



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

**DIFERENTES NOCIONES DE EXCENTRICIDAD DE LAS CÓNICAS:
CONCEPCIONES Y CONOCIMIENTOS DE PROFESORES DE
BACHILLERATO**

TESIS

que presenta

ERNESTO BRAVO DÍAZ

Para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México

Mayo de 2023

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de doctorado en el departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.



CVU: 703564

Agradezco el apoyo que me brindó la Universidad Autónoma de Guerrero durante mi estancia en el departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN para realizar mis estudios de doctorado.



Fiel a mis creencias, agradezco a Dios la oportunidad de superarme, para su honra y gloria.

A un gran académico, mi director de tesis, Dr. Antonio Rivera Figueroa:

Por sus enseñanzas.

Por su paciencia ante mis desaciertos.

Por el enorme apoyo que en todo momento me brindó.

Por sus exigencias para hacer de esta investigación un trabajo de calidad.

Mi más sincero y enorme agradecimiento.

También, agradezco:

A los profesores participantes en esta investigación, sin su apoyo la realización de este trabajo no hubiera sido posible.

A las y los profesores que impartieron los cursos correspondientes a mis estudios de Doctorado: Dr. Antonio Rivera Figueroa, Dr. Armando Solares Rojas, Dr. Ulises Xolocotzin Eligio, Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez, Dr. Luz Manuel Santos Trigo, Dr. Luis Enrique Moreno Armella, Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, Dra. Ana María Ojeda Salazar y Dra. Ana Isabel Sacristán Rock.

A mis sinodales: Dr. Luis Aguirre Castillo, Dra. Martha Leticia García Rodríguez, Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco y Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, por su revisión y recomendaciones para la mejora de este documento.

A Adriana Parra Hernández, por apoyarme siempre en mis dudas y necesidades administrativas.

A Norma Cruz Meza, por su apoyo desde antes de ser aceptado como estudiante.

DEDICATORIA

La vida ya no permitió que disfrutáramos juntos este momento, pero sé que hubiera estado muy feliz y orgulloso por verme alcanzar esta meta.

En memoria de mi padre,

Sr. Zeferino Alejandro Bravo Carbajal

También, dedico este trabajo a:

A mi madre que tanto me ama y siempre me tiene presente en sus oraciones.

A mi amada esposa Lizbeth, por alentarme a seguir y por estar en todo momento conmigo.

A mis hijos Erick Ernesto y Héctor Adrián, esperando les sirva de ejemplo esta faceta mía.

CONTENIDO

RESUMEN	i
ABSTRACT	iii
CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1. Introducción	3
1.2. Antecedentes de investigación	5
1.2.1. Investigaciones relacionadas con las concepciones y conocimientos de los profesores de matemáticas.....	5
1.2.2. Investigaciones relacionadas con los contenidos de libros de texto.....	10
1.3. El problema de investigación.....	11
1.4. Justificación de la investigación	12
1.5. Preguntas y objetivos de investigación	13
1.5.1. Preguntas de investigación.....	13
1.5.2. Objetivos de investigación	14
CAPÍTULO 2. DIFERENTES ACERCAMIENTOS A LAS CÓNICAS.	
DIFERENTES NOCIONES DE EXCENTRICIDAD	15
2.1. Acercamientos a las cónicas.	17
2.1.1. Acercamiento bifocal.....	17
2.1.2. Acercamiento foco-directriz.....	18
2.1.3. Acercamiento cono-plano.	19
2.2. Diferencias y coincidencias entre las tres nociones de excentricidad	20
2.2.1. Tres definiciones de excentricidad	20
2.2.2. Significado geométrico de la excentricidad.....	23
2.3. Transiciones entre los diferentes acercamientos a las cónicas y el concepto de excentricidad asociado	25
2.3.1. Definición bifocal de la elipse y la hipérbola desde su definición plano-cono.....	26
2.3.2. Definiciones de la elipse y la hipérbola en el acercamiento foco-directriz desde su definición bifocal	30

2.3.3. Definiciones bifocales de la elipse y la hipérbola desde su definición foco-directriz.	33
2.3.4. Definición foco-directriz de las cónicas desde su definición cono-plano.	35
2.4. Sobre la equivalencia de las definiciones de las cónicas	37
2.5. Sobre la forma, excentricidad y asíntotas de la hipérbola.....	38
2.6. Casos límite de la elipse	41
2.6.1. Casos límite de la elipse en su definición bifocal	41
2.6.2. Casos límite de la elipse en su definición foco-directriz.....	45
2.7. ¿Qué deberíamos entender por acercamiento cono-plano a las cónicas?	51
2.7.1. Sobre los objetivos de un acercamiento a las cónicas.....	51
2.7.2. Ecuaciones de las cónicas en el espacio tridimensional como intersección de un cono doble y un plano.	52
2.7.2.1. Ecuaciones paramétricas de las cónicas en el espacio tridimensional	52
2.7.2.2. Ecuaciones cartesianas respecto un sistema de ejes en el plano que corta al cono	56
CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO	61
3.1. Comprensión instrumental y comprensión relacional.....	63
3.2. Mapa conceptual de la geometría analítica	63
3.3. Conocimiento matemático para la enseñanza.....	65
3.4. Concepciones y conocimiento	67
3.5. Marco teórico para describir los conocimientos y concepciones del profesor.....	68
CAPÍTULO 4. ETAPA DIAGNÓSTICA	73
4.1. Metodología.....	75
4.1.1. Tipo de estudio.....	75
4.1.2. Participantes.....	75
4.1.3. Instrumentos de evaluación	75
4.1.3.1. El Cuestionario de Diagnóstico 1	75
4.1.3.2. Entrevistas no estructuradas	80
4.1.4. Recolección de datos.....	80
4.1.4.1. Del cuestionario de diagnóstico 1	80
4.1.4.2. De las entrevistas no estructuradas	81
4.2. Análisis de datos y discusión de resultados	81

4.2.1. Del Cuestionario de Diagnóstico 1	81
4.2.2. De las entrevistas no estructuradas	88
4.3. Conclusiones de la etapa diagnóstica	90
4.3.1. Acerca de lo que entiende el profesor por excentricidad.....	90
4.3.2. Acerca de qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la elipse.....	91
4.3.3. Acerca de qué interpretación geométrica que le da el profesor a la excentricidad de la hipérbola.	91
4.3.4. Acerca de a qué lugar geométrico le asigna el profesor la excentricidad cero.	92
4.4. Consideraciones en relación con los resultados.....	92
CAPÍTULO 5. LAS ACTIVIDADES	95
5.1. Uso de tecnologías en la educación.....	97
5.2. Tecnologías usadas en el diseño de las actividades	97
5.3. Actividades	100
5.3.1. Objetivo general de las actividades	100
5.3.2. Consideraciones para el diseño de las actividades	100
5.3.3. Descripción y objetivos de las Actividades	100
CAPÍTULO 6. ETAPA DE EXPLORACIÓN.....	105
6.1. Metodología	107
6.1.1. Consideraciones previas	107
6.1.2. Del Cuestionario de Casos límite	107
6.1.2.1. Participantes	107
6.1.2.2. Instrumentos de evaluación	107
El Cuestionario de Casos Límite.....	107
Entrevistas no estructuradas.....	108
6.1.2.3. Recolección de datos.....	108
Del Cuestionario de Casos Límite.....	108
De las entrevistas no estructuradas.....	109
6.1.3. Del Cuestionario de Diagnóstico 2.....	109
6.1.3.1. Participantes	109
6.1.3.2. Instrumentos de evaluación	109

El Cuestionario de Diagnóstico 2.....	109
Entrevistas no estructuradas.....	112
6.1.3.3. Recolección de datos.....	112
Del Cuestionario de diagnóstico 2	112
De las entrevistas no estructuradas.....	112
6.1.4. Del Cuestionario Postactividades	112
6.1.4.1. Participantes	112
6.1.4.2. Instrumentos de evaluación.....	112
El Cuestionario Postactividades	112
Las entrevistas no estructuradas.....	115
6.1.4.3. Recolección de datos.....	115
Del cuestionario	115
De las entrevistas no estructuradas.....	115
6.2. Análisis de datos y discusión de resultados previos a la exploración de las actividades	116
6.2.1. Del Cuestionario de Casos límite.....	116
6.2.2. Del Cuestionario de Diagnóstico 2 y las entrevistas	117
6.3. Conclusiones previas a la exploración de actividades	121
6.3.1. Del Cuestionario de Casos Límite	121
6.3.2. Del Cuestionario de Diagnóstico 2 y sus entrevistas	122
6.3.3. Consideraciones en relación con los resultados.....	122
6.4. Exploración de las actividades	122
6.4.1. Objetivo de la exploración de las actividades.....	122
6.4.2. Exploración virtual de las actividades.....	123
6.4.2.1. Exploración virtual de la actividad de casos límite.....	123
6.4.2.2. Exploración virtual de las 23 actividades	124
6.4.2.3. Ligas de las actividades.....	124
6.5. Análisis de datos y discusión de resultados posteriores a la exploración de las actividades.....	125
6.5.1. Del Cuestionario de Casos límite.....	125
6.5.2. De las entrevistas no estructuradas	126
6.5.3. Del cuestionario postactividades.....	128

6.5.4. De las entrevistas no estructuradas.....	131
6.6. Conclusiones de la etapa de exploración.....	133
6.6.1. Acerca de lo que entiende el profesor por excentricidad.....	133
6.6.2. Acerca de qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la elipse.....	133
6.6.3. Acerca de qué interpretación geométrica que le da el profesor a la excentricidad de la hipérbola.	133
6.6.4. Acerca de a qué lugar geométrico le asigna el profesor la excentricidad cero.	134
6.6.5. Acerca de los casos límite.....	134
6.7. Evaluación de los efectos de la experimentación.....	134
6.7.1. Respecto a lo que entiende el profesor por excentricidad.	134
6.7.2. Respecto a la interpretación geométrica de la excentricidad de la elipse.	135
6.7.3. Respecto a la interpretación geométrica de la excentricidad de la hipérbola.	135
6.7.4. Respecto al lugar geométrico para la excentricidad cero	135
6.7.5. Respecto a la excentricidad a partir de la ecuación de la cónica.....	136
6.8. Consideraciones en relación con los resultados.....	136
REFERENCIAS	138
APÉNDICE	142
1) Cuestionario de diagnóstico 1.....	142
2) Cuestionario de casos límite	146
3) Cuestionario de diagnóstico 2.....	148
4) Cuestionario postactividades	152

RESUMEN

En la literatura matemática sobre geometría analítica, las diferentes definiciones de excentricidad de las cónicas corresponden a distintos enfoques de estas curvas. Después de hacer un análisis comparativo de libros de texto conocidos para determinar las coincidencias y diferencias entre los distintos conceptos de excentricidad, así como la forma en que los autores explican la relación entre la excentricidad y la forma de las curvas, encontramos: (a) que estas nociones de excentricidad no son del todo equivalentes y (b) que los autores no explican adecuadamente el efecto del valor de la excentricidad en algunas características cualitativas de las curvas. Debido a estas dos situaciones, y porque los libros de texto son una fuente de consulta esencial para los profesores de matemáticas, desarrollamos esta investigación en la que exploramos concepciones y conocimientos sobre la excentricidad de las cónicas que exhiben un grupo de profesores que imparten geometría analítica de bachillerato de una universidad mexicana.

El estudio se desarrolla mediante un estudio de caso, es de corte cualitativo, alcance descriptivo y tiene sus bases teóricas en el modelo *MKT* de Ball, Thames, y Phelps (2008).

Siendo uno de los objetivos de la investigación indagar acerca de las concepciones y conocimientos que tienen profesores que imparten Geometría Analítica en el bachillerato respecto a la excentricidad de las cónicas desde diferentes acercamientos, consideramos necesario identificar y caracterizar el conocimiento de los profesores de acuerdo a las siguientes categorías: Conocimiento Común de Contenido (*CCK*), Conocimiento Especializado de Contenido (*SCK*), y Conocimiento Matemático Instrumental (*CMI*) que los participantes exhibieron en los instrumentos de evaluación utilizados antes y después de interactuar con applets de GeoGebra.

En el análisis de las respuestas obtenidas, previas y posteriores a la fase de exploración de los applets, identificamos y clasificamos los conocimientos de los profesores según las categorías antes mencionadas y descritas en nuestro marco teórico. Destacamos, en nuestros resultados, que los participantes exhibieron inicialmente escasos *SCK*, pero lograron desarrollarlo a partir de interactuar con applets de GeoGebra.

ABSTRACT

In the mathematical literature on analytical geometry, various notions of the conics' eccentricity correspond to different approaches to these curves. After a comparative analysis of well-known textbooks to determine coincidences and differences between the various concepts of eccentricity, as well as how the authors explain the relationship between eccentricity and the appearance of the curves, we find: (a) that these notions of eccentricity are not entirely equivalent and (b) that the authors do not adequately explain the effect of the value of eccentricity on some qualitative characteristics of the curves. Due to these two situations, and because textbooks are an essential reference source for mathematics teachers, we developed this research to explore the conceptions and knowledge about the eccentricity of conics exhibited by a group of teachers who teach geometry analytics in a high school at a Mexican university.

The study is developed through a case study; it is qualitative, descriptive in scope, and has its theoretical bases in the MKT model of Ball, Thames, and Phelps (2008).

Being one of the objectives of the research to inquire about the conceptions and knowledge that teachers who teach Analytical Geometry in high school have regarding the eccentricity of conics from different approaches, we consider it necessary to identify and characterize the knowledge of teachers according to the following categories: Common Content Knowledge (CCK), the Specialized Content Knowledge (SCK) and the Instrumental Mathematical Knowledge (IMC) that the participants exhibited in the evaluation instruments used before and after interacting with GeoGebra applets.

In the analyzing the answers obtained, before and after the exploration phase of the applets, we identified and classified the teachers' knowledge according to the categories mentioned above and described in our theoretical framework. We highlight in our results that the participants initially exhibited few SCK but managed to develop it by interacting with GeoGebra applets.

CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo exponemos sobre la importancia que tiene el conocimiento del profesor para la calidad de la enseñanza. También damos cuenta de algunas investigaciones desarrolladas en educación matemática relacionadas con las concepciones y conocimientos de los profesores de matemáticas, con la enseñanza y aprendizaje de las cónicas y con el contenido de libros de texto. El capítulo finaliza con la definición del problema de investigación, el planteamiento de los objetivos y las preguntas de investigación.

1.1. Introducción

En diciembre de 2012 se puso en marcha la Reforma Educativa en México. Como parte de la reforma, se revisó el Modelo educativo entonces vigente, incluidos los planes y programas, los materiales y los métodos educativos. Entre los principales retos, se informó la necesidad de mejorar la calidad educativa y la pertinencia real de la formación del docente.

De la Reforma Educativa se derivaron, y fueron dados a conocer por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria (MEEEO) y el Nuevo Currículo de la Educación Media Superior (NCEMS). Enseguida, se actualizaron planes y programas de estudio, entre ellos el de Geometría Analítica, y para agosto de 2018 se pusieron en práctica en los subsistemas de Educación Media Superior.

Uno de los propósitos principales del NCEMS es alcanzar el máximo logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes. Para cumplir este propósito el MEEEO concibe al docente como un profesional que es “capaz de guiar y participar activamente en la comprensión de los estudiantes, sus motivaciones, intereses y formas de aprender. Además tiene el dominio necesario de los contenidos que enseña, los conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el siglo XXI, y la capacidad de monitorearlos y evaluarlos” (SEP, 2017, p. 86). En otras palabras, el MEEEO supone que el propósito “alcanzar el máximo logro de los aprendizajes” se consigue contando con profesores que tengan el perfil descrito anteriormente. En coincidencia con esta idea, Fennema y Franke (1992) afirman que “lo que sabe un maestro es una de las influencias más importantes en lo que se hace en las aulas y, en última instancia, en lo que los estudiantes aprenden” (p. 147). Por su parte, Mapolelo y Akinsola (2015), en su revisión de literatura sobre conocimiento, creencias y formación de los docentes, señalan que ésta indicó que “los docentes son factores críticos en el aprendizaje de las matemáticas y la extensión de su conocimiento de contenido y pedagógico determina el logro de los estudiantes” (p. 505). Sin embargo, Hill et al., (2008) aclaran que existe:

una falta de comprensión detallada acerca de cómo el conocimiento del maestro afecta la instrucción en el aula y el logro del estudiante. El conocimiento del maestro presumiblemente funciona a través de la instrucción para causar el aprendizaje del alumno, pero esta relación no se comprende completamente. (p. 431).

Sin entrar en detalles respecto a las relaciones entre el conocimiento matemático de los docentes y el aprendizaje estudiantil, pero aceptando que la calidad de la enseñanza depende de los profesores y, entre otros aspectos, de su conocimiento y preparación para enseñar, surgen preguntas tales como ¿los maestros de matemáticas en activo tienen el dominio necesario de los contenidos que enseña? ¿los profesores de matemáticas tienen conocimientos suficientes que les permitan proporcionar a sus estudiantes una instrucción de calidad? Al respecto, Adler, Ball, Krainer, Lin, y Novotna (2005), mencionan:

Muchos profesores en ejercicio, por diferentes razones, no han aprendido parte del contenido que ahora deben enseñar, o no lo han aprendido de manera que les permita enseñar lo que ahora es necesario. En particular, los procesos de reforma curricular en matemáticas en diferentes países resultaron en que muchos maestros ahora tienen que enseñar un plan de estudios diferente a aquel para el que fueron educados, y de uno del que habían adquirido experiencia -y a menudo también exitoso. (p. 361).

Es innegable que tener un conocimiento profundo de los temas podría ayudar a los profesores a impartir instrucción de calidad; Philipp (2014) comenta que “un maestro que entiende un tema de matemáticas en particular de una manera profunda ve interrelaciones entre los conceptos y procedimientos, lo que puede permitir al maestro construir una presentación lógica y rica” (p. 285). Baumert et al. (2010) mencionan que uno de los principales hallazgos en estudios cualitativos sobre instrucción matemática es que el repertorio de estrategias de enseñanza, el conjunto de representaciones matemáticas alternativas y las explicaciones disponibles para los maestros en el aula dependen en gran medida de la amplitud y profundidad de su comprensión conceptual del tema. Además, como se indica en el principio de enseñanza del National Council of Teachers of Mathematics (2000), “los profesores deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y ser capaces de hacer uso de ese conocimiento con flexibilidad” (p. 17).

Otro aspecto que sin duda influye de manera importante en las prácticas de enseñanza de los profesores son los libros de texto. Si bien no son necesariamente un componente de un curso, los libros de texto “pueden proporcionar un marco útil para la enseñanza y ayudar a tomar decisiones de instrucción importantes” (Gollish y Karneyc, 2018, p. 6), sin embargo, en ocasiones parte del contenido que se encuentra en algunos de ellos puede no resultar adecuado para tales fines y el profesor pudiera encontrar que algunos temas son tratados de manera incompleta, “defectuosos en su concepción del tema, incompletos en su tratamiento, o

inadecuados en la explicación o uso de ejemplos” (Shulman, 1986, p. 8). Por ello, cobran especial relevancia los informes de investigación dedicados al análisis del impacto de los libros de texto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo de investigación tenemos básicamente dos objetivos: (1) hacer una revisión y análisis comparativo de los libros de texto sobre el concepto de excentricidad de las cónicas y, (2) indagar acerca de las concepciones y conocimientos que tienen profesores que imparten Geometría Analítica en el bachillerato, respecto a la excentricidad de las cónicas. Nuestro interés por averiguar sobre las concepciones y conocimientos de los profesores respecto a la excentricidad se basa en tres hechos: (a) En la literatura matemática revisada hay varias definiciones de excentricidad no equivalentes; (b) La explicación de los autores de libros de texto sobre la relación entre la excentricidad y la forma de las curvas es a veces incorrecta, como veremos más adelante; (c) En la aceptación de que las concepciones de los profesores, al igual que su conocimiento, tienen un impacto significativo en sus prácticas de enseñanza.

Aclaremos que no es finalidad de este trabajo investigar cómo median los conocimientos y concepciones de los profesores en sus prácticas de instrucción para alcanzar el máximo logro de los aprendizajes por parte de los estudiantes.

1.2. Antecedentes de investigación

1.2.1. Investigaciones relacionadas con las concepciones y conocimientos de los profesores de matemáticas.

Anteriormente existía una suposición implícita de que la efectividad en la enseñanza residía simplemente en el conocimiento de la materia que un maestro había acumulado. Sin embargo, estudios posteriores señalan otros aspectos relacionados con la calidad de la instrucción, entre ellos las concepciones de los docentes. Al respecto, Gonzalez Thompson (1984) señala que “las creencias, puntos de vista y preferencias de los profesores sobre las matemática y su enseñanza, independientemente de que sean consciente o inconscientemente sostenidos, juegan un papel significativo, aunque sutil, en la formación de patrones característicos de comportamiento educativo”. Thompson (1992), afirma que la forma en que los maestros interpretan e implementan los planes de estudio está influenciada significativamente por sus conocimientos y que sus enfoques de enseñanza, a su vez, por sus concepciones.

Estudios recientes relacionados con el conocimiento matemático (por ejemplo, Hill et al., 2008) muestran que existen fuertes vínculos entre el conocimiento de los docentes y la calidad matemática de su práctica en el aula. Sundberg (2015) señala que los profesores muestran un alto nivel de conocimiento en términos de pedagogía y contenido, y la combinación de estos, pero en términos de tecnología el nivel de conocimiento fue inferior. Nevado et al. (2015) reportan que, durante un proyecto de investigación, los docentes aumentaron su conocimiento del contenido pedagógico, el conocimiento de la materia y los componentes de motivación cuando utilizaron problemas con más de una solución, los que ellos llamaron problemas abiertos (open-ended problems) para enseñar matemáticas.

Respecto a concepciones de los profesores sobre temas específicos de matemáticas, por ejemplo Cálculo y Geometría Euclidiana, encontramos diversas investigaciones: Paez M. y Vivier (2013), estudian las concepciones de los maestros sobre el concepto de una línea tangente a una curva y reportan que los profesores tienen “una fuerte concepción visual y global que está estrechamente relacionada con la noción de línea tangente a un círculo” (p. 225). En un estudio con profesores de matemáticas de bachillerato, Karakok, Soto-Johnson y Dyben (2014) exploraron las concepciones (operacional y estructural) de los docentes respecto a las diversas formas de números complejos y la manera en que hacen la transición entre diferentes representaciones de estas formas. Los resultados indican que los docentes tienen buen nivel operativo (concepción operacional) con números complejos en su forma exponencial, pero los investigadores no hallaron evidencia que indicara un dominio sobre la estructura de las diferentes representaciones de los números complejos (concepción estructural), por lo que señalan que los profesores necesitan más oportunidades para ayudarlos a desarrollar una concepción dual (operativa y estructural) de cada forma.

Con relación a estudios del conocimiento geométrico de los docentes y estudios sobre el desarrollo docente para la educación en geometría, Jones y Tzekaki (2016), tras una selección, revisión, análisis y síntesis de la investigación sobre educación en geometría que fue presentada en conferencias anuales de PME durante el período 2005-2015, reportan que parece haber una investigación limitada a los temas de congruencia y semejanza, y poco sobre geometría de transformación. Además, señalan que “la investigación sobre geometría analítica/de coordenadas también es limitada, al igual que la investigación sobre geometría vectorial” (p. 140). Añaden que los estudios indican importantes malentendidos figurales y

conceptuales de parte de los maestros, mientras que sus ideas geométricas muestran principalmente una baja comprensión de la materia de geometría.

Hay numerosas investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las cónicas, algunas utilizando software de geometría dinámica y otras usando métodos tradicionales. A continuación, citamos algunas de ellas. Florio (2022) propone una posible forma de construir un enfoque consciente para el aprendizaje/enseñanza de la parábola, que utiliza, con fines educativos, la estrecha relación entre las cónicas como lugares geométricos de los puntos de un plano y las cónicas como secciones de un cono. González, Grimaldy y Garcés (2021), diseñan e implementan una propuesta didáctica de curvas de segundo grado apoyada en el software matemático GeoGebra. Alonso-González, Campoy, Navarro y Rodríguez (2019) diseñan actividades con GeoGebra para brindar apoyo adicional en la comprensión de los conceptos y propiedades de las cónicas. Yan, Mason y Hanna (2018) investigan un estilo de enseñanza exploratorio utilizado en un curso de geometría de estudiantes universitarios para ayudar a los estudiantes a identificar una elipse. Los hallazgos indican que los estudiantes que participaron en exploraciones guiadas por el maestro y en discusiones grupales con sus compañeros fueron capaces de identificar una elipse y justificar sus razonamientos. Roanes-Lozano (2017) propone estudiar las cónicas a través de la intersección de un plano fijo ($z = 0$) y un cono en movimiento. Salinas y Pulido (2015) ofrecen una alternativa para el aprendizaje de las cónicas a través de la realidad aumentada, enfocada en la visualización espacial para comprender las características particulares que cumplen estas curvas como cónicas. Ortega (2014) emplea un Sistema de Geometría Dinámica en el estudio de las secciones cónicas para observar la forma de razonar de los alumnos mientras resuelven problemas. Ljajko y Ibro (2013) presentan un desarrollo gradual de ideas en la construcción de applets dinámicos utilizados para describir, explorar y descubrir las características de la elipse. Bonilla y Parraguez (2013) sustentan una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de elipse, bajo un enfoque cognitivo, desde la teoría los modos de pensamiento. Ayvaz y Ozdemir (2010) evalúan el efecto del uso de GeoGebra en el rendimiento académico en términos de enseñanza de parábolas y reportan que, según sus evaluaciones, la enseñanza con constructos desarrollados con GeoGebra es más exitosa que con el método tradicional.

Con relación a la excentricidad de las cónicas las investigaciones son escasas. Citamos a continuación algunas de ellas. Pantazi y Doukakis (2020) proponen algunas actividades para la

enseñanza y el aprendizaje de la elipse para alumnos de 11° grado. La primera actividad es repasar una biografía de Kepler y sus trabajos sobre las órbitas de los planetas. Otra actividad es ver dos videos de YouTube. Un video muestra las curvas obtenidas cortando un cono y el otro muestra animaciones con varios dispositivos físicos para construir la elipse. Estos videos no van más allá de crear curvas con atractivas animaciones. En otra de las actividades, proponen a los participantes observar, con la ayuda de un constructo desarrollado en GeoGebra, cuán alargadas son las órbitas de los planetas en combinación con sus valores de excentricidad y a formular conclusiones al respecto. Los autores esperan que los estudiantes concluyan que para excentricidades pequeñas se tienen órbitas más circulares, mientras para excentricidades más grandes se tienen orbitas que divergen más de la órbita circular, sin embargo, no expresan qué análisis harán los estudiantes para argumentar al respecto. Por otro lado, Kurtuluş y Ada (2017) evaluaron a 106 participantes candidatos a maestros solicitándoles encontrar las representaciones algebraicas correspondientes a un logotipo (Figura 1.1) que contenía elipses en diferentes posiciones. También se les pidió calcular la excentricidad de cada elipse y relacionarla con su redondez o achatamiento. El estudio reporta que casi un tercio de ellos no pudo relacionar la excentricidad con estas características de la elipse.

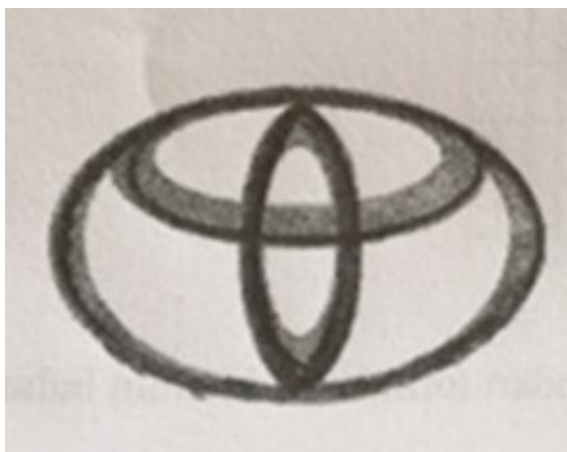


Figura 1.1. Logotipo con elipses en diferentes posiciones (tomada de Kurtuluş y Ada, 2017).

Por su parte, Srinivasan (2014) analiza las excentricidades de elipses circunscritas a los hexágonos convexos no regulares ABFCDH y AEBCGD, que se obtienen del octágono AEBFCGDH construido a partir del cuadrado de lados AB, BC, CD y DA, y los triángulos equiláteros AEB, BFC, CGD y DHA, con E, F, G y H fuera del cuadrado ABCD (Figura 1.2).

En la investigación se reporta que cambiando el lado del cuadrado ABCD, cuyas diagonales se intersecan en O, también cambia el tamaño de las elipses, pero la excentricidad permanece constante.

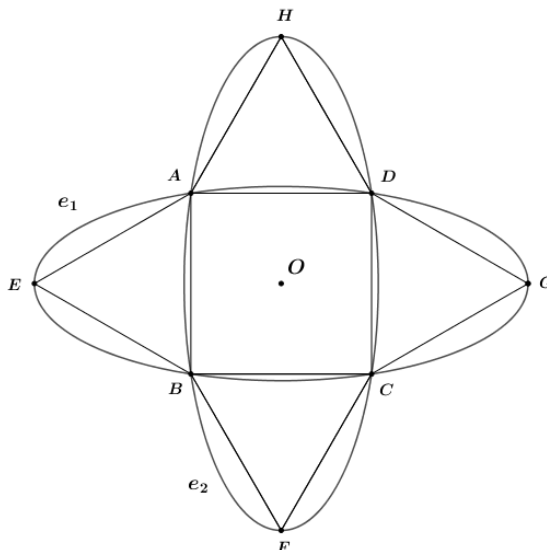


Figura 1.2. Elipses de excentricidad constante al cambiar el lado del cuadrado ABCD.

Glaister y Glaister (2006) introducen las tres cónicas (elipse, parábola e hipérbola) como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen, lo que los autores llaman una 'propiedad equidistante'. Es un enfoque alternativo para las cónicas. La definición de la parábola coincide con la del enfoque basado en un foco y una directriz. La elipse y la hipérbola son los lugares geométricos de los puntos equidistantes desde dos círculos. Para la elipse, uno de los círculos, de centro $F(p, 0)$ y radio r , está dentro del otro círculo, de centro $F'(-p, 0)$ y radio R y para la hipérbola, los círculos están uno exterior al otro. Los autores enfatizan que su definición de las tres curvas no requiere excentricidad, lo que contrasta con la definición tradicional basada en foco, directriz y excentricidad. Ayoub (2003) comenta que existe una regla sencilla para calcular la excentricidad de una elipse o hipérbola a partir de su ecuación canónica y plantea la cuestión de cómo calcular la excentricidad a partir de la ecuación general de segundo grado. En el artículo, el autor deriva una fórmula para la excentricidad en términos de los coeficientes de esta ecuación general. Aunque el artículo es interesante, el cálculo de la excentricidad se reduce a aplicar una fórmula cuya justificación tiene cierto grado de dificultad.

1.2.2. Investigaciones relacionadas con los contenidos de libros de texto

En la literatura matemática podemos hallar investigaciones relacionadas con el análisis de los libros de texto; citamos a continuación algunos ejemplos. Paoletti, Lee, Rahman, y Vishnubhotla (2020) examinaron las representaciones gráficas en algunos libros de texto de matemáticas, ciencias e ingeniería y revistas profesionales para identificar similitudes y diferencias entre estas fuentes. Los autores concluyen que "existen diferencias considerables en el uso de gráficos y sistemas de coordenadas... en términos de sistemas de coordenadas subyacentes, cantidades representadas y elección de convenciones" (pág. 16). Gollish y Karneyc (2018) realizan una comparación detallada de cuatro libros de cálculo utilizados por las facultades de ingeniería en Canadá para averiguar si hacen un 'buen trabajo' al enseñar cálculo a estudiantes universitarios de ingeniería. Contreras, Cañada y Wilhelmi (2010) realizan un análisis pormenorizado de cinco libros más usados en segundo de bachillerato en Andalucía, con la finalidad de detectar una introducción o desarrollo no idóneo que pueda ser fuente de conflicto al estudiar la integral definida. Kajander y Lovric (2009) examinan libros de texto para el Nivel Medio Superior y Universidades para averiguar en qué medida su presentación del concepto de recta tangente a la gráfica de una función podría contribuir a la creación y fortalecimiento de conceptos erróneos de los estudiantes. Raman (2002) analiza la forma en la cual dos libros de texto de matemáticas de nivel bachillerato y universitario, de precálculo y cálculo, pueden obstaculizar la coordinación de aspectos informales y formales de las matemáticas, al enfatizar lo informal a expensas de lo formal y al enfatizar lo formal a expensas de lo informal. Podemos encontrar otras investigaciones sobre análisis de libros de texto en Elk (1997), Randahl (2016) y Sokolowski, Yalvac, y Loving (2011).

Destacamos que no encontramos estudios que analicen y reporten la forma en la que la excentricidad es presentada en los libros de texto. Tampoco encontramos investigaciones que den cuenta del conocimiento y concepciones que tienen los docentes del concepto de excentricidad desde diferentes aproximaciones a las cónicas. Aún más, no hallamos investigaciones que señalen la influencia de la bibliografía básica en el conocimiento del docente con relación a la excentricidad.

La excentricidad es un elemento importante en el estudio de las cónicas sea cual sea el acercamiento que adopte el autor a estas curvas. Foley (2011, p. 274) destaca la importancia

de este concepto en el análisis de la forma de la elipse y comenta: “Cuando los estudiantes de matemáticas de bachillerato y universitarios estudian secciones cónicas, a menudo aprenden poco sobre sus formas e incluso pueden formarse conceptos erróneos. Sin duda, comprender la forma de las cónicas no es un asunto trivial”. Agregaríamos que el análisis de las formas de las cónicas por su excentricidad tampoco es un asunto trivial. En este caso, la dificultad de analizar estas curvas es que podemos variar la excentricidad de varias formas (por ejemplo, podemos considerarla como función de dos variables), lo que implica cierta complejidad en la variabilidad de la forma de las elipses.

La excentricidad de las cónicas puede jugar un papel importante cuando utilizamos software para diseñar animaciones con ellas. Con la excentricidad podemos dotar a las elipses de una dinámica que vaya más allá de mirar (con software de geometría dinámica) movimientos de las curvas sin un control razonado de las mismas. Además, el estudio de la forma de las cónicas, en particular de las elipses, a través de su excentricidad, nos permite desarrollar habilidades analíticas en matemáticas.

En nuestra investigación, uno de los objetivos es llevar a cabo una revisión y análisis comparativo de libros de texto con relación a la excentricidad de las cónicas. Una lectura somera de algunos de libros de texto muestra que hay al menos tres acercamientos a las cónicas, con sus respectivas definiciones de excentricidad las cuales merecen un análisis comparativo.

1.3. El problema de investigación

El estudio de la Geometría Analítica es parte esencial del currículo del bachillerato. Dentro de los contenidos considerados para su enseñanza se encuentran, entre otros, temas relacionados con la línea recta y las cónicas. Las concepciones y conocimientos que el profesor tiene respecto a estos contenidos son algunos de los factores que determinan la forma en que implementa su práctica docente y en gran medida la calidad de su enseñanza.

En el estudio de las cónicas, la excentricidad es un concepto asociado a estas curvas. En algunos acercamientos a las cónicas, la excentricidad forma parte de la misma definición de las cónicas; en otros acercamientos es un concepto que se define adicionalmente, pero en

cualquiera de los casos permite describir algunas características cualitativas de la forma de estas curvas, por ejemplo, para el caso de la elipse permite describir su “redondez” o su “alargamiento” y para el caso de la hipérbola permite describir la abertura de sus ramas o de sus asíntotas. La excentricidad no es un concepto trivial, sobre todo si se consideran los diferentes acercamientos a las cónicas en los que surge y las explicaciones que ofrecen los diversos autores de libros de texto. Por esta razón nuestra investigación se centra inicialmente en (1) hacer una revisión y análisis comparativo de libros de texto sobre el concepto de excentricidad de las cónicas y, (2) indagar acerca de las concepciones y conocimientos que tienen profesores que imparten Geometría Analítica en el bachillerato respecto a la excentricidad de las cónicas.

1.4. Justificación de la investigación

De lo expuesto en las secciones anteriores, podemos decir que nuestra investigación se justifica en los puntos siguientes:

- *La falta de investigaciones cuyo objetivo sea indagar respecto a los conocimientos y concepciones de los profesores de geometría analítica con relación a la excentricidad de las cónicas.*
- *La falta de investigaciones que reporten: (1) la forma en la que la excentricidad es presentada en los libros de texto. (2) un análisis comparativo de las diversas definiciones.*
- *El contenido de los libros de texto son una fuente importante de consulta e información para los profesores, e influyen en gran medida sobre los conocimientos y concepciones de los profesores.*

Los resultados de una primera etapa de este trabajo nos permitieron, primero, tener una visión de las concepciones y conocimientos de los profesores sobre este concepto; segundo, nos proporcionaron elementos para el diseño de actividades, que se llevaron a cabo en una segunda etapa, que facilitan a los profesores la adquisición de un conocimiento profundo y amplio del concepto excentricidad de las cónicas. Durante la segunda etapa averiguamos si se alcanzaron los objetivos de las actividades diseñadas. En la siguiente sección presentamos los objetivos y preguntas de investigación.

1.5. Preguntas y objetivos de investigación

1.5.1. Preguntas de investigación

Considerando que el contenido de los libros de texto son una fuente importante de información y consulta para los profesores, y que influyen en gran medida sobre sus conocimientos y concepciones, nuestra primera pregunta de investigación es con relación a la manera en la que la excentricidad es presentada en libros de texto de Geometría analítica. Aun cuando el profesor tenga conocimientos de Geometría Analítica, el asunto es qué tan específico y profundo es su saber en torno a la excentricidad de las cónicas. Esto constituirá nuestra segunda pregunta de investigación. Con base en las respuestas a estas dos primeras preguntas de investigación, diseñamos actividades tendientes a desarrollar conocimiento matemático en los profesores, por lo que una tercera pregunta de investigación se relaciona con los alcances de esas actividades. Dada la generalidad de las preguntas de investigación 1 y 2, planteamos algunas preguntas auxiliares para ellas.

1. ¿Cuáles son las diversas definiciones de excentricidad que aparecen en los libros de texto de Geometría Analítica?

- ¿Cuáles son las coincidencias, diferencias o discrepancias entre las diversas nociones de excentricidad?
- ¿Cuáles son las diversas explicaciones que ofrecen los autores de texto sobre las interpretaciones de la excentricidad, con relación a las características cualitativas de las cónicas?

2. ¿Qué entiende el profesor por excentricidad de las cónicas?

- ¿Qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la elipse y cómo la justifica?
- ¿Qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la hipérbola y cómo la justifica?
- ¿A qué lugar geométrico le asigna el profesor la excentricidad cero?

3. ¿Qué conocimientos desarrolla el profesor sobre la relación entre la excentricidad y las características geométricas de las cónicas al interactuar con actividades diseñadas a partir de los resultados del presente estudio?

1.5.2. Objetivos de investigación

Para dar respuesta a la pregunta de investigación 1, nos planteamos como objetivo principal realizar una revisión, análisis y comparación minuciosa de libros de Geometría Analítica y Cálculo con Geometría Analítica acerca de los diferentes acercamientos al estudio de las cónicas y la manera en que es presentada la excentricidad. Para dar respuesta a la pregunta 2, nos planteamos como objetivo investigar y documentar las concepciones y conocimientos que respecto a la excentricidad de las cónicas tienen profesores de bachillerato que imparten Geometría Analítica. Finalmente, Para responder a la pregunta 3 diseñamos actividades con GeoGebra con las que los participantes interactuaron. El objetivo general de las actividades fue fortalecer y/o incrementar el conocimiento matemático sobre las cónicas y la excentricidad de los profesores participantes.

Respecto a la pregunta de investigación 1 y sus preguntas auxiliares, damos cuenta de los resultados en el capítulo 2. En el capítulo 4 respondemos la pregunta de investigación 2 y sus preguntas auxiliares. Por último, en el capítulo 6 damos respuesta a la pregunta de investigación 3.

CAPÍTULO 2. DIFERENTES ACERCAMIENTOS A LAS CÓNICAS. DIFERENTES NOCIONES DE EXCENTRICIDAD

En este apartado exponemos las diferentes definiciones de excentricidad que hallamos en los libros de texto de Geometría Analítica y Cálculo con Geometría Analítica revisados, así como la forma en la que sus autores explican los significados e interpretaciones de la excentricidad. En algunos casos nos parece importante destacar imprecisiones que pudimos observar. Para profundizar en el estudio comparativo de las diversas definiciones de excentricidad hacemos un análisis de casos límite de la excentricidad que surgen como preguntas naturales al hacer la comparación de estas definiciones.

2.1. Acercamientos a las cónicas.

La excentricidad es un concepto asociado a las cónicas, cuya definición depende del acercamiento que adopte el autor para esas curvas; por tal razón, realizamos una revisión, análisis y comparación de los diversos acercamientos a las cónicas adoptados por algunos autores de libros de texto de Geometría Analítica y Cálculo con Geometría Analítica. Los libros revisados fueron: Apostol (1966), Edwards y Penney (1994), Larson y Edwards (2010), Lehmann (1964), Leithold (1981), Rider (1947) y Simmons (1996). En nuestra revisión también incluimos el libro Brannan, Esplen y Gray (2012), que es una excelente referencia para el tema de la excentricidad en el contexto del espacio tridimensional. Nuestra revisión tuvo como objetivo investigar cuáles son las diversas definiciones de excentricidad que aparece en los libros de texto de Geometría Analítica; cómo se explica la excentricidad en esos libros de texto; y cómo justifican su significado geométrico, para así poder dar cuenta de las coincidencias y discrepancias entre los diversos conceptos o nociones de excentricidad. A continuación, exponemos brevemente tres acercamientos de las cónicas; en dos de ellos está incluida la definición de excentricidad. A estos acercamientos los hemos llamado: acercamiento bifocal (AB), acercamiento foco-directriz (AFD) y acercamiento cono-plano (ACP).

2.1.1. Acercamiento bifocal

En el acercamiento bifocal (AB), las cónicas son consideradas como lugares geométricos. El círculo es el lugar geométrico en el plano de los puntos que equidistan de un punto fijo O llamado centro del círculo, y la distancia desde cualquier punto del círculo hasta el centro se llama radio del círculo. La parábola es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo F es igual a su distancia a una línea fija l . El punto F se llama foco de la parábola y la línea l se llama la directriz de la parábola. La elipse y la hipérbola están definidas por dos focos. La elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante mayor que la distancia entre los dos puntos fijos, y la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia positiva entre sus distancias a dos puntos fijos es una constante. En ambos casos, los puntos fijos, F_1 y F_2 , se denominan focos de las curvas y la respectiva constante se denomina constante de la curva (Figura 2.1). En este acercamiento se define la excentricidad e de la elipse como el cociente

$e = c/a$, donde c es la semidistancia entre los focos y a es la longitud del semieje mayor de la elipse (por ejemplo, Larson y Edwards, 2010, p. 701; Lehmann, 1964, p. 152; Rider, 1947, p. 120; Simmons, 1996, p. 536). En la definición de elipse algunos autores permiten que los focos coincidan entre sí (por ejemplo, Rider, 1947, p. 121), mientras que otros autores excluyen esta posibilidad (por ejemplo, Larson y Edwards, 2010, p. 701; Simmons, 1996, p. 536). También, algunos autores permiten la igualdad $a = c$ (por ejemplo, Hahn, 1998). La excentricidad e de la hipérbola se define mediante el mismo cociente, donde c es la semidistancia entre los focos y a es la longitud del semieje transversal de la hipérbola (por ejemplo, Larson y Edwards, 2010, p. 704; Lehmann, 1942, p. 168; Rider, 1947, p. 132; Simmons, 1996, p. 545).

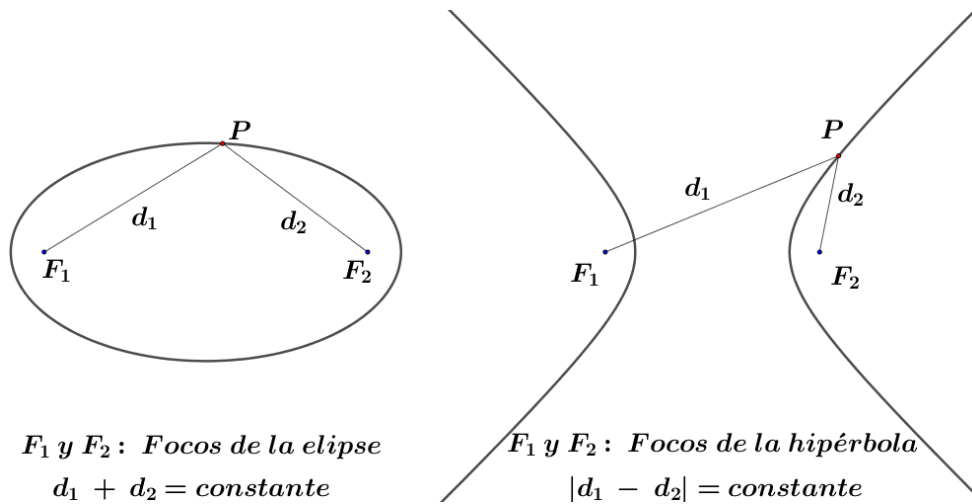


Figura 2.1. Definición bifocal de la elipse y la hipérbola.

2.1.2. Acercamiento foco-directriz.

En el acercamiento foco-directriz (AFD), las cónicas también son concebidas como lugares geométricos, pero ahora la elipse, la parábola y la hipérbola son definidas en términos de un foco y una directriz. En esta definición una cónica es el lugar geométrico de los puntos P de un plano, tales que la razón de la distancia de P desde un punto fijo F , llamado foco, a la distancia de P desde una recta fija l , llamada directriz, que no contiene a F , es una constante positiva e . Esta constante e es por definición la excentricidad de la cónica (ver, por ejemplo, Apostol, 1966, p. 500; Edwards y Penney, 1994, p. 536-537; Leithold, 1981, p. 679; Rider, 1947, p. 142). La curva es una elipse cuando $0 < e < 1$, una parábola cuando $e = 1$ y es una hipérbola cuando $e > 1$ (Figura 2.2). Algunos autores permiten en esta definición que la

constante e tome el valor cero al considerar e una constante no negativa (por ejemplo, Leithold, 1976, p. 589).

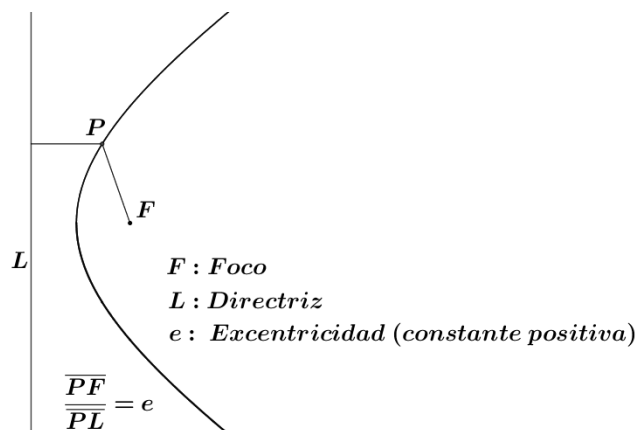


Figura 2.2. Definición foco-directriz de la elipse, parábola e hipérbola.

2.1.3. Acercamiento cono-plano.

En el acercamiento cono-plano (ACP), las cónicas son consideradas como las curvas en el espacio tridimensional que se obtienen al intersecar un cono doble circular recto infinito fijo con un plano inclinado variable, cuya inclinación se mide respecto del eje del cono; las curvas que se generan son: círculo, elipse, parábola e hipérbola, así como también punto, recta y dos rectas que se cortan. En esta definición, los elementos de las curvas como el centro, los focos o la directriz no están involucrados. Todo plano perpendicular al eje del cono doble se llamará plano horizontal. El nombre de cónicas (o secciones cónicas) proviene precisamente de la concepción de estas curvas en el espacio tridimensional. Para un doble cono dado, estas curvas se clasifican por la inclinación y la posición del plano inclinado. Si el plano inclinado es horizontal, la curva obtenida es un círculo. Si el plano inclinado es paralelo a la generatriz de un cono, el plano cortará sólo una parte del cono y la curva se llama parábola. Supongamos que el plano inclinado no es ni horizontal ni paralelo a una generatriz. Entonces se obtiene una elipse o una hipérbola, dependiendo de si el plano interseca sólo un manto del cono o si interseca ambos mantos (Figura 2.3). La hipérbola es una curva que consta de dos ramas, una en cada manto. En esta concepción de las cónicas está ausente la excentricidad, pero ella surge a través de una propiedad de las curvas establecida por Germinal Pierre Dandelin, cuya prueba se basa en las llamadas esferas de Dandelin (Brannan, Esplen, y Gray, 2012, p. 22; Simmons, 1996, p. 551). En esta proposición se introduce el concepto de directriz.

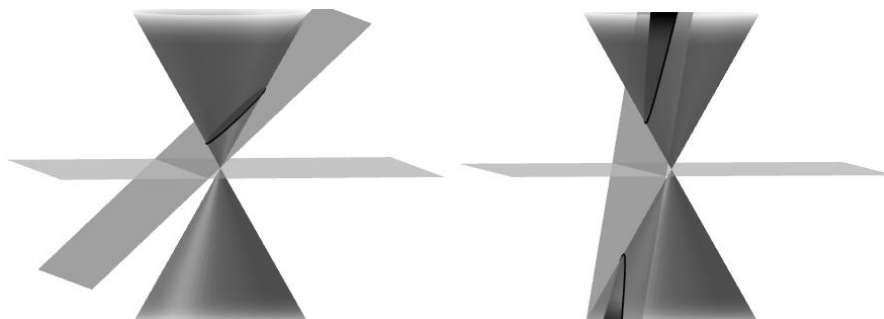


Figura 2.3. Definición cono-plano de la elipse e hipérbola.

Destacamos que en ninguno de los tres acercamientos las definiciones de las cónicas están supeditadas a representaciones analíticas; el objetivo de la Geometría Analítica es precisamente el estudio de esas curvas mediante esas representaciones. El tratamiento analítico de las curvas, concebidas como la intersección de un cono y un plano, o una discusión geométrica de ellas en el contexto del espacio tridimensional no es adoptado en los libros de texto revisados, en este sentido, el acercamiento cono-plano no es desarrollado por los autores. Ellos sólo mencionan que las cónicas se generan con la intersección de un cono doble con planos inclinados (e ilustran con unas figuras), con lo que pretenden justificar su nombre.

Las definiciones de excentricidad halladas en el AB y el AFD dan respuesta a nuestra primera pregunta de investigación.

2.2. Diferencias y coincidencias entre las tres nociones de excentricidad

En esta sección reportamos algunos resultados de la revisión y análisis comparativo de libros de texto sobre la excentricidad de las cónicas.

2.2.1. Tres definiciones de excentricidad

Es notable que las definiciones de excentricidad halladas en los libros de texto revisados no son del todo equivalentes en un sentido estrictamente matemático. Veamos algunas diferencias y discrepancias notables entre ellas.

- En el AB a las cónicas, los autores que permiten la coincidencia de los focos, en cuyo caso c tiene el valor cero, consideran a la circunferencia un caso especial de la elipse y le asignan excentricidad cero (por ejemplo, Lehmann, 1942, p. 154 ; Rider, 1947, p.

121). Al respecto, comenta Rider (1947), “la circunferencia puede considerarse una elipse cuya excentricidad es cero” (p. 121), mientras que Apostol (1966, p. 498), sin aludir a la excentricidad, señala “si los focos coinciden, la elipse se reduce a un círculo”. Los autores que en la definición de elipse excluyen la coincidencia de los focos no consideran a la circunferencia como caso particular de la elipse, por lo que no tiene asignado un valor de excentricidad (por ejemplo, Larson y Edwards, 2010, p. 699; Simmons, 1996, p. 536). Por otro lado, Hahn (1998), quien permite la igualdad $a = c$ (y por tal razón $e = 1$), señala que en este caso “la elipse consiste de los puntos del segmento F_1F_2 ” (p. 91). En este acercamiento la excentricidad toma sólo valores positivos y está definida para la elipse y la hipérbola. Destacamos que la excentricidad no toma el valor 1 y entonces la parábola no tiene asignada excentricidad alguna.

- En el AFD a las cónicas, sólo están consideradas la elipse, la parábola y la hipérbola. El valor cero para la excentricidad lo excluyen los autores no obstante que la naturaleza de la definición permitiría este valor, en cuyo caso el lugar geométrico se reduce a un punto como algunos autores así lo hacen notar (por ejemplo, Leithold, 1976, p. 589). Es notable que en este acercamiento foco-directriz no está incluido el círculo. La definición de parábola coincide con la definición dada en el acercamiento bifocal al involucrar un foco y una directriz. El círculo se rescata una vez que la definición general se traduce a ecuaciones algebraicas respecto a un sistema de ejes cartesianos y se asignan valores particulares a los parámetros (Edwards y Penney, 1994, p. 557).
- En el ACP a las cónicas, como se dijo antes, la excentricidad surge de una propiedad de las curvas que describimos brevemente a continuación. Considérese un cono doble circular recto infinito y un plano inclinado que lo corta, cuya inclinación podemos medir respecto a un plano perpendicular al eje del cono o respecto al eje del cono. Si construimos una esfera inscrita en el cono, tangente al cono y al plano inclinado, el punto de tangencia entre la esfera y el plano determinan un punto notable que llamaremos foco de la curva. Los puntos de tangencia entre la esfera y el cono determinan un círculo de tangencia por el que pasa un plano, que llamaremos plano horizontal, que al intersectarse con el plano inclinado dan origen a una recta que

llamaremos directriz. El cociente que se obtiene al dividir la distancia de cualquiera de los puntos de la curva al foco, entre su distancia a la directriz es una constante. Esta es la excentricidad e de la cónica, cuyo valor es igual a $(\sin \alpha)/(\sin \beta)$, donde α es el ángulo que forma el plano inclinado con el plano horizontal y β es el ángulo que forma una generatriz del cono con el mismo plano horizontal. Una prueba de esta proposición puede encontrarse en (Brannan et al., 2012, p. 22; Simmons, 1996, p. 551). A medida que el ángulo α disminuye y se acerca a cero, la cónica se vuelve cada vez más “redonda” y la directriz está cada vez más lejos de la cónica. Es claro que la naturaleza de la definición supone $\alpha \neq 0$ pues eso garantiza la existencia de la directriz. El valor cero para la excentricidad sólo puede entenderse como un valor límite, en cuyo caso la cónica es un círculo. La curva es una elipse cuando $0 < e < 1$, una parábola cuando $e = 1$ y es una hipérbola cuando $e > 1$

El análisis comparativo de las definiciones de excentricidad halladas en los libros de texto revisados, y la forma en que estas son presentadas, dan respuesta a la pregunta ¿cuáles son las coincidencias, diferencias o discrepancias entre las diversas nociones de excentricidad? En la Tabla 2.1. damos cuenta, de manera resumida, de las coincidencias y diferencias entre las diversas nociones de excentricidad desde los AB, AFD y ACP.

Tabla 2.1. Coincidencias y diferencias entre las diversas nociones de excentricidad.

Acercamiento	Cónicas definidas	e positiva	$e = 0$
Bifocal	Círculo, elipse, parábola e hipérbola	$e = c/a, e \neq 1$ La parábola no tiene excentricidad asignada.	Por extensión, es asignada a la circunferencia.
Foco-directriz	Elipse, parábola e hipérbola El círculo es excluido	$e = \frac{d(P, F)}{d(P, l)}$	El valor $e = 0$ está excluido, aunque la definición admite este valor. Si se permitiera, el lugar geométrico correspondería a un solo punto.
Cono-plano	Círculo, elipse, parábola e hipérbola	$e = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$	La definición no admite $e = 0$. La excentricidad cero sólo puede entenderse como un valor límite. Se puede asignar excentricidad cero a la circunferencia, considerada como el límite de una familia de elipses.

2.2.2. Significado geométrico de la excentricidad.

A continuación, y dando respuesta a nuestra segunda pregunta auxiliar, exponemos las diversas explicaciones que ofrecen los autores de texto sobre las interpretaciones de la excentricidad, con relación a las características cualitativas de las cónicas. Destacamos que los significados, o interpretaciones, de la excentricidad no son suficientemente explicados, o bien se incurre en percepciones incorrectas, en los libros de texto revisados.

- Para la elipse, algunos autores sólo comentan que mientras mayor sea la excentricidad la elipse será más alargada (por ejemplo, Edwards y Penney, 1994, p. 557). Por su parte, Larson y Edwards (2010, p. 701) comentan que las elipses de forma casi circular tienen focos cercanos al centro y su excentricidad c/a es pequeña. Para elipses de forma alargada sus focos están cercanos a los vértices y su excentricidad c/a está cercana a 1. En general, los autores no ofrecen una explicación donde resulte inmediata esta interpretación de la excentricidad. El software matemático es un excelente recurso para crear animaciones que ilustren esta relación de la excentricidad y la forma de la curva; pero la mera visualización de cómo varía la forma de la curva cuando se hace variar la excentricidad, no ofrece una explicación satisfactoria a los estudiantes de esa relación. Para ello es necesario hacer un análisis entre el aspecto geométrico y las expresiones algebraicas, que nos proporciona la excentricidad; por ejemplo, en el contexto del acercamiento bifocal, podemos acudir a la fórmula para la excentricidad $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ o la relación $b/a = \sqrt{1 - e^2}$ que se obtiene de esa fórmula, en donde a y b son respectivamente los semiejes mayor y menor. Es claro desde el punto de vista geométrico que la elipse se asemejará más a un círculo, o a un punto, a medida que los semiejes tengan valores próximos entre sí, lo cual ocurrirá cuando el valor de la excentricidad se aproxime a cero. En la enseñanza de la excentricidad, su definición debería acompañarse de una reflexión (no solamente ilustración visual) de cómo impacta la variabilidad de la excentricidad en la forma de la curva.
- Para la hipérbola, Larson y Edwards (2010, p. 704) comentan que “si la excentricidad es grande, las ramas de la hipérbola son casi planas. Si la excentricidad es cercana a la unidad, las ramas de la hipérbola son más puntiagudas”. Los autores se refieren a la forma de la hipérbola alrededor del vértice, pues su comentario lo apoyan en un par de

figuras en las que se muestra un acercamiento al vértice para apreciar la forma de la hipérbola. Esta interpretación de la forma de las hipérbolas es incorrecta ya que el valor de la excentricidad incide en el ángulo que forman las asíntotas, donde yace la hipérbola, pero, para un par de asíntotas dado hay una infinidad de curvas, unas más o menos puntiagudas que otras, la forma depende de la distancia de los vértices a la intersección de las asíntotas. Si los vértices están suficientemente alejados de esta intersección, la hipérbola luce plana; así que el valor de la excentricidad no determina lo puntiaguda o plana de la hipérbola en el vértice, sino más bien al ángulo que forma las asíntotas donde yacen las hipérbolas y por lo tanto determina cuanto se abren sus ramas.

- Con relación a la excentricidad y a las asíntotas de la hipérbola, Simmons (1996, p. 545) menciona que cuando la excentricidad es cercana a 1, entonces b es pequeña comparada con a , y la hipérbola yace en un ángulo pequeño entre las asíntotas. Cuando la excentricidad es grande, entonces b es grande comparada con a , el ángulo entre las asíntotas es grande, y la hipérbola es casi plana en los vértices. Por lo que Simmons incurre en la misma incorrecta apreciación de la forma de la hipérbola alrededor de su vértice. Otros autores ni siquiera atienden el tema de la relación entre la excentricidad y la forma de las hipérbolas (por ejemplo, Edwards y Penney, 1994).

Estos autores sacan conclusiones sobre las formas de las hipérbolas a partir de los valores de la excentricidad, obviando tal vez los recíprocos de estas afirmaciones.

Por último, podemos señalar que el significado de excentricidad generalmente no es suficientemente explicado por los autores; incluso algunas de las interpretaciones de la excentricidad de las cónicas en los libros de texto son solo parcialmente correctas. Un hecho destacable es que las definiciones de excentricidad, correspondientes a las tres aproximaciones a las cónicas, no son equivalentes. Hasta donde sabemos, esta no equivalencia entre las definiciones de excentricidad no se comenta en ninguna publicación.

2.3. Transiciones entre los diferentes acercamientos a las cónicas y el concepto de excentricidad asociado

Es común que los libros de texto que tratan el tema de Geometría Analítica, cuando estudian el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola, presenten estas curvas como las intersecciones de un plano variable con un cono doble circular recto infinito. Los autores de libros de texto piden a los lectores que observen las diferentes curvas que se obtienen al variar el plano, mismas que muestran con varias figuras tridimensionales (Figura 2.4), y asignan nombres a cada una de ellas según la posición del plano. Esta introducción al estudio de las cónicas involucra una dinámica que invita a poner en juego la imaginación espacial de los estudiantes. La comprensión de la dinámica física puede apoyarse con software matemático, o con animaciones, que fácilmente se encuentran en internet, que ilustran cómo se generan estas curvas con el movimiento del plano. Sin embargo, este apoyo visual debiera usarse al final de un ejercicio de imaginación espacial, y no para evitar el esfuerzo mental para comprender la variabilidad de la forma de las curvas cuando hacemos variar la inclinación del plano.



Figura 2.4. Secciones cónicas

Una vez que los autores han introducido visual y cualitativamente las curvas, y les han asignado nombres, los autores las denominan en general secciones cónicas o, simplemente, cónicas y proceden a estudiarlas en el plano partiendo de sus definiciones como lugares geométricos ya sea en el contexto del acercamiento bifocal o del acercamiento foco-directriz. La discusión de las cónicas usualmente la hacen con base en sus ecuaciones que derivan de sus definiciones como lugares geométricos, descritos estos como el rastro de un punto en movimiento o como el conjunto de puntos que satisfacen una condición específica para cada curva.

Sin embargo, en las exposiciones de los libros de texto no es claro cómo podemos transitar de las concepciones de las curvas en el contexto cono-plano a sus descripciones como lugares geométricos, y de cualquier acercamiento a cualquiera de los otros dos. Para comprender la problemática que estamos exponiendo planteamos, como ejemplos, las siguientes preguntas:

- ¿Los óvalos definidos como elipses en el acercamiento cono-plano son elipses según el acercamiento bifocal?
- ¿Los óvalos definidos como elipses en el acercamiento cono-plano son elipses según el acercamiento foco-directriz?
- ¿Las elipses definidas en el acercamiento bifocal son elipses según el acercamiento foco-directriz?

En esta Sección hacemos una discusión para responder estas preguntas y otras más.

2.3.1. Definición bifocal de la elipse y la hipérbola desde su definición plano-cono.

Como mencionamos antes, una vez que los autores de libros de texto introducen las cónicas en el contexto tridimensional inician el estudio de estas curvas sobre un plano, definidas estas como lugares geométricos. El tránsito de la concepción de las cónicas en el contexto cono-plano a su concepción como lugares geométricos en el plano se debe a un ingenioso análisis sobre las cónicas, debido al matemático belga Germinal Pierre Dandelin, el cual presentamos a continuación.

Comúnmente en los libros de texto la elipse y la hipérbola se establecen en el contexto de lo que hemos llamado acercamiento bifocal. La elipse es el conjunto de puntos P de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos diferentes F_1 y F_2 , llamados focos, es una constante $2a$ positiva:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (1)$$

Se supone en esta definición que la distancia entre los focos $2c$ es positiva y es menor que la constante $2a$, esto implica $0 < c < a$. Podríamos preguntarnos por qué de inicio se supone esta condición. Realmente, se puede probar, con base en la desigualdad del triángulo, que para

valores de c mayores que a no existen puntos que satisfagan la condición (1), de donde se deduce que necesariamente se debe cumplir la desigualdad $0 < c \leq a$. Además, cuando $c = a$, se deduce que los puntos que satisfacen la condición (1) son los del segmento de recta que tiene por extremos los focos F_1 y F_2 . Así que el caso no trivial es cuando se cumple $0 < c < a$.

La hipérbola es el conjunto de puntos P de un plano cuya diferencia positiva de sus distancias a dos puntos fijos diferentes F_1 y F_2 , llamados focos, es una constante $2a$ positiva:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \quad (2)$$

Aquí se supone que la distancia entre los focos $2c$ es mayor que $2a$, así que $0 < a < c$. De manera similar al caso de la elipse, cuando $a > c$ no existen puntos que satisfagan la condición (2), por lo tanto, cuando hay puntos que la satisfagan, necesariamente se cumple $0 < a \leq c$. Cuando $c = a$, el conjunto de puntos que satisfacen la condición (2), consta de dos rayos disjuntos, que tienen por extremos los focos, respectivamente.

La elipse y la hipérbola, consideradas como secciones cónicas ciertamente satisfacen las condiciones (1) y (2) respectivamente para algún par de puntos F_1 y F_2 (Simmons, 1996, p. 531). En ambos casos la prueba, que se debe a Dandelin, se basa en la construcción de dos esferas S_1 y S_2 inscritas en el cono y tangentes al plano inclinado. En la Figura 2.5 se muestran, para el caso de la elipse, las esferas, los respectivos círculos C_1 y C_2 de tangencia con el cono y los respectivos puntos F_1 y F_2 de tangencia con el plano inclinado P . El punto P es arbitrario sobre la elipse, Q_1 y Q_2 son los puntos de contacto de la generatriz que pasa por P y los círculos C_1 y C_2 , respectivamente.

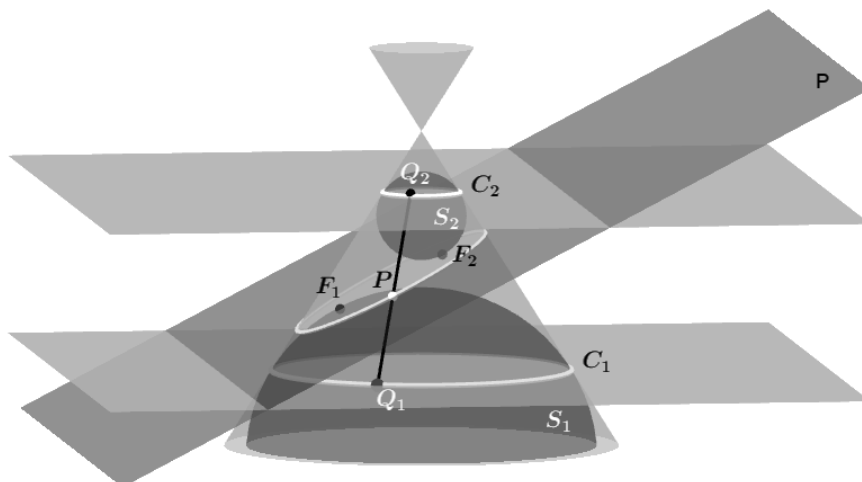


Figura 2.5. Cono, plano y elipse.

Los segmentos $\overline{PF_1}$ y $\overline{PQ_1}$ son de la misma longitud pues son tangentes a la esfera S_1 que emergen desde el mismo punto P . Por una razón similar, los segmentos $\overline{PF_2}$ y $\overline{PQ_2}$ son de la misma longitud. De aquí se deduce

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = |\overline{PQ_1}| + |\overline{PQ_2}| = |\overline{Q_1Q_2}|.$$

Dado que la longitud $|\overline{Q_1Q_2}|$ es una constante, es decir es independiente del punto P , la relación anterior prueba que el punto P , el cual es arbitrario sobre la elipse, satisface la condición (1).

Afirmaciones y pruebas similares se tienen para la parábola en términos de las equidistancias de sus puntos a un punto (foco) y una recta (directriz) y, para la hipérbola en términos de dos puntos F_1 y F_2 , y la condición (2). En el caso de la parábola se inscribe en el cono una esfera tangente al cono en un círculo y tangente al plano inclinado en punto F . Este punto será el foco de la parábola y la recta que jugará el papel de directriz es la intersección del plano inclinado con el plano horizontal del círculo de tangencia C . En el caso de la hipérbola, se inscriben dos esferas S_1 y S_2 , una en el cono superior y la otra en el cono inferior, ambas esferas son tangentes al cono en sus respectivos círculos y tangentes al plano inclinado en puntos F_1 y F_2 que jugarán el papel de los focos.

Una vez ubicadas las secciones cónicas en un plano, y con base en las condiciones (1) y (2), se procede a definir los elementos importantes de la elipse y la hipérbola. El centro O de ambas

curvas, es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ que une los focos, por lo que en ambos casos la distancia del centro a cada foco es igual a c . Dos puntos notables sobre estas curvas son sus vértices V_1 y V_2 . Estos se encuentran sobre la recta X que contiene a los focos. En el caso de la elipse F_1 está en el segmento $\overline{OV_1}$ y F_2 está en el segmento $\overline{OV_2}$. Para la hipérbola V_1 está en el segmento $\overline{OF_1}$ y V_2 está en el segmento $\overline{OF_2}$. Para la elipse, el segmento $\overline{V_1V_2}$ es su eje mayor, el cual tiene centro O y longitud $2a$. El eje menor de la curva es el segmento de longitud $2\sqrt{a^2 - c^2}$, perpendicular al eje mayor con centro el punto O , centro de la curva.

Para la hipérbola el segmento $\overline{V_1V_2}$ es su eje transversal, el cual tiene centro O y longitud $2a$. El eje conjugado de la curva es el segmento de longitud $2\sqrt{c^2 - a^2}$, perpendicular al eje transversal, con centro el punto O .

La excentricidad e para ambas curvas, elipse e hipérbola, está definida por la relación $c = ea$.

Dado que para la elipse $0 < c < a$, se tiene $0 < e < 1$. Para la hipérbola $0 < a < c$, así que en este caso $e > 1$. Para la elipse e hipérbola, la distancia de un foco a su respectivo vértice es definida como $\delta = d(F_1, V_1) = d(F_2, V_2)$, así que tenemos para la elipse $\delta = a - c$, también podemos escribir $\delta = a(1 - e)$. Para la hipérbola tenemos $\delta = c - a$, o sea $\delta = a(e - 1)$. De esta manera quedan establecidos los elementos importantes de ambas curvas (Figura 2.6).

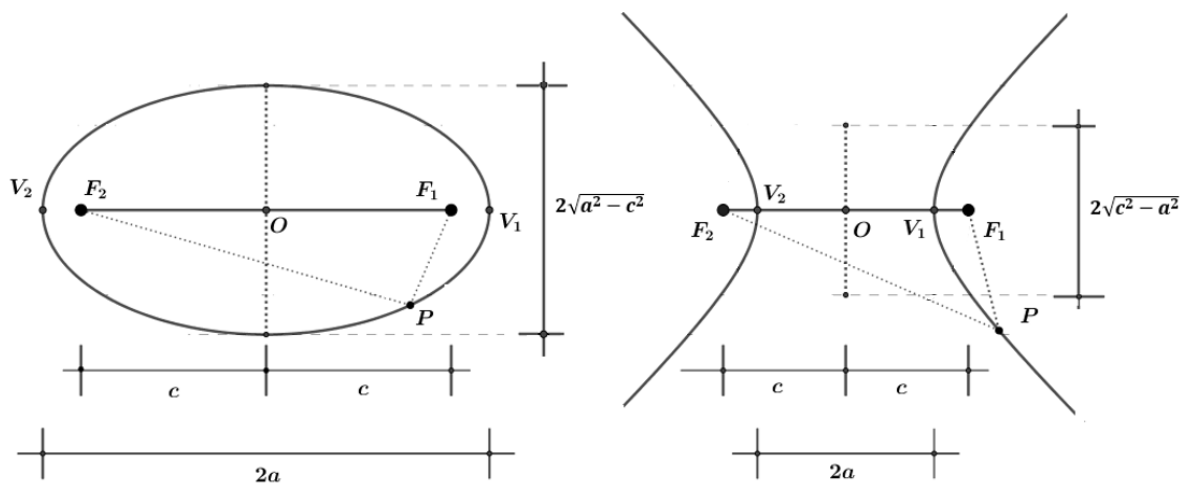


Figura 2.6. Principales elementos de la elipse y la hipérbola en su definición bifocal.

Es común que los autores que adoptan la definición bifocal para la elipse y la hipérbola procedan a determinar las ecuaciones de las curvas respecto a un sistema de ejes cartesianos y

entonces empiecen a identificar algunos elementos de las curvas. Por ejemplo, el centro O de las cónica lo ubican en el origen, el vértice V_1 en el punto de coordenadas $(a, 0)$ y el vértice V_2 en el punto de coordenadas $(-a, 0)$. Entonces los focos F_1 y F_2 serán los puntos de coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente (ver Figura 2.7). Las coordenadas de los focos F_1 y F_2 también pueden escribirse como $(ae, 0)$ y $(-ae, 0)$, respectivamente. Los vértices y otros elementos importantes de estas curvas, por ejemplo, sus ejes, son establecidos una vez que la curva y sus focos son ubicados en un sistema de coordenadas (por ejemplo: Rider, 1947, pp. 119, 130; Spain, 1963, pp. 77, 94; Swokowski, 1979, pp. 336, 342), sin embargo estos elementos pueden establecerse sin acudir a un sistema de coordenadas, como lo hemos expuesto antes.

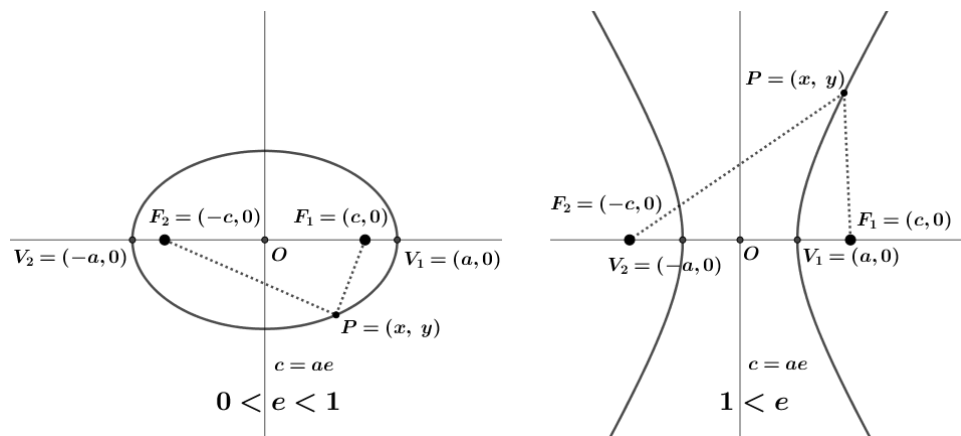


Figura 2.7. Elementos de la elipse e hipérbola en un sistema de coordenadas cartesianas.

2.3.2. Definiciones de la elipse y la hipérbola en el acercamiento foco-directriz desde su definición bifocal

Con el propósito de hacer un análisis sobre las equivalencias de los diversos acercamientos a las cónicas, primero daremos cuenta sobre lo que se encuentra, en ese sentido, en libros de texto. Por ejemplo, con base en la condición (1) Spain (1963, p. 76) obtiene las ecuaciones para la elipse

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x \right)^2 \quad (3)$$

$$(x + ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} + x \right)^2 \quad (4)$$

Ambas ecuaciones son formas diferentes de escribir la ecuación simplificada de la elipse

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2) \quad (5)$$

La ecuación (3) también se escribe como

$$\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \left| \frac{a}{e} - x \right| \quad (6)$$

Si P es un punto arbitrario de la elipse de coordenadas (x, y) , entonces satisface (6). Esto significa que la distancia del punto P a F_1 es igual a e veces la distancia de P al punto de coordenadas $(a/e, y)$. Si L_1 es la recta perpendicular al eje de las abscisas en el punto de coordenadas $(a/e, 0)$, entonces tenemos $d(P, F_1) = ed(P, L_1)$, donde, como antes, $d(P, F_1)$ denota la distancia de P a F_1 y $d(P, L_1)$ denota la distancia de P a la recta L_1 . Esto prueba que una elipse en el acercamiento bifocal también es una elipse en el acercamiento foco-directriz:

Una elipse es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de manera que la razón de su distancia a un punto fijo entre la distancia a una recta fija es una constante $0 < e < 1$ (Figura 2.8).

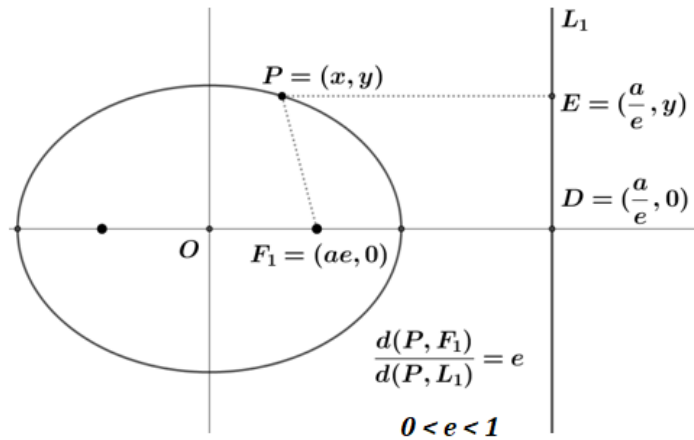


Figura 2.8. Elipse en términos de foco y directriz

Un análisis similar podemos hacer para el foco F_2 y la recta L_2 que es perpendicular a el eje de las abscisas en el punto de coordenadas $(-a/e, 0)$. Una elipse tiene entonces dos directrices L_1 y L_2 , en este caso de ecuaciones $x = a/e$ y $x = -a/e$ respectivamente, sin embargo, cualquiera de sus focos y su directriz correspondiente son suficientes para describir la curva; además se tiene la fórmula para las distancias de los vértices a sus respectivas directrices:

$$d(V_1, L_1) = d(V_2, L_2) = \frac{a}{e} - a = a \left(\frac{1-e}{e} \right).$$

De manera similar, con base en la condición (2) se obtienen las mismas ecuaciones (3) y (4) para la hipérbola. Para todo punto $P = (x, y)$ que satisfaga la ecuación (3), se cumple

$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x \right)^2 \quad (7)$$

Similarmente, todo punto $P = (x, y)$ que satisface la ecuación (4), también satisface

$$(x + ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} + x \right)^2 \quad (8)$$

De cualquiera de las ecuaciones (7) y (8) se obtiene la ecuación para la hipérbola

$$(1 - e^2)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1) \quad (9)$$

Las rectas L_1 y L_2 perpendiculares al eje de las abscisas en los puntos $(a/e, 0)$ y $(-a/e, 0)$ respectivamente, son llamadas directrices de la hipérbola.

Si P es un punto arbitrario de la hipérbola de coordenadas (x, y) , de la ecuación (6) obtenemos

$$d(P, F_1) = ed(P, L_1) \quad (10)$$

y de la ecuación (8) obtenemos

$$d(P, F_2) = ed(P, L_2) \quad (11)$$

Cualquiera de las relaciones (10) u (11) muestra que toda hipérbola en el acercamiento bifocal también es hipérbola en el acercamiento foco-directriz:

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de manera que la razón de su distancia a un punto fijo entre la distancia a una recta fija es una constante $e > 1$ (Figura 2.9).

La relación (10) define ambas ramas de la hipérbola, como también lo hace la relación (11).

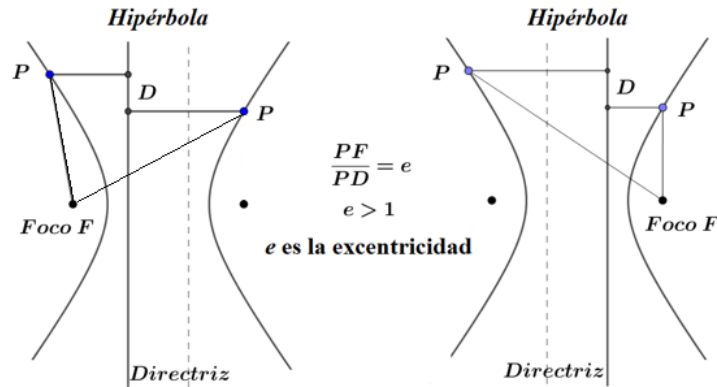


Figura 2.9. Hipérbola en términos de foco y directriz

Las definiciones alternativas que Spain (1963, pp. 76, 93) obtiene a partir de las ecuaciones (3) y (4) para la elipse y de las ecuaciones (10) y (11) para la hipérbola, conducen a la definición unificada de la elipse y la hipérbola en términos de foco F y directriz L .

Esta definición junto con la definición usual foco-directriz de la parábola, conducen a la definición foco-directriz de las tres curvas (ver, por ejemplo, Edwards y Penney, 1994, p. 537; Leithold, 1976, p. 589; Simmons, 1996, p. 552):

Dados un punto F y una recta L que no contiene a F , una cónica es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de manera que la razón de la distancia de P a F , a la distancia de P a L es una constante positiva e . Esta constante es llamada excentricidad, F se llama foco y L directriz de la cónica. La curva es una parábola, elipse o hipérbola según se cumpla una de las condiciones $e = 1$, $0 < e < 1$ o $1 < e$, respectivamente.

En esta definición está excluido el círculo.

2.3.3. Definiciones bifocales de la elipse y la hipérbola desde su definición foco-directriz.

Hemos mostrado que, a partir de las respectivas definiciones bifocales de la elipse y la hipérbola, y a través de sus ecuaciones cartesianas se puede establecer una definición para ambas curvas en términos de un foco y una directriz en la que, después de incluir la parábola, obtenemos una definición unificadora para las tres curvas. Recíprocamente, mostremos que podemos obtener las definiciones bifocales, a partir de sus definiciones en el acercamiento

foco-directriz. La manera de hacerlo es mediante las ecuaciones de las curvas en su forma canónica respecto a un sistema de ejes cartesianos en el contexto foco-directriz (véase, por ejemplo, Edwards y Penney, 1994). Si en la definición foco-directriz de las tres cónicas, en un sistema de ejes cartesianos xy ubicamos el foco F en el punto $(p, 0)$ y la directriz es la recta que tiene por ecuación $x = -p$, la ecuación de la cónica de excentricidad e toma la forma

$$(1 - e^2)x^2 - 2p(1 + e^2)x + y^2 = -p^2(1 - e^2). \quad (12)$$

Para $0 < e < 1$, la ecuación (12) se escribe como

$$\frac{(x - p \frac{1 + e^2}{1 - e^2})^2}{p^2 \frac{4e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{p^2 \frac{4e^2}{1 - e^2}} = 1$$

que corresponde a la ecuación canónica de la elipse. De esta ecuación podemos obtener sus dos focos, la constante $2a$ correspondiente a su eje mayor y todos los demás elementos de una elipse que suelen definirse en el acercamiento bifocal. Observemos que, si le asignamos el valor (no permitido) cero a la excentricidad e , la ecuación (12) toma la forma $(x - p)^2 + y^2 = 0$, la cual corresponde al punto $(p, 0)$.

Para $e = 1$, la ecuación (12) se reduce a $y^2 = 4px$, que corresponde a una parábola con el foco y directriz dados originalmente.

Para $e > 1$, la ecuación (12) se escribe como

$$\frac{(x - p \frac{1 + e^2}{1 - e^2})^2}{p^2 \frac{4e^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{p^2 \frac{4e^2}{e^2 - 1}} = 1$$

que corresponde a la ecuación canónica de la hipérbola y de la cual podemos obtener sus dos focos y la constante $2a$ correspondiente a su eje transversal.

2.3.4. Definición foco-directriz de las cónicas desde su definición cono-plano.

La versión unificada foco-directriz de las tres curvas (elipse, parábola e hipérbola) puede establecerse a partir de las definiciones cono-plano de esas curvas en el espacio tridimensional (Brannan, Esplen, y Gray, 2012, p. 22, 23; Simmons, 1996, p. 550, 552).

Consideremos un cono doble circular recto infinito y un plano Q que lo corta, como el de la Figura 2.10. Nos vamos a referir a Q como el plano inclinado. Denotemos por 2γ el ángulo del vértice; γ es el ángulo que forma cualquier generatriz y el eje del cono, las cuales se cortan en el vértice del cono. La curva que resulta de la intersección del cono y el plano Q es una elipse (Figura 2.10). Mostremos que hay una recta d y un punto F sobre el plano Q tal que todo punto P de la curva satisface $\text{distancia}(P, F) = e \text{ distancia}(P, d)$ para alguna constante $0 < e < 1$. Así que la elipse en el cono-plano satisface la definición de elipse en el contexto foco-directriz.

En la Figura 2.10 la esfera S está inscrita en el cono, es tangente al cono en el círculo C y tangente al plano inclinado en el punto F . El plano P es perpendicular al eje del cono y contiene al círculo C . Nos vamos a referir a P como el plano horizontal. Suponemos que el plano inclinado corta al plano horizontal en la recta d . Sea P un punto arbitrario sobre la curva. El segmento \overline{PD} está sobre el plano inclinado y es perpendicular a la recta d en el punto D . El punto L es la intersección de la generatriz que pasa por P y el círculo C , por lo que el segmento \overline{PL} está sobre una generatriz. El segmento \overline{PM} es perpendicular al plano horizontal en el punto M .

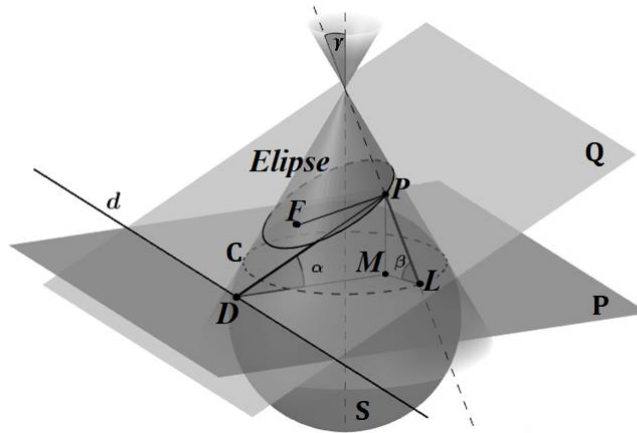


Figura 2.10. Cono circular infinito y planos.

El ángulo α formado por los planos P y Q es igual al determinado por el eje del cono y una perpendicular al plano inclinado Q . El ángulo β es el complemento de γ es decir $\pi/2 - \gamma$ (véase Figura 2.11).

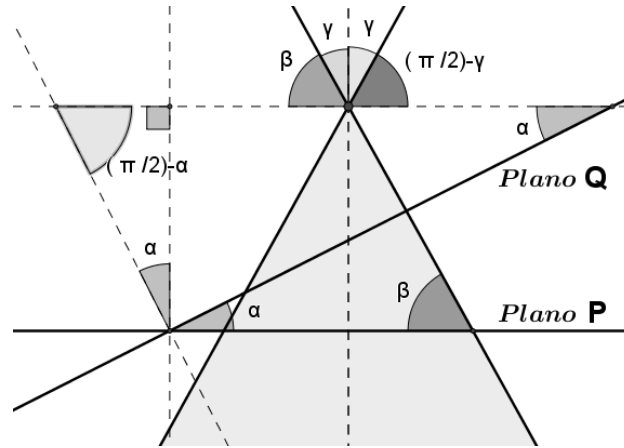


Figura 2.11. Ángulos entre planos y eje del cono.

La naturaleza de la cónica está determinada por el ángulo de inclinación α del plano inclinado. Cuando $\alpha = 0$, la cónica es una circunferencia; cuando $0 < \alpha < \pi/2 - \gamma$ es una elipse; cuando $\alpha = \pi/2 - \gamma$ es una parábola y finalmente, cuando $\alpha > \pi/2 - \gamma$ la sección cónica es una hipérbola.

Una vez que tenemos esta construcción geométrica, para $0 < \alpha < \pi/2$ hagamos el siguiente análisis. Las posiciones horizontal y vertical del plano inclinado están excluidas. En la Figura 2.10, las longitudes de los segmentos \overline{PF} y \overline{PL} son iguales pues ambos emergen desde P y son tangentes a la esfera S . Calculemos la longitud del segmento \overline{PM} de dos maneras.

Del triángulo ΔMDP obtenemos $|\overline{PM}| = |\overline{PD}|\text{sen } \alpha$ y de ΔPML obtenemos $|\overline{PM}| = |\overline{PL}|\text{sen } \beta$, entonces tenemos

$$|\overline{PD}|\text{sen } \alpha = |\overline{PL}|\text{sen } \beta.$$

Como $|\overline{PF}| = |\overline{PL}|$, tenemos $|\overline{PD}|\text{sen } \alpha = |\overline{PF}|\text{sen } \beta$, de donde obtenemos finalmente

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PL}|} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \quad (13)$$

Dado que α y β son fijos, el lado derecho de (13) es una constante e , es decir, es independiente del punto P sobre la sección cónica y es llamada la excentricidad de la cónica. La ecuación (13) también se escribe

$$|\overline{PF}| = e |\overline{PL}|.$$

Esto prueba que la curva es una elipse en el contexto foco-directriz.

En general, la cónica es una elipse, parábola o hipérbola si $0 < \alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$; entonces de la fórmula (13) obtenemos que la cónica es una elipse sí $0 < e < 1$, es una parábola si $e = 1$ y es una hipérbola sí $e > 1$. Así, los valores de la excentricidad determinan la naturaleza de la curva.

La Figura 2.12 puede ayudar a organizar las ideas expuestas a lo largo de las secciones anteriores.

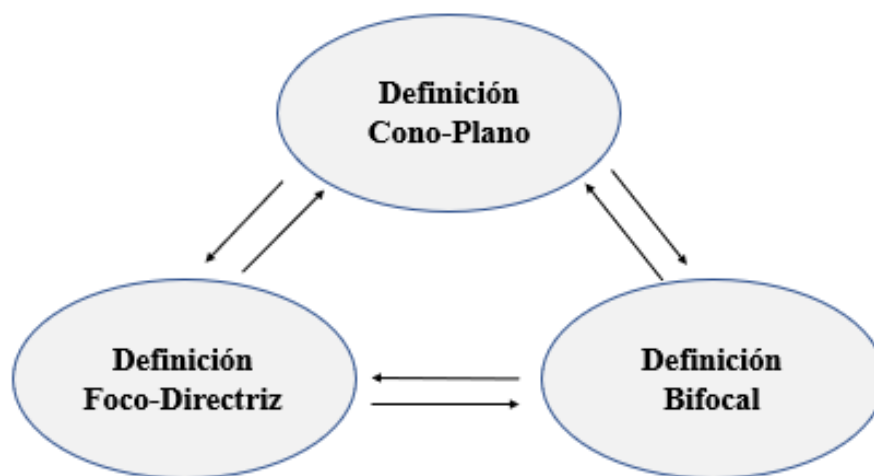


Figura 2.12. Transiciones entre los diferentes acercamientos a las cónicas

2.4. Sobre la equivalencia de las definiciones de las cónicas

Es evidente que los tres acercamientos o definiciones existentes de las cónicas, a las cuales podemos agregar una cuarta (quizá no didácticamente conveniente, pero sí matemáticamente legítima) que consiste en definir las mediante la conocida ecuación cuadrática general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, no son equivalentes. Por ejemplo, en la definición foco-

directriz no está incluida la circunferencia, la cual es una sección cónica destacada. Algunos autores la consideran caso especial de la elipse y otros argumentan que dada su importancia en la matemática merece un tratamiento especial, tanto geométrica como analíticamente.

El círculo es un objeto o figura geométrica ancestral, pero la elipse, parábola e hipérbola nacen con la intersección de un cono y un plano. En este sentido el círculo no es una curva novedosa cuando se introduce el corte de un cono y un plano, como lo son las curvas justamente citadas. De hecho, el círculo fue fundamental en el acercamiento cono-plano de las secciones cónicas, pues fue la base para construir el cono mismo, pero tiene derecho a llamarse sección cónica, como también lo tienen una recta, un punto y pares de rectas diferentes que se intersecan en un único punto, comúnmente llamadas cónicas degeneradas. Estas últimas son casos especiales que se obtienen por posiciones particulares del plano inclinado. Estas secciones cónicas degeneradas se obtienen, respectivamente, cuando el plano inclinado es tangente al cono en una generatriz, pasa por el vértice y es el único punto en común que tiene con el cono y, cuando el plano inclinado es vertical y contiene el eje del cono. Podemos convenir en excluir estos casos de cónicas no degeneradas en el concepto de sección cónica, pero no el círculo, así que habría que enmendar la definición foco-directriz si se aspirase a una definición unificadora totalmente incluyente.

Ante la imposibilidad de incorporar el círculo, de una manera que no violentase el hermoso y simple enunciado de la definición foco-directriz, al menos se debería reconocer explícita y oficialmente las limitaciones de este acercamiento y complementarse mediante un análisis del caso límite cuando $e \rightarrow 0$. Ya encaminados en esta discusión de los casos límite, para ampliar el panorama de las relaciones entre las diferentes concepciones de las cónicas, también podemos incluir un análisis de los casos límite de la elipse, en su definición bifocal, cuando $e \rightarrow 0$ y cuando $e \rightarrow 1$.

2.5. Sobre la forma, excentricidad y asíntotas de la hipérbola

Hemos comentado al principio de este capítulo sobre algunas imprecisiones que observamos en algunos libros de texto de Geometría Analítica o Cálculo con Geometría Analítica, respecto a la relación entre la forma de la hipérbola y su excentricidad. En la Figura 2.13 mostramos

dos hipérbolas que tienen diferente forma en la cercanía al vértice, una más puntiaguda, o más plana, que la otra, sin embargo, ambas tienen la misma excentricidad.

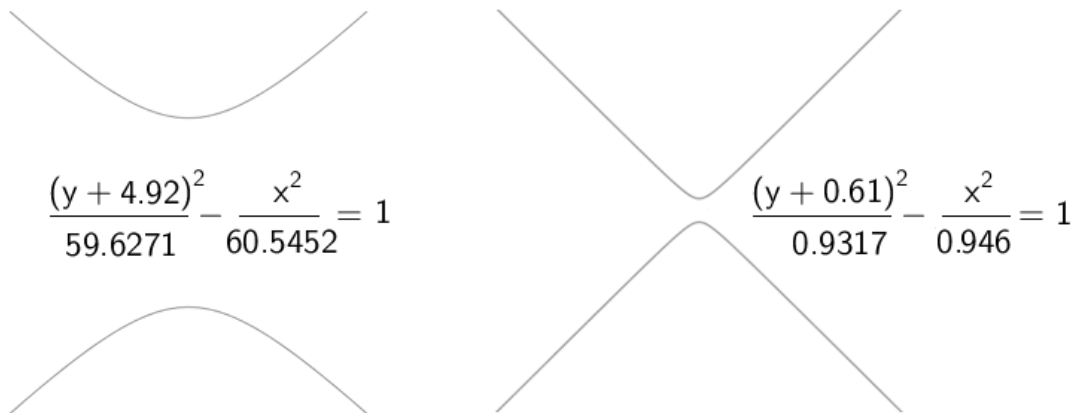


Figura 2.13. Hipérbolas con diferente forma en la cercanía a su vértice, pero con igual excentricidad. Por otra parte, en la Figura 2.14 mostramos dos hipérbolas con casi la misma forma en la cercanía de su vértice, igual de planas o igual de puntiagudas, pero con excentricidades diferentes.

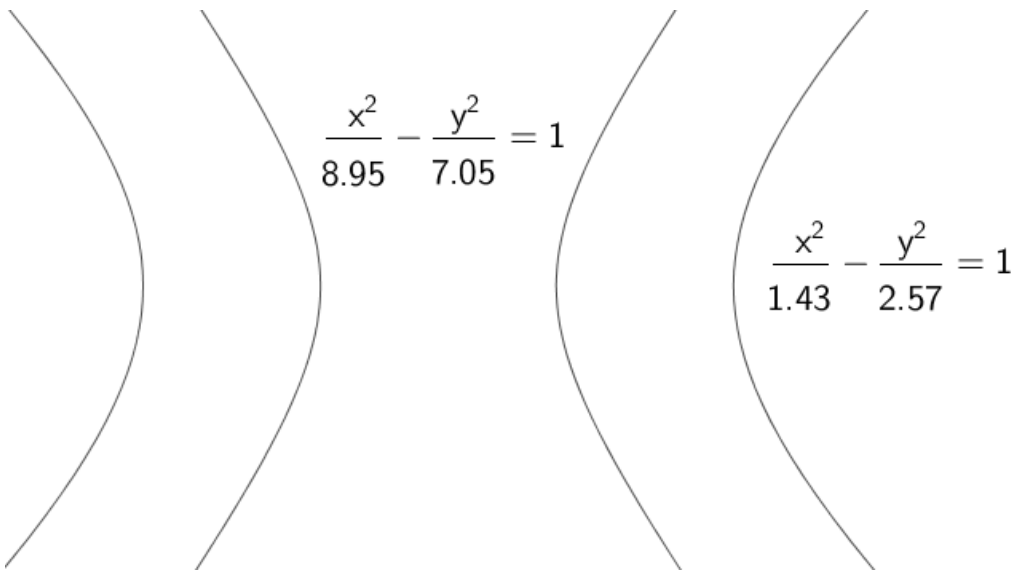


Figura 2.14. Hipérbolas con casi igual forma en la cercanía a su vértice, pero con excentricidades diferentes.

Lo anterior muestra que la forma que tiene la hipérbola en la cercanía de su vértice no depende del valor de su excentricidad.

Hay una infinidad de hipérbolas en un par de asíntotas, unas más o menos puntiagudas que otras lo cual depende de la distancia de los vértices a la intersección de las asíntotas (ver Figura 2.15).

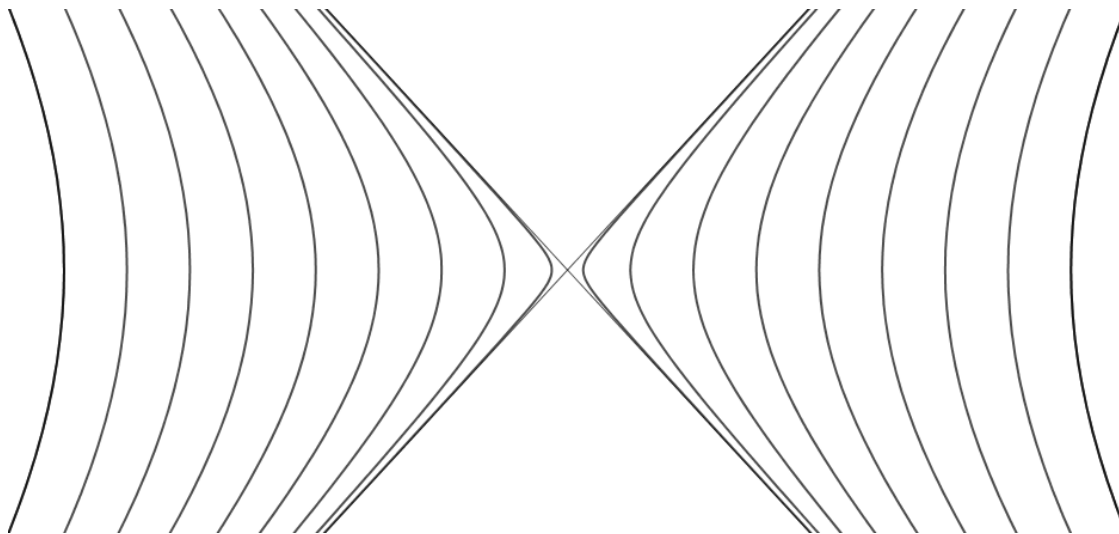


Figura 2.15. Hipérbolas entre un par de asíntotas.

Si los vértices están suficientemente alejados de esta intersección, la hipérbola luce plana alrededor de ellos, si los vértices están suficientemente cercanos de esta intersección, la hipérbola luce puntiaguda alrededor de ellos; así, lo puntiagudo o plano de la hipérbola en la cercanía a sus vértices no está determinado por el valor de la excentricidad, sino más bien el valor de la excentricidad determina el ángulo que forman las asíntotas. La manera adecuada de relacionar lo abierto o cerrado de las ramas de la hipérbola con su excentricidad es mirándolas desde puntos lejanos, actualmente el software matemático nos permite hacer este tipo de alejamientos (ver Figura 2.16). El ángulo entre las asíntotas de la hipérbola es el que está estrechamente relacionado con el valor de la excentricidad, a mayor valor de la excentricidad mayor valor tiene este ángulo. Dado que las ramas de la hipérbola yacen entre sus asíntotas; si aceptamos que las ramas de las hipérbolas se abren más cuando el ángulo de las asíntotas es mayor, podemos decir que a mayor valor de la excentricidad, mayor es la abertura de las ramas de la hipérbola.

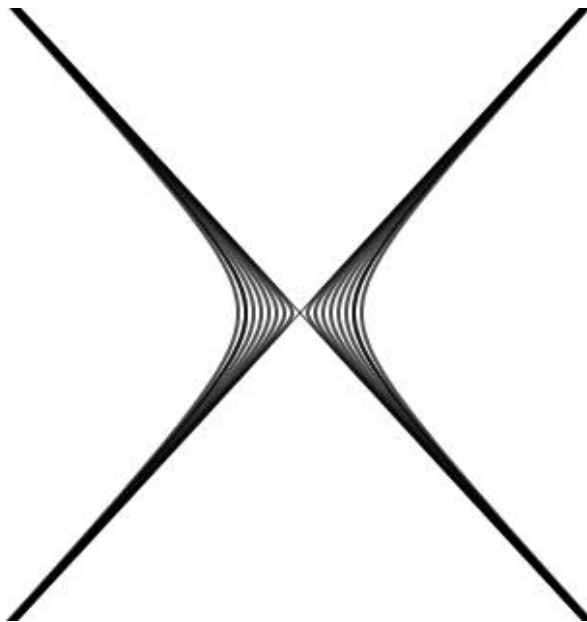


Figura 2.16. Aspecto, que se observa a los lejos, de las ramas de hipérbolas con misma excentricidad.

2.6. Casos límite de la elipse

2.6.1. Casos límite de la elipse en su definición bifocal

Dada la condición $0 < c < a$ que se establece en la definición bifocal de la elipse, los valores 0 y 1 están excluidos para la excentricidad e , sin embargo, es interesante considerar estos valores como casos límite $e \rightarrow 1$ y $e \rightarrow 0$ cuando se estudia esta curva.

Consideremos el caso $e \rightarrow 1$. Aquí es importante analizar varios sub casos; consideraremos como primer sub caso $a > 0$ fijo y segundo sub caso $c > 0$ fijo. Un tercer sub caso consiste en considerar $a > 0$ y $c > 0$ variables y mantener visibles un foco y su respectivo vértice, por ejemplo F_1 y V_1 , de manera que $\delta = d(F_1, V_1)$ sea constante.

Si fijamos $a > 0$, tenemos $c \rightarrow a$ y $\delta \rightarrow 0$ y cuando $e \rightarrow 1$ (de hecho $e \rightarrow 1^+$). Esto significa que $F_1 \rightarrow V_1$, $F_2 \rightarrow V_2$, y $d(V_1, L_1) = d(V_2, L_2) \rightarrow 0$. Cuando $F_1 = V_1$, $F_2 = V_2$, los puntos P que satisfacen la condición (1) son los del segmento de recta $\overline{V_1, V_2}$ y las directrices son rectas perpendiculares a este segmento en sus extremos. Entonces para $e = 1$ se obtendría, como caso límite, un segmento de recta (Figura 2.17, arriba). Esto mismo ocurre cuando fijamos $c > 0$ (Figura 2.17, abajo). Por cierto, Hahn (1998, p. 54) en su definición bifocal de elipse, en términos de dos focos F_1 y F_2 y una constante k (que hemos llamado $2a$) permite la igualdad

$k = d(F_1, F_2)$, lo que implica que su definición incluye el segmento con extremos los focos F_1 y F_2 (Hahn, 1998, p. 91).

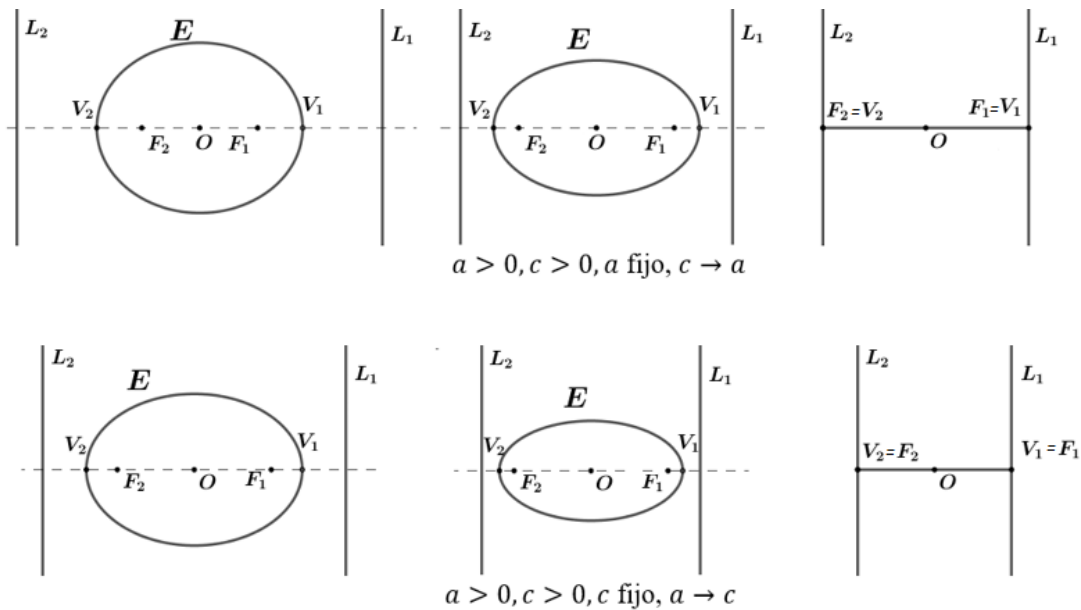


Figura 2.17. Casos límite de la elipse en su definición bifocal cuando $e \rightarrow 1$.

Fijemos ahora F_1 y la distancia $\delta = d(F_1, V_1) = a(1 - e)$. Esto implica que V_1 también está fijo. La condición $e \rightarrow 1^-$ implica que $a \rightarrow +\infty$ y por lo tanto también $c \rightarrow +\infty$, pues $c = ae$. Se esperaría que este caso límite correspondiese a la parábola. Observemos en la Figura 2.18 que como $a \rightarrow +\infty$ los centros O de las curvas (y entonces el centro del sistema de ejes coordenados) se aleja cuando $e \rightarrow 1$ (mientras mantenemos visibles F_1 y V_1). Una manera de probar que en el paso al límite se obtiene una parábola, es analizando los comportamientos de las elipses, pero prescindiendo del sistema de coordenadas. En realidad, en varias partes de nuestro análisis estas coordenadas fueron irrelevantes.

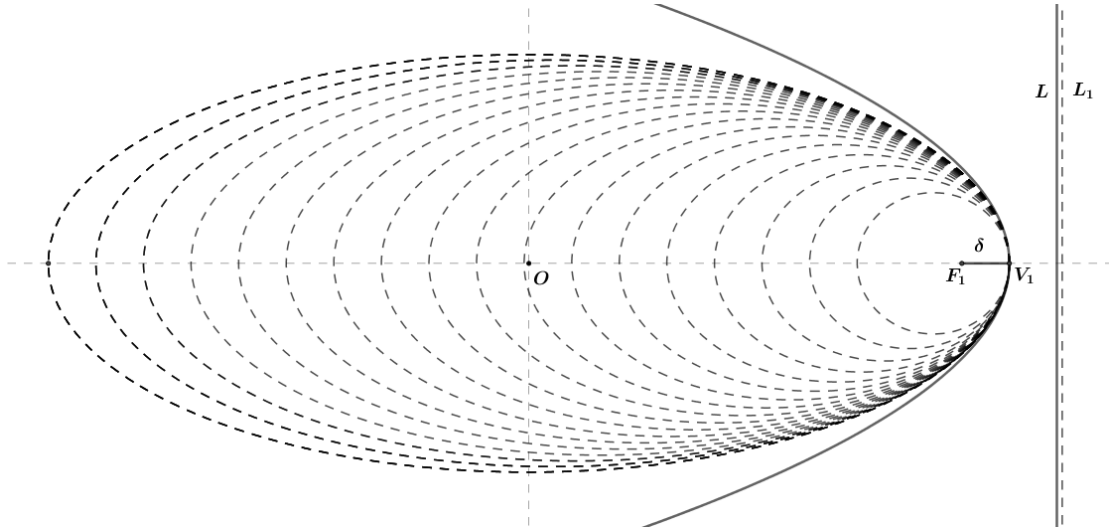


Figura 2.18. $a > 0, c > 0, \delta$ fijo y $a \rightarrow \infty$

Dado que

$$P_e d(V_1, L_1) = a \left(\frac{1-e}{e} \right) = \frac{\delta}{e}, \quad (14)$$

se tiene $d(V_1, L_1) \rightarrow \delta$ cuando $e \rightarrow 1$. Denotemos por L la recta perpendicular a la recta X tal que $d(V_1, L) = \delta$. Una interpretación de la relación (14) y la condición $e \rightarrow 1$ es que la directriz L_1 tiende a la recta L . Esto se sigue de la adecuada interpretación de la desigualdad. $0 \leq d(L_1, L) \leq d(V_1, L_1) + d(V_1, L)$.

Consideremos una recta l perpendicular a la recta X . Para cada recta l fija, sea el punto P_e intersección de l y la elipse de excentricidad e , la cual será variable. El punto P_e varía sobre la recta l cuando hacemos variar la excentricidad e (ver Figura 2.19). Para un valor de e dado, tenemos

$$\frac{d(P_e, F_1)}{d(P_e, L_1)} = e$$

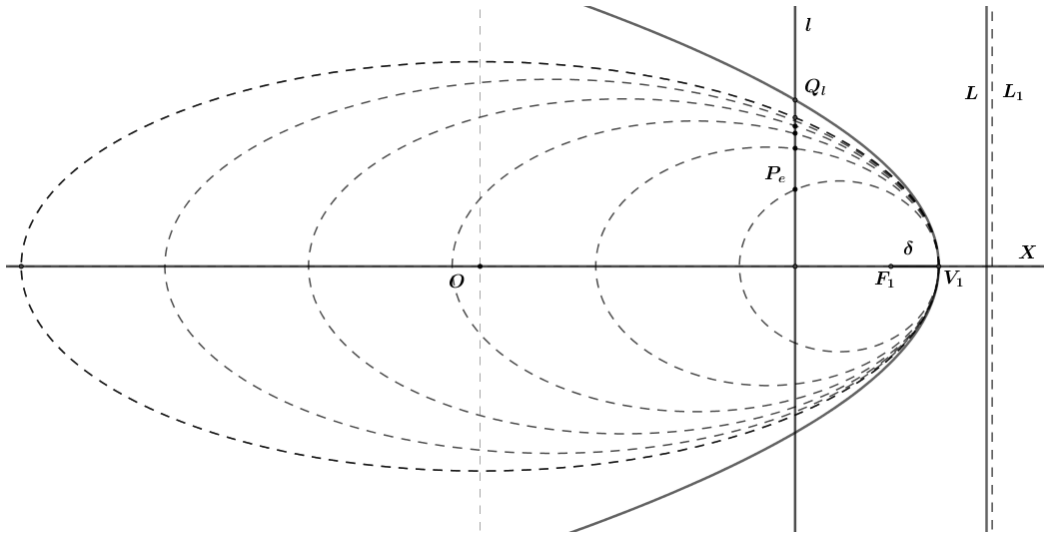


Figura 2.19. P_e varía sobre l cuando e varía.

Si para algún punto Q_l (sobre l) se tiene $P_e \rightarrow Q_l$ (es decir $d(P_e, Q_l) \rightarrow 0$) cuando $e \rightarrow 1$, obtenemos

$$\lim_{e \rightarrow 1} \frac{d(P_e, F_1)}{d(P_e, L_1)} = \frac{d(Q_l, F_1)}{d(Q_l, L)} = 1. \quad (15)$$

Este proceso, aplicado para cada recta l perpendicular a la recta X determina un punto Q_l el cual satisface la relación (15), así que para toda l , Q_l está en la parábola de foco F_1 y directriz L .

Ahora consideremos el paso al límite cuando $e \rightarrow 0$. Si mantenemos $c > 0$ fija, entonces $a = c/e \rightarrow +\infty$. Esto significa que cuando mantenemos los focos fijos y hacemos tender la excentricidad e hacia cero, la elipse se hace cada vez ‘más grande’, de manera que cuando se mira la elipse en su totalidad (digamos desde un punto lejano en el espacio) ambos focos parecen coincidir con el centro de la elipse, ‘pareciéndose’ esta última a un gran círculo (Figura 2.20), pero en términos estrictos será una elipse.

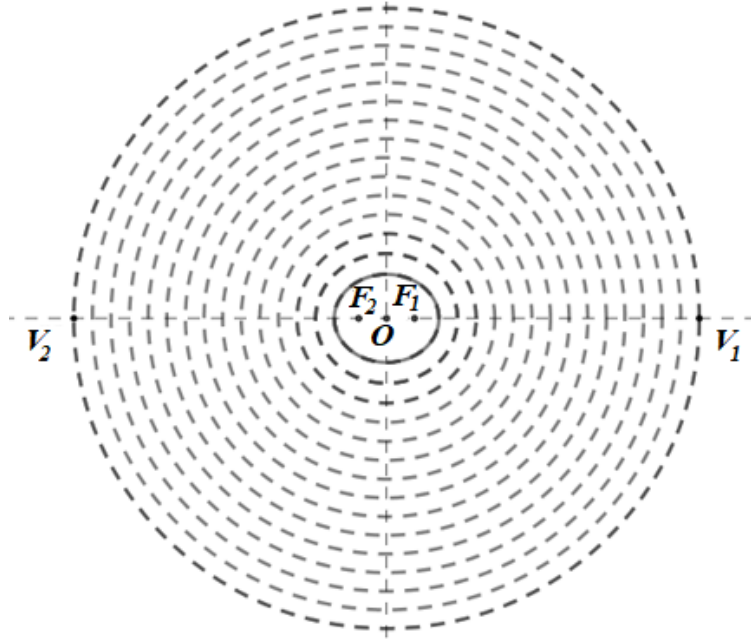


Figura 2.20. $a > 0, c > 0, c$ fijo, $a \rightarrow \infty$

Si mantenemos $a > 0$ fija, entonces $c = ae \rightarrow 0$. Esto implica $F_1 \rightarrow O$ y $F_2 \rightarrow O$, por lo que en el paso al límite, la condición $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ conduce a $d(P, O) = a$. Así que la elipse tiende a la circunferencia de centro O y radio a . La directriz L_1 se aleja de V_1 indefinidamente pues $d(V_1, L_1) = a((1 - e)/e) \rightarrow +\infty$. Este caso límite “es una circunferencia de radio a con directrices en el infinito”. La circunferencia con centro O y radio a se pudo haber obtenido desde la misma definición original, si hubiésemos permitido la desigualdad $0 \leq c < a$.

2.6.2. Casos límite de la elipse en su definición foco-directriz.

Considérese la definición foco-directriz de las cónicas.

Sean L, F y e , la directriz, foco y excentricidad respectivamente. Sea Q el pie de la perpendicular a la directriz L desde el foco F y sea $p = |\overline{QF}|$. Supóngase $0 < e < 1$; por definición, la cónica es una elipse.

En el segmento \overline{QF} hay un punto V de la elipse. En efecto, sea W un punto arbitrario sobre este segmento. Sean $u = |\overline{WF}|$ y $v = |\overline{QW}|$; entonces tenemos $u + v = p$. Para que W sea un punto sobre la elipse es necesario y suficiente que se cumpla $u/v = e$. De las dos condiciones sobre u y v obtenemos:

$$u = \frac{pe}{1+e} \quad \text{y} \quad v = \frac{p}{1+e} \quad (16)$$

Si elegimos estos valores para u y v obtenemos un punto sobre la elipse pues ciertamente de (16) obtenemos $u/v = e$. Llamaremos V a este punto. Sobre la misma semirrecta \overrightarrow{QF} , que contiene a V , también hay un segundo punto V' sobre la elipse. En efecto, sea V' un punto sobre la semirrecta \overrightarrow{QF} que no esté en el segmento \overline{QF} y denotemos por $2a$ la longitud del segmento $\overline{VV'}$. La distancia entre V' y F es entonces $2a - u$, y la distancia de V' desde L es $2a + v$, así que para que V' esté sobre la curva es necesario y suficiente que se cumpla

$$\frac{2a - u}{2a + v} = e.$$

y de las relaciones (16) obtenemos

$$a = \frac{pe}{1 - e^2}.$$

La condición anterior es necesaria para que V' sea un punto de la elipse. Esta condición también es suficiente; es decir, para este valor de a el punto V' está sobre la elipse. Los puntos V y V' son los únicos de la curva que se encuentran sobre la recta que pasa por Q y F , son puntos notables de la elipse que se llaman sus vértices. El eje mayor de la elipse es el segmento que tiene por extremos V y V' . La longitud del eje mayor es $2a = (2pe)/(1 - e^2)$ y, cuando no hay lugar a ambigüedad, también se le refiere como eje mayor. El punto medio del segmento $\overline{VV'}$, es el centro O de elipse, el cual está a una distancia $v + a = p/(1 - e^2)$ desde el punto Q , y a una distancia $c = |FO| = a - u = pe^2/(1 - e^2)$ desde el foco. Sobre el segmento OV' , también a una distancia $c = a - u = pe^2/(1 - e^2)$, existe un punto F' , el cual corresponde al segundo foco de la elipse (Figura 2.21).

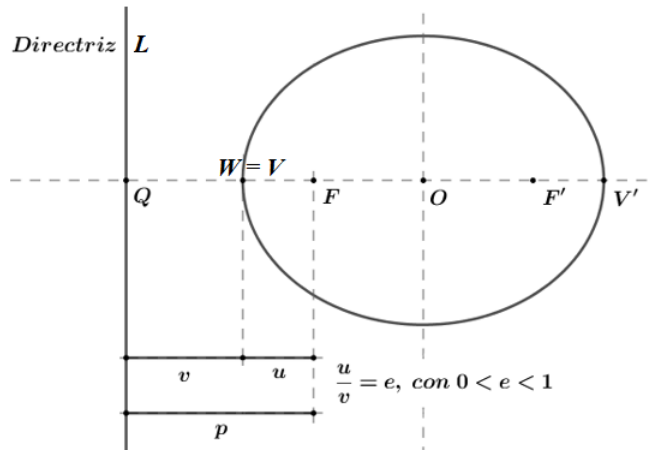


Figura 2.21. La elipse en su definición foco-diretriz, con $u/v = e$

Otro par de puntos notables B y B' de la elipse se encuentran sobre la mediatriz del eje mayor a una distancia a del foco y entonces a una distancia

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = pe/\sqrt{1 - e^2} \quad (17)$$

del centro O . Se verifica fácilmente que los puntos B y B' satisfacen la condición de la definición foco-diretriz. La razón $(b/a) = \sqrt{1 - e^2}$ nos indica qué tan alargada o que tan ‘aplastada’ es la elipse.

En lo que sigue analizaremos algunos casos límite para la elipse. Esto significa que haremos variar algunos de los elementos generales de la curva, con lo que en realidad obtendremos familias de curvas, de las cuales estudiaremos su comportamiento.

- A) Cuando $e \rightarrow 0$, de las fórmulas (16) obtenemos $u \rightarrow 0$ y $2a \rightarrow 0$, así que $V \rightarrow F$ y $V' \rightarrow F$, por lo que el caso límite de la elipse es el punto F , es decir, las elipses se colapsan en un punto (Figura 2.22). Esta conclusión se pudo haber obtenido como caso particular, si en la definición foco-diretriz se hubiese permitido el valor $e = 0$, pero una tal ampliación de la definición hubiese estropeado la armonía de la equivalencia entre la definición bifocal y la definición foco-diretriz, de la elipse, parábola e hipérbola. De cualquier manera, la discrepancia surge cuando se consideran los casos límite, no hay manera de evitar que en este acercamiento la excentricidad cero deba corresponder a un punto.

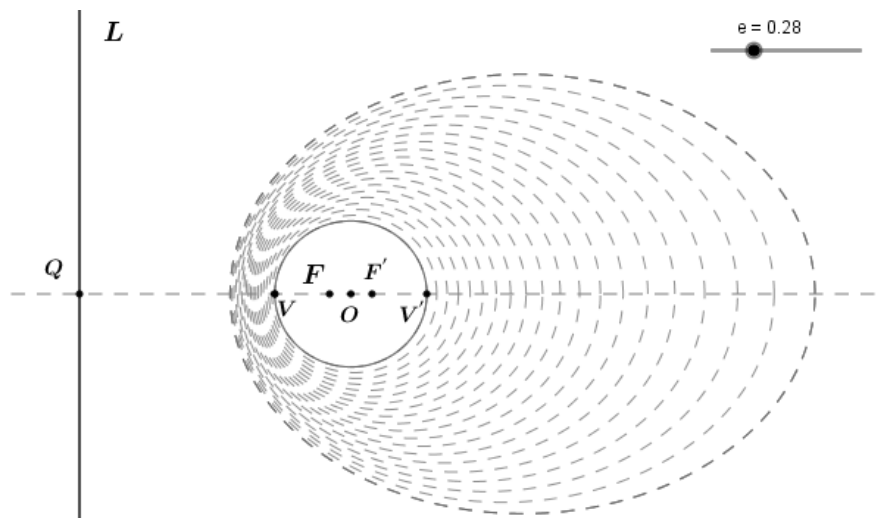


Figura 2.22. La elipse se colapsa en F cuando $e \rightarrow 0$

B) Cuando $e \rightarrow 1$, de las fórmulas (16) obtenemos $u \rightarrow p/2$ y $v \rightarrow p/2$. Además, $a \rightarrow \infty$, lo que significa que el eje mayor de la elipse tiende a infinito, es decir, las elipses crecen ilimitadamente. La curva límite es una parábola, con vértice el punto medio del segmento \overline{QF} . Si e está ‘muy cerca’ de 1, la curva es una ‘gran elipse’ que localmente (alrededor del vértice) ‘se pega’ a la parábola. Es importante notar que entre más cerca esté e de 1, las elipses serán más grandes y localmente ‘se pegarán más a la parábola’, sin embargo, cuando las curvas se miran desde lo lejos, los puntos sobre las elipses que no están cercanos al vértice V se encuentran alejados de la parábola. Esto lo podemos percibir en los extremos del eje menor y más contundentemente en los puntos alrededor del vértice variable V' (Figura 2.23).

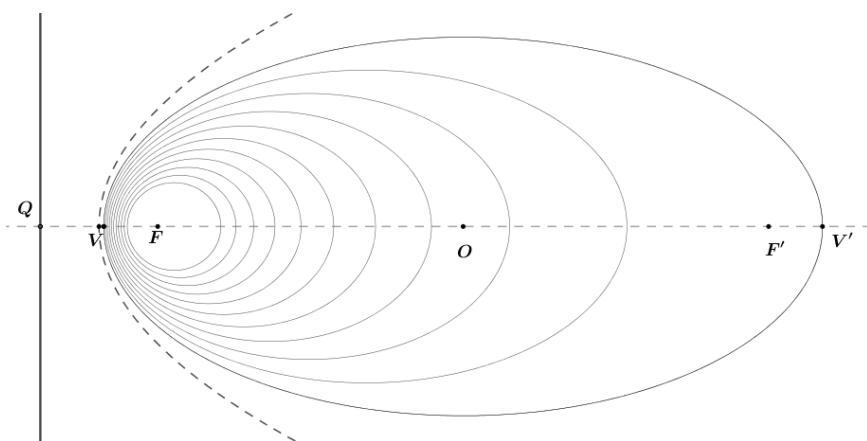


Figura 2.23. La elipse se pega ‘localmente’ a una parábola.

Un análisis más completo sobre los casos límite podemos lograrlo si identificamos algunas variables en la elipse. De inicio, tenemos tres variables independientes en una elipse que son: foco, directriz y excentricidad. Para nuestro análisis, mantendremos visible el foco, así que esta variable independiente la mantenemos fija. La directriz L estará caracterizada mediante su distancia p desde el foco, por lo que tenemos las dos variables independientes p y e . En estos términos, los casos que hemos analizado corresponden a: A) p fijo, $e \rightarrow 0$ y B) p fijo, $e \rightarrow 1$

Hay variables dependientes importantes que podemos incorporar a nuestra discusión. Estas variables podrán ser consideradas como independientes en reemplazo de una o las dos variables independientes p y e , con esto haremos más rica la discusión y observaremos fenómenos interesantes. Algunas de las variables dependientes que son muy significativas son

$$u = \frac{pe}{1+e} \quad y \quad a = \frac{pe}{1-e^2} \quad (18)$$

Tenemos entonces las variables p , e , u y a ; las dos primeras consideradas en un inicio independientes. Un tercer caso límite que, de alguna manera, completa los casos A) y B) es

C) Excentricidad e fija y, por ejemplo, $p \rightarrow +\infty$ (esto significa que la directriz se aleja hacia infinito). De la fórmula para u en las relaciones (18) obtenemos $u \rightarrow +\infty$ y $a \rightarrow +\infty$. Esto implica que el vértice V se aleja a infinito por la izquierda del foco fijo y también V' se aleja a infinito por la derecha del foco, pues su distancia desde este punto está dada por $|FV'| = 2a - u = pe/(1 - e)$. El centro O de la elipse dista desde el foco $|OF| = a - u = pe^2/(1 - e^2)$, así que también se aleja del foco hacia infinito. Entonces, cuando $p \rightarrow +\infty$ las elipses crecen en tamaño de modo que sus ejes mayores tienden a infinito y los centros se desplazan hacia infinito. Todas las elipses tienen la misma excentricidad, todas tienen el mismo aspecto, son proporcionales, pues la razón de su eje menor entre su eje mayor es una constante $b/a = \sqrt{1 - e^2}$.

Con la excentricidad e fija, también podemos hacer $p \rightarrow 0$. Este es un caso trivial, todas las elipses tienen el mismo aspecto y se colapsan en el punto F , pues $u \rightarrow 0$ y $a \rightarrow 0$. Con esto damos por agotado el análisis de casos límite cuando p y e son las variables independientes.

D) Consideremos ahora u y e como variables independientes y fijemos el valor de u . Esto implica que el vértice V está fijo. Analicemos lo que ocurre cuando $e \rightarrow 0$. De las relaciones (18) obtenemos

$$p = u \left(\frac{1+e}{e} \right) = u \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad y \quad a = \frac{u}{1-e} \quad (19)$$

De aquí obtenemos $p \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow u$ cuando $e \rightarrow 0$. Esto significa que la directriz se va a infinito (ahora como consecuencia de $e \rightarrow 0$) y $O \rightarrow F$. De las fórmulas (17) y (19) obtenemos

$$b = \frac{u(e+1)}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Por lo tanto $b \rightarrow u$, así que las elipses tienden a un círculo de radio u , con centro el foco F . El vértice V' tiende al punto diametralmente opuesto a V de este círculo.

Si ahora con u fija hacemos $e \rightarrow 1$, obtenemos $p \rightarrow 2u$, $a \rightarrow +\infty$ y $b \rightarrow +\infty$. Es un caso similar al estudiado en el apartado B), pero ahora $p \rightarrow 2u$ y no $u \rightarrow p/2$. La dinámica del comportamiento de las elipses es diferente, en ambos casos la curva límite es una parábola, pero esta convergencia es local, como se señaló en B).

Fenómenos similares ocurren cuando elegimos a y e como variables independientes, con a fija. En este caso es conveniente expresar las variables p y u (ahora dependientes) en términos de las variables a y e . De las relaciones (19) obtenemos $u = a(1-e)$. Hagamos $e \rightarrow 0$, entonces $u \rightarrow a$. El vértice V no está fijo, pero tiende a un punto cuya distancia desde el foco F es a . De (17) y (18) obtenemos $b = a\sqrt{1-e^2}$, entonces $b \rightarrow a$, por lo tanto las elipses, con ambos vértices y centro variables, tienden a un círculo con centro F . De las mismas relaciones (17) y (18) obtenemos $p = a(1-e^2)/e$, por lo que tenemos $p \rightarrow +\infty$, así que la directriz tiende a infinito. Si ahora, con a fija, hacemos $e \rightarrow 1$, obtenemos $u \rightarrow 0$ y $p \rightarrow 0$. Esto implica que $V \rightarrow F$ y la directriz tiende a la perpendicular al eje en el foco F . Como a es fija $|VV'| = 2a$. Dado que la razón del eje menor al eje mayor es $\sqrt{1-e^2}$, el eje menor tiende a cero cuando $e \rightarrow 1$. Entonces la curva límite es el segmento con extremos V y V' . Una explicación intuitiva es la siguiente: las elipses con excentricidad cercana a 1 son muy ‘aplastadas’, el eje menor es muy pequeño cuando se compara con el eje mayor, el caso extremo es un segmento.

Lo expuesto en los apartados anteriores son algunos de los varios casos límite que pueden discutirse, aquí hemos expuesto sólo algunos de los que consideramos interesante.

2.7. ¿Qué deberíamos entender por acercamiento cono-plano a las cónicas?

2.7.1. Sobre los objetivos de un acercamiento a las cónicas.

Cuando hablamos del acercamiento bifocal a las cónicas nos referimos al estudio de las secciones cónicas partiendo de las definiciones de círculo, elipse, parábola, e hipérbola como lugares geométricos. El objetivo de la Geometría Analítica es hacer una discusión de estas curvas con base en sus ecuaciones respecto a un sistema de coordenadas, ya sea cartesianas o polares, que se derivan de sus definiciones como lugares geométricos. En esta discusión se determinan elementos importantes asociadas a las curvas, por ejemplo, vértices, ejes y excentricidades que nos ayudan a comprender la forma de estas curvas. Objetivos similares tenemos para el acercamiento foco-directriz. Por cierto, en este último acercamiento está excluido el círculo. En ambos acercamientos se pretende proporcionar la mayor información posible sobre cada una de las curvas correspondientes. Sin embargo, en el que hemos llamado acercamiento cono-plano a las cónicas, generalmente el estudio de estas curvas se limita a una descripción general de su forma y se les asigna un nombre según la posición o inclinación del plano que corta al cono doble. Para que la discusión de las curvas en el acercamiento cono-plano estuviese al mismo nivel que las discusiones en los otros dos acercamientos, el análisis de las curvas debería ir más allá de una descripción superficial de ellas. A esta discusión profunda sobre las cónicas en el contexto cono-plano pertenecen los trabajos de Dandelin, quien identifica focos y directrices de las cónicas en el espacio tridimensional y que son los elementos importantes para describir las cónicas como lugares geométricos en el plano. Otra discusión que apuntan en esa misma dirección (enriquecer el acercamiento cono-plano) la presentamos a continuación. Se trata de establecer ecuaciones de las cónicas en el contexto tridimensional.

2.7.2. Ecuaciones de las cónicas en el espacio tridimensional como intersección de un cono doble y un plano.

A continuación, establecemos, sin detalles algebraicos, la ecuación general cartesiana de las curvas que se obtienen al intersecar un cono doble arbitrario con un plano arbitrario para lo cual usaremos las ecuaciones algebraicas de estas dos superficies.

2.7.2.1. Ecuaciones paramétricas de las cónicas en el espacio tridimensional

Consideremos un cono doble circular recto infinito, con ángulo en el vértice $0 < 2\gamma < \pi$. Donde γ es el ángulo formado por una generatriz y el eje del cono. Llamemos plano horizontal a cualquier plano perpendicular al eje del cono. Consideremos el plano horizontal que pasa por el vértice del cono y un plano que corta al cono el cual denotaremos por \wp . Este plano puede cortar al cono superior solamente o a ambos conos (ver Figura 2.24).

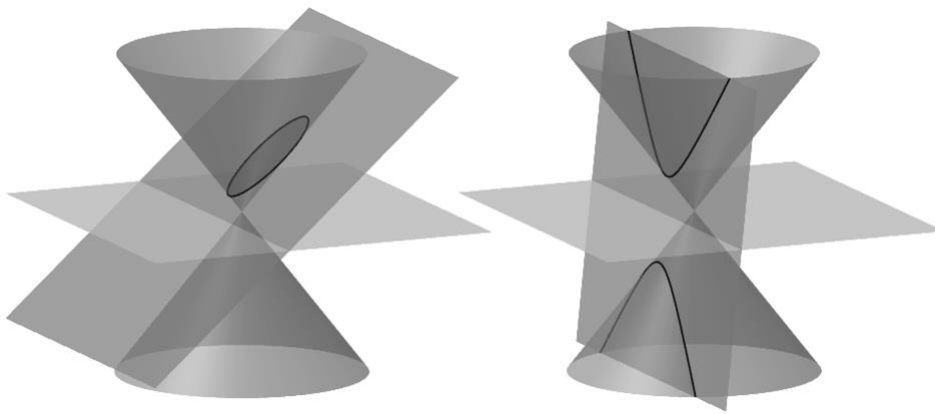


Figura 2.24. Cono doble circular recto infinito y plano inclinado.

Supongamos que \wp corta al eje del cono superior a una distancia a de su vértice. Elijamos un sistema de tres ejes cartesianos en el espacio de tal modo que el eje z coincida con el eje del cono y el origen coincida con el vértice del cono doble. Sobre el plano horizontal que pasa por el vértice del cono elijamos los ejes x, y de manera que \wp corte al plano horizontal xy en una recta paralela al eje y , a una distancia, digamos, $c > 0$ del origen, haciendo un ángulo β . El punto $(c, 0, 0)$ está sobre el semieje x positivo y el sistema cumple la regla de la mano derecha (ver Figura 2.25). El plano \wp corta al eje z en el punto $(0, 0, a)$. Entonces la ecuación de \wp es $z = (a/c)(c - x)$

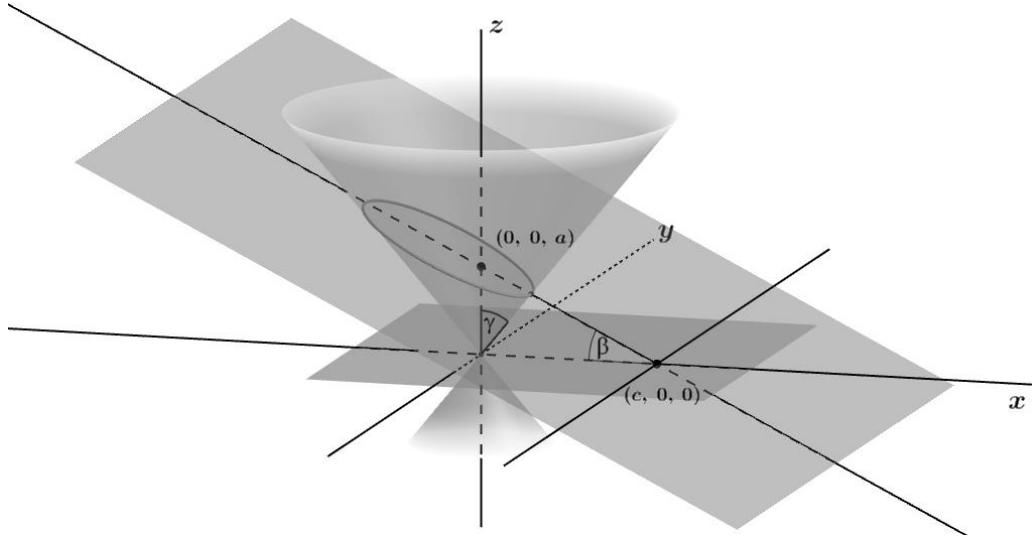


Figura 2.25. Intersección del plano inclinado con el plano horizontal xy y el eje z .

Respecto a este sistema de ejes cartesianos, el cono doble tiene por ecuación $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$, donde m es una constante positiva que corresponde a la pendiente de la generatriz $z = my$ en el plano yz . Esto significa $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cot \gamma$.

Sea P un punto de coordenadas (x, y, z) que pertenece al cono doble y a \wp ; entonces se satisfacen simultáneamente las ecuaciones (20) y (21).

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2) \quad (20)$$

$$z = (a/c)(c - x). \quad (21)$$

Por lo tanto

$$(a^2/c^2)(c - x)^2 = m^2(x^2 + y^2).$$

De aquí obtenemos

$$y^2 = \frac{a^2}{m^2 c^2} (c - x)^2 - x^2.$$

Esto implica que la terna de coordenadas (x, y, z) que corresponden a puntos que están sobre el cono doble y \wp son de la forma $\left(x, \pm \sqrt{\frac{a^2}{c^2 m^2} (c - x)^2 - x^2}, \frac{a}{c} (c - x)\right)$. Para cada valor de x

hay dos puntos

$$\left(x, \sqrt{\frac{a^2}{c^2 m^2} (c-x)^2 - x^2}, \frac{a}{c} (c-x) \right) \text{ y } \left(x, -\sqrt{\frac{a^2}{c^2 m^2} (c-x)^2 - x^2}, \frac{a}{c} (c-x) \right) \quad (22)$$

que están sobre el cono y \wp .

Ambas ternas ordenadas (22) son las ecuaciones paramétricas de la curva que resulta de la intersección del cono y \wp . El tipo de cónica depende de la inclinación de \wp y de la pendiente de la generatriz $z = my$ del cono.

Determinemos el dominio de variación del parámetro x . Sea

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a^2}{c^2 m^2} (c-x)^2 - x^2 \\ &= \frac{a^2 - c^2 m^2}{c^2 m^2} x^2 - 2 \frac{a^2}{c m^2} x + \frac{a^2}{m^2}. \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos algebraicos hagamos

$$A = \frac{a^2 - c^2 m^2}{c^2 m^2}, \quad B = 2 \frac{a^2}{c m^2} \quad \text{y} \quad C = \frac{a^2}{m^2}.$$

Entonces tenemos

$$R(x) = Ax^2 - Bx + C$$

Los valores del parámetro x para los cuales $R(x) \geq 0$ son aquellos que satisfacen

$$A \left(x - \frac{B}{2A} \right)^2 \geq \frac{B^2 - 4AC}{4A} \quad (23)$$

Tenemos tres casos: $A < 0$, $A = 0$ y $A > 0$.

Caso $A < 0$. En este caso $(a/c) < m$ o sea $a < cm$. La desigualdad (23) toma la forma

$$\left(x - \frac{B}{2A} \right)^2 \leq \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}.$$

Al extraer la raíz cuadrada obtenemos

$$\left| x - \frac{B}{2A} \right| \leq \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2|A|}, \quad (24)$$

(observe el valor absoluto $|A|$). La solución de la desigualdad (24) es un intervalo cerrado y acotado de la forma $[x_0 - r, x_0 + r]$. Después de algunas simplificaciones obtenemos

$$x_0 = \frac{B}{2A} = \frac{ca^2}{a^2 - c^2m^2} \quad (25)$$

y

$$r = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2|A|} = \frac{ac^2m}{c^2m^2 - a^2} > 0 \quad (26).$$

Así que tenemos

$$[x_0 - r, x_0 + r] = \left[\frac{ac}{a - cm}, \frac{ac}{a + cm} \right].$$

Las ecuaciones (22) corresponden a una elipse en el espacio. Una de ellas para el arco ‘superior’ y la otra para el arco ‘inferior’.

Caso $A > 0$. En este caso $(a/c) > m$ o sea $a > cm$. La desigualdad (23) toma la forma

$$\left(x - \frac{B}{2A} \right)^2 \geq \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}.$$

Es decir

$$\left| x - \frac{B}{2A} \right| \geq \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (27).$$

La solución de la desigualdad (27) es la unión de dos intervalos disjuntos de la forma

$$(-\infty, x_0 - r] \cup [x_0 + r, +\infty).$$

Como en el caso anterior, también tenemos que x_0 está dada por la ecuación (25) pero ahora r está dada por

$$r = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{ac^2m}{a^2 - c^2m^2} > 0.$$

Entonces tenemos

$$(-\infty, x_0 - r] \cup [x_0 + r, +\infty) = \left(-\infty, \frac{ac}{a + cm}\right] \cup \left[\frac{ac}{a - cm}, +\infty\right).$$

Las ecuaciones (22) corresponden a una hipérbola en el espacio.

Caso $A = 0$. En este caso $(a/c) = m$ o sea $a = cm$. La función $R(x)$ se reduce a $R(x) = -Bx + C$, así que la desigualdad $R(x) \geq 0$ se cumple si y solamente si

$$x \leq \frac{C}{B}.$$

O sea

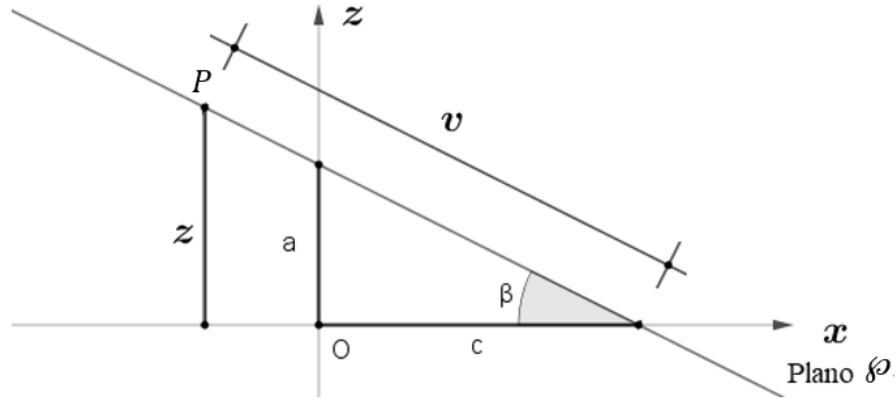
$$x \leq \frac{c}{2}.$$

Entonces, el dominio del parámetro x es el intervalo $(-\infty, c/2]$. Las ecuaciones (22) corresponden a una parábola en el espacio.

2.7.2.2. Ecuaciones cartesianas respecto un sistema de ejes en el plano que corta al cono

Ahora describamos los puntos del cono que están sobre el plano \wp , lo cual haremos mediante un par de ejes cartesianos uv que elegiremos convenientemente sobre \wp . Tomemos como eje de las abscisas u la recta que resulta de la intersección de \wp con el plano horizontal xy . Como eje de las ordenadas v elijamos la recta que resulta de la intersección de \wp con el plano horizontal xz . Sea P un punto arbitrario sobre \wp , supongamos que P tiene coordenadas (x, y, z) respecto al sistema de tres ejes cartesianos en el espacio tridimensional. Sea (u, v) el par de coordenadas de P respecto al sistema de ejes uv en \wp . Entonces, la coordenada u del punto (x, y, z) es $u = y$. La coordenada v del mismo punto es su distancia perpendicular a la

recta $x = c$. La sección transversal en el plano $y = 0$ (Figura 2.26) muestra la relación entre v , x y z .



2.26. Relación entre v , x y z .

Podemos ver que $\text{sen } \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ y entonces

$$z = v \text{ sen } \beta = v \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) \quad (28).$$

Para obtener una expresión para x igualemos las expresiones del lado derecho de las ecuaciones (21) y (28), de donde

$$x = c \left(1 - \frac{v}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) \quad (29).$$

Se tiene que la ecuación del cono es $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$. Reemplazando en esta ecuación y por u , z y x por las expresiones del lado derecho de las ecuaciones (28) y (29), respectivamente, obtenemos la ecuación cartesiana general respecto un sistema de ejes uv en el plano que corta al cono:

$$u^2 - \frac{\left(\frac{a}{m}\right)^2 - c^2}{a^2 + c^2} v^2 - \frac{2c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} v + c^2 = 0 \quad (30).$$

Un caso particular de la ecuación (30), cuando $a = 1$, $c > 0$ y $m = 1$, conduce a

$$u^2 + \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} v^2 - \frac{2c^2}{\sqrt{1 + c^2}} v + c^2 = 0,$$

expresión mostrada por Edwards y Penney (1994, pp. 736-737).

La ecuación (30) nos permite transitar de la definición de una cónica en el espacio tridimensional a su representación en coordenadas cartesianas en el plano inclinado directamente.

Para un valor fijo c , al variar el parámetro a varía la inclinación del plano inclinado. La inclinación depende de los dos parámetros a y c .

El caso de un plano horizontal se analiza por separado. Este caso no está incluido en esta ecuación pues c no existe. Cuando el plano es horizontal y $a \neq 0$ (entonces no pasa por el origen) la curva es un círculo. Cuando $a = 0$, la curva se reduce a un punto, que corresponde al vértice del cono. Un tercer caso es cuando el plano inclinado es vertical, así que no existe a . Este caso también se puede analizar por separado. Si el plano vertical tiene por ecuación $x = c$, consideremos el sistema de ejes uv sobre el plano vertical, donde el eje de las abscisas u es la recta sobre el plano xy paralela al eje y que pasa por el punto $(c, 0, 0)$ y el eje de las ordenadas v es la recta paralela al eje z que pasa por este mismo punto, el cual será el origen del sistema uv . En este sistema de ejes, la curva tiene por ecuación

$$v^2 = c^2 + u^2,$$

la cual corresponde a una hipérbola equilátera (ver Figura 2.27).

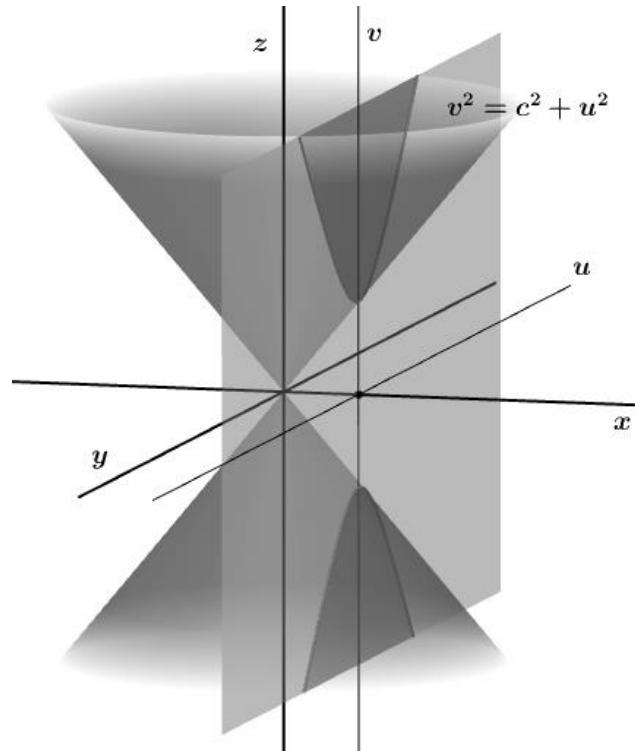


Figura 2.27. Ecuación de la hipérbola equilátera en el sistema de ejes uv .

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo damos cuenta de los referentes teóricos considerados para crear el marco teórico utilizado para el análisis e interpretación de los datos recopilados durante nuestra investigación. Al final del capítulo presentamos en tres tablas las categorías de análisis del conocimiento mostrado por los participantes.

3.1. Comprensión instrumental y comprensión relacional

Para Skemp (1976), existen dos tipos de comprensión: comprensión instrumental y comprensión relacional. La comprensión instrumental tiene que ver con el aprendizaje que se logra al darle solución a problemas matemáticos mediante procedimientos que requieren la aplicación de reglas, o fórmulas, sin necesidad de justificar su uso, sin cuestionar o comprender las razones por las que las reglas funcionan y sin establecer conexiones. Por el contrario, la comprensión relacional, que a la larga produce aprendizaje más duradero, tiene que ver con el aprendizaje en el que las reglas aplicadas son aprendidas mediante justificaciones, entendiendo por qué funcionan y cuándo son aplicables, organizando coherentemente los atributos relevantes de los conceptos matemáticos empleados y estableciendo conexiones con otros contextos. Ejemplos concretos de esto son: (1) Calcular la excentricidad de una elipse cuyo semieje mayor mide 8 unidades y la semidistancia entre los focos mide 6 unidades (comprensión instrumental) y (2) Dadas la elipse E_1 , de focos F_1 y F_2 , y la elipse E_2 , de focos F_3 y F_4 , con $F_1 \neq F_2$ y $F_3 \neq F_4$ ¿bajo qué condiciones E_1 y E_2 pueden tener la misma excentricidad? (comprensión relacional).

3.2. Mapa conceptual de la geometría analítica

Uno de los conceptos importantes introducidos por Skemp es el de mapa cognitivo, el cual para el caso de matemáticas nosotros hemos llamado Mapa Conceptual. En términos generales, este se refiere al conjunto de conceptos involucrados en un tema específico de matemáticas, su descripción y relación entre ellos. El diseño y elaboración del mapa conceptual de la Geometría analítica del bachillerato que aquí presentamos implicó el estudio y la búsqueda de las fuentes que dan cuenta de los conceptos y objetos matemáticos que se requieren en la diversidad de temas que alimentan a la Geometría analítica, lo que nos permitió armar el gran rompecabezas que es la Geometría Analítica y comprenderla en su totalidad y no sólo concebirla como una disciplina que estudia a las cónicas. La elaboración del mapa conceptual de la Geometría Analítica se desarrolló también bajo las siguientes consideraciones:

- ✓ En la geometría analítica se estudian curvas definidas en un contexto puramente geométrico (por ejemplo, como lugares geométricos) mediante representaciones analíticas, mismas que se obtienen estableciendo algún sistema de referencia; el papel que juegan los sistemas de referencia es entonces de suma importancia para la obtención de las representaciones analíticas. La sofisticación de una representación analítica de una curva definida como lugar geométrico dependerá de la elección que se haga del sistema de referencia.
- ✓ Este rol de los sistemas de referencia y la libertad, o necesidad, que tenemos para elegirlos hacen conveniente, sino es que necesario, el estudio de las coordenadas polares, ecuaciones polares y ecuaciones paramétricas, ya que en algunos casos permiten obtener una representación analítica relativamente simple.
- ✓ La conversión de las representaciones de un registro a otro, así como la comprensión de la importancia del papel que juegan las representaciones analíticas, favorece el tránsito del pensamiento analítico al pensamiento geométrico y viceversa; de ahí la inclusión en el mapa conceptual del estudio de las transformaciones entre las diferentes ecuaciones y sus gráficas.
- ✓ La circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola son curvas que se obtienen mediante la intersección de un plano con un cono doble. El análisis de estas intersecciones, mediante las esferas de Dandelin, permiten comprender cómo se concibe la excentricidad en el espacio y el importante papel que juega, junto con la directriz, en la definición de las cónicas como lugares geométricos.
- ✓ El concepto de lugar geométrico no es exclusivo de las cónicas, por lo que el estudio de otros lugares geométricos es considerado en el mapa conceptual, además, se incluye el estudio de algunas curvas mecánicas.
- ✓ El carácter propedéutico de la Geometría analítica necesariamente lleva a poner más atención en los temas que tienen esta función (concepto de pendiente, la recta tangente a una curva, las asíntotas, etcétera).
- ✓ Las aplicaciones de la geometría analítica para la solución de problemas de Ingeniería, Astronomía, Telecomunicaciones, etcétera, son consideradas en el mapa conceptual.

En la Figura 3.1 se muestra un esquema que sintetiza el mapa conceptual de la Geometría Analítica del bachillerato, que hemos establecido.

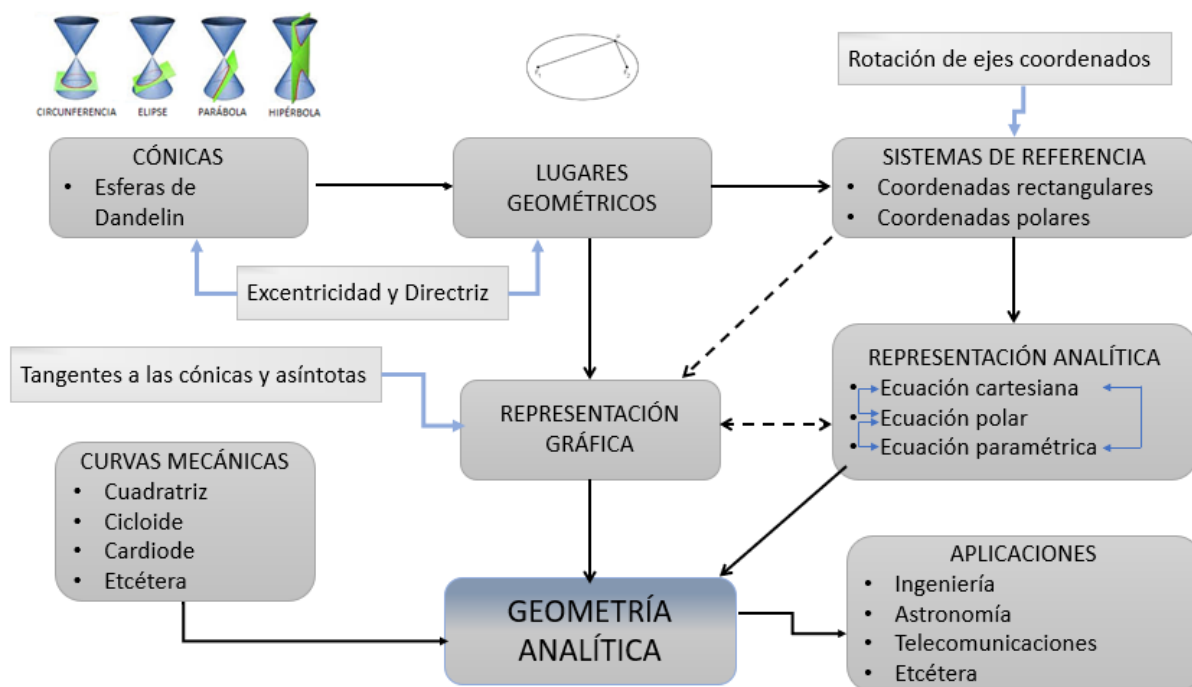


Figura 3.1. Esquema del Mapa Conceptual de la Geometría Analítica

3.3. Conocimiento matemático para la enseñanza

Anteriormente el conocimiento de los docentes se definía en términos de los cursos tomados en la universidad o de los resultados obtenidos en pruebas estándares, pero desde hace más de dos décadas se “ha analizado y abordado de manera más cualitativa, enfatizando los procesos cognitivos y la comprensión de los hechos, conceptos y principios, y las formas en que están conectados y organizados” (Even y Tirosh, 1995, p. 2). Diversas investigaciones recientes (por ejemplo, Baumert et al., 2010; Blömeke y Delaney, 2012), han identificado dos componentes principales del conocimiento de los docentes que les permite desempeñar su función de manera efectiva: conocimiento de contenido (CK, por sus siglas en inglés) y conocimiento de contenido pedagógico (PCK, por sus siglas en inglés). El CK se puede describir como una comprensión profunda y exhaustiva del tema que se debe enseñar e incluye información como conceptos, reglas y procedimientos específicos. El PCK se refiere al conocimiento de la materia con el propósito de enseñar y tiene que ver con los procesos involucrados en la enseñanza.

Ball, Thames y Phelps (2008), basándose en el trabajo de Shulman (1986), crearon el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT, por sus siglas en inglés)

Según sus autores, el MKT es el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas, además de que permite explorar el conocimiento del profesor, al mismo tiempo que orienta su formación. Los dominios del MKT (ver Figura 3.2) se componen de 3 aspectos relacionados con el conocimiento de la materia y 3 aspectos relacionados con el conocimiento de contenido pedagógico.

Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza

CONOCIMIENTO DE LA MATERIA CONOCIMIENTO DE CONTENIDO PEDAGÓGICO

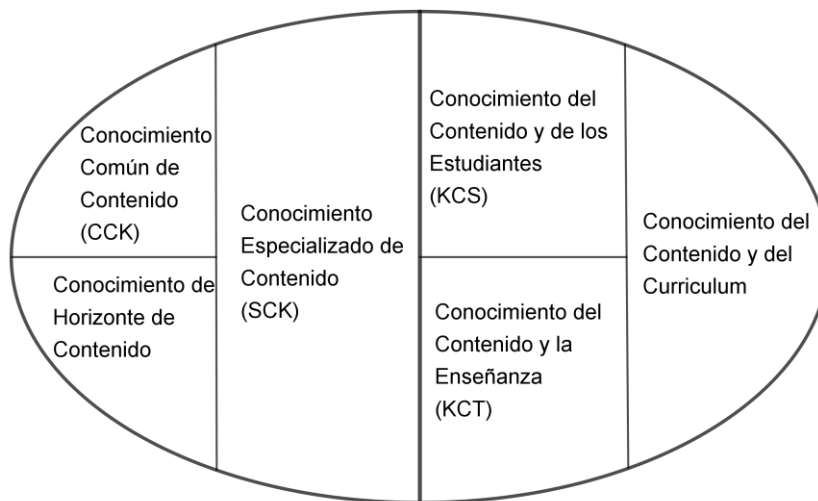


Figura 3.2. Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al. 2008).

De los seis dominios, el Conocimiento Especializado del Contenido (Specialized Content Knowledge, SCK, por sus siglas en inglés) es un prerrequisito para poder enseñar matemáticas, es indiscutible que el profesor de matemáticas debe conocer el tema que pretende enseñar, la razón es simple: ¿cómo el profesor ayuda a los estudiantes a aprender el contenido si el mismo desconoce el tema? Según Steele, Hillen y Smith (2013) “más allá del CCK, los profesores también necesitan saber cómo representar el contenido matemático de manera que apoyen el aprendizaje de ideas matemáticas por parte de los alumnos” (p. 452).

El conocimiento común de contenido (Common Content Knowledge, CCK, por sus siglas en inglés) y el SCK, subdominios del MKT, fueron considerados para nuestra propuesta de marco teórico, por lo que a continuación se describen:

CCK

Es el conocimiento que se espera que posea todo adulto o profesional con conocimientos básicos de matemáticas. El término común no significa que todos tengan ese conocimiento, sino más bien que se trata de un conocimiento utilizado también en ambientes distintos a la enseñanza. Algunos aspectos relacionados con el CCK son: (a) Calcular una respuesta; (b) Resolver problemas matemáticos empleando fórmulas sin darse cuenta si son o no aplicables; (c) Enunciar definiciones muy limitadas, sin explicación.

SCK

Es específico al trabajo de enseñar, es decir, es el conocimiento matemático deseable para la enseñanza por lo que no suele ser necesario para fines distintos. El término especializado se refiere al conocimiento profundo del contenido matemático, no al conocimiento de temas avanzados de matemáticas. Algunos aspectos relacionados con el SCK son: a) Conocer con profundidad los conceptos fundamentales de temas matemáticos; b) Justificar el uso de las reglas aplicadas, entendiendo por qué funcionan y cuándo son aplicables; c) Desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más sencillos y volverlos comprensibles para sus estudiantes; (d) Establecer conexiones entre diferentes sistemas de representación

3.4. Concepciones y conocimiento

Para nuestro trabajo entendemos el término concepciones en el sentido de Moreno y Giménez (2003), de referirse a “organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias [sobre las disciplinas de matemáticas], etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan” (p. 267).

De manera general, podemos decir que las concepciones tienen las siguientes características:

- forman parte del conocimiento,

- son producto del razonamiento personal,
- condicionan nuestra toma de decisiones,
- condicionan la práctica docente (muchas de las veces lejos de las formas apropiadas),
- cambian a medida que nos encontramos con nuevos estímulos,
- y se construyen a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo.

En nuestra investigación hemos optado por el término concepciones de los profesores de matemáticas respecto a la excentricidad para referirnos a toda idea propia, cierta o errónea, que los profesores exhiban relacionada con el concepto de excentricidad.

Respeto al conocimiento, consideramos que este “se refiere a una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que posee el ser humano” (Ponte, 1994, p. 169). Para la presente investigación optamos por el término conocimiento de los profesores de matemáticas respecto a la excentricidad para referirnos al conocimiento que de la excentricidad, dentro del ámbito de la Geometría Analítica, exhiban los profesores.

3.5. Marco teórico para describir los conocimientos y concepciones del profesor

Con base en las aportaciones teóricas expuestas en los apartados anteriores, desarrollamos un marco al que hemos llamado *Conocimientos Matemáticos para la Enseñanza de la Excentricidad (CMEE)*. El marco considera aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas desde los diferentes acercamientos que hemos expuesto y los clasifica en tres subdominios. A saber, dos subdominios, CCK y SCK, se retoman del modelo MKT, por lo que les hemos asignados los mismos nombres. El tercer subdominio, al que hemos llamado Conocimiento Matemático Instrumental (CMI), involucra resolver cuestiones de excentricidad empleando una comprensión instrumental (definida por Skemp, 1976); algunos aspectos relacionados a este subdominio son: (a) sustitución directa en una fórmula; (b) desarrollar procedimientos mecánicos. Cada uno de los tres subdominios, conjugados con aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas correspondientes a cada uno de los acercamientos expuestos, se constituyeron en las tres categorías de análisis del conocimiento mostrado por los docente (ver Tabla 3.1, Tabla 3.2 y Tabla 3.3). En la Tabla 3.1 hemos listado aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas considerados CCK

correspondientes a los AB y AFD, pues los aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas correspondientes al ACP no los consideramos CCK. En la Tabla 3.2 hemos listado aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas considerados SCK y los hemos agrupado en su correspondiente acercamiento a las cónicas (AB, AFD y AC). Por último, en la Tabla 3.3 listamos las expresiones algebraicas que se emplean para resolver cuestiones de excentricidad empleando una comprensión instrumental en los AB, AFD y APC. La codificación utilizada está en relación con los subdominios del marco y con el acercamiento a las cónicas desde el que surge determinado aspecto del dominio del tema excentricidad de las cónicas, por ejemplo, el código SCK-ACP implica que se trata de un conocimiento especializado de contenido (SCK) relacionado con el acercamiento cono-plano (ACP).

Tabla 3.1. Categorías de análisis para el CCK

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
	1) La excentricidad se define como el cociente $e = c/a$, donde c es la semidistancia entre los focos y a es la semidistancia entre los vértices.	CCK-AB-1
	2) Para la elipse: $0 < e < 1$.	CCK-AB-2
	3) Para la hipérbola: $e > 1$	CCK-AB-3
	4) La forma de la elipse va desde muy redonda hasta muy alargada.	CCK-AB-4
A B	5) La circunferencia es un caso especial de la elipse cuya excentricidad es cero.	CCK-AB-5
	6) Las ramas de la hipérbola van desde muy cerradas hasta muy abiertas.	CCK-AB-6
	7) En toda elipse: $a > b$ y c , siendo: a la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor y c la semidistancia entre los focos.	CCK-AB-7
	8) En toda hipérbola: $c > a$ y b , siendo: c la semidistancia entre los focos, a la longitud del semieje transversal y b la longitud del semieje conjugado.	CCK-AB-8
A F D	1) La excentricidad se define como una constante positiva e que resulta de la razón PF/PL (la distancia de P desde un punto fijo F , llamado foco, a la distancia de P desde una recta L , llamada directriz, que no contiene F).	CCK-AFD-1
	2) Si $0 < e < 1$, la curva es una elipse.	CCK-AFD-2
	3) Si $e = 1$, la curva es una parábola.	CCK-AFD-3
	4) Si $e > 1$, la curva es una hipérbola.	CCK-AFD-4

Nota. A = Acercamiento, AB = Acercamiento Bifocal, AFD = Acercamiento Foco-Directriz

Tabla 3.2. Categorías de análisis para el SCK

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
Para la elipse:		
	1) Si mantenemos $c > 0$ fija y $e \rightarrow 0$. Entonces $a = c/e \rightarrow \infty$. Esto implica que la distancia entre los vértices es cada vez más grande, por lo que la elipse cada vez es más grande, de modo que ambos focos parecieran coincidir en el centro de una gran elipse, ‘pareciéndose’ esta última a una gran circunferencia. ⁵	SCK-AB-1
	2) Si mantenemos $a > 0$ fija y $e \rightarrow 0$. Entonces $c = ae \rightarrow 0$. Implica que $F_1 \rightarrow 0$ y $F_2 \rightarrow 0$, por lo que en el límite, la condición $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ conduce a $d(P, C) = a$. Así que la elipse tiende a la circunferencia de centro C y radio a .	SCK-AB-2
	3) Si mantenemos $a > 0$ fija, tenemos que $c = ae \rightarrow a$ cuando $e \rightarrow 1$. Esto implica que $F_1 \rightarrow V_1$ y $F_2 \rightarrow V_2$, por lo que en el límite, los puntos P que satisfacen la condición $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ son los del segmento de recta $\overline{V_1V_2}$. Así que la elipse tiende a un segmento de recta.	SCK-AB-3
	4) Si mantenemos $c > 0$ fija, tenemos que $a = c/e \rightarrow c$ cuando $e \rightarrow 1$. Esto implica que $V_1 \rightarrow F_1$ y $V_2 \rightarrow F_2$, por lo que en el límite, los puntos P que satisfacen la condición $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ son los del segmento de recta $\overline{F_1F_2}$. Así que la elipse tiende a un segmento de recta.	SCK-AB-4
	5) Se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, de manera que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, y podemos definir $e = c/a$ como $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$.	SCK-AB-5
A B	6) Si $b/a \rightarrow 1$, la elipse tiende a la circunferencia de radio a , o radio b , según b tienda a a o viceversa. Y dado que $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, entonces $e \rightarrow 0$.	SCK-AB-6
	7) Si $b/a \rightarrow 0$, la elipse tiende al segmento de extremos los vértices, y como $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, entonces $e \rightarrow 1$.	SCK-AB-7
	8) A mayor razón b/a , menor e . A menor razón b/a , mayor e .	SCK-AB-8
	9) A mayor razón b/a , mayor redondez de la elipse. A menor razón b/a , menor redondez de la elipse.	SCK-AB-9
	10) A menor e , mayor redondez de la elipse. A mayor e menor redondez de la elipse.	SCK-AB-10
	11) En la ecuación canónica de la elipse: En el denominador del término en x^2 aparece el cuadrado del semieje horizontal. En el denominador del término en y^2 aparece el cuadrado del semieje vertical.	SCK-AB-11
	12) La elipse es horizontal si el mayor de los denominadores es el del término en x^2 . La elipse es vertical si el mayor de los denominadores es el del término en y^2 .	SCK-AB-12
Para la hipérbola:		
	13) Si mantenemos $c > 0$ fija y $e \rightarrow 1$, entonces $a = c/e \rightarrow c$. Esto implica que el eje transversal y la distancia focal tienden a ser iguales, por lo que las ramas de la hipérbola son cada vez más cerradas. En el paso al límite, la hipérbola conduce a dos rayos disjuntos con extremos los vértices.	SCK-AB-13
	14) Se cumple $c^2 = a^2 + b^2$, de manera que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y podemos definir $e = c/a$ como $e = \sqrt{1 + (b/a)^2}$.	SCK-AB-14

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
	15) Si $b/a \rightarrow 0$, como $e = \sqrt{1 + (b/a)^2}$, entonces $e \rightarrow 1$. Si $b/a \rightarrow \infty$, como $e = \sqrt{1 + (b/a)^2}$, entonces $e \rightarrow \infty$.	SCK-AB-15
	16) A menor razón b/a , menor abertura de sus ramas. A mayor razón b/a , mayor abertura de sus ramas.	SCK-AB-16
	17) A menor razón b/a , menor e . A mayor razón b/a , mayor e .	SCK-AB-17
	18) A menor e , menor abertura de sus ramas. A mayor e , mayor abertura de sus ramas.	SCK-AB-18
	19) A mayor e , mayor abertura entre sus asíntotas. A menor e , menor abertura entre sus asíntotas.	SCK-AB-19
	20) Las hipérbolas alojadas entre asíntotas con la misma abertura tienen la misma excentricidad.	SCK-AB-20
	21) El denominador del término positivo del primer miembro de la ecuación canónica de la hipérbola corresponde a a^2 . El denominador del término negativo del primer miembro de su ecuación canónica corresponde a b^2 .	SCK-AB-21
	22) La hipérbola es horizontal si en su ecuación canónica el término en x^2 es positivo y el término en y^2 es negativo. La hipérbola es vertical si en su ecuación canónica el término en y^2 es positivo y el término en x^2 es negativo.	SCK-AB-22
	23) Para hipérbolas de igual excentricidad: A menor a , mayor picudez de la forma de la hipérbola en la cercanía a su vértice. A mayor a , menor picudez de la forma de la hipérbola en la cercanía a su vértice.	SCK-AB-23
	24) Para hipérbolas de diferente excentricidad y mismo semieje transversal: A menor e , mayor picudez de la forma de la hipérbola en la cercanía a su vértice. A mayor e , menor picudez de la forma de la hipérbola en la cercanía a su vértice.	SCK-AB-24
A F D	1) En la elipse: Si $e \rightarrow 0$, $PF \rightarrow 0$ y dado que el foco es fijo, entonces la curva límite es el punto F .	SCK-AFD-1
	2) En la elipse: Si $e \rightarrow 1$, entonces PF y PL tienden a ser iguales, por lo que la curva límite es una parábola.	SCK-AFD-2
	3) En la hipérbola: Si $e \rightarrow 1$, entonces PF y PL tienden a ser iguales, por lo que la curva límite es una parábola.	SCK-AFD-3
A C P	1) $e = 0$ no está permitido pues $e > 0$ garantiza la existencia de la directriz.	SCK-ACP-1
	2) La excentricidad se define como $e = \sin \alpha / \sin \beta$.	SCK-ACP-2
	3) Las elipses correspondientes a planos paralelos que cortan a un mismo cono tienen el mismo cociente b/a , entonces tienen también la misma excentricidad.	SCK-ACP-3
	4) Si el plano inclinado tiende a ser perpendicular al eje del cono, entonces las elipses tienden a una circunferencia y $e \rightarrow 0$.	SCK-ACP-4
	5) Si el plano inclinado tiende a ser paralelo a una generatriz del cono, entonces las elipses tienden a una parábola y $e \rightarrow 1$.	SCK-ACP-5
	6) Si el plano inclinado tiende a ser tangente al cono en una generatriz, entonces las elipses tienden a un segmento y $e \rightarrow 1$.	SCK-ACP-6
	7) Si el plano inclinado tiende a ser paralelo a una generatriz del cono, entonces las hipérbolas tienden a una parábola y $e \rightarrow 1$.	SCK-ACP-7
	8) Si el plano inclinado tiende a ser tangente al cono en una generatriz, entonces las hipérbolas tienden a dos rayos y $e \rightarrow 1$.	SCK-ACP-8

Nota. A = Acercamiento, AB = Acercamiento Bifocal; AFD = Acercamiento Foco-Directriz;

ACP = Acercamiento Cono-Plano.

Tabla 3.3. Categorías de análisis para el CMI.

A	Aspectos del dominio del tema excentricidad de las cónicas	Codificación
	1) $e = c/a$.	CMI-AB-1
	2) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.	CMI-AB-2
	3) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	CMI-AB-3
	4) $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$	CMI-AB-4
A B	5) $e = \sqrt{1 + (b/a)^2}$	CMI-AB-5
	6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	CMI-AB-6
	7) $x^2 = 4py$, $y^2 = 4px$ y demás ecuaciones de la parábola	CMI-AB-7
	8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	CMI-AB-8
A F D	1) $e = PF/PL$	CMI-AFD-1
A C P	1) $e = \text{sen } \alpha / \text{sen } \beta$.	CMI-ACP-1

Nota. A = Acercamiento; AB = Acercamiento Bifocal; AFD = Acercamiento Foco-Directriz;

ACP = Acercamiento Cono-Plano.

CAPÍTULO 4. ETAPA DIAGNÓSTICA

En este capítulo exponemos la metodología con la que llevamos a cabo nuestra investigación: presentamos el tipo de estudio, los participantes, los instrumentos de evaluación y la manera en que se recolectaron los datos. También, mostramos el análisis de nuestros datos, la discusión de resultados y exhibimos las conclusiones que dan respuesta a nuestra segunda pregunta de investigación y a sus preguntas auxiliares. Finalizamos el capítulo exponiendo nuestras consideraciones en relación con los resultados obtenidos.

4.1. Metodología

4.1.1. Tipo de estudio

La investigación es de carácter cualitativo, basada en estudio de caso con siete profesores en servicio que imparten Geometría analítica en el bachillerato de una universidad pública, en la República Mexicana.

4.1.2. Participantes

No se utilizaron criterios específicos en la selección de los siete maestros participantes, sólo se tomó en cuenta que fueran profesores en servicio con más de tres años de experiencia impartiendo clases de Geometría analítica. El perfil profesional de los participantes se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Perfil profesional de los participantes

Perfil profesional de los participantes	
Profesor 1	Lic. en Matemáticas
Profesor 2	Lic. en Administración Pública
Profesor 3	Lic. en Matemáticas
Profesor 4	Lic. en Matemáticas
Profesor 5	Ingeniero Agrónomo
Profesor 6	Lic. en Matemáticas
Profesor 7	Ingeniero Civil

4.1.3. Instrumentos de evaluación

Para la obtención de datos se utilizó un cuestionario escrito al que llamamos Cuestionario de Diagnóstico 1 y entrevistas no estructuradas.

4.1.3.1. El Cuestionario de Diagnóstico 1

Indaga acerca de los conocimientos y concepciones matemáticas que los participantes tienen respecto a la excentricidad de las cónicas. Para su diseño se tomó en cuenta lo expuesto por los autores de los libros de texto analizados referente a la excentricidad de las cónicas, las relaciones entre el valor de la excentricidad y la forma de las curvas, así como las ideas de Skemp relativas a la comprensión instrumental y comprensión relacional. El cuestionario de diagnóstico 1 se aplicó de manera presencial. A continuación, se describen cada una de las 12 preguntas que lo conforman y sus respectivos objetivos.

Preguntas y objetivos

1. A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la elipse. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la redondez de la elipse?

Objetivo: Averiguar si el profesor conoce la correspondencia entre diferentes valores de excentricidad y diferentes formas de la elipse. Interesa particularmente observar cómo los profesores establecen esa relación.

2. Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 4.1 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”. En cada gráfica los semiejes están a la misma escala.

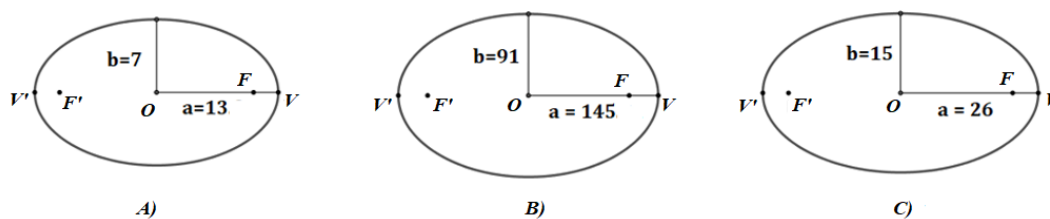


Figura 4.1. Semiejes de elipses

Objetivo: Investigar si los profesores, para ordenar las gráficas de las elipses, relacionan la redondez de la elipse con el cociente de los ejes b/a , o si calculan excentricidades y las asocian con la redondez.

3. Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 4.2 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”.

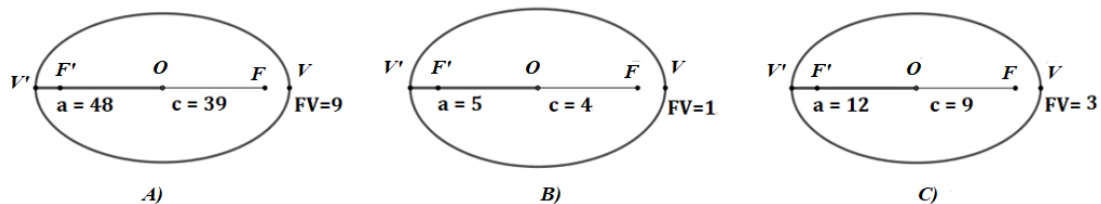


Figura 4.2. Semieje mayor y semidistancia entre los focos

Objetivo: Investigar si los profesores, para ordenar las gráficas de las elipses, relacionan la redondez de la elipse con el valor del cociente c/a , o si de alguna manera consideran el valor de FV .

4. A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la hipérbola. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la abertura de las ramas de la hipérbola?

Objetivo: Averiguar si el profesor conoce la correspondencia entre diferentes valores de excentricidad y diferentes formas de la hipérbola. Interesa particularmente observar cómo los profesores establecen esa relación.

5. En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y b al semieje conjugado de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.

a) $a = 2, b = 3$

b) $a = 4, b = 7$

c) $a = 8, b = 5$

Objetivo: Investigar si los profesores relacionan la abertura de las ramas de la hipérbola con el cociente de los ejes b/a (el cual nos da información sobre las asíntotas de la hipérbola que limitan la abertura de sus ramas); si calculan primeramente el valor de la excentricidad de cada hipérbola y la relacionan con la abertura de sus ramas; o si únicamente calculan los valores de la excentricidad.

6. En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y c a la semidistancia entre los focos de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.

a) $a = 4, c = 9$

b) $a = 2, c = 5$

c) $a = 3, c = 6$

Objetivo: Averiguar si para ordenar los incisos los profesores relacionan correctamente la abertura de las ramas de la hipérbola con la excentricidad, calculada a partir de c y a , o si sólo se limitan a calcular los valores de la excentricidad.

7. Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 4.3, de acuerdo con los valores de sus excentricidades (de menor a mayor excentricidad). Las escalas de los ejes horizontal y vertical son iguales.

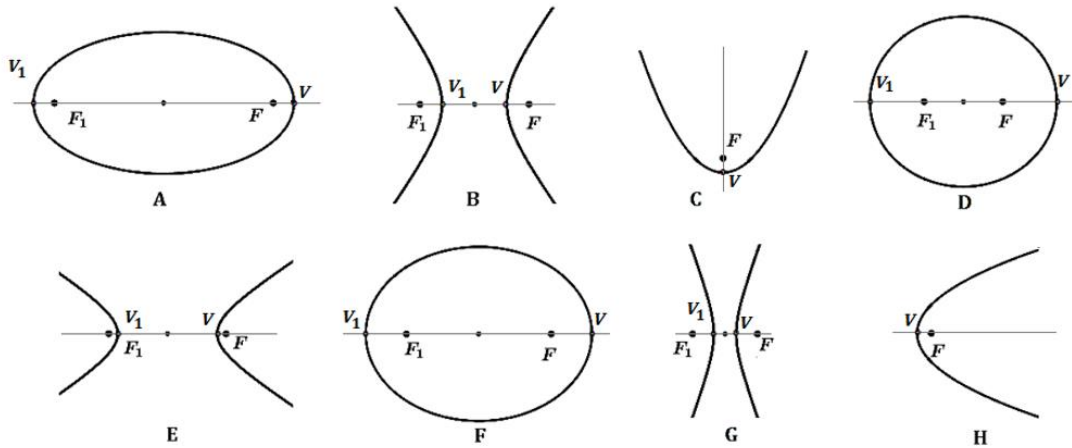


Figura 4.3. Excentricidad de cónicas

Objetivos: 1) Averiguar si el profesor ordena las gráficas por grupos, considerando el rango de valores permisibles de excentricidad para cada tipo de cónica. 2) Averiguar si el profesor ordena las gráficas estableciendo la correspondencia que hay entre el orden de magnitud de excentricidad y la forma de las cónicas. 3) Averiguar si el profesor ordena las cónicas tomando en cuenta la posición de focos y vértices para razonar respecto a la comparación de cocientes c/a .

8. Ordene las ecuaciones de la Figura 4.4 según los valores de las excentricidades de las cónicas que representan (de menor a mayor excentricidad).

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 & b) y^2 = 8(x - 4) & c) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1 \\
 d) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1 & e) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 & f) y^2 = 9(x - 4)
 \end{array}$$

Figura 4.4. Ecuaciones de cónicas

Objetivo: Averiguar si el profesor relaciona el cociente de los ejes b/a para ordenar las ecuaciones de las elipses e hipérbolas, o si para ordenarlas recurre primero al cálculo de las excentricidades.

9. En la Figura 4.5 se muestran, a una misma escala, las gráficas de tres hipérbolas con sus respectivas asíntotas. Ordene las hipérbolas de acuerdo a su excentricidad, de menor a mayor excentricidad.

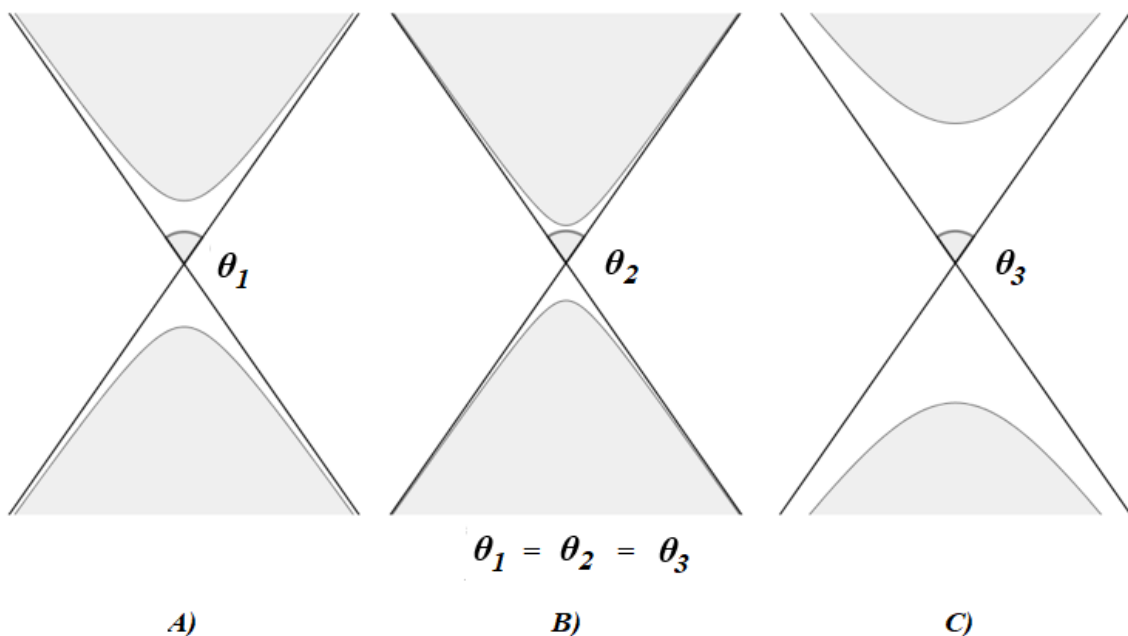


Figura 4.5. Hipérbolas y asíntotas

Objetivo: Averiguar si el profesor ordena las hipérbolas apoyándose en la forma que tienen alrededor del vértice, en la cercanía al centro de la hipérbola, o si considera el ángulo igual entre las asíntotas de las hipérbolas.

10. En la definición de excentricidad $e = d(F,P)/d(F,L)$, donde F , P y L son respectivamente un foco, un punto y la directriz de la cónica ¿a qué lugar geométrico corresponde $e = 0$?

Objetivo: Averiguar si el profesor sabe que en esta definición $e = 0$ corresponde a un punto.

11. En una elipse a , b y c corresponden al semieje mayor, semieje menor y semidistancia entre los focos, respectivamente.
- Relacione a , b y c con 3, 4 y 5 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a elipses.
 - Relacione a , b y c con 4, 5 y 6 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a elipses.

Objetivo: Averiguar si el profesor sabe que en toda elipse $0 < c < a$, $0 < b < a$ y se cumple la terna pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$.

12. En una hipérbola a , b y c corresponden al semieje transversal, semieje conjugado y semidistancia entre los focos, respectivamente.

A) Relacione a , b y c con 3, 4 y 5 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.

B) Relacione a , b y c con 4, 5 y 6 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.

Objetivo: Averiguar si el profesor sabe que en toda hipérbola $0 < a < c$, $0 < b < c$ y se cumple la relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$.

4.1.3.2. Entrevistas no estructuradas

Se aplicaron a algunos participantes con la finalidad es profundizar en la justificación de algunas de sus respuestas y para indagar respecto a sus concepciones.

4.1.4. Recolección de datos

4.1.4.1. Del cuestionario de diagnóstico 1

La obtención de datos se realizó en las siguientes etapas.

Etapas previas

- Se explicó el objetivo de la aplicación del cuestionario y se describió de manera general su contenido.
- Se comentó a los profesores que su participación era voluntaria y que sus respuestas serían anónimas, confidenciales y sólo serían utilizadas para los propósitos de la investigación doctoral.
- No se estableció un tiempo límite para responder el cuestionario.
- Se estableció que el cuestionario sería contestado de manera individual, de la manera más honesta posible, de forma clara y sin borrar ningún procedimiento realizado.
- Se pidió a las participantes que si tenían dudas con la comprensión de alguna pregunta levantarán la mano para ir a su lugar y explicarles con detalle la idea de la pregunta.

Durante la aplicación.

- El cuestionario fue aplicado por el investigador en el centro de trabajo de los profesores participantes, cabe resaltar que los participantes son profesores de diferentes preparatorias ubicadas en ciudades diferentes.
- No fue requerida ninguna explicación por parte del investigador.

Etapa final.

- Se recogieron los cuestionarios y se mencionó que a la brevedad posible se les presentarían los resultados obtenidos.
- Se les agradeció su participación, se les pidió su apoyo para la etapa de las entrevistas y, en caso de ser necesaria, su participación para el desarrollo de actividades orientadas a fortalecer su conocimiento matemático.

Los datos obtenidos se analizaron con nuestro marco teórico propuesto y sus resultados sirvieron para diseñar actividades con las que interactuaron los participantes.

4.1.4.2. De las entrevistas no estructuradas

Las entrevistas se realizaron en un aula escolar habilitada para tal fin, fueron personales y registradas en la libreta del investigador.

En el apartado siguiente se muestra el análisis de los datos obtenidos con los instrumentos de evaluación utilizados.

4.2. Análisis de datos y discusión de resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los datos y la discusión de los resultados iniciales a partir de identificar los conocimientos y concepciones presentes en los procesos matemáticos que los profesores desarrollaron al responder las preguntas del cuestionario de diagnóstico 1. En el Apéndice A se encuentra el cuestionario que se aplicó a los participantes.

4.2.1. Del Cuestionario de Diagnóstico 1

Se analizaron las respuestas dadas por los participantes a cada una de las preguntas. Para el análisis de los datos se utilizó el marco *Conocimientos Matemáticos para la enseñanza de la excentricidad*.

Pregunta 1

A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la elipse. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la redondez de la elipse?

Los profesores usaron expresiones como “ensanchamiento”, “anchura” o “achatamiento” para referirse a la forma de la elipse para valores diversos de la excentricidad (CCK-AB-4), por ejemplo, uno de ellos comenta: “la elipse es más ancha, o menos ancha, dependiendo del valor de su excentricidad”. Los participantes no consiguen explicar la correspondencia entre diferentes valores de excentricidad y diferentes formas de la elipse (SCK-AB-10), lo que da evidencia de que desconocen cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la redondez de la elipse.

Pregunta 2

Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 4.6 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”. En cada gráfica los semiejes están a la misma escala.

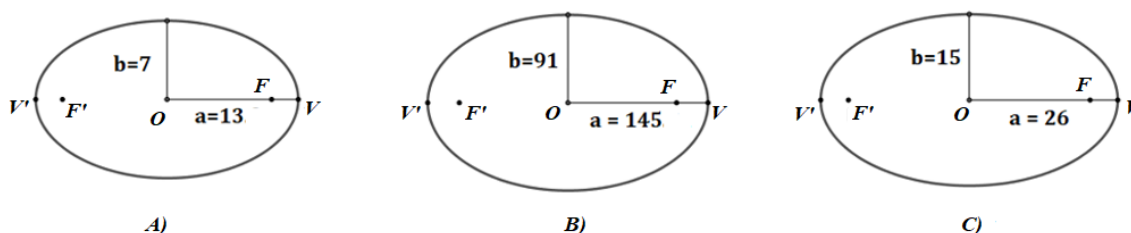


Figura 4.6. Semiejes de elipse

Dos profesores calcularon la excentricidad de las elipses y considerando la relación entre el orden de magnitud de excentricidad y la redondez de la elipse (SCK-AB-10), ordenaron las gráficas de las elipses. Para calcular las excentricidades estos dos profesores obtuvieron el valor de c usando la expresión $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (CMI-AB-2) y enseguida calcularon la excentricidad con $e = c/a$ (CMI-AB-1). Los otros cinco profesores ordenaron las elipses, de manera incorrecta, sin mostrar operaciones realizadas y sin justificar en que se basaron para ordenarlas.

Es de destacar que ninguno de los siete profesores relacionó el cociente de los semiejes b/a con la redondez de la elipse (SCK-AB-9). Incluso, los profesores que calcularon excentricidades no usaron la fórmula expresada en términos de los semiejes.

Pregunta 3

Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 4.7 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”.

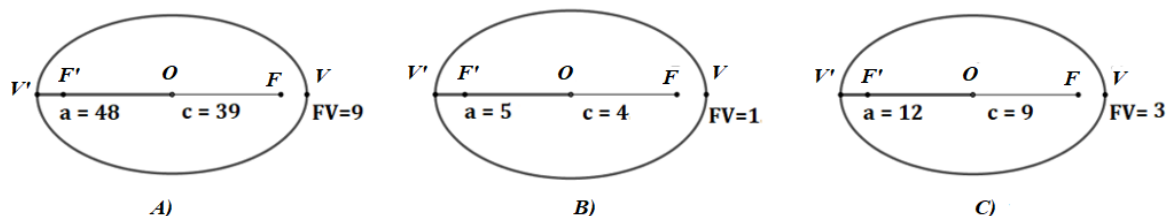


Figura 4.7. Semieje mayor y semidistancia entre los focos.

Los 7 profesores calcularon la excentricidad usando $e = c/a$ (CMI-AB-1), pero sólo dos de ellos, los mismos que contestaron correctamente la pregunta dos, asociaron correctamente el valor de la excentricidad con la redondez de la elipse (SCK-AB-10). Al calcular la excentricidad de las elipses con la expresión $e = c/a$, los 7 profesores exhiben conocimiento instrumental relacionado con la excentricidad desde un acercamiento bifocal. Ninguno de los profesores relacionó c y FV para determinar en cuál elipse se encuentran más cerca los focos de los vértices que del centro, lo que da idea de cuáles elipses son más alargada y cuáles más redondas.

Pregunta 4

A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la hipérbola. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la abertura de las ramas de la hipérbola?

Un profesor señaló que al cambiar la excentricidad cambia la abertura de las ramas de la hipérbola (CCK-AB-6), otro profesor mostró conocimientos erróneos al mencionar que “cuando [la excentricidad] se acerca a 1 entonces [la hipérbola] es más redonda”, sin embargo, ninguno de estos dos participantes explicó cómo se relaciona el orden de magnitud de excentricidad con el aspecto o forma de las ramas de la hipérbola. Cinco de los siete profesores no respondieron esta pregunta.

Ninguno de los participantes consigue explicar la correspondencia entre diferentes valores de excentricidad y diferentes formas de las ramas de la hipérbola (SCK-AB-18).

Pregunta 5

En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y b al semieje conjugado de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.

a) $a = 2, b = 3$

b) $a = 4, b = 7$

c) $a = 8, b = 5$

Ningún profesor respondió esta pregunta.

Pregunta 6

En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y c a la semidistancia entre los focos de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.

a) $a = 4, c = 9$

b) $a = 2, c = 5$

c) $a = 3, c = 6$

Los participantes calcularon el valor de e con la expresión $e = c/a$ (CMI-AB-1), sin embargo, no dan muestras de saber cómo se relaciona la magnitud del cociente c/a con la abertura de las ramas de la hipérbola, ya que ordenaron incorrectamente los incisos y no exhibieron en que se basaron para establecer tal orden.

Pregunta 7

Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 4.8. según de sus excentricidades (de menor a mayor excentricidad). Las escalas de los ejes horizontal y vertical son iguales.

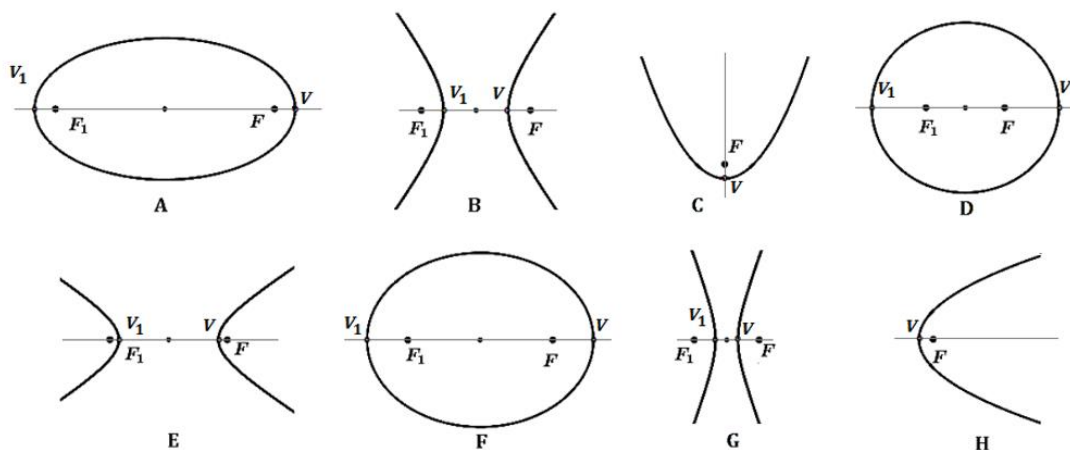


Figura 4.8. Excentricidad de cónicas

Cinco profesores saben que la curva es elipse cuando $0 < e < 1$ (CCK-AFD-2), parábola cuando $e = 1$ (CCK-AFD-3) e hipérbola cuando $e > 1$ (CCK-AFD-4), por lo que no tuvieron problemas para hacer grupos, en ese orden, de elipses, parábolas e hipérbolas. Sin embargo, desconocen cómo varían las formas de las curvas en términos de la variación de la excentricidad por lo que no lograron ordenar correctamente las gráficas dentro de su correspondiente grupo. Tampoco consideraron la posición de focos y vértices para razonar respecto al cociente c/a , lo que les habría permitido determinar cualitativamente las excentricidades de elipses e hipérbolas. Los dos profesores restantes no consiguieron ordenar las cónicas correctamente, al menos en grupos de elipses, parábolas e hipérbolas, lo que da evidencia de su desconocimiento sobre el rango de valores de excentricidad que corresponde a cada tipo de cónica.

Pregunta 8

Ordene las ecuaciones de la Figura 4.9 según los valores de las excentricidades de las cónica que representan (de menor a mayor excentricidad).

- a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $y^2 = 8(x - 4)$ c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$
- d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ e) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ f) $y^2 = 9(x - 4)$

Figura 4.9. Ecuaciones de cónicas

Los 7 profesores reconocieron la cónica que representa cada ecuación mostrada (CMI-AB-6, CMI-AB-7 y CMI-AB-8), por lo que formaron tres grupos de ecuaciones: un grupo con las que representan a elipses, otro con las correspondientes a parábolas y uno más con las que representan a hipérbolas. Sin embargo, ningún participante lograr establecer la correspondencia correcta entre los denominadores de los términos cuadráticos de las ecuaciones y los semiejes de las elipses e hipérbolas, por lo que calculan incorrectamente el valor de la excentricidad de las cónicas al emplear las ecuaciones para tal fin (CMI-AB-4 y CMI-AB-5). Uno de ellos calcula la excentricidad de la elipse horizontal 7a (IMKT) pero no calcula correctamente la excentricidad de la elipse vertical 7d, el obtener resultados absurdos no motiva nada en el profesor (ver Figura 4.10). El docente no mostró conocer la relación entre los denominadores de la ecuación de una elipse y las longitudes de sus ejes, lo cual es necesario para aplicar la fórmula de la excentricidad; el docente sólo mostró comprensión instrumental en la aplicación de la fórmula de excentricidad. En palabras de Skemp (1976, p. 9), “al saber no solo qué método funcionó sino por qué, le habría permitido relacionar el método con el problema”.

a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{32}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{36}{16}} = \sqrt{1 - \frac{9}{4}} = \sqrt{-\frac{5}{4}}$

Figura 4.10. Resultados absurdos para la excentricidad.

Pregunta 9

En la Figura 4.11. se muestran, a una misma escala, las gráficas de tres hipérbolas con sus respectivas asíntotas. Ordene las hipérbolas de acuerdo a su excentricidad, de menor a mayor excentricidad.

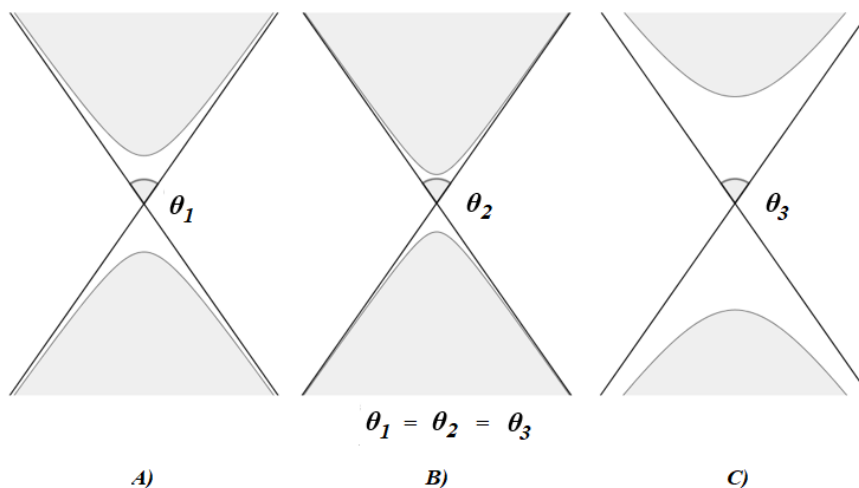


Figura 4.11. Hipérbolas y asíntotas

De manera incorrecta, los profesores ordenan las hipérbolas considerando que las ‘más picudas’ son de menor excentricidad y las ‘más planas’ son de mayor excentricidad. Ninguno de los profesores reconoce que dado que el ángulo entre las asíntotas de las tres hipérbolas mostradas es igual, todas ellas tienen la misma excentricidad.

Pregunta 10

En la definición de excentricidad $e = d(F, P)/d(F, L)$, donde F , P y L son respectivamente un foco, un punto y la directriz de la cónica ¿a qué lugar geométrico corresponde $e = 0$?

Cuatro profesores mencionaron que la $e = 0$ corresponde a una circunferencia (CCK-AB-5), pues no reconocen que la definición de excentricidad dada corresponde al AFD y que en este contexto la $e = 0$ se asocia a un punto. Los otros tres profesores no respondieron la pregunta.

Pregunta 11

En una elipse a , b y c corresponden al semieje mayor, semieje menor y semidistancia entre los focos, respectivamente.

- a) Relacione a , b y c con 3, 4 y 5 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a elipses.
- b) Relacione a , b y c con 4, 5 y 6 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a elipses.

Ningún profesor respondió esta pregunta.

Pregunta 12

En una hipérbola a , b y c corresponden al semieje transversal, semieje conjugado y semidistancia entre los focos, respectivamente.

- a) Relacione a , b y c con 3, 4 y 5 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.
- b) Relacione a , b y c con 4, 5 y 6 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.

Ningún profesor respondió esta pregunta.

4.2.2. De las entrevistas no estructuradas

Algunos de los profesores fueron entrevistados para profundizar en las justificaciones dadas en sus respuestas y/o para obtener información relacionada con los objetivos de las preguntas que no fueron respondidas (5, 11 y 12). A continuación se transcriben las entrevistas.

Pregunta 5

Investigador: Profesor, ¿puede decirme qué determina la abertura de las ramas de la hipérbola?

Profesor 7: Bueno, tiene que ver con el valor de su excentricidad.

Investigador: Con los valores de los semiejes podemos obtener el valor de la excentricidad. ¿Por qué no obtuvo la excentricidad de cada hipérbola?

Profesor 7: Efectivamente, con los valores de los semiejes puedo obtener la excentricidad, sólo que no recuerda la fórmula de la excentricidad en términos de los semiejes.

Investigador: Si tuviera el valor de la excentricidad de cada hipérbola, ¿sabría utilizar esos valores para ordenar las hipérbolas de acuerdo a la abertura de sus ramas?

Profesor 7: No creo. Se que la excentricidad tiene que ver con la forma de la hipérbola, pero no recuerdo cómo el valor de la excentricidad de la hipérbola influye en la abertura de sus ramas. Comúnmente la hipérbola no se estudia en mi curso de Geometría analítica.

El profesor sólo tiene conocimiento instrumental, por lo que al olvidar las fórmulas se ve limitado en su desempeño. Además, aunque hubiera logrado calcular la excentricidad de cada una de las hipérbolas, no hubiera conseguido responder correctamente la pregunta pues desconoce la relación entre la excentricidad y la abertura de las ramas de la hipérbola (SCK-1B-18). Es claro que tampoco conoce la relación entre el cociente de los semiejes de la hipérbola y la abertura de sus ramas de la hipérbola (SCK-AB-16). Sin embargo, reconoce que el valor de la excentricidad tiene relación con la forma de la hipérbola.

Pregunta 11

Investigador: Profesor, ¿puede decirme qué elemento es mayor, la semidistancia entre los focos, el semieje mayor o el semieje menor?

El profesor hace el esbozo de una elipse horizontal y coloca los elementos mencionados.

Profesor 7: El semieje mayor.

Investigador: ¿Qué relación guardan entre sí estos elementos?

Profesor 7: Bueno, el semieje mayor a es mayor que b y c .

Investigador: ¿Conoce alguna otra relación entre b y c ? o ¿entre a , b y c ?

Profesor 7: No recuerdo, pero si a es mayor que b y c , entonces las ternas (5,4,3), (5,3,4), (6,5,4) y (6,4,5) corresponden a elipses.

Investigador: Muchas gracias, profesor.

El profesor expresa claramente que la longitud del semieje mayor es siempre mayor que la longitud del semieje menor y que la semidistancia entre los focos (CCK-AB-7), pero desconoce, el cumplimiento de la terna pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ (SCK-AB-5) lo que le impide obtener correctamente las ternas correspondientes a elipses y comentar, por ejemplo, que la terna (6,5,4) corresponde a una elipse.

Pregunta 12

Investigador: Profesor, referente a la pregunta 12, ¿puede decirme qué relaciones conoce entre a , b y c ?

Profesor 5: Si, claro. Recuerdo que c es la distancia entre los focos, por lo que es mayor que a y b . Y entre a y b siempre $a > b$ [esto es cierto en la elipse, no así en la hipérbola]

Investigador: ¿Y ahora, qué relación puede establecer entre a , b y c ?

Profesor 5: Bueno, que $c > a > b$.

Investigador: ¿Y entonces, por qué conociendo estas relaciones no respondió la pregunta?

Profesor 5: Recordé que alguna vez vi que en la hipérbola equilátera los semiejes son iguales y entonces tuve mis dudas respecto a la relación entre los semiejes, así que preferí no contestar la pregunta.

Investigador: Muchas gracias, profesor.

El profesor 5 sabe que en toda hipérbola $c > a$ y $c > b$ (CCK-AB-8), pero exhibe conocimientos erróneos al mencionar que $a > b$, pues los semiejes pueden ser iguales $a = b$ (como vagamente lo recuerda) o cualquiera de ellos puede ser mayor que el otro (SCK). El conocimiento de la relación entre los ejes le hubiera sido suficiente para contestar correctamente el inciso (A), pero no sería suficiente ese conocimiento para responder correctamente el inciso (B). Lo anterior debido a que en el inciso (A) los valores proporcionados cumplen la relación $c^2 = a^2 + b^2$ (SCK-AB-14), mientras que en inciso (B) los valores proporcionados no cumplen dicha terna pitagórica.

4.3. Conclusiones de la etapa diagnóstica

En este apartado se presentan, como resultado del análisis de las respuestas del cuestionario, las conclusiones que permitieron dar respuesta a la segunda pregunta de investigación y a sus preguntas auxiliares. También se muestran las consideraciones en relación con los resultados obtenidos.

4.3.1. Acerca de lo que entiende el profesor por excentricidad.

El concepto de excentricidad que expresaron los profesores estuvo limitado a la definición en términos del acercamiento bifocal, es decir, a la definición $e = c/a$. Los profesores pueden identificar las constantes a y c en una curva dada. Sin embargo, es evidente que los maestros requieren ayuda para determinar estas constantes a partir de una ecuación dada de una elipse o hipérbola. La definición de excentricidad que aparece en cada uno de los acercamientos foco-directriz y cono-plano no fueron considerados por los profesores, lo que da indicios del desconocimiento de las definiciones de excentricidad desde estos acercamientos.

4.3.2. Acerca de qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la elipse.

Los profesores saben que toda elipse tiene una excentricidad cuyo valor está en el rango de valores $0 < e < 1$, sin embargo, no pueden establecer una relación entre la forma de la elipse y el valor de su excentricidad, es decir, no son capaces de darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la elipse.

Los profesores reconocen la ecuación canónica que representa a una elipse, pero su incapacidad de establecer una relación de correspondencia entre los valores de los parámetros que aparecen en la ecuación y los elementos geométricos de la elipse que estos representan, no les permite determinar la excentricidad de una elipse a partir de su ecuación canónica.

Los profesores tienen un conocimiento instrumental (se limitan a calcular valores) que les impide darle una interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la elipse.

4.3.3. Acerca de qué interpretación geométrica que le da el profesor a la excentricidad de la hipérbola.

Los profesores saben que toda hipérbola tiene una excentricidad con valor $e > 1$, sin embargo, no pueden establecer una relación entre la forma de la hipérbola y diferentes valores de excentricidad, es decir, no son capaces de darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la hipérbola.

Los profesores reconocen la ecuación canónica que representa a una hipérbola, pero no son capaces de interpretar el significado de los denominadores que aparecen en las ecuaciones; no identifican que elementos geométricos estos representan (cuál corresponde al cuadrado del semieje transversal y cuál al cuadrado del semieje conjugado).

Los profesores no interpretan geoméricamente la relación entre las asíntotas de una hipérbola, la abertura de sus ramas y su correspondiente excentricidad.

De manera general, los profesores muestran incapacidad de establecer la relación entre el valor de la excentricidad y la forma de la cónica, entre los valores de los semiejes y la excentricidad.

4.3.4. Acerca de a qué lugar geométrico le asigna el profesor la excentricidad cero.

Los profesores no interpretan, o desconocen, la definición de excentricidad desde un acercamiento foco-directriz ($e = PF/Pl$), por lo que la excentricidad $e = 0$ la asocian exclusivamente a la circunferencia, situación que corresponde a la definición de excentricidad desde un acercamiento bifocal.

4.4. Consideraciones en relación con los resultados

Los resultados obtenidos en esta investigación muestran que la excentricidad de las cónicas no es un contenido matemático dominado por los participantes, lo cual, probablemente, se debe a que en los currículos y libros de texto no es un tema que se exponga con especial interés. Aunado a lo anterior, la enseñanza de las cónicas mayoritariamente se enfoca en solicitar a los estudiantes determinar sus ecuaciones, a partir de algunos de sus elementos (focos, vértices, semiejes, entre otros) o bien conociendo la gráfica.

También se halló que los aspectos del dominio del tema excentricidad que los profesores muestran, corresponden en su mayoría a CCK, particularmente desde el AB. Según Baumert et al., (2010), la falta de conocimiento profundo de contenidos matemáticos específicos (en este caso de la excentricidad) podría limitar en gran medida el repertorio de estrategias didácticas, el conjunto de representaciones matemáticas alternativas y las explicaciones disponibles para los docentes en el aula. Además, como señala el National Council of Teachers of Mathematics (2000), “Para ser efectivos, los profesores deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que están enseñando y ser capaces de aprovechar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza” (p. 17).

Por otro lado, los datos empíricos obtenidos sugieren el diseño de actividades que ayuden a los profesores en servicio, o en formación, a reafirmar, fortalecer e incrementar su conocimiento matemático respecto a: (a) las definiciones de excentricidad desde diferentes acercamientos a las cónicas, (b) la relación entre la forma de las cónicas y el valor de su excentricidad, (c) la relación entre los valores de los parámetros de la ecuación y los correspondientes elementos geométricos de la cónica, (d) la relación entre el valor de la excentricidad y del ángulo formado por las asíntotas de una hipérbola, (e) la relación entre la excentricidad y la forma de

la hipérbola en la cercanía a su vértice. Consideramos que desarrollar SCK de aspectos relacionados con la excentricidad, podría ayudar al docente a enriquecer su clase, como señalan Ball et al., (2008) “los maestros necesitan saber matemáticas de manera útil para, entre otras cosas, dar sentido matemático al trabajo de los estudiantes y elegir formas poderosas de representar el tema para que sea comprensible para los estudiantes” (p. 404).

CAPÍTULO 5. LAS ACTIVIDADES

En este capítulo se describen las nuevas tecnologías utilizadas en el diseño y exploración de las actividades. Considerando los resultados obtenidos en la etapa diagnóstica, las actividades se diseñaron con la finalidad de ayudar a los participantes a desarrollar un conocimiento profundo y amplio del concepto excentricidad de las cónicas. Por medio del editor de recursos educativos eXeLearning se crearon actividades en las que se incrustaron applets de GeoGebra. De manera autónoma los participantes pudieron explorar las actividades alojadas en la web, accediendo a ellas por medio de la liga proporcionada por el servidor gratuito drv.tw. Al final del capítulo se muestran dos de las actividades diseñadas y se presentan los objetivos de cada actividad.

5.1. Uso de tecnologías en la educación

Con la llegada de la computadora personal varias herramientas de software especializadas fueron creadas específicamente para el aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, Cabri y GeoGebra, y otras se adaptaron para su uso en el aula de matemáticas, por ejemplo, hojas de cálculo y sistemas de algebra computacional. Con el uso de herramientas tecnológicas (dispositivos o software) los estudiantes aprenden de una manera diferente a como aprenden con lápiz y papel y pueden intercambiar información y conocimiento dentro y fuera de la escuela. Los recursos digitales, incluidos los diseñados para la educación, como video, audio, animaciones, gráficos, entre otros, pueden ser enviados o recibidos por medio de la tecnología móvil en cualquier momento y casi en cualquier lugar, por lo que las tabletas, los smartphones y los iPads están siendo cada vez más utilizados en la educación. No solo eso, también las aplicaciones educativas para dispositivos móviles han sido adoptadas por diferentes grupos de educadores innovadores ya que permiten nuevas formas de plataformas de aprendizaje.

La aparición en China del coronavirus SARS-Cov-2 produjo entre los humanos la enfermedad conocida con el nombre de COVID-19. Debido a su pronta propagación a todos los continentes, la Organización Mundial de Salud declaró la enfermedad como pandemia. El fácil contagio del SARS-Cov-2 provocó que la educación presencial en México se suspendiera en marzo de 2020 y se implementara el trabajo en línea, principalmente a través de software de videochat como Zoom y Microsoft Teams.

5.2. Tecnologías usadas en el diseño de las actividades

Una de las limitaciones más evidentes para el uso de tecnologías son las diferencias de dominio tecnológico entre los profesores. La posesión de una computadora, la capacidad de los usuarios, las necesidades profesionales, el acceso a internet, entre otras cuestiones, influyen en la desigualdad del dominio tecnológico; por tal razón, optamos por tecnologías que se caracterizan por no requerir un alto dominio tecnológico por parte de los participantes. Las nuevas tecnologías utilizadas fueron: GeoGebra, un Software de Geometría Dinámica (SGD); eXeLearning, un editor de recursos educativos; Drive, lugar en la nube para almacenar y acceder a archivos; y DriveToWeb, un servicio de alojamiento web gratuito.

A continuación, se describen algunas otras características por las que estas nuevas tecnologías fueron utilizadas, excepto las características de Drive por ser ya muy comunes.

GeoGebra

Es un software de código abierto que ofrece la posibilidad de realizar construcciones geométricas dinámicas en las que se pueden observar relaciones que cambian o que permanecen invariantes. GeoGebra presenta un interfaz de usuario con tres ventanas principales: la ventana algebraica, la ventana gráfica y la ventana de entradas o de comandos (Figura 5.1); el interfaz de usuario permite analizar en tiempo real relaciones matemáticas entre representaciones algebraicas y sus gráficas correspondientes.

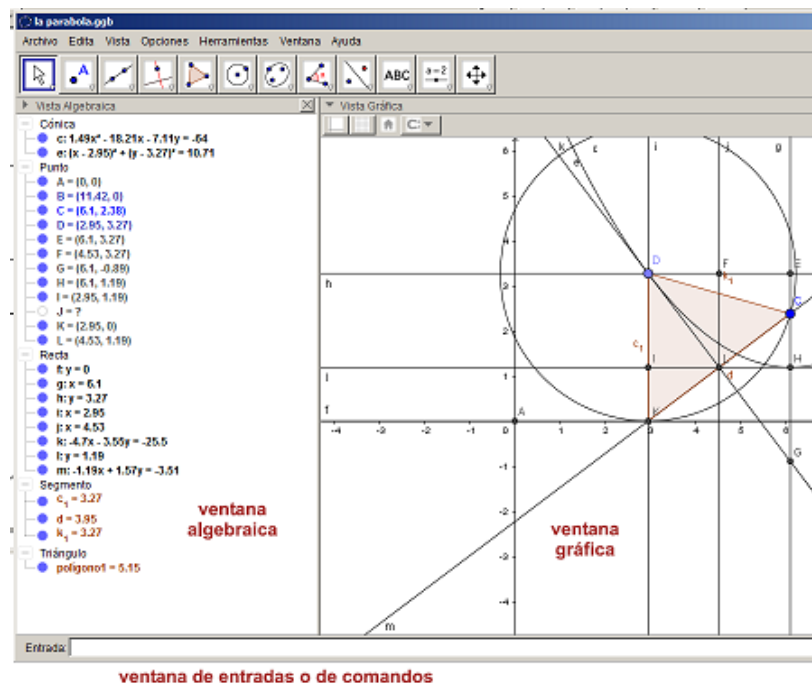


Figura 5.1. Ventanas de GeoGebra

Este software de geometría dinámica permite la creación de applets utilizando las construcciones geométricas publicadas en el repositorio de recursos www.geogebra.org, también es posible acceder, compartir y/o comentar materiales de dicho repositorio. Gracias a esta herramienta, los recursos pueden ser descargados y modificados para su reutilización libremente. GeoGebra favorece el aprendizaje guiado y autónomo. Los usuarios pueden manipular variables fácilmente con sólo arrastrarlas, o mediante el uso de deslizadores, lo que permite reflexionar acerca de las relaciones entre elementos geométricos, además, es un recurso que puede ser utilizado de manera presencial o a distancia.

En esta investigación aceptamos que no basta la visualización de las construcciones dinámicas creadas con GeoGebra, o sus reconfiguraciones realizadas a través de la manipulación, para lograr la comprensión de conceptos matemáticas. Sin embargo, al emplear GeoGebra descartamos la idea de que los profesores se volvieran expertos en el uso de esta herramienta tecnológica y/o lograran crear modelos dinámicos de las cónicas; su uso se limitó a alcanzar los objetivos de cada actividad mediante la manipulación de deslizadores o al arrastre de puntos móviles

eXeLearning

eXeLearning es editor de recursos educativos interactivos de código abierto y gratuito que puede ayudar a los profesores en la creación y publicación de contenidos Web (<http://exelearning.net>). Gracias a su interface gráfica (Figura 5.2) los recurso educativos son construidos sin necesidad de tener conocimientos en lenguajes de programación. El editor cuenta con bloques que permiten introducir diferentes tipos de contenido, desde un texto hasta actividades interactivas. Además, brinda la posibilidad de publicar los contenidos en diferentes formatos.

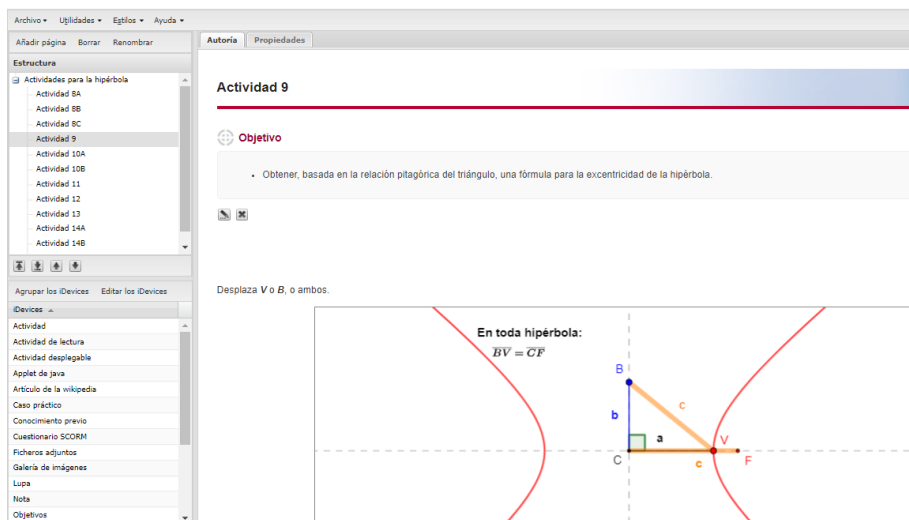


Figura 5.2. Interfase de eXeLearning

DriveToWeb

Es un servicio de alojamiento web gratuito que permite activar rápidamente un sitio web utilizando archivos almacenados en la nube (Drive, en nuestro caso). DriveToWeb proporciona ligas para acceder al sitio web creado.

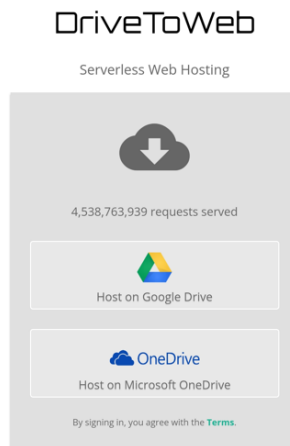


Figura 5.3. Web hosting DriveToWeb

5.3. Actividades

5.3.1. Objetivo general de las actividades

El diseño de las actividades tuvo como objetivo general facilitar a los participantes la adquisición de un conocimiento profundo y amplio del concepto excentricidad de las cónicas desde diferentes enfoques.

5.3.2. Consideraciones para el diseño de las actividades

El diseño de las actividades se realizó tomando en cuenta: (1) que los profesores mencionaron tener poca o nula experiencia previa en el uso de GeoGebra, (2) los resultados del análisis de la forma en que la excentricidad es presentada en los libros de texto revisados, incluyendo las declaraciones que suelen hacer algunos autores sobre la tendencia de la forma de las cónicas cuando la excentricidad tiende a cero o a uno, o bien cuando a partir del aspecto de una cónica deducen estimaciones sobre los valores de la excentricidad, y (3) las conclusiones obtenidas en la etapa diagnóstica. Derivado de estas consideraciones se diseñaron 23 actividades (11 relacionadas con la elipse y 12 con la hipérbola).

5.3.3. Descripción y objetivos de las Actividades

Considerando que describir las 23 actividades era un trabajo quizá redundante, ya que se tiene acceso a cada una de ellas a través de las ligas proporcionadas más adelante, enseguida, a manera de ejemplo, exponemos las actividades 2 y 8B. En la Tabla 5.1 mostramos el objetivo de cada una de las actividades.

Tabla 5.1. Objetivos de las actividades diseñadas

Act.	Objetivos de las actividades de la elipse	Act.	Objetivos de las actividades de la hipérbola
1	Establecer un primer criterio para analizar la redondez de las elipses mediante la razón eje menor/eje mayor.	8A	Establecer un primer criterio para analizar la abertura de las ramas de las hipérbolas mediante la razón eje conjugado/eje transversal.
2	Establecer un segundo criterio para analizar la redondez de las elipses mediante la excentricidad e .	8B	Establecer un segundo criterio para analizar la abertura de las ramas de las hipérbolas mediante la excentricidad e .
3	Obtener, basada en la relación pitagórica del triángulo, una fórmula para la excentricidad de la elipse.	8C	Mostrar que la abertura entre las asíntotas de la hipérbola depende de la excentricidad de la hipérbola. Establecer un tercer criterio para analizar la abertura de las ramas de las hipérbolas basado en el ángulo entre sus asíntotas. Mostrar que las hipérbolas alojadas entre asíntotas con la misma abertura tienen la misma excentricidad.
4A	Mostrar la correspondencia entre los semiejes de la elipse y los denominadores en su ecuación canónica.	9	Obtener, basada en la relación pitagórica del triángulo, una fórmula para la excentricidad de la hipérbola.
4B	Determinar cuándo una elipse es horizontal y cuándo es vertical según los denominadores en su ecuación canónica.	10A	Mostrar la correspondencia entre los semiejes de la hipérbola y los denominadores en su ecuación canónica.
5	Mostrar que las elipses que resultan de la intersección de un cono con planos paralelos tienen el mismo cociente semieje menor/semieje mayor, entonces tienen la misma excentricidad.	10B	Determinar cuándo una hipérbola es horizontal y cuándo es vertical según los signos de sus términos.
6A	Establecer el concepto de excentricidad para la elipse determinada por la intersección de un cono y un plano inclinado en el espacio tridimensional.	11	Establecer criterios para analizar la "picudez" de la forma de la hipérbola en la cercanía a su vértice.
6B	Mostrar que la suma de las distancias desde cualquier punto P sobre la elipse a los focos es constante.	12	Establecer el concepto de excentricidad para la hipérbola determinada por la intersección de un cono y un plano inclinado en el espacio tridimensional.
7A	Mostrar que las elipses con igual eje mayor pueden tender a un segmento o a un círculo, al variar la distancia entre los focos.	13	Mostrar que la diferencia de distancias de todo punto P sobre la hipérbola desde los focos, en valor absoluto, es constante.
7B	Mostrar que las elipses determinadas por la intersección de un cono y un plano inclinado variable, todas las elipses con un vértice común V , pueden tender a una parábola, un segmento o un círculo.	14A	Mostrar que las hipérbolas de igual semidistancia focal pueden tender a dos rayos disjuntos o a una recta.
7C	Ilustrar la definición foco-directriz de la elipse. Mostrar que las elipses, en términos de la definición foco-directriz, pueden tender a una parábola o a un punto.	14B	Mostrar que las hipérbolas determinadas por la intersección de un cono doble y un plano inclinado variable (todas las hipérbolas con un vértice común V), pueden tender a una parábola o a dos rayos disjuntos.
		14C	Ilustrar la definición foco-directriz de la hipérbola. Mostrar que las hipérbolas, en términos de la definición foco-directriz, pueden tender a una parábola o a una recta.

Actividad 2. Excentricidad-Redondez de la elipse

En la actividad se pide a los participantes ordenar, de menor a mayor excentricidad, los incisos de la Figura 5.4., considerando $\frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje mayor}} = \text{excentricidad}$. En la figura C , F y V son respectivamente, el centro, uno de los focos y uno de los vértices de una elipse.

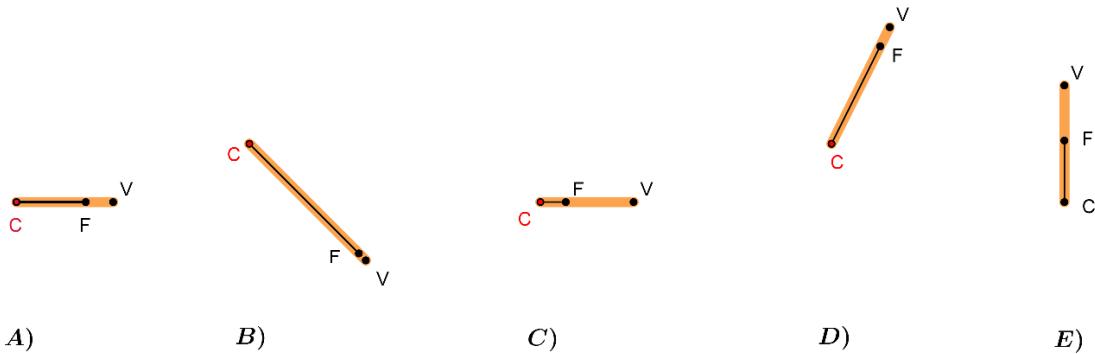


Figura 5.4. Excentricidad-Redondez de la elipse

Enseguida, se pide a los docentes seleccionar, de cuatro opciones, aquella opción en la que aparecen ordenados correctamente los incisos. Si la opción seleccionada es la correcta, la actividad muestra la figura de los incisos ordenados y permite activar la casilla MIRAR ELIPSES, para visualizar la forma de la elipse correspondiente a cada par *semidistancia focal-semieje mayor* (Figura 5.5).

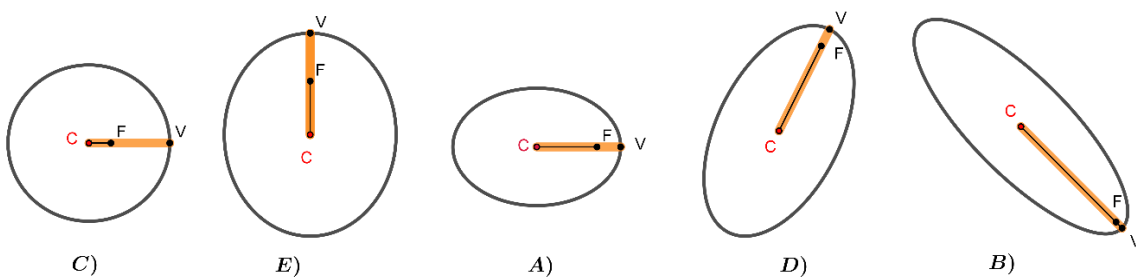


Figura 5.5 Excentricidad-Redondez de la elipse

Finalmente, con base en los incisos (ordenados de menor a mayor excentricidad) y sus correspondientes elipses (ordenadas de mayor a menor redondez) se establece un segundo criterio de redondez de las elipses basado en la excentricidad:

A menor excentricidad, mayor redondez de la elipse. A mayor excentricidad, menor redondez de la elipse.

Actividad 8B. Excentricidad-Abertura de las ramas de la hipérbola

En la primera parte de la actividad se presenta la construcción dinámica de una hipérbola con centro C y vértice V fijos, cuya excentricidad es $e = \frac{CF}{CV} = \frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje transversal}}$ (Figura 5.6.).

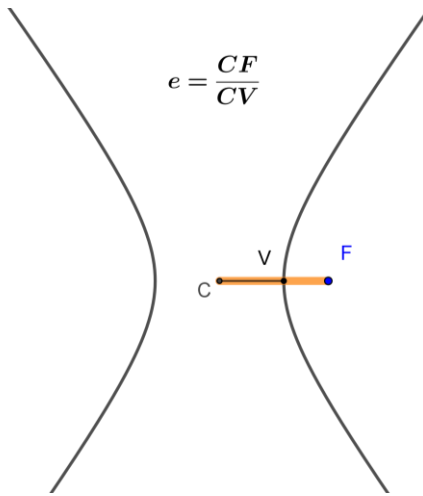


Figura 5.6. Hipérbola con $e = \frac{CF}{CV}$

Se pide a los participantes desplazar el punto F y observar que:

Cuando el semieje transversal CV es fijo:

- 1) Si $CF \rightarrow CV$, entonces $e \rightarrow 1$ y las ramas de las hipérbolas son cada vez menos abiertas.
- 2) Si $CF \rightarrow \infty$, entonces $e \rightarrow \infty$ y las ramas de las hipérbolas son cada vez más abiertas.

En la segunda parte de la actividad se presenta la construcción dinámica de una hipérbola con

centro C y foco F fijos, cuya excentricidad es $e = \frac{CF}{CV} = \frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje transversal}}$.

Se pide a los participantes desplazar el punto V y observar que:

Cuando el semieje focal CF es fijo:

- 3) Si $CV \rightarrow CF$, entonces $e \rightarrow 1$ y las ramas de las hipérbolas son cada vez menos abiertas.
- 4) Si $CV \rightarrow 0$, entonces $e \rightarrow \infty$ y las ramas de las hipérbolas son cada vez más abiertas.

Con base en (1), (2), (3) y (4) se puede establecer un segundo criterio para la abertura de las ramas de las hipérbolas:

A menor excentricidad, menor abertura de las ramas de la hipérbola. A mayor excentricidad, mayor abertura de las ramas de la hipérbola.

CAPÍTULO 6. ETAPA DE EXPLORACIÓN

El capítulo inicia con la presentación de la metodología con la que desarrollamos esta etapa de la investigación, en ella exponemos las razones por las que los instrumentos de evaluación aplicados en esta etapa fueron respondidos por cantidades diferentes de participantes. También, presentamos nuevos resultados y nuevas conclusiones en relación con nuestra segunda pregunta de investigación; tales resultados y conclusiones se obtuvieron con un segundo cuestionario de diagnóstico aplicado previo a la exploración de las actividades diseñadas. Después de la exploración de las actividades se aplicaron nuevos instrumentos de evaluación, en la parte media del capítulo presentamos los resultados y conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos recolectados con estos nuevos instrumentos de evaluación. Finalmente, evaluamos los efectos de la experimentación y mostramos nuestras consideraciones en relación con estos.

6.1. Metodología

6.1.1. Consideraciones previas

Durante la pandemia COVID-19 fallecieron dos de nuestros siete participantes. Ante esta situación, y a reserva de incorporar lo más pronto posible nuevos participantes, postergamos el inicio de la exploración de las actividades. Sin embargo, al tener serias dificultades para conseguir más participantes, debido a la creciente ola de contagios y fallecimientos por la pandemia COVID-19, decidimos que los cinco participantes respondieran el Cuestionario de Casos límite, exploraran la actividad relacionada con casos límite de la excentricidad y respondieran nuevamente el Cuestionario de Casos límite.

Al lograr incorporar quince nuevos participantes decidimos aplicar el Cuestionario de Diagnóstico 2. Se recolectaron los datos, se analizaron y se obtuvieron nuevos resultados. Al tener resultados similares a los obtenidos en la etapa diagnóstica, acordamos que los 20 profesores participantes exploraran las 23 actividades diseñadas. Inmediatamente después de la exploración de las actividades, aplicamos a los participantes el cuestionario Postactividades.

A continuación, exponemos la metodología con la que llevamos a cabo esta parte de nuestra investigación y detallamos los instrumentos de evaluación utilizados.

6.1.2. Del Cuestionario de Casos límite

6.1.2.1. Participantes

Cinco de los siete profesores que participaron en la etapa diagnóstica.

6.1.2.2. Instrumentos de evaluación

El Cuestionario de Casos Límite

Es un cuestionario de tres preguntas que indaga sobre las concepciones y conocimientos que los participantes tienen acerca del comportamiento de las cónicas cuando la excentricidad tiende a cero o a uno. Para su diseño se consideraron las declaraciones que suelen hacer algunos autores sobre la forma de las cónicas cuando la excentricidad es cercana a cero o a uno, o bien cuando a partir del aspecto de una cónica deducen estimaciones sobre los valores de la excentricidad. Enseguida se describen las tres preguntas y sus respectivos objetivos. Destacamos que este cuestionario y el análisis de los datos obtenidos se consideraron para la

elaboración del artículo titulado ¿Cómo varía la forma de las cónicas cuando su excentricidad tiende a uno o a cero? Un estudio exploratorio con profesores de bachillerato de una universidad mexicana, aceptado en la revista Educación Matemática (México).

Preguntas y objetivos

- 1) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor cero?

Objetivo: Averiguar si el profesor conoce la(s) curva(s) a la(s) que la elipse tiende cuando $e \rightarrow 0$, bajo qué acercamiento la(s) conoce y cómo justifica sus conocimientos.

- 2) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?

Objetivo: Averiguar si el profesor conoce la(s) curva(s) a la(s) que la elipse tiende cuando $e \rightarrow 1$, bajo qué acercamiento la(s) conoce y cómo justifica sus conocimientos.

- 3) ¿Qué ocurre con la forma de la hipérbola cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?

Objetivo: Averiguar si el profesor conoce la(s) curva(s) a la(s) que la hipérbola tiende cuando $e \rightarrow 1$, bajo qué acercamiento la(s) conoce y cómo justifica sus conocimientos.

Entrevistas no estructuradas

Se aplicaron entrevistas no estructuradas a algunos participantes con la finalidad de profundizar en la justificación de sus respuestas e indagar sobre sus concepciones respecto a los casos límite de la excentricidad.

6.1.2.3. Recolección de datos

Del Cuestionario de Casos Límite

La recolección de datos se realizó en dos momentos diferentes, antes y después de la exploración de la actividad relacionada con los casos límite de la excentricidad. En ambos momentos, el cuestionario fue enviado para su aplicación vía e-mail o por WhatsApp y para la recolección de los datos se pidió a los participantes regresar el cuestionario ya contestado en un tiempo máximo de ocho días después de haberlo recibido.

De las entrevistas no estructuradas

Las entrevistas no estructuradas se aplicaron de manera presencial después de recolectar los cuestionarios en el segundo momento. Los docentes participantes fueron entrevistados en un aula escolar habilitada para tal fin en sus respectivos centros de trabajo. El investigador registró la entrevista en su libreta de notas.

6.1.3. Del Cuestionario de Diagnóstico 2

6.1.3.1. Participantes

Los participantes fueron veinte profesores de cinco diferentes escuelas, todos en servicio y con más de tres años de experiencia impartiendo clases de Geometría analítica en el bachillerato. Cinco de estos profesores participaron en la etapa diagnóstica y también contestaron el cuestionario de casos límite.

6.1.3.2. Instrumentos de evaluación

El Cuestionario de Diagnóstico 2

Es un cuestionario de doce preguntas que, al igual que el cuestionario de diagnóstico 1, indaga sobre las concepciones y conocimientos que los participantes tienen acerca de la excentricidad de las cónicas. Su diseño se basa en las mismas consideraciones que el cuestionario de diagnóstico 1 (lo expuesto por los autores de los libros de texto analizados referente a la excentricidad de las cónicas, las relaciones entre el valor de la excentricidad y la forma de las curvas, así como las ideas de Skemp relativas a la comprensión instrumental y comprensión relacional). A continuación, describimos las 12 preguntas que lo conforman, cuyas respuestas, junto con la información obtenida de las entrevistas, nos permitirán dar, previo a la exploración de las 23 actividades diseñadas, nuevas respuestas a la segunda pregunta de investigación y a sus preguntas auxiliares. Destacamos que este cuestionario y el análisis de los datos obtenidos se consideraron para la elaboración del artículo titulado *Non-equivalent notions of the eccentricity of the conics: an exploratory study with high school teachers*, publicado en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2023.2169644.

INSTRUCCIONES. Por favor responda las siguientes preguntas siendo lo más explícito posible.

- 1) Expresa con tus propias palabras qué es la excentricidad de una cónica.
- 2) Indica cómo se refleja la variabilidad de la excentricidad en la apariencia o forma de una elipse.
- 3) Si ha respondido a la pregunta 2, ¿cómo justifica su respuesta?
- 4) Indica cómo se refleja la variabilidad de la excentricidad en la apariencia o forma de una hipérbola.
- 5) Si ha respondido a la pregunta 4, ¿cómo justifica su respuesta?
- 6) Ordena las cónicas de la Figura 6.1 según sus excentricidades (de menor a mayor excentricidad). Las escalas de los ejes horizontal y vertical son iguales.

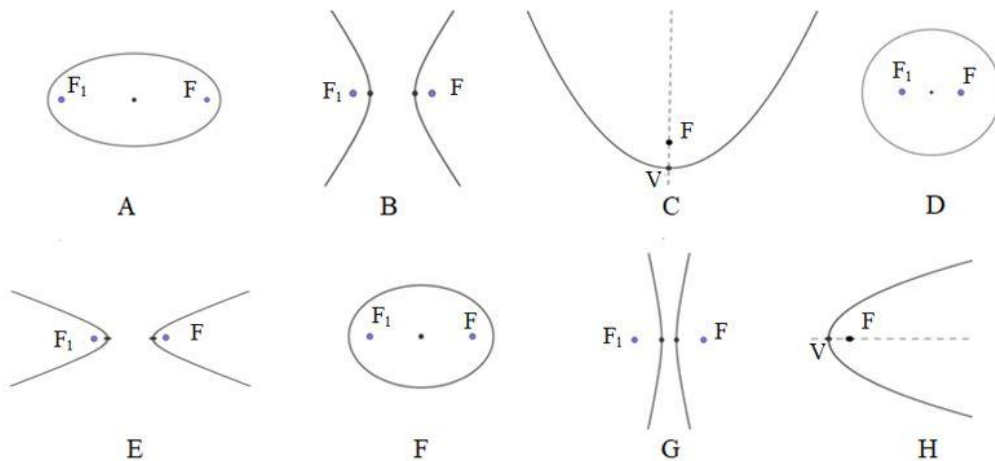


Figura 6.1. Cónicas con diferentes excentricidades

- 7) Ordena las siguientes ecuaciones según el valor de la excentricidad de la cónica que representa (de menor a mayor excentricidad).

a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $y^2 = 8(x - 4)$ d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

e) $y^2 = 12x - 24$ f) $-\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ g) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ h) $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$

- 8) ¿Se requiere un sistema de ejes cartesianos para definir la excentricidad de una elipse? Justifique su respuesta.
- 9) ¿Es posible definir la excentricidad de las cónicas usando coordenadas polares? Justifique su respuesta.

- 10) En ausencia de un sistema de ejes cartesianos, ¿cómo definiría la excentricidad de la elipse y la hipérbola?
- 11) En la Figura 6.2, los planos inclinados son paralelos y el cono circular recto es el mismo en ambos casos. ¿Qué puede decir sobre las excentricidades de las elipses? Justifique su respuesta.

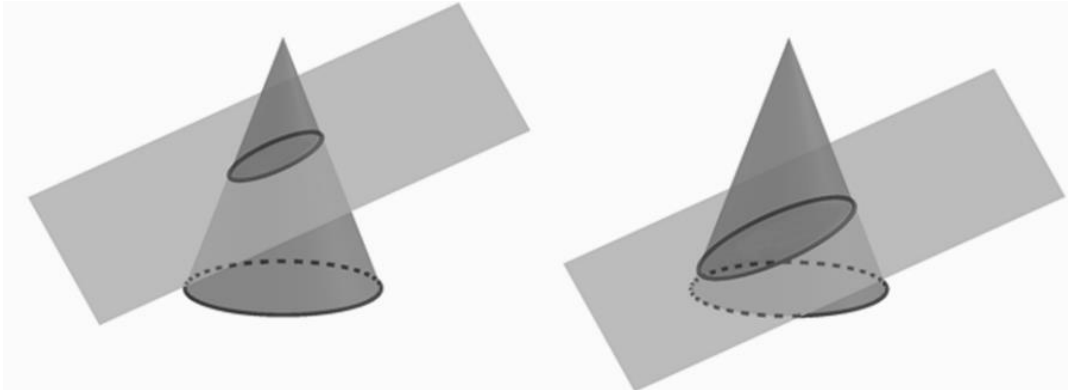


Figura 6.2. Elipses determinadas por planos paralelos

- 12) Con base en la Figura 6.3 ¿cómo se define la excentricidad de la elipse, la cual resulta de la intersección de un cono circular recto con un plano inclinado?

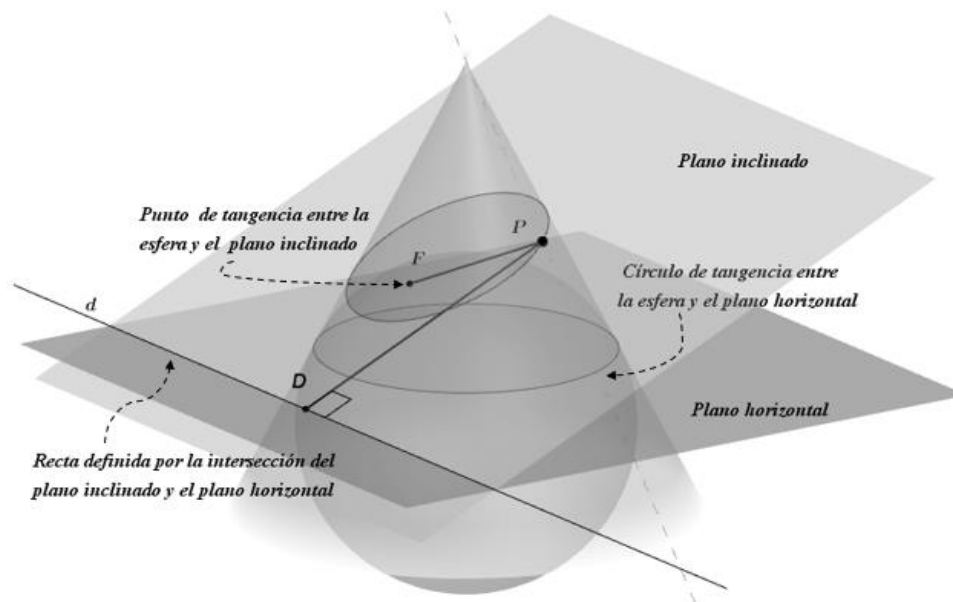


Figura 6.3. Excentricidad en el espacio tridimensional

Una vez que los docentes respondieron el cuestionario, se les solicitó su apoyo para realizar las entrevistas.

Algunos objetivos particulares del cuestionario de diagnóstico 2 son: (a) Averiguar si el profesor identifica el tipo de cónica según el rango de valores de la excentricidad, (b) averiguar cómo el profesor describe la relación entre los valores de la excentricidad y las formas de la elipse y la hipérbola, y (c) averiguar si el profesor identifica correctamente los valores de los semiejes de una elipse o hipérbola a partir de su ecuación canónica y cómo los utiliza para obtener el valor de la excentricidad.

Entrevistas no estructuradas

Realizamos entrevistas no estructuradas para profundizar en la justificación de las respuestas dadas por algunos participantes en el cuestionario de diagnóstico 2 e indagar acerca de las concepciones de los participantes respecto a la excentricidad.

6.1.3.3. Recolección de datos

Del Cuestionario de diagnóstico 2

El cuestionario de diagnóstico 2 fue aplicado de manera presencial en los diferentes lugares de trabajo de los participantes antes de la exploración de las 23 actividades. Tanto para la aplicación del cuestionario como para la recolección de los datos, se siguió un procedimiento similar al aplicado para la recolección de datos del cuestionario de diagnóstico 1.

De las entrevistas no estructuradas

Las entrevistas no estructuradas se aplicaron de manera presencial. Los docentes participantes fueron entrevistados en un aula escolar habilitada para tal fin en sus respectivos centros de trabajo. El investigador registró la entrevista en video y la transcribió a su libreta de nota.

6.1.4. Del Cuestionario Postactividades

6.1.4.1. Participantes

Los participantes son los veinte profesores que respondieron el cuestionario de diagnóstico 2.

6.1.4.2. Instrumentos de evaluación

El Cuestionario Postactividades

El cuestionario postactividades se diseñó bajo las mismas consideraciones y básicamente con los mismos objetivos que el cuestionario de diagnóstico 1, pero además indaga los

conocimientos de los profesores respecto a las curvas límite de las cónicas cuando $e \rightarrow 0$ y cuando $e \rightarrow 1$. Enseguida se muestra el cuestionario.

INSTRUCCIONES. Conteste las preguntas en las hojas blancas anexas. Por favor incluya sus cálculos y fórmulas que use para responder las preguntas.

- 1) Explique brevemente cómo la variabilidad de la excentricidad se refleja en la forma de la elipse.
- 2) Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 6.4. de acuerdo con su forma, de la “más circular” a la “menos circular”. En cada gráfica ambos semiejes están a la misma escala.

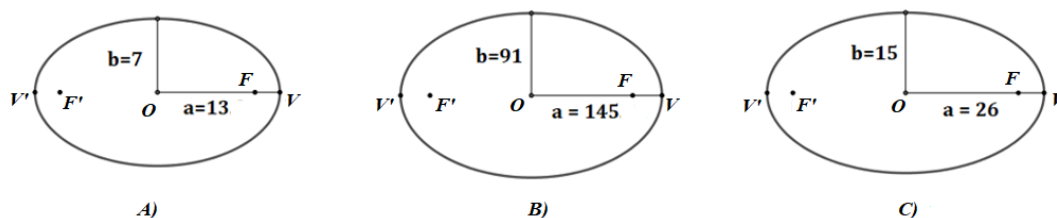


Figura 6.4. Semiejes mayor y menor de la elipse.

- 3) Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 6.5, de acuerdo con los valores de su excentricidad, de menor a mayor excentricidad.

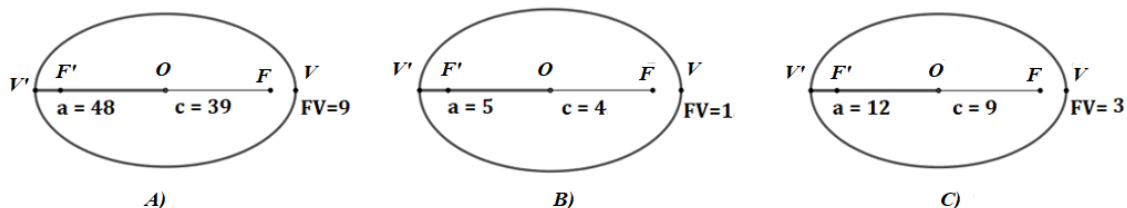


Figura 6.5. Semieje mayor y semidistancia entre los focos de la elipse

- 4) Explique brevemente cómo la variabilidad de la excentricidad se refleja en la apariencia o forma de la hipérbola.
- 5) En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y b al semieje conjugado de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo con la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.
 - a) $a = 2, b = 3$
 - b) $a = 4, b = 7$

c) $a = 8, b = 5$

- 6) Ordene las gráficas de las hipérbolas de la Figura 6.6, de acuerdo con una comparación entre sus excentricidades (que se puede percibir a partir de su forma), de menor a mayor excentricidad.

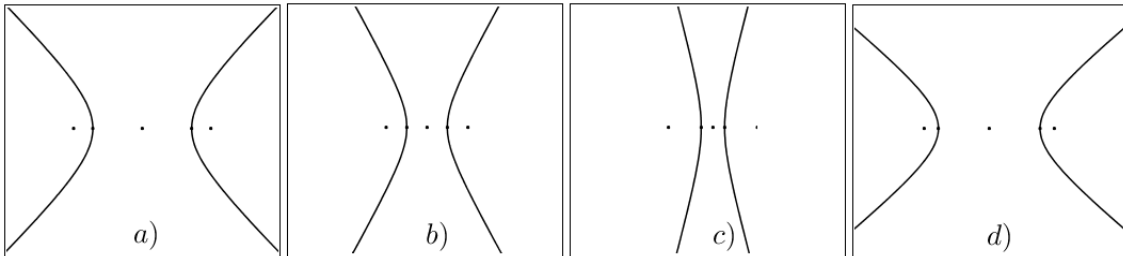


Figura 6.6. Gráficas de hipérbolas

- 7) A) Identifique el tipo de cónica que representa cada una de las ecuaciones que se muestran. Indique el inciso, o incisos, en el espacio correspondiente. B) Obtenga la excentricidad de las cónicas representadas en (a) y (c).

Elipse horizontal: _____

Elipse vertical: _____

Parábola horizontal: _____

Parábola vertical: _____

Hipérbola horizontal: _____

Hipérbola vertical: _____

a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$	b) $x^2 = 8(y - 4)$
c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$	d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$
e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$	f) $y^2 = 9(x - 4)$

- 8) En la Figura 6.7 se muestran 3 hipérbolas. ¿Cuál de las hipérbolas tiene mayor excentricidad?

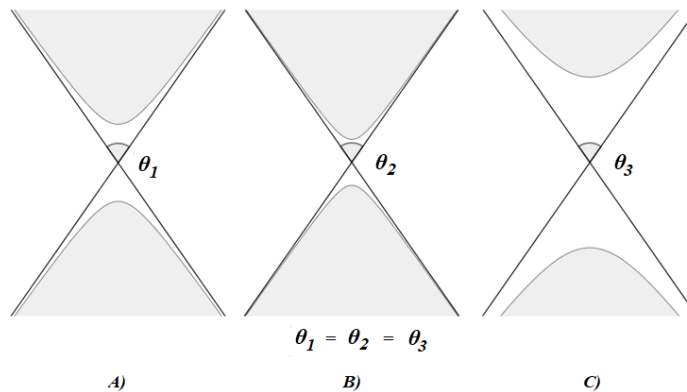


Figura 6.7. Hipérbolas con ángulos iguales entre sus asíntotas.

- 9) En una elipse a y b corresponden al semieje mayor y semieje menor, respectivamente, y c corresponde a la semidistancia entre los focos. Justifique su respuesta en cada inciso.
- A) ¿es posible construir una elipse con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$?
- B) ¿es posible construir una elipse con $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$?
- C) ¿es posible construir una elipse con $a = 4$, $b = 3$ y $c = 2$?
- 10) En una hipérbola a y b corresponden al semieje transversal y semieje conjugado, respectivamente, y c corresponde a la semidistancia entre los focos. Justifique su respuesta en cada inciso.
- A) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$?
- B) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$?
- C) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 4$, $b = 2$ y $c = 5$?
- 11) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor cero? Explique su respuesta.
- 12) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno? Explique su respuesta.
- 13) ¿Qué ocurre con la forma de la hipérbola cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno? Explique su respuesta.

Las entrevistas no estructuradas

Realizamos entrevistas no estructuradas para profundizar en la justificación de las respuestas e indagar acerca de las concepciones de los participantes respecto a la excentricidad.

6.1.4.3. Recolección de datos

Del cuestionario

El cuestionario postactividades se aplicó de manera presencial después de que los participantes exploraron las 23 actividades diseñadas. Tanto para la aplicación del cuestionario como para la recolección de los datos, se siguió un procedimiento similar al aplicado para la recolección de datos del cuestionario de diagnóstico 1.

De las entrevistas no estructuradas

Las entrevistas no estructuradas se aplicaron de manera presencial. Los docentes participantes fueron entrevistados personalmente en un aula escolar habilitada para tal fin en sus respectivos centros de trabajo. El investigador registró la entrevista en su libreta de notas.

6.2. Análisis de datos y discusión de resultados previos a la exploración de las actividades

6.2.1. Del Cuestionario de Casos límite

Analizamos las respuestas dadas por los participantes a cada una de las preguntas. Para el análisis de los datos se utilizó el marco CMEE. Categorizamos las respuestas utilizando sólo las categorías de las Tablas 3.1 y 3.2 dado que las preguntas no indagan sobre el CMI relacionado con la excentricidad.

Pregunta 1

Los cinco participantes expresaron que cuando $e \rightarrow 0$, la elipse se vuelve cada vez más ‘redonda’. Explicaron que esto ocurre porque cuando $e = 0$ la curva es una circunferencia [CCK-AB-5].

Pregunta 2

Cuatro participantes mencionaron que cuando $e \rightarrow 1$, la elipse se vuelve cada vez más alargada [CCK-AB-4]. Explicaron que $e = c/a$ [CCK-AB-1], por lo que $e \rightarrow 1$ sólo cuando la distancia entre los focos tiende a ser igual a la distancia entre los vértices y en ese caso la elipse se vuelve alargada. El participante restante comentó que $b \rightarrow 0$, por lo que la elipse se ‘aplata’ hasta parecer un segmento Aunque este participante no hace alusión a la distancia entre los focos, la figura que muestra (Figura 6.8) pone en evidencia que se basa en que $c \rightarrow a$, con $a > 0$ fija y que la elipse tiende al segmento de extremos los vértices [SCK-AB-3].

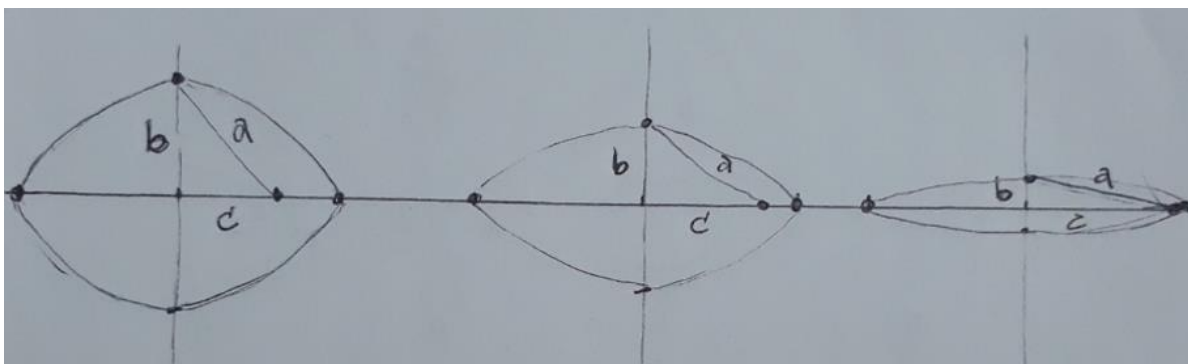


Figura 6.8. La elipse tiende a un segmento

Pregunta 3

Los cinco participantes expresaron que cuando $e \rightarrow 1$ la hipérbola tiende a una parábola. Tres participantes justificaron diciendo que la parábola tiene excentricidad uno (CCK-AFD-3), por lo que si la excentricidad de la hipérbola tiende a uno, entonces la hipérbola tiende a la parábola. Los otros dos participantes no explicaron su respuesta.

6.2.2. Del Cuestionario de Diagnóstico 2 y las entrevistas

Los profesores no respondieron las preguntas 3, 5, 9, 10 y 12; sin embargo, cuando fueron entrevistados dieron sus razones para no contestar esas preguntas. En la Tabla 6.1, mostramos los datos obtenidos de las respuestas al resto de preguntas. Hemos categorizado las respuestas según los tres subdominios de nuestro marco CMEE.

Pregunta 1

Los quince participantes que respondieron esta pregunta mostraron vagas nociones de excentricidad. Por ejemplo, nueve de ellos expresaron que la excentricidad es un cociente de la forma c/a (CCK-AB-1). En su breve descripción de la excentricidad, no se refieren a la excentricidad como un medio para describir la forma de la elipse y la hipérbola. Sin embargo, sus respuestas a la pregunta 6 revelan que tienen algunas ideas sobre la relación entre la excentricidad y la forma de las curvas. Cuando los docentes fueron entrevistados, mostraron signos de que necesitaban ser más precisos sobre el significado de las constantes a y c . Los maestros no identificaron fácilmente la constante a en una ecuación específica de una elipse. Seis profesores solo recordaron que había una fórmula para calcular la excentricidad, pero no pudieron dar más detalles. Uno de los profesores afirma que 'la excentricidad es la distancia entre los focos de la cónica dividida por el eje real de la cónica'. Durante la entrevista, el

profesor aclaró que el ‘eje real de la cónica’ significaba la distancia entre los vértices (CCK). Su respuesta revela que el maestro todavía no se apropia de la terminología correspondiente a los elementos geométricos de las cónicas.

Tabla 6.1. Categorización del conocimiento mostrado por los docentes

Pregunta	CCK	SCK	CMi
1	Expresan que la excentricidad es un cociente de la forma c/a . No mencionan la relación entre el valor de la excentricidad y el tipo de cónica correspondiente	No aplica en esta pregunta.	No aplica en esta pregunta.
2	Utilizaron expresiones como 'ancha' o 'aplastada' para referirse a cómo la excentricidad se refleja en la redondez de las elipses. Cuando c es cero, la elipse se convierte en un círculo y su excentricidad es cero	No explican cómo se relaciona la magnitud de la excentricidad con la forma de la elipse.	No aplica en esta pregunta.
4	Un maestro señaló que al cambiar la excentricidad cambia la apertura de las ramas de la hipérbola; otro maestro mostró un conocimiento erróneo al mencionar que 'a medida que [la excentricidad] se aproxima a 1, entonces [la hipérbola] es más redonda'	No explican cómo se relaciona la magnitud de la excentricidad con la forma de las ramas de la hipérbola.	No aplica en esta pregunta.
6	Ocho profesores conocen los rangos de excentricidad correspondientes a cada tipo de cónica, por lo que establecen el orden elipse parábola-hipérbola. El resto de los profesores no muestran este conocimiento	No muestran conocer la relación entre los valores de la excentricidad y la forma de las cónicas.	No aplica en esta pregunta.
7	Identifican la cónica que representa cada ecuación Saben vagamente que en las ecuaciones los denominadores se corresponden con los valores de los semiejes.	No relacionan correctamente los denominadores de las ecuaciones con los semiejes de las curvas.	Sustituyen en la fórmula de la excentricidad sin distinguir entre los semiejes.
8	Saben que es posible obtener la excentricidad de una elipse conociendo la ubicación de sus focos y sus vértices en un sistema de ejes cartesianos.	No muestran conocimiento de que las cónicas se definen como lugares geométricos o como la intersección de un cono y un plano. En estos casos, no se requiere ningún sistema de referencia para determinar su excentricidad	No aplica en esta pregunta.
11	Saben que las elipses situadas en planos paralelos son proporcionales.	No muestran saber que las elipses proporcionales tienen la misma excentricidad No muestran conocimiento del significado de excentricidad en el ACP.	No aplica en esta pregunta.

Pregunta 2

Todos los docentes expresaron que las elipses varían desde una forma “casi redonda” o “ancha” hasta una forma “casi plana” (CCK-AB-4); sin embargo, no mencionan que esto sucede cuando variamos la excentricidad de cero a uno, decir, no relacionan la variabilidad de la excentricidad con la forma o apariencia una elipse. Los docentes solo evocan este comportamiento de las curvas y no se refieren a cómo sería la variación de los valores de excentricidad para que esto suceda. Siete docentes agregaron que la excentricidad es cero cuando c es cero, y la elipse se convierte en un círculo (SCK-AB-2). Sorprendentemente, ninguno de los profesores menciona que las elipses con una excentricidad cercana a uno se asemejan más o menos a una parábola (SCK-AFD-2), o a un segmento (SCK-AB-4).

Pregunta 4

Sólo dos profesores respondieron a esta pregunta. Uno de los dos profesores afirmó: “cambiando la excentricidad cambia la abertura de las ramas de la hipérbola” (CCK-AB-6). Durante la entrevista, el docente señaló que las asíntotas determinan cuánto se abren las ramas de la hipérbola y que “las ramas son muy abiertas cuando la excentricidad es grande, y la hipérbola es casi plana cerca de su vértice porque debe ser una curva suave” (SCK-AB-18 y SCK-AB-19). El otro maestro dijo: “cuando la excentricidad se aproxima a 1, la hipérbola es más redonda”. Percibimos en la entrevista que el profesor quiso decir que la hipérbola se aproxima a la forma de una elipse, pero no da argumentos. Ninguno de los profesores comentó cómo se relaciona la magnitud de la excentricidad con la apariencia de las ramas de la hipérbola alrededor de su vértice.

Pregunta 6

Esta pregunta pide a los profesores que ordenen un conjunto dado de curvas según sus excentricidades. Ocho de los veinte docentes conocían los rangos de valores de excentricidad para cada tipo de cónica, por lo que atendiendo los rangos de valores de excentricidad separaron correctamente las curvas por grupos, es decir, un grupo de elipses (CCK-AFD-2), un grupo de parábolas (CCK-AFD-3) y un grupo de hipérbolas (CCK-AFD-4). Sin embargo, no consiguieron ordenar correctamente las elipses dentro del grupo de estas curvas; una situación similar ocurrió con las hipérbolas. Esto muestra que los profesores no lograron establecer, dentro de cada rango de valores de excentricidad, la relación entre los valores de

excentricidad y la forma de la curva. Los 12 profesores restantes no lograron ordenar las curvas de acuerdo con el rango de valores de excentricidad, es decir, al menos por tipo de cónica

Pregunta 7

Esta pregunta pide a los profesores que ordenen un conjunto de ecuaciones de cónicas según sus excentricidades. Los 20 profesores pudieron identificar a qué tipo de curva correspondía cada ecuación; es decir, reconocieron las ecuaciones de elipses (CMI-AB-6), parábolas (CMI-AB-7) e hipérbolas (CMI-AB-8). Sin embargo, en general, no pudieron determinar la excentricidad de las cónicas a partir de sus ecuaciones. Incluso, uno de los profesores que participó en la etapa diagnóstica respondió esta pregunta de la misma manera en que respondió la pregunta 8 del cuestionario de diagnóstico 1, es decir, volvió a mostrar que no tiene claridad de la relación entre los denominadores de los términos cuadráticos de las ecuaciones y los semiejes de las elipses.

Durante la entrevista, el docente comentó: “Reconozco que es una elipse porque es una suma de dos términos. En la ecuación de la elipse [horizontal], siempre el primer denominador corresponde a a^2 y el segundo denominador a b^2 ”. El docente evoca que la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es la de una elipse. Sin embargo, en un caso específico, necesita distinguir cuándo la ecuación representa una elipse horizontal y cuando una vertical, para lo cual se requiere comparar las constantes a y b . El maestro mostró comprensión instrumental en la aplicación de la fórmula de la excentricidad de la elipse (CMI-AB-6).

Pregunta 8

Once docentes respondieron que es necesario contar con un sistema de ejes cartesianos para ubicar elementos de la elipse (ver Figura 6.9). Algunos justificaron sus respuestas agregando que esto es necesario para determinar distancias y así poder calcular la excentricidad. Los profesores no consideraron que las cónicas se definen como lugares geométricos, por lo que, en principio, podemos estudiar estas curvas sin utilizar un sistema de coordenadas. En estas ideas de los docentes predomina la concepción de las cónicas como gráficas de ecuaciones. Sin embargo, los profesores olvidan que las ecuaciones sólo tienen sentido si se refieren a un sistema de coordenadas cartesianas (u otro sistema de coordenadas, por ejemplo, coordenadas

polares). Dos profesores señalan que no es necesario un sistema de coordenadas cartesianas; argumentan que “si tenemos la ecuación de la elipse, podemos calcular su excentricidad usando esta ecuación” (CMI).

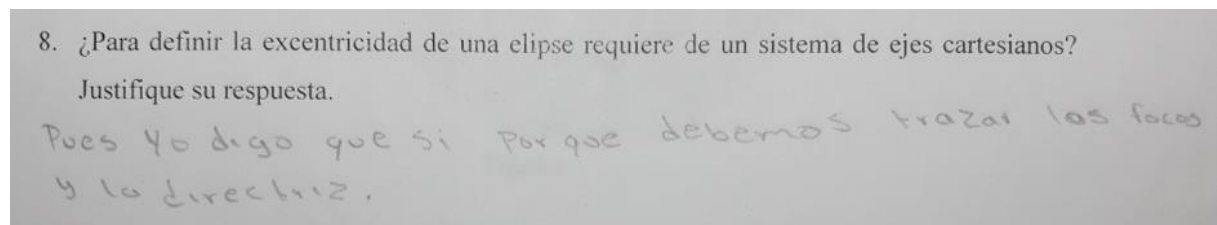


Figura 6.9. Concepción de excentricidad en un sistema de ejes cartesianos

Pregunta 11

Dieciséis profesores respondieron que las elipses son proporcionales, pero no expresan nada respecto a las excentricidades de las elipses mostradas. Dos elipses proporcionales o semejantes tienen la misma excentricidad, de hecho, todas las elipses proporcionales a una dada se caracterizan por tener la misma excentricidad, y viceversa; para un valor dado de excentricidad, todas las elipses con esa excentricidad son proporcionales (SCK). La razón es simple: el cociente b/a es el mismo en todas ellas (SCK-ACP-3). Los profesores no relacionan este significado de excentricidad con el par de elipses proporcionales obtenidas por la intersección de dos planos paralelos con el mismo cono. Este significado de excentricidad rara vez se discute en los libros de texto. Los otros cuatro profesores no responden a esta pregunta.

6.3. Conclusiones previas a la exploración de actividades

6.3.1. Del Cuestionario de Casos Límite

Los conocimientos que los docentes expresan respecto a la forma de la elipse cuando $e \rightarrow 0$ son exclusivos del AB. Ellos no dan muestras de conocer el AFD pues no comentan que la elipse puede tender a un punto cuando $e \rightarrow 0$ (SCK-AFD-1). Tampoco dan muestras de conocer la tendencia de esta curva desde el ACP (SCK-ACP-4).

Respecto a la forma de la elipse cuando $e \rightarrow 1$, los conocimientos que los docentes expresan también son exclusivos del AB. Los profesores no dan muestras de conocer el AFD al no

expresar que si $e \rightarrow 1$, entonces PF y PL tienden a ser iguales, por lo que la curva límite es una parábola. Tampoco muestran conocer el ACP, pues no comentan que, dependiendo cómo se mueva el plano de corte, la elipse puede tender a un segmento (SCK-ACP-6) o a una parábola (SCK-ACP-5), cuando $e \rightarrow 1$.

En relación con la forma de la hipérbola cuando $e \rightarrow 1$, los participantes no exhiben conocer el AFD al no mencionar que la hipérbola puede tender a una parábola debido a que PF tiende a ser igual a PL (SCK-AFD-2). Tampoco muestran conocer el ACP al no comentar que cuando $e \rightarrow 1$ la hipérbola puede tender a dos rayos (SCK-ACP-8) o a una parábola (SCK-ACP-7) dependiendo cómo se mueva el plano de corte. Ellos se limitaron a justificar que la hipérbola tiende a la parábola porque la parábola tiene $e = 1$ (CCK-AFD-3)

6.3.2. Del Cuestionario de Diagnóstico 2 y sus entrevistas

Los resultados derivados del análisis de los datos obtenidos con el cuestionario de diagnóstico 2, fueron en gran medida similares a los resultados emanados del análisis de los datos obtenidos con el cuestionario de diagnóstico 1; por esta razón, y con el afán de no ser repetitivos, retomamos las conclusiones obtenidas en la etapa diagnóstica como conclusiones del cuestionario de diagnóstico 2.

6.3.3. Consideraciones en relación con los resultados

Derivados de los nuevos resultados, que en gran medida son similares a los obtenidos en la etapa diagnóstica, reafirmamos nuestra convicción de llevar a cabo la exploración de las actividades ya diseñadas con el objetivo general de ayudar a los participantes a fortalecer e incrementar su SCK.

6.4. Exploración de las actividades

6.4.1. Objetivo de la exploración de las actividades

El objetivo de la exploración fue evaluar los efectos que ésta produce en las concepciones y conocimientos de los docentes. La evidencia se obtuvo mediante la confrontación de las conclusiones de la etapa diagnóstica con las conclusiones que obtuvimos como resultados del análisis de los datos recolectados con los instrumentos de evaluación utilizados después de la exploración de las actividades.

6.4.2. Exploración virtual de las actividades

El largo tiempo de pandemia COVID-19 imposibilitó que las actividades diseñadas fueran exploradas de manera presencial, por lo que resultó acertada nuestra propuesta de utilizar nuevas tecnologías y que los docentes interactuaran con las actividades de manera virtual. Las actividades no fueron planteadas para desarrollarse de manera secuencial, por lo que los profesores pudieron trabajar de manera autónoma, tan solo limitados por el tiempo asignado para la exploración de las actividades. Las ligas de las actividades fueron enviadas a los participantes vía correo electrónico o por teléfono celular mediante la aplicación de WhatsApp. Los participantes exploraron las actividades de forma individual, con sus propios equipos de cómputo y necesariamente debieron acceso a internet. Los participantes contaron en todo momento con el apoyo del investigador.

Cabe destacar que los applets de GeoGebra considerados en las actividades 7A, 7B, 7C, 14A, 14B y 14C corresponden a situaciones de curvas límite cuando $e \rightarrow 0$ y cuando $e \rightarrow 1$. Estos applets fueron retomados, reorganizados e incrustados en eXeLearning para formar parte de una nueva actividad alojada en DriveToWeb.

Las ligas enviadas a los profesores para explorar las actividades fueron: para la elipse https://z7xdb7ow3mk7bmhvyk2w9g-on.driv.tw/ELIPSE_19-OCT-21/, para la hipérbola https://z7xdb7ow3mk7bmhvyk2w9g-on.driv.tw/HIPRBOLA_18-OCT-21/ y para los casos límite https://z7xdb7ow3mk7bmhvyk2w9g-on.driv.tw/Curvas_y_excentricidades_lmite/.

6.4.2.1. Exploración virtual de la actividad de casos límite

Durante cuatro semanas los cinco participantes interactuaron con los applets diseñados con GeoGebra. El número de sesiones por semana, así como el tiempo de cada sesión, quedó a criterio de cada participante. Los applets muestran diversas situaciones de curvas límite cuando $e \rightarrow 0$ y cuando $e \rightarrow 1$, tanto en el plano como en el espacio. En el espacio las variaciones de las curvas se logran mediante un cono fijo y un plano que se mueve con cierta libertad. Por ejemplo, se muestra cómo la elipse puede tender a un segmento o a una parábola, según la posición a la que se lleve el plano. Quizá sea difícil imaginar cómo podríamos variar el plano para lograr esta situación de límite, el applet nos muestra cómo lograrlo. En el acercamiento foco-directriz, precisamos lo que significa que las elipses tiendan a una parábola.

Esta concepción de la parábola como límite de elipses comúnmente está soportada en lo que se percibe en el acercamiento cono-plano, lo cual tiene un rasgo de creencia.

6.4.2.2. Exploración virtual de las 23 actividades

Se acordó con los veinte participantes explorar individualmente las 23 actividades a lo largo de diez semanas como máximo.

6.4.2.3. Ligas de las actividades

Ante la posible inestabilidad del sitio de alojamiento web utilizado, DiveToWeb (drv.tw), consideramos pertinente presentar en la Tabla 5.2. las ligas de los applets de GeoGebra incrustado en las 23 actividades.

Tabla 6.2. Ligas de las actividades.

Act.	Liga
1	https://www.geogebra.org/m/zqxyjkzj , https://www.geogebra.org/m/vf82cmxu
2	https://www.geogebra.org/m/djkbrjgz , https://www.geogebra.org/m/fthb8m4k
3	https://www.geogebra.org/m/cgqweega
4A	https://www.geogebra.org/m/sdeygxbe
4B	https://www.geogebra.org/m/ahgq592n
5	https://www.geogebra.org/m/mmkg9wzx
6A	https://www.geogebra.org/m/myrm2qnx
6B	https://www.geogebra.org/m/guunhtdw
7A	https://www.geogebra.org/m/rdegbeau
7B	https://www.geogebra.org/m/gvjsgah3 , https://www.geogebra.org/m/nwzm8xs4
7C	https://www.geogebra.org/m/pyyxjkdj
8A	https://www.geogebra.org/m/pekp5w5w
8B	https://www.geogebra.org/m/tn7pvsq4 , https://www.geogebra.org/m/twunv3vd
8C	https://www.geogebra.org/m/wkkhghg2
9	https://www.geogebra.org/m/kggytj9w
10A	https://www.geogebra.org/m/uuuantpg
10B	https://www.geogebra.org/m/n6sjw62w
11	https://www.geogebra.org/m/p4kd6s66
12	https://www.geogebra.org/m/warkrkq8
13	https://www.geogebra.org/m/frvh49kp
14A	https://www.geogebra.org/m/cjue3mtw
14B	https://www.geogebra.org/m/fufgaz2r
14C	https://www.geogebra.org/m/bd9yszdk , https://www.geogebra.org/m/bd9yszdk

6.5. Análisis de datos y discusión de resultados posteriores a la exploración de las actividades

Se presenta el análisis de los datos y la discusión de los resultados finales a partir de identificar los conocimientos y concepciones presentes en los procesos matemáticos que los profesores desarrollaron mientras resolvieron, o intentaron resolver, las preguntas del cuestionario de casos límite y del cuestionario postactividades, y al responder, algunos de ellos, las entrevistas no estructuradas. Para el análisis de las respuestas se utilizó el marco *Conocimientos Matemáticos para la enseñanza de la excentricidad*.

6.5.1. Del Cuestionario de Casos límite

Al término del tiempo asignado para el desarrollo de la actividad de casos límite, se aplicó nuevamente el cuestionario de casos límite. Los nuevos datos se analizaron y se obtuvieron nuevos resultados. Confrontar los nuevos resultados con los resultados iniciales proporcionó la evidencia empírica del conocimiento alcanzado, lo que permitió evaluar la pertinencia de la actividad diseñada.

Pregunta 1

Tres participantes expresaron que cuando $e \rightarrow 0$, la elipse, además de tender a la circunferencia (SCK-AB-2), también puede tender a un punto (SCK-AFD-1) si a la elipse se le considera como el lugar geométrico de un punto P que cumple ciertas condiciones en relación con un punto y una recta, ambos fijos. Ninguno de ellos fue explícito respecto a las condiciones que debe cumplir P , así como tampoco explicaron por qué la elipse tiende a un punto. Los otros dos profesores no mostraron nuevos conocimientos.

Pregunta 2

Dos participantes respondieron que si $e \rightarrow 1$, la elipse tiende a un segmento; uno de ellos explicó “cuando los focos tienden hacia los vértices el semieje menor tiende a cero y entonces la elipse se ‘alarga’ hasta parecer un segmento”. En la respuesta del profesor está implícito que $b/a \rightarrow 0$, por lo que puede considerarse que exhibe un SCK-AB-7. Un tercer docente, sin dar explicaciones, comentó: “la elipse puede tender a un segmento o a una parábola, dependiendo del enfoque que se considere”. Un cuarto participante, de manera incorrecta, explicó: “cuando el plano que corta al cono se mueve de manera que su ángulo de inclinación y el ángulo en la

base del cono tiendan a ser iguales, la elipse tiende a una parábola”. No podemos considerar esto un SCK dado que su argumento también podría aplicarse para cuando la elipse tiende a un segmento. El participante restante no mostró nuevos conocimientos.

Pregunta 3

Cuatro participantes expresaron que si $e \rightarrow 1$ la hipérbola tiende a una parábola porque PF y PL tienden a ser iguales y la condición $PF = PL$ corresponde a una parábola (SCK-AFD-2). Estos mismos profesores agregaron que también puede tender a dos rayos (SCK-ACP-8), aunque sólo uno explicó: “si el plano que corta al cono tiende a estar [ser tangente al cono] sobre una generatriz [en una generatriz] del cono, entonces la hipérbola se cierra cada vez más hasta parecer dos semirrectas”. El participante restante no mostró nuevos conocimientos.

6.5.2. De las entrevistas no estructuradas

Después de explorar la actividad y con la finalidad de profundizar en la justificación de algunas de sus respuestas, se aplicaron entrevistas no estructuradas a algunos participantes que respondieron el cuestionario de casos límite. Mostramos a continuación algunas partes de las entrevistas.

Entrevista a uno de los tres profesores que respondieron que la elipse tiende a un punto.

Investigador: En tu respuesta a la pregunta uno comentas que la elipse puede tender a un punto cuando $e \rightarrow 0$, ¿puedes comentarme un poco por qué la elipse tiende a un punto? Por favor, explícame lo más que puedas tus ideas.

Profesor: Bueno, en una de las actividades [uno de los applets] se define la excentricidad como un cociente: la distancia de todo punto P de la elipse al foco, entre la distancia de P a la directriz (CCK-AFD-1). Entonces, cuando hacemos tender la excentricidad a cero, la elipse se vuelve cada vez más pequeña porque la distancia P al foco tiende a cero, o sea que todos los puntos de la elipse tienden al foco, que está fijo (SCK-AFD-1).

Entrevista al profesor que respondió que “la elipse puede tender a un segmento o a una parábola dependiendo del enfoque que se considere”.

Investigador: En tu respuesta a la pregunta dos comentas que la elipse puede tender a un segmento o a una parábola. ¿Recuerdas en qué circunstancias

ocurren estos dos casos? Por favor, explícame lo más que puedas, tus ideas.

Profesor: Dependiendo del enfoque la elipse puede tender a curvas diferentes, aunque también dentro de un mismo [enfoque] pasa eso. Recuerdo que en el enfoque tridimensional $e \rightarrow 1$ de dos formas y en una de ellas la elipse tiende a una parábola y en la otra a un segmento (SCK-ACP-5 y SCK-ACP-6).

Investigador: ¿Puedes explicar esas dos formas a las que haces referencia?

Profesor: Bueno, tienen que ver con la forma en que el plano gira. Si el plano gira de manera que la elipse se hace cada vez más grande y los focos están cada vez más distantes entre ellos, la elipse tiende a la parábola (SCK-ACP-5). Y si el plano inclinado gira de manera que el otro vértice de la elipse se va hacia el vértice del cono, entonces la elipse se hace cada vez más alargada y tiende a un segmento (SCK-ACP-6).

Investigador: ¿Y qué relación hay entre los ángulos α y β cuando las elipses tienden a la parábola?

Profesor: No recuerdo, presté más atención a lo que le sucedía a la elipse al mover el plano inclinado.

Investigador: ¿Recuerda la posición límite del plano inclinado con respecto a la generatriz del cono, en cada caso?

Profesor: No, lo siento, no presté atención a eso.

Entrevista al participante que respondió: “si el plano que corta al cono tiende a estar sobre una generatriz del cono, entonces la hipérbola se cierra cada vez más hasta parecer dos semirrectas”.

Investigador: Por favor, coménteme ¿por qué en su respuesta a la pregunta tres dice que la hipérbola tiende a dos semirrectas cuando $e \rightarrow 1$?

Profesor: Mire, una rama de la hipérbola está en el cono superior y la otra rama en el cono inferior. Cuando giramos el plano inclinado para que la excentricidad tienda a uno, ambas ramas de la hipérbola se cierran cada vez más y se asemejan [cada a una] a una semirrecta (SCK-ACP-8).

Investigador: ¿Y qué relación hay entre los ángulos α y β cuando las hipérbolas tienden a dos semirrectas o rayos?

Profesor: La elipse tiende a dos semirrectas cuando $e \rightarrow 1$, entonces, para que la excentricidad tienda a uno los ángulos α y β deben ser casi iguales, (por lo de la fórmula $e = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$), pero como el cono es fijo, entonces β es fijo y como el plano rota sobre un vértice fijo, entonces α cambia y es quien debe tender a β , sí eso. Recuerdo que

hay dos casos en los que $\text{sen } \alpha \rightarrow \text{sen } \beta$, pero la hipérbola tiende a diferentes curvas. Estoy seguro de que un caso es el de las dos semirrectas (SCK-ACP-8).

Investigador: Está haciendo alusión al ACP, ¿recuerda cuál era la posición límite del plano en los dos casos que mencionas?

Profesor: Como le decía, en ambos casos $\text{sen } \alpha \rightarrow \text{sen } \beta$, pero el plano inclinado tiende a posiciones diferentes y por eso son diferentes curvas a las que tiende la hipérbola, aunque sólo recuerdo una, por eso respondí que cuando el plano inclinado rota sobre uno de los vértices de la hipérbola y tiende a estar sobre una generatriz del cono [tiende a ser tangente al cono], entonces la hipérbola tiende a dos rayos (SCK-ACP-7).

6.5.3. Del cuestionario postactividades

Al término del tiempo asignado para el desarrollo de las 23 actividades se aplicó el cuestionario postactividades para obtener nuevos datos, analizarlos y obtener nuevos resultados. Confrontar los nuevos resultados con los resultados iniciales dieron evidencia empírica del conocimiento alcanzado, permitiendo esto evaluar la pertinencia de las actividades diseñadas.

Pregunta 1

Los 20 profesores expresan que la excentricidad de la elipse toma valores entre cero y uno, y que su forma va desde muy redonda hasta muy alargada (CCK-AB-4), de ellos, 15 profesores coinciden en dar explicaciones tales como: “cuando la excentricidad toma valores muy cercanos a cero la elipse es muy circular y conforme la excentricidad toma valores que se acercan a uno, la forma de la elipse se hace más alargada” (SCK-AB-10). Sólo un profesor añade: “cuando el valor de la excentricidad es muy cercano a uno, la elipse se parece a una parábola”, sin embargo, no podemos categorizar este conocimiento como SCK-AFD-2 o SCK-ACP-5 por la escasa información en la respuesta dada.

Pregunta 2

Los 20 participantes calcularon c con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (CMI-AB-2), para después calcular e con $e = c/a$ (CMI-AB-1). Relacionaron de manera correcta los valores de menor excentricidad con elipses más circulares y los valores de mayor excentricidad con elipses menos circulares (SCK-AB-10). Resaltamos que aunque las respuestas de los participantes fueron correctas, ninguno de ellos consideró el cociente b/a para determinar la redondez de la elipse.

Pregunta 3

Los veinte profesores usaron la expresión $e = c/a$ (CMI-AB-1) y relacionaron correctamente los valores de excentricidad calculados con la redondez de las elipses (SCK-AB-10), por lo que respondieron correctamente esta pregunta.

Pregunta 4

Los 20 profesores mencionaron que la variabilidad de la excentricidad se refleja en lo abierto o cerrado de las ramas de la hipérbola (CCK-AB-6), pero sólo 12 de ellos explicaron que a menor e las ramas de la hipérbola son más cerradas, y que a mayor e las ramas de la hipérbola son más abiertas (SCK-AB-18).

Pregunta 5

Catorce docentes ordenaron correctamente las hipérbolas con las siguientes consideraciones: ocho profesores construyeron rectángulos de lados $2a$ y $2b$, trazaron las rectas que pasan por las diagonales del rectángulo y esbozaron las hipérbolas correspondientes; cinco profesores consideraron la razón b/a para determinar la abertura de las ramas de las hipérbolas (SCK - AB-14); un profesor utilizó $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ para obtener el valor de c (CMI-AB-2), luego lo substituyó en $e = c/a$ para obtener la excentricidad de cada hipérbola (CMI-AB-1) y los valores de excentricidad obtenidos los relacionó con la abertura de las ramas (SCK -AB-16). Seis docentes, sin dar explicaciones, ordenaron incorrectamente las hipérbolas.

Pregunta 6

Los 20 docentes exhiben conocer que las hipérbolas de ramas más cerradas tienen menor excentricidad, por lo que todos ordenan correctamente las gráficas (SCK-AB-18).

Pregunta 7

A) Los veinte profesores identificaron la cónica que representa cada ecuación, por lo que no tuvieron problemas en reconocer elipses (CMI-AB-6), parábolas (CMI-AB-7) e hipérbolas (CMI-AB-8). Para determinar la horizontalidad o verticalidad de las elipses: catorce profesores mostraron conocer la relación entre los términos cuadráticos y sus correspondientes denominadores (SCK-AB-12); los seis docentes restantes no lograron clasificarlas correctamente. Para determinar la horizontalidad o verticalidad de las parábolas: diecisiete

profesores las clasificaron correctamente, pero no exhibieron en que se basaron para hacerlo; los tres docentes restantes graficaron puntos de ellas para poder clasificarlas. Para determinar la horizontalidad o verticalidad de las hipérbolas: siete profesores mostraron conocer la relación entre los términos cuadráticos y sus correspondientes signos (SCK-AB-22); los trece profesores restantes no lograron clasificarlas correctamente, ni exhibieron en que se basaron para dar su respuesta.

B) Los veinte profesores calcularon correctamente la excentricidad de la cónica (a), primero calcularon el valor de c con la expresión $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y lo usaron en $e = c/a$; pero no se considera CMI dado que ellos identificaron en la ecuación (a) los correspondientes valores de a^2 y b^2 . Para la cónica (c), siete profesores calcularon correctamente su excentricidad calculando primero el valor de c con la expresión $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (CMI-AB-3) y lo usaron en $e = c/a$ (CMI-AB-1); consideramos que es un CMI dado que no exhiben en sus cálculos si hacen distinción entre a^2 y b^2 . Trece profesores no respondieron esta parte de la pregunta 7.

Pregunta 8

Dieciocho profesores expresan, de diferentes maneras, que las hipérbolas tienen la misma excentricidad porque sus ramas yacen entre asíntotas que tienen el mismo ángulo (SCK-AB-20). Dos profesores las ordenan considerando la lejanía entre los vértices de cada hipérbola, por lo que respondieron que la hipérbola (c) tiene mayor excentricidad.

Pregunta 9

Los 20 profesores expresan que en (A) no es posible construir una elipse porque a debe ser mayor que b (CCK-AB-7). Los 20 profesores mencionan que en (B) es posible construir una elipse porque $a > b$ (CCK-AB-7), sin embargo ninguno de los docentes hace alusión al cumplimiento de $a^2 = b^2 + c^2$ (SCK-AB-5). Para (C), 16 profesores señalan que no es posible construir una elipse porque, aunque $a > b$ (CCK-AB-7), no se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ (SCK-AB-5); los 4 docentes restantes no dan muestras de recordar el cumplimiento de la terna pitagórica pues sólo mencionan que es posible construir una elipse dado que $a > b$ (CCK-AB-7).

Pregunta 10

Los veinte profesores expresan que en (A) es posible construir una hipérbola porque $c > a$ (CCK-AB-8) y, catorce de ellos, agregan que es posible porque se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ (SCK-AB-14). Los veinte profesores mencionan que en (B) no es posible construir una hipérbola porque la distancia entre los focos debe ser mayor a la distancia entre los vértices (CCK-AB-8). Para (C), los veinte profesores responden que es posible construir una hipérbola porque la distancia entre los focos es mayor a la distancia entre los vértices (CCK-AB-8); contrario al caso de la elipse, para la hipérbola los profesores no dan muestras de recordar el cumplimiento de la terna pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$ (SCK -AB-14).

Pregunta 11

Los veinte participantes expresan que cuando $e \rightarrow 0$, la elipse tiende a la circunferencia (CCK-AB-5); pero además, dieciocho de ellos exhiben SCK al comentar que también puede tender a un punto, aunque no mencionan bajo qué condiciones (o acercamiento) puede ocurrir esto. Un participante expresa “el plano tiende a cortar al cono casi de forma horizontal por lo que la elipse es casi una circunferencia”, lo que puede interpretarse como un SCK-ACP-4.

Pregunta 12

Los veinte participantes mencionan que la elipse tiende a ser muy alargada hasta parecer un segmento; este conocimiento no podemos clasificarlo como SCK-AB-3, SCK-AB-4 o SCK-ACP-6 por falta de más información en la respuesta. Cinco profesores agregaron, sin más detalles, que también puede tender a una parábola, lo que tampoco puede categorizarse como SCK-AFD-2 o SCK-ACP-7 por lo breve de la respuesta.

Pregunta 13

Los veinte participantes comentan que cuando $e \rightarrow 1$ las ramas de la hipérbola van cerrándose hasta parecer una parábola. Por lo breve de la respuesta no podemos categorizar este conocimiento como SCK-AFD-3 o SCK-ACP-7.

6.5.4. De las entrevistas no estructuradas

Con la finalidad de profundizar en la justificación de algunas de sus respuestas y para indagar respecto a sus concepciones, las entrevistas no estructuradas se aplicaron después de la exploración de las actividades a algunos participantes que respondieron el cuestionario postactividades. Enseguida se muestran partes de algunas entrevistas.

El profesor 4 respondió a la pregunta 12, sin dar explicación alguna: “cuando $e \rightarrow 1$ la elipse puede tender a una parábola”. Para indagar más en sus conocimientos y concepciones se le invitó a participar en una entrevista y él accedió.

Investigador: Profesor, ¿recuerda bajo que circunstancia la elipse tiende a una parábola?

Profesor 4: Sí, cuando el plano que corta al cono se mueve de manera que la elipse se hace cada vez más grande y los focos están cada vez más distantes entre ellos, creo que un foco se va a infinito.

Investigador: Cuando $e \rightarrow 1$ ¿recuerda qué pasa con el ángulo de inclinación (α) del plano de corte?

Profesor 4: No recuerdo, presté más atención a lo que le sucedía a la elipse.

Investigador: ¿Cuál es la posición del plano inclinado cuando, como usted comenta, un foco se va a infinito?

Profesor 4: Ah, ya recuerdo, el plano se va moviendo hasta ser paralelo a un lado [a una generatriz] del cono y entonces α y β son iguales.

Investigador: Le pregunto nuevamente, ¿recuerda bajo que circunstancia la elipse tiende a una parábola?

Profesor 4: Si, cuando el plano inclinado tiende a ser paralelo a un lado [a una generatriz] del cono (SCK-ACP-5).

Investigador: Excelente. Agradezco su apoyo, profesor.

El profesor 12 respondió a la pregunta 13: “cuando $e \rightarrow 1$ las ramas de la hipérbola se cierran cada vez más hasta parecer una parábola”. Para obtener una explicación de su respuesta se le pidió participar en una entrevista y él accedió.

Investigador: Por favor, ¿podría explicarme un poco más su respuesta?

Profesor 12: En el applet del acercamiento foco-directriz se puede ver que cuando $e \rightarrow 1$ la hipérbola tiende a la parábola, incluso cuando $e = 1$ la cónica es una parábola (SCK-AFD-3).

Investigador: En el ACP, cuando $e \rightarrow 1$, la hipérbola puede tender a dos curvas diferentes, una es la parábola ¿recuerda usted cuál es la otra?

Profesor 12: No, la verdad no recuerdo.

Investigador: Esta bien, muchas gracias, profesor. Sus respuestas son muy valiosas para la investigación.

6.6. Conclusiones de la etapa de exploración

Como resultado del análisis de las respuestas obtenidas por medio de los instrumentos de evaluación aplicados después de la etapa de experimentación y a expensas de sonar repetitivos por coincidir en parte con las conclusiones de la etapa diagnóstica, a continuación mostramos las conclusiones que permitieron dar nuevas respuestas a nuestra segunda pregunta de investigación y a sus preguntas auxiliares.

6.6.1. Acerca de lo que entiende el profesor por excentricidad.

El concepto de excentricidad que exhibieron los profesores estuvo relacionado con la definición en términos del AB, aunque en las entrevistas algunos de ellos dan muestras de conocer también el concepto de excentricidad desde el AFD o el ACP. Además, los profesores expresan relaciones correctas entre los valores de la excentricidad y la forma de las cónicas, es decir, entienden que la excentricidad determina la forma de la cónica.

6.6.2. Acerca de qué interpretación geométrica le da el profesor a la excentricidad de la elipse.

Los profesores exhiben saber que toda elipse tiene una excentricidad cuyo valor está en el rango de valores $0 < e < 1$ y establecen la relación entre la forma de la elipse y el valor de su excentricidad, es decir, muestran darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la elipse.

Los profesores identifican la ecuación canónica que representa a la elipse y casi la mitad de los profesores establecen la relación de correspondencia entre los valores de los parámetros a y b que aparecen en la ecuación y los elementos geométricos de la elipse que estos representan, esto puede deducirse a partir de que logran identificar la elipse horizontal y la elipse vertical, así como determinar la excentricidad de ellas a partir de su respectiva ecuación canónica.

6.6.3. Acerca de qué interpretación geométrica que le da el profesor a la excentricidad de la hipérbola.

Los profesores saben que toda hipérbola tiene una excentricidad con valor $e > 1$ y establecen la relación entre la forma de las ramas de la hipérbola y diferentes valores de excentricidad, es decir, muestran darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la hipérbola.

Los profesores reconocen la ecuación canónica que representa a una hipérbola, aunque menos de la mitad reconoce los elementos geométricos que representan los denominadores, por lo que pocos de ellos calculan correctamente la excentricidad de la hipérbola a partir de su ecuación canónica.

Los profesores interpretan geoméricamente la relación entre las asíntotas de una hipérbola, la abertura de sus ramas y su correspondiente excentricidad.

6.6.4. Acerca de a qué lugar geométrico le asigna el profesor la excentricidad cero.

Los profesores dejan ver que $e = 0$ no la asocian exclusivamente a la circunferencia, sino también a un punto. Incluso, dos profesores mencionan la circunferencia como figura límite cuando $e \rightarrow 0$.

6.6.5. Acerca de los casos límite

Los profesores exhiben que cuando $e \rightarrow 1$, tanto la elipse como la hipérbola pueden tender a curvas diferentes dependiendo del enfoque desde el que la cónica se analice. Se observa que los profesores, además del AB, tienen nociones del AFD y del ACP.

6.7. Evaluación de los efectos de la experimentación

En virtud de que los cuestionarios de diagnóstico fueron diseñados con los mismos objetivos y que con ambos se obtuvieron resultados similares, decidimos que exclusivamente las conclusiones de la etapa diagnóstica fueran consideradas para confrontarse con las conclusiones obtenidas con los instrumentos de evaluación utilizados después de la exploración de actividades. El análisis comparativo de las conclusiones citadas nos brindó la evidencia empírica que permitió evaluar la fase de experimentación y con ella dar respuesta a la tercera pregunta de investigación. Enseguida mostramos las evidencias.

6.7.1. Respecto a lo que entiende el profesor por excentricidad.

Los profesores muestran entender que la excentricidad puede definirse desde diferentes acercamientos a las cónicas y que es un parámetro que determina la forma de la curva.

Evidencia 1: La mayoría de los docentes expresó la excentricidad en términos del AB, pero algunos también lo hicieron en términos del AFD y el ACP.

Los profesores muestran entender que la excentricidad es un parámetro que determina la forma de la curva.

Evidencia: Los profesores expresan, de diferentes maneras, relaciones correctas entre los valores de la excentricidad y la forma de las cónicas.

6.7.2. Respecto a la interpretación geométrica de la excentricidad de la elipse.

Los profesores muestran darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la elipse.

Evidencia: La mayoría de los docentes logró establecer que cuando los valores de la excentricidad van de casi cero a casi uno, las elipses van de formas casi circulares a formas alargadas, e incluso mencionan algunos que a formas casi parabólicas.

6.7.3. Respecto a la interpretación geométrica de la excentricidad de la hipérbola.

Los profesores muestran darle una correcta interpretación geométrica al valor de la excentricidad de la hipérbola.

Evidencia: Los profesores expresan que si los valores de excentricidad de la hipérbola van de casi uno a valores cada vez más grandes, las ramas de la hipérbola van de muy cerradas a ramas cada vez más abiertas.

Los profesores interpretan geoméricamente la relación entre las asíntotas de una hipérbola, la abertura de sus ramas y su correspondiente excentricidad.

Evidencia: Los profesores expresan que cuando la excentricidad es cercana a uno las ramas de las hipérbolas son muy cerradas y la abertura entre las asíntotas es pequeña. También expresan que si la excentricidad adquiere valores cada vez más grandes, las ramas de la hipérbola son cada vez más abiertas y la abertura entre las asíntotas es cada vez más grande.

6.7.4. Respecto al lugar geométrico para la excentricidad cero

Los profesores asocian $e = 0$ con la circunferencia, no sólo en el AB sino también en el ACP.

Evidencia: Los profesores exhiben rasgos de haber adquirido conocimientos relacionados con la excentricidad en el ACP al mencionar a la circunferencia como figura límite cuando $e \rightarrow 0$, mientras el plano tiende a ser “horizontal” [perpendicular al eje del cono].

Los profesores asocian $e = 0$ con otra curva diferente a la circunferencia.

Evidencia: Los profesores muestran conocer la definición de excentricidad desde el AFD al asociar $e = 0$ con un punto.

6.7.5. Respecto a la excentricidad a partir de la ecuación de la cónica.

Los profesores calculan correctamente el valor de la excentricidad de las cónicas a partir de su ecuación canónica.

Evidencia 1: Casi la mitad de los profesores lograron calcular correctamente la excentricidad de la elipse al poder establecer la relación de correspondencia entre los valores de los parámetros a y b que aparecen en la ecuación horizontal o vertical de la elipse y los elementos geométricos de la elipse que estos representan.

Evidencia 2: Casi la mitad de los profesores lograron calcular correctamente la excentricidad de la hipérbola al poder establecer la relación de correspondencia entre los valores de los parámetros a y b que aparecen en la ecuación horizontal o vertical de la hipérbola y los elementos geométricos de la hipérbola que estos representan.

6.8. Consideraciones en relación con los resultados

La falta de respuestas y/o las respuestas muy breves de algunos profesores a los instrumentos de evaluación utilizados antes de la etapa de exploración sugieren dos situaciones: (1) la influencia que ejercen los programas de estudio de geometría analítica del bachillerato, en los que se reduce la enseñanza de las cónicas a la manipulación de expresiones algebraicas carentes de análisis de aspectos de la forma de las curvas, sobre los conocimientos que el docente considera necesarios dominar para desarrollar su práctica docente, y (2) la falta de programas de capacitación docente que permitan al profesor el desarrollo de conocimiento especializado de contenido.

Ante esta situación, una tarea pendiente es el desarrollo de trabajos de investigación que analicen el contenido de los programas de estudio de geometría analítica y presenten nuevas propuestas metodológicas de enseñanza; propuestas en las que consideramos se debe privilegiar el contexto geométrico significativo de la excentricidad y no reducir su enseñanza a la adquisición de conocimientos instrumentales que poco favorecen el desarrollo de

conocimiento especializado de contenido. En este sentido, el empleo de SGD y de nuevas herramientas tecnológicas resultan de gran utilidad para la enseñanza-aprendizaje de la excentricidad pues permiten al usuario explorar situaciones en el contexto geométrico significativo de la excentricidad. Además, como muestran nuestros resultados, los conocimientos y concepciones que tienen los docentes de bachillerato con respecto a la excentricidad de las cónicas pueden verse incrementados y/o fortalecidos a través de la puesta en práctica de actividades que expongan con especial atención la excentricidad desde diferentes enfoques, con lo que se propicia el incremento y/o desarrollo de conocimiento especializado de contenido.

Finalmente, consideramos que un proyecto a futuro sería el diseño de actividades para llevar a cabo con profesores donde ellos participen en la elaboración de applets (con GeoGebra u otro software) relacionados con la exploración de situaciones geométricas con la cónicas, y así no sean solamente manipuladores de deslizadores para observar el comportamiento de las curvas. La sola observación de los fenómenos geométricos (aritméticos o de otra naturaleza) suele ser el único sustento en la adquisición de su conocimiento, difícilmente el observador cuestiona o analiza lo que está mirando en la computadora. En palabras de Kovács (2021) “La tecnología actual y las herramientas disponibles permiten esbozar conjeturas muy fácilmente y aceptarlas demasiado rápido como afirmaciones verdaderas, sin verificar dos veces su veracidad”. El diseño de los applets les ayudaría a reflexionar con mayor profundidad sobre sus conocimientos de las cónicas; jugaría el mismo papel que podría jugar el diseño de los ejercicios o problemas que usa para sus clases diarias.

REFERENCIAS

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L., & Novotna, J. (2005). *Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education*. 359-381.
<https://doi.org/10.1007/s10649-005-5072-6>
- Alonso-González, C., Campoy, R., Navarro, M. Á. y Rodríguez, M. (2019). Experimentando con GeoGebra y las curvas cónicas en la asignatura Geometría Lineal. En R. Roig-Vila (Ed.), *Investigación e innovación en la Enseñanza Superior. Nuevos contextos, nuevas ideas* (pp. 827-836).
- Apostol, T. M. (1966). *Calculus, Volume 1* (Second Edi). John Wiley and Sons.
- Ayoub, A. B. (2003). The Eccentricity of a Conic Section. *The College Mathematics Journal*, 34(2), 116-121. <https://doi.org/10.1080/07468342.2003.11921994>
- Ayvaz, Z., & Ozdemir, S. (2010). Using Geogebra as an information technology tool : parabola teaching. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 565-572.
<https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.198>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
<https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180. <https://doi.org/10.3102/0002831209345157>
- Blömeke, S., & Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 44(3), 223-247. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7>
- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 617-624).
- Brannan, D. A., Esplen, M. F., & Gray, J. J. (2012). *Geometry* (Second edi). Cambridge University Press.
- Contreras, A., Cañada, L. O. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 28(3), 367-384.
<http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/210806>
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (1994). *Calculus with analytic geometry* (Fourth edi). Prentice-Hall Inc.
- Elk, S. B. (1997). The cross product of two vectors is not just another vector -- a major misconception being perpetuated in calculus and vector analysis textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(4), 531-543.
<https://doi.org/10.1080/0020739970280407>
- Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in*

Mathematics, 29, 1-20.

- Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164).
- Florio, E. (2022). The Parabola : Section of a Cone or Locus of Points of a Plane ? Tips for Teaching of Geometry from Some Writings by Mydorge and Wallis. *Mathematics*, 10(974). <https://doi.org/10.3390/math10060974>
- Foley, G. D. (2011). The Shape of an Ellipse. *The Mathematics Teacher*, 105(4), 274-279. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.4.0274>
- Glaister, E. M., & Glaister, P. (2006). Introducing conics without eccentricity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 5211(June), 235-245. <https://doi.org/10.1080/00207390500285800>
- Gollish, S., & Karneyc, B. (2018). So you need to choose a textbook: An investigation into first-year engineering calculus textbooks in Canada. *Sciences-New York*, 1-22.
- González, N., Grimaldy, L. N. y Garcés, W. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso de geogebra. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, ISSN-e 2224-2643., 12(4), 130-141.
- Gonzalez Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127. <https://doi.org/10.1007/BF00305892>
- Hahn, A. J. (1998). *Basic Calculus From Archimides to Newton to its Role in Science*. SpringerVerlag.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En A. Gutierrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues* (pp. 109-149). http://dx.doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Karakok, G., Soto-Johnson, H., & Dyben, S. A. (2014). Secondary teachers' conception of various forms of complex numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(4), 327-351. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9288-1>
- Kovács, Z. (2021). Two almost-circles , and two real ones. *Mathematics in Computer Science*. <https://doi.org/10.1007/s11786-021-00506-3>
- Kurtuluş, A., & Ada, T. (2017). Evaluation of Mathematics Teacher Candidates' the Ellipse Knowledge According to the Revised Bloom's Taxonomy. *Universal Journal of Educational Research*, 5(10), 1782-1794. <https://doi.org/10.13189/ujer.2017.051017>
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Calculus* (Ninth Edit). Brooks/Cole CENGAGE Learning.
- Lehmann, C. H. (1964). *Analytic Geometry*. J. Willey and Sons.
- Leithold, L. (1981). *The Calculus, with Analytic Geometry* (Fourth edi). Harper & Row.
- Ljajko, E., & Ibro, V. (2013). Development of ideas in a GeoGebra – aided mathematics instruction. *Mevlana International Journal of Education*, 3(3), 1-7.

<https://doi.org/10.13054/mije.si.2013.01>

- Mapolelo, D. C., & Akinsola, M. K. (2015). *Preparation of Mathematics Teachers : Lessons from Review of Literature on Teachers ' Knowledge , Beliefs , and Teacher Education*. 3(4), 505-513. <https://doi.org/10.12691/education-3-4-18>
- Moreno, M. y Giménez, A. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(2), 265-280.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nevado, L., Portaankorva-Koivisto, P., Pehkonen, E., Varas, L. ., Hannula, M. S., & Näveri, L. (2015). Chilean and Finnish Teachers' Conceptions on Mathematics Teaching. En E. A. F. E. F. in der M. Bernack-Schüler C., Erens R., Leuders T. (Ed.), *Views and Beliefs in Mathematics Education*. (Número May). Springer Spektrum, Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-09614-4>
- Ortega, F. (2014). *La Resolución de Problemas y el Uso de un Sistema de Geometría Dinámica en el Estudio de las Secciones Cónica*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Paez M., R. E., & Vivier, L. (2013). Teachers ' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 209-229. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.005>
- Pantazi, A., & Doukakis, S. (2020). An Educational Scenario for the Learning of the Conic Section: Studying the Ellipse with the Use of Digital Tools and Elements of Differentiated Instruction and Cognitive Neurosciences. En P. Vlamos (Ed.), *GeNeDis 2018. Advances in Experimental Medicine and Biology*. (pp. 31-40). Springer, Cham. https://doi.org/doi.org/10.1007/978-3-030-32622-7_3
- Paoletti, T., Lee, H. Y., Rahman, Z., & Vishnubhotla, M. (2020). Comparing graphical representations in mathematics, science, and engineering textbooks and practitioner journals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1847336>
- Philipp, R. A. (2014). Commentary on Section 3: Research on Teachers' Focusing on Children's Thinking in Learning to Teach: Teacher Noticing and Learning Trajectories. En J. J. Lo, K. R. Leatham, L. R. Van Zoest, & SpringerLink (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (1.^a ed., pp. 285-293). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_15,
- Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: Student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(2), 135-150. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00119-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00119-0)
- Randahl, M. (2016). The mathematics textbook at tertiary level as curriculum material – exploring the teacher ' s decision-making process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1133853>
- Rider, P. R. (1947). *Analytic Geometry*. The MacMillan Company.
- Roanes-Lozano, E. (2017). A Brief Note on the Approach to the Conic Sections of a Right Circular Cone from Dynamic Geometry. *Mathematics in Computer Science*, 11(3-4), 439-448. <https://doi.org/10.1007/s11786-017-0307-3>
- Salinas, P., & Pulido, R. (2015). Visualization of Conics through Augmented Reality.

- Procedia - Procedia Computer Science*, 75(81), 147-150.
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.231>
- SEP. (2017). *Modelo educativo para la educación obligatoria* (Segunda Ed).
https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: A Conception of Teacher Knowledge. *Educational Researcher*, 10(1), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Simmons, G. F. (1996). *Calculus with Analytic Geometry* (Second ed). McGraw-Hill, Inc.
- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching (UK)*, 1-12.
- Sokolowski, A., Yalvac, B., & Loving, C. (2011). Science modelling in pre-calculus : how to make mathematics problems contextually meaningful. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(3), 283-297.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.526255>
- Spain, B. (1963). *Analytical Geometry* (P. Press (ed.)).
- Srinivasan, V. K. (2014). Ellipses of constant eccentricity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), 938-946.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.892162>
- Steele, M. D., Hillen, A. F., & Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: The case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 451-482. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9243-6>
- Sundberg, M. (2015). A Study of Mathematics Teachers Conceptions of Their Own Knowledge of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). *Views and Beliefs in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-09614-4>
- Swokowski, E. W. (1979). *Calculus : with analytic geometry* (Second Ed). Prindle, Weber & Schmidt.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Yan, X., Mason, J., & Hanna, G. (2018). Probing interactions in exploratory teaching: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 244-259. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1494859>

APÉNDICE

1) Cuestionario de diagnóstico 1

INSTRUCCIONES. Contesta las preguntas en las hojas blancas anexas al final del cuestionario. Por favor escriba los procedimientos que realice para dar respuestas a las preguntas.

- 1) A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la elipse. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la redondez de la elipse?
- 2) Ordena las gráficas de las elipses de la Figura 1 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”. En cada gráfica los semiejes están a la misma escala.

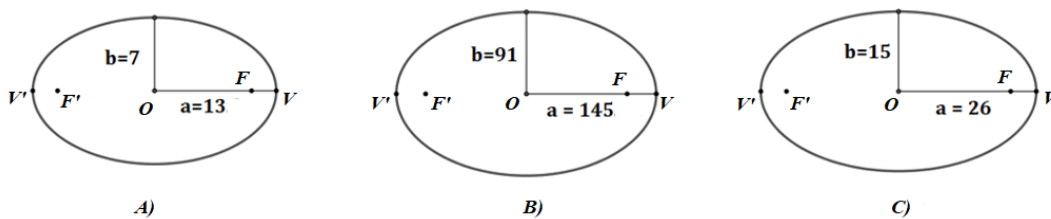


Figura 1. Semiejes mayor y menor de la elipse.

- 3) Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 2 de acuerdo a su forma, de la “más circular” a la “menos circular”.

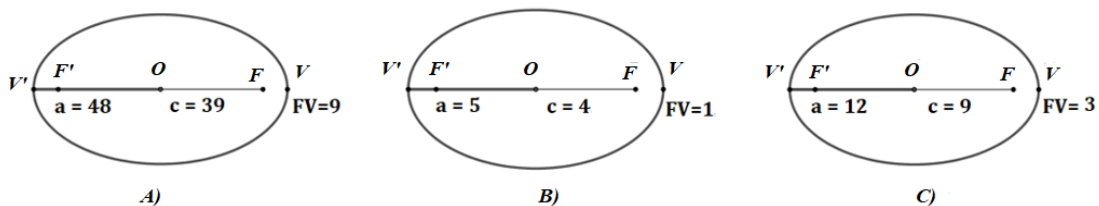


Figura 2. Semieje mayor y semidistancia entre los focos de la elipse

- 4) A diferentes valores de excentricidad corresponden diferentes formas de la hipérbola. ¿Cómo se reflejan los valores de la excentricidad en la abertura de las ramas de la hipérbola?

- 5) En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y b al semieje conjugado de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.
- $a = 2, b = 3$
 - $a = 4, b = 7$
 - $a = 8, b = 5$
- 6) En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y c a la semidistancia entre los focos de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo a la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.
- $a = 4, c = 9$
 - $a = 2, c = 5$
 - $a = 3, c = 6$
- 7) Ordene las gráficas de las cónicas de la Figura 3, de acuerdo con los valores de sus excentricidades (de menor a mayor excentricidad). Las escalas de los ejes horizontal y vertical son iguales.

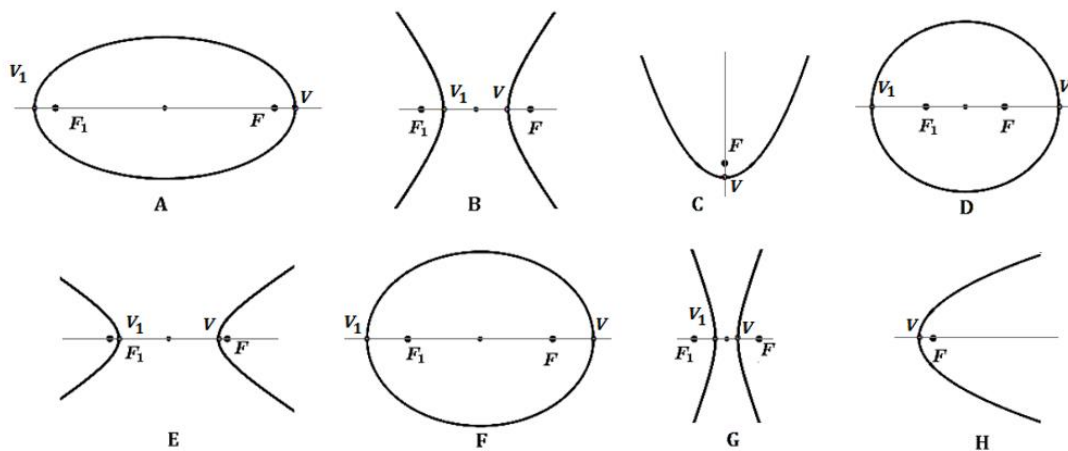


Figura 3. Gráficas de las cónicas

- 8) Ordene las ecuaciones de la Figura 4, según los valores de las excentricidades de las cónicas que representan (de menor a mayor excentricidad).

- 12) En una hipérbola a , b y c corresponden al semieje transversal, semieje conjugado y semidistancia entre los focos, respectivamente.
- A) Relacione a , b y c con 3, 4 y 5 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.
- B) Relacione a , b y c con 4, 5 y 6 de manera que obtenga todas las ternas de parejas que correspondan a hipérbolas.

2) Cuestionario de casos límite

INSTRUCCIONES. Por favor responda las siguientes preguntas siendo lo más explícito posible.

- 1) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor cero?
- 2) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?
- 3) ¿Qué ocurre con la forma de la hipérbola cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?

3) Cuestionario de diagnóstico 2

INSTRUCCIONES. Por favor responda las siguientes preguntas siendo lo más explícito posible.

- 1) Expresa con tus propias palabras qué es la excentricidad de una cónica.
- 2) Indica cómo se refleja la variabilidad de la excentricidad en la apariencia o forma de una elipse.
- 3) Si ha respondido a la pregunta 2, ¿cómo justifica su respuesta?
- 4) Indica cómo se refleja la variabilidad de la excentricidad en la apariencia o forma de una hipérbola.
- 5) Si ha respondido a la pregunta 4, ¿cómo justifica su respuesta?
- 6) Ordena las cónicas de la Figura 1 según sus excentricidades (de menor a mayor excentricidad). Las escalas de los ejes horizontal y vertical son iguales.

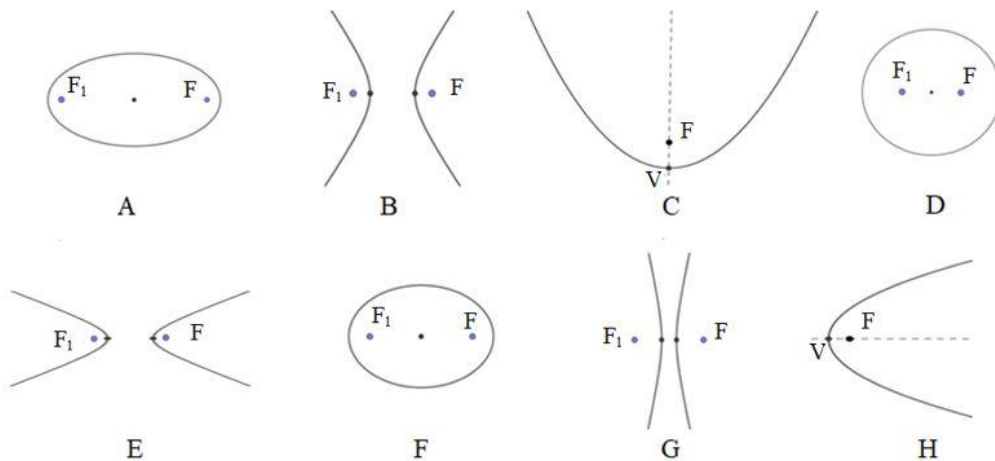


Figura 1. Cónicas con varias excentricidades

- 7) Ordena las siguientes ecuaciones según el valor de la excentricidad de la cónica que representa (de menor a mayor excentricidad).

a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $y^2 = 8(x - 4)$ d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

e) $y^2 = 12x - 24$ f) $-\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ g) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ h) $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$

- 8) ¿Se requiere un sistema de ejes cartesianos para definir la excentricidad de una elipse?
Justifique su respuesta.
- 9) ¿Es posible definir la excentricidad de las cónicas usando coordenadas polares?
Justifique su respuesta.
- 10) En ausencia de un sistema de ejes cartesianos, ¿cómo definiría la excentricidad de la elipse y la hipérbola?
- 11) En la Figura 2, los planos inclinados son paralelos y el cono circular recto es el mismo en ambos casos. ¿Qué puede decir sobre las excentricidades de las elipses? Justifique su respuesta.

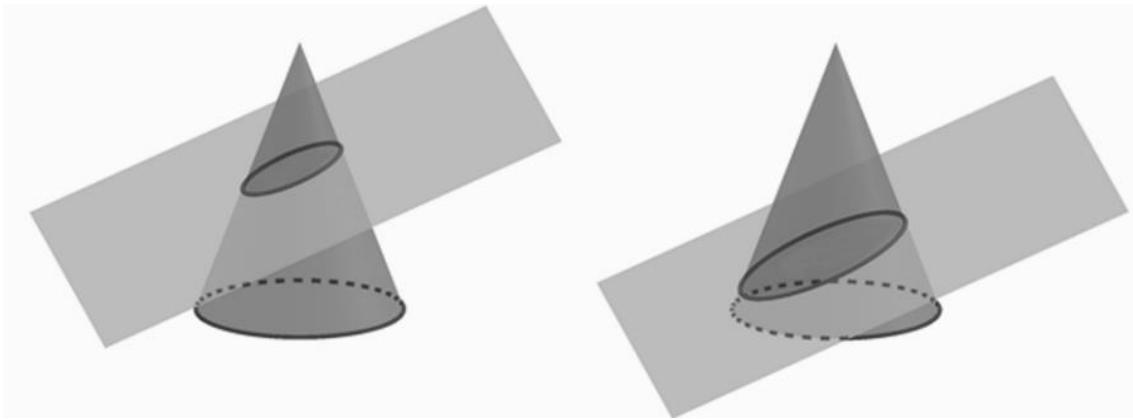


Figura 2. Elipses determinadas por planos paralelos

- 12) Con base en la Figura 3 ¿cómo se define la excentricidad de la elipse, la cual resulta de la intersección de un cono circular recto con un plano inclinado?

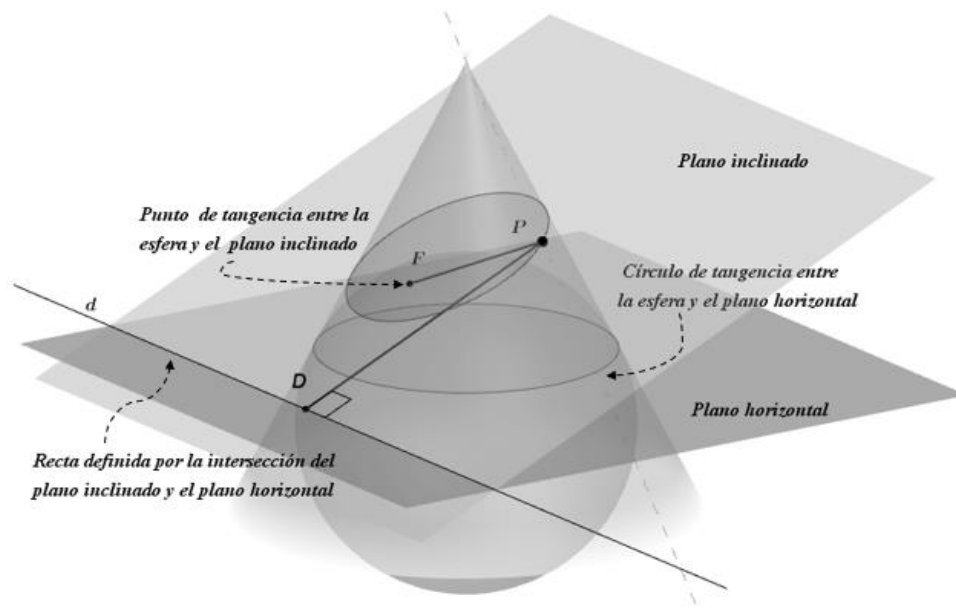


Figura 3. Excentricidad en el espacio tridimensional

4) Cuestionario postactividades

INSTRUCCIONES. Conteste las preguntas en las hojas blancas anexas. Por favor incluya todo sus cálculos y fórmulas que use para responder las preguntas.

- 1) Explique brevemente cómo la variabilidad de la excentricidad se refleja en la forma de la elipse.
- 2) Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 1 de acuerdo con su forma, de la “más circular” a la “menos circular”. En cada gráfica ambos semiejes están a la misma escala.

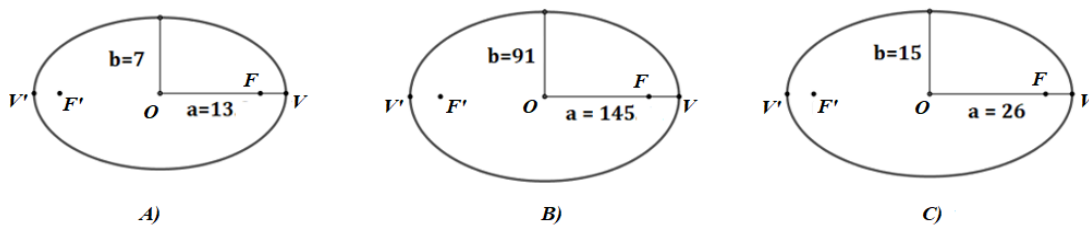


Figura 1. Semiejes mayor y menor de la elipse.

- 3) Ordene las gráficas de las elipses de la Figura 2, de acuerdo con los valores de su excentricidad, de menor a mayor excentricidad.

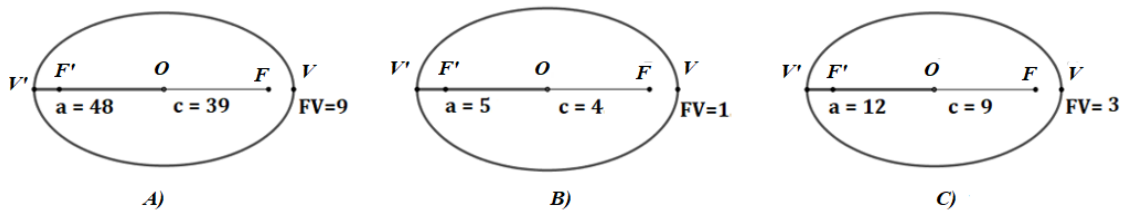


Figura 2. Semieje mayor y semidistancia entre los focos de la elipse

- 4) Explique brevemente cómo la variabilidad de la excentricidad se refleja en la apariencia o forma de la hipérbola.
- 5) En cada inciso, a corresponde al semieje transversal y b al semieje conjugado de una hipérbola; a partir de estos valores puede determinarse la abertura de las ramas de una hipérbola. Ordene los incisos de acuerdo con la abertura de las ramas de cada hipérbola, de la menos abierta a la más abierta.

- a) $a = 2, b = 3$
- b) $a = 4, b = 7$
- c) $a = 8, b = 5$

- 6) Ordene las gráficas de las hipérbolas de la Figura 3, de acuerdo con una comparación entre sus excentricidades (que se puede percibir a partir de su forma), de menor a mayor excentricidad.

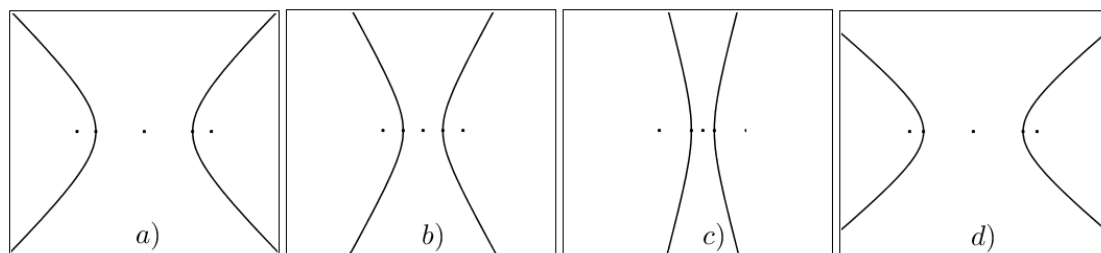


Figura 3. Gráficas de hipérbolas

- 7) A) Identifique el tipo de cónica que representa cada una de las ecuaciones que se muestran. Indique el inciso, o incisos, en el espacio correspondiente. B) Obtenga la excentricidad de las cónicas representadas en a) y c).

Elipse horizontal: _____

Elipse vertical: _____

Parábola horizontal: _____

Parábola vertical: _____

Hipérbola horizontal: _____

Hipérbola vertical: _____

a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$	b) $x^2 = 8(y - 4)$
c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$	d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$
e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$	f) $y^2 = 9(x - 4)$

- 8) En la Figura 4 se muestran 3 hipérbolas. ¿Cuál de las hipérbolas tiene mayor excentricidad?

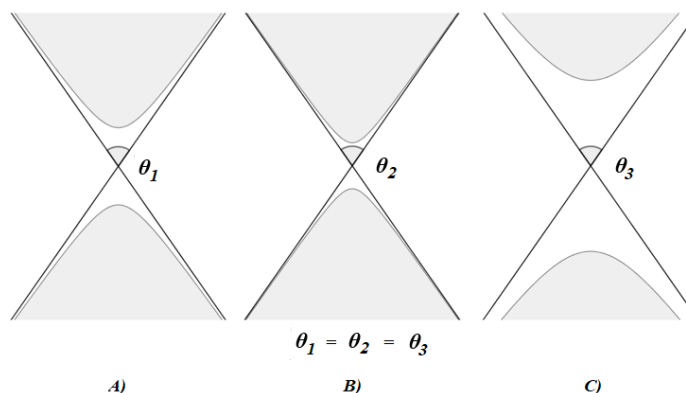


Figura 4. Hipérbolas con ángulos iguales entre sus asíntotas.

- 9) En una elipse a y b corresponden al semieje mayor y semieje menor, respectivamente, y c corresponde a la semidistancia entre los focos. Justifique su respuesta en cada inciso.
- A) ¿es posible construir una elipse con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$?
 - B) ¿es posible construir una elipse con $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$?
 - C) ¿es posible construir una elipse con $a = 4$, $b = 3$ y $c = 2$?
- 10) En una hipérbola a y b corresponden al semieje transversal y semieje conjugado, respectivamente, y c corresponde a la semidistancia entre los focos. Justifique su respuesta en cada inciso.
- A) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$?
 - B) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 5$, $b = 3$ y $c = 4$?
 - C) ¿es posible construir una hipérbola con $a = 4$, $b = 2$ y $c = 5$?
- 11) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor cero?
- 12) ¿Qué ocurre con la forma de la elipse cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?
- 13) ¿Qué ocurre con la forma de la hipérbola cuando hacemos tender su excentricidad hacia el valor uno?

