

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO
POLITÉCNICO NACIONAL**

UNIDAD ZACATENCO

**Análisis de estabilidad de una plataforma
PVTOL ejerciendo una fuerza en el ambiente**

Tesis que presenta
Ing. Samantha Marcela Calderón Serrano

Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias

en
Sistemas Autónomos de Navegación Aérea y Submarina

Asesores de Tesis:
Dr. Rogelio Lozano Leal
Dr. Iván González Hernández

Dedicatoria

Dedico este trabajo a toda mi familia y amigos. A Hvit y Noah, que me acompañaron durante muchas noches en vela.

Especialmente a Sergio Medina. Esta es la conclusión de lo que me ayudaste a comenzar.

Agradecimientos

Quisiera expresar mi plena gratitud a mis asesores, el Dr. Rogelio Lozano Leal y el Dr. Iván González Hernández, por invertir tanto tiempo y esfuerzo en mi educación, así como la gran paciencia y comprensión que mostraron en los momentos donde requería más apoyo. Los admiro y aprecio mucho.

Agradezco ampliamente a CONACYT por otorgarme apoyo económico durante el transcurso y desarrollo de mi carrera, así como agradezco al CINVESTAV por recibirme en sus instalaciones y al personal del laboratorio UMI-LAFMIA por brindarme su apoyo durante mi trayecto académico así como sentar mis bases como profesionista.

También me gustaría compartir este sentimiento con mis padres, Marcela Serrano y Gustavo Calderón, que sin su organización, comprensión, apoyo y amor, nunca habría podido comenzar ni desarrollar mi educación profesional. De igual manera, estoy muy agradecida con mi hermana, Jaqueline, que ha sido una amiga incondicional y mi compañera a lo largo de mi vida estudiantil.

A todos mis amigos les agradezco el apoyo emocional e incondicional durante tiempos difíciles, por animarme a seguir adelante. Me gustaría dar una mención especial a Gabriel Carrasquero, Rebeca Cardoso, Iliana Linares, María García, Chelsy Reynoza, Ulises Davila y Carlos Espinosa. Gracias por ser mi lugar seguro.

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda el planteamiento de controlar la aplicación de una fuerza horizontal en el ambiente mediante un PVTOL. Esto a través de un mecanismo de resorte sujeto desde el centro de gravedad del vehículo hasta una pared vertical, de modo que dicho resorte se elongue una cierta distancia para mantener una fuerza horizontal y constante cuando la plataforma presente un torque.

La investigación se desarrolla a lo largo de seis capítulos. En la introducción se abordan de forma breve los antecedentes de los UAV's y sus diferentes clasificaciones, de las cuales se desprende el híbrido PVTOL. Siendo así, se abordan los principales problemas que esta plataforma enfrenta en la actualidad.

A continuación, en el estado del arte, se presentan diversos casos de UAV's cuadricópteros ejerciendo una fuerza constante en el ambiente mediante brazos fijos u otros aditamentos. Dado que en la literatura no existe precedente del estudio de un PVTOL en esta situación, se llega a la motivación de este trabajo. Se detallan los objetivos y la metodología de la investigación.

Posteriormente, se define el modelo del PVTOL ejerciendo una fuerza constante. Empleando la suposición de que la plataforma ya ha alcanzado la altitud deseada, se presentan estrategias de control para el desplazamiento horizontal y la rotación.

En seguida se verifica la estabilidad del sistema mediante el análisis de Lyapunov, presentando una función candidata para cada dinámica.

Finalmente, a través del módulo SIMULINK de MATLAB, se simula el sistema para verificar el rendimiento del control propuesto. Los resultados son discutidos y se presentan las conclusiones correspondientes que generan nuevos retos para un trabajo futuro.

Abstract

This thesis work addresses the approach of controlling the application of a horizontal force in the environment utilizing a PVTOL. This through a spring mechanism attached from the center of gravity of the vehicle to a vertical wall, in order to elongate the spring a certain distance to maintain a constant horizontal force when the platform presents a torque.

This research is developed in six chapters. The introduction briefly discusses the background of UAVs and their different classifications, from which the PVTOL hybrid is derived. Thus, the main problems that this platform is currently facing are addressed.

Afterwards, in the state of the art, several cases of quadrotors UAV's exerting a constant force in the environment through fixed arms or other accessories are presented. Since there is no precedent in the literature for the study of a PVTOL in this situation, the motivation for this work is reached. The objectives and methodology of the research are detailed.

Subsequently, the model of the PVTOL exerting a constant force is defined. Using the assumption that the platform has already reached the desired altitude, control strategies for horizontal displacement and rotation are presented.

Next, the stability of the system is verified by Lyapunov analysis, presenting a candidate function for each dynamic.

Finally, through the SIMULINK module included in MATLAB, the system is simulated to verify the performance of the proposed control. The results are discussed and the corresponding conclusions are presented, generating new challenges for future work.

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Índice de tablas	XI
Índice de figuras	XII
1. Introducción	1
1.1. Clasificación de UAV's	2
1.1.1. Clasificación por peso	3
1.1.2. Clasificación por Alcance y Autonomía	3
1.1.3. Clasificación por Máxima Altitud	4
1.1.4. Clasificación por Carga Alar	5
1.1.5. Clasificación por Método de Sustentación	5
1.2. Híbrido PVTOL	10
1.2.1. Problema de Control de Regulación	11
1.2.2. Problema de Seguimiento de Trayectoria	13
1.2.3. Presencia de Perturbaciones	14
2. Estado del Arte	16
2.1. Motivación	22
2.2. Justificación	23
2.3. Objetivos	23
2.4. Metodología	23
3. Modelo de PVTOL con Fuerza Constante	25
3.1. Estrategia de control para el desplazamiento horizontal	27
3.2. Estrategia de control para el ángulo de orientación	29
4. Análisis de Estabilidad de Lyapunov	31
4.1. Estabilidad de la dinámica traslacional horizontal	31
4.2. Estabilidad de la dinámica rotacional	35

5. Simulación	39
5.1. Resultados	40
6. Conclusiones	44
6.1. Conclusiones	44
6.2. Trabajo a futuro	45
A. Publicación	46
A.1. Introduction	46
A.2. PVTOL Model with Constant Force	49
A.3. Control Strategy for the Horizontal Displacement	50
A.4. Control Strategy for the Orientation Angle	53
A.5. Simulation	55
A.6. Results	55
A.7. Discussion	57
Bibliografía	59

Índice de tablas

1.1. Clasificación por Peso.	3
1.2. Clasificación por Alcance y Autonomía.	3
1.3. Clasificación por Máxima Altitud.	4
1.4. Clasificación por Carga Alar.	5
5.1. Condiciones iniciales y contantes de la simulación.	40
A.1. Initial conditions and simulation constants.	55

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de UAV's Micro y Súper Pesado.	4
1.2. Vehículo HW-310A como UAV de ala fija.	6
1.3. Ejemplos de UAV's de ala rotativa.	7
1.4. Vehículo Novlit-3 como UAV híbrido de cuerpo rotatorio.	8
1.5. Ejemplos de UAV híbrido convertiplano.	9
1.6. UAV Híbrido PVTOL con superficies de control.	10
1.7. UAV Híbrido PVTOL.	11
1.8. Control de regulación de un PVTOL	12
1.9. Seguimiento de trayectoria de un PVTOL	12
1.10. Plataforma PVTOL bajo perturbacion de viento cruzado.	15
2.1. Plataforma DFAV aproximándose a la pared vertical	17
2.2. Plataforma UAV con un rotor adicional en el eje horizontal	18
2.3. Fuerza generada por el contacto durante 50 segundos con una fuerza deseada de 3 Newton	18
2.4. Plataforma VTOL aproximándose a una superficie horizontal	19
2.5. Seguimiento de trayectoria de un PVTOL	20
2.6. Plataforma VTOL con teleoperación bilateral	20
2.7. Fuerza y altura obtenidas para tres condiciones de fuerza deseada	21
3.1. Configuración de la plataforma PVTOL.	25
5.1. Modelo en Simulink de PVTOL con fuerza constante.	41
5.2. Comportamiento del desplazamiento x	42
5.3. Comportamiento del ángulo θ	42
5.4. Comportamiento de la entrada de control τ	43
A.1. PVTOL configuration	49
A.2. Behavior of the x displacement.	56
A.3. Behavior of the F_d force.	57
A.4. Behavior of the θ angle.	57
A.5. Behavior of the τ control input.	57

Introducción

El término UAV (por sus siglas en inglés, Unmanned Aerial Vehicle) se comenzó a emplear en la década de los 90's para definir a una aeronave robótica y reemplazar el término RPV (Remotely Piloted Vehicle), el cual surgió desde la guerra de Vietnam [1].

Los UAV's son vehículos aéreos no tripulados que se emplean para múltiples tareas en la actualidad, teniendo entre sus ventajas el acceso a ambientes donde los vehículos tripulados de mayor tamaño tienen dificultad para maniobrar o llegar. Estos vehículos, al carecer de un piloto, se controlan desde una estación en tierra a la cual envían los datos de interés del ambiente con el que interactúan.

Estos vehículos fueron introducidos desde la primera guerra mundial, sin embargo, la poca exactitud en sus maniobras hizo que su utilidad e impacto en el campo de batalla no fueran del todo reconocidos por los líderes militares y políticos. Gracias a algunos pocos, se mantuvo el concepto y creció el desarrollo de vehículos no tripulados hasta lo que es hoy en día. Incluso si los UAV's fueron usados en Vietnam, fue hasta la operación "Desert Storm"(1991) y el conflicto en la península de Balkan en los tempranos 1990's que el interés en los UAV's se disparó. Un evento crítico que marcó el desarrollo de los UAV's fue el ataque terrorista el 9 de noviembre en Estados Unidos, a partir del cual el interés general sobre esta tecnología creció gracias a los medios de comunicación que cubrían la noticia [2].

Debido a la versatilidad de estos vehículos para cubrir misiones, desde sencillas hasta muy especializadas, se creó un amplio abanico de nuevas aplicaciones. Por lo tanto, con el paso del tiempo la definición se fue ampliando hasta cubrir la gran variedad de UAV's. El "Diccionario del Departamento de Defensa" lo define como:

”Un vehículo aéreo accionado que no transporta un operador humano, utiliza fuerzas aerodinámicas para proveer levantamiento, puede volar de forma autónoma o ser pilotada de forma remota, puede ser expandible y puede transportar una carga letal o no letal. Los vehículos balísticos o semi balísticos, misiles y proyectiles de artillería no son considerados vehículos aéreos no tripulados.” [1]

Las aeronaves robóticas han sido conocidas con múltiples nombres desde su introducción en el siglo pasado. Torpedos aéreos, drones, vehículo sin piloto, aeronave radio controlada, aeronave de control remoto, aeronave autónoma, vehículos aéreos no tripulados (UAV's) y otros, son unos de los múltiples nombres que reciben las aeronaves que son operadas sin necesidad de un piloto a bordo. Los UAV's son un tipo de aeronave robótica y sus características principales, a parte de ser no tripulados, es que están propulsados, generan fuerzas aerodinámicas para volar y tienen algún medio de recuperación al final del vuelo. Este último punto trae a relucir la distinción entre los UAV's y distintos tipos de misiles u otras municiones guiadas [1]. Hay que notar que es importante contar con una definición precisa para establecer los términos y regulaciones que rigen las capacidades legales de estos vehículos.

1.1. Clasificación de UAV's

En la actualidad, el estudio de los UAV's ha dado lugar a una amplia familia de vehículos con distintas características según el objetivo que persiguen las misiones. Existen distintas clasificaciones que se centran en varios parámetros como costo, tamaño, peso, misión, configuración, tipo de despegue y aterrizaje, etc. Dada la complejidad de estos vehículos es complicado tener una sola clasificación que los cubra por completo, es por eso que hay distintas clasificaciones según el parámetro de interés. Por ejemplo, en el caso del peso, se introduce el concepto de Micro Vehículos Aéreos (MAV, por sus siglas en inglés) que engloba aquellos vehículos cuyo peso es menor a 5 kg. En cuanto a las misiones, algunas de las que se pueden desempeñar involucran reconocimiento, combate, adquisición de objetivo, vigilancia, objetivo y señuelo, logística, investigación y desarrollo, y UAV's de uso

comercial y civil [3].

1.1.1. Clasificación por peso

Hay cinco tipos de UAV's en esta clasificación, comenzando por aquellos de mayor peso hasta llegar a los MAV, anteriormente comentados. En las subclasificaciones que se muestran en la siguiente tabla se considera que hay UAV's que pesan más de dos toneladas, sin embargo, se sabe que la mayoría de los UAV's entran en la categoría "Ligero". Es interesante notar que los vehículos "Micro" emplean motores eléctricos mientras aquellos en la categoría "Súper Pesado" emplean motores turborreactores o turbofán (Fig.1.1) [4].

Categoría	Rango de peso	Aeronave de ejemplo
Súper Pesado	>2,000 kg	Global Hawk
Pesado	200 - 2000 kg	A - 160
Medio	50 - 200 kg	Raven
Ligero	5 - 50 kg	RPO Midget
Micro	<5 kg	Dragon Eye

Tabla 1.1: Clasificación por Peso.

1.1.2. Clasificación por Alcance y Autonomía

Estos parámetros están estrechamente conectados. Mientras el alcance se refiere a la máxima distancia que puede recorrer una aeronave a velocidad crucero en línea recta, la autonomía es el tiempo máximo que se puede mantener un vuelo. Ambos son parámetros importantes para determinar el UAV adecuado según la distancia entre la estación en tierra y la zona de maniobra. También brinda información sobre la cantidad de veces que se debe rellenar el tanque de combustible (en el caso de tenerlo). En la siguiente tabla se muestra la clasificación, siendo la categoría "Mediano" la más común entre los UAV's [4].

Categoría	Autonomía	Alcance	Aeronave de ejemplo
Súper Pesado	>24 h	>1,500 km	Global Hawk
Pesado	5 - 24 h	100 - 400 km	A - 160
Mediano	<5 h	<100 km	Raven

Tabla 1.2: Clasificación por Alcance y Autonomía.



(a) UAV Dragon Eye (Micro)



(b) UAV Global Hawk (Súper Pesado)

Figura 1.1: Ejemplos de UAV's Micro y Súper Pesado.

1.1.3. Clasificación por Máxima Altitud

La altitud operacional máxima, o techo de vuelo, es otra medida de rendimiento para organizar a los UAV's. Esta clasificación es útil para identificar el dron adecuado para la altitud a la que se llevará a cabo la misión en cuestión. Es interesante notar que los UAV's que caen en la categoría "*Baja*" son en su mayoría experimentales, dado el uso restringido por el espacio disponible. La mayoría de los UAV's son parte de la categoría "*Mediana*". Los UAV's que vuelan en la categoría "*Alta*" requieren integrar sistemas para evitar colisiones con aeronaves militares y comerciales [4].

Nombre	Altitud Máxima	Aeronave de ejemplo
Baja	< 1 km	Pointer
Media	1 - 10 km	Finder
Alta	> 10 km	Darkstar

Tabla 1.3: Clasificación por Máxima Altitud.

1.1.4. Clasificación por Carga Alar

Esta clasificación consiste en calcular la relación entre el peso total de la aeronave y la superficie alar. Entre más alto es este parámetro, el UAV tiene una mayor eficiencia de carga [4].

Nombre	Carga alar [kg / m ²]	Aeronave de ejemplo
Baja	<50	Seeker
Media	50 - 100	X - 45
Alta	>100	Global Hawk

Tabla 1.4: Clasificación por Carga Alar.

1.1.5. Clasificación por Método de Sustentación

Dependiendo de cómo se genera la sustentación se establece otra clasificación. La forma en la que los motores interactúan con las superficie sustentadora da lugar a esta nueva clasificación. En un caso, el motor genera empuje para que el aire fluya en la superficie sustentadora que se encuentra fija, mientras que por otro lado, el motor mueve directamente la superficie sustentadora para que reciba el flujo de aire. Estas dos formas de sustentación y la combinación entre ellas dan lugar a las nuevas categorías.

- Ala Fija.** Estos vehículos tienen alas rígidas con perfil aerodinámico que permite producir las fuerzas aerodinámicas deseadas al deflectar el flujo sobre ellas al ser propulsadas por rotores (Fig. 1.2). Aunque no pueden mantener una posición fija de vuelo (*hover*) ni mantener una baja velocidad de vuelo, tienen alta autonomía. También requieren de una pista libre de obstáculos para despegar y aterrizar. Sin embargo, en comparación a los UAV's de ala rotativa, pueden transportar cargas más pesadas [5].
- Ala Rotativa.** Estos vehículos poseen dos o más palas posicionadas alrededor de una flecha (hélice o rotor) que al girar produce las fuerzas aerodinámicas deseadas. Los vehículos de ala rotativa son capaces de mantenerse en *hover*, volar a baja altitud, y despegar y aterrizar de forma vertical (Fig. 1.3). Sus mayor ventaja se encuentra en la flexibilidad de maniobra en espacios reducidos. A su vez, los UAV's de ala rotativa se clasifican por la cantidad de rotores que los constituyen, siendo estos: mono-rotor

(helicóptero) y multi-rotor [5].

- **Mono-rotor (helicóptero).** Estos vehículos dependen de una sola hélice para generar el levantamiento necesario. Aunque, estos poseen una hélice de cola para controlar la orientación, no generan levantamiento y por lo tanto, no son relevantes en el conteo de hélices. Ya que su levantamiento depende de un solo rotor, las palas suelen ser más grandes. En contraste con los UAV's multi-rotor, estos pueden transportar cargas más grandes y suelen requerir menos energía, ya que alimentan a un solo rotor. Esta misma eficiencia en la energía empleada permite una mayor autonomía [5].
- **Multi-rotor.** Este vehículo emplea múltiples rotores para generar la sustentación deseada. Los ejemplos más comunes de esta categoría son los tricópteros, cuadricópteros, hexacópteros, y octacóptero. Los UAV's multi-rotor pueden realizar complejas maniobras pero tienen menos capacidad de carga y autonomía [5].



Figura 1.2: Vehículo HW-310A como UAV de ala fija.

- **Híbrido (VTOL).** Estos vehículos son capaces de pasar de una configuración de ala fija en CTOL (*Conventional Takeoff and Landing*) a una configuración de ala rotativa en VTOL (*Vertical Takeoff and Landing*) y viceversa. Combinan los beneficios aerodinámicos de los UAV's de ala fija y de ala rotativa. Este acoplamiento suma la capacidad de despegar y aterrizar verticalmente (VTOL), y el mantenerse en hover con la ventaja de tener acceso a mayores velocidades y con mayor autonomía de vuelo [5].



(a) A160 Hummingbird como UAV mono-rotor.



(b) DIY 10L como UAV multi-rotor.

Figura 1.3: Ejemplos de UAV's de ala rotativa.

Según la configuración estructural que presenta el vehículo para realizar la transición entre los modos de vuelo CTOL y VTOL se destacan dos categorías.

- **Convertiplano (*Tilt-rotor*)**. También conocido como *vehículo de rotores basculantes*, es un UAV que posee un ala fija propulsada por rotores cuyo eje de orientación es variable, lo que permite pasar de una propulsión longitudinal a una vertical o viceversa (Fig. 1.5a). Durante un vuelo CTOL el eje de rotación de las hélices permanece paralelo al eje longitudinal, encargándose de generar el empuje mientras el ala se encarga de generar la sustentación necesaria. Al disminuir la velocidad, la sustentación generada por el ala no es suficiente para mantener la altitud y, para compensar esta pérdida, el eje de rotación de las hélices comienzan a tomar inclinación respecto al eje longitudinal para comenzar a brindar empuje y sustentación. De modo que, al disminuir por completo la velocidad, el eje de rotación de las hélices se encuentra completamente vertical, otorgando toda la sustentación necesaria para el vehículo.

(*Tilt-wing*). También es posible encontrar UAV's cuya ala también es basculante, de modo que esta se mueve en conjunto con los rotores para cambiar la configuración de la aeronave (Fig.1.5b). En este tipo de vehículos, el ala rota alrededor del eje lateral para cambiar de una configuración VTOL a una CTOL con las alas extendidas y los rotores formando una especie de fila. Es de interés resaltar que los UAV's tilt-wing presentan ventajas interesantes sobre los UAV's tilt-rotor. Al abatir el ala en conjunto con los rotores, en vez de solo abatir el rotor, produce un incremento en el flujo aerodinámico sobre las superficies de sustentación y control, el cual es beneficioso en la etapa de transición, y minimiza la pérdida

de levantamiento al alinear el ala con el flujo de aire que sustenta al vehículo en modo hover [6].

(Transwing). La empresa *Ptero Dynamics* se encargó de crear un nuevo vehículo tilt-wing único en su clase, llamado *transwing*, el cual mantiene extendidas sus semialas durante el vuelo (Fig. 1.5c) y las pliega de modo que estas quedan paralelas al fuselaje del vehículo, llegando a una configuración compacta para las fases de despegue y aterrizaje (Fig.1.5d). Aunque los UAV's tilt-wing tienen ventajas, al igual que los UAV's tilt-rotor, el área que requieren para despegar y aterrizar está limitada a la envergadura del vehículo. Esto último es la mayor ventaja que tiene un UAV transwing sobre los dos anteriores, debido a que el vehículo transwing pliega sus semialas para realizar la transición entre configuraciones. Otra importante ventaja es que, al plegar las semialas en modo hover, un UAV transwing es menos susceptible a las turbulencias durante el despegue y el aterrizaje ([7]).

- **Cuerpo rotatorio (Tail-sitter).** Este tipo de vehículos posicionan su eje longitudinal en forma vertical para realizar el despegue y el aterrizaje, a diferencia del convertiplano, donde el fuselaje permanece orientado horizontalmente en todas las fases del vuelo. Hay algunos vehículos que despegan en forma vertical y aterrizan orientados de forma horizontal.



Figura 1.4: Vehículo Novlit-3 como UAV híbrido de cuerpo rotatorio.

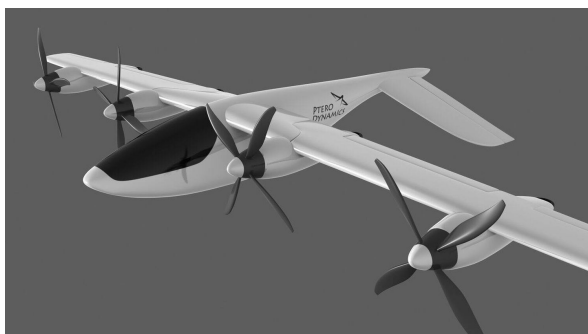
- **Híbrido (PVTOL).** El vehículo PVTOL (Planar Vertical Take-Off and Landing) es una plataforma que, como lo indica su nombre, genera sustentación en un plano bidimensional con ayuda de dos rotores. De hecho, el vehículo aéreo PVTOL es un modelo simplificado que imita el comportamiento de varias aeronaves reales VTOL,



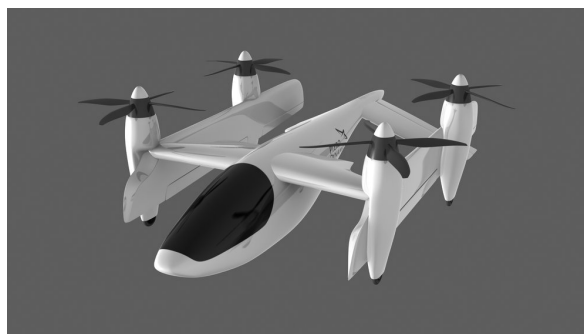
(a) Mugin 4450 como UAV tilt-rotor.



(b) aEro 1 como UAV tilt-wing.



(c) Vehiculo Ptero Dynamics como UAV transwing en CTOL.



(d) Vehiculo Ptero Dynamics como UAV transwing en VTOL.

Figura 1.5: Ejemplos de UAV híbrido convertiplano.

lo que lo convierte en un punto de referencia ideal para probar controladores nuevos y existentes [8]. Siendo así, como es el caso de los híbridos VTOL, esta configuración proporciona como ventaja el despegue y aterrizaje en un área reducida, sin embargo, el solo emplear dos rotores involucra un mayor reto de control [9]. Esto debido a que la plataforma debe presentar una rotación sobre el eje perpendicular al plano en el que se

desplaza (*pitch*), siendo la rotación en el eje longitudinal (*roll*) algo indeseable que se presenta debido a la aplicación de fuerzas. Es común reducir estas rotaciones al colocar superficies de control bajo cada rotor de forma paralela al plano de desplazamiento (Fig. 1.6), así, estas superficies se mantienen oscilando para equilibrar el vuelo y evitar la rotación alrededor del eje longitudinal.

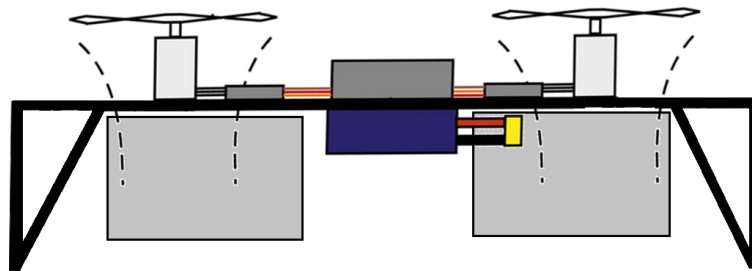


Figura 1.6: UAV Híbrido PVTOL con superficies de control.

1.2. Híbrido PVTOL

A lo largo de los años, los PVTOL han sido objeto de amplio estudio. Entre los principales intereses en la investigación de estos vehículos se encuentra el problema de estabilizar esta plataforma altamente inestable. Ya que el PVTOL tiene dos entradas de control y tres grados de libertad se trata de un sistema subactuado. Por lo tanto, aquellas técnicas de control enfocadas a sistemas completamente actuados no pueden aplicarse directamente al PVTOL. Siendo así, múltiples técnicas de control han sido desarrolladas para este particular sistema [10].

El estudio de los PVTOL se enfrenta a dos principales problemáticas: el seguimiento de trayectoria y la estabilización en un punto fijo o control de regulación. El primero se enfoca en diseñar un controlador que permita al vehículo imitar las trayectorias deseadas, mientras que el segundo se concentra en alcanzar y mantener una posición deseada de forma estable [11, 12].

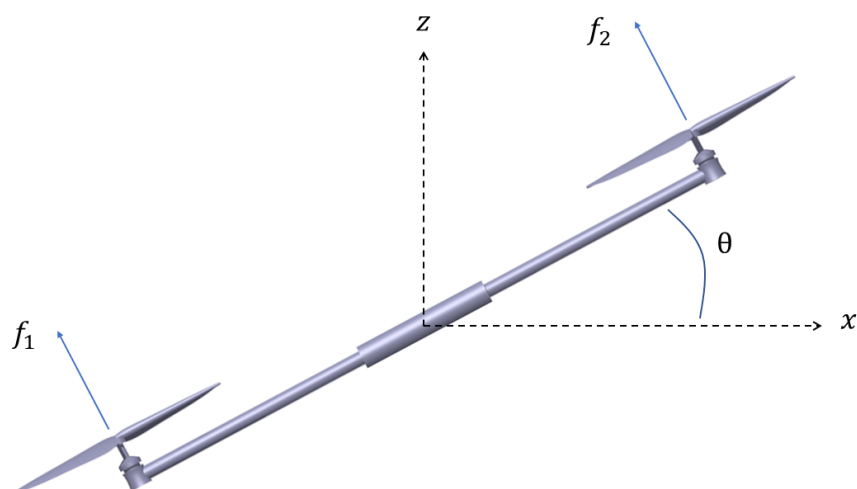


Figura 1.7: UAV Híbrido PVTOL.

1.2.1. Problema de Control de Regulación

A continuación se presentan artículos que abordaron el problema de control de regulación para plataformas PVTOL en los últimos años.

Método I&I (Immersion and Invariance)

En [13], el problema de control de regulación para un PVTOL se resuelve utilizando retroalimentación de salida. Para derivar el controlador correspondiente, se combina el conocido enfoque en forma de energía con el método I&I (Immersion and Invariance). La función de energía se diseñó utilizando una versión simplificada de un IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment-Passivity Based Control). El observador basado en I&I es introducido para resolver el problema de estabilización del sistema utilizando únicamente medidas de posición.

Método Backstepping y Linealización por Retroalimentación

En [14], se presenta una estrategia de control para resolver el problema de regulación de una versión simplificada de un sistema PVTOL. La estrategia se divide en dos acciones de control que operan simultáneamente: una estabiliza la posición vertical asintóticamente, mientras que la otra estabiliza tanto la posición horizontal como la angular. El primer controlador emplea un método directo de linealización por retroalimentación junto con una función de saturación. El segundo controlador, que se basa en un método de backstepping, se encarga de forzar al resto de las variables a converger asintóticamente al origen.

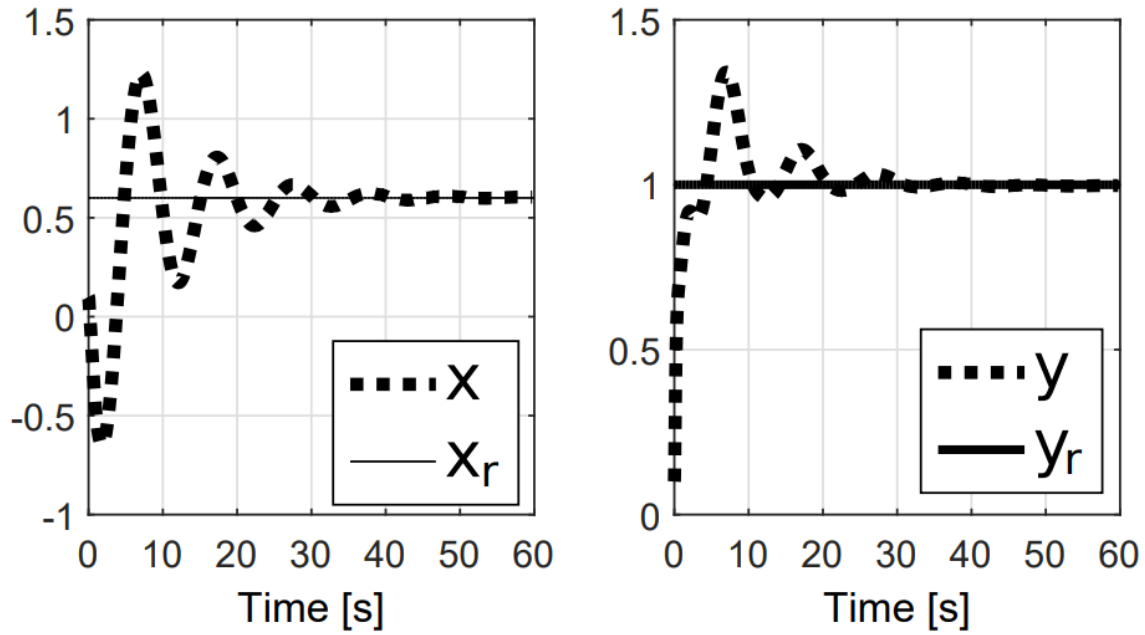


Figura 1.8: Control de regulación de un PVTOL. En los resultados del artículo [13] se muestra la evolución de los desplazamientos en x y y hasta alcanzar el valor de las referencias x_r y y_r .

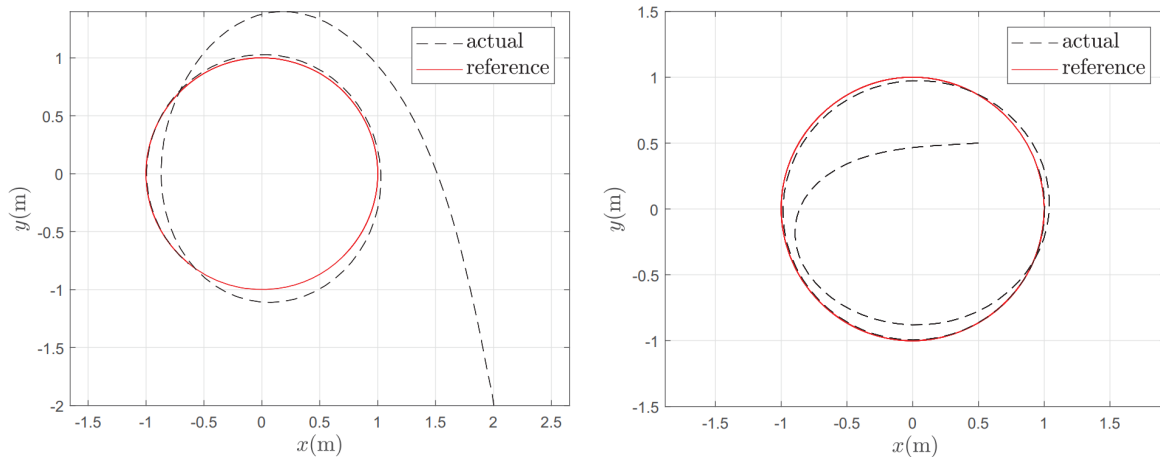


Figura 1.9: Seguimiento de trayectoria de un PVTOL. En los resultados del artículo [17] se muestra la evolución de los desplazamientos en x y y al seguir una trayectoria circular deseada comenzando en dos posiciones iniciales distintas.

Método por Funciones de Saturación y Análisis de Lyapunov

Sanchez et al. presentan un enfoque para controlar un VTOL, basándose en el análisis de Lyapunov y las funciones de saturación. El uso de funciones de saturación en la ley de control muestra que el rendimiento del sistema en lazo cerrado mejora significativamente, demostrándolo incluso en una aplicación en tiempo real. La estrategia diseñada es aplicada para controlar la altitud de la plataforma, así como estabilizar su comportamiento en vuelo

libre [15].

Método de Modos Deslizantes y Linealización por Retroalimentación

Por citar algunas, en (Aguilar-Ibañez, 2017) [10] se propone un controlador de modo deslizante. La altitud del PVTOL es estabilizada usando una técnica de linealización por retroalimentación en conjunto con una función de saturación. El controlador de modo deslizante es empleado para estabilizar el desplazamiento horizontal y la posición angular en los valores deseados.

Método de Control Basado en Pasividad

El problema que plantean Venkatesh et al. es mover una plataforma PVTOL desde una posición inicial dada hasta una posición deseada determinada manteniendo el ángulo de roll en cero. El artículo propone un controlador basado en la pasividad para la estabilización del ángulo de roll del PVTOL. El diseño de dicho controlador se basa en el hecho de que el sistema tiene una dinámica similar a la de un péndulo. Se aproxima la estructura PVTOL a los sistemas integradores que son pasivos. Entonces, se propone una interconexión de dicha dinámica del péndulo con los sistemas integradores, de manera que el sistema total sea pasivo. [16]. Siendo los resultados satisfactorios, se propone como trabajo futuro emplear este método para el seguimiento de la trayectoria del PVTOL junto con la estabilización del ángulo de roll.

1.2.2. Problema de Seguimiento de Trayectoria

Método Backstepping

Wang y Ma utilizan el procedimiento de backstepping para proponer un controlador de seguimiento de trayectoria para un PVTOL. Básicamente, se encuentra un objetivo virtual para seguir la trayectoria deseada y diseñar las entradas de control para asegurar que los errores entre la aeronave real y el punto virtual convergen a cero [17]. Los resultados muestran el seguimiento satisfactorio de una trayectoria circular con la plataforma en distintas posiciones iniciales.

Método de Linealización por Retroalimentación

En el trabajo de Escobar et al. (2021) se determina bajo qué condiciones es posible determinar la estabilidad local asintótica para un PVTOL utilizando un control basado en la linealización por retroalimentación. El sistema dinámico de altitud y el sistema de traslación son separados y se diseña un esquema de control para cada uno. Esta diferenciación resulta

en que el último sistema es globalmente asintóticamente estable, mientras que el sistema de altitud es localmente estable en asíntota dentro de una región determinada [18].

Método TB-MPC (Tube Based Model Predictive Control)

Muchas estrategias de control no lineal no consideran las limitantes de la plataforma PV-TOL, que son el empuje empleado y el ángulo de orientación. En [19], el control predictivo de modelos (MPC) se muestra como una solución atractiva para manejar estos sistemas con restricciones de entrada y de estado. Patkar et al. (2016) presentan una estrategia de control predictivo de modelos basado en tubos (TB-MPC) para una estabilización robusta de la plataforma. El TB-MPC utiliza el MPC nominal junto con un controlador de retroalimentación auxiliar offline basado en la dinámica del error para mantener el sistema dentro de los tubos invariantes, por lo que el coste de computación se reduce en gran medida.

1.2.3. Presencia de Perturbaciones

La solución de los problemas de regulación y seguimiento de trayectoria para la plataforma PVTOL estudian su comportamiento dentro de un ambiente regulado. Sin embargo, en aplicaciones reales, el entorno puede añadir factores externos, como obstáculos o perturbaciones, que interactúen con la plataforma y modifiquen su comportamiento. Es por eso que es de importancia la investigación de estas plataformas bajo perturbaciones y/o en presencia de obstáculos.

La presencia de perturbaciones es otro caso de importancia en el estudio de los PVTOL. [20] se basa en redes neuronales y la técnica de backstepping para controlar el vuelo de un PVTOL bajo perturbaciones, donde los autores emplean un algoritmo de descenso de gradiente para entrenar los pesos de las redes. En el artículo [21] se resuelve el problema de seguimiento de trayectoria de un PVTOL con un control robusto, bajo limitaciones de posición y perturbaciones externas, incorporando una Función de Barrera de Lyapunov (BLF) y elementos de amortiguación no lineal en el marco del diseño del control dinámico de la superficie. Este último se utiliza para evitar el problema de la *explosión de términos* del backstepping tradicional. Los elementos de amortiguación no lineal se aplican para manejar el efecto de las perturbaciones externas. De forma similar, [22] propone un control robusto para el mismo problema de seguimiento de trayectoria, pero analizando como perturbación externa la presencia de viento cruzado (Fig. 1.10). En este caso, el controlador combina la linealización de la retroalimentación de entrada-salida y las técnicas de técnicas de control

de rechazo de perturbaciones. Este ultimo se enfoca en compensar los efectos del viento cruzado mientras el primero linealiza la dinámica del PVTOL.

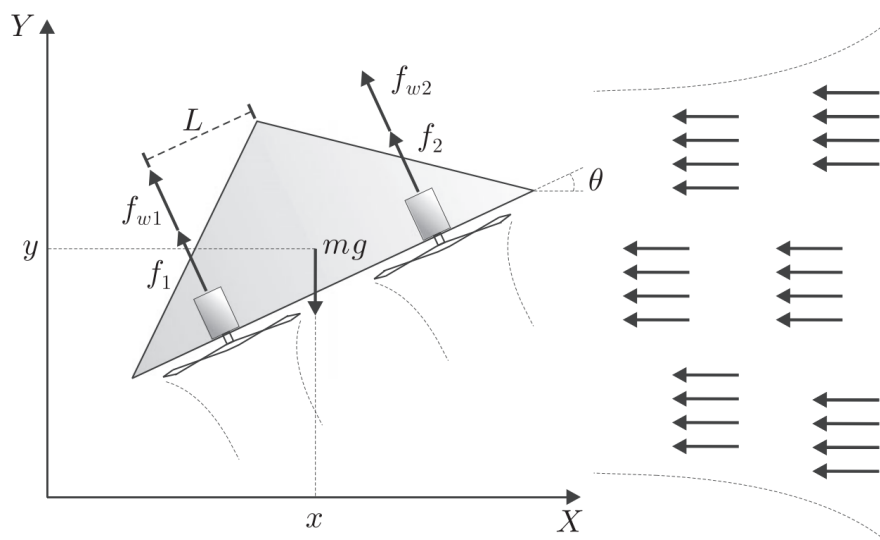


Figura 1.10: Plataforma PVTOL bajo perturbacion de viento cruzado.

Estado del Arte

En la actualidad, debido a que se trata de una primera aproximación a la dinámica de una plataforma VTOL, es de gran interés el estudio de la plataforma PVTOL bajo condiciones controladas. Sin embargo, la gran mayoría de las aplicaciones de estas plataformas se ve de frente con el problema de interactuar con el ambiente, ya sea mediante la evasión de obstáculos o mediante el control del vuelo en presencia de perturbaciones. Aunque no es tan común, otro problema de esta índole es el de interactuar directamente con un obstáculo que se encuentra en el ambiente, de modo que el objetivo es que la plataforma ejerza una fuerza sobre este. El control necesario para mantener la estabilidad en este último caso no se deriva directamente de las leyes de control comúnmente empleadas en un vuelo libre, por lo que es necesario analizar la dinámica del sistema considerando la interacción con el ambiente [23].

DFAV (Ducted-Fan Aerial Vehicle) en Contacto con una Superficie Vertical

En [23] se presenta una configuración particular de VTOL llamada DFAV (Ducted-Fan Aerial Vehicle), el cual podría considerarse que casi tiene una dinámica planar, como la plataforma PVTOL. Esta plataforma se conforma por dos sistemas principales: el sistema propulsivo, compuesto por un solo motor con propela, y el sistema de control de orientación, compuesto de superficies de control servo actuados (Fig. 2.1). Ambos sistemas se encuentran protegidos por una coraza en forma de ducto que también ayuda a mejorar las características de vuelo. Esta protección le permite al DFAV acercarse de forma segura a los objetivos con los que la plataforma debe interactuar. En el artículo se plantean dos escenarios de control: la etapa de despegue y la etapa de contacto, que se considera como la interacción con una pared vertical. Para el último escenario, se considera un modelo dinámico para el vuelo libre y otro diferente para el vuelo con contacto en un solo punto de la plataforma con la pared. Como resultado, la ley de control propuesta fue capaz de seguir una trayectoria definida de

forma adecuada mientras existe contacto entre la plataforma y la pared vertical.

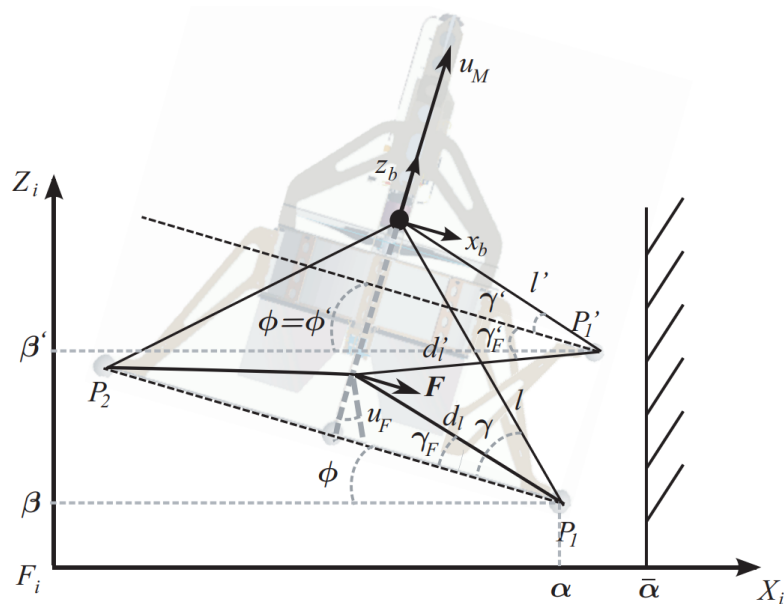


Figura 2.1: Plataforma DFAV aproximándose a la pared vertical [23].

VTOL con Rotor Horizontal en Contacto con una Superficie Vertical

Por otro lado, Albers et al. presentan los robots escaladores, que son capaces de escalar estructuras empleando fuerzas magnéticas, fuerzas aerodinámicas o creando vacíos entre la plataforma y la estructura. Si bien, estos robots pueden ejercer una fuerza en su ambiente, esto depende fuertemente del tipo de superficie que se pretende escalar y de que esta superficie se encuentre libre de grandes obstáculos. Por otro lado, un UAV convencional puede acceder a superficies de gran altitud que contengan obstáculos, sin embargo, las plataformas actuales tienen dificultades para ejercer una fuerza constante sobre una superficie. Por lo tanto, en [24] se muestra como objetivo diseñar una plataforma cuádrirrotor capaz de volar rápidamente a su objetivo y ejercer una fuerza constante sobre una superficie mientras se mantiene en hover. Un aspecto importante que los autores consideran es el vacío que se genera en la parte superior de la plataforma, el cual puede crear una succión al aproximarse a la superficie y chocar con ella. Para resolver esto, se colocó un tercer rotor con propulsión en dirección horizontal, alineado con el punto de contacto con la superficie para no crear momentos adicionales (Fig. 2.2). El empuje generado por el tercer rotor es empleado para desplazar horizontalmente al UAV hasta generar el contacto con entre el cepillo y la superficie. Para corregir el empuje del rotor horizontal y el ángulo del UAV respecto a la pared se

emplea un controlador PID para cada uno. Para controlar el empuje de los motores principales se emplean datos adquiridos del procesamiento de imágenes. Se emplean lecturas de un sensor ultrasónico para complementar la desviación de los acelerómetros y giroscopios.

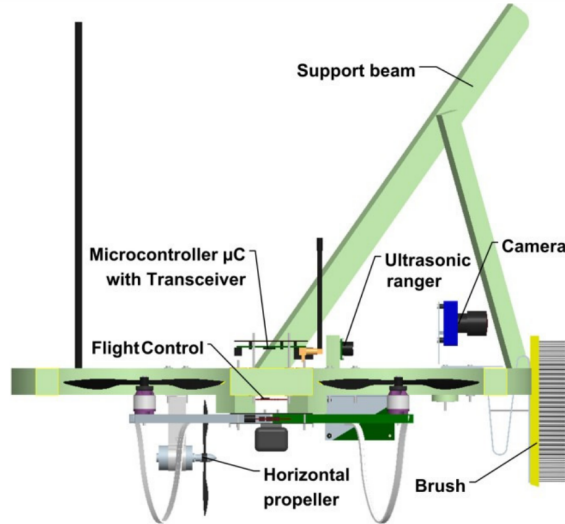


Figura 2.2: Plataforma UAV con un rotor adicional en el eje horizontal [24].

En los resultados experimentales del artículo, se muestra que la estrategia de control es adecuada para mantener el contacto entre la plataforma y la superficie. Para esto, el UAV fue colocado cerca de la pared y se activó el rotor horizontal para generar un desplazamiento, y por lo tanto, el contacto. En ese momento, la velocidad de esta hélice se mantuvo constante. Un sensor montado sobre el eje de contacto se encarga de medir las fuerzas generadas, tal como se muestra en la figura 2.3.

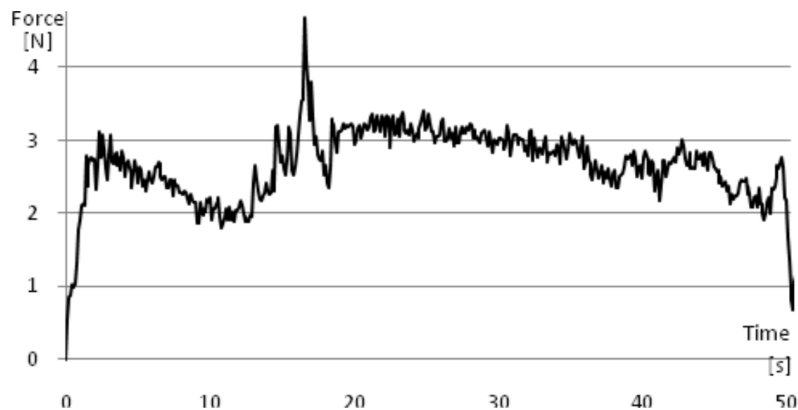


Figura 2.3: Fuerza generada por el contacto durante 50 segundos con una fuerza deseada de 3 Newton [24].

VTOL en Contacto con una Superficie Horizontal

En [25], Jung distingue que, dada la naturaleza de los VTOL cuadirrotor, aplicar una fuerza en dirección horizontal es más complejo para la plataforma que aplicarla en dirección vertical. Sin embargo, existen diversas tareas que involucran componentes instalados en superficies elevadas. El autor plantea la problemática de emplear un VTOL para cambiar un bombillo en el techo, al ejercer una fuerza en dirección vertical para generar contacto con la superficie horizontal sobre la plataforma. Un esquema de control para la fuerza de contacto se añade al bucle de control de orientación para ajustar la trayectoria deseada con respecto a la fuerza aplicada. Para el control de la fuerza se integra otro bucle al de control de posición. Se considera que la acción de alcanzar una altitud deseada y mantenerse en hover es parte del control de orientación. El desplazamiento vertical se relaciona con la fuerza de los rotores, mientras que el estado de hover depende de los ángulos de pitch, roll y yaw. Un control PID es aplicado a estas variables para el control de la orientación. En adición a este, se añaden dos lazos cerrados, uno para la posición y el otro para la fuerza ejercida.

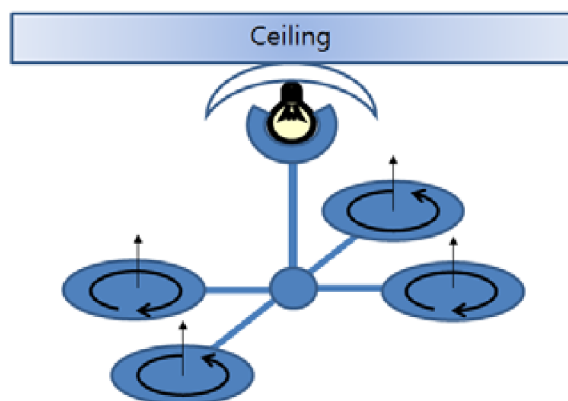


Figura 2.4: Plataforma VTOL aproximándose a una superficie horizontal [25]

Por la naturaleza de la situación, si el cambio de altitud se hace constante hasta hacer contacto con el techo, se generará una fuerza de gran magnitud al chocar con este. Es por esto que la trayectoria de ascenso se divide en dos etapas, la primera consiste en llegar a una altitud cercana a la de contacto y esperar unos segundos, la segunda implica terminar la trayectoria con una velocidad más baja para lograr un contacto suave con el objetivo y mantener una fuerza constante sobre él. A pesar de separar en tramos la trayectoria, se observó en los resultados un fuerte pico en la fuerza ejercida al iniciar el contacto (Fig.), por lo que el autor recomienda estudiar la aplicación de diversos filtros en un trabajo futuro.

Por otro lado, en [26], Jeong y Jung describen la aplicación del control de teleoperación

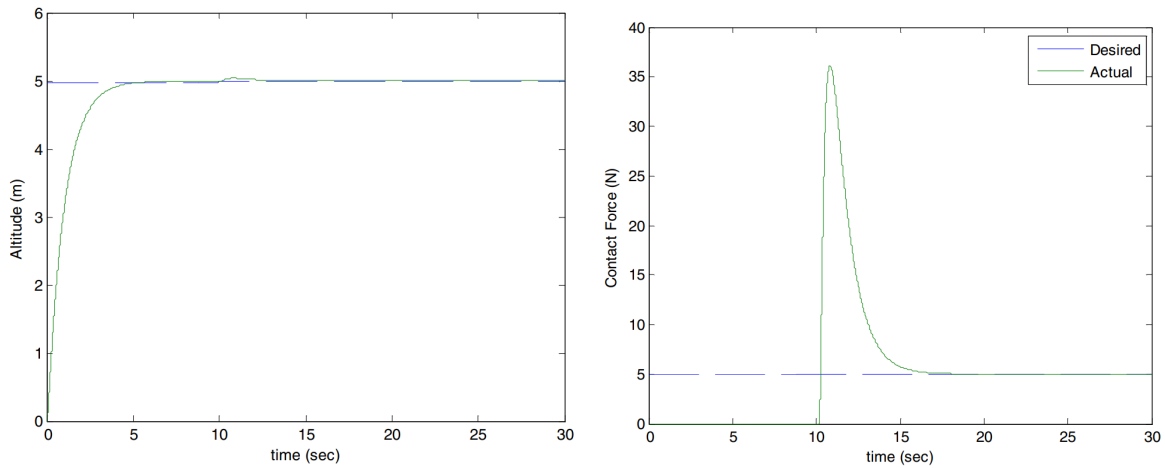


Figura 2.5: Seguimiento de trayectoria de un PVTOL. En los resultados del artículo [17] se muestra la evolución de los desplazamiento en x y y al seguir una trayectoria circular deseada comenzando en dos posiciones iniciales distintas.

en el mismo contexto del cambio de una bombilla en el techo, donde la regulación de fuerza en el eje vertical de la plataforma es el principal interés. Los resultados de los experimentos muestran que la aplicación de una técnica de control de fuerza a un sistema de cuadirrotor en una configuración de teleoperación bilateral es factible.

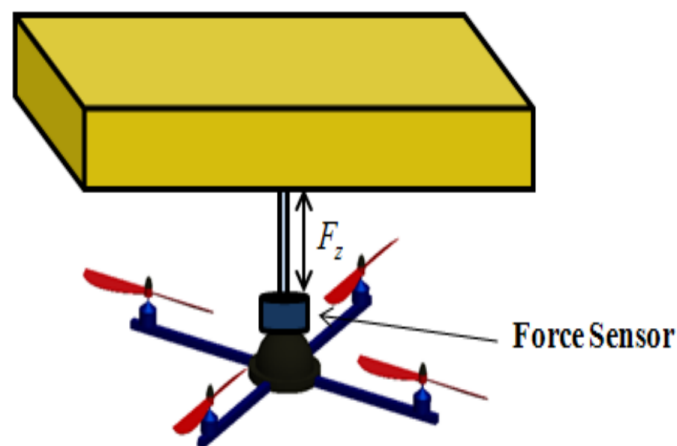
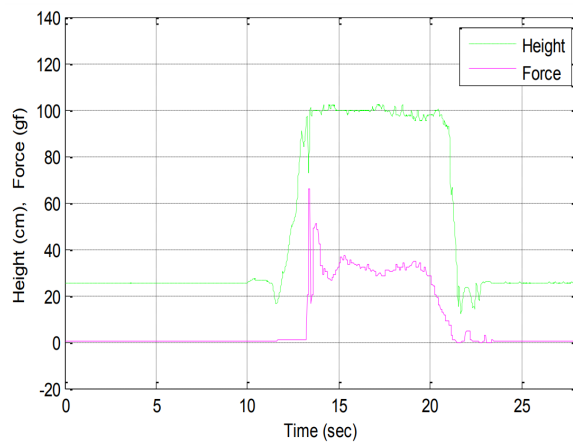
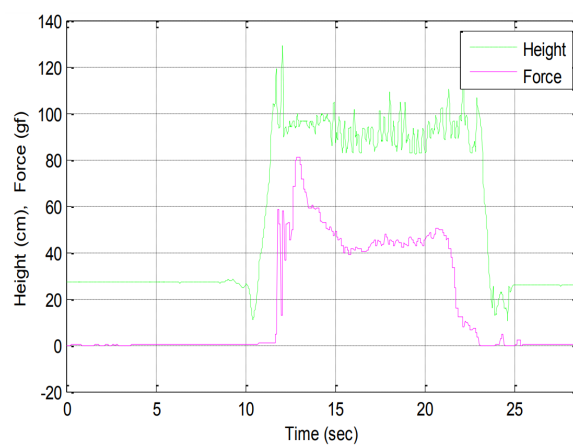


Figura 2.6: Plataforma VTOL con teleoperación bilateral aproximándose a una superficie horizontal [26]

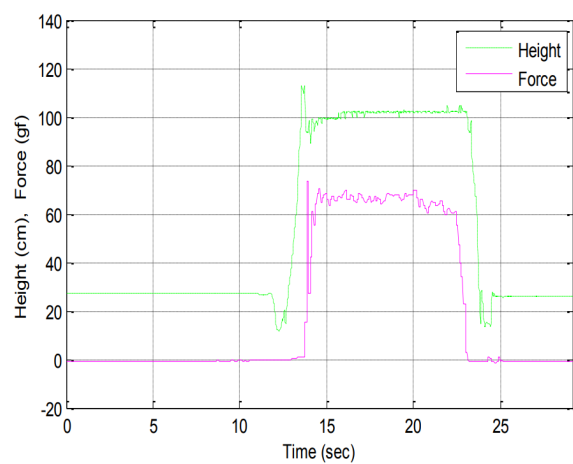
A pesar de que el entorno se simplifica a un escritorio para probar la regulación de la fuerza de contacto en la configuración de teleoperación bilateral, los estudios experimentales han demostrado que el cuadirrotor se regula bien con las fuerzas aplicadas desde el dispositivo maestro (Fig. 2.7). Esto es una señal prometedora para futuras investigaciones sobre la aplicación del control de la fuerza de contacto.



(a) 30 gf



(b) 40 gf



(c) 70 gf

Figura 2.7: Fuerza y altura obtenidas para tres condiciones de fuerza deseada [26].

2.1. Motivación

Actualmente, las plataformas UAV desempeñan una larga lista de actividades que involucran seguimiento de trayectorias o mantenimiento de una posición deseada bajo ciertas condiciones. De igual forma, ha sido de gran interés la posibilidad de añadir pesos a estas plataformas con el objetivo de transportar cargas, abriendo un amplio abanico de aplicaciones. Si bien, un UAV de ala fija puede contener dicha carga dentro de su fuselaje, en el caso de los UAV de ala rotativa es un poco más complejo, dado que esta carga se encuentra en contacto con el ambiente y modifica la dinámica del vehículo. Por otro lado, otra problemática que se encuentra bajo gran estudio es la de navegación entre obstáculos, evitando el contacto con estos al realizar cierta tarea.

Así bien, queda claro que las principales aplicaciones de las plataformas UAV se centran en el mantenimiento de una posición, seguimiento de trayectorias, transporte de cargas o una combinación entre ellas. Ya que es deseable que el UAV evite obstáculos a lo largo de su misión, un tópico menos estudiado es el uso de estos vehículos para ejercer una acción en el ambiente de forma directa. Con esto último, se introduce una última aplicación menos común: la interacción con el ambiente.

De esta forma, se incorpora la posibilidad de abordar tareas que involucren la aplicación de fuerzas en objetos o superficies. El vehículo debe ser capaz de mantenerse en estado de hover para mantenerse fijo en una posición mientras se ejerce una fuerza en dirección horizontal o vertical, siendo los cuadricópteros la plataforma más famosa para esta tarea. En el caso de aplicar una fuerza en el eje vertical, es visible que al variar la potencia de los rotores del vehículo es posible cumplir con la tarea, sin embargo, el asunto se vuelve un poco más complejo al pretender aplicar una fuerza en el eje horizontal, debido a que debe existir un ángulo de rotación para hacer un desplazamiento horizontal, y por lo tanto, ejercer una fuerza.

En este contexto, el presente proyecto de tesis que se propone consiste en abordar la problemática de interactuar con el ambiente mediante una plataforma menos convencional: el PVTOL. La fuerza que se busca ejercer de forma horizontal se representa mediante la elongación de un resorte que se encuentra unido al centro de masa de la plataforma PVTOL y a una pared vertical. Además de obtener el modelo dinámico de la plataforma ejerciendo una fuerza, se busca realizar las simulaciones correspondientes con entradas de control

convencionales (PD, PID) para determinar su comportamiento.

2.2. Justificación

Debido a que las aplicaciones actuales contemplan el uso de multi rotores para la resolución de varias problemáticas, es de gran interés emplear la plataforma PVTOL que tiene una dinámica mas sencilla que sus compañeros multi rotores al desempeñarse en un plano 2D en vez del espacio 3D. Por su naturaleza mas compacta, el PVTOL puede ser empleado en espacios mas reducidos, tanto para las fases de despegue y aterrizaje, así como tener acceso a lugares mas angostos en comparación a los multi rotores.

2.3. Objetivos

Objetivo general

Desarrollo matemático y control de una plataforma aérea tipo PVTOL para ejercer una fuerza constante en el ambiente mediante un resorte que une a la plataforma con una superficie vertical estática.

Objetivos particulares

- Obtención del modelo dinámico de la plataforma PVTOL ejerciendo una fuerza en el ambiente.
- Simulaciones del sistema con estrategias de control convencionales y/o robustas.

2.4. Metodología

El presente trabajo se divide en ocho etapas como se muestra a continuación:

- 1) Análisis del estado del arte.
 - 2) Obtención del modelo dinámico de la plataforma PVTOL ejerciendo una fuerza constante.
 - 3) Diseño de la estrategia de control de la traslación horizontal.
-

- 4) Diseño de la estrategia de control del ángulo de orientación
- 5) Simulación numérica de la plataforma PVTOL con las estrategias de control diseñadas.

Modelo de PVTOL con Fuerza Constante

Considerando la bibliografía presentada en el Capítulo 2, es notable que los estudios realizados hasta la actualidad abordan el problema de interactuar con el ambiente mediante plataformas de cuadrirrotor. Este tipo de UAV son protagonistas de múltiples estudios. Hay plataformas cuadrirrotor que ejercen una fuerza lateral sobre su eje horizontal [23] [24], o bien, una fuerza sobre su eje vertical [25] (siendo más sencillo de controlar debido a que no se requiere generar un torque para la aplicación de la fuerza). En el presente trabajo se aborda el problema de generar una fuerza horizontal, con la novedad de emplear una plataforma PVTOL en vez del cuadrirrotor tradicional. Siendo así, se pretende simular la fuerza ejercida mediante un resorte que une al centro de masa de la plataforma con una pared vertical. Cuando el PVTOL produce un torque este se desplaza, elongando el resorte una distancia dada para mantener una fuerza deseada representada por el vector en color rojo (Fig. 3.1).

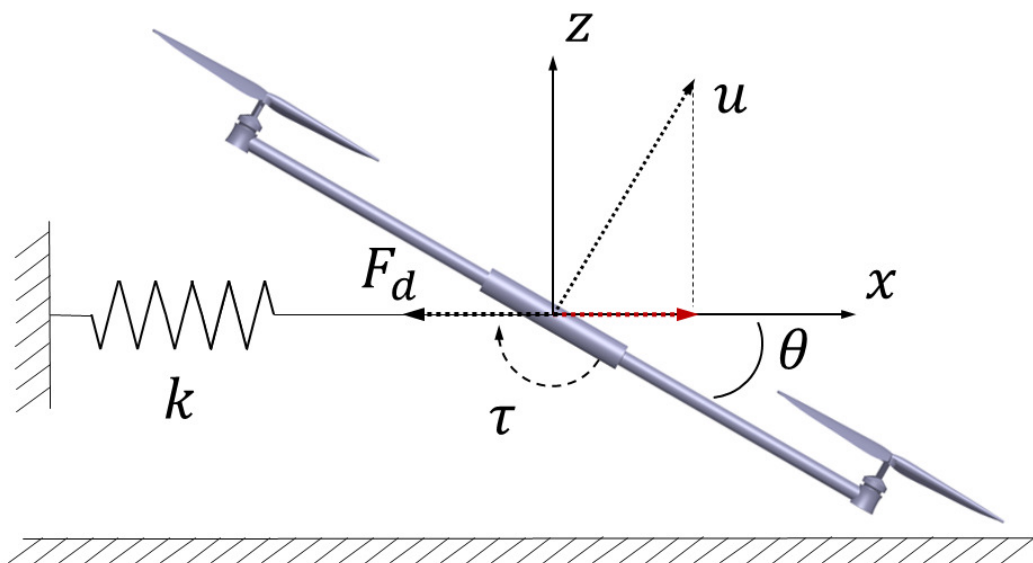


Figura 3.1: Configuración de la plataforma PVTOL.

El modelo para un PVTOL (Planar Vertical Take off and Landing) que aplica una fuerza constante F_d está dado por [27]:

$$m\ddot{x} = u \sin \theta + F_d \quad (3.1)$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta - mg \quad (3.2)$$

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (3.3)$$

donde m es la masa, θ es el ángulo de la plataforma respecto al horizonte, g es la aceleración gravitacional, x y z son el desplazamiento horizontal y vertical, respectivamente. u es el empuje total y τ es el torque. La fuerza deseada F_d que se aplica está dada por:

$$F_d = kx_d \quad (3.4)$$

siendo k la constante del resorte y x_d el desplazamiento deseado. Asumiendo que la dinámica de la altitud se linealiza, se emplea la siguiente entrada de control:

$$u = \frac{[-2\dot{z} - (z - z^d)] m + mg}{\cos \theta} \quad (3.5)$$

Introduciendo (4) en (2) se tiene el siguiente sistema en lazo cerrado para la dinámica de la altitud

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= [-2\dot{z} - (z - z^d)] m + mg - mg \\ \ddot{z} &= [-2\dot{z} - (z - z^d)] \\ 0 &= \ddot{z} + 2\dot{z} + (z - z^d) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Introduciendo (4) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \left(\frac{[-2\dot{z} - (z - z^d)] m + mg}{\cos \theta} \right) \sin \theta + F_d \\ &= ([-2\dot{z} - (z - z^d)] m + mg) \tan \theta + F_d \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se supone que la altitud del PVTOL ya alcanzó el valor deseado $\ddot{z} = -2\dot{z} - (z - z^d) = 0$.

Entonces, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\ddot{x} = (g) \tan \theta + \frac{F_d}{m} \quad (3.8)$$

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (3.9)$$

3.1. Estrategia de control para el desplazamiento horizontal

Se considera que el ángulo de orientación θ permanece dentro del intervalo de $(-\pi/2, +\pi/2)$. Se define una nueva variable \tilde{x} para representar la diferencia entre el desplazamiento actual x y el desplazamiento deseado x_d .

$$\tilde{x} = x - x_d \quad (3.10)$$

Se define la dinámica deseada para el desplazamiento horizontal como

$$v = \dot{\tilde{x}} + k_1 \tilde{x}, \quad k_1 > 0 \quad (3.11)$$

donde k_1 es una constante positiva la cual define la tasa de convergencia. Por lo tanto, el objetivo es que $v = 0$. Diferenciando la ecuación anterior se tiene

$$\dot{v} = \ddot{\tilde{x}} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (3.12)$$

Considerando que x_d es constante al diferenciar dos veces (3.10) se llega a $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$ y se introduce en la ecuación anterior.

$$\dot{v} = \ddot{x} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (3.13)$$

$$= g \tan \theta + \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (3.14)$$

Se considera una entrada virtual θ^v dentro de la ecuación de error e como:

$$\begin{aligned} e &= \tan \theta - \tan \theta^v \\ \tan \theta &= e + \tan \theta^v \end{aligned} \quad (3.15)$$

entonces, al introducir el error en (3.14) se obtiene

$$\dot{v} = g(e + \tan \theta^v) + \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (3.16)$$

Ahora, se elige la entrada virtual como

$$\theta^v = \arctan \left\{ \frac{-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m}}{g} \right\}, \quad k_2 > 0 \quad (3.17)$$

$$\dot{\theta}^v = \frac{g(-k_1 \ddot{\tilde{x}} - k_2 \dot{v})}{g^2 + (-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m})^2} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}^v &= \frac{g(-k_1 \tilde{x}^{(3)} - k_2 \ddot{v})}{g^2 + (-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m})^2} \\ &+ \frac{g(k_1 \ddot{\tilde{x}} + k_2 \dot{v}) \left[2(-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m})(-k_1 \ddot{\tilde{x}} - k_2 \dot{v}) \right]}{\left(g^2 + (-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m})^2 \right)^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} = \tan \theta \quad (3.20)$$

$$\tilde{x}^{(3)} = x^{(3)} = \dot{\theta} \sec^2 \theta \quad (3.21)$$

$$\dot{v} = \ddot{\tilde{x}} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (3.22)$$

$$\ddot{v} = \tilde{x}^{(3)} + k_1 \ddot{\tilde{x}} \quad (3.23)$$

Introduciendo la entrada virtual (3.17) en (3.16) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{v} &= g \left(e + \left\{ \frac{-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m}}{g} \right\} \right) + \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \\ &= ge - k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v - \frac{F_d}{m} + \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \\ &= ge - k_2 v \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde k_2 es una constante positiva que define la tasa de convergencia del segundo modo deseado para el desplazamiento horizontal. De la ecuación (3.11) se obtiene

$$\dot{\tilde{x}} = -k_1 \tilde{x} + v \quad (3.25)$$

De las ecuaciones (3.24) y (3.25) se obtiene la siguiente representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} e \quad (3.26)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.2. Estrategia de control para el ángulo de orientación

Se define el error entre el ángulo virtual y actual como

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^v \quad (3.28)$$

el cual se deriva dos veces.

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}^v \quad (3.29)$$

De la ecuación (3.3) se recuerda que $\ddot{\theta} = \tau$ y se introduce en la anterior.

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \tau - \ddot{\theta}^v \quad (3.30)$$

Entonces, se propone un torque τ tal que lleve a cero el error $\tilde{\theta}$, es decir: $\tilde{\theta} = \dot{\tilde{\theta}} = \ddot{\tilde{\theta}} = 0$.

$$\tau = \ddot{\theta}^v - c_2 \dot{\tilde{\theta}} - c_1 \tilde{\theta} \quad (3.31)$$

Lo anterior se introduce en (3.30) y se llega a

$$\ddot{\tilde{\theta}} = (\ddot{\theta}^v - c_2 \dot{\tilde{\theta}} - c_1 \tilde{\theta}) - \ddot{\theta}^v \quad (3.32)$$

$$= -c_2 \dot{\tilde{\theta}} - c_1 \tilde{\theta} \quad (3.33)$$

$$\ddot{\tilde{\theta}} + c_2 \dot{\tilde{\theta}} + c_1 \tilde{\theta} = 0 \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) puede ser representada en espacio de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

donde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Análisis de Estabilidad de Lyapunov

Después de la obtención del modelo dinámico de un sistema, es natural cuestionarse si este tiende a comportarse de forma estable o inestable. Según Cook M. [28], la estabilidad es la propiedad de los sistemas que se refiere al movimiento natural de estos después de someterse a una perturbación. La misma ambigüedad de la definición es indicativo de lo amplio que es el tema de la estabilidad de los sistemas dinámicos.

Para verificar la estabilidad del sistema, se empleará el Análisis de Lyapunov. Primero, se toman por separado la dinámica de desplazamiento horizontal y la dinámica rotacional, asignando una función candidata de Lyapunov a cada una, respectivamente. Se pretende demostrar que cada sistema por separado es estable en el sentido de Lyapunov.

4.1. Estabilidad de la dinámica traslacional horizontal

Se recuerda que la representación en espacio de estados para la dinámica del desplazamiento horizontal es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} e \quad (4.1)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Es visible que se trata de un sistema no lineal, sin embargo, para demostrar la estabilidad en el sentido de Lyapunov, se busca generar una función candidata al satisfacer la ecuación de Lyapunov dada por:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1 \quad (4.3)$$

donde P_1 y Q_1 son matrices simétricas definidas positivas. Se propone una matriz Q_1 como se muestra a continuación.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2k_1 k_2 (k_1 + k_2) & 0 \\ 0 & 2k_1 k_2 (k_1 + k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 k_2 \alpha & 0 \\ 0 & 2k_1 k_2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones dado por (4.3) se definen las constantes a , c y d para los componentes de la matriz P_1 .

$$P_1 = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Sustituyendo en la ecuación de Lyapunov se obtiene:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1$$

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2k_1 k_2 \alpha & 0 \\ 0 & 2k_1 k_2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} -k_1 a & -k_1 c \\ a - k_2 c & c - k_2 d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 a & a - k_2 c \\ -k_1 c & c - k_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 k_2 \alpha & 0 \\ 0 & -2k_1 k_2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} -2k_1 a & a - \alpha c \\ a - \alpha c & 2c - 2k_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1 k_2 \alpha & 0 \\ 0 & -2k_1 k_2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

De la expresión matricial (4.8) se desglosan las siguientes ecuaciones:

$$-2k_1 a = -2k_1 k_2 \alpha \quad (4.9)$$

$$a - \alpha c = 0 \quad (4.10)$$

$$2c - 2k_2 d = -2k_1 k_2 \alpha \quad (4.11)$$

De la ecuación (4.9) se llega a:

$$a = k_2\alpha \quad (4.12)$$

Sustituyendo (4.12) en (4.10):

$$\begin{aligned} k_2\alpha - \alpha c &= 0 \\ c &= k_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Finalmente, (4.13) se introduce en (4.11):

$$\begin{aligned} 2k_2 - 2k_2d &= -k_1k_2\alpha \\ 1 - d &= -k_1\alpha \\ d &= 1 + k_1\alpha \end{aligned} \quad (4.14)$$

Entonces, la ecuación de Lyapunov (4.3) se resuelve para las matrices P_1 y Q_2 dadas por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} k_2\alpha & k_2 \\ k_2 & 1 + k_1\alpha \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2k_1k_2\alpha & 0 \\ 0 & 2k_1k_2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Siendo así, se define la siguiente función positiva

$$V_1 = \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} P_1 \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2\alpha & k_2 \\ k_2 & 1 + k_1\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2\alpha\tilde{x} & k_2v \\ k_2\tilde{x} & v + k_1\alpha v \end{bmatrix} \\ &= k_2\alpha\tilde{x}^2 + 2k_2\tilde{x}v + v^2 + k_1\alpha v^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Diferenciando la función anterior se tiene:

$$\dot{V}_1 = 2k_2\alpha\tilde{x}\dot{\tilde{x}} + 2k_2\tilde{x}\dot{v} + 2k_2\tilde{x}\dot{v} + 2v\dot{v} + 2k_1\alpha v\dot{v} \quad (4.19)$$

De las ecuaciones (3.24) y (3.25) se tiene que $\dot{\tilde{x}} = -k_1\tilde{x} + v$ y $\dot{v} = -k_2v + ge$, ambas expresiones se sustituyen en la derivada.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2k_2\alpha\tilde{x}(-k_1\tilde{x} + v) + 2k_2(-k_1\tilde{x} + v)v + 2k_2\tilde{x}(-k_2v + ge) \\ & + 2v(-k_2v + ge) + 2k_1\alpha v(-k_2v + ge) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2k_2\alpha xv - 2k_1k_2\alpha x^2 + 2k_2v^2 - 2k_1k_2xv - 2k_2^2xv \\ & + 2k_2xge - 2k_2v^2 + 2vge - 2k_1k_2\alpha v^2 + 2k_1\alpha vge \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\dot{V}_1 = -2k_1k_2\alpha x^2 - 2k_1k_2\alpha v^2 + 2k_2xge + 2(1 + k_1\alpha)gev \quad (4.22)$$

Reacomodando de forma matricial, se obtiene:

$$\dot{V}_1 = - \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k_1k_2\alpha & 0 \\ 0 & 2k_1k_2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2\alpha & k_2 \\ k_2 & 1 + k_1\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} e \quad (4.23)$$

$$\dot{V}_1 = - \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} P_1 B e \quad (4.24)$$

Se mantiene desglosado el primer término de la derivada:

$$\dot{V}_1 = -2k_1k_2(k_1 + k_2)(\tilde{x}^2 + v^2) + 2 \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} P_1 B e \quad (4.25)$$

Es importante destacar que el último término de la ecuación satisface la siguiente igualdad

$$|2 \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} P_1 B e| \leq 2 \left\| \begin{bmatrix} \tilde{x} & v \end{bmatrix} \right\| \sqrt{\bar{k}} \frac{\|P_1 B\|}{\sqrt{\bar{k}}} |e| \leq \bar{k}(\tilde{x}^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \quad (4.26)$$

donde

$$\bar{k} = k_1 k_2 (k_1 + k_2) \quad (4.27)$$

Introduciendo la desigualdad en (4.25) se llega a

$$\dot{V}_1 \leq -2k_1 k_2 (k_1 + k_2) (\tilde{x}^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \quad (4.28)$$

4.2. Estabilidad de la dinámica rotacional

Se recuerda que la representación en espacio de estados para la dinámica rotacional es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

donde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

De igual forma que en la Sección anterior, se busca satisfacer la ecuación de Lyapunov

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2 \quad (4.31)$$

para las matrices simétricas definidas positivas P_2 y Q_2 . Se propone una matriz Q_2 dada por:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones dado por (4.31) se definen las constantes a , b y d para los componentes de la matriz P_1 .

$$P_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Sustituyendo en la ecuacion de Lyapunov se obtiene:

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_1 \\ 1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} -c_1b & -c_1d \\ a - c_2b & b - c_2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_1b & a - c_2b \\ -c_1d & b - c_2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1c_2 & 0 \\ 0 & -2c_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} -2c_1b & a - c_1d - c_2b \\ a - c_1d - c_2b & 2b - 2c_2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1c_2 & 0 \\ 0 & -2c_2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

De la expresi3n matricial (4.36) se desglosan las siguientes ecuaciones:

$$-2c_1b = -2c_1c_2 \quad (4.37)$$

$$2b - 2c_2d = -2c_2 \quad (4.38)$$

$$a - c_1d - c_2b = 0 \quad (4.39)$$

De la ecuaci3n (4.37) se llega a:

$$b = c_2 \quad (4.40)$$

Sustituyendo (4.40) en (4.38):

$$2c_2 - 2c_2d = -2c_2$$

$$-2c_2d = -4c_2$$

$$d = 2 \quad (4.41)$$

Finalmente, (4.41) y (4.40) se introducen en (4.39):

$$\begin{aligned} a - 2c_1 - c_2^2 &= 0 \\ a &= 2c_1 + c_2^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Entonces, la ecuación de Lyapunov (4.3) se resuelve para las matrices P_1 y Q_2 dadas por:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2^2 & c_2 \\ c_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Siendo así, se define la siguiente función positiva

$$V_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} P_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2^2 & c_2 \\ c_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c_1\tilde{\theta} + c_2^2\tilde{\theta} + c_2\dot{\tilde{\theta}} \\ c_2\tilde{\theta} + 2\dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \\ &= 2c_1\tilde{\theta}^2 + c_2^2\tilde{\theta}^2 + 2c_2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 2\dot{\tilde{\theta}}^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

cuya derivada es

$$\dot{V}_2 = 4c_1\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 2c_2^2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 + 2c_2\tilde{\theta}\ddot{\tilde{\theta}} + 4\dot{\tilde{\theta}}\ddot{\tilde{\theta}} \quad (4.47)$$

$$= 4c_1\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 4\dot{\tilde{\theta}}\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 + c_2\tilde{\theta}(2\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}) \quad (4.48)$$

De la ecuación (3.34) se deduce que $2\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}} + 2c_1\tilde{\theta} = 0$, entonces se añaden los términos necesarios para completar esta ecuación dentro del paréntesis de la derivada anterior.

$$\dot{V}_2 = 4c_1\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 4\dot{\tilde{\theta}}\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 + c_2\tilde{\theta}(2\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}) + 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 \quad (4.49)$$

$$= 4c_1\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 4\dot{\tilde{\theta}}\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 + c_2\tilde{\theta}(2\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}} + 2c_1\tilde{\theta}) - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 \quad (4.50)$$

$$= 4c_1\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} + 4\dot{\tilde{\theta}}\ddot{\tilde{\theta}} + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 \quad (4.51)$$

$$= \dot{\tilde{\theta}}(4\ddot{\tilde{\theta}} + 4c_1\tilde{\theta}) + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 \quad (4.52)$$

De forma similar, de la ecuación (3.34) se deduce que $4\ddot{\tilde{\theta}} + 4c_2\dot{\tilde{\theta}} + 4c_1\tilde{\theta} = 0$, entonces se añaden los términos necesarios para completar esta ecuación dentro del paréntesis de la derivada anterior.

$$\dot{V}_2 = \dot{\tilde{\theta}}(4\ddot{\tilde{\theta}} + 4c_1\tilde{\theta}) + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 + 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 - 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \quad (4.53)$$

$$= \dot{\tilde{\theta}}(4\ddot{\tilde{\theta}} + 4c_2\dot{\tilde{\theta}} + 4c_1\tilde{\theta}) - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 - 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \quad (4.54)$$

$$\dot{V}_2 = -2c_1c_2\tilde{\theta}^2 - 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \quad (4.55)$$

Reacomodando de forma matricial, se obtiene:

$$\dot{V}_2 = - \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\dot{V}_2 = - \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Simulación

Se llevan a cabo simulaciones numéricas en el módulo Simulink de Matlab para verificar el rendimiento del control propuesto [27]. El código consta de tres bloques principales (Fig. 5.1) que se encargan de tomar los datos necesarios para realizar el cálculo de θ^v y sus dos derivadas (3.17 - 3.19), respectivamente.

```

1 function theta_v = fcn(k1,k2,x_tp,v,Fd,m,g)
2
3 theta_v = atan((- k1 * x_tp - k2 * v - Fd/m) / (g));

```

```

1 function theta_vp = fcn(k1,k2,x_tp, x_tpp,v,v_p,Fd,m,g)
2
3 theta_vp = g * ( - k1 * x_tpp - k2 * v_p) / (g^2 + ( - k1 * x_tp - ...
      k2 * v - Fd/m)^2);

```

```

1 function theta_vpp = fcn(k1,k2,x_tp,x_tpp,x_t3,v,v_p,v_pp,Fd,m,g)
2
3 theta_vpp = g * (-k1 * x_t3 - k2 * v_pp)
4             / (g^2 + ( - k1 * x_tp - k2 * v - Fd/m)^2)
5             + ( g * (k1 * x_tpp + k2 * v_p) *
6               (2*( - k1 * x_tp - k2 * v - Fd/m )*(- k1 * x_tpp - k2 * v_p))
7               )/ (( g^2 + ( - k1 * x_tp - k2 * v - Fd/m)^2 )^2);

```

De modo que, θ^v y sus derivadas son empleadas para generar la entrada de control τ (3.31), después de ser restadas a las derivadas actuales de theta $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ para obtener $\dot{\theta}^v$ y $\ddot{\theta}^v$ (3.29). Para llegar a los valores de $\dot{\theta}^v$ y $\ddot{\theta}^v$, se integra la entrada de control τ una y dos veces,

Condición inicial	Valor	Constantes	Valor	Ganancias	Valor
x_0	0 [m]	$k_{resorte}$	5 [N/m]	k_1	20
\dot{x}_0	0 [m/s]	x_d	1 [m]	k_2	5
θ_0	0 [rad]	m	2 [kg]	c_1	20
$\dot{\theta}_0$	0 [rad/s]	g	9.81 [m/s ²]	c_2	30

Tabla 5.1: Condiciones iniciales y constantes de la simulación.

respectivamente (3.9). Una vez conocido el valor actual de θ es posible conocer el estado completo del sistema al obtener \ddot{x} e integrarla dos veces (3.8).

En seguida, al desplazamiento actual x se le resta el desplazamiento deseado x_d para obtener \tilde{x} (3.10). Ya que se considera a x_d como constante, entonces, $\dot{\tilde{x}} = \dot{x}$ y $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$.

Finalmente, con estos valores es posible obtener la dinámica deseada para el desplazamiento v (3.11), sus derivadas \dot{v} (3.22) y \ddot{v} (3.23), así como la tercera derivada del desplazamiento $x^{(3)}$ (3.21). Estos valores son las últimas entradas necesarias para los tres bloques principales, cerrando así el ciclo.

5.1. Resultados

Para la simulación, se emplearon las condiciones iniciales y constantes mostradas en la tabla A.1 para un tiempo de simulación de 10 s.

La figura 5.2 muestra la convergencia del desplazamiento x hacia el valor deseado x_d de forma amortiguada, llegando a estabilizarse alrededor de los 4s. Las ganancias k_1 y k_2 determinan el radio de convergencia deseado hacia el punto de equilibrio de x y \dot{x} .

La figura 5.3 muestra la convergencia del ángulo de orientación θ hacia el valor necesario para estabilizar la plataforma y mantener una fuerza constante F_d alrededor de x_d , llegando a estabilizarse alrededor de los 2s. Las ganancias c_1 y c_2 determinan el radio de convergencia deseado hacia el punto de equilibrio de θ y $\dot{\theta}$.

Finalmente, en la figura 5.4 se muestra que la entrada de control τ logra estabilizar la plataforma alrededor del primer segundo, lo cual es relativamente rápido. Sin embargo, la rapidez de la respuesta involucra mucha energía para estabilizar el sistema, como se visualiza en los valores altos de los *overshots*.

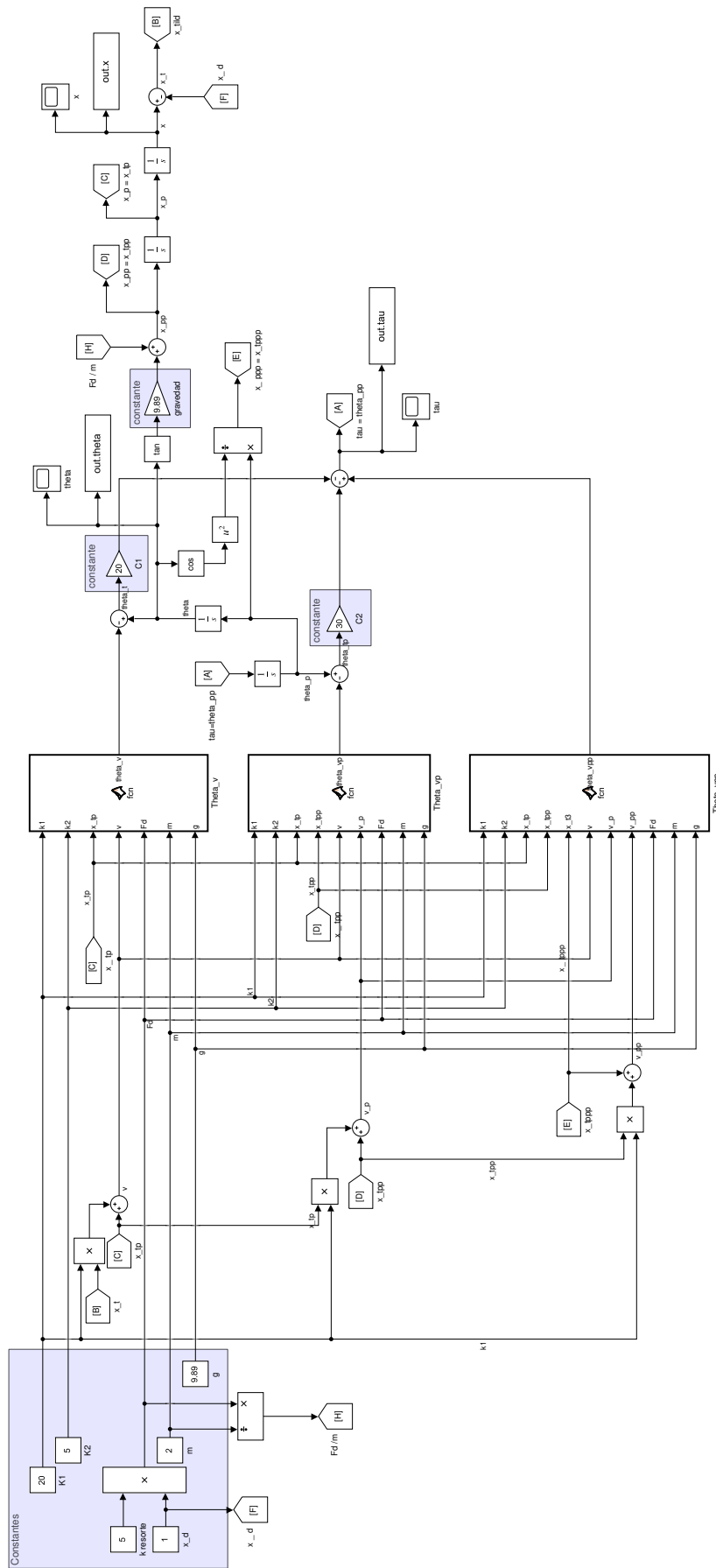


Figura 5.1: Modelo en Simulink de PVTOL con fuerza constante.

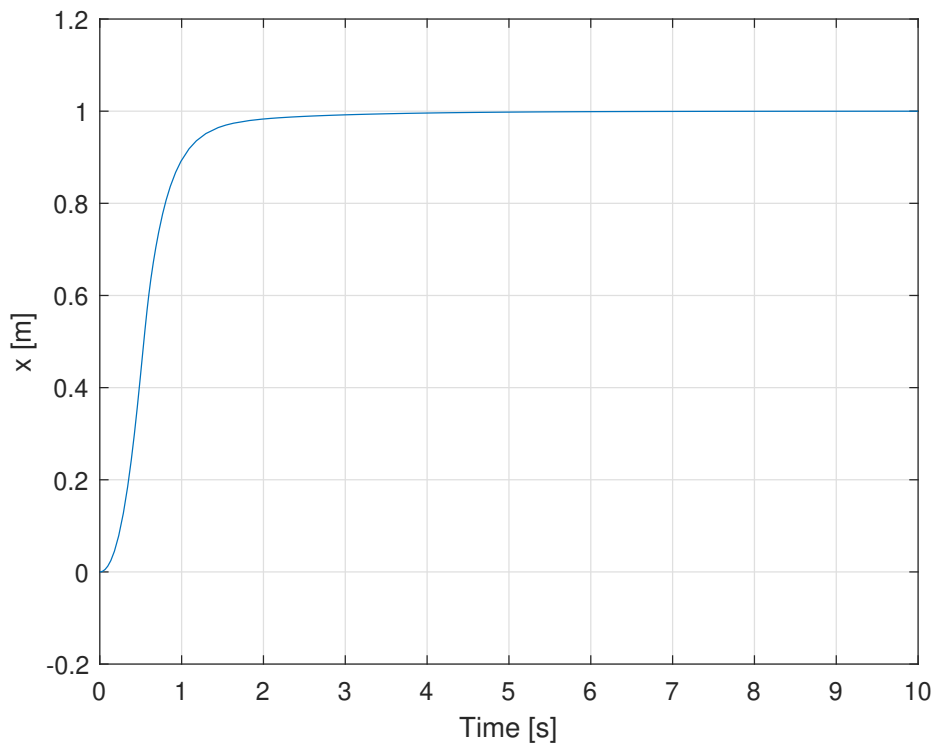


Figura 5.2: Comportamiento del desplazamiento x .

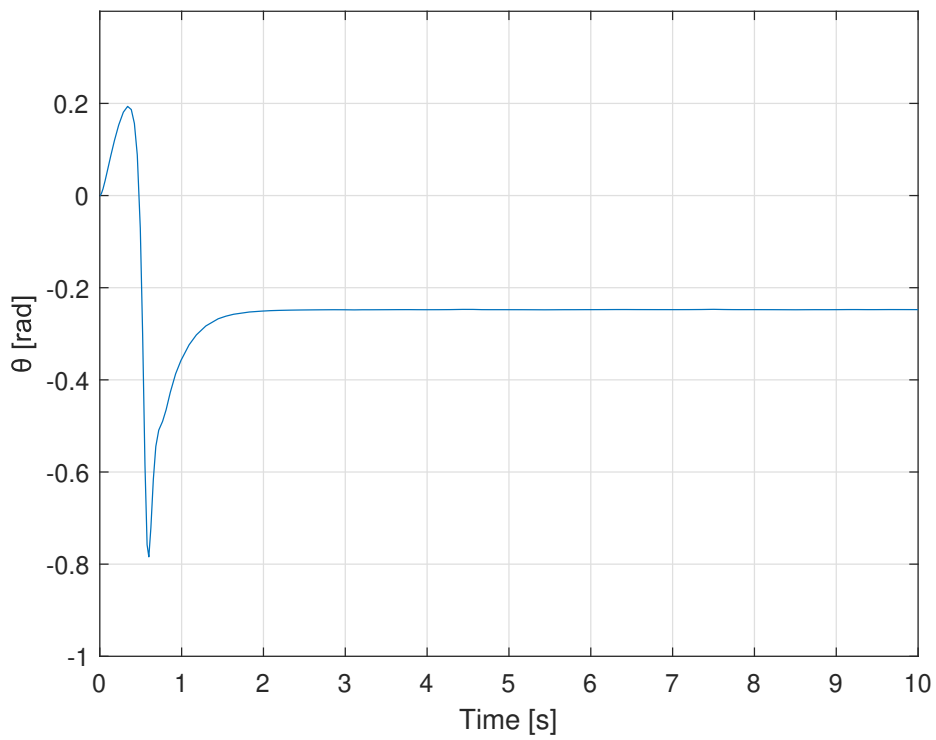


Figura 5.3: Comportamiento del ángulo θ .

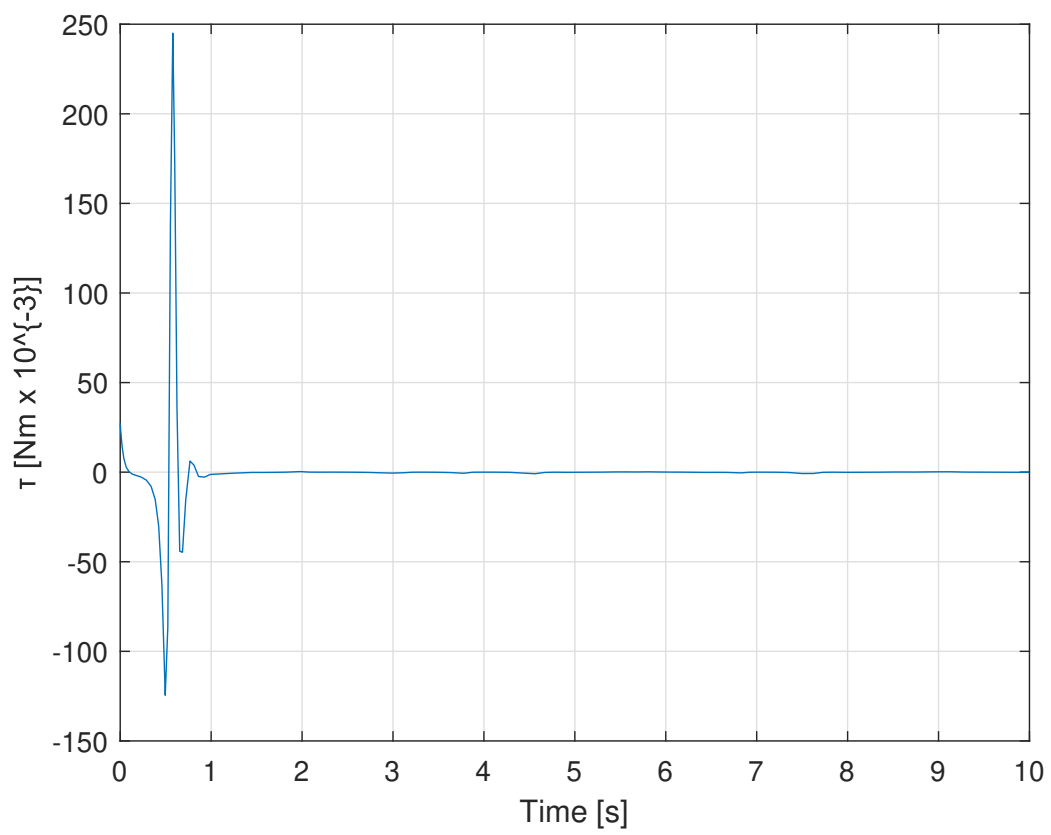


Figura 5.4: Comportamiento de la entrada de control τ .

Conclusiones

Este ultimo capitulo aborda las conclusiones que surgen de esta investigación y se plantean nuevos retos para un trabajo futuro.

6.1. Conclusiones

En la primera parte de la introducción y a lo largo del estado del arte queda evidente que, a pesar de la existencia de múltiples trabajos sobre UAV's que interactúan con el ambiente, la información que se tiene del modelo planar PVTOL en la misma situación es nula. Por lo tanto, el presente trabajo aborda el análisis de la dinámica de la plataforma al ejercer una fuerza en el ambiente, así como el análisis de un control propuesto y la evaluación de su desempeño.

Si bien, el PVTOL cuenta con tres ecuaciones que definen su dinámica, se considera que la plataforma se mantiene en una altura constante, de modo que la dinámica se reduce a dos ecuaciones simplificadas que describen el desplazamiento horizontal y la rotación. Posteriormente, se implementó una estrategia de control a cada dinámica.

El análisis de Lyapunov fue el método implementado para verificar la estabilidad del sistema. El resultado de las funciones candidatas demostró que se garantiza la estabilidad exponencial de este sistema no lineal, asegurando que el estado del sistema en lazo cerrado converge exponencialmente a cero.

Las simulaciones numéricas muestran que, en efecto, es posible que la plataforma ejerza una fuerza constante al elongar el resorte una distancia específica en relativamente poco tiempo y de manera controlada. Siendo así, los resultados obtenidos cumplen con los objetivos planteados en este trabajo.

6.2. Trabajo a futuro

El siguiente paso recomendado es implementar el control desarrollado en un plataforma física para comparar los resultados numéricos y los resultados reales.

Si bien, el mecanismo del resorte fue empleado para visualizar la fuerza ejercida, el sistema podría ser reemplazado por un brazo en la plataforma que haga contacto puntual con una pared vertical. Realizando los cambios correspondientes en la dinámica y el control.

Esta investigación puede orientarse a aplicaciones en ambientes al aire libre, como actividades que involucren la limpieza de ventanas o la pintura de paredes; por lo tanto, la consideración de perturbaciones en el viento también es de amplio interés.

Lo anterior se recomienda para desarrollar un trabajo futuro que mejore y complemente esta investigación sobre un nuevo uso de las plataformas PVTOL.

Del presente trabajo de tesis surgió un artículo citado como:

Lozano, R., Calderón, S., & González-Hernández, I. (2022). *Lyapunov Stability of a Planar Vertical Take-Off and Landing Aircraft Exerting a Force in the Environment*. *Drones*, 6(6), 144.

La diferencia sustancial entre este trabajo y el artículo es que este último considera el ruido en las mediciones y compara los resultados con los presentados en otro artículo que emplea un método de control diferente.

A.1. Introduction

PVTOL (Planar Vertical Take-Off and Landing) have been the subject of extensive research over the years. Multiple control techniques have been applied to these vehicles. For example, in (Aguilar-Ibañez, 2017) [29] a sliding mode controller is proposed. The altitude of the PVTOL is stabilized using feedback linearization technique. The sliding mode controller is used to stabilize the horizontal and angular variables. Another example is given in (Hernandez et al., 2020) [30] and (Aguilar-Ibañez et al., 2018) [13] where the Immersion and Invariance (I&I) control technique is used to design a controller that stabilizes the PVTOL aircraft system. The controller prioritizes control of the aircraft's altitude over control of the lateral displacement. In (Aguilar-Ibañez et al., 2020) [31] an output-feedback regulation control law for a PVTOL based on the shaping of an energy function is introduced.

To that purpose, a variant of the matching control energy approach is utilized to build the Lyapunov candidate function and the controller used to regulate the system. Finally, even the interaction between two PVTOL vehicles performing together an activity has been studied in (Escobar et al., 2020) [32] where the proposed method employs a decentralized control scheme based on the concept of passivity, in which no explicit communication occurs between agents, utilizing instead the physical link that exists between the agents and the load.

One of the attractive aspects of these PVTOL nonlinear systems is that they provide a first two-dimensional approach to the intricate dynamics of a three-dimensional quadrotor. PVTOL may face undesired interactions, such as turbulence in the environment. (Aguilar-Ibañez et al., 2019) [22] provides a robust controller for solving the trajectory-tracking control problem of a PVTOL in the presence of a crosswind where input–output feedback linearization and active disturbance rejection control techniques are used in the controller. Moreover, (Yao, 2021) [33] shows the trajectory tracking control problem of a PVTOL in the presence of position constraints and external disturbances. It is usual to task aerial vehicles with obstacle avoidance, as shown in (Kobayashi et al., 2009) [34] where the authors formulate the obstacle avoidance problem as an optimal control problem. It is also desirable in some instances to interact with an object, as long as it is under control. The interaction of a PVTOL with an object through the application of a controlled force is a subject being researched for a variety of applications where contact with the environment is required.

The subject of modeling and control of a specific configuration of Ducted-Fan Aerial Vehicle (DFAV) is addressed in (Marconi et al., 2008) [?], with explicit consideration given to the interaction with the environment. A controller capable of performing a tracking task when the DFAV comes into contact with a wall, in particular, is designed under certain conditions based on the trajectory to be tracked and the initial conditions associated to the movement of the DFAV when it is flying freely and approaching the wall. Robustness issues have been considered in the preliminary stages, and an adaptive algorithm to estimate system friction has been designed. Later, Marconi and Naldi presented control solutions for UAVs that were physically interacting with the environment [35]. Likewise, the problem of modeling and controlling a DFAV equipped with a fully-actuated robotic arm is addressed in [36]. Following the introduction of a detailed dynamical model, a control law based on the impedance control paradigm is proposed. This system is capable of performing complex operations that necessarily require physical interaction with its environment. Experimental

results of this study are presented later in [37]. A final example is mentioned in the conducted experiments for the project presented by Huerzeler et al. in [38], where a Double DFAV was created by combining two ducted-fan prototypes to develop a novel type of system with fully actuated longitudinal dynamics. This vehicle has an aerial manipulator and uses an impedance controller to retain safe physical interactions while minimizing the negative effects of elastic collisions.

Albers et al. [39] presented a quadrotor system stabilized by an inertial measurement unit. A second actuator was incorporated as a new method to generate forces during physical contact while the UAV remained in a horizontal position. The authors suggest a control architecture based on ultrasonic distance sensors and a CMOS camera. Flying tests show that flight stability can be achieved while applying a horizontal force to a surface. Likewise, Fumagalli et al. [40] investigated a quadrotor aerial vehicle equipped with a manipulation system that was designed to interact with a vertical wall. The paper focuses on the dynamics and control of an underactuated flying robot during interaction tasks. As a result, the aerial vehicle can perform interaction tasks while in flight.

As a result, the innovative force control application of the quad-rotor system is provided in (Jung, 2012) [41] to perform a possible constrained task against a ceiling. To change the desired trajectory in relation to the applied force, a contact force control scheme is added to the attitude control loop. Force control is easy to accomplish by adding another loop to the trajectory level's position controlled loop. A similar scenario of changing a light bulb on the ceiling is modelled in (Jeong et al., 2014) [42]. Along with position control, the contact force control application of a quadrotor system with the desk that simulates the task on the ceiling is demonstrated. The force in the altitude direction is controlled. The haptic device, which constitutes the bilateral teleoperation system, controls the quadrotor system remotely.

So far, only problems involving quadrotors and DFAV have been presented, so this paper provides a simplified control approach for stabilizing a nonlinear PVTOL system when a constant force in the horizontal axis is applied by the vehicle. Figure A.1 depicts the concept of force application as a displacement of a spring attached to the PVTOL system. Since the stability analysis is based on a Lyapunov function, exponential stability is ensured when the initial conditions fall inside a specified domain of attraction. Numerical simulations are used to demonstrate the performance of the proposed control algorithm.

It is worth to notice that the current proposal is a multibody system equipped with vec-

torized thrusters. Thrust vectoring is a technology that uses orientable thrusters to control the force and torque applied to an aircraft [43]. A more detailed explanation is provided by Nguyen et al. [43], where the main focus is that thrust vectoring is applicable to multi-body systems as well as single vehicles. Similarly, since the proposed vehicle in this work is spring-attached to a wall, it can be considered a multi-link aerial robot as described by Shi et al. in [44]. The present work is organized as follows: Section A.2 presents the PVTOL model

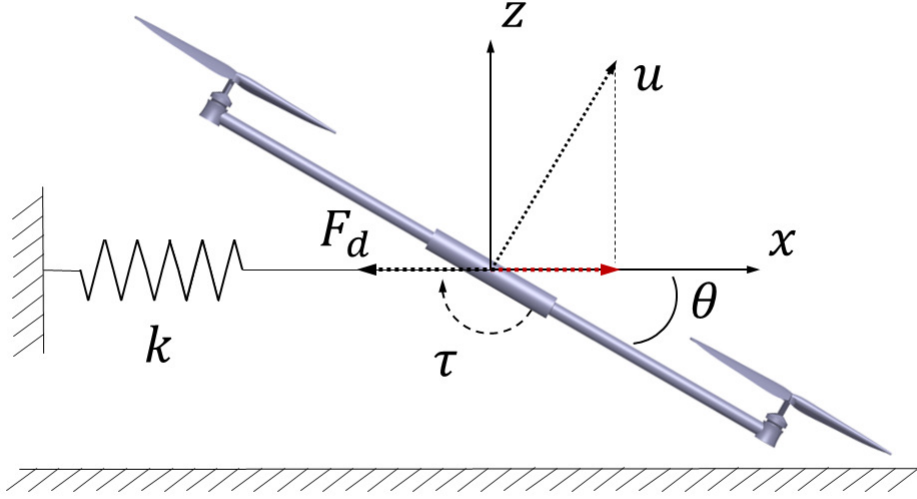


Figure A.1: PVTOL configuration. The red component represents the actual force applied by the PVTOL, acting in the opposite direction of the desired force with which the spring resists elongation.

with constant force. Section A.3 presents the desired modes for the horizontal displacement dynamics. Section A.4 develops the control strategy for the orientation angle. The proposed algorithm is tested in numerical simulations in Section A.5. Final remarks are given in the Section A.6.

A.2. PVTOL Model with Constant Force

Given that there is no coupling between the roll moment and the lateral force [22, 45], the model of the PVTOL applying a constant force F_d is given by the following:

$$m\ddot{x} = u \sin \theta - F_d \quad (\text{A.1})$$

$$m\ddot{z} = u \cos \theta - mg \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (\text{A.3})$$

where m is the mass, θ is the angle of the aircraft with respect to the horizontal, g is the

gravitational acceleration, x is the horizontal displacement, z is the vertical displacement, u is the total thrust and τ is the torque. The desired force F_d to be applied is given by the following:

$$F_d = kx_d \quad (\text{A.4})$$

where k is the spring constant and x_d is the desired displacement. Let us assume that the altitude dynamics is linearized by using the following thrust control input:

$$u = \frac{[-2\dot{z} - (z - z_d)]m + mg}{\cos \theta} \quad (\text{A.5})$$

Introducing the above into (A.2) and provided that $\cos \theta$ is different from 0, we obtain the following closed loop system for the altitude dynamic.

$$0 = \ddot{z} + 2\dot{z} + (z - z_d) \quad (\text{A.6})$$

Introducing (A.5) into (A.1), the following is the case.

$$m\ddot{x} = ([-2\dot{z} - (z - z_d)]m + mg) \tan \theta - F_d \quad (\text{A.7})$$

Assume for simplicity that the altitude has already reached its desired value $z = z_d$. Then, the PVTOL system equations is reduced to the following.

$$\ddot{x} = (g) \tan \theta - \frac{F_d}{m} \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{\theta} = \tau \quad (\text{A.9})$$

A.3. Control Strategy for the Horizontal Displacement

The present paper is mainly devoted to present a control strategy for the above nonlinear system such that the orientation angle θ remains strictly inside the interval $(-\pi/2, +\pi/2)$. A new variable \tilde{x} is defined to represent the difference between the current displacement x and the desired displacement x_d .

$$\tilde{x} = x - x_d \quad (\text{A.10})$$

Let us define the following desired dynamics for horizontal displacement:

$$v = \dot{\tilde{x}} + k_1 \tilde{x}, \quad k_1 > 0 \quad (\text{A.11})$$

where k_1 is a positive constant which defines the convergence rate. Therefore our objective is to reach the value $v = 0$. Differentiating the above, the following is the case.

$$\dot{v} = \ddot{\tilde{x}} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (\text{A.12})$$

Considering that x_d is constant, from the second derivative of (A.10), we obtain $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$ and introduce it into the above equation.

$$\dot{v} = \ddot{x} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (\text{A.13})$$

$$= g \tan \theta - \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (\text{A.14})$$

Let us define a virtual input θ^v and the error e as follows.

$$e = \tan \theta - \tan \theta^v$$

Then, introducing the error into (A.14), we obtain the following.

$$\dot{v} = g(e + \tan \theta^v) - \frac{F_d}{m} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (\text{A.15})$$

Let us choose the virtual input as follows.

$$\theta^v = \arctan \left\{ \frac{-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v + \frac{F_d}{m}}{g} \right\}, \quad k_2 > 0 \quad (\text{A.16})$$

In the following, we present the first and second derivatives:

$$\dot{\theta}^v = \frac{g(-k_1 \ddot{\tilde{x}} - k_2 \dot{v})}{g^2 + \left(-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v + \frac{F_d}{m}\right)^2} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}^v = & \frac{g(-k_1 \ddot{\tilde{x}}^{(3)} - k_2 \ddot{v})}{g^2 + \left(-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v + \frac{F_d}{m}\right)^2} \quad (\text{A.18}) \\ & + \frac{g(k_1 \ddot{\tilde{x}} + k_2 \dot{v}) \left[2 \left(-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v + \frac{F_d}{m}\right) \left(-k_1 \ddot{\tilde{x}} - k_2 \dot{v}\right) \right]}{\left(g^2 + \left(-k_1 \dot{\tilde{x}} - k_2 v + \frac{F_d}{m}\right)^2\right)^2} \end{aligned}$$

where the following is the case.

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} = \tan\theta \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{x}^{(3)} = x^{(3)} = \dot{\theta} \sec^2\theta \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{v} = \ddot{\tilde{x}} + k_1 \dot{\tilde{x}} \quad (\text{A.21})$$

$$\ddot{v} = \tilde{x}^{(3)} + k_1 \ddot{\tilde{x}} \quad (\text{A.22})$$

Introducing the virtual input (A.16) into (A.15), we obtain the following:

$$\dot{v} = ge - k_2 v \quad (\text{A.23})$$

where k_2 is a positive constant that defines the rate of convergence of the second desired mode for the horizontal displacement. From equation (A.11), we obtain the following.

$$\dot{\tilde{x}} = -k_1 \tilde{x} + v \quad (\text{A.24})$$

Equations (A.23) and (A.24) can be expressed in the following state space representation:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} e \quad (\text{A.25})$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

which satisfies the following Lyapunov equation

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -Q_1 \quad (\text{A.27})$$

where P_1 and Q_1 are positive definite matrices given by the following.

$$P_1 = \begin{bmatrix} k_2(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & 1 + k_1(k_1 + k_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$Q_1 = 2k_1 k_2 (k_1 + k_2) I_2 \quad (\text{A.29})$$

Let us define the following positive function.

$$V_1 = \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} P_1 \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Differentiating the above leads to the following.

$$\dot{V}_1 = - \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} Q_1 \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} P_1 B e \quad (\text{A.31})$$

$$= - 2k_1 k_2 (k_1 + k_2) (x^2 + v^2) + 2 \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} P_1 B e \quad (\text{A.32})$$

Notice that the last term above satisfies the following inequality:

$$\begin{aligned} & \left| 2 \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} P_1 B e \right| \leq \\ & 2 \left\| \begin{bmatrix} x & v \end{bmatrix} \right\| \sqrt{\bar{k}} \frac{\|P_1 B\|}{\sqrt{\bar{k}}} |e| \leq \bar{k} (x^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

where the following is obtained.

$$\bar{k} = k_1 k_2 (k_1 + k_2) \quad (\text{A.34})$$

Introducing inequality (A.33) into (A.32) leads to the following.

$$\dot{V}_1 \leq - 2k_1 k_2 (k_1 + k_2) (x^2 + v^2) + \frac{\|P_1 B\|^2}{\bar{k}} e^2 \quad (\text{A.35})$$

A.4. Control Strategy for the Orientation Angle

The error between the virtual and the actual angle is defined as follows.

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^v \quad (\text{A.36})$$

Differentiating it twice provides the following.

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}^v \quad (\text{A.37})$$

By introducing (A.3) into the above, we obtain the following/

$$\ddot{\tilde{\theta}} = \tau - \ddot{\theta}^v \quad (\text{A.38})$$

Then, torque τ is proposed such that error $\tilde{\theta}$ converges to zero.

$$\tau = \ddot{\theta}^v - c_2 \dot{\tilde{\theta}} - c_1 \tilde{\theta} \quad (\text{A.39})$$

The above is introduced into (A.38) and provides the following:

$$\ddot{\tilde{\theta}} + c_2 \dot{\tilde{\theta}} + c_1 \tilde{\theta} = 0 \quad (\text{A.40})$$

which can be expressed in the following state space representation

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

where

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

satisfies the Lyapunov equation

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -Q_2 \quad (\text{A.43})$$

for the following positive definite matrices.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2^2 & c_2 \\ c_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2c_1 c_2 & 0 \\ 0 & 2c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

Consider the following positive function:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} P_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

for which its derivative is as follows.

$$\dot{V}_2 = - \begin{bmatrix} \tilde{\theta} & \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} Q_2 \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$= - 2c_1c_2\tilde{\theta}^2 - 2c_2\dot{\tilde{\theta}}^2 \quad (\text{A.48})$$

A.5. Simulation

Numerical simulations are carried out in Matlab Simulink module to verify the performance of the proposed control based on the Lyapunov function. The code consists of the main blocks that are responsible for taking the necessary data to perform the computation of θ^v and its two derivatives (A.16)–(A.18), respectively. So, θ^v and its derivatives are employed to generate the control input τ (A.39).

For the simulation, the constants and initial conditions shown in Table A.1 were used for a simulation time of 10 s. The controller parameters have been selected in order to reduce the convergence time of the error between the vehicle's force and its desired value. The parameters have been chosen by trial and error. Measurement noise has been added to the numerical simulation. A comparison with the control algorithm proposed by Wopereis et al.

Tabla A.1: Initial conditions and simulation constants.

Initial Condition	Value	Constant	Value	Gain	Value
x_0	0 (m)	k_{spring}	5 (N/m)	k_1	20
\dot{x}_0	0 (m/s)	F_d	5 (N)	k_2	5
θ_0	0 (rad)	m	2 (kg)	c_1	30
$\dot{\theta}_0$	0 (rad/s)	g	9.81 (m/s ²)	c_2	30

in [46] was made to better understand the results of the control proposed in this work. The article proposed for comparison deals with a quadrotor vehicle that exerts a constant force on a vertical wall through an arm attached close to its gravity center. Due to the fact that the vehicle is a quadrotor, the necessary simplifications have been made to simulate the results of a PVTOL under PD control.

A.6. Results

This section presents a comparison of the results obtained by using the proposed control

strategy with respect to the control algorithm in [46]. Figures A.2a, A.3a, A.4a and A.5a show the results obtained with the control strategy proposed in Sections A.3 and A.4, while Figures A.2b, A.3b, A.4b and A.5b show the results obtained using the control algorithm in [46].

Figure A.2 shows the convergence of the x displacement to the desired value x_d . Notice that the x displacement for the algorithm in [46] is zero because that algorithm is designed to keep the arm in touch with the environment, while Figure A.2a shows the convergence of the x displacement to the desired value x_d in a damped manner, eventually stabilizing around 4 s. k_1 and k_2 gains determine the desired rate of convergence to the equilibrium point of x and \dot{x} .

Convergence of the interaction force to the desired value F_d is shown in Figure A.3a,b; notice that force converges without overshooting in the case of our control algorithm.

Figure A.4 shows the convergence of the θ orientation angle toward the value required to stabilize the platform and maintain a constant force F_d in the environment. Angle θ is eventually stabilized at around 2 s in Figure A.4a; the c_1 and c_2 gains determine the desired convergence rate to the equilibrium point. Meanwhile, in Figure A.4b, this angle is stabilized around 4 s.

Finally, the convergence of control input τ is shown in Figure A.5. In Figure A.5a, the proposed control algorithm manages to stabilize the platform in one second, which is relatively fast. However, the speed of the response involves a lot of energy to stabilize the system, as shown by the high overshoots. On the other hand, the control input τ in [46] converges at around 4 s and presents a higher overshoot.

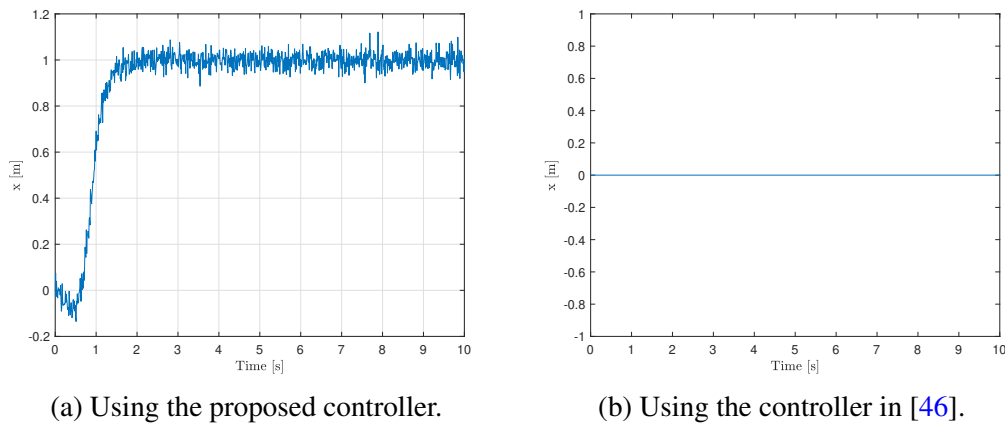
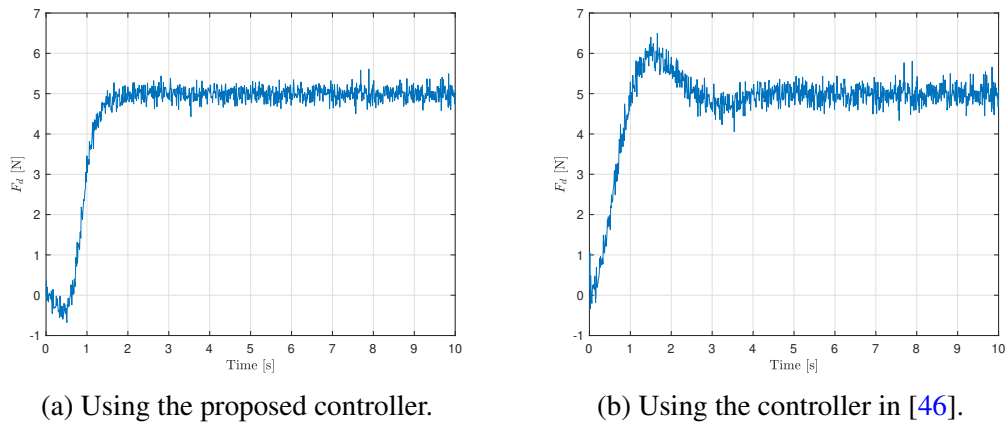
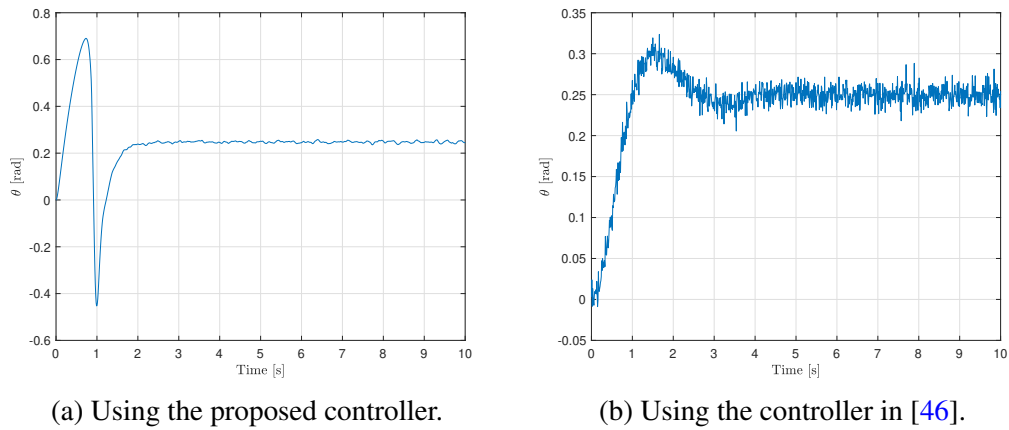
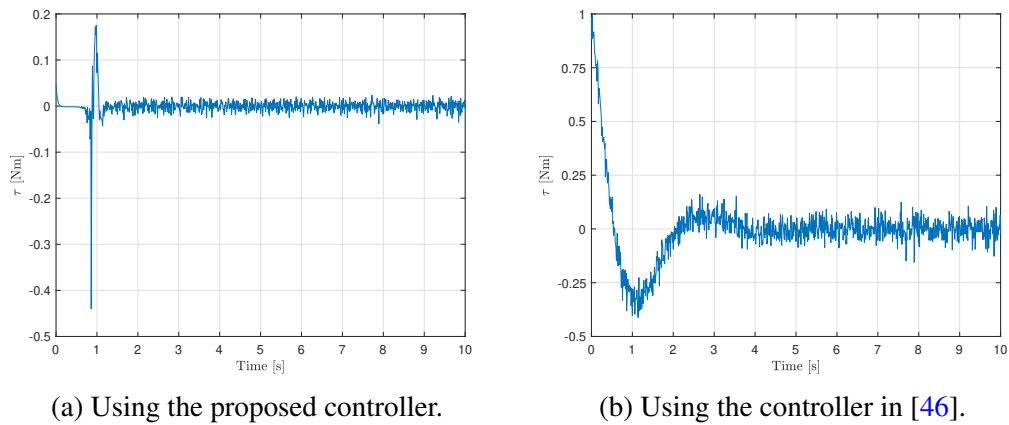


Figure A.2: Behavior of the x displacement.

Figure A.3: Behavior of the F_d force.Figure A.4: Behavior of the θ angle.Figure A.5: Behavior of the τ control input.

A.7. Discussion

A PVTOL model applying a horizontal force, modeled as a spring attached between the system and the environment, was presented in this work. A Lyapunov function was used to

guarantee the nonlinear system's exponential stability, ensuring that the closed-loop system state converges exponentially to the origin. The results of numerical simulations reveal that it is possible to maintain a constant orientation angle by exerting the horizontal force required to elongate the spring a desired distance. The proposed controller has been tested in numerical simulations and the force applied to the environment converged faster to the desired interaction force than when using the controller in [46]. In addition to, results show good performance of the control strategy based on the proposed Lyapunov function.

Bibliografía

- [1] Laurence R. Newcome. *Unmanned Aviation: A Brief History of Unmanned Aerial Vehicles*. Library of Flight Series. AIAA, 2004.
- [2] Kimon P. Valavanis. *Advances in Unmanned Aerial Vehicles: State of the Art and the Road to Autonomy*. Springer Science Business Media, 2009.
- [3] Mohammad Sadraey. *Unmanned Aircraft Design: A Review of Fundamentals*. Morgan Claypool Publishers. 2017.
- [4] Matthew Mammone Matthieu Nelson Tong Zhou Maziar Arjomandi, Shane Agostino. *Classification of unmanned aerial vehicles*. The University of Adelaide, 2006.
- [5] Anis Koubaa. *Deep Learning for Unmanned Systems*. Springer Nature, 2021.
- [6] Ertugrul Cetinsoy, Efe Sirimoglu, Kaan Oner, Cevdet Hancer, Mustafa Unel, Mahmut Aksit, Ilyas Kandemir, and Kayhan Gulez. Design and development of a tilt-wing uav. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, 19:733–741, 01 2011.
- [7] Introducing transwing, an entirely new type of vertical takeoff and landing (vtol) aircraft design. <https://www.pterodynamics.com/transwing>. Consultado: 26.11.2021.
- [8] Carlos Alejandro Merlo-Zapata, Carlos Aguilar-Ibanez, Octavio Gutiérrez-Frías, Mayra Antonio-Cruz, Celso Márquez-Sánchez, and Miguel S Suarez-Castanon. A robust control scheme for a pvtol system subject to wind disturbances. *Complexity*, 2020, 2020.
- [9] G Ortiz Torres, R Schacht Rodriguez, J Reyes Reyes, CD Garcia Beltran, ME Guerrero Sanchez, and CM Astorga Zaragoza. Development of experimental platform for control system of a planar vertical take-off and landing unmanned aerial vehicle. *IEEE Latin America Transactions*, 16(2):342–349, 2018.
- [10] Carlos Aguilar-Ibañez. Stabilization of the pvtol aircraft based on a sliding mode and a saturation function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(5):843–859, 2017.
- [11] Alessandro Astolfi. *Tracking and Regulation in Linear Systems*, pages 1–9. Springer London, London, 2013.

- [12] Luca Consolini, Manfredi Maggiore, Christopher Nielsen, and Mario Tosques. Path following for the pvtol aircraft. *Automatica*, 46(8):1284–1296, 2010.
 - [13] Carlos Aguilar-Ibañez, Miguel S Suarez-Castanon, Jesús Meda-Campaña, José de Jesús Rubio, Jesús Martínez-Castro, and Ricardo Barrón-Fernández. Shaping energy for the stabilization of an unmanned aircraft. In *2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–5. IEEE, 2018.
 - [14] Carlos Aguilar-Ibañez, J Humberto Sossa-Azuela, and Miguel S Suarez-Castanon. A backstepping-based procedure with saturation functions to control the pvtol system. *Nonlinear Dynamics*, 83(3):1247–1257, 2016.
 - [15] Anand Sánchez, Pedro Garcia, P Castillo, and Rogelio Lozano. Simple real-time stabilization of vertical takeoff and landing aircraft with bounded signals. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 31(4):1166–1176, 2008.
 - [16] Ch Venkatesh, R Mehra, Faruk Kazi, and NM Singh. Passivity based controller for underactuated pvtol system. In *2013 IEEE international conference on electronics, computing and communication technologies*, pages 1–5. IEEE, 2013.
 - [17] Jie Wang and Baoli Ma. Path following for the uncoupled pvtol aircraft based on the backstepping technique. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 767–772. IEEE, 2019.
 - [18] Jossué Cariño Escobar, Rogelio Lozano, and Moisés Bonilla Estrada. Pvtol control using feedback linearisation with dynamic extension. *International Journal of Control*, 94(7):1794–1803, 2021.
 - [19] Sharmila J Petkar, Ankit A Gupta, Vishwanath D Ketkar, and Faruk S Kazi. Robust model predictive control of pvtol aircraft. *IFAC-PapersOnLine*, 49(1):760–765, 2016.
 - [20] Xiaolong Zheng and Xuebo Yang. Improved adaptive nn backstepping control design for a perturbed pvtol aircraft. *Neurocomputing*, 410:51–60, 2020.
 - [21] Qijia Yao. Robust constrained trajectory tracking control for a pvtol aircraft subject to external disturbances. *International Journal of Systems Science*, 52(12):2617–2629, 2021.
 - [22] Carlos Aguilar-Ibanez, Hebertt Sira-Ramirez, Miguel S Suarez-Castanon, and Ruben Garrido. Robust trajectory-tracking control of a pvtol under crosswind. *Asian Journal of Control*, 21(3):1293–1306, 2019.
 - [23] Luca Gentili, Roberto Naldi, and Lorenzo Marconi. Modeling and control of vtol uavs interacting with the environment. In *2008 47th IEEE Conference on decision and control*, pages 1231–1236. IEEE, 2008.
 - [24] Albert Albers, Simon Trautmann, Thomas Howard, Trong Anh Nguyen, Markus Frietsch, and Christian Sauter. Semi-autonomous flying robot for physical interaction with environment. In *2010 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*, pages 441–446. IEEE, 2010.
-

-
- [25] Seul Jung. A position-based force control approach to a quad-rotor system. In *2012 9th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, pages 373–377. IEEE, 2012.
- [26] SH Jeong and S Jung. Bilateral teleoperation control of a quadrotor system with a haptic device: Experimental studies. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 543–548. IEEE, 2014.
- [27] Sergio Salazar José Miranda Rogelio Lozano, Iván González. A new stabilization of the pvtol based on lyapunov stability. page 891.
- [28] Michael V. Cook. Chapter 9 - stability. In Michael V. Cook, editor, *Flight Dynamics Principles (Third Edition)*, pages 243–258. Butterworth-Heinemann, third edition edition, 2013.
- [29] Carlos Aguilar-Ibañez. Stabilization of the pvtol aircraft based on a sliding mode and a saturation function. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(5):843–859, 2017.
- [30] Fernando Hernández-Castañeda, Víctor Santibáñez, and Francisco Jurado. Priority altitude pvtol aircraft control via immersion and invariance. *International Journal of Control*, 93(10):2290–2301, 2020.
- [31] Carlos Aguilar-Ibanez, Miguel S Suarez-Castanon, Jesus Meda-Campaña, Octavio Gutierrez-Frias, Carlos Merlo-Zapata, and Jesus A Martinez-Castro. A simple approach to regulate a pvtol system using matching conditions. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 98(2):511–524, 2020.
- [32] Jossué Cariño Escobar, Rogelio Lozano, and Moisés Bonilla Estrada. Two pvtols cooperative slung-load transport control based on passivity. *Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems*, 2(1):e22, 2020.
- [33] Qijia Yao. Robust constrained trajectory tracking control for a pvtol aircraft subject to external disturbances. *International Journal of Systems Science*, 52(12):2617–2629, 2021.
- [34] Tomoaki Kobayashi, Atsushi Ueda, Joe Imae, and Guisheng Zhai. Obstacle avoidance control for pvtols based on a virtual space approach. In *2009 International Conference on Networking, Sensing and Control*, pages 868–872. IEEE, 2009.
- [35] Lorenzo Marconi and Roberto Naldi. Control of aerial robots: Hybrid force and position feedback for a ducted fan. *IEEE Control Systems Magazine*, 32(4):43–65, 2012.
- [36] Francesco Forte, Roberto Naldi, Alessandro Macchelli, and Lorenzo Marconi. Impedance control of an aerial manipulator. In *2012 American Control Conference (ACC)*, pages 3839–3844. IEEE, 2012.
- [37] Francesco Forte, Roberto Naldi, Alessandro Macchelli, and Lorenzo Marconi. On the control of an aerial manipulator interacting with the environment. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 4487–4492. IEEE, 2014.
-

- [38] Christoph Huerzeler, Roberto Naldi, Vincenzo Lippiello, Raffaella Carloni, Janosch Nikolic, Kostas Alexis, Lorenzo Marconi, and Roland Siegwart. Airobots: Innovative aerial service robots for remote inspection by contact. In *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2080–2080. IEEE, 2013.
 - [39] Albert Albers, Simon Trautmann, Thomas Howard, Trong Anh Nguyen, Markus Frietsch, and Christian Sauter. Semi-autonomous flying robot for physical interaction with environment. In *2010 IEEE conference on robotics, automation and mechatronics*, pages 441–446. IEEE, 2010.
 - [40] Matteo Fumagalli, Roberto Naldi, Alessandro Macchelli, Raffaella Carloni, Stefano Stramigioli, and Lorenzo Marconi. Modeling and control of a flying robot for contact inspection. In *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3532–3537. IEEE, 2012.
 - [41] Seul Jung. A position-based force control approach to a quad-rotor system. In *2012 9th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, pages 373–377. IEEE, 2012.
 - [42] SH Jeong and S Jung. Bilateral teleoperation control of a quadrotor system with a haptic device: Experimental studies. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 543–548. IEEE, 2014.
 - [43] Tam Willy Nguyen, Mehdi Hosseinzadeh, and Emanuele Garone. Thrust vector control of constrained multibody systems. *Automatica*, 129:109586, 2021.
 - [44] Fan Shi, Moju Zhao, Tomoki Anzai, Keita Ito, Xiangyu Chen, Shunichi Nozawa, Kei Okada, and Masayuki Inaba. Multi-rigid-body dynamics and online model predictive control for transformable multi-links aerial robot. *Advanced Robotics*, 33(19):971–984, 2019.
 - [45] Aleksandra Gruszka, Michael Malisoff, and Frédéric Mazenc. On tracking for the pvtol model with bounded feedbacks. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 1428–1433. IEEE, 2011.
 - [46] Han W Wopereis, Jim Johan Hoekstra, Tjark Harrie Post, Gerrit A Folkertsma, Stefano Stramigioli, and Matteo Fumagalli. Application of substantial and sustained force to vertical surfaces using a quadrotor. In *2017 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, pages 2704–2709. IEEE, 2017.
-