CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Control óptimo en economía

Que presenta

Rodríguez Durán Iván de Jesús

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Director de Tesis:

Dr. Jorge Alberto León Vázquez

Ciudad de México Enero, 2021

Agradecimientos

A mis padres Luciano y Lourdes, porque gracias a ellos soy la persona que soy hoy en día.

Al Dr. Jorge Alberto León Vázquez, por todo el apoyo en este trabajo y sus valiosos consejos de vida.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Resumen.

En esta tesis se presenta una modificación del teorema de verificación, el cual es utilizado para la obtención de controles óptimos. Esta modificación se basa en el engrosamiento de filtraciones. Se muestra su aplicación en la elección de portafolios óptimos.

Abstract.

In this thesis is presented a modification of the verification, wich is used for obtaining optimal controls. This modification is based on enlargements of filtrations. It shows an aplication of this theorem to calculate optimal portfolios.

Índice

Notación y abreviaciones

$\mathbb{R}$ Conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}_+$ Conjunto de los números reales positivos.

$\mathbb{R}^n$ $\{(x_1, \ldots, x_n | x_i \in \mathbb{R})\}$.

$\mathbb{N}$ Conjunto de los números naturales.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-álgebra de Borel.

$C(\mathbb{R})$ Conjunto de funciones continuas.

$C^n(\mathbb{R})$ Conjunto de funciones con n-ésima derivada continua.

A^c Complemento del conjunto A.

∂A Frontera del conjunto A.

$\overline{A}$ Cerradura del conjunto A.

1_A Función característica del conjunto A.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ Derivada parcial de f respecto a la variable x.

$x \wedge y$ Mínimo entre x y y.

$x \vee y$ Máximo entre x y y.

$\inf A$ Ínfimo del conjunto A.

$\sup A$ Supremo del conjunto A.

P Medida de probabilidad.

$A \times B$ $\{(a,b)|a \in A, b \in B\}$.

$v.a.$ Variable aleatoria.

$v.a.'s$ Variables aleatorias.

$c.s.$ Casi seguramente.

$c.p.1$ Con probabilidad 1.

EDE Ecuación diferencial estocástica.

Introducción

La economía en general es uno de principales intereses de cualquier persona, familia o empresa. Ésta se basa en la administración del capital con el que se cuenta, la creación de riqueza y la distribución de ésta en bienes y servicios. Por lo tanto es de gran importancia tener un estudio exhaustivo sobre el tema. La rama de las matemáticas que estudia este tema es la de matemáticas financieras, por medio de la teoría de la probabilidad. La herramienta principal de esta teoría para este tema es el cálculo estocástico. Pues éste nos permite modelar fenómenos aleatorios, como son los cambios de nuestro capital.

Uno de los principales objetivos en matemáticas financieras, es el estudio de precios de activos financieros (acciones, opciones, inversiones, etc). Este estudio es por medio del cálculo estocástico. Es decir, el cálculo estocástico nos permite obtener un modelo de las fluctuaciones en los cambios de los precios de los activos. Con esto nos es posible elegir estrategias de inversión adecuadas, de tal manera que podamos maximizar la riqueza de un inversionista al tiempo final de un periodo [12].

El principal objetivo de esta tesis es mostrar una modificación del teorema de verificación. Así como, las aplicaciones de éste en mercados financieros (elección de portafolios). Esta modificación es motivada por el hecho de tener información extra (engrosamiento de filtraciones). Esto es debido a que, la información extra sobre un mercado financiero es modelada por medio de engrosamiento de filtraciones y con éste se obtienen terminos extra, lo cual nos impide utilizar el teorema de verificación usual. Ahora bien, con los terminos extras obtenidos, nosotros podemos elegir portafolios óptimos (portafolios que maximicen nuestra riqueza al tiempo final de un periodo y minimicen nuestros gastos).

Esta tesis se compone de cuatro capítulos, los cuales están colocados para una lectura más amena, esto es, las herramientas que se utilizarán en el Capítulo 2 son dadas en el Capítulo 1 y así consecutivamente. En nuestro primer capítulo proporcionamos las herramientas básicas de la teoría de la probabilidad que utilizaremos. Las cuales son: variables aleatorias, procesos estocásticos, filtraciones, tiempos de paro y martingalas, así como algunas de sus propiedades. Esto nos servira para poder definir lo que es un movimiento browniano (Capítulo 2) y poder trabajar con el cálculo estocástico (Capítulo 3).

En el Capítulo 2 introduciremos al lector en lo que es el movimiento browniano [3], el cual fue descrito por Louis Bachelier in 1900 y por Albert Einstein en 1905. Este tipo de procesos estocásticos son fundamentales en el cálculo estocástico. Esto es debido a que la base del cálculo estocástico (Capítulo 3) se fundamenta en el movimiento browniano [28].

A lo largo del Capítulo 3, damos las bases del cálculo estocástico. Estas bases fueron propuestas por K. Itô [7], para la definición de integrales de procesos estocásticos respecto a otros procesos estocásticos. También daremos una breve introducción al cálculo anticipante, así como las aplicaciones de éste al engrosamiento de filtraciones.

Finalmente en el Capítulo 4 presentamos las aplicaciones del cálculo estocástico al problema en la elección de estrategias de inversión (portafolios), cuando un inversionista cuenta con información privilegiada sobre el desarrollo de un mercado financiero. En este capítulo también se presenta el resultado principal de esta tesis. El cual es una ligera modificación del teorema de verificación para el caso cuando se cuenta con engrosamiento de filtraciones. Esto es motivado por el hecho de minimizar la función de costos de un inversionista, al momento de la elección de una estrategia de inversión.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo nuestro propósito es dar las herramientas básicas que se nesecitan para definir lo que es un movimiento browniano (Capítulo 2), así como todas las bases que se nesecitaran a lo largo de esta tesis. El lector interasado en más detalles sobre los temas puede consultar por ejemplo [6] para variables aleatorias, valor esperado, valor esperado condicional, procesos estocásticos y filtraciones. Para más detalles sobre tiempos de paro se puede consultar [2]. Finalmente un libro muy apropiado para martingalas es el de Doob [24].

1.1 Espacios de probabilidad.

En lo que resta de este escrito se supondra que Ω es un conjunto no vacío, al que llamaremos espacio de muestreo.

Definición. 1 *Una familia $\mathcal{F}$ no vacía de subconjuntos de Ω se llama σ-álgebra de Ω si cumple con las condiciones siguientes:*

1) *Es cerrada bajo complementos, es decir, para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $A^c \in \mathcal{F}$.*

2) *Es cerrada bajo uniones numerables, es decir, para toda familia $\{A_n \in \mathcal{F} | n \in \mathbb{N}\}$ se cumple que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Notemos que si $A \in \mathcal{F}$ por 1) $A^c \in \mathcal{F}$ esto implica que $\Omega \in \mathcal{F}$ por la propiedad 2) pues $\Omega = A \cup A^c$. En lo consecutivo supondremos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de Ω. A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama eventos.
Con esto podemos definir un espacio medible como el par $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición. 2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida P es una función $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ que cumple con las siguientes condiciones:*

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) Para cualquier colección de subconjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathcal{F}$ disjuntos a pares (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$), se cumple que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

P es la que se encarga de medir la probabilidad de un evento, por ejemplo, $P(A)$ es la probabilidad de que el evento A ocurra o bien tenga éxito.
A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le llama espacio de medida, éste es finito si $P(\Omega) < \infty$ y no finito en caso contrario. En este escrito solo se tratará el caso cuando el espacio de medidad es finito con $P(\Omega) = 1$ Lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición. 3 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de medida. Decimos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad si $P(\Omega) = 1$.*

Notemos que si A es un evento con probabilidad 0 esto no implica que éste no pueda ocurrir, solo significa que éste tiene menos oportunidades de ocurrir a comparación con otros eventos con probabilidad positiva. Esto se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. 1 *Supongamos que dejamos caer una moneda en un rectángulo, éste está dividido exactamente a la mitad por una linea de grosor despreciable. En este caso nuestro espacio de muestreo Ω, consiste de la posición en donde cae la moneda. Ahora bien, consideremos los siguientes eventos:*

- $A = \{$*Más del 50% del área de la moneda cae dentro del lado derecho*$\}$
- $B = \{$*Más del 50% del área de la moneda cae dentro del lado izquierdo*$\}$
- $C = \{$*La moneda cae exactamente en el centro*$\}$

Tenemos que $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C, \Omega\}$ con $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/2$, entonces

$$P(C) = P(\Omega) - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Pero el evento C puede ocurrir en algún determinado momento.

Sean dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Decimos que $f = g$ casi seguramente (*c.s.*) si se cumple que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \Omega \cap A^c$, donde A es un conjunto despreciable ($P(A) = 0$). También diremos que $f = g$ con probabilidad 1 (c.p.1), si $f = g$ c.s. en un espacio de probabilidad, es decir, si existe un $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $P(\Omega_0) = 1$ y $f(\omega) = g(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_0$.

Observación. 1 *Sean* $\Omega = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$*,* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ *y* P *una medida de probabilidad sobre* $\mathcal{F}$*, con* $P(\{a\}) = 1$*. Definimos las siguientes funciones del espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *sobre* $(\Omega, 2^\Omega, P)$ *(donde* 2^Ω *es el conjunto potencia de* Ω*) por*

$$f(x) = x \quad \& \quad g(x) = a \quad \forall x \in \Omega$$

Notemos que g *es medible por ser constante y además* $f = g$ *c.s. dado que* $P(\{f(x) \neq g(x) | x \in \Omega\}) = P(\{b, c\}) = 0$*, pero la función* f *no es medible (ver Definición 6) ya que* $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \notin \mathcal{F}$*.*

Para evitar este problema cuando definamos igualdades (desigualdades) *c.s* debemos tener en cuenta lo siguiente.

Definición. 4 *Un espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es completo si para todo* $A \in \mathcal{F}$ *tal que* $P(A) = 0$ *y dado* $B \subset A$ *se tiene que* $B \in \mathcal{F}$ *y por lo tanto* $P(B) = 0$*.*

Siempre que especifiquemos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se supondrá que éste es completo.

Definición. 5 *Se dice que dos eventos* $A, B \in \mathcal{F}$ *son independientes si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo. 2 *Se tira un volado con una moneda balanceada y un dado equilibrado. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado sea un sol y un número menor a 3?. Dado que obviamente el resultado del primer volado no afecta el resultado del dado, pues son objetos totalmente idenpendientes, entonces podemos calcular esta probabilidad como*

$$P(S \cap D) = P(S)P(D) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Donde S *es el evento donde el volado es sol y* $D = \{1, 2\}$ *es el evento el número es menor a 3. Notemos que esta probabilidad también se puede calcular tomando en cuenta que hay 12 resultados posibles y solo tomaremos dos* $S1, S2$ *en nuestro experimento, por lo tanto la probabilidad es la de elegir 2 eventos entre 12 resultados posible, es decir, de* $2/12 = 1/6$*.*

Definición. 6 *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $(A, \mathcal{A})$ *espacio medible. Una función* $X : \Omega \to A$ *se dice que es una variable aleatoria (v.a.) si* X *es una función* $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$*-medibe o simplemente* $\mathcal{F}$*-medible si* $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, es decir, si* X *cumple con*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \qquad \forall B \in \mathcal{A}$$

Para nuestro propósito solo tomaremos el caso cuando nuestra variable aleatoria X es una función de variable real, es decir, X va de $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ- álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.
Utilizaremos la notación dada en la literatura para definir a las preimagenes de los boreleanos como:

$$[X \in B] = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

en particular, tenemos que

$$[X \leq x] = X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in (-\infty, x]\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición. 7 *Sea* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función. Definimos la* σ*-álgebra generada por* X *como*

$$\sigma(X) = \bigcap_{\mathcal{F} \in I} \mathcal{F}$$

donde I *es el conjunto de todas las* σ*-álgebras sobre* Ω *que contienen* $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. En particular si* X *es una v.a. tenemos que*

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Definición. 8 *a) Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $I \subset \mathbb{R}$*. Diremos que las sub* σ*-álgebras* $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ *de* $\mathcal{F}$ *son independientes si para todo subconjunto finito* J *de* I *y todo* $A_i \in \mathcal{A}_i$ *tenemos que*

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} A_i$$

b) Diremos que las variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$ *son independientes si sus* σ*-álgebras generadas* $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ *son independientes.*

Definición. 9 *Dada una v.a.* X *definimos su función de distribución* F_X *como:*

$$F_X(x) = P([X \leq x]) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si además se tiene que F_X puede ser expresada como:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

Se dice que F_X es absolutamente continua y a f se le conoce como la función de densidad de X.

Definición. 10 *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Una familia de variables aleatorias $\{X_t | t \in I\}$ se dice que son independientes e identicamente distribuidas (i.i.d.), si éstas son independientes y todas tienen la misma función de distribución, es decir, para todo conjunto finito $\tilde{I} \subset I$, el conjunto $\{X_i | i \in \tilde{I}\}$ es una familia de v.a.'s independientes y*

$$F_{X_i} = F_{X_j} \quad \forall i, j \in I$$

1.1.1 Valor esperado.

Definición. 11 *Sea X una v.a., definimos su valor esperado por*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

si X es integrable con respecto P, esto es, si tenemos que

$$E(|X|) = \int_{\Omega} |X| dP < \infty$$

De esta manera el valor esperado de una v.a. X es la integral de ésta sobre todo el espacio Ω respecto a la medida de probabilidad P.

Ejemplo. 3 *Sea X una v.a. tal que $X(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_i\}$ donde $x_i \in \mathbb{R}_+$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, entonces su valor esperado está dado por*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \sum_{n=1}^{\infty} x_i P([X = x_i])$$

de donde X es integrable si la última serie es finita.

Definición. 12 *Sea $p \geq 1$. Definimos al conjunto de variables aleatorias módulo 0 c.s. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que su valor absoluto elevado a la potencia p es integrable como $L^p(\Omega)$, es decir,*

$$L^p(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} | E(|X|^p) < \infty\}$$

Notemos que X es el representante de clase módulo 0 c.s.

Definición. 13 *Sean $k \in \mathbb{N}$ y una v.a. X, definimos su k-ésimo momento (si éste existe) por*

$$E(X^k)$$

en particular es importante el primer momento conocido como media y denotado por μ. Además definimos su k-ésimo momento centrado por

$$E((X - E(X))^k)$$

el segundo momento centrado de X es llamado varianza y es denotado por $Var(X)$ o bien σ^2.

Dado que el valor esperado está definido como una integral, entonces éste es un operador funcional $E : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple con las propiedades siguientes sobre la integral:

1) El valor esperado es lineal, es decir, dados $X, Y \in L^1(\Omega)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

2) Si $0 \leq X \leq Y$ *c.p.*1 Entonces $E(X) \leq E(Y)$

3) **Teorema de convergencia monótona.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias positivas no decreciente, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que para cada $\omega \in \Omega$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

(incluso si $E(X) = \infty$).

4) **Teorema de convergencia dominada.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que satisfacen: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$ y existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|X_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \in L^1(\Omega)$ y se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$$

5) **Lema de Fatou.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ una sucesión de variables aleatorias no negativas definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces

$$E\left(\lim_{n\to\infty} \inf X_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf E(X_n)$$

El lector interesado en las demostración de estas propiedades las puede consultar en el libro de Gut [6]. También en éste se pueden consultar la siguiente proposición.

Proposición. 1 *Para toda variable aleatoria positiva X existe una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ de variables aleatorias simples positivas no decreciente tales que* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$.

.

Proposición. 2 *Sean $X, Y \in L^1(\Omega)$ dos variables aleatorias independientes. Entonces*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Demostración. Supongamos que X, Y son variables positivas independientes simples, entonces éstas admiten las siguientes representaciones

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{[X=x_i]} \qquad Y = \sum_{i=1}^{m} y_i 1_{[Y=y_i]}$$

de donde

$$E(X) = \sum_{n=1}^{n} x_i P([X = x_i]) \qquad E(Y) = \sum_{n=1}^{m} y_i P([Y = y_i])$$

luego

$$\begin{aligned}
E(XY) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i 1_{[X=x_i]} \sum_{k=1}^{m} y_k 1_{[Y=y_k]}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_i 1_{[X=x_i]} y_k 1_{[Y=y_k]}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} E(x_i 1_{[X=x_i]} y_k 1_{[Y=y_k]}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_i y_k P\left([X = x_i], [Y = y_k]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_i y_k P\left([X = x_i]\right) P([Y = y_k]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i P([X = x_i]) \sum_{k=1}^{m} y_k P([Y = y_k]) \\
&= E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

donde la tercera y cuarta igualdad se cumplen por las propiedades del valor esperado y la quinta por independencia de las variables aleatorias. Ahora bien, supongamos que X, Y son v.a.'s positivas, entonces de la Proposición 1 existen $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de variables aleatorias simples positivas crecientes que convergen a X, Y respectivamente y por lo tanto X_nY_n es una sucesión de variables aleatorias simples creciente que converge a XY, por la Proposición 2 se tiene que $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$, $\lim_{n\to\infty} E(Y_n) = E(Y)$ y $\lim_{n\to\infty} E(X_nY_n) = E(XY)$, entonces

$$\begin{aligned} E(XY) &= \lim_{n\to\infty} E(X_nY_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(X_n)E(Y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} E(X_n) \lim_{n\to\infty} E(Y_n) \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por lo antes demostrado para variables aleatorias simples. Ahora bien si $X, Y \in L^1(\Omega)$ basta tomar sus partes positivas y negativas para concluir con la demostración.

Definición. 14 *Sean X, $Y \in L^2(\Omega)$ dos variables aleatorias. La covarianza de X, Y está dada por*

$$Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

1.1.2 Valor esperado condicional.

En el estudio de fenómenos aleatorios, es decir, fenómenos que tienen multiples resultados posibles, es importante tener en cuenta su comportamiento debido a alguna información que lo afecta o bien si éste evoluciona con el tiempo, entonces a un tiempo dado nosotros contamos con la información de los eventos que ya han ocurrido hasta ese momento. En esta sección vemos como se comporta el valor esperado de una v.a. X respecto a la información que poseemos.

Definición. 15 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $X \in L^1(\Omega)$ y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ es definida como la única variable aleatoria $E(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-medible (ver Definición 6) tal que*

$$E(XY) = E(E(X|\mathcal{G})Y)$$

para toda v.a. Y $\mathcal{G}$-medible y acotada.

$E(X|\mathcal{G})$ está bien definida por el teorema de Radom-Nikodym, el lector interesado en esto puede consultar Kuo [14].

Lema. 1 *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y X una v.a. $\mathcal{F}$-medible no negativa. Entonces existe una única v.a. $E(X|\mathcal{G})$ no negativa y $\mathcal{G}$-medible tal que*

$$E(XY) = E(E(X|\mathcal{G})Y)$$

para toda v.a. no negativa Y $\mathcal{G}$-medible y esta esperanza condicional concuerda con la dada en la Definición 15 cuando $X \in L^1(\Omega)$.

Demostración. Ver demostración del Lema 23.1 en Protter [9].

La esperanza condicional cumple con las siguientes propiedades (se entendera que todas las igualdades y desigualdades dadas son c.p.1): sean X, $Y \in L^1(\Omega)$ v.a.'s y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, entonces

1) $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$ por lo tanto $E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

2) Si X $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X|\mathcal{G}) = X$.

3) Si X es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{G}$, entonces $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.

4) Si Y es $\mathcal{G}$-medible y $E(XY) < \infty$, entonces $E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$.

5) Si $\mathcal{H}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{G}$, entonces $E(X|\mathcal{H}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})$.

6) Si $X \leq Y$, entonces $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.

7) $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X||\mathcal{G})$.

8) $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

9) **Teorema de convergencia monótona.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ una sucesión de variables aleatorias positivas no decreciente, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ c.p.1. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) \quad c.p.1$$
En el sentido de que si $E(X) = \infty$, entonces $E(X|\mathcal{G})$ se define como en el Lema 1.

10) **Teorema de convergencia dominada.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que satisface $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ c.p.1 y existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|X_n| \leq g$. Entonces
$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) \quad c.p.1.$$

Notemos que $E(X|\mathcal{G})$ está bien definida por el teorema de convergencia dominada para v.a.'s.

11) **Lema de Fatou.** Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ una sucesión de variables aleatorias no negativas definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces

$$E\left(\lim_{n\to\infty} \inf X_n|\mathcal{G}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf E(X_n|\mathcal{G}) \quad c.p.1$$

En el sentido de que si $E(\lim_{n\to\infty} \inf X_n) = \infty$, entonces se define $E(\lim_{n\to\infty} \inf X_n|\mathcal{G})$ como en el Lema 1.

1.1.3 Procesos estocásticos y filtraciones.

Cuando estamos estudiando un experimento aleatorio que está evolucionando con el tiempo, por ejemplo el valor de las acciones en un mercado financiero, la propagación de un virus en una comunidad, etc. Es necesario tener en cuenta que éste depende del tiempo, por lo tanto es natural considerar lo siguiente.

Definición. 16 *Un proceso estocástico es una función $X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in [0,T]$ $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ es una v.a.*

En la definición anterior hacemos hincapié en que $T \in (0,\infty)$, pero este puede tomar el valor ∞ y en este caso la definición sera en $[0,\infty)$. A las funciones $X_.(\omega) : [0,T] \to \mathbb{R}$ con $\omega \in \Omega$ se les llama las trayectorias del proceso X o simplemente las trayectorias de X.

Observación. 2 *En la literatura hay muchas formas de definir un proceso estocástico, por ejemplo: un proceso estocástico X es una familia de variables aleatorias $\{X_t : \Omega \to \mathbb{R}|\, t \in [0,T]\}$. Todas éstas son equivalentes.*

Ejemplo. 4 *Un virus en una población humana está creciendo de manera exponencial. Al tiempo t_0 se prueba una nueva vacuna creada por un laboratorio. Este laboratorio tiene un 80% de éxito en las vacunas que fabrica. Si la vacuna funciona, entonces no habrá más casos, en otro caso, la población infectada seguira creciendo.*

Aquí, $T=\infty$, $\Omega = \{s, f\}$ donde $s :=$ la vacuna tiene éxito y $f:=$la vacuna fracasa. Sea X_t el número de personas infectadas al tiempo t, entonces

$$X_t(f) = e^t \qquad \& \qquad X_t(s) = \begin{cases} e^t & si\ t < t_0 \\ e^{t_0} & si\ t \geq t_0 \end{cases}$$

Definición. 17 *Decimos que una función* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *es de variación acotada en el intervalo* $[0,t]$ *con* $t \in [0,T)$ *si*

$$\sup_{\pi} \sum_{i} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\pi := \{0 = t_0, t_1, ..., t_n = t\}$ *del intervalo* $[0,t]$. *Denotaremos por* $V_t(f)$ *al supremo anterior.*

Definición. 18 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad. Una familia de* σ*-álgebras* $\{\mathcal{F}_t \,|\, t \in [0,T]\}$ *sobre* Ω *se llama filtración si ésta cumple con:*

1) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *para todo* $t \in [0,T]$

2) Dados $0 \leq s \leq t \leq T$, *se tiene que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Al hablar de una filtración lo que se entiende es que al tiempo t tenemos la información $\mathcal{F}_t$, es decir, $\mathcal{F}_t$ esta conformado de todos los eventos que han ocurrido hasta el tiempo t. Además conforme el tiempo transcurre la información que tenemos puede incrementar.

Definición. 19 *Sea* $X = \{X_t | t \in [0,T]\}$ *un proceso estocástico. Entonces:*

a) Se dice que X *es un proceso medible si éste es una función medible respecto a la* σ*-álgebra producto* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]))$, *es decir,*

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

b) Un proceso X *se dice que es es* $\mathcal{F}_t$*-adaptado si éste es adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$, *es decir, dado* $t \in [0,T]$ *se tiene que* X_t *es* $\mathcal{F}_t$*-medible, esto es,*

$$X_t^{-1}(A) \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in [0,T],\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

c) La filtración definida por $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_s |\, s \leq t\})$ *se llama filtración generada por* X. *Donde* $\sigma(\{X_s |\, s \leq t\})$ *es la* σ*-álgebra más pequeña que contiene a la familia* $\{X_s^{-1}(B) | s \in [0,t]\,,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

d) Decimos que un proceso estocástico X *es progresivamente medible si para todo* $t \in [0,T]$ *la restricción del proceso* X *a* $\Omega \times [0,t]$ *es* $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$*-medible, en particular, todo proceso que es adaptado y continuo a la izquierda (o bien a la derecha) es progresivamente medible.*

e) Un proceso estocástico es de tipo càdlàg si tiene trayectorias continuas a la derecha con límites a la izquierda.

f) Se dice que un proceso es predecible si éste es medible con respecto a la σ-álgebra generada por todos los procesos adaptados que tiene trayectorias continuas a la izquierda. A esta σ-álgebra se suele denotar por $\mathcal{P}$, así

$$\mathcal{P} = \sigma(A)$$

donde $A = \{X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R} | X$ *es adaptado y tiene trayectorias continuas a la izquierda*$\}$

En este escrito en el caso de no especificar la filtración con la que se está trabajando supondremos que, ésta es la filtración generada por nuestro proceso estocástico.

Definición. 20 *Sean dos procesos estocásticos* $X = \{X_t | t \in [0, T]\}$, $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_t | t \in [0, T]\}$. *Entonces:*

- $\widetilde{X}$ *es una modificación (o versión) de* X *si*

$$P([X_t = \widetilde{X}_t]) = 1 \quad \forall t \in [0, T]$$

- $\widetilde{X}$ *es una realización (o es indistinguible) de* X *si existe un* $\Omega_0 \subset \Omega$ *tal que* $P(\Omega_0) = 1$ *y*

$$X_t = \widetilde{X}_t \quad \forall t \in [0, T], \, \omega \in \Omega_0$$

Definición. 21 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad completo. Diremos que una filtración* $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ *satisface las condiciones usuales, si ésta cumple con lo siguiente:*

i) $\mathcal{F}_0$ *contiene a todos los conjuntos de medida cero de* $\mathcal{F}$.

ii) La filtración es continua por la derecha, esto es,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u \quad \forall t \in [0, T]$$

con la convención de que $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_T$ *si* $T < u$.

Cuando estamos estudiando un fenómeno aleatorio nos puede interesar solo estudiarlo hasta cierto momento, es decir, cuando nuestro fenómeno cumpla con algún requisito que necesitamos y podemos detenerlo en ese momento, notemos que para este momento contamos con la información desde el principio del estudio hasta el tiempo en que lo detenemos. Para modelar este tiempo cuando debemos detener nuestro proceso recurrimos a los tiempos de paro que son definidios a continuación.

Definición. 22 *Una función* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *es llamada tiempo de paro con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ *si* $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *para toda* $t \in [0, T]$.

Proposición. 3 *Sea* $\{\mathcal{F}_t | T \in [0, T]\}$ *una filtracion que cumple con las condiciones usuales. Entonces* τ *es un tiempo de paro respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t | T \in [0, T]\}$ *si y solo si* $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$ *para todo* $t \in [0, T]$.

Demostración. Supongamos que τ es un tiempo de paro. Entonces para cualquier $t \in [0, T]$ tenemos que

$$\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega \, | \tau(\omega) \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$$

y para $t = 0$, el evento $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) < 0\} = \emptyset$ está en $\mathcal{F}_0$. Ahora bien, supongamos que $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in [0, T]$, dado que la filtración es continua a la derecha tenemos que

$$\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega | \tau(\omega) < t + 1/n\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} = \mathcal{F}_t$$

de donde concluimos que τ es tiempo de paro.

1.1.4 Martingalas y semimartingalas.

Un proceso estocástico de tipo martingala es una secuencia de variables aleatorias en la que, en un tiempo dado, la esperanza condicional del siguiente valor de la secuencia, dado todos los valores anteriores, es igual al valor presente. Éstas son base fundamental en el cálculo estocástico, para un análisis detallado sobre este tipo de procesos estocásticos nos referimos al libro de Revuz y Yor [24]

Definición. 23 *Un proceso estocástico* $X = \{X_t | t \in [0, T]\}$ *adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ *es llamado* $\mathcal{F}_t$*-martingala o bien martingala respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ *si cumple con las siguientes condiciones:*

i) $E(|X_t|) < \infty$ *para todo* $t \in [0, T]$.

ii) Dados $s, t \in [0, T]$ *con* $s \leq t$ *se cumple que* $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$.

Observación. 3 *Decimos que* X *es submartingala (respectivamente supermartingala) si* X *cumple i) de la definición anterior y además dados* $s, t \in [0, \infty)$ *con* $s \leq t$ *se cumple que* $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ *(resp.* $\leq X_s$*).*

Las martingalas tienen aplicaciones en diferentes campos, uno de ellos son los juegos justos (decimos que un juego es justo si la probabilidad p de ganar y q de perder son iguales), esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. 5 *Suponga que estamos jugando a tirar volados con una moneda con resultados sol y aguila, si cae sol, entonces ganamos un punto, si cae aguila, entonces perdemos un punto. Sea X_n la v.a. que modela el n-ésimo volado tirado, entonces $X_n(\{sol\}) = 1$ y $X_n(\{aguila\}) = -1$. Es claro que $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. Considere la siguiente variable aleatoria:*

$$S_n = X_1 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

y la filtración $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X$. Entonces

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \sum_{i=1}^{n} E(X_i|\mathcal{F}_n) \\ &= E(X_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= p - q + S_n \end{aligned}$$

Por lo tanto S_n es una martingala si $p = q$, es decir, si es un juego justo.

Notemos que en el ejemplo anterior S_n es submartingala (respectivamente supermartingala) si $p > q$ ($p < q$ resp).

Definición. 24 *Un proceso X $\mathcal{F}_t$-adaptado de tipo càdlàg es llamado martingala local si existe una sucesión creciente de tiempos de paro $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ c.p.1 tales que $X_{t\wedge T_n} 1_{\{T_n > 0\}}$ es una martingala para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Definición. 25 *Un proceso estocástico $X = \{X_t | t \in [0, T]\}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ se denomina semimartingala si éste puede descomponerse en la forma:*

$$X_t = M_t + A_t$$

donde M es una $\mathcal{F}_t$-martingala local y A es un proceso càdlàg $\mathcal{F}_t$-adaptado con trayectorias de variación acotada en $[0, t]$ para todo $t \in [0, T]$.

1.1.5 Variables y vectores aleatorios gaussianos.

Las variables aleatorias gaussianas llevan este nombre pues el primero en estudiarlas fue el famoso matemático Carl F. Gauss, una de las más importantes propiedades está dada por el Teorema del Límite Central. Para nuestro interes las utilizaremos dado que los incrementos del movimiento Brwoniano son variablles aleatorias gaussianas.

Definición. 26 *Decimos que una v.a. $X \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ con función de densidad f es una v.a. gaussiana (o normal) con valor esperado μ y varianza σ^2 si su función de densidad está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

también se suele decir que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$.

Definición. 27 *Sea X un vector aleatorio (i.e. $X = (X_1, ..., X_n)$ donde X_i es una v.a. para todo $i \in \{1, ..., n\}$). Definimos al vector esperado (o media) de X por $\mu = E(X) = (E(X_1), ..., E(X_n))$ y a su matriz de covarianza Φ por*

$$\Phi = E\left((X-\mu)(X-\mu)^T\right)$$

así las entradas de la matriz Φ están dadas por $\lambda_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$.

Definición. 28 *Un vector aletario X se dice que es gaussiano si y solo si, para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la v.a. $\langle X, a\rangle = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ es una v.a. gaussiana. Si X es un vector aleatorio gaussiano con vector esperado μ y matriz de covarianza Φ, diremos que X tiene distribución $N(\mu, \Phi)$.*

Teorema 1 *Los componentes de un vector gaussiano X son independientes si y solo si son no correlacionados, i.e.,*

$$Cov(X_i, X_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j \text{ con } i, j \in \{1, ..., n\}$$

Demostración. Ver la demostración del Teorema 16.4 en Jacod y Protrer [9]

Capítulo 2

Movimiento Browniano.

Ahora estudiaremos uno de los procesos más importantes en el cálculo estocástico, éste es el movimiento browniano o también conocido como proceso de Wiener. Este nombre es debido a Robert Brown [3] quien fue el primer en observarlo al estudiar el comportamiento de los granos de polen en un fluido y dado que N. Wiener fue el primero en darle las bases matemáticas a este proceso [28]. El movimiento browniano es utilizado en grandes ramas de la ciencia (estadística, física, biología, etc), pues éste permite modelar y analizar sistemas con perturbaciones aleatorias[4].

2.1 Construcción del movimiento browniano.

Definición. 29 *Un proceso estocástico* $B = \{B_t : \Omega \to \mathbb{R} | t \in [0, T]\}$ *es llamado movimiento browniano si satisface las siguientes condiciones:*

1) $P([B_0 = 0]) = 1$.

2) Para cualesquiera $s, t \in [0, T]$ *con* $s < t$*, la v.a.* $B_t - B_s$ *tiene distribución gaussiana con media 0 y varianza* $t - s$ *(ver Definición 26).*

3) B *tiene incrementos independientes, es decir, dados* $t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_n \in [0, T]$ *con* $t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$ *las variables aleatorias* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *son independientes.*

4) B *tiene trayectorias continuas con probabilidad 1, es decir,*

$$P(\{\omega \in \Omega | B.(\omega) \text{ es continua}\}) = 1$$

Si nosotros contamos con una filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$, entonces podemos definir nuestro movimiento browniano por medio de esta filtración de la siguiente manera.

Definición. 30 *Un proceso estocástico continuo $B = \{B_t | t \in [0,T]\}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ es llamado movimiento browniano si satisface las siguientes condiciones:*

1) $P([B_0 = 0]) = 1$.

2) Dados $s, t \in [0,T]$ con $s < t$ se tiene que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.

3) $B_t - B_s$ es una v.a. gaussiana con media 0 y varianza $|t - s|$.

Notemos que un movimiento browniano en el sentido de la Definición 29 es también un movimiento browniano en el sentido de la Definición 30 con respecto a la filtración que genera el mismo proceso. Ahora bien, en caso de no establecer la filtración para la cual B es un movimiento browniano se supondra que B es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 29, a su vez si especificamos la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ para la cual B es un movimiento browniano, entonces B es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 30.

Observación. 4 *Notemos que si tenemos un proceso no necesariamente continuo que satisface las propiedades 1)-3) de la Definición 30 o bien de la Definición 29, entonces por el teorema de continuidad de Kolmogorov [14] éste tiene una versión con trayectorias continuas y así éste tiene una versión que es un movimiento browniano.*

Una pregunta que se podría hacer cualquiera es: ¿Existe algún proceso que cumpla con estas condiciones y por lo tanto sea un movimiento browniano?, la respuesta claramente es "Sí", en la literatura hay distintas formas de contruir ejemplos de tales procesos, daremos como ejemplo una de ellas, ésta es debida N. Wiener.

Ejemplo. 6 ***(Espacio canónico de Wiener.)***
Sea $\Omega = \{\omega \in C([0,\infty)) |\, \omega(0) = 0\}$, es decir, Ω es el espacio de las funciones continuas $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tales que $\omega(0) = 0$. Vamos a considerar la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre Ω generada por los cilindros medibles de la forma

$$C_{t_1,\ldots,t_n}(B) = \{\omega \in \Omega | (\omega(t_1), ..., \omega(t_n)) \in B\}$$

donde $t_1, ..., t_n \in [0, \infty)$ *son todos dinstintos y* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Ahora bien definamos la medida de probabilidad* P *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *de la siguiente manera*

$$\begin{aligned} P(C_{s_1,\dots,s_n}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])) \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(s_1, 0, y_1) p(s_2 - s_1, y_1, y_2) \\ \cdots p(s_n - s_{n-1}, y_{n-1}, y_n) dy_n \cdots dy_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* p *es el kernel gaussiano dado por*

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

Por el teorema de extención de Carathéodory y el hecho de que

$$\int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) p(s, y, z) dy = p(s + t, x, z)$$

nosotros podemos extender de manera única la medida P *sobre todo* $\mathcal{F}$.
El proceso $W_t(\omega) = \omega(t)$ *es un movimiento browniano. En efecto, de la definición de* P *tenemos que* $W_{t_2} - W_{t_1}$ *es una variable gaussiana para todos* $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ *así cumple con la propiedad 2) de la Definición 29. Dado que* $W_0(\omega) = \omega(0) = 0$ *para todo* $\omega \in \Omega$, *entonces* W *cumple con la condición 1) y 4) del movimiento browniano. Dados* $t_1 < t_2$ *por la igualdad (2.1) tenemos que*

$$\begin{aligned} P([W_{t_1} \le x_1],&[W_{t_2} - W_{t_1} \le x_2]) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[y_1 \le x_1 . y_2 - y_1 \le x_2]} p(t_1, 0, y_1) p(t_2 - t_1, y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p(t_1, 0, y_1) \int_{-\infty}^{x_2 + y_1} \frac{e^{-(y_2 - y_1)^2 / 2(t_2 - t_1)}}{\sqrt{2\pi (t_2 - t_1)}} dy_2 dy_1 \\ &= \int_{\infty}^{x_1} p(t_1, 0, y_1) dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} p(t_2 - t_1, 0, v) dv \\ &= P([W_{t_1} \le x_1]) P([W_{t_2} - W_{t_1} \le x_2]) \end{aligned}$$

procediendo de esta manera se puede verificar que W *tiene incrementos independientes y así* W *es un movimiento browniano.*

2.2 Propiedades del movimiento browniano

El movimiento browniano es un proceso estocástico que cumple con propiedades suficientes para ser "bueno" en la modelación de sistemas que tienen perturbaciones aleatorias. A continuación enunciamos algunas de estas propiedades.

En esta sección se supondra que $B = \{B_t | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 29.

Proposición. 4 *Sean $t, s \in [0,\infty)$. Entonces $B = \{B_t | t \in [0,T]\}$ cumple con lo siguiente: B_t tiene distribución gaussiana con valor esperado $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = t$, además se tiene que*

$$E(B_s B_t) = min(s,t)$$

Demostración. De la propiedad 1) de la Definición 29 se tiene que $B_t = B_t - B_0$ c.p.1 por lo tanto el resultado se sigue de la propiedad 3) de la Definición 29. Ahora bien, supongamos que $t > s$, así $min(s,t) = s$

$$E(B_t B_s) = E((B_t - B_s)B_s) + E(B_s^2) = E(B_s^2) = s$$

donde la segunda igualdad se cumple por la independencia de las v.a.'s $B_t - B_s, B_s$ y dado que éstas tienen valor esperado 0, la tercer igualdad se sigue del hecho $E(B_s^2) = Var(B_s) = s$ antes demostrado, por lo tanto $E(B_s B_t) = \min(s,t)$.

Proposición. 5 *Sea $B = \{B_t | t \in [0,\infty)\}$ un movimiento browniano. Entonces se cumplen lo siguiente:*

i) (Invarianza bajo traslación). Sea $t_0 \in [0,T]$ fijo. Entonces $\widetilde{B} = \{\widetilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0} | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano.

ii) (Simetría). El proceso $\widetilde{B} = \{-B_t | t \in [0,T]\}$ es un movimeinto browniano.

iii) (Invarianza bajo escala). Sea $c > 0$. El proceso $\widetilde{B} = \{cB_{t/c^2} | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano.

iv) (Inversión en el tiempo). El siguiente proceso es un movimiento browniano

$$\widetilde{B}_t = \begin{cases} 0 & si\ t = 0 \\ tB_{1/t} & si\ t > 0 \end{cases}$$

Demostración. i), ii), iii) son fáciles de demostrar probando directamente las condiciones de la Definición 29. Vamos a demostrar iv) $\widetilde{B}_0 = 0$, entonces cumple la Condición 1) del movimiento browniano. De las propiedades de las variables aleatorias gaussianas $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s = tB_{1/t} - sB_{1/s}$ es una v.a. gaussiana (ver Definición 26), ahora bien, sean $0 \leq s < t$, entonces

$$\begin{aligned} E\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right) &= E(tB_{1/t} - sB_{1/s}) \\ &= tE(B_{1/t}) - sE(B_{1/s}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

además

$$
\begin{aligned}
E(\widetilde{B}_t\widetilde{B}_s) &= E(tB_{1/t}sB_{1/s}) \\
&= tsE(B_{1/t}B_{1/s}) \\
&= ts\min(1/t, 1/s) \\
&= s
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
E\left((\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)^2\right) &= E((tB_{1/t} - sB_{1/s})^2) \\
&= t^2E(B_{1/t}^2) - 2tsE(B_{1/t}B_{1/s}) + s^2E(B_{1/s}^2) \\
&= t - 2\min(t, s) + s \\
&= |t - s|
\end{aligned}
$$

así $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$ tiene valor esperado 0 y varianza $|t - s|$. Luego

$$
\begin{aligned}
Cov(\widetilde{B}_s, \widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s) &= E((\widetilde{B}_s)(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s)) \\
&= E((sB_{1/s})(tB_{1/t} - sB_{1/s})) \\
&= tsE(B_{1/t}B_{1/s}) - s^2E(B_{1/s}^2) \\
&= ts\min(1/t, 1/s) - s \\
&= s - s \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dado que el vector $(B_s, B_t - B_s)$ es gaussiano, entonces por el Teorema 1 concluimos que los incrementos son independientes. Para probar la continuidad de las trayectorias, verificaremos que $\lim_{t\to 0}\widetilde{B}_t = 0$ c.p.1. En efecto, fijemos $0 < t_1 < t < t_2 \leq T$. Entonces $\widetilde{B}_t$ es gaussiano con media 0 y varianza t como se demostró anteriormente, por lo tanto tiene la misma distribución que B_t. De donde $\widetilde{X}_1 = \sup\{|B_s||t_1 \leq s \leq t_2\}$ tiene la misma distribución que $X_1 = \sup\{|B_s||t_1 \leq s \leq t_2\}$. Luego estás convergen c.p.1 a $\widetilde{X}_2 = \sup\{|\widetilde{B}_s||0 < s \leq t_2\}$ y $X_2 = \sup\{|B_s||0 < s \leq t_2\}$ cuando $t_1 \downarrow 0$ respectivamente, dado que la convergencia c.p.1 implica la convergencia en distribución, entonces éstas tienen la misma distribución. Nuevamente tomando el límite cuando $t_2 \downarrow 0$ tenemos que $X_2, \widetilde{X}_2$ convergen a $X_3 = \overline{\lim}_{t\downarrow 0}|B(t)|$ y $\widetilde{X_3} = \overline{\lim}_{t\downarrow 0}|\widetilde{B}(t)|$ c.p.1 respectivamente y éstas tienen la misma distrubución. Por la continuidad del movimiento browniano B tenemos que $X_3 = 0$ c.p.1, dado que $\widetilde{X}_3$ tiene la misma distribución que X_3, entonces $\widetilde{X}_3 = 0$ c.p.1, es decir, $\lim_{t\to 0}\widetilde{B}_t = 0$ c.p.1.

Proposición. 6 *Sea $\Delta_n = \{s = t_0^n, t_1^n ..., t_n^n = t\}$ una partición del intervalo $[s,t]$ tal que $||\Delta_n|| = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \to t - s$$

cuando $||\Delta_n|| \to 0$ en $L^2(\Omega)$. Además si $\sum_i ||\Delta_i|| < \infty$. la convergencia es c.p.1.

Demostración. Usando la independencia de los incrementos del movimiento browniano y el hecho de que $E|B_t - B_s|^4 = 3|t-s|^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))^2\right] \\
&+ 2E\left[\sum_{i<j}((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))((B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n))\right] \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \\
&\leq 2||\Delta_n||(t-s)
\end{aligned}$$

lo que implica la convergencia en $L^2(\Omega)$. Ahora bien, si $\sum_i ||\Delta_i|| < \infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))\right)^2\right] \leq 2(t-s)\sum_{n=1}^{\infty}||\Delta_n|| < \infty$$

lo cual implica la convergencia c.p.1. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos X_n por

$$X_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1}((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n))\right)^2$$

notemos que estas v.a.'s son positivas para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo anterior convergen a 0 en $L^1(\Omega)$, ahora bien, sean $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega |\ X_n(\omega)$ no converge a $0\}$, $\epsilon > 0$, entonces $\omega \in \Omega_0$ si y solo si existe una infinidad de subíndices $n \in \mathbb{N}$ tales que $X_n(\omega) \geq \epsilon$, por lo tanto

$$\Omega_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}[X_n \geq \epsilon]$$

Por la desigualdad de Chebychev tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[X_n \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{\infty} E(X_n) < \infty$$

por lo tanto del lema de Borel-Cantelli tenemos que $P(\Omega_0) = 0$ con lo que se concluye el resultado.

Corolario. 1 *Las trayectorias del movimiento browniano no son de variación acotada.*

Demostración. Sea $\Delta_n = \{s = t_0^n, t_1^n, ..., t_n^n = t\}$ una partición del intervalo $[s, t]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \leq \Big(\sup |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i}^n|\Big) \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|$$

Notemos que el lado izquierdo converge a $t - s > 0$ con probabilidad 1. Por otro lado, dada la continuidad del movimiento browniano tenemos que $\sup |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$ converge a 0 con probabilidad 1. Así las trayectorias del movimiento browniano no son de variación acotada.

Proposición. 7 *El movimiento browniano tiene trayectorias diferenciables en ningún punto.*

Demostración. Ver la demostración del Teorema 9.18. en Karatzas y Shreve [11]

Proposición. 8 *Sea $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ una filtración para la cual $B = \{B_t | t \in [0, T]\}$ es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 30. Entonces B es una $\mathcal{F}_t$-martingala.*

Demostración. Sean $0 \leq s < t$. De la definición de movimiento browniano y las propiedades del valor esperado condicional tenemos que

$$\begin{aligned} E(B_t|\mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + E(B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E(B_t - B_s) + B_s \\ &= B_s \end{aligned}$$

por lo tanto el movimiento browniano es una martingala.

Un resultado que caracteriza al movimiento browniano, es que un movimiento browniano se puede ver como una martingala cuadrado integrable “con el tiempo movido”, esto se ve en la siguiente proposición.

Proposición. 9 *Sea M una martingala continua y cuadrado integrable (i.e., $E(X_t^2) < \infty$ para toda $t \in [0, T]$). Entonces M es un movimiento browniano si y solo si $\{(M_t^2 - t) | t \geq 0\}$ es una martingala.*

Demostración. Solo demostraremos la necesidad, pues la suficiencia es una concecuencia inmediata de la fórmula de Itô (3.7) que daremos en el siguiente capítulo. Para la necesidad notemos que por las propiedades del valor esperado condicional es lo mismo probar que $E(M_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = M_s^2 - s$ que probar $E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) = t - s$. En efecto, sean $s < t$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
E(M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s) &= E((M_t - M_s)(M_t + M_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= E((M_t - M_s)M_s|\mathcal{F}_s) + E((M_t - M_s)M_t|\mathcal{F}_s) \\
&= M_s E((M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) + E((M_t - M_s)M_t|\mathcal{F}_s) \\
&= E((M_t - M_s)M_t|\mathcal{F}_s) - M_s E((M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= E((M_t - M_s)M_t|\mathcal{F}_s) - E(M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) \\
&= E((M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s) \\
&= t - s
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se sigue del hecho $M_s E((M_t - M_s)|\mathcal{F}_s) = M_s E((M_t - M_s)) = 0$ por ser movimiento browniano.

Capítulo 3

Cálculo Estocástico.

El cálculo estocástico consiste en gran parte por una teoría basada en la integración de procesos estocásticos, que generaliza la integración de Lebesgue-Stieltjes para la integración de procesos estocástico respecto a otros procesos estocásticos. Las bases de éste fueron propuestas por N. Wiener [28] para el caso donde el integrando es una función determinista y fueron generalizadas por K. Itô [7] para el caso cuando el integrando es un proceso estocástico.

En este capítulo presentamos 3 tipos de integrales estocásticas (integral de Itô, integral forward e integral de Skorohod), haremos un análisis detallado sobre la primera pues es la que utilizaremos más en este escrito.

Dado que las integrales forward y Skorohod son integrales anticipantes (i.e., nos permiten integrar procesos no necesariamente adaptados a la filtración), daremos una pequeña introducción al cálculo de Malliavin para trabajar con éstas y por último aplicaremos todas estas herramientas al engrosamiento de filtraciones.

Para este capítulo supondremos que, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad completo donde está definido un movimiento browniano $B = \{B_t | t \in [0, T]\}$ y una filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ para la cual B es un movimiento browniano en el sentido de la Definición 30.

3.1 Construcción de la integral de Itô.

En esta sección estudiaremos la integral estocástica en el sentido de Itô [7], cuyo dominio está incluido en la familia de los procesos adaptados a la filtración con repecto a la que el integrador es un movimiento browniano. El lector interesado en detalles más especificos sobre el tema puede consultar por ejemplo Arnold [1] o bien Karatzas and Shreve [11].

Por el momento nuestro objeto de estudio será la siguiente integral

$$\int_0^T g_s dB_s \tag{3.1}$$

donde g es un proceso estocástico con trayectorias continuas y esta integral se hace trayectoría por trayectoría (i.e., para cada ω tenemos que $\int_0^T g_s dB_s = \int_0^T g_s(\omega) dB_s(\omega)$), si a esta integral la tratamos de definir como una integral de Riemman-Stieltjes llegamos a los siguientes inconvenientes.
Supongamos que la integral (3.1) es de Riemman-Stieltjes, entonces para una partición $\Delta = \{0 = t_0, t_1, ..., t_n = T\}$ del intervalo $[0, T]$ ésta se puede calcular como el límite de las sumas de Riemman-Stieltjes, dadas por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g_{\tau_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \tag{3.2}$$

cuando $||\Delta_n|| = \max\{t_i - t_{i-1} | i \in \{1, ..., n\}\} \to 0$, donde $\tau_i = (1-\alpha)t_{i-1} + \alpha t_i$ para algún $0 \leq \alpha \leq 1$. Uno de los inconvenientes al hacer esto se puede observar en la siguiente proposición, ésta se puede obtener como corolorario del Teorema 52 en Protter [22].

Proposición. 10 *Sean $\alpha = 0$ y $\omega \in \Omega$. Si las sumas $S_n(\omega)$ en (3.2) convergen para toda función continua $g_.(\omega)$. Entonces $B_.(\omega)$ es de variación acotada.*

Observación. 5 *Notemos que por el Corolario 1 el movimiento browniano tiene trayectorias de variación no acotada. El problema aquí es que nuestra función g_t depende de eventos que ocurren después de t.*

Otro problema con definir esta integral como el límite en (3.2) es que éste depende de la elección de τ_i en (3.2), como se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición. 11 *Supongamos que $g = B$ en (3.2). Entonces S_n converge en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto en probabilidad a $\frac{1}{2}(B_T^2 - B_0^2 + (2\alpha - 1)T)$.*

Demostración. Se puede proceder como en la Proposición 6 para obtener el resultado deseado.

Observación. 6 *La proposición anterior nos dice que nuestra integral depende de la elección de α. Itô considero el caso cuando $\alpha = 0$ para definir la integral estocástica [7].*

Vamos a utilizar la notación $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ para denotar al espacio de procesos estocásticos $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ medibles que satisfacen las condiciones:

(1) X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$.

(2) $\int_0^T E(|X_s|^2)ds < \infty$.

Esta definición la damos dado que definiremos la integral de Itô [7] para los procesos en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. La forma de construir la integral de Itô es de la misma manera que en teoría de la medida al construir la integral de Lebesgue [25], es decir, empezamos con procesos estocásticos escalonados en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ y después utilizando estos como aproximación de cualquier otro proceso estocastico en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$

3.2 Integral de Itô.

Como se hace en la teoría de integración, primero vamos a definir la integral estocástica para procesos escalonados en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$, es decir, procesos de la forma

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k(\omega) 1_{[t_k, t_{k+1})}(t) \tag{3.3}$$

Donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = T$. Note que en este caso para cada $k \in \{1, ..., n\}$ la v.a. ξ_k es $\mathcal{F}_{t_k}$-medible y pertenece a $L^2(\Omega)$.

Definición. 31 *La integral estocástica de X en el sentido de Itô con respecto al movimiento browniano B se define como*

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \tag{3.4}$$

Observación. 7 *Notemos que (3.4) es independiente de la representación de X como proceso escalonado ya que es dada trayectoria por trayectoria (ver Arnold [1] para más detalles) y ξ_k se pide $\mathcal{F}_{t_k}$-medible pues se pretende que nuestra integral estocástica tenga la propiedad de martingala (Teorema 3).*

Los siguientes resultados para procesos escalonados se pueden consultar en Kuo [14].

Lema. 2 *Sea $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de procesos estocásticos escalonados en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T E\left(|X_s - X_s^{(n)}|^2\right) ds = 0$$

Proposición. 12 ***(Isometría de Itô.)*** *Sea $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ un proceso estocástico escalonado. Entonces $E(I(X)) = 0$ y*

$$E(I(X)^2) = E\left(\int_0^T (X_s)^2 ds\right)$$

Sea $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Por el Lema 2 existe una sucesión $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de procesos escalonados tales que

$$\begin{aligned} E(|I(X^{(n)}) - I(X^{(m)})|^2) &= \int_0^T E(|X_s^{(n)} - X_s^{(m)}|^2) ds \\ &\to 0, \quad \text{cuando}\, n, m \to \infty \end{aligned}$$

Donde la igualdad se cumple por la Proposición 12. Así $\{I(X^{(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$, por lo tanto, existe

$$I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X^{(n)}) \quad \text{en}\, L^2(\Omega) \tag{3.5}$$

pues $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert completo.

Observación. 8 *Este límite está bien definido. En efecto sean $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de procesos escalonados tales que convergen al proceso X como en el Lema 1, entonces*

$$\begin{aligned} E(|I(X^{(n)}) - I(Y^{(n)})|^2) &\le 2\left(\int_0^T E(|X_s - X_s^{(n)}|^2) ds + \int_0^T E(|X_s - Y_s^{(n)}|^2) ds\right) \\ &\to 0, \quad \textit{cuando}\, n \to \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} I(X^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} I(Y^{(n)}) \quad \text{en}\, L^2(\Omega)$$

Definición. 32 *Sea $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Definimos la integral de Itô de X como el límite en (3.5) y es denotado por*

$$\int_a^b X_s dB_s$$

El Lema 2 y la Proposición 12 se extienden a los procesos en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ al tomar límites de sucesiones de procesos escalonados en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$.

Teorema 2 ***(Isometría de Itô general.)*** *Sea $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Entonces la integral de Itô $I(X)$ de X es una variable aleatoria con $E(I(X)) = 0$ y*

$$E(I(X)^2) = \int_0^T E(X_s^2) ds$$

Corolario. 2 *Sean* $X, Y \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$*. Entonces*

$$E(I(X)I(Y)) = \int_0^T E(X_s Y_s) ds$$

Teorema 3 *Sea* $f \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ *una v.a., entonces el proceso estocástico*

$$M_t = \int_0^t f_s dB_s \quad t \in [0,T]$$

es una martingala con respecto a las filtración $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\{B_s | s \leq t\}\right)$*.*

3.2.1 Extensión de la integral de Itô.

Utilizaremos la notación $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ (donde $L^2([0,T])$ es el espacio de Hilbert de funciones cuadro integrables sobre el intervalo $[0,T]$), para definir el espacio de procesos estocásticos medibles $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ tales que:

1) X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$.

2) $\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$ *c.p.*1

La condición 2) nos dice que casi todas las trayectorias de X pertenecen a $L^2([0,T])$.

Observación. 9 *Sea* $X \in \mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$*, entonces por el teorema de Fubini* $E(\int_0^T |X_t|^2) dt = \int_0^T E(|X_t|^2) dt < \infty$ *por lo tanto* $\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$ *c.p.*1*, así el nuevo espacio de procesos estocásticos* $\mathcal{L}^2_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ *contiene al conjunto* $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$*, donde definimos la integral de Itô en la subsección anterior, es decir,*

$$\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega) \subset \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$$

La diferencia entre los espacios es que en general si $X \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ *la v.a.* $\int_0^T |X_t|^2 dt$ *carece de valor esperado finito.*

Lema. 3 *Sea* $X \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$*. Entonces existe una sucesión* $\{X^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ *de procesos en* $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ *tales que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T |X_t^{(n)} - X_t|^2 dt = 0$$

c.p.1 y por lo tanto en probabilidad.

Demostración. Ver demostración del Lema 5.3.1 en Kuo [14].

Proposición. 13 *Sea* $X \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ *un proceso estocástico escalonado. Entonces se cumple que*

$$P\left(\left|\int_0^T X_t dB_t\right| > \epsilon\right) \leq \frac{C}{\epsilon^2} + P\left(\int_0^T |X_t|^2 dt > C\right) \tag{3.6}$$

para $C, \epsilon > 0$*.*

Demostración. Ver demostración del Lema 5.2.1 en Kuo [14].

Sea $X \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$. Por el Lema 3 existe una sucesión $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de procesos en $\mathcal{L}^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ que convergen a X en $L^2([0,T])$ c.p.1. Utilizando la Proposición 13 es fácil ver que $\left\{\int_0^T X_t^{(n)} dB_t\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en probabilidad y por lo tanto existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T X_t^{(n)} dB_t \quad \text{en probabilidad}$$

de donde definimos la integral estocástica en el sentido de Itô como este límite, es decir,

$$\int_0^T X_t dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_t^{(n)} dB_t \quad \text{en probabilidad}$$

Para ver que este límite está bien definido se puede proceder como en la Observación 8 y utilizando la Proposición 13.

Observación. 10 *Notemos que con lo anterior la Proposición 13 implica que si* $\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t)^2 dt \to 0$ *c.p.1 y por lo tanto en probabilidad cuando* $n \to \infty$*, entonces* $\int_0^T X_t^{(n)} dB_t \to \int_0^T X_t dB_t$ *en probabilidad cuando* $n \to \infty$*.*

3.2.2 Fórmula de Itô.

Teorema 4 *(**Fórmula de Itô**). Sea* f *una función en* $C^2([0,T])$ *(i.e., con primera y segunda derivada continuas en el intervalo* $[0,T]$*). Entonces para cualquier* $t \in [0,T]$ *se tiene que*

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)) ds \tag{3.7}$$

donde la primera integral es la integral de Itô (definida anteriormente) y la segunda es una integral en el sentido de Lebesgue para cada trayectoria.

Demostración. Ver la demostración del Teorema A.12. en Mishura [19]

Observación. 11 *Notemos que el termino extra a comparación de la conocida regla de la cadena del cálculo de Newton-Leibniz es debido a que la variación cuadrática del movimiento browniano es distinta de cero lo cual se demostró en la Proposición 6.*

Ejemplo. 7 *Tomemos la función $f(x) = x^2$ de la fórmula de Itô tenemos que*

$$B_t^2 - B_0^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + (t-0)$$

tomando $t = T$ obtenemos

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_T^2 - T)$$

lo cual fue proporcionado en la Proposición 11.

3.2.3 Fórmula ligeramente generalizada de Itô.

Sea $f(x,t)$ con $t \in [0,T]$ y $x \in \mathbb{R}$, poniendo $x = B_t$ obtenemos el proceso estocástico $f(t, B_t)$. Así t aparece en dos lugares, una como variable de f y otra en el movimiento browniano. Por lo tanto podemos derivar f con respecto a t por el cálculo de Newton-Leibniz y con respecto al cálculo de Itô para B_t. Por lo tanto podemos generalizar la fórmula de Itô para este tipo de funciones.

Teorema 5 *Sea $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$, es decir, f es una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Entonces*

$$\begin{aligned} f(t, B_t) =& f(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds \end{aligned}$$

Demostración. Ver Subsección 7.3 en Kuo [14].

Ejemplo. 8 *Consideremos la función $f(t,x) = tx^2$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = x^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2tx$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2t$. Por lo tanto tomando de la fórmula de Itô ligeramente generalizada tenemos que*

$$tB_t^2 = 2\int_0^t sB_s dB_s + \left(\int_0^t B_s^2 ds + \frac{1}{2}t^2 \right)$$

3.2.4 Fórmula general de Itô.

Definición. 33 *Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t b_s ds \quad t \in [0, T] \tag{3.8}$$

donde X_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, $\sigma \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ y b es un proceso medible y $\mathcal{F}_t$-adaptado, con trayectorias integrables. A σ se le suele llamar la volatilidad (o termino de difusión) del proceso y a b el drift del proceso.

Observación. 12 *Notemos que la ecuación anterior está escrita en su forma integral, así ésta se puede escribir en su forma diferencial con condición inicial X_0 como*

$$dX_t = \sigma_t dB_t + b_t dt \quad t \in (0, T]$$

dado que las trayectorias del movimiento browniano son derivables en ningún punto, entonces dB_t no tiene mucho sentido, así que tenemos que recalcar que la igualdad anterior solo es otra representación de la igualdad (3.8).

El siguiente teorema nos proporciona la fórmula general de Itô.

Teorema 6 *(**Fórmula general de Itô.**) Sea X_t un proceso de Itô dado por*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t b_s ds + \quad t \in [0, T]$$

y $\theta(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Entonces $\theta(t, X_t)$ es un proceso de Itô y

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) =& \theta(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s)\sigma_s dB_s \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial \theta}{\partial x}(s, X_s) b_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(s, X_s)\sigma_s^2 \right] ds \end{aligned} \tag{3.9}$$

Demostración. Ver Subsección 5.5 en Arnold [1].

Aplicaciones de la fórmula general de Itô se veran más adelante para la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas.

3.2.5 Fórmula de Itô multidimensional.

Sean $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, ..., B_t^{(m)}$ m movimientos brownianos independientes. Consideremos n procesos de Itô $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, ..., X_t^{(n)}$ dados por

$$X_t^{(i)} = X_a^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} f_s^{(i,j)} dB_s^{(j)} + \int_a^t g_s^{(i)} ds \tag{3.10}$$

donde $f^{(i,j)} \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ y $g^{(i)}$ son procesos medibles y adaptados a la filtración para la cual $B^{(i)}$ es un movimiento browniano con trayectorias integrables para todo $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in \{1,...,m\}$. Considerando las siguientes matrices

$$B_t = \begin{bmatrix} B_t^{(1)} \\ \vdots \\ B_t^{(m)} \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} X_t^{(1)} \\ \vdots \\ X_t^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$f_t = \begin{bmatrix} f_t^{(1,1)} & \dots & f_t^{(1,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_t^{(n,1)} & \dots & f_t^{(n,m)} \end{bmatrix}, \quad g_t = \begin{bmatrix} g_t^{(1)} \\ \vdots g_t^{(n)} \end{bmatrix}$$

podemos reescribir nuestra ecuación (3.10) como

$$X_t = X_a + \int_a^t f_s dB_s + \int_a^t g_s ds \quad t \in [0,T]$$

Presentamos a continuación la fórmula general de Itô (3.7) en su forma multidimensional.

Teorema 7 *Sean $X^{(1)},...,X^{(n)}$ procesos de Itô como en (3.10) y θ una función continua en $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ con derivadas parciales continuas $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}$ para todo $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in \{1,...,m\}$. Entonces $\theta(t, X_t)$ es un proceso de Itô y su forma diferencial está dada por*

$$\begin{aligned} d\theta\left(t, X_t^{(1)},...,X_t^{(n)}\right) =& \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(t, X_t^{(1)},...,X_t^{(n)}\right) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\left(t, X_t^{(1)},...,X_t^{(n)}\right) dX_t^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}\left(t, X_t^{(1)},...,X_t^{(n)}\right) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)} \end{aligned}$$

donde el producto $dX_t^{(i)} dX_t^{(j)}$ se calcula con la regla del producto de diferenciales dada por $dtdt = dtdB_t^{(i)} = dB_t^{(i)} dB_t^{(j)} = 0$ para $i \neq j$ y $\left(dB_t^{(i)}\right)^2 = dt$. Esto es debido a la independencia de los movimientos brownianos.

Una aplicación del teorema anterior es la siguiente fórmula de integración por partes para procesos, conocida como fórmula de Itô para el producto.

Ejemplo. 9 *Consideremos la función $\theta(x,y) = xy$. Tenemos que $\frac{\partial\theta}{\partial x} = y$, $\frac{\partial\theta}{\partial y} = x$, $\frac{\partial\theta^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial\theta^2}{\partial^2 y} = 0$ y $\frac{\partial\theta^2}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\theta^2}{\partial y\partial x} = 1$. Aplicando la fórmula de Itô* *multidimensional para dos procesos de Itô X y Y tenemos que*

$$\begin{aligned} d(X_tY_t) &= Y_t dX_t + X_t dY_t + \frac{1}{2} dX_t dY_t + \frac{1}{2} dY_t dX_t \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t dX_s dY_s$$

3.2.6 Fórmula de Itô para campos aleatorios.

Al estudiar fenómenos aleatorios en la naturaleza podemos encontrarnos con el hecho de que estos pueden depender de la posición que se encuentre nuestro fenómeno de estudio o bien, cuando estamos estudiando más de un objeto en nuestro fenómeno, por lo tanto dependeremos de otro parametro, llamémosle x, que nos proporcione la posición o el candidato de estudio. Algunos ejemplos se pueden encontrar en finanzas al estudiar el incremento de los precios de los activos, en este caso x representaria el candidato de nuestros activos a estudiar, también en física al estudiar las trayectorias aleatorias de las particulas de un gas donde x representaría la posición de la particular al tiempo inicial de nuestro estudio. Para esto nosotros introducimos los campos aleatorios, estos no son más que procesos estocásticos parametrizados por un valor x.

Definición. 34 *Un campo aleatorio σ es una familia de procesos estocásticos parametrizados por $x \in \mathbb{R}$, es decir,*

$$\sigma = \{\sigma(x) | x \in \mathbb{R}\} \tag{3.11}$$

donde $\sigma(x)$ es un proceso estocástico.

Observación. 13 *En la literatura hay varias formas de definir un campo aleatorio, otra por ejemplo es: como una función $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\sigma(x)$ es un proceso estocástico o bien para cada $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}$, $\sigma_t(x)$ es una variable aleatoria. Todas estas definiciones son equivalentes.*

Ahora presentamos un teorema que nos garantiza que la fórmula de Itô (Teorema 6) se sigue cumpliendo para un campo aleatorio adaptado con respecto a un proceso de Itô de la forma (3.8).

Teorema 8 *Sean X un proceso de Itô de la forma (3.8) y $f : [0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ un campo aleatorio medible y $\mathcal{F}_t$-adaptado (i.e., para cada $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$) tal que $f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ con probabilidad 1. Entonces $f(t, X_t)$ es un proceso de Itô y además*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) =& f(0,X_0) + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s) dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s} f(s,X_s)\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(b_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s) + \frac{\sigma_s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,X_s)\right) ds \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $t \in [0,T]$ c.p.1.

Para la demostración de este teorema nos ayudaremos del siguiente lema.

Lema. 4 *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función par tal que $supp\,\varphi = [-1,1]$, $\varphi(\mathbb{R}) = [0,1]$, $\varphi(0) = 1$ y consideremos la sucesión de funciones $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ definidas por $\psi_m(x) = x\varphi(\frac{x}{m})$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $|\psi_m| \le m$ y para cualquier $g \in C^2(\mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \psi_m(x) &= x \\ \lim_{m\to\infty} \frac{d}{dx}\psi_m(g(x)) &= g'(x) \\ \lim_{m\to\infty} \frac{d^2}{dx^2}\psi_m(g(x)) &= g''(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Además tenemos que

$$\left|\frac{d}{dx}\psi_m(g(x))\right| \le C_1|g'(x)|$$

y

$$\left|\frac{d^2}{dx^2}\psi_m(g(x))\right| \le C_2|g''(x)| + C_2\left|(g'(x))^2\right|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y algunas constantes positivas C_1, C_2.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$, por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{d}{dx}\psi_m(g(x)) = g'(x)\varphi\left(\frac{g(x)}{m}\right) + \frac{g(x)g'(x)}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\psi_m(g(x)) = g''(x)\varphi\left(\frac{g(x)}{m}\right) + 2\frac{(g'(x))^2}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right) \\ + \frac{g(x)g''(x)}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right) + \frac{g(x)(g'(x))^2}{m^2}\varphi''\left(\frac{g(x)}{m}\right) \end{aligned}$$

Fijando x y tomando límite cuando $m \to \infty$ se concluye los resultados para los límites, esto es debido a que $\varphi(0) = 1$ y sus derivadas son acotadas por ser continuas y tener soporte compacto. Ahora bien, para las desigualdades, sean $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ fijos, si $\frac{|g(x)|}{m} > 1$, entonces $\varphi(\frac{g(x)}{m}) = \varphi'(\frac{g(x)}{m}) = \varphi''(\frac{g(x)}{m}) = 0$ y para $\frac{|g(x)|}{m} \leq 1$ por el resultado anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dx}\psi_m(g(x))\right| &= \left|g'(x)\varphi\left(\frac{g(x)}{m}\right) + \frac{g(x)g'(x)}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right)\right| \\ &\leq |g'(x)|\left(1 + \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|\right)\end{aligned}$$

donde el supremo anterior es finito pues φ es continua en $[-1,1]$ y nula fuera de este conjunto. Luego

$$\left|g''(x)\varphi\left(\frac{g(x)}{m}\right) + \frac{g(x)g''(x)}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right)\right| \leq |g''(x)|\left(1 + \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)|\right)$$

y

$$\begin{aligned}&\left|2\frac{(g'(x))^2}{m}\varphi'\left(\frac{g(x)}{m}\right) + \frac{g(x)(g'(x))^2}{m^2}\varphi''\left(\frac{g(x)}{m}\right)\right| \leq \\ &\qquad\qquad \left|(g'(x))^2\right|\left(2\sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi'(y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}}|\varphi''(y)|\right)\end{aligned}$$

donde nuevamente los supremos anteriores son finitos dado que φ', φ'' son funciones continuas en $[-1,1]$ y nulas fuera de este conjunto, de donde se concluye el resultado.

Damos a continuación la demostración del Teorema 8.

Demostración del Teorema 8. Sean φ como en el Lema 4 y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un "mollifier" no negativo. Esto es, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, ϕ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, consideramos lo siguiente $g_m(t,x) = f(t,x)\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$,

$$\phi_n(x) = n\phi(nx) \quad y \quad f_n(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x-y)f(t,y)dy$$

De las propiedades de ϕ como mollifier se sigue que $f_n(t,\cdot) \to f(t,\cdot)$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en conjuntos compactos c.p.1. Ahora bien, aplicando la fórmula de Itô a $g_m(t,y)\phi_n(X_t-y)$ tenemos que

$$\begin{aligned} g_m(t,y)\phi_n(X_t-y) =& g_m(0,y)\phi_n(X_0-y) + \int_0^t \bigg(\phi_n(X_s-y)\frac{\partial}{\partial t}g_m(s,y) \\ &+ b_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y) + \frac{\sigma_s^2}{2}g_m(s,y)\phi_n''(X_s-y)\bigg) ds \\ &+ \int_0^t \sigma_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dB_s \quad t\in[0,T],\, y\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Paso 1) Supongamos que σ, f son acotadas.

Dado que ϕ tiene soporte compacto, entonces existe un $M>0$ tal que el soporte de ϕ está contenido en $(-M,M)$ y por lo tanto

$$supp\,\phi_n \subset (-M,M) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

notemos que ϕ_n' es nula fuera de $[-M,M]$ y es acotada por ser continua y tener soporte compacto, además g_m es nula fuera de $[-m,m]$ por lo tanto existe $K_{n,m}\in\mathbb{R}_+$ tal que si $H=\max(m,M)$ se tiene que

$$|\sigma_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)| \le K_{n,m}1_{[-H,H]}(y) \quad \forall (s,y,\omega)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\Omega$$

entonces para cada $t\in[0,T]$ existe una función $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{F}_t$-medible $Y^t:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ en $L^1(\mathbb{R})$ c.p.1 (ver León [15] Teorema 3.1) tal que

$$Y_y^t = \int_0^t \sigma_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dB_s \quad c.p.1 \tag{3.13}$$

para casi toda $y\in\mathbb{R}$ y

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \sigma_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dydB_s = \int_{\mathbb{R}} Y_y^t dy \quad c.p.1 \tag{3.14}$$

por (3.13) intercambiamos nuestra integral estocástica por Y_y^t, así podemos integrar $g_m(t,y)\phi_n(X_t-y)$ con respecto a y y la medibilidad de $Y_\cdot^t$ nos permite mantener la igualdad c.p.1, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_m(t,y)\phi_n(X_t-y)dy =& \int_{\mathbb{R}} g_m(0,y)\phi_n(X_0-y)dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \phi_n(X_s-y)\frac{\partial}{\partial t}g_m(s,y)dsdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t b_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dsdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \frac{\sigma_s^2}{2}g_m(s,y)\phi_n''(X_s-y)dsdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}} Y_y^t dy \quad c.p.1 \end{aligned}$$

ahora bien por (3.14) y el teorema de Fubini podemos reescribir nuestra igualdad como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_m(t,y)\phi_n(X_t-y)dy = &\int_{\mathbb{R}} g_m(0,y)\phi_n(X_0-y)dy \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \phi_n(X_s-y)\frac{\partial}{\partial t}g_m(s,y)dyds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} b_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dyds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma_s^2}{2}g_m(s,y)\phi_n''(X_s-y)dyds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} \sigma_s g_m(s,y)\phi_n'(X_s-y)dydB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

De las propiedades de ϕ, el hecho de que $|\varphi| \leq 1$ y $\lim_{m\to\infty}\varphi\left(\frac{y}{m}\right) = 1$ podemos utilizar el teorema de convergencia dominada tomando límite cuando $m \to \infty$ para obtener

$$\begin{aligned}f_n(t,X_t) =& f_n(0,X_0) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Bigg(\phi_n(X_s-y)\frac{\partial}{\partial t}f(s,y) \\ &+b_s f(s,y)\phi_n'(X_s-y) + \frac{\sigma_s^2}{2}f(s,y)\phi_n''(X_s-y)\Bigg)dyds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\sigma_s f(s,y)\phi_n'(X_s-y)dydB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

Por integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}f_n(t,X_t) =& f_n(0,X_0) + \int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Bigg(\phi_n(X_s-y)\frac{\partial}{\partial t}f(s,y) \\ &+b_s\frac{\partial}{\partial x}f(s,y)\phi_n(X_s-y) + \frac{\sigma_s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(s,y)\phi_n(X_s-y)\Bigg)dyds \\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\sigma_s\frac{\partial}{\partial x}f(s,y)\phi_n(X_s-y)dydB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

Sea Ω_0 el conjunto donde se cumple la igualdad anterior, veamos que para cada $\omega \in \Omega_0$ existen constantes tales que acotan a las integrales sobre $\mathbb{R}$ en la igualdad anterior. En efecto, consideremos al conjunto $O = [0,T]\times[-M,M]$, dado que las derivadas parciales de f son continuas en $[0,T]\times\mathbb{R}$ y el hecho de que ϕ tiene soporte compacto, entonces para cada $\omega \in \Omega_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f(s,y)\phi_n(X_s - y)dy\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f(s,y)n\phi(n(X_s - y))dy\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} f\left(s, X_s - \frac{u}{n}\right)\phi(u)du\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial t} f\left(s, X_s - \frac{u}{n}\right)\right|\phi(u)du \\ &\leq \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial}{\partial t} f\left(s, X_s - h\right)\right|\end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga a lo anterior se obtiene

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(s,y)\phi_n(X_s - y)dy\right| \leq \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial}{\partial x} f\left(s, X_s - h\right)\right|$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,y)\phi_n(X_s - y)dy\right| \leq \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(s, X_s - h\right)\right|$$

De lo anterior tenemos que para cada $\omega \in \Omega_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t} f_n(s,X_s) + b_s \frac{\partial}{\partial x} f_n(s,X_s) + \frac{\sigma_s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_n(s,X_s)\right| &\leq \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial}{\partial t} f\left(s, X_s - h\right)\right| \\ + |b_s| \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial}{\partial x} f\left(s, X_s - h\right)\right| &+ |\sigma_s^2| \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(s, X_s - h\right)\right|\end{aligned}$$

y

$$\left|\sigma_s \frac{\partial}{\partial x} f_n(s,X_s)\right| \leq |\sigma_s| \sup_{(s,h)\in O} \left|\frac{\partial}{\partial x} f\left(s, X_s - h\right)\right|$$

para todo $s \in [0,t]$. Por la definición de proceso de Itô (Definición 33) $b, \sigma, \sigma^2 \in L^1([0,T])$, de donde para cada $\omega \in \Omega_0$ los terminos en el lado derecho de las desigualdades anteriores pertenecen a $L^1([0,T])$, por la Observación 10 podemos utilizar el teorema de convergencia dominada para la integral estocástica, por lo tanto de las propiedades de ϕ y el teorema de convergencia dominada concluimos que

$$\begin{aligned}f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t &\left(\frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s) + b_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s)\right. \\ &\left.+ \frac{\sigma_s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,X_s)\right) ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s)dB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$.

Paso 2) Sea $\sigma \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2([0,T]))$ y $f \in C^{1,2}(\mathbb{R})$ c.p.1. Consideremos lo siguiente. $\{\sigma^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ la sucesión de truncamientos de σ, es decir, para todo $(\omega, t) \in \Omega \times [0,T]$ tenemos que

$$\sigma_t^{(m)} = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } |\sigma_t| \leq m \\ m & \text{si } m \leq \sigma_t \\ -m & \text{si } \sigma_t \leq -m \end{cases}$$

y φ, ψ_m como en el Lema 4. Entonces aplicando lo demostrado en el Paso 1) a $\psi_m(f)$ y $\sigma^{(m)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\psi_m(f(t,X_t)) = \psi_m(f(0,X_0)) + \int_0^t \Bigg(\frac{\partial}{\partial t}\psi_m(f(s,X_s)) + b_s \frac{\partial}{\partial x}\psi_m(f(s,X_s)) \\ + \frac{\left(\sigma_s^{(m)}\right)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_m(f(s,X_s)) \Bigg) ds + \int_0^t \sigma_s^{(m)} \frac{\partial}{\partial x}\psi_m(f(s,X_s)) dB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

Finalmente por el Lema 4 podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para obtener

$$\begin{aligned}f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \Bigg(\frac{\partial}{\partial t} f(s,X_s) + b_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s) \\ + \frac{\sigma_s^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,X_s) \Bigg) ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial}{\partial x} f(s,X_s) dB_s \quad c.p.1\end{aligned}$$

3.3 Variación cuadrática de un proceso.

Definición. 35 *Sean X, Y dos procesos de Itô. El proceso de variación cuadrática de X denotado por $[X,X] = \{[X,X]_t | t \in [0,T]\}$, es definido por*

$$[X,X]_t = X_t^2 - 2\int_0^t X_s dX_s \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.15}$$

La covarianza cuadrática de X, Y, también llamada proceso corchete de X, Y es definido por

$$[X,Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s \quad \forall t \in [0,T]$$

A continuación damos algunas propiedades que usaremos de estos procesos, así como el teorema de caracterización de Lévy para caracterizar los movimientos brownianos por medio de los procesos de variación cuadrática.

Proposición. 14 *El proceso corchete* $[.,.]$ *es bilineal, es decir, dados dos procesos de Itô X, Y, se tiene que* $[X-Y,X-Y]=[X,X]-2[X,Y]+[X,Y]$.

Demostración. Sea $t\in[0,T]$, entonces de la definición del proceso corchete

$$\begin{aligned}
&[X-Y,X-Y]_t=(X_t-Y_t)^2-2\int_0^t(X_s-Y_s)d(X_s-Y_s)\\
=&X_t^2-2\int_0^t X_sdX_s-2\left(X_tY_t-\int_0^t X_sdY_s-\int_0^t Y_sdX_s\right)+Y_t^2-2\int_0^t Y_sdY_s\\
=&[X,X]_t-2[X,Y]_t+[Y,Y]_t \quad t\in[0,T]
\end{aligned}$$

Proposición. 15 *Sea* $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ *un proceso con trayectorias continuas y de variación acotada. Entonces el proceso de variación cuadrática de f es constante, para ser más precisos, se tiene que* $[f,f]_t=f_0^2$ *para toda* $t\in[0,T]$.

Demostración. Dado que las trayectorias del proceso son continuas y de variación acotada podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, para obtener

$$\int_0^t fdf=\frac{1}{2}(f_t^2-f_0^2)\quad \forall t\in[0,T]$$

el resultado se sigue de la definición de proceso de variación cuadrática.

Proposición. 16 *Sean* $B=\{B_t|t\in[0,T]\}$ *un movimiento browniano y f un proceso de la forma*

$$f_t=f_0+\int_0^t g_sds\quad \forall t\in[0,T]$$

Entonces el proceso corchete de B y f es nulo.

Demostración. De la definición de proceso corchete de B y f se tiene que

$$\begin{aligned}
[B,f]_t&=B_tf_t-\int_0^t B_sdf_s-\int_0^t f_sdB_s\\
&=B_0f_0\\
&=0
\end{aligned}$$

para todo t en $[0,T]$, donde la segunda igualdad se cumple por la fórmula de Itô para el producto.

Teorema 9 ***(Teorema de caracterización de Lévy.)***
Un proceso estocástico $X = \{X_t | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano si y solo si es una martinagala continua local con $[X,X]_t = t$.

Demostración. Ver demostración del Teorema 39 en el Capítulo 2 de Protter [22].

3.4 Ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô.

Definición. 36 *Una ecuación diferencial estocástica (EDE) con condicioón inicial X_0 es una ecuación de la forma*

$$\begin{aligned} dX_t = & \ b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \quad t \in [0,T] \\ X_0 = & \ \xi \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde B es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}|t \in [0,T]\}$ para la cual es un movimiento browniano, b y σ son funciones $\mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles y ξ es una v.a. $\mathcal{F}_0$-medible.

Definición. 37 *Una solución fuerte de la EDE (3.16) en el intervalo $[0,T]$ es un proceso adaptado con trayectorias continuas tal que:*

- $P(X_0 = \xi) = 1$
- $P(\int_0^T \{|b(s,X_s)| + (\sigma(s,X_s))^2\}ds < \infty) = 1$
- $P(X_t = \xi + \int_0^T b(s,X_s)ds + \int_0^T \sigma(s,X_s)dB_s) = 1$ *para cada* $t \in [0,T]$.

Algunas soluciones se pueden encontrar por medio de la fórmula de Itô como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. 10 *Consideremos la siguiente EDE*

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^2 dB_t + X_t^3 dt \\ X_0 &= 1 \end{aligned}$$

O bien en su forma integral

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 dB_s + \int_0^t X_s^3 ds$$

Aplicando la fórmula de Itô a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ (suponiendo que el intervalo de definición para x no contiene al 0) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{X_t}\right) &= -\frac{1}{X_t^2}dX_t + \frac{1}{2}\frac{2}{X_t}(dX_t)^2 \\ &= -\frac{1}{X_t^2}(X_t^2 dB_t + X_t^3 dt) + X_t dt \\ &= -dB_t \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1}{X_t} = -B_t + C$. La condición inicial $X_0 = 1$ implica que $C = 1$. Así nuestra solución es

$$X_t = \frac{1}{1 - B_t}$$

Notemos que esta solución explota cuando B_t sale del intervalo $(-\infty, 1)$.

3.4.1 Existencia y unicidad.

Al estudiar las EDE's nos encontramos con dos problemas como ocurre en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) o en el de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's). El primero es el de existencia, es decir, puede ser que nuestra solución no esté bien definida en el intervalo donde estamos trabajando como sucedio en el ejemplo anterior (Ejemplo 10) y el otro es el de unicidad, es decir, siempre que obtengamos una solución de nuestra EDE esta solución puede ser única o no, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. 11 *Consideremos la siguiente EDE*

$$\begin{aligned} dX_t &= 3X_t^{2/3}dB_t + 3X_t^{1/3}dt \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

Fijemos un $a > 0$, así definimos la función $\theta_a(x) = (x-a)^3 1_{\{x \geq a\}}$, calculando las derivadas de θ con respecto a x obtenemos que

$$\theta_a'(x) = 3\theta_a(x)^{2/3}, \quad \theta_a(x)'' = 6\theta_a(x)^{1/3}$$

Entonces, aplicando la fórmula de Itô llegamos a lo siguiente

$$d(\theta_a(B_t)) = 3\theta_a(B_t)^{2/3}dB_t + 3\theta_a(B_t)^{1/3}dt$$

más aún, $\theta_a(B_0) = 0$. Por lo tanto $\theta_a(B_t)$ es una solución de la EDE para cualquier $a > 0$.

Dado que $a > 0$ es arbitrario en el ejemplo anterior esto muestra que la EDE tiene una infinidad de soluciones.

Para resolver estos conflictos proporcionamos los siguientes Teoremas que nos darán las condiciones suficientes para que la solución de nuestra EDE exista y sea única.

Teorema 10 *Sean b, σ como en la definición de una EDE. Entonces, si existe $C > 0$ tal que para todo $t \in [0, T]$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que*

H1) Crecimiento lineal: $|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|)$

H2) Condición de Lipschitz: $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq C|x - y|$

Entonces la EDE tiene una solución única (en el sentido de que si X, Y son ambas soluciones de la EDE, entonces éstas son indistinguibles).

Demostración. Ver demostración del Teorema A.13. en Mishura [19]

Otro teorema muy útil es el Teorema de Doléans-Dade, Protter, éste es más general (se utiliza en la intregración con respecto a semimartingalas), nosotros solo proporcionamos un corolario de éste, el lector interesado en el caso general así como en su demostración puede consultar por ejemplo Bojdecki [2] Teorema 15.1 o en Protter [22] Capítulo V.

Teorema 11 *(Teorema de Doléans-Dade, Protter.)*
Sean $Z^1, ..., Z^n$ semimartingalas, $Z_0^i = 0$ para todo $i \in \{q, \ldots, n\}$, H un proceso continuo, adaptado y $f^1, \ldots, f^n$ funciones de $\Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que para $i = \{1, \ldots, n\}$ se cumple que:

(i) $f^i(\omega, s, \cdot)$ *satisface la condición de Lipschitz para una constante K que no depende de ω, ni de s.*

(ii) $f^i(\cdot, s, x)$ *es $\mathcal{F}_s$-medible para todo $x \in \mathbb{R}$ y $s \geq 0$.*

(iii) $f^i(\omega, \cdot, x)$ *es continuo para toda $\omega \in \Omega$ y $x \in \mathbb{R}$.*

Entonces la ecuación estocástica

$$X_t = H_t + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t f^i(s, X_s) dZ_s^i$$

tiene solución única.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas cumplen algunas propiedades, nosotros solo introduciremos la de los momentos finitos para ver más propiedades así como la demostración del siguiente resultado nos referimos al libro de Arnold [1] en el Capítulo 7.

Teorema 12 *Sea X una solución de (3.16) que cumple con las condiciones del Teorema 10 y se cumple que*

$$E\left(|\xi|^{2n}\right) < \infty$$

donde n es un entero positivo. Entonces

$$E\left(|X_t|^{2n}\right) \leq \left(|1 + E\left(|\xi|^{2n}\right)\right) e^{Ct}$$

con C constante.

Demostración. Ver demostración del Teorema 7.1.2 en Arnold [1].

3.5 Preliminares del cálculo de Malliavin.

En las siguientes secciones introduciremos las propiedades básicas del operador derivada de Malliavin D las cuales nos llevan al estudio del llamado cálculo de Malliavin. Además introduciremos el concepto de 2 integrales anticipantes, es decir, su dominio de definición contendrá al conjunto de los procesos $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$, éstas seran la integral de Skorohod y la integral forward, el lector interesado en más detalles sobre éstas puede consultar Nualart [20] Sección 1.3 para la integral de Skorohod y el artículo de Russo y Vallois [26] para la integral forward.

3.5.1 Integral de Skorohod.

Denotaremos por $\mathcal{S}$ al conjunto de todas las variables aleatorias suaves $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forma

$$F = f\left(\int_0^T h_1(s)dB_s, ..., \int_0^T h_n(s)dB_s\right) \tag{3.17}$$

donde $h_1, ..., h_n \in L^2([0,T])$ y $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ (i.e., f y todas sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial).

Definición. 38 *La derivada de una variable aleatoria suave $F \in \mathcal{S}$ de la forma (3.17) es un proceso estocástico $DF = \{D_tF | t \in [0,T]\}$ y está dado por*

$$D_tF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\int_0^T h_1(s)dB_s, ..., \int_0^T h_n(s)dB_s\right) h_i(t)$$

La siguiente proposición nos proporciona de una fórmula de integración por partes para este tipo de derivadas.

Proposición. 17 *Sean $F \in \mathcal{S}$ y $h \in L^2([0,T)])$. Entonces*

$$E\int_0^T (D_sF)h(s)ds = E\left(F\int_0^T h(s)dB_s\right) \tag{3.18}$$

Demostración. Si $h \equiv 0$ no hay nada que probar. Supongamos h no es idénticamente cero, entonces podemos normalizar la igualdad (3.18) al dividirla por $||h||_{L^2([0,T])}$. Así tomemos h tal que $||h||_{L^2([0,T])} = 1$. Además, por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt podemos suponer que

$$F = f\left(\int_0^T e_1(s)dB_s, \ldots, \int_0^T e_n(s)dB_s\right)$$

donde $e_1 = h$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema ortonormal en $L^2([0,T])$. Denotemos por ϕ a la densidad de la distribución normal $N(0,1)$ en $\mathbb{R}^n$, esto es,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} E\int_0^T (D_sF)h(s)ds &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)x_1dx \\ &= E\left(F\int_0^T h(s)dB_s\right) \end{aligned}$$

donde la primer igualdad se cumple por la ortonormalidad del sistema, la segunda es debido a la integración por partes y la tercera aplicando que el vector de las integrales es un vector gaussiano en $\mathbb{R}^n$.

Observación. 14 *Sean $F, G \in \mathcal{S}$ dos variables aleatorias suaves y $h \in L^2([0,T])$. Entonces aplicando la proposición anterior al producto FG obtenemos la igualdad*

$$E\int_0^T (D_s(FG))h(s)ds = E\left(FG\int_0^T h(s)dB_s\right)$$

Dado que el operador D es un operador derivada podemos escribir el lado izquierdo de la igualdad anterior como

$$E\int_0^T (D_s(FG))h(s)ds = E\int_0^T F(D_s(G))h(s)ds + E\int_0^T (D_s(F))Gh(s)ds$$

despejando y aplicando la proposición anterior obtenemos una fórmula de integración por partes de la forma

$$E\left(F\int_0^T (D_sG)h(s)ds\right) = E\left(FG\int_0^T h(s)dB_s - \left(G\int_0^T (D_sF)h(s)ds\right)\right)$$

Lema. 5 *El operador D es cerrable de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$.*

Demostración. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{S}$ tal que $F_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y $DF_n \to Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Tenemos que demostrar que $Y = 0$. En efecto, sean $h \in L^2([0,T])$ y $F \in \mathcal{S}_b$ (es decir, f es como en (3.17) y sus derivadas parciales son acotadas), tal que $F\int_0^T h(s)dB_s$ es acotada (por ejemplo: $F = Gexp\left(-a(\int_0^T h(s)dB_s)^2\right)$ donde $G \in \mathcal{S}_b$ y $a > 0$). Entonces de la Proposición 17 y Observación 14, tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(F\int_0^T Y_s h(s)ds\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(F\int_0^T (D_sF_n)h(s)ds\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\left(F_nF\int_0^T h(s)dB_s - F_n\int_0^T (D_sF)h(s)ds\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dado que $F_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y las variables aleatorias $\int_0^T (D_sF)h(s)ds$ y $F\int_0^T h(s)dB_s$ son acotadas, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para obtener la primera igualdad, dado que F y h son arbitrarias esto implica que $Y = 0$.

Definición. 39 *Denotamos por $\mathbb{D}^{1,2}$ al dominio del operador D en $L^2(\Omega)$, es decir, $\mathbb{D}^{1,2}$ es la cerradura del conjunto de variables aleatorias suaves $\mathcal{S}$ con respecto a la norma*

$$||F||_{1,2} = \left[E(|F|^2) + E\left[\int_0^T (D_sF)^2 ds\right]^2\right]^{1/2}$$

Observación. 15 *Para $\mathbb{D}^{1,2}$ se cumplen las siguientes propiedades.*

i) $\mathbb{D}^{1,2}$ es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = E\left(FG + \int_0^T (D_sF)(D_sG)ds\right)$$

ii) $D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ *es un operador no acotado, cerrado con dominio denso, es decir, para cualquier sucesión* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^{1,2}$ *que converge a* $G \in L^2(\Omega)$ *cuando* $n \to \infty$ *tal que* DG_n *converge a* $Y \in L^2(\Omega \times [0,T])$ *cuando* $n \to \infty$, *entonces* $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ *y* $DG = Y$, *y para todo* $F \in L^2(\Omega)$ *existe una sucesión* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}^{1,2}$ *tal que* $G_n \to F$ *en* $L^2(\Omega)$.

iii) $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *si y solo si existe una sucesión* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{S}$ *tal que* $F_n \to F$ *en* $L^2(\Omega)$ *y* $DF_n \to Y$ *en* $L^2(\Omega \times [0,T])$. *De lo anterior se entiende que* $DF = Y$.

Estas propiedades así como la generalización al caso $\mathbb{D}^{k,p}$ *el cual es la cerradura del conjunto de variables aleatorias suaves con respecto a la norma*

$$||F||_{k,p} = \left[E(|F|^p) + \sum_{i=1}^{k} E||D^i F||^p_{L^2([0,T]^i)} \right]^{1/p}$$

con $k \in \mathbb{N}$ *y* $p \geq 1$ *se pueden consultar en Nualart [20] Sección 1.2.*

Definición. 40 *Denotaremos por* δ *al operador adjunto de* D. *A* δ *se le suele llamar operador de divergencia o integral de Skorohod, éste es un operador cerrado en* $L^2(\Omega \times [0,T])$ *con dominio denso y que toma valores en* $L^2(\Omega)$ *tal que:*

i) El dominio de δ *es denotado por Dom* δ, *éste es el conjunto de procesos* $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ *tales que*

$$\left| E \int_0^T (D_t F) u_t dt \right| \leq c||F||_{L^2(\Omega)}$$

para toda $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *y* c *es una constante que depende únicamente del proseso* u.

ii) Si $u \in$*Dom* δ, *entonces* $\delta(u)$ *es el único elemento de* $L^2(\Omega)$ *tal que se cumple la siguiente igualdad*

$$E(F\delta(u)) = E \int_0^T (D_t F) u_t dt \quad \forall F \in \mathcal{S} \tag{3.19}$$

Observación. 16 *Notemos que* ii) *en la Definición 40 implica que la integral de Skorohod tiene valor esperado* 0, *en efecto. Sea* $u \in$ *Dom* δ. *Dado que la* *relación de dualidad (3.19) se cumple para cualquier variable aleatoria suave F, en particular se cumple para $F = 1$, así $D_tF = 0$, por lo tanto*

$$\begin{aligned} E(\delta(u)) &= E\int_0^T (D_tF)u_t dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Algunas veces al operador δ se le suele representar también como

$$\delta(u) = \int_0^T u_s dB_s$$

Es bien sabido que δ es una integral anticipante, es decir, $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega) \subset$Dom δ y δ coincide con la integral de Itô en $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ (ver Nualart [20] Proposición 1.3.11), es decir, la integral de Skorohod nos permite integrar procesos no necesariamente adaptados a la filtración con la que el integrador es un movimiento browniano.

Proposición. 18 *Sean $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ y u un proceso en Dom δ tales que $Fu \in L^2(\Omega\times[0,T])$. Entonces $Fu \in$Dom δ y se tiene que*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T (D_tF)u_t dt$$

provisto de que el lado derecho de la igualdad es cuadrado integrable.

Demostración. Ver la demostración de la Proposición 1.3.3 en Nualart [20].

Lema. 6 *Sean $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ una función con derivada continua y $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ si y solo si $\phi(F) \in L^2(\Omega)$ y $\phi'(F)DF \in L^2(\Omega\times[0,T])$, además bajo estas condiciones se tiene que*

$$D[\phi(F)] = \phi'(F)DF \tag{3.20}$$

Demostración. Ver Nualart [20] Proposición 1.2.3.

Definición. 41 *Un proceso $\phi = \{\phi_t | t \in [0,T]\}$ es llamado proceso suave si éste tiene la forma $\phi_t = \sum_{j=1}^n F_j h_j(t)$, donde $F_j \in \mathcal{S}$ y $h_j \in L^2([0,T])$ para toda $j \in \{1,\dots n\}$. Denotaremos por $\mathbb{L}^{1,2,f}$ a la cerradura de los procesos suaves con respecto a la norma*

$$||u||^2_{1,2,f} = E\left(\int_0^T u_t^2 dt + \int_{\Delta_1^T} (D_s u_t)^2 ds dt\right)$$

donde $\Delta_1^T = \{(s,t) \in [0,T]^2 | s \geq t\}$.

Sea $B \in \mathcal{B}([0,T])$ denotamos por $\mathbb{D}^{1,2}(B)$ a la cerradura de $\mathcal{S}$ con respecto a la norma

$$||F||_{1,2,B} = \left(E|F|^2 + E||DF||^2_{L^2(B)}\right)^{1/2}$$

Observación. 17 *Notemos que de la Definición 41 obtenemos lo siguiente. Un proceso estocástico u pertenece a* $\mathbb{L}^{1,2,f}$ *si y solo si para casi toda* $t \in [0,T]$, $u_t \in \mathbb{D}^{1,2}([t,T])$ *y además*

$$||u||^2_{1,2,f} = \int_0^T ||u_t||^2_{1,2,[t,T]} dt < \infty \tag{3.21}$$

Lema. 7 *Sea* $u \in \mathbb{L}^{1,2,f}$ *y sea* ϕ *una función* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]^2)$*-medible tal que* $(1_{[t,T]}(\cdot)\phi(t,\cdot)) \in$*Dom* δ *para casi toda* $t \in [0,T]$*. Entonces*

$$E\left(u_t \int_t^T \phi(t,s) dB_s\right) = E \int_t^T (D_s u_t)\phi(t,s) ds$$

para casi toda $t \in [0,T]$*.*

Demostración. Ver León y Nualart [16]

Definición. 42 *Denotaremos por* $\mathcal{R}$ *a la familia de campos aleatorios de la forma* $\sigma = \{\sigma_t(x) | t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$*, cuyos elementos son* $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*-medibles. Consideraremos los siguientes subconjuntos de* $\mathcal{R}$*:*

i) $\mathcal{R}_c = \{\ \sigma \in \mathcal{R} | \sigma_t \in C^1(\mathbb{R})$ *para toda* $t \in [0,T]\ \}$.

ii) $\mathcal{R}_2 = \{\ \sigma \in \mathcal{R} | \int_0^T \sigma_t(0)^2 dt < \infty, \sigma_t(x)$ *es diferenciable en* x *y* $\int_{-n}^{-n} \int_0^T \sigma_t'(x)^2 dt dx < \infty$ *para toda* $n \in \mathbb{N}\ \}$.

iii) $\mathcal{R}_1 = \Big\{ \sigma \in \mathcal{R} | \int_0^T |\sigma_t(0)| dt < \infty, \sigma_t(x)$ *es diferenciable en* x *y* $\int_{-n}^{-n} (\int_0^T |\sigma_t'(x)| dt)^2 dx < \infty$ *para toda* $n \in \mathbb{N}\ \}$.

Lema. 8 *Sea* $L \in \mathbb{D}^{1,2}$ *y* $\sigma \in \mathcal{R}_c$ *tales que*

i) $\sigma(L) \in L^2(\Omega \times [0,T])$.

ii) $E\left[\int_0^T \sigma_t'(L)^2 (\int_t^T (D_s L)^2 ds) dt\right] < \infty$.

Entonces $\sigma(L) \in \mathbb{L}^{1,2,f}$ *y además*

$$D_s(\sigma_t(L)) = \sigma_t'(L) D_s L \tag{3.22}$$

c.s. en $\Omega \times \Delta_1^T$.

Demostración. Por la Observación 17 es suficiente probar que para casi toda $[0, T]$ la v.a. $\sigma_t(L)$ pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}([t, T])$ de donde se seguira (3.22) del Lema 6. En efecto, las condiciones de la Observación 17 se cumplen debido a (3.22) y las condiciones i) ii), ahora bien, la diferenciabilidad de $\sigma_t(L)$ en $[t, T]$ es debido al Lema 6, el hecho de que $\sigma_t(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ y la independecia de de $\sigma_t(x)$ de la σ-álgebra generada por los incrementos del movimiento browniano en $[t, T]$.

3.5.2 Integral forward.

En esta subesección presentamos algunos de los elementos básicos de la integral forward con respecto a un movimiento browniano B.

Definición. 43 *Sea u un proceso estocástico medible con trayectorias integrables. Decimos que $u \in Dom\ \delta^-$ si*

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds \tag{3.23}$$

converge en probabilidad cuando ϵ tiende a 0 por la derecha. A este límite lo denotaremos por $\int_0^T u_s dB_s^-$ y es llamado integral forward de u con respecto a B. Diremos que la integral forward existe en $L^2(\Omega)$ si la convergencia se mantiene en $L^2(\Omega)$ y en este caso diremos que $u \in Dom_2\ \delta^-$.

Listamos algunas observaciones acerca de la integral forward:

1 Para cada $t \in [0, T]$ usaremos la notación $\int_0^T u_s 1_{[0,t]}(s) dB_s^- = \int_0^t u_s dB_s^-$.

2 La integral forward es también una integral anticipante, es decir, $L^2_{ad}([0, T] \times \Omega) \subset Dom_2\ \delta^-$ y la integral forward de procesos cuadrado integrables, medibles y $\mathcal{F}_t$-adaptados respecto a B coincide con la integral de Itô respecto a B.

3 Sea $\{\mathcal{G}_t | t \in [0, T]\}$ una filtración tal que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ para todo $t \in [0, T]$ y B es una semimartingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0, T]\}$. Entonces cualquier proceso X que sea $\mathcal{G}_t$-adaptado y acotado es forward integrable y su integral forward con respecto a B coincide con las integral de Itô de X con respecto a B.

4 La definición de la integral forward implica que si F es una variable aleatoria y $u \in Dom\ \delta^-$, entonces $Fu \in Dom\ \delta^-$ y $\int_0^T F u_s dB_s^- = F \int_0^T u_s dB_s^-$.

La siguiente proposición nos provee de condiciones suficientes para que $\sigma(L)$ pertenezca a $Dom_2\ \delta^-$.

Proposición. 19 *Sean $\sigma \in \mathcal{R}_2$. Entonces para cualquier variable aleatoria L, $\sigma(L)$ pertenece a $Dom_2\ \delta^-$ y además*

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- = \left(\int_0^T \sigma_s(x)dB_s\right)_{x=L} \quad c.s. \tag{3.24}$$

donde se entiende que el lado derecho de la igualdad está dado como

$$\left(\left(\int_0^T \sigma_s(x)dB_s\right)(\omega)\right)_{x=L(\omega)} = \left(\int_0^T \sigma_s(L)dB_s\right)(\omega)$$

Demostración. Por la propiedad local de las integrales podemos suponer que $|L| \leq n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \geq 1$ consideramos al tiempo de paro τ_m respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ definido por

$$\tau_m = \inf\left\{t \geq 0 | \int_{-n}^n \int_0^t \sigma_s'(x)^2 dsdx \geq m \text{ ó } \int_0^t \sigma_s(0)^2 ds \geq m\right\} \wedge T$$

Reemplazando el campo aleatorio $\sigma_t(x)$ por $\sigma_t(x)1_{t\leq\tau_m}$ podemos asumir que $\int_0^T \sigma_s(0)^2 ds \leq m$ y $\int_{-n}^n \int_0^T \sigma_s'(x)^2 dsdx \leq m$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_0^T \sigma_s(L)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds =& \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \sigma_s(0)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \left(\int_0^L \sigma_s'(y)dy\right)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds \\
&= b_1 + b_2
\end{aligned}$$

El primer sumando b_1 converge a la integral de Itô $\int_0^T \sigma_s(0)dB_s$ cuando ϵ tiende a 0 dado que la integral forward es una extensión de la integral de Itô. Utilizando el teorema de Fubini podemos escribir el segundo termino como

$$b_2 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^L \left(\int_0^T \sigma_s'(y)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds\right)dy$$

Ahora bien, sea $b = \int_0^L (\int_0^T \sigma_s'(y)dB_s)dy$, entonces vamos a probar que b_2 converge b en $L^2(\Omega)$ a 0 cuando ϵ tiende a 0. En efecto,

$$\begin{aligned}
E|b_s - b|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon^2}E\left|\int_0^L \int_0^T \left(\int_{t-\epsilon}^t [\sigma_s'(y) - \sigma_t'(y)]ds\right)dB_t dy\right|^2 \\
&\leq \frac{n}{\epsilon}\int_{-n}^n E\int_0^T \int_{t-\epsilon}^t [\sigma_s'(y) - \sigma_t'(y)]^2 dsdtdy
\end{aligned}$$

con la convención de que $\sigma_s(x) = 0$ para todo $s \leq 0$. Dado que $\sigma \in \mathcal{R}_2$, entonces σ' es continua, por lo tanto el lado derecho de nuestra desigualdad anterior converge a 0 cuando ϵ tiende a 0. Finalmente notemos que utilizando el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Fubini

$$\int_0^T \sigma_s(0)dB_s + \int_0^L \left(\int_0^T \sigma_s'(y)dB_s \right) dy = \left(\int_0^T \sigma_s(x)dB_s \right)_{x=L} \tag{3.25}$$

Proposición. 20 *Sean $\sigma \in \mathcal{R}_2$ y L una variable aleatoria tales que:*

i) $E\left(\int_0^T \sigma_t(0)^2 dt\right) < \infty$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} [E(|L|^2 1_{\{|x| \leq |L|\}})]^{1/2} \left(E\left(\int_0^T \sigma_t'(x)^2 dt\right)^2 \right)^{1/2} dx < \infty$.

Entonces $\sigma(L)$ pertenece a $Dom_2\ \delta^-$ y

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- = \left(\int_0^T \sigma_s(x)dB_s \right)_{x=L} \quad c.s. \tag{3.26}$$

Demostración. Es parecida la Proposcición 19. La convergencia del termino b_s a $b = \int_0^L (\int_0^T \sigma_s'(y)dB_s)dy$ se sigue del hecho que

$$\begin{aligned} E|b_2 - b|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E \left| \int_0^L \left(\int_0^T \left(\int_{t-\epsilon}^t [\sigma_s'(y) - \sigma_t'(y)]ds \right) dB_t \right) dy \right|^2 \\ &\leq \frac{C}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}} [E(|L|^2 1_{\{[|y| \leq |L|]\}})]^{1/2} \left[E\left(\int_0^T \int_{t-\epsilon}^t (\sigma_s'(y) - \sigma_t'))^2 ds dt \right)^2 \right]^{1/2} dy \end{aligned}$$

En el siguiente resultado se establece la relación que hay entre la integral de Skorohod y la integral forward para un proceso de la forma $\sigma(L)$.

Proposición. 21 *Sea $L \in \mathbb{D}^{1,2}$ y $\sigma \in \mathcal{R}_c \cap \mathcal{R}_2$ tales que*

i) $E\left(\int_0^T \sigma_t(0)^2 dt\right) < \infty$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} [E(|L|^2 1_{\{|x| \leq |L|\}})]^{1/2} \left(E\left(\int_0^T \sigma_t'(x)^2 dt\right)^2 \right)^{1/2} dx < \infty$.

iii) $E\left[\int_0^T \sigma_s'(L)^2 (D_s L)^2 ds + \left(\int_0^T \sigma_s'(L)^2 ds\right) \left(\int_0^T (D_s L)^2 ds\right)\right] < \infty$.

Entonces $\sigma(L)$ pertenece a Dom $\delta \cap$ Dom$_2$ δ^- y además

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- = \int_0^T \sigma_s(L)dB_s + \int_0^T \sigma_s'(L)D_sLds \tag{3.27}$$

Demostración. Consideremos los siguientes procesos estocásticos

$$\sigma_t^{(\epsilon)} = \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^t \sigma_s(L)ds$$

suponiendo que $\sigma_s(x) = 0$ si $s < 0$ o bien $s > T$, donde estos convergen a $\sigma_t(L)$ cuando ϵ tiende a 0. Ahora bien, i), ii) y iii) nos garantizan que para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $\sigma_t^{(\epsilon)} \in$Dom δ y

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma^{(\epsilon)}) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \int_{t-\epsilon}^t \sigma_s(L)dsdB_t \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \sigma_s(L)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \left(\int_s^{s+\epsilon} D_t[\sigma_s(L)]dt\right) ds \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \sigma_s(L)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \left(\int_s^{s+\epsilon} \sigma_s'(L)D_tLdt\right) ds \\
&= c_1 - c_2
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la Proposición 18 y la tercera debido al Lema 8. El termino c_2 converge en $L^2(\Omega)$ a $\int_0^T \sigma_s'(L)D_sLds$ cuando ϵ tiende a 0 debido a la suposición i) de la Proposición 21. Por otro lado c_1 converge en $L^2(\Omega)$ a $\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^-$ cuando ϵ tiende a 0 debido a la Proposición 19. Como consecuencia de esto $\delta(\sigma^{(\epsilon)})$ converge en $L^2(\Omega)$ cuando ϵ tiende a 0 a

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- - \int_0^T \sigma_s'(L)D_sLds$$

3.6 Engrosamiento de filtraciones.

El significado de engrosar una filtración es el de tomar una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y con ella obtener una nueva filtración $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ "más grande" tal que la nueva filtración cumpla con las condiciones usuales y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ para todo $t \geq 0$.
La idea de engrosar una filtración fue propuesta por K. Itô en 1976 ([8]), quien demostró que dado un movimiento browniano $B = \{B_t | t \geq 0\}$, uno puede extender la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \geq 0\} = \{\sigma(\{B_s | s \leq t\}) | t \in [0, T]\}$ de B agregando de una manera apropiada la σ-álgebra generada por B_1 a todos los $\mathcal{F}_t$ de la filtración, incluyendo por supuesto a $\mathcal{F}_0$, más aún, Itô demostró

que B sigue siendo una semimatingala con respecto a la nueva filtración y calculó su descomposición explicita. Uno de nuestros propósitos es encontrar condiciones bajo las cuales podamos engrosar nuestra filtración agregando la σ-álgebra generada por una variable L.
Para esta sección supondremos que, $T > 0$, $B = \{B_t | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano definido en un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ es la filtración generada por el movimiento browniano $B = \{B_t | t \in [0,T]\}$ añadiendo los conjuntos de medida 0. Así $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ satisface las condiciones usuales.

Definición. 44 *Sea L una variable aleatoria. Denotaremos por $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L) | t \in [0,T]\}$ al engrosamiento de la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ dada la variable L, es decir, $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos de la forma*

$$[L \in B] \cap A$$

donde $A \in \mathcal{F}_t$ y $B \in \mathcal{B}([0,T])$, $\mathcal{B}([0,T])$ la σ-álgebra de Borel del conjunto $[0,T]$.

Bajo ciertas condiciones (ver Yor y Masui [18] Teorema 1.6) existe una $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-martingala local $\widetilde{B}$, tal que

$$B_t = \widetilde{B_t} + \int_0^t \rho_s(L) ds \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.28}$$

donde $\rho : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un campo aleatorio $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-adaptado y $\widetilde{B}$ es un movimiento browniano con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L) | t \in [0,T]\}$.

3.6.1 Aplicaciones del cálculo de Malliavin al engrosamiento de filtraciones.

A continuación damos una forma de calcular $\rho(L)$ en (3.28) utilizando herramientas del cálculo de Malliavin estudiado en la sección anterior, así como condiciones sobre la variable aleatoria L de tal manera que lo antes mencionado sobre la descomposición de B se cumpla. Consideremos lo siguiente:
Sea L una v.a. que pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}$ tal que para casi toda $s \in [0,T]$ la función

$$I_{\cdot}(s,L) = 1_{[s,T]}(\cdot) 1_{[\int_s^T (D_u L)^2 du > 0]} \left(\int_s^T (D_u L)^2 du \right)^{-1} (D_s L)(D_{\cdot} L) \tag{3.29}$$

pertenece a Dom δ y existe un campo aleatorio $\rho = \{\rho_t(x) | t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\rho(x)$ es un proceso $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-adaptado y

$$\rho_s(L) = E\left[\int_0^T I_t(s,L) dB_t \middle| \mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right] \tag{3.30}$$

Ejemplo. 12 *Sea* $L = \int_0^T m_s dB_s$*, donde* $m \in L^2((0,T))$ *y* $\int_t^T m_s^2 ds > 0$ *para todo* $t \in (0,T)$*, entonces* $D_u L = m_u$*, por lo tanto*

$$I_{\cdot}(s,L) = 1_{[s,T)}(\cdot)\left(\int_s^T (m_u)^2 du\right)^{-1} (m_s)(m_{\cdot})$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_s(L) =& E\left[\int_0^T 1_{[s,T]}(t)\left(\int_s^T (m_u)^2 du\right)^{-1} (m_s)(m_t) dB_t \middle| \mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right] \\
=& \frac{m_s}{\int_s^T m_u^2 du} E\left[\int_s^T m_t dB_t \middle| \mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right] \\
=& \frac{m_s}{\int_s^T m_u^2 du} E\left[\int_0^T m_t dB_t - \int_0^s m_t dB_t \middle| \mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right] \\
=& m_s \left(\frac{L - \int_0^s m_t dB_t}{\int_s^T m_u^2 du}\right)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debido a que $\int_0^T m_t dB_t$ *es medible con respecto a la* σ*-álgebra generada por* L *y* $\int_0^s m_t dB_t$ *es* $\mathcal{F}_s$*-medible.*

Un ejemplo de lo anterior se puede ver al tomar $m(t) = 1$, como se muestra a continuación.

Ejemplo. 13 *Sea* $T > 0$ *fijo. Consideremos a* $L = B_T$*, entonces* $L \in \mathbb{D}^{1,2}$*,* $D_u L = 1$ *para todo* $u \in [0,T]$*, por lo tanto*

$$I_{\cdot}(s,L) = 1_{[s,T]}(\cdot)(T-s)^{-1}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\rho_s(L) &= E\left[\int_0^T 1_{[s,T]}(t)(T-s)^{-1} dB_t | \mathcal{F}_s \vee \sigma(B_T)\right] \\
&= \frac{1}{T-s} E\left[\int_s^T dB_t | \mathcal{F}_s \vee \sigma(B_T)\right] \\
&= \frac{1}{T-s} E\left[B_T - B_s | \mathcal{F}_s \vee \sigma(B_T)\right] \\
&= \frac{L - B_s}{T-s}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es debido a que B_T es medible con respecto a la σ-álgebra generada por L y B_s es $\mathcal{F}_s$-medible.

Ahora vamos a verificar que si ρ está dado como en (3.30), entonces el proceso $\{B_t - \int_0^t \rho_s(L)ds | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L) | t \in [0,T]\}$. En efecto, la siguiente proposición nos garantiza esto.

Proposición. 22 *Sea L una variable tal que cumple las hipótesis pedidas en (3.30). Entonces $\{B_t - \int_0^t \rho_s(L)ds | t \in [0,T]\}$ es un movimiento browniano con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L) | t \in [0,T]\}$.*

Para probar esta proposición nos ayudaremos de los siguientes lemas.

Lema. 9 *El proceso $\widetilde{B}$ definido en (3.28) es un proceso de Itô respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L) | t \in [0,T]\}$ y se tiene que*

$$\left[\widetilde{B}, \widetilde{B}\right]_t = t \quad \forall t \in [0,T]$$

Demostración. $\widetilde{B}$ es una $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-semimartingala [18] por lo tanto es un proceso de Itô y tenemos que

$$\left[\widetilde{B}, \widetilde{B}\right]_t = \left[B - \int \rho_s(L)ds, B - \int \rho_s(L)ds\right]_t$$

la demostración se sigue de las propiedades vistas en la Subsección 3.3 sobre el proceso corchete.

Lema. 10 *Sean $L \in \mathbb{D}^{1,2}$ y $\sigma \in \mathcal{R}_c \cap \mathcal{R}_2$ un campo aleatorio tales que se cumplen las hipótesis del Lema 8. Entonces se cumplen la siguientes igualdades*

$$(\sigma_s)'(L)D_sL = \int_0^T I_\theta(s,L)D_\theta(\sigma_s(L))d\theta \tag{3.31}$$

y además

$$E\left(\int_0^t (\sigma_s)'(L)D_sLds\right) = E\left(\int_0^t \sigma_s(L)\rho_s(L)ds\right) \tag{3.32}$$

Demostración. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\sigma_s)'(L)D_sL &= \int_s^T \frac{1_{[\int_s^T (D_uL)^2 du>0]}(D_\theta L)^2}{\int_s^T (D_uL)^2 du}((\sigma_s)'(L)D_sL)d\theta \\
&= \int_s^T \frac{1_{[\int_s^T (D_uL)^2 du>0]}(D_\theta L)(D_sL)}{\int_s^T (D_uL)^2 du}((\sigma_s)'(L)D_\theta L)d\theta \\
&= \int_0^T \frac{1_{[s,T]}(\theta)1_{[\int_s^T (D_uL)^2 du>0]}(D_\theta L)(D_sL)}{\int_s^T (D_uL)^2 du}(D_\theta(\sigma_s(L)))d\theta \\
&= \int_0^T I_\theta(s,L)(D_\theta(\sigma_s(L)))d\theta
\end{aligned}
$$

donde la primera igualdad se cumple dado que se está multiplicando por la unidad y la tercera igualdad es consecuencia del Lema 8. Ahora bien, de lo anterior obtenemos que

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^t (\sigma_s)'(L)D_sLds\right) &= E\left(\int_0^t \int_s^T I_\theta(s,L)D_\theta(\sigma_s(L))d\theta ds\right) \\
&= E\left(\int_0^t \left(\int_s^T I_\theta(s,L)dB_\theta\right)\sigma_s(L)ds\right) \\
&= E\left(\int_0^t \sigma_s(L)E\left[\int_s^T I_\theta(s,L)dB_\theta|\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right]ds\right) \\
&= E\left(\int_0^t \sigma_s(L)E\left[\int_0^T I_\theta(s,L)dB_\theta|\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)\right]ds\right) \\
&= E\left(\int_0^t \sigma_s(L)\rho_s(L)\right)
\end{aligned}
$$

donde la primer igualdad se cumple por (3.31) y el hecho de que $I_{\cdot}(s,L)$ es identicamente 0 en $[0,s]$, la segunda igualdad es concecuencia del Lema 7, la tercera igualdad es debido a que para cada $s \in [0,t]$ fijo, $\sigma_s(L)$ es $\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)$-medible y las propiedades de la esperanza condicional, finalmente la última igualdad es por la defininició de ρ.

Damos ahora la demostración de la Proposición 22.

Demostración. Tomando el valor esperado en ambos lados de (3.27) obtenemos lo siquiente

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^-\right) &= E\left(\int_0^T \sigma_s'(L)D_sLds\right) \\
&= E\left(\int_0^T \sigma_s(L)\rho_s(L)ds\right)
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

donde la primera igualdad se cumple dado que el valor esperado de la integral de Skorohod tiene valor esperado 0, y la segunda por (3.32). Ahora bien, sean $a, b \in [0, T]$ fijos con $a < b$ y consideremos al campo aleatorio dado por $\sigma_t(x) = Ff(x)1_{[a,b]}(t)$ para todo $(t, x, \omega) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega$, donde F es una variable aleatoria $\mathcal{F}_a$-medible y $f \in C^1(\mathbb{R})$ con soporte compacto. Así $Ff1_{[a,b]}$ cumple con las hipótesis de la Proposición 21, entonces $Ff(L)1_{[a,b]} \in Dom\ \delta \cap Dom_2\ \delta^-$, sustiyendo $\sigma_t(L) = Ff(L)1_{[a,b]}(t)$ en la igualdad (3.33) tenemos que

$$
E\left(\int_a^b Ff(L)dB_s^-\right) = E\left(\int_a^b Ff(L)\rho_s(L)ds\right) \tag{3.34}
$$

por la definición de la integral forward y el hecho de que ésta coincide con la integral de Itô cuando el integrando es 1 el lado izquierdo de la igualdad (3.34) está dado por

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_a^b Ff(L)dB_s^-\right) &= E\left(Ff(L)\int_a^b dB_s\right) \\
&= E(Ff(L))(B_b - B_a))
\end{aligned}
$$

notemos que el lado derecho de la igualda (3.34) se puede escribir como

$$
E\left(\int_a^b Ff(L)\rho_s(L)ds\right) = E\left(Ff(L)\left(\int_0^b \rho_s(L)ds - \int_0^a \rho_a(L)ds\right)\right)
$$

de lo anterior podemos reescribir (3.34) como

$$
E(Ff(L)(B_b - B_a) = E\left(Ff(L)\left(\int_0^b \rho_s(L)ds - \int_0^a \rho_s(L)ds\right)\right)
$$

agrupamos los terminos que dependen de a en un lado de la igualdad, así como los que dependen de b en el otro, así obtenemos que

$$
E\left(Ff(L)\left(B_b - \int_0^b \rho_s(L)ds\right)\right) = E\left(Ff(L)\left(B_a - \int_0^a \rho_s(L)ds\right)\right)
$$

dado que esto se cumple para el espacio de v.a.'s $Ff(L)$ con F, $\mathcal{F}_a$-medible y este espacio es denso en el espacio de las v.a.'s $\mathcal{F}_a \vee \sigma(L)$-medibles y acotadas, entonces de la Definición 15 concluimos que

$$E\left[B_b - \int_0^b \rho_s(L)ds|\mathcal{F}_a \vee \sigma(L)\right] = B_a - \int_0^a \rho_s(L)ds$$

es decir, $\{B_t - \int_0^t \rho_s(L)ds|t \in [0,T]\}$ es una $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-martingala continua. Hemos probado que $\widetilde{B} = \{B_t - \int_0^t \rho_s(L)|t \in [0,T]\}$ es una martingala continua con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)|t \in [0,T]\}$ y del Lema 9 se tiene que $\left[\widetilde{B}, \widetilde{B}\right]_t = t$. Por lo tanto del teorema de caracterización de Lévy se concluye que $\widetilde{B}$ es un movimiento browniano con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)|t \in [0,T]\}$.

Observación. 18 *Notemos que tanto B como $\widetilde{B}$ son variables normales con media 0, por lo tanto al tomar valor esperado en (3.28) tenemos que*

$$E\left(\int_0^t \rho_s(L)ds\right) = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.35}$$

En la siguiente subsección veremos que $\widetilde{B}$ es un movimiento browniano con respecto a la filtración más pequeña que contiene a $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)|t \in [0,T]\}$ y que satisface las condiciones usuales.

3.6.2 Engrosamiento de filtraciones con condicones usuales.

Al trabajar con el engrosamiento de filtraciones dado como en la Definición 44 puede ser que nos enfrentemos con un problema y es que esta nueva filtración puede no cumplir con las condiciones usuales, para ser más precisos ésta puede que no sea continua por la derecha, esto puede ser un inconveniente si es que nosotros queremos utilizar tiempos de paro definidos como el primer instante en el que un proceso pertence a cierto conjunto (ver [2]). Para resolver este problema definimos el siguiente engrosamiento de filtraciones que cumple con las condiciones usuales y para la cual se sigue cumpliendo lo anterior mencionado para la descomposición de nuestro movimiento browniano.

Definición. 45 *Sea L una v.a. Definimos por $\{\mathcal{G}_t|t \in [0,T]\}$ a la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\{\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)|t \in [0,T]\}$ y cumple con las condiciones usuales, más precisamente tenemos que*

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\alpha > t} (\mathcal{F}_\alpha \vee \sigma(L)) \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.36}$$

con la convención $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_T$ *si* $\alpha > T$.

Notemos que $\widetilde{B}$ sigue siendo continuo, esto es debido a que por continuidad de B y la continuidad de la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_t &= \lim_{t_n \to t}\left(B_{t_n} - \int_0^{t_n} \rho_s(L)ds\right) \\ &= B_t - \int_0^t \rho_s(L)ds\end{aligned}$$

para cualquier sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,T]$ que converge a t. Además $\widetilde{B}$ es un movimiento browniano respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$, para esto nos ayudaremos de la siguiente proposición

Proposición. 23 *Sean* $X \in L^1(\Omega)$ *y* $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una familia de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*, tales que* $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_n \supset \ldots$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[X|\mathcal{F}_n\right] = E\left[X|\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k\right] \quad c.s.$$

Demostración. Ver demostración de la Proposición 2.24 en Tudor [27].

Ahora bien, dado que el proceso de variación cuadrática no cambia bajo nuestro engrosamiento de filtraciones (Lema 9), entonces $\left[\widetilde{B}, \widetilde{B}\right]_t = t$ y dados $s < t$ podemos tomar $\alpha \in (s,t)$, de donde

$$\begin{aligned}E\left[\widetilde{B}_t|\mathcal{G}_s\right] &= E\left[\widetilde{B}_t \middle| \bigcap_{\alpha > s}(\mathcal{F}_s \vee \sigma(L))\right] \\ &= \lim_{\alpha \downarrow s} E[\widetilde{B}_t|\mathcal{F}_\alpha \vee \sigma(L)] \\ &= \lim_{\alpha \downarrow s} \widetilde{B}_\alpha \\ &= \widetilde{B}_s\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple por la Proposición 23, la tercera es debido a que $\widetilde{B}$ es $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-martingala y la cuarta por continuidad de $\widetilde{B}$, por lo tanto $\widetilde{B}$ es una $\mathcal{G}_t$-martingala continua. Del teorema de caracterización de Lévy concluimos que $\widetilde{B}$ es un movimiento browniano respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$.

Capítulo 4

Control Óptimo en Economía.

La matemática financiera es una de las ramas de la matemática donde se aplican las ecuaciones diferenciales estocásticas, una de estas aplicaciones es en el estudio de modelos para mercados financieros, esto es debido a que los modelos estudiados en esta rama de las matemáticas son modelados por medio de ecuaciones diferenciales estocásticas por lo tanto es de gran importancia el conocimiento del comportamiento de éstas. Un ejemplo de estos es como un inversor debe invertir su capital (riqueza) en mercado financiero de tal manera que pueda aprovechar su capital para obtener ganancias.
En este capítulo vamos a introducir al lector a lo antes mencionado sobre un inversor y la forma en que éste puede invertir su capital en bonos (activos sin riesgo) y en stock (activos con riesgo), así como en la estrategia de inversión (portafolio) de un inversor honesto (no posee de información privilegiada), así como es que puede cambiar la estrategia de inversión de éste en el caso de contar con información privilegiada.

4.1 Mercados financieros.

Un mercado financiero es un espacio ya sea tanto físico (bolsa de valores) o virtual (paginas web de inversiones), en el cual se realizan la compra-venta de activos financieros de algún tipo, en éste se determinan los precios de los activos, así como los cambios de estos.
Un activo financiero es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho de recibir ingresos por parte del vendedor en un futuro (no neceseriamente positivos), existen dos tipos de activos, estos son los activos sin riesgo (los ingresos son fijos desde el momento de la compra del activo) y los activos con riesgo (el ingreso final es desconocido). Para el uso de estos introducimos los siguientes conceptos de activos.

Definición. 46 *Un bono es un activo financiero para el cual al instante de la compra se fija un precio P_T^0 de venta a un tiempo final $T > 0$, es decir, el precio final P_T^0 del bono solo depende del tiempo de venta y por lo tanto no es aleatorio.*

Ejemplo. 14 *Supongamos que pedimos un prestamo P_0^0 a un banco con una tasa de interés r por unidad de tiempo, por lo tanto al tiempo T nosotros estaremos pagando al banco una cantidad de dinero dada por*

$$P_T^0 = P_0^0 + rTP_0^0 = (1 + rT)P_0^0$$

ahora bien si los cobros del banco son a mitad del periodo T con tasa de interés $r/2$ por unidad de tiempo, entonces debemos hacer dos pagos uno al tiempo $\frac{T}{2}$ y otro al tiempo T, pero el segundo es mayor pues en el segundo pago se acumula el interés que se obtiene en la primer mitad del periodo, es decir,

$$P_T^0 = \left(P_0^0 + \frac{rT}{2}P_0^0\right) + \frac{rT}{2}\left(P_0^0 + \frac{rT}{2}P_0^0\right) = \left(1 + \frac{rT}{2}\right)^2 P_0^0$$

así en general si tenemos que hacer n pagos en el periodo T con tasa de interés r/n por unidad de tiempo, entonces nuestro pago al final

$$P_T^0 = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^n P_0^0 \tag{4.1}$$

es bien sabido que la sucesión anterior converge a $e^{rT}P_0^0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto si nosotros queremos obtener el precio a pagar a cualquier instante $t \in [0, T]$ del periodo con una tasa de interés cuyo periodo de capitalización es ífinitamente pequeña, entonces lo podemos obtener con la siguiente fórmula

$$P_t^0 = e^{rt}P_0^0$$

Definición. 47 *Un stock es un activo financiero para el cual al momento de su compra no podemos predecir con exactitud su valor al tiempo final.*

Ejemplo. 15 *Una familia está por vender su casa, la cual compraron a un precio P_0^1 cuando comenzaron a vivir ahí, por lo tanto planean vender en el mismo precio. Al momento de introducirla al mercado sale un reportaje en una conocida revista de estadística en donde se habla que los precios de las casas en la zona donde vive la familia puden decaer en un porcentaje $\alpha \in [0, 1]$ si una fábrica se construye cerca de la zona. Las posibilidades de que la fábrica se construya son de la mitad pues el jurado que aprueba las concesiones se divide a la mitad entre los que están a favor y los que no. Así el precio de la casa al tiempo final estará dado por*

$$P_T^1 = \begin{cases} P_0^1 - \alpha P_0^1 & \textit{si se construye la fábrica.} \\ P_0^1 & \textit{no se construye la fábrica.} \end{cases}$$

4.1.1 Modelo clásico de mercado.

En esta subsección consideraremos un modelo clásico de mercado el cual consiste de un bono y un stock. Para éste proporcionaremos las herramientas que usaremos para estudiar el comportamiento de los precios del bono, así como el de los precios del stock.
Para lo que resta de este capítulo supondremos que, $B = \{B_t | t \in [0, T]\}$ es un movimiento browniano fijo, respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$, ésta es la generada por el movimiento brwoniano B añadiendo los conjuntos de medida cero.
En el Ejemplo 14 obtuvimos una fórmula para el precio de un bono, por lo tanto podemos modelar el cambio en el precio de éste por

$$\begin{aligned} dP_t^0 &= r_t P_t^0 ds \\ P_0^0 &= 1 \end{aligned}$$

para toda $t \in (0, T]$. Y el precio del stock está determinado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dP_t^1 &= P_t^1 [b_t dt + \sigma_t dB_t] \\ P_0^1 &= p > 0 \end{aligned}$$

para toda $t \in (0, T]$. Donde el movimiento browniano B modela las fluctuaciones aleatorias de los cambios de precio para el stock.
Para nuestro propósito consideraremos que los coeficientes b, σ, y r son procesos medibles y adapatados a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$.

Definición. 48 *Un portafolio $\pi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ es un proceso medible y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ que satisface*

$$E \left[\int_0^T |\sigma(t)\pi(t)|^2 dt \right] < \infty \tag{4.2}$$

π representa la estrategia de inversión de un inversor honesto, es decir, π_t representa el porcentaje de la riqueza del inversor invertido en stock, así como el resto $1 - \pi_t$ es el porcentaje de la riqueza invertida en bonos al tiempo $t \in [0, T]$.

Ejemplo. 16 *Un hombre quiere invertir una cantidad x_0 de su dinero en bonos y stock, dado que el hombre no conoce mucho del tema de finanzas, su plan es invertir en cualquier momento del periodo la misma cantidad de su riqueza en bonos como en stock. Por lo tanto su estrategia de inversion de este hombre queda determinado por*

$$\pi_t = \frac{1}{2} \quad t \in (0, T]$$

para que su estrategia sea un portafolio, la volatilidad (σ) del precio del stock debe ser cuadrado integrable.

El inconveniente en el ejemplo anterior no se presenta en el modelo de mercado clásico pues para éste se supone lo siguiente:

i) r y b son acotadas en $\Omega \times [0, T]$.

ii) $\sigma \in L^2(\Omega \times [0, T])$.

iii) σ no es identicamente 0.

iv) $\sigma^{-1}(b - r) \in L^2(\Omega \times [0, T])$.

Las condiciones $i) - iv)$ además de evitar el inconveniente en el ejemplo anterior nos proporcionan condiciones suficientes para existencia y unicidad de soluciones de nuestras ecuaciones diferenciales, así como condiciones para la optimización de la utilidad.

Para una riqueza inicial $x_0 > 0$ de un inversor consideramos el proceso X^π, el cual representa la riqueza del inversor al tiempo $t \in [0, T]$ correspondiente al portafolio π. Notemos que al tiempo inicial el inversor cuenta con su riqueza inicial unicamente, así $X_0^\pi = x_0$ y para un tiempo $t \in (0, T]$ el inversionista invierte $\pi_t X_t^\pi$ en el bono y $(1 - \pi_t) X_t^\pi$ en stock, por lo tanto el cambio en la riqueza del inversor a este tiempo está dada por

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= \tfrac{\pi_t X_t^\pi}{P_t^1} dP_t^1 + \tfrac{(1-\pi_t)X_t^\pi}{P_t^0} dP_t^0 \\ &= (1 - \pi_t) X_t^\pi r_t dt + \pi_t X_t^\pi [b_t dt + \sigma_t dB_t] \\ &= (r_t + (b_t - r_t)\pi_t) X_t^\pi dt + \sigma_t \pi_t X_t^\pi dB_t \end{aligned} \tag{4.3}$$

Esto es, la riqueza del inversionista X^π es determinada por la ecuación (4.3)

Definición. 49 *(1) Una función $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es llamada función de utilidad si ésta es estrictamente cóncava, con primera derivada continua y satisface que*

$$U'(0) = \lim_{x \downarrow 0} U'(x) = +\infty \quad \& \quad U'(\infty) = \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$$

(2) Una función $U : [0, T] \times (0, \infty) \to$ tal que para toda $t \in [0, T]$ la función $U(t, .)$ es una función de utilidad en el sentido de (1) es también llamada función de utilidad.

Algunos ejemplos de funciones de utilidad son:

1) $U(x) = \ln(x)$.

2) $U(x) = x^{\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$.

3) $U(t,x) = e^{-t}U_1(x)$ donde U_1 es una función de utilidad como en 1 o 2.

Notemos que bajo las supocisiones i)-iv) la Ecuación (4.3) es lineal y por lo tanto tiene solución única debido a la fórmula de Itô (Teorema 6) dada por

$$
\begin{aligned}
X_t^{\pi} &= x_0 exp\left\{\int_0^t \left[r_s + (b_s - r_s)\pi_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\pi_s^2\right] ds + \int_0^t \sigma_s\pi_s dB_s\right\} \\
&= x_0 exp\left\{\int_0^t \left(r_s + \frac{1}{2}\left(\frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\sigma_s\pi_s - \frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right]^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s\pi_s dB_s\right\}
\end{aligned}
$$

Así utilizando la función de utilidad logarítmica tenemos que

$$
\begin{aligned}
\ln(X_t^{\pi}) = \ln(x_0) + \int_0^t \Bigg(r_s + \frac{1}{2}\left(\frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right)^2 \\
-\frac{1}{2}\left[\sigma_s\pi_s - \frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right]^2\Bigg) ds + \int_0^t \sigma_s\pi_s dB_s
\end{aligned}
$$

tomando valor esperado al tiempo final en la igualdad anterior notando que por la suposición ii) la integral estocástica desaparece por tener valor esperado cero, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
E(\ln(X_T^{\pi})) = \ln(x_0) + E\Bigg(\int_0^T \Bigg(r_s + \frac{1}{2}\left(\frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right)^2 \\
-\frac{1}{2}\left[\sigma_s\pi_s - \frac{b_s - r_s}{\sigma_s}\right]^2\Bigg) ds\Bigg)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, para obtener un portafolio que maximice nuestra riqueza podemos proceder de la siguiente forma [5], al considerar el argumento en el drift de la ecuación anterior obtenemos un polinomio de grado 2 en la variable π, calculando las primeras dos derivadas de este polinomio con respecto a π obtenemos que el portafolio

$$
\pi_t^* = \frac{b_t - r_t}{\sigma_t^2}
$$

maximiza la experanza de la utilidad logarítmica de la riqueza final.

4.2 Información privilegiada.

En esta sección consideramos la llamada información privilegiada; esto es, el inversor al tiempo inicial 0 posee información extra sobre el comportamiento y desarrollo futuro del mercado financiero, es decir, éste posee información que los inversores honestos no poseen sobre el cambio de los precios del stock, ésta es representada por una variable aleatoria L. Con esto el inversor puede utilizar esta información para diseñar estrategias de inversión más apropiadas, es decir, el inversor puede elegir portafolios $\mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$-adaptados para invertir en el stock de tal manera que maximice su utilidad.

Supongamos que un inversionista posee información privilegiada la cual está proporcionada por una variable L, $\mathcal{F}_{T1}$-medible ($T \leq T_1 < \infty$, es decir, la información extra que posee el inversionista sobre el mercado abarca todo el periodo o incluso un tiempo mayor pero finito) tal que se satisfacen las hipótesis pedidas en (3.30), entonces éste puede aplicar el engrosamiento de filtraciones dado en (3.36) a su proceso estocástico X^π que modela su riqueza y en este caso el proceso queda determinado por

$$dX_t^\pi = (r_t + (b_t - r_t + \rho_t(L)\sigma_t)\pi_t)\, X_t^\pi dt + \sigma_t \pi_t X_t^\pi d\widetilde{B}_t$$

donde $\rho_t(L)$ está dado por (3.30), ahora bien, si este modelo cumple con las suposiciones i)-iv) dadas para el modelo de mercado clásico, entonces podemos proceder de la misma forma que en la Sección 4.1.1 para obtener un portafolio que maximice la utilidad logarítmica de la riqueza terminal, pero en este caso nuestro portafolio cuenta con la información privilegiada, es decir,

$$\pi_t^* = \frac{b_t - r_t + \sigma_t \rho_t(L)}{\sigma_t^2}$$

En la practica la elección de este tipo de portafolios puede generar algún costo, por ejemplo: pagar a una agencia de estadistas para conocer el comportamiento en una comunidad de tal manera de tener una idea sobre el cambio de los precios en esa comunidad. Así, si los costos de nuestro portafolio están dados por una función ϕ que depende del tiempo, de nuestra riqueza a ese tiempo y del portafolio al mismo tiempo, entonces nuestro propósito es el de maximizar nuestra riqueza final X_T^π minimizando los costos iniciales ϕ, esto nos lleva a considerar el problema de minimizar la función

$$E\left(\int_0^T \phi(t, X_t, \pi_t)dt - aX_T\right) \quad a > 0$$

o bien, si nuestro objetivo es el de maximizar la utilidad de nuestra riqueza al tiempo final, minimizando los costos iniciales, entonces esto nos llevaría a tratar de minimizar la función

$$E\left(\int_0^T \phi(t, X_t, \pi_t)dt - U(X_T)\right)$$

donde U es una función de utilidad. Por ejemplo, en el caso de que nuestra función de utilidad sea logarítmica y poseamos información privilegiada, entonces esta función está determinada por

$$E\left(\int_0^T \left(\phi(t, X_t, \pi_t) - r_s - \frac{1}{2}\left(\frac{b_s - r_s + \rho_t(L)\sigma_t}{\sigma_s}\right)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left[\sigma_s \pi_s - \frac{b_s - r_s + \rho_t(L)\sigma_t}{\sigma_s}\right]^2\right) ds - log(x_0)\right)$$

el problema de tratar de minimizar esta función nos lleva al estudio de la siguiente subsección, en donde estudiamos un algoritmo para minimizar dicha función.

4.3 Control estocástico.

En este capítulo vamos a estudiar la aplicación del engrosamiento de filtraciones al teorema de Verificación el cual es utilizado en la teoría del control para encontrar controles óptimos para determinados modelos. Esto es debido a que en algunos modelos se puede obtener información extra sobre su comportamiento por algún medio externo, por lo tanto con ésta podemos diseñar de alguna manera controles más apropiados para nuestros modelos.

Para nuestro propósito vamos a estar utilizando la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ que sea ha ocupado con anterioridad, es decir, ésta es la generada por un movimiento browniano B agregando los conjuntos de medida cero. Además, utilizaremos la siguiente notación: U un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$, O es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, para un $t_0 \in [0, T)$ dado, definimos a los conjuntos $Q := [t_0, T) \times O$, $\overline{Q} := [t_0, T] \times \overline{O}$, y $\partial^* Q := ([t_0, T) \times \partial O) \cup (\{T\} \times \overline{O})$.

El objetivo de nuestro estudio en este capítulo es la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t \quad t \in [t_0, T] \tag{4.4}$$

donde a $u : \Omega \times [0, T] \to U$ es un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ conocido como control, $X : \Omega \times [0, T] \to O$ es un proceso de Itô adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0, T]\}$ y por último las funciones

$b, \sigma : \overline{Q} \times U \to \mathbb{R}$ cumplen con lo siguiente: son funciones continuas con $b(.,.,u), \sigma(.,.,u) \in C^1(\overline{Q})$ para toda $u \in U$. Además, para alguna constante $C > 0$ se cumple que

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial b}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial b}{\partial x}\right| \leq C, \qquad \left|\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right| \leq C \\ |b(t,x,u)| + |\sigma(t,x,u)| \leq C(1 + |x| + |u|) \end{gathered} \tag{4.5}$$

Definición. 50 *Decimos que X es un proceso controlado por u si éste es solución de la ecuación (4.4) y además, a (4.4) se le llama ecuación diferencial estocástica controlada.*

En lo consecutivo denotaremos por $E_{t,x}$ a la esperanza de la solución X de (4.4) con condición inicial x al tiempo t.

4.3.1 Control óptimo.

Puede que al trabajar con algún control u la solución asociada a éste no esté bien definida después de cierto momento en el tiempo, por este motivo definimos el primer instante de salida de X de nuestro conjunto Q al momento en que nuestra solución ya no pertenece a este conjunto, es decir,

$$\tau = \inf\{s \in [t_0, T] | (s, X_s) \notin Q\} \wedge T$$

(con la convención de que $\sup \emptyset = +\infty$). Nnotemos que $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ cumple con las condiciones usuales por lo tanto τ es un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$, el lector interesado en esto puede consultar por ejemplo Bojdecki [2].

Definición. 51 *Un proceso estocástico $u : \Omega \times [0,T] \to U$ es llamado control admisible, si es progresivamente medible y para todo $x \in \mathbb{R}$ la ecuación (4.4) con condicón inicial $X_t = x$ posee solución única $X = \{X_s | s \in [t, \tau]\}$ y si nosotros tenemos que*

$$E\left(\int_t^T |u_s|^k ds\right) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

Denotaremos por $\mathcal{A}(t,x)$, al conjunto de procesos admisibles u de la ecuación (4.4) con punto inicial (t,x).

Definición. 52 *La función de costos está dada por*

$$\mathcal{J}(t,x;u) = E_{t,x}\left(\int_t^\tau L(s, X_s, u_s) ds + \psi(\tau, X_\tau)\right) \tag{4.7}$$

donde

$$L : Q \times U \to \mathbb{R}$$
$$\psi : \overline{Q} \to \mathbb{R}$$

son funciones deterministas medibles, éstas son llamadas costos iniciales y costos finales respectivamente, además éstas tienen crecimiento polinomial, es decir,

$$|L(t, x, u)| \leq C(1 + |x|^k + |u|^k) \tag{4.8}$$
$$|\psi(t, x)| \leq C(1 + |x|^k) \tag{4.9}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$.

Observación. 19 *Si $L \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$ en (4.7) la función de costo se dice que es tipo Lagrange o Meyer, respectivamente.*

El problema de optimización que nos interesa es el de encontrar un control admisible u tal que minimice la función de costos (4.7), es decir, encontrar

$$\inf_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathcal{J}(t, x; u) \tag{4.10}$$

La función dada por

$$V(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathcal{J}(t, x; u), \quad (t, x) \in Q$$

es llamada la función de valor del problema de minimización. Ésta describe como evolucionan los costos en (4.10) con respecto al cambio en las condiciones usuales (t, x).

Definición. 53 *Un control admisible $u^* \in \mathcal{A}(t, x)$ es llamado control óptimo si se cumple que*

$$\mathcal{J}(t, x; u^*_.) \leq \mathcal{J}(t, x; u_.) \tag{4.11}$$

para todo $u \in \mathcal{A}(t, x)$

4.3.2 Teorema de verificación

Teorema 13 *(Teorema de Verificación.)*
Sea $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ que cumple $|G(t, x)| \leq K(1 + |x|^k)$ para algunas constantes $K > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, tal que G cumple la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\inf_{u \in U}(A^u G(t, x) + L(t, x, u)) = 0 \quad (t, x) \in Q \tag{4.12}$$
$$G(t, x) = \psi(t, x) \quad (t, x) \in \partial^* Q \tag{4.13}$$

donde $A^u G(t,x) := G_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)G_{xx}(t,x) + b(t,x,u)G_x(t,x)$ *con* $(t,x) \in Q$, *donde* G_t, G_x, G_{xx} *representan las derivadas parciales de* G *respectivamente. Entonces:*

(1) $G(t,x) \leq \mathcal{J}(t,x;u)$ *para toda* $(t,x) \in Q$ *y* $u_\cdot \in \mathcal{A}(t,x)$.

(2) Si para toda $(t,x) \in Q$ *existe un control* $u^*_\cdot \in \mathcal{A}(t,x)$ *tal que*

$$u^*_s \in arg \min_{u \in U}(A^u G(s, X^*_s) + L(s, X^*_s, u)) \tag{4.14}$$

para toda $s \in [t,T]$, *donde* $arg \min$ *es el argumento mínimo de nuestra función sobre el conjunto* U, *es decir, el elemento donde nuestra función alcanza su valor mínimo y* X^*_s *es es el proceso controlado correspondiente a* u^* *definido en (4.4), entonces*

$$G(t,x) = V(t,x) = \mathcal{J}(t,x;u^*) \tag{4.15}$$

En particular, u^* *es un control óptimo.*

Demostración. Ver la demostración del Teorema 5.17. en Korn [12] o bien ésta se puede deducir de la demostración del teorema que se verá a continuación.

4.3.3 Aplicaciones del engrosamiento de filtraciones en control.

En la Sección 3.6 estudiamos el engrosamiento de filtraciones cuando se cuenta con la información extra proporcionada por una variable aleatoria L tal que se satisfacen las hipótesis de (3.30) con $\sigma\rho(L) \in L^1([0,T])$ c.p.1., con esto podemos aplicar el engrosamiento de filtraciones a lo estudiado al principio de este capítulo para aprovechar la información extra al diseño de nuevos controles que se acoplen a la nueva información de nuestro modelo, es decir, estos controles seran adaptados a la filtración más grande.
Notemos que al aplicar el engrosamiento de filtraciones (3.36) nosotros obtenemos un termino extra en el drift de (4.4), es decir, nuestro proceso de Itô dada la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ es solución de la ecuación

$$dX_t = (b(t, X_t, u_t) + \sigma(t, X_t, u_t)\rho_t(L))dt + \sigma(t, X_t, u_t)d\widetilde{B}_t \tag{4.16}$$

donde $\rho_t(L)$ está dada por (3.30), por lo tanto, para este caso el A^u definido en el teorema de verificación queda determinado por

$$\begin{aligned} A^u G(t,x) :=& G_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)G_{x,x}(t,x) \\ &+ (b(t,x,u) + \rho_t(L)\sigma(t,x,u))G_x(t,x) \end{aligned} \tag{4.17}$$

para todo $(t,x) \in Q$, donde G_t, G_x, G_{xx} representan las derivadas parciales de G respectivamente, pues ésta se obtiene al considerar el drift en la fórmula de Itô para campos aleatorios (3.12) para una campo aleatorio $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\overline{Q})$ respecto a un proceso de Itô de la forma (4.16). Notemos que en (4.16) estamos considerando un proceso que es adaptado a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$, por lo tanto, es natural definir a $\overline{\mathcal{A}}(t,x)$ como el conjunto de controles admisibles $u : [0,T] \times \Omega \to U$ progresivamente medibles con respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$. Dado que nuestra filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ cumple con las condiciones usuales como se vio en la Subsección 3.6.2, entonces el primer tiempo de salida sigue siendo un tiempo de paro respecto a esta filtración, es decir,

$$\tau = \inf\{s \in [t_0,T] | (s, X_s) \notin Q\} \wedge T$$

es un tiempo de paro respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$. Con todo esto podemos dar a continuación una modificación del Teorema de verificación con estos cambios, es decir, éste se sigue cumpliendo para un proceso de Itô respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ bajo unos ligeros cambios.

Nota: En lo que resta de este escrito siempre que digamos que un proceso es adaptado (medible) se supondrá que éste es $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$-adaptado ($\mathcal{G}$-medible), salvo se especifique lo contrario.

Teorema 14 *(Teorema de Verificación bajo engrosamiento de filtraciones.) Sean $G : Q \times \Omega \to \mathbb{R}$ un campo aleatorio adaptado y $\Omega_0 \subset \Omega$ un conjunto de medida 1 tal que para toda $\omega \in \Omega_0$ se cumple que $G \in C^{1,2}(Q) \cap C(\bar{Q})$, $|G(t,x)| \leq K(1+|x|^m)$, $|G_x(t,x)| \leq J(1+|x|^n)$ para algunas v.a.'s $K \in L^2(\Omega)$, $J \in L^4(\Omega)$, $m,n \in \mathbb{N}$ y G cumple la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):*

$$\inf_{u \in U}(A^u G(t,x) + L(t,x,u)) = 0 \quad (t,x) \in Q \tag{4.18}$$

$$E_{t,x}(G(\tau, X_\tau)) = E_{t,x}(\psi(\tau, X_\tau)) \quad (t,x) \in Q \tag{4.19}$$

para toda solución X de (4.16). Entonces si

$$E_{t,x}\left(||X_\cdot||^\alpha\right) := E_{t,x}\left(\sup_{s \in [t,\tau]} |X_s|^\alpha\right) < \infty \tag{4.20}$$

donde, $\alpha = \max(2m, k)$ con k como en (4.8) para cualquier solución X de (4.16). Nosotros tenemos que

(1) $E_{t,x}(G(t,x)) \leq \mathcal{J}(t,x;u)$ para toda $(t,x) \in Q$ y $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$.

(2) Si para toda $(t, x) \in Q$ existe un control $u^*_\cdot \in \overline{\mathcal{A}}(t, x))$ tal que

$$u^*_s \in arg \min_{u \in U}(A^u G(s, X^*_s) + L(s, X^*_s, u)) \tag{4.21}$$

para toda $s \in [t, \tau]$, donde X^*_s es es el proceso controlado correspondiente a u^* definido en (4.4), entonces

$$E_{t,x}(G(t, x)) = V(t, x) = \mathcal{J}(t, x; u^*) \tag{4.22}$$

En particular, u^* es un control óptimo.

Demostración. Sean $(t, x) \in Q$ fijos. Ahora bien, vamos a demostrar (1) en dos pasos.
Paso 1) Supongamos que O es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$. Sea G una función que cumple con las condiciones del teorema, por lo tanto para toda $\omega \in \Omega_0$ se cumple lo siguiente: G es solución de la ecuación HJB, por lo tanto de la definición de ínfimo tenemos que para cada $u \in \overline{\mathcal{A}}(t, x)$ y toda $s \in [t, \tau]$, se tiene que

$$0 \leq A^{u_s} G(s, X_s) + L(s, X_s, u_s) \tag{4.23}$$

Sea $\theta \in [t, \tau)$ un tiempo de paro con respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0, T]\}$, aplicando el Teorema 8 a $G(\theta, X_\theta)$ con respecto a la filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0, T]\}$, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} G(\theta, X_\theta) =& G(t, X_t) + \int_t^\theta G_x(s.X_s)\sigma(s, X_s, u_s) d\widetilde{B}_s \\ &+ \int_t^\theta G_t(s, X_s) ds + \int_t^\theta \frac{1}{2} G_{xx}(s, X_s)\sigma^2(s, X_s, u_s) ds \\ &+ \int_t^\theta (b(s, X_s, u_s) + \rho_s(L)\sigma(s, X_s, u_s)) G_x(s, X_s) ds \\ =& G(t, X_t) + \int_t^\theta G_x(s, X_s)\sigma(s, X_s, u_s) d\widetilde{B}_s \\ &+ \int_t^\theta A^{u_s} G(s, X_s) ds \end{aligned} \tag{4.24}$$

Tomando el valor esperado de la integral estocástica desaparece. En efecto, dado que $|G_x(t, x)| \leq J(1 + |x|^n)$, σ cumple con (4.5) y u cumple con (4.6), entonces

$$
\begin{aligned}
&E_{t,x}\left(\int_t^\theta |\sigma(x,X_s,u_s)G_x(s,X_s)|^2 ds\right)\\
&\leq C^2 E_{t,x}\left(\int_t^\theta J^2\left(1+|X_s|+|u_s|\right)^2(1+|X_s|^n)^2 ds\right)\\
&\leq D_1 E_{t,x}(J^2) + D_2\left(E_{t,x}(J^4)\right)^{1/2}\left(E_{t,x}\left(\int_t^\theta P(|u_s|)\right)\right)^{1/2}\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

donde D_1, D_2 son constantes positivas adecuadas, y P es un polinomio de grado 4, por lo tanto del Teorema 2 el valor de esperado de nuestra integral estocástica es 0, así tomando valor esperado en (4.24) se tiene que

$$
\begin{aligned}
E_{t,x}(G(t,x)) &= E_{t,x}\left(G(\theta,X_\theta) - \int_t^\theta A^{u_s}G(s,X_s)ds\right)\\
&\leq E_{t,x}\left(G(\theta,X_\theta) + \int_t^\theta L(s,X_s,u_s)ds\right)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

donde la desigualdad se cumple por (4.23) y el hecho de que la integral respecto a la medida de Lebesgue y $E_{t,x}$ son operadores monótonos.
Paso 2) Sea $O \subset \mathbb{R}$ abierto. Vamos a aproximar O por conjuntos acotados O_p, es decir, sea $H \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{H} < T - t$, entonces para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq H$ definimos los siguientes conjuntos

$$
O_p := O \cap \left\{x \in \mathbb{R} |\, |x| < p,\, dist(x,\partial O) > \frac{1}{p}\right\}
$$

$$
Q_p := \left[t, T - \frac{1}{p}\right) \times O_p
$$

Notemos que de esta manera Q_p converge a Q y O_p converge a O cuando $p \to \infty$, esto es,

$$
Q = \bigcup_{p=H}^{\infty} Q_p, \quad O = \bigcup_{p=H}^{\infty} O_p
$$

Sea τ_p es el primer tiempo de salida de (t, X_t) del conjunto Q_p, es decir,

$$
\tau_p = \inf\{t \in [0,T] | (t, X_t) \notin Q_p\}
$$

dado que Q_p es acotado de (4.25) se tiene que para toda $(t,x) \in Q_p$ y $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$ se cumple que

$$
E_{t,x}(G(t,x)) \leq E_{t,x}\left(\int_t^{\tau_p} L(s,X_s,u_s)ds + G(\tau_p, X_{\tau_p})\right) \tag{4.26}
$$

Debido a que L cumple con (4.8) y $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$, entonces para todo $p \geq H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_t^{\tau_p} |L(s,X_s,u_s)|ds &\leq C\left(\int_t^{\tau_p}(1+|X_s|^k+|u_s|^k)ds\right)\\ &\leq C\left(\int_t^{\tau}(1+|X_s|^k+|u_s|^k)ds\right)\end{aligned}$$

dado que $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$ y X cumple con (4.20), entonces la variable aleatoria del lado derecho en la desigualdad anterior pertenece a $L^1(\Omega)$, como $\tau_p \to \tau$ cuando $p \to \infty$ c.p.1., por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{p\to\infty} E_{t,x}\left(\int_t^{\tau_p} L(s,X_s,u_s)ds\right) = E_{t,x}\left(\int_t^{\tau} L(s,X_s,u_s)ds\right)$$

además la continuidad de G implica que

$$\lim_{p\to\infty} G(\tau_p, X_{\tau_p}) = G(\tau, X_\tau) \quad c.p.1$$

Notemos que por hipótesis y por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}|G(\tau_p, X_{\tau_p})| &\leq K(1+|X_{\tau_p}|^m)\\ &\leq K(1+||X_{\cdot}||^m)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}E_{t,x}(K(1+||X_{\cdot}||^m)) &= E_{t,x}(K) + E_{t,x}\left(K||X_{\cdot}||^m\right)\\ &\leq E_{t,x}\left(K\right) + \left(E_{t,x}\left(K^2\right)\right)^{1/2}\left(E_{t,x}\left(||X_{\cdot}||^{2m}\right)\right)^{1/2}\\ &= E_{t,x}(K) + \left(E_{t,x}(K^2)\right)^{1/2}\left(E_{t,x}\left(\sup_{s\in[t,\tau]}|X_s|^{2m}\right)\right)^{1/2}\\ &< \infty\end{aligned}$$

donde la primer desigualdad se cumple aplicando la desigualdad de Hölder. Aplicando el teorema de convergencia dominada a la sucesión $\{G(\tau_p, X_{\tau_p})\}_{p=H}^{\infty}$ tenemos que

$$\lim_{p\to\infty} E_{t,x}(G(\tau_p, X_{\tau_p})) = E_{t,x}(G(\tau, X_\tau)) = E_{t,x}(\psi(\tau, X_\tau))$$

por lo tanto tomando límite cuando $p \to \infty$ en (4.26) concluimos que

$$\begin{aligned}E_{t,x}(G(t,x)) &\leq E_{t,x}\left(\int_t^{\tau} L(s,X_s,u_s)ds + \psi(\tau, X_\tau)\right)\\ &= \mathcal{J}(t,x;u)\end{aligned}$$

Ahora bien vamos a probar (2). En efecto, supongamos que se cumple la desigualdad estricta, es decir, $E_{t,x}(G(t,x)) < J(t,x,u)$ para toda $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$ y $(t,x) \in Q$, por definición esto es

$$E_{t,x}(G(t,x)) < E_{t,x}\left(\int_t^\tau L(s,X_s,u_s)ds + \psi(\tau,X_\tau)\right)$$

Por la linealidad del valor esperado y dado que G cumple con (4.19), tenemos que

$$0 < E_{t,x}\left(\int_t^\tau L(s,X_s,u_s)ds + G(\tau,X_\tau) - G(t,x))\right)$$

podemos aproximar Q por conjuntos acotados como en en el Paso 1) para obtener que al aplicar la fórmula de Itô para campos aleatorios para un proceso de Itô de la forma (4.16), teniendo en cuenta (4.17), podemos llegar a la desigualdad

$$0 < E_{t,x}\left(\int_t^\tau (L(s,X_s,u_s) + A^{u_s}G(s,X_s))ds\right)$$

dado que esto se cumple para todo control $u \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$, en particular se cumple para u^* que satisface (4.21), es decir,

$$0 < E_{t,x}\left(\int_t^\tau (L(s,X_s^*,u_s^*) + A^{u_s^*}G(s,X_s))ds\right)$$

pero esto es una contradicción pues G cumple con (4.18). Por lo tanto se tiene que

$$E_{t,x}(G(t,x)) = V(t,x) = \mathcal{J}(t,x,u^*) \quad \forall (t,x) \in Q$$

Observación. 20 *Durante la elaboración de esta tesis fue publicado un artículo [23] donde se proporciona una solución adaptada del teorema de verificación utilizando soluciones de viscosidad, pero en éste no se aborda el caso cuando se cuenta con engrosamiento de filtraciones como se ha tratado en este trabajo.*

Ahora mostramos algunos ejemplos de la aplicación de nuestro teorema de verificación para problemas de control lineales cuadráticos, con estos podremos observar claramente la diferencia entre el teorema de verificación usual y la extensión de éste por medio del engrosamiento de filtraciones

Ejemplo. 17 *Consideremos el proceso controlado dado por*

$$X_t = x + \int_0^t u_s ds + \int_0^t u_s dB_s$$

donde el control u produce costos iniciales de la forma au^2. Si nuestro proposito es encontrar la riqueza máxima al tiempo final, es decir X_T, reduciendo los costos del control u, podemos considerar el problema de minimizar la función de costos

$$\mathcal{J}(x,t;u) = E_{t,x}\left(\int_t^T au_s^2 ds - bX_T\right), \qquad a,b>0,$$

de la teoría de control se puede confirmar que

$$u_t^* = \frac{b}{2a} \tag{4.27}$$

es un control óptimo para este problema. Ahora bien, si contamos con información extra representada por L (una v.a. de tal suerte que la representación (3.28) se mantiene), entonces podemos tomar la nueva filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ dada por (3.36). Así podemos reformular nuestro problema para el caso cuando se cuenta con información extra como

$$X_t = x + \int_0^t u_s d\widetilde{B_s} + \int_0^t u_s(1+\rho_s(L))ds \tag{4.28}$$

Sea Ω_0 tal que para cada $\omega \in \Omega_0$ la ecuación de HJB correspondiente a nuestro proceso de Itô está dada por

$$\inf_{u\in\mathbb{R}}\left\{G_t(t,x) + \frac{1}{2}u^2G_{xx}(t,x) + u(1+\rho_t(L))G_x(t,x) + au^2\right\} = 0$$
$$E_{t,x}(G(T,X_T)) = -bE_{t,x}(X_T)$$

donde $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$. Al tomar el argumento del ínfimo en la ecuación anterior nosotros obtenemos un polinomio de grado 2 en la variable u, de donde, podemos calcular el mínimo de este polinomio con las herramientas del cálculo elemental, con esto nosotros podemos proponer un control óptimo $u^*(L) \in \overline{\mathcal{A}}(t,x)$ de la forma

$$u_t^*(L) = -\frac{(1+\rho_t(L))G_x(t,X_t)}{G_{xx}(t,X_t)+2a} \quad t \in [0,T]$$

Notemos que para que en este caso el control u en la integral estocástica es el que nos permite aprevechar la información extra, pues en caso contrario nuestro control estaría dado por

$$u_t^*(L) = -\frac{G_x(t,X_t)}{G_{xx}(t,X_t)+2a} \quad t \in [0,T]$$

con lo cual no podemos aprovechar nuestra información extra. Además de la clara diferencia de que este control cuenta con la información proporcionada por L, es decir, este control depende de la información extra, por lo tanto lo hace más apropiado que el control (4.27) si contamos con esta información extra.
Ya que este control pertenece al argumento mínimo del ínfimo, entonces sustituyendo éste en la ecuación HJB obtenemos lo siguiente

$$G_t(t,x) - \frac{(1+\rho_t(L))^2 G_x^2(t,x)}{2(G_{xx}(t,x)+2a)} = 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}$$
$$E_{t,x}(G(T,X_T)) = -bE_{t,x}(X_T)$$

Para resolver esta ecuación tomamos como candidato para G a la función

$$G(t,x) = -bx + h(t)$$

Notemos que con la elección de esta G en efecto u^* es un mínimo para el polinomio en la variable u en el el argumento del ínfimo de la ecuación HJB, esto es debido que la segunda derivada de este polinomio es igual a $a > 0$. Ahora bien, esto convierte nuestra ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$4ah'(t) - (1+\rho_t(L))^2 b^2 = 0$$
$$E_{t,x}(h(T)) = 0$$

la cual tiene por solución

$$h(t) = \frac{b^2}{4a}\int_0^t (1+\rho_s(L))^2 ds - \alpha_0$$

Donde α_0 está determinada por

$$\alpha_0 = \frac{b^2}{4a}E_{t,x}\left(\int_0^T (1+\rho_s(L))^2 ds\right)$$

notemos que α_0 es constante pues en este caso $E_{tx} = E$ dado que E_{tx} representa el valor esperado de la solución X con condición inicial $X(t) = x$, es decir, si nuestra v.a. u no depende de t ni de x, entonces $E_{t,x}(u) = E(u)$, de donde omitiremos en lo consecutivo el subíndice en estos casos. Así nosotros obtenemos

$$G(t,x) = \frac{b^2}{4a}\int_0^t (1+\rho_s(L))^2 ds - bx - \alpha_0$$
$$u_t^*(L) = \frac{b(1+\rho_t(L))}{2a}$$

por lo tanto nuestra función de valor para este problema queda determinada por

$$V(t,x) = -E_{t,x}\left(\frac{b^2}{4a}\int_t^T (1+\rho_s(L))^2 ds + bX_T\right)$$

Notemos que en efecto se cumple la igualdad

$$V(t,x) = \mathcal{J}(t,x:u^*)$$

Ejemplo. 18 *Sean r una constante positiva y σ un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado tal que $m < \sigma_t < M$ para todo $(\omega,t) \in \Omega \times [0,T]$ y algunas constantes positivas m, M. Consideremos el proceso controlado dado por*

$$X_t = x + \int_0^t rX_s ds + \int_0^t u_s\sigma_s dB_s$$

con función de costos iniciales dada como en el ejemplo anterior, por lo tanto la función de costos está dada por

$$\mathcal{J}(x,t;u) = E_{t,x}\left(\int_t^T au_s^2 ds - bX_T\right), \qquad a,b>0$$

en este caso utilizando el procedimiento del ejemplo anterior para encontrar un control óptimo por medio de las herramientas del cálculo elemental para este problema con el teorema de verificación usual nos lleva a que el mínimo de la ecuación de HJB para este problema es nulo, en efecto, la ecuación de HJB está dada por

$$\inf_{u\in\mathbb{R}}\left\{G_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 u^2 G_{xx}(t,x) + rxG_x(t,x) + au^2\right\} = 0$$
$$E_{t,x}(G(T,X_T)) = -bE_{t,x}(X_T)$$

así el polinomio en la variable u generado por el argumento del ínfimo tiene primera derivada con respecto u nula y su segunda derivada con respecto a u, $a>0$ por lo tanto es un mínimo y no podemos proceder como en el ejercicio anterior. Ahora bien, si nosotros contamos con información extra, entonces al utilizar el engrosamiento de filtraciones dado por $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ obtenemos el proceso de Itô adaptado dado por

$$X_t = x + \int_0^t (rX_s + u_s\rho_s(L)\sigma_s)ds + \int_0^t u_s\sigma_s d\widetilde{B}_s$$

y en este caso podemos utilizar las herramientas del cálculo elemental para encontrar un control óptimo. En efecto, sea Ω_0 tal que para cada $\omega \in \Omega_0$ la *ecuación de HJB correspondiente a nuestro proceso de Itô está dada por*

$$\inf_{u\in\mathbb{R}}\left\{G_t(t,x)+\frac{1}{2}\sigma_t^2u^2G_{xx}(t,x)+(u\rho_t(L)\sigma_t+rx)G_x(t,x)+au^2\right\}=0$$
$$E_{t,x}(G(T,X_T))=-bE_{t,x}(X_T)$$

donde $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$. *Al tomar el argumento del ínfimo en la ecuación anterior nosotros obtenemos un polinomio de grado 2 en la variable* u*, de donde, podemos calcular el mínimo de este polinomio con el criterio de la segunda derivada y con esto podemos proponer un control óptimo* $u^*(L)\in\overline{\mathcal{A}}(t,x)$ *de la forma*

$$u_t^*(L)=-\frac{\rho_t(L)\sigma_tG_x(t,X_t)}{\sigma_t^2G_{xx}(t,X_t)+2a}\quad t\in[0,T]$$

Como en el ejemplo anterior, éste pertenece al argumento ínfimo de la ecuación, así que, sustituyendo $u^*(L)$ *en la ecuación HJB obtenemos lo siguiente*

$$(G_t(t,x)+rxG_x(t,x))-\frac{\sigma_s^2\rho_t^2(L)G_x^2(t,x)}{(2\sigma_t^2G_{xx}(t,x)+4a)}=0$$

donde $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$. *Para resolver esta ecuación tomamos como candidato para* G *a la función*

$$G(t,x)=f(t)x+g_t$$

donde f *es una función* $\mathcal{B}([0,T])$*-medible y* g *es un proceso adaptado. Notemos que con la elección de esta* G *en efecto* u^* *es un mínimo para el polinomio en la variable* u *en el el argumento del ínfimo de la ecuación HJB, esto es debido que la segunda derivada de este polinomio es igual a* $a>0$. *Ahora bien, calculando las derivadas parciales de* G *y sustiyendo, obtenemos lo siguiente*

$$4a(f'(t)x+g_t'+rxf(t))-\sigma_t^2\rho_t^2(L)f^2(t)=0,\quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}$$

Dado que esta igualdad se cumple para toda $(\omega,t,x)\in\Omega_0\times[0,T)\times\mathbb{R}$, *esto implica que*

$$4af'(t)+4arf(t)=0$$
$$4ag_t'-\sigma_t^2\rho_t^2(L)f^2(t)=0$$

con condiciones $f(T)=-b$, $E(g_T)=0$, *éstas tienen por solución*

$$f(t)=-e^{-r(t-T)}b$$
$$g_t=\frac{b^2}{4a}\int_0^t\sigma_s^2\rho_s^2(L)e^{-2r(s-T)}ds-\alpha_0$$

donde α_0 *nuevamente es constante y está dado por*

$$\alpha_0 = \frac{b^2}{4a} E\left(\int_0^T \sigma_s^2 \rho_s^2(L) e^{-2r(s-T)} ds\right)$$

Por lo tanto la función G *que deseamos tiene la forma*

$$G(t,x) = \frac{b^2}{4a}\int_0^t \sigma_s^2 \rho_s^2(L) e^{-2r(s-T)} ds - \alpha_0 - e^{-(t-T)} bx$$

$$u_t^*(L) = -\frac{\rho_t(L)\sigma_t e^{-r(s-T)}}{2a}$$

y nuestra función de valor queda determinada por

$$V(t,x) = -E_{t,x}\left(\frac{b^2}{4a}\int_t^T \sigma_s^2 \rho_s^2(L) e^{-2r(s-T)} ds + e^{-(t-T)} bX_T\right)$$

Ahora bien, en los ejemplos anteriores podemos observar que nuestros controles quedan totalmente determinados por la información extra, por lo tanto si nosotros consideramos por ejemplo la información extra proporcionada por la v.a. L dada por $L = \int_0^{T_1} m(t)dB_t$ con $T_1 > T$, así por el Ejemplo 12 podemos aplicar ésta a el Ejemplo 17, para obtener el control dado por

$$u_t^*(L) = \frac{b}{2a}\left[1 + m(t)\left(\frac{L - \int_0^t m(u)dB_u}{\int_t^{T_1} m(s)^2 ds}\right)\right]$$

Y en este caso nuestra función de valor está dada como

$$V(t,x) = -E_{t,x}\left(\frac{b^2}{4a}\int_t^T \left(1 + m(s)\frac{L - \int_0^s m(j)dB_j}{\int_s^{T_1} m(u)^2 du}\right)^2 ds + bX_T\right)$$

Para concretar que u_t^* es un control óptimo hay que ver las condiciones del teorema de verificación para engrosamiento de filtraciones se cumplen para poder aplicarlo, en efecto, si m es una función acotada se tiene que

- Los coeficientes en (4.28) cumplen con las condiciones del Teorema de Doleans-Dade (Teorema 11), entonces nuestra solución X^* es única.

- u^* es progresivamente medible pues la integral de una función determinista con respecto al movimiento browniano tiene trayectorias continuas y es adaptado a la nueva filtración $\{\mathcal{G}_t | t \in [0,T]\}$ pues éste es adaptado a $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$, más aún, estas integrales tienen momentos de cualquier orden, pues m es acotada

$$E\left(\int_0^T |u_s^*|^k ds\right) < \infty$$

- $|G_x(t,x)| \leq b$ y

$$|G(t,x)| \leq b|x| + |\alpha_0| + \left| \frac{b^2}{4a} \int_0^T \left(1 + m(u)\left(\frac{L - \int_0^u m(s)dB_s}{\int_u^{T_1} m(s)ds}\right)\right)^2 ds \right|$$

esta integral pertenece a $L^2(\Omega)$ pues las integrales respecto al movimiento browniano de una función determinista tienen momentos de cualquier orden por lo tanto G cumple con las hipótesis del problema.

- La solución de nuestra ecuación está dada por

$$X_t = x + \frac{b}{2a}\int_0^t \left[1 + m(s)\left(\frac{L - \int_0^s m(u)dB_u}{\int_s^{T_1} m(l)^2 dl}\right)\right]^2 ds$$
$$+ \frac{b}{2a}\int_0^t \left[1 + m(s)\left(\frac{L - \int_0^s m(u)dB_u}{\int_s^{T_1} m(l)^2 dl}\right)\right] d\widetilde{B}_s$$

de donde ésta tiene momento de segundo orden por la integrabilidad de $\rho(L)$.

Por lo tanto se cumplen todas las hipótesis del Teorema 14.

4.4 Portafolios óptimos.

Un portafolio óptimo es aquel que nos proporciona una estrategia que maximiza nuestra riqueza al final de un periodo al momento de invertir nuestra riqueza en un mercado financiero. En esta sección nos enfocaremos en un modelo de mercado clásico y un inversionista pequeño. Para esta sección nosotros suponemos que la volatidad (σ) en nuestro modelo de mercado financiero es acotada

4.4.1 Inversionista pequeño.

Un inversionista pequeño es un inversor tal que todas sus operaciones no influyen en el mercado financiero, por ejemplo un comerciante minorista no afecta los precios a comparación de una empresa multimillonaria.

Consideremos un modelo de mercado financiero clásico (Subsección 4.1.1) con un bono y un stock, así r es la tasa de interés del bono, b es la tasa de apreciación del stock y σ es la volatilidad. Sean B un proceso adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t | t \in [0,T]\}$ para la cual es un movimiento browniano en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, el proceso θ dado por $\theta = \sigma^{-1}(b - r)$ el cual es acotado, medible y $\mathcal{F}_t$-adaptado y la semimartingala dada por

$$Z(t) = exp\left\{ -\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds \right\}$$

con esto podemos definir la medida $\widetilde{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}))$ como

$$\widetilde{P}(A) = E(Z(T)1_A)$$

por lo tanto con estas suposiciónes por el teorema de Girsanov [14] el proceso W dado por

$$W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds \quad t \in [0,T]$$

es un movimiento browniano en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ (para más detalles al respecto el lector interesado puede consultar el artículo de Karatzas [10]).

Entonces la ecuación de la riqueza para un inversionista pequeño sin consumos y con riqueza inicial X_0 puede ser expresada por

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t (b_t - r_t) dt + \pi_t \sigma_t dB_t \quad (4.29)$$

$$= r_t X_t dt + \pi_t \sigma_t dW_t \quad t \in (0,T] \quad (4.30)$$

donde (4.29) se puede obener procediendo de manera similar a (4.3) y (4.30) es por la definición de W, aquí π es un portafolio que representa en este caso la cantidad de capital invertido en stock.

Supongamos que el inversionista cuenta con información privilegiada proporcionada por una variable L que satisface las condiciones tales que se cumple (3.30). Entonces podemos aplicar el engrosamiento de filtraciones (3.36) en (4.29) para obtener la ecuación de la riqueza en el caso cuando se cuenta con información privilegiada, dada por

$$dX_t = (r_t X_t + \rho_t(L)\pi_t \sigma_t)dt + \pi_t \sigma_t d\widetilde{W_t} \quad t \in (0,T] \quad (4.31)$$

Diremos que π pertenece a la clase de portafolios admisibles $\mathcal{A}(L)$ si π es un portafolio y un control admisible (Definición 51) para la ecuación (4.31) con condición inicial $X(0) = X_0$, tal que cumple con

$$E\left(\int_0^T (\pi_s \rho_s(L))^2 ds \right) < \infty$$

también diremos que π es portafolio óptimo si como control éste es óptimo.

Una forma de obtener portafolios óptimos para el caso cuando se cuenta con información privilegiada utilizando el teorema de verificación para el caso de engrosamiento de filtraciones es procediendo como en el Ejemplo 18 en donde se toma un interés constante r y una volatilidada σ acotada.

Conclusiones.

El objetivo fundamental de esta tesis es presentar una modificación del teorema de verificació. Con el cual abordar el problema de la elección de portafolios óptimos de un inversionista cuando éste cuenta con información privilegiada, así como utilizar herramientas del control óptimo para minimizar la función de costos para el portafolio elegido.

Así pues, la aportación principal de este trabajo consiste en la utilización de herramientas básicas del cálculo de Malliavin, así como de la integral forward para la construcción de la descomposición de un movimiento browniano como semimartingala para un engrosamiento de filtraciones proporcionado por la información privilegiada dada por una variable aleatoria, esto es debido a que la integral forward coincide con la integral de Itô cuando el integrador es una semimiartingala.

Utilizamos el engrosamiento de filtraciones cuando se cuenta con información privilegiada de tal manera que el inversionista pueda hacer uso de esta información para maximizar su riqueza al tiempo final con la elección de portafolios más adecuados al mercado financiero. Esto nos condujo al estudio de las funciones de utilidad, así como al problema de minimizar la función de costos en el caso de contar con información extra del desarrrollo del mercado financiero, este problema nos motivó a llevar a cabo la demostración de una modificación del teorema de verificación usual cuando se cuenta con engrosamiento de filtraciones, para esta demostración nosotros nos enfocamos en el problema de obtener una solución adaptada a este problema, nuestra solución fue la de utilizar una fórmula de Itô para campos aleatorios, así como una pequeña modificación a las condiciones finales en la ecuación HJB, otra forma en la que se podría haber realizado este proceso es la de utilizar la fórmula generalizada de Itô-Ventzell [21] la cual nos proporcionaría una solución a este problema más general pero para esto se tendría que trabajar con cálculo de Malliavin más avanzado del que se analiza en esta tesis.

Bibliografía

[1] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, J. Wiley and Sons, 1974.

[2] Bojdecki, T., *Teoría General de Procesos e Integración Estocástica*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 6, Soc. Mat. Mex., 1995.

[3] Brown, R., *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.* Philos. Mag. Ann. of Philos. New Ser. 4, 161-178, 1828.

[4] Di, G., Oksenal, D. and Proske, F., *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Springer-Verlag, 2009.

[5] Escudero, C., and Ranilla-Cortina, S., *Optimal portfolios for different anticipating integrals under insider information*, arXiv:2007.02316.

[6] Gut A., *Probability: A Graduate Course*, Second Edition. Springer, 2013.

[7] Itô, K., *Stochastic integral.* Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 1944.

[8] Itô K., *Extension of stochastic integrals.* In Proceedings of International Symposium on Stochastic Differential Equations, pages 95-109, New York, 1978.

[9] Jacod, J. and Protter, P., *Probability Essentials*, Second Edition, Springer, 2004.

[10] Karatzas, I,. *Optimization problems in the theory of continuous trading*, Siam, J., Control and Optimization, Vol. 27, No. 6, pp. 12211259, November 1989.

[11] Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Secound Edition Springer–Verlag 1991.

[12] Korn, R. and Korn, E., *Option Pricing and Portofolio Optimization: Modern Methods of Financial Mathematics*, American Mathematical Society, 2001.

[13] Krishna, B. Athreya, and Soumendra, N. Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Springer 2006.

[14] Kuo, H.-H. *Introduction to Stochastic Integration.* Springer, Universitext, 2006.

[15] León, J. (1990). *Stochastic fubini theorem for semimartingales in Hilbert space.* Canadian Journal of Mathematics, 42(5), 890-901. doi:10.4153/CJM-1990-046-8.

[16] León, J., A., and D. Nualart (2000): *Anticipating Integral Equations*, Potential Anal. 13, 249–268.

[17] León, J., A., Navarro, R., and D., Nualart, *An anticipating calculus approach to the utility maximization of an insider*, Mathematical Finance, Vol. 13, No. 1 (January 2003), 171–185.

[18] Mansuy, R. and Yor, M. , *Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting*, Springer-Verlag, 2006.

[19] Mishura, Y., *Financial Mathematics*, ELSEVIER, 2016.

[20] Nualart, D., *The Malliavin Calculus and Related Topics.* New York:Springer-Verlag, 1995.

[21] Ocone, D., Pardoux, E., *A generalized Itô-Ventzell formula. Application to a class of anticipating stochastic differential equations*, Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, no 1 (1989), p. 39-71.

[22] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*, Second Edition, Version 2.1, Springer-Verlag New York, LLC 2004.

[23] Qiu, J., *Stochastic path-dependent Hamilton-Jacobi-Bellman equations and controlled stochastic differential equations with random path-dependent coefficients*, arXiv:2006.13043 (2020).

[24] Revuz, D. and Yor, M. *Continuos Martingales and Brownian Motion*, Third Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[25] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P.M., *REAL ANALYSIS*, Fourth Edition (ISBN 978-9-13-143747), Pearson Education, Inc. 2010.

[26] Russo, F. and Vallois, P., *Forward, backward and symmetric stochastic integration*, Probab. Theory Related Fields, 97(3):403–421, 1993.

[27] Tudor, C., Procesos Estocásticos, Sociedad Matemática Mexicana, 1994

[28] Wiener, N., *Differential space.* J. Math. Phys. 2, 131-174, 1923.