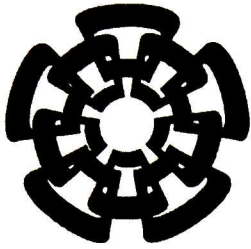




xx (113554.1)



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Unidad Guadalajara

---

## **Estudio de la Modificación de la Estructura al Infinito de Sistemas Lineales Multivariantes por Retroalimentación Estática no Regular**

Tesis que presenta:  
**Saúl Godínez Velasco**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

para obtener el grado de:  
**Maestro en Ciencias**

en la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis  
**Dr. José Javier Ruíz León**

**CINVESTAV I.P.N.**  
SECCION DE INFORMACION Y DOCUMENTACION  
Guadalajara, Jal., Septiembre del 2003.

CLASIF.: TK165.G8 G63 2004  
ADQUIS.: SSI - 297  
FECHA: 28-VI-2004  
PROCED.: Dev. - 2004  
\$ \_\_\_\_\_

ID: 113633-2000

# **Estudio de la Modificación de la Estructura al Infinito de Sistemas Lineales Multivariables por Retroalimentación Estática no Regular**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Saúl Godínez Velasco**

Ingeniero en Electrónica, con Especialidad en  
Instrumentación y Control.

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán 1996-2001

Becario del CONACyT, expediente no. **165234**

Director de Tesis

**Dr. José Javier Ruíz León**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre del 2003.

**A mis padres y hermanos**

**A Karina**

# Agradecimientos.

De una manera especial, deseo agradecer el apoyo financiero prestado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT.

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Javier Ruíz León por su conducción en el desarrollo de este trabajo realizado, por compartir sus ideas y conocimientos, por su paciencia y dedicación y por motivarme en el transcurso de mis estudios.

Mi reconocimiento a los Doctores Ofelia Begovich Mendoza y Antonio Ramírez Treviño, por sus valiosas observaciones y por haber aceptado participar como jurado.

Agradezco también a todos mis compañeros de la Sección de Control Automático por todos los momentos agradables en estos dos años de convivencia.

Gracias también por el apoyo incondicional y comprensión, a mis padres, hermanos y novia.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes.	1
1.2. Objetivos.	2
1.3. Metodología.	2
1.4. Contribuciones de la tesis.	3
1.5. Organización de la tesis.	3
<b>2. Estructura de Sistemas Lineales.</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción.	5
2.2. Polos y Ceros Finitos.	7
2.3. Ceros al infinito.	13
2.4. Forma canónica de Morse.	18
2.5. Forma semicanónica de Morse.	23
<b>3. Sistemas multivariantes: enfoque geométrico.</b>	<b>27</b>
3.1. Subespacios A-invariantes.	27
3.2. Subespacios (A,B)-invariantes.	31
3.3. Subespacios de controlabilidad.	34
3.4. Invariantes estructurales: enfoque geométrico.	39
<b>4. Modificación de la estructura al infinito: enfoque geométrico.</b>	<b>43</b>
4.1. Descomposición de los subespacios $\mathcal{R}^*$ y $S^*$ .	43
4.2. Condiciones necesarias y suficientes para la modificación de la estructura al infinito de un sistema multivariable.	44
4.3. Obtención de la retroalimentación $(F, G)$ .	45
<b>5. Resultados.</b>	<b>57</b>
5.1. Relación entre la forma semicanónica de Morse y la descomposición de los subespacios $\mathcal{R}^*$ y $S^*$ .	57
5.2. Modificación de estructura al infinito a partir de la forma semicanónica de Morse.	61
5.3. Triangularización de la función de transferencia en lazo cerrado.	62
5.4. Ejemplos.	65
<b>6. Algunos aspectos relacionados con la modificación de la estructura al infinito.</b>	<b>75</b>
6.1. Introducción.	75
6.2. Controlabilidad.	76
6.3. Ceros finitos.	79
6.4. Desacoplamiento.	83
6.5. Conclusiones.	86
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro.</b>	<b>87</b>



<b>Apéndice A.</b>	<b>89</b>
<b>Apéndice B.</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>99</b>

# 1. Introducción.

## 1.1 Antecedentes.

El control automático ha desempeñado una función de vital importancia en el avance de la ingeniería y la ciencia. Además de su extrema importancia en los sistemas de vehículos espaciales, de guiado de misiles, robóticos y similares, el control automático se ha vuelto una parte importante e integral de los procesos industriales y de manufactura. Por ejemplo, el control automático es esencial en el control numérico de las máquinas-herramienta de las industrias de manufactura, en el diseño de sistemas de pilotos automáticos en la industria aeroespacial, y en el diseño de automóviles y camiones en la industria automotriz. También es esencial en las operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo en las industrias de proceso.

En tanto que la teoría de control convencional se basa en la relación entrada-salida, o función de transferencia, la teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática de los sistemas de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estado, de entradas o de salidas no aumenta la complejidad de las ecuaciones. De hecho, el análisis de los sistemas complicados con entradas y salidas múltiples se realiza mediante procedimientos sólo ligeramente más complicados que los requerimientos para el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Para sistemas lineales multivariables, representados en espacio de estado por ecuaciones diferenciales matriciales de primer orden, existen algunas propiedades que se conocen como invariantes estructurales del sistema. Básicamente, el concepto de invariantes estructurales comprende información o características del sistema que no son modificadas bajo el efecto de grupos de transformación. Por ejemplo, cambios de base en estado, entradas y salidas, así como algunas acciones de control como retroalimentación de estado (regular), pueden de hecho considerarse como grupos de transformación. Así, tenemos por ejemplo, que los polos y ceros finitos del sistema (así como la función de transferencia) son invariantes bajo cambios de base en el estado; la controlabilidad del sistema es invariante bajo retroalimentación de estado, la observabilidad es invariante bajo inyección de salida, etc..

Las propiedades del sistema bajo un grupo de transformación particular están determinadas por los invariantes estructurales correspondientes, y esta información es fundamental en el análisis de las características del sistema, así como en la existencia de la solución a algunos problemas de control.

La retroalimentación de estado  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , donde  $v(t)$  es un vector de entradas, se dice regular si  $G$  es una matriz cuadrada y no singular. En este caso, esta acción de control puede pertenecer a un grupo de transformación, y definirse los invariantes estructurales correspondientes. Sin embargo, las propiedades estructurales del sistema dejan de ser invariantes bajo retroalimentación de estado no regular, es decir una retroalimentación del tipo  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , donde  $G$  es una matriz no cuadrada o no singular. Se puede utilizar retroalimentación no regular en una situación dada, debido a las características propias del sistema, o debido a que se desea lograr una modificación particular en la estructura del sistema.

El problema de modificación de estructura bajo retroalimentación no regular es un problema sumamente complicado, y se ha requerido de un gran esfuerzo para obtener resultados significativos en esta área. Dentro de estos resultados, se pueden mencionar por ejemplo: la modificación de los índices de controlabilidad de un sistema [13], la modificación de la estructura al infinito [16] y la modificación simultánea de los factores invariantes y los índices de controlabilidad del sistema [20].

En este trabajo nos vamos a enfocar al problema de la modificación de la estructura al infinito de un sistema mediante retroalimentación de estado no regular.

La estructura al infinito de un sistema multivariable, que comprende básicamente al conjunto de los órdenes de los ceros al infinito del sistema, se puede definir utilizando diversas herramientas. Por ejemplo, se puede definir a partir de la forma de Smith-McMillan al infinito de la función de transferencia del sistema [17], de la matriz del sistema  $P(s)$  [23], utilizando conceptos geométricos [5], y también corresponde a la lista  $I_4$  de Morse [21]. La estructura al infinito de un sistema juega un papel muy importante en la solución de varios problemas de control, tales como desacoplamiento [6], rechazo de perturbaciones [2], teoría del lugar de las raíces [22], seguimiento de modelo [19] y control óptimo [8].

El problema de la modificación de la estructura al infinito de un sistema ha sido resuelto en [16] utilizando un enfoque de control geométrico. Sin embargo, el procedimiento para lograr dicha modificación es bastante complicado, además de que no es óptimo en ningún sentido, ya que no captura todas las soluciones posibles, y no garantiza que la solución encontrada sea la más adecuada en el sentido de proporcionar la mejor solución en cuanto a la modificación de otras propiedades estructurales del sistema.

## 1.2 Objetivos.

Los objetivos principales de esta tesis son: estudiar las condiciones necesarias y suficientes para la modificación de la estructura al infinito de un sistema lineal multivariable por retroalimentación estática de estado no regular, analizar el procedimiento para la obtención de la retroalimentación que resuelve el problema, y tratar de simplificar de alguna forma dicho procedimiento.

Estos objetivos están relacionados con el hecho de que la modificación de la estructura al infinito puede verse como un paso intermedio para atacar algún problema de control, cuyas condiciones de solución dependen precisamente de esta estructura. Teniendo esto en mente, se buscará también en este trabajo de tesis aprovechar la modificación de la estructura al infinito para llevar la función de transferencia del sistema retroalimentado a una forma triangular inferior, y desacoplar el sistema, cuando ello sea posible.

## 1.3 Metodología.

La estructura de un sistema multivariable puede definirse utilizando diferentes tipos de herramientas matemáticas, siendo las más comunes herramientas algebraico-polinomiales (factorizaciones, formas canónicas, pencils de matrices, etc.) y conceptos geométricos (espacios invariantes, espacios cocientes, mapeos inducidos, etc.). Se ha comprobado que un manejo adecuado simultáneo de los anteriores enfoques, puede proporcionar más información y elementos de análisis que ayuden a obtener la solución de problemas complejos, como el que estamos considerando en este trabajo. Por lo tanto, como herramientas de análisis, utilizaremos en este trabajo una combinación de enfoques geométricos y algebraico-polinomiales.

Para tratar de darle un "sentido más claro" a la información estructural del sistema, más allá de las definiciones matemáticas, se hace énfasis en este trabajo en la interpretación dinámica de la estructura del sistema, como son ceros y polos finitos y ceros al infinito.

## 1.4 Contribuciones de la tesis.

Como contribuciones de este trabajo de tesis, tenemos lo siguiente:

- Se demuestra que la forma semicanónica de Morse cumple con cierta descomposición del mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene la imagen de  $B$  y el máximo subespacio controlable contenido en el Kernel de  $C$ . La descomposición de estos subespacios es el punto de partida para la modificación de la estructura al infinito de un sistema.
- Una vez demostrado que la forma semicanónica de Morse cumple con esta descomposición, se presenta un procedimiento, con ciertas ventajas y relativamente sencillo, para la modificación de la estructura al infinito a partir de la forma semicanónica de Morse.
- El procedimiento presentado para la modificación de la estructura al infinito, a partir de la forma semicanónica de Morse, es restringido para cierto tipo de sistemas en los que, después de la modificación de los ceros al infinito, obtendremos un sistema cuadrado en lazo cerrado. Aprovechando esto, veremos como llevar la función de transferencia en lazo cerrado (cuadrada) a una forma particular. El objetivo de llevar la función de transferencia a una forma particular es tener más clara la interdependencia entre las nuevas entradas y las salidas del sistema, y en caso extremo llegar a un sistema desacoplado.
- Otra contribución de este trabajo es, considerando una modificación de la estructura al infinito particular, poner en evidencia algunos problemas que se pueden tener por el desconocimiento que la retroalimentación no regular correspondiente produce en algunas otras propiedades estructurales del sistema, por ejemplo la controlabilidad y los ceros finitos del sistema.

## 1.5 Organización de la tesis.

A continuación se describe la forma en que este trabajo está organizado:

En el Capítulo 2 se presentan conceptos relacionados con estructura de sistemas lineales multivariables. En primer lugar, se introduce el tipo de sistemas a tratar en este trabajo y algunas propiedades de los sistemas lineales, como controlabilidad y observabilidad. Una vez introducidos estos conceptos, se definen conceptos relacionados con la estructura de sistemas lineales, tales como ceros finitos y ceros al infinito, además se presenta la interpretación dinámica de los mismos. Después se presenta la forma canónica de Morse, que define el grupo de invariantes estructurales del sistema bajo un grupo de transformación, llamado grupo de transformación de Morse. Por último, se introduce la forma semicanónica de Morse, una forma canónica que solo está definida para sistemas que cumplen con ciertas condiciones, bajo un grupo de transformación conocido como grupo de transformación feedback.

En el Capítulo 3 se definirán algunos conceptos básicos (como invariantes estructurales, observabilidad, controlabilidad, retroalimentaciones de estado, etc.) utilizando el enfoque geométrico. Primeramente, se presentan algunas definiciones básicas y conceptos relacionados con el enfoque geométrico, como los subespacios  $A$ -invariantes, subespacios  $(A,B)$ -invariantes y subespacios  $(A,C)$  invariantes condicionados. Una vez introducidos estos conceptos básicos, se presenta la definición de algunos subespacios de particular interés en el estudio de los sistemas lineales, como los son el máximo subespacio  $(A,B)$ -invariante contenido en el Kernel de  $C$ , el mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene la imagen de  $B$  y el máximo subespacio controlable contenido en el Kernel de  $C$ . Estos subespacios serán ampliamente utilizados en capítulos posteriores.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados conocidos sobre la modificación de la estructura al infinito de un sistema por retroalimentación no regular, razón principal del estudio de este trabajo. En primer lugar, se introduce cierta descomposición de algunos subespacios del enfoque geométrico, siendo este un punto de partida, para la modificación de la estructura al infinito desde un enfoque geométrico. Enseguida,

veremos las condiciones necesarias y suficientes para que, para un sistema  $(A, B, C)$  considerado, dada una lista de enteros positivos, esta sea la lista de los órdenes de los ceros al infinito del sistema en lazo cerrado  $(A + BF, BG, C)$ , donde las matrices  $F$  y  $G$  representan una retroalimentación de estado no regular. Finalmente presentaremos la construcción de esta retroalimentación no regular  $(F, G)$ , tal que modifique la estructura al infinito de una manera deseada.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados principales obtenidos en este trabajo. Se demuestra primeramente que la forma semicanónica de Morse, introducida en el Capítulo 2, cumple con cierta descomposición del mínimo subespacio  $(A, C)$ -invariante condicionado que contiene la imagen de  $B$  y el máximo subespacio controlable contenido en el Kernel de  $C$  (Capítulo 3), esta descomposición es el punto de partida para la modificación de la estructura al infinito. Una vez demostrada esta relación entre la forma semicanónica de Morse y los subespacios mencionados, presentaremos un procedimiento, relativamente sencillo, para la modificación de la estructura al infinito de un sistema, a partir de la forma semicanónica de Morse, con la ventaja de que podemos identificar de una manera más sencilla la descomposición de la que parte esta modificación de estructura. Para este procedimiento de modificación, a partir de la forma semicanónica de Morse, consideraremos solamente sistemas con  $p$  salidas y  $p + 1$  entradas, esto implica que el sistema en lazo cerrado (una vez modificada la estructura al infinito) resulte cuadrado, es decir, tendrá el mismo número de entradas y salidas, esto con la finalidad de llevar la función de transferencia en lazo cerrado (cuadrada) a una forma particular. Entonces, además de presentar la modificación de la estructura al infinito, a partir de la forma semicanónica de Morse, veremos como obtener una retroalimentación de estado regular, tal que el sistema en lazo cerrado tenga la forma particular  $\Phi^{-1}(s)$ , donde la matriz  $\Phi(s)$ , llamado interactor del sistema, es una matriz triangular inferior y que además, sus elementos, cumplen con ciertas condiciones de divisibilidad. Cabe mencionar que, el objetivo de llevar la función de transferencia a esta forma particular, es tener más clara la interdependencia en términos de nuevas entradas controlando las salidas del sistema, y en el caso extremo llegar a un sistema desacoplado.

En el Capítulo 6 se consideran otros aspectos relacionados con las modificaciones estructurales. Por medio de retroalimentación no regular, podemos modificar, en general, la estructura de un sistema, es decir, podemos modificar los ceros al infinito, ceros finitos, índices de controlabilidad, etc. Entonces, la retroalimentación tal que modifique la estructura al infinito, puede modificar, a su vez, otros invariantes estructurales del sistema. Este es el tema a tratar en este capítulo, cómo la retroalimentación de estado, tal que modifique la estructura al infinito, puede modificar otros invariantes estructurales, en particular, consideraremos controlabilidad, ceros finitos y desacoplamiento del sistema retroalimentado.

En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y trabajo futuro de este trabajo de tesis.

En el Apéndice A, se introducen la forma de Smith-McMillan y la forma de Smith-McMillan al infinito para una matriz racional estrictamente propia, como lo es la función de transferencia de un sistema multivariable. Esto con la finalidad de definir los ceros de transmisión y los ceros al infinito, presentados en el Capítulo 2. En el Apéndice B, se define el interactor de un sistema y se introducen algunos resultados acerca de realizabilidad de compensadores. Estos conceptos y definiciones son utilizados en el Capítulo 5.

## 2. Estructura de Sistemas Lineales.

En este capítulo se presentan conceptos relacionados con estructura de sistemas lineales. Se establecen definiciones, propiedades y algunos resultados que son esenciales en el estudio de este trabajo. Primeramente se especifica el tipo de sistemas que estudiaremos, a saber, sistemas lineales multivariantes e invariantes en el tiempo. Se presentan las descripciones correspondientes en espacio de estado y en función de transferencia, así como algunas propiedades relevantes como controlabilidad y observabilidad. Dentro de la parte de estructura de sistemas lineales, se introducen primeramente los conceptos de polos y ceros finitos, así como su interpretación dinámica en términos de entradas y salidas. La estructura al infinito del sistema, principal objeto de estudio de este trabajo, se presenta posteriormente. Los órdenes de los ceros al infinito del sistema se definen a partir de la forma de Smith-McMillan al infinito de la matriz de transferencia del sistema, y se presentan varios métodos para obtener esta estructura al infinito, así como una interpretación dinámica de los órdenes de los ceros al infinito del sistema.

Un aspecto fundamental en el estudio de modificaciones estructurales son los llamados "invariantes estructurales". Básicamente, este concepto comprende información estructural del sistema que no es modificada bajo efecto de grupos de transformación. Por ejemplo, cambios de base y acciones de control como retroalimentación de estado, pueden de hecho considerarse como grupos de transformación. En la sección 2.4 se presenta la forma canónica de Morse, que define el conjunto de invariantes estructurales bajo el llamado "grupo de transformación de Morse". Posteriormente se presenta la forma semicanónica de Morse, la cual se define bajo la acción de un grupo de transformación que comprende cambios de base en el estado, y en la entrada, retroalimentación de estado, y permutación en las salidas. Los invariantes estructurales correspondientes a estas formas canónicas es la información que utilizaremos en el estudio de la modificación de la estructura al infinito de un sistema multivariable.

### 2.1 Introducción.

En esta sección se especifica el tipo de sistemas que estudiaremos en este trabajo, a saber, sistemas lineales multivariable, e invariantes en el tiempo. Se presentan tanto la descripción en espacio de estado de este tipo de sistemas, así como la descripción en función de transferencia, conocidas respectivamente como descripciones interna y externa. También se introducen las propiedades de controlabilidad y de observabilidad.

El tipo de sistemas que estudiaremos en este trabajo son aquellos descritos en espacio de estado por medio de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$  son respectivamente, los vectores de estados, entradas y salidas del sistema, y donde las matrices  $A, B$  y  $C$  son matrices reales de dimensiones  $n \times n$ ,  $n \times m$  y  $p \times n$  respectivamente. Es decir, trataremos con sistemas lineales, multivariantes, invariantes en el tiempo, de orden  $n$ , con  $m$  entradas y  $p$  salidas. Por simplicidad referiremos al sistema descrito por (2.1) como  $(A, B, C)$ .

Sin pérdida de generalidad, y por simplicidad, supondremos que la matriz  $B$  es de rango pleno, esto es, las entradas del sistema son linealmente independientes y como consecuencia ninguna de ellas puede ser representada como combinación lineal de las otras. De una manera similar, consideraremos que la matriz  $C$  es de rango pleno, esto es, las salidas del sistema son linealmente independientes.

Tomando la transformada de Laplace de (2.1) y suponiendo condiciones iniciales iguales a cero, podemos llegar a

$$y(s) = H(s)u(s) \quad (2.2)$$

donde

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.3)$$

es una matriz racional estrictamente propia de dimensiones  $pxm$ , conocida como la función de transferencia de  $(A, B, C)$ .

La ecuación (2.1) es llamada descripción interna del sistema, mientras que (2.2) y (2.3) describen el comportamiento entrada-salida del sistema  $(A, B, C)$ .

La función de transferencia del sistema  $H(s)$  se puede representar en términos de matrices polinomiales de la manera siguiente

$$H(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s)$$

donde  $N_R(s)$  y  $D_R(s)$  son matrices polinomiales, de dimensiones  $pxm$  y  $m \times m$  respectivamente, con  $D_R(s)$  no singular. Se dice entonces que  $N_R(s)$  y  $D_R(s)$  forman una *factorización polinomial derecha* (Right Matrix Fraction Description) de  $H(s)$ .

De una manera análoga, la función de transferencia del sistema  $H(s)$  se puede representar como

$$H(s) = D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

donde  $N_L(s)$  y  $D_L(s)$  son matrices polinomiales, de dimensiones  $pxm$  y  $pxp$  respectivamente, con  $D_L(s)$  no singular, y se dice que  $N_L(s)$  y  $D_L(s)$  forman una *factorización polinomial izquierda* (Left Matrix Fraction Description) de  $H(s)$ .

Si  $N_R(s)$  y  $D_R(s)$  son matrices coprimas derechas<sup>1</sup> se dice que  $N_R(s)$  y  $D_R(s)$  forman una *factorización copríma derecha* de  $H(s)$ . De una manera similar, si  $N_L(s)$  y  $D_L(s)$  son matrices coprimas izquierdas se dice que  $N_L(s)$  y  $D_L(s)$  forman una *factorización copríma izquierda* de  $H(s)$ .

Dos propiedades que son básicas en el estudio de los sistemas lineales son la controlabilidad y la observabilidad. A continuación se presentan las definiciones correspondientes.

Se dice que  $(A, B, C)$  es *controlable* al tiempo  $t_0$  si se puede llevar a cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a cualquier otro estado  $x$ , mediante un vector de control  $u(t)$ , en un intervalo de tiempo finito.

Se dice que  $(A, B, C)$  es *observable* al tiempo  $t_0$  si es posible determinar el estado  $x(t_0)$  a partir del conocimiento de  $u(t)$  y  $y(t)$  en un intervalo finito de tiempo.

La *matriz de controlabilidad* de un sistema se define como

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B],$$

---

<sup>1</sup> Los conceptos de matrices polinomiales coprimas pueden verse, por ejemplo, en [14] y [3].

mientras que la *matriz de observabilidad* se define como

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Dos resultados ampliamente conocidos en el estudio de los sistemas lineales son los siguientes.

**Teorema 2.1** Un sistema  $(A, B, C)$  es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad del sistema es de rango pleno, esto es, si y sólo si  $\text{rank } C = n$ .

**Teorema 2.2** Un sistema  $(A, B, C)$  es observable si y sólo si la matriz de observabilidad del sistema es de rango pleno, esto es, si y sólo si  $\text{rank } \mathcal{O} = n$ .

Se dice que una representación (o realización) en espacio de estado  $(A, B, C)$  de un sistema es mínima si no existe otra representación de orden menor para la misma función de transferencia  $H(s)$  del sistema. Una realización mínima puede ser relacionada con la controlabilidad y observabilidad de un sistema de la siguiente manera

**Teorema 2.3** Una realización  $(A, B, C)$  es mínima si y sólo si el sistema  $(A, B, C)$  es controlable y observable.

**Demostración.** Véase [14]. ■

## 2.2 Polos y Ceros Finitos.

Los polos y ceros finitos de un sistema multivariable pueden ser definidos de varias maneras. A continuación introduciremos estos conceptos a partir de la forma de Smith-McMillan (ver Apéndice A) de la función de transferencia del sistema.

Sea  $M(s)$  la forma de Smith-McMillan de la función de transferencia del sistema  $(A, B, C)$ , es decir, existen matrices unimodulares  $U_1(s)$  y  $U_2(s)$  tales que

$$H(s) = U_1(s)M(s)U_2(s)$$

donde la matriz  $M(s)$  está dada por

$$M(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\epsilon_i(s)/\psi_i(s)\}_{i=1}^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$r = \text{rango normal de } H(s)$$

y  $\{\epsilon_i(s), \psi_i(s)\}$  son polinomios mónicos coprimos,  $i = 1, \dots, r$ , que satisfacen las siguientes condiciones de divisibilidad



$$\begin{aligned} \psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) & \quad i = 1, \dots, r-1 \\ \epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s) & \quad i = 1, \dots, r-1 \end{aligned}$$

Se definen los ceros finitos (ceros de transmisión) como las raíces de los polinomios numeradores  $\epsilon_i(s)$  de la forma de Smith-McMillan  $M(s)$  de la función de transferencia  $H(s)$  del sistema.

Se definen los polos de un sistema  $(A, B, C)$  como las raíces de los polinomios denominadores  $\psi_i(s)$  de la forma de Smith-McMillan  $M(s)$  de la función de transferencia  $H(s)$  del sistema.

En el caso de los ceros finitos, además de estos ceros de transmisión definidos anteriormente, existe una clasificación más amplia de ceros finitos, como se muestra a continuación. Estos conceptos de ceros finitos y sus propiedades pueden verse en [18].

**Definición 2.1** *Ceros invariantes, de desacoplamiento y de transmisión.*

Los ceros de la llamada *matriz sistema*

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, las raíces de los polinomios invariantes de esta matriz (determinados por su forma de Smith correspondiente), son conocidos como *ceros invariantes* del sistema. Los ceros de transmisión (determinados por la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$ ) son un subconjunto de los ceros invariantes del sistema y ambos conjuntos son iguales si el sistema es controlable y observable. Los ceros invariantes que no son ceros de transmisión pertenecen a un conjunto conocido como ceros de desacoplamiento.

Los ceros de *desacoplamiento de salida* son las frecuencias a las cuales la matriz

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

pierde rango.

Observe que un sistema tiene ceros de desacoplamiento de salida si y sólo si es no observable. El número de ceros de desacoplamiento de salida es igual al orden del sistema menos el rango de la matriz de observabilidad del sistema.

Los ceros de *desacoplamiento de entrada* son las frecuencias a las cuales la matriz

$$\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$$

pierde rango.

Nótese que un sistema tiene ceros de desacoplamiento de entrada si y sólo si es no controlable. El número de ceros de desacoplamiento de entrada es igual al orden del sistema menos el rango de la matriz de controlabilidad.

Si ambas matrices  $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$  pierden rango para  $s = \lambda$ , entonces  $\lambda$  es un cero de desacoplamiento de entrada-salida.

**Definición 2.2 Ceros de un sistema.**

Los ceros de un sistema se definen en [18] de la siguiente manera

Ceros del sistema = ceros de desacoplamiento de entrada + ceros de desacoplamiento de salida + ceros de transmisión - ceros de desacoplamiento de entrada-salida.

**Ejemplo 2.1 Clasificación de ceros para un sistema multivariable.**

Sea el sistema  $(A, B, C)$  dado por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{2(s-2)}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \\ 0 & \frac{2}{s-3} \end{bmatrix}.$$

Para este sistema tenemos:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s-4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la forma de Smith de  $P(s)$ , tenemos:

$$\text{Smith } P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (s+1)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde podemos ver que el sistema tiene dos ceros invariantes, en  $s = -1$  y  $s = 2$ .

Para obtener los ceros de transmisión, obtenemos la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$  (Apéndice A).

En este caso el mínimo común múltiplo mónico de los denominadores de todas las entradas de  $H(s)$  es  $d(s) = (s-1)(s-3)$ , por lo que

$$N(s) = d(s)H(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-3 \\ 2s-4 & s-1 \\ 0 & 2s-2 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo la forma de Smith de  $N(s)$ , tenemos

$$\text{Smith } N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente obtenemos la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$  de la siguiente manera

$$M(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s-3)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{(s-1)(s-3)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De  $M(s)$  podemos ver que

Ceros de transmisión =  $\{2\}$  y polos =  $\{1, 1, 3, 3\}$ .

Como las matrices de controlabilidad y observabilidad son de rango 5 y el sistema es de orden 6, entonces existen un cero de desacoplamiento de entrada y un cero de desacoplamiento de salida.

Se puede ver que las matrices  $\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$  pierden rango en  $s = -4$  y en  $s = -1$

respectivamente, por lo tanto tenemos

Ceros de desacoplamiento de entrada =  $\{-4\}$  y Ceros de desacoplamiento de salida =  $\{-1\}$ .

Finalmente por la Definición 2.2 tenemos:

Ceros del sistema =  $\{-1, -2, -4\}$ .

Una vez vista la definición de los polos y ceros finitos de un sistema multivariable, veremos a continuación la interpretación dinámica de los mismos.

#### **Teorema 2.4 Interpretación dinámica de polos finitos.**

*Sistemas escalares:* El número  $\lambda$  es un polo de  $h(s)$  (función de transferencia de un sistema escalar, es decir, una entrada, una salida) si y sólo si existe un estado inicial  $x_0$  tal que la respuesta a entrada cero del sistema está dada por  $y(t) = re^{\lambda t}$ ,  $t \geq 0$  donde  $0 \neq r \in \mathbb{R}$ .

*Sistemas multivariables:* Sea  $(A, B, C)$  una realización mínima de  $H(s)$ , entonces el escalar  $\lambda$  es un polo de  $H(s)$  si y sólo si existe un estado inicial  $x_0$  tal que la respuesta del sistema a entrada cero es  $y(t) = re^{\lambda t}$  donde  $r$  es un vector diferente de cero.

**Demostración.** Véase [3]. ■

En otras palabras, si  $\lambda$  es un polo de un sistema, existe una salida de la forma  $re^{\lambda t}$  debida a ciertas condiciones iniciales y entrada cero.

**Teorema 2.5 Interpretación dinámica de ceros finitos.**

Sea un sistema con función de transferencia  $H(s)$  y sea  $(A, B, C)$  una realización mínima (controlable y observable) de dicho sistema. Si  $u(t)$  es de la forma  $ke^{\lambda t}$ , donde  $\lambda$  no es un polo, entonces la salida debida a la condición inicial  $x_0 = -(A - \lambda I)^{-1}Bk$  y a la entrada  $u(t) = ke^{\lambda t}$  está dada por  $y(t) = H(\lambda)ke^{\lambda t}$ .

**Demostración.** Véase [3]. ■

Del resultado anterior se puede ver que, si  $\lambda$  es un cero (y no es polo) del sistema, existe una entrada de la forma  $u(t) = ke^{\lambda t}$  y una condición inicial  $x_0 = -(A - \lambda I)^{-1}Bk$ , donde  $k$  es un vector constante diferente de cero, tales que la salida del sistema es idénticamente cero.

**Ejemplo 2.2 Interpretación dinámica de polos y ceros.**

Sea un sistema controlable y observable  $(A, B, C)$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{2(s-2)}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \\ 0 & \frac{2}{s-3} \end{bmatrix}$$

Como vimos en el Ejemplo anterior, de la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$ , los polos de este sistema son  $\{1, 1, 3, 3\}$ .

Sus ceros de transmisión, y ceros invariantes en este caso, por ser una realización mínima, son  $s = 2$ . Para el caso de la interpretación dinámica de los polos, se considerarán los polos  $\{1, 3\}$ .

Para el polo  $\{\lambda = 1\}$ , si tomamos como condición inicial un vector propio asociado a dicho polo y entrada cero, es decir,

$$v = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad u = 0$$

tenemos como salida  $y(t) = Cve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^t$ , como se presenta en la siguiente figura:

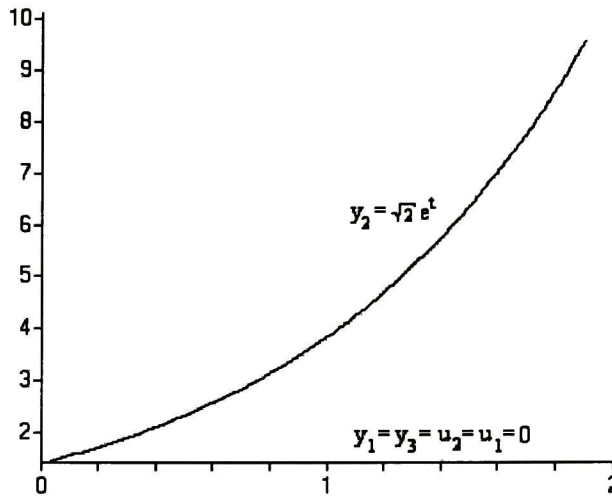


Figura 2.1 Respuesta del sistema para el polo  $\lambda = 1$ .

Para el polo  $\{\lambda = 3\}$ , si tomamos como condición inicial un vector propio asociado a dicho polo y

entrada cero, es decir,  $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,9487 \\ 0,3162 \end{bmatrix}$  y  $u = 0$ , tenemos como salida  $y(t) = Cve^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,635 \\ 1,2649 \end{bmatrix} e^{3t}$

Para el caso del cero  $\{2\}$ , por la forma de la matriz  $H(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , podemos ver que para el vector  $0 \neq k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , se cumple que  $y(t) = H(\lambda)ke^{\lambda t} \equiv 0$  con una entrada  $u(t) = ke^{2t}$ . Por lo tanto

para una entrada  $u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$  y condiciones iniciales  $x_0 = -(A - \lambda I)^{-1}Bk = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , tenemos

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ como se muestra en la siguiente figura}$$

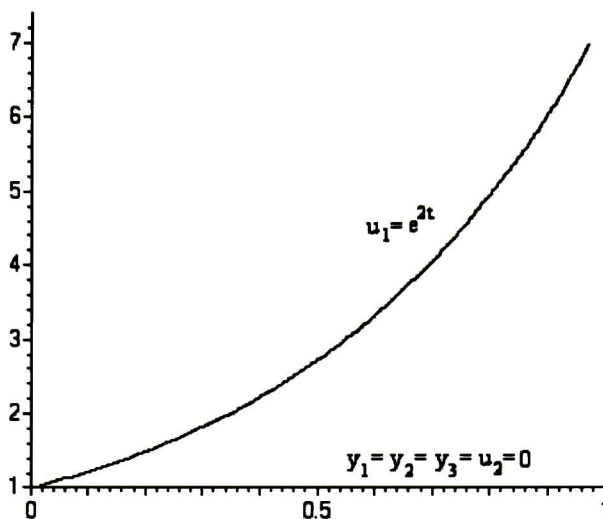


Figura 2.2 Respuesta del sistema para el cero  $\lambda = 2$ .

## 2.3 Ceros al infinito.

Los ceros al infinito del sistema  $(A, B, C)$ , han sido trabajo de investigación de varios autores a partir del trabajo de McMillan [17]. Hoy en día, existe una gran cantidad de resultados de varios autores relacionados con el tema. Los ceros al infinito juegan un papel importante en la solución de varios problemas, tales como desacoplamiento de sistemas [6], rechazo de perturbaciones [2], teoría del lugar de las raíces [22], seguimiento de modelo [19] y control óptimo [8]. La estructura al infinito ha sido caracterizada utilizando varios enfoques, tales como: polinomial, geométrico, "pencil" de matrices, formas canónicas de sistemas (como veremos en este capítulo) y combinaciones de ellos.

La estructura al infinito de un sistema multivariable se puede definir a partir de la forma de Smith-McMillan al infinito de la función de transferencia  $H(s)$  (ver Apéndice A), la cual se presenta a continuación

Sea  $H(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  la función de transferencia del sistema. Existen matrices bipropias  $B_1(s)$  y  $B_2(s)$  tales que:

$$B_1(s)H(s)B_2(s) = M_\infty(s) = \begin{bmatrix} \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n_i}} \right\}_{i=1}^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $r = \text{rank } H(s)$  y los enteros positivos  $n_i$  para  $i = 1, \dots, r$ , son los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$  que satisfacen  $n_{i+1} \geq n_i$ . La matriz  $M_\infty(s)$  es conocida como la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ .

Las matrices bipropias  $B_1(s)$  y  $B_2(s)$  pueden interpretarse como un conjunto de operaciones elementales por filas y por columnas sobre  $H(s)$  en el anillo de las funciones racionales propias. Entonces, una manera de obtener la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ , y consecuentemente la estructura al infinito del sistema, es por medio de dichas operaciones elementales (ver Apéndice A).

Además de éste, existen otros métodos alternativos para obtener la estructura al infinito de sistemas multivariables, como se muestra a continuación.

Un método consiste en hacer un cambio de variable en  $H(s)$ . Para este método, podemos proceder de la siguiente manera:

Hacer un cambio de variable  $s \rightarrow \lambda^{-1}$  y obtener la forma de Smith-McMillan de  $H(\lambda^{-1})$ , entonces la estructura de  $H(\lambda^{-1})$  en  $\lambda = 0$  proporcionará la información de la estructura de  $H(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . La justificación de este procedimiento es el siguiente: Como las matrices unimodulares pueden introducir o eliminar ceros al infinito (pero no puntos finitos), la forma de Smith-McMillan de dicha transformación solo reflejará el comportamiento de toda  $s$  finita de  $H(s)$  pero no de  $s = \infty$ . Para determinar correctamente la estructura en  $s = \infty$ , podemos hacer una transformación de la forma  $s = \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$ , donde  $c \neq 0$  y  $ad-bc \neq 0$ , esta transformación, en particular, moverá el punto  $s = \infty$  a el punto  $\lambda = -d/c$ . Una de las posibles elecciones de  $\{a,b,c,d\}$  es  $a = 0 = d$ ,  $b = c = 1$ , la cual nos llevará a a la transformación requerida ( $s \rightarrow \lambda^{-1}$ )

Otro método para obtener la estructura al infinito de un sistema es por medio de los divisores determinantes. Primeramente presentaremos dos resultados preliminares.

Definamos los *divisores determinantes* de  $H(s)$  como:

$\Delta_i(s)$  = máximo común divisor mónico de todos los menores  $i$  de  $H(s)$ , para  $i = 1, \dots, r$  y  $r = \text{rank } H(s)$ .

Una función racional propia  $h(s)$  se dice mónica si es de la forma  $h(s) = 1/s^q$ , para  $q$  entero positivo.

Definamos los *factores invariantes* de  $H(s)$  como  $\Psi_i(s) = \frac{1}{s^{n_i}}$  donde  $i = 1, \dots, r$  y  $n_i = \text{órdenes de los ceros al infinito de } H(s)$ .

**Lema 2.1** Sean  $\Psi_i(s)$  los factores invariantes de  $H(s)$ . Entonces

$$\Psi_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, \text{ para } i = 1, \dots, r \text{ y } \Delta_0(s) = 1.$$

**Demostración.** Véase [24]. ■

Sea  $\mathbb{R}_p(s)$  el conjunto de funciones racionales propias de la forma  $h(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , donde  $a(s)$  y  $b(s)$  son polinomios coprimos y  $\deg a(s) \geq \deg b(s)$ .

El grado de la función racional propia  $h(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , denotado como  $\deg_p h(s)$ , se define de la siguiente manera:

$$\deg_p h(s) = \deg a(s) - \deg b(s)$$

es decir, se define como el *grado relativo* de  $h(s)$ .

Sean  $h(s)$  y  $f(s)$  funciones racionales propias. Se dice que  $h(s)$  divide a  $f(s)$  si existe una función racional propia  $x(s)$  tal que  $f(s) = h(s)x(s)$ .

**Lema 2.2** *Divisibilidad de funciones racionales propias.*

Sean  $h(s)$  y  $f(s)$  funciones racionales propias. Entonces  $h(s)$  divide  $f(s)$  si y sólo si  $\deg_p h(s) \leq \deg_p f(s)$ .

**Demostración.** Véase [24]. ■

Del resultado anterior, podemos ver que el máximo común divisor mónico  $\Delta(s)$  de un conjunto de funciones racionales propias  $f_1(s), f_2(s), \dots, f_r(s)$ , está dado por  $\Delta(s) = 1/s^k$ , donde  $k = \min\{\deg_p f_i(s), i = 1, \dots, r\}$ .

Basándonos en esta caracterización del máximo común divisor mónico de un conjunto de funciones racionales propias y en el Lema 2.2, los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$  los podemos obtener de la siguiente manera [24]:

Definamos los enteros  $z_i = \min\{\deg_p h_j(s), j = 1, \dots\}$ , donde  $h_j(s)$  representa el conjunto de todos los menores  $ixi$  de  $H(s)$  diferentes de cero. Entonces los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$  están dados por:

$$n_i = z_i - z_{i-1} \text{ para } i = 1, \dots, r \text{ donde } z_0 = 0.$$

**Ejemplo 2.3** Sea el sistema  $(A, B, C)$  dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

cuya función de transferencia es

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s+4}{(s+3)(s+2)} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

Veamos como, mediante operaciones elementales sobre  $H(s)$  en el anillo de las funciones racionales propias, podemos obtener la forma de Smith-McMillan al infinito de la función de transferencia  $H(s)$ . Primero debemos llevar uno de los elementos de menor grado relativo a la posición  $(1, 1)$ , por medio de intercambio de filas y columnas ( $f_i \leftrightarrow f_j$  y  $c_i \leftrightarrow c_j$ ) y después proceder con las demás operaciones elementales. En este caso dicho elemento de menor grado relativo ya se encuentra en la posición  $(1, 1)$ .

Por medio de las operaciones  $c_2 \rightarrow c_2 - \left(\frac{(s+4)s}{(s+3)(s+2)}\right) c_1$  y  $c_3 \rightarrow c_3 - \left(\frac{s}{s+4}\right) c_1$  resulta la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{-1}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix}.$$

Ahora aplicando  $f_2 \rightarrow f_1 - f_2$  a la matriz anterior, llegamos a

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+3)(s+2)} & \frac{-1}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix}.$$



Si utilizamos  $f_2 \rightarrow \left(\frac{(s+3)(s+2)}{s^2}\right) f_2$ , resulta la matriz 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & \frac{-(s+2)}{s^2(s+4)} \end{bmatrix}$$

Finalmente por medio de  $c_3 \rightarrow c_3 + \left(\frac{s+4}{s+2}\right) c_2$  obtenemos  $M_\infty(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \end{bmatrix}$

$M_\infty(s)$  es la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ , de donde se puede observar que los órdenes de los ceros al infinito del sistema son (1, 2).

Como vimos anteriormente, existen métodos alternativos para obtener la estructura al infinito de  $H(s)$ . Veamos el método de cambio de variable para la misma función de transferencia. Si aplicamos la transformación  $s \rightarrow \lambda^{-1}$  a la función de transferencia tenemos

$$H(\lambda^{-1}) = \begin{bmatrix} \lambda & \frac{\lambda(4\lambda+1)}{6(\lambda+1/2)(\lambda+1/3)} & \frac{\lambda}{4(\lambda+1/4)} \\ \lambda & \frac{\lambda}{2(\lambda+1/2)} & \frac{\lambda}{3(\lambda+1/3)} \end{bmatrix}$$

ahora, por medio de operaciones que se omitirán, podemos ver que la forma de Smith-McMillan de  $H(\lambda^{-1})$  es

$$M(\lambda^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{24\lambda}{(2\lambda+1)(3\lambda+1)(4\lambda+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\lambda^2(100\lambda^2+75\lambda+12)}{25(2\lambda+1)(3\lambda+1)(4\lambda+1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Si se utiliza la transformación  $s \rightarrow \lambda^{-1}$  en  $H(s)$ , la información de la forma de Smith-McMillan de  $H(\lambda^{-1})$  en  $\lambda = 0$ , nos proporcionará la información de  $H(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Como  $M(\lambda^{-1})$  tiene ceros en  $\lambda = 0$  de órdenes 1 y 2, entonces, los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$  son (1, 2).

Otra manera de obtener los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$  es por medio de los divisores determinantaes. Para la misma función de transferencia  $H(s)$  tenemos que

$$z_1 = n_1 = 1$$

$$z_2 = \min \left\{ \deg_p \frac{-1}{s(s+3)(s+2)}, \deg_p \frac{1}{s(s+3)(s+4)}, \deg_p \frac{2s+7}{(s+3)^2(s+2)(s+4)} \right\} = 3.$$

$$\text{Por lo tanto } n_2 = z_2 - z_1 = 3 - 1 = 2$$

de donde podemos ver que los órdenes de los ceros al infinito son 1 y 2 como se esperaba.

## Interpretación dinámica de los ceros al infinito.

A continuación se tratará de dar una interpretación dinámica de los órdenes de los ceros al infinito de un sistema.

El concepto de ceros al infinito aparece en control clásico, en relación al diagrama del lugar de las raíces de un sistema escalar. En este diagrama, los polos del sistema en lazo cerrado al variar una ganancia a partir de cero, inician en los polos del sistema en lazo abierto, y a medida que aumenta el valor de la ganancia, algunos polos en lazo cerrado tienden a los ceros finitos del sistema en lazo abierto y se dice que los demás se van al infinito. El número de polos que se van al infinito (o que tienden a los ceros al infinito), es de hecho igual a la diferencia de polos finitos menos ceros finitos.

A partir de la función de transferencia de un sistema escalar

$$h(s) = K \frac{b(s)}{a(s)}$$

se pueden definir los ceros del sistema como aquellos valores de frecuencia que evaluados en “s” hacen cero  $h(s)$ . Claramente, los ceros finitos de la función de transferencia  $h(s)$  son las raíces del numerador de  $h(s)$ , esto es, las raíces del polinomio  $b(s)$ , además  $h(s)$  tiene también ceros al infinito si  $\lim_{s \rightarrow \infty} h(s) = 0$ . La extensión de estos conceptos a sistemas multivariables se puede hacer a través de la forma de Smith-McMillan para ceros finitos, y de la forma de Smith-McMillan al infinito para ceros al infinito, como se ha presentado anteriormente.

Esta propiedad de tener que la función de transferencia del sistema sea igual a cero para los valores de los ceros del sistema, está relacionada con la existencia de condiciones iniciales en las variables de estado y de entradas particulares asociadas a los valores de los ceros, tal que la salida del sistema sea igual a cero. En la sección anterior se presentó dicha interpretación para el caso de los ceros finitos, donde se vio que entradas de tipo exponencial asociadas a los ceros finitos son “bloqueadas” por el sistema, en el sentido de que la salida del sistema siempre es igual a cero.

En [5] se presenta la generalización de esta interpretación (salida igual a cero para entradas diferentes de cero) para el caso de los ceros al infinito, utilizando un enfoque geométrico y conceptos de subespacios “casi (A,B)-invariantes” y “casi de controlabilidad” (almost (A,B)-invariant and almost controllability subspaces). Básicamente, se tiene que la salida del sistema es igual a cero a partir de  $t = 0^+$  utilizando entradas que son una combinación de funciones impulsionales (deltas de Dirac) y sus derivadas, arriba del orden  $i - 1$ , donde el valor de  $i$  está relacionado con el orden del cero al infinito del sistema. Esto puede considerarse como la extensión natural de la interpretación dinámica de los ceros finitos. Por ejemplo, si tenemos la función de transferencia  $h(s) = Y(s)/U(s) = 1/s$ , por medio de la entrada  $u(t) = \delta'(t)$  (primera derivada de la función delta de Dirac), tenemos que  $U(s) = s$ , y por lo tanto  $Y(s) = 1$ . Ahora bien, si  $Y(s) = 1$ , entonces tenemos que  $y(t) = \delta(t)$ , esto es  $y(t) = 0$  a partir de  $t = 0^+$ .

Otra interpretación interesante de los ceros al infinito, y diferente de lo anterior, es aquella relacionada con el número de veces que se tienen que derivar las salidas del sistema para que aparezca explícitamente un componente del vector de entrada, como se explica a continuación.

Consideremos la función de transferencia de un sistema escalar (una entrada, una salida) de la forma

$$h(s) = K \frac{b(s)}{a(s)} = K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (n > m).$$

El orden del cero al infinito del sistema corresponde al número de veces que se tiene que derivar la salida para que aparezca explícitamente la entrada, es decir,  $n - m$ . De una manera similar, para sistemas multivariables, donde la función de transferencia  $H(s)$  es de rango pleno por filas, los órdenes de los ceros al infinito ( $n_i$ ), corresponden al número de veces que se tienen que derivar las diferentes salidas hasta que aparezca una o varias de las entradas como vectores linealmente independientes. Esto se ejemplifica a continuación.

**Ejemplo 2.4** Consideremos la realización  $(A, B, C)$  de la función de transferencia  $H(s)$  del Ejemplo 2.3.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} x(t)$$

Para la interpretación dinámica de los ceros al infinito tenemos, que las salidas del sistema están dadas por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo la primera derivada de las salidas del sistema tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 4\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + 3\dot{x}_5 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 3\dot{x}_3 + \dot{x}_4 + 4\dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 + u_3 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 12x_5 \\ u_1 + u_2 + u_3 - 2x_2 - 6x_3 - 3x_4 - 12x_5 \end{bmatrix}.$$

En esta primera derivada, podemos ver que aparecen componentes de la

entrada  $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  y  $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  para las salidas  $y_1$  y  $y_2$  respectivamente, por lo tanto uno de los órdenes de los ceros al infinito es 1.

Se tiene que continuar derivando hasta que aparezcan componentes de las entradas linealmente independientes.

Obtengamos la segunda derivada de las salidas del sistema

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 - 4u_3 + 5x_2 + 6x_3 - 4(-7x_4 - 12x_5) \\ -2u_2 - 3u_3 - 2(-5x_2 - 6x_3) - 3(-7x_4 - 12x_5) \end{bmatrix}.$$

Si tomamos la segunda derivada de  $y_2$ , es decir,  $\ddot{y}_2 = -2u_2 - 3u_3 - 2(-5x_2 - 6x_3) - 3(-7x_4 - 12x_5)$ ,

podemos ver que tenemos como componente de entrada  $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

que es linealmente independiente a los componentes de entrada  $w_1$  y  $w_2$  de la primera derivada de las salidas del sistema. Por lo tanto, otro de los órdenes de los ceros al infinito es 2, es decir, los órdenes de los ceros al infinito del sistema resultaron ser (1, 2) como se esperaba.

## 2.4 Forma canónica de Morse.

Las características o propiedades de un sistema que no son modificadas bajo la acción de un grupo de transformación, es lo que se conoce básicamente como invariantes estructurales de un sistema. Esta información juega un papel fundamental en el estudio de las características del sistema y, dependiendo del grupo de transformación que se considere, la solución de algunos problemas de control pueden ser expresadas en términos de estos invariantes estructurales. En esta sección se presenta la forma canónica de Morse, que despliega un conjunto de invariantes estructurales del sistema bajo la acción de un grupo de transformación que comprende cambios de base en el estado, entradas y salidas, así como retroalimentación de estado e inyección de salida.

Sea  $\mathcal{H}$  un grupo de transformación, cada elemento de este grupo de transformación será definido como  $\mathcal{H} = (H, T, F, K, G)$  donde  $H, T$  y  $G$  son cambios de base en la salida, estados y entradas respectivamente,  $F$  representa retroalimentación de estado y  $K$  es inyección de salida. La inyección de salida consiste en

retroalimentar la salida  $y(t)$  al vector  $\dot{x}(t)$ , como se muestra en la figura 2.3. Como en los sistemas reales generalmente no se tiene acceso a este punto de retroalimentación, se considera que la inyección de salida es físicamente no realizable.

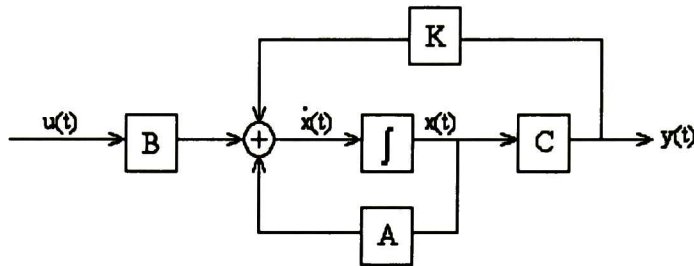


Figura 2.3 Inyección de salida

El efecto que tiene el grupo  $\mathcal{H}$ , conocido como grupo de transformación de Morse, sobre la tripleta  $(A, B, C)$  es como sigue:

$$\mathcal{H}(A, B, C) \rightarrow (T^{-1}(A + BF + KC)T, T^{-1}BG, HCT)$$

es decir, si  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  son las matrices obtenidas al aplicar el grupo de transformación  $\mathcal{H} = (H, T, F, K, G)$  al sistema  $(A, B, C)$ , entonces tendremos que

$$\bar{A} = T^{-1}(A + BF + KC)T, \quad \bar{B} = T^{-1}BG \quad \text{y} \quad \bar{C} = HCT.$$

El grupo  $\mathcal{H}$  es un grupo de transformación, ya que cumple con las propiedades de identidad, inversa y composición, como se muestra a continuación.

Para la propiedad de identidad, tenemos que: para un sistema  $(A, B, C)$  siempre existe un elemento de  $\mathcal{H}$ , tal que  $\bar{A} = A$ ,  $\bar{B} = B$  y  $\bar{C} = C$ , es decir,  $\bar{A} = T^{-1}(A + BF + KC)T = A$ ,  $\bar{B} = T^{-1}BG = B$  y  $\bar{C} = HCT = C$ , este elemento de  $\mathcal{H}$  es  $(I_p, I_n, 0, 0, I_m)$ .

Para la propiedad de inversa, tenemos lo siguiente: Sea  $h_1 = (H, T, F, K, G)$  tal que  $\bar{A} = T^{-1}(A + BF + KC)T = A$ ,  $\bar{B} = T^{-1}BG = B$  y  $\bar{C} = HCT = C$ . Entonces el elemento del grupo  $\mathcal{H}$  que cumple la propiedad de inversa está dado por  $h_2 = (H^{-1}, T^{-1}, -G^{-1}FT^{-1}, -TKH^{-1}, -G^{-1})$ .

Para la última propiedad, composición, tenemos lo siguiente: Sea  $h_1 = (H_1, T_1, F_1, K_1, G_1)$  tal que  $A_1 = T_1^{-1}(A + BF_1 + K_1C)T_1$ ,  $B_1 = T_1^{-1}BG_1$  y  $C_1 = H_1CT_1$ . Consideremos  $h_2 = (H_2, T_2, F_2, K_2, G_2)$  tal que  $A_2 = T_2^{-1}(A_1 + B_1F_2 + K_2C_1)T_2$ ,  $B_2 = T_2^{-1}B_1G_2$  y  $C_2 = H_2C_1T_2$ . Es decir, el elemento  $h_1$  transforma el sistema  $(A, B, C)$  en  $(A_1, B_1, C_1)$  y el elemento  $h_2$ , a su vez, transforma el sistema  $(A_1, B_1, C_1)$  en  $(A_2, B_2, C_2)$ . Entonces la composición de  $h_1$  y  $h_2$  está dada por

$$h = h_1 \circ h_2 = (H_2H_1, T_1T_2, F_1 + G_1F_2T_2^{-1}, K_1 + T_1K_2H_1, G_1G_2).$$

Basado en la idea de encontrar una forma canónica del sistema  $(A, B, C)$ , Morse describió el conjunto de todos los invariantes de  $(A, B, C)$  bajo el grupo de transformación  $\mathcal{H}$  [21].

Veamos a continuación la forma canónica de Morse para un sistema  $(A, B, C)$ .

**Teorema 2.6 Forma canónica de Morse.**

Sea  $(A, B, C)$  un sistema multivariable como en (2.1) y sean las listas  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$ , una lista de polinomios y tres listas de enteros definidas de la siguiente manera:  $I_1 = \{\alpha_i(s)\}_{i=1}^{l_1}$ ,  $I_2 = \{\sigma_i\}_{i=1}^{l_2}$ ,  $I_3 = \{\tau_i\}_{i=1}^{l_3}$  e  $I_4 = \{n_i\}_{i=1}^{l_4}$ . Entonces existe un elemento  $\mathcal{H} = (H, T, F, K, G)$  y matrices únicas  $A_M, B_M$  y  $C_M$ , llamadas la forma canónica de Morse de  $(A, B, C)$ , tales que:

$$A_M = T^{-1}(A + BF + KC)T = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$B_M = T^{-1}BG = \begin{bmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C_M = HCT = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$A_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n_1 \times n_1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n_{l_4} \times n_{l_4}} \right\}$$

$$A_3 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tau_1 \times \tau_1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\tau_{l_3} \times \tau_{l_3}} \right\}$$

$$A_2 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\sigma_1 \times \sigma_1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\sigma_{l_2} \times \sigma_{l_2}} \right\}$$

$A_1 = \text{block diag} \{J_{\alpha_1}, \dots, J_{\alpha_{l_1}}\}$ , siendo  $J_{\alpha_i}$  una matriz compañera con polinomio característico  $\alpha_i(s)$

$$B_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_1 \times 1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_{l_4} \times 1} \right\},$$

$$B_2 = \text{block diag} \left\{ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]_{\sigma_1 \times 1}, \dots, \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]_{\sigma_{i_2} \times 1} \right\}$$

$$C_4 = \text{block diag} \left\{ [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n_1}, \dots, [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n_{i_4}} \right\}$$

y

$$C_3 = \text{block diag} \left\{ [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times \tau_1}, \dots, [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times \tau_{i_3}} \right\}$$

Las listas  $I_i$  para  $i = 1, \dots, 4$  definidas en el Teorema 2.6, son llamadas *listas de Morse* del sistema, y están relacionadas con los invariantes de Kronecker de la matriz del sistema. Antes de mostrar esta relación, veamos algunas definiciones previas sobre índices mínimos de matrices racionales.

Sea  $W(s)$  una matriz racional, de dimensiones  $p \times m$  y rango  $r$ . El conjunto de todos los vectores racionales  $f(s)$ , de dimensión  $m \times 1$  tales que  $W(s)f(s) = 0$  es llamado espacio nulo derecho de  $W(s)$ , este espacio es de dimensión  $\alpha = m - r$ . Notemos que los vectores  $f(s)$  pueden ser restringidos a vectores polinomiales, sólo multipliquemos por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores de  $f(s)$  y seguirá cumpliendo con  $W(s)f(s) = 0$ . Ahora, de entre todos los vectores polinomiales del espacio nulo, seleccionemos uno, digamos  $f_1(s)$ , de menor grado posible  $\mu_1$  tal que  $W(s)f_1(s) = 0$  (nota: el grado de un vector polinomial se define como el grado mayor de todas las entradas de dicho vector). Después, de las soluciones linealmente independientes de  $f_1(s)$ , elijamos  $f_2(s)$ , de menor grado posible  $\mu_2$ , donde  $\mu_2 \geq \mu_1$ , tal que  $W(s)f_2(s) = 0$ . Continuando de una manera similar, podemos llegar a

$$f(s) = [f_1(s) \ f_2(s) \ \dots \ f_\alpha(s)] \quad \text{donde} \quad \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_\alpha.$$

Entonces  $f(s)$ , de esta forma, es llamado *base mínima del kernel derecho* de  $W(s)$  y  $\mu_i$  para  $i = 1, \dots, \alpha$  son enteros positivos o cero, y son conocidos como *índices mínimos por columnas* de  $W(s)$ .

Por supuesto que  $f(s)$  no es único [7], pero lo que siempre se cumple es que tiene los mismos índices  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\alpha)$ .

De una manera similar se puede definir una base mínima del kernel izquierdo de  $W(s)$ , e índices mínimos por filas de  $W(s)$ .

Las listas de Morse representan el conjunto completo de invariantes estructurales del sistema  $(A, B, C)$  bajo el grupo de transformación  $(H, T, F, K, G)$ . Estas listas pueden ser relacionadas con los invariantes de Kronecker [9] de la *matriz sistema*

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

de la siguiente manera [15]:

- La lista  $I_1 = \{\alpha_i(s)\}$  son los polinomios invariantes de la forma de Smith de  $P(s)$ . Las raíces de  $\alpha_i(s)$ , que son los ceros finitos de  $P(s)$ , son entonces los ceros invariantes del sistema  $(A, B, C)$ .

- La lista  $I_2$  son los índices mínimos por columnas de  $P(s)$ . Estos enteros corresponden a los índices de controlabilidad de  $\mathcal{R}^*$ , el máximo subespacio de controlabilidad contenido en el kernel de la matriz  $C$ . Estos conceptos del enfoque geométrico se verán en el siguiente capítulo.

• La lista  $I_3$  son los índices mínimos por renglones de  $P(s)$ .

• La lista  $I_4$  son los órdenes de los ceros al infinito de  $P(s)$ , los cuales también corresponden a los órdenes de los ceros al infinito del sistema  $(A, B, C)$ .

Las listas de Morse también pueden ser relacionadas con el enfoque geométrico por medio de dimensiones de subespacios y espacios cocientes, como se verá en el siguiente capítulo.

**Ejemplo 2.5** Sea el sistema  $(A, B, C)$  dado por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la forma de canónica de Morse de este sistema, en primer lugar, procederemos por obtener las listas de Morse.

La lista  $I_1$  la podemos obtener de la forma de Smith de  $P(s)$ .

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde tenemos, por medio de varias operaciones no presentadas en este caso, que

$$\text{Smith } P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto  $I_1 = \{s-1\}$ .

Para la lista  $I_2$ , una base mínima del kernel derecho de  $P(s)$  está dada por <sup>2</sup>

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -s^2 + 1 \end{bmatrix}, \text{ cuyo grado es 2, por lo que tenemos que } I_2 = \{2\}.$$

<sup>2</sup>Para este y otros cálculos se utilizaron rutinas de Matlab y del Polynomial Toolbox para Matlab.





**Teorema 2.7** *Forma semicanónica de Morse.*

Sea  $(A, B, C)$  un sistema invertible por la derecha, cuyas listas de Morse  $I_2 = \{\sigma_i\}_{i=1}^{l_2}$  e  $I_4 = \{n_i\}_{i=1}^{l_4}$  se consideran en orden no decreciente, y tal que  $\mathcal{R}^* = V^*$ . Entonces existe un elemento del grupo de transformación  $(T, F, G, \Pi)$  tal que el sistema  $(A_s, B_s, C_s)$ , llamado *forma semicanónica de Morse*, tenga la siguiente forma

$$A_s = T^{-1}(A + BF)T = \begin{bmatrix} A_4 & 0 \\ H_2 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_s = T^{-1}BG = \begin{bmatrix} B_4 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } C_s = \Pi CT = [C_4 \ 0],$$

donde

$$A_4 = \begin{bmatrix} J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & J_{n_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{p1} & L_{p2} & \cdots & J_{n_p} \end{bmatrix}$$

con

$$J_{n_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad L_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n_j - n_i - 1}^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{m-p,1} & \cdots & H_{m-p,p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\Sigma \sigma_i \times \Sigma n_i},$$

donde

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{\sigma_j - n_i - 1}^{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_i \times n_j} \quad \text{y } \alpha^{ij} \in \mathbb{R}$$

$$B_4 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_1 \times 1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n_p \times 1} \right\}, \quad B_2 = \text{block diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_1 \times 1}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\sigma_{m-p} \times 1} \right\}$$

y

$$C_4 = \left[ \begin{array}{ccc} \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_1} & 0 & \dots \quad 0 \\ \boxed{* \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_1} & \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_2} & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_1} & \boxed{* \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_2} & \boxed{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{1 \times n_p} \end{array} \right]$$

donde los elementos señalados como \* son elementos posiblemente diferentes de cero.

La forma semicanónica de Morse, definida en el resultado anterior, será utilizada ampliamente en capítulos posteriores, y en particular, veremos un procedimiento para la modificación de la estructura al infinito, a partir de la forma semicanónica de Morse.



# 3. Sistemas multivariados: enfoque geométrico.

En este capítulo se presentan conceptos y herramientas del llamado "enfoque geométrico", y se estudian las propiedades estructurales del sistema desde el punto de vista de este enfoque. Se presentan los subespacios A-invariantes, subespacios (A,B)-invariantes, subespacios de controlabilidad, así como las características de estos espacios y la interpretación de algunas propiedades del sistema como controlabilidad, observabilidad, etc., en función de estos subespacios. Posteriormente se analizan los invariantes estructurales del sistema, presentados en el capítulo anterior, desde el punto de vista de control geométrico. Se hace énfasis específicamente en la estructura al infinito de un sistema multivariable.

Estos conceptos y definiciones serán utilizados ampliamente a lo largo de los siguientes capítulos, ya que los resultados principales relacionados con la modificación de la estructura al infinito de sistemas multivariados se basan principalmente en conceptos geométricos.

El material de este capítulo es estándar en la literatura, ver por ejemplo [1] y [26]. Aún cuando todos los resultados presentados en este capítulo son conocidos, se incluye también la demostración de algunos de ellos, con objeto de ilustrar las técnicas de demostración utilizadas en el enfoque geométrico.

## 3.1 Subespacios A-invariantes.

Un tipo de subespacios de particular interés en el estudio de los sistemas lineales, son los subespacios A-invariantes. En esta sección veremos la relación que existe entre dichos subespacios y algunas propiedades de los sistemas lineales, como controlabilidad y observabilidad. Iniciaremos primeramente con algunas definiciones de espacios y operadores.

**Definición 3.1** Sean  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  dos subespacios lineales del espacio lineal  $X$ , es decir  $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq X$  y sea  $A$  una transformación lineal  $A : X \rightarrow X$  con  $X = \mathbb{R}^n$ . Consideremos también, la transformación lineal  $C : X \rightarrow Y$ . Definiremos los subespacios  $\mathcal{R} + \mathcal{S} \subseteq X$  (suma de espacios),  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq X$  (intersección de espacios),  $\mathcal{R}^\perp$  (aniquilador de un subespacio o complemento ortogonal),  $\ker C$  (kernel de  $C$ ),  $\text{Im } C$  (imagen de  $C$ ) y  $A^{-1}\mathcal{R}$  (imagen inversa de un subespacio) de la siguiente manera:

$$\mathcal{R} + \mathcal{S} = \{r + s : r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{x : x \in \mathcal{R} \text{ \& } x \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{R}^\perp = \{y \in X' : yx = 0, x \in \mathcal{R}\}$$

$$\ker C = \{x : x \in X \text{ \& } Cx = 0\}$$

$$\text{Im } C = \{y : y \in Y \text{ \& } \exists x \in X, y = Cx\} = \{Cx : x \in X\}$$

$$A^{-1}\mathcal{R} = \{x \in X, Ax \in \mathcal{R}\}$$

donde  $X'$ , conocido como el *espacio dual* de  $X$ , es el conjunto de todas las *funcionales lineales* definidas por  $x' : X \rightarrow \mathbb{F}$ , donde  $\mathbb{F}$  es el campo sobre el que está definido el espacio lineal  $X$ .

Existe un caso particular de la suma de subespacios, llamada *suma directa* de subespacios y denotada como " $\oplus$ ". Esta operación representa la suma de subespacios independientes, es decir, los vectores que constituyen una base para cada subespacio en la suma directa, son independientes de los vectores que constituyen las bases de los demás subespacios implicados en esta suma.

Si las columnas de  $R$  y  $S$  son una base de los subespacios  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$  y la matriz  $R^T$  es la transpuesta de  $R$ , entonces los subespacios  $\mathcal{R} + \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R}^\perp$  y  $A^{-1}\mathcal{R}$  se pueden calcular de la siguiente manera [26]

$$\mathcal{R} + \mathcal{S} = \text{Im}[R \ S]$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \ker \begin{bmatrix} R^\perp \\ S^\perp \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}^\perp = (\ker[R^T])^T$$

$$A^{-1}\mathcal{R} = \ker[R^\perp A]$$

A continuación se presenta el concepto de espacio cociente, que será utilizado posteriormente en este capítulo.

Sea  $\mathcal{S} \subseteq X$ . Los vectores  $x, y \in X$  se dicen *mod equivalentes* (o congruentes) si  $x - y \in \mathcal{S}$ . Este concepto de congruencia establece clases de equivalencia. Una clase de equivalencia, denotada como  $\bar{x}$ , es el conjunto de vectores congruentes con el vector  $x$ , es decir,  $\bar{x} = \{x, y \in X, y - x \in \mathcal{S}\}$ . A una clase de equivalencia, se le conoce también como *variedad lineal*, y también puede ser denotada como  $[x]$ . Se define el *espacio cociente*  $X/\mathcal{S}$  como el conjunto de clases de equivalencia  $\bar{x} = \{x, y \in X, y - x \in \mathcal{S}\}$ . Geométricamente,  $\bar{x}$  es un hiperplano pasando a través de  $x$ , obtenido por una traslación paralela del subespacio  $\mathcal{S}$ . Un hecho importante, del cual se omitirá su demostración [9], es el siguiente

$$\dim \left( \frac{X}{\mathcal{S}} \right) = \dim(X) - \dim(\mathcal{S}).$$

El mapeo dado por  $P : X \rightarrow X/\mathcal{S}$  es llamado la *proyección canónica* de  $X$  sobre  $X/\mathcal{S}$ .

**Definición 3.2** *Subespacios A-invariantes.*

Consideremos una transformación lineal  $A : X \rightarrow X$  con  $X = \mathbb{R}^n$ . Un subespacio  $\xi \subseteq X$ , es llamado *A-invariante* si  $A\xi \subseteq \xi$ , es decir, el espacio  $\xi$  es *A-invariante* si al aplicar el operador  $A$  a cualquier vector  $x \in \xi$ , se cumple que  $Ax \in \xi$ .

Se puede ver que los subespacios *A-invariantes* son cerrados bajo la suma y bajo la intersección de subespacios, esto es, si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son subespacios *A-invariantes*, entonces  $(\xi_1 + \xi_2)$  y  $(\xi_1 \cap \xi_2)$  son también subespacios *A-invariantes*.

Como se mencionaba, existe cierta relación entre la controlabilidad y la observabilidad de un sistema con los subespacios *A-invariantes*. Por ejemplo, la imagen de la matriz de controlabilidad  $\text{Im } C(A, B)$ , llamada *subespacio controlable* de  $(A, B, C)$ , puede ser relacionada con un subespacio *A-invariante* y también podemos relacionar el  $\ker O(A, C)$ , llamado subespacio no observable de  $(A, B, C)$ , con un subespacio *A-invariante*. Veamos a continuación dichas relaciones.

Denotemos por  $\bar{U}$ , el espacio lineal de entradas  $(u(t))$  seccionalmente continuas para  $t \geq 0$ , y llamemos  $\varphi(t; x_0, u)$  la solución de la ecuación (2.1) con  $x(0) = x_0$ . La solución de esta ecuación diferencial es [3]:

$$\varphi(t; x_0, u) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds. \quad (3.1)$$

Un estado  $x \in X$ , es alcanzable desde  $x_0$  si existe  $t$  y  $u(t)$ , con  $0 < t < \infty$  y  $u(t) \in \bar{U}$ , tales que  $\varphi(t; x_0, u) = x$ . Sea  $\mathcal{R}_0$  el conjunto de estados alcanzables desde  $x_0 = 0$ . Por la solución de (2.1) fácilmente podemos ver que  $\mathcal{R}_0$  es un subespacio lineal de  $X$ . El subespacio  $\mathcal{R}_0$  puede ser descrito directamente en términos de las matrices  $A$  y  $B$  de un sistema  $(A, B, C)$  de la siguiente manera:

**Teorema 3.1** Sea  $\langle A \mid \text{Im } B \rangle = \text{Im } B + A \text{Im } B + \cdots + A^{n-1} \text{Im } B$ . Entonces  $\mathcal{R}_0 = \langle A \mid \text{Im } B \rangle$ .

**Demostración.** Véase [26]. ■

Por las definiciones de controlabilidad y alcanzabilidad, podemos ver que para un sistema lineal como el descrito en (2.1), la controlabilidad y alcanzabilidad de un estado  $x$  es equivalente, por lo que el subespacio  $\mathcal{R}_0 = \langle A \mid \text{Im } B \rangle \subseteq X$ , puede ser considerado como el conjunto de estados controlables del sistema, también llamado subespacio controlable de  $(A, B, C)$ .

De la ecuación  $\langle A \mid \text{Im } B \rangle = \text{Im } B + A \text{Im } B + \cdots + A^{n-1} \text{Im } B$  y por el Teorema de Cayley-Hamilton podemos ver que  $A \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_0$ , esto es,  $\mathcal{R}_0$  es un subespacio A-invariante.

El subespacio controlable  $\mathcal{R}_0$ , es de hecho el mínimo subespacio A-invariante que contiene la imagen de  $B$  ( $\text{Im } B$ ). La justificación de este hecho es la siguiente: supongamos que existe un subespacio A-invariante conteniendo  $\text{Im } B$  más pequeño que  $\mathcal{R}_0$  digamos  $\mathcal{W}$ , como  $\text{Im } B \subset \mathcal{W}$ , entonces  $A \text{Im } B \subset \mathcal{W}$ ,  $A^2 \text{Im } B \subset \mathcal{W}, \dots, A^{n-1} \text{Im } B \subset \mathcal{W}$ , por lo que  $\mathcal{W} \subset \mathcal{R}_0$ . Ahora por la definición de  $\mathcal{R}_0$ , es decir,  $\mathcal{R}_0 = \text{Im } B + A \text{Im } B + \cdots + A^{n-1} \text{Im } B$ , tenemos que  $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{W}$ , como  $\mathcal{W} \subset \mathcal{R}_0$  y  $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{W}$ , entonces  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{W}$ , por lo que  $\mathcal{R}_0$  es el mínimo subespacio A-invariante conteniendo  $\text{Im } B$ .

Por la definición de suma de subespacios y por la definición de la matriz de controlabilidad de un sistema:

$$C(A, B) = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1} B]$$

podemos ver que  $\mathcal{R}_0 = \text{Im } C(A, B)$ , es decir, el subespacio de controlabilidad del sistema corresponde a la imagen de la matriz de controlabilidad del sistema  $(A, B, C)$ , entonces un sistema es completamente controlable si  $\mathcal{R}_0 = X$ , esto es equivalente a que la matriz de controlabilidad tenga rango pleno.

El mínimo subespacio A-invariante que contiene la  $\text{Im } B$ , llamémoslo mín  $\xi(A, B)$ , donde  $B$  es cualquier subespacio de  $X$ , se puede obtener mediante el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 3.1** El mínimo subespacio A-Invariante que contiene  $\text{Im } B$ .

*El subespacio mín  $\xi(A, B)$  coincide con el último término de la secuencia:*

$$\mathcal{Z}_0 = \text{Im } B \quad (3.2)$$

$$\mathcal{Z}_i = \text{Im } B + A \mathcal{Z}_{i-1} \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

donde el valor  $k \leq n - 1$  es determinado por la condición  $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$ .

**Demostración.** Primero, notemos que  $\mathcal{Z}_i \supseteq \mathcal{Z}_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ . En lugar de las ecuaciones (3.2) y (3.3) podemos considerar la recursión siguiente:  $\mathcal{Z}'_i = \mathcal{Z}'_{i-1} + A \mathcal{Z}'_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ , donde  $\mathcal{Z}'_0 = \text{Im } B$ .

Con esta secuencia definimos una secuencia tal que  $\mathcal{Z}'_i \supseteq \mathcal{Z}'_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ ; por lo tanto,  $A\mathcal{Z}'_i \supseteq A\mathcal{Z}'_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Notemos que si  $\mathcal{Z}'_j = \mathcal{Z}_i$  para  $j = 1, \dots, i-1$ , también  $\mathcal{Z}'_i = \text{Im } B + A\mathcal{Z}_{i-2} + A\mathcal{Z}_{i-1} = \mathcal{Z}_i$  (dado que  $A\mathcal{Z}_{i-2} \subseteq A\mathcal{Z}_{i-1}$ ). Si  $\mathcal{Z}_{k+1} \supseteq \mathcal{Z}_k$ , entonces  $\mathcal{Z}_j = \mathcal{Z}_k$  para toda  $j > k+1$  y  $\mathcal{Z}_k$  es un A-invariante que contiene  $\text{Im } B$ . De hecho  $\mathcal{Z}_k = \text{Im } B + A\mathcal{Z}_k$ ; por lo tanto,  $\text{Im } B \subseteq \mathcal{Z}_k$ . Como dos subespacios subsecuentes son iguales si y sólo si tienen la misma dimensión y la dimensión del primer subespacio es por lo menos uno, un subespacio A-invariante es obtenido a lo más en  $n-1$  pasos. El último subespacio de la secuencia es el mínimo subespacio A-invariante que contiene  $\text{Im } B$ , esto puede ser probado por inducción. Sea  $\xi$  otro subespacio A-invariante que contiene  $\text{Im } B$ : si  $\xi \supseteq \mathcal{Z}_{i-1}$ , entonces  $\xi \supseteq \mathcal{Z}_i$ . De hecho,  $\xi \supseteq \text{Im } B + A\xi \supseteq \text{Im } B + A\mathcal{Z}_{i-1} = \mathcal{Z}_i$ . ■

A lo largo de este capítulo se utilizará el término *dualidad*. Por ejemplo, la observabilidad, es dual a la controlabilidad de un sistema, en el sentido que, si un sistema  $(A, B, C)$  es controlable entonces el sistema  $(A^T, C^T, B^T)$ , conocido como sistema dual de  $(A, B, C)$ , es observable y viceversa [14].

Como vimos en el capítulo anterior, un sistema es observable si podemos determinar los estados, a partir del conocimiento de las entradas y salidas del sistema. Por la definición de la matriz de observabilidad de un sistema:

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

y por la definición de intersección de subespacios, podemos ver que un sistema es observable si  $X \supseteq \mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(CA^{i-1}) = 0$ , esto es equivalente a que la matriz de observabilidad del sistema tenga rango pleno. El subespacio  $\mathcal{N}$ , es llamado el *subespacio no-observable* del sistema y corresponde al conjunto de todos los estados no observables de  $(A, B, C)$ .

Se puede ver que  $\mathcal{N}$  es un subespacio A-invariante, y de hecho, este es el máximo subespacio A-invariante contenido en el  $\text{ker } C$ . Por la forma en que están definidas la matriz de observabilidad de un sistema y el subespacio  $\mathcal{N}$ , podemos ver que  $\mathcal{N} = \text{ker } \mathcal{O}(A, C)$ . Como  $\mathcal{N} = \text{ker } \mathcal{O}(A, C)$ , entonces un sistema es observable si  $\mathcal{N} = 0$ .

El máximo subespacio A-invariante contenido en cualquier subespacio de  $X$ , digamos  $\mathcal{K}$  (un caso particular puede ser  $\text{ker } C$ ), se puede obtener utilizando el siguiente algoritmo. A manera de notación, llamemos  $\text{máx } \xi(A, \mathcal{K})$ , al máximo subespacio A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ .

De las siguientes propiedades,

$$A\xi \subseteq \xi \iff A^T\xi^\perp \subseteq \xi^\perp \quad (3.4)$$

$$\mathcal{K} \supseteq \xi \iff \mathcal{K}^\perp \subseteq \xi^\perp \quad (3.5)$$

podemos ver que

$$\text{máx } \xi(A, \mathcal{K}) = (\text{mín } \xi(A^T, \mathcal{K}^\perp))^\perp \quad (3.6)$$

De la ecuación (3.6), podemos ver que el cálculo de  $\text{máx } \xi(A, \mathcal{K})$  se reduce, de cierta manera, al cálculo de  $\text{mín } \xi(A, B)$ , es por esto que el algoritmo anteriormente visto se puede dualizar de la siguiente manera:

**Algoritmo 3.2** *El máximo subespacio A-invariante contenido en  $\mathcal{K}$ .*

*El subespacio  $\text{máx } \xi(A, \mathcal{K})$  coincide con el último término de la siguiente secuencia:*

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{K} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{K} \cap A^{-1} \mathcal{Z}_{i-1} \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (3.8)$$

donde el valor de  $k \leq n - 1$  es determinado por la condición  $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$ .

**Demostración.** Las ecuaciones (3.6) y (3.7) son equivalentes a:

$$\mathcal{Z}_0^\perp = \mathcal{K}^\perp$$

$$\mathcal{Z}_i^\perp = (\mathcal{K} \cap A^{-1} \mathcal{Z}_{i-1})^\perp = \mathcal{K}^\perp + A^T \mathcal{Z}_{i-1}^\perp$$

Dichas ecuaciones, por el Algoritmo 3.1, convergen al complemento ortogonal de  $\min \xi(A^T, \mathcal{K}^\perp)$ , el cual corresponde, por la ecuación (3.6), a  $\max \xi(A, \mathcal{K})$ . ■

## 3.2 Subespacios (A,B)-invariantes.

Los subespacios (A,B)-invariante y (A,C)-invariante condicionado, serán definidos en esta sección. Estas nuevas definiciones de invarianza, puede ser relacionadas con los invariantes estructurales y con los ceros de transmisión de un sistema. Además, por medio de estos subespacios, se pueden obtener retroalimentaciones de estado tales que el sistema en lazo cerrado sea máximamente no observable o, de una manera similar, inyección de salida tal que el sistema en lazo cerrado sea máximamente no controlable.

Consideremos un sistema lineal como en (2.1) para presentar la definición formal de dichas extensiones de invarianza, así como algunas de sus propiedades.

**Definición 3.3** Un subespacio  $V \subseteq X$  es un subespacio (A,B)-invariante si  $AV \subseteq V + \text{Im } B$ .

Veamos ahora el dual de esta definición:

**Definición 3.4** Un subespacio  $S \subseteq X$  es un subespacio (A,C)-invariante condicionado si  $A(S \cap \ker C) \subseteq S$ .

Cabe mencionar que los subespacios (A,B)-invariantes son llamados *subespacios de controlabilidad* y los subespacios (A,C)-invariantes son llamados *subespacios condicionados* en algunas referencias, por ejemplo en [1]. En este trabajo se utilizará la notación (A,B)-invariante y (A,C)-invariante condicionado para dichos subespacios.

**Lema 3.1** La suma de dos subespacios (A,B)-invariantes es un subespacio (A,B)-invariante.

**Demostración.** Por la Definición 3.3 es claro que si  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  son subespacios (A,B)-invariantes entonces  $A(\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) = A\mathcal{V}_1 + A\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \text{Im } B$ . Por lo tanto  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$  es un subespacio (A,B)-invariante. ■

**Lema 3.2** La intersección de dos subespacios (A,C)-invariantes condicionados es un subespacio (A,C)-invariante condicionado.

**Demostración.** Si  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  son subespacios (A,C)-invariantes condicionados entonces, por la Definición 3.4, tenemos que  $A(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \ker C) = A\mathcal{S}_1 \cap A\mathcal{S}_2 \cap A \ker C \subseteq \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ . ■

Observe sin embargo que, en general la intersección de dos subespacios (A,B)-invariantes no es un subespacio (A,B)-invariante y la suma de dos espacios (A,C)-invariantes condicionados no es un subespacio (A,C)-invariante condicionado.

Una caracterización de los subespacios (A,B)-invariantes utilizando matrices es la siguiente:

**Lema 3.3** Un subespacio  $\mathcal{V}$  con matriz base  $V$  es un subespacio (A,B)-invariante si y sólo si existen matrices  $X$  y  $U$  tales que



$$AV = VX + BU. \quad (3.9)$$

**Demostración.** Sean  $v_i$  para  $i = 1, \dots, r$  las columnas de  $V$ . El subespacio  $\mathcal{V}$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante si y sólo si cada columna transformada es una combinación de las columnas de  $V$  y  $B$ , esto es, si y sólo si existen vectores  $x_i, u_i$  tales que  $Av_i = Vx_i + Bu_i$   $i = 1, \dots, r$ , esto es, la ecuación (3.9) en forma extendida. ■

**Teorema 3.2** Un subespacio  $\mathcal{V}$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante si y sólo si existe al menos una matriz  $F$  tal que  $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ .

**Demostración.** Sólo si. Consideremos la ecuación (3.9) del lema anterior y supongamos que  $F = -U(V^T V)^{-1}V^T$  entonces tenemos que  $(A + BF)V = VX$ .

Utilizando la propiedad de que un subespacio  $\xi$  con matriz base  $V$ , es un subespacio  $A$ -invariante si y sólo si existe una matriz  $X$  tal que  $AV = VX$  [1], tenemos entonces que  $\mathcal{V}$  es un subespacio  $(A + BF)$ -invariante.

Si. Supongamos que no se cumple que  $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$ , entonces existe al menos un vector  $x_0 \in \mathcal{V}$  tal que  $Ax_0$  no puede ser expresado como la suma de dos vectores  $x'_0 \in \mathcal{V}$  y  $Bu_0 \in \text{Im } B$ , por lo tanto no existe  $F$  tal que  $(A + BF)x_0 \in \mathcal{V}$ . ■

Existe cierta relación entre un subespacio  $(A, B)$ -invariante  $\mathcal{V}$  y un sistema lineal como el descrito en (2.1). Si un estado  $x \in \mathcal{V}$  entonces existe al menos una entrada  $u$  tal que  $Ax + Bu \in \mathcal{V}$ , esto es, el estado  $x \in \mathcal{V}$  puede ser mantenido en el subespacio  $\mathcal{V}$  por medio de una elección apropiada de la entrada  $u$ .

**Teorema 3.3** Un subespacio  $\mathcal{S} \subseteq X$  es un subespacio  $(A, C)$ -invariante condicionado si y sólo si existe al menos una matriz  $K$  tal que  $(A + KC)\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ .

**Demostración.** Este teorema puede ser demostrado usando la dualidad del teorema anterior. De hecho, por el Lema 3.1, la ecuación de la definición 3.4 es equivalente a:  $A^T \mathcal{S}^\perp \subseteq \mathcal{S}^\perp + (\ker C)^\perp = \mathcal{S}^\perp + \text{Im}(C^T)$ . Por el teorema anterior esta condición es necesaria y suficiente para la existencia de una matriz  $K$  tal que  $(A^T + C^T K^T)\mathcal{S}^\perp \subseteq \mathcal{S}^\perp$  y por la propiedad vista en la demostración del teorema anterior tenemos que  $(A + KC)\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ . ■

Dos o más subespacios  $(A, B)$ -invariantes pueden ser convertidos en simples subespacios invariantes, por medio de una sola matriz de retroalimentación, como se muestra a continuación:

**Lema 3.4** Sean  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$  subespacios  $(A, B)$ -invariantes. Existe una matriz  $F$  tal que  $(A + BF)\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}_i$  para  $i = 1, 2$  si y sólo si  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  es un subespacio  $(A, B)$ -invariante.

**Demostración.** Si. Esta parte puede ser probada de una manera similar que el sólo si del Teorema 3.2. Sea  $V_1$  la matriz base de  $\mathcal{V}_1$ ,  $[V_1 \ V_2]$  la matriz base para  $\mathcal{V}_1$ ,  $[V_1 \ V_3]$  la matriz base de  $\mathcal{V}_2$ , entonces  $[V_1 \ V_2 \ V_3]$  es una matriz base de  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ . Denotemos por  $U_1, U_2, U_3$  las correspondientes matrices de la ecuación (3.9). Es fácil de comprobar que la matriz  $F = -U(V^T V)^{-1}V^T$  con  $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]$  y  $V = [V_1 \ V_2 \ V_3]$ , es tal que  $(A + BF)\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}_i$  para  $i = 1, 2$  y  $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ .

Sólo si. Si  $\mathcal{V}$  no es un subespacio  $(A, B)$ -invariante, por el Teorema 3.2 no existe  $F$  tal que  $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ , por lo tanto  $(A + BF)\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}_i$  para  $i = 1, 2$  condiciona que la intersección de dos invariantes es un invariante. ■

Este lema puede ser dualizado de la siguiente manera:

**Lema 3.5** Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  dos subespacios  $(A, C)$ -invariantes condicionados. Existe una matriz  $K$  tal que  $(A + KC)\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}_i$  para  $i = 1, 2$  si y sólo si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$  es un subespacio  $(A, C)$ -invariante condicionado.

**Demostración.** Véase [1]. ■

De una manera similar a los Algoritmos 3.1 y 3.2, existen algoritmos para calcular el mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado contenido en un subespacio cualquiera  $\mathcal{D} \subseteq X$ , llamémoslo mín  $\mathcal{S}(A, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ , y para calcular el máximo subespacio  $(A,B)$ -invariante contenido en un subespacio cualquiera  $\mathcal{E} \subseteq X$ , llamémoslo máx  $\mathcal{V}(A, B, \mathcal{E})$ . Dichos algoritmos se presentan a continuación:

**Algoritmo 3.3** *El mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene la imagen de  $\mathcal{D}$ .*

El subespacio mín  $\mathcal{S}(A, \mathcal{K}, \mathcal{D})$  coincide con el último término de la secuencia

$$\mathcal{Z}_0 = \text{Im } \mathcal{D} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{Z}_i = \text{Im } \mathcal{D} + A(\mathcal{Z}_{i-1} \cap \mathcal{K}) \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (3.11)$$

donde el valor  $k \leq n - 1$  está determinado por la condición  $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$ .

**Demostración.** Primero, notemos que  $\mathcal{Z}_i \supseteq \mathcal{Z}_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ . De hecho, en lugar de la ecuación (3.11) podemos considerar la recursión siguiente:  $\mathcal{Z}'_i = \mathcal{Z}'_{i-1} + A(\mathcal{Z}'_{i-1} \cap \mathcal{K})$  para  $i = 1, \dots, k$ , donde  $\mathcal{Z}'_0 = \text{Im } \mathcal{D}$ . Con esta secuencia definimos una secuencia tal que  $\mathcal{Z}'_i \supseteq \mathcal{Z}'_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, k$ ; por lo tanto,  $A(\mathcal{Z}'_i \cap \mathcal{K}) \supseteq A(\mathcal{Z}'_{i-1} \cap \mathcal{K})$  para  $i = 1, \dots, k$ . Esta secuencia es igual a la de (3.11); por inducción, notemos que si  $\mathcal{Z}'_j = \mathcal{Z}_j$  para  $j = 1, \dots, i - 1$ , también  $\mathcal{Z}'_i = \text{Im } \mathcal{D} + A(\mathcal{Z}_{i-2} \cap \mathcal{K}) + A(\mathcal{Z}_{i-1} \cap \mathcal{K}) = \mathcal{Z}_i$  (dado que  $A(\mathcal{Z}_{i-2} \cap \mathcal{K}) \subseteq A(\mathcal{Z}_{i-1} \cap \mathcal{K})$ ). Si  $\mathcal{Z}_{k+1} \supseteq \mathcal{Z}_k$ , entonces  $\mathcal{Z}_j = \mathcal{Z}_k$  para toda  $j > k + 1$  y  $\mathcal{Z}_k$  es un  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene  $\text{Im } \mathcal{D}$ . De hecho,  $\mathcal{Z}_k = \text{Im } \mathcal{D} + A(\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{K})$ ; por lo tanto,  $\text{Im } \mathcal{D} \subseteq (\mathcal{Z}_k \cap \mathcal{K})$ . Como dos subespacios subsiguientes son iguales si y sólo si tienen la misma dimensión y la dimensión del primer subespacio es por lo menos uno, un subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado es obtenido a lo más en  $n - 1$  pasos. El último subespacio de la secuencia es el mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene  $\text{Im } \mathcal{D}$ , esto puede ser probado por inducción. Sea  $\mathcal{S}$  otro subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene  $\text{Im } \mathcal{D}$ : si  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{Z}_{i-1}$ , entonces  $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{Z}_i$ . De hecho,  $\mathcal{S} \supseteq \text{Im } \mathcal{D} + A(\mathcal{S} \cap \mathcal{K}) \supseteq \text{Im } \mathcal{D} + A(\mathcal{Z}_{i-1} \cap \mathcal{K}) = \mathcal{Z}_i$ . ■

El subespacio mín  $\mathcal{S}(A, \mathcal{K}, \text{Im } B)$ , es decir, el mínimo subespacio  $(A,C)$ -invariante condicionado que contiene  $\text{Im } B$  (denotado como  $\mathcal{S}^*$ ), es de particular interés en el estudio de los sistemas lineales. La relación entre este subespacio  $\mathcal{S}^*$  y un sistema lineal se presenta posteriormente.

Por el Lema 3.1 y por la siguiente propiedad

$$\mathcal{E} \supseteq \mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{E}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp \quad (3.12)$$

podemos ver que

$$\text{máx } \mathcal{V}(A, B, \mathcal{E}) = (\text{mín } \mathcal{S}(A^T, B^\perp, \mathcal{E}^\perp))^\perp \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.13) podemos determinar máx  $\mathcal{V}(A, B, \mathcal{E})$  por medio de mín  $\mathcal{S}(A, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ . La ecuación (3.13) puede ser relacionada con el siguiente algoritmo, dual al Algoritmo 3.3.

**Algoritmo 3.4** *El máximo subespacio  $(A,B)$ -invariante contenido en  $\mathcal{E} \subseteq X$ .*

El subespacio máx  $\mathcal{V}(A, B, \mathcal{E})$  coincide con el último término de la siguiente secuencia

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{E} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{E} \cap A^{-1}(\mathcal{Z}_{i-1} + \text{Im } B) \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (3.15)$$

donde el valor  $k \leq n - 1$  está determinado por la condición  $\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{Z}_k$ .

**Demostación.** Las ecuaciones (3.14) y (3.15) son equivalentes a  $\mathcal{Z}_0^\perp = \mathcal{E}^\perp$  y a  $\mathcal{Z}_i^\perp = (\mathcal{E} \cap A^{-1}(\mathcal{Z}_{i-1} + \text{Im } B)) = \mathcal{E}^\perp + A(\mathcal{Z}_{i-1}^\perp \cap (\text{Im } B)^\perp)$ , las cuales, por el Algoritmo 3.3, convergen al complemento ortogonal de  $\min \mathcal{S}(A^T, B^\perp, \mathcal{E}^\perp)$  que es, por la ecuación (3.13), el subespacio máx  $\mathcal{V}(A, B, \mathcal{E})$ . ■

Sabemos, por el Lema 3.4, que dos o más subespacios (A,B)-invariantes pueden ser convertidos en simples subespacios invariantes por medio de una sola matriz de retroalimentación. Llamaremos  $\mathbb{F}(A, B; \mathcal{V})$ , o simplemente  $\mathbb{F}(\mathcal{V})$ , al conjunto de matrices  $F$ , tales que  $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ . Para la notación  $F \in \mathbb{F}(\mathcal{V})$ , se dice que " $F$  es una de las *amigas* del subespacio  $\mathcal{V}$ "

Por el Teorema 3.2, notemos que cualquier subespacio A-invariante es automáticamente un subespacio (A,B)-invariante, una manera sencilla de verlo es cuando  $F = 0$ . En general, el máximo subespacio A-invariante contenido en un subespacio de  $X$ , es un subconjunto propio del máximo subespacio (A,B)-invariante contenido en el mismo subespacio.

El subespacio máx  $\mathcal{V}(A, B, \mathcal{E})$  es de particular interés para el estudio de los sistemas lineales cuando se tiene que  $\mathcal{E} = \ker C$ . Veamos como este subespacio puede ser relacionado, por ejemplo, con el subespacio no observable de un sistema:

Sea  $V^* = \text{máx } \mathcal{V}(A, B, \ker C)$ , es decir  $V^*$  es el máximo subespacio (A,B)-invariante contenido en el  $\ker C$ , entonces  $V^*$  es el conjunto de todos los estados iniciales para los cuales existe  $u(t) \in \bar{U}$  tal que  $y(t) \equiv 0$ . El subespacio  $V^*$  es, de cierta manera, similar al subespacio no observable del sistema  $\mathcal{N}$ , por la siguiente razón, si  $F \in \mathbb{F}(V^*)$  entonces el sistema retroalimentado  $(A + BF, B, C)$  tendrá como subespacio no observable  $V^*$ . Cabe mencionar que  $(A + BF, B, C)$ , donde  $F \in \mathbb{F}(V^*)$ , es *máximamente no observable*, es decir, no existe otra realización  $(A + BF_1, B, C)$ , donde  $F_1$  es cualquier retroalimentación de estado, tal que el rango de la matriz de observabilidad del par  $(A + BF_1, C)$  sea menor que el rango que la matriz de observabilidad del par  $(A + BF, C)$ .

Una manera de encontrar  $F \in \mathbb{F}(V^*)$  es la siguiente

Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V^*$  y  $B : \mathcal{U} \rightarrow X$ , entonces por la definición de subespacio (A,B)-invariante, es decir,  $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \text{Im } B$ , existen vectores  $w_i \in V^*$  y vectores  $u_i \in \mathcal{U}$  para  $i = 1, \dots, n$ , tales que  $Av_i = w_i - Bu_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Definamos  $F_0 : V^* \rightarrow \mathcal{U}$  de la siguiente manera  $F_0 v_i = u_i$  para  $i = 1, \dots, n$  y  $F$ , no única, como cualquier extensión de  $F_0$  a  $X$ . Entonces  $(A + BF)v_i = w_i \in V^*$ , esto es,  $(A + BF)V^* \subseteq V^*$

### 3.3 Subespacios de controlabilidad.

Otro subespacio importante en el estudio de los sistemas lineales es el subespacio de controlabilidad contenido en un subespacio  $\mathcal{E} \subseteq X$ . Dado un sistema  $(A, B, C)$ , consideremos todos los pares  $(A + BF, BG)$  donde las matrices  $(F, G)$  representan cualquier retroalimentación de estado. Entonces el subespacio controlable de  $(A + BF, BG)$  (determinado, por ejemplo, del Algoritmo 3.1), es llamado un *subespacio de controlabilidad* del sistema original  $(A, B, C)$ . El conjunto de subespacios de controlabilidad de  $(A, B, C)$  es un subconjunto, en general propio, del conjunto de subespacios (A,B)-invariantes del sistema.

Consideremos un sistema como en (2.1). Un subespacio  $\mathcal{R} \subseteq X$  es un subespacio de controlabilidad del par  $(A, B)$  si existen matrices  $F$  y  $G$  tales que

$$\mathcal{R} = \langle A + BF \mid \text{Im}(BG) \rangle$$

donde

$$\langle A + BF \mid \text{Im}(BG) \rangle = \text{Im}(BG) + (A + BF)\text{Im}(BG) + \dots + (A + BF)^{n-1}\text{Im}(BG).$$

Por el Teorema 3.1, podemos ver que  $\mathcal{R}$  es precisamente el subespacio controlable de  $(A + BF, BG)$ . A manera de notación, llamemos  $\mathcal{U}(A, B; X)$  al conjunto de todos los subespacios de controlabilidad del par  $(A, B)$ . La relación que existe entre un subespacio de controlabilidad  $\mathcal{R} \subseteq X$  y los estados  $x$  de un sistema lineal, es la siguiente: Para cada  $x \in \mathcal{R}$  existe  $u(t) \in \bar{U}$  para  $(0 \leq t \leq 1)$ , tal que, si  $x(0) = 0$  entonces  $x(t) \in \mathcal{R}$  para  $(0 \leq t \leq 1)$  y  $x(1) = x$ . Es decir, cada estado  $x \in \mathcal{R}$  es alcanzable desde cero a lo largo de una trayectoria (conjunto de valores que toman todos los estados en un intervalo de tiempo) controlada que no salga del subespacio  $\mathcal{R}$ .

**Lema 3.6** Si  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{U}(A, B; X)$ , entonces  $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \in \mathcal{U}(A, B; X)$ . Esto es, la suma de dos subespacios de controlabilidad del par  $(A, B)$ , es también un subespacio de controlabilidad del par  $(A, B)$ .

**Demostración.** Véase [26]. ■

El lema anterior nos sugiere, de una manera similar al Lema 3.1, que existe un máximo subespacio de controlabilidad contenido en un subespacio de  $X$ . Denotemos como  $\text{máx} \mathcal{U}(A, B; \mathcal{E})$  el máximo subespacio de controlabilidad contenido en  $\mathcal{E} \subseteq X$  y como  $\mathcal{R}^*$  el máximo subespacio de controlabilidad contenido en  $\ker C$ , es decir,  $\mathcal{R}^* = \text{máx} \mathcal{U}(A, B; \ker C)$ . Veamos el siguiente resultado.

**Teorema 3.4** Sea  $V^* = \text{máx} \mathcal{V}(A, B, \ker C)$  y  $\mathcal{R}^* = \text{máx} \mathcal{U}(A, B; \ker C)$ . Si  $F \in \mathbb{F}(V^*)$  entonces

$$\mathcal{R}^* = \langle A + BF \mid \text{Im } B \cap V^* \rangle \quad (3.16)$$

**Demostración.** Véase [26]. ■

Existe un método alternativo para calcular  $\mathcal{R}^*$ , que no requiere la construcción de  $F \in \mathbb{F}(V^*)$  y está dado por el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 3.5** Definamos la secuencia  $\mathcal{Z}^\mu$  de acuerdo con

$$\mathcal{Z}^0 = 0 \quad (3.17)$$

$$\mathcal{Z}^\mu = V^* \cap (A\mathcal{Z}^{\mu-1} + \text{Im } B) \quad \text{para } \mu = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

Entonces,  $\mathcal{Z}^\mu = \mathcal{R}^*$  para  $\mu \geq \dim(V^*)$ .

**Demostración.** Véase [26]. ■

Para la interpretación dinámica del subespacio de controlabilidad  $\mathcal{R}^*$  tenemos que  $\mathcal{R}^*$  es el conjunto de todos los estados iniciales, tales que  $y(t) \equiv 0$  para cualquier  $t \geq 0$ , con dinámicas arbitrarias.

Una forma más compacta de representar los Algoritmos 3.3, 3.4 y 3.5, es la siguiente:

$$V^* = V^n \text{ donde } V^0 = X \text{ y } V^i = \ker C \cap A^{-1}(\text{Im } B + V^{i-1}) \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

$$\mathcal{R}^* = R^n \text{ donde } R^0 = 0 \text{ y } R^i = V^* \cap (\text{Im } B + AR_{i-1}) \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

$$S^* = S^n \text{ donde } S^0 = 0 \text{ y } S^i = \text{Im } B + A(S^{i-1} \cap \ker C) \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

Existe una relación entre  $\mathbb{F}(V^*)$  y  $\mathbb{F}(\mathcal{R}^*)$ , que se puede ver en el siguiente resultado:

**Corolario 3.1** Si  $V^* = \text{máx} \mathcal{V}(A, B, \ker C)$  y  $\mathcal{R}^* = \text{máx} \mathcal{U}(A, B; \ker C)$ , entonces  $\mathbb{F}(V^*) \subseteq \mathbb{F}(\mathcal{R}^*)$ . Es decir, cualquier  $F$  amiga del subespacio  $V^*$ , es una amiga del subespacio  $\mathcal{R}^*$

**Demostración.** La demostración es inmediata de la ecuación (3.16). ■

Con respecto a los subespacios  $V^*$ ,  $S^*$  y  $\mathcal{R}^*$  hay otro hecho importante que cabe mencionar:

**Lema 3.7**  $\mathcal{R}^* = S^* \cap V^*$

**Demostración.** Es suficiente demostrar que

$$R^i = V^* \cap S^i \quad (3.22)$$

Como  $S^1 = \text{Im } B$  y  $R^1 = \text{Im } B \cap V^*$  entonces (3.22) es cierto para  $i = 1$ . Supongamos que se cumple para  $i$ , entonces

$$\begin{aligned} R^{i+1} &= (AR^i + \text{Im } B) \cap V^* \\ &= (A(V^* \cap S^i) + \text{Im } B) \cap V^* \\ &= (A(\ker C \cap (A^{-1}(V^* + \text{Im } B))) \cap S^i) + \text{Im } B) \cap V^* \\ &= ((A(\ker C \cap S^i)) \cap (V^* + \text{Im } B) + \text{Im } B) \cap V^* \\ &= (A(\ker C \cap S^i) + \text{Im } B) \cap (V^* + \text{Im } B) \cap V^* \\ &= V^* \cap S^{i+1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Otro hecho importante es el siguiente

$$\begin{aligned} X \supseteq V^* + S^* \supseteq V^* \supseteq \mathcal{R}^* \supseteq 0 \\ X \supseteq \mathcal{N} + \mathcal{R}_0 \supseteq \mathcal{R}_0 \supseteq 0. \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se muestra como aplicar los algoritmos 3.1 a 3.5 para obtener los subespacios  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}^*$ ,  $S^*$  y  $V^*$  para un sistema  $(A, B, C)$  dado.

**Ejemplo 3.1** Sea el sistema  $(A, B, C)$  dado por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el subespacio controlable  $\mathcal{R}_0$ , por el algoritmo 3.1, tenemos que:

$$\mathcal{R}_{00} = \text{Im } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{01} = \text{Im } B + A(\mathcal{R}_{00}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{R}_{02} = \text{Im } B + A(\mathcal{R}_{01}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $\mathcal{R}_{01} = \mathcal{R}_{02}$ , termina el algoritmo y entonces  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{01} = \mathcal{R}_{02}$ .

Para el subespacio no observable  $\mathcal{N}$  del sistema, por el Algoritmo 3.2, podemos ver que:

$$\mathcal{N}_0 = \ker C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_1 = \ker C \cap A^{-1}(\mathcal{N}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_2 = \ker C \cap A^{-1}(\mathcal{N}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_3 = \ker C \cap A^{-1}(\mathcal{N}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

como  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_3$ , entonces tenemos que  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_3$ .

Por el Algoritmo 3.3, para el subespacio  $S^*$ , obtenemos

$$S_0^* = \text{Im } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1^* = \text{Im } B + A(S_0^* \cap \ker C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$S_2^* = \text{Im } B + A(S_1^* \cap \ker C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

como podemos ver,  $S_1^* = S_2^* = S^*$

Ahora, considerando el Algoritmo 3.4, resulta que:

$$V_0^* = \ker C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_1^* = \ker C \cap A^{-1}(V_0^* + \text{Im } B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2^* = \ker C \cap A^{-1}(V_1^* + \text{Im } B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y como  $V_2^* = V_1^*$ , entonces  $V^* = V_2^* = V_1^*$

Para el cálculo del subespacio  $\mathcal{R}^*$  podemos, o bien, utilizar el Algoritmo 3.5 o el Lema 3.7. A partir del Algoritmo 3.5:

$$\mathcal{R}_0^* = 0, \quad \mathcal{R}_1^* = V^* \cap (A\mathcal{R}_0^* + \text{Im } B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{R}_2^* = V^* \cap (A\mathcal{R}_1^* + \text{Im } B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3^* = V^* \cap (A\mathcal{R}_2^* + \text{Im } B)$$

entonces  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_2^* = \mathcal{R}_3^*$

Cabe mencionar que, estrictamente hablando, estos subespacios calculados son el span de los vectores que los componen a cada uno de ellos, pero, a manera de notación, omitiremos la palabra span.

De las matrices de controlabilidad y observabilidad del sistema

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos ver que, efectivamente,  $\mathcal{R}_0 = \text{Im } \mathcal{C}(A, B)$  y  $\mathcal{N} = \ker \mathcal{O}(A, C)$ .

Siguiendo el procedimiento indicado al final de la sección anterior para obtener una  $F$  amiga de  $V^*$ , tenemos lo siguiente

$$F = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & -1 & 0 \\ * & * & * & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}(V^*)$$

donde los elementos señalados con \* pueden tomar cualquier valor de los números reales. Por el Corolario 3.1, el mismo conjunto de retroalimentaciones son amigas del subespacio  $\mathcal{R}^*$

### 3.4 Invariantes estructurales: enfoque geométrico.

En esta sección veremos como pueden ser relacionados los invariantes estructurales de un sistema con los subespacios  $V^*$ ,  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$ . El estudio de dichos invariantes desde un enfoque geométrico es importante para el desarrollo de este trabajo, ya que algunos trabajos relacionados con el tema son resultados obtenidos a partir de invariantes vistos desde un enfoque geométrico [21], de ahí la importancia del tema.

Las listas de Morse de un sistema  $(A, B, C)$ , introducidas en la sección 2.4, pueden ser relacionados con el enfoque geométrico de la siguiente manera:

**Lema 3.8** Sean  $I_1 = \{\alpha_i(s), \dots, \alpha_{l_1}(s)\}$ ,  $I_2 = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{l_2}\}$ ,  $I_3 = \{\tau_1, \dots, \tau_{l_3}\}$  e  $I_4 = \{n_1, \dots, n_{l_4}\}$  las listas de Morse del sistema  $(A, B, C)$  y  $V^* = \text{máx } \mathcal{V}(A, B, \ker C)$ ,  $\mathcal{R}^* = \text{máx } \mathcal{U}(A, B; \ker C)$  y  $S^* = \text{mín } \mathcal{V}(A, C; \text{Im } B)$  entonces

$$\sum_{i=1}^{l_1} \deg \alpha_i(s) = \dim \left( \frac{V^*}{\mathcal{R}^*} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{l_2} \sigma_i = \dim(\mathcal{R}^*)$$

$$\sum_{i=1}^{l_3} \tau_i = \dim \left( \frac{X}{V^* + S^*} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{l_4} n_i = \dim \left( \frac{V^* + S^*}{V^*} \right).$$

**Demostración.** Véase [21]. ■

**Ejemplo 3.2** Consideremos el sistema  $(A, B, C)$  del Ejemplo 3.1 y probemos el lema anterior.

Del Ejemplo 2.6 podemos ver que  $I_1 = \{s-1\}$ ,  $I_2 = \{2\}$ ,  $I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{2, 1\}$ . Del Ejemplo 3.1 podemos ver que  $\dim(\mathcal{R}^*) = 2$ ,  $V^* + S^* = X$ ,  $\dim(V^*) = 3$ . Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{l_1} \deg \alpha_i(s) = \dim \left( \frac{V^*}{\mathcal{R}^*} \right) = \dim(V^*) - \dim(\mathcal{R}^*) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{l_2} \sigma_i = \dim(\mathcal{R}^*) = 2$$

$$\sum_{i=1}^{l_3} \tau_i = \dim \left( \frac{X}{V^* + S^*} \right) = \dim(X) - \dim(V^* + S^*) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{l_4} n_i = \dim \left( \frac{V^* + S^*}{V^*} \right) = \dim(V^* + S^*) - \dim(V^*) = 3.$$

Una vez visto el ejemplo anterior, veamos otra relación que existe entre las listas de Morse y el enfoque geométrico. Para las listas  $I_2$  e  $I_4$ , a diferencia del Lema 3.8, se pueden encontrar todos y cada uno de



los elementos que conforman estas listas, en lugar de solo las sumatorias  $\sum_{i=1}^{l_2} \sigma_i$  y  $\sum_{i=1}^{l_4} n_i$ , como en el lema anterior. Antes de presentar el resultado relacionado con las listas  $I_2$  e  $I_4$  desde un enfoque geométrico, veamos previamente una definición.

**Definición 3.5** Sea  $\{p_1, p_2, \dots\}$  una lista de enteros positivos, entonces la *lista dual* de  $\{p_1, p_2, \dots\}$  digamos  $\{n_1, n_2, \dots\}$ , se define de la siguiente manera

$$n_i = \text{número de elementos de la lista } \{p_1, p_2, \dots\} \text{ mayores o iguales a } i \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

A manera de notación, las listas  $\{p_1, p_2, \dots\}$  y  $\{n_1, n_2, \dots\}$  las relacionaremos por medio de  $n_i = \text{card}\{j \mid p_j \geq i\}$  para  $i = 1, 2, \dots$

**Lema 3.9** Si  $n_i = \text{card}\{j \mid p_j \geq i\}$  para  $i = 1, 2, \dots$  entonces  $p_i = \text{card}\{j \mid n_j \geq i\}$  para  $i = 1, 2, \dots$

**Demostración.** Véase [16]. ■

**Teorema 3.5** Sean  $\{\sigma_i\}$  y  $\{n_i\}$  las listas  $I_2$  e  $I_4$  de Morse del sistema  $(A, B, C)$  en orden no creciente.

Si  $p_i = \dim\left(\frac{S^i + V^*}{S^{i-1} + V^*}\right)$  para  $i = 1, 2, \dots$  y  $\alpha_i = \dim\left(\frac{S^i \cap V^*}{S^{i-1} \cap V^*}\right)$  para  $(i = 1, 2, \dots)$  entonces  $I_4 = \{n_i\} = \text{card}\{j \mid p_j \geq i\}$  para  $(i = 1, 2, \dots)$  e  $I_2 = \{\sigma_i\} = \text{card}\{j \mid \alpha_j \geq i\}$  para  $i = 1, 2, \dots$ , donde  $S^i$  y  $S^{i-1}$  están dados por la ecuación (3.21).

**Demostración.** Véase [5] y [21]. ■

El resultado anterior se puede considerar como la caracterización geométrica de la estructura al infinito del sistema  $(A, B, C)$  y de la estructura de  $\mathcal{R}^*$

**Ejemplo 3.3** Sea el sistema  $(A, B, C)$  como en el Ejemplo 3.1. Compruebe el Teorema 3.5.

En este caso, por la ecuación (3.21), tenemos  $S^0 = 0$

$$S^1 = \text{Im}(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S^2 = \text{Im} B + A(S^1 \cap \ker C) = S^3 = S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } i = 1 \text{ tenemos } V^* + S^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V^* \cap S^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } i = 2 \text{ tenemos } V^* + S^2 = X \quad \text{y} \quad V^* \cap S^2 = \mathcal{R}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora por la ecuación  $p_i = \dim\left(\frac{S^i + V^*}{S^{i-1} + V^*}\right)$  para  $i = 1, 2, \dots$ , podemos ver que

$$p_1 = \dim(S^1 + V^*) - \dim(S^0 + V^*) = 2,$$

$$p_2 = \dim(S^2 + V^*) - \dim(S^1 + V^*) = 1.$$

Por la ecuación  $\alpha_i = \dim\left(\frac{S^i \cap V^*}{S^{i-1} \cap V^*}\right)$  para  $i = 1, 2, \dots$ , podemos ver que

$$\alpha_1 = \dim(S^1 \cap V^*) - \dim(S^0 \cap V^*) = 1$$

$$\alpha_2 = \dim(S^2 \cap V^*) - \dim(S^1 \cap V^*) = 1.$$

Ahora bien,  $p_i = \{2, 1\}$  y  $\alpha_i = \{1, 1\}$ .

Finalmente por  $I_4 = \{n_i\} = \text{card}\{j \mid p_j \geq i\}$  e  $I_2 = \{\sigma_i\} = \text{card}\{j \mid \alpha_j \geq i\}$ , podemos ver que  $I_4 = \{n_i\} = \{2, 1\}$  e  $I_2 = \{\sigma_i\} = \{2\}$  como se esperaba (ver Ejemplo 2.6).



# 4. Modificación de la estructura al infinito: enfoque geométrico.

En este capítulo veremos las condiciones necesarias y suficientes para que una lista dada de enteros, sea la lista de los órdenes de los ceros al infinito del sistema en lazo cerrado, es decir, de  $(A + BF, BG, C)$ , además consideraremos la construcción de  $(F, G)$  tales que modifiquen dicha estructura. En la sección 4.1 veremos una descomposición del subespacio de controlabilidad  $\mathcal{R}^*$  y del subespacio  $S^*$  de un sistema, esta descomposición es necesaria en secciones posteriores para la construcción de  $(F, G)$  tal que modifiquen la estructura al infinito. En la sección 4.2 presentaremos, de una manera formal, el resultado que implica las condiciones necesarias y suficientes para que una lista de enteros pueda ser asignada como nueva lista  $I_4$  de un sistema retroalimentado. Una vez vistas las condiciones necesarias y suficientes del problema de modificación, en la sección 4.3, consideraremos en detalle, la construcción de la retroalimentación no regular  $(F, G)$  tal que modifique esta estructura al infinito.

## 4.1 Descomposición de los subespacios $\mathcal{R}^*$ y $S^*$

En esta sección se presenta una descomposición particular de  $\mathcal{R}^*$ , el máximo subespacio de controlabilidad contenido en  $\ker C$ , y de  $S^*$ , el mínimo subespacio  $(A, C)$ -invariante condicionado que contiene  $\text{Im } B$  [16]. Esta descomposición será ampliamente utilizada a lo largo de este capítulo, ya que en el procedimiento para modificar la estructura al infinito desde un enfoque geométrico, se parte precisamente de esta descomposición. Para esta descomposición consideraremos las listas  $I_2 = \{\sigma_i\}$  e  $I_4 = \{n_i\}$  en orden no creciente. Las listas duales de las listas  $I_2$  e  $I_4$ , es decir,  $\{\alpha_i\} = \text{card}\{j \mid \sigma_j \geq i\}$  y  $\{p_i\} = \text{card}\{j \mid n_j \geq i\}$  serán también consideradas en orden no creciente.

Para los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$ , definidos en el capítulo anterior, veamos la siguiente descomposición:

Para el sistema  $(A, B, C)$ , existe  $F_0 : X \rightarrow U$  y vectores  $b_1, \dots, b_{\alpha_1} \in (\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*)$ , que nos permite describir (con  $A_0 = A + BF_0$ ) el máximo subespacio de controlabilidad contenido en  $\ker C$ , es decir  $\mathcal{R}^*$  de la siguiente manera

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\alpha_1} \quad (4.1)$$

donde

$$\mathcal{R}_i = \text{span}\{b_i, A_0 b_i, \dots, A_0^{\sigma_i - 1} b_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq \alpha_1$$

$$A_0^{j-1} b_i \in \ker C \quad \text{para } 1 \leq j \leq \sigma_i \quad \text{y } 1 \leq i \leq \alpha_1$$

$$A_0^{\sigma_i} b_i = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq \alpha_1.$$

Entonces,  $\mathcal{R}^*$  se descompone en la suma directa de subespacios invariantes cíclicos  $\mathcal{R}_i$ , con vectores generadores  $b_i$ , donde  $\sigma_i = \dim \mathcal{R}_i$  para  $i = 1, \dots, \alpha_1$ , y donde  $\sigma_i$  son los elementos de la lista  $I_2$  de Morse.

En [5] se propone una descomposición similar para el subespacio  $S^*$ , es decir, existen vectores  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{p_1} \in \text{Im } B$ , tales que

$$S^* = \mathcal{R}^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1} \quad (4.2)$$

donde

$$\mathcal{L}_i = \text{span}\{\delta_i, A_0\delta_i, \dots, A_0^{n_i-1}\delta_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1$$

$$A_0^{j-1}\delta_i \in \ker C \quad \text{para } 1 \leq j \leq n_i - 1 \quad \text{y } 1 \leq i \leq p_1$$

$$A_0^{n_i-1}\delta_i \notin \ker C \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1.$$

Nótese que  $S^*$  se descompone en la suma directa de  $\mathcal{R}^*$  y subespacios invariantes cíclicos  $\mathcal{L}_i$ , con vectores generadores  $\delta_i$ . Además, se puede ver que  $n_i = \dim \mathcal{L}_i$  para  $i = 1, \dots, p_1$ , donde  $n_i$  son los órdenes de los ceros al infinito del sistema.

## 4.2 Condiciones necesarias y suficientes para la modificación de la estructura al infinito de un sistema multivariable.

Considerando un sistema  $(A, B, C)$  diremos que una lista de enteros positivos  $\{n'_i\}$  es asignable como nueva lista  $I_4$  del sistema retroalimentado si existen  $F$  y  $G$ , tales que el sistema  $(A + BF, BG, C)$  tenga como órdenes de los ceros al infinito la lista  $\{n'_i\}$ .

Las condiciones necesarias y suficientes para que en un sistema una lista de enteros positivos  $\{n'_i\}$  pueda ser asignada como nueva lista  $I_4$  del sistema retroalimentado se presentan en el siguiente resultado.

**Teorema 4.1** Sea un sistema  $(A, B, C)$  con listas  $I_2 = \{\sigma_i\}$  e  $I_4 = \{n_i\}$  en orden no creciente y, consideremos las listas duales definidas por  $\{\alpha_i\} = \text{card}\{j \mid \sigma_j \geq i\}$  para  $i \geq 1$  y  $\{p_i\} = \text{card}\{j \mid n_j \geq i\}$  para  $i \geq 1$  también en orden no creciente.

Sea  $\{n'_i\}$  una lista de enteros positivos y  $\{p'_i\} = \text{card}\{j \mid n'_j \geq i\}$  para  $i \geq 1$  su lista dual. A la lista de enteros  $\{p'_i - p_i\}$  ordenada en orden no creciente la llamaremos  $\{\Delta_i\}$ . Entonces existe una retroalimentación no regular  $(F, G)$  tal que la lista  $\{n'_i\}$  sea la lista  $I_4$  del sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones

$$p_1 - p_i \geq p'_1 - p'_i \quad \text{para } i > 1 \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^i \alpha_j \geq \sum_{j=1}^i \Delta_j \quad \text{para } i \geq 1 \quad (4.4)$$

Notemos que para las condiciones de este resultado, en lugar de considerar directamente las listas  $\{\sigma_i\}$ ,  $\{n_i\}$  y  $\{n'_i\}$ , son consideradas sus listas duales  $\{\alpha_i\}$ ,  $\{p_i\}$  y  $\{p'_i\}$ , esto debido a que las listas  $\{\alpha_i\}$  y  $\{p_i\}$  tienen una interpretación natural desde el enfoque geométrico a partir del subespacio  $V^*$  y de la construcción del subespacio  $S^*$  (ver Teorema 3.5). Entonces, por medio del algoritmo para la modificación de la estructura al infinito que se presentará en la siguiente sección, se modificará en realidad la lista  $\{p_i\}$  a  $\{p'_i\}$  por medio de ciertos subespacios y bases de  $X$  consideradas, lo que implicará que la lista  $\{n_i\}$  se modifique a  $\{n'_i\}$ .

La suficiencia de este resultado se probará más adelante con el procedimiento para obtener la retroalimentación  $(F, G)$  que asigna la lista  $\{n'_i\}$  como estructura al infinito del sistema retroalimentado. La demostración de la necesidad puede verse en [16].

En este trabajo supondremos que el número de ceros al infinito del sistema  $(A, B, C)$  y del sistema retroalimentado es el mismo, esto es,  $p_1 = p'_1$ . Esto también significa que el rango de la función de transferencia en lazo abierto y en lazo cerrado es el mismo.

Otra suposición que haremos es que el sistema  $(A, B, C)$  es invertible por la derecha, esto es, la función de transferencia del sistema es de rango pleno por filas. Por lo tanto, el número de ceros al infinito de  $(A, B, C)$  es igual al número de salidas del sistema, esto es,  $p_1 = p$ . Bajo estas consideraciones, la condición (4.3) se reduce a  $p'_i \geq p_i$ , lo que implica que  $n'_i \geq n_i$ , es decir, los órdenes de los ceros al infinito del sistema pueden permanecer igual o incrementarse por retroalimentación, pero no disminuir, siendo esto algo que intuitivamente era de esperarse, por ejemplo, a partir de la interpretación dinámica de los órdenes de los ceros al infinito del sistema.

Teniendo pues en cuenta que la nueva lista  $\{n'_i\}$  a proponer debe cumplir de entrada con  $n'_i \geq n_i$ , podemos considerar que la condición (4.3) siempre se cumple para sistemas invertibles por la derecha, y donde  $p_1 = p'_1$ .

Otro resultado importante relacionado con la modificación de los ceros al infinito de un sistema multivariable es el siguiente

**Proposición 4.1** Sea  $\{n'_i\}$  una lista no creciente y finita de enteros positivos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) Existe una retroalimentación no regular  $(F, G)$ , tal que  $\{n'_i\}$  es la lista  $I_4$  del sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$ .

ii) Existe una retroalimentación no regular  $(F, G)$  y un cambio de base en los estados  $T$ , tal que  $\{n'_i\}$  es la lista  $I_4$  del sistema en lazo cerrado  $(T^{-1}(A + BF)T, T^{-1}BG, CT)$ .

iii) Existe una retroalimentación no regular  $(F, G)$ , un cambio de base en los estados  $T$ , un cambio de base en las salidas  $H$  e inyección de salida  $K$ , tales que  $\{n'_i\}$  es la lista  $I_4$  del sistema en lazo cerrado  $(HCT, T^{-1}(A + BF + KC)T, T^{-1}BG)$ .

**Demostración.** Los tres sistemas  $(A + BF, BG, C)$ ,  $(T^{-1}(A + BF)T, T^{-1}BG, CT)$  y  $(HCT, T^{-1}(A + BF + KC)T, T^{-1}BG)$ , son equivalentes en el sentido de Morse, es decir, los tres sistemas tienen los mismos invariantes estructurales, en particular, tienen la misma estructura al infinito, por lo que i), ii) y iii) son equivalentes. ■

### 4.3 Obtención de la retroalimentación $(F, G)$ .

Antes de presentar el procedimiento para obtener la retroalimentación  $(F, G)$  que modifica la estructura al infinito de un sistema multivariable, es necesario considerar un caso particular. En el siguiente

teorema, a diferencia del Teorema 4.1, solo se utilizará el primer elemento de la lista  $I_2$  para modificar los órdenes de los ceros al infinito, es decir, veremos un caso particular del Teorema 4.1.

**Teorema 4.2** [16] Consideremos un sistema  $(A, B, C)$ , con listas  $I_2 = \{\sigma_i\}$  e  $I_4 = \{n_i\}$ , y sean  $\{\alpha_i\}$  y  $\{p_i\}$  las listas duales de  $I_2$  e  $I_4$  respectivamente. Sea  $\{n_i^1\}$  una lista finita de enteros positivos en orden no creciente,  $\{p_i^1\} = \text{card}\{j \mid n_j^1 \geq i\}$  su lista dual y supongamos que  $p_1^1 = p_1$ . Entonces existe una retroalimentación no regular  $(F, G)$  tal que  $\{n_1^1, \dots, n_{p_1}^1\}$  y  $\{\sigma_2, \dots, \sigma_{\alpha_1}\}$  sean la listas  $I_4$  e  $I_2$  de  $(A + BF, BG, C)$  si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} 0 \leq p_i^1 - p_i \leq 1 \quad \text{para } i \geq 1 \\ \text{card}\{i \mid p_i^1 - p_i = 1\} \leq \sigma_1 \end{aligned}$$

La primera condición se puede relacionar con la condición dada por (4.4). Si consideramos un sólo elemento de la lista  $I_2$  para el Teorema 4.1, para que se cumpla la condición  $\sum_{j=1}^i \alpha_j \geq \sum_{j=1}^i \Delta_j$ , es necesario que  $\Delta_i \leq 1$ , esto debido a que  $\alpha_i \leq 1$ . Ahora bien,  $\Delta_i \leq 1$  es equivalente a  $0 \leq p_i^1 - p_i \leq 1$ .

Si se cumple la primera condición del Teorema 4.2, entonces la condición dada por  $\text{card}\{i \mid p_i^1 - p_i = 1\} \leq \sigma_1$ , es equivalente a  $\Sigma(n_i^1 - n_i) \leq \sigma_1$ , es decir, la diferencia de las sumatorias de los órdenes de los ceros al infinito del sistema  $n_i$  y los nuevos órdenes de los ceros al infinito del sistema retroalimentado  $n_i^1$  debe ser compensada por  $\sigma_1$ , que es el elemento considerado para modificar la estructura.

Suponiendo que se cumplen las condiciones del Teorema 4.2, a continuación se mostrará el procedimiento para la construcción de las matrices  $(F, G)$  tal que modifiquen la estructura al infinito del sistema en la forma especificada.

Primeramente es necesario considerar una base particular de  $X$ . De las ecuaciones (4.1) y (4.2), es decir, de la descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$ , podemos ver que los vectores

$$\{b_1, A_0 b_1, \dots, A_0^{\sigma_1 - 1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_0^{\sigma_{\alpha_1} - 1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_0^{n_1 - 1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_0^{n_{p_1} - 1} \delta_{p_1}\}$$

son linealmente independientes.

Los vectores anteriores pueden completarse, en caso de ser necesario, para obtener una base para  $X$ , es decir, existen vectores  $\{x_1, \dots, x_\lambda\}$  tal que

$$\{b_1, A_0 b_1, \dots, A_0^{\sigma_1 - 1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_0^{\sigma_{\alpha_1} - 1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_0^{n_1 - 1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_0^{n_{p_1} - 1} \delta_{p_1}; x_1, \dots, x_\lambda\}$$

forman una base de  $X$ .

Definamos la familia de vectores  $x_{ij}$ , a partir de los vectores anteriores, de la siguiente manera

$$x_{ij} = A_0^{j-1} \delta_{i-1} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq n_i^1 - n_i \quad (4.5)$$

$$x_{ij} = A_0^{j-1} \delta_{i-1} + A_0^{n_i - n_i^1 + j - 1} \delta_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \quad \text{y} \quad n_i^1 - n_i < j \leq n_i^1 \quad (4.6)$$

$$x_{0j} = A_0^{\sigma + j - 1} \delta_0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq \sigma_1 - \sigma \quad (4.7)$$

donde

$$\delta_0 = b_1$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p_1} (n_i^1 - n_i)$$

Por la forma en que están definidos estos vectores  $x_{ij}$ , se puede ver que

$$\text{span}\{x_{ij}\} = \text{span}\{b_1, \dots, A_0^{\sigma_1-1}b_1; \delta_1, \dots, A_0^{n_1-1}\delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_0^{n_{p_1}-1}\delta_{p_1}\}.$$

Entonces los vectores

$$\{b_2, \dots, A_0^{\sigma_2-1}b_2, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_0^{\sigma_{\alpha_1}-1}b_{\alpha_1}; x_{01}, \dots, x_{0, \sigma_1 - \sigma}; x_{11}, \dots, x_{1n_1^1}; \dots; x_{p_1, 1}, \dots, x_{p_1, n_{p_1}^1}; x_1, \dots, x_\lambda\}$$

forman una base para  $X$ .

Esta nueva base de  $X$  se utilizará para obtener la retroalimentación  $(F, G)$  que modifique la estructura al infinito en la forma deseada. Primeramente, la matriz  $G$  se obtiene de la siguiente manera.

Sea  $\delta'_i = x_{i1}$  para  $1 \leq i \leq p_1$ , entonces la matriz  $G$  debe ser tal que:

$$\text{Im } BG = \text{span}\{b_2, \dots, b_{\alpha_1}; \delta'_1, \dots, \delta'_{p_1}\}$$

Observe que esta matriz  $G$  siempre existe, ya que

$$\text{span}\{b_2, \dots, b_{\alpha_1}; \delta'_1, \dots, \delta'_{p_1}\} \in \text{Im } B.$$

La matriz  $F$  la podemos obtener de la siguiente manera

$$F = F_0 + F'$$

donde

$$BF'x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$BF'x_{0j} = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq \sigma_1 - \sigma \quad (4.9)$$

$$BF'A_0^{j-1}b_i = 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq \alpha_1 \text{ y } 1 \leq j \leq \sigma_i \quad (4.10)$$

$$BF'x_j = 0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq \lambda. \quad (4.11)$$

Además, se cumple que [16]

$$x_{i,j+1} = (A_0 + BF')x_{ij} = (A + BF)x_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \text{ y } 1 \leq j \leq n_i^1 - 1$$

$$x_{0,j+1} = (A + BF)x_{0j} \quad \text{para } 1 \leq j \leq \sigma_1 - \sigma - 1$$

y

$$x_{ij} = (A + BF)^{j-1}\delta'_i \in \ker C \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \text{ y } 1 \leq j \leq n_i^1 - 1$$

$$x_{i,n_i^1} \notin \ker C \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1.$$



En [16] se muestra que las matrices  $(F, G)$  obtenidas mediante este procedimiento logran la modificación deseada de la estructura al infinito.

La construcción de las matrices  $(F, G)$  del Teorema 4.2, es decir, la obtención de la retroalimentación que modifique la estructura al infinito del sistema utilizando un solo elemento de la lista  $I_2$ , puede ser usada para obtener la retroalimentación no regular  $(F, G)$  del Teorema 4.1 (retroalimentación general) de una manera algorítmica. La idea de esta construcción es definir un conjunto de listas  $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots\}$  que cumplan con las siguientes 3 condiciones:

i) El conjunto de las listas  $\{p_i^\mu\}$  es inicializado en  $\{p_i\}$ , es decir

$$p_i^0 = p_i \quad \text{para } i \geq 1.$$

ii) Para  $\mu \geq 1$ , las condiciones del Teorema 4.2 son verificadas de la etapa  $\mu - 1$  a la etapa  $\mu$ :

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= p_1^{\mu-1} \\ 0 \leq p_i^\mu - p_i^{\mu-1} &\leq 1 \quad \text{para } i \geq 1 \\ \text{card}\{i \mid p_i^\mu - p_i^{\mu-1} = 1\} &\leq \sigma_\mu. \end{aligned}$$

iii) El conjunto de las listas  $\{p_i^\mu\}$  converge en  $\{p_i'\}$  para  $\mu \leq \alpha_1$ , es decir

$$p_i^\mu = p_i' \quad \text{para } i \geq 1.$$

Si las listas  $\{p_i^\mu\}$  que satisfagan estas condiciones pueden ser definidas, entonces la construcción de la retroalimentación no regular  $(F, G)$  del Teorema 4.1 puede ser resuelta con la ayuda de los siguientes tres puntos:

1) Inicialicemos el sistema  $(A, B, C)$ , para  $\mu = 0$ , de la siguiente manera

$$(A_0, B_0, C) = (A, B, C).$$

2) Para  $\mu \geq 1$  podemos calcular, con ayuda de la construcción de  $(F, G)$  del Teorema 4.2,  $(F_\mu, G_\mu)$  tales que las listas  $I_4$  e  $I_2$  del sistema retroalimentado

$$(A_\mu, B_\mu, C) = (A_{\mu-1} + B_{\mu-1}F_\mu, B_{\mu-1}G_\mu, C)$$

sean respectivamente  $\{n_i^\mu\}$  y  $\{\sigma_i^\mu\}$ , donde

$$\begin{aligned} n_i^\mu &= \text{card}\{j \mid p_j^\mu \geq i\} \quad \text{para } i \geq 1 \\ \sigma_i^\mu &= \sigma_{i+1}^{\mu-1} = \sigma_{i+\mu} \quad \text{para } i \geq 1. \end{aligned}$$

3) La lista  $\{n_i'\}$ , será la lista  $I_4$  del sistema retroalimentado

$$(A_{\alpha_1}, B_{\alpha_1}, C) = (A + BF, BG, C)$$

donde

$$F = F_1 + G_1 F_2 + \cdots + G_1 G_2 \cdots G_{\alpha_1 - 1} F_{\alpha_1}$$

$$G = G_1 G_2 \cdots G_{\alpha_1}$$

La construcción algorítmica de la retroalimentación no regular  $(F, G)$  para el Teorema 4.1 depende del conjunto de listas  $\{p'_i\}$  que cumplan con las tres condiciones requeridas. A continuación se muestra como obtener el conjunto de dichas listas que cumplan con esas condiciones.

Definamos para  $\mu = 0$

$$p_i^0 = p_i \quad \text{para } i \geq 1.$$

Para  $\mu \geq 1$ , sea  $\{\Delta_i^{\mu-1}\}$  la lista de diferencias  $\{p'_i - p_i^{\mu-1}\}$  ordenada en orden no creciente y sea  $\{k_i^{\mu-1}\}$  una única permutación de índices definida por

$$\Delta_i^{\mu-1} = p'_{k_i^{\mu-1}} - p_{k_i^{\mu-1}}^{\mu-1} \quad \text{para } i \geq 1$$

y

si  $\Delta_i^{\mu-1} = \Delta_{i+1}^{\mu-1}$  y  $\Delta_i^{\mu-1} \neq 0$  entonces  $k_i^{\mu-1} > k_{i+1}^{\mu-1}$  para  $i \geq 1$

si  $\Delta_i^{\mu-1} = \Delta_{i+1}^{\mu-1} = 0$  entonces  $k_i^{\mu-1} < k_{i+1}^{\mu-1}$  para  $i \geq 1$ .

Sean

$$l_1^{\mu-1} = \text{card} \{j \mid \Delta_j^{\mu-1} > \Delta_{\sigma_\mu}^{\mu-1}\}$$

$$l_2^{\mu-1} = \text{card} \{j \mid \Delta_j^{\mu-1} \geq \Delta_{\sigma_\mu}^{\mu-1} \text{ y } \Delta_j^{\mu-1} \geq 1\}$$

y definamos  $\Delta_i^\mu$  de la siguiente manera

$$\Delta_i^\mu = \begin{cases} \Delta_i^{\mu-1} - 1 & \text{para } 1 \leq i \leq l_1^{\mu-1} \\ \Delta_i^{\mu-1} & \text{para } l_1^{\mu-1} + 1 \leq i \leq l_1^{\mu-1} + l_2^{\mu-1} - \sigma_\mu \\ \Delta_i^{\mu-1} - 1 & \text{para } l_1^{\mu-1} + l_2^{\mu-1} - \sigma_\mu + 1 \leq i \leq l_2^{\mu-1} \\ \Delta_i^{\mu-1} & \text{para } l_2^{\mu-1} + 1 \leq i \end{cases}$$

Finalmente, se define  $\{p_i^\mu\}$  y  $\{n_i^\mu\}$ , de la siguiente manera

$$p_{k_i^{\mu-1}}^\mu = p'_{k_i^{\mu-1}} - \Delta_i^\mu \quad \text{para } i \geq 1,$$

$$n_i^\mu = \text{card} \{j \mid p_j^\mu \geq i\} \quad \text{para } i \geq 1.$$

Por medio del siguiente resultado podemos ver que el conjunto de listas  $\{p_1^\mu, p_2^\mu, \dots\}$  cumplen con las condiciones requeridas.

**Lema 4.1** Para  $\mu \geq 1$ , las siguientes propiedades se cumplen

- i)  $\{p_i^\mu\}$  es una lista no creciente de enteros positivos,
- ii)  $p_1^\mu = p'_1 = p_1$ ,

$$iii) 0 \leq p_i^\mu - p_i^{\mu-1} \leq 1 \quad \text{para } i \geq 1,$$

$$iv) \text{card}\{i \mid p_i^\mu - p_i^{\mu-1} = 1\} \leq \sigma_\mu,$$

$$v) \sum_{j=1}^i \alpha_j^\mu \geq \sum_{j=1}^i \Delta_j^\mu \quad \text{para } i \geq 1.$$

**Demostración.** Véase [16]. ■

Una vez obtenidas las listas  $n_i^\mu$  podemos calcular de una manera secuencial  $F = F_1 + G_1 F_2 + \dots + G_1 G_2 \dots G_{\alpha_1-1} F_{\alpha_1}$  y  $G = G_1 G_2 \dots G_{\alpha_1}$  para el Teorema 4.1. Las matrices  $(F, G)$ , por la forma en que están definidas, serán una serie de  $\alpha_1$  cadenas de retroalimentaciones, donde  $\alpha_1$  es el número de elementos de la lista  $I_2$ .

A continuación, veremos un ejemplo de como puede ser modificada la estructura al infinito de un sistema y como calcular la retroalimentación  $(F, G)$  correspondiente.

**Ejemplo 4.1** Sea el sistema  $(A, B, C)$  dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix}.$$

Las listas de Morse de este sistema, obtenidas por ejemplo de los invariantes de Kronecker de la matriz sistema  $P(s)$  (ver Ejemplo 2.5), son las siguientes:

$$I_1 = I_3 = \{\}$$

$$I_2 = \{\sigma_i\} = \{2, 2\}$$

$$I_4 = \{n_i\} = \{1, 1\}.$$

Para este sistema con órdenes de los ceros al infinito  $\{1, 1\}$ , las listas asignables como nuevos órdenes de los ceros al infinito, es decir, el conjunto de todas las listas  $\{n'_i\}$  que cumplen con las condiciones del Teorema 4.1, son las siguientes

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 2\}$$

es decir, existe una retroalimentación de estado  $(F, G)$  tal que los nuevos órdenes de los ceros al infinito del sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  puede ser cualquiera de estas listas  $\{n'_i\}$ .

Analicemos un caso en particular, digamos  $\{n'_i\} = \{4, 2\}$ , veamos como esta lista cumple con las condiciones del teorema y calculemos la retroalimentación  $(F, G)$  tal que modifique dicha estructura.

Para este sistema, tenemos que las listas duales de  $\{n_i\}$ ,  $\{\sigma_i\}$  y  $\{n'_i\}$  son, respectivamente,

$$p_i = \text{card}\{j \mid n_j \geq i\} = \{2\},$$

$$\alpha_i = \text{card}\{j \mid \sigma_j \geq i\} = \{2, 2\},$$

y

$$p'_i = \text{card}\{j \mid n'_j \geq i\} = \{2, 2, 1, 1\}.$$

La lista  $\Delta_i$ , definida en el Teorema 4.1, está dada por  $\Delta_i = \{p'_i - p_i\} = \{2, 1, 1\}$ .

Verifiquemos las condiciones, necesarias y suficientes, del Teorema 4.1.

Como  $p_1 = p'_1$  (el número de ceros al infinito en lazo abierto y en lazo cerrado es el mismo), entonces la condición dada por (4.3) se reduce a

$$p'_2 \geq p_2$$

$$p'_3 \geq p_3$$

$$p'_4 \geq p_4,$$

es decir,

$$2 \geq 0$$

$$1 \geq 0$$

$$1 \geq 0$$

por lo tanto, la primera condición del Teorema 4.1 se cumple. Como vimos anteriormente, esta condición siempre se cumple para sistemas invertibles por la derecha, como en este caso. Esto se puede ver del hecho que  $p'_i \geq p_i$  debido a que  $n'_i \geq n_i$ .

Para la segunda condición, dada por (4.4), si  $i = 1, 2, 3$  resulta

$$\alpha_1 \geq \Delta_1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \Delta_1 + \Delta_2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

es decir,

$$2 \geq 2$$

$$4 \geq 3$$

$$4 \geq 4$$

por lo que la lista  $\{n'_i\} = \{4, 2\}$  es asignable.

Procedamos a calcular la retroalimentación no regular  $(F, G)$  tal que modifique los ceros al infinito.

Para este sistema,  $p'_i = \{2, 2, 1, 1\}$ ,  $p_i^0 = \{2, 0, 0, 0\}$  y  $\Delta_i^0 = \{2, 1, 1, 0\}$

Considerando la lista  $\Delta_i^{\mu-1}$ , para  $\mu = 1$ , tenemos lo siguiente:

De la ecuación  $\Delta_i^0 = p'_{k^0} - p_{k^0}^0$  para  $i \geq 1$ , resulta que

$$\Delta_1^0 = p'_{k_1^0} - p_{k_1^0}^0$$

$$\Delta_2^0 = p'_{k_2^0} - p_{k_2^0}^0$$

$$\Delta_3^0 = p'_{k_3^0} - p_{k_3^0}^0$$

$$\Delta_4^0 = p'_{k_4^0} - p_{k_4^0}^0$$

Ahora bien, para la ecuación  $\Delta_i^0 = p'_{k_i^0} - p_{k_i^0}^0$ , tal que cumpla con las siguientes condiciones

$$\text{si } \Delta_i^0 = \Delta_{i+1}^0 \text{ y } \Delta_i^0 \neq 0 \text{ entonces } k_i^0 > k_{i+1}^0 \text{ para } i \geq 1$$

$$\text{si } \Delta_i^0 = \Delta_{i+1}^0 = 0 \text{ entonces } k_i^0 < k_{i+1}^0 \text{ para } i \geq 1$$

tenemos que

$$\{2, 1, 1, 0\} = \{p'_2 - p_2^0, p'_4 - p_4^0, p'_3 - p_3^0, p'_1 - p_1^0\}$$

por lo que resulta

$$k_i^0 = \{2, 4, 3, 1\}.$$

Las listas  $l_1^{\mu-1}$  y  $l_2^{\mu-1}$  están dadas, en este caso, por

$$l_1^0 = \text{card}\{j \mid \Delta_j^0 > \Delta_{\sigma_1}^0\} = 1$$

$$l_2^0 = \text{card}\{j \mid \Delta_j^0 \geq \Delta_{\sigma_1}^0 \text{ y } \Delta_j^0 \geq 1\} = 3$$

Por la definición de  $\Delta_i^\mu$  tenemos que

$$\Delta_i^1 = \begin{cases} \Delta_i^0 - 1 & \text{para } 1 \leq i \leq 1 \\ \Delta_i^0 & \text{para } 2 \leq i \leq 2 \\ \Delta_i^0 - 1 & \text{para } 3 \leq i \leq 3 \\ \Delta_i^0 & \text{para } i \geq 4 \end{cases}$$

por lo tanto  $\Delta_i^1 = \{1, 1, 0, 0\}$ .

Como  $p_{k_i^0}^1 = p'_{k_i^0} - \Delta_i^1$  para  $i \geq 1$ , entonces  $p_i^1 = \{2, 1, 1\}$  y como consecuencia  $n_i^1 = \{3, 1\}$ .

Consideremos ahora  $\mu = 2$ . De la siguiente ecuación

$$\Delta_i^1 = p'_{k_i^1} - p_{k_i^1}^1 \text{ para } i \geq 1$$

tenemos que

$$\{1, 0, 0, 0\} = \{p'_4 - p_4^1, p'_2 - p_2^1, p'_1 - p_1^1, p'_3 - p_3^1\}$$

la cual cumple con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \text{si } \Delta_i^1 = \Delta_{i+1}^1 \text{ y } \Delta_i^1 \neq 0 \text{ entonces } k_i^1 > k_{i+1}^1 \text{ para } i \geq 1 \\ \text{si } \Delta_i^1 = \Delta_{i+1}^1 = 0 \text{ entonces } k_i^0 < k_{i+1}^0 \text{ para } i \geq 1 \end{aligned}$$

podemos ver que

$$k_i^0 = \{4, 2, 1, 3\}$$

Las listas  $l_1^1$  y  $l_2^1$  están dadas por

$$\begin{aligned} l_1^1 &= \text{card}\{j \mid \Delta_j^1 > \Delta_{\sigma_2}^1\} = 0 \\ l_2^1 &= \text{card}\{j \mid \Delta_j^1 \geq \Delta_{\sigma_2}^1 \text{ y } \Delta_j^1 \geq 1\} = 2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\Delta_i^2 = \begin{cases} \Delta_i^1 - 1 & \text{para } 1 \leq i \leq 0 \\ \Delta_i^1 & \text{para } 1 \leq i \leq 0 \\ \Delta_i^1 - 1 & \text{para } 0 \leq i \leq 2 \\ \Delta_i^1 & \text{para } i \geq 3 \end{cases}$$

esto es  $\Delta_i^2 = \{0\}$ .

Como  $p_{k_i^1}^2 = p_{k_i^1}^1 - \Delta_i^2$  para  $i \geq 1$ , entonces  $p_i^1 = \{2, 1, 1\}$  y por lo tanto  $n_i^2 = \{n_i^1\} = \{4, 2\}$ .

De estas listas  $\{n_i^1\}$  y  $\{n_i^2\}$  puede verse entonces que la modificación de estructura al infinito se llevará a cabo en 2 etapas, primero con la retroalimentación  $(F_1, G_1)$  que lleve los órdenes de los ceros al infinito de  $\{1, 1\}$  a  $\{n_i^1\} = \{3, 1\}$ , y posteriormente con  $(F_2, G_2)$  que lleve  $\{n_i^1\} = \{3, 1\}$  a  $\{n_i^2\} = \{4, 2\}$ .

Entonces, la retroalimentación global que modifique los órdenes de los ceros al infinito del sistema de  $\{1, 1\}$  a  $\{4, 2\}$  estará dada por  $(F_1 + G_1 F_2, G_1 G_2)$ .

De los algoritmos dados por (3.19), (3.20) y (3.21), tenemos que<sup>3</sup> los subespacios  $V^*$ ,  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$  están dados por

$$V^* = \mathcal{R}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^6$$

y además

$$\text{Im } B \cap \mathcal{R}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores  $b_i \in \text{Im } B \cap \mathcal{R}^*$  que cumplen con la descomposición del subespacio  $\mathcal{R}^*$ , ecuación 4.1, son los siguientes

<sup>3</sup>Estrictamente hablando, los subespacios  $V^*$ ,  $\mathcal{R}^*$ ,  $S^*$  y  $B \cap \mathcal{R}^*$  son el span de los vectores que componen cada subespacio, pero a manera de notación, se omitirá la palabra span.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in (\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*), \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in (\text{Im } B \cap \mathcal{R}^*),$$

es decir, estos vectores cumplen con  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ , donde  $\mathcal{R}_1 = \text{span}\{b_1, A_0 b_1\}$  y  $\mathcal{R}_2 = \text{span}\{b_2, A_0 b_2\}$ . Nótese que si  $\mathcal{R}_1 = \text{span}\{b_2, A_0 b_2\}$  y  $\mathcal{R}_2 = \text{span}\{b_1, A_0 b_1\}$  también cumple con la descomposición, por lo que, la forma de tomar los vectores  $b_i$  para la descomposición no es única.

De una manera similar, podemos encontrar vectores  $\delta_i \in \text{Im } B$ , tales que cumplan con la descomposición del subespacio  $S^*$ , ecuación (4.2). Si tomamos  $\delta_i$  como sigue

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Im } B \quad \text{y} \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Im } B$$

tenemos que  $S^* = \mathcal{R}^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ , donde  $\mathcal{L}_1 = \text{span}\{\delta_1\}$  y  $\mathcal{L}_2 = \text{span}\{\delta_2\}$ . Obsérvese que, de una manera similar a los vectores  $b_i$ , la forma de tomar los vectores  $\delta_i$  para la descomposición no es única.

En dicha descomposición, para  $A_0 = A + BF_0^1$ , tenemos que  $F_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para la familia de vectores  $x_{ij}$ , por las ecuaciones (4.5) y (4.6), tenemos que

$$x_{11} = \delta_0 = b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = A_0 b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x_{21} = \delta_1 + \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación,  $\text{Im } BG_1 = \text{span}\{b_2, \delta'_1, \delta'_2\}$ , donde  $\delta'_1 = x_{11}$  y  $\delta'_2 = x_{21}$ , tenemos que

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 1$  de las ecuaciones

$$\begin{aligned} BF_1' x_{ij} &= 0 & \text{si } j &\neq 2 \\ BF_1' x_{ij} &= \delta_i & \text{si } j = 2 \quad \text{y} \quad i = 1 \end{aligned}$$

tenemos que  $F_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , y como  $F_1 = F_0^1 + F_1'$ , entonces  $F_1 = F_1'$ .

Para el sistema retroalimentado  $(A + BF_1, BG_1, C)$ , donde

$$A + BF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BG_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1/s^3 & 1/s \\ 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

tenemos las listas de Morse  $I_1 = \{\}$ ,  $I_2 = \{2\}$ ,  $I_3 = \{\}$  e  $I_4 = n_i^1 = \{3, 1\}$ .

Para el sistema  $(A + BF_1, BG_1, C)$ , tenemos que  $\mathcal{R}^*$ ,  $V^*$  y  $S^*$ , están dados por

$$V^* = \mathcal{R}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^6$$

De una manera similar al procedimiento del cálculo de la retroalimentación  $(F_1, G_1)$ , para el sistema  $(A + BF_1, BG_1, C)$ , se obtiene, de la descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$ , lo siguiente

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in (\text{Im}(BG_1) \cap \mathcal{R}^*), \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Im}(BG_1) \quad \text{y} \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Im}(BG_1).$$

De la ecuación  $(A_0 = A + BF_1 + BG_1F_0^2)$ , y para esta descomposición, tenemos

$$F_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,  $x_{11} = b_1 = \delta_1'$  y  $x_{21} = \delta_1 = \delta_2'$ .

Ahora bien, de la ecuación  $BG_1G_2 = \text{span}\{\delta_1', \delta_2'\}$  resulta



$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y de las ecuaciones

$$\begin{aligned} BG_1 F_2' x_{ij} &= 0 & \text{si } j \neq 1 \\ BG_1 F_2' x_{ij} &= \delta_i & \text{si } j = 1 \text{ y } i = 1, 2 \end{aligned}$$

obtenemos

$$F_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $F_0^2 = 0$ , entonces  $F_2 = F_2'$ .

Finalmente, las matrices  $F$  y  $G$  se obtienen como

$$F = F_1 + G_1 F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = G_1 G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  está dada por

$$H_{F,G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4} & \frac{s+1}{s^3} \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

y este sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  tiene como listas de Morse  $I_1 = \{\}$ ,  $I_2 = \{\}$ ,  $I_3 = \{\}$  e  $I_4 = n'_i = \{4, 2\}$ , de donde podemos ver que los órdenes de los ceros al infinito del sistema retroalimentado son  $\{4, 2\}$ , es decir, la retroalimentación  $(F, G)$  produce la modificación deseada de la estructura al infinito del sistema.

En el ejemplo anterior, para la descomposición de los subespacios  $R^*$  y  $S^*$ , resultó que  $F_0^1 = 0$  y  $F_0^2 = 0$ , es decir, el sistema cumple de entrada con la descomposición de estos subespacios, por lo que se simplifican de cierta manera los cálculos. Para sistemas en los que  $F_0 \neq 0$ , es decir, que no cumplan con la descomposición de los subespacios  $R^*$  y  $S^*$  se complica de una manera notable la obtención de la retroalimentación  $(F, G)$  que modifique la estructura al infinito, debido a que no son tan evidentes las condiciones de la descomposición. Además, para sistemas en los que es necesario obtener la retroalimentación que modifique la estructura al infinito en varios pasos (como en el Ejemplo 4.1) y que  $F_0 \neq 0$ , son aún más complicados los cálculos, debido a que es necesario repetir parte del procedimiento varias veces (a lo más  $\alpha_1$  veces), incluyendo la descomposición.

# 5. Resultados.

En este capítulo se presentan los resultados principales obtenidos en este trabajo de tesis. En la sección 5.1 se demostrará que la forma semicanónica de Morse (introducida en la sección 2.5) cumple con la descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$ , presentada en el Capítulo 4. A partir de la forma semicanónica de Morse, en la sección 5.2 se presenta un procedimiento para obtener una estructura al infinito deseada para sistemas con un solo elemento en la lista  $I_2$ . Una vez lograda esta modificación de la estructura al infinito, en la sección 5.3 se muestra como obtener una retroalimentación posterior que produce una función de transferencia en lazo cerrado triangular inferior. Finalmente, en la sección 5.4 se presentan ejemplos ilustrativos de los procedimientos anteriores.

## 5.1 Relación entre la forma semicanónica de Morse y la descomposición de los subespacios $\mathcal{R}^*$ y $S^*$

En esta sección se demostrará que la forma semicanónica de Morse, vista en la sección 2.5, cumple con la descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$  presentada en la sección 4.1, donde  $\mathcal{R}^*$  es el máximo subespacio de controlabilidad contenido en  $\ker C$  y  $S^*$  es el mínimo subespacio (A,C)-invariante condicionado que contiene  $\text{Im } B$ . Es necesario recordar que, esta descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$  es utilizada en el Capítulo 4 en el procedimiento de modificación de la estructura al infinito desde un enfoque geométrico. Veamos pues, como se relaciona la forma semicanónica de Morse y dicha descomposición, por medio del siguiente resultado.

**Teorema 5.1** Sea un sistema en la forma semicanónica de Morse  $(A_s, B_s, C_s)$ , y defínanse los vectores  $\delta_i = \{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\}$  y  $b_i = \{\bar{b}_m, \bar{b}_{m-1}, \dots, \bar{b}_{m-p}\}$ , donde  $\bar{b}_i$  son las columnas de  $B_s$ , es decir,  $\delta_i$  son las columnas correspondientes a la matriz  $B_4$  tomadas en orden de derecha a izquierda (contrario a la forma semicanónica de Morse) y, de una manera similar,  $b_i$  son las columnas correspondientes a la matriz  $B_2$  en orden de derecha a izquierda. Entonces se cumple que:

- 1) Los vectores  $C_s A_s^{n_i-1} \delta_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , son linealmente independientes
- 2)  $A_s^{j-1} \delta_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq n_i - 1$  y  $1 \leq i \leq p$
- 3)  $A_s^{n_i-1} \delta_i \notin \ker C$  para  $1 \leq i \leq p$
- 4)  $b_i \notin \text{span}\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$  para  $1 \leq i \leq m - p$
- 5)  $A_s^{\sigma_i} b_i = 0$  para  $1 \leq i \leq \alpha_1$
- 6)  $A_s^{j-1} b_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq \sigma_i$  y  $1 \leq i \leq \alpha_1$ ,
- 7)  $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\alpha_1}$

donde

$$\mathcal{R}_i = \text{span}\{b_i, A_s b_i, \dots, A_s^{n_i-1} b_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq \alpha_1$$

$$8) S^* = \mathcal{R}^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1}$$

donde

$$\mathcal{L}_i = \text{span}\{\delta_i, A_s \delta_i, \dots, A_s^{n_i-1} \delta_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1.$$

### Demostración.

1) Si consideramos la lista  $\{n_i\}$  en orden no creciente y que  $\delta_i = \{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\}$ , podemos ver por la forma de los bloques de  $C_s$  y  $A_s$ , que los  $p$  vectores  $C_s A_s^{n_i-1} \delta_i$  son linealmente independientes, y corresponden a las columnas de la siguiente matriz, de dimensiones  $p \times p$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & & 0 \\ * & * & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & & 1 \end{bmatrix}$$

donde los elementos  $*$  de la primera columna de la matriz son los elementos diferentes de cero de la primera columna de  $C_s$ , los elementos  $*$  de la segunda columna de la matriz son los elementos diferentes de cero de la primera columna del segundo bloque de  $C_s$  y así sucesivamente para las demás columnas.

Cabe mencionar que esta condición dada por 1), se cumple para cualquier sistema  $(A, B, C)$ , no necesariamente en su forma semicanónica de Morse, es decir, los vectores  $CA^{n_i-1} \delta_i$  son linealmente independientes para cualquier sistema, si  $\delta_i$  cumple con la descomposición de los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$  presentada en la sección 4.1.

2) y 3) Si tomamos  $\delta_i$  y la lista  $\{n_i\}$  como en el punto anterior de la demostración, tenemos que

$$i) A_s^{j-1} \delta_i \in \ker C \quad \text{para } 1 \leq j \leq n_i - 1, \quad \text{y } 1 \leq i \leq p_1$$

$$ii) A_s^{n_i-1} \delta_i \notin \ker C \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1$$

$$iii) A^{n_i} \delta_i = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1$$

por lo siguiente

i) Los valores diferentes de cero en el conjunto de vectores  $A_s^{j-1} \delta_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq n_i - 1$ , corresponden a los ceros del bloque correspondiente a  $n_i$  en la matriz  $C_s$ , es decir, las posiciones de los valores diferentes de cero de los vectores  $A_s^{j-1} \delta_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq n_i - 1$  corresponden a las posiciones de los ceros de los bloques  $(1 \times n_i)$  en la matriz  $C_s$ , por lo que  $A_s^{j-1} \delta_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq n_i - 1$ .

ii) Podemos ver que, los valores diferentes de cero en los vectores  $A_s^{n_i-1} \delta_i$  corresponden, precisamente, al 1 del bloque  $(1 \times n_i)$  en la matriz  $C_s$ , por lo que  $A_s^{n_i-1} \delta_i \notin \ker C$ .

iii) Nótese que  $A_s^{j-1} \delta_i \neq 0$  para  $1 \leq j \leq n_i$  (esto, debido al bloque  $J_{n_i}$ , correspondiente en la matriz  $A_s$ ). Ahora bien,  $A^{n_i} \delta_i = 0$ , porque la matriz  $J_{n_i}$  es nilpotente de grado  $n_i$ , es decir, en la matriz  $A^{n_i}$  el bloque correspondiente  $J_{n_i}$ , se convierte en cero y por lo tanto  $A^{n_i} \delta_i = 0$ .

4) Como  $\delta_i = \{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\}$  y  $b_i = \{\bar{b}_m, \bar{b}_{m-1}, \dots, \bar{b}_{m-p}\}$  entonces  $b_i \notin \text{span}\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ . Además, nótese que  $C_s A_s^{n_i-1} \delta_i$  son linealmente independientes (punto 1), mientras que  $C_s A_s^{n_i-1} b_i = 0$ .

5) Si consideramos que  $b_i = \{\bar{b}_m, \bar{b}_{m-1}, \dots, \bar{b}_{m-p}\}$  y la lista  $I_2 = \{\sigma_i\}$  en orden no creciente, podemos ver que:

$A_s^{j-1}b_i \neq 0$  para  $1 \leq j \leq \sigma_i$  (esto, debido al bloque  $J_{\sigma_i}$  correspondiente en la matriz  $A_s$ ). Ahora bien,  $A^{\sigma_i}b_i = 0$ , porque la matriz  $J_{\sigma_i}$  es nilpotente de grado  $\sigma_i$ , es decir, en la matriz  $A^{\sigma_i}$  el bloque correspondiente  $J_{\sigma_i}$ , se convierte en cero y por lo tanto  $A^{\sigma_i}b_i = 0$ .

6) Se puede ver que  $A_s^{j-1}b_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq \sigma_i$ , del siguiente hecho:

Las últimas  $\sum_{i=1}^{\alpha_1} \sigma_i$  columnas de  $C_s$  son cero y los elementos diferentes de cero de los vectores  $A_s^{j-1}b_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq \sigma_i$ , se encuentran en esas posiciones, por lo que  $A_s^{j-1}b_i \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq \sigma_i$ .

7) y 8) Para la forma semicanónica de Morse, que está definida sólo para sistemas con listas  $I_1$  e  $I_3$  vacías, se cumple que  $S^* = X$ , y como  $\mathcal{R}^* = V^* \cap S^*$ , entonces  $\mathcal{R}^* = V^*$ . El hecho de que  $S^* = X$  para la forma semicanónica de Morse, se justificará al final de esta demostración.

Apoyémonos en el siguiente lema.

**Lema 5.1** Sea  $\bar{B}$  cualquier subespacio tal que  $\text{Im } B = \bar{B} \oplus \text{Im } B \cap V^*$  y  $\bar{S}^* = \bar{S}_n$  donde  $\bar{S}_0 = 0$  y  $\bar{S}_i = A(\ker C \cap \bar{S}_{i-1}) + \bar{B}$ . Entonces

$$S^* = \bar{S}^* \oplus V^* \cap S^*.$$

La demostración del resultado anterior se encuentra en [21].

Tomemos  $\bar{B} = \text{span}\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$  y  $V^* \cap \text{Im } B = \text{span}\{b_1, \dots, b_{m-p}\}$ ; entonces

$$\text{Im } B = \bar{B} \oplus \text{Im } B \cap V^* = \text{span}\{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\} \oplus \text{span}\{\bar{b}_m, \bar{b}_{m-1}, \dots, \bar{b}_{m-p}\}.$$

Para el algoritmo de  $\bar{S}^*$ , tomemos  $\bar{B} = \text{span}\{\delta_1\}$ . Por otro lado, del punto 2) y 3) tenemos que:

a)  $A_s^{j-1}\delta_1 \in \ker C$  para  $1 \leq j \leq n_1 - 1$ .

b)  $A_s^{n_1-1}\delta_1 \notin \ker C$

c)  $A^{n_1}\delta_1 = 0$

Ahora bien, aplicando el algoritmo del subespacio  $\bar{S}^*$  a  $\bar{B} = \text{span}\{\delta_1\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= 0 \\ \bar{S}_1 &= \text{span}\{\delta_1\} \\ \bar{S}_2 &= A(\ker C \cap \text{span}\{\delta_1\}) + \text{span}\{\delta_1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

y debido al punto anterior a), tenemos que  $\overline{\bar{S}_{n_1-2}} = \text{span}\{\delta_1, \dots, A^{n_1-2}\delta_1\}$ , que son los vectores que pertenecen al kernel de  $C_s$  y por lo tanto sobreviven a la intersección del algoritmo. Además, del punto b), tenemos que

$$\overline{\bar{S}_{n_1-1}} = \text{span}\{\delta_1, \dots, A^{n_1-1}\delta_1\},$$

y  $A^{n_1-1}\delta_1 \notin \ker C$ .

Finalmente por c) tenemos que  $\overline{\bar{S}_{n_1-1}} = \bar{S}_{n_1} = \bar{S}_n = \bar{S}^*$ .

Como los vectores  $\{\delta_1, \dots, A_s^{n_1-1}\delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_0^{n_{p_1}-1}\delta_{p_1}\}$  son linealmente independientes para la forma semicanónica de Morse, entonces si tomamos  $\bar{B} = \text{span}\{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\}$ , tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_0 &= 0 \\
\overline{S}_1 &= \text{span}\{\overline{b}_p, \overline{b}_{p-1}, \dots, \overline{b}_1\} \\
\overline{S}_2 &= A(\ker C \cap \text{span}\{\overline{b}_p, \overline{b}_{p-1}, \dots, \overline{b}_1\}) + \text{span}\{\overline{b}_p, \overline{b}_{p-1}, \dots, \overline{b}_1\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora, por *i*), *ii*) y *iii*) del punto 2) y 3), tenemos que

$$\overline{S}_n = \overline{S}^* = \text{span}\{\delta_1, \dots, A_s^{n_1-1}\delta_1; \delta_2, \dots, A_s^{n_2-1}\delta_2; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_s^{n_{p_1}-1}\delta_{p_1}\}$$

o bien

$$\overline{S}^* = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1}$$

donde

$$\mathcal{L}_i = \text{span}\{\delta_i, A_0\delta_i, \dots, A_0^{n_i-1}\delta_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1$$

y por el Lema 5.1, llegamos a

$$S^* = \mathcal{R}^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1}.$$

Como  $S^* = X$  para el sistema considerado, entonces  $\mathcal{R}^*$  debe ser tal que, una base de la suma de subespacios  $\mathcal{R}^* \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1}$  forme una base de  $X$ , y como:

$$\{b_1, A_s b_1, \dots, A_s^{\sigma_1-1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_s^{\sigma_{\alpha_1}-1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_s^{n_1-1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_s^{n_{p_1}-1} \delta_{p_1}\}$$

forman una base de  $X$ , entonces tenemos que:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\alpha_1}$$

donde

$$\mathcal{R}_i = \text{span}\{b_i, A_0 b_i, \dots, A_0^{\sigma_i-1} b_i\} \quad \text{para } 1 \leq i \leq \alpha_1.$$

■

Observe que el resultado anterior se cumple independientemente de los valores diferentes de cero que tengan las matrices  $H_2$  y  $L_{ij}$  en la forma semicanónica de Morse.

El hecho de que  $S^* = X$  para la forma semicanónica de Morse, se puede demostrar de una manera similar a la demostración de que  $\overline{S}^* = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{p_1}$ , la diferencia es que se toma el algoritmo de construcción de  $S^*$  y se toma  $\text{Im } B$  como primer paso, y por los puntos 2), 3), 5) y 6), considerados en esta demostración llegamos a que:

$$S^* = \text{span}\{b_1, A_s b_1, \dots, A_s^{\sigma_1-1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_s^{\sigma_{\alpha_1}-1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_s^{n_1-1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_s^{n_{p_1}-1} \delta_{p_1}\} = X.$$

## 5.2 Modificación de estructura al infinito a partir de la forma semicanónica de Morse.

En esta sección se presenta un procedimiento para la modificación de la estructura al infinito de un sistema, suponiendo que el sistema se encuentra en su forma semicanónica de Morse. Como se demostró en la sección anterior, para un sistema dado en esta forma, los subespacios  $\mathcal{R}^*$  y  $S^*$  ya se encuentran en una descomposición adecuada, punto de partida para la modificación de la estructura al infinito. Además de esta ventaja, la forma semicanónica de Morse permite apreciar de una manera más clara los límites que se tienen en la modificación de la estructura al infinito, en función de los elementos de las listas  $I_4$  e  $I_2$ , que de hecho corresponden al tamaño de los bloques diagonales en las submatrices  $A_4$  y  $A_2$  de  $A_s$ . También, como se muestra en el procedimiento, a partir de las columnas de las matrices  $(A_s, B_s, C_s)$  se pueden identificar y asignar fácilmente los vectores para encontrar la retroalimentación correspondiente que modifique la estructura al infinito de una manera deseada.

Para la forma semicanónica de Morse, además de la condición de que las listas  $I_1$  e  $I_3$  son vacías, nos restringiremos al caso de que la lista  $I_2$  tiene solamente un elemento, esto es  $\alpha_1 = 1$ . Por lo tanto, la función de transferencia del sistema retroalimentado  $H_{F,G}(s)$  será una matriz de dimensiones  $p \times p$ , es decir, el sistema en lazo cerrado tendrá el mismo número de entradas y de salidas. Este hecho se utiliza en la siguiente sección, para encontrar una retroalimentación que, además de la modificación de la estructura al infinito deseada, permita obtener una estructura particular para la función de transferencia del sistema retroalimentado.

En [12] se muestra como obtener la forma semicanónica de Morse de un sistema  $(A, B, C)$ , utilizando el llamado "interactor extendido" del sistema. Este punto no será objeto de estudio del presente trabajo, y para el procedimiento presentado a continuación, supondremos que el sistema ya se encuentra en su forma semicanónica de Morse.

### Procedimiento:

Sea el sistema en su forma semicanónica de Morse  $(A_s, B_s, C_s)$ , con listas  $I_2 = \sigma_1$  e  $I_4 = \{n_i\}$  y, sean  $\{\alpha_i\}$ ,  $\{p_i\}$  las listas duales de  $I_2$  e  $I_4 = \{n_i\}$ , respectivamente.

Sea  $\{n'_i\}$  una lista de enteros positivos asignable, por retroalimentación no regular, como nueva lista  $I_4$  del sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$ , y  $\{p'_i\}$  su lista dual. Entonces la retroalimentación  $(F, G)$  tal que modifique la estructura al infinito de la manera deseada, puede ser calculada de la siguiente manera:

1.- Considerar las listas  $\{n_i\}$ ,  $\{p_i\}$ ,  $\{n'_i\}$ ,  $\{p'_i\}$ , y  $\{\alpha_i\}$  en orden no creciente.

2.- Defínense los vectores  $\delta_i$  como en el Teorema 5.1, es decir,  $\delta_i = \{\delta_1, \dots, \delta_{p_i}\} = \{\bar{b}_p, \bar{b}_{p-1}, \dots, \bar{b}_1\}$ , donde  $\bar{b}_i$  son las columnas de la matriz  $B_s$ .

3.- Como mencionamos anteriormente, para este procedimiento  $\alpha_1 = 1$ . Entonces, de  $b_i = \{b_1, \dots, b_{\alpha_i}\}$ , defínase el vector  $b_1 = \bar{b}_m$ , donde  $\bar{b}_m$  es la última columna de  $B_s$ .

4.- Defínamos la familia de vectores  $x_{ij}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_{ij} &= A_s^{j-1} \delta_{i-1} \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \quad \text{y } 1 \leq j \leq n'_i - n_i \\ x_{ij} &= A_s^{j-1} \delta_{i-1} + A_s^{n_i - n'_i + j - 1} \delta_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq p_1 \quad \text{y } n'_i - n_i < j \leq n'_i \\ x_{0j} &= A_s^{\sigma_1 + j - 1} \delta_0 \quad \text{para } 1 \leq j \leq \sigma_1 - \sigma \end{aligned}$$

donde

$$\delta_0 = b_1$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p_1} (n'_i - n_i)$$

5.- Obtener  $G$ , de la siguiente manera:

$$\text{Im } B_s G = \text{span} \{ \delta'_1, \dots, \delta'_{p_1} \}$$

donde  $\delta'_i = x_{i1}$  para  $1 \leq i \leq p_1$ .

6.- Finalmente, obtener la matriz de retroalimentación  $F$  de la siguiente manera:

$$i) B_s F x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases}$$

$$ii) B_s F x_{0j} = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq \sigma_1 - \sigma$$

Obsérvese que, a diferencia de la matriz  $F'$ , definida por las ecuaciones (4.8) a (4.11) en la sección 4.3, en este caso la matriz  $F$ , está definida solamente por las condiciones dadas por (4.8) y (4.9) debido a lo siguiente:

Los vectores  $\{x_1, \dots, x_\lambda\}$  son tales que

$$\{b_1, A_s b_1, \dots, A_s^{\sigma_1-1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_s^{\sigma_{\alpha_1}-1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_s^{n_1-1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_s^{n_{p_1}-1} \delta_{p_1}; x_1, \dots, x_\lambda\}$$

formen una base de  $X$ .

Ahora bien, para la forma semicanónica de Morse el conjunto de vectores

$$\{b_1, A_s b_1, \dots, A_s^{\sigma_1-1} b_1, \dots; b_{\alpha_1}, \dots, A_s^{\sigma_{\alpha_1}-1} b_{\alpha_1}; \delta_1, \dots, A_s^{n_1-1} \delta_1; \dots; \delta_{p_1}, \dots, A_s^{n_{p_1}-1} \delta_{p_1}\}$$

forman una base de  $X$ . Entonces los vectores  $\{x_1, \dots, x_\lambda\}$  no existen para la forma semicanónica de Morse, y por lo tanto, para este procedimiento, no aplica la condición dada por (4.11). Además, para este procedimiento, estamos considerando sistemas en los que  $\alpha_1 = 1$ , entonces la condición dada por (4.10), tampoco aplica para este procedimiento.

Más adelante, en la sección 5.4, se presentan algunos ejemplos de como aplicar este procedimiento para la modificación de la estructura al infinito, desde la forma semicanónica de Morse.

### 5.3 Triangularización de la función de transferencia en lazo cerrado.

En la sección anterior se estableció un procedimiento relativamente sencillo para modificar la estructura al infinito de un sistema mediante retroalimentación no regular a partir de su representación en forma semicanónica de Morse. Evidentemente, esta modificación de la estructura al infinito, importante y complicada como puede ser, no resuelve por si mismo ningún problema fundamental de control, es decir, es solamente una etapa intermedia para atacar algunos problemas cuyas condiciones de solución dependen de la estructura al infinito del sistema.

En esta sección se plantea, además de la modificación de la estructura al infinito mediante retroalimentación de estado no regular considerada en la sección anterior, aplicar otra retroalimentación (regular) posterior para llevar la función de transferencia del sistema retroalimentado a una forma triangular inferior. Esto con objeto de tener clara interdependencia en términos de nuevas entradas controlando las salidas del sistema, y en el caso extremo llegar a un sistema desacoplado, como se explica más adelante.

Tomando en cuenta esto, en nuestro caso particular, buscaremos llegar entonces no solamente a una función de transferencia triangular inferior cualquiera, sino a la inversa del interactor del sistema  $\Phi^{-1}(s)$ , que de hecho es la forma de Hermite por columnas de la función de transferencia del sistema en el anillo de las funciones racionales propias. Los conceptos de interactor del sistema y su inversa se encuentran en el Apéndice B. Más adelante utilizaremos algunos resultados acerca de la realizabilidad de compensadores; estos resultados se encuentran también en el Apéndice B.

Veamos como una función de transferencia  $H(s)$ , asociada a un sistema cuadrado  $(A, B, C)$ , puede ser llevada a la forma particular y única  $\Phi^{-1}(s)$ , por medio de retroalimentación de estado regular.

**Lema 5.2** *Realizabilidad de la matriz  $B(s)$  tal que  $H(s)B(s) = \Phi^{-1}(s)$ .*

Sea  $H(s)$  la función de transferencia de un sistema cuadrado  $(A, B, C)$ , y sea  $B(s)$  la matriz bipropia (única) tal que

$$H(s)B(s) = \Phi^{-1}(s)$$

donde  $\Phi(s)$  es el interactor del sistema (y,  $\Phi^{-1}(s)$  es la forma de Hermite por columnas de  $H(s)$  sobre el anillo de las funciones racionales propias). Entonces, la matriz  $B(s)$  es realizable por retroalimentación de estado.

**Demostración.** Sea  $N_1(s)$ ,  $D(s)$  una factorización coprima derecha del sistema  $(A, B, I_n)$ . Entonces tenemos que

$$H(s)B(s) = \Phi^{-1}(s) = CN_1(s)D^{-1}(s)B(s)$$

y por lo tanto

$$B^{-1}(s)D(s) = \Phi(s)CN_1(s)$$

es una matriz polinomial, dado que  $\Phi(s)$  es polinomial. Ahora bien, por el Teorema B.2 del Apéndice B, la matriz  $B(s)$  es realizable por retroalimentación regular  $(F, G)$ . ■

El interactor  $\Phi(s)$  de un sistema es invariante bajo retroalimentación de estado regular  $(F, G)$ . Esto se puede justificar por el siguiente hecho, la retroalimentación de estado  $(F, G)$  es equivalente a la multiplicación por un precompensador sobre la función de transferencia, y  $\Phi^{-1}(s)$  ya está en la forma de Hermite de  $H(s)$  sobre el anillo de las funciones racionales propias.

La retroalimentación de estado que realiza  $B(s)$ , es decir, la obtención de las matrices  $(F, G)$ , tales que  $B(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G$ , donde  $H(s)B(s) = \Phi^{-1}(s)$ , está dada por lo siguiente:

Consideremos una factorización coprima derecha  $N_1(s)$ ,  $D(s)$  del sistema  $(A, B, I_n)$ , con  $D(s)$  reducida por columnas. Entonces existen matrices  $X$  y  $Y$  constantes, de dimensiones  $m \times m$  y  $m \times n$  respectivamente, con  $X$  no singular, tales que  $XD(s) + YN_1(s) = B^{-1}(s)D(s)$ . Las matrices  $(F, G)$  están dadas por  $F = -X^{-1}Y$  y  $G = X^{-1}$ . Para detalles véase [11].

Otra forma de calcular la retroalimentación  $(F, G)$  que realiza  $B(s)$  se obtiene a partir del siguiente resultado, el cual de hecho aplica para cualquier compensador de rango pleno por columnas, no necesariamente cuadrado.



**Teorema 5.2 Realización de compensadores.**

Sea  $(A, B, C)$  un sistema lineal y  $Q(s)$  una matriz propia de dimensiones  $m \times r$  dada y de rango pleno por columnas. La matriz  $Q(s)$  puede ser descompuesta como

$$Q(s) = Q_0 + \bar{Q}(s)$$

donde

$$Q_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s)$$

y  $\bar{Q}(s)$  es una matriz estrictamente propia. Entonces existen matrices constantes  $(F, G)$  tales que  $Q(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G$  si y sólo si los índices mínimos por renglones  $(\mu_i)$  de la matriz

$$\Omega(s) = \begin{bmatrix} (sI - A)^{-1}BQ(s) \\ \bar{Q}(s) \end{bmatrix}$$

satisfacen las siguientes condiciones.

i) Para algún entero  $q$ , se cumple que

$$\mu_1 = \dots = \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+q} = 0 < \mu_{m+q+1} \leq \dots \leq \mu_{n+m-p}, \text{ donde } p = \text{rank } \Omega(s).$$

ii) Entre los renglones correspondientes a  $\mu_1, \dots, \mu_{m+q}$  en una base mínima del kernel izquierdo constante de  $\Omega(s)$ , existen  $m$  renglones que tienen la forma  $[X' \ E_m]$ , donde  $E_m$  es una matriz no singular constante de dimensiones  $m \times m$ .

**Demostración.** Véase [11]. ■

Para el resultado anterior, las matrices  $(F, G)$  tales que  $Q(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G$  están dadas por  $G = Q_0$  y  $F = -E_m^{-1}X'$

La retroalimentación  $(F, G)$  tal que  $Q(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G$  es única si el sistema es controlable. Si el sistema no es controlable, entonces  $G$  es única, pero  $F$  no lo es.

Como mencionamos anteriormente, después de la modificación de la estructura al infinito se busca llevar la función de transferencia en lazo cerrado  $H_{F,G}(s)$  a la forma  $\Phi^{-1}(s)$ , con objeto de tener una clara interpretación en términos de nuevas entradas controlando las salidas del sistema, y en caso extremo llegar a un sistema desacoplado, en caso de ser posible.

Consideremos un sistema cuadrado  $(A, B, C)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  y  $y \in \mathbb{R}^p$ . El sistema  $(A, B, C)$  se dice *desacoplable por retroalimentación*, si existe  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , tal que la entrada  $v_i(t)$  controla la salida  $y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sin afectar las salidas restantes.

Existen condiciones necesarias y suficientes para el desacoplamiento de un sistema cuadrado mientras que, la solución del problema de desacoplamiento de sistemas no cuadrados, permanece como un problema abierto, existiendo solamente soluciones para casos particulares. Un sistema cuadrado es desacoplable por retroalimentación si y sólo si  $\sum_{i=1}^p n_i = \sum_{i=1}^p \bar{n}_i$ , donde  $\{n_i\}$  son los órdenes de los ceros al infinito del sistema, y  $\{\bar{n}_i\}$  son los órdenes de los ceros al infinito de los subsistemas  $(A, B, C_i)$ , con  $C_i$  como el  $i$ -ésimo renglón de la matriz  $C$  [6]. Esta condición, es de hecho equivalente a que el interactor del sistema  $\Phi(s)$  sea diagonal.



al infinito para el sistema. Las listas duales de  $\{n_i\}$ ,  $\{\sigma_i\}$  y  $\{n'_i\}$  son, respectivamente,  $p_i = \{2, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $\alpha_i = \{1, 1, 1\}$  y  $p'_i = \{2, 2, 2, 1, 1, 1\}$ .

La lista  $\Delta_i$ , definida en el Teorema 4.1, está dada por  $\Delta_i = \{p'_i - p_i\} = \{1, 1, 1\}$ . Ahora bien, como  $\alpha_i = \{1, 1, 1\}$  y  $\Delta_i = \{1, 1, 1\}$ , entonces se cumple la segunda condición del Teorema 4.1. La primera condición se cumple para este sistema, ya que el sistema es invertible por la derecha. Por lo tanto la nueva lista  $\{n'_i\}$  es asignable.

Por los pasos 3) y 4) del procedimiento visto en la sección 5.2, tenemos que:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien por el paso 5) del procedimiento, tenemos lo siguiente:

Para  $i = 1$ :

$$x_{11} = b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = A_s b_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{13} = A_s^2 b_1 + A_s \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{14} = A_s^3 b_1 + A_s^2 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{15} = A_s^4 b_1 + A_s^3 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{16} = A_s^5 b_1 + A_s^4 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 2$  resulta:

$$x_{21} = \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{22} = A_s \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{23} = A_s^2 \delta_1 + \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Del paso 6), tenemos que:

$$B_s G = \text{span}[x_{11} \ x_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $F$ , la podemos obtener de:

$$B_s F x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases}$$

Las dos condiciones para  $j = n'_i - n_i$  son  $B_s F x_{11} = \delta_1$  y  $B_s F x_{22} = \delta_2$ , por lo que resulta:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema en lazo cerrado, resulta ser

$$A_s + B_s F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H_{F,G}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^3} \\ \frac{1}{s^6} & \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^6} \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$  son  $I_1 = I_2 = I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{n'_i\} = \{6, 3\}$ , notemos que  $I_4 = \{n'_i\}$  como se esperaba.



$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por el tamaño de los bloques en las matrices  $(A_s, B_s, C_s)$ , podemos ver que las listas de Morse para este sistema son  $I_1 = I_3 = \{\}$ ,  $I_4 = \{n_i\} = \{3, 3, 2\}$  e  $I_2 = \{\sigma_i\} = \{2\}$ . Para este sistema con órdenes de los ceros al infinito  $\{3, 3, 2\}$ , veamos si la lista  $\{n'_i\} = \{4, 3, 3\}$  es asignable como nueva lista de los órdenes de los ceros al infinito. Las listas duales de  $\{n_i\}$ ,  $\{\sigma_i\}$  y  $\{n'_i\}$  son, respectivamente,  $p_i = \{3, 3, 2\}$ ,  $\alpha_i = \{1, 1\}$  y  $p'_i = \{3, 3, 3, 1\}$ .

La lista  $\Delta_i$ , definida en el Teorema 4.1, está dada por  $\Delta_i = \{p'_i - p_i\} = \{1, 1\}$ .

Para la segunda condición del Teorema 4.1, dada por (4.4), como  $\Delta_i = \{1, 1\}$  y  $\alpha_i = \{1, 1\}$ , fácilmente podemos ver que  $\sum_{j=1}^i \alpha_j \geq \sum_{j=1}^i \Delta_j$  se cumple, por lo tanto la lista  $\{n'_i\} = \{4, 3, 3\}$  es asignable por retroalimentación no regular.

Siguiendo el paso 3) y 4) del procedimiento visto en la sección 5.2, tenemos que:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien por el paso 5) del procedimiento, tenemos lo siguiente:

Para  $i = 1$ :

$$x_{11} = b_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = A_s b_1 + A_s \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{13} = A_s^2 b_1 + A_s^2 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 2$  tenemos que:

$$x_{21} = \delta_1 + \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{22} = A_s \delta_1 + A_s \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{23} = A_s^2 \delta_1 + A_s^2 \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 3$  resulta:

$$x_{31} = \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{32} = A_s \delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{33} = A_s^2 \delta_2 + \delta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{34} = A_s^3 \delta_2 + A_s \delta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seguindo el procedimiento, del paso 6), tenemos que:

$$B_s G = \text{span}[x_{31} \ x_{21} \ x_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $F$ , la podemos obtener de:

$$B_s F x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases}$$

Como  $j = n'_i - n_i = 0$ , para  $i = 2$ , entonces  $B_s F x_{ij} = 0$  para  $i = 2$  y  $j \neq n'_i - n_i$ . Para  $i = 3$ , tenemos que  $B_s F x_{31} = \delta_3$ , y para  $i = 1$ ,  $B_s F x_{11} = \delta_1$  por lo que resulta:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$ ,

$$A_s + B_s F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H_{F,G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^5} & \frac{1}{s^5} & 0 \\ \frac{s+1+s^2}{s^5} & \frac{1+s^2}{s^5} & 0 \\ \frac{1}{s^3} & \frac{2}{s^3} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$  son  $I_1 = I_2 = I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{n'_i\} = \{4, 3, 3\}$ , observe que  $I_4 = \{n'_i\}$  como se esperaba.

Como vimos anteriormente, la función de transferencia en lazo cerrado  $H_{F,G}(s)$  puede ser llevada a la forma triangular inferior  $\Phi^{-1}(s)$ . Para el sistema en lazo cerrado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$ , el interactor  $\Phi(s)$  está dado por:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 & 0 \\ 0 & s^3 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como  $H_{F,G}(s)B(s) = \Phi^{-1}(s)$ , entonces

$$B(s) = H_{F,G}^{-1}(s)\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1+s^2}{s^2} & \frac{-1}{s} & 0 \\ \frac{s^2+s+1}{s^2} & \frac{s+1}{s} & 0 \\ \frac{(s+1)^2}{s^2} & \frac{-(2s+1)}{s} & 1 \end{bmatrix}$$

Por notación, tomemos  $Q(s) = B(s)$ . El compensador  $Q(s)$  se puede descomponer, de manera única, como  $Q(s) = Q_0 + \bar{Q}(s)$ , en este caso tenemos



$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{Q}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{-1}{s} & 0 \\ \frac{-(s+1)}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{2s+1}{s^2} & \frac{-1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

Tomemos como  $(F_1, G_1)$ , la retroalimentación que realiza  $Q(s)$ . Como vimos anteriormente  $G_1 = Q_0$ .

Una base del kernel izquierdo constante de la matriz  $\Omega(s)$  (Teorema 5.2) está dada por

$$[ X' \quad E_m ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como  $F_1 = -E_m^{-1}X'$ , entonces

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tomemos, por notación,  $A_1 = A_s + B_s F$  y  $B_1 = B_s G$ . Entonces el sistema en lazo cerrado para la retroalimentación  $(F_1, G_1)$ , está dado por

$$A_1 + B_1 F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix}$$

como se esperaba.

Para este ejemplo, el interactor  $\Phi(s)$  asociado al sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$  es diagonal. Entonces, como vimos en la sección anterior, existe  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$  regular, tal que podamos asignar libremente los polos en la función de transferencia  $H_{F,G}(s)$ .

En lo que resta del ejemplo, tomemos  $(A_1, B_1, C_1) = (A_s + B_s F, B_s G, C_s)$  y  $Q_1(s)$  tal que  $H_{F_2, G_2}(s) = H_{F,G}(s)Q_1(s)$ , donde se propone una ubicación de polos en lazo cerrado tal que

$$H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)^3} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, encontremos  $(F_2, G_2)$ , tal que,  $Q_1(s) = [I_m - F_2(sI_n - A_1)^{-1}B_1]^{-1}G_2$

Como  $H_{F_2, G_2}(s) = H_{F, G}(s)Q_1(s)$ , entonces

$$Q_1(s) = H_{F, G}^{-1}(s)H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2(s^2+1)}{(s+1)^4} & \frac{-s^2}{(s+2)^3} & 0 \\ \frac{-s^2(s^2+s+1)}{(s+1)^4} & \frac{s^2(s+1)}{(s+2)^3} & 0 \\ \frac{s^2}{(s+1)^2} & \frac{-s^2(2s+1)}{(s+2)^3} & \frac{s^3}{(s+3)^3} \end{bmatrix}$$

El compensador  $Q_1(s)$ , puede ser descompuesto, de manera única, como  $Q_1(s) = Q_{10} + \bar{Q}_1(s)$ , donde

$$Q_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{Q}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-5s^2+4s^3+4s+1}{(s+1)^4} & \frac{-s^2}{(s+2)^3} & 0 \\ \frac{3s^3+5s^2+4s+1}{(s+1)^4} & \frac{-5s^2+12s+8}{(s+2)^3} & 0 \\ \frac{-2s+1}{(s+1)^2} & \frac{11s^2+24s+16}{(s+2)^3} & \frac{-9(s^2+3s+3)}{(s+3)^3} \end{bmatrix}$$

Ahora bien  $G_2 = Q_{10}$ . Para la matriz  $F_1$ , tenemos una base constante del kernel izquierdo constante de  $\Omega(s)$  (Teorema 5.2) lo siguiente

$$[X' \quad E_m] = \begin{bmatrix} 18 & 72 & 108 & 180 & 90 & 0 & -108 & -72 & 108 & 72 & 18 & 0 & 0 \\ 126 & 144 & 144 & 162 & 36 & 0 & 0 & 54 & 0 & -54 & 0 & 18 & 0 \\ -15 & -20 & 5 & -1 & 0 & 27 & 33 & 7 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, como  $F_2 = -E_m^{-1}X'$ , entonces

$$F_2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -6 & -10 & -5 & 0 & 6 & 4 & -6 & -4 \\ -7 & -8 & -8 & -9 & -2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 15 & 20 & -5 & 1 & 0 & -27 & -33 & -7 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Tenemos el sistema en lazo cerrado

$$A_1 + B_1 F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -12 & -14 & -19 & -7 & 0 & 6 & 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & -13 & -8 & -2 & -27 & -33 & -10 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 20 & -5 & 1 & 0 & -27 & -33 & -7 & 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia es

$$H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)^3} \end{bmatrix}$$

como se esperaba.

Observe que para este ejemplo el sistema retroalimentado final resultó controlable y observable, por lo que dicho sistema retroalimentado está desacoplado y es internamente estable.

# 6. Algunos aspectos relacionados con la modificación de la estructura al infinito.

## 6.1 Introducción.

En el Capítulo 4 se estudiaron las condiciones para la modificación de la estructura al infinito de un sistema lineal multivariable. Verificar dichas condiciones es relativamente sencillo, no así el procedimiento para encontrar la retroalimentación que produce esta modificación. En este sentido, el procedimiento para la modificación a partir de la forma semicanónica de Morse, vista en el Capítulo 5, permite encontrar la retroalimentación correspondiente de una manera relativamente sencilla, y se ve de una manera más clara la relación que existe entre los límites en que se puede modificar la estructura al infinito en función de los elementos de las listas  $I_4$  e  $I_2$ .

Sin embargo, la modificación de la estructura al infinito no resuelve por si misma ningún problema fundamental de control, y puede considerarse solamente como la primera etapa de un procedimiento más general, en el que se busca atacar algunos problemas de control, cuyas condiciones de solución dependen de la estructura al infinito del sistema. Un primer intento de un procedimiento de este tipo se presentó en la sección 5.2, donde después de obtener una modificación particular de la estructura al infinito, se lleva a la matriz de transferencia en lazo cerrado a una forma triangular inferior. Esto con el objeto de tener un sistema con una clara interdependencia entre entradas controlando salidas en forma triangular, y en el caso extremo llegar a un sistema desacoplado.

Es claro entonces, que además de la modificación deseada de la estructura al infinito, las propiedades estructurales del sistema después de esta modificación (controlabilidad, polos y ceros finitos, ceros al infinito por líneas, etc.), juegan un papel importante en la existencia o no de una solución a un problema particular de control. Desafortunadamente, no existen en la actualidad resultados en los cuales se establezcan condiciones para la modificación simultánea de 2 ó más propiedades estructurales del sistema bajo retroalimentación no regular. Por ejemplo, se sabe como se modifican los índices de controlabilidad [13], y como se modifica la estructura al infinito [16], pero no se sabe como se modifican ambas estructuras al mismo tiempo. Esta es un área de investigación actualmente en desarrollo, pero de la que no se tienen todavía resultados significativos, debido a la complejidad de los problemas tratados. Una de las pocas contribuciones que se conocen a este respecto, son las condiciones para la modificación simultánea de los índices de controlabilidad y los factores invariantes del sistema [20].

En este capítulo se consideran algunos aspectos relacionados con la modificación de la estructura al infinito, y el objetivo es precisamente hacer evidente la "falta de conocimiento" que se tiene en la modificación que puede darse en las propiedades estructurales del sistema cuando se tiene primeramente como meta, lograr una estructura al infinito particular. Para ello, se presentan en cada sección algunos ejemplos que ilustran estos aspectos, y se consideran las propiedades estructurales de controlabilidad, ceros finitos y el problema de desacoplamiento.



$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien por el paso 5) del procedimiento, tenemos lo siguiente:

Para  $i = 1$ :

$$x_{11} = b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = A_s b_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{13} = A_s^2 b_1 + A_s \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{14} = A_s^3 b_1 + A_s^2 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{15} = A_s^4 b_1 + A_s^3 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 2$ :

$$x_{21} = \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{22} = A_s \delta_1 + \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Del paso 6), tenemos que:

$$B_s G_1 = \text{span}[x_{21} \ x_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $F_1$ , la podemos obtener de:

$$B_s F_1 x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases}$$

Como  $j = n'_i - n_i = 1$ , para  $i = 1, 2$ , entonces  $B_s F_1 x_{11} = \delta_1$  y  $B_s F_1 x_{21} = \delta_2$ , por lo que resulta:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos entonces el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$ , donde

$$A_s + B_s F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y cuya función de transferencia es

$$H_{F_1, G_1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s^4} & \frac{1}{s^5} \end{bmatrix}$$

Para este sistema retroalimentado las listas de Morse son  $I_1 = \{s\}$ ,  $I_2 = I_3 = \{\}$  y  $I_4 = \{n'_i\} = \{5, 2\}$  y observemos que  $I_4 = \{n'_i\}$  como se esperaba. Notemos que  $\text{rank } \mathcal{C}(A_s + B_s F_1, B_s G_1) = 7$ . es decir, el sistema en lazo cerrado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$  resulta no controlable.

Considere ahora la retroalimentación  $(F_2, G_2)$  siguiente

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y observe que la función de transferencia asociada al sistema  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  es

$$H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & 0 \\ \frac{1}{s^4} & \frac{1}{s^5} \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse para el sistema  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  son  $I_1 = \{s\}$ ,  $I_2 = I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ , notemos que  $I_4 = \{n'_i\}$  como se esperaba. En este caso  $\text{rank } C(A_s + B_s F_2, B_s G_2) = 8$ , es decir, el sistema en lazo cerrado es controlable.

Como podemos ver, ambas retroalimentaciones producen la modificación deseada de estructura al infinito, pero el sistema en lazo cerrado resulta no controlable para la retroalimentación  $(F_1, G_1)$  y controlable para la retroalimentación  $(F_2, G_2)$ . Entonces no se puede saber como se modifica la controlabilidad del sistema. Notemos que, el algoritmo para la modificación de la estructura al infinito sólo garantiza la modificación de la lista  $I_4$ , sin importar la controlabilidad del sistema.

Cabe mencionar que la retroalimentación de estado  $(F_2, G_2)$ , no pertenece al grupo de retroalimentaciones que pueden ser obtenidas del procedimiento visto en el Capítulo 4, es decir,  $(F_2, G_2)$  no cumple con las condiciones dadas por las ecuaciones (4.8) a (4.11). En el caso particular de este ejemplo, la retroalimentación  $(F_2, G_2)$  se obtuvo por inspección, y gracias a la forma particular que tienen las matrices del sistema en la forma semicanónica de Morse. De hecho, partiendo de la forma semicanónica de Morse, en algunos casos sencillos es posible determinar prácticamente "a simple vista" la retroalimentación que produce una modificación deseada de la estructura al infinito.

### 6.3 Ceros finitos.

La retroalimentación no regular también modifica los ceros finitos de un sistema. En el Ejemplo 6.1, si observamos, en lazo abierto la lista  $I_1$  resultó vacía, sin embargo, para el sistema en lazo cerrado  $(A_s + B_s F, B_s G, C_s)$  teníamos que  $I_1 = \{s\}$ , es decir, la retroalimentación  $(F, G)$  introdujo un cero finito al sistema en lazo cerrado.

En el caso particular de que la lista  $I_2$  tenga un solo elemento, se puede de hecho determinar el número de ceros finitos que introduce una retroalimentación no regular, como se muestra en el siguiente resultado.

**Lema 6.1** Sea un sistema  $(A, B, C)$  con listas  $I_4 = \{n_i\}$  e  $I_2 = \sigma_1$ , es decir, con un sólo elemento en la lista  $I_2$ . Si tenemos una lista asignable  $\{n'_i\}$  para  $(A, B, C)$ , entonces la retroalimentación  $(F, G)$ , tal que el sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  tenga como órdenes de los ceros al infinito la lista  $\{n'_i\}$ , introduce  $\sigma_1 - \sum_{i=1}^{p_1} (n'_i - n_i)$  ceros finitos al sistema.

**Demostración.** Una vez utilizado el elemento  $\sigma_1$  para modificar la estructura al infinito, el sistema retroalimentado  $(A + BF, BG, C)$  tiene lista  $I_2$  vacía, por esta razón la retroalimentación  $(F, G)$ , tal que modifique los órdenes de los ceros al infinito a  $\{n'_i\}$ , introduce  $\sigma_1 - \sum_{i=1}^{p_1} (n'_i - n_i)$  ceros finitos al sistema. ■

Para sistemas con más de un elemento en la lista  $I_2$ , de una manera similar, se pueden introducir ceros finitos en lazo cerrado cada vez que se utilice un elemento de la lista  $I_2$  para modificar la estructura al infinito del sistema. En particular, en el algoritmo para la modificación de la estructura al infinito presentado en el Capítulo 4, a cada paso se va tomando el elemento más grande de la lista  $I_2$  sin importar cual sea la modificación (aumento) de la lista  $I_4$ , y esto puede introducir ceros finitos.

Por ejemplo, si consideramos un sistema, con lista  $\{n'_i\}$  asignable, donde  $I_4 = \{5, 1\}$ ,  $I_2 = \{\sigma_i\} = \{3, 1\}$  y  $\{n'_i\} = \{5, 2\}$ , es decir modificaremos los ceros al infinito de  $\{5, 1\}$  a  $\{5, 2\}$ . Esta modificación se puede lograr con el segundo elemento de la lista  $I_2$ , sin introducción de ceros finitos, sin embargo, por medio del procedimiento del Capítulo 4 se tomará el primer elemento de la lista  $I_2$  e introducirá dos ceros finitos. Lo anterior se ilustra en el siguiente ejemplo.



**Ejemplo 6.2** Sea el sistema  $(A_s, B_s, C_s)$ , en su forma semicanónica de Morse, dado por

$$A_s = \left[ \begin{array}{c|c} \boxed{0} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline & \boxed{0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad B_s = \left[ \begin{array}{c|c|c} \boxed{1} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \\ \hline & & \boxed{1} \\ \hline & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

$$C_s = \left[ \begin{array}{c|c} \boxed{1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

cuya función de transferencia es

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^5} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las listas de Morse para este sistema son  $I_1 = I_3 = \{\}$ ,  $I_2 = \{3, 1\}$  e  $I_4 = \{5, 1\}$ . Para este sistema con órdenes de los ceros al infinito  $\{5, 1\}$ , veamos si la lista  $\{n'_i\} = \{5, 2\}$  es asignable como nueva lista de los órdenes de los ceros al infinito. Las listas duales de  $\{n_i\}$ ,  $\{\sigma_i\}$  y  $\{n'_i\}$  son, respectivamente,  $p_i = \{2, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $\alpha_i = \{2, 1, 1\}$  y  $p'_i = \{2, 2, 1, 1, 1\}$ .

La lista  $\Delta_i$ , definida en el Teorema 4.1, está dada por  $\Delta_i = \{p'_i - p_i\} = \{1\}$ . Ahora bien, como  $\alpha_i = \{2, 1, 1\}$ ,  $\Delta_i = \{1\}$  y tenemos un sistema invertible por la derecha, entonces se cumplen las condiciones del Teorema 4.1 y la lista  $\{n'_i\}$  es asignable.

En este caso, los vectores  $\delta_i$  y  $b_i$  están dados por:

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora bien para la familia de vectores  $x_{ij}$ , tenemos lo siguiente:

Para  $i = 1$ :

$$x_{11} = b_1 + \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_{12} = A_s b_1 + A_s \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{13} = A_s^2 b_1 + A_s^2 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{14} = A_s^3 b_1 + A_s^3 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{15} = A_s^4 b_1 + A_s^4 \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $i = 2$ :

$$x_{21} = \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{22} = A_s \delta_1 + \delta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para la matriz  $G_1$ , tenemos que:

$$B_s G_1 = \text{span} [x_{21} \ x_{11} \ b_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $F_1$ , la podemos obtener de:

$$B_s F_1 x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n'_i - n_i \\ \delta_i & \text{si } j = n'_i - n_i \text{ y } 1 \leq i \leq p_1 \end{cases}$$

Como  $j = n'_i - n_i$ , para  $i = 1, 2$ , entonces  $B_s F_1 x_{21} = \delta_1$ , por lo que resulta:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos entonces el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$ , donde

$$A_s + B_s F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y cuya función de transferencia es

$$H_{F_1, G_1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s^5} & \frac{1}{s^5} & 0 \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse del sistema retroalimentado son  $I_1 = \{s^2\}$ ,  $I_2 = \{1\}$ ,  $I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ , observe que  $I_4 = \{n'_i\}$  como se esperaba. Nótese como se introdujeron dos ceros finitos al sistema retroalimentado, debido a que se utilizó el primer elemento de la lista  $I_2$  que era de magnitud tres. Además, el sistema en lazo cerrado es no controlable ( $\text{rank } C(A_s + B_s F_1, B_s G_1) = 9$ ), a diferencia del sistema en lazo abierto que si es controlable.

Considere ahora la retroalimentación  $(F_2, G_2)$  siguiente

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  resulta

$$H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s^5} & \frac{1}{s^5} & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  tiene como listas de Morse  $I_1 = I_3 = \{\}$ ,  $I_2 = \{3\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ . Notemos como con esta retroalimentación, la lista  $I_1$  resulta vacía, es decir, la retroalimentación no introduce ceros finitos al sistema, debido a que se modifica la estructura al infinito con el segundo elemento de la lista  $I_2$ , en vez de considerar el primer elemento, como lo hace el algoritmo. La retroalimentación  $(F_2, G_2)$  no introdujo ceros finitos al sistema, sin embargo, el sistema  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  resulta no controlable, al igual que el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$ .

Consideremos ahora una tercera retroalimentación para este sistema, tomemos  $(F_3, G_3)$  de la siguiente manera

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia asociada al sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_3, B_s G_3, C_s)$  es

$$H_{F_3, G_3}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s^5} & \frac{1}{s^5} & 0 \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse del sistema  $(A_s + B_s F_3, B_s G_3, C_s)$  son  $I_1 = I_3 = \{\}$ ,  $I_2 = \{3\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ , es decir,  $(F_3, G_3)$  no introduce ceros finitos al sistema al igual que  $(F_2, G_2)$ , y además,  $\text{rank } C(A_s + B_s F_3, B_s G_3) = 10$ , esto es, el sistema en lazo cerrado resulta controlable.

Para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$ , con listas de Morse  $I_1 = \{s^2\}$ ,  $I_2 = \{1\}$ ,  $I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ , la lista  $\{5, 4\}$  no es asignable por retroalimentación no regular porque no cumple con las condiciones del Teorema 4.1, sin embargo para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$ , con listas de Morse  $I_1 = I_3 = \{\}$ ,  $I_2 = \{3\}$  e  $I_4 = \{5, 2\}$ , la lista  $\{5, 4\}$  si es asignable. Entonces, si modificamos la estructura al infinito de un sistema con el primer elemento de la lista  $I_2$  (mayor magnitud), y si hubiese otro elemento de la lista  $I_2$ , menor que el primer elemento que logre la misma modificación, reducimos el conjunto de las nuevas listas asignables  $\{n'_i\}$  en lazo cerrado.

De manera similar a la retroalimentación  $(F_2, G_2)$  del Ejemplo 6.1, las retroalimentaciones de estado  $(F_2, G_2)$  y  $(F_3, G_3)$ , consideradas en el ejemplo anterior 6.2, se obtuvieron por inspección y gracias a la forma particular que tienen las matrices del sistema en la forma semicanónica de Morse, como en este caso.

## 6.4 Desacoplamiento.

Otro punto importante relacionado con la modificación de la estructura al infinito es el desacoplamiento de sistemas. La modificación de la estructura al infinito, al igual que con la controlabilidad y con la introducción de ceros finitos al sistema, no garantiza que el sistema retroalimentado, en el caso cuadrado, sea desacoplable. Esto es, después de la modificación de la estructura al infinito, podemos llegar a un sistema en lazo cerrado que no cumpla con las condiciones de desacoplamiento, vistas en la sección 5.3.

Por medio de los algoritmos para la modificación de la estructura al infinito, vistos en el Capítulo 4 y sección 5.2, podemos llegar a un sistema desacoplable (Ejemplo 5.1) ó, a un sistema no desacoplable (Ejemplo 5.2). En el caso que, después de la modificación de la estructura al infinito deseada, por medio de estos algoritmos, resulte un sistema no desacoplable, posiblemente exista otra retroalimentación, que



La retroalimentación que incrementa  $n_3$  de 1 a 3, digamos  $(F_1, G_1)$  es

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia asociada al sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$  y su interactor son

$$H_{F_1, G_1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s^4} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \quad \Phi(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & -s^3 & s^3 \end{bmatrix}$$

Para el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_1, B_s G_1, C_s)$ , podemos ver que los órdenes esenciales fueron modificados de  $\{3, 3, 2\}$  a  $\{3, 3, 3\}$  por lo que sistema retroalimentado resulta no desacoplable.

La retroalimentación que incrementa  $n_3$  de 1 a 2 y  $n_2$  de 2 a 3, digamos  $(F_2, G_2)$  es la siguiente:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia asociada al sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_2, B_s G_2, C_s)$  y su interactor son

$$H_{F_2, G_2}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \quad \Phi(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^3 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que los órdenes esenciales, en este caso, no fueron modificados y se cumple que  $\{n'_i\} = \{3, 3, 2\} = \{n_{ie}\}$ , por lo que el sistema es desacoplable por retroalimentación regular.

Para el enfoque geométrico, en este caso, por el número de elementos en la lista  $I_2$ , la retroalimentación se obtiene en dos pasos, primeramente se modifica las lista  $\{n_i\} = \{3, 2, 1\}$  a  $n_i^1 = \{3, 3, 1\}$  y de  $n_i^1$  a  $n_i^2 = \{n'_i\} = \{3, 3, 2\}$ . Siguiendo el procedimiento, del enfoque geométrico, para la modificación de la estructura al infinito, podemos llegar a

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos entonces el sistema retroalimentado  $(A_s + B_s F_3, B_s G_3, C_s)$ , donde

$$A_s + B_s F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya función de transferencia e interactor son

$$H_{F_3, G_3}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{2}{s^2} & 0 \\ \frac{2}{s^3} & \frac{3}{s^3} & 0 \\ \frac{4}{s^3} & \frac{7}{s^3} & \frac{1}{s^3} \end{bmatrix} \quad \Phi(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^3 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}$$

Las listas de Morse para este sistema son  $I_1 = I_2 = I_3 = \{\}$  e  $I_4 = \{3, 3, 2\}$  y, notemos que  $I_4 = \{n'_i\}$ , como se esperaba. Observemos, del interactor, que  $\{n_i\} = \{3, 3, 2\} = \{n_{ie}\}$ , por lo que el sistema resulta desacoplable.

## 6.5 Conclusiones.

Como se ha mostrado en los ejemplos presentados en este capítulo, cuando se utiliza retroalimentación no regular para modificar la estructura al infinito de un sistema, no se puede determinar la manera en que son modificadas otras propiedades del sistema. Puede incluso suceder que existan retroalimentaciones que produzcan la misma modificación de la estructura al infinito, pero con características completamente diferentes para el sistema en lazo cerrado, por ejemplo, en cuanto a propiedades de controlabilidad, ceros finitos y desacoplamiento.

Los algoritmos para la modificación de la estructura al infinito desde el enfoque geométrico y a partir de la forma semicanónica de Morse, garantizan la modificación de los órdenes de los ceros deseados, pero no sabemos como se modificarán las demás propiedades estructurales del sistema. En el caso extremo, puede también suceder que una retroalimentación que produzca una modificación de ceros al infinito dada, y modifique otras propiedades estructurales del sistema de una manera "adecuada" en algún sentido, ni siquiera pueda obtenerse a partir de los algoritmos (ver Ejemplo 6.1).

La solución de estos problemas no parece ser sencilla, y queda como trabajo futuro de investigación.

## 7. Conclusiones y trabajo futuro.

En este trabajo se estudió el problema de la modificación de la estructura al infinito de un sistema multivariable mediante retroalimentación de estado no regular.

Como objetivos generales de este trabajo, se planteó el estudio de las condiciones necesarias y suficientes para la modificación de la estructura al infinito de un sistema, analizar el procedimiento para la obtención de la retroalimentación que resuelve el problema, y tratar de simplificar de alguna forma dicho procedimiento.

El tratar de simplificar este procedimiento, resultó un tanto complicado, debido a que el resultado principal relacionado con el tema [16], está dado desde un enfoque geométrico y además parte de la solución del problema está dado por ecuaciones algebraico-polinomiales, definidas a partir de bases de subespacios relacionados con el enfoque geométrico, es decir, el procedimiento para la obtención de la retroalimentación que resuelva el problema es, de cierta manera, una combinación de los enfoques geométrico y algebraico-polinomial.

La simplificación de este procedimiento de modificación se trató de resolver de diferentes maneras. Por ejemplo, se propuso cierta función de transferencia en lazo cerrado (con una forma triangular inferior y con los órdenes de los ceros al infinito deseados sobre la diagonal) vista como el resultado de la multiplicación de un compensador sobre la función de transferencia en lazo abierto, y tratando de relacionar de cierta manera las condiciones de modificación de la estructura al infinito con las condiciones de realizabilidad de compensadores, tal que llegáramos a esta forma propuesta. Sin embargo el problema se complica debido a la no unicidad tanto del compensador, como de la retroalimentación no regular que realice estos compensadores, dificultando así la generalización de la solución del problema y sin llegar a resultados satisfactorios por este medio.

Como otra posible alternativa para la simplificación de este procedimiento de modificación, se trató de relacionar de alguna manera, la descomposición de los subespacios  $S^*$  y  $\mathcal{R}^*$  vista en la sección 4.1, con algunas formas canónicas de los sistemas multivariables, tales como la forma canónica de Brunovsky, la forma canónica de Morse y la forma semicanónica de Morse. Recordemos que esta descomposición de los subespacios  $S^*$  y  $\mathcal{R}^*$  es el punto de partida para la modificación de la estructura al infinito, por lo que relacionar alguna de estas formas semicanónicas con la descomposición reduciría este procedimiento.

Entonces, como resultado principal de este trabajo, se logró demostrar que la forma semicanónica de Morse cumple con esta descomposición necesaria para la modificación de la estructura al infinito, reduciendo así el procedimiento de cierta manera (sección 5.2), y con la ventaja de que se pueden identificar y asignar fácilmente los vectores para encontrar la retroalimentación correspondiente que modifique la estructura al infinito de una manera deseada.

Aprovechando que para este procedimiento a partir de la forma semicanónica de Morse el sistema retroalimentado (después de la modificación de los ceros al infinito) resulta cuadrado, vimos como una función de transferencia para un sistema cuadrado, puede ser llevada a una forma triangular inferior y con ciertas características, por medio de retroalimentación regular de estado.



Otro punto importante relacionado con el estudio de la modificación de la estructura al infinito y que observamos, es cómo la retroalimentación tal que modifique la estructura al infinito, puede modificar, a su vez, otros invariantes estructurales del sistema, tales como controlabilidad y ceros finitos del sistema.

Como trabajo futuro de este trabajo de tesis, podemos considerar la modificación de la estructura al infinito garantizando otras modificaciones estructurales a la vez. Por ejemplo, un trabajo interesante sería dar las condiciones para la modificación de la estructura al infinito de un sistema controlable, garantizando controlabilidad en lazo cerrado. También, como trabajo futuro de investigación, podemos considerar la modificación de la estructura al infinito desde un enfoque puramente polinomial y, por último, resolver la modificación de la estructura al infinito sin considerar las restricciones que se tomaron en cuenta para la forma semicanónica de Morse.

# Apéndice A.

Este apéndice consta de dos partes. En la primera parte se presenta la forma de Smith-McMillan de una matriz racional  $H(s)$ , la cual es utilizada en el Capítulo 1 para definir los ceros y polos finitos de un sistema. En la segunda parte se verán algunas herramientas matemáticas para posteriormente introducir la forma de Smith-McMillan al infinito de una matriz racional, que se utiliza para definir los ceros al infinito de un sistema multivariable en la sección 2.3.

## A.1 Forma de Smith-McMillan de una matriz racional.

En esta parte se presenta primeramente la forma de Smith de una matriz polinomial, y después se define la forma de Smith-McMillan de una matriz racional.

**Definición A.1** Una matriz polinomial cuadrada no singular  $U(s)$ , cuya inversa es polinomial, es conocida como *matriz unimodular*. Notemos que una matriz polinomial  $U(s)$  es unimodular si y sólo si el determinante de  $U(s)$  es una constante diferente de cero.

**Teorema A.1** *Forma de Smith.*

Sea  $Q(s)$  una matriz polinomial de dimensiones  $pxm$ . Entonces existen matrices unimodulares  $U(s)$  y  $V(s)$  y una matriz única  $\Lambda(s)$ , tales que

$$U(s)Q(s)V(s) = \Lambda(s)$$

donde la matriz  $\Lambda(s)$ , dada por

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1(s) & & & \\ & & & \\ & & \lambda_r(s) & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = \text{rango normal de } Q(s)$$

se conoce como la *forma de Smith* de  $Q(s)$ .

Los polinomios  $\{\lambda_i(s)\}$ , conocidos como los polinomios invariantes de  $Q(s)$ , son polinomios mónicos (coeficiente correspondiente al elemento de mayor grado del polinomio igual a 1) y únicos que satisfacen la propiedad de divisibilidad

$$\lambda_i(s) \mid \lambda_{i+1}(s), \text{ (es decir, } \lambda_i(s) \text{ divide } \lambda_{i+1}(s)) \quad i = 1, \dots, r-1$$

**Demostración.** Véase [14]. ■

Existe una relación entre las matrices unimodulares y las operaciones elementales sobre una matriz polinomial. Definamos las *operaciones elementales* sobre una matriz polinomial para, posteriormente, mostrar dicha relación.

Las operaciones elementales por columnas sobre una matriz polinomial las podemos definir de la siguiente manera

- 1.-Intercambiar de posición dos columnas  $i, j$  [ $c_i \longleftrightarrow c_j$ ].
- 2.-Multiplicar columna  $i$  por un número real  $r \neq 0$  [ $c_i \rightarrow rc_i, r \in \mathbb{R}$ ]
- 3.-Sumar a la columna  $i$  la columna  $j$  multiplicada por un polinomio  $\alpha(s)$  [ $c_i \rightarrow c_i + \alpha(s)c_j$ ].

Las operaciones elementales por renglones se definen de forma análoga.

Dada una matriz polinomial  $A(s)$  cualquier conjunto de operaciones elementales por columnas sobre  $A(s)$  es equivalente a multiplicar por la derecha a  $A(s)$  por una matriz unimodular, digamos  $U(s)$ . De una manera similar, cualquier conjunto de operaciones elementales por filas sobre  $A(s)$  es equivalente a multiplicar por la izquierda a  $A(s)$  por una matriz unimodular, digamos  $V(s)$ .

Dado lo anterior, notemos que la forma de Smith de una matriz polinomial  $Q(s)$ , se puede obtener por medio de operaciones elementales por filas y por columnas sobre  $Q(s)$ .

Además si definimos

$$\Delta_i(s) = \text{el máximo común divisor mónico de todos los menores } i \times i \text{ de } Q(s), \quad i = 1, \dots, r.$$

podemos identificar

$$\lambda_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)} \quad \text{para } i = 1, \dots, r$$

donde

$$\Delta_0(s) = 1$$

véase [14].

### **Ejemplo A.1** *Forma de Smith.*

Para la siguiente matriz polinomial  $Q(s)$ , por medio de operaciones elementales, encontremos su forma de Smith

$$Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-3 \\ 2s-4 & s-1 \\ 0 & 2s-2 \end{bmatrix}.$$

Primero, llevemos uno de los polinomios de menor grado a la posición (1,1), lo podemos hacer, por

ejemplo, con  $c_1 \leftrightarrow c_2$ , de lo que resulta la matriz 
$$\begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ s-1 & 2s-4 \\ 2s-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, por medio de la operación  $f_2 \rightarrow f_1 - f_2$  a la matriz anterior obtenemos 
$$\begin{bmatrix} s-3 & 0 \\ 1 & s-2 \\ 2s-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al intercambiar las filas, 1 y 2, queda la matriz 
$$\begin{bmatrix} 1 & s-2 \\ s-3 & 0 \\ 2s-2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si aplicamos las operaciones  $f_2 \rightarrow f_1(s-3) - f_2$  y  $f_3 \rightarrow f_1(2s-2) - f_3$  tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & s-2 \\ 0 & (s-3)(s-2) \\ 0 & (2s-2)(s-2) \end{bmatrix}$$

Ahora con operaciones por columnas, si  $c_2 \rightarrow c_1(s-2) - c_2$  entonces la matriz resultante es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(s-3)(s-2) \\ 0 & -(2s-2)(s-2) \end{bmatrix}.$$

Siguiendo un procedimiento similar, si aplicamos las operaciones  $f_3 \rightarrow -2f_2 + f_3$ ,  $f_2 \rightarrow (1/4)f_2$  y

$f_3 \rightarrow f_2(s-3) + f_3$ , llegamos a las matrices 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4(s-2) \\ 0 & -(s-2)(s-3) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s-2) \\ 0 & -(s-2)(s-3) \end{bmatrix}$$
 y finalmente

$$\text{Smith } Q(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s-2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Forma de SmithMcMillan de $H(s)$ .

Dada una matriz racional  $H(s)$ , con entradas en la forma reducida (son factores primos, el numerador y el denominador), la podemos re-escribir como:

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

donde

$d(s)$  = mínimo común múltiplo mónico de los denominadores de todas las entradas de  $H(s)$ .

Entonces  $d(s)H(s) = N(s)$  es una matriz polinomial y podemos escribir

$$d(s)H(s) = N(s) = U_1(s)\Lambda(s)U_2(s)$$

donde  $\{U_i(s)\}$  son matrices unimodulares y  $\Lambda(s)$  es la forma de Smith de  $N(s)$ .

Tenemos entonces que

$$U_1^{-1}(s)H(s)U_2^{-1} = \frac{\Lambda(s)}{d(s)} = \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_i(s)}{d(s)} \right\}$$

Si tomamos los elementos en su forma reducida de la matriz racional  $\Lambda(s)/d(s)$ , podemos escribir

$$\frac{\lambda_i(s)}{d(s)} = \frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$$

donde

$$\{\epsilon_i(s), \psi_i(s)\} \text{ son polinomios coprimos, } i = 1, \dots, r$$

y

$$r = \text{rango normal de } H(s).$$

Finalmente tenemos que

$$H(s) = U_1(s)M(s)U_2(s)$$

donde la matriz  $M(s)$ , dada por

$$M(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\epsilon_i(s)/\psi_i(s)\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se conoce como la *forma de Smith-McMillan* de  $H(s)$ .

Nótense las propiedades siguientes

$$\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_i(s) \mid \epsilon_{i+1}(s) \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (\text{A.2})$$

$$d(s) = \psi_1(s) \quad (\text{A.3})$$

De la matriz racional  $\Lambda(s)/d(s)$  y de la ecuación  $\frac{\lambda_i(s)}{d(s)} = \frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$  podemos ver que las propiedades (A.1) y (A.2) se cumplen. Para (A.3), veamos que si  $d(s) \neq \psi_1(s)$ , entonces, de la ecuación  $\epsilon_1(s)/\psi_1(s) = \lambda_1(s)/d(s)$ , se tiene que  $d(s)$  y  $\lambda_1(s)$  deberían tener un factor común, y por lo tanto lo tendrían todos los elementos de  $N(s)$ , con lo que se contradice la definición de  $d(s)$ .

### Ejemplo A.2 Forma de Smith-McMillan.

Consideremos la matriz racional propia  $H(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{2(s-2)}{(s-1)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \\ 0 & \frac{2}{s-3} \end{bmatrix}$ . Para obtener la forma de

Smith-McMillan de  $H(s)$  tenemos lo siguiente:

En este caso, el mínimo común múltiplo mónico de los denominadores de todas las entradas de  $H(s)$  es  $d(s) = (s-1)(s-3)$ , por lo que

$$N(s) = d(s)H(s) = \begin{bmatrix} 0 & s-3 \\ 2s-4 & s-1 \\ 0 & 2s-2 \end{bmatrix}.$$

Del ejemplo anterior, ejemplo A.1, tenemos que

$$\text{Smith } N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente obtenemos la forma de Smith-McMillan de  $H(s)$  de la siguiente manera

$$M(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s-3)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{(s-1)(s-3)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## A.2 Forma de Smith-McMillan al infinito de una matriz racional.

Antes de definir la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$  es necesario introducir algunas definiciones y propiedades de las funciones racionales.

### Definición A.2 Funciones racionales propias.

Sea  $\mathbb{R}_p(s)$  el conjunto de funciones racionales propias de la forma  $h(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , donde  $a(s)$  y  $b(s)$  son polinomios y  $\deg a(s) \geq \deg b(s)$ .

Con las operaciones de multiplicación y adición de funciones racionales, se puede ver que  $\mathbb{R}_p(s)$  es un anillo conmutativo.

El grado de la función racional propia  $h(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ , denotado como  $\deg_p h(s)$ , se define de la siguiente manera:  $\deg_p h(s) = \deg a(s) - \deg b(s)$ , es decir, se define como el "grado relativo" de  $h(s)$ .

Con esta definición de grado, se tiene que  $\mathbb{R}_p(s)$  es un anillo Euclidiano, es decir, para cualquier  $h(s), g(s) \in \mathbb{R}_p(s) \exists q(s), r(s) \in \mathbb{R}_p(s)$  tal que  $h(s) = g(s)q(s) + r(s)$ , donde  $r(s) = 0$  ó  $\deg_p r(s) < \deg_p g(s)$ .

Las unidades en el anillo  $\mathbb{R}_p(s)$  son aquellas funciones racionales  $u(s)$  para las cuales  $\exists v(s) \in \mathbb{R}_p(s)$  tal que  $u(s)v(s) = 1$ . Estas unidades se conocen como funciones racionales bipropias.

**Lema A.1** *Unidades de  $\mathbb{R}_p(s)$ .*

La función racional propia  $u(s)$  es una unidad de  $\mathbb{R}_p(s)$  si y sólo si  $\deg_p u(s) = 0$ , es decir,  $u(s)$  no tiene ni ceros ni polos al infinito.

Consideremos ahora el conjunto de matrices racionales propias  $\mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$ . Si  $p = m$  entonces  $\mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$  es un anillo no conmutativo.

Las unidades en  $\mathbb{R}_p^{p \times p}(s)$ , es decir, aquellas matrices racionales propias cuya inversa también es racional propia, se conocen como matrices bipropias o matrices  $\mathbb{R}_p(s)$ -unimodulares y no tienen ni polos ni ceros al infinito.

De una manera similar a las matrices unimodulares, las matrices bipropias, corresponden a operaciones elementales sobre el conjunto de las funciones racionales. Definamos las operaciones elementales por filas (columnas) sobre  $\mathbb{R}_p(s)$  aplicadas a una matriz  $H(s)$  de la siguiente manera

- 1.- Intercambiar 2 filas (columnas) de  $H(s)$ .
- 2.- Multiplicar una fila (columna) de  $H(s)$  por una función racional bipropia.
- 3.- Sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por una función racional propia.

Las matrices bipropias por la derecha sobre  $H(s)$  corresponden a operaciones elementales por columnas sobre  $H(s)$ , de una manera análoga, las matrices bipropias por la izquierda sobre  $H(s)$  corresponden a operaciones elementales por filas sobre  $H(s)$ .

**Teorema A.2** *Forma de Smith-McMillan al infinito.*

Sea  $H(s) \in \mathbb{R}_p^{p \times m}(s)$  la función de transferencia del sistema  $(A, B, C)$ . Existen matrices bipropias  $B_1(s)$  y  $B_2(s)$  tales que:

$$B_1(s)H(s)B_2(s) = M_\infty(s) = \begin{bmatrix} \text{diag} \left\{ \frac{1}{s^{n_i}} \right\}_{i=1}^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $n_i$  son enteros positivos que corresponden a los órdenes de los ceros al infinito de  $H(s)$ , los cuales satisfacen la propiedad

$$n_{i+1} \geq n_i \quad \text{para } i = 1, \dots, r-1.$$

ya  $r = \text{rank } H(s)$ . La matriz  $M_\infty(s)$  es conocida como la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ .

**Demostración.** Véase [14]. ■

**Ejemplo A.3** *Forma de Smith-McMillan al infinito.*

Consideremos la siguiente matriz

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-6}{(s+1)(s+2)^2} & \frac{s-3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}.$$

Veamos como, mediante operaciones elementales sobre  $H(s)$  en el anillo de las funciones racionales propias, podemos obtener la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ .

Primero debemos llevar uno de los elementos de menor grado relativo a la posición  $(1, 1)$ , por medio de intercambio de filas y columnas ( $f_i \leftrightarrow f_j$  y  $c_i \leftrightarrow c_j$ ) y después proceder con las demás operaciones elementales. En este caso por medio de las operaciones  $f_1 \leftrightarrow f_2$  y posteriormente, a la matriz resultante,  $c_1 \leftrightarrow c_2$  resulta la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{s-3}{(s+2)^2} & \frac{-6}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Por medio de  $c_1 \rightarrow \left(\frac{(s+2)^2}{(s-3)s}\right) c_1$  tenemos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-6}{(s+1)(s+2)^2} \\ \frac{s+2}{(s+1)(s-3)s} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Ahora aplicando  $c_2 \rightarrow c_2 + \left(\frac{6s}{(s+1)(s+2)^2}\right) c_1$  a la matriz anterior, llegamos a

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{s+2}{(s+1)(s-3)s} & \frac{(s+1)^2(s-3)+6(s+2)}{(s+2)^2(s+1)^2(s-3)} \end{bmatrix}.$$

Si utilizamos  $f_2 \rightarrow f_2 - \left(\frac{-s(s+2)}{s(s+1)(s-3)}\right) f_1$ , resulta la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{(s+1)^2(s-3)+6(s+2)}{(s+2)^2(s+1)^2(s-3)} \end{bmatrix}$$

Finalmente por medio de  $f_2 \rightarrow \left(\frac{(s+1)^2(s+2)^2(s-3)}{s^2((s+1)^2(s-3)+6(s+2))}\right) f_2$  obtenemos que

$$M_\infty(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

es la forma de Smith-McMillan al infinito de  $H(s)$ .





# Apéndice B.

En este apéndice se introducen los conceptos de interacto de un sistema y algunos resultados sobre la realizabilidad de compensadores dinámicos. Estos conceptos son utilizados en los Capítulos 5 y 6, para estudiar el problema simultáneo de modificación de la estructura al infinito y obtener una función de transferencia en lazo cerrado con una forma particular.

## B.1 Interactor de un sistema.

Para la función de transferencia  $H(s)$ , de un sistema  $(A, B, C)$ , existe una matriz polinomial única  $\Phi(s)$ , llamada *interactor del sistema*. Esta matriz, introducida en [25] es invariante bajo retroalimentación regular de estado y juega un papel importante en algunos problemas de control, tales como desacoplamiento de sistemas y seguimiento de salida.

Uno de los puntos importantes que cabe mencionar, es que el interactor de un sistema  $\Phi(s)$  tiene una forma particular (triangular inferior), y sus elementos cumplen con ciertas condiciones de divisibilidad, como veremos a continuación.

**Teorema B.1** *Interactor de un sistema.*

Sea  $H(s)$  la función de transferencia del sistema  $(A, B, C)$ , donde  $\text{rank } H(s) = p$ . Entonces existe una matriz bipropia  $B(s)$ , de dimensiones  $m \times m$ , y una matriz polinomial triangular inferior única  $\Phi(s)$ , de dimensiones  $p \times p$ , conocida como el interactor del sistema, tales que

$$H(s)B(s) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\Phi(s)$  es de la forma

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^{f_1} & 0 \\ \vdots & \\ \phi_{p1}(s) & s^{f_p} \end{bmatrix}$$

con  $f_i$ , enteros positivos, y para  $i > j$ ,

$$\phi_{ij}(s)s^{-f_i} \text{ es un polinomio divisible por } s, \text{ o bien } \phi_{ij}(s) = 0.$$

**Demostración.** Véase [25]. ■

La matriz  $\Phi^{-1}(s)$  es de hecho la forma de Hermite por columnas de  $H(s)$  en el anillo de las funciones racionales propias [25]. Esta matriz está dada por

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{f_1}} & 0 \\ \vdots & \\ \varphi_{p1}(s) & \frac{1}{s^{f_p}} \end{bmatrix}$$

donde  $\varphi_{ij}(s)$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ , son funciones racionales estrictamente propias que satisfacen

$$\varphi_{ij}(s) = 0 \text{ ó } \deg_p \varphi_{ij}(s) < \deg_p \varphi_{ii}(s) = f_i,$$

y  $\deg_p \varphi_{ij}(s)$  es el *grado relativo* de  $\varphi_{ij}(s)$  (ver Definición A.2).

Si  $H(s)$  es una matriz racional cuadrada, entonces la matriz bipropia  $B(s)$ , tal que

$$H(s)B(s) = \Phi^{-1}(s),$$

es única.

## B.2 Realización de compensadores.

Considere una retroalimentación de estado regular  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$  actuando sobre el sistema  $(A, B, C)$ . La función de transferencia del sistema en lazo cerrado está dada por

$$H_{F,G}(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BG.$$

Realizando algunas manipulaciones algebraicas en la ecuación anterior, se puede llegar a que

$$H_{F,G}(s) = C(sI - A)^{-1}B [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G$$

donde  $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$  es la función de transferencia del sistema y  $[I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}$  es una matriz bipropia. Entonces, el efecto de la retroalimentación regular actuando sobre el sistema  $(A, B, C)$  puede ser representado como una matriz bipropia (compensador dinámico) multiplicando por la derecha a la función de transferencia del sistema  $H(s)$ .

El problema inverso, es decir, bajo qué condiciones una matriz propia multiplicando por la derecha a  $H(s)$  es equivalente a una retroalimentación de estado, es conocido como realización de compensadores por retroalimentación. Entonces, se dice que un compensador  $Q(s)$  es realizable por retroalimentación de estado si existe  $(F, G)$  tal que

$$Q(s) = [I_m - F(sI_n - A)^{-1}B]^{-1}G.$$

A continuación se presentan las condiciones necesarias y suficientes para que un compensador no singular dado pueda ser realizable.

### Teorema B.2 Realización de compensadores.

Sean  $N_1(s)$  y  $D(s)$  una factorización coprime derecha del sistema  $(A, B, I_n)$  con  $D(s)$  reducida por columnas, y sea  $Q(s)$  un compensador no singular. Entonces  $Q(s)$  es realizable por retroalimentación de estado si y sólo si

i)  $Q(s)$  es una matriz bipropia, y

ii)  $Q^{-1}(s)D(s)$  es una matriz polinomial

**Demostración.** Véase [10]. ■

Estos conceptos, acerca de realizabilidad de compensadores, serán utilizados en los Capítulos 5 y 6 de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] G. Basile, G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall, (1992).
- [2] S. P. Bhattacharyya. Frequency Domain Conditions for Disturbance Rejection. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, pp. 1211-1213, (1980).
- [3] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, (1984).
- [4] C. Comault, J. Descusse, J. M. Dion, J. F. Lafay and M. Malabre. New Decoupling Invariants: The Essential Orders. *Int. J. Contr.*, vol. 44, no. 3, pp. 689-700, (1986).
- [5] C. Comault and J. M. Dion. Structure at Infinity of Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, pp. 693-696, (1982).
- [6] J. Descusse and J. M. Dion. On the Structure at Infinity of Linear Square Decoupled Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 4, pp. 971-974, (1982).
- [7] G. D. Forney. Minimal Bases of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems. *SIAM Journal of Control*, vol. 13, no. 3, pp. 493-520, (1975).
- [8] B. A. Francis. On Totally Singular Linear Quadratic Optimal Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-24, pp. 616-621, (1979).
- [9] F. R. Gantmacher. *Matrix Theory*. Vol. I,II. Chelsea Publishing Co., New York, (1959).
- [10] M. L. J. Hautus, M. Heymann. Linear Feedback, an Algebraic Approach. *SIAM J. of Control and Optimization*, vol. 16, no. 1, (1978).
- [11] A. N. Herrera. Static Relization of Dynamic Precompensators. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp. 1391-1394, (1992).
- [12] A. N. Herrera. *Sur le Découplage des Systèmes Linéaires par des lois Statiques non Régulières* (PhD Thesis). Universite de Nantes, Ecole Centrale Nantes, (1991).
- [13] M. Heymann. Controllability Subspaces and Feedback Simulation. *SIAM J. Cont. and Optimization*. vol. 14, no. 4, pp. 769-789, (1976).
- [14] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, (1980).
- [15] J.J. Loiseau. Some Geometric Considerations About the Kronecker Normal Form. *Int. J. Contr.*, vol. 42, no. 6, pp. 1411-1431, (1985).
- [16] J.J. Loiseau. Sur la Modification de la Structure à l'infini Par un Retour d'Etat Statique. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 26, no. 2, pp. 251-273, (1988).
- [17] B. MacMillan. Introduction to Formal Realizability Theory. *Bell. System Tech. J.*, vol. 31, pp. 541-600, (1952).

- [18] A. G. J. Macfarlane and N. Karcanias. Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: a Survey of the Algebraic, Geometric and Complex-variable Theory. *Int. J. Contr.*, vol. 24, pp. 33-74, (1976).
- [19] M. Malabre and V. Kucera. Infinite Structure and Exact Model Matching Problem: A Geometric Approach. *IEEE Trans. Automat. Cont.*, vol. 29, no. 3, pp. 266-268, (1984).
- [20] S. Mondié. *Contribución al Estudio de Modificaciones Estructurales de Sistemas Lineales* (PhD Thesis). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, D. F., (1996).
- [21] A. S. Morse. Structural Invariants of Linear Multivariable Systems. *SIAM J. Contr.*, vol. 11, pp. 446-465, (1973).
- [22] D. H. Owens. On Structural Invariants and the Root Loci of Linear Multivariable Systems. *Int. J. Contr.*, vol. 28, pp. 187-196, (1978).
- [23] H. H. Rosenbrock. *State space and multivariable theory*. John Wiley, New York, (1970).
- [24] J. Ruíz León. On the Computation of the Infinite Structure of a Proper Rational Matrix. *Fourth IFAC Conference on System Structure and Control*, Bucharest, Romania, pp. 306-308, (1997).
- [25] W. A. Wolovich, P. L. Falb. Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Compensation. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, vol. 14, no. 6, pp. 996-1008, (1976).
- [26] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1979).



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del IPN

Unidad Guadalajara

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: ESTUDIO DE LA MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA AL INFINITO DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES POR RETROALIMENTACIÓN ESTÁTICA NO REGULAR del(a) C. Saúl GODINEZ VELASCO el día 26 de Septiembre de 2003

DR. OFELIA BEGOVICH  
MENDOZA  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
3A  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. JOSÉ JAVIER RUIZ  
LEÓN  
INVESTIGADOR  
CINVESTAV 2C  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA

DR. ANTONIO RAMIREZ  
TREVÍÑO  
INVESTIGADOR CINVESTAV  
2A  
CINVESTAV GDL  
GUADALAJARA



*CINVESTAV*  
*BIBLIOTECA CENTRAL*



SS1T000007278