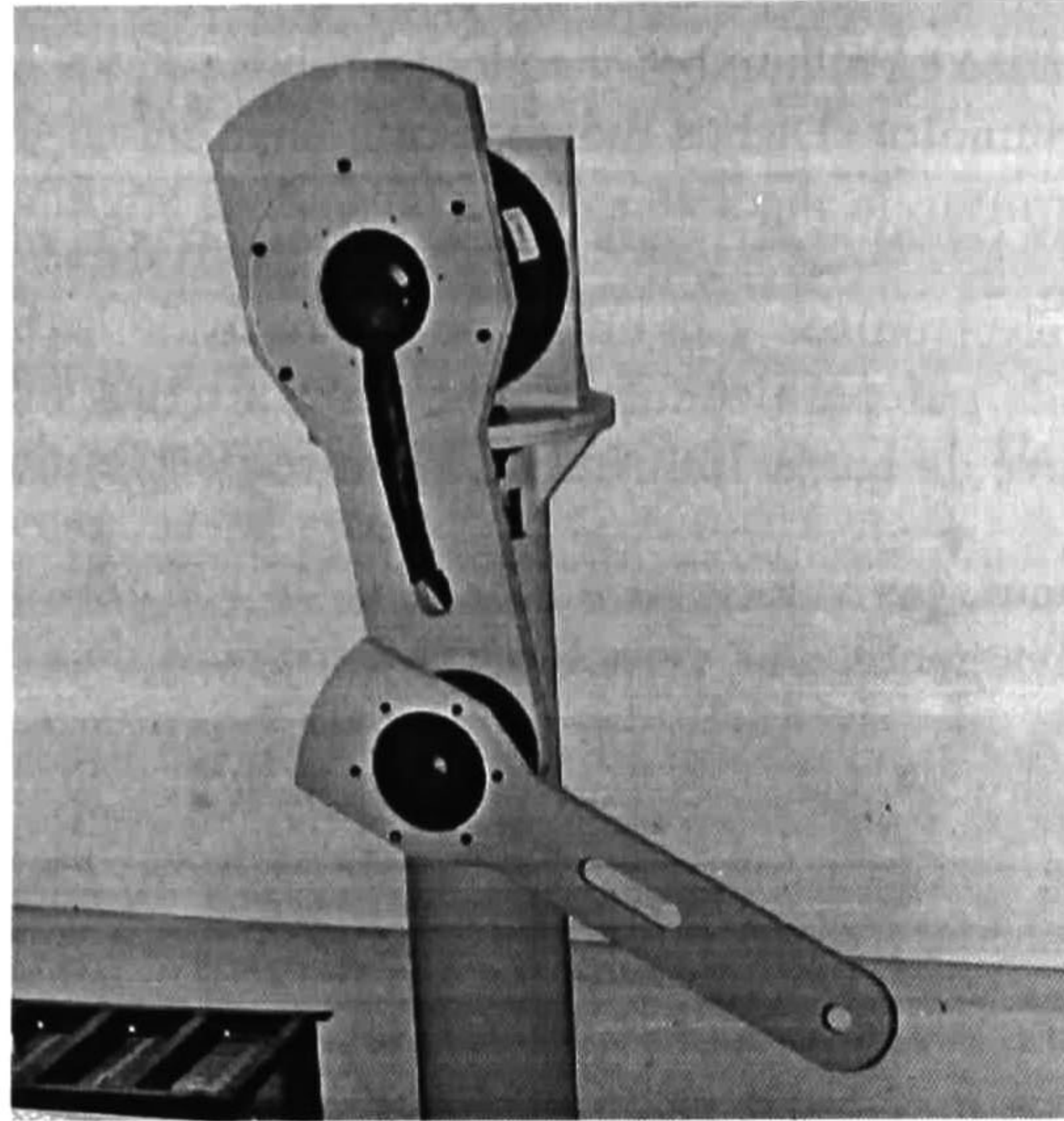


Figura 3.1: Manipulador planar con dos grados de libertad

Para estos fines, la computadora personal cuenta con el ambiente de trabajo **SPAC** (Sistema Programable de Algoritmos de Control). Una característica del diseño de este ambiente es que permite en forma amigable y sencilla usar símbolos y gráficos predefinidos para abocarse a la tarea de la programación de las leyes de control, en un lenguaje de alto nivel similar al lenguaje C.

Con este ambiente de trabajo se logra una gran transparencia en la programación, desapareciendo prácticamente la necesidad de conocer aspectos específicos del material electrónico, calibraciones y conversiones involucrados en el acoplamiento del algoritmo de control, la tarjeta controladora y los manejadores de los motores

Las dimensiones físicas y mecánicas del robot, así como las especificaciones técnicas de los motores, hacen de este robot un dispositivo experimental de desempeño comparable a nivel de precisión, repetividad y velocidad, a ciertos manipuladores robóticos industriales.

3.2. Actuadores.

El robot manipulador cuenta con dos actuadores electromecánicos que proveen el movimiento para sus dos articulaciones. El tipo de actuadores son motores eléctricos de reluctancia variable sin escobillas, de la variedad denominada de alto par, también conocidos como de transmisión directa. El calificativo de *transmisión directa* deriva de la característica que ambos eslabones están directamente acoplados a los rotores de los motores correspondientes sin requerir engranes, bandas ni poleas.

Las ventajas argumentadas para esta clase de motores son la eliminación del “juego mecánico” y la atenuación de la disipación de energía por fricción que normalmente se encuentran presente en motores provistos con cajas de engranes.

Los motores colocados en el hombro y codo del robot son los modelos DM1200A y DM1015B de la compañía Compumotor. Dichos motores contienen integrado a ellos codificadores ópticos incrementales que permiten la medición de las posiciones angulares de sus rotores.

Los manejadores electrónicos y la etapa de potencia de los motores han sido configurados como fuentes ideales de par para zonas de operación a bajas velocidades, permitiendo generar en forma continua pares de hasta 150 Nm y 15 Nm respectivamente.

En estas condiciones, las velocidades máximas de los rotores deben limitarse a π rad/seg y 4π rad/seg respectivamente. Las características técnicas de ambos motores se muestra en la tabla 3.1.

	Precisión	Repetitividad	Resolución	Velocidad máxima	Aceleración máxima
DM1200A	0,0069°	0,00056°	0,00035°	180°/seg	$4,56 \times 10^4 \text{ }^\circ/\text{seg}^2$
DM1015B	0,0069°	0,00056°	0,00056°	720°/seg	$4,77 \times 10^4 \text{ }^\circ/\text{seg}^2$

Tabla 3.1: Características técnicas

El modelo matemático que caracteriza el comportamiento dinámico ideal de ambos motores puede expresarse como

$$J\ddot{q} + f(\dot{q}) = k(q)\tau \tag{3.1}$$

donde J es el momento de inercia de cada rotor con respecto a su eje de giro, q es la posición angular del rotor, $k(q)\tau$ es el par aplicado al rotor, $k(q)$ es una ganancia dependiente de la posición y $f(\dot{q})$ es el par debido a la fricción que se opone al movimiento del rotor.

El fabricante de los motores proporciona los valores de las inercias de los rotores, que se encuentran resumidas en la tabla 3.2. La ganancia $k(q)$ es debida al numero finito de polos en el estator que produce un rizo en el par aplicado, y toma valores entre 0.975 y 1.025.

	Momentos de inercia
DM1200A	0,167 kgm^2
DM1015B	0,12 kgm^2

Tabla 3.2 Momentos de inercia

La dependencia explicita de $k(q)$ en terminos de la posición no es proporcionada por el fabricante de los motores y resulta de difícil obtención experimental, razón por la cual se considera aproximadamente unitaria y será omitida de aquí en adelante, reteniendo como modelo dinámico de los motores:

$$J\ddot{q} + f(\dot{q}) = \tau \tag{3.2}$$

La expresión para el par de fricción $f(q)$ tampoco es proporcionada por el constructor de los motores; sin embargo, evidencias experimentales indican que en primera instancia un modelo que captura el par de fricción está formado por efectos de Coulomb y viscosos:

$$f(\dot{q}) = f_c \text{sign}(\dot{q}) + f_v \dot{q} \tag{3.3}$$

siendo f_c y f_v los coeficientes de fricción de Coulomb y viscosos, respectivamente.

3.3. Dimensiones.

Defínase un marco coordenado cartesiano cuyo origen es seleccionado en el punto de intersección del eje de rotación de la articulación del hombro con el plano vertical $Y_1 - Y_2$, como se muestra en la figura 3.2.

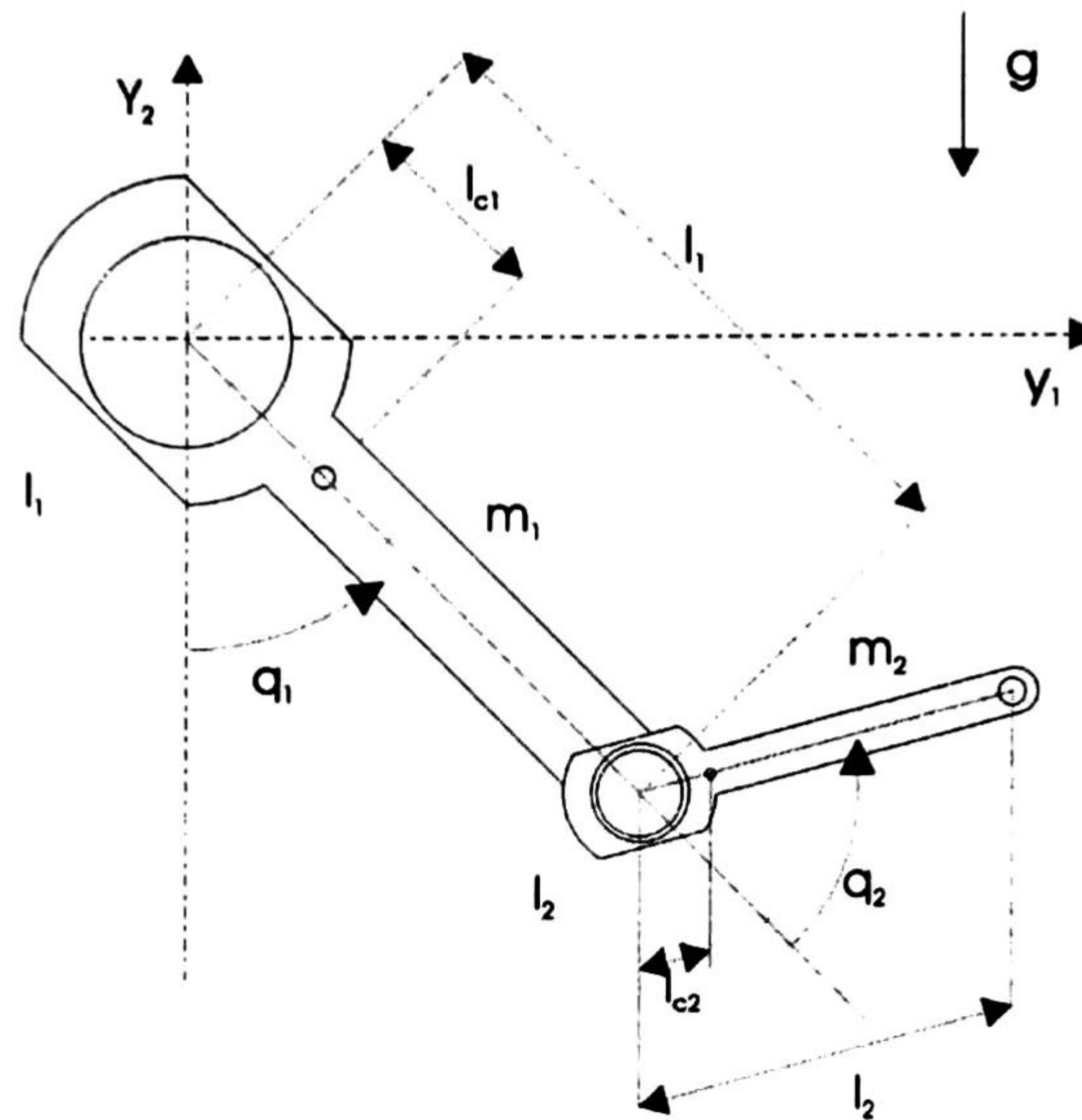


Figura 3.2: Diagrama mecánico del robot

donde q_1, q_2 son la posición angular de los eslabones 1 y 2 respectivamente, la g representa la gravedad.

En la tabla 3.3 se muestra el significado de los símbolos mostrados en la figura 3.2, así como los valores correspondientes para cada uno de ellos.

Eslabón	Significado	Notación	valor	unidad
(1) (Brazo)	Masa del eslabón 1	m_1	23,902	kg
	Longitud del eslabón 1	l_1	0,450	m
	Inercia del eslabón	I_1	1,266	$kg\ m^2$
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}	0,091	m
(2) (Antebrazo)	Masa del eslabón 2	m_2	3,880	kg
	Longitud del eslabón 2	l_2	0,450	m
	Inercia del eslabón	I_2	0,093	$kg\ m^2$
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}	0,048	m

Tabla 3.3: Parámetros del Robot

3.4. Modelo Dinámico.

La figura 3.2 ilustra las diferentes variables y parámetros que intervienen en el desarrollo matemático para modelar el manipulador, que es considerado como un sistema no conservativo. Se utilizara la ecuación general de Euler-Lagrange que esta dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \tau \quad (3.4)$$

donde L es el langrangiano definido como la diferencia entre la energía cinética K y energía potencial V , los vectores τ y q representan el par y las posiciones angulares de las uniones de los eslabones en forma generalizada respectivamente, R es la función de disipación de Rayleigh y t es el tiempo.

$$L = K - V$$

A partir de la ecuación (3.4) se pueden obtener las ecuaciones correspondientes a cada eslabón

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} &= \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde τ_1 y τ_2 es el par del motor del manipulador en la unión 1 y 2. El desarrollo matemático se encuentra en [21]. La dinámica de un robot de n grados de libertad con eslabones rígidos y sin elasticidad en las uniones se expresa como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (3.6)$$

donde q es un vector de $n \times 1$ llamado vector de posiciones articulares, \dot{q} es un vector $n \times 1$ denominado vector de velocidades articulares, τ es el vector $n \times 1$ de pares aplicados, $M(q)$ es una matriz de $n \times n$ llamada la matriz de inercia del manipulador y tiene la propiedad de ser simétrica y definida positiva, $C(q, \dot{q})$ es una matriz $n \times n$, se le denomina la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ es el vector de $n \times 1$ de pares gravitacionales debidos a la acción de la gravedad, y el vector $f(\dot{q})$ de $n \times 1$ denota al par de fricción en las articulaciones fricción entre los rotores y sus soportes.

Las estructuras de los diversos componentes del modelo dinámico (3.6) para el manipulador que nos ocupa vienen a continuación.

La matriz de inercia está dada por la siguiente expresión:

$$M(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Una manera de expresar la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis que preserva la propiedad de antisimetría de $\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ es

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \text{sen}(q_2) & -m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \text{sen}(q_2) - m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \text{sen}(q_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \text{sen}(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

El vector de pares gravitacionales resulta:

$$g(q) = g \begin{bmatrix} m_1 l_{c1} \text{sen}(q_1) + m_2 (l_1 \text{sen}(q_1) + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)) \\ m_2 l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

El vector de pares de fricción tiene la estructura:

$$f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_{v1} \dot{q}_1 + f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ f_{v2} \dot{q}_2 + f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

es el vector de pares aplicados:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Tomando en cuenta los valores que se muestran en la tabla 3.1, se obtienen las siguientes expresiones²:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} 2,351 + 0,168 \cos(q_2) & 0,102 + 0,084 \cos(q_2) \\ 0,102 + 0,084 \cos(q_2) & 0,102 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 - 0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ 0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ g(q) &= \begin{bmatrix} 38,465 \text{sen}(q_1) + 1,824 \text{sen}(q_1 + q_2) \\ 1,824 \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Otra forma de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis pero que no preserva la propiedad de antisimetría de $\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ es

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Esta da lugar a la siguiente matriz:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0,168 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ 0,084 \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

²No se incorpora el vector de pares de fricción en virtud de desconocer los valores de los parámetros involucrados en el modelo de fricción.

3.5. Representación en Variables de Estado.

Como se vio en la sección 3.4 el modelo dinámico que representa un robot de n grados de libertad con eslabones rígido esta representado por (3.6) :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de pares gravitacionales y $f(q)$ representa el vector de pares de la fricción del sistema.

$$\begin{aligned} q &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; & \dot{q} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}; & \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}; \\ M(q) &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}; \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}; \\ g(q) &= \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}; \\ f(\dot{q}) &= \begin{bmatrix} F_1(\dot{q}_1) \\ F_2(\dot{q}_2) \end{bmatrix}; \\ \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los valores para cada matriz esta dado en la sección 3.4

A partir de este modelo se puede obtener su representación en variables de estado como

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}[\tau + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q})] \quad (3.13)$$

Desarrollando por componentes se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \frac{M_{22}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \left(\frac{M_{12}C_2}{M_{22}} + \frac{M_{12}G_2}{M_{22}} + \frac{D_{12}F_2(\dot{q})}{M_{22}} - C_1 - G_1 - F_1(\dot{q}) \right) \\ \frac{-M_{12}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \left(\frac{M_{11}C_2}{M_{12}} + \frac{M_{11}G_2}{M_{12}} + \frac{D_{11}F_2(\dot{q})}{M_{12}} - C_1 - G_1 - F_1(\dot{q}) \right) \end{bmatrix} \quad (3.14) \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{M_{22}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \\ \frac{-M_{12}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \end{bmatrix} \tau \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{11}\dot{q}_1 + C_{12}\dot{q}_2 \\ C_2 &= C_{12}\dot{q}_1 \end{aligned}$$

Si se definen las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, & x_2 &= \dot{q}_1, & x_3 &= q_2, & x_4 &= \dot{q}_2, \\ u_1 &= \tau_1, & u_2 &= \tau_2, \\ y_1 &= x_1, & y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

el sistema no lineal queda representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\ y(t) &= h(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{M_{22}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \left(\frac{M_{12}C_2}{M_{22}} + \frac{M_{12}G_2}{M_{22}} + \frac{D_{12}F_2(\dot{q})}{M_{22}} - C_1 - G_1 - F_1(\dot{q}) \right) \\ \frac{-M_{12}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \left(\frac{M_{11}C_2}{M_{12}} + \frac{M_{11}G_2}{M_{12}} + \frac{D_{11}F_2(\dot{q})}{M_{12}} - C_1 - G_1 - F_1(\dot{q}) \right) \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_{22}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \\ \frac{-M_{12}}{M_{11}M_{22} - M_{12}^2} \end{bmatrix},$$

$$h(x) = [x_1 \ x_2],$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T,$$

$$u = [\tau_1 \ \tau_2]^T$$

Capítulo 4

Control Difuso con Regulación Lineal

En este capítulo se presenta el diseño de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Regulador Lineal propuesto en la sección 2.4.1. Éste se aplica en simulación al manipulador robótico descrito en el capítulo 3.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 4.1, se explica la forma en que se obtuvo la aproximación lineal del modelo a través de series de Taylor. En la sección 4.2, se lleva a cabo el diseño del controlador difuso aplicado a una primera señal de referencia. En la sección 4.3, se lleva a cabo el diseño del controlador difuso aplicado a una segunda señal de referencia. En la sección 4.4, se muestran los resultados en simulación al aplicar cada uno de los controladores.

4.1. Aproximación Lineal del Modelo.

Donde el diseño del controlador, se requiere aproximar el modelo no lineal en variables de estado que se obtuvo en la sección 3.5. Es necesario determinar los diferentes modelos lineales que aproximan el comportamiento del manipulador robótico en diferentes puntos de operación.

Para la obtención de estos modelos se realiza la linealización mediante una aproximación a través de series de Taylor de primer orden [24]. El modelo no lineal del manipulador es de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t) = F(x(t), u(t), t)$$

Suponiendo que

$$\begin{aligned}x(t) &= x^0(t) + \delta x(t) \\u(t) &= u^0(t) + \delta u(t)\end{aligned}$$

la expansión en series de Taylor es

$$F(x(t), u(t), t) = F(x_0(t), u_0(t), t) + F_x(t)\delta x(t) + F_u(t)\delta u(t) \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned}F_x(t) &= \left. \frac{\partial F(x(t), u(t), t)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \\F_u(t) &= \left. \frac{\partial F(x(t), u(t), t)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}\end{aligned} \quad (4.2)$$

y x_0 y u_0 son los valores de x y u en un punto de equilibrio determinado y si se desprecian los términos de orden superior

$$\delta \dot{x} = F(x(t), u(t), t) - F(x_0(t), u_0(t), t)$$

se tiene

$$\delta \dot{x} = F_x \delta x + F_u \delta u$$

Definiendo $A(t) \triangleq F_x(t)$; $B(t) \triangleq F_u(t)$; y redefiniendo por simplicidad a $x \triangleq \delta x$, $u \triangleq \delta u$ se obtiene:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= F_x(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} = \left. \frac{\partial (f(x) + g(x)u(t))}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \\ B &= F_u(t) = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \left. \frac{\partial (f(x) + g(x)u(t))}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Los modelos lineales describen el comportamiento dinámico de la planta y son válidos en una región alrededor del punto de operación. Cada punto de operación define un sistema lineal diferente, por lo tanto se necesitan calcular diferentes ganancias para diseñar cada uno de los controladores lineales requeridos. Los puntos de operación se seleccionan de acuerdo a la señal de referencia que se desea seguir, esta selección se presenta en la sección 4.2, así como los modelos ya linealizados.

Los modelos lineales que se requieren para cada controlador se calculan sin tomar en cuenta el efecto de fricción que afecta al manipulador.

4.2. Diseño del Controlador para la Primera Señal de Referencia.

En esta sección, se presenta el diseño del controlador difuso. El objetivo de este controlador es que la salida de la planta siga una señal de referencia específica.

Para poder representar el sistema como el modelo propuesto en (2.43) es necesario determinar *los modelos lineales, los conjuntos difusos, el exosistema y las ganancias* que se utilizarán en el controlador difuso.

4.2.1. Modelo del Exosistema.

Para este sistema se desea que la salida del sistema (x_1 x_2), sigan una señal de referencia senoidal y cosenoidal. De acuerdo a esto, se presenta en forma general la señal de referencia que se desea seguir como:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ 1,5 \cos(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

El modelo matemático del exosistema que permite generar la señal de referencia a seguir, es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \\ \dot{w}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \\ w_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde w_1, w_2, w_3 y w_4 generan señales senoidales y cosenoidales con una amplitud de 1 y 1.5 respectivamente; $w_k(0)$, son las condiciones iniciales.

El exosistema (4.6) genera señales unitarias; es decir, w_1 y w_4 generan señales senoidales y cosenoidales de amplitud que dependen de las condiciones iniciales. Como se desea seguir una señal senoidal y una cosenoidal pero de distinta amplitud una de otra, se seleccionó el exosistema anterior con las condiciones iniciales (4.7) para generar dichas señales.

La señal de referencia que seguirán cada uno de los modelos lineales en función del exosistema (4.6) está dada por:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.2.2. Modelos Lineales.

Con el propósito de expresar los modelos del sistema en la forma requerida para el diseño del regulador lineal como en (2.15), es necesario construir 3 modelos, correspondientes a cada punto de operación donde se desea linealizar la planta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ e(t) &= C_i x(t) + Q_i w(t) \end{aligned} \quad i = 1 \dots 3$$

Las matrices A_i , B_i y C_i se calculan con ayuda de (4.3), para la selección de los puntos de linealización se toma en cuenta la señal de referencia que se desea seguir, en esta caso se desea que el eslabón 1 sigue una señal senoidal y el eslabón dos una señal cosenoidal.

La señal de referencia que se desea seguir esta dada por (4.5), por lo tanto se linealiza la planta en tres puntos de operación por los cuales pasa la señal de referencia:

$$\begin{aligned} x_{0_1} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}; \\ x_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación se presentan en el Apéndice A.1.

Se considera que cada modelo lineal no se ve afectado por perturbaciones incluidas en el exosistema (4.6); es decir, $p \equiv 0$ para cada modelo lineal; por lo tanto, las matrices Q_i que especifican las señales de referencia que deben seguir cada modelo lineal, quedan de la siguiente forma:

$$Q_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 3 \quad (4.9)$$

4.2.3. Modelo Difuso.

Una vez obtenidos los modelos lineales, es necesario definir los conjuntos difusos, los cuales se realizan mediante funciones de pertenencia. Cada conjunto difuso está asociado con uno de los puntos de operación donde se ha linealizado la planta. Una función triangular se muestra en la figura 4.1

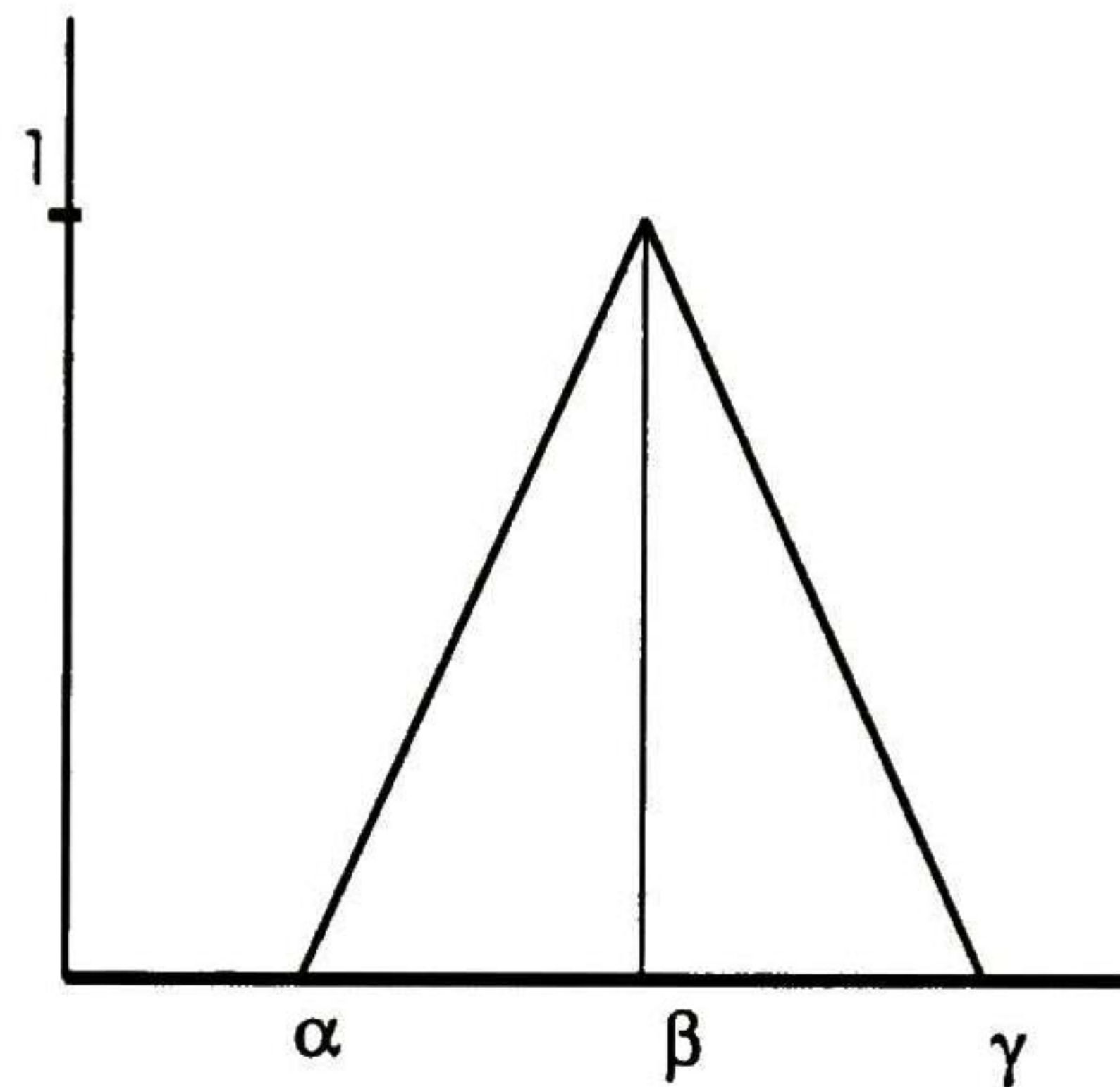


Figura 4.1: Función de pertenencia triangular

donde el valor de pertenencia esta determinado por:

$$M(z) = \begin{cases} 0 & x < \alpha, \\ \frac{(x - \alpha)}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta, \\ \frac{(x - \gamma)}{\beta - \gamma} & \beta \leq x \leq \gamma, \\ 0 & x > \gamma \end{cases} \quad (4.10)$$

La figura 4.2 muestra los conjuntos difusos utilizados. Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_1) son **N**egativo, **C**ero y **P**ositivo

El modelo difuso de la planta de acuerdo a (2.43) queda como sigue.

1ª regla de la planta:

SI x_1 es **N**egativo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ e(t) = C_1x(t) + Q_1w(t) \end{cases}$$

2ª regla de la planta:

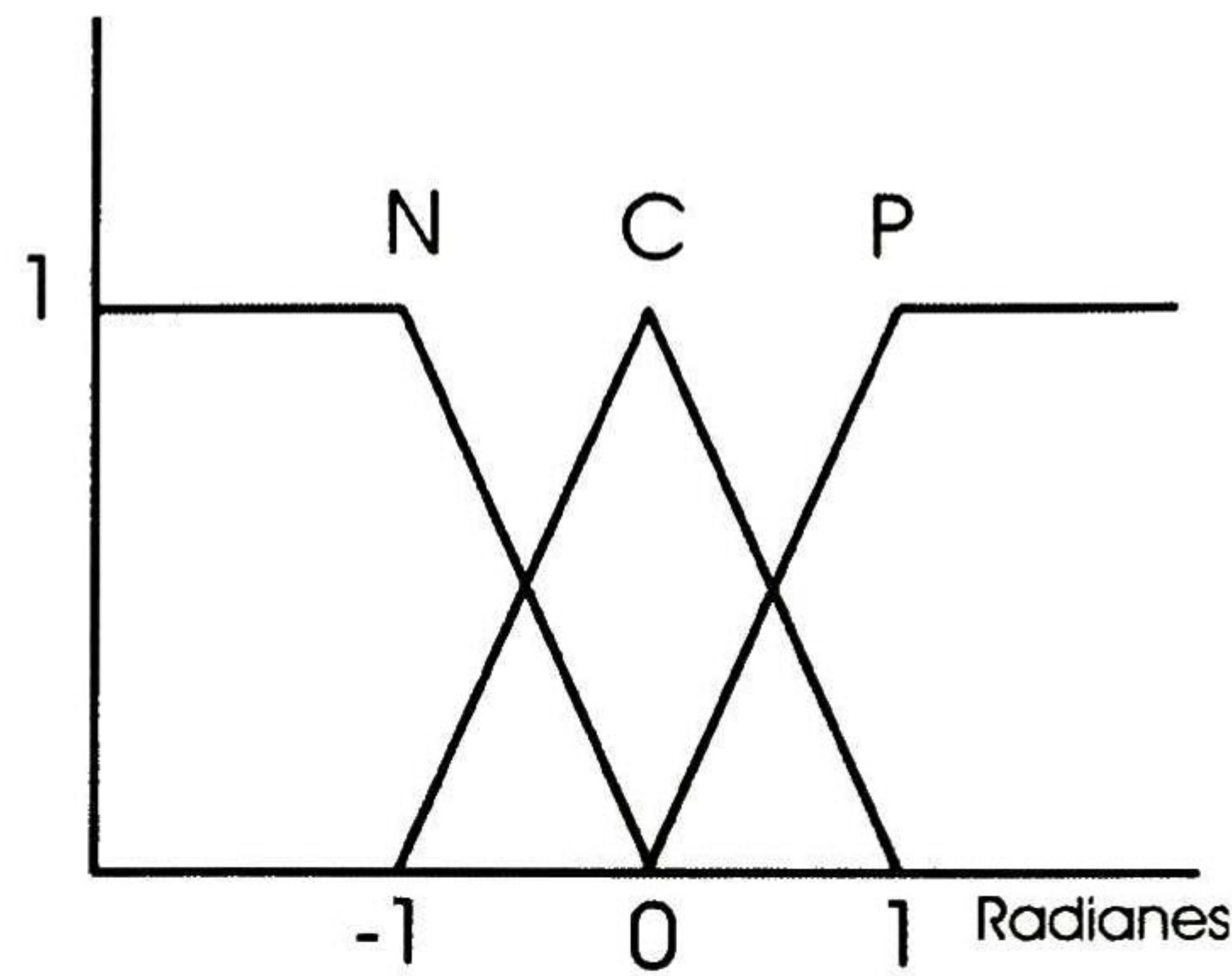


Figura 4.2: Conjuntos difusos

SI x_1 es Cero

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ e(t) = C_2x(t) + Q_2w(t) \end{cases}$$

3ª regla de la planta:

SI x_1 es Positivo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ e(t) = C_3x(t) + Q_3w(t) \end{cases}$$

4.2.4. Par Nominal.

En la linealización realizada en la sección 4.1 se considera que cada punto de operación es el origen, por lo tanto para que la salida del sistema siga la señal de referencia deseada, se requiere de un par nominal que desplace el origen al nuevo punto de operación.

El par nominal para cada eslabón del robot se calcula de la siguiente manera:

$$\tau_{k_i} = \begin{bmatrix} 3,921 \cdot g \cdot \sin(q_{1_i}) + 0,186 \cdot g \cdot \sin(q_{1_i} + q_{2_i}) \\ 0,186 \cdot g \cdot \sin(q_{1_i} + q_{2_i}) \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 3 \quad (4.11)$$

donde q_{1_i} y q_{2_i} son los puntos donde se linealiza el eslabón 1 y 2 respectivamente, para cada sistema lineal.

Los pares nominales se encuentran en el Apéndice B.1.1

4.2.5. Controlador Difuso.

De acuerdo a (2.17) y a (2.44) se requiere encontrar una ley de control de la siguiente forma:

$$u(t)_i = K_i x(t) + L_i w(t) \quad i = 1.., 3$$

Las matrices K_i que estabilizan cada sistema lineal, se calculan mediante una ubicación de polos utilizando MATLAB, debiéndose cumplir que el par (A_i, B_i) de cada modelo lineal sea estabilizable.

La selección de los valores propios elegidos se hizo en base a la velocidad de respuesta del sistema y una acción de control libre de saturación, los valores propios elegidos para $(A_i + B_i K_i)$ se seleccionan como:

$$[-23 - 25 - 27 - 29]$$

La matriz L_i se calcula de acuerdo a (2.21) para cada modelo lineal. Para esto se hizo un programa en Maple en el cual se calculó la matriz L_i . Este programa se incluye en el Apéndice C,1

Las reglas para el controlador difuso quedan de la siguiente forma:

1ª regla del controlador:

SI x_1 es Negativo

$$\text{ENTONCES } u(t))_1 = K_1 x(t) + L_1 w(t)$$

2ª regla del controlador:

SI x_1 es Cero

$$\text{ENTONCES } u(t))_2 = K_2 x(t) + L_2 w(t)$$

3ª regla del controlador:

SI x_1 es Positivo

$$\text{ENTONCES } u(t))_3 = K_3 x(t) + L_3 w(t)$$

Las ganancias para cada controlador se encuentran en el Apéndice B.2

La salida total del controlador difuso esta dada por (2.45):

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i[z(t)] \cdot [K_i x(t) + L_i w(t)]}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i[z(t)]} \quad i = 1 \dots 3 \quad (4.12)$$

donde $z(t) = [x_1(t)]$.

4.2.6. Análisis de Estabilidad por LMI.

Para hacer el análisis de estabilidad se utiliza el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov que se vio en la sección 2.1.1. Para esto se utilizan los sistemas linealizados que se obtuvieron en la sección 4.2.2. y las matrices de retroalimentación que se calcularon en la sección 4.2.5.

Para probar estabilidad es necesario encontrar una matriz P que cumpla el Teorema 1. Si se cumplen las condiciones del Teorema 1, es necesario que la matriz P cumpla con las condiciones del Teorema 2, donde las matrices A_i, B_i , que se mencionan en dicho teorema son las matrices linealizadas que se obtuvieron en la sección 4.2.2, y la matriz K_j son las matrices de retroalimentación que se calcularon en la sección 4.2.5.

Para encontrar la matriz P , se calculó en forma numérica; para esto se utilizó el programa de Matlab, con ayuda del paquete de Desigualdades de Matrices Lineales (Linear matrix Inequalities). El programa que se utilizó se muestra en el Apéndice D.1

La matriz P quedo de la siguiente manera.

$$P = \begin{bmatrix} 3,4597 & 0,2600 & 0,0007 & 0,0011 \\ 0,2600 & 3,5037 & -0,0012 & 0,0008 \\ 0,0007 & -0,0012 & 0,0052 & 0,0000 \\ 0,0011 & 0,0008 & 0,0000 & 0,0051 \end{bmatrix}$$

La matriz P es definida positiva y cumple con los teoremas 1 y 2, por lo tanto el sistema difuso en lazo cerrado con la ley de control (4.12) es globalmente asintóticamente estable. Este análisis garantiza la estabilidad del controlador pero no garantiza estabilidad al momento de realizar seguimiento para una señal de referencia dada.

4.3. Diseño del controlador para la segunda señal de referencia.

En esta sección se presenta el diseño del controlador difuso, para realizar el seguimiento de una señal de referencia más compleja que la que se había visto en la sección 4.3. Esta señal está formada por señales constantes, senoidales y exponenciales.

4.3.1. Modelo del exosistema.

La segunda señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} 0,78530 - 0,78530 \cdot e^{(-2,0 \cdot t)} + 0,17453 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 1,04719 - 1,04719 \cdot e^{(-1,8 \cdot t)} + 2,18166 \cdot \sin(3,5 \cdot t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

El modelo matemático del exosistema que permite generar la señal de referencia a seguir, de acuerdo a (2.16) es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \\ \dot{w}_3(t) \\ \dot{w}_4(t) \\ \dot{w}_5(t) \\ \dot{w}_6(t) \\ \dot{w}_7(t) \\ \dot{w}_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12,25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \\ w_5(t) \\ w_6(t) \\ w_7(t) \\ w_8(t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \\ w_3(0) \\ w_4(0) \\ w_5(0) \\ w_6(0) \\ w_7(0) \\ w_8(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7853 \\ 1 \\ 0 \\ 15 \\ 1,04719 \\ 1 \\ 0 \\ 3,5 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde w_1 y w_5 generan señales constantes; w_2 y w_6 generan señales exponenciales que decrecen conforma pasa el tiempo; w_3 , w_4 , w_7 , y w_8 generan señales senoidales y cosenoidales con una amplitud de 1; $w_k(0)$, son las condiciones iniciales.

La señal de referencia que se desea que siga cada uno de los modelos lineales en función del exosistema (4.14) está dada por:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} w_1 - 0,7853 \cdot w_2 + 0,17453 \cdot w_3 \\ w_5 - 1,04719 \cdot w_6 + 2,18166 \cdot w_7 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.3.2. Modelos Lineales.

Con el propósito de expresar los modelos del sistema en la forma requerida para el diseño del regulador lineal como en (2.15), es necesario construir 5 modelos, correspondientes a cinco puntos de operación quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + P_i w(t) \\ e(t) &= C_i x(t) + Q_i w(t) \end{aligned} \quad i = 1 \dots 5$$

La señal de referencia que se desea seguir está dada por (4.13), por lo tanto se linealiza la planta en los siguientes puntos de operación:

$$\begin{aligned} x_{0_1} &= [0,6466 \quad 3,22160 \quad 0 \quad 0] ; \\ x_{0_2} &= [0,7072 \quad 2,13355 \quad 0 \quad 0] ; \\ x_{0_3} &= [0,7098 \quad 1,04550 \quad 0 \quad 0] ; \\ x_{0_4} &= [0,8595 \quad -0,0424 \quad 0 \quad 0] ; \\ x_{0_5} &= [0,6155 \quad -1,1305 \quad 0 \quad 0] ; \end{aligned}$$

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación se muestran en el Apéndice A.2.

Se considera que cada modelo lineal no se ve afectado por perturbaciones incluidas en el exosistema (4.6); es decir, $p \equiv 0$ para cada modelo lineal. Por lo tanto, las matrices Q_i que especifican la señal de referencia que debe seguir cada modelo lineal, quedan de la siguiente forma:

$$Q_i = \begin{bmatrix} -1 & 0,7853 & -0,17453 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,04719 & -2,18166 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots 5 \quad (4.17)$$

4.3.3. Modelo Difuso.

Una vez obtenidos los modelos lineales, es necesario definir los conjuntos difusos, los cuales se realizan mediante funciones de pertenencia triangulares. Cada conjunto difuso esta asociado con uno de los puntos de operación donde se ha linealizado la planta.

La figura 4.3 muestra los conjuntos difusos utilizados. Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_2) son **N**egativo **G**rande, **N**egativo, **E**n medio, **P**ositivo y **P**ositivo **G**rande

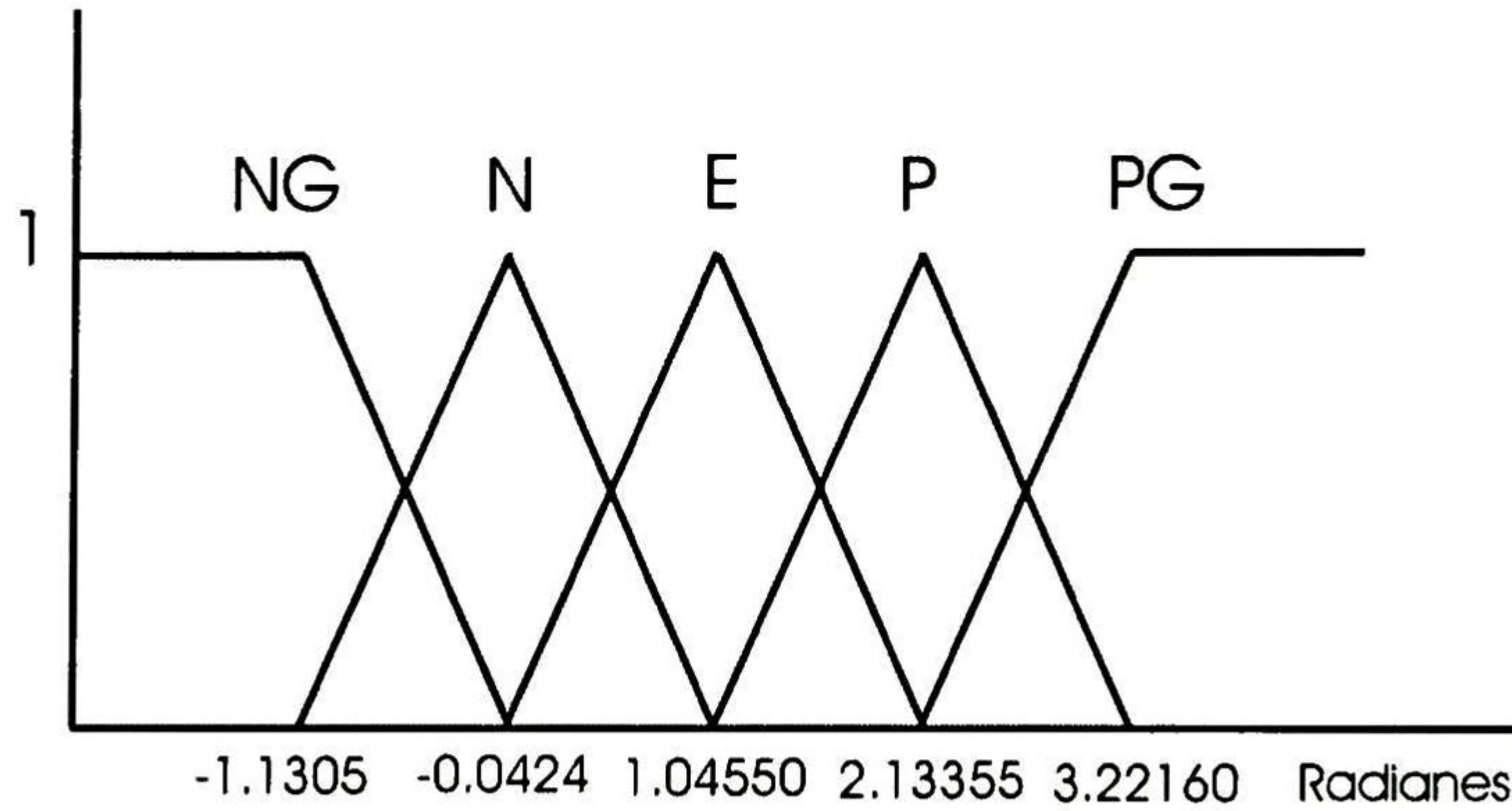


Figura 4.3: Conjuntos difusos

El modelo difuso de la planta de acuerdo a (2.43) a queda como sigue.

1ª regla de la planta:

SI x_2 es **N**egativo **G**rande

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ e(t) = C_1x(t) + Q_1w(t) \end{cases}$$

2ª regla de la planta:

SI x_2 es **N**egativo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ e(t) = C_2x(t) + Q_2w(t) \end{cases}$$

3ª regla de la planta:

SI x_2 es **E**n medio

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ e(t) = C_3x(t) + Q_3w(t) \end{cases}$$

4ª regla de la planta:

SI x_2 es **P**ositivo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t) \\ e(t) = C_4x(t) + Q_4w(t) \end{cases}$$

5ª regla de la planta:

SI x_2 es **P**ositivo **G**rande

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_5x(t) + B_5u(t) \\ e(t) = C_5x(t) + Q_5w(t) \end{cases}$$

4.3.4. Par Nominal.

Los pares nominales se calculan como se vio en la sección 4.3.4

Los valores de los pares nominales para cada sistema lineal se encuentran en el Apéndice B.1.2

4.3.5. Controlador Difuso.

De acuerdo a (2.17) y a (2.44) se requiere encontrar una ley de control de la siguiente forma:

$$u(t)_i = K_i x(t) + L_i w(t) \quad i = 1.., 5$$

Las matrices K_i que estabilizan cada sistema lineal, se calculan mediante una ubicación de polos utilizando MATLAB, debiéndose cumplir que el par (A_i, B_i) de cada modelo lineal sea estabilizable, los valores propios se seleccionaron como:

$$[-23 - 25 - 27 - 29]$$

La matriz L_i se calcula de acuerdo a (2.21) para cada modelo lineal. Para esto se hizo un programa en Maple en el cual se calculó la matriz L_i , este programa se muestra en el Apéndice C.2

Las reglas para el controlador difuso como en (2.44) quedan de la siguiente forma:

1ª regla del controlador:

SI x_2 es **Negativo Grande**

$$\text{ENTONCES } u(t))_1 = K_1 x(t) + L_1 w(t)$$

2ª regla del controlador:

SI x_2 es **Negativo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_2 = K_2 x(t) + L_2 w(t)$$

3ª regla del controlador:

SI x_2 es **En medio**

$$\text{ENTONCES } u(t))_3 = K_3 x(t) + L_3 w(t)$$

4ª regla del controlador:

SI x_2 es **Positivo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_4 = K_4 x(t) + L_4 w(t)$$

5ª regla del controlador:

SI x_2 es **Positivo Grande**

$$\text{ENTONCES } u(t))_5 = K_5 x(t) + L_5 w(t)$$

Las ganancias para cada controlador se encuentran en el Apéndice B.3

La salida total del controlador difuso está dada por (2.45):

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot [K_i x(t) + L_i w(t)]}{\sum_{i=1}^5 \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad i = 1 \dots 5 \quad (4.18)$$

donde $z(t) = [x_2(t)]$

4.3.6. Análisis de estabilidad por LMI.

Para hacer el análisis de estabilidad se utiliza el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov que se vio en la sección 2.1.1, para esto se utilizan los sistemas linealizados que se obtuvieron en la sección 4.3.2 y las matrices de retroalimentación que se calcularon en la sección 4.3.5.

Para probar estabilidad es necesario encontrar una matriz P que cumpla el Teorema 1. Si se cumplen las condiciones del Teorema 1, es necesario que la matriz P cumpla con las condiciones del Teorema 2, donde las matrices A_i, B_i , que se mencionan en dicho teorema son las matrices linealizadas que se obtuvieron en la sección 4.3.2, y la matriz K_j son las matrices de retroalimentación que se calcularon en la sección 4.3.5.

Para encontrar la matriz P , se calculó en forma numérica, para esto se utilizó el programa de Matlab, con ayuda del paquete de Desigualdades de Matrices Lineales (Linear matrix Inequalities), el programa que se utilizó se muestra en el Apéndice D.2

La matriz P quedó de la siguiente manera.

$$P = \begin{bmatrix} 5,7830 & -0,0093 & 0,0004 & -0,0001 \\ -0,0093 & 5,9064 & 0,0001 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0001 & 0,0045 & -0,0000 \\ -0,0001 & 0,0004 & -0,0000 & 0,0042 \end{bmatrix}$$

La matriz P es definida positiva y cumple con los Teoremas 1 y 2 que se vieron en la sección 2.1.1, por lo tanto el sistema difuso en lazo cerrado con la ley de control (4.18) es globalmente asintóticamente estable. Este análisis garantiza la estabilidad del controlador pero no garantiza estabilidad al momento de realizar seguimiento para una señal de referencia dada.

4.4. Resultados en Simulación.

En esta sección, se presentan los resultados en simulación al aplicar los controladores difusos Takagi-Sugeno (4.12) y (4.18) al modelo no lineal (3.6) completo incluyendo fricción del manipulador robótico.

Los resultados que se muestran son: el movimiento angular de los eslabones del robot y el de las señales de referencia que se desean seguir; las gráficas de los errores de seguimiento y los pares aplicados para realizar dicho seguimiento.

4.4.1. Simulaciones para la primera señal de referencia.

La respuesta del sistema al aplicar el controlador difuso (4.12) se muestra en la figura 4.4 y 4.5, donde q_1 , q_2 , $ref1$ y y_{ref2} que representan la posición angular en radianes de los eslabones y las señales de referencia que se desean seguir.

La señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ 1,5 \cos(t) \end{bmatrix}$$

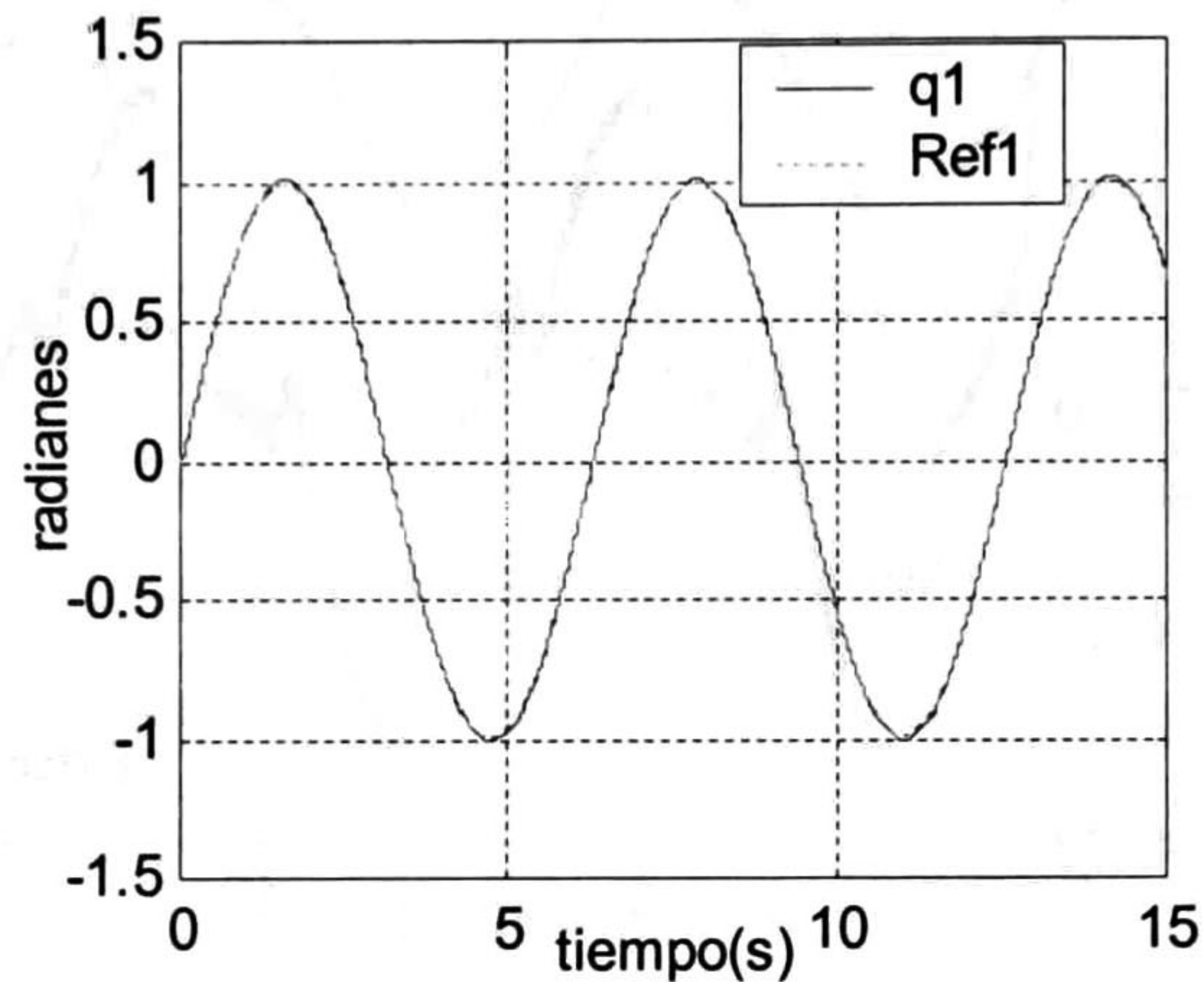


Figura 4.4: Posición del eslabón 1 (q_1) y la señal de referencia y_{ref1}

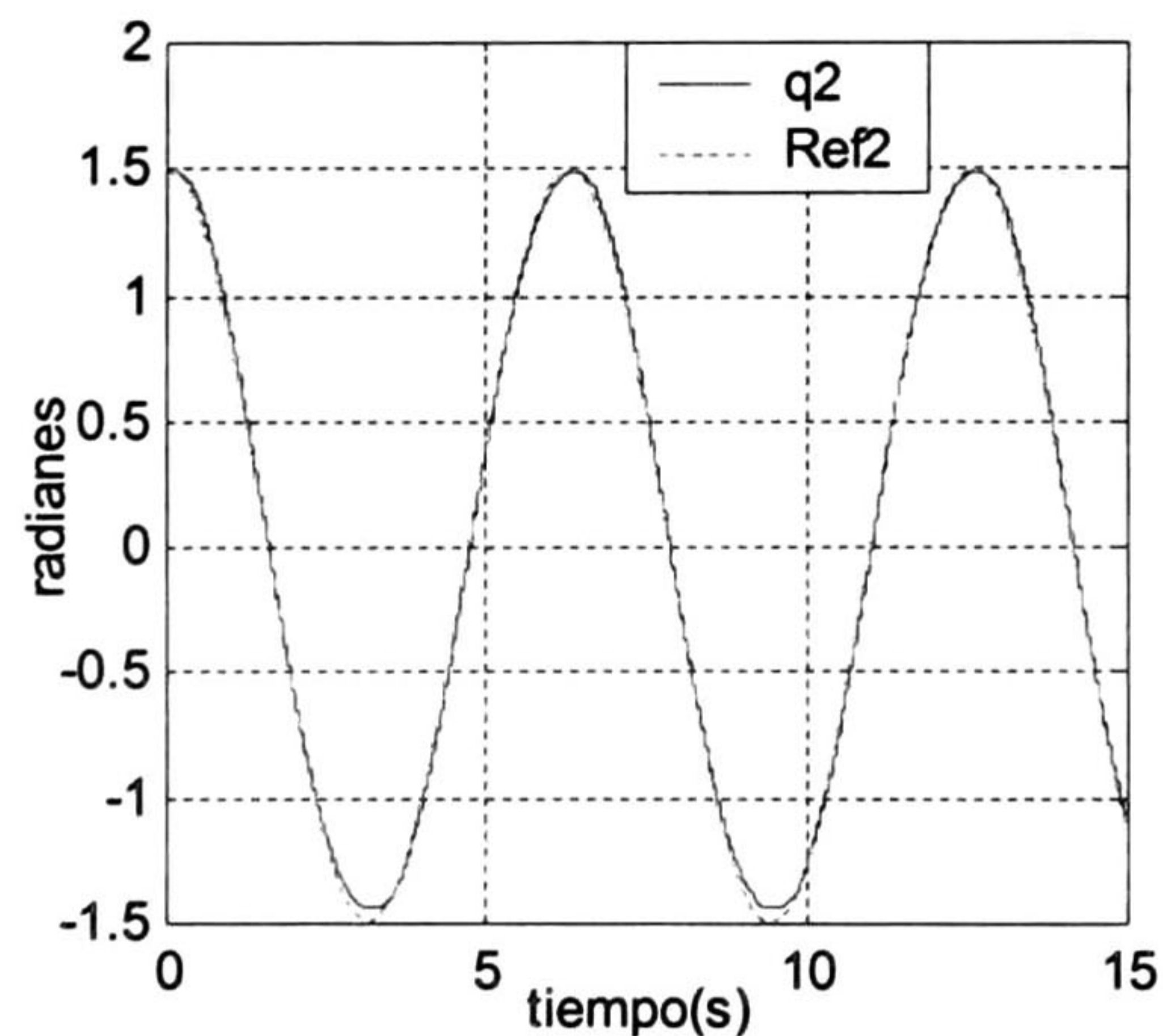


Figura 4.5: Posición del eslabón 2 (q_2) y la señal de referencia 2 y_{ref2}

Como se muestra en las gráficas las salidas q_1 y q_2 siguen adecuadamente las dos señales de referencia.

En la figura 4.6 y 4.7 se muestran los errores de seguimiento para cada uno de los eslabones, el error de seguimiento se define como la diferencia entre la señal de referencia y la posición angular de los estados.

El error de seguimiento es:

$$error = \begin{bmatrix} y_{ref1} - q_1 \\ y_{ref2} - q_2 \end{bmatrix}$$

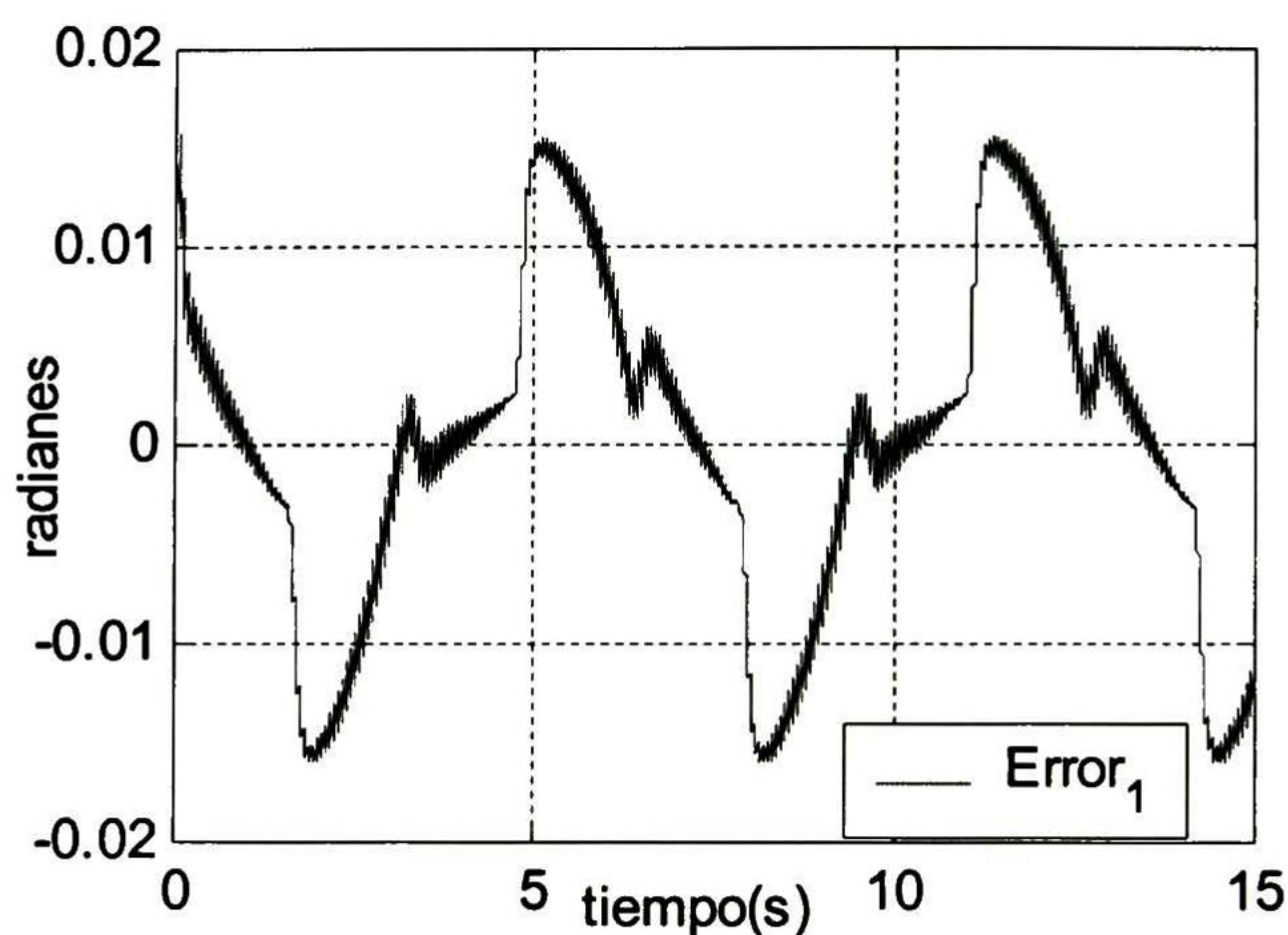


Figura 4.6: Error de seguimiento 1

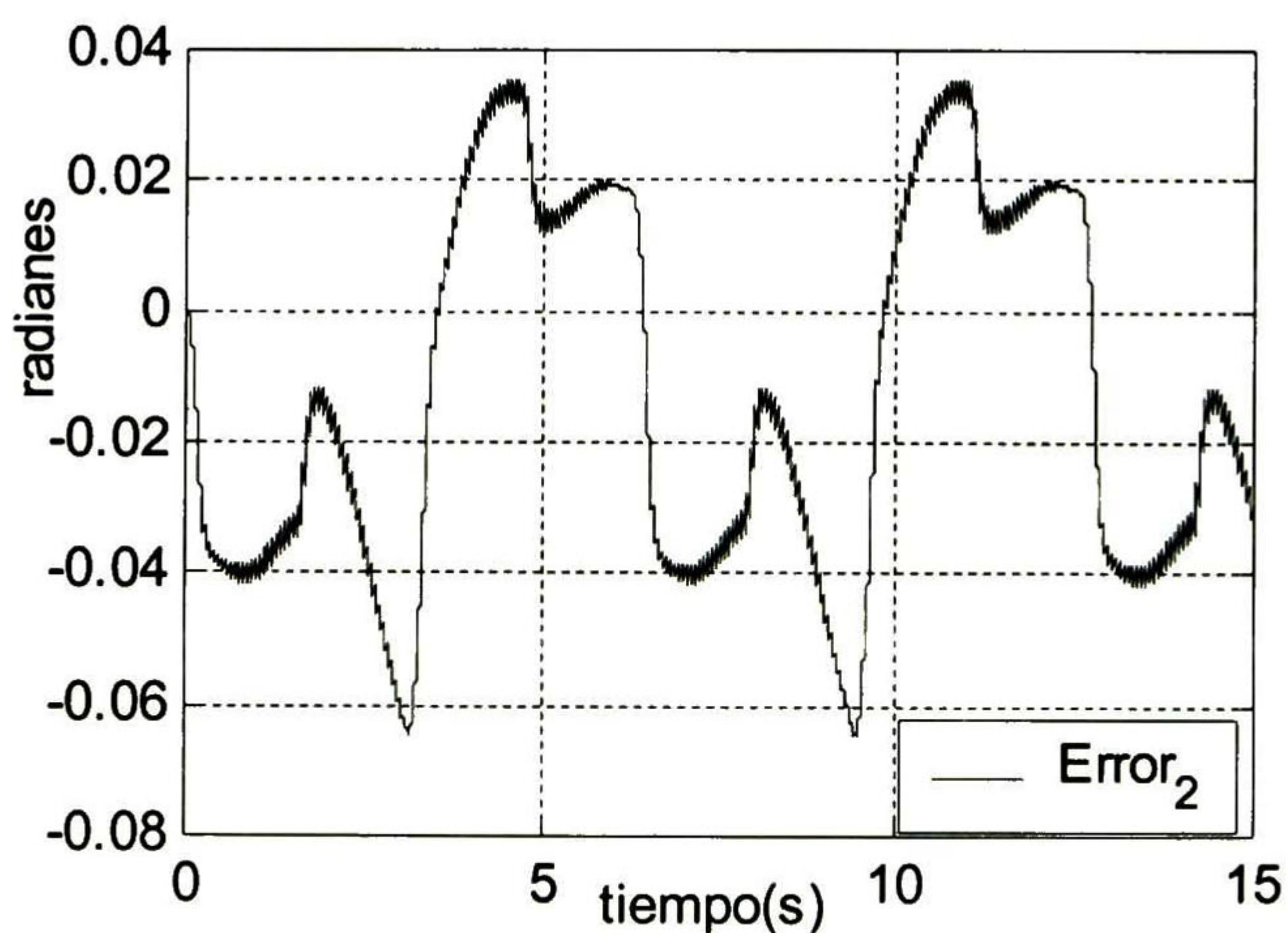


Figura 4.7: Error de seguimiento 2

Como se muestra en las gráficas los errores son pequeños, por lo tanto si se está realizando un seguimiento en forma satisfactoria.

En la figura 4.8 y 4.9 se muestran las acciones de control τ_1 y τ_2 que representan los pares que deben aplicarse por los actuadores electromagnéticos.

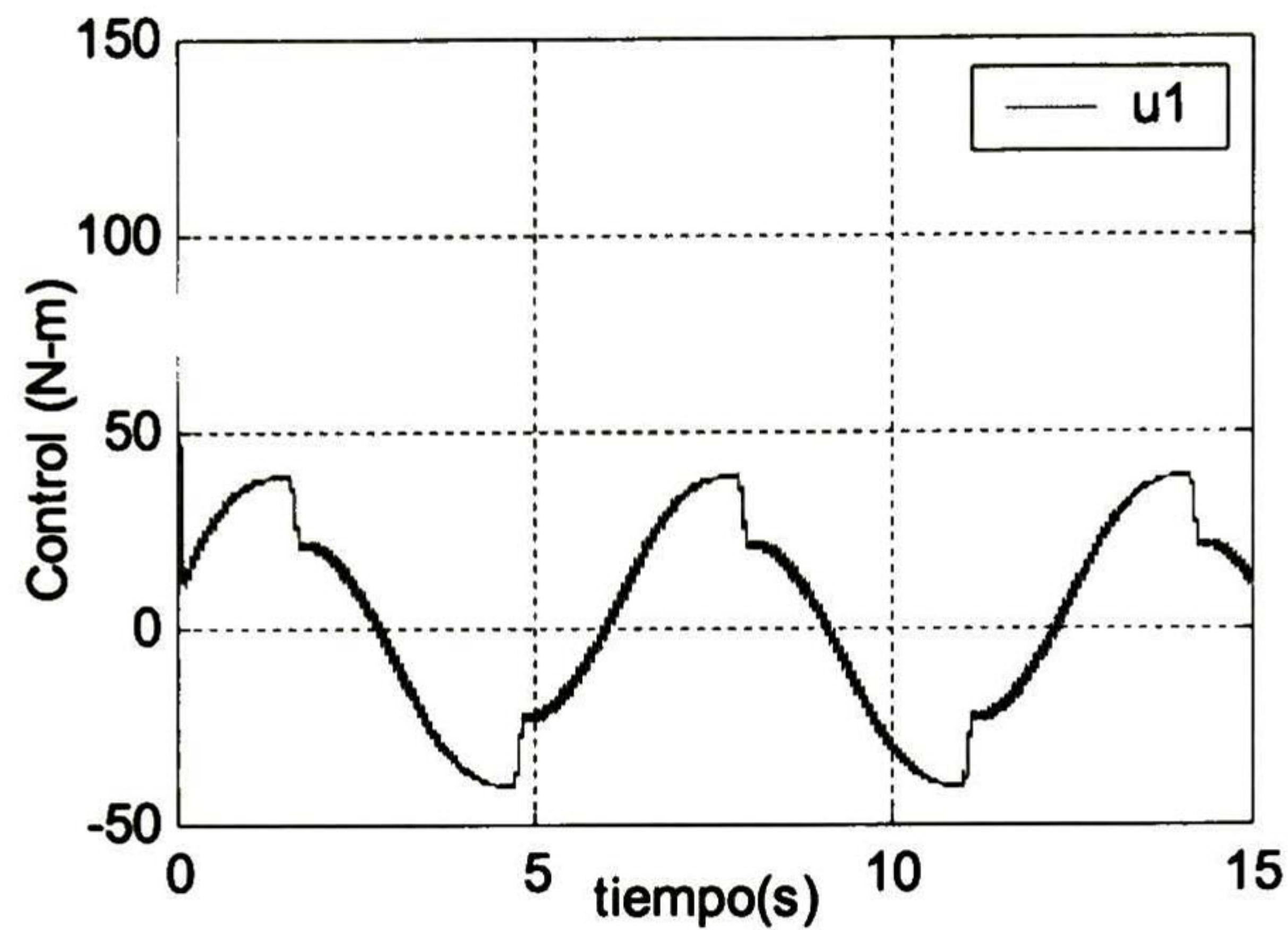


Figura 4.8: Señal de control τ_1

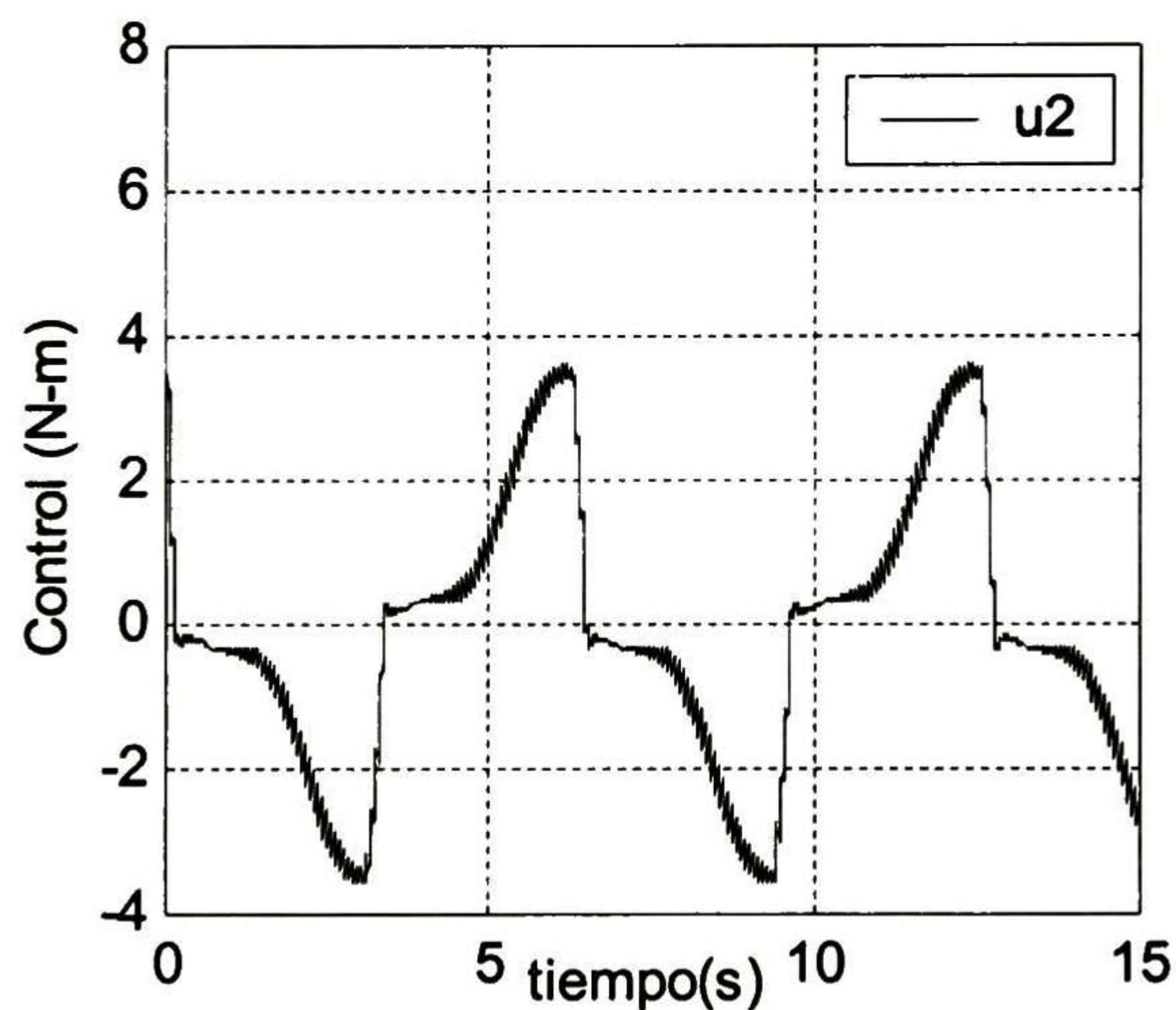


Figura 4.9: Señal de control τ_2

Las acciones de control τ_1 y τ_2 están dadas en N-m (Newton-metros), la señal τ_1 debe estar acotada entre los rangos de -150 a 150 N-m y τ_2 entre los rangos de -15 a 15 N-m, como se ve en las graficas las señales de control están libres de saturación.

4.4.2. Simulaciones para la segunda señal de referencia.

La respuesta del sistema al aplicar el controlador difuso (4.18) se muestra en la figura 4.10 y 4.11, donde q_1 , q_2 , y_{ref1} y y_{ref2} que representa la posición angular en radianes de los eslabones y las señales de referencia que se desean seguir.

Ahora la señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} 0,78530 - 0,78530 \cdot e^{(-2,0 \cdot t)} + 0,17453 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 1,04719 - 1,04719 \cdot e^{(-1,8 \cdot t)} + 2,18166 \cdot \sin(3,5 \cdot t) \end{bmatrix}$$

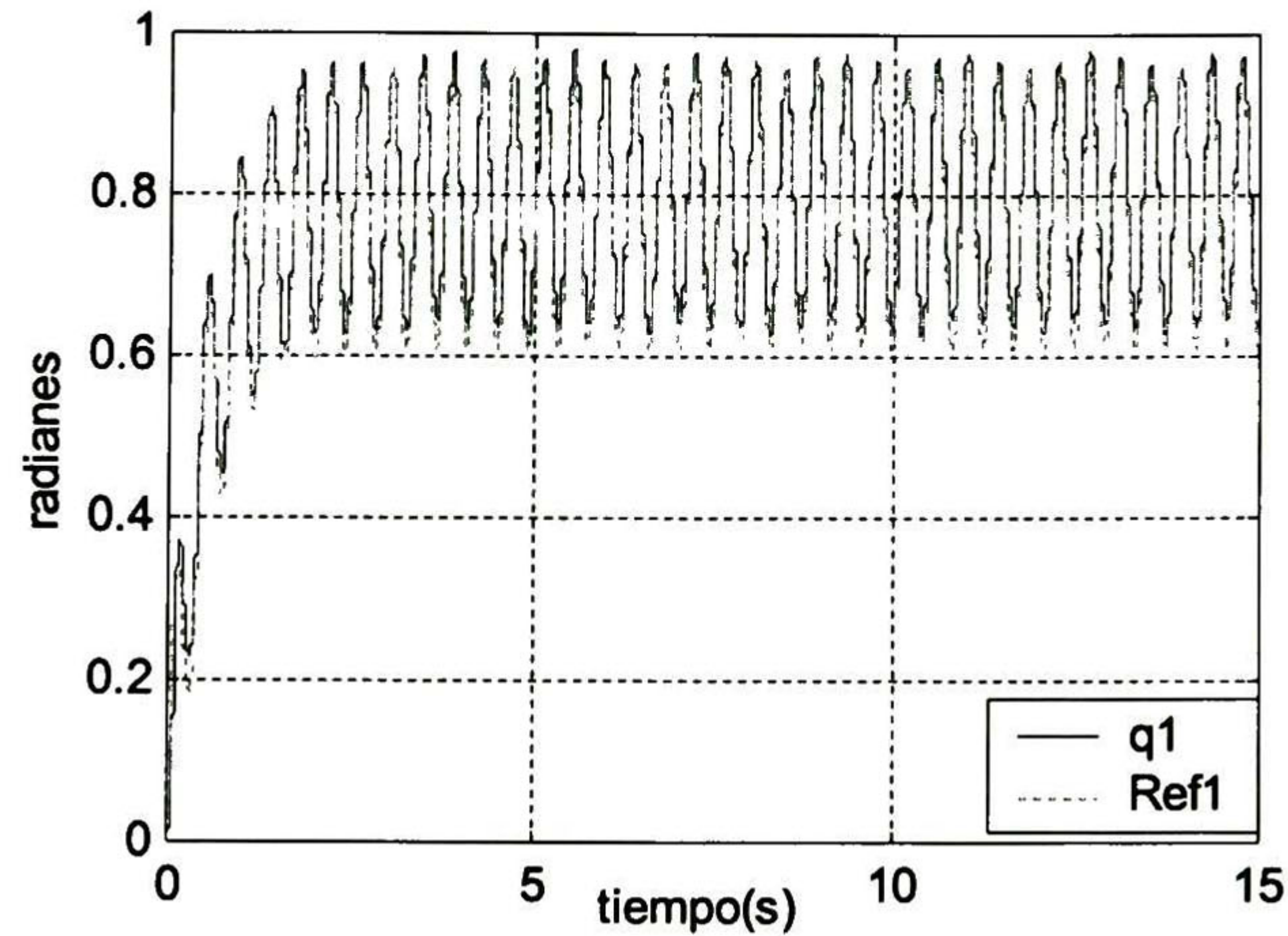


Figura 4.10: Posición del eslabón 1 (q_1) y la señal de referencia y_{ref1}

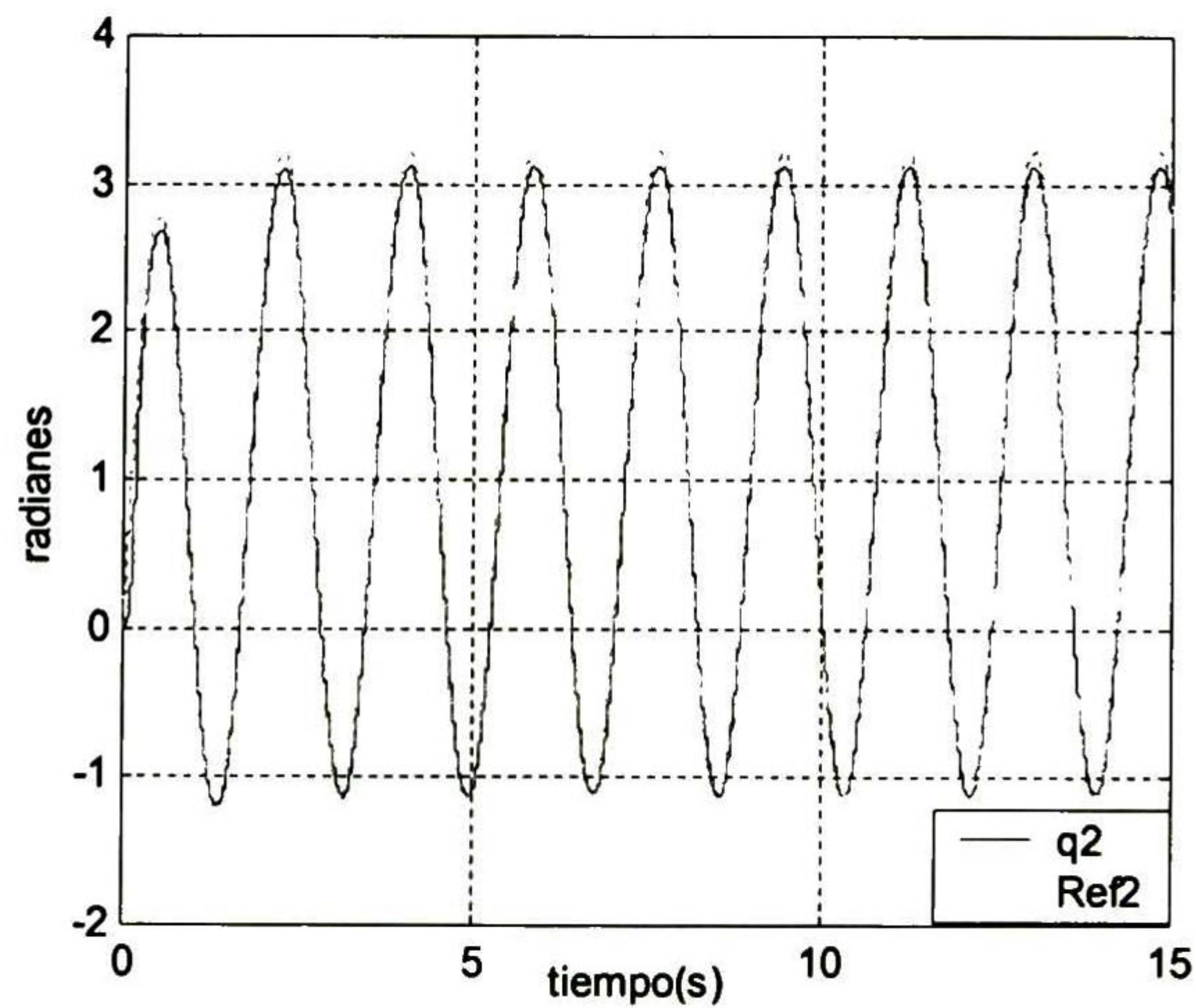


Figura 4.11: Posición del eslabón 2 (q_2) y la señal de referencia 2 y_{ref2}

Como se muestra en las gráficas las salidas q_1 y q_2 siguen adecuadamente las dos señales de referencia, aún cuando la señal de referencia es más compleja que la anterior.

En la figura 4.12 y 4.13 se muestran los errores de seguimiento para cada uno de los eslabones.

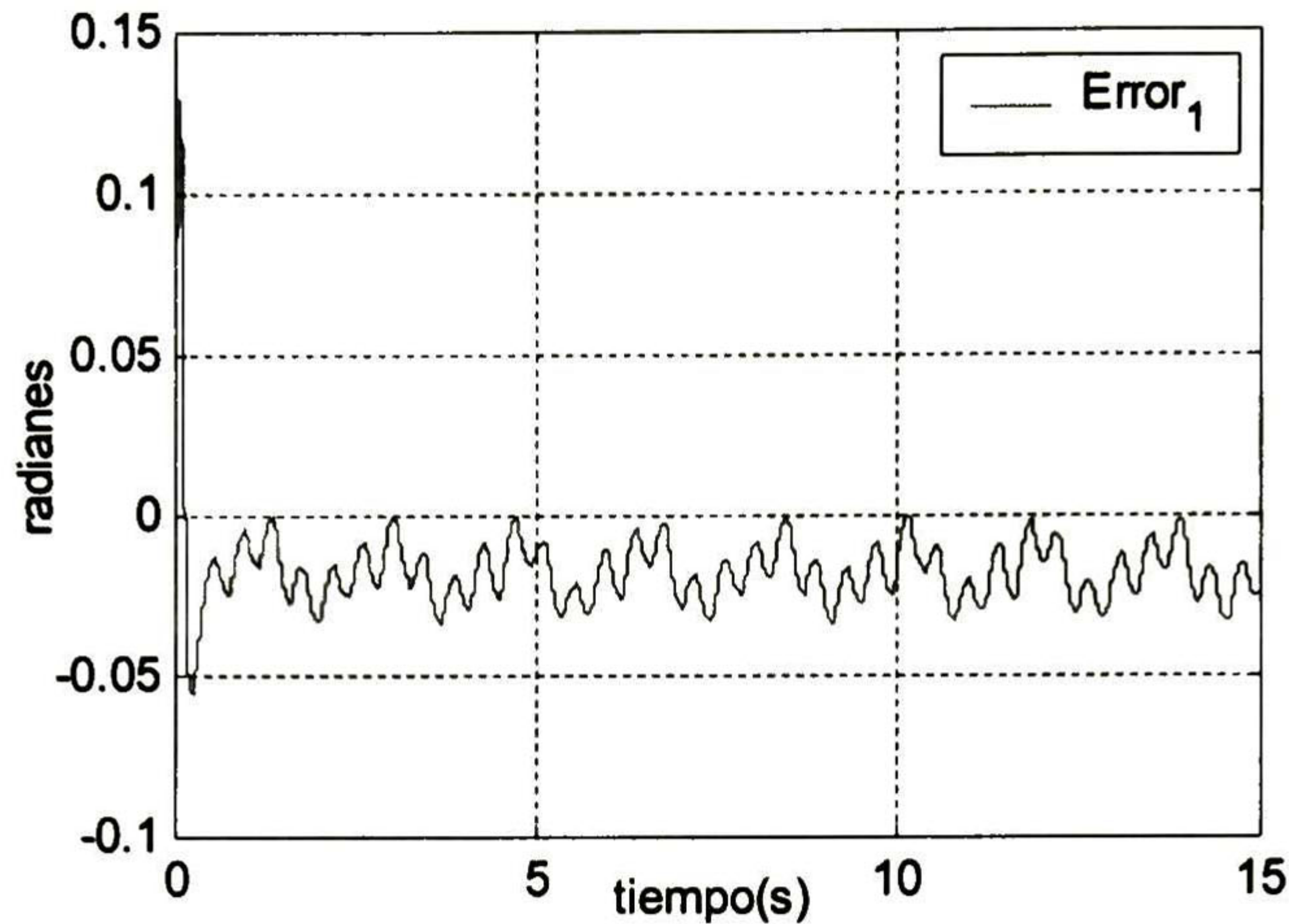


Figura 4.12: Error de seguimiento del eslabón 1 y la señal de referencia 1

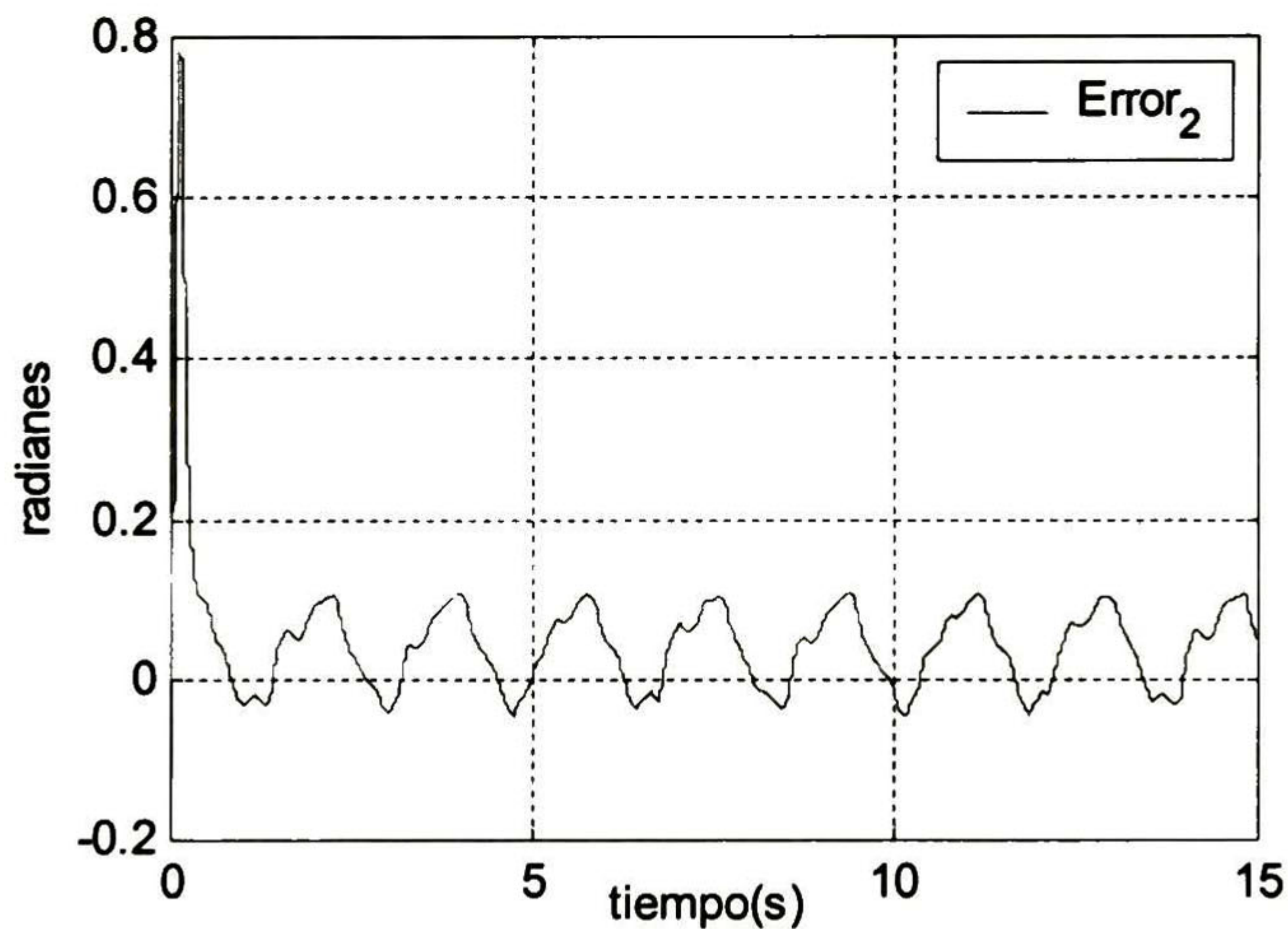


Figura 4.13: Error de seguimiento del eslabón 2 y la señal de referencia 2

Como se muestra en las gráficas los errores son pequeños. Si comparamos los errores de la señal de referencia anterior con los que se obtuvieron para la segunda señal de referencia, se puede ver que el error para la segunda señal es ligeramente mayor; esto es debido principalmente a que la señal que referencia tiene una mayor amplitud y las frecuencias de las ondas senoidales son mayores. Aún con estos errores, se está realizando un seguimiento de forma satisfactoria.

En la figura 4.14 y 4.15 se muestra la acción de control para realizar el seguimiento de trayectoria. La acción de control τ_1 y τ_2 están dadas en N m (Newton-metros).

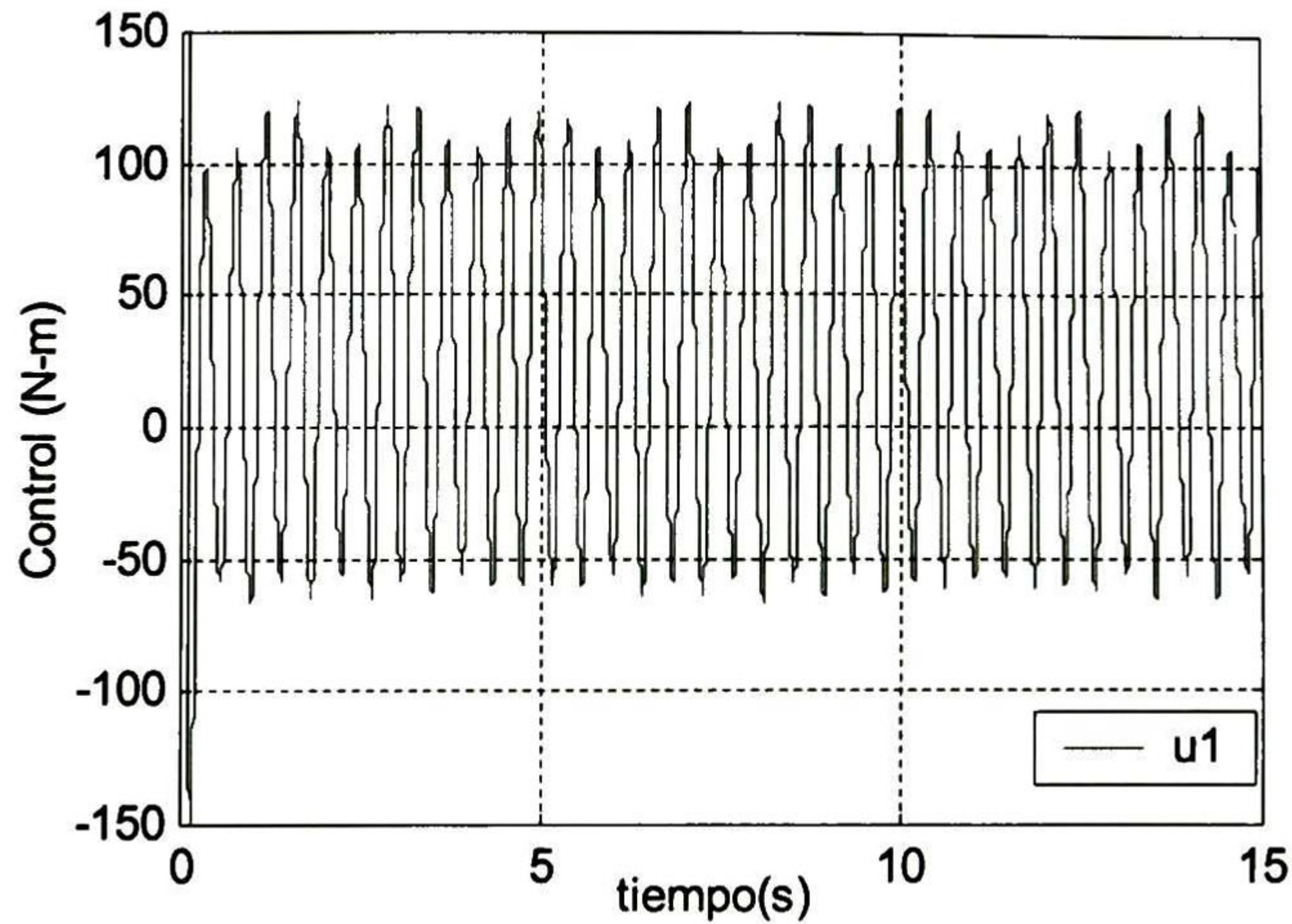


Figura 4.14: Señal de control τ_1

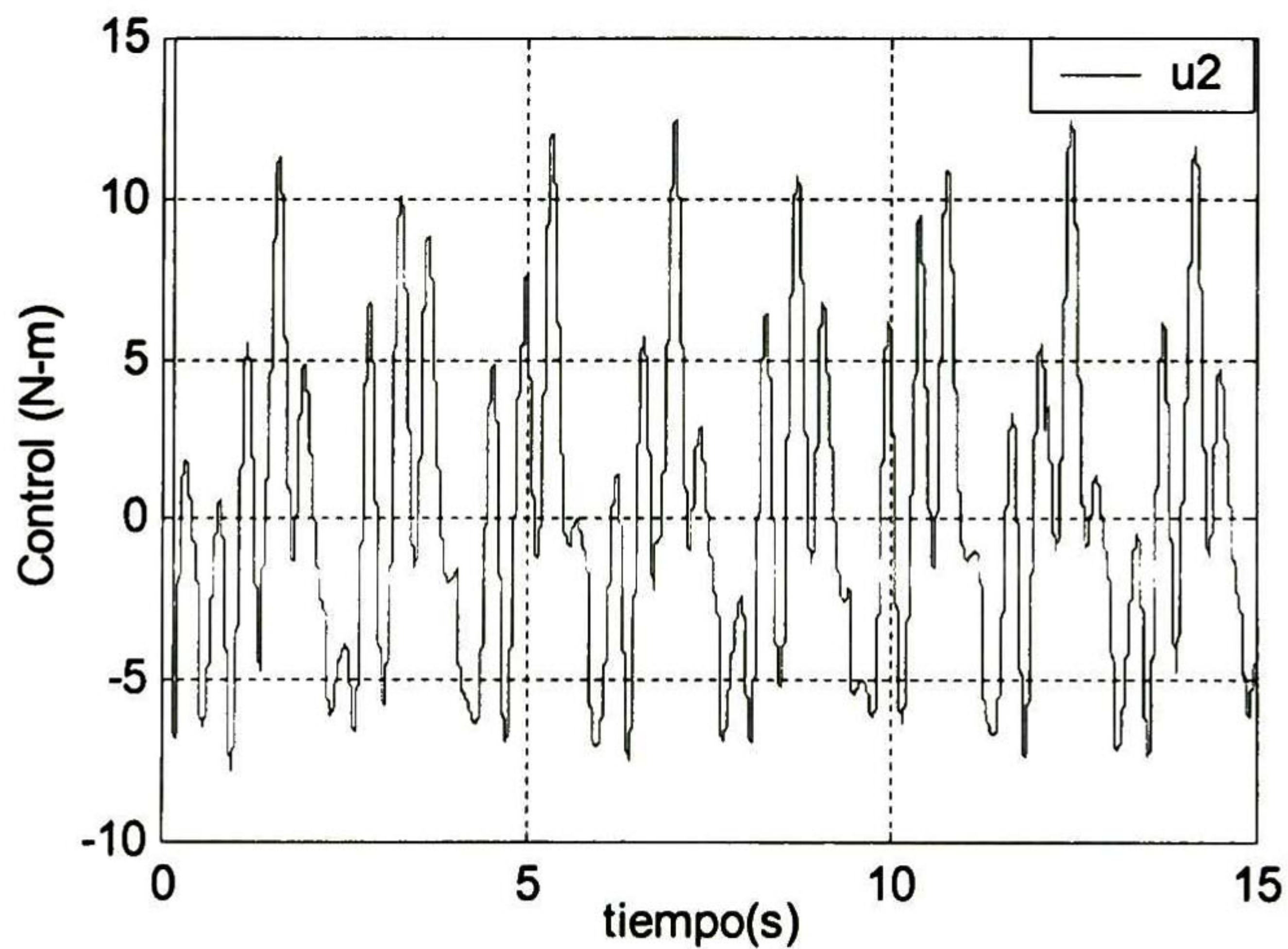


Figura 4.15: Señal de control τ_2

Este controlador, como se vió en las gráficas, tiene un desempeño aceptable. El seguimiento de las señales de referencia que se realizó en simulación es muy satisfactorio, pero los errores fueron ligeramente mayores al poner señales de referencia un poco más complejas. Aún así los pares de control estuvieron dentro de los rangos de operación de los actuadores, y los errores de seguimiento fueron muy pequeños.

Capítulo 5

Control Difuso con Control por Bloques con Modos Deslizantes

En este capítulo se presenta la aplicación de la estructura de un controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Control por Bloques con Modos Deslizantes, propuesto en la sección 2.4.2, a un manipulador robótico descrito en el capítulo 3.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 4.1, se presenta como se aplicó la técnica de control por bloques con modos deslizantes. En la sección 4.2, se presenta el controlador difuso. En la sección 4.3, se muestran los resultados en simulación al aplicar el controlador a los dos tipos de señales de referencia mencionados en el capítulo 4.

5.1. Control por bloques con modos deslizantes.

Para poder representar al sistema como el modelo propuesto en (2.47) es necesario determinar *los modelos lineales, los conjuntos difusos, seleccionar la superficie deslizante y las ganancias* que se utilizarán para cada controlador.

5.1.1. Modelos lineales.

Para aplicar el control por bloques con modos deslizantes fue necesario linealizar el sistema en diferentes puntos de operación. El sistema linealizado se obtiene mediante una aproximación por series de Taylor de primer orden como se vio en la sección (4.1).

Con el propósito de expresar los modelos del sistema en la forma requerida para el diseño del controlador como en (2.46), es necesario construir modelos, correspondientes a diferentes puntos de operación donde se desea linealizar la planta:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ e(t) &= C_i x(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Las matrices A_i , B_i y C_i se calculan de acuerdo a los puntos de linealización seleccionados, para la selección de éstos se toma en cuenta la señal de referencia que se desea seguir, es decir se escogen puntos por los cuales pasa la señal de referencia.

CAPÍTULO 5. CONTROL DIFUSO CON CONTROL POR BLOQUES CON MODOS DESLIZANTES

En este capítulo se efectúa el seguimiento de dos señales de referencia; por lo tanto se necesita linealizar el sistema en diferentes puntos de operación. Esto depende del tipo de señal de referencia que se vaya a seguir, como se muestra a continuación.

Primera Señal de Referencia.

La señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ 1,5 \cos(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

por lo tanto se linealiza la planta en tres puntos de operación por los cuales pasa la señal de referencia:

$$\begin{aligned} x_{0_1} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}; \\ x_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_3} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación se muestran en el Apéndice B.1.

Segunda Señal de Referencia.

La señal de referencia que se desea seguir esta dada por

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} 0,78530 - 0,78530 \cdot e^{(-2,0 \cdot t)} + 0,17453 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 1,04719 - 1,04719 \cdot e^{(-1,8 \cdot t)} + 2,18166 \cdot \sin(3,5 \cdot t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

por lo tanto se linealiza la planta en cinco puntos de operación por los cuales pasa la señal de referencia:

$$\begin{aligned} x_{0_1} &= \begin{bmatrix} 0,6466 & 3,22160 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0,7072 & 2,13355 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_3} &= \begin{bmatrix} 0,7098 & 1,04550 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_4} &= \begin{bmatrix} 0,8595 & -0,0424 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ x_{0_5} &= \begin{bmatrix} 0,6155 & -1,1305 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación se muestran en el Apéndice B.2

5.1.2. Modelo Difuso.

Una vez obtenidos los modelos lineales, es necesario definir los conjuntos difusos, los cuales se realizan mediante funciones de pertenencia. Cada conjunto difuso esta asociado con uno de los puntos de operación donde se ha linealizado la planta.

Primera Señal de Referencia.

La figura 5.1 muestra las funciones de pertenencia utilizadas, para realizar el seguimiento de la señal de referencia (5.2). Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_1) son **N**egativo, **C**ero y **P**ositivo

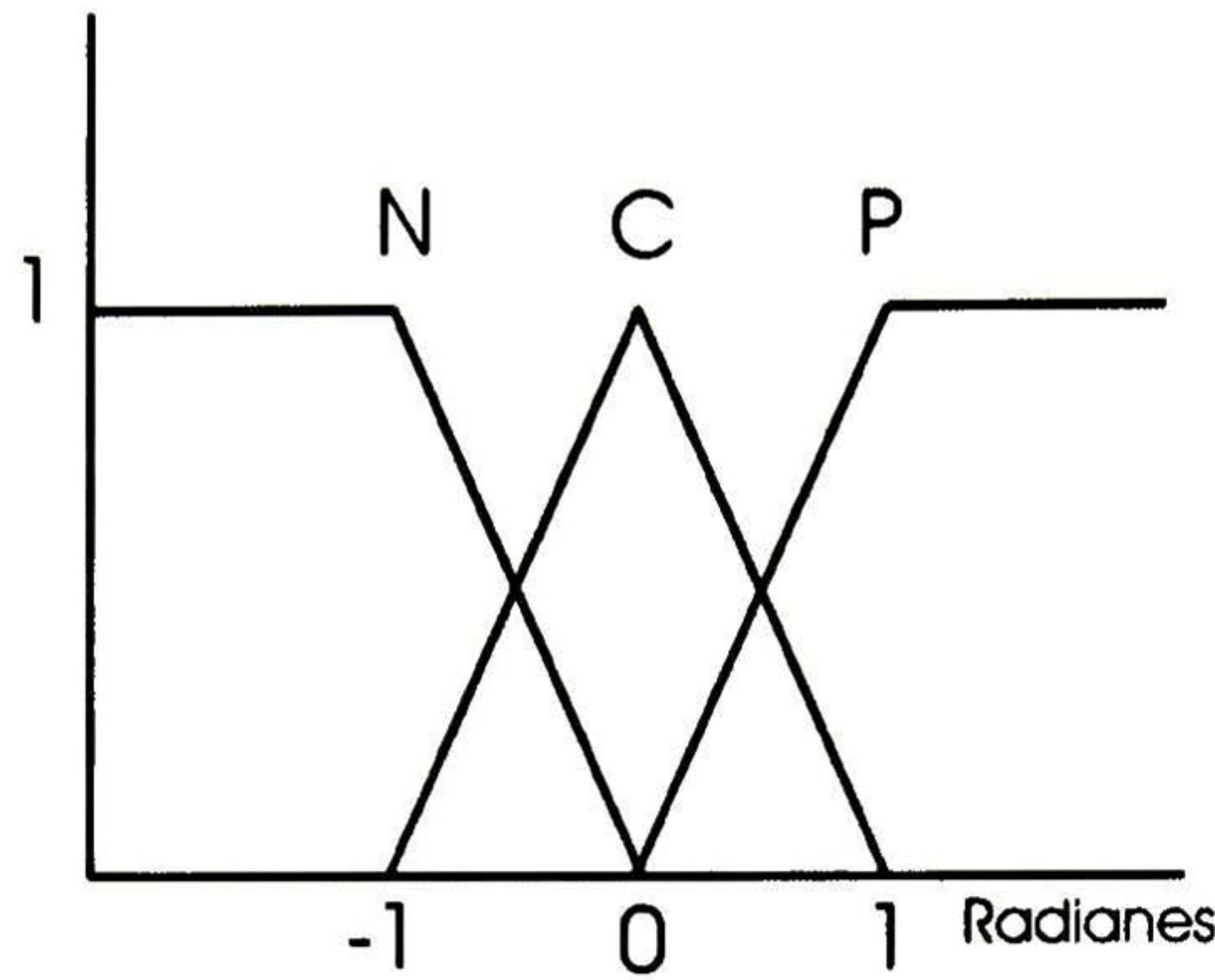


Figura 5.1: Conjuntos difusos

El modelo difuso de la planta de acuerdo a (2.46) a queda como sigue.

1ª regla de la planta:

SI x_1 es **N**egativo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ e(t) = C_1x(t) - x_{1ref} \end{cases}$$

2ª regla de la planta:

SI x_1 es **C**ero

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ e(t) = C_2x(t) - x_{2ref} \end{cases}$$

3ª regla de la planta:

SI x_1 es **P**ositivo

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ e(t) = C_3x(t) - x_{3ref} \end{cases}$$

Segunda Señal de Referencia

La figura 5.2 muestra las funciones de pertenencia utilizadas, para realizar el seguimiento de la señal de referencia (5.3).

Los conjuntos difusos definidos, correspondientes a la salida de la planta (x_2), son **N**egativo Grande, **N**egativo, **E**n medio, **P**ositivo y **P**ositivo Grande.

El modelo difuso de la planta de acuerdo a (2.46) a queda como sigue.

1ª regla de la planta:

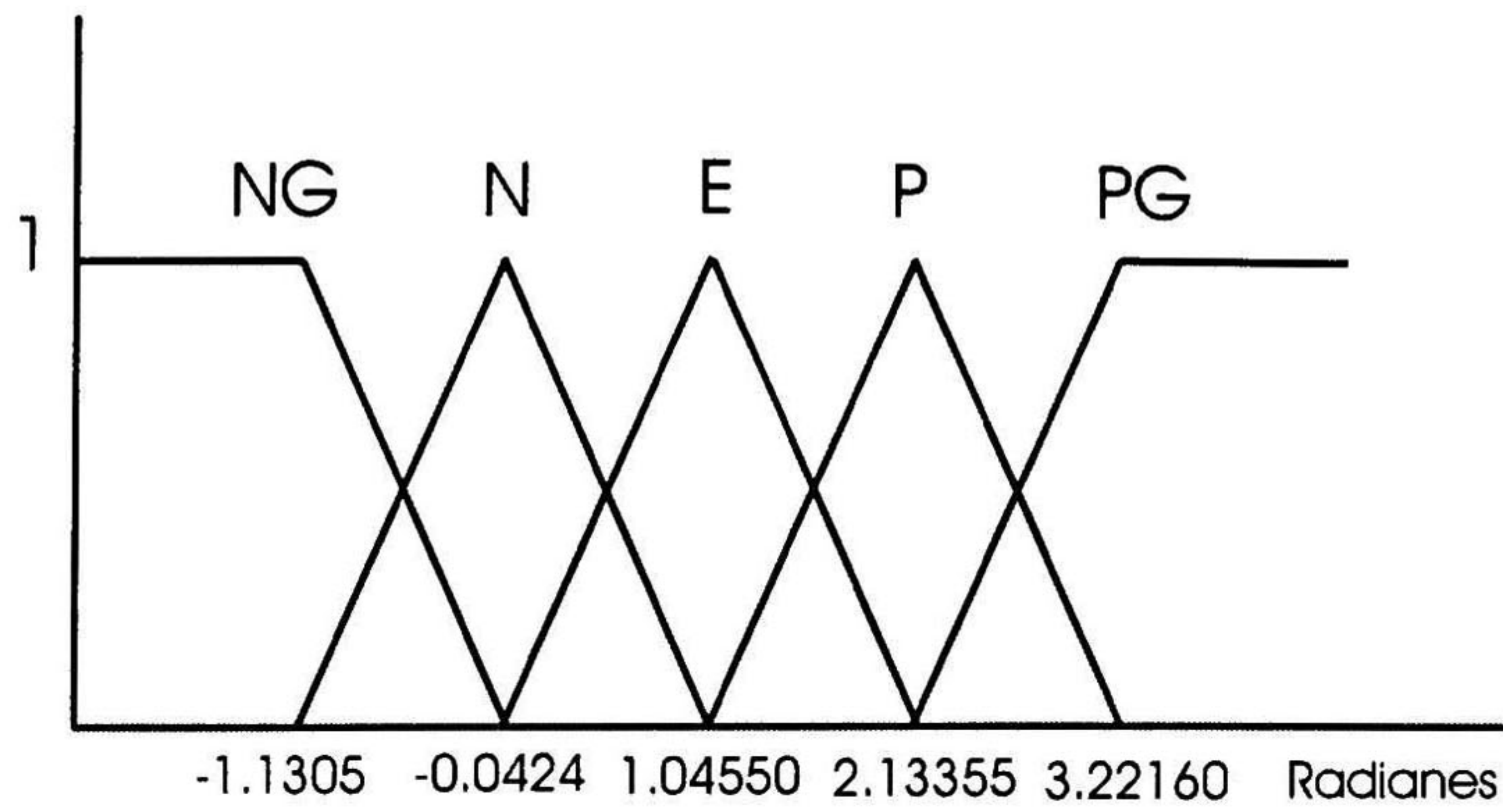


Figura 5.2: Conjuntos difusos

SI x_2 es **Negativo Grande**

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \\ e(t) = C_1x(t) - x_{1ref} \end{cases}$$

2ª regla de la planta:

SI x_2 es **Negativo**

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \\ e(t) = C_2x(t) - x_{2ref} \end{cases}$$

3ª regla de la planta:

SI x_2 es **En medio**

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \\ e(t) = C_3x(t) - x_{3ref} \end{cases}$$

4ª regla de la planta:

SI x_2 es **Positivo**

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4x(t) + B_4u(t) \\ e(t) = C_4x(t) - x_{4ref} \end{cases}$$

5ª regla de la planta:

SI x_2 es **Positivo Grande**

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_5x(t) + B_5u(t) \\ e(t) = C_5x(t) - x_{5ref} \end{cases}$$

5.1.3. Sistema en la forma no lineal controlable a bloques.

El sistema lineal (5.1) puede ser representado de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + b_1u_1 + b_2u_2 \\ \dot{x}_4 &= a_5x_1 + a_6x_2 + a_7x_3 + a_8x_4 + b_3u_1 + b_4u_2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $a_1 \dots a_8$ y $b_1 \dots b_2$ son coeficientes constantes, donde los valores de estas variables dependen de los puntos de linealización del sistema.

El sistema (5.4) anterior se puede representar a través de la forma controlable a bloques. Esto es necesario para poder aplicar el control por bloques.

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= A_1 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 &= A_2 \bar{x} + B_1 U\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \\ \bar{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{x}_2 &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \\ \bar{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ y} \\ U &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Como se puede ver, todos los sistemas linealizados que se obtienen en (5.1.1) quedan en la forma controlable a bloques.

5.1.4. Dinámica del error

El siguiente paso es definir la dinámica del error, para después seleccionar la superficie deslizante. Definimos el error z_1 como la diferencia entre la salida del sistema y la señal de referencia de control como:

$$z_1 = \bar{x}_1 - x_{ref}\tag{5.6}$$

$$\text{donde } x_{ref} = \begin{bmatrix} x_{1ref} \\ x_{2ref} \end{bmatrix}$$

Si derivamos el error tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{\bar{x}}_1 - \dot{x}_{ref} \\ &= A_1 \bar{x}_2 - \dot{x}_{ref} = -K_1 z_1 + z_2\end{aligned}\tag{5.7}$$

CAPÍTULO 5. CONTROL DIFUSO CON CONTROL POR BLOQUES CON MODOS DESLIZANTES

donde K_1 es una matriz diagonal de coeficientes constantes mayores que cero. Esta matriz sirve para estabilizar el sistema en la superficie z_2 igual a cero.

Seleccionamos el cuasicontrol para obtener la dinámica deseada, quedando de la siguiente manera:

$$\bar{x}_2 = A_1^{-1} \left(-K_1 z_1 + \dot{x}_{ref} \right) + z_2 \quad (5.8)$$

Despejando de la ecuación (5.8)

$$z_2 = \bar{x}_2 + A_1^{-1} K_1 z_1 - A_1^{-1} \dot{x}_{ref} \quad (5.9)$$

obtenemos

$$\dot{z}_2 = \dot{\bar{x}}_2 - A_1^{-1} \left(-K_1 \dot{z}_1 + \ddot{x}_{ref} \right) \quad (5.10)$$

$$\dot{z}_2 = A_2 \dot{\bar{x}} + B_1 U - A_1^{-1} \left(-K_1 (\dot{\bar{x}}_1 - \dot{x}_{ref}) + \ddot{x}_{ref} \right) \quad (5.11)$$

$$\dot{z}_2 = A_2 \dot{\bar{x}} + B_1 U + A_1^{-1} K_1 \bar{x}_1 - A_1^{-1} K_1 \dot{x}_{ref} - A_1^{-1} \ddot{x}_{ref}$$

Definiendo:

$$\bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) = A_2 \dot{\bar{x}} + A_1^{-1} K_1 \bar{x}_1 - A_1^{-1} K_1 \dot{x}_{ref} - A_1^{-1} \ddot{x}_{ref}$$

entonces la dinámica z_2 queda definida por:

$$\dot{z}_2 = \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) + B_1 U$$

Ahora z_2 es la superficie de modos deslizante:

$$z_2 = \bar{x}_2 + A_1^{-1} K_1 z_1 - A_1^{-1} \dot{x}_{ref}$$

donde A_1 es una matriz identidad. Esto es debido a la forma en que quedan los sistemas linealizados; por lo tanto z_2 es:

$$z_2 = \bar{x}_2 + K_1 z_1 - \dot{x}_{ref}$$

La ecuación de Modos Deslizantes con un coeficiente de convergencia que puede ser seleccionado K_1 , a seleccionarse, queda de la siguiente manera:

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1$$

5.1.5. Análisis de Estabilidad Local

Seleccionamos z_2 como la variedad de modos deslizantes, proponemos la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V = \frac{1}{2} z_2^T z_2 \quad (5.12)$$

Cuya derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_2^T \dot{z}_2 \\ &= z_2^T \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) + z_2^T B_1 U \end{aligned} \quad (5.13)$$

Se selecciona entonces la ley de control.

$$U = -u_0 \cdot \text{sign}(\bar{z}_2) \quad (5.14)$$

donde $u_0 > 0$

Se define la siguiente transformación lineal

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= B_1^T z_2 \\ \bar{z}_2^T &= z_2^T B_1 \\ z_2^T &= z_2^T B_1^{-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde la matriz B_1^{-1} debe ser no singular y definida positiva.

Si se sustituye (5.15) en la ecuación (5.13) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_2^T B_1^{-1} \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) - z_2^T B_1^{-1} B_1 \cdot u_0 \cdot \text{sign}(\bar{z}_2) \\ \dot{V} &= z_2^T B_1^{-1} \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) - u_0 \cdot z_2^T \cdot \text{sign}(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Tomando en cuenta la siguiente igualdad:

$$\left\| \bar{z}_2 \right\|_1 = z_2^T \text{sign}(\bar{z}_2)$$

La derivada de la función de Lyapunov (5.16) nos queda de la siguiente manera:

$$\dot{V} = z_2^T B_1^{-1} \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) - \left\| \bar{z}_2 \right\|_1 u_0$$

Como sabemos que $\left\| \bar{z}_2 \right\|_1 \geq \left\| \bar{z}_2 \right\|_2$, tenemos

$$\dot{V} \leq - \left\| \bar{z}_2 \right\|_2 \left(u_0 - \left\| B_1^T s \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) \right\| \right)$$

Por lo tanto la condición de estabilidad de Modos Deslizantes:

$$u_0 \geq \left\| B_i^T \bar{F}(\bar{x}, x_{ref}) \right\|$$

Entonces con esto aseguramos que $\bar{z}_2 = 0$ en un tiempo finito y como la transformación utilizada es no singular entonces $z_2 = 0$ con lo que se asegura que la dinámica de la ecuación de modos deslizantes es asintóticamente estable.

5.2. Controlador Difuso

De acuerdo a (2.28) y a (2.47) se requiere encontrar una ley de control de la siguiente forma:

$$u(t)_i = -u_{oi} \text{sign}[B_i^T s_i] \quad i = 1, 2, \dots, r$$

donde la superficie s_i se calculo en la sección 5.1.4. La matriz B_i depende de cada sistema lineal, y la ganancia u_{oi} depende del rango de operación del actuador.

5.2.1. Primera Señal de Referencia

Las reglas para el controlador difuso como en (2.44) quedan de la siguiente forma:

1ª regla del controlador:

SI x_1 es **Negativo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_1 = -u_o \text{sign}[B_1^T s_1]$$

2ª regla del controlador:

SI x_1 es **Cero**

$$\text{ENTONCES } u(t))_2 = -u_o \text{sign}[B_2^T s_2]$$

3ª regla del controlador:

SI x_1 es **Positivo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_3 = -u_o \text{sign}[B_3^T s_3]$$

La salida total del controlador difuso esta dada por (2.45):

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot [-u_{oi} \text{sign}[B_i^T s_i]]}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad i = 1 \dots 3 \quad (5.17)$$

donde $z(t) = [x_2(t)]$, $u_{oi} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$. El calculo de las superficies $B_i s_i$ se hizo a través de un programa en Maple que se muestra en el Apéndice E.1

5.2.2. Segunda Señal de Referencia.

Las reglas para el controlador difuso como en (2.44) quedan de la siguiente forma:

1ª regla del controlador:

SI x_2 es **Negativo Grande**

$$\text{ENTONCES } u(t))_1 = -u_o \text{sign}[B_1^T s_1]$$

2ª regla del controlador:

SI x_2 es **Negativo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_2 = -u_o \text{sign}[B_2^T s_2]$$

3ª regla del controlador:

SI x_2 es **En medio**

$$\text{ENTONCES } u(t))_3 = -u_o \text{sign}[B_3^T s_3]$$

4ª regla del controlador:

SI x_2 es **Positivo**

$$\text{ENTONCES } u(t))_4 = -u_o \text{sign}[B_4^T s_4]$$

5ª regla del controlador:

SI x_2 es **Positivo Grande**

$$\text{ENTONCES } u(t))_5 = -u_o \text{sign}[B_5^T s_5]$$

La salida total del controlador difuso esta dada por (2.45):

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \lambda_i[\mathbf{z}(t)] \cdot [-u_{oi} \text{sign}[B_i^T s_i]]}{\sum_{i=1}^5 \lambda_i[\mathbf{z}(t)]} \quad i = 1 \dots 5 \quad (5.18)$$

donde $z(t) = [x_2(t)]$, $u_{oi} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$, y el calculo de las superficies $B_i s_i$ se hizo a través de un programa en Maple que se muestra en el Apéndice E.2

5.3. Resultados en Simulación.

En esta sección, se presentan los resultados en simulación al aplicar los controladores difusos Takagi-Sugeno (5.17) y (5.18) al modelo no lineal (3.6) que representa el modelo dinámico del manipulador robótico

Las gráficas que se muestran son: el movimiento angular de los eslabones del robot y el de las señales de referencia que se desean seguir; las gráficas de los errores de seguimiento y los pares aplicados para realizar dicho seguimiento.

5.3.1. Simulaciones para la primera señal de referencia.

La respuesta del sistema al aplicar el controlador difuso (5.17) se muestra en la figura 5.3 y 5.4, donde se muestran las respuestas de q_1 , q_2 , $ref1$ y y_{ref2} que representan la posición angular en radianes de los eslabones y las señales de referencia que se desean seguir,

La señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ 1,5 \cos(t) \end{bmatrix}$$

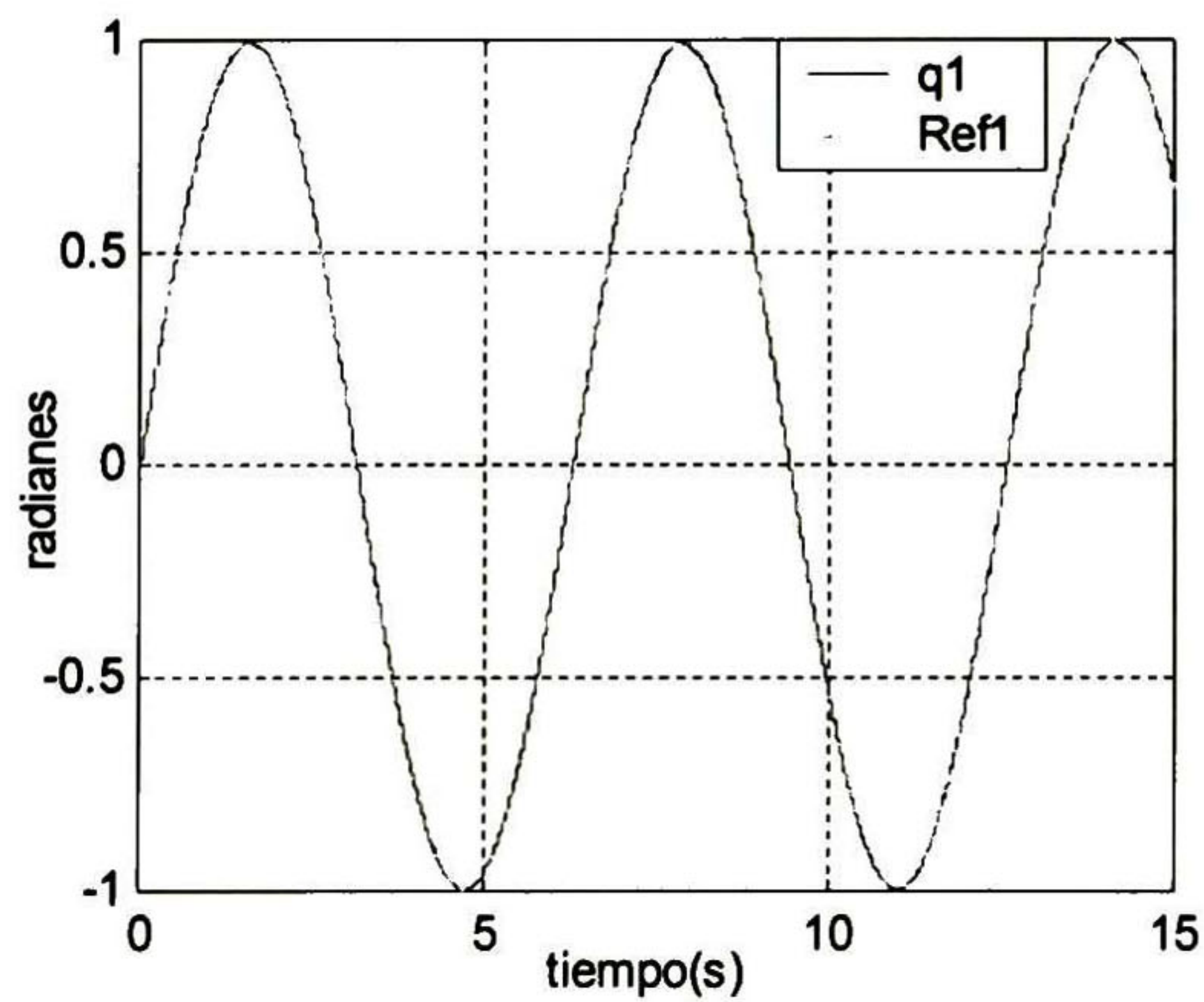


Figura 5.3: Posición del eslabón 1 (q_1) y la señal de referencia y_{ref1}

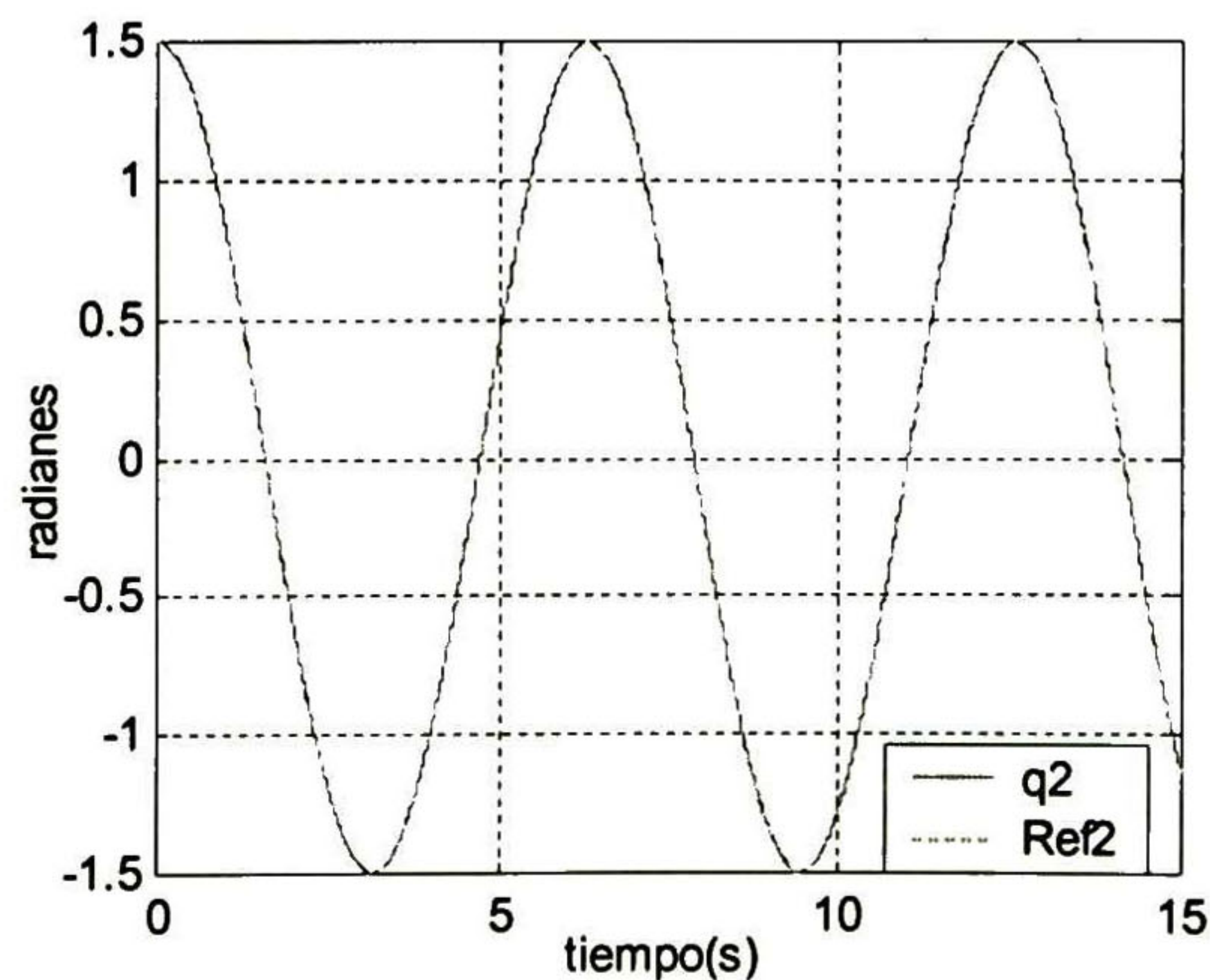


Figura 5.4: Posición del eslabón 2 (q_2) y la señal de referencia y_{ref2}

Como se muestra en las gráficas, las salidas q_1 y q_2 siguen adecuadamente las dos señales de referencia.

En la figura 5.5 y 5.6 se muestran los errores de seguimiento para cada uno de los eslabones. El error de seguimiento se define como la diferencia entre la señal de referencia y la posición angular de los estados:

$$error = \begin{bmatrix} y_{ref1} - q_1 \\ y_{ref2} - q_2 \end{bmatrix}$$

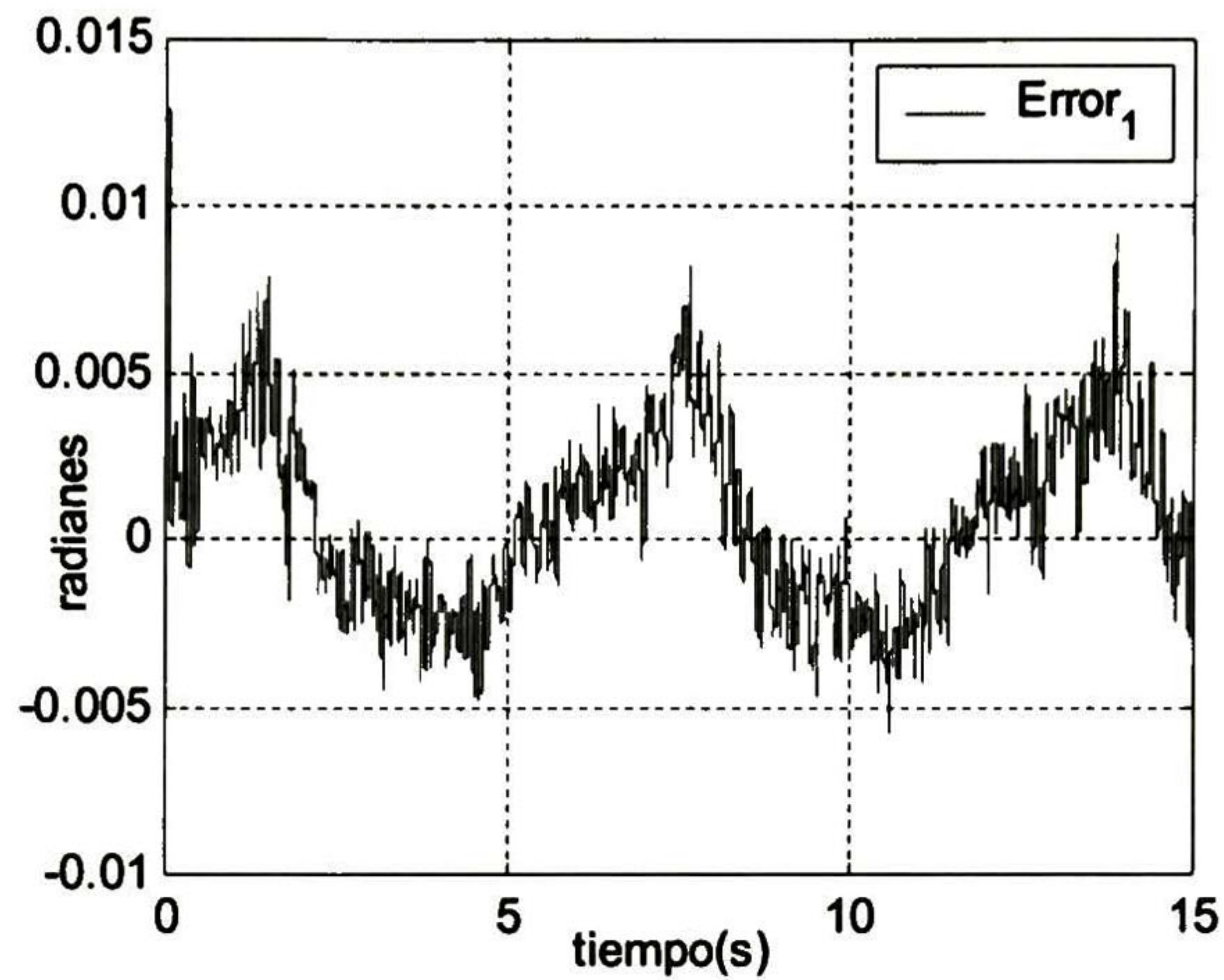


Figura 5.5: Error de seguimiento 1

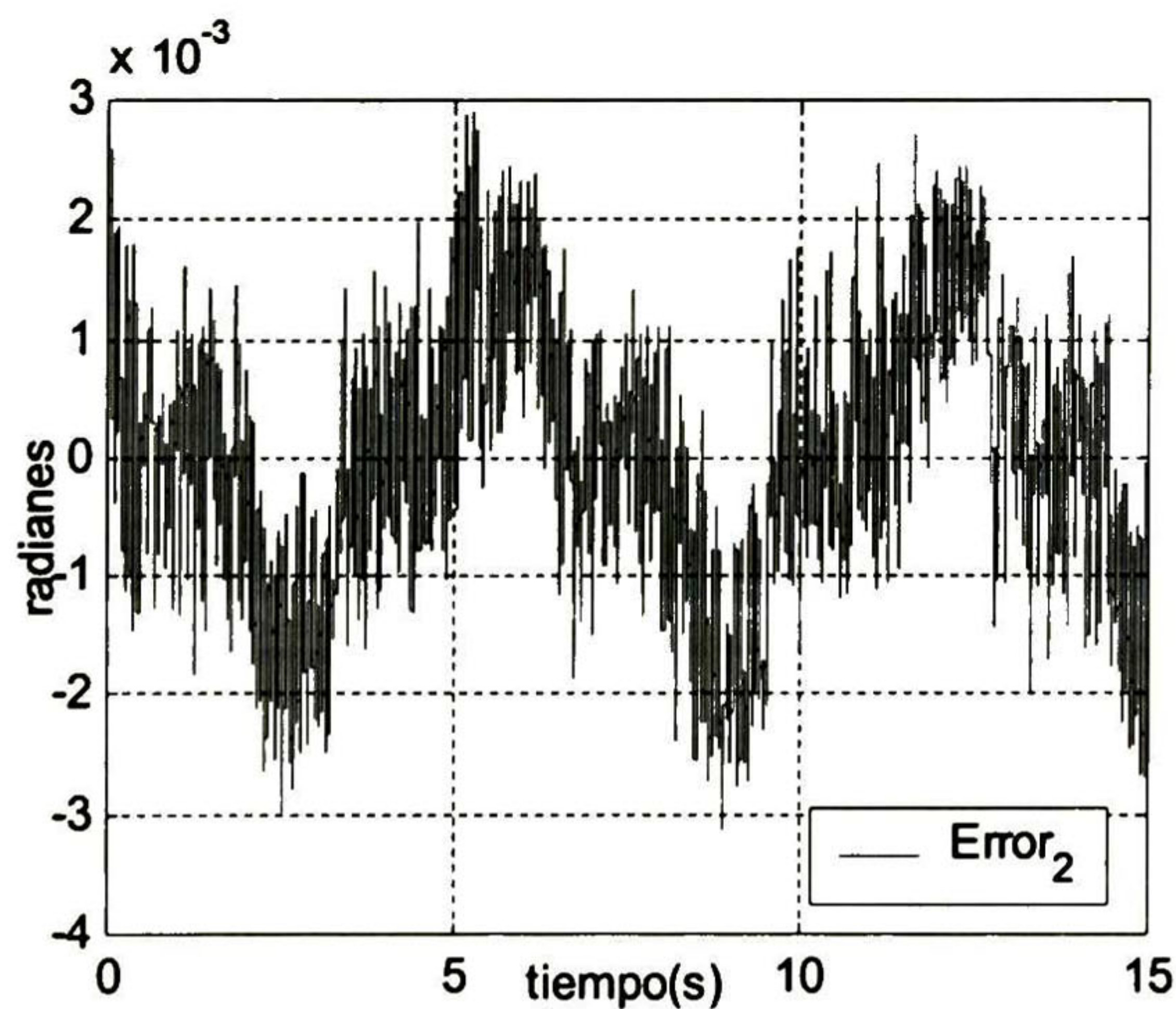


Figura 5.6: Error de seguimiento 2

Como se muestra en las gráficas, los errores son pequeños. Si comparamos los errores de la señal de referencia con la técnica de regulación lineal con la de modos deslizantes, los errores para esta segunda técnica son menores.

CAPÍTULO 5. CONTROL DIFUSO CON CONTROL POR BLOQUES CON MODOS DESLIZANTES

En la figura 5.7 y 5.8 se muestran las acciones de control τ_1 y τ_2 que representan los pares que deben aplicar los actuadores electromagnéticos. Estos son los pares que se necesitan para realizar el seguimiento de trayectorias.

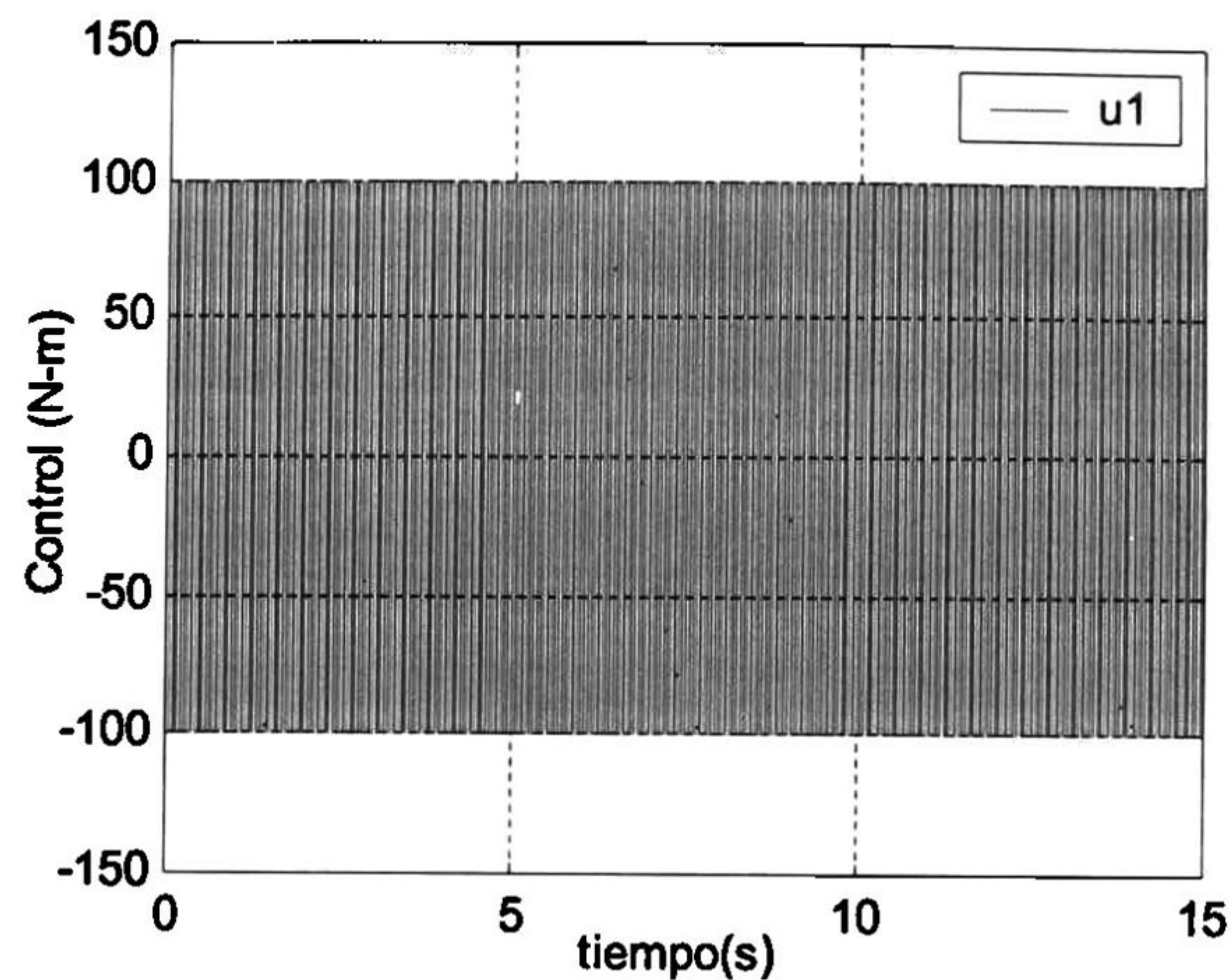


Figura 5.7: Señal de control τ_1

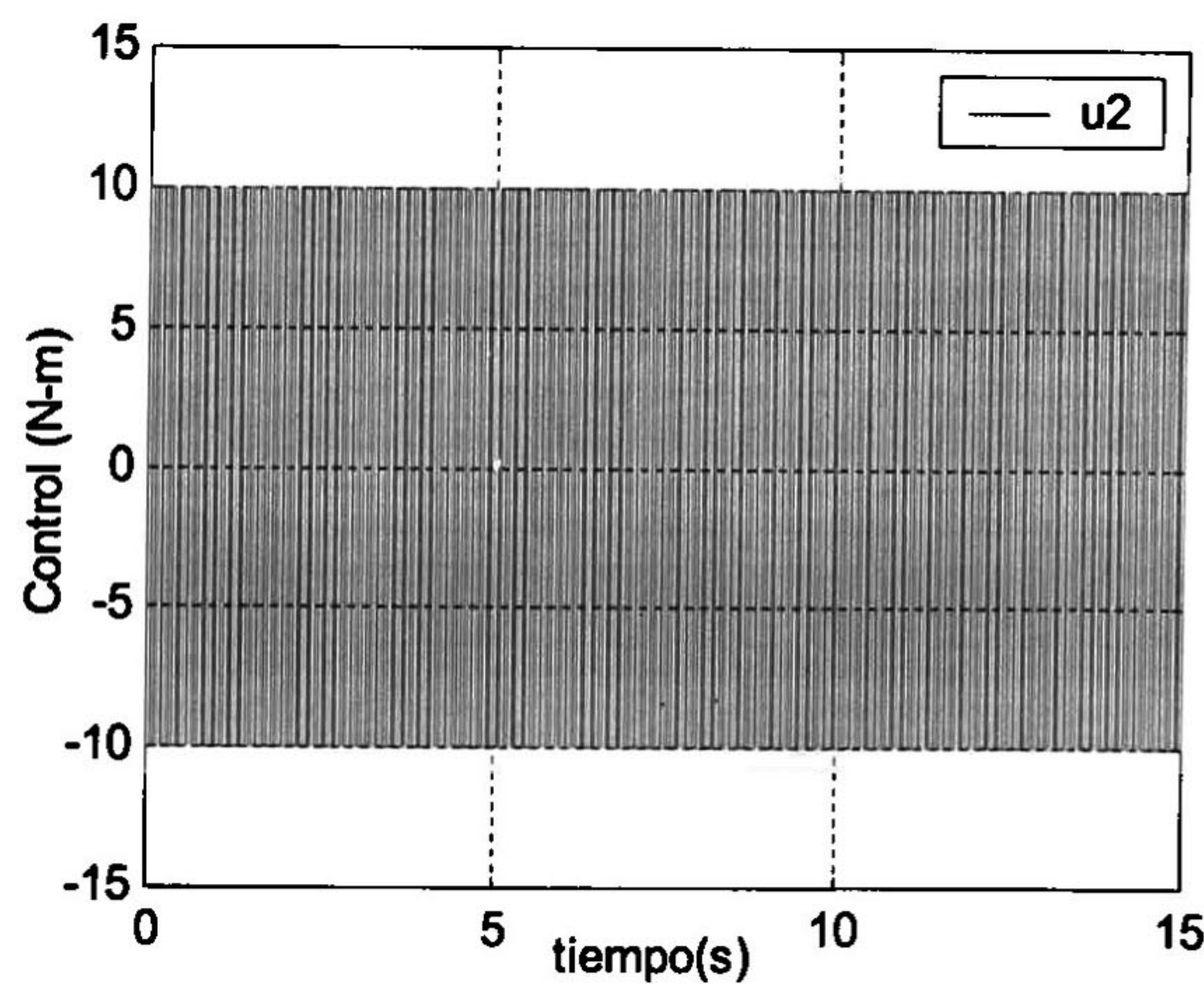


Figura 5.8: Señal de control τ_2

Como se puede ver en las gráficas, la ley de control está dentro de los rangos permitidos de los actuadores y están trabajando con una frecuencia de conmutación de 400 Hz, esta frecuencia en simulación es el paso de integración que se utilizó en Simnon y Matlab, entre más pequeña sea esta, menor serán los errores de seguimiento, Se tomó este valor por recomendaciones de los manuales del manipulador robótico, ya que consideran que esta es la frecuencia a la cual debe trabajar el manipulador.

5.3.2. Simulaciones para la segunda señal de referencia.

La respuesta del sistema al aplicar el controlador difuso (5.18) se muestra en la figura 5.9 y 5.10, donde se presenta la respuesta de q_1 , q_2 , y_{ref1} y y_{ref2} que representa la posición angular en radianes de los eslabones y las señales de referencia que se desean seguir.

Ahora la señal de referencia que se desea seguir es:

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} 0,78530 - 0,78530 \cdot e^{(-2,0 \cdot t)} + 0,17453 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 1,04719 - 1,04719 \cdot e^{(-1,8 \cdot t)} + 2,18166 \cdot \sin(3,5 \cdot t) \end{bmatrix}$$

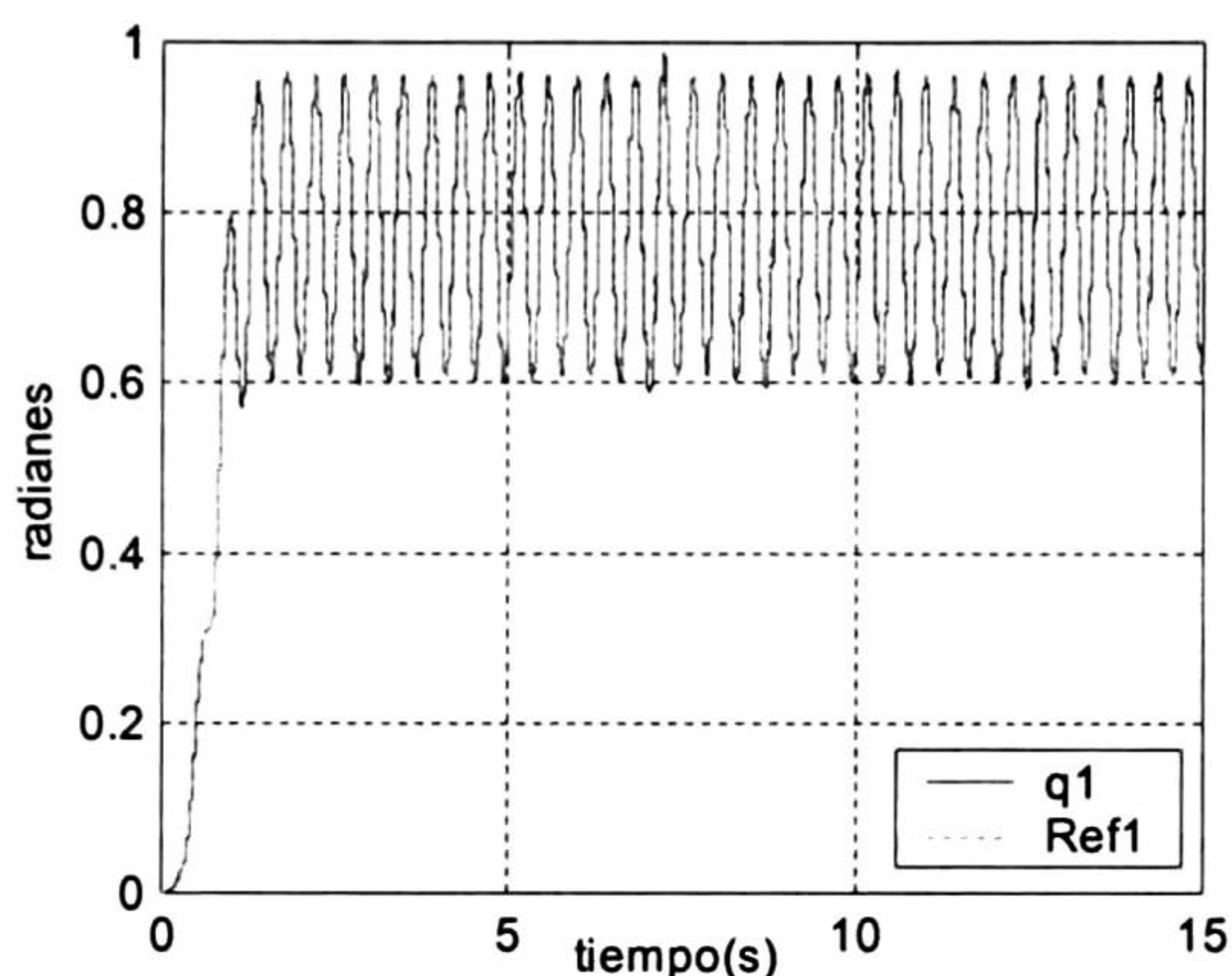


Figura 5.9: Posición del eslabón 1 (q_1) y la señal de referencia y_{ref1}

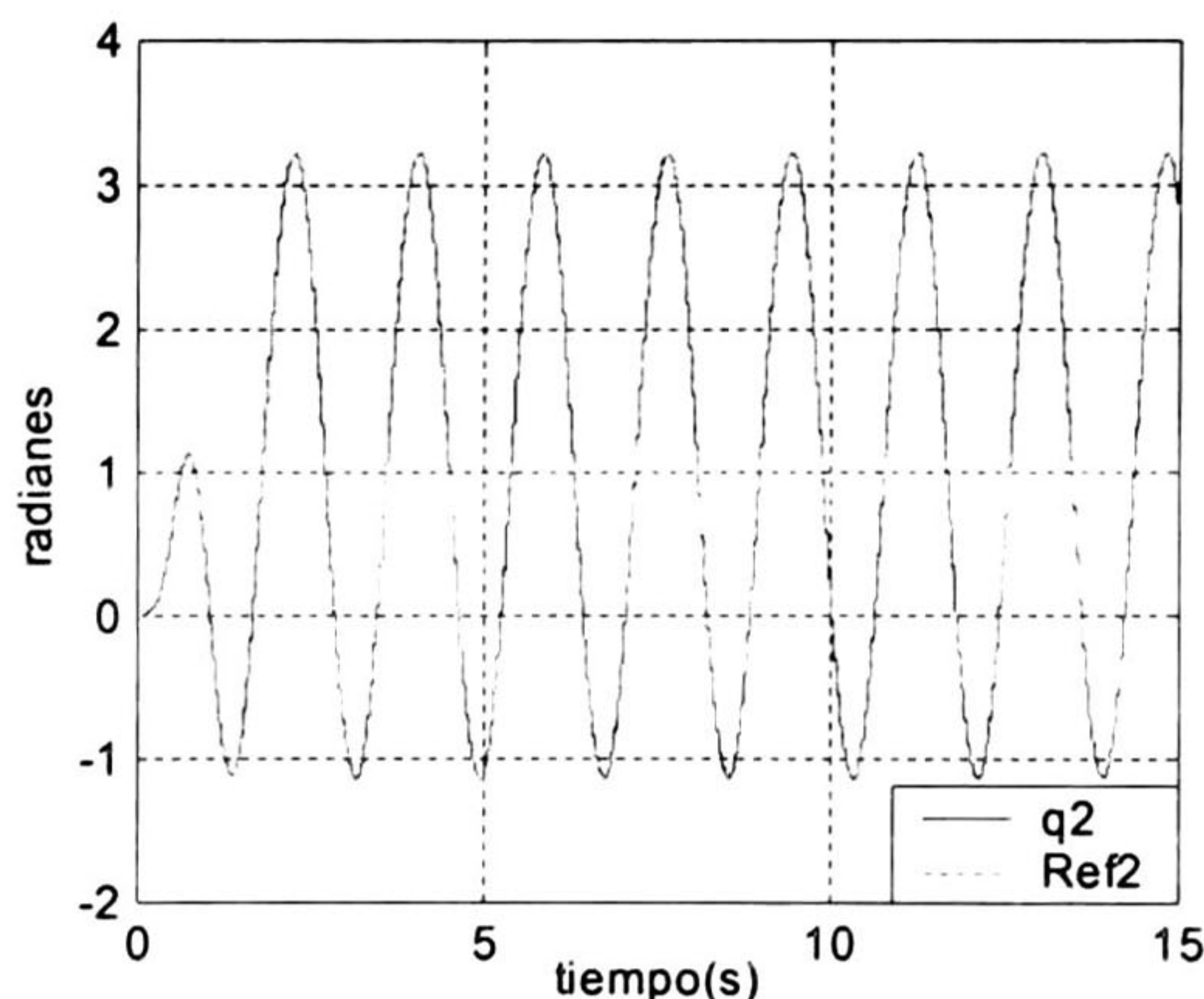


Figura 5.10: Posición del eslabón 2 (q_2) y la señal de referencia y_{ref2}

Como se muestra en las gráficas las salidas q_1 y q_2 siguen adecuadamente las dos señales de referencia, aún cuando la señal de referencia es más compleja que la anterior.

CAPÍTULO 5. CONTROL DIFUSO CON CONTROL POR BLOQUES CON MODOS DESLIZANTES

En la figura 5.11 y 5.12 se muestran los errores de seguimiento para cada uno de los eslabones

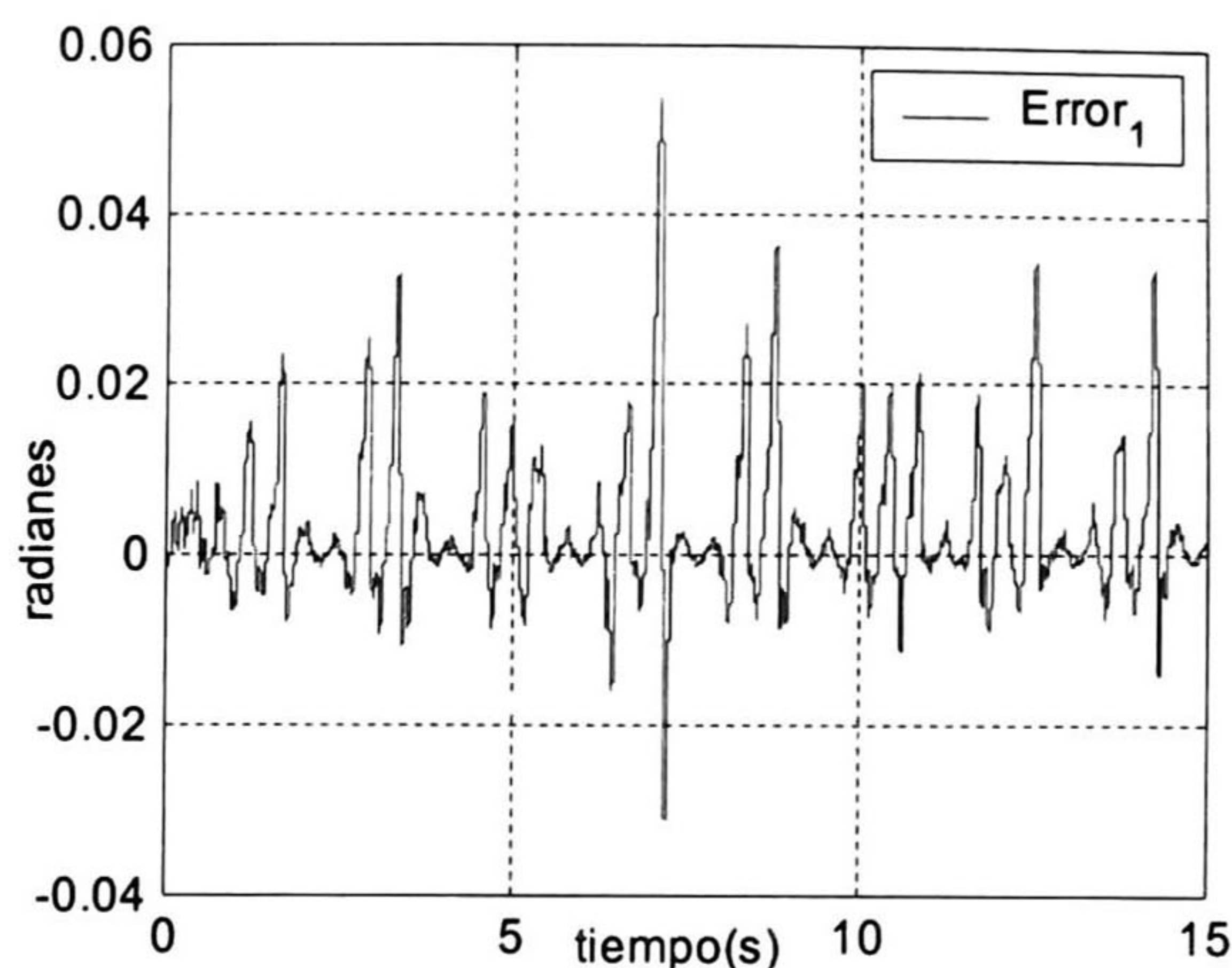


Figura 5.11: Error de seguimiento 1

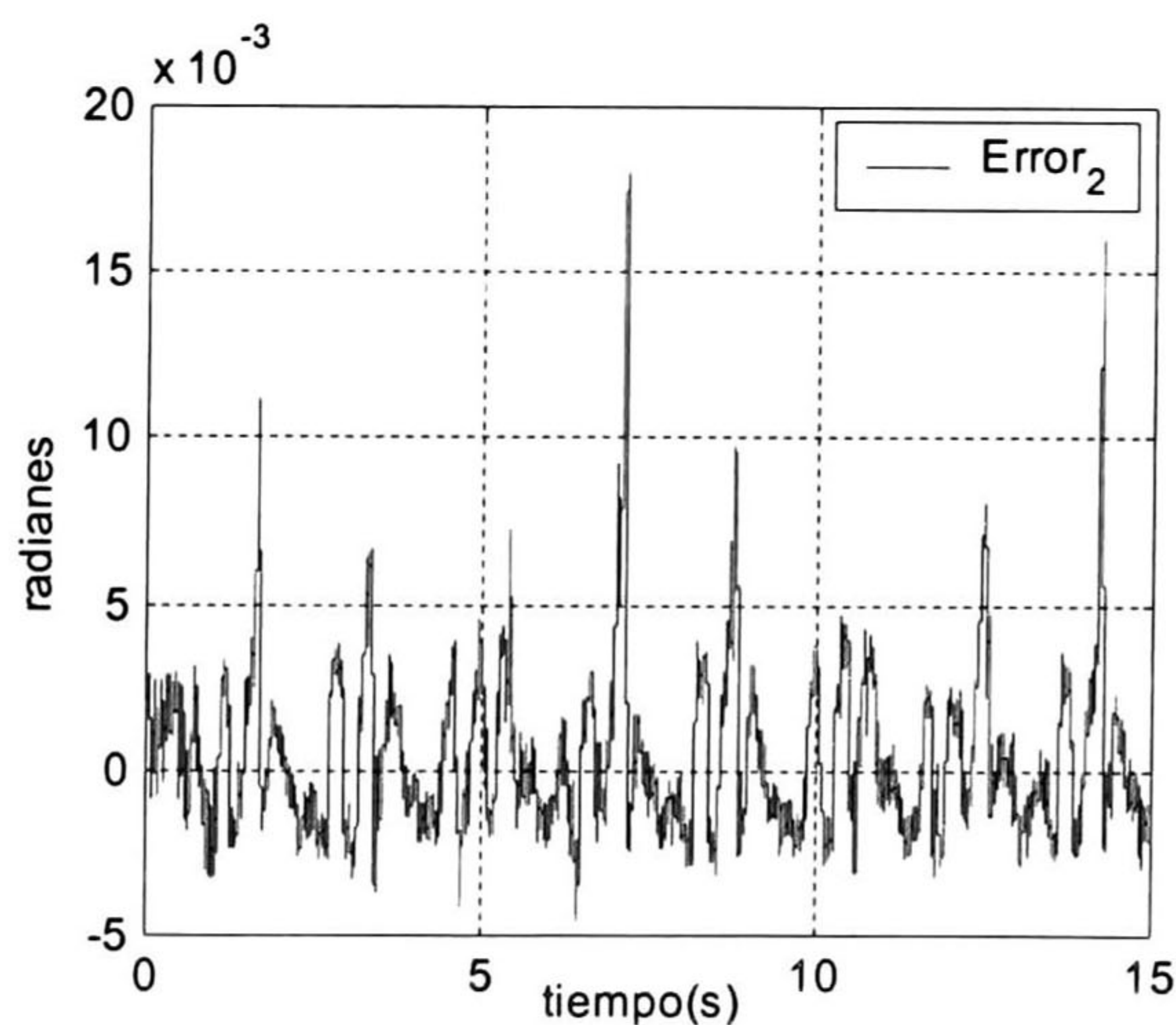


Figura 5.12: Error de seguimiento 2

Como se muestra en las gráficas los errores son pequeños. Si comparamos los errores de la señal de referencia que utilizan la técnica de regulación lineal con la de modos deslizantes, se puede ver que el error para el segundo controlador es menor. Esto es debido principalmente a que el robot tiene mucha fricción, y la técnica de modos deslizantes tiene un mejor desempeño para rechazar este tipo de perturbaciones

Si comparamos las dos señales de referencia se ve que la técnica de control Takagi-Sugeno con modos deslizantes es el que proporciona un mejor desempeño para el seguimiento de trayectorias.

En la figura 5.13 y 5.14 se muestra la acción de control para realizar el seguimiento de trayectoria. La acción de control τ_1 y τ_2 están dadas en N m (Neuton-metros).

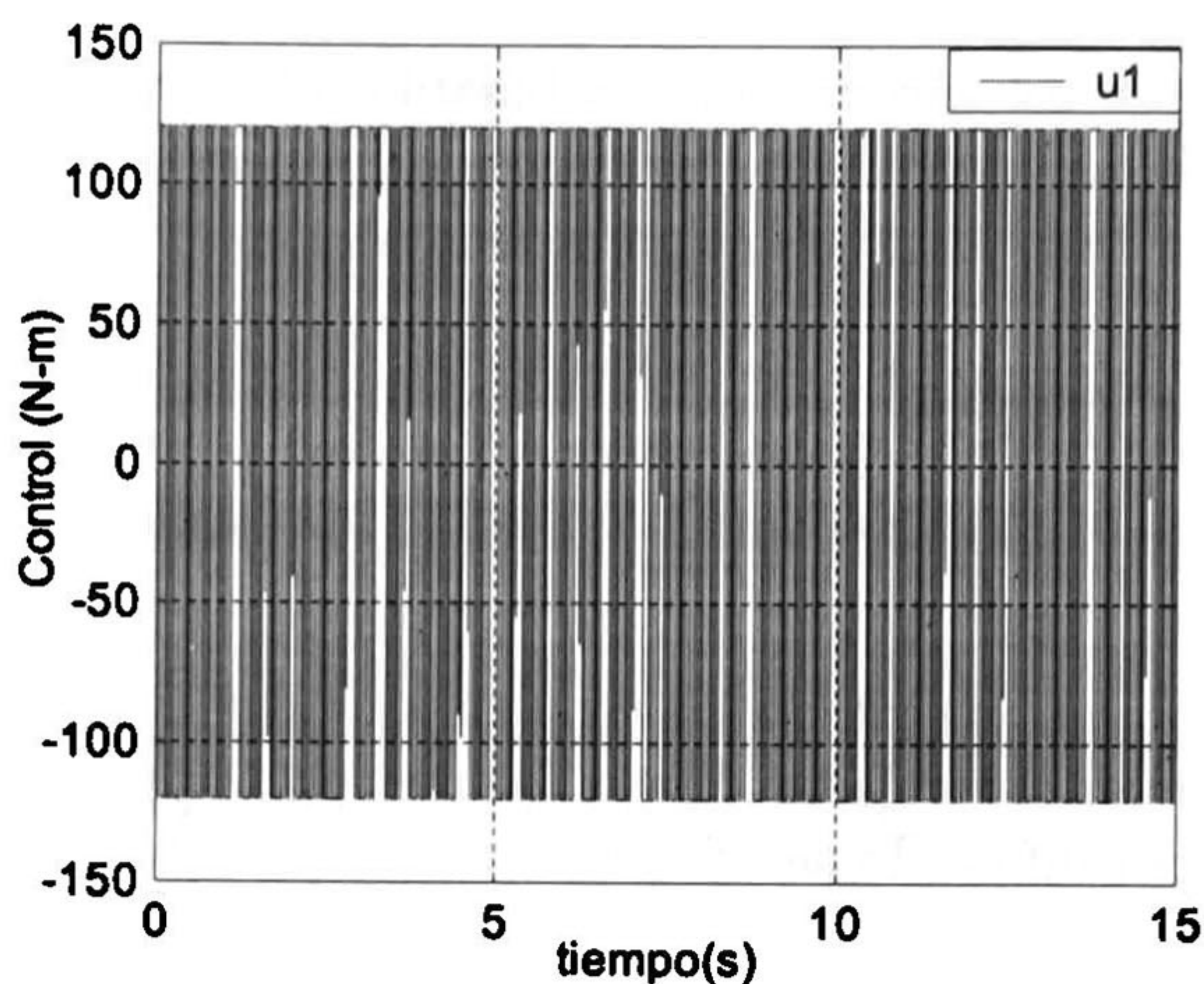


Figura 5.13: Señal de control τ_1

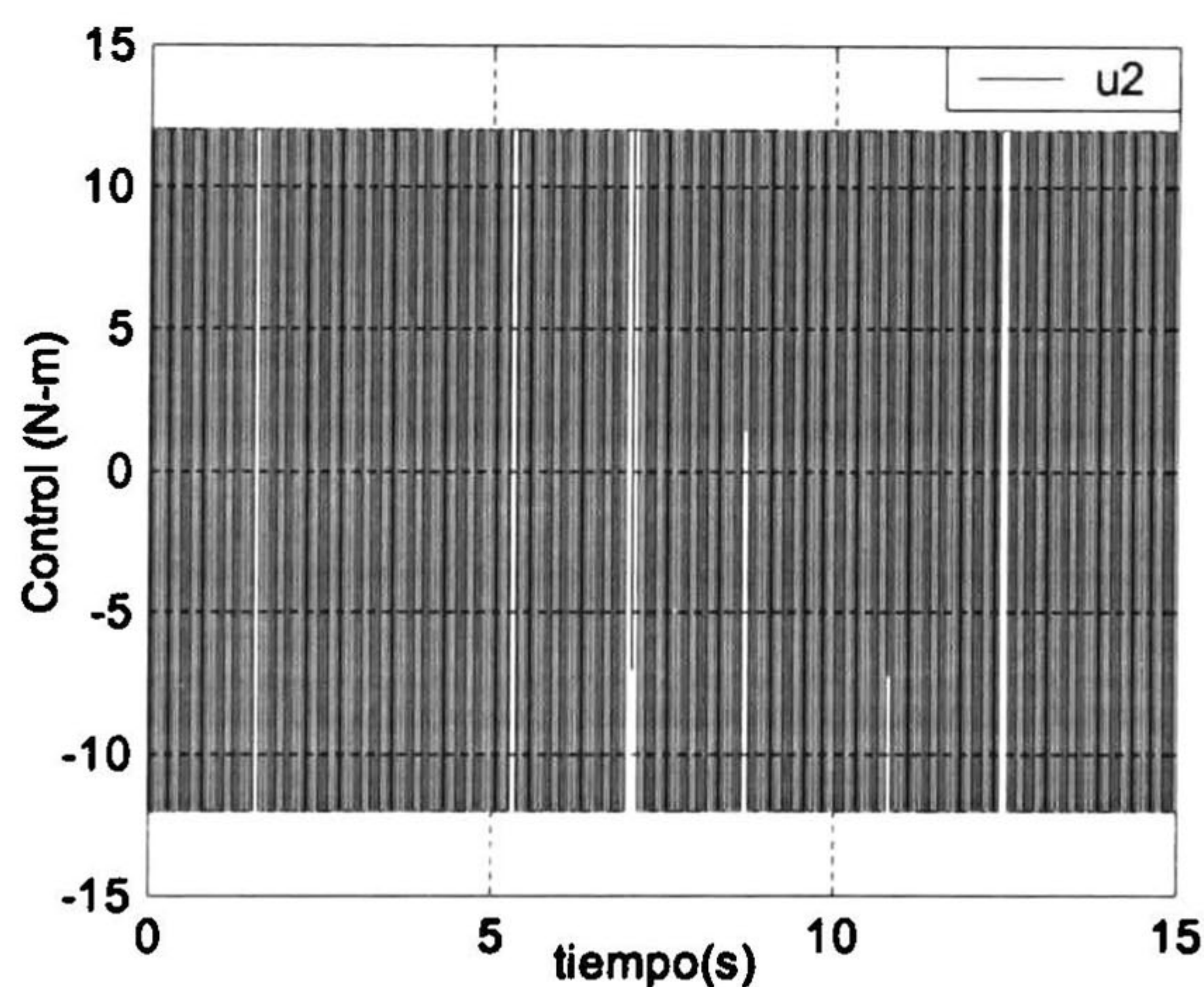


Figura 5.14: Señal de control τ_2

Este controlador como se vio en las gráficas tiene un muy buen desempeño. El seguimiento de las señales de referencia que se realizó en simulación es muy satisfactorio, ya que para cualquiera de las dos señales, los pares de control están dentro de los rangos de los actuadores y los errores de seguimiento son muy pequeños.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se han presentado los esquemas de dos controladores, para el seguimiento de trayectorias: El primer controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Regulador Lineal y el segundo controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría de Control por Bloques con Modos Deslizantes. Estos dos controladores se aplicaron en simulación a un a un manipulador robótico con dos grados de libertad.

Cada controlador se aplicó al sistema para realizar el seguimiento de dos señales de referencia. La primer señal de referencia es mas sencilla ya que se desea que los dos eslabones sigan una señal senoidal y cosenoidal respectivamente. La segunda señal de referencia es más compleja ya que es una senoidal montada sobre una constante y exponenciales que se desvanecen conforme pasa el tiempo. Estas señales son las que se utilizaron para comparar cual de los dos controladores tiene un mejor desempeño.

El controlador difuso Takagi-Sugeno con regulador lineal se comparó con el controlador difuso Takagi-Sugeno con modos deslizantes. Los resultados obtenidos muestran que el segundo controlador tiene un mejor desempeño; para llegar a esta conclusión se comparó el error de seguimiento para las dos señales de referencia y se vió que el error de seguimiento para el segundo controlador para ambas señales de referencia era menor que el del primer controlador; las señales de control en los dos controladores están dentro del rango de operación de los actuadores.

Una observación es, que a mayor frecuencia de conmutación para la ley de control con modos deslizantes mejor será el seguimiento que realiza el manipulador robótico, en esta tesis las gráficas que se muestran se hicieron con una frecuencia de conmutación de 400 Hz, los manuales del manipulador robótico recomiendan trabajar a esa frecuencia, pero se puede aumentar hasta llegar a los 2 kHz, si se aumenta la frecuencia de conmutación se logra que los errores de seguimiento disminuyan aun más, pero aún así a una frecuencia de conmutación 400 Hz los errores de seguimiento son muy pequeños.

Los diseños de los controladores propuestos son relativamente muy sencillos de implementar. Esto es debido a que se cuenta con toda la información y solo es necesario generar las señal de referencia que se desea seguir y aplicar una ganancia de retroalimentación, pero el controlador por modos deslizantes debido a su ley de control discontinua todavia es más sencillo de implementar.

En relación a las pruebas de estabilidad que se hicieron para los dos controladores propuestos, no se hizo el análisis de estabilidad en lazo cerrado, y los análisis que se hicieron no aseguran

que el error de seguimiento se haga cero, esto es debido que las pruebas de estabilidad que se presentaron aseguran que el error de seguimiento local para cada planta linealizada se haga cero, pero al momento de aplicar el controlador difuso, existen productos cruzados de los errores y éstos errores no se puede asegurar que se hagan cero [25].

Se puede decir que los resultados obtenidos muestran que los dos controladores tienen un desempeño bastante aceptable ya que los errores de seguimiento son muy pequeños y sus leyes de control están dentro de los rangos de operación de los actuadores.

Trabajo Futuro

La implementación en tiempo real de los controladores se debe hacer en un manipulador robótico, que se encuentra localizado en El Instituto Tecnológico de la Laguna, Tlaxiaco, Coahuila.

Se requiere también la prueba de estabilidad del controlador difuso con el Control por Bloques con Modos Deslizantes en lazo cerrado, ya que se hizo la prueba de estabilidad para cada controlador local pero no se hizo para el controlador global.

Es necesario también hacer la prueba de estabilidad del controlador difuso Takagi-Sugeno con la teoría del Regulador Lineal en lazo cerrado, para realizar seguimiento a través de la técnica de desigualdades lineales de matrices LMI "Linear Matrix Inequalities"

Bibliografía

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 15, No. 1, pp 116-132, 1985.
- [2] B. A. Francis, "The linear multivariable regulator problem" *SIAMJ. Control Optim.*, Vol. 14, pp 486-505, 1977
- [3] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, Germany 1995
- [4] H. W. Konoploch, A. Isidori and D. Flockner, *Topics in Control Theory*,. Birkhäuser, Boston USA, 1993.
- [5] V. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis Inc., Philadelphia, USA 1999
- [6] K. M. Passino and S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison-Wesley, -USA, 1998.
- [7] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*, 2nd ed., Springer Verlag, USA, 1996.
- [8] L. A. Nuño, *Control PD Difuso aplicado a Robots*, Tesis de Maestría, Cinvestav-Gdl, 1998.
- [9] M. Cravalho, H. Cleber and E. Assuncao, "Novos Resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI", *Controle & automacao*, Vol. 11, No. 01, Mar e Abril 2000.
- [10] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control system", *Fuzzy Sets and Syst.*, Vol 45, No. 2, pp. 133-156, 1992.
- [11] M. Cravalho, H. Cleber y E. Assuncao "Novos resultados sobre a Estabilidade e controle de sistemas nao-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI", *Revista Controle y Automacao Vol 11 no..01 Jan., Fev., Mar., e Abril 2000*
- [12] X. Ma, Z. Sun, and Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 6, No.1, pp. 41-51, February, 1998.
- [13] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers relaxed stability conditions and LMI-based designs", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 6, No.2, pp. 250-264, May, 1998.
- [14] K. Tanaka, T. Taniguchi, and H. O. Wang. "Fuzzy control based on quadratic performance function: a linear matrix inequality approach", in Proceedings 1998 *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, december 1998.

- [15] S. K. Hong and R. Langari. "Synthesis of an LMI_based fuzzy control system with guaranteed optimal H-infinity performance", in Proceedings 1998, *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Anchorage, Alaska, USA, June 1998.
- [16] A. Jadbabaie, M. Jamshidi and A. Titli, "Guaranteed-cost design on continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy controllers via linear matrix inequalities", in Proceedings 1998 *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Anchorage, Alaska, USA, June 1998.
- [17] K. Tanaka, and T. Kosaki. "Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle" *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, B, Vol. 27, No. 3, pp. 552-558, June 1997.
- [18] G. Obregon Pulido, *Control no lineal discretizado con retenedor exponencial*, Tesis de Maestría, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 1999.
- [19] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System And Control Theory*, SIAM series in Applied Mathematics, Vol. 15, Philadelphia, PA., 1994.
- [20] O. Serrano V, *Control adaptable con modos deslizantes* Tesis de Maestría, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 2002.
- [21] B. Haro, *Diseño de un Banco de Controladores Lineales para el Pendubot*, Tesis de Maestría, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 1999.
- [22] M. Maldonado C, *Seguimiento de trayectoria utilizando Control Difuso Tipo Takagi-Sugeno*, Tesis de Maestría, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 1999.
- [23] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Third Edition, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1997.
- [24] T. Kailath, *Linear systems*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1980
- [25] B. Castillo Toledo, *Comunicación personal*, Cinvestav, Unidad Guadalajara, 2003.

Apendice A. Sistemas Lineales

A.1 Sistemas lineales para la primer señal de referencia

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación son:

$$x_{0_1} = [-1 \ 0 \ 0 \ 1,5]; \quad x_{0_2} = [0 \ 1,5 \ 1 \ 0]; \quad x_{0_3} = [1 \ 0 \ 0 \ -1,5];$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9,161678473 & 0,4591616177 & 0 & 0 \\ 7,041217548 & -10,50266732 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4587527323 & -0,8365491 \\ -0,8365491 & 11,32939346 \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -17,10245039 & -17,10245039 & ,07886555820 & 0,07452421238 \\ -16,83333405 & -0,5226016038 & -1,726392724 & -0,07886555820 \end{bmatrix};$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4447105081 & -0,4706167477 \\ -0,4706167477 & 10,30195370 \end{bmatrix}; \quad C_2 = C_1$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9,161678473 & ,4591616177 & 0 & 0 \\ 7,041217548 & -10,50266732 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4587527323 & -0,8365491 \\ -0,8365491 & 11,32939346 \end{bmatrix}; \quad C_3 = C_1$$

A.2 Sistemas lineales para la segunda señal de referencia

Los modelos lineales correspondientes a cada punto de operación son:

$$x_{0_1} = [0,6466 \quad 3,22160 \quad 0 \quad 0] ;$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13,56752071 & 0,5283233895 & 0 & 0 \\ 15,80069955 & 13,94561167 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4586597585 & -0,08214823801 \\ -0,08214823801 & 9,818634726 \end{bmatrix} ;$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{0_2} = [0,7072 \quad 2,13355 \quad 0 \quad 0] ;$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12,77291473 & -0,1423671339 & 0 & 0 \\ 24,24621088 & 9,282958335 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4485696899 & -0,2514750959 \\ -0,2514750959 & 9,944902392 \end{bmatrix} ;$$

$$C_2 = C_1$$

$$x_{0_3} = [0,7098 \quad 1,04550 \quad 0 \quad 0] ;$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13,13568127 & -0,3414596241 & 0 & 0 \\ 21,84265739 & -4,001808726 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ ,4481075572 & -0,6331487224 \\ -0,6331487224 & 10,69852220 \end{bmatrix} ;$$

$$C_3 = C_1$$

$$x_{0_4} = [0,8595 \quad -0,0424 \quad 0 \quad 0] ;$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -11,04755674 & 0,4580382993 & 0 & 0 \\ 7,894347158 & -12,62805166 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4587264841 & -0,8361605105 \\ -0,8361605105 & 11,32806378 \end{bmatrix};$$

$$C_4 = C_1$$

$$x_{0_5} = [0,6155 \quad -1,1305 \quad 0 \quad 0];$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13,79371127 & -0,2903667087 & 0 & 0 \\ 3,066714473 & -7,673233294 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4471404238 & -0,6040842317 \\ -0,6040842317 & 10,62003601 \end{bmatrix};$$

$$C_5 = C_1$$

Apendice B. Ganancias del Regulador Lineal

B.1 a) Ganancias de los pares nominales para los modelos lineales para la 1ra señal de referencia.

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1,535400 \\ 1,535400 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} 33,90260 \\ 1,53540 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} -33,9026 \\ -1,5354 \end{bmatrix}$$

B.1 b) Ganancias de los pares nominales para los modelos lineales para la 2da señal de referencia.

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 21,9621 \\ -1,2121 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} 25,5317 \\ 0,54064 \end{bmatrix}$$

$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 26,8606 \\ 1,79367 \end{bmatrix}$$

$$\tau_4 = \begin{bmatrix} 30,4683 \\ 1,33038 \end{bmatrix}$$

$$\tau_5 = \begin{bmatrix} 21,3097 \\ -0,8987 \end{bmatrix}$$

B.2 Ganancias de control locales para la 1ra señal de referencia.

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ 1,5 \cos(t) \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1669,127969 & -278,1469257 & -130,9712237 & -15,53777750 \\ -127,2958001 & -79,37818527 & -9,803979005 & -5,747546601 \end{bmatrix};$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1688,377571 & 130,9712237 & -15,53777750 & 278,7577937 \\ 128,0956681 & 9,803979005 & -5,747546601 & 80,26205328 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1533,032454 & -213,5239924 & -122,3100714 & -11,23347658 \\ -75,28351480 & -75,90453941 & -5,560993969 & -5,582551308 \end{bmatrix};$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1569,263652 & 122,3100714 & -11,06589742 & 215,1022621 \\ 75,30464422 & 5,728573127 & -5,582551308 & 75,93029780 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 3:

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1669,127969 & -278,1469257 & -130,9712237 & -15,53777750 \\ -127,2958001 & -79,37818527 & -9,803979005 & -5,747546601 \end{bmatrix};$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1688,377571 & 130,9712237 & -15,53777750 & 278,7577937 \\ 128,0956681 & 9,803979005 & -5,747546601 & 80,26205328 \end{bmatrix}$$

B.3 Ganancias de control locales para la 2da señal de referencia.

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} 0,78530 - 0,78530 \cdot e^{(-2,0 \cdot t)} + 0,17453 \cdot \sin(15 \cdot t) \\ 1,04719 - 1,04719 \cdot e^{(-1,8 \cdot t)} + 2,18166 \cdot \sin(3,5 \cdot t) \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 1:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1412,696016 & -132,8220286 & -112,6815101 & -5,540768506 \\ -16,91410318 & -72,28191935 & -1,079242066 & 5,383777833 \end{bmatrix};$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1442,032547 & -962,3095065 & 165,9320639 & 19,66630396 \\ 15,55029287 & -10,57397306 & 1,996594232 & ,1883601178 \\ 131,4136464 & -127,2330129 & 286,2116586 & 12,08807302 \\ 70,84981518 & -64,39118434 & 151,8442236 & 11,74557275 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 2:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1459,754702 & -169,4734101 & -116,417369 & -7,998399302 \\ -42,84847934 & -74,45290150 & -3,081283384 & -5,486726650 \end{bmatrix};$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1487,252466 & -992,1976419 & 170,7680436 & 20,31832348 \\ 41,10575654 & -27,62050947 & 4,928662991 & ,5377763890 \\ 169,2645289 & -162,3696184 & 367,7494233 & 17,44978782 \\ 73,51418070 & -66,98722872 & 157,6569633 & 11,97017206 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 3:

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1599,313917 & -243,7814197 & -126,3716809 & -13,15362012 \\ -100,2605783 & -77,53443080 & -7,617771651 & -5,657162160 \end{bmatrix};$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1628,154489 & -1087,759933 & 188,5317706 & 22,0556494 \\ 99,92573895 & -66,95991974 & 11,78056292 & 1,329529686 \\ 245,1896956 & -232,4553697 & 531,0689014 & 28,69672687 \\ 77,99182638 & -71,35491346 & 167,4256638 & 12,34200440 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 4:

$$K_4 = \begin{bmatrix} -1664,4255 & -277,6890481 & -130,962971 & -15,53347944 \\ -126,981613 & -79,15679396 & -9,800025117 & -5,747380502 \end{bmatrix};$$

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1690,784871 & -1129,995124 & 196,1793930 & 22,85696733 \\ 128,2303985 & -85,89143767 & 15,07894605 & 1,710398384 \\ 278,8831799 & -263,3947909 & 603,4593908 & 33,88877076 \\ 80,3596948 & -73,66446526 & 172,5915476 & 12,53883015 \end{bmatrix}$$

Modelo lineal 5:

$$K_5 = \begin{bmatrix} -1585,477698 & -238,2714624 & -125,6695561 & -12,79172543 \\ -94,05734501 & -76,81945561 & -7,287854828 & -5,643843315 \end{bmatrix};$$

$$L_5 = \begin{bmatrix} 1618,471785 & -1081,219168 & 187,338082 & 21,93310763 \\ 95,64533333 & -64,0968373 & 11,2816210 & 1,271949303 \\ 240,0322882 & -227,7152972 & 519,9860524 & 27,90719570 \\ 77,64213836 & -71,01382890 & 166,6627634 & 12,31294721 \end{bmatrix}$$

Apendice C. Programas para calcular la matriz L_i

C.1 Programa para el cálculo de la matriz L_i para la 1ra señal de referencia..

```
>restart;
>with(linalg):
>with(LinearAlgebra):
#La Matriz A, B y C son las matrices linealizadas para la que se desea calcular la ley de
control
>A:=matrix([
    [0,0,1,0],
    [0,0,0,1],
    [-17.102450,-0.68975, 0.07886, 0.07452],
    [ 16.833334,-0.52260,-1.72639,-0.07886]]);
>B:=matrix([
    [0,0],
    [0,0],
    [.4447105081, -.4706167477],
    [-.4706167477, 10.30195370]]);
>C:=matrix(2,4,
    [1,0,0,0,
    0,1,0,0]);

#La Matriz P es la matriz de perturbación, se considera que el sistema no tiene perturba-
ciones P=0.
>P:=matrix(4,4,(0));

#La Matriz S es la matriz que genera el exosistema, las cuales son dos señales senoidales y
cosenoidales.
>S:=matrix(4,4,[
    0, 1, 0, 0,
    -1, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 1,
    0, 0,-1,0]);

#La Matriz K es la matriz de ganancias que se calculan en matlab para mover los polos a
[-23-25,-27,-29]
>K:=matrix(2,4,
```



```
[-1533.032454, -213.5239924, -122.3100714, -11.23347658,
-75.28351480, -75.90453941, -5.560993969, -5.582551308]);
```

#La Matriz Q es la matriz de la señal de referencia que se desea seguir

```
>Q:=matrix(2,4,
[-1, 0, 0, 0,
0, 0, 0,-1]);
```

#La Matriz PI, es la que se desea calcular

```
>PI:=matrix(4,4,
[Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8,
Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14 ,Pi15, Pi16]);
```

#Ec. Que se debe cumplir para calcular La Matriz PI.

```
>Ec1:=evalm(C&*PI+Q);
```

```
>sol1:=solve({Ec1[1,1], Ec1[1,2], Ec1[1,3], Ec1[1,4], Ec1[2,1], Ec1[2,2], Ec1[2,3], Ec1[2,4]},
{Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8});
```

```
> assign(sol1);
```

```
> PI:=matrix(4, 4, [Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8, Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14,
Pi15, Pi16]);
```

#La Matriz Gamma es la que se desea calcular

```
> Gamma:=matrix(2, 4,
[gamma1, gamma2, gamma3, gamma4,
gamma5, gamma6, gamma7, gamma8]);
```

#Ec. Que se debe cumplir para calcular La Matriz Gamma.

```
> Ec2:=evalm(-PI&*S + A&*PI + B&*Gamma + P );
```

```
> sol2:=solve({Ec2[1, 1], Ec2[1, 2], Ec2[1, 3], Ec2[1, 4], Ec2[2, 1], Ec2[2, 2], Ec2[2, 3], Ec2[2,
4], Ec2[3, 1], Ec2[3, 2], Ec2[3, 3], Ec2[3, 4], Ec2[4, 1], Ec2[4, 2], Ec2[4, 3], Ec2[4, 4]} . {Pi9, Pi10,
Pi11, Pi12, Pi13, Pi14, Pi15, Pi16, gamma1, gamma2, gamma3, gamma4, gamma5, gamma6,
gamma7, gamma8});
```

```
> assign(sol2);
```

```
> PI:=matrix(4, 4, [Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8, Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14,
Pi15, Pi16]);
```

```
> Gamma:=matrix(2, 4, [gamma1, gamma2, gamma3, gamma4, gamma5, gamma6, gamma7, gamma8]);
```

Se calcula La matriz L que es la que nos sirve para aplicar la ley de control

```
> L := evalm(Gamma - K&* PI);
```

```
> H := augment(K, L);
```

```
> Est_xe(t) :=matrix(8, 1, [x1, x2, x3, x4, w1, w2, w3, w4]);
```

Se calcula la ley de control u

```
> u := evalm(H&*Est_xe(t));
```


C.2 Programa para el cálculo de la matriz L_i para la 2da señal de referencia.

```

>restart;
>with(linalg):
>with(LinearAlgebra):
#La Matriz A, B y C son las matrices linealizadas para la que se desea calcular la ley de
control
>A:=matrix([
    [0,0,1,0],
    [0,0,0,1],
    [-13.56752, 0.52832,0,0],
    [ 15.80069,13.94561,0,0]]):
>B:=matrix([
    [0,0],[0,0],
    [ 0.45865,-0.82148],
    [-0.08214,9.81863]]):
>C:=matrix(2,4,
    [1,0,0,0,
    0,1,0,0]):

#La Matriz P es la matriz de perturbación, se considera que el sistema no tiene perturba-
ciones P=0.
>P:=matrix(4,8,(0)):

#La Matriz S es la matriz que genera el exosistema, las cuales son señales constantes,
senoidales, cosenoidales y exponenciales.
>S:=matrix(8,8,[
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0,-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0,
    0, 0,-225, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0,-1.8, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
    0, 0, 0, 0, 0, 0,-12.25, 0]):

#La Matriz K es la matriz de ganancias que se calculan en matlab para mover los polos a
[-23-25,-27,-29]
>K:=matrix(2,4,1.0e+003*[
    -1.41269601581948,-0.13282202869797,-0.11268151009621,-0.00554076850876,
    -0.01691410316740,-0.07228191938730,-0.00107924206509,-0.00538377783381])

#La Matriz Q es la matriz de la señal de referencia que se desea seguir
>Q:=matrix(2,8,[
    -1,0.7853,-0.17453, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0,-1,1.04719,-2.18166, 0]):

#La Matriz PI, es la que se desea calcular
>PI:=matrix(4,8,

```



```
[ Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8,
  Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14, Pi15, Pi16,
  Pi17, Pi18, Pi19, Pi20, Pi21, Pi22, Pi23, Pi24,
  Pi25, Pi26, Pi27, Pi28, Pi29, Pi30, Pi31, Pi32]):
```

```
#Ec. Que se debe cumplir para calcular La Matriz PI.
```

```
> Ec1 :=evalm(C&*PI+Q):
```

```
sol1:=solve({Ec1[1,1], Ec1[1,2], Ec1[1,3], Ec1[1,4], Ec1[1,5], Ec1[1,6], Ec1[1,7], Ec1[1,8], Ec1[2,1],
Ec1[2,2], Ec1[2,3], Ec1[2,4], Ec1[2,5], Ec1[2,6], Ec1[2,7], Ec1[2,8]},{Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6,
Pi7, Pi8, Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14, Pi15, Pi16}):
```

```
> assign(sol1):
```

```
PI:=matrix(4,8,[Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8, Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14, Pi15,
Pi16, Pi17, Pi18, Pi19, Pi20, Pi21, Pi22, Pi23, Pi24, Pi25, Pi26, Pi27, Pi28, Pi29, Pi30, Pi31,
Pi32]):
```

```
#La Matriz Gamma es la que se desea calcular
```

```
> Gamma:=matrix(2,8,
```

```
  [gamma1, gamma2, gamma3, gamma4, gamma5, gamma6, gamma7, gamma8,
  gamma9, gamma10, gamma11, gamma12, gamma13, gamma14, gamma15, gamma16]):
```

```
#Ec. Que se debe cumplir para calcular La Matriz Gamma.
```

```
> Ec2:=evalm(-PI&*S + A&*PI + B&*Gamma + P ):
```

```
> sol2:=solve({Ec2[1,1], Ec2[1,2], Ec2[1,3], Ec2[1,4], Ec2[1,5], Ec2[1,6], Ec2[1,7], Ec2[1,8],
Ec2[2,1], Ec2[2,2], Ec2[2,3], Ec2[2,4], Ec2[2,5], Ec2[2,6], Ec2[2,7], Ec2[2,8], Ec2[3,1], Ec2[3,2],
Ec2[3,3], Ec2[3,4], Ec2[3,5], Ec2[3,6], Ec2[3,7], Ec2[3,8], Ec2[4,1], Ec2[4,2], Ec2[4,3], Ec2[4,4],
Ec2[4,5], Ec2[4,6], Ec2[4,7], Ec2[4,8]},{Pi17, Pi18, Pi19, Pi20, Pi21, Pi22, Pi23, Pi24, Pi25, Pi26,
Pi27, Pi28, Pi29, Pi30, Pi31, Pi32 , gamma1, gamma2, gamma3, gamma4, gamma5, gamma6,
gamma7, gamma8, gamma9, gamma10, gamma11, gamma12, gamma13, gamma14, gamma15,
gamma16 }):
```

```
> assign(sol2):
```

```
> PI:=matrix(4,8,[Pi1, Pi2, Pi3, Pi4, Pi5, Pi6, Pi7, Pi8, Pi9, Pi10, Pi11, Pi12, Pi13, Pi14,
Pi15, Pi16, Pi17, Pi18, Pi19, Pi20, Pi21, Pi22, Pi23, Pi24, Pi25, Pi26, Pi27, Pi28, Pi29, Pi30,
Pi31, Pi32]):
```

```
> Gamma:=matrix(2,8,[gamma1, gamma2, gamma3, gamma4, gamma5, gamma6, gamma7,
gamma8, gamma9, gamma10, gamma11, gamma12, gamma13, gamma14, gamma15, gamma16]):
```

```
# Se calcula La matriz L que es la que nos sirve para aplicar la ley de control
```

```
> L := evalm(Gamma - K&* PI):
```

```
> H := augment(K, L):
```

```
> Est_xe(t) :=matrix(12, 1, [x1, x2, x3, x4, w1, w2, w3, w4, w5, w6, w7, w8]):
```

```
# Se calcula la ley de control u
```

```
> u := evalm(H&*Est_xe(t)):
```


Apendice D. Programas para probar estabilidad

D.1 Programa para calcular la matriz P_1 a través de LMIs

```
P=[-23 -25 -27 -29];
```

```
Calculo de la matriz de retroalimentación K1, K2 y K3 para los sistemas lineales."
```

```
A1=[  
0 0 1.0000 0;  
0 0 0 1.0000;  
-17.1025 -0.6803 1.0964 -0.0078;  
16.8333 -2.3160 -2.8032 1.7240];
```

```
B1=[  
0 0;  
0 0;  
0.4447 -0.4706;  
-0.4706 10.3020];
```

```
K1=-place(A1,B1,P)
```

```
A2=[  
0 0 1.0000 0;  
0 0 0 1.0000;  
-9.1617 0.4592 1.0496 -0.1464;  
7.0412 -10.5027 -1.9140 1.9826];
```

```
B2=[  
0 0;  
0 0;  
0.4588 -0.8365;  
-0.8365 11.3294];
```

```
K2=-place(A2,B2,P)
```

```
A3=[  
0 0 1.0000 0;  
0 0 0 1.0000;  
-9.1617 0.4592 1.0496 -0.1464;  
7.0412 -10.5027 -1.9140 1.9826];
```

```
B3=[  
0 0;  
0 0;
```



```
0.4588 -0.8365;
-0.8365 11.3294];
K3=-place(A3,B3,P)
```

Combinatoria de los sistemas en lazo cerrado

```
R11=(A1+ B1*K1);
R12=(A1+ B1*K2);
R13=(A1+ B1*K3);
R21=(A2+ B2*K1);
R22=(A2+ B2*K2);
R23=(A2+ B2*K3);
R31=(A3+ B3*K1);
R32=(A3+ B3*K2);
R33=(A3+ B3*K3);
R1221=(R12+R21)/2;
R1331=(R13+R31)/2;
R2332=(R23+R32)/2;
```

"Definición para inicializar el cálculo de la matriz P por LMIs

```
setlmis([])
Q=lmivar(1, [4 1])
lmiterm([1 1 1 Q], 1, R11, 's');
lmiterm([2 1 1 Q], 1, R1221, 's');
lmiterm([3 1 1 Q], 1, R1331, 's');
lmiterm([5 1 1 Q], 1, R22, 's');
lmiterm([6 1 1 Q], 1, R2332, 's');
lmiterm([8 1 1 Q], 1, R33, 's');
lmiterm([-9 1 1 Q],1, 1);
lmisys=getlmis;
[tmin,xfas]=feasp(lmisys);
P=dec2mat(lmisys,xfas,Q)
```

"Esto es para comprobar que se cumple las desigualdades.

```
V1=R11'*P + P*R11;
V2=R1221'*P + P*R1221;
V3=R1331'*P + P*R1331;
V4=R22'*P + P*R22;
V5=R2332'*P + P*R2332;
V6=R33'*P + P*R33;
```

```
disp('eigenvalores de las desigualdades');
vp=eig(P)
v1=eig(V1)
v2=eig(V2)
v3=eig(V3)
v4=eig(V4)
v5=eig(V5)
v6=eig(V6)
```


D.2 Programa para calcular la matriz P_2 a través de LMIs

$P=[-35 \ -36 \ -36 \ -38];$

Calculo de la matriz de retroalimentación K_1, K_2 y K_3 para los sistemas lineales."

$A_1=[$

0 0 1.0000 0;

0 0 0 1.0000;

-13.5675 0.5283 0 0;

15.8007 13.9456 0 0];

$B_1=[$

0 0;

0 0;

0.4587 -0.0821;

-0.0821 9.8186];

$K_1=-\text{place}(A_1,B_1,P)$

$A_2=[$

0 0 1.0000 0;

0 0 0 1.0000;

-12.7729 -0.1424 0 0;

24.2462 9.2830 0 0];

$B_2=[$

0 0;

0 0;

0.4486 -0.2515;

-0.2515 9.9449];

$K_2=-\text{place}(A_2,B_2,P)$

$A_3=[$

0 0 1.0000 0;

0 0 0 1.0000;

-13.1357 -0.3415 0 0;

21.8427 -4.0018 0 0];

$B_3=[$

0 0;

0 0;

0.4481 -0.6331;

-0.6331 10.6985];

$K_3=-\text{place}(A_3,B_3,P)$

$A_4=[$

0 0 1.0000 0;

0 0 0 1.0000;

-11.0476 0.4580 0 0;

7.8943 -12.6281 0 0];

$B_4=[$

0 0;

0 0;

0.4587 -0.8362;


```

-0.8362 11.3281];
K4=-place(A4,B4,P)
A5=[
0 0 1.0000 0;
0 0 0 1.0000;
-13.7937 -0.2904 0 0;
 3.0667 -7.6732 0 0];
B5=[
0 0;
0 0;
 0.4471 -0.6041;
-0.6041 10.6200];
K5=-place(A5,B5,P)
R11=(A1+ B1*K1);
R12=(A1+ B1*K2);
R13=(A1+ B1*K3);
R14=(A1+ B1*K4);
R15=(A1+ B1*K5);
R21=(A2+ B2*K1);
R22=(A2+ B2*K2);
R23=(A2+ B2*K3);
R24=(A2+ B2*K4);
R25=(A2+ B2*K5);
R31=(A3+ B3*K1);
R32=(A3+ B3*K2);
R33=(A3+ B3*K3);
R34=(A3+ B3*K4);
R35=(A3+ B3*K5);
R41=(A4+ B4*K1);
R42=(A4+ B4*K2);
R43=(A4+ B4*K3);
R44=(A4+ B4*K4);
R45=(A4+ B4*K5);
R51=(A5+ B5*K1);
R52=(A5+ B5*K2);
R53=(A5+ B5*K3);
R54=(A5+ B5*K4);
R55=(A5+ B5*K5);
R11;
R1221=(R12+R21)/2;
R1331=(R13+R31)/2;
R1441=(R14+R41)/2;
R1551=(R15+R51)/2;
R22;
R2332=(R23+R32)/2;
R2442=(R24+R42)/2;
R2552=(R25+R52)/2;

```



```

R33;
R3443=(R34+R43)/2;
R3553=(R35+R53)/2;
R44;
R4554=(R45+R54)/2;
R55;
setlmis([])
Q=lmivar(1, [4 1])
lmiterm([1 1 1 Q], 1, R11, 's');
lmiterm([2 1 1 Q], 1, R1221, 's');
lmiterm([3 1 1 Q], 1, R1331, 's');
lmiterm([4 1 1 Q], 1, R1441, 's');
lmiterm([5 1 1 Q], 1, R1551, 's');
lmiterm([6 1 1 Q], 1, R22, 's');
lmiterm([7 1 1 Q], 1, R2332, 's');
lmiterm([8 1 1 Q], 1, R2442, 's');
lmiterm([9 1 1 Q], 1, R2552, 's');
lmiterm([10 1 1 Q], 1, R33, 's');
lmiterm([11 1 1 Q], 1, R3443, 's');
lmiterm([12 1 1 Q], 1, R3553, 's');
lmiterm([13 1 1 Q], 1, R44, 's');
lmiterm([14 1 1 Q], 1, R4554, 's');
lmiterm([15 1 1 Q], 1, R55, 's');
lmiterm([-16 1 1 Q],1, 1);
lmisys=getlmis;
%pause;
[tmin,xfeas]=feasp(lmisys);
P=dec2mat(lmisys,xfeas,Q)
%Esto es para comprobar que se cumple las desigualdades.
V1=R11'*P + P*R11;
V2=R1221'*P + P*R1221;
V3=R1331'*P + P*R1331;
V4=R1441'*P + P*R1441;
V5=R1551'*P + P*R1551;
V6=R22'*P + P*R22;
V7=R2332'*P + P*R2332;
V8=R2442'*P + P*R2442;
V9=R2552'*P + P*R2552;
V10=R33'*P + P*R33;
V11=R3443*P + P*R3443;
V12=R3553*P + P*R3553;
V13=R44'*P + P*R44;
V14=R4554*P + P*R4554;
V15=R11'*P + P*R11;
%pause;
%clc;

```



```
%disp('eigenvalores de las desigualdades');  
vp=eig(P)  
v1=eig(V1)  
v2=eig(V2)  
v3=eig(V3)  
v4=eig(V4)  
v5=eig(V5)  
v6=eig(V6)  
v7=eig(V7)  
v8=eig(V8)  
v9=eig(V9)  
v10=eig(V10)  
v11=eig(V11)  
v12=eig(V12)  
v13=eig(V13)  
v14=eig(V14)  
v15=eig(V15)
```


Apendice E. Programas para calcular la superficie deslizante

E.1 Programa para el cálculo de la superficie s_i para la primer señal de referencia with(linalg):

#Señales de referencia que se desea seguir:

> x1ref:=sin(t):

> x2ref:=1.5*cos(t):

#Derivadas de la Señal de referencia que se desea seguir:

> x1pref:=diff(x1ref,t):

> x2pref:=diff(x2ref,t):

> x2:=matrix(2,1,[x3, x4]):

#Aqui se propone la matriz de ganancias K1 para estabilizar la ec. de modos deslizantes.

> k1:=matrix(2,2,[70,0,0,70]):

#Error de seguimiento

> z1:=matrix(2,1,[x1-x1ref, x2-x2ref]):

> Xpref:=matrix(2,1,[x1pref, x2pref]):

#Cálculo de la superficie de modos deslizantes.

> z2:=evalm(x2 + k1&*z1 - Xpref):

#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [-1 0 0 1.5]

> B1:=matrix([[.4447105081, -.4706167477], [-.4706167477, 10.30195370]]):

> evalm(transpose(B1)&*z2):

#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0 1.5 1 0]

> B2:=matrix([[.4587527323, -.8365491000], [-.8365491000, 11.32939346]]):

> evalm(transpose(B2)&*z2):

#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [1 0 0 -1.5]

> B3:=matrix([[.4447105081, -.4706167477], [-.4706167477, 10.30195370]]):

> evalm(transpose(B3)&*z2):

E.2 Programa para el cálculo de la superficie s_i para la segunda señal de referencia

```
#Señales de referencia que se desea seguir:
```

```
x1ref:=r1:
```

```
> x2ref:=r2:
```

```
#Derivadas de la Señal de referencia que se desea seguir:
```

```
x1pref:=r1p:
```

```
> x2pref:=r2p:
```

```
> x2:=matrix(2,1,[x3,x4 ]):
```

```
#Aqui se propone la matriz de ganancias K1 para estabilizar la ec. de modos deslizantes.
```

```
> k:=matrix(2,2,[90,0,0,90]):
```

```
#Error de seguimiento
```

```
> z1:=matrix(2,1,[x1-x1ref, x2-x2ref]):
```

```
> Xpref:=matrix(2,1,[x1pref, x2pref]):
```

```
#Cálculo de la superficie de modos deslizantes.
```

```
> z2:=evalm(x2 + k1&*z1 Xpref):
```

```
#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0.64663.22160 0 0]
```

```
> B1:=matrix([[.4586597585, -.8214823801e-1], [-.8214823801e-1, 9.818634726]]):
```

```
> evalm(transpose(B1)&*z2):
```

```
#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0.7072 2.13355 0 0]
```

```
> B2:=matrix([ [.4485696899, -.2514750959], [-.2514750959, 9.944902392]]):
```

```
> evalm(transpose(B2)&*z2):
```

```
#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0.7098 1.04450 0 0]
```

```
> B3:=matrix([[.4481075572, -.6331487224], [-.6331487224, 10.69852220]]):
```

```
> evalm(transpose(B3)&*z2):
```

```
#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0.8595 -0.0424 0 0]
```

```
> B4:=matrix([[.4587264841, -.8361605105], [-.8361605105, 11.32806378]]):
```

```
> evalm(transpose(B4)&*z2):
```

```
#B1 es la matriz linealizada para el punto de operación [0.6155 -1.1305 0 0]
```

```
> B5:=matrix([[.4471404238, -.6040842317], [-.6040842317, 10.62003601]]):
```

```
> evalm(transpose(B5)&*z2):
```




CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Unidad Guadalajara

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS PARA UN MANIPULADOR ROBÓTICO POR MEDIO DE CONTROL DIFUSO TIPO TAKAGI-SUGENO del(a) C. Javier GARRIDO MELÉNDEZ el día 24 de Septiembre de 2003 .

DR. BERNARDINO CASTILLO
TOLEDO
INVESTIGADOR CINVESTAV 3B
CINVESTAV GDL
ZAPOPAN

DR. ALEXANDER GEORGIEVICH
LOUKIANOV
INVESTIGADOR CINVESTAV 3B
CINVESTAV GDL
GUADALAJARA

DR. EDGAR NELSON SANCHEZ
CAMPEROS
INVESTIGADOR CINVESTAV 3B
CINVESTAV GDL
GUADALAJARA



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000007277