CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

La influencia de los estados de confianza y duda sobre la competencia matemática. Propuesta de un modelo teórico explicativo fundamentado en datos empíricos.

Presenta:

Benjamín Martínez Navarro

En calidad de:

Tesis doctoral

Director de Tesis: Dra. Mirela Rigo Lemini

Ciudad de México, México. Febrero, 2020

Tabla de contenido

Agradezco al Conacyt por la beca otorgada al CVU número 485923.

Agradezco al Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA) por el acceso a los datos del Diplomado en línea de Temas fundamentales de álgebra.

RESUMEN

La presente investigación se centra en el análisis de la seguridad, la confianza, el convencimiento, la certeza o la duda (llamados "estados epistémicos" y denotados como "eec") que las personas experimentan alrededor de la veracidad de axiomas, postulados, teoremas, algoritmos de la matemática escolar, resultados de tareas matemáticas escolares y, en general, alrededor de la veracidad de afirmaciones de contenido matemático. Los expertos han dado cuenta de la presencia de esos eec en las prácticas matemáticas y han indicado que pueden representar un impulso, pero también han advertido que pueden ser un obstáculo, tanto para el desarrollo de la disciplina como para el avance de los aprendizajes en la matemática escolar. No obstante, en la literatura sobre educación matemática no se han precisado las condiciones bajo las cuales los eec influyen de manera positiva o negativa en el desarrollo de las matemáticas o en el aprendizaje. Por tanto, en esta investigación se plantean como preguntas generales: ¿Bajo qué condiciones los eec que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar? ¿Bajo qué condiciones los eec que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o de la competencia matemática escolar? Para responder a las preguntas generales de investigación formuladas en el proyecto, se requiere un marco teórico sobre los eec, el cual es inexistente en la educación matemática. Por tanto, en el trabajo se plantea como objetivo general el inicio del desarrollo de un Modelo teórico de los estados epistémicos de convencimiento (Meec). Un método que cuenta con los principios metodológicos y las herramientas analíticas para desarrollar teorías es la Teoría Fundamentada (TF, en la versión de Corbin & Strauss, 2015). De acuerdo a ese método, las teorías se derivan de los datos recolectados durante el proceso de investigación y no se eligen antes de que la investigación comience. En el presente

trabajo, se recabaron datos pertenecientes tanto de la matemática escolar como de la historia de la disciplina. Los datos de la matemática escolar se obtuvieron del Diplomado a distancia de Temas fundamentales de álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA), cuyo propósito es fortalecer, a través de las interacciones con un tutor, la formación de personas solidarias que asesoran en temas de álgebra a adultos en proceso de obtener su certificado de secundaria. Por otro lado, se recurrió a episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss. Para el análisis de datos, una herramienta analítica de la TF que se utilizó, fue el contexto. Al aplicar el contexto a los datos empíricos que se eligieron para la investigación, a las situaciones o acontecimientos que exigen una respuesta por parte de las personas se les denotó como 'tareas matemáticas'. A las acciones que las personas ejecutan ante esas tareas matemáticas se les denotó como 'trabajos matemáticos'. Esos trabajos matemáticos pueden consistir en el planteamiento y ejecución de operaciones aritméticas y/o algebraicas. Como condiciones de las acciones, se identificaron distintas razones que pueden explicar el por qué de los trabajos matemáticos. Entre esas razones se identificó una necesidad de las personas de experimentar seguridad en la verdad (validez o corrección) de algún hecho de las matemáticas (H). Asociadas a esa necesidad, se identificaron estrategias que las personas se plantean para cubrirla. A esas estrategias, en el modelo se llaman objetivos y pueden consistir en reglas o algoritmos que las personas se plantean antes de ejecutar trabajo matemático. Como consecuencias de los trabajos matemáticos, en los datos empíricos se identificaron evaluaciones del cumplimiento o incumplimiento de objetivos y necesidades. En el lugar de las emociones del contexto, en los datos se identificaron eec positivos como la seguridad o la confianza si la evaluación del cumplimiento de objetivos era positiva y eec negativos como la duda si la evaluación del cumplimiento de objetivos era negativa. Además, los eec negativos dieron lugar a instrucciones (nombradas en el modelo como tendencias y/o marcos interpretativos) que de alguna manera iban en contra de la veracidad de una afirmación matemática. En cambio, los eec positivos dieron lugar a instrucciones (tendencias y/o marcos interpretativos) que de alguna manera iban a favor de la veracidad de una afirmación matemática. Esas instrucciones pueden orientar el trabajo matemático posterior, con el cual se pueden cumplir o no objetivos que la persona se plantea inicialmente ante una tarea matemática para cubrir su necesidad de seguridad. A este conjunto de las categorías que se obtuvieron de aplicar principalmente el contexto, se le ha denominado trayectoria de los eec genérica. Por otra parte, en este documento, también interesa mostrar el poder explicativo del Meec. Para esto se responde a las preguntas de investigación que se han formulado en el escrito, aportando evidencias de cómo, y en qué condiciones, los eec inciden en la competencia o en el avance del conocimiento (problemática general que orienta la presente investigación). Por un lado, esas condiciones se relacionan con cómo las personas experimentan la trayectoria de los eec. En particular, ellas pueden experimentar la trayectoria de los eec tomando conciencia de sus eec, de los condicionantes que los generan y de sus posibles efectos. A esta forma de experimentar esa trayectoria se le denomina en este escrito 'gestión consciente de los eec'. En contraparte, las personas pueden vivir esa trayectoria sin percatarse de ninguno (o de muy pocos de) los componentes de la trayectoria. A este modo de recorrer esa trayectoria en este escrito se le denomina 'gestión reactiva o automática de los eec'. En una gestión consciente las personas llevan a cabo procesos metacognitivos en los cuales centran su atención en los eec que experimentan, en lo que los origina y en sus efectos. En una gestión reactiva de sus eec, las personas no son conscientes de las condiciones que generan sus eec, ni de las secuelas que estos pueden tener sobre sus trabajos matemáticos. Por otro lado, se dice que una persona da una respuesta bien calibrada matemáticamente cuando experimenta un eec positivo en torno a un resultado matemáticamente correcto o válido y su eec lo funda en razones de tipo matemático. En caso contrario, se dice que no ha dado una respuesta bien calibrada. Lo que se argumenta en el escrito es que una buena gestión de los eec, acompañada de una buena calibración, representan buenas circunstancias iniciales para el avance en el aprendizaje o para el desarrollo del conocimiento matemático. Mientras que una mala gestión de los eec, acompañada de una mala calibración, pueden representar un obstáculo para el avance del aprendizaje o para el desarrollo del conocimiento matemático.

SUMMARY

This research focuses on the analysis of security, confidence, conviction, certainty or doubt (called "epistemic states" and denoted as "esc") that people experience around the truth of axioms, postulates, theorems , algorithms of school mathematics, results of school mathematics tasks and, in general, about the veracity of statements of mathematical content. Experts have noted the presence of these esc in mathematical practices and have indicated that they can represent an impulse, but they have also warned that they can be an obstacle, both for the development of the discipline and for the advancement of learning in the school mathematics. However, the mathematics education literature has not specified the conditions under which esc positively or negatively influence the development of mathematics or learning. Therefore, in this investigation the following general questions are asked: Under what conditions do the esc that people experience influence the development of mathematics or the advancement of school mathematics competence? Under what conditions do the esc that people experience influence the stagnation or regression of the development of mathematics or of school mathematics competence? To answer the general research questions formulated in the project, a theoretical framework on esc is required, which is non-existent in mathematics education. Therefore, the work sets out as a general objective the beginning of the development of a theoretical Model of epistemic states of conviction (Mesc). One method that has the methodological principles and analytical tools to develop theories is the Grounded Theory (TF, in the Corbin & Strauss, 2015 version). According to that method, the theories are derived from the data collected during the research process and are not chosen before the research begins. In the present work, data pertaining to both school mathematics and the history of the discipline were collected. The data on school mathematics was obtained from the Distance Diploma in Fundamental Algebra Topics

taught by the National Institute for Adult Education (INEA), whose purpose is to strengthen, through interactions with a tutor, the training of supportive people who advise adults in the process of obtaining their high school certificate on algebra issues. On the other hand, historical episodes were used, related to the development of non-Euclidean geometries, whose central characters are Saccheri and Gauss. For data analysis, a TF analytical tool that was used was context. By applying the context to the empirical data chosen for the research, to situations or events that require a response from people, they were denoted as “mathematical tasks”. The actions that people perform in front of these mathematical tasks were denoted as "mathematical works". These mathematical works may consist of the planning and execution of arithmetic and / or algebraic operations. As conditions of the actions, different reasons were identified that can explain the reason for the mathematical works. Among these reasons was identified a need for people to experience security in the truth (validity or correction) of some fact of mathematics (H). Associated with this need, strategies were identified that people consider to cover it. These strategies are called objectives in the model and can consist of rules or algorithms that people set before executing mathematical work. As a consequence of the mathematical works, empirical data identified evaluations of the fulfillment or non-fulfillment of objectives and needs. In the place of emotions in the context, positive esc (such as safety or confidence) were identified in the data if the evaluation of the achievement of objectives was positive and negative esc (such as doubt) if the evaluation of achievement of objectives was negative. Furthermore, the negative esc gave rise to instructions (named in the model as trends and / or interpretive frameworks) that somehow went against the veracity of a mathematical statement. Instead, positive esc gave rise to instructions (trends and / or interpretive frameworks) that somehow went in one direction in favor of the veracity of a mathematical statement. These instructions can guide subsequent mathematical work, with which objectives can be met or not, that the person is initially raised to meet their need for security, when facing a mathematical task. This set of categories that were obtained from mainly applying the context has been called the generic esc trajectory. On the other hand, in this document, it is also interesting to show the explanatory power of the Meec. For this, the research questions that have been formulated in the writing are answered, providing evidence of how, and under what conditions, the esc affect competence or the advancement of knowledge (general problem that guides this research). On the one hand, these conditions are related to how people experience the trajectory of the esc. In particular, they can experience the trajectory of the esc becoming aware of their esc, the conditioning factors that generate them and their possible effects. This way of experiencing this trajectory is called in this writing consciente conscious management of the esc. On the other hand, people can live that trajectory without noticing any (or very few of) the components of the trajectory. This way of traveling that trajectory in this writing is called rea reactive or automatic management of the esc. In conscious management, people carry out metacognitive processes in which they focus their attention on the esc they experience, on what originates them and on their effects. In a reactive management of their esc, people are not aware of the conditions that their esc generate, nor of the consequences that these can have on their mathematical works. On the other hand, a person is said to give a mathematically well-calibrated answer when he experiences a positive esc around a mathematically correct or valid result and his esc is based on mathematical-type ratios. If not, it is said to have failed to give a well-calibrated response. What is argued in the writing is that a good management of the esc, accompanied by a good calibration, represent good initial circumstances for progress in learning or for the development of mathematical knowledge. While mismanagement of esc, accompanied by poor calibration, can represent an obstacle to the advancement of learning or to the development of mathematical knowledge.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se centra en el análisis de la seguridad, la confianza, el convencimiento, la certeza o la duda (llamados "estados epistémicos" y denotados como "eec") que las personas experimentan alrededor de la veracidad de axiomas, postulados, teoremas, algoritmos de la matemática escolar, resultados de tareas matemáticas escolares y, en general, alrededor de la veracidad de afirmaciones de contenido matemático. En este documento, estas afirmaciones se denotan como 'H'.

Como se verá en el Capítulo I, los expertos han dado cuenta de la presencia de esos eec en las prácticas matemáticas y han indicado que pueden representar un impulso, pero también han advertido que pueden ser un obstáculo, tanto para el desarrollo de la disciplina como para el avance de los aprendizajes en la matemática escolar. No obstante, en la literatura sobre educación matemática no se han precisado las condiciones bajo las cuales los eec influyen de manera positiva o negativa en el desarrollo de las matemáticas o en el aprendizaje. Por tanto, en esta investigación se plantean las siguientes preguntas generales

¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar?

¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o de la competencia matemática escolar?

Para sugerir algunas de esas condiciones, hace falta un marco teórico sobre los eec. En el Capítulo I se deja ver que en la literatura revisada de educación matemática, se pueden encontrar algunas definiciones y reflexiones filosóficas que hacen referencia a la confianza de las personas en torno a proposiciones específicas de contenido matemático. Sin embargo, en la literatura especializada no se encontró un desarrollo conceptual sistemático de las características de ese tipo particular de confianza, ni mucho menos, un modelo teórico que permita dar cuenta de fenómenos asociados a ese tipo de confianza. Por tanto, para responder a las preguntas generales de investigación formuladas en el proyecto, en el trabajo se plantea como objetivo general el inicio del desarrollo de un Modelo teórico de los estados epistémicos de convencimiento (Meec). Se espera que este desarrollo conceptual coadyuve en un futuro, por un lado, a la elaboración de intervenciones didácticas orientadas a que los eec representen un impulso para el aprendizaje y, por otro, a que se ubique el estudio de los eec de forma justificada en algún campo de la educación matemática (cognitivo, meta-cognitivo, afectivo o algún otro).

En el Capítulo II se extraen las preguntas y el objetivo general de la investigación justificadas en el Capítulo I y, adicionalmente, se plantean preguntas y objetivos específicos.

Las preguntas de investigación planteadas en el escrito demandan explicaciones teóricas asociadas con el fenómeno del convencimiento. Las teorías en general, ofrecen fundamentos para explicar el por qué de las cosas o de los comportamientos. Un método que cuenta con los principios metodológicos y las herramientas analíticas para desarrollar teorías es la Teoría Fundamentada (TF, en la versión de Corbin & Strauss, 2015). En el Capítulo III se explicitan los principios generales de ese método, así como las técnicas de recuperación de datos y las herramientas analíticas.

En general, lo que distingue a la TF de otras formas de investigación cualitativa y la hace única es que los conceptos sobre los cuales se construyen las teorías se derivan de los datos recolectados durante el proceso de investigación y no se eligen antes de que la investigación comience. En el trabajo, se recabaron datos pertenecientes tanto de la matemática escolar como de la historia de la disciplina. Los datos de la matemática escolar se obtuvieron de un diplomado a distancia, cuyo propósito es fortalecer, a través de las interacciones con un tutor, la formación de personas solidarias que asesoran en temas de álgebra a adultos en proceso de obtener su certificado de secundaria. Por otro lado, se recurrió a episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss.

Una vez que se recabaron los datos, la investigación estuvo conformada por varias etapas. En cada etapa, se partió de preguntas y objetivos, que se desprendieron de análisis anteriores. Luego, se procedió a realizar una primera lectura de los datos y a seleccionar piezas, conformadas por participaciones de los estudiantes y del tutor, cuyo análisis pudiera coadyuvar a responder las preguntas de investigación y cumplir los objetivos planteados. En términos de la TF, se procedió al muestreo teórico. Posteriormente, se aplicaron herramientas de análisis propuestas por Corbin & Strauss (2015). Como resultado de aplicar esas herramientas de análisis se avanzó en el desarrollo de conceptos añadiendo propiedades y dimensiones, en sumar nuevos conceptos y/o en establecer vínculos entre ellos para ofrecer explicaciones. Dicho en términos de la TF, se avanzó en el ordenamiento conceptual y la construcción de la teoría. A la par, se dio una respuesta razonable (de manera más o menos completa, considerando los alcances de este documento) las preguntas de investigación y se cubrieron los objetivos planteados. Todo lo anterior se registró en lo que Corbin & Strauss llaman memos y diagramas. Los registros más avanzados, se publicaron en actas de congresos y un capítulo de libro. De esos registros de análisis se desprendieron nuevas preguntas y objetivos y, por tanto, una nueva etapa de investigación.

Antes de dar a conocer un Modelo teórico de los eec (Meec), en el Capítulo III se explica cada una de las etapas de investigación que precedieron al presente escrito. Esto se hace con el fin de dar a conocer parte del proceso analítico que se tuvo que hacer antes de procesar y elaborar dicho modelo. En particular, se expone cómo en la investigación se han aplicado las técnicas de recolección de datos y las herramientas analíticas de la TF. Como resultado, en esas etapas de investigación se identificaron algunas propiedades y dimensiones de la competencia y los eec, se detallaron algunas condiciones y consecuencias de los eec, se describieron algunas relaciones entre eec y competencia y se plantearon reflexiones sobre qué son los eec y cómo se van formando en el desarrollo de una tarea matemática.

En el resto del documento se exponen los resultados de la etapa actual de la investigación. En el Capítulo IV se expone el trabajo que se tuvo que hacer en la etapa actual para elaborar el Meec. Siguiendo la TF, para la etapa actual se regresó a los datos empíricos y se eligieron dos episodios que se antojarían un tanto lejanos. En un caso, se trata de la interacción que tuvo una estudiante L con su tutor, en el diplomado que se impartió a distancia a través de la plataforma Moodle Esa interacción estuvo conformada por 3 participaciones del tutor y 4 de L. Por otro lado, se trata de dos episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss.

Una vez que se eligieron los datos empíricos, se aplicaron herramientas analíticas de la TF. El contexto es la principal herramienta analítica que se utilizó en esta etapa de investigación de desarrollo del Meec. En primer lugar, de acuerdo a esa herramienta, en los datos empíricos se identifican acontecimientos o sucesos que exigen una respuesta por parte de las personas. En segundo lugar, se identifican las respuestas de las personas a esos acontecimientos o sucesos con la pregunta ¿Qué hizo la persona ante los acontecimientos o sucesos que le exigieron una respuesta? A esas respuestas, Corbin & Strauss (2015) las llaman acciones. En tercer lugar, en los datos, se identifican condiciones para esas acciones, las cuales son entendidas como razones que las personas dan al por qué responden de la manera en que lo hacen a una situación a través de la acción. En cuarto lugar, se identifican consecuencias para las acciones, entendidas como los resultados de las acciones. Esas consecuencias, de acuerdo a Corbin & Strauss (2015) , pueden generar emociones, las cuales señalan si los resultados en las acciones son lo que la persona esperaba o no. Luego, esas emociones, pueden estimular el curso de la acción o reorientar el curso de la misma. En suma, en la estructura del contexto, las acciones de las personas pueden vincularse a situaciones o acontecimientos, condiciones, consecuencias, emociones y a nuevas acciones que se desprenden de las emociones.

Específicamente, al aplicar el contexto a los datos empíricos que se eligieron para la investigación, a las situaciones o acontecimientos que exigen una respuesta por parte de las personas se les denotó como 'tareas matemáticas'. A las acciones que las personas ejecutan ante esas tareas matemáticas se les denotó como 'trabajos matemáticos'. Esos trabajos matemáticos pueden consistir en el planteamiento y ejecución de operaciones aritméticas y/o algebraicas. Como condiciones de las acciones, se identificaron distintas razones que pueden explicar el por qué de los trabajos matemáticos. Entre esas razones se identificó una necesidad de las personas de experimentar seguridad en la verdad (validez o corrección) de algún hecho de las matemáticas (H). Asociadas a esa necesidad, se identificaron estrategias que las personas se plantean para cubrirla. A esas estrategias, en el modelo se llaman objetivos y pueden consistir en reglas o algoritmos que las personas se plantean antes de ejecutar trabajo matemático. Como consecuencias de los trabajos matemáticos, en los datos empíricos se identificaron evaluaciones del cumplimiento o incumplimiento de objetivos y necesidades. En el lugar de las emociones del contexto, en los datos se identificaron eec positivos como la seguridad o la confianza si la evaluación del cumplimiento de objetivos era positiva y eec negativos como la duda si la evaluación del cumplimiento de objetivos era negativa. Además, los eec negativos dieron lugar a instrucciones (nombradas en el modelo como tendencias y/o marcos interpretativos) que de alguna manera iban en contra de la veracidad de una afirmación matemática. En cambio, los eec positivos dieron lugar a instrucciones (tendencias y/o marcos interpretativos) que de alguna manera iban a favor de la veracidad de una afirmación matemática. Esas instrucciones pueden orientar el trabajo matemático posterior, con el cual se pueden cumplir o no objetivos que la persona se plantea inicialmente ante una tarea matemática para cubrir su necesidad de seguridad. A este conjunto de las categorías que se obtuvieron de aplicar principalmente el contexto, se le ha denominado trayectoria de los eec genérica. Esta trayectoria constituye la base del Meec, el cual se expone en su totalidad en el capítulo VI.

Por otra parte, en este documento, también interesa mostrar el poder explicativo del Meec. Para esto se responde a las preguntas de investigación que se han formulado en el escrito, aportando evidencias de cómo, y en qué condiciones, los eec inciden en la competencia o en el avance del conocimiento (problemática general que orienta la presente investigación). En primera instancia, en los capítulos IV y V, se responden esas preguntas con base en los componentes de las trayectorias de los eec y luego, en el capítulo VI, con las categorías del Mee

Específicamente, con base en las trayectorias de los eec, en el capítulo IV se proporciona una respuesta, aunque sea inicial y parcial, a las siguientes interrogantes particulares:

3.-¿Qué condiciones se dieron, relativas a los eec que Saccheri experimentó durante su práctica matemática, que le llevaron a desechar de las matemáticas la estructura matemática derivada de la hipótesis del ángulo agudo que él levantó? (v. página 82)

4.-¿Qué condiciones se dieron, relacionadas con los eec que Gauss experimentó durante su práctica matemática, que le permitieron abrir su perspectiva hacia una nueva geometría, en la que la euclidiana era un caso límite? (v. página 95)

Parafraseando a Kline (2009) y retomando una idea compartida por distintos historiadores (como Bonola (1951) o Heath, (1956) se puede decir que una diferencia entre Saccheri y Gauss fue que, mientras el primero estuvo convencido de la verdad del V Postulado desde el inicio de su trabajo hasta su conclusión, y sus certezas no parecen haberse modificado a lo largo de sus investigaciones matemáticas, Gauss -en concomitancia con el avance de sus trabajos en el V Postulado y en la geometría no euclidiana-, fue transformando y ajustando su certeza inicial sobre ese postulado en una convicción compleja en torno a la posibilidad de una nueva geometría consistente y potencialmente aplicable al mundo físico, en el que la euclidiana era solo un caso límite. En este trabajo se argumenta que la diferencia entre la 'resolución' que Saccheri ofreció al problema del V Postulado y la que ofreció Gauss está en una buena parte relacionada con la manera en la que ambos matemáticos manejaron o gestionaron sus eec. En el capítulo IV se desarrolla esta idea y se sustenta este argumento, acudiendo a las trayectorias de los eec que se identificaron en los episodios analizados protagonizados por Saccheri y Gauss, y posteriormente en el capítulo VI, recurriendo al Meec.

En el capítulo V, con base en las trayectorias de los eec, se responde:

5.-¿Cuáles son las condiciones bajo las cuales los estados epistémicos de convencimiento (eec) pueden coadyuvar para un avance en la competencia matemática, en el contexto escolar?

En el caso de L, se deja ver que en su tercera y cuarta participaciones la alumna mostró avances en su competencia de la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad. Específicamente, en la tercera participación la estudiante mostró un avance en su competencia procedimental respecto de una segunda, porque corrigió errores al realizar operaciones. Sin embargo, en la cuarta participación, mostró un avance adicional al corregir una regla incorrecta que ella enunció desde su segunda y aplicó en una tercera. Se argumenta que la duda mostrada por L en las participaciones tercera y cuarta con respecto a la resolución que ella publicó en la tercera, puede explicar dichos avances. En primera instancia, porque la duda que la estudiante experimentó en ambas participaciones se asoció a un resultado incorrecto por razones matemáticas y porque las respuestas de la alumna para resolver dicha insatisfacción (básicamente repetir el ejercicio) se dirigieron a cumplir objetivos correctos. En suma, se argumenta que una primera condición para que la duda mostrada por L en las participaciones tercera y cuarta, coadyuvara a un avance en la competencia es que dicha duda estaba bien calibrada. Sin embargo, para explicar el avance adicional que la alumna mostró en su cuarta participación se argumenta que en esa participación, a diferencia de la tercera, L tomó conciencia de su duda y de los objetivos no cumplidos que la generaron, es decir, gestionó adecuadamente su duda.

En el capítulo VI, se responden a las preguntas de investigación acudiendo al Meec. Para eso, se muestran las relaciones entre los casos empíricos (de L, Gauss y Saccheri), las trayectorias de los eec específicas de cada caso, y la trayectoria de los eec genérica que forma parte del Meec. Actualmente, el Meec se ha aplicado con éxito a otros datos empíricos buscando saturarlo y densificarlo; los resultados se reportarán en próximas publicaciones. Cabe aclarar, que el Meec es resultado de las comparaciones entre todos los datos. El que se presente primero el caso de Gauss y luego el de L es únicamente para fines de exposición.

La TF no tiene como objetivo final el establecimiento de afirmaciones generales. No obstante, la metodología y las técnicas de análisis de la TF permiten generar comprensiones y explicaciones teóricas que, aunque basadas en el análisis de casos específicos, se pueden transferir a otros casos, siempre y cuando se desarrollen bajo condiciones semejantes (Bryant & Charmaz, 2007; Corbin & Strauss, 2015; Reichertz, 2007). De modo que el marco teórico que aquí se propone (el Meec con sus categorías y las trayectorias genéricas de los eec, que de alguna manera organizan esas categorías), así como las explicaciones que aquí se sugieren con base en ese marco teórico, aunque surgidas del caso de Gauss y Saccheri y L, se pueden eventualmente aplicar a casos semejantes: a casos de la historia o a casos del ámbito educativo que presenten condiciones semejantes a los casos de Gauss, Saccheri y L, es decir, casos en donde personajes de la historia o del escenario escolar se planteen retos o tareas matemáticas y hagan el trabajo matemático para encararlas. Pero, no está de más reiterarlo, lo que interesa en las investigaciones de la TF es la generación de hipótesis para validar, reformular, ampliar, completar o replantear en nuevos datos; es decir, los resultados de la TF son siempre provisionales, en espera de ser modificados o completados con nuevas aportaciones basadas en nuevos datos empíricos. Y tampoco está de más repetirlo, lo que en este proceso realmente importa no es la ‘representatividad’ de esos nuevos datos (como sucede en la investigación cuantitativa), sino la ‘generalidad’ (i.e., nivel de abstracción, profundidad y alcance) de las categorías y las explicaciones construidas a partir de esos datos.

En suma, aunque en diversas investigaciones en educación matemática se han aportado evidencias de la presencia de los eec en las prácticas matemáticas y de su influencia tanto positiva como negativa en el desarrollo de la disciplina y en su aprendizaje, en este escrito se propone un marco teórico con el que se puede explicar, entre otras cosas, bajo qué condiciones esa influencia es positiva o negativa. Adicionalmente, con el conocimiento generado en este documento sobre los eec, se puede sugerir el lugar (aunque inicial y provisional) que pueden ocupar esos estados dentro de la educación matemática. Desde la perspectiva de este estudio, es muy posible que los eec funcionen como un mecanismo de regulación cognitivo y emocional que, por un lado, es sensible a la insatisfacción (o satisfacción) de necesidades de seguridad y que funciona como un detonador que provoca ciertos estados de desequilibrio en forma de duda (o equilibrio en forma de confianza o estados afines); y que, por otro lado, genera instrucciones que pueden estar orientadas (o no) a satisfacer dichas necesidades de seguridad. Adicionalmente, se espera que el marco propuesto en este escrito sea útil para proponer intervenciones didácticas justificadas dirigidas a que los eec representen un acicate (y no un obstáculo) para el desarrollo y aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO I ANTECEDENTES

1.1 TEMA DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación se centra en el análisis de la seguridad, la confianza, el convencimiento, la certeza o la duda que las personas experimentan alrededor de la veracidad de axiomas, postulados, teoremas, algoritmos de la matemática escolar, resultados de tareas matemáticas escolares y, en general, alrededor de la veracidad de afirmaciones de contenido matemático. En el escrito se considera que la seguridad, la confianza, el convencimiento o la certeza, por un lado, y la duda, por el otro, son los extremos de un continuo que incluye a otros estados como la presunción. Sin embargo, en este documento, únicamente se profundiza en los extremos de ese continuo. La investigación trata, por ejemplo, de la duda que Gauss explicitó en una carta de 1799 alrededor de la veracidad de la geometría (Gauss, 1900, p. 159), o de la seguridad que una estudiante explicitó -en un diplomado sobre álgebra- alrededor de que su resolución a una ecuación era correcta.

En la investigación, a los estados de seguridad, confianza, convencimiento o duda se les llama “estados epistémicos de convencimiento” o “eec” (Rigo, 2013) y a las afirmaciones de contenido matemático se les nombra como “hechos de las matemáticas H”. Diversas investigaciones en educación matemática, se han centrado en el estudio de los eec tanto en la práctica del profesional de las matemáticas como en las prácticas de profesores y estudiantes de la disciplina.

1.2 LA DUDA Y LA CERTEZA EN LA PRÁCTICA DEL PROFESIONAL DE LAS MATEMÁTICAS

En algunas investigaciones centradas en los eec del profesional de las matemáticas, se ha afirmado que dichos estados están presentes en etapas que preceden a las pruebas matemáticas (Balacheff, 1987; De Villiers, 2010; Hanna & Jahnke, 1996). Por ejemplo, De Villiers (2010, p.

206) afirma que una función de los procedimientos heurísticos alrededor de una afirmación matemática (como evaluar afirmaciones numéricamente) es obtener certeza sobre la veracidad de dicha afirmación. Esto se debe, de acuerdo al autor, a que si el matemático no está seguro acerca de la veracidad de una afirmación matemática, se pondría más bien a buscar un contraejemplo, en lugar de una prueba. Un matemático, continúa el autor, tiene que estar razonablemente convencido de la verdad de una afirmación matemática antes de sentarse y pasar un tiempo considerable y gastar energía en una prueba. En otras investigaciones relacionadas con los eec del profesional de las matemáticas, se resalta que el convencimiento es una guía para certificar los resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). Adicionalmente, una vez que la prueba de un teorema es "aceptada" y los resultados de la prueba son considerados como verdaderos (con muy alta probabilidad), de acuerdo a Davis y Hersh (1983, p. 354) dicho teorema se utiliza, su prueba se estudia con frecuencia, se inventan pruebas alternativas, se obtienen aplicaciones, generalizaciones y analogías con resultados conocidos en áreas relacionadas, y es entonces cuando se alcanza un estado de “rock bottom” (que se entiende aquí como un convencimiento profundo) alrededor de un teorema. En resumen, investigaciones sobre los eec de los matemáticos han advertido que el convencimiento está presente antes, durante y después de una prueba matemática.

Otras investigaciones han ido más allá al alertar sobre la influencia que, para el desarrollo de una prueba, pueden representar los eec que experimentan los matemáticos en torno a sus afirmaciones, durante los procesos heurísticos. En algunas de esas investigaciones, se ha indicado que los eec pueden impulsar una prueba: Inglis, Mejia-Ramos y Simpson (2007), por ejemplo, encontraron que la poca probabilidad de verdad (interpretada por los autores como duda) que, con base en su intuición, estudiantes de posgrado asignaron a una proposición (considerada falsa en las matemáticas), los orientó a buscar un contraejemplo para refutarla. En contraparte, también se ha advertido que esos eec pueden representar un obstáculo para el desarrollo de una prueba: en contextos de prueba matemática, Inglis, Mejia-Ramos & Simpson (2007) observaron que cuando un estudiante asoció confianza a una afirmación basada en garantías inductivas no tuvo después necesidad de construir una prueba que soportara dicha afirmación. De modo que, los eec que los matemáticos asocian a sus conjeturas pueden representar un obstáculo o un acicate para el desarrollo de pruebas matemáticas.

1.3 LA DUDA Y LA CERTEZA EN LA PRÁCTICA DE ESTUDIANTES Y PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En otros estudios se ha sugerido que, en las prácticas matemáticas de la escuela, los agentes de clase, estudiantes y profesores de distintos niveles, también suelen experimentar certezas y otros estados afines en torno a soluciones de tareas escolares, algoritmos o sustentos (Fischbein, 1982; Foster, 2016; Rigo, 2013). En algunas de esas investigaciones, se ha advertido que esos estados pueden representar un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas: Fischbein (1982) notó que cuando un estudiante no asoció convencimiento a una prueba deductiva, aun cuando la comprendía, él trató de buscar razones adicionales de tipo empírico; en relación al aprendizaje de los números negativos en alumnos de nivel básico, Foster (2016) conjeturó que si un alumno posee dominio de un algoritmo pero carece de confianza en la respuesta a la que conduce, es muy probable que él no aplique posteriormente el algoritmo y le resulte poco útil.

1.4 PREGUNTAS GENERALES DE INVESTIGACIÓN

En suma, los expertos han dado cuenta de la presencia de los eec en las prácticas matemáticas y han indicado que pueden representar un impulso, pero también han advertido que

pueden ser un obstáculo, tanto para el desarrollo de la disciplina como para el avance de los aprendizajes en la matemática escolar. No obstante, en la literatura sobre educación matemática no se ha profundizado en el tema; no se han precisado las condiciones bajo las cuales los eec influyen de manera positiva o negativa en el desarrollo de las matemáticas o en el aprendizaje. El propósito de esta investigación consiste en sugerir algunas de esas condiciones.
Específicamente, se busca responder en general:

¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar?

¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o de la competencia matemática escolar?

1.5 LA FALTA DE UN MARCO TEÓRICO SOBRE LOS EEC EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para responder a las preguntas generales de investigación hace falta un marco sobre la competencia matemática. Como el objetivo de la investigación no es el desarrollo de ese marco, se eligió uno elaborado por otros autores. Este marco se explica en el Capítulo V, página 102. Adicionalmente, para responder a esas preguntas generales hace falta un marco teórico sobre los eec que una persona experimenta alrededor de hechos de las matemáticas H. La cuestión es si existe alguno de esos marcos en el campo de la educación matemática.

En investigaciones sobre afecto en educación matemática se ha desarrollado el concepto de "confianza matemática" para hacer referencia a la autoevaluación de los estudiantes sobre qué tan buenos (capaces, competentes o hábiles) se consideran para la matemática en general o para temas particulares de la disciplina. De acuerdo con Foster (2016), ese constructo rescata juicios generales de los estudiantes como “soy malo en matemáticas” o “soy bueno con los números negativos”. Sin embargo, advierte el autor, ese concepto no rescata la valoración de los alumnos sobre si una respuesta específica a un ítem matemático particular (como ‘-2+7=?’) es correcta o no. Con base en lo anterior, Foster (2016) reconoce la importancia de desarrollar un concepto en la educación matemática que haga referencia a esa confianza específica. Para referirse a esa confianza, Foster introduce el término “confianza en una respuesta” de un alumno y la define como la valoración (cuán cierto) de un estudiante sobre si la solución a un ítem matemático específico es correcta (p. 274).

Otros investigadores también se han referido a la confianza de los estudiantes en torno a contenidos matemáticos particulares, como son los sustentos matemáticos. Por ejemplo, Duval (1999) utiliza el término convicción para referirse al “convencimiento de los alumnos asociado a sustentos de tipo inductivo o deductivo” (p.189). Fischbein (1982), por su parte, distingue entre tres tipos de convicción según el tipo de sustento al que un estudiante asocia confianza: el tipo de convicción extrínseca (asociada a pruebas lógicas), la convicción inductiva (asociada a pruebas empíricas) y el tipo de convicción intrínseca intuitiva (que no requiere de justificación explícita).

Mas allá de las definiciones, en otras investigaciones (Ernest, 2016) se han expuesto reflexiones filosóficas sobre por qué las personas desarrollan la creencia de que el conocimiento matemático, en general, es absolutamente cierto. De acuerdo con esas reflexiones, esa creencia se basa en tres tipos de razones: lógicas, culturales e históricas y personales. Las razones lógicas hacen referencia a las garantías que soportan la verdad del conocimiento matemático, como el conjunto de reglas de prueba con las cuales se derivan verdades en la disciplina; las razones históricas y culturales hacen referencia a las características que los objetos matemáticos han adquirido a lo largo del desarrollo de la disciplina, por ejemplo, el hecho de que siempre que se apliquen las reglas correctamente, las operaciones entre números dan un único resultado, o el hecho de que dichas operaciones sean reversibles; y las razones personales, están relacionadas con la exposición de las personas a los factores lógicos, históricos y culturales antes mencionados. Sin embargo, en dichos estudios no se han analizado casos explícitos del aula de matemáticas que soporten esas reflexiones filosóficas sobre la certeza y, además, no se hacen reflexiones filosóficas similares sobre la duda.

1.6 LOS EEC FUERA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Adicionalmente, fuera del campo de la educación matemática existen definiciones sobre la certeza del conocimiento matemático. Por ejemplo, desde una perspectiva filosófica, Ernest (2016) distingue entre dos significados de certeza. En una primera acepción, el autor define la certeza absoluta como el modo más fuerte de creencia positiva y compromiso epistemológico. Las creencias sostenidas con certeza absoluta, dice el autor, no admiten dudas, son irrefutables y pueden resistir cualquier cuestionamiento. En esta definición se considera que el conocimiento tiene existencia independiente de la humanidad, del tiempo y de cualquier lugar. En una segunda acepción, el autor define a la certeza relativa como un fuerte acuerdo entre las personas sobre los objetos de contenido matemático. En esta segunda acepción, las verdades están limitadas al conocimiento humano. Con base en lo anterior, el autor distingue entre dos acepciones de "certeza del conocimiento matemático", una absoluta y otra relativa. Para fines de este trabajo, esta definición de certeza dada desde la filosofía, resulta circular porque se expone en términos de la duda.

Por otra parte, en estudios sobre afecto ajenos a la educación matemática (Muis, Psaradellis, Lajoie, Di Leo & Chevrier, 2015) se distinguen un tipo de emociones llamadas epistémicas, las cuales se diferencian de otras porque el objeto asociado es el conocimiento. De acuerdo con los autores, esas emociones surgen cuando hay información inesperada (e.g. un alumno cree que la respuesta es una, pero se le dice que en realidad es otra) o incongruencia cognitiva (e.g. un alumno recalcula su solución pero obtiene dos respuestas diferentes). Las emociones que, por su naturaleza, los autores ubican como epistémicas son la sorpresa, la curiosidad y la confusión. Otras emociones pueden considerarse epistémicas si su objeto es el conocimiento, como la frustración de no conseguir una respuesta correcta a un problema matemático.

En esos estudios, los autores identifican tanto las condiciones en las que las emociones epistémicas pueden surgir, como las consecuencias que producen en el contexto de la resolución de problemas matemáticos. Específicamente, los autores identificaron por un lado, que los antecedentes de las emociones epistémicas son la percepción que tienen las personas de su capacidad para controlar las acciones y resultados en la resolución de problemas (i.e. control), así como la importancia que para la persona representan las actividades y resultados (i.e. valor). Por otro lado, los autores identificaron que dichas emociones pueden predecir la calidad de las estrategias cognitivas y meta-cognitivas que las personas ejecutarán a lo largo de la resolución de problemas. Por ejemplo, en los adultos, la confusión puede resultar en un aumento de las estrategias meta-cognitivas para reducir una incongruencia cognitiva, aunque en los niños no siempre es así. Además, según los autores, esas estrategias cognitivas y meta-cognitivas que son desencadenadas por las emociones epistémicas, impactan en el desempeño de los estudiantes a lo largo de la resolución de problemas.

De modo que, en estudios sobre afecto fuera de la educación matemática se han desarrollado marcos conceptuales para emociones asociadas al conocimiento. Sin embargo, en esos estudios no se suele incluir a la confianza, la duda o estados afines.

1.7 PLANTEAMIENTO DE OBJETIVO GENERAL DE INVESTIGACIÓN

De modo que, en la literatura revisada de educación matemática, se pueden encontrar algunas definiciones y reflexiones filosóficas que hacen referencia a la confianza de las personas en torno a proposiciones específicas de contenido matemático o a sus sustentos. Sin embargo, en la literatura especializada no se encontró un desarrollo conceptual sistemático de las características de ese tipo particular de confianza, ni mucho menos, un modelo teórico que permita dar cuenta de fenómenos asociados a ese tipo de confianza, como los que se pretenden analizar en este proyecto, y que a la larga ofrezca elementos teóricos y aplicados para hacer intervenciones didácticas bien orientadas.

Por tanto, en línea con Foster (2016), y para responder a las preguntas generales de investigación formuladas en el proyecto, en el trabajo se plantea como objetivo general el inicio del desarrollo de esa conceptualización de los eec. Se espera que este desarrollo conceptual coadyuve para que, en investigaciones futuras, se ubique a los eec de forma justificada en algún campo de la educación matemática (cognitivo, meta-cognitivo, afectivo o algún otro). Y es que, aunque actualmente en algunos estudios de educación matemática se suele ubicar a los eec en el terreno afectivo, en investigaciones sobre emociones fuera del campo de la educación matemática, no se les incluye explícitamente en ese terreno.

CAPÍTULO II PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

En el apartado anterior se han justificado las preguntas generales de investigación, así como el objetivo general. En resumen, de acuerdo con lo antes dicho, en la literatura revisada se ha alertado sobre la presencia de los eec en las prácticas matemáticas y sobre su influencia positiva o negativa tanto para el desarrollo de las matemáticas como para el aprendizaje de la disciplina, pero no se han precisado las condiciones bajo las cuales esa influencia es positiva o negativa. Por tanto, en el proyecto se busca responder las siguientes preguntas generales:

1.-¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar? (v. respuesta en Capítulo VI)

2.-¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o la competencia matemática escolar? (v. respuesta en Capítulo VI)

Como se verá más adelante, para responder las preguntas generales de investigación se recurre a casos de la historia de las matemáticas y de la matemática escolar. Por un lado, se trata de dos episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss. En relación con esos casos, se plantean las siguientes preguntas específicas:

3.-¿Qué condiciones se dieron, relativas a los estados de certeza y duda que Saccheri experimentó durante su práctica matemática, que le llevaron a no progresar más en su trabajo relacionado con una geometría distinta a la euclidiana? (v. respuesta en página 82)

4.-¿Qué condiciones se dieron, relacionadas con los eec que Gauss experimentó durante su práctica matemática, que le permitieron abrir su perspectiva hacia una nueva geometría, en la que la euclidiana era un caso límite? (v. respuesta en página 95)

En el caso de la matemática escolar, se analizan 4 participaciones de una estudiante, que llamaremos L, en un diplomado sobre álgebra. El caso resulta interesante porque en una tercera participación ella mostró únicamente un avance procedimental en su competencia de la resolución de ecuaciones, mientras que en una cuarta, ella mostró un avance conceptual. En relación con ese caso, se plantea la siguiente pregunta específica:

5.- ¿Cuáles son las condiciones en las que, en el ámbito escolar, los estados epistémicos de convencimiento (eec) pueden coadyuvar para un avance en la competencia matemática? (v. página 131)

Como se dijo, para responder a las preguntas generales y específicas de investigación, hace falta un marco teórico sobre los eec, el cual es inexistente en el campo de la educación matemática. Por tanto, se plantea el siguiente objetivo general:

Iniciar el desarrollo de un modelo teórico explicativo que dé cuenta de fenómenos asociados con la confianza en hechos de las matemáticas y, en particular, que permita responder a las preguntas de investigación antes planteadas.

Y los siguientes objetivos específicos:

Averiguar, por un lado, algunas condiciones bajo las cuales las personas pueden experimentar dichos eec y, por otro, algunos efectos que se pueden desprender de esos eec.

Se espera que con ese marco teórico inicial sobre los eec se comiencen a proponer intervenciones justificadas relacionadas con los eec en el aula de las matemáticas y, además, se espera que ese marco represente un avance para dar un lugar a los eec, de forma sustentada, en el campo de la educación matemática (cognitivo, meta-cognitivo, afectivo o algún otro). En lo que resta del documento se busca cubrir el objetivo planteado y dar (unas primeras) respuestas a las preguntas formuladas.

CAPÍTULO III METODOLOGÍA Y MÉTODO

3.1 JUSTIFICACIÓN DEL MÉTODO

De acuerdo al apartado anterior, en la presente investigación se busca responder ¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar? ¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o de la competencia matemática escolar? Como se dijo, para contestar las preguntas se plantea como objetivo general la construcción de un modelo teórico sobre los eec.

¿Por qué un modelo teórico? Las preguntas generales de investigación planteadas en el escrito demandan explicaciones teóricas asociadas con el fenómeno del convencimiento, que vayan más allá de descripciones puntuales con escasa profundidad conceptual y escaso poder clarificador. Las teorías en general, ofrecen fundamentos para explicar fenómenos y para proveer conceptos e hipótesis que dan pauta para investigaciones subsecuentes. La Teoría Fundamentada (TF, Corbin & Strauss, 2015) cuenta con los principios metodológicos y las herramientas analíticas para desarrollar esas teorías que buscan dar explicaciones del por qué de las cosas o de los comportamientos, a través de las construcciones teóricas.

En suma, se ha elegido la TF, en lugar de otras aproximaciones cualitativas o cuantitativas, porque “el conocimiento ganado a través de la TF permite a las personas construir explicaciones; porque la TF provee de un conjunto probado de procedimientos que permiten a los investigadores examinar tópicos y comportamientos desde distintos ángulos, desarrollando explicaciones comprehensivas” (Corbin & Strauss, 2015, p. 11). Siguiendo los principios de la TF se busca ganar claridad y comenzar a dar cuenta del fenómeno de convencimiento que es objeto de estudio en esta investigación.

3.2 PRINCIPIOS GENERALES DE LA TF

Para Corbin & Strauss (2015), una teoría consiste en un conjunto de conceptos (palabras que representan el significado que un analista otorga a datos empíricos), los cuales están bien desarrollados en términos de características que les dan especificidad (propiedades) y rangos para esas características (dimensiones) y, además, están interrelacionados a través de afirmaciones que explican algo acerca de un fenómeno. Si únicamente se desarrollan conceptos en términos de propiedades y dimensiones, pero no se vinculan para ofrecer explicaciones, se dice que se obtiene un ordenamiento conceptual.

Lo que distingue a la TF de otras formas de investigación cualitativa y la hace única es que los conceptos sobre los cuales se construyen las teorías se derivan de los datos recolectados durante el proceso de investigación y no se eligen antes de que la investigación comience. O más precisamente, el objetivo de la TF consiste en construir teorías cuyos conceptos estén fundamentados o cimentados en datos empíricos; de preferencia, estos datos provienen de escenarios naturales no intervenidos, porque de lo que se trata en la TF es conocer directamente -si es posible, de viva voz, o si no, de manera indirecta a través de sus acciones- los significados que los participantes en la investigación otorgan a procesos, actividades, ideas, prácticas o conceptos bajo estudio. En la TF el investigador es parte del proceso de investigación tanto como los participantes y los datos que ellos proveen (p. 4). De modo que, de acuerdo con los principios que rigen la TF, teorizar es un acto interpretativo y de construcción de significados que se da en una ‘doble dirección’, por así decirlo: a través de los conceptos que el investigador introduce a su teoría, él significa o interpreta los significados que los participantes le otorgan a los procesos, prácticas o ideas bajo estudio; los constructos teóricos provienen, así, de los datos empíricos que el investigador ha filtrado a través de sus propios marcos, y no son impuestos de manera exógena -como si fueran camisas de fuerza- buscando que los datos empíricos se ajusten a ellos.

Una parte muy importante de una teoría consiste en articular y estructurar todos los conceptos de la teoría -de todos los niveles, con sus propiedades y dimensiones- en torno a una categoría nuclear que los integra y cohesiona a través de afirmaciones (o una narrativa) que denotan las relaciones entre todos ellos. El concepto nuclear es un concepto suficientemente amplio y abstracto, permite resumir en pocas palabras el tema y las ideas principales de la teoría y sintetiza su principio explicativo.

En la construcción de una teoría, con base en la TF, se parte del presupuesto de que las acciones de las personas y las interacciones que se dan entre ellas siempre responden a eventos o sucesos -retos, problemas, obstáculos, objetivos o metas, tareas o necesidades- que están sugiriendo, induciendo o exigiendo una respuesta. Cuando se analizan datos para el propósito de la construcción de la teoría, se identifican esos eventos y se averigua cómo es que las personas los definen o les dan significado, y luego se identifican las acciones y las interacciones que ellas llevan a cabo para lidiar, afrontar o resolver lo relacionado con esos eventos. Esos eventos o incidentes -que en la TF se les llama condiciones- son la razón de ser de las acciones e interacciones; responden a las razones y/o motivos que tienen las personas para actuar; son naturalmente el origen de las posibles explicaciones que en la teoría se pueden ofrecer sobre el cómo y el porqué de las actuaciones, producciones o pensamientos de las personas que participan en el estudio. En ciertas instancias, ellas son conscientes y hacen explícitas esas condiciones, como por ejemplo, cuando responden al por qué, cómo y dónde de sus actuaciones y producciones y enumeran sus razones o motivos. En otras instancias, de hecho en muchísimas de ellas, las personas solo actúan sin mediar explicitación del porqué de sus acciones -i.e., sin explicar las condiciones- probablemente porque ellas mismas no son conscientes de las razones o motivos que las empujaron a decidir y proceder; eso no quiere decir que carezcan de esas razones; simplemente no las han llevado al nivel de su percatación consciente.

Ya que se han ligado las acciones e interacciones de las personas con las condiciones que las incitaron, entonces se tratan de identificar las consecuencias que probablemente resultaron de esas acciones e interacciones.

Cuando en una estructura conceptual se explican las acciones e interacciones que las personas realizan para enfrentar una determinada situación problemática (que actúa como condición de sus acciones) y se enlazan con las posibles consecuencias que se pueden desprender de dichas acciones; y cuando se identifican los cambios en las acciones y las interacciones que se generan al transformarse las condiciones, y se descubre cómo concomitantemente se modifican las consecuencias de esas acciones -lo que en la TF se llama análisis de contexto y de proceso-, la estructura conceptual pasa de ser una descripción a una teoría. Conforme a este esquema las teorías no solamente explican, sino que dan la posibilidad de predecir y proveer algún control sobre los resultados.

3.3 TÉCNICAS DE RECUPERACIÓN DE DATOS Y HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS

Para desarrollar una teoría con base en la TF, se recolectan datos empíricos y después se procede a un análisis cualitativo de esos datos. El análisis cualitativo es entendido por los autores, como otorgar un significado a los datos empíricos, denotar conceptos que representen ese significado (i.e. codificar) y explicitar el proceso que se siguió para dar significado a los datos y codificar. A continuación se describen las técnicas de recuperación de datos y herramientas analíticas de la TF, que se emplearon en la presente investigación.

3.3.1 Muestreo teórico

Para recolectar datos empíricos, en la TF se sigue una técnica conocida como muestreo teórico. De acuerdo a esa técnica, se toman conceptos de análisis anteriores desarrollados en la misma investigación y se buscan datos cuyo análisis pueda coadyuvar a desarrollarlos; a sumar nuevos conceptos, establecer vínculos entre ellos para ofrecer explicaciones y, en suma, cuyo análisis pueda coadyuvar a desarrollar la teoría. A diferencia de otros tipos de muestreo en los que se eligen personas para representar a toda una población, en el muestreo teórico no interesa la representatividad de los participantes con respecto a una población mayor. Lo que interesa en el muestreo teórico es la representatividad de los conceptos y elegir datos con los que se pueda desarrollar la teoría.

Una vez que se recolectan datos, de acuerdo a la TF, se procede al análisis cualitativo de esos datos. Para ese análisis, Corbin & Strauss (2015) proponen distintas herramientas. Entre las herramientas analíticas que se sugieren se encuentran hacer preguntas, el microanálisis, las comparaciones constantes, las comparaciones teóricas, el contexto y hacer memos y diagramas. A continuación se explica en qué consiste cada una de esas herramientas.

3.3.2 Microanálisis

En el microanálisis, según Corbin & Strauss (2015), se centra la atención en ciertas piezas de datos, se explora su significado a profundidad y se denotan conceptos que hagan referencia a ese significado. Es como usar un microscopio de alta potencia para examinar cada pieza de datos de cerca. De acuerdo a Corbin & Strauss (2015), el microanálisis se utiliza en las primeras etapas de investigación para identificar y denotar propiedades y dimensiones de conceptos. En ese nivel de ordenamiento conceptual se pueden obtener esquemas clasificatorios, como tipos o etapas.

3.3.3 Comparaciones constantes

En las comparaciones constantes, se comparan diferentes piezas de datos por sus similitudes y diferencias. Los datos que parece ser conceptualmente similares se agrupan bajo una misma etiqueta conceptual. Con esto, los datos se reducen a conceptos y se diferencia un concepto de otro. Esta herramienta, según Corbin & Strauss, usualmente se utilizan para identificar y denotar propiedades y dimensiones de los conceptos.

3.3.4 Comparaciones teóricas

En las comparaciones teóricas se toma un concepto derivado de los datos, ese concepto se utiliza para examinar una situación de la vida o de la literatura que podría ser sustancialmente diferente, pero a la que se podría aplicar el mismo concepto. Las comparaciones teóricas se utilizan para explorar posibles propiedades y dimensiones de un concepto. Luego, el analista puede volver a los datos para averiguar si algunas de esas propiedades están presentes. Esta herramienta analítica se puede utilizar cuando el analista no sabe qué buscar en los datos. También se pueden aplicar comparaciones teóricas cuando el analista está centrado en los detalles y particularidades de cada pieza de datos y no logra dar un paso atrás para pensar de manera más abstracta en lo que es común entre los casos.

3.3.5 Contexto

De acuerdo con Corbin & Strauss (2015), para construir una teoría, además de desarrollar conceptos en términos de propiedades y dimensiones, se deben establecer vínculos entre esos conceptos de manera que se ofrezcan explicaciones de un fenómeno. Para establecer vínculos entre los conceptos y ofrecer explicaciones, los autores proponen una herramienta de análisis llamada contexto. En primer lugar, de acuerdo con esa herramienta, en los datos empíricos se identifican acontecimientos o sucesos que exigen una respuesta por parte de las personas. En segundo lugar, se identifican las respuestas de las personas a esos acontecimientos o sucesos con la pregunta ¿Qué hizo la persona ante los acontecimientos o sucesos que le exigieron una respuesta? A esas respuestas, Corbin & Strauss (2015) las llaman acciones. En tercer lugar, en los datos, se identifican condiciones para esas acciones, las cuales son entendidas como razones que las personas dan al por qué responden de la manera en que lo hacen a una situación a través de la acción. En cuarto lugar, se identifican consecuencias para las acciones, entendidas como los resultados de las acciones. Esas consecuencias, de acuerdo a Corbin & Strauss (2015) , pueden generar emociones, las cuales señalan si los resultados en las acciones son lo que la persona esperaba o no. Luego, esas emociones, pueden estimular el curso de la acción o reorientar el curso de la misma. En suma, en la estructura del contexto, las acciones de las personas pueden vincularse a situaciones o acontecimientos, condiciones, consecuencias, emociones y a nuevas acciones que se desprenden de las emociones.

3.3.6 Hacer preguntas

A lo largo de la investigación se pueden hacer preguntas que proporcionen orientación para recabar nuevos datos, es decir, que proporcionen orientación para el muestreo teórico (e. g. ¿Qué conceptos están bien desarrollados y cuáles no?, ¿He llegado al punto de saturación?, ¿Dónde hay huecos lógicos en la teoría?). Otras preguntas pueden estar dirigidas a orientar las entrevistas, observaciones y análisis de datos (e. g. cada vez que se obtengan nuevos datos se puede preguntar ¿Por qué esta persona está segura?, con el objetivo de añadir propiedades y dimensiones al concepto “seguridad”). También se pueden hacer preguntas para sintonizar al investigadores con el posible significado de los datos (e. g. ¿Cuáles son los problemas? ¿Qué hacen los actores? ¿Cuáles son las consecuencias de las acciones?). Por otro lado, las preguntas teóricas ayudan al investigador a conectar conceptos (e. g. ¿Cuál es la relación de un concepto a otro?).

3.3.7 Articulación de herramientas analíticas y técnicas de recopilación de datos

La edificación de teorías siguiendo la metodología propuesta por la TF supone un nivel alto de complejidad y consume considerable tiempo para su elaboración, porque implica poner en juego prácticamente todas las herramientas analíticas de esta metodología y reiterar su aplicación las veces que sean necesarias. Se requiere una y otra vez realizar trabajo en el plano conceptual *definiendo y renombrando concepto*s y categorías y *sus propiedades y dimensiones*[1], para irlas *saturando* y haciéndolas cada vez más *densas*; se necesita establecer una *organización y jerarquización* entre los conceptos de menor nivel y las categorías más abstractas y generales y especificar *conexiones entre todos los componentes* de la estructura conceptual a través de una narrativa que les de coherencia. Se necesita articular esos componentes en torno a una *categoría nuclear* que sirva de pivote para construir las *explicaciones* sobre los fenómenos bajo estudio. Se requiere concomitantemente llevar a cabo trabajo en el plano empírico, estableciendo *comparaciones constantes* entre los datos y haciéndose nuevas *preguntas* sobre ellos; se necesita identificar las *condiciones* que originan las *acciones* de los participantes y las *consecuencias* que se desprenden de esas acciones bajo esas condiciones para hacer *análisis de proceso*. Y es esencial etiquetar conceptualmente todos los componentes del proceso y luego regresar al plano empírico, a través de *muestreos teóricos*, las veces que sean necesarias, para verificar si la caracterización de conceptos y categorías es plausible y si las explicaciones dadas se corroboran. Es necesario también acudir a la literatura para establecer *comparaciones teóricas* que inspiren y den nuevas ideas para la interpretación de los datos empíricos, cuando uno ha perdido la brújula y no encuentra salida y respuesta a las interrogantes.

---

[1] Lo que en este párrafo aparece en itálicas son herramientas analíticas de la TF.

3.3 HEURÍSTICA DEL MODELO DE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO

En el capítulo VI se expone una propuesta inicial de un Modelo teórico de los estados epistémicos de convencimiento (Meec) con base en el cual se han esbozado algunas explicaciones sobre la posible trayectoria que siguen los eec durante la resolución de una tarea de contenido matemático y sobre las condiciones de influencia de esos estados en la construcción de conocimiento matemático. Se trata de una estructura conceptual que posee ya algunas características de una teoría; si bien es sólo una teoría en construcción, incipiente, de la que apenas se han erigido algunos de sus primeros componentes, en esa estructura conceptual ya están los esbozos de una teoría. Sin embargo, antes de dar a conocer dicho modelo teórico, a continuación se dejará ver una parte del proceso analítico que se tuvo que hacer para procesarlo y elaborarlo. En particular, se explicita cómo en la presente investigación se han aplicado las técnicas de recolección de datos y las herramientas analíticas de la TF.

3.3.1 Escenario y sujetos

En el trabajo, se recabaron datos pertenecientes tanto de la matemática escolar como de la historia de la disciplina. Los datos de la matemática escolar se obtuvieron del Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos; cuyo propósito es fortalecer la formación de personas solidarias que asesoran en temas de álgebra a adultos en proceso de obtener su certificado de secundaria. El diplomado se desarrolla a distancia a través de la plataforma Moodle y está organizado en cuatro módulos que se estudian de forma secuenciada. Cada módulo del diplomado está dividido por semanas en las que se revisa un tema en particular. En cada una de esas semanas, los estudiantes participan en foros de discusión y realizan actividades y tareas que implican resolución de problemas matemáticos. Para realizar esas actividades, los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. La dinámica consiste en que el tutor propone un problema a resolver, los estudiantes publican en los foros de discusión sus soluciones al problema propuesto e interactúan entre ellos para enriquecer o corregir sus respuestas; la discusión que se genera es guiada por el tutor. Esas discusiones quedaron registradas en la plataforma Moodle y se copiaron en un documento Word conformado por 855 páginas con letra Arial 12.5. Por otro lado, se recurrió a episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss. Parte de esos episodios quedaron registrados en cartas escritas por Gauss (1900). Como apoyo a la interpretación de esos episodios se recurrió a Bonola (1951), Coxeter (1977), Heath (1956), Kline (1972, 1985, 2009), Lombardo-Radice (1974), Reventós & Rodríguez (2007), Ruiz (1995), Sholz (2005) y Ursini (2001).

3.3.2 Etapas de investigación

Una vez que se recabaron los datos, la investigación estuvo conformada por varias etapas. En cada etapa, se partió de preguntas y objetivos generales, que se desprendieron de análisis anteriores. Luego, se procedió a realizar una primera lectura de los datos y a seleccionar piezas de datos, conformadas por participaciones de los estudiantes y del tutor, cuyo análisis pudiera coadyuvar a responder las preguntas de investigación y cumplir los objetivos planteados. En términos de la TF, se procedió al muestreo teórico. Posteriormente, se aplicaron herramientas de análisis propuestas por Corbin & Strauss. Como resultado de aplicar esas herramientas de análisis se avanzó en el desarrollo de conceptos añadiendo propiedades y dimensiones, en sumar nuevos conceptos y/o en establecer vínculos entre ellos para ofrecer explicaciones. Dicho en términos de la TF, se avanzó en el ordenamiento conceptual y la construcción de la teoría. A la par, se respondieron razonablemente (de manera más o menos completa, de acuerdo con los alcances del presente documento) las preguntas de investigación y se cubrieron los objetivos planteados. Todo lo anterior se registró en lo que Corbin & Strauss llaman memos y diagramas. Los registros más avanzados, se publicaron en actas de congresos y un capítulo de libro. De esos registros de análisis se desprendieron nuevas preguntas y objetivos y, por tanto, una nueva etapa de investigación.

Una pregunta que podría surgir es ¿Por qué una teoría desarrollada conforme a los lineamientos de Corbin & Strauss (2015) puede considerarse válida? La noción de 'validez' tiene en la TF un significado específico: en cada etapa, a medida que se obtienen más datos a través de nuevos muestreos teóricos, los conceptos se pueden repetir. Si un concepto se repite en los nuevos datos, se dice que tiene cierta validación. Si los conceptos no se repiten, se hacen los ajustes necesarios. Además, en cada etapa, los conceptos se vuelven más abstractos y dejan de depender de datos empíricos particulares.

A continuación, se expone cada una de las etapas que se han seguido en la construcción del Meec.

3.3.2.1 Identificación de propiedades y dimensiones de los eec, elaboración de instrumento para distinguirlos e identificación de primeras relaciones entre eec y competencia

En esta investigación se partió del concepto de eec, que se retomó de Rigo (2013), el cual hace referencia a los estados de seguridad, convencimiento, confianza o duda que una persona experimenta en torno a hechos de las matemáticas. Una problemática que surgió fue ¿cómo se pueden identificar los eec que una persona experimenta en la veracidad de hechos de las matemáticas? Con relación a esa problemática, un primer objetivo consistió en diseñar la primera versión de un instrumento para identificar los eec que experimentó una participante en un foro virtual al resolver un problema matemático.

Luego, se seleccionó una pieza de datos en la que, en una primera lectura, se hiciera referencia a características de los eec. En particular, se seleccionó una interacción que las estudiantes J y P mantuvieron con su tutor en el diplomado. Esa interacción estuvo conformada por una participación del tutor, dos de J y una de P, y versó sobre resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones. En términos de la TF, en principio, se realizó un muestreo teórico con el propósito de añadir propiedades y dimensiones para el concepto de estados epistémicos de convencimiento.

Una vez que se seleccionaron los datos, se exploró su significado a profundidad para identificar características de los eec y se denotaron conceptos que hicieran referencia a esas características. En términos de la TF, se utilizó como herramienta analítica el microanálisis. Por ejemplo, la estudiante J remató una de sus participaciones con la expresión “creo jeje”, a la cual se le atribuyó el significado de duda. A esas expresiones lingüísticas que podrían ser características de un estado epistémico, se les denotó como “elementos del habla”. A la par, se compararon piezas de datos para identificar semejanzas y diferencias conceptuales entre ellas. Por ejemplo, en otra participación, la estudiante J no remató con la expresión “creo jeje”, lo cual podría significar que ahí ella estaba convencida. A esas comparaciones entre datos, Corbin & Strauss las llaman comparaciones constantes.

Para denotar conceptos que hicieran referencia a las características de los eec, en algunos casos se recurrió a la literatura. Por ejemplo, con el objetivo de determinar la certeza (o presunción) que autores de documentos escritos proyectan a través de ellos, se consultó a Hyland (1998). Ese autor se ha interesado por el análisis de textos, y en particular, en producciones redactadas por estudiantes. Él identifica aspectos del lenguaje, que llama epistémicos, porque es mediante éstos que los escritores (consciente o inconscientemente) indican el grado de confianza que experimentan en torno a lo que expresan. Hyland y Milton (1997) ubicaron elementos léxicos utilizados por estudiantes en distintas categorías epistémicas (certeza, posibilidad o probabilidad). Para los autores, por ejemplo, la palabra "creer" en un texto escrito indica un grado bajo de compromiso con la verdad de lo que se dice y forma parte de lo que ellos llaman "mitigadores del lenguaje". Por tanto, en la investigación, a los elementos del habla que en los datos se les otorgó el significado de duda, como "creo jeje", se les denotó como "mitigadores".

Según Corbin & Strauss (2015) si el analista no tiene conocimientos para identificar en los datos propiedades y dimensiones de un concepto, él puede recurrir a la literatura. En la literatura, él puede encontrar ideas sobre las posibles propiedades y dimensiones del concepto en cuestión; luego, el analista puede regresar a los datos para ver si algunas de esas propiedades y dimensiones están en los datos. Con el fin de tener conocimiento sobre posibles propiedades y dimensiones para los estados epistémicos, se recurrió a literatura sobre la certeza proveniente de muy distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein, 1988), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus, 1975), la sociología (Abelson, 1988), la lingüística (Boyero, 2012; Hyland, 1998; Hyland & Milton, 1997; Sánchez-Upegui, 2009) y la educación matemática (Rigo, 2013). En palabras de la Teoría Fundamentada, se recurrió a una comparación teórica. Por ejemplo, con base en las afirmaciones de Wittgenstein (1988) "Nuestro hablar adquiere su significado a partir del resto de nuestra conducta" (229) y "Actúo con completa certeza" (174), se planteó la hipótesis de que para identificar estados epistémicos no sólo basta con observar el lenguaje de las personas sino también sus acciones. Esta hipótesis se comprobó en algunos datos. Por ejemplo, cuando J no remató su participación con el mitigador "creo jeje", ella actuó conforme a las afirmaciones que enunció.

En suma, en la construcción de un instrumento para identificar eec, que se llevó a cabo inicialmente en la investigación del doctorado, se recurrió al muestreo teórico para seleccionar datos que fueran útiles en la identificación de características de los eec; además de Hyland se recurrió a Abelson (1988). Se acudió también al microanálisis para identificar y denotar esas características, a las comparaciones teóricas para coadyuvar a denotar esas características de los eec de acuerdo a la literatura y para establecer hipótesis sobre cuáles podrían ser esas características. De acuerdo a ese instrumento, una persona muestra confianza cuando recurre a elementos del habla conocidos como enfatizadores (característica que se denotó como “elementos del habla”), realiza acciones consecuentes con su discurso (característica a la que se le llamó “acción”), activa esquemas epistémicos basados en la familiaridad y en razones matemáticas, manifiesta de manera espontánea su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático (determinación), en sus participaciones contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible y activa esquemas epistémicos para aportar información nueva (interés). Cuando no se cumplen con las características antes mencionadas, de acuerdo al instrumento, es muestra de que la persona duda.

El instrumento que se diseñó para identificar eec se utilizó para comenzar a distinguir relaciones entre eec y competencia matemática. Se encontró, que J relacionaba estados epistémicos de confianza con competencia y estados epistémicos de duda con incompetencia. Cuando una persona relaciona sus estados epistémicos con su competencia de esa forma, en investigaciones actuales se llama “buena calibración” (Foster, 2016). En esta etapa se encontró que, en el caso de que un alumno relacione sus eec con su competencia de esa manera, se pueden sugerir posibles dificultades del estudiante en la comprensión de conceptos matemáticos únicamente a partir de los eec que él muestra. Por ejemplo, si una persona “bien calibrada” experimenta duda es muy probable que tenga alguna dificultad con el tema matemático. Sin embargo, en etapas posteriores de investigación se advirtió que esas relaciones entre estados epistémicos y competencia no suelen ser usuales. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2013.

3.3.2.2 Validación del instrumento para distiguir eec e identificación de nuevas relaciones entre eec y competencia

Una vez que se propuso un primer instrumento para identificar estados epistémicos y se utilizó para identificar relaciones entre los estados epistémicos y competencia, se seleccionaron nuevas piezas de datos. Un primer propósito de seleccionar nuevos datos fue validar ese instrumento. Según Corbin & Strauss (2015), si se repiten los conceptos de la primera versión del instrumento, se tiene cierta validación; en caso de no ser así, el instrumento puede modificarse de acuerdo a los nuevos datos. Un segundo propósito de seleccionar nuevos datos consistió en identificar nuevas características de los eec y nuevas relaciones entre eec y competencia. En suma, en términos de la TF, se realizó un nuevo muestreo teórico y se aplicaron comparaciones constantes a los nuevos datos para, por un lado, validar el instrumento antes mencionado y para, por otro lado, añadir nuevos conceptos a ese instrumento e identificar nuevas relaciones entre eec y competencia.

Específicamente, además de datos del aula de matemáticas, se seleccionaron datos de la historia de la disciplina. En cuanto a los datos del aula de matemáticas, se trató de una interacción conformada por una participación del tutor, dos de M, una de Jo y una de J, y versó sobre resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones. En cuanto a los datos de la historia se tomó el caso del desarrollo de las geometrías no euclidianas.

Al aplicar el instrumento a los nuevos datos del aula de clases, se obtuvo cierta validación del mismo porque los conceptos se repitieron en los datos. Además, al aplicar dicho instrumento a los nuevos datos, se identificaron relaciones entre eec y competencia similares a las ya encontradas, pero también se encontraron nuevas relaciones. Específicamente, se encontró que M mostró certeza al violar una regla de la resolución de un sistema de ecuaciones incompatible, para ser fiel a una creencia errónea que ella tenía: el propósito del sistema de ecuaciones es obtener un valor para las incógnitas. En cambio, cuando J se enfrentó a un problema que ponía en entredicho sus creencias (de la existencia numérica y única de toda tarea matemática), la estudiante se dio el lujo de dudar de los resultados obtenidos, de reconocer su ignorancia y de pedir ayuda, apertura meta-cognitiva que la puso en condiciones de aprender. En suma, se encontró que, si bien, la certeza puede relacionarse con competencia, la certeza también puede relacionarse con incompetencia. Y que, mientras la primera relación puede coadyuvar al aprendizaje, la segunda puede representar un obstáculo. Se podría pensar que ese tipo de relaciones entre certeza e incompetencia se dan únicamente en contextos escolares, sin embargo se encontró que en la historia de la disciplina también se puede presentar relaciones similares. En el caso del desarrollo de las geometrías no euclidianas, de forma similar a M, el convencimiento de Saccheri en que la geometría euclidiana era la única opción posible estaba fundada en compromisos ontológicos, lo cual representó un obstáculo para el desarrollo de las geometrías no euclidianas. En investigaciones recientes de educación matemática (v. Foster, 2016), también han advertido que el convencimiento y la duda pueden representar un obstáculo para la competencia. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2014a.

3.3.2.3 Identificación de propiedades y dimensiones de la competencia matemática y diferenciación entre eec y competencia

Hasta ese punto, se había propuesto y realizado una validación inicial de un instrumento para identificar eec y ese instrumento se había utilizado para identificar relaciones entre los estados epistémicos y la competencia en temas de resolución de ecuaciones. Para el análisis de la competencia en la resolución de ecuaciones, se utilizó un marco teórico propuesto por otros autores (en particular, el Modelo 3UV). Sin embargo, surgió el cuestionamiento sobre si el instrumento propuesto era útil para distinguir los eec de la competencia, independientemente del tema matemático. Ante esto, se planteó el objetivo de construir un instrumento para identificar la competencia de las personas independiente del tema matemático, y distinguirla de los eec que ellas experimentan. En caso de que el instrumento para distinguir eec no fuese lo suficientemente general, se tendría flexibilidad para modificarlo.

Para cumplir el objetivo se seleccionó una nueva pieza de datos del aula de matemáticas. En particular, se seleccionó una interacción conformada por una participación del tutor, 2 de L y 2 de P. Se seleccionó esa interacción porque, en una primera lectura, parecía que las estudiantes mostraban diferentes niveles de competencia y distintos tipos de eec. En términos de la TF, se realizó un nuevo muestreo teórico.

Una vez que se seleccionaron los datos, en primer lugar, interesó construir un instrumento para identificar niveles de competencia independientemente del contenido matemático. En la construcción de ese instrumento, se utilizaron como herramientas analíticas el microanálisis y las comparaciones constantes. Por ejemplo, la estudiante P aplicaba algoritmos de forma correcta pero sin sustento matemático alguno, mientras que la estudiante L apelaba a sustentos no aceptados en la matemática escolar como ofrecer una respuesta únicamente para contradecir al otro. Se consideró que las estudiantes, debían sustentar sus algoritmos en razones matemáticas. A esta última forma de sustentar se le ubicó como indicador de competencia conceptual, mientras que a las formas de sustentar de L y P se les ubicó como indicador de incompetencia conceptual.

A la par de que se identificaban indicadores de distintos niveles competencia, se contrastaban con los indicadores de los eec. En esa comparación, se advirtió que la forma en que se sustentaban los algoritmos matemáticos se utilizaba como indicador tanto de competencia como de eec. Se decidió, que ese indicador se usara únicamente para identificar competencia.

Después de que se diseñó el instrumento para identificar competencia y se ajustó el instrumento para identificar eec, se aplicaron esos instrumentos para identificar nuevas relaciones entre los estados epistémicos y la competencia matemática. Como el nuevo instrumento para identificar competencia incluía un nuevo nivel (el de la competencia procedimental), se identificaron nuevas relaciones entre competencia y eec. Se identificó, por ejemplo, que la certeza puede estar asociada sólo a un entendimiento procedimental, pero a un desconocimiento conceptual. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2014b.

3.3.2.4 Mutuas determinaciones entre eec y competencia: la duda como motor para aumentar la competencia y la competencia como motor para ganar confianza

Una vez que se identificaron diversas relaciones entre los eec y la competencia, interesó averiguar cómo los eec podían impactar en la competencia y cómo la competencia podía impactar en los eec. Además, como objetivo, interesaba validar los instrumentos ajustados para identificar eec y niveles de competencia. Para responder a las preguntas y cubrir el objetivo planteado se seleccionaron nuevos datos. Es decir, se realizó un nuevo muestreo teórico. Específicamente, se seleccionaron cuatro participaciones de J en las que ella resolvió problemas que involucran incógnitas. Se seleccionaron esas participaciones porque la alumna mostró distintos eec y distintos niveles de competencia.

Después de seleccionar nuevos datos se aplicaron los instrumentos para identificar eec y competencia. Es decir, se realizaron comparaciones constantes. Al realizar esas comparaciones constantes, se obtuvo cierta validación de los instrumentos porque los conceptos de los instrumentos se repitieron en los datos. Además, al aplicar dicho instrumento a los nuevos datos, se identificó cómo los eec podían impactar en la competencia y cómo la competencia podía impactar en los eec. Por ejemplo, se encontró que en una primera intervención, L experimentaba un estado inicial de seguridad relativa. De ahí pasó a la duda (en su segunda intervención), estado que posiblemente actuó como un motor para que ella re-elaborara sus conceptos y explicitara sus procedimientos (ya en la tercera participación), lo que le permitió adquirir nuevos niveles de seguridad pero ahora basados en contenidos matemáticos reformulados sobre los que profundizó en una cuarta participación. Es posible que con la re-elaboración de contenidos y construcción de sustentos que ella consiguió hacer en esta última intervención, J haya logrado alcanzar altos grados de presunción o incluso certeza. En este estudio se puede apreciar cómo los estados epistémicos pueden ser un freno para la construcción de conocimientos (cuando éstos se sostienen con relativa seguridad), y cómo esos estados epistémicos, como la duda, pueden actuar también como un acicate para el aprendizaje. Por otro lado, se aprecia cómo la construcción de saberes sustentados matemáticamente pueden ser una fuente de certeza.

3.3.2.5 Otras mutuas determinaciones entre eec y competencia: la duda como obstáculo para aumentar la competencia y el aumento de confianza a pesar de la incompetencia

Para averiguar otras influencias entre eec y competencia, se realizó un nuevo muestreo teórico. Además, como objetivo, interesaba seguir validando los instrumentos para identificar eec y niveles de competencia. Específicamente, se seleccionaron cuatro participaciones de J en las que ella resolvió problemas que involucran incógnitas. Se seleccionaron esas participaciones porque la alumna mostró distintos eec y distintos niveles de competencia. Después de seleccionar nuevos datos se aplicaron los instrumentos para identificar eec y competencia. Es decir, se realizaron comparaciones constantes. Al realizar esas comparaciones constantes, se obtuvo cierta validación de los instrumentos porque los conceptos de los instrumentos se repitieron en los datos. Además, al aplicar dicho instrumento a los nuevos datos, se identificaron otras mutuas determinaciones entre eec y competencia. Por ejemplo, se encontró que en una primera intervención, L experimentaba un estado inicial de seguridad relativa. De ahí pasó a la duda (en su segunda intervención) asociada a cierta incomprensión. Sin embargo, a diferencia de lo que se había encontrado anteriormente, esa duda no actuó como un motor para que ella re-elaborara sus conceptos y explicitara sus procedimientos. Ahí, J recrudeció su duda, no ubicó la causa de la misma y optó por una salida vía razones extra-matemáticas. Esa salida, le impidió avanzar a J en sus conocimientos. En una siguiente intervención, a pesar de que la alumna no realizó una re-elaboración de contenidos, ella alcanzó certeza. Con esto se concluyó que la duda no es una condición necesaria y suficiente para el aprendizaje y que se puede alcanzar la certeza sin una reelaboración de conceptos. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2015a.

3.3.2.6 Aplicaciones del contexto: Algunas consecuencias de la duda y condiciones bajo las cuales la recuperación de la certeza representa un acicate para la competencia

Una vez que se identificaron diversas relaciones y mutuas determinaciones entre eec y competencia, se concluyó que la duda no es condición necesaria y suficiente para la competencia y que la competencia no es necesariamente fuente de certeza. La cuestión entonces era, bajo qué condiciones la duda y la certeza pueden representar un acicate para la competencia. En principio interesó averiguar, bajo qué condiciones una transición de la duda a la certeza podría representar un impulso para la competencia. Además, se seguía teniendo como objetivo la validación de los instrumentos para identificar certeza y comprensión. Para responder a las preguntas y cubrir el objetivo planteado se seleccionaron nuevos datos. Es decir, se realizó un nuevo muestreo teórico. Específicamente, se seleccionaron dos participaciones de M y 3 de J, relacionadas con problemas que involucran incógnitas. Se seleccionaron esas participaciones porque las alumnas parecían transitar de un estado de duda a la certeza con distintos niveles de competencia.

Como la pregunta ya no se limitaba a sumar propiedades y dimensiones para los eec, sino a ofrecer primeras explicaciones sobre las relaciones encontradas entre eec y competencia se recurrió a un elemento de la herramienta analítica conocida como contexto. Específicamente, se identificaron algunas consecuencias de la duda. Por ejemplo, en una participación M comenzó por mostrar duda cuando trató de resolver una ecuación con el algoritmo de las propiedades de las igualdad, el cual era desconocido por M. Para recuperar su certeza, en principio, M explicitó las posibles causas de su duda. En particular, ella atribuyó su duda, únicamente, a lo "enredado de resolver ecuaciones con las propiedades de la igualdad". En otras palabras, M atribuyó explícitamente su duda a una razón extra-matemática e ignoró posibles razones matemáticas. Una vez que M atribuyó su duda a lo enredado del procedimiento relacionado con las propiedades de la igualdad, ella aplicó de forma correcta la trasposición de términos porque "no enreda". Dicho de otra forma, para recuperar su certeza, M nuevamente recurrió a razones extra-matemáticas e ignoró razones matemáticas. Este camino que la alumna siguió para recuperar su certeza no la condujo a aumentar su competencia en la resolución de ecuaciones porque, si bien, ella aplicaba correctamente la trasposición de términos desconocía las razones matemáticas sobre los que se fundaba. En otro caso, J comenzó por mostrar duda cuando trató de resolver una ecuación combinando de forma incorrecta el algoritmo de la trasposición (desconocido por la estudiante) y las propiedades de la igualdad. Para recuperar su certeza, en principio, J explicitó su confusión y, posteriormente, usó las propiedades de la igualdad para sustentar la trasposición. Asociada a esta salida del conflicto, J aumentó su certeza y aumentó su comprensión. Se concluyó que, como resultado de la duda, las personas pueden acudir explícitamente a razones extra-matemáticas (como recurrir a un algoritmo “menos enredado”), o bien, a razones matemáticas (como sustentar reglas) para recuperar su certeza y que, mientras la primera vía puede representar un obstáculo para el aumento de la competencia, la segunda vía, puede representar un acicate. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2015b.

3.3.2.7 Aplicaciones del contexto: Posibles condiciones de la presencia de las distintas relaciones entre eec y competencia

Después de que se identificaron algunos resultados de la duda, interesaba averiguar ¿Cuáles son las posibles razones de la presencia de las distintas relaciones entre eec y competencia? Para responder a la pregunta se seleccionaron nuevos datos. Es decir, se realizó un nuevo muestreo teórico. Específicamente, se seleccionaron participaciones de B relacionadas con problemas que involucran incógnitas.

Las preguntas remitían a otros elementos de la herramienta analítica del contexto. Específicamente, las preguntas remitían a averiguar algunas condiciones para las distintas relaciones entre eec y competencia. Por ejemplo, cuando B resolvió una ecuación en su primera participación ella experimentó seguridad cuando aplicó una regla según la cual la solución está a la derecha del signo igual apoyada en un esquema operatorio que, en conjunción con la trasposición de términos, la llevó a obtener el valor correcto de la incógnita. En una segunda intervención, para resolver una ecuación, B dejó de trasponer términos para seguir reglas del tutor relacionadas con las propiedades de la igualdad, pero mantuvo su seguridad en torno a la regla según la cual la solución está a la derecha del signo igual y la aplicó, lo que la condujo a considerar incorrectamente que en la expresión 0=x la solución era “x” en lugar de “0”. De acuerdo a lo antes dicho, la seguridad de B en la regla incorrecta según la cual la solución está a la derecha del signo igual, puede explicar cómo es que la estudiante asoció seguridad a un resultado incorrecto (interpretar la letra x como la solución, en lugar del valor numérico). Los cuestionamientos del tutor a la regla según la cual la solución está a la derecha del signo igual, condujeron a la estudiante en su tercera participación a explicitar reglas correctas bajo esquemas matemáticos, ayudando a su comprensión. Sin embargo, ahí B dudó, muy probablemente por abandonar su regla de que la solución está a la derecha del signo igual. En suma, en esta etapa, de forma incipiente se ilustra que el cumplimiento de una regla puede llevar a experimentar seguridad, mientras que el abandono de esa regla puede conducir a mostrar duda. Si esa regla es incorrecta, la seguridad asociada a su cumplimiento explicaría una disminución de la competencia. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2016.

3.3.2.8 Primeros resultados de la aplicación del contexto

De acuerdo a lo dicho hasta aquí, al comenzar a aplicar la herramienta del contexto, se avanzó en averiguar posibles condiciones y resultados de los eec. Por un lado, los eec de seguridad podrían basarse en la aplicación de una regla o de un tipo de sustento (matemático o extra-matemático), mientras que los eec de duda podrían surgir del abandono de esas reglas y sustentos. Por otro lado, se concluyó que después de un eec de duda se puede acudir a una regla o sustento de tipo matemático o extra-matemático para recuperar la certeza. Con base en lo anterior, se avanzó en responder a las preguntas sobre bajo qué condiciones los eec pueden coadyuvar a un avance, estancamiento o disminución en la competencia. Específicamente, se concluyó que para que los eec coadyuven a un mayor avance en la competencia, las reglas y sustentos en los que se basan y que se desprenden de ellos deben ser correctos, de tipo matemático y hacerse explícitos.

3.3.2.9 Aplicaciones del contexto: Intervenciones para que los eec representen un acicate para el aprendizaje

Entonces, surgió la pregunta sobre ¿qué intervenciones del profesor en el aula de matemáticas pueden coadyuvar para que los eec de un estudiante representen un acicate para el aprendizaje? Para responder a la pregunta se seleccionaron nuevos datos. Es decir, se realizó un nuevo muestreo teórico. Específicamente, se seleccionaron 6 participaciones del tutor y 7 de B, relacionadas con problemas que involucran incógnitas. Se seleccionaron esas participaciones porque las alumna parecía mostrar distintas relaciones entre eec y competencia.

Para comenzar, se realizó una comparación teórica entre los elementos identificados en la investigación para los eec y el Modelo de Toulmin (Toulmin, Rieke & Janik, 1984). En ese modelo, un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D) que apoyan la afirmación, garantías (W) que actúan como un puente lógico entre los datos y la conclusión, un soporte (B) que incluye un marco general sobre el cual se fundamenta el argumento, y los calificadores (Q) que consisten en "el grado de confianza que puede ser adjudicado a las conclusiones dados los argumentos disponibles para apoyarlas". En el lugar de la afirmación del Modelo de Toulmin se colocó la solución a una tarea matemática (como el valor de la incógnita), en el lugar de los datos se colocaron las operaciones aritméticas o algebraicas que conducen a esa solución, en el lugar de las garantías se colocaron las reglas y algoritmos que explican el paso de las operaciones a la solución, y en el lugar del soporte, se colocó el tipo de sustento (matemático o extra-matemático) en el que estaban soportadas dichas reglas. En el lugar de los calificadores Q se colocaron a los eec. Se concluyó que el Modelo de Toulmin es consistente con lo encontrado en la investigación porque, con ese modelo, se puede concluir que los eec dependen de las reglas y algoritmos que subyacen las operaciones matemáticas y de los sustentos para esas reglas y algoritmos. La principal diferencia que se encontró entre el Modelo de Toulmin y los elementos identificados en la investigación recae en la interpretación del calificador Q. Y es que, en la interpretación de Q del Modelo de Toulmin se supone implícitamente un sujeto experto que califica. A diferencia, en la presente investigación se acepta explícitamente que es el sujeto que argumenta el que califica la fuerza de los componentes del argumento, y se considera que ese sujeto (que participa en un foro virtual) vivencia un estado de convencimiento, o bien de presunción o duda en un enunciado matemático –los que Rigo (2013) denomina "estados epistémicos de convencimiento"–, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que se enunciaron anteriormente.

Al aplicar los elementos identificados en la investigación para los eec al caso de B, se validaron y denotaron diferentes relaciones entre eec, tipo de garantías y tipo de sustentos. A la relación en la que los alumnos asociaban seguridad a garantías correctas y sustentos de tipo matemático, se le llamó SAM, y a la relación en la que los alumnos asociaban duda a garantías incorrectas y sustentos matemáticos y extra-matemáticos, se les llamó DDM y DDEM respectivamente. De acuerdo con las etapas de investigación anteriores, se consideró que un objetivo de la instrucción es conducir a los estudiantes a esas relaciones y se les llamó "relaciones consistentes". Dado que en una interacción el objetivo del profesor es construir junto con sus estudiantes una relación SAM, se puede llamar a ésta "relación objetivo". Las relaciones que presentan una variación con respecto a las relaciones consistentes, en la investigación se les llamó "relaciones inconsistentes".

Una vez que se tipificaron las relaciones entre eec y competencia, se definió un contexto general, de acuerdo a la TF, en el cual un profesor puede conducir a una estudiante a una relación SAM. De acuerdo a ese contexto, el acontecimiento que exige una respuesta por parte del tutor es que un estudiante muestra una relación entre sus eec, reglas o algoritmos y un tipo de sustento, ante una actividad propuesta por el profesor. Ese suceso da lugar a que el profesor identifique el tipo de relación que construyó el estudiante. Con base en lo anterior, el profesor publica una intervención la cual puede consistir en una actividad que se desarrolla en un contexto (e. g. la balanza, resolución de problemas o de ecuaciones) y con un nivel de dificultad (e. g. ecuaciones con una incidencia de la literal o con dos incidencias); en un cuestionamiento a la conclusión, garantía o soporte del argumento del estudiante o en la introducción y solicitud de aplicación de nuevas reglas. Como resultado, el estudiante puede mostrar una nueva relación entre sus eec, reglas o algoritmos y un tipo de sustento, el cual puede ser SAM o no, y mostrar o no cambios con respecto a la relación anterior. Ante estas nuevas condiciones, el profesor puede realizar una nueva intervención y el ciclo se repite. Al aplicar el contexto al caso de B se encontró, por ejemplo, que la seguridad coligada a la aplicación de reglas incorrectas basadas en esquemas extra-matemáticos puede requerir que el profesor cuestione el soporte y promueva la aplicación de nuevas reglas; mientras que la inseguridad aunada a reglas correctas bien fundadas puede requerir de la aplicación de esas reglas a diferentes contextos. El registro de esta etapa se puede consultar en Martínez & Rigo, 2017.

3.3.2.10 Comparaciones teóricas con literatura sobre las emociones: En búsqueda de la naturaleza de los eec y cómo se van formando a lo largo del desarrollo de una tarea matemática

Surgieron entonces preguntas más profundas como ¿en qué consisten los eec? y ¿cómo se van formando los eec a lo largo del desarrollo de una tarea matemática? Sin embargo, al revisitar los datos empíricos no se tenía idea sobre cómo responder esas preguntas. A partir de lo encontrado en las etapas anteriores, se planteó la hipótesis de que los eec podrían estar a medio camino entre el mundo afectivo y el cognitivo. Esto sugirió que del estudio de las emociones, se podría desprender nuevas ideas para delinear cómo los eec se van formando a lo largo de una tarea matemática. En principio, se recurrió a la teoría de Damasio (2010[a], 2010[b]). En palabras de la TF, se recurrió a una comparación teórica.

En esa teoría, Damasio (2010[a], 2010[b]) plantea la existencia de un tipo emociones que son aprendidas a lo largo de una vida de experiencias, que él llama emociones secundarias. La maquinaria de esas emociones se pone en marcha con la valoración (consciente o inconsciente) de la presencia de un objeto o acontecimiento que en la experiencia individual del lector se emparejó con determinados tipos de respuestas. Algunas de las consideraciones que se toman en cuenta en esa valoración son atributos del objeto o situación (como el aspecto de una determinada persona en un determinado lugar) (p.165, 2010a). A partir de experiencias previas en las que la persona ha conectado objetos y acontecimientos con determinadas emociones, se activan a nivel no consciente y de forma automática determinadas respuestas. Algunas de esas respuestas están relacionadas con cambios en el cuerpo (e. g. en las vísceras o en los músculos esqueléticos que configuran determinadas expresiones faciales y postura corporal), y en el estilo de procesamiento mental y de eficiencia en los procesos cognitivos y del pensamiento. Todo esto prefigura un estado corporal emocional (Damasio, 2010a), a partir del cual se emprenden ciertas acciones (e. g., echarse a correr en situaciones de miedo) y se hacen conscientes ciertas ideas y ciertos planes, los que están en armonía con la señal general de la emoción (la tristeza, e. g, ralentiza el pensamiento y puede conducir a insistir en la situación que la suscitó). El siguiente paso del proceso emocional se da cuando surge un sentimiento. Los sentimientos emocionales aparecen a partir de la percepción de todo lo ocurrido durante la emoción, tanto en cuerpo como en mente, así como de los cambios que ahí se han producido: por una parte, se da la percepción subjetiva del objeto (i.e., lo que Damasio llama el estímulo emocionalmente competente, EEC); por otra, se percibe el estado particular de lo que pasa en nuestro cuerpo; y por último, se genera la percepción de un estado de recursos cognitivos alterados, y de un particular estilo de procesamiento mental. Estas percepciones provocan una modificación en el proceso cognitivo y genera pensamientos que concuerdan, en cuanto al tema, con el tipo de emoción que se siente. El resultado último de las respuestas, directa o indirectamente, es situar al organismo en circunstancias propicias para la supervivencia y el bienestar.

En la comparación teórica se planteó la hipótesis de que si se consideran a los eec como emociones (en términos de Damasio), los estímulos emocionalmente competentes que desencadenan el mecanismo de los eec es la presencia de hechos de las matemáticas, con la evaluación de los atributos que la persona les concede según su experiencia, como el valor de verdad y el tipo de razones que las soporta. Asimismo se planteó la hipótesis de que, como resultado de los eec, la persona puede ejecutar acciones como recurrir a elementos del habla, actuar a favor o en contra de la veracidad de H, mostrar interés o desinterés alrededor de H, mostrar determinación o indeterminación alrededor de H, y en suma, poner en juego los criterios que se identificaron en las etapas anteriores para los eec. Estas repuestas pueden transcurrir al amparo de la conciencia (como en un sentimiento) o fuera de ella (como en una emoción). El registro de esta comparación teórica se puede consultar en Rigo & Martínez, 2017.

A diferencia de Damasio (2010[a], 2010[b]), Rosenberg (2006) distingue entre los estímulos que desencadenan las emociones y las necesidades que las causan. Para Rosenberg, los seres humanos deben cubrir necesidades. Entre las necesidades básicas que todo ser humano tiene se encuentran la necesidad de respeto, la necesidad de orden o la necesidad de seguridad. Desde esta perspectiva, por ejemplo, un sujeto que profiere insultos puede considerarse el estímulo que desencadena la emoción de ira en otra persona a la cual se dirigen los insultos; sin embargo, no es la causa de dicha emoción. La causa de la ira es una necesidad de respeto no satisfecha en la persona a la que van dirigidos los insultos.

La evaluación de la satisfacción o insatisfacción de necesidades puede explicar el por qué determinadas personas experimentan emociones en determinados contextos. Si, por ejemplo, alguien llega tarde a un encuentro y una persona tiene necesidad de sentirse seguro de que le importa a esa persona, quizá esa persona se sienta herida. En cambio, si esa persona necesita tener media hora de calma y soledad, tal vez ella disfrute el tiempo de espera y agradezca su tardanza. Entonces, la causa de la emoción no es la conducta de la otra persona, sino sus necesidades del momento.

El descubrimiento de las necesidades satisfechas o insatisfechas que causan una emoción requiere de una toma de conciencia y deliberación consciente por parte de la persona que experimenta dicha emoción. Y es que, de acuerdo a Rosenberg, las personas suelen expresar sus emociones de forma automática a través de enunciados que resaltan el estímulo que las desencadenó como "Me sentí furioso cuando me dijiste eso" o "Eres una mala persona", en lugar de expresarlas a través de afirmaciones que resalten las necesidades satisfechas o insatisfechas como "Me sentí furioso cuando dijiste eso, porque estoy necesitando respeto y me tomo tus palabras como un insulto".

En la comparación teórica, se planteó la hipótesis de que si se consideran a los eec como emociones (en términos de Rosenberg), la causa de los eec podría ser una necesidad de las personas por estar seguras de la veracidad de los H que ponen en juego. Mientras que el tipo de razones a las que las personas acuden para sustentar sus afirmaciones podrían formar parte de las estrategias a las que las personas acuden para cubrir esa necesidad.

Al conjuntar las nociones de emoción de Damasio (2010[a], 2010[b]) y Rosenberg (2006) se planteó la hipótesis de que si se consideran a los eec como emociones, los estímulos emocionalmente competentes que desencadenan el mecanismo de los eec son la presencia de hechos de las matemáticas, la causa de los eec podría ser una necesidad de las personas por estar seguras de la veracidad de los H que ponen en juego, mientras que el tipo de razones a las que las personas acuden para sustentar sus afirmaciones podrían formar parte de las estrategias a las que las personas acuden para cubrir esa necesidad. Asimismo se planteó la hipótesis de que, como resultado de los eec, la persona puede ejecutar acciones como recurrir a elementos del habla, actuar a favor o en contra de la veracidad de H, mostrar interés o desinterés alrededor de H, mostrar determinación o indeterminación alrededor de H, y en suma, poner en juego los criterios que se identificaron en las etapas anteriores para los eec. Estas repuestas pueden transcurrir al amparo de la conciencia (como en un sentimiento) o fuera de ella (como en una emoción).

En suma, en las etapas de investigación antes descritas se identificaron algunas propiedades y dimensiones de la competencia y los eec, se detallaron algunas condiciones y consecuencias de los eec, se describieron algunas relaciones entre eec y competencia y se plantearon reflexiones sobre qué son los eec y cómo se van formando en el desarrollo de una tarea matemática. En los siguientes capítulos se exponen los resultados de la etapa actual de la investigación. Como se verá, en la etapa actual se regresó a los datos empíricos con el objetivo de desarrollar un modelo teórico sobre los eec que permitiera explicar fenómenos sobre el convencimiento, y en particular, responder a las preguntas generales de investigación planteadas en el Capítulo II.

CAPÍTULO IV LA INFLUENCIA DE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA: PROPUESTA DE UN MODELO TEÓRICO EXPLICATIVO DE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (Meec)

4.1 PRESENTACIÓN

En lo que resta del documento se expone el estado actual de la investigación. Como se ha dicho, el propósito de la etapa actual es dar a conocer un Modelo teórico sobre los eec para explicar (por supuesto, de manera inicial) 1.-¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el desarrollo de las matemáticas o el avance en la competencia matemática escolar? 2.-¿Bajo qué condiciones los eec en H que experimentan las personas influyen sobre el estancamiento o retroceso del desarrollo de las matemáticas o la competencia matemática escolar?

El objetivo de este capítulo es doble.

En primera instancia, interesa que el lector conozca el Meec, con las categorías que lo forman, con sus propiedades y dimensiones y con las interrelaciones entre todas las categorías y conceptos. En particular, interesa dejar ver la posible trayectoria de acuerdo con la cual se van configurando los eec en una persona inmersa en alguna práctica de contenido matemático. Y es que el Meec se ha construido justo a partir de los componentes de esas trayectorias de los eec, tomando en cuenta la manera en la que ahí unos se relacionan con otros y considerando también las propiedades de esos componentes que ahí se manifiestan; así que esas trayectorias de los eec son los que forman la estructura básica del Meec.

Antes de dar a conocer al lector un modelo acabado, se dejará ver una parte del trabajo analítico que se tuvo que hacer para procesarlo y elaborarlo.[2] Específicamente, se comparte con

[2] No obstante, aquí sólo se detallarán algunos de los procesos heurísticos que nos llevaron al modelo; y es que por los alcances de este escrito no se puede profundizar en todas las herramientas analíticas de la TF que se emplearon (todas las que suponen lo que Corbin & Strauss (2015) llaman el análisis de contexto). Esto se reservará para futuros reportes, ya que se considera que es muy importante explicitar la aplicación de la TF en investigaciones sobre educación matemática, lo que no se suele encontrar en la literatura de educación matemática.

el lector cómo, en esta etapa de investigación, se aplicaron las técnicas de recopilación de datos y las principales herramientas analíticas de la TF.

En principio, se revisitaron los datos empíricos y se eligieron dos episodios que se antojarían un tanto lejanos. En un caso, se trata de la interacción que tuvo una estudiante L con su tutor, en el diplomado que se impartió a distancia a través de la plataforma Moodle cuyo propósito era fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos en proceso de obtener su certificado de secundaria. Esa interacción estuvo conformada por 3 participaciones del tutor y 4 de L. Se eligió esa interacción porque L mostró cambios en su competencia y en sus estados de duda y certeza, y el análisis de esos cambios permitió sugerir condiciones bajo las cuales los estados de certeza y duda pueden representar un acicate para la competencia, y por tanto, fue posible responder a las preguntas de investigación. Por otro lado, se trata de dos episodios históricos, relacionados con el desarrollo de las geometrías no euclidianas, cuyos personajes centrales son Saccheri y Gauss. Se aprovechan esos casos para identificar ahí las trayectorias de los eec que experimentaron sus protagonistas (L, Saccheri, Gauss), con sus componentes y sus propiedades. En términos de la TF, se realizó un muestreo teórico.

Una vez que se eligieron los datos empíricos, se aplicaron herramientas analíticas de la TF.

El contexto, es la principal herramienta analítica que se utilizó en esta etapa de investigación de desarrollo del el Meec. Específicamente, al aplicar el contexto a los datos empíricos que se eligieron para la investigación, a las situaciones o acontecimientos que exigen una respuesta por parte de las personas se les denotó como *tareas matemáticas*. A las acciones que las personas ejecutan ante esas tareas matemáticas se les denotó como *trabajos matemáticos*.

Esos trabajos matemáticos pueden consistir en el planteamiento y ejecución de operaciones aritméticas y/o algebraicas. Como condiciones de las acciones, se identificaron distintas razones que pueden explicar el por qué de los trabajos matemáticos. Entre esas razones se identificó una *necesidad de las personas de experimentar seguridad en la verdad (validez o corrección) de algún hecho de las matemáticas (H)*. Asociadas a esa necesidad, se identificaron estrategias que las personas se plantean para cubrirla. A esas estrategias, en el modelo se llaman *objetivos* y pueden consistir en reglas o algoritmos que las personas se plantean antes de ejecutar trabajo matemático. Como consecuencias de los trabajos matemáticos, en los datos empíricos se identificaron *evaluaciones* del cumplimiento o incumplimiento de objetivos y necesidades. En el lugar de las emociones del contexto, en los datos se identificaron eec positivos como la seguridad o la confianza si la evaluación del cumplimiento de objetivos era positiva y eec negativos como la duda si la evaluación del cumplimiento de objetivos era negativa. Además, los eec negativos dieron lugar a instrucciones (*tendencias* y/o *marcos interpretativos*) que de alguna manera iban en contra de la veracidad de una afirmación matemática. En cambio, los eec positivos dieron lugar a instrucciones (*tendencias* y/o *marcos interpretativos*) que de alguna manera iban a favor de la veracidad de una afirmación matemática. Esas instrucciones pueden orientar el trabajo matemático posterior, con el cual se pueden cumplir o no objetivos que la persona se plantea inicialmente ante una tarea matemática para cubrir su necesidad de seguridad. A este conjunto de las categorías que se obtuvieron de aplicar principalmente el contexto, se le ha denominado *trayectoria de los eec genérica.* Ésta trayectoria se ilustra en la Tabla 1 y constituye la base del Meec, el cual se expone en su totalidad en el capítulo VI.

Para la construcción de la trayectoria se recurrió al microanálisis. Esta herramienta se utilizó para centrar la atención en las piezas de datos elegidas, explorar su significado a profundidad y buscar palabras que denotaran ese significado. Este proceso se registró en las tablas 1 a 3. En la primera columna de esas tablas se ingresa el numeral que se asignó a una determinada pieza de datos y en las columnas segunda y tercera, se expone el significado otorgado a esos datos.

Adicionalmente, se recurrió a comparaciones teóricas para denotar conceptos que hicieran referencia al significado otorgado a los datos a lo largo del microanálisis. Por ejemplo, las razones que explican el por qué de las acciones de las personas fueron denotadas por otros autores como necesidades (Maslow, 1943) y la necesidad de seguridad fue identificada anteriormente por Fischbein (1987).

Otra herramienta que se utilizó son las comparaciones constantes. En la Tabla 7 (v. Capítulo VI) se muestran las relaciones entre los casos empíricos (de L, Gauss y Saccheri), las trayectorias de los eec específicas de cada caso, y la trayectoria de los eec genérica que forma parte del Meec. Actualmente, el Meec se ha aplicado con éxito a otros datos empíricos buscando saturarlo y densificarlo; los resultados se reportarán en próximas publicaciones. Cabe aclarar, que el Meec es resultado de las comparaciones entre todos los datos. El que se presente primero el caso de Gauss y luego el de L es únicamente para fines de exposición.

Por otra parte, en lo que resta del trabajo interesa mostrar el poder explicativo del Meec. Para esto se responde -en primera instancia con base en los componentes de las trayectorias de los eec y luego con las categorías del Meec- a las preguntas de investigación que se han formulado en el escrito, aportando evidencias de cómo, y en qué condiciones, los eec inciden en la competencia o en el avance del conocimiento (problemática general que orienta la presente investigación).

Específicamente, con base en las trayectorias de los eec en este capítulo se proporciona una respuesta, aunque sea inicial y parcial, a las siguientes interrogantes particulares:

3.-¿Qué condiciones se dieron, relativas a los eec que Saccheri experimentó durante su práctica matemática, que le llevaron a desechar de las matemáticas la estructura matemática derivada de la hipótesis del ángulo agudo que él levantó? (v. página 59)

4.-¿Qué condiciones se dieron, relacionadas con los eec que Gauss experimentó durante su práctica matemática, que le permitieron abrir su perspectiva hacia una nueva geometría, en la que la euclidiana era un caso límite? (v. página 71)

Parafraseando a Kline (2009) y retomando una idea compartida por distintos historiadores (como Bonola (1951) o Heath, (1956) se puede decir que una diferencia entre Saccheri y Gauss fue que, mientras el primero estuvo convencido de la verdad del V Postulado desde el inicio de su trabajo hasta su conclusión, y sus certezas no parecen haberse modificado a lo largo de sus investigaciones matemáticas, Gauss -en concomitancia con el avance de sus trabajos en el V Postulado y en la geometría no euclidiana-, fue transformando y ajustando su certeza inicial sobre ese postulado en una convicción compleja en torno a la posibilidad de una nueva geometría consistente y potencialmente aplicable al mundo físico, en el que la euclidiana era solo un caso límite. En este trabajo se argumenta que la diferencia entre la ‘resolución’ que Saccheri ofreció al problema del V Postulado y la que ofreció Gauss está en una buena parte relacionada con la manera en la que ambos matemáticos manejaron o gestionaron sus eec. En este capítulo se desarrolla esta idea y se sustenta este argumento, acudiendo a las trayectorias de los eec que se identificaron en los episodios analizados protagonizados por Saccheri y Gauss, y posteriormente en el capítulo V, recurriendo al Meec.

En el capítulo V se responde:

5.-¿Cuáles son las condiciones, en el contexto escolar, bajo las cuales los eec inciden positivamente en el progreso de las competencias matemáticas?

En el caso de L, se deja ver que en su tercera y cuarta participaciones la alumna mostró avances en su competencia de la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad. Específicamente, en la tercera participación la estudiante mostró un avance en su competencia procedimental respecto de una segunda, porque corrigió errores al realizar operaciones. Sin embargo, en la cuarta participación, mostró un avance adicional al corregir una regla incorrecta que ella enunció desde su segunda y aplicó en una tercera. Se argumenta que la duda mostrada por L en las participaciones tercera y cuarta con respecto a la resolución que ella publicó en la tercera, puede explicar dichos avances. En primera instancia, porque la duda que la estudiante experimentó en ambas participaciones se asoció a un resultado incorrecto por razones matemáticas y porque las respuestas de la alumna para resolver dicha insatisfacción (básicamente repetir el ejercicio) se dirigieron a cumplir objetivos correctos. En suma, se argumenta que una primera condición para que la duda mostrada por L en las participaciones tercera y cuarta, coadyuvara a un avance en la competencia es que dicha duda estaba bien calibrada. Sin embargo, para explicar el avance adicional que la alumna mostró en su cuarta participación se argumenta que la diferencia radica en la forma en que la estudiante manejó ese eec de duda en la tercera y cuarta participaciones.

4.2 SOBRE LAS NECESIDADES DE SEGURIDAD EN LA VERACIDAD DE LOS HECHOS DE LAS MATEMÁTICAS (H)

Los seres humanos de todas las épocas han experimentado -sostiene Fischbein (p. 8, 1987)- una inminente y casi instintiva necesidad de certeza. Esto se debe, dice el autor (1987, p.12), a que sin un mínimo de soportes o ‘piedras’ que parezcan absolutamente seguras bajo nuestros pies, ningún comportamiento práctico o intelectual sería posible. Sin embargo, para sobrevivir con bienestar, ese comportamiento, orientado por los hitos a los que se asocia seguridad, debe poder concordar y avenirse a una realidad dada (Fischbein, p.7, 1987).

De modo que las personas necesitan estar seguras de algunas de sus afirmaciones, porque esas afirmaciones orientan sus acciones, tanto las prácticas como las mentales, de acuerdo con lo que sostiene Fischbein. Pero, para fines de su equilibrio psicofísico, esas afirmaciones deben concordar o tener un respaldo en un referente empírico o cultural; no sería adecuado para la sobrevivencia actuar conforme a afirmaciones "discordes con la realidad". Por ejemplo, si una persona está segura de que un terreno es firme, ella actuará de acuerdo con esa afirmación y se desplazará sobre él. Pero si la afirmación es falsa y en realidad el terreno está accidentado, la persona podría caer y lastimarse, lo cual no sería adecuado para su bienestar físico y emocional.

En el ámbito de las matemáticas los profesionales de la disciplina sienten y han sentido la necesidad de experimentar seguridad de que sus afirmaciones de contenido matemático (hechos de las matemáticas H que surgen en su práctica, e. g., postulados, axiomas y teoremas) se ajustan a criterios de orden empírico -e. g., de 'concordancia' con la realidad física-, o a parámetros de rigor lógico establecidos culturalmente.

Por ejemplo, con relación a los axiomas de la geometría euclidiana, "los matemáticos tuvieron la necesidad de estar seguros, de verificar formalmente que realmente esa geometría estaba basada en proposiciones verdaderas, debido a que sus axiomas hacen referencia a hechos básicos acerca del espacio físico, y grandes ramas de las matemáticas y de las ciencias físicas usaban y siguen utilizando las propiedades de esa geometría" (Kline, 1972). En este documento se deja ver cómo Saccheri y Gauss atendieron esa necesidad, cada uno a su manera y entender, y cómo desde su perspectiva creyeron solventarla.

En el Meec se hace referencia a esa necesidad como la “necesidad de seguridad en la veracidad de H”, misma que se puede considerar como una necesidad epistémica, ya que se relaciona directamente con el conocimiento.

En la matemática escolar, los agentes de clase (alumnos y profesores) también experimentan necesidades de seguridad epistémica en torno a distintos hechos de las matemáticas H que surgen durante su práctica matemática. Ellos sienten necesidad de asegurarse de que el resultado de su ejercicio es el correcto o el esperado (por el profesor, por ejemplo); que es válida la forma de aplicar el algoritmo que utilizaron; que el algoritmo mismo es válido; que las estrategias que emplearon al resolver la tarea propuesta en clase es pertinente y lleva a resultados verdaderos; que las ideas que tienen sobre conceptos matemáticos (como proporcionalidad o límite) se adecúan a lo que se establece en la matemática; que las razones que ofrecieron son válidas y suficientes para afirmar una conclusión, entre muchas otras necesidades de seguridad en la verdad, validez o corrección en torno a contenidos matemáticos que surgen durante la práctica matemática. Esto se puede observar en el caso de L. Como se verá en el análisis que se expone en el Capítulo siguiente, en sus intervenciones ella da señales claras de que tiene necesidades de seguridad epistémica de que sus ejercicios sean correctos, o que se ajustan a lo esperado por ella o por el tutor, al explicitar las acciones mediante las cuales las intenta cubrir y cómo, de acuerdo con su dicho, ella lo consigue.

4.3 UNA RED GEOMÉTRICO FILOSÓFICA. PRELIMINARES (a)[3]

“Desde el 300 a. C. hasta el 1800 de nuestra era, la confianza en la geometría euclidiana como idealización correcta del espacio físico permaneció firme” (Kline, 1972, p. 1137). Durante

---

[3] Estas literales harán referencia a los componentes de la trayectoria de los eec que dejó ver Saccheri en un episodio de su participación en el problema del postulado de las paralelas de la geometría euclidiana, que es el que aquí se analiza.

este largo período de la cultura occidental, los matemáticos y la comunidad científica en general compartieron la certeza de que la geometría era necesariamente el modelo del espacio físico y creyeron que ofrecía, de manera exclusiva, la opción ideal del conocimiento de la naturaleza del espacio. Estas convicciones que permanecieron inamovibles se mantuvieron a través de hábitos de pensamiento que se fueron solidificando a lo largo de los siglos; así lo plantea Kline: “Los matemáticos se creían poseedores de la geometría verdadera y no podían romper lo que nosotros ahora vemos como un hábito de pensamiento” (Kline, 2009, p. 570). “Estaba tan inculcada en la mente de las personas la idea de que la geometría era una ciencia de las verdades absolutas y necesarias del espacio que cualquier idea contraria era refutada” (Kline, 2009, 564).

Esta fusión de concepciones ontológicas y epistemológicas (que Gauss llamó ‘metafísicas’), nucleadas en torno a los contenidos matemáticos de *Los Elementos* y sus reglas lógicas, configuraron una red geométrico filosófica (red g-f) que los griegos heredaron a la matemática occidental; esta red o malla conceptual prevaleció prácticamente incuestionable e intocada en la cultura matemática por más de dos milenios.

En esa red se pueden distinguir componentes matemáticos y componentes filosóficos.

Con relación a los componentes matemáticos, en esa red f-g se incluía:

- Un conjunto de postulados, axiomas y teoremas que integran la geometría contenida en *Los Elementos*. Este conjunto de contenidos geométricos, integrados en una estructura axiomático-deductiva, no tenía precedentes en la historia.
- Un conjunto de reglas lógicas que le daban forma y organización a la estructura deductiva de la obra. Algunas de esas reglas estaban asentadas en los axiomas y muchas otras se asumían sólo implícitamente. Sobre estas reglas se basaban los criterios de rigor de la disciplina.

- Un conjunto de caracterizaciones o precisiones sobre los objetos geométricos. Para estas caracterizaciones Euclides, siguiendo quizás las doctrinas aristotélicas de lo que es una ciencia deductiva, incluyó en su obra un conjunto de definiciones. Entre ellas están la definición de línea y la de línea recta. Dada la relevancia que estas definiciones tienen para el argumento que en este escrito se pretende desarrollar -debido a que el problema del V Postulado tiene como trasfondo principal una idea específica de recta- en lo que sigue se hacen algunos comentarios sobre ellas.

En la segunda definición de *Los Elementos*, Euclides caracteriza a la línea como "longitud sin anchura". Aunque se desconoce el origen, posiblemente esta definición fue retomada de la escuela platónica, ya que Aristóteles la menciona en relación con esta corriente (Tópicos, VI, v, 143b) (tomado de Rigo, 1989, p.68).

En la cuarta definición, Euclides caracteriza a la línea recta como aquella "línea … que yace por igual sobre sus puntos".[4] Rigo (1989) supone un origen aristotélico de esta definición.

Estas definiciones son oscuras y carecen de significado (Kline, 2009, p. 567). Porque sin una caracterización precisa de longitud y anchura no se comprende el significado de línea; sin una clarificación de lo que es 'yacer por igual sobre sus puntos' la definición de recta es incomprensible.

Kline argumenta que las nociones o ideas sobre la recta que en rigor se pueden desprender de *Los Elementos,* las que realmente subyacen a la geometría euclidiana, no provienen de las definiciones que aparecen explícitamente en Los Elementos, sino de las que se

[4] La definición no sólo es oscura en su significado sino también en su origen. Jones supone un origen Aristotélico. Rigo (1989) lo ratifica y supone además que porviene de las *Categorías* de Aristóteles. Si es así, otra posible traducción de la definición podría ser: línea recta es aquella donde ninguno de sus puntos sobresale de los otros. No obstante, esto es sólo una hipótesis plausible.

encuentran implícitas en los Postulados y en los teoremas. Y la idea física de recta que satisface esos postulados y teoremas es la de recta como borde de una regla o como una cuerda estirada, idea que proviene de los egipcios y los babilonios y que resulta muy natural para las personas cuyas experiencias están limitadas a partes muy restringidas y pequeñas de la superficie de la tierra (Kline, 2009, 570).

A esta intuición de recta acostumbró Euclides a sus sucesores, a esta intuición los condicionó durante siglos. De acuerdo con ello, lo que resultaba 'natural', intuitivo, verdadero, era la noción de recta que se ajustaba a ese modelo físico. Cualquier noción de recta que no concordara con esa noción, resultaba contra-intuitiva y por tanto inaceptable. Esta caracterización de recta, aunque fuera implícita, contenía un esencialismo que estaba en línea con las ideas de Aristóteles, para quien las definiciones hacen referencia "a la naturaleza esencial de las cosas" (Analítica Posterior, II, 10, 94ª) (Rigo, 1989, p. 67).

Lo previamente dicho y los posibles orígenes filosóficos de las definiciones euclidianas muestran una muy probable influencia de Aristóteles y Platón en la hechura de la geometría de Euclides. Esto lleva al segundo componente de la red g-f.

- Componente filosófico

El segundo componente de la red es de corte filosófico. La influencia de la filosofía sobre la obra euclidiana no quedó sólo en las definiciones. De acuerdo con lo que se comentó al inicio, alrededor de la obra euclidiana se elaboró una red de conceptualizaciones ontológicas y epistemológicas que a lo largo de la historia la comunidad de científicos y filósofos las asumió como certezas que no requerían justificación alguna.

Esta malla conceptual, que ofrecía formas inequívocas de significar la obra euclidiana, se nutrió de la filosofía griega (básicamente de la que imperó en la época clásica), tanto para el caso directo de la elaboración de la obra matemática de Euclides (como ya se mostró), como para las conceptualizaciones de carácter ontológico, lógico y epistemológico, sirviéndole de soporte teórico.

Consideraban los griegos que la naturaleza estaba diseñada de manera racional y matemática. Y, siguiendo a Platón, tenían la seguridad de que la razón humana podía revelar esa estructura matemática del universo. Ellos, así, basaban sus doctrinas apelando a la racionalidad más que a la verificación empírica (sobre todo en la Grecia clásica, con excepción de Aristóteles): creían que las verdades pueden ser encontradas a través de la exploración de la mente en lugar de explorar el mundo físico. Guardaban, en suma, recelo frente a la observación y a la experimentación; tenían incluso la convicción de que representaba un camino innecesario hacia el conocimiento[5]. Basados en la creencia de que las verdades provenían de la mente consideraban que esas verdades eran innatas y meramente sugeridas por la experiencia e inmediatamente reconocidas por la mente como auto-evidentes. De modo que los principios en los que se basaba la geometría -axiomas, postulados y teoremas- estaban garantizados por los procesos del pensamiento; eran para ellos verdades innatas y por tanto independientes de la experiencia (Cfr. Kline, 1972).

A través de esta red se garantizaba no solo su aplicabilidad al espacio físico sino su carácter de ciencia única e ideal del espacio y de las propiedades geométricas de los objetos físicos; se garantizaba no solo la veracidad de la geometría euclidiana, sino su necesidad. "Y es que la idea de que la geometría euclidiana es la geometría del espacio físico, de que representa la

---

[5] Kline observa que las propias doctrinas de Platón eran en este sentido extremas. Para él, la realidad no se podía encontrar en el mundo físico sino en un sistema de ideas y en un plan ideal del universo que Dios mismo había creado. El mundo visible y sensible era sólo una realización vaga e imperfecta de estas ideas. A diferencia de los pitagóricos, Platón no deseaba comprehender el mundo físico a través de las matemáticas, sino que buscaba comprehender el plan matemático mismo, que la observación y el mundo físico sólo lo sugerían imperfectamente (Kline, 1985, p. 173)

verdad acerca del espacio estaba tan arraigada en la mente de las personas que cualquier pensamiento contrario era refutado” (Kline, 2009, p.564). La geometría era, así, un conjunto de deducciones lógicas, de las que se desprendían verdades necesarias, al provenir de verdades intuitivas o auto-evidentes acerca de propiedades de figuras geométricas.

Estas ideas, notables (desde nuestro punto de vista actual), sobre la verdad en la geometría estaban respaldadas en un conjunto de consideraciones de tipo lógico, ontológico y epistemológico.

En primera instancia estaba el supuesto epistemológico de que existen afirmaciones sobre el espacio físico cuya correspondencia con ese referente puede reconocerse inmediatamente. Kline (2009, p. 505) así lo describe: “Los griegos creían que las inteligencias humanas reconocían inmediatamente algunas verdades sobre las propiedades geométricas de los objetos físicos y del espacio, incluso fuera de la experiencia. Por eso les parecía indudable que dos puntos determinaran una y sólo una recta”. A algunas de las afirmaciones que cumplían con esas características de verdades auto-evidentes, Euclides les dio el estatus de postulados de la geometría.

En segunda instancia, en ese marco conceptual se suponía que las afirmaciones que son consecuencia lógica de los postulados son verdades necesarias que hacen referencia al espacio físico. A esas afirmaciones se les dio el estatus de teoremas (Kline, 2009, p. 506).

Se sostenía, en tercera instancia, que para que una proposición sobre el espacio físico se aceptara como una verdad autoevidente o necesaria -y para satisfacer así la necesidad de seguridad epistémica en torno a esa proposición- era necesario alcanzar el objetivo de otorgarle formalmente el estatus lógico de postulado o de teorema.

El acuerdo observado entre el cuerpo de la geometría euclidiana y la experiencia a través de las obras de ingeniería, por ejemplo, fue otra vía que les reforzó su certeza de que los axiomas eran verdaderos (cfr. Kline, 2009, p. 573).

4.4 EL PROBLEMA DEL V POSTULADO

Con excepción del V, los postulados que Euclides introduce en *Los Elementos* tienen todos la propiedad de ser auto-evidentes; poseen una verdad que resulta incontestable. Esto es así para todos excepto para el que hace referencia a las paralelas, y es que el V Postulado se compromete con un comportamiento de las rectas en el infinito, fuera del alcance de las ‘intuiciones euclidianas’ de la recta; fuera del alcance de la verificación empírica **(b)**.

Es cierto que en el Postulado V, Euclides solo establece condiciones para que dos rectas se encuentren en el plano de lo finito; él así lo enuncia:

> Si una línea recta que cae sobre otras dos líneas rectas forman ángulos interiores sobre el mismo lado menores que dos rectos, si se producen indefinidamente las dos líneas rectas se encontrarán en el lado en el que los ángulos son menores que dos rectos (Heath, 1956, p. 202).

No obstante, Euclides posteriormente se refiere al caso en el que la suma de los ángulos interiores es 180°; surgen entonces las rectas paralelas. Aunque ya antes, en su definición 23 del libro I, las había caracterizado: “líneas rectas paralelas son aquellas que, estando en el mismo plano y siendo producidas indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran” (Heath, 1956, 190). De hecho, en toda la obra euclidiana las únicas rectas que es necesario prolongar indefinidamente son las rectas paralelas; en estas rectas se apela a comportamientos en el infinito potencial o en el infinito actual (Rigo, 1989), a diferencia de los segmentos de recta (finitos) que aparecen en el resto de la obra euclidiana. Por esta referencia a un comportamiento fuera de lo finito, imposible de verificar experimentalmente, la definición de las rectas paralelas no gozaba de la misma carga de verdad o evidencia que el resto de las proposiciones geométricas, dificultad que por supuesto heredó al quinto postulado. No era, como el resto, una afirmación 'inmediatamente convincente acerca de propiedades del espacio' (Kline, 2009, p. 555).

Sin embargo, afirma Kline (2009, p.555), ni Euclides ni ningún matemático hasta el siglo XIX dudó de la verdad de este postulado (o axioma XI, como se le acomoda en reorganizaciones posteriores de *Los Elementos*). Lo que molestaba era que, como ya se explicó, carecía de la calidad de auto-evidencia que sí compartían los otros postulados.

Así que la necesidad de verdad en el V estaba ya garantizada (ontológicamente); y es que, como ya se comentó, durante 2000 años el mundo intelectual comprometido con la cultura occidental aceptó la doctrina griega de que los postulados de la geometría euclidiana, incluido el V, eran verdades sobre el mundo físico, verdades tan claras y evidentes que nadie en su sano juicio se pondría a cuestionarlas" (Kline, 2009, p. 506).

A su vez, esto dejaba al descubierto una necesidad de seguridad epistémica no satisfecha: la de darle al V postulado un estatus formal dentro de la geometría euclidiana **(b)**; y dejaba claro también que esa necesidad era solo de tipo formal; es decir, lo que quedaba pendiente era sólo garantizar la veracidad del V postulado de acuerdo con las reglas lógicas **(b)**. Por lo antes dicho, para ello era suficiente conseguir el objetivo de deducirlo como un teorema o de enunciar una proposición equivalente, ésta sí auto-evidente, e incluirla como axioma.

Sin embargo, había un cierto inconveniente; resulta que esa necesidad formal de probar la verdad del V postulado estaba atada a los compromisos ontológicos y epistemológicos de la red g-f, entre otros, relacionados con la verdad de la ciencia y con los alcances del conocimiento matemático: "Y es que de la idea de que la geometría euclidiana representa la verdad acerca del espacio físico … se desprendía la creencia de que las matemáticas ofrecen verdades incontestables sobre el mundo físico. Tan era así, que esta creencia se mantuvo firme hasta antes del surgimiento de las geometrías no euclidianas (Kline, 2009, p. 573). Desde esta perspectiva, la verdad del V postulado se tenía que demostrar formalmente. O dicho de otro modo; desde esa circunstancia, quizás los matemáticos sintieron que no tenían muchas opciones, porque la necesidad de esa prueba no era sólo del orden matemático; tocaba certezas de la filosofía de las ciencias de las cuales la comunidad científica, entre ella la de los matemáticos, no parecía estar dispuesta a renunciar **(b)**.

Los trabajos que sobre el V Postulado se comenzaron a realizar desde los tiempos de Euclides y todavía hasta finales del siglo XVIII, se produjeron asumiendo las ideas reivindicadas y promovidas en la red f-g. Aceptaban, en consecuencia, la creencia de que el V era verdadero y de que era del todo posible probarlo a partir de la geometría absoluta o de que era posible formular un enunciado equivalente, pero auto-evidente. Prueba fehaciente de esta credibilidad fueron los considerables intentos que ellos dedicaron a concretar este objetivo. Pero las necesidades no satisfechas … ¿no habrán despertado en la comunidad algún resquicio de duda? ¿Y esos intentos no habrán sido también prueba o resultado de esos pequeños resquicios de duda? (desde el punto de vista de este escrito se considera que así fue, aunque se carece de evidencias).

4.5 SACCHERI: EL DESCONCIERTO ANTE LO INESPERADO. MICROANÁLISIS

Entre los muchos matemáticos que encararon el problema de asegurar matemáticamente la verdad del postulado (o axioma) de las paralelas está Saccheri. Como el resto de sus colegas, Saccheri compartía la certeza en la veracidad del V y de que la geometría euclidiana era la única ciencia posible para describir el espacio físico **(d)**; de esas convicciones se desprendía naturalmente la certeza en la posibilidad de demostrarlo **(e)**. Pero muy probablemente Saccheri también compartía con sus colegas un cierto resquicio duda, que se desprendía de una necesidad no satisfecha, de acuerdo con lo que se ha dicho. Como se verá en lo que sigue (y en el apartado sobre gestión de eec, donde se profundiza en este punto), Saccheri desarrolló su trabajo disciplinar guiado y movido por esas certezas **(e)** y muy probablemente también, por esos resquicios de duda.

Como ninguno que le precedió en el intento, él se propuso hacer una prueba por reducción al absurdo **(f)**. Dicho en términos generales, él supuso la negación del V (con la expectativa firme de que era del todo posible derivar de ello una contradicción **(e)**).

(g) Para formular su hipótesis, él tomó un cuadrilátero plano ABCD, con dos lados opuestos de lo cuales AC, BD son iguales y perpendiculares a un tercero AB. Entonces se prueba que los ángulos en C y D son iguales. En la hipótesis euclidiana (equivalente al V Postulado) esos ángulos son rectos; pero dichos ángulos pueden ser agudos o bien, obtusos. A estas tres posibilidades Saccheri les llamó la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo agudo y la hipótesis del ángulo obtuso. Saccheri pensaba -siguiendo las reglas de la lógica formal- que el V Postulado estaría demostrado si de las dos últimas hipótesis se derivaba alguna contradicción (Heath, 1956). Ese era el objetivo por alcanzar **(f)**.

Saccheri derivó una contradicción para el caso de la hipótesis del ángulo obtuso[6], lo que le permitió descartarla.

Pero la eliminación de la hipótesis del ángulo agudo representó para él severas complicaciones. Si bien de esa hipótesis él no pudo derivar una contradicción lógica como tal, sí dedujo una cadena de resultados que él juzgó como "repugnantes a la naturaleza de la línea

---

[6] La contradicción surgió al interpretar el II Postulado de la geometría euclidiana en el sentido de que las líneas rectas tienen longitud infinita. Es interesante que la geometría de Riemann se basa justo en la hipótesis del ángulo obtuso -o en la versión del V Postulado de Playfair, que no existe ninguna recta paralela a una dada y que pasa por un punto dado fuera de ella- pero para evitar contradicciones lo que hace es considerar sólo rectas finitas.

recta"[7]. Saccheri forzó su razonamiento e interpretó esos resultados como contradictorios. Eso era todo lo que necesitaba: de ello derivó la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo y de ahí saltó a lo que quería demostrar, la verdad del V Postulado. Con el objetivo considerado como cubierto **(h)**, Saccheri seguramente experimentó una gran convicción en los resultados obtenidos con su trabajo **(i)** (¿y quizás entonces pudo desterrar la duda?). Esa convicción posiblemente le reafirmó la idea de que la única opción posible para el V postulado era la correspondiente al ángulo recto y, en consecuencia, que la única geometría concebible era la postulada en *Los Elementos* **(j)**.

Las acciones que Saccheri emprendió a partir de lo anterior fueron la consecuencia natural de sus convicciones y decisiones previas; éstas lo llevaron a la única opción posible y congruente: desechar su trabajo derivado de la hipótesis del ángulo obtuso y la del ángulo agudo **(k)**. Como testimonio de sus convicciones inamovibles **(i)** queda para la historia el contenido, pero también, el título de su trabajo: *Euclides reivindicado de todo defecto.*

Como se dijo, las literales que en los párrafos precedentes se resaltaron en negritas hacen referencia a los componentes de la trayectoria de los eec que se identificó en el episodio relacionado con (el intento de) demostración del V postulado protagonizado por Saccheri. En la Tabla 1 se detallan esos componentes; en la columna izquierda aparece la descripción genérica de los componentes de la trayectoria de los eec y en la derecha se hace referencia al segmento del episodio analizado donde aparecen esos componentes.

---

[7] Uno de los resultados derivados de la hipótesis del ángulo agudo, que a Saccheri le pareció repugnante y contrario a la naturaleza de la línea recta, es que se pueden construir dos rectas paralelas distintas que tendrían una perpendicular común en el punto del infinito. Una geometría basada en la hipótesis del ángulo agudo fue formalizada a principios del siglo XIX, de manera independiente por varios matemáticos, entre ellos, Carl Friedrich Gauss como se verá en el siguiente apartado, Nikolái Lobachevski, János Bolyai y Ferdinand Schweickard.

Si bien al final del Capítulo, en el apartado sobre la exposición del Meec, se explican con más detalle los componentes de las trayectorias de los eec y se da cuenta de cómo están articuladas (esto aplica para el caso de Saccheri, pero también para los episodios de Gauss que se analizan en otros apartados de este Capítulo), por ahora se da una explicación somera. En la trayectoria se partió de un conjunto de resultados matemáticos y supuestos filosóficos, en los que se incluyen eec. Desde este marco se planteó una problemática general, en la que estaba implicado un problema de verdad, el del V Postulado. Esto dejó al descubierto el hecho de que una necesidad de seguridad en la verdad de ese postulado no estaba satisfecha y planteó el requerimiento de que se le atendiera considerando no sólo necesidades de las matemáticas sino también las de la filosofía de las ciencias. Estos componentes forman los antecedentes que configuraron eec específicos en Saccheri; de esos antecedentes Saccheri retomó ciertas ideas en forma de certezas e implícitamente eec de duda (si no la hubiera habido, no hubiera dedicado tanto esfuerzo a intentar demostrar formalmente el V). Esas certezas (y dudas) configuran en Saccheri un marco interpretativo a partir del cual él interpretó la problemática planteada y las necesidades asociadas. Con base en ello planeó los objetivos que le llevarían a atender esas necesidades y por supuesto, a resolver el problema matemático. Ese encuadre también le generó ciertas expectativas. Él se planteó entonces llevar a la práctica los objetivos específicos, y desarrolló su trabajo matemático de acuerdo con ellos. Una vez concluidos esos trabajos valoró como alcanzados los objetivos propuestos, y por tanto, satisfechas sus necesidades de seguridad epistémica. A partir de eso parece que él experimentó un eec de confianza (en la geometría euclidiana) (¿eliminando la duda?). De nueva cuenta, estos eec le generaron un marco interpretativo de lo cual desprendió decisiones y acciones posteriores (entre otras, desechar su trabajo).

	Descripción genérica de los componentes de la trayectoria de los eec	Descripción de los componentes de la trayectoria de los eec que Saccheri implícitamente deja ver en el episodio de los intentos de demostración del V postulado
(a)	Preliminares generales (contenido matemático; filosofía geométrica; eec relativos)	
(b)	Necesidad de seguridad formal en la verdad del V no está satisfecha. Se plantean atender necesidades de seguridad epistémica matemática y filosófica	La necesidad de seguridad formal en la verdad del V no está satisfecha. Se plantea que ésta se resuelva considerando distintas necesidades: Matemáticas: asegurar matemáticamente la verdad del V. Filosóficas: ratificar y fortalecer la seguridad en certezas sobre la filosofía de la ciencia: sobre la verdad en la geometría euclidiana, su exclusividad como ciencia del espacio, y sobre la verdad en las matemáticas, entre otras. Fundamentar la geometría
(c)	Problemática general	El V posee una calidad de verdad distinta al resto de los postulados. Se plantea la problemática de construir, en el marco de la geometría euclidiana, una teoría de las paralelas que incluya al V (como teorema o como postulado a través de algún enunciado equivalente).
(d)	Eec específicos que se desprenden de lo anterior (provenientes de los antecedentes)	Saccheri comparte a, b, c; a partir de esto, tiene certeza de: Verdad en el V postulado Que la geometría euclidiana es la única posibilidad para describir el espacio. Paralelamente se aprecia un estado de duda en Saccheri que comparte con sus pares (si no hubiera habido duda, la comunidad no hubiera hecho tantos intentos por demostrar formalmente el V).
(e)	Los eec generan un marco interpretativo (encuadre) a partir del cual la persona interpreta y comprende la problemática y las necesidades. Con base en ese marco la persona planea los objetivos que cree que le permitirán preservar o satisfacer las necesidades y atender el problema matemático; crea expectativas.	A partir de sus certezas, Saccheri concluye que el V es demostrable (es impensable que el V no se pueda demostrar). A partir de sus dudas, planea dedicar sus esfuerzos a demostrar formalmente el V. Plantea una estrategia de prueba y genera expectativas.
(f)	Objetivos para satisfacer necesidades (surgidos en antecedentes)	Derivar de la geometría absoluta el V postulado, a partir de una reducción al absurdo. Demostrar que de la negación del V se deduce una contradicción.
(g)	Desarrollo de trabajos matemáticos (se derivan de lo anterior)	Trabajo con los cuadriláteros sobre tres hipótesis (ángulo agudo, recto, obtuso). De la negación de la hipótesis del ángulo recto deriva resultados distintos e inesperados; Saccheri los califica como 'repugnantes a la naturaleza de la

		recta' que interpreta como una contradicción. De ahí desprendió que la única opción posible es la hipótesis del ángulo agudo y que la geometría euclidiana es la única ciencia del espacio.
(h)	Valoración de objetivos y de necesidades (asociados a trabajos realizados en g)	Considera que alcanzó los objetivos, y entonces las necesidades de fundamentar la geometría euclidiana están satisfechas
(i)	Eec que surgen de la valoración de objetivos y necesidades (asociados a trabajos realizados en g)	Confianza en la geometría euclidiana (¡parece desechar la duda!)
(j)	Marco interpretativo (encuadre) derivado de los eec a partir del cual la persona interpreta y comprende la problemática y las necesidades. Con base en ese marco la persona planea los objetivos que cree que le permitirán satisfacer o preservar las necesidades y atender el problema matemático; crea expectativas.	La geometría euclidiana es la única ciencia del espacio. No hay cabida para considerar otras opciones
(k)	Acciones que se desprenden de lo anterior o Desarrollo de trabajos matemáticos	Desechar todo el trabajo matemático realizado sobre la hipótesis del ángulo agudo y la del ángulo obtuso.

Tabla 1. Trayectoria de los eec identificada en el episodio del intento de demostración del V postulado por parte de Saccheri

4.6 GESTIÓN DE LOS EEC EN SACCHERI: UN MANEJO ESCASAMENTE REFLEXIVO DE SUS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO

El propósito central del apartado es aportar evidencias de que la manera en la que Saccheri gestionó sus eec tuvo una influencia significativa sobre algunos de los tropiezos que él tuvo como profesional de la disciplina, en cuanto a la aplicación de las reglas del rigor matemático y el haber desechado un trabajo geométrico que tenía un valor disciplinar.

4.6.1 Algunos aspectos de la trayectoria de los eec sobre los que es preciso profundizar

En la trayectoria antes expuesta hay dos huecos que se deben explicar, porque están directamente relacionados con el tema del presente apartado.

Un punto está relacionado con las expectativas que Saccheri se creó, en torno de que era del todo posible derivar el V postulado. Una explicación factible está relacionada con que esas expectativas se desprendieron de sus certezas iniciales, de que la geometría euclidiana era la única ciencia del espacio (no se ve que su posible duda haya jugado algún papel central en esto).

Otro punto tiene que ver con el segmento de episodio en el que Saccheri interpretó como contradictorios los resultados que él calificó como 'repugnantes'. En primera instancia, esa interpretación pudo provenir de una certeza de que las únicas intuiciones aceptables sobre la recta son las que son coherentes con la geometría euclidiana y de que cualquier otra idea de recta es física y lógicamente imposible (como se dijo, ésta era una creencia arraigada en los geómetras). La interpretación de Saccheri muy probablemente también tiene relación con las otras certezas que él venía sosteniendo: la verdad del V, la exclusividad de la geometría como ciencia del espacio. Y adicionalmente, es factible pensar que esa interpretación también buscaba honrar los compromisos que se derivaban de las necesidades planteadas desde la filosofía de la ciencia. Todo esto quizás formó un encuadre a partir del cual él generó sus comprensiones de los hechos matemáticos que tenía enfrente y tomó decisiones.

Hay varios aspectos muy interesantes a resaltar en este caso. Uno es que Saccheri tomó resoluciones matemáticas guiado por esas certezas extra-matemáticas, y no por criterios de rigor de la disciplina; privilegió las consideraciones extra matemáticas sobre los criterios de rigor matemáticos. Otro asunto está relacionado con las necesidades que estaban en juego y que se trataban de atender; pareciera que él puso por encima las necesidades de corte filosófico sobre las de rigor matemático. Y otro aspecto está relacionado con la posible duda que Saccheri experimentó durante el episodio. Las evidencias indican que él no escuchó lo que quizás le estaba diciendo su duda… parece que esa duda siempre estuvo relegada a un segundo plano y que la tendencia de Saccheri era más bien a desecharla de la geometría como algo indeseable…

Hemos visto entonces que sus certezas influyeron en su trabajo matemático. De esto se desprende una pregunta natural:

¿Qué condiciones se dieron, relativas a los eec que Saccheri experimentó durante su práctica matemática, que le llevaron a desechar de las matemáticas la estructura matemática derivada de la hipótesis del ángulo agudo que él levantó?

4.6.2 Saccheri: una 'gestión reactiva' de sus eec

La pregunta está directamente relacionada con la forma en la que Saccheri gestionó sus eec.

En sus trabajos parece que Saccheri:

No tomó conciencia de los eec que estaba experimentando (ni de sus certezas ni de sus dudas);

No reflexionó sobre lo que le decían sus certezas pero tampoco advirtió lo que le podrían haber dicho sus dudas;

No tomó conciencia de las necesidades que había que atender; no separó las necesidades de distintos órdenes (las matemáticas de las filosóficas);

No se dio cuenta de que privilegió los compromisos filosóficos sobre los criterios de rigor matemático, y no se dio cuenta tampoco de cómo esos compromisos filosóficos le impidieron razonar con objetividad y de manera estrictamente matemática.

No se detuvo a pensar sobre la influencia de sus certezas sobre sus decisiones matemáticas, incluso al punto de llevarlo a un estado de 'descalibración' (al desatender criterios de rigor básicos). No se percató que sus certezas extra-matemáticas lo llevaron a contravenir sus propias reglas como matemático y le impidieron hacer una lectura cuidadosa y reflexiva de sus resultados matemáticos.

No deliberó sobre los criterios que tomó en cuenta para valorar como logrados los objetivos alcanzados.

Saccheri tampoco se percató de las consecuencias que esas certezas tuvieron para su propio trabajo: como ningún otro matemático que le precedió, Saccheri construyó una estructura matemática basada en el análisis sistemático de todas las alternativas posibles del postulado de las paralelas; de hecho, construyó parte de la geometría hiperbólica como resultado de una serendipia; pero la fidelidad a sus certezas filosóficas le señaló como única opción el demolerla. Tristemente, esas fueron las acciones que se derivaron de su convicción.

El análisis aquí expuesto coincide en todo con la lectura que distintos historiadores han hecho de este pasaje de Saccheri. Heath afirma que "(este matemático) fue víctima de la noción preconcebida de su tiempo, de que la única geometría posible era la euclidiana" (p. 211, 1956). Y Kline sostiene que Saccheri, "al extraer la conclusión de que la afirmación de Euclides sobre las paralelas era consecuencia necesaria de los otros nueve axiomas, solo consiguió mostrar que cuando alguien se pone a establecer algo de lo que ya está convencido, por lo menos a sí mismo se satisfará, aunque su demostración no concuerde con los hechos" (Kline, 2009, p. 508).

Para caracterizar la forma en la que Saccheri gestionó sus eec se introduce en esta investigación una definición. En este escrito se dice que una persona 'gestiona de manera reactiva sus eec' cuando no toma conciencia de sus eec; no reflexiona sobre ellos y sobre las necesidades a las que responden, no se percata de cómo le afectan en su toma de decisiones matemáticas y se deja llevar, en automático, por lo que esos eec directamente le informan, sin deliberación alguna.

Esa forma de manejar o gestionar sus eec tuvo consecuencias sobre sus trabajos matemáticos. Porque le impidió percatarse de sus errores matemáticos; lo llevó a desechar su trabajo y no creó condiciones para flexibilizar su pensamiento, que le permitiera, entre otras cosas, tener una perspectiva más amplia de la geometría y de su propio trabajo.

4.7 PROPIEDADES DE LOS EEC

Por último, el episodio permite descubrir algunas propiedades de los eec. En la presentación del Meec se hará referencia a muchas de las propiedades que se pueden desprender de la trayectoria de los eec y de sus componentes, identificada en el episodio recién analizado. Pero aquí resaltan algunas propiedades específicas.

Que los estados de certeza (bajo condiciones de gestión reactiva), generan en automático cierta tendencia de acercamiento, apego o adhesión hacia el objeto de las certezas. Que los estados de duda (bajo condiciones de gestión reactiva), generan cierta tendencia de alejamiento, rechazo o resistencia hacia el objeto de la duda.

Que distintos eec pueden ir acompañados unos de otros y darse de manera sincrónica: esto se ve en el caso de Saccheri, quien experimentaba certeza en torno a la verdad del V, pero quizás cierta duda con respecto a su demostrabilidad formal.

Que la duda pude actuar como impulso o motor del trabajo matemático y las certezas como una brújula que lo orienta en la toma de decisiones.

4.8 GAUSS: UN EJEMPLO DE MANEJO REFLEXIVO E INTELIGENTE DE SUS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO

Ninguna rama de las matemáticas, ni siquiera un resultado específico, que sea notable, es obra de un individuo, sostiene Kline (1985, p. 99). Según su opinión, solo algunos pasos o afirmaciones decisivas pueden ser atribuidas a una sola persona.

Esto aplica, según el historiador, a la edificación de las geometrías no euclidianas. Si lo nuclear de esa obra está en el desarrollo de las consecuencias de un sistema de axiomas (o postulados[8]) que contiene una hipótesis alternativa al postulado de las paralelas de Euclides, entonces la mayor parte del mérito debe ser atribuido a Saccheri (y el propio Lambert lleva también su mérito). Sin embargo, desde la perspectiva de Kline, el hecho más importante en relación con las geometrías no euclídeas es la consideración de que pueden utilizarse para describir y modelar formalmente las propiedades del espacio físico tan precisamente como lo hace la geometría euclídea. Fue Gauss, en opinión de Kline, quien primero se dio cuenta de ello. En contraparte con Saccheri, quien creyó probar que el V Postulado de la geometría euclídea era la única opción admisible, fue Gauss quien tuvo una visión clara de una geometría independiente de ese postulado (Bonola, 1951, p.75); fue Gauss quien hizo una evaluación correcta del significado de esos desarrollos lógicos (Kline, 2009, p. 559); fue Gauss el primero en transformar las convicciones sobre este tema.

De acuerdo con la interpretación de Kline, entonces, una condición crucial para el progreso del trabajo de estos matemáticos -y consecuentemente, para el de las geometrías no euclidianas- fue el estado epistémico de convencimiento que ambos experimentaron.

En este escrito se está de acuerdo totalmente con esta interpretación. Pero en este trabajo se muestra adicionalmente, que lo que marca una diferencia radical entre Saccheri y Gauss y que determina los avances en el tema de las geometrías fue la manera en la que cada uno, a su propio entender, manejó y gestionó sus eec: uno, con una certeza incuestionable (en la geometría euclidiana como la única ciencia del espacio), que permaneció fija sin adecuarse a lo que le informaban sus trabajos matemáticos (como se acaba de ver); el otro, con una capacidad para

---

[8] En reorganizaciones de la geometría euclidiana el V Postulado se convirtió en el axioma XI.

construir y re-construir sus convicciones y sus dudas sobre la base de la reflexión sobre sus resultados matemáticos, así como sobre la base de la reflexión sobre esas dudas y sobre esas convicciones, como se verá en lo que sigue.

Concretamente, en esta parte del documento se hace un microanálisis de algunos escritos de Gauss (1777-1855), con la intención de descubrir cómo él fue construyendo esos nuevos significados asociados a la geometría euclidiana, y esas nuevas convicciones, que repercutían en la geometría naciente. Como se dijo anteriormente, en este documento interesa evidenciar que en la construcción de esos nuevos significados estuvieron implicados los eec que Gauss fue experimentando en torno a los resultados geométricos que iban surgiendo (sus dudas en torno a la demostrabilidad del V Postulado; sus convicciones en la geometría naciente no sólo por su consistencia lógica sino por la posibilidad de aplicarla al espacio físico), de acuerdo con la anterior interpretación de Kline (2009); pero sobre todo, en este escrito importa dejar constancia de la manera en la que él gestionó esos eec y del valor que esa gestión tuvo en la re-significación de la geometría y en las acciones que a partir de esas reflexiones Gauss llevó a cabo para continuar sus trabajos matemáticos. En este trabajo, en suma, se pretende aportar evidencias de que esa gestión que Gauss llevó a cabo sobre sus eec pudo haber sido una condición significativa que le permitió plantearse nuevas preguntas -fuera de la caja, fuera de la filosofía geométrica prevalente- e imaginar respuestas distintas a las ofrecidas por sus colegas.

El análisis se divide en dos partes correspondientes a dos episodios; éstos se centran en dos escritos de Gauss que son muy relevantes en la trayectoria de su pensamiento relativo al tema de la geometría y en el que muestra de manera explícita sus eec y las reflexiones que le suscitan. Un escrito corresponde al 1799 y el otro es del año 1824.

4.8.1 Primera Parte: primer episodio

4.8.1.1 Preliminares (a)[9]: sobre la red g-f prevaleciente (contenidos matemáticos; filosofía de la geometría; estados epistémicos relacionados)

El mundo intelectual de la transición del siglo, y particularmente la Alemania de Gauss, estuvo imbuida y dominada por las enseñanzas de la escuela kantiana y sus seguidores agrupados en la corriente neo-kantiana (Kline, 1972). "El complejo edificio de la filosofía crítica kantiana, a la vez sólido y sumamente delicado, tenía como pilares la geometría euclídea y la mecánica newtoniana". (Sholz, 2005). De modo que la red g-f que había abrevado básicamente de la filosofía griega tomó nuevos bríos con las propuestas epistemológicas y ontológicas de Kant[10]. Para Kant -según Sholz- los seres humanos, en tanto tales, compartimos formas de intuición para observar y percibir: estas formas de intuición son el espacio y el tiempo. Según Kant todos observamos entonces de manera análoga, pero además, esas formas son únicas, porque según el filósofo, el ser humano no puede percibir u observar de otra forma. El espacio y el tiempo son formas de intuición que vienen predeterminadas, que son a priori. Y como son a priori, no dependen de la experiencia, sino que son necesarias. Como el espacio es una forma de la intuición, hay una teoría matemática del espacio: la geometría. Y como el espacio es una forma a priori, nuestro conocimiento de la geometría no depende de la experiencia, sino que es puro y a la vez necesario (Sholz, 2005). En suma, la teoría kantiana "se asentaba en la convicción de que la geometría euclidiana y la física de Newton representaban un conocimiento definitivo, necesariamente verdadero, absoluto y a priori" (Sholz, 2005).

Se sabe que Gauss era un conocedor del pensamiento kantiano, pero también un adepto. Por lo menos así lo fue para el caso de la aritmética a lo largo de su carrera como científico

---

[9] (x) denota la entrada en la Tabla 2; ahí se despliegan los componentes de la trayectoria de los eec.
[10] Kant publica la *Crítica de la Razón Pura* en el 1781.

(hasta donde se tiene noticias), y quizás también durante un tiempo largo para el caso de la geometría (ver 7 en Tabla 3.1).

Durante su estancia en la Universidad de Gottinga, casi al cierre del siglo XVIII, Gauss estuvo al tanto de los vanos esfuerzos por deducir el postulado de las paralelas o por plantear una afirmación equivalente, ya que esto formaba parte de los temas de investigación que compartían profesores de esa Universidad. Entre ellos se encontraba Kastner, su maestro, quien estaba completamente familiarizado con el problema y con la historia de esos esfuerzos (Kline, 2009). Si bien se sabía ya en aquel entonces de las grandes dificultades para derivar ese Postulado, también se compartía la certeza de su veracidad.

4.8.1.2 Extracto

(2)[11] La primera noticia -por lo menos con la que se cuenta hoy en día- sobre las reflexiones de Gauss en torno a la geometría euclidiana y temas relacionadas con la teoría de las paralelas se da en forma de una carta que Gauss le envía a su amigo y colega Farkas Bolyai, el 16 de diciembre de 1799 (v. 2 en Tabla 3.1). Coincidió con Farkas Bolyai en Gottinga, y a lo largo de su vida mantuvo diversos intercambios con él sobre el tema que se trata en este escrito.

En la carta se lee:

> Lamento mucho no haber utilizado nuestra proximidad para aprender más sobre tu trabajo en torno a los primeros fundamentos de la geometría (**c**[12]). Ciertamente, me has ahorrado muchos esfuerzos inútiles **(c)** …. Yo mismo he avanzado mucho en mi trabajo **(g)**, pero el camino que he tomado no conduce tan bien a la meta que uno desea **(h)** y la que dices tú haber alcanzado, [la trayectoria que he recorrido] me ha lleva más bien a dudar de la verdad de la geometría **(i)**. Para estar seguro **(j)**, he encontrado muchas cosas que la mayoría ya considerarían como una prueba, pero que en mi opinión no demuestran NADA

[11] Los numerales que aparecen entre paréntesis corresponden a la enumeración que en la Tabla 3.1 se hace de las distintos registros escritos de Gauss (cartas, notas en su diario).

[12] Las letras que aparecen entre paréntesis hacen referencia a las entradas de la Tabla 2, y corresponden a los componentes de la trayectoria de los eec de Gauss en este pasaje.

> **(j, h)**. Por ejemplo, si uno pudiera probar la existencia de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que cualquiera dada **(k)**, entonces estaría en condiciones de probar la totalidad de la geometría de manera completamente estricta **(b)**. Pero incluso, si uno elimina los tres puntos finales de un triángulo en el espacio, el área siempre estará por debajo de un límite dado **(k)**. Tengo varias proposiciones de este tipo, pero en ninguna encuentro nada satisfactorio **(l)** (Gauss, p. 159).

4.8.1.3 Microanálisis

La trayectoria inicia con un conjunto de preliminares **(a)**, los que están integrados por:

Antecedentes matemáticos (que incluyen los resultados de las investigaciones sobre el V postulado, los avances en la nueva geometría, es decir, las deducciones derivadas de la hipótesis del ángulo agudo).

- Un bagaje de ideas ontológicas y epistemológicas, predominante en la comunidad matemática, sobre temas relacionados con la geometría y con el conocimiento científico y su relación con la realidad.
- Un bagaje de certezas, convicciones, dudas, incertidumbres relacionadas con los dos temas previos (matemáticos y filosóficos).

Como se aprecia en los preliminares, la comunidad de geómetras valoraba como no resuelta, a nivel formal, la necesidad de seguridad en la verdad del V postulado (en adelante, del V) **(b)**. Pero dado que tenían la certeza de su veracidad, los expertos también valoraron como satisfecha la necesidad de seguridad en su verdad, a nivel ontológico **(b)**. Para encarar y resolver las necesidades no resueltas y para preservar las que ya estaban resueltas los matemáticos llevaron a cabo una serie de investigaciones geométricas (planteadas en forma de 'problemas matemáticos' **(c)**), relacionadas con la prueba formal del V o con la definición de uno equivalente. Es en este contexto general en el que Gauss realiza sus trabajos.

En su carta, Gauss le expone a su amigo su interés por aprender sobre el tema de la fundamentación de la geometría (relacionado directamente con el de la demostración formal de la verdad del V postulado, problema en el que está involucrado directamente Bolyai, como ya se dijo); asimismo, le informa acerca de sus avances en sus investigaciones sobre el tema **(c)**. Estas investigaciones responden a la necesidad, de Gauss de 'probar la totalidad de la geometría de manera completamente estricta' **(b)**. En esta expresión deja ver que Gauss comprende que los alcances matemáticos del problema del V -derivado de necesidades no satisfechas- no son locales o acotados; que tocan los fundamentos mismos de la geometría. Y también muestra que está dispuesto a encarar el problema del V siguiendo un objetivo firme y muy arraigado en él, que es el "hacer las pruebas de manera completamente estricta" **(f)**; "de acuerdo con un verdadero espíritu geométrico"; "interesado decisivamente y desde un principio en el rigor", como afirma Ruiz (1995).

Al igual que sus pares, Gauss tiene también una certeza o convicción en la verdad del postulado (**d**), y tiene una convicción de que es posible demostrarlo. Es factible que Gauss compartiera esas certezas con sus colegas, quienes las sostenían de manera irrecusable. Kline es contundente en este sentido: hasta principios del siglo XIX -él sostiene- del V nadie dudaba de su verdad (Kline, 1972, p. 1139). Pero además, si no hubiera experimentado esas convicciones, de otra manera no se explicaría su interés por probarlo. Aunque hay que decir, al mismo tiempo, que ese interés también pudo haber provenido de algún resquicio de duda **(d)**, resultado de que no estaba satisfecha la necesidad de seguridad formal en la verdad del V. Así que, al igual que con Saccheri, es viable pensar que sincrónicamente a su convicción en la verdad del V había en Gauss algún dejo de duda (**d**) en su demostrabilidad formal.

Aunque en su comunicación no lo aclara, por todo el trabajo posterior que Gauss hace es muy plausible suponer que, en atención a estas condiciones -necesidad formal de probar el V y certeza de su verdad ontológica y duda de su demostrabilidad-, él se trazó el objetivo específico **(f)**, al igual que Saccheri, de deducir el postulado mediante una prueba indirecta (Cfr. Bonola, 1951).

Gauss valora como no cumplidos los objetivos de encontrar resultados concluyentes (i.e., derivar una contradicción, de acuerdo con la antes dicho) que permitieran demostrar el V **(h)**.

Él revela que esto lo llevó a "dudar de la verdad de la geometría (euclidiana)" (sobre esta duda se hace una reflexión en párrafos abajo) **(i)**.[13]

En el marco de esa duda, él reflexiona sobre la diferencia entre los estándares de rigor que él asume -que lo llevan a la duda- y los que prevalecen en 'la mayoría' de matemáticos, que los llevan a convencerse de sus pruebas (¿estará pensando en Saccheri por ejemplo?) **(j)**.

Consciente de los posibles alcances y repercusiones que su duda tenía para la geometría euclidiana **(j)**, "para estar seguro" él continuó con sus trabajos en esa geometría (incluso lo hizo todavía muchos años después, en el 1828, cuando hace una prueba, independiente del V postulado, de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que o igual a 180°. Esto lo deja en sus Notas del año 1828 (Gauss, 1900)).

---

[13] (Kline (1972) también lo traducen así. Otra traducción interpreta este pasaje como que Gauss "pone en duda la existencia de la Geometría", ver Bonola, 1951, p. 76). En una traducción directa del alemán, que se hizo en el marco de esta investigación, se interpreta el párrafo como sigue: Yo mismo he avanzado mucho en mi trabajo (tanto que me deja poco tiempo para mis otros, completamente heterogéneos, asuntos); por sí solo, el camino que he tomado no conduce muy bien a la meta que uno quisiera y la cual tú aseguras haber logrado, sino a la de poner en duda la verdad de la geometría. En realidad, he llegado a varias cosas que la mayoría ya considerarían como prueba, pero las cuales a mis ojos prueban Nada (con mayúsculas en el original) Carl Friedrich Gauß a Wolfgang Bolyai, Helmstedt, Deciembre 16, 1799.

Eso es lo que, un renglón después anuncia en su comunicado: que 'para estar seguro' (de la geometría euclidiana) él retomó sus trabajos de deducción del V y de la formulación de un enunciado equivalente a esa proposición **(k).**

Reporta que esos trabajos los hizo de manera profusa y aplicando su objetivo de rigurosidad (**k**). Incluye en ese trabajo matemático un enunciado equivalente al V; no obstante, eso lo lleva a un problema de existencia, en el terreno empírico, donde la afirmación no se sostiene … (otra vez se topa con el infinito, como con el axioma de las paralelas en la versión de Playfair, en donde se introduce la existencia de rectas paralelas) **(k)**.

Al final, otra vez, valora como no cumplidos los objetivos **(h')** que buscaba alcanzar con esos trabajos y expresa necesidades no satisfechas **(h')** que denotan dudas (que en esta oportunidad ya no explicita …) **(i').**

En el pasaje analizado se puede observar una cierta trayectoria alrededor de los eec que Gauss ahí reporta explícitamente o bien, asociados a otros eec que aunque no los menciona, da señales de que los experimenta. Para que al lector le quede clara y pueda distinguir los componentes genéricos de esa trayectoria de los eec se ha elaborado la Tabla 2.

	Descripción genérica de los componentes de la trayectoria de los eec	**Descripción de los componentes de la trayectoria de los eec que Gauss implícita y explícitamente deja ver en su comunicación del 1799**
(a)	Preliminares generales (contenido matemático; filosofía geométrica; eec relativos)	
(b)	En el contexto del estado de cosas descrito en los preliminares, surgen necesidades de seguridad en la verdad o validez de hechos de las matemáticas H que los expertos valoran como satisfechas o no satisfechas (antecedentes generales)	Los geómetras consideran que la necesidad de seguridad formal en la verdad del V no está satisfecha. Consideran que, a nivel ontológico, la necesidad de seguridad en la verdad del V está satisfecha.
(c)	Problema matemático en el que los matemáticos se comprometen a trabajar para atender las necesidades no resueltas o para preservar las	A partir de la necesidad no resuelta y de lo que se considera ya resuelto, se plantea el problema de construir una teoría de las paralelas que incluya al V como teorema o como postulado a través de algún

	necesidades resueltas (forma parte de la agenda matemática de la comunidad) (antecedentes generales)	enunciado equivalente, que sea consistente con la geometría euclidiana.
(d)	Eec específicos que los matemáticos experimentan y que se desprenden de la valoración de las necesidades satisfechas o no satisfechas (provenientes de los antecedentes)	Gauss tiene certeza de la verdad en el V postulado y de que la geometría euclidiana es la única posibilidad para describir el espacio. Gauss tiene convicción de que el V es demostrable. Paralelamente se aprecia un estado de duda en Gauss.
(e)	Los eec generan un marco interpretativo (encuadre) a partir del cual la persona interpreta y comprende de manera idiosincrática las necesidades y el problema planteado Con base en ese marco la persona planea los objetivos que cree que le permitirán preservar o satisfacer las necesidades y atender el problema matemático; crea expectativas.	Gauss sugiere (implícitamente) que las necesidades epistémicas manifestadas en la comunidad deben solventarse a través de una fundamentación rigurosa de la geometría, que por supuesto, pasa por atender específicamente la necesidad de darle un estatus formal al postulado de las paralelas. Esto forma parte de su agenda geométrica. Genera expectativas.
(f)	Objetivos que se plantea la persona para satisfacer necesidades (surgidos en antecedentes)	Gauss se propone derivar de la geometría absoluta el V postulado, a partir de una reducción al absurdo (implícitamente). Se plantea el objetivo general de 'trabajar de manera estricta'.
(g)	Desarrollo de trabajos matemáticos (con base en todo lo anterior)	Reporta haber avanzado mucho en sus trabajos
(h)	Valoración de objetivos y de necesidades (asociados a trabajos realizados en g)	Reporta no haber alcanzado los objetivos propuestos (derivar una contradicción)
(i)	Eec que surgen de la valoración de objetivos y necesidades (como satisfechas o no satisfechas) (asociados al trabajo realizado en g)	Declara que los intentos frustrados por derivar el V lo han llevado a un estado de duda
(j)	Marco interpretativo (encuadre) derivado de los eec a partir del cual la persona interpreta y comprende la problemática y las necesidades. Con base en ese marco la persona planea los objetivos que cree que le permitirán satisfacer o preservar las necesidades y atender el problema matemático; crea expectativas.	La duda lo llevó a reflexionar sobre la manera en la que se convencen sus colegas matemáticos y a percatarse de que es distinta a la forma en la que él adquiere su convencimiento. Da muestra de que le importa paliar su duda y por eso realiza una serie de acciones 'para estar seguro'
(k)	Acciones que se desprenden de lo anterior o desarrollo de trabajos matemáticos para preservar necesidades resueltas o satisfacer las no resueltas	Realiza trabajos diversos; hace referencia a un intento fallido de re-formulación del V postulado.

(l)	Valoración de objetivos alcanzados y necesidades satisfechas (asociados al trabajo realizado en k)	Gauss reporta no haber alcanzado los objetivos y no estar satisfecho con los resultados

Tabla 2 Trayectoria de los eec identificada en la carta de Gauss de 1799

En la trayectoria de los eec recién explicada hay aspectos que son centrales para la investigación y que están relacionados con la manera de acuerdo con la cual Gauss gestiona sus eec. Se aportan evidencias de que ese manejo le permitió ampliar su perspectiva en relación con los problemas de la geometría y con la geometría misma.

4.8.1.4 La gestión que hace Gauss de sus eec y su influencia sobre el avance de su comprensión de la geometría

4.8.1.4.1 Algunos aspectos de la trayectoria de los eec de Gauss sobre los que es preciso profundizar

El aspecto que más resalta en esta carta es el contenido de la duda de Gauss, referido a la verdad de la geometría.

Al inicio del mico-análisis se advirtió que la comunidad matemática (y Gauss con ella) concordaba unánimemente en la verdad del V. Y que los matemáticos también aceptaban, de manera general, que el único problema era su demostración formal. Estas convicciones se derivaban de otras: de las que provenían de lo que llamamos la red g-f) que en la época de Gauss estaba conformada básicamente por las teorías kantianas. Esa red g-f introdujo una manera de explicar y comprender los asuntos de la geometría; en particular, las certezas incluidas en ella hacían las veces de un filtro a partir del cual se concluyó que el problema relativo al postulado de las paralelas era sólo de tipo formal y lógico, debido a que su verdad ya estaba garantizada (a través de argumentos extra matemáticos provenientes de la filosofía kantiana).

En esta carta Gauss no da mayor explicación de su duda en torno a la verdad de la geometría; ni explica cómo derivó una duda en la verdad de la geometría, de los intentos frustrados por demostrar formalmente la verdad del V, problema que corresponde al ámbito lógico. Pero como se verá, en comunicaciones posteriores la confirma, lo que muestra que no fue solo una ocurrencia sino resultado de una reflexión madurada que logra concretar en la carta, en la que reincidió y que a lo largo del tiempo fue consolidando. En el apartado que sigue se explicitan algunas estrategias, que lo pudieron llevar a esas reflexiones maduras, las que están directamente relacionadas con la manera personal que Gauss tiene para gestionar sus eec.

4.8.1.4.2 Gauss: una gestión consciente de sus eec

Con lo dicho hasta aquí se puede responder la pregunta ¿Qué condiciones se dieron, relacionadas con los eec que Gauss experimentó durante su práctica matemática, que le permitieron abrir su perspectiva hacia una nueva geometría, en la que la euclidiana era un caso límite? Uno de los logros de Gauss que se perciben en esta carta consiste en haber separado los hechos matemáticos que estaban en juego (las dificultades reiteradas, sistemáticas de demostrar el V y las dificultades reiteradas para darle un sustento empírico a enunciados equivalentes al V, que pudieran evadir el infinito), de las certezas de carácter extra matemático prevalecientes en la red g-f (la verdad incuestionable del V y el que la geometría euclidiana implica verdad absoluta y necesaria). Cuando Gauss retira del análisis matemático esas certezas extra matemáticas, lo que le quedan son los hechos matemáticos en bruto, a secas. Esos hechos, ya sin ese filtro, los pudo significar de un modo diferente a como sus colegas los habían interpretado a partir de las certezas derivadas de la red g-f. Sin esa lente, cierto es que persistía el problema matemático (de la demostración del V o de su formulación equivalente), pero le permitió a Gauss plantearse nuevas preguntas, que llevaban a nuevos problemas: el de la puesta en duda de la veracidad del postulado. Gauss trasmitió así al terreno de la ontología la duda que estaba circunscrita sólo al terreno lógico (duda lógica que compartían muchos de sus colegas, como Farkas Bolyai (ver 3 en tabla 3.1)).

La duda que aquí plantea Gauss va directo a los cimientos de la geometría: es factible que el problema de la teoría de las paralelas no sea sólo un pequeño escollo lógico. La postura que asume en su carta representa un punto de quiebre ya que pone bajo sospecha la viabilidad de la geometría euclidiana como la (única) ciencia del espacio.

En este proceso Gauss deja ver que se percata de todo lo que hace y piensa:

Se percata de las necesidades matemáticas que están en juego y probablemente de las necesidades 'metafísicas' que también están interviniendo en el problema matemático.

Replantea las necesidades por satisfacer a su propio modo y en sus propios términos.

Reflexiona sobre los objetivos que él personalmente se propone para satisfacer las necesidades (relativos al rigor).

Evalúa los avances de su trabajo.

Valora explícitamente si alcanzó o no los objetivos y si sus necesidades están o no satisfechas.

Toma conciencia de los eec que está experimentando (la duda).

Reflexiona sobre la manera de convencerse de sus colegas y se percata de que es distinto a la manera en la que él se convence.

Y, como ya se dijo, separa los asuntos de la matemática de los asuntos de la filosofía. Esto tuvo consecuencias positivas para su pensamiento matemático. Es muy posible que esto generó condiciones para que él pudiera soltar las creencias avaladas por la comunidad, para que pudiera flexibilizar su pensamiento y lograra hacer una lectura distinta de lo que le 'estaba diciendo la matemática'.

4.8.2 Segunda parte: segundo episodio

4.8.2.1 Preliminares: resultados relativos a la teoría de las paralelas y trabajos sobre geometrías no euclidianas; filosofía de la geometría gaussiana y eec asociados

(3). En 1804 Gauss recibe de Farkas Bolyai su *Theoria Parallelarum*, conteniendo una tentativa para demostrar la existencia de rectas equidistantes. Gauss impugnó esta demostración. F. Bolyai, en armonía con la red g-f, continúa con sus estudios sobre el axioma XI[14], llegando a dudar de su demostrabilidad y a intuir la imposibilidad de reducir la hipótesis euclídea, porque considera que las consecuencias derivadas de la negación del axioma XI no pueden contradecir los principios de la geometría (Cfr. Bonola, 1951). La red g-f comienza a presentar algunos pequeños escollos, en forma de estas incertidumbres. Gauss está al tanto de estos sucesos.

(4) En sus notas personales que registra en 1813, Gauss anota el siguiente comentario:

> En la teoría de las paralelas no hemos progresado más allá de Euclides. Esta es una parte penosa de las matemáticas, la que tarde o temprano tomará una distinta forma (Coxeter, 1977, p. 388).

Para la época en que Gauss escribió este comunicado, es posible que él ya hubiera desarrollado algunos resultados significativos en una geometría distinta a la euclidiana, derivada de la hipótesis de un ángulo menor que 180°. En comunicados posteriores (de Gauss a Schumacher en 1846; de Gauss a Farkas Bolyai, en 1832 y de Gauss a Gerling, en 1846; ver listado de transcripciones de Gauss al final de este documento) Gauss afirma que al finalizar el siglo él ya había encontrado resultados semejantes a los reportados por Janos Bolyai y Lobachevski.

En esta comunicación, Gauss censura el hecho de que la geometría se haya restringido puramente a la euclidiana; sugiere que en lo futuro cambiarán las cosas. Es posible que esta

[14] En organización posteriores de Los Elementos, los Postulados y los axiomas ahí incluidos se reorganizan. En estas ediciones el V Postulado pasa a ser el Axioma XI.

postura -a contracorriente de la dominante- haya surgido a partir de resignificar esa geometría a la luz de los avances de la no euclidiana, sin la influencia de las creencias sesgadas insertas en la red g-f, de que la euclidiana era la única geometría posible.

(5). En 1816 Gauss le envía una carta a C. I. Gerling. Al respecto, Coxeter comenta:

> Es claro de ésta y otras cartas que Gauss ha comenzado a aceptar la posibilidad de una nueva geometría en la que hay una unidad absoluta de medida que llama 'la constante', algo análogo a los radianes, que es una unidad absoluta para el ángulo. Es probable que algo por el estilo Gauss también le comentó a Watcher (un alumno suyo en Gottinga) quien le responde: "Si tu geometría anti-euclidiana es verdadera ¿por qué la constante permanece indeterminada?" (Coxeter, 1977).

En esta comunicación, Gauss por vez primera (de acuerdo con los registros con los que se cuenta) habla directamente de sus resultados en la geometría anti-euclidiana, "de la cual él ha comenzado a aceptar como una posibilidad" (de acuerdo con Coxeter, 1977). ¿Se trata sólo de una posibilidad lógica? Es decir, ¿su geometría anti-euclidiana es sólo una estructura lógica carente de relación con figuras reales?.[15] O ¿acaso Gauss ya en ese tiempo había comenzado a creer en la potencial aplicabilidad de la geometría anti euclídea? En este sentido, resulta significativa la referencia que Watchers hace a "(la posible) verdad de la geometría anti-euclidiana de Gauss".

(6). En 1816 Gauss publica una Recensión en donde cuestiona un escrito en el que se proponía fundamentar la geometría de un modo puramente lógico, con base en definiciones, los principios de identidad y del tercero excluido. Ahí argumenta:

> … que aquellos que están familiarizados con la esencia de la geometría aceptarán que esos medios lógicos … que se emplean en la presentación y encadenamiento de las verdades de la geometría… no logran de por sí ningún rendimiento, y

[15] De hecho, de acuerdo con la interpretación de Kline, Gauss había comenzado a reconocer a la geometría no euclidiana como posibilidad lógica desde sus meditaciones de finales del siglo XVIII

> sólo echan flores estériles si no reina en todas partes la fructificante intuición viva del objeto (Sholz, 2005).

Expresa aquí Gauss la firme convicción de que la geometría no puede tener un fundamento puramente lógico. Aunque él no hace referencia a una geometría distinta de la euclidiana, parece que es el ámbito en el que tiene sentido dirigir la crítica; y no sólo porque carece de sentido aplicarla a la euclidiana, sino porque en aquel entonces los (pocos) matemáticos que habían desarrollado trabajos en otras geometrías -como por ejemplo, Lambert[16]-, las consideraban como estructuras puramente lógicas desprovistas de alguna relación con figuras reales (Kline, 1972, p. 1147). Parece que a esto mismo se refiere Dieudonné, cuando afirma que para la comunidad matemática de la época aquellos trabajos no eran sino 'fantasías extrañas'.

Por otra parte, de acuerdo con Sholz (2005), cuando Gauss habla de 'la intuición viva del objeto' se refiere a la intuición empírica, es decir, a la percepción de objetos o fenómenos materiales, y no a la intuición pura al estilo kantiano.

Si es así, Gauss aquí parece sugerir que en la geometría, la lógica debe ser complementada o 'sustanciada' con el objeto perceptual del espacio físico.

En este caso, Gauss ya no orienta su crítica hacia las creencias de la red g-f, sino hacia las ideas 'logicistas' que comenzaban a imperar entre los que se dedicaban a las geometrías alternativas a la euclidiana.

(7). En el año de 1817 Gauss le expresa a Olbers:

> Cada vez llego más y más a la convicción de que la necesidad física de nuestra geometría euclídea no puede ser demostrada, al menos no por la razón humana ni para la razón humana. Quizás en otra vida alcancemos una visión distinta de

[16] Kline sostiene que Lambert se dio cuenta que cualquier conjunto de hipótesis que no conducía a contradicciones ofrecía una geometría posible (1972, p. 1147).

> la esencia del espacio, que nos resulta inalcanzable por ahora. Hasta entonces, no debemos situar a la geometría en la misma clase que la aritmética -que se sostiene puramente a priori-, sino en la misma que la mecánica. (Gauss, 1900; Kline, 1972, p. 1152)

En su comunicado Gauss sostiene que las proposiciones de la geometría no poseen un carácter necesario en el mundo físico o, al menos, esa necesidad 'no puede ser demostrada'; si se interpreta la 'necesidad' en términos kantianos, eso significa que los contenidos o conocimientos que provee la geometría, al no ser necesarios, sí dependen de la experiencia y no son conocimientos puros.

Sostiene además que la geometría (y aquí quizás incluye tanto a la euclidiana como a la no euclidiana) no permite acceder a la 'esencia' del espacio (la cual nos resulta inalcanzable). Ergo, la geometría euclidiana no sólo no es la única ciencia del espacio; esta geometría no ha posibilitado la comprensión de la naturaleza esencial del espacio.

Remata su argumento reiterando lo dicho al inicio, el carácter experimental de la geometría (al igual que la mecánica, no se puede considerar como una ciencia que esté basada en intuiciones a priori). La contrasta con la aritmética y su carácter a priori (¿será que esta consideración a la aritmética haya sido el inicio de todos los procesos de aritmetización que se dieron en la matemática del XIX?).

En esta carta Gauss rompe con las posturas kantianas (Cf. Sholz, 2005) incluidas en la red g-f preeminente en la época, en torno al carácter a priori de la geometría, a la necesidad de sus proposiciones y a la consideración de la geometría euclidiana como ciencia del espacio.

(8). En agosto de 1818, Gauss le escribe a Gerling:

> Me alegra que tengas el coraje de expresarte como si reconocieras la posibilidad de que nuestra teoría de las paralelas, y con ella toda la geometría, pudiese ser falsa (Reventós & Rodríguez, 2007).

¡Gauss anima a sus colegas a dudar de sus certezas! De nueva cuenta, Gauss pone en duda la verdad de la geometría.

(9). En un nuevo comunicado, escrito a principios de 1819, Gauss le informa a Gerling:

Solo quiero remarcar que he desarrollado la geometría astral tan lejos que puedo resolver completamente todos los problemas, una vez la constante C esté dada (Reventós & Rodríguez, 2007).

(10). Gauss "como estudiante de la naturaleza" (Kline, 2009, p. 557) (alrededor de 1820)

"Una de las historias acerca de Gauss nos lo presenta midiendo los ángulos del gran triángulo terrestre formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken, a fin de contrastar si la geometría del espacio real es no euclídea" (Reventós & Rodríguez, 2007). Aunque actualmente existe cierta polémica con relación a las finalidades de esas mediciones, historiadores de la ciencia coinciden en la opinión de que guardaban relación con las reflexiones gaussianas en torno a los fundamentos empíricos de la geometría (Reventós & Rodríguez, 2007). La evidencia en la que apoyan su argumento proviene de Sartorious (persona cercana a Gauss), quien afirmaba que Gauss estaba interesado en verificar la posible euclicidad del espacio físico y que … "había llegado a la convicción de que esa proposición (el axioma XI) no puede ser demostrada, si bien conocemos por la experiencia (por ejemplo, por los ángulos del triángulo formado por los picos de los montes alemanes …), que es aproximadamente correcta" (Reventós & Rodríguez, 2007).

Gauss, "quien estaba dotado de una genialidad matemática combinada con una extraordinaria habilidad para la experimentación empírica" (Ruiz, 1995), fungió como director del observatorio de Gottinga desde 1809 y hasta su muerte, lo cual le demandaba emplearse en diversos asuntos de la ciencia práctica.

Sin duda, esta experiencia experimental de Gauss influyó en la lectura que él hizo de los avances en sus trabajos matemáticos, especialmente los relacionados con la geometría no euclidiana (anti euclídea, o astral) y con la indemostrabilidad del V Postulado. Y muy factiblemente también sus oficios en la ciencia práctica pesaron en su postura crítica en torno a los presupuestos contenidos en la red g-f dominante (particularmente en torno a las tesis kantianas).

En resumen, se puede decir que en el primer cuarto de siglo XIX Gauss, de manera sincrónica al desarrollo de ciertos trabajos en geometría no euclidiana y de la confirmación de la imposibilidad de demostrar el axioma XI y de formular uno equivalente, fue delineando su propia filosofía de la geometría; en ésta, él objetó de fondo la dominante en su época, básicamente la derivada de la teoría kantiana. En esta época él cuestiona la verdad de la geometría euclidiana; propone la necesidad de trascender a esta geometría, y sugiere la posibilidad de que la teoría de las paralelas tendrá una nueva forma; acepta abiertamente la posibilidad de una nueva geometría (a la que posiblemente se le asocie el carácter de verdad); sugiere que la estructura lógica de la geometría debe sustanciarse con la referencia al objeto físico y, al final de este período, se deslinda por completo de las posturas kantianas con relación a la geometría: objeta su carácter a priori, necesario, absoluto, y como ciencia que permite conocer la verdadera naturaleza del espacio, aunque asume las posturas kantianas para la aritmética. Realiza trabajos en ciencia aplicada, particularmente de mediciones terrestres en las que busca verificar la posible euclicidad del espacio. Pero más allá de los contenidos específicos de su filosofía geométrica, lo que importa resaltar es la estrategia argumentativa a la que se apegó en estos casos, la cual consistió en significar los resultados matemáticos con independencia de otras interpretaciones o certezas prevalentes en la red g-f (o en el imaginario del colectivo matemático).

4.8.2.2 Extracto

(11). En 1824, hacia el final del año, Gauss le envió una carta a F. A. Taurinus. Ahí él plantea algunas otras ideas que forman parte de su filosofía personal en torno a la geometría (que incluye a la geometría euclidiana y a la no euclidiana; por cierto, es la primera vez que introduce el término):

> Estoy de acuerdo con su prueba, de que la suma de los tres ángulos de un triángulo plano no puede ser mayor que 180°. Muy diferente se comporta el caso en el que la suma de los ángulos es inferior a 180°. Este es el nudo real, el acantilado en el que todo falla **(b)**.
> Yo he trabajado por más de 30 años en el caso de que la suma de los ángulos sea inferior a 180°, y no creo que alguien haya hecho más trabajo que yo. La suposición de que la suma de los ángulos es menor que 180°. conduce a una geometría muy diferente a nuestra propia geometría (euclidiana). (Esa geometría) es completamente consistente en sí misma y la he desarrollado de manera bastante satisfactoria para mí **(e)**, de modo que puedo resolver todo con la excepción del cálculo de una constante que no se puede determinar a priori **(f)**. Cuanto más aumenta esta constante, más se acerca a la geometría euclidiana y un valor infinitamente mayor los hace coincidir.
> Las leyes de esta geometría parecen ser en parte paradójicas para los no expertos, pero en una reflexión más cercana y tranquila **(g)**, uno encuentra que no contienen absolutamente nada imposible en sí mismas **(c)**. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se pueda desear, si solo se permite que los lados sean lo suficientemente grandes; sin embargo, el contenido plano de un triángulo, sin importar qué tan grandes sean los lados, nunca puede exceder un cierto límite. Todos mis esfuerzos por encontrar una inconsistencia, una contradicción, en esta geometría no euclidiana han sido infructuosos **(d)** y lo único que se resiste a nuestra comprensión es que si (esta geometría) fuera verdad, en el espacio existiría un segmento lineal (geométricamente) definido, si bien desconocido para nosotros. Sin embargo, me parece que, si prescindimos de la inútil sabiduría verbal de los metafísicos, sabemos muy poco o casi nada de la esencia (o verdadera naturaleza) del espacio: no podemos confundir lo que ocurre de forma poco natural con lo absolutamente imposible **(c)** (Gauss, 1900; Lombardo-Radice, 1974 & Ursini, 2001)
> Si la geometría no euclidiana fuera la verdadera, y si aquella constante estuviera ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras

> mediciones sobre la tierra o en el cielo, sería posible determinar esa constante a posteriori.

Al inicio del comunicado Gauss reconoce la problemática geométrica a la que se enfrenta la comunidad: el caso en el que la suma es inferior a 180° **(b).** En las reflexiones que él hace a lo largo de 25 años (algunas destacadas se describen en los preliminares), así como en la carta, resalta la necesidad epistémica de Gauss, derivada de esa problemática y por el postulado de las paralelas, de darle un fundamento riguroso a la geometría (que incluye la euclidiana y la no euclidiana) y de otorgarle un significado y un sentido desde una perspectiva matemática y filosófica integral **(c).** Para cubrir esas necesidades ha hecho distintas investigaciones en geometría: derivó el teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo, identificó una constante que no es posible determinar a priori y que quizás, con los instrumentos de medición con los que cuenta, tampoco lo podrá hacer de manera experimental; y precisó que en el caso en el que esa constante tiende a infinito la geometría no euclidiana tiene como límite a la euclidiana. Para cubrir esas necesidades y atender la problemática geométrica, también durante décadas ha ido elaborando y afinando una propuesta crítica (se puede advertir en los preliminares) sobre aspectos ontológicos y epistemológicos relativos a las geometrías (euclidiana y no euclidiana). Y específicamente, en el terreno de la geometría, Gauss informa que (al igual que sus pares matemáticos) ha dedicado sus esfuerzos a conseguir el objetivo de derivar una contradicción a partir de la hipótesis del ángulo menor a 180°, sin haberlo conseguido nunca **(d)**. Después de muchos ensayos a lo largo de la historia y de los que él mismo llevó a cabo no ha surgido alguna contradicción; esto le lleva a admitir que lo que de ahí se deriva es una geometría consistente, aunque distinta a la euclidiana. Considera cumplido sus objetivos y se declara ‘bastante satisfecho’ con los resultados obtenidos **(e);** exhibe así un estado de convencimiento en torno a esa geometría no euclidiana (a pesar de la incertidumbre de no poder determinar la constante) **(f)**.

Seguidamente, Gauss reflexiona sobre los resultados geométricos que a él le convencen (los de la geometría no euclidiana) y que a sus colegas no (por considerarlos 'paradójicos'); reflexiona sobre los argumentos 'no expertos' que ofrecen sus colegas y los analiza críticamente. Específicamente, él reflexiona sobre la influencia que las certezas extra-matemáticas ('metafísicas', subjetivas) incluidas en esos argumentos 'no expertos' tienen sobre las conclusiones matemáticas y sobre el trabajo matemático que llevan a cabo sus colegas (este punto central se retoma párrafos abajo). Expone, como resultado de esas disquisiciones, una postura novedosa en la que reitera sus incompatibilidades con las posturas kantianas, admitiendo la posibilidad de una aplicación física de los resultados de la geometría no euclidiana y el carácter incognoscible del espacio **(g).**

En el escrito no hace referencia a las acciones que él planea realizar para seguir atendiendo la necesidad de fundamentar, matemática y filosóficamente, las geometrías; no obstante, él las lleva a cabo **(h)**. Por una parte, desarrolla otros resultados en la geometría no euclidiana (e. g., cálculo del volumen de un tetraedro, que plantea en la carta que le envía a Farkas Bolyai, en el 1832); continúa realizando sus mediciones geodésicas para verificar el posible carácter euclídeo o no euclídeo del espacio (de hecho, las sigue llevando a cabo intermitentemente durante muchos años más), y sigue precisando sus ideas filosóficas sobre la geometría, en las que insiste sobre el carácter experimental, no a priori, de esta ciencia (Ver 15, 16 y 17 en Tabla 3.1). Los trabajos sobre geometría diferencial que lleva a cabo tiempo después de escrita esta carta[17] le sirven también de marco para reflexionar sobre la naturaleza inexpugnable del espacio. En lo que sigue se comentan estos trabajos, por resultar de interés para este estudio.

---

[17] Esos resultados los publica en sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* en 1927.

(12). En una carta que Gauss, en 1825, le escribe a C. A. Hansen le expone:

> … esta memoria (refiriéndose a las Disquisiciones) nos lleva a un plano impredecible… Aquellas investigaciones están profundamente interrelacionadas con mucho más, yo diría que con la metafísica del espacio[18], y encuentro difícil sacudirme las consecuencias de ello.

(13). Una posible conexión entre la teoría intrínseca de superficies desarrollada en las Disquisiciones y el problema de las paralelas, en particular, con la noción de recta, se puede dar vía el teorema egregio que Gauss incluye en esa teoría de la geometría diferencial (Cfr. Sholz (2005), quien sugiere relacionar los resultados de la geometría diferencial con los de las geometrías no euclidianas).

El teorema egregio (teorema destacable) se refiere a la curvatura[19] de las superficies[20].

Dicho de manera informal en el teorema egregio se establece que la curvatura gaussiana de una superficie puede determinarse midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie; lo que resulta relevante y sorprendente de este resultado es el hecho de que la curvatura se puede definir sin hacer referencia a la forma particular en que la superficie se curva dentro del espacio euclídeo tridimensional, es decir, que la medida de la curvatura no depende de la manera en que la superficie está inmersa en R^3. Esto significa que la curvatura es un invariante intrínseco de una superficie.

---

[18] En este caso el término 'metafísica del espacio' no tiene una connotación negativa; de acuerdo con la interpretación de Ferreirós, con la que concordamos, denota lo que se pudiera entender como los fundamentos lógicos y epistemológicos del espacio.

[19] Para Gauss, la 'curvatura gaussiana' es una medida asociada a cada punto de una superficie, que mide cómo esa superficie se curva. Por ejemplo, la curvatura de todos los puntos de un plano es la misma, y es nula. Lo mismo pasa con la curvatura de una esfera, que es constante (y positiva) para todos los puntos de una misma esfera. Gauss la calculó y es igual a $1/r^2$ (con r, radio del círculo). Así que, en la medida en la que r disminuye, la curvatura del círculo aumenta y cuando r tiende a infinito, la curvatura tiende a cero; en el caso límite, el círculo coincide con el plano.

[20] Una superficie es un conjunto de puntos de un espacio euclídeo que forma un espacio topológico bidimensional que localmente se parece al espacio euclídeo (es localmente homeomorfo a su plano tangente en un punto dado). Las superficies son versiones curvadas del plano.

Ahora bien. Si se tiene una superficie inmersa en el espacio euclídeo tridimensional, y si esa superficie se curva o se dobla, sin que se deforme, estire o se pliegue, entonces se da una isometría local.[21]

Dada una superficie plana S y su transformada isométrica S', la transformación isométrica convierte las rectas de S en geodésicas trazadas sobre S'.[22] Como S y S' son superficies isométricas, todo lo que se pueda decir sobre el área de una figura contenida en S o los ángulos que se forman en ella, vale también para sus imágenes resultado de la transformación isométrica, es decir, para las figuras correspondientes en S'.

Sea un punto P de S y su correspondiente bajo la isometría P' en S. Lo que se muestra en el teorema egregio es que la curvatura gaussiana (total) en P es la misma que en P'.

O dicho de otra forma, la curvatura gaussiana de una superficie es invariante bajo isometrías locales.[23] Es decir, en esas isometrías no sólo las longitudes, ángulos y áreas permanecen invariantes; también permanece así la curvatura gaussiana en los puntos correspondientes.

Es fácil verificar que se puede definir una transformación isométrica entre el plano y el cilindro (o el cono). Basta doblar y curvar una hoja de papel (sin estirarla, plegarla o deformarla) para crear esas superficies curvas. Si se toma una recta l en el plano (o en la hoja de papel), todos sus puntos tendrán curvatura nula. Pero resulta que, por el teorema egregio, todos los puntos de

---

[21] Una isometría es una función definida entre dos espacios métricos que conserva las distancias entre los puntos, es decir, las longitudes de las curvas trazadas sobre la superficie permanecerán inalterables. Son resultado de flexiones de una superficie en las que no hubo ni dilatación, ni contracción o rasgadura.

[22] La línea geodésica se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie. Las geodésicas de una superficie son las líneas "más rectas" posibles (con menor curvatura) fijado un punto y una dirección dada sobre dicha superficie.

[23] Un corolario es que sólo existe una isometría entre dos superficies si tienen la misma curvatura gaussiana.

la geodésica (que le corresponde a la recta l) sobre el cilindro o el cono, también tienen la misma curvatura, es decir, ¡cero…!

Montesinos (2012) dice que todos los caminos se van encontrando. Pues bien, todos los caminos se van encontrando. Aquello que estudió Gauss se relaciona con las geometrías no euclídeas del siguiente modo: la geometría euclídea tiene curvatura nula, la hiperbólica la tiene negativa y la elíptica positiva (Montesinos, 2012).

Lo que es sorprendente es que uno puede encontrar otras líneas que satisfacen esos axiomas (Bonola, 1951). Este es el caso de las líneas geodésicas en el cilindro. Entonces toda la geometría euclidiana aplica a todas las figuras de un cilindro. Y esto da una idea totalmente distinta de la geometría no euclidiana. I. e., si la geometría euclidiana se aplica a más situaciones físicas que la que inicialmente se supuso. Entonces ¿no sucederá lo mismo con las geometrías no euclidianas? Y estas ¿no pueden ser tan útiles y más significativas que lo que inicialmente se sospechó? (Kline, 2009, p. 568). El asunto aquí con Gauss es que cuando introdujo su Teorema Egregio, ya se podía haber hecho todos estos cuestionamientos y entonces tiene sentido pensar en que la geometría euclidiana no es necesaria, ni es a priori y que quizás haya segmentos lineales que desconozcamos.

Ahora, desde la 'intuición condicionada de recta' que nos heredó la matemática occidental a partir de la obra euclidiana, echemos un vistazo a esa recta trazada sobre las superficies curvas. ¿Qué clase de recta resulta? ¿cómo se puede interpretar? ¿qué significado adquiere?

Siguiendo una metáfora conocida, de seres que habitan en un espacio de dos dimensiones (Planilandia) ¿cómo pudieran ellos saber si su mundo es realmente un 'plano' (euclidiano) o más bien residen en alguna superficie curva (isométrica al plano) como un cilindro o un cono? Eso lo podrían distinguir seres que habitaran en espacios tridimensionales, pero ellos no. Es posible entonces - dice Sholz (2005)-, que algo así nos suceda en relación con nuestro espacio físico; que al estar inmersos en él no seamos capaces de distinguir su naturaleza y sus propiedades.

No se sabe exactamente a qué consecuencias, de sus resultados en geometría diferencial sobre las consideraciones del espacio, se refería Gauss en su carta a Hansen. Pero sólo con las ideas antes sugeridas resulta insostenible aceptar una 'esencia de la línea recta'; resulta inadmisible pensar en que posea un carácter absoluto, a priori, y necesario, e independiente de la experiencia. Y en esa situación de inaceptación queda la idea de una única y exclusiva geometría del espacio y de la posibilidad de tener acceso a su verdadera naturaleza. Bien hizo Gauss en detenerse a reflexionar con un espíritu crítico lo que para sus colegas resultaban certezas incuestionables.

Al igual que en la primera carta analizada, en esta segunda se puede distinguir una trayectoria asociada a los eec epistémicos de los que Gauss ahí da indicios.

Previo a la carta Gauss -y la comunidad de matemáticos- desarrolló trabajos en geometría (euclidiana y no euclidiana) y realizó una serie de reflexiones críticas, de contenido filosófico, sobre esos temas geométricos (lo más relevante es el rompimiento con las posturas kantianas, en relación con la geometría) **(a)**; en continuidad con esos trabajos geométricos y filosóficos y en concordancia con las certezas e incertidumbres asociados a ellos -que Gauss comparte en sus diversos escritos-, en la carta plantea una problemática matemática, la de la exploración de la hipótesis del ángulo agudo **(b)**. En esos escritos también dio evidencia de que esta problemática, derivada de la teoría de las paralelas, ha generado en él la necesidad epistémica de fundamentar, de manera rigurosa, a la geometría y de darle también una interpretación crítica **(c)**. Para satisfacer esa necesidad ha hecho diversos trabajos, pero en particular se ha planteado un objetivo **(d)**: el derivar una contradicción a partir de esa hipótesis (del ángulo agudo). Repetidos intentos vanos (de él y de sus colegas) de obtener esa contradicción, lo llevan a sentirse satisfecho de los trabajos realizados **(e)**; de esa satisfacción él deriva su confianza **(f)** en la no euclidiana como una geometría válida, aunque distinta de la de Euclides.

Su convencimiento en la geometría no euclidiana y en algunas de sus características (como su carácter experimental, en las que había reflexionado desde años atrás), sirve de marco para explicar algunos de los argumentos 'no expertos' propuestos por sus colegas, en los que él destaca cómo sus certezas extra-matemáticas (metafísicas, subjetivas) ejercen una influencia sobre algunas consideraciones matemáticas. A partir de eso él articula nuevos argumentos de los que desprende conclusiones muy novedosas para la geometría **(g)**.

Posterior a esa carta realiza trabajos diversos; destacan los de geometría diferencial que le sirven de evidencia para machacar y ahondar en el carácter inescrutable del espacio **(h)**.

Al igual que en el primer episodio, con la finalidad de ofrecer al lector una mayor claridad con respecto a la trayectoria de los eec que Gauss muestra en su carta, en la columna izquierda de la Tabla 3 se desglosan, de manera genérica, los posibles componentes que incidieron en la configuración de esos eec (**a**, **b**, **c** y **d**) y también se identifican y explican, de manera genérica, los posibles componentes que dejan ver las influencias que tuvieron esos eec en su trabajo subsecuente (**g** y **h**).

	Descripción genérica de los componentes de la trayectoria de los eec	**Descripción de los componentes de la trayectoria de los eec que Gauss reporta en el segundo registro (1824).**
(a)	Preliminares (contenido matemático; filosofía geométrica; eec relativos)	Gauss acepta la geometría no euclidiana; se escinde de las posturas kantianas, relativas a la geometría.
(b)	Problemática general	Explorar la hipótesis de un ángulo menor que el de 180º
(c)	Necesidades de seguridad epistémica	Fundamentar rigurosamente las geometrías (de manera matemática y filosófica)
(d)	Objetivos para satisfacer necesidades	Derivar una contradicción de la hipótesis del ángulo agudo

(e)	Valoración de objetivos y de necesidades	Gauss relata no haber derivado una contradicción e informa estar satisfecho con los trabajos realizados
(f)	Eec	Gauss deja ver confianza en la geometría no euclidiana y reconoce que es distinta a la euclidiana.
(g)	Reflexión, sobre los temas matemáticos y filosóficos en juego, derivada de los eec. Metafóricamente hablando, los eec son como un velo o un filtro a partir del cual se interpretan y se explican esos resultados. Con base en ese filtro se definen objetivos para preservar necesidades satisfechas o para cubrir necesidades que no han sido satisfechas	A partir de esa confianza en la geometría no euclidiana Gauss analiza argumentos 'no expertos' propuestos por sus colegas, en los que él destaca cómo sus certezas extra-matemáticas influyen directamente sobre su trabajo matemático. Propone argumentos con conclusiones sobre la geometría muy innovadoras (e.g., reitera su crítica a las teorías kantianas del espacio y propugna el carácter inescrutable del espacio).
(h)	En función de lo determinado en (g) se desarrollan trabajos matemáticos para satisfacer necesidades o para preservar o consolidar necesidades satisfechas	En línea con esas convicciones Gauss sigue trabajando en la geometría no euclidiana; continúa con sus mediciones terrestres; ahonda en sus posturas filosóficas anti-kantianas y desarrolla la geometría diferencial, a partir de la cual profundiza en sus consideraciones sobre el carácter inescrutable del espacio.

Tabla 3. Trayectoria de los eec identificada en la carta de Gauss de 1824

4.8.2.3 La gestión que hace Gauss de sus eec y su influencia sobre el avance en su comprensión de la geometría

Sobre la trayectoria recién expuesta se hará una reflexión al final del documento. Lo que en esta parte del escrito interesa resaltar, en torno a esta trayectoria, es un aspecto que está relacionado con la explicación que se pretende ofrecer en este escrito y que se refiere a las condiciones, relacionadas con los eec que Gauss dejó ver en el episodio analizado, que le permitieron abrir su perspectiva hacia una nueva geometría.

4.8.2.3.1 Algunos aspectos de la trayectoria de los eec sobre los que es preciso profundizar

Se argumenta, como ya se dijo, que esas condiciones están directamente relacionadas con la manera en la que Gauss manejó o gestionó sus eec. En este apartado se aportan algunas evidencias sobre este asunto.

Dos aspectos resaltan en esta carta: por una parte, el análisis crítico que Gauss hace sobre argumentos ‘no expertos’ que formulan algunos de sus colegas; por otra, los argumentos que Gauss construye en contraposición a los de sus pares (punto g) (cabe aclarar que, si bien sus razonamientos no están expuestos en forma lineal sino que están diseminados a lo largo del comunicado, las ideas centrales sí están ahí. Lo que aquí se hizo fue una identificación de los componentes principales de los argumentos, a través del microanálisis, y se reconstruyeron siguiendo un hilo razonable).

El primer argumento que Gauss califica de ‘no experto’ es el siguiente:

Si un resultado matemático es ‘paradójico’ o ‘no natural’, entonces es imposible; y si es imposible, entonces es contradictorio.

Aquí es necesario introducir algunas aclaraciones. Por una parte, no se sabe a qué se refiere Gauss con lo ‘paradójico’ o ‘no natural’. Es del todo factible que tenga alguna relación con la expresión de Saccheri, de que un resultado matemático es ‘repugnante’ en relación con la naturaleza de la recta. Así que los resultados paradójicos o no naturales se pueden interpretar como los que no cotejan con las intuiciones geométricas euclidianas (Kline, 2009) o con lo ‘real intuitivo’.

Por otra parte, no se sabe a qué posibilidad se refiera Gauss: si a la viabilidad lógica o a la posibilidad de aplicación física. Pero en el contexto del contenido de toda la carta, es posible que haga referencia a la posibilidad física, porque en otro momento Gauss habla de la ausencia de contradicciones, que denota la consistencia lógica o a la posibilidad lógica.

Dando por cierto lo antes dicho, entonces el argumento ‘no experto’ quedaría así:

Si un resultado matemático H es ‘paradójico’ o ‘no natural’ (es decir, que se contrapone a las intuiciones geométricas euclidianas), entonces H no tiene posibilidad (en la realidad física).

Por tanto, H es contradictorio y no es viable ni lógica ni matemáticamente. (Y esto pudiera aplicar en particular a los resultados de la geometría no euclidiana, de lo cual se desprende que esta geometría no es viable ni lógica, ni matemáticamente. Como veremos párrafos más abajo, este argumento parece haber sido el usado por Saccheri).

Quizás ese argumento 'no experto' queda más claro con el que Gauss esgrime, con el fin de rebatirlo. Lo hace a través de un contraejemplo (otra vez, no hace una presentación lineal; las ideas que forman el argumento están desperdigadas a lo largo de toda la carta); él arguye:

Considérese el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo. Ese teorema pudiera parecer (a los no expertos) como un resultado paradójico. No obstante, no contiene nada imposible en sí mismo (puede tener aplicación física), además de que no se (ha derivado) de él ninguna contradicción. Por lo tanto, el teorema tiene viabilidad matemática. Y lo mismo aplica para todos los teoremas de la geometría no euclidiana. Por lo tanto, la geometría euclidiana tiene viabilidad matemática. Sólo que se trata de una geometría distinta.

En la reflexión sobre los argumentos 'no expertos' de sus colegas Gauss distingue, por una parte, las propiedades de H que hacen referencia a la intuición y que generan cierto tipo de certezas extra-matemáticas y subjetivas (lo paradójico, lo no natural). Por la otra, están las propiedades propiamente matemáticas de H (su posibilidad física, la presencia de contradicciones), que están relacionadas con asuntos de consistencia lógica (verificable por medios lógicos) o con su aplicabilidad al espacio físico (verificable a través de mediciones y otros recursos de la ciencia aplicada); éstas también generan convicciones o seguridades, pero de tipo matemático.

Asimismo, y este es un punto central para el análisis que se expone en este escrito, Gauss se percata de que esas certezas metafísicas (por llamarles de algún modo), influyen en la forma de interpretar los resultados matemáticos: ¡un resultado se considera como lógicamente contradictorio a partir de esas certezas metafísicas!; por lo tanto, ¡repercuten directamente en el trabajo matemático! Lo interesante es que Gauss se descubre el mecanismo, en el que están directamente involucrados ciertas certezas, convicciones, dudas y la manera de gestionarlos.

Otro argumento que Gauss analiza críticamente y objeta es el siguiente:

A partir de consideraciones metafísicas, actualmente se considera que se conoce la verdadera naturaleza del espacio.

No obstante, dice Gauss, si se omiten las convicciones metafísicas contenidas en la premisa, se tambalea la conclusión de que la geometría euclidiana es la única ciencia del espacio y que garantiza el acceso al conocimiento de su naturaleza esencial.

El contra-argumento de Gauss es el siguiente:

Que en la geometría no euclidiana hay segmentos que no conocemos en el espacio (este es un hecho matemático) (aunque) eso no quiere decir que esos segmentos no tengan una posibilidad (física). Por tanto, sabemos muy poco o casi nada de la esencia (o verdadera naturaleza) del espacio porque, en realidad, no tenemos bases para suponer que la geometría euclidiana es la única ciencia del espacio y que nos da acceso al conocimiento de su naturaleza esencial.

Lo que hace Gauss en este caso es otra vez, como en los anteriores analizados, omitir otra vez las certezas metafísicas y dejar los hechos matemáticos en bruto, porque se da cuenta que de ellas se desprenden interpretaciones de la geometría, en este caso, su exclusividad como ciencia de la verdadera naturaleza del espacio.

Es posible que en este comunicado Gauss estuviera pensando en el trabajo de Saccheri, particularmente, en las conclusiones que él deriva.

Desde esta perspectiva cabe la pregunta ¿Qué fue lo que hizo Gauss, que parece que no hizo Saccheri?

Gauss, indudablemente gozaba de una gran inteligencia y talento natural; tenía sin duda una gran intuición matemática, que además fue cultivando. No obstante, en sus reflexiones se pueden distinguir ciertas estrategias que tienen que ver con el manejo consciente de sus eec, que le brindaron condiciones para interpretar la geometría como una disciplina integral y de gran potencial aplicativo. Pensamos que, entre otras cosas, esto hace una gran diferencia con Saccheri, quien quizás manejó de manera reactiva sus eec, como ya se explicó.

4.8.2.3.2 Gauss: una gestión consciente de sus eec que tienen como consecuencia la resignificación de la geometría

Algunas de las estrategias que Gauss empleó en relación con el manejo consciente de su eec y a las que ya se ha hecho referencia en los episodios analizados son entre otras:

Reflexionar sobre las necesidades de seguridad epistémica que han quedado pendientes en el trabajo geométrico y las que ya se han resuelto. Es consciente de las necesidades epistémicas fundamentales: preservar los criterios de rigor y fundamentar las matemáticas desde ahí (lo que Fischbein (1982) y Foster (2016) llaman 'buena calibración'). Poner atención y verificar que los objetivos que se plantean para cubrir las necesidades realmente las cubran.

Reflexionar muy críticamente sobre los problemas matemáticos que la comunidad se propone resolver y que surgen a partir de las necesidades no resueltas y de las que la comunidad considera que ya están atendidas.

Detenerse a pensar sobre lo que cree y lo que duda; sobre lo que creen y lo que dudan sus colegas. Tomar conciencia de los eec que surgen en él a partir de la satisfacción o no de sus necesidades en función de si se alcanzaron o no sus objetivos. Percatarse y reflexionar sobre los eec de sus colegas. Identificar las diferencias entre la manera de convencerse que tienen sus colegas y las que él tiene. Estar al pendiente de lo que le informaban sus dudas y sus certezas.

Deliberar sobre los planes de trabajo que pretende desarrollar para cubrir necesidades que no han sido satisfechas o para consolidar una necesidad satisfecha y sólo después de eso, realiza los trabajos matemáticos.

Separar las certezas metafísicas de los hechos de las matemáticas (como ya se ha visto en los dos episodios). Las certezas metafísicas son como un 'velo'. Lo que hace Gauss es descorrer ese velo y dejar al desnudo los hechos de las matemáticas y analizarlos con herramientas matemáticas

Tomar conciencia de cómo las certezas (y otros eec) de contenido metafísico pueden determinar una perspectiva, una manera de significar y entender los hechos de las matemáticas y que esto influye en las decisiones matemáticas y en el trabajo matemático. Incluso esas certezas pueden influir sobre el rigor o el 'verdadero espíritu científico'.

4.8.2.3.3 Consecuencias de un trabajo de gestión consciente sobre el avance de la geometría

El trabajo de gestión consciente de sus eec que llevó a cabo Gauss tuvo consecuencias positivas, redundando sobre todo en su flexibilidad cognitiva. Ese trabajo de gestión parece haber creado buenas condiciones para:

Formular nuevas preguntas (¿la geometría euclidiana es verdadera? ¿la geometría euclidiana es la única posible?)

Generar nuevos significados y comprensiones de los nuevos resultados de la geometría; cambiar de perspectiva (considerar la posibilidad del poder aplicativo de las geometrías no euclidianas)

Proponer objetivos distintos para satisfacer necesidades no resueltas (eg., hacer mediciones geodésicas para verificar la euclicidad del espacio);

Ser capaz de soltar las certezas metafísicas preeminentes y construir otras sobre bases matemáticas. Por ejemplo, se atrevió a sustituir las convicciones metafísicas por reflexiones hondas y de alcances insospechados, que ampliaron las perspectivas de la geometría y dejaron ver los propios alcances del conocimiento humano. Y cuando lo que está en juego es algo con ese nivel de importancia, no resulta un ejercicio despreciable.

Romper con certezas irrefutables. Es bien conocida su escisión con las posturas metafísicas kantianas (aunque claro ¡sólo en lo que respecta a la geometría!). Pero también rompe con otras posturas, como por ejemplo, se deslinda de una nueva geometría no euclidiana, naciente, que fundamentaba su validez sólo en el discurso lógico (como Lampert o Taurinus). Y si bien no publicó por temor a las críticas de los Boecios, sí se atrevió a romper con certezas sólidas, fijas, que permanecieron inamovibles por milenios.

Generar nuevas intuiciones matemáticas: por un lado, cuestiona las intuiciones provenientes de la geometría euclidiana (lo que resulta ‘natural’). De alguna manera, decapita a la geometría euclidiana, al cuestionar sus verdades auto-evidentes o intuiciones a priori que estaban a la cabeza. Y luego concibe la idea de que una estructura matemática que ‘rompe’ de tajo y de inicio con lo ‘intuitivo real’ puede, a la vuelta, tener alguna aplicación en la realidad. Y es posible que esto haya sido resultado de haberse percatado de que las ideas en las que se sustentaba la exclusividad de la geometría euclidiana como modelo del espacio físico y su carácter necesario y absoluto y a priori, carecían de bases matemáticas. Esas certezas estaban sustentadas en presupuestos metafísicos. Al omitir esos presupuestos, lo que queda de la geometría es como él mismo lo dice, una geometría distinta; es la que nos dibuja Gauss.

Considerar otras aproximaciones y re-significar las geometrías. En la segunda década del siglo XIX la comunidad había llegado ya a un cierto acuerdo de que el V era indemostrable. Pero Gauss interpretó esta dificultad lógica de manera distinta a como lo hacía una comunidad más bien perpleja. Él consideró la posibilidad de que la geometría euclidiana quizás no era la geometría del espacio e interpretó de manera distinta a la geometría no euclidiana, pensando en su posible aplicabilidad. Con una perspectiva amplia e integral, al final consideró a la geometría euclidiana como un caso límite de la no euclidiana (hiperbólica); la euclidiana estaba referida a espacios acotados, como los espacios terrestres, mientras la hiperbólica hace referencia a espacios mucho más grandes. Es posible que al final, después de sus trabajos en geometría diferencial, haya considerado la posibilidad, como dice Kline (viejo), de que si distintas geometrías que se contradicen entre ellas se adecúan al espacio físico, entonces resulta obvio que ninguna puede ser 'esencialmente' verdadera. A lo largo de sus reflexiones insiste en una idea, impensable en sus épocas: la inescrutabilidad del espacio. Así lo dice Bonola "Cuando en 1831 define las líneas paralelas y se percata de que no coinciden con la naturaleza de la línea recta que está contenida en Los Elementos, es probable que eso lo haya hecho pensar en nuestra imposibilidad de conocer la naturaleza del espacio" (Bonola, 1951, p. 79).

Lo antes dicho representan, en el marco de este escrito, evidencias que dejan ver cómo un manejo consciente de los eec puede influir en un avance en el conocimiento matemático.

Para concluir este apartado histórico, se acudirá a una cita de Kline. No hay mejor manera de terminarlo. Pareciera que en todo su argumento él tenía presente a Gauss, con su manera de gestionar consciente e inteligentemente sus eec; y tenía también presente otras formas de gestionar los eec que a lo largo de la historia han probado ser mucho menos eficaces y menos propicios para el avance del conocimiento matemático. Sostiene Kline:

> La evaluación de la matemática como un cuerpo de verdades era aceptado, en sentido literal, por todo ser pensante durante dos mil años; de hecho, prácticamente a través de toda la cultura occidental existente. Esta visión probó estar equivocada. Nosotros vemos ahora qué impotente o ineficaz o limitada es la mente como para reconocer las suposiciones o presunciones que hace. Sería más apropiado decir del hombre que él está más seguro de lo que cree, que afirmar que él cree en lo que es seguro. Al parecer nosotros deberíamos constantemente re-examinar nuestras convicciones más firmes, porque éstas son las más propensas a ser sospechosas. Porque ellas marcan más nuestras limitaciones que nuestros logros positivos. (Kline, 2009, p. 577).

4.8.3 Relación de documentos y referencias que Gauss hace con relación a sus trabajos en geometría no euclidiana

1. **Previo al 1799** Gauss da testimonio, años después, sobre sus posibles trabajos en geometría no euclidiana (gne) realizados durante este período: En una carta a Farkas Bolyai, en 1832 y En una carta a Schumaher, en 1848
2. **Carta a Farkas Bolyai** **(16 de diciembre del 1799)** Lamento mucho no haber utilizado nuestra proximidad para aprender más sobre tu trabajo en torno a los primeros fundamentos de la geometría (i). Ciertamente, me has ahorrado muchos esfuerzos inútiles…. (ii) Yo mismo he avanzado mucho en mi trabajo, pero el camino que he tomado no conduce tan bien a la meta que uno desea y la que dices tú haber alcanzado (iii) {la trayectoria que he recorrido me ha lleva más bien} a dudar de la verdad de la geometría (iv). Para estar seguro (v), he encontrado muchas cosas (vi) que la mayoría ya considerarían como una prueba, pero que en mi opinión no demuestran NADA (vii). Por ejemplo, si uno pudiera probar la existencia de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que cualquiera dada (viii), entonces estaría en condiciones de probar la totalidad de la geometría (ix)de manera completamente estricta (x). Pero incluso, si uno elimina los tres puntos finales de un triángulo en el espacio, el área siempre estará por debajo de un límite dado (xi). Tengo varias proposiciones de este tipo, pero en ninguna encuentro nada satisfactorio (xii). (Gauss, 1900, p. 159). **En otra versión se traduce:**

… más bien el camino conduce a poner en duda la existencia de la geometría… (Coxeter, 1977)
3. **Gauss recibe de Farkas Bolyai su *Theoria Parallelarum*** **(1804)**
4. **Notas personales de Gauss** **(1813)** En sus notas personales, Gauss anota el siguiente comentario: En la teoría de las paralelas no hemos progresado más allá de Euclides (i). Esta es una parte penosa de las matemáticas (ii), la que tarde o temprano tomará una distinta forma (iii) (Coxeter, 1977, p. 388).
5. **Carta a C. I. Gerling** **(1816)** Hace referencia al error en la prueba de Legendre sobre el postulado de las paralelas de Euclides. Comenta Coxeter (1977): "Es claro de ésta y otras cartas que Gauss ha comenzado a aceptar la posibilidad de una nueva geometría en la que hay una unidad absoluta de medida que llama 'la constante', algo análogo a los radianes, que es una unidad absoluta para el ángulo. Es probable que también comentó esto con Watcher (un alumno suyo en Gottinga) quien le responde: "Si tu geometría anti-euclidiana es verdadera ¿por qué la constante permanece indeterminada?" (Coxeter, 1977)
6. **Recensión publicada por Gauss** **(1816)** Gauss publica una recensión en el que cuestiona un escrito en el que se proponía fundamentar la geometría de un modo puramente lógico, con base en definiciones, los principios de identidad y de tercio excluso. Ahí sentencia Gauss: … que (esos medios lógicos que se emplean en la presentación y encadenamiento de las verdades de la geometría) no logran de por sí ningún rendimiento, y sólo echan flores estériles si no reina en todas partes la fructificante intuición viva del objeto, esto no lo negará nadie que esté familiarizado con la esencia de la geometría (Sholz, 2005).
7. **Carta a Olbers** **(28 de abril de 1817)**

Cada vez llego más y más a la convicción de que la necesidad física de nuestra geometría euclídea no puede ser demostrada, al menos no por la razón humana ni para la razón humana. Quizás en otra vida alcancemos una visión distinta de la esencia del espacio, que nos resulta inalcanzable por ahora. Hasta entonces, no debemos situar a la geometría en la misma clase que la aritmética, que se sostiene puramente a priori, sino con la mecánica. (Gauss, 1900; Kline, 1972, p. 1152)
8. **Carta a Gerling** **(25 de agosto de 1818)** Me alegra que tengas el coraje de expresarte como si reconocieras la posibilidad de que nuestra teoría de las paralelas, y con ella toda la geometría, pudiese ser falsa (Reventós & Rodríguez, 2007)
9. **Carta a Gerling** **(16 de marzo de 1819)** Solo quiero remarcar que he desarrollado la geometría astral tan lejos que puedo resolver completamente todos los problemas, una vez la constante C esté dada (Reventós & Rodríguez, 2007)
10. **mediciones terrestres hechas por Gauss** **1820 (aprox)**
11. **Carta a F. A. Taurinus** **(Noviembre de 1824)** Estoy de acuerdo con su prueba, de que la suma de los tres ángulos de un triángulo plano no puede ser mayor que 180. Muy diferente se comporta el caso en el que la suma de los ángulos es inferior a 180. Este es el nudo real, el acantilado en el que todo falla. Yo he trabajado por más de 30 años en el caso de que la suma de los ángulos sea inferior a 180º, y no creo que alguien haya hecho más trabajo que yo. La suposición de que la suma de los ángulos es menor que 180º conduce a una geometría muy diferente a nuestra propia geometría (euclidiana). (Esta geometría) es completamente consistente en sí misma y la he desarrollado de manera bastante satisfactoria para mí, de modo que puedo resolver todo con la excepción de la determinación de una constante que no se puede determinar a priori. Cuanto más aumenta esta constante, más se acerca a la geometría euclidiana y un valor infinitamente mayor los hace coincidir. Las leyes de esta geometría parecen ser en parte paradójicas para los no expertos, pero en una reflexión más cercana y tranquila, uno encuentra que no contienen absolutamente nada imposible en sí mismas. Por ejemplo, los tres ángulos de un triángulo pueden llegar a ser tan pequeños como se pueda desear, si solo se permite que

los lados sean lo suficientemente grandes; sin embargo, el contenido plano de un triángulo, sin importar qué tan grandes sean los lados, nunca puede exceder un cierto límite. Todos mis esfuerzos por encontrar una inconsistencia, una contradicción en esta geometría no euclidiana (Nicht-Euklidische Geometrie) han sido infructuosos, y lo único que se resiste a nuestra comprensión es que si (la gne) fuera verdad, en el espacio existiría un segmento lineal (geométricamente) definido, si bien desconocido para nosotros. Sin embargo, me parece que si prescindimos de la inútil sabiduría verbal de los metafísicos, sabemos muy poco o casi nada de la esencia (o verdadera naturaleza) del espacio: no podemos confundir lo que ocurre de forma poco natural con lo absolutamente imposible (Gauss, 1900 & Lombardo-Radice, 1974, p. 34) Si la geometría no euclidiana fuera la verdadera, y si aquella constante estuviera ligada de algún modo a las cantidades que caen en el dominio de nuestras mediciones sobre la tierra o en el cielo, sería posible determinar esa constante a posteriori. Por esto, a veces he expresado en broma el deseo de que la geometría euclidiana no fuera verdadera (en el mundo real), porque entonces tendríamos una medida universal a priori y podríamos adoptar como unidad de longitud el lado del triángulo equilátero de ángulo 59°59′59′′ (Montesinos, 2012). (Menciona la existencia de una constante, unidad absoluta de longitud, cuyo valor no se puede fijar a priori. V. Ursini, 2001) Idea de medida absoluta de longitud: no existe en la euclidiana pero sí en las no euclidianas y parece que coincide con la constante,
(12). **Carta de Gauss 1825 C. A. Hansen** **11 de diciembre de 1825** … esta memoria (refiriéndose a las Disquisiciones) nos lleva a un plano impredecible… Aquellas investigaciones están profundamente interrelacionadas con mucho más, yo diría que con la metafísica del espacio[24], y encuentro difícil sacudirme las consecuencias de ello (tomado de Sholz (2005))
13. **Segunda versión de las Disquisiciones** **(1828)** Aparece el teorema egregio y aparece el teorema sobre la suma angular en triángulos formados por geodésicas, donde le da un significado -relacionado con la curvatura- a la constante K que surge en la ecuación en la que se muestra que el área de un triángulo es proporcional al exceso de la suma interior de sus ángulos con 180º, que habían derivado Bolyai y Lovatchevskii.

[24] En este caso el término ‘metafísica del espacio’ no tiene una connotación negativa; de acuerdo con la interpretación de Ferreirós, con la que concordamos, denota lo que se pudiera entender como los fundamentos lógicos y epistemológicos del espacio.

14. **De las Notas de Gauss** **(1828)** Gauss ofrece una prueba, independiente del postulado de las paralelas, de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que o igual a 180º. En el mismo espíritu, el continuó con la prueba de muchas de las proposiciones del Libro I de Euclides (Coxeter, 1977).
15. **Carta a Besel** **(27 de enero de 1829)** Mi convicción de que no podemos establecer completamente una geometría a priori se ha vuelto más fuerte. Mientras tanto, pasará probablemente un tiempo antes que empiece a preparar mis muy extensas investigaciones sobre (la gne) para publicarlas; tal vez esto no pasará nunca mientras yo viva ya que temo el griterío de los beocios. (Reventós & Rodríguez, 2007) (nota: los beocios eran los nativos de Beocia, en la antigua Grecia, célebres porque sus ejércitos atacaban gritando. Aquí se aplica a los metafísicos neokantianos)(Reventós & Rodríguez, 2007)
16. **Carta a Besel** **(9 de abril de 1830)** Debemos admitir humildemente que, si bien el número es meramente un producto de nuestras mentes, el espacio tiene una realidad fuera de nuestras mentes y sus leyes no las podemos saber a priori (Reventós & Rodríguez, 2007)
17. **Obra de Gauss sobre números complejos (1831)** Ahí Gauss afirma: … no se comprende cómo este agudo filósofo creyó … que el espacio es sólo la forma de nuestra intuición externa, cuando … se establece con tanta claridad lo contrario, que el espacio debe tener una referencia real al margen de nuestra forma de intuición (Sholz ,2005)
18. **carta a H. K. Schumacher** **(1831)** Gauss comenta acerca de su propio ensayo titulado *Líneas Paralelas*, no publicado, y escribe: “Después de meditar cerca de cuarenta años sin escribir algo al respecto. . . he empezado, por fin, a poner por escrito algunos de mis pensamientos para que no mueran conmigo”. (Coxeter, 1977, p. 389). En este ensayo Gauss da, entre otras, una definición de líneas paralelas, demuestra que

esta propiedad es simétrica y transitiva y define puntos correspondientes sobre dos paralelas. (Ursini, 2001)
19. **Carta a Farkas Bolyai** **(marzo, 1832)** Gauss le dice a su amigo: Si comenzara diciendo que soy incapaz de alabar esta obra (*La Ciencia Absoluta del Espacio*, publicada por su hijo, Janos Bolyai) sin duda quedarías sorprendido. Alabar la obra sería alabarme a mí mismo, pues todo su contenido, el camino seguido por tu hijo, los resultados obtenidos, coinciden casi completamente con mis meditaciones, que me han ocupado parcialmente durante estos últimos treinta o treinta y cinco años. En la carta Gauss le manda a Farkas Bolyai también una prueba puramente geométrica de siete pasos de que la suma de los ángulos internos de un triángulo difiere de 180º por una cantidad proporcional al área del triángulo (Sholz, 2005; Ursini, 2001)
20. **Carta a Schumacher** **(28 de septiembre de 1846)** Gauss le comenta: Lo que Schweikart llamó geometría astral y Lobachevski lo llamó geometría imaginaria, yo lo albergo desde hace ya 54 años con la misma convicción; por ello no he encontrado en la obra de Lobachevski nada que fuera materialmente nuevo para mí, pero su desarrollo, en un verdadero espíritu geométrico, es diferente del camino que yo seguí (Sholz, 2005; Reventós & Rodríguez, 2007) (aunque Sholz (2005) afirma que no hay confirmación de esta fecha y la más probable es entre 1798 y 1802).

Tabla 3.1. Relación de documentos y referencias de Gauss

CAPÍTULO V LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

5.1 MARCO TEÓRICO INTERPRETATIVO PARA LA COMPETENCIA EN ÁLGEBRA

Una pregunta central de este escrito consiste en averiguar condiciones bajo las cuales los estados epistémicos de convencimiento (eec) pueden coadyuvar para un avance en la competencia matemática en contextos escolares (correspondiente a la pregunta 5 de este trabajo de investigación). Para el análisis de la competencia matemática se ha recurrido a un marco teórico específico, desarrollado por otros autores, ya que el objetivo del presente trabajo no se centra en la construcción de dichos marcos.

En este estudio, los datos empíricos elegidos sobre aprendizaje matemático versan particularmente sobre la resolución de ecuaciones lineales; para el análisis de la competencia en este tema se escogió el marco propuesto por Sfard & Linchevski (1994). Siguiendo las ideas de las autoras, en este trabajo se considera que un estudiante muestra una competencia estructural en la resolución de ecuaciones cuando se aplican correctamente algoritmos aceptados por el álgebra escolar (como la trasposición de términos), se justifican esos algoritmos acudiendo a consideraciones matemáticas (e. g. justificar la trasposición con las propiedades de la igualdad), se obtiene el valor correcto de la incógnita y se sustituye ese valor en la ecuación original para verificar que la igualdad se cumple. En cambio, se dirá que una persona muestra una competencia pseudoestructural en la resolución de ecuaciones, cuando esa persona aplica correctamente algoritmos aceptados por la matemática escolar para obtener el valor correcto de la incógnita, pero las reglas que conforman esos algoritmos no se justifican de forma razonable y la expresión x=número se interpreta como señal de detención. Adicionalmente, se apuntará que un alumno muestra total incompetencia cuando las reglas del algoritmo que él aplica para resolver ecuaciones no son correctas, cuando aplica incorrectamente reglas aceptadas por la matemática escolar (e. g. al realizar incorrectamente operaciones) y/o no obtiene el valor correcto de la literal. Por otra parte, se dirá que un estudiante progresa en su competencia operatoria cuando muestra avances al aplicar correctamente un algoritmo aceptado por la matemática escolar (e. g. realizar correctamente operaciones), al corregir reglas incorrectas de un algoritmo discorde a los criterios matemáticos aceptados y/o al obtener la solución correcta de la ecuación.

5.2 ANÁLISIS DE LOS DISTINTOS TIPOS DE COMPETENCIA QUE MOSTRÓ L

En este apartado se hace un análisis detallado de los distintos tipos de competencia que mostró L en una serie de interacciones que tuvo con su tutor, en las que él le planteó a la alumna tareas relacionadas con el tema de resolución de ecuaciones.

5.2.1 Primera participación del tutor y Laura: Una competencia pseudoestructural

Como antecedente, L contaba con una competencia pseudoestructural de la resolución de ecuaciones: ella aplicaba correctamente la trasposición de términos para obtener el valor correcto de la incógnita en una ecuación, pero sin ningún sustento e interpretaba a la expresión x=número como señal de detención. La meta del tutor era que L avanzara hacia una competencia estructural de la resolución de ecuaciones en la que la alumna lograra sustentar la trasposición de términos con base en las propiedades de la igualdad. Con el fin de avanzar en ese objetivo, el tutor colocó la siguiente tarea:

Seguramente hemos resuelto una ecuación, pero ¿hemos reflexionado sobre su significado y su utilidad? Realicemos lo siguiente.
Si un bote Amarillo pesa 2kg; un bote verde pesa 4kg; una caja morada pesa 1kg.
a) ¿La balanza se encuentra en equilibrio?; b)¿Cómo se perdería el equilibrio?; c) Si se desequilibra la balanza, ¿Qué se debe hacer para lograr nuevamente el equilibrio?; d) Usando lo anterior. ¿Cómo le explicarías a un educando el procedimiento para conocer el peso de la esfera verde?

En esa tarea, el tutor sugirió a L reflexionar sobre el significado que ella le daba a la resolución de ecuaciones. En principio, él esperaba que cuando L respondiera los incisos a), b) y c), la estudiante abandonara temporalmente la trasposición de términos y usara el modelo de equilibrio y desequilibrio de la balanza para obtener el valor de la incógnita que se solicita en el inciso d). Luego, se esperaba que L usara ese modelo para sustentar la trasposición y así ella avanzara hacia una competencia estructural. Ante la intervención del tutor, L respondió:

P1: 9= 7+x;
P2:
a) hacemos el famoso "despeje",
b) si 7 está sumando pasa restando, y queda así:
c) x=9-7;
d) x=2.

En su participación L ignoró las instrucciones del tutor de aplicar el modelo de equilibrio y desequilibrio de la balanza para obtener el valor de la incógnita. En su lugar, la estudiante mantuvo la versión pseudoestructural de la resolución de ecuaciones a la que solía recurrir: ella aplicó correctamente el algoritmo de la trasposición para obtener el valor correcto de la literal, pero soportado en un sustento extra-matemático (por famoso) y la obtención de la expresión x=número actuó como señal de detención (i.e. no sustituyó el valor de la literal en la ecuación original).

5.2.2 Segunda participación del tutor y Laura: De una competencia pseudoestructural a la total incompetencia en la resolución de ecuaciones

Ante el hecho de que L ignoró las instrucciones de la tarea relacionadas con el modelo de la balanza, el tutor publicó:

Una vez planteada la ecuación acostumbramos a usar “trasposición de términos” pero ¿por qué funciona? Para averiguarlo realicemos la siguiente actividad. Da clic en el interactivo, arma la ecuación en la balanza y llega a la solución. Describe paso por paso cómo llegaste a la solución. Por ejemplo: -2x-4=4x-4; para dejar sola a la x realizo lo siguiente: a) sumo a ambos miembros 4; b) la ecuación nos queda: -2x=4x; T4; c) sumo a los dos miembros 2x; d) la ecuación nos queda: 0=6x; e) divido a los dos miembros entre 6; f) la ecuación nos queda: 0=x. La solución es 0!!!

En esa tarea, el tutor explicó a sus estudiantes cómo aplicar las propiedades de la igualdad para resolver una ecuación. El objetivo del tutor era que L obtuviera el valor correcto de la literal después de aplicar correctamente las propiedades de la igualdad. Ante la ecuación -3x+3=4x-4, L respondió:

-3x+3=4x-4 *Paso* 1: Propiedad de igualdad: sumar un mismo número a ambos miembros de la igualdad. -3x=x+8 Al sumar +6 -3x+6= x+8+6;	*Paso* 2: 3x = 14x al restar -3x, 3x-3x= 14x-3x; *Paso* 3: x = 11x x/11=11x/11 *Paso* 4: 0=x; Entonces x= 0!!!	*Paso* 5: Yo encontré que en todas las ecuaciones aplica la propiedad de igualdad en la suma y la resta, sin embargo, hay casos en los que no aplica la multiplicación ni la división.

En comparación con su participación anterior, L disminuyó su competencia en torno a la resolución de ecuaciones al mostrar total incompetencia cuando trató de resolver la ecuación con las propiedades de la igualdad. Indicadores de esa incompetencia son el que la estudiante no obtuvo el valor correcto para "x" y que al tratar de aplicar las propiedades de la igualdad ella realizó incorrectamente las operaciones. Adicionalmente, en el paso 5, L introdujo una regla discorde a la acepción aceptada según la cual en la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad "no aplica la multiplicación ni la división".

5.2.3 Tercera participación del tutor y Laura: De una total incompetencia a un avance en la competencia operatoria

En un nuevo intercambio, el tutor solicitó a L usar las propiedades de la igualdad para resolver: -9x+4=12x-15. Él esperaba que, con respecto a su participación anterior, L avanzara en su competencia operatoria en torno a la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad al obtener el valor correcto para la incógnita después de aplicar correctamente las propiedades de la igualdad y suprimir su regla de no aplicar las estructuras multiplicativas. Ella respondió así:

Paso 1: -9x+4=12x-15, -9x+4-4=12x-15-4;	*Paso 4*: -6x=15x-19;	*Paso 8:* UF!! Esto lo hice varias veces y siempre me dio el mismo resultado, asi que estoy segura de mi ejercicio. ¡Gracias!
Paso 2: -9x=12x-19; *Paso 3:* -9x+3x=12x+3x-	*Paso 5*: -15x-6x=-19; *Paso 6:* -21x=-19	

19		

Con respecto a su participación anterior, L mostró en el paso 1 un avance operatorio en la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad, al aplicar correctamente dichas propiedades para un término independiente y aunque, si bien, en los siguientes pasos la estudiante no aplicó esas propiedades correctamente, ella no cometió errores operatorios. Sin embargo, la alumna siguió actuando a favor de la divisa según la cual al resolver ecuaciones con las propiedades de la igualdad las estructuras multiplicativas no aplican, cuando en P6 ella no ejecutó una división que la condujera a obtener un valor numérico para la literal (i.e. x=número).

5.2.4 Cuarta participación de Laura: Potencial avance operatorio (y conceptual) en la resolución de ecuaciones

En una siguiente intervención, sin que el tutor lo pidiera, L expresó la siguiente reflexión:

> i) A mi …me surgió… la duda, ii) porque a pesar de aplicar varias propiedades de la igualdad (suma, resta, multiplicación) siempre obtuve el mismo resultado, por eso estoy segura de mi ejercicio. iii) Pero también me quedé pensando si no me faltó aplicar otra igualdad, ¿tu crees que sea así? Compañeros ¿nos pueden ayudar?

Cuando en iii) L deliberó sobre si le faltaba aplicar otra propiedad de la igualdad en la resolución de la ecuación que publicó en su tercera participación, en esta cuarta, L presentó un potencial avance en su competencia operatoria (y quizás incluso, conceptual). Y es que, esa reflexión le ofreció la oportunidad cognitiva de cambiar su regla enunciada al final de su segunda participación, según la cual en la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad se rechazan las estructuras multiplicativas, abriendo la posibilidad de incluir dichas estructuras. Con esto, en el futuro L muy probablemente conseguirá un avance operatorio -entre otras cosas, porque le permitirá lograr el objetivo de obtener x=número al aplicar dichas estructuras en su resolución- y logrará un avance conceptual –al comprender la lógica que subyace a los procesos de resolución.

En resumen, resalta que, respecto de su segunda intervención, en una tercera la alumna mostró un avance en su competencia operatoria de la resolución de ecuaciones. Específicamente, ella dejó de cometer errores al realizar operaciones cuando trató de aplicar las propiedades de la igualdad. Adicionalmente, en su cuarta participación, la alumna dejó ver un potencial avance en su competencia conceptual en relación con su tercera intervención. En particular, ella abrió la puerta para modificar una regla incorrecta (una regla *ad hoc*) que enunció en su segunda participación (v. Paso 5), según la cual la aplicación de las propiedades de la igualdad se restringe a las estructuras aditivas.

5.3 CARACTERIZACIÓN DE LOS EEC DE L Y SU IMPACTO PARA LOS DISTINTOS TIPOS DE COMPETENCIA MOSTRADOS

En este Capítulo se ofrece una respuesta a la pregunta 5:

¿Cuáles son las condiciones bajo las cuales los estados epistémicos de convencimiento (eec) pueden coadyuvar para un avance en la competencia matemática en contextos escolares?

Para responder a esa pregunta es necesario contestar a las siguientes:

1.-¿Por qué L en su tercera participación avanzó a nivel procedimental?

2.-¿Por qué L en su tercera participación no logró transitar de una competencia pseudo estructural hacia una competencia estructural?

3.-¿Cuáles fueron las condiciones para que L mostrara ese avance adicional en la cuarta participación?

En lo que resta de este Capítulo se da respuesta a estas preguntas específicas para finalmente, responder a la pregunta 5.

Para ello, se hace un análisis de la trayectoria asociada a los eec que experimentó L, con base en las mismas categorías conceptuales que se emplearon en los análisis históricos expuestos en el Capítulo precedente y siguiendo la misma lógica de la exposición.

En la Tabla 4 se delinea esa trayectoria de los eec de L que se identificó tanto en la tercera participación de la alumna como en la cuarta participación. [25]

5.3.1 Antecedentes de la Tercera y Cuarta participación

Como se dijo, en sus intervenciones previas L dejó ver, en general, un enfoque pseudo estructural de la resolución de ecuaciones. Asociado a ese enfoque L manifestó ciertas competencias matemáticas (con sus limitaciones), como ya también se detalló. Pero ligado con ese enfoque L mostró también un conjunto de certezas, en forma de prescripciones, que orientaron sus procesos de resolución de ecuaciones. Específicamente, las que puso en juego en sus participaciones previas (la primera y segunda) se enlistan a continuación.

En la participación 1 (en la que mostró competencia pseudoestructural de la resolución de ecuaciones) L mostró certeza en la veracidad de la resolución a una ecuación cuando:

- Se aplica un algoritmo escolar –con sustento extra-matemático-
- Se realizan operaciones correctamente
- Se obtiene una expresión de la forma x=número –sin sustituirla en la ecuación para verificar la igualdad-
- Se obtiene siempre el mismo resultado

[25] Concretamente, en la primera columna se especifican los componentes (o categorías) que integran la trayectoria, en la segunda y tercera columna se describe con base en esas categorías la tercera participación de L, y en la cuarta y quinta columnas se hace lo propio, pero con la cuarta participación de la estudiante. El análisis se inicia con la tercera participación (ver segunda columna de Tabla 4).

En la participación 2 (en la que mostró incompetencia de la resolución de ecuaciones con las propiedades de la igualdad), L mostró certeza en la validez de la resolución a una ecuación cuando:

- Aplica propiedades de la igualdad
- Se restringe la aplicación de las propiedades de la igualdad a las estructuras aditivas

Sus competencias matemáticas en conjunción con ese bagaje de prescripciones forman una red, que aquí se le denomina 'red matemático conceptual de competencia pseudo estructural', o simplemente 'red mc'.

A lo largo de todas sus participaciones L dejó ver -a veces de manera implícita y a veces en forma implícita- su necesidad (N) de tener seguridad en la corrección del ejercicio (en el procedimiento, operaciones y resultado).

Esa necesidad de seguridad epistémica N está presente en todas las actividades matemáticas de L y en particular, en su respuesta a la tarea que formula el tutor en la tercera participación.

Para cubrir esa necesidad de seguridad epistémica N, L muestra la inclinación a ser fiel a todos los objetivos de su red mc, pero en particular parece poner atención al objetivo (implícito) de llegar a una solución x=número (O1). Bajo estos términos, L lleva a cabo el trabajo matemático que cree pertinente.

5.3.2 Tercera Participación

En su tercera participación, L no consigue obtener una solución en la forma x=número (paso 6).

En el paso 8 de esa intervención, la alumna deja ver que no ha logrado satisfacer alguna necesidad; una muestra ostensible de su incomodidad es la presencia del mitigador ¡Uf! al inicio de la participación.

Aquí surgen tres preguntas pertinentes: ¿Qué necesidad no está satisfecha? ¿Qué objetivo L valoró como no complido que provocó en ella esa insatisfacción? Y ¿Qué hizo L entonces para satisfacer esa necesidad?

La primera y la última pregunta la contesta directamente L:

L comenta en el paso 8 que la repetición del ejercicio y el haber obtenido siempre el mismo resultado le dio seguridad de su ejercicio. Esto significa que en algún momento previo ella sintió que no estaba satisfecha su 'seguridad en su ejercicio' (i.e., su necesidad de seguridad epistémica N en torno a la resolución propuesta entre los pasos 1 al 6). En ese comentario del Paso 8 también deja ver que el objetivo (O2) que se propuso para cubrirla fue verificar si 'siempre le daba el mismo resultado' a través de la repetición (en un posible paso intermedio entre el 6 y el 8: P6 y P8). O dicho de otro modo; si L hubiera valorado como satisfecha su necesidad N (del Paso 1 al Paso 6), no se podría explicar por qué repite el ejercicio y por qué afirma que eso le dio seguridad. Y tampoco se podría explicar la presencia del mitigador. Así que L sintió que su necesidad de seguridad N no estaba satisfecha (entre el Paso 1 y el Paso 6) y para cubrirla se planteó O2.

Falta descubrir cuál fue el objetivo que L valoró como no alcanzado y que disparó en ella la insatisfacción de esa necesidad N. Se considera que es justo el objetivo O1 (el formato de las soluciones es x=número), ya que en el P6 no lo pudo conseguir y ella expresa su duda inmediatamente después.

Así que lo que se argumenta en este escrito es que la trayectoria que siguió L después del P6 y hasta el P8 fue: en P6 no pudo obtener una solución de la forma x=número. El incumplimiento de este objetivo (O1) generó en ella la insatisfacción de su necesidad N (de dar una solución correcta del ejercicio). Esto desató en ella un estado de duda: como se ha dicho, en esta investigación se considera que cuando una persona valora como no satisfecha su necesidad de seguridad epistémica por no haber alcanzado un cierto objetivo, surge un eec negativo (que puede ser de duda). Para cubrir su necesidad N ella se plantea un nuevo objetivo O2, de verificación del resultado a través de la repetición. Ella realiza ese trabajo de repetición (entre P6 y P7) y valora como cumplido el objetivo O2; por tanto, su necesidad de seguridad N está satisfecha. Esto a su vez genera en ella un estado de confianza o seguridad en su ejercicio, como ella misma lo testimonia (en P8). De esto se desprende en ella una tendencia de aceptación de los resultados obtenidos y con base en todo lo anterior, detiene las acciones.

Con relación a la tercera intervención, y para poder contestar a la pregunta de investigación 5, formulada al inicio del presente Capítulo, se requieren analizar otros dos aspectos centrales: la calibración y la gestión. Los resultados del análisis se han anotado en la tercera columna de la Tabla 4.

En esta investigación se considera que una persona está bien calibrada con respecto a una proposición cuando experimenta eec positivos en torno a H's correctos (verdaderos, válidos), pero sobre todo, cuando basa su eec en objetivos, razones o warrants (siguiendo el modelo de Toulmin; Toulmin, Rieke & Janik, 1984) que son correctos o que concuerdan con las reglas matemáticas (o las de la matemática escolar).

Para el análisis de la calibración en L es necesario identificar el valor de verdad (o su adecuación con las reglas matemáticas) que tienen los objetivos, expresados como afirmaciones matemáticas, que L se planteó a lo largo de su tercera participación. El O1 (obtener una solución x=número) es correcto; el O2, como proceso general de verificación y bajo ciertas condiciones, es correcto y muy difundido en la práctica matemática, y por supuesto el O3 -que ella se plantea implícitamente en P8 (“siempre obtuve el mismo resultado”)- de realizar las operaciones de acuerdo con lo establecido por la matemática escolar, es correcto.

En el caso de la trayectoria de los eec de la tercera participación de L, hay un momento en el que se identificó una proposición bien calibrada: cuando L se muestra insatisfecha ante el resultado obtenido en P6 (resultado incompleto), y su insatisfacción la basa en una razón correcta: el O1 (ver fila 5 de la Tabla 4).

Hay en cambio, otro momento en el que L ya no muestra una buena calibración: cuando siente seguridad con respecto al resultado obtenido en P6 (resultado incompleto), y la basa en razones, en O2, que resultan concluyentes solo para ciertos casos.

Con relación a la gestión, también hay dos momentos distintos, uno con respecto a la duda de L, y otro con respecto a su seguridad.

De acuerdo con lo que se puede alcanzar a percibir en los datos empíricos, L aplicó la herramienta de repetición (entre P6 y P7, ver fila 6 y 7 de Tabla 4) de manera automática, a partir de que experimentó la duda. No da absolutamente ningún indicio de que haya deliberado sobre aquello que la condujo a la duda, sobre las necesidades y los objetivos no cubiertos, y sobre cuáles serían las mejores maneras (u objetivos) para, ahora sí, satisfacer esa necesidad; es decir, la repetición como objetivo para satisfacer esa necesidad no parece haber surgido como resultado de la deliberación consciente entre varias opciones y con base en consideraciones matemáticas. De hecho, de acuerdo con Kieran y Filloy (1989, p.233), repetir el ejercicio es la única herramienta con la que cuentan los estudiantes que no tienen una competencia estructural para verificar que una solución está bien obtenida. Entonces, la única opción que L tenía para verificar la veracidad de su ejercicio, limitada por su competencia pseudo estructural, era a través de la repetición. Y es que, de acuerdo con los autores, esos alumnos no parecen ser conscientes de que una solución incorrecta, si se substituye en la ecuación original, da origen a valores diferentes para el lado izquierdo y el lado derecho de la ecuación. Así pues, parece que L repitió el ejercicio de manera automática, sin que haya mediado una toma de conciencia de lo que generó su duda: sin percatarse de los objetivos no alcanzados (O1) que le impidieron satisfacer su necesidad de seguridad en el ejercicio y sobre cuáles eran las mejores maneras para cubrirla. Si ella hubiera tomado conciencia de ello (a pesar de que solo contaba con una competencia pseudoestructural) se habría dado cuenta de que lo único que hizo en P8 fue regresar, con una supuesta seguridad, al mismo punto al que llegó en P6, que fue en donde se originó su duda. Así que, en este caso, L gestionó su duda de manera reactiva.

Otro momento relacionado con la gestión y que es importante para el presente análisis se dio en el remate de su tercera participación (v. fila 8, Tabla 4). Ahí L explícitamente deja ver que toma conciencia de que se siente segura porque su necesidad N está satisfecha, debido a que logró el O2. No obstante, esta reflexión no la lleva a tomar conciencia de las decisiones y acciones posteriores -de aceptar el resultado en P6, después de la repetición, y detener las acciones- las que (parece que) realiza en automático y sin deliberación alguna.

Se está ahora en condiciones de responder a las preguntas 1 y 2 planteadas al inicio de este apartado 5.3:

¿Por qué L en su tercera participación avanzó a nivel procedimental?: entre otras posibles razones, pero una muy importante, es porque tuvo una duda bien calibrada que la llevó a realizar acciones acertadas: básicamente la llevó hacia O2, es decir, hacia la verificación de los resultados del ejercicio a través de la repetición, lo que coadyuvó en su intento por cumplir objetivos acertados al alcance de su competencia pseudo estructural (e. g., obtener una solución única). Además, en esa repetición del ejercicio muy probablemente ella corrigió errores al realizar las operaciones –que como se vio en sus anteriores participaciones era muy propensa a cometer. Con esto, la alumna cumplió otro objetivo: la demanda escolar de aplicar correctamente operaciones. De modo que el recurso de verificación (que coadyuvó a la consecución de objetivos congruentes con la matemática escolar), originado por una duda bien calibrada (aunque haya surgido en automático), favoreció el incremento en la competencia operatoria de L.

¿Por qué L en su tercera participación no logró transitar de una competencia pseudo estructural hacia una competencia estructural? Entre otras razones, pero una muy importante es que, aunque L tomó conciencia sobre los condicionantes que desencadenaron su seguridad (i.e., el haber logrado O2, i.e, repetir el ejercicio, lo que la llevó a sentir cubierta su necesidad de seguridad epistémica N y por tanto, a 'sentirse segura del ejercicio'), su seguridad no estaba bien calibrada (estaba segura de un resultado parcialmente correcto, el expuesto en P6, con razones que no siempre son suficientes, i.e., O2). Como se vio, esa seguridad suscitó en ella una tendencia automática hacia la aceptación de los resultados obtenidos mediante la repetición (que coincide con el expresado en P6, carente del formato x=número) y eso la llevó a suspender las acciones. Adicionalmente (como ya también se dijo) parece que L no tomó conciencia de la duda, que fue la que la llevó a esa repetición; de otra forma muy probablemente L no se hubiera sentido segura en torno al formato de P6, a pesar de la repetición; y es que eso fue justo lo que pasó después, como se verá en la cuarta participación: ahí L deja ver cómo se desvanece esa seguridad (en torno a P6), como resultado de un proceso de toma de conciencia. Así que, aunque su duda en P6 estaba bien calibrada (dudó de algo incorrecto), su duda no fue bien gestionada, porque parece no haberse percatado de ella y de lo que estaba en su origen. La repetición y los resultados a los que la llevó los realizó de manera mecánica, rutinaria y como la única opción posible. Como se verá en la siguiente participación, y a pesar de su competencia solo pseudoestructural, ella tenía más opciones… la toma de conciencia de sus propios procesos y de cómo ella estaba tomando decisiones.

5.3.3 Cuarta participación

En la cuarta intervención L mostró un avance adicional. Específicamente, en iii) la alumna abrió la puerta para modificar un objetivo incorrecto que se planteó al final de su segunda participación (O4) (que llamamos regla *ad hoc*), relacionado con restringir la aplicación de las propiedades de la igualdad a las estructuras aditivas. ¿Cuáles fueron las condiciones para que L mostrara ese avance adicional en la cuarta participación?

Para contestar a la pregunta 3, formulada al inicio de este apartado 5.3, se hace un análisis de la posible trayectoria de los eec que L experimentó durante la cuarta participación, de manera semejante a lo que se hizo para la tercera.

L inicia su participación expresando una duda.

¿De qué duda L? Duda de la resolución expuesta en la tercera intervención. En primer lugar, porque es lo único que le antecede (no hay otras intervenciones en el medio). Porque, además, de otra forma no se explica por qué en (ii) de la cuarta participación la alumna profundiza en las causas que le permitieron experimentar seguridad en los resultados obtenidos en la tercera intervención (el haber aplicado varias propiedades de la igualdad y haber obtenido siempre el mismo resultado).

Como se ha dicho, la duda surge asociada a una necesidad no resuelta. De lo expuesto en el párrafo precedente se desprende que la necesidad no saldada en L es la de seguridad en la corrección del ejercicio (expuesto en P6 de esa tercera participación). A pesar de que ella directamente ahí externó su seguridad en la corrección de ese ejercicio, por haber obtenido después de la repetición el mismo resultado (i. e, por haber conseguido O2), la duda que expresa en la cuarta intervención revela que el logro de ese objetivo O2 no fue suficiente para atender y resolver ahí, de manera terminante y concluyente, su necesidad de seguridad en la corrección de su trabajo. De manera que esa necesidad epistémica todavía no estaba saldada al inicio de la cuarta y eso dispara en ella una duda.

Esa necesidad epistémica no satisfecha indica que ella no ha logrado alcanzar un objetivo. Es del todo probable que, al igual que en esa tercera, esa insatisfacción que genera su duda de la cuarta participación esté directamente relacionada con no haber podido concretar el objetivo 1 (de obtener una solución de la forma x=número en la tercera); y es que para ella -así siempre lo demostró, como ya se dijo- este formato de solución era un objetivo ineludible.

Así que la duda que L expresa al inicio de la cuarta participación es resultado de que no fue satisfecha su necesidad de seguridad epistémica (en la verdad de la resolución propuesta en la tercera participación), debido a que no pudo conseguir ahí el O1, de llegar a x=número. (Ver fila 5, columna 4, Tabla 4. Lo explicado hasta ahora justifican las anotaciones que aparecen en las filas previas a la 5, para esa misma columna 4). Esta duda está bien calibrada, ya que su duda se refiere a un resultado (el dado en P6) que es incompleto, y se basa en el O1 que es correcto.

Esa duda inicial lleva a L otra vez a hacer una verificación en ii) de la cuarta intervención; pero en este caso ya no aplica la herramienta automática de la repetición, sino que la duda la lleva a verificar si en la tercera resolución (de la tercera participación) se alcanzaron ciertos objetivos que ella ahí se propuso y que la llevaron a sentir seguridad. En ii) de la cuarta intervención, constata que en la tercera alcanzó el O2, de encontrar el mismo resultado, cuando restringió la aplicación de las propiedades de la igualdad para el caso aditivo (O4). Apunta, según su propio decir, que de eso desprende su seguridad en la corrección de esa resolución, seguridad que también reportó en el Paso 8 de la intervención tercera. En este momento de la participación se presenta en L una gestión consciente de sus eec: identifica cómo de ciertos condicionantes -el logro de O2 y O4- ella consiguió pasar de la duda a la seguridad y a la vez, prácticamente reconoce que esa seguridad es exigua.

Inmediatamente después (en iii), aunque no lo hace explícitamente, L da muestras claras de un eec de duda; los mitigadores y su actitud de cuestionamiento ("pero me quedé pensando…"); la petición de que los otros valoren su proceder y su solicitud de ayuda, son algunas de esas muestras.

¿De qué duda L? ella (dice que) duda de su proceder (en su tercera resolución, que era la más próxima); en particular, en lo que se refiere al manejo de la regla O4 (según la cual la aplicación de las propiedades de la igualdad debe restringirse a las estructuras aditivas). Pero con ello, también pone en duda la veracidad de O4: en (ii) ella afirma haber aplicado 'suma, resta, multiplicación' y en (iii) sugiere la posibilidad de que le faltó aplicar otra ('igualdad'), que sería la división; esto significa que ella duda de la validez de O4, esto es, que considera la posibilidad de que las propiedades de la igualdad **no** deben restringirse solo a las estructuras aditivas, sino que deben incluir todas las operaciones aritméticas.

¿Cuál es el posible origen de la duda y qué posible proceso llevó a L a dudar de la verdad de O4? ¿Qué es lo que la lleva a esta actitud de apertura y flexibilidad? Para responder, es necesario todavía introducir algunas otras precisiones.

Esa duda en O4 no surge espontáneamente. Es del todo plausible suponer que esa duda se remonta hasta la duda que experimentó en el Paso 6 de la tercera participación. Por tanto, esa duda tiene ya una historia que L fue registrando. Esa historia versa sobre la sucesión de dudas y seguridades esporádicas que ella fue sintiendo a lo largo de sus participaciones; también versa sobre la forma en la que ella fue 'resolviendo' esas dudas (mediante distintos tipos de 'verificaciones': automáticas por repetición; comprobación consciente del cumplimiento de objetivos O2 y O4) con el propósito fallido de ganar completa seguridad. Y lo que permanece invariante en esa historia es una necesidad no satisfecha (N) en torno a la veracidad del ejercicio por no alcanzar el objetivo O1 de llegar a una solución de la forma x=número.

Aquí se sugiere que la duda que aparece en iii) de la cuarta participación es de alguna manera 'distinta' a la duda que L experimentó previamente, justo porque es resultado de una historia más rica, que cuenta con mayores elementos, que la historia que enmarcó sus dudas previas. Bajo esos antecedentes, y con una gestión consciente de lo que en ese momento le informaba su duda en iii), L pudo tomar conciencia de esa historia y pudo descartar como salida de la duda la repetición automática y la verificación de O2 y de O4; su buena calibración en torno a O1 y a O2, le impidió descartar esas certezas. Todo ello la llevó a cuestionar otro elemento central en esa historia, su regla ad hoc introducida en la segunda participación (O4). Y es así como su cuarta participación la remata haciendo una reflexión meta-cognitiva, en la que a través de cuestionar su proceder, pone en duda la veracidad de O4, pide la opinión de otros y solicita ayuda.

Haciendo una 'reconstrucción racional' de la posible trayectoria de los eec que experimentó L, se puede decir que ella en iii) de la cuarta participación dudó de su proceder en la tercera intervención -y con ello de O4- debido a que la necesidad de seguridad en esa resolución no estaba satisfecha, básicamente porque no había logrado O1 (i.e., una solución de la forma x=número). Y que esta duda sobre su proceder y sobre O4 fue resultado de un proceso de toma de conciencia de las experiencias de duda y de seguridad que había experimentado previamente de lo cual derivó como opción para alcanzar O1, poner en duda O4 y pedir ayuda.

El cuestionamiento en O4 le abrió la puerta a L para un potencial avance de su competencia pseudoestructural hacia una competencia estructural, en la medida en que su operatividad no se verá auto-limitada por una regla que frenaba su competencia matemática en la resolución de ecuaciones.

Como en el caso de Gauss -y por supuesto, considerando las enormes distancias y diferencias- L tuvo un pequeño avance en su competencia matemática debido a que experimentó una duda bien calibrada que acompañó con una gestión consciente de sus eec.

5.4 PROPIEDADES DE LOS EEC

Este pasaje de L deja muchísimas enseñanzas con relación a los eec:

Que se pueden experimentar casi sincrónicamente estados de seguridad y de duda en torno a un mismo resultado.

Que la duda es dinámica, que es muy posible que las personas lleven un registro de sus experiencias de duda y que a partir de ello pueden ir aprendiendo qué fue lo que les permitió resolverlas y cuáles condiciones no se lo permitieron.

Que acompañadas de una buena gestión consciente, la duda se puede ir auto-regulando, lo que le da a las personas que la experimentan la posibilidad de elegir la mejor opción, aún dentro de un repertorio muy limitado de opciones.

Que una gestión consciente de la duda incluso puede dar lugar a la flexibilidad de pensamiento y la apertura hacia nuevas opciones.

Para finalizar este Capítulo se hace mención de un aspecto que ha resultado relevante en este trabajo y que no se suele encontrar en la literatura sobre educación matemática. Se refiere a algunos signos que dejan ver las personas cuando experimentan eec.

5.4.1 Signos que las personas muestran ante la satisfacción o insatisfacción de una necesidad de seguridad en la veracidad de un H.

El caso de L deja ver algunos signos que las personas muestran ante la satisfacción o insatisfacción de una necesidad de seguridad de que un H sea correcto, verdadero o válido. En el paso 8 de la tercera participación, antes de que la alumna explicitara seguridad, ella recurrió al mitigador de lenguaje “!Uf!”; en cambio, cuando en esa misma participación la estudiante explicitó seguridad, ella dejó de recurrir a esos mitigadores del lenguaje y utilizó el modo indicativo de los verbos (e.g. estoy). De acuerdo con lo anterior, entre las respuestas que una persona puede poner en juego ante la satisfacción o insatisfacción de la necesidad de seguridad en la veracidad de un H, se encuentran elementos del habla alrededor de ese H. Cuando la necesidad de seguridad no está satisfecha las personas suelen recurrir a elementos del habla -conocidos como mitigadores- en torno al H; mientras que si esa necesidad está satisfecha, las personas pueden recurrir a elementos del habla llamados enfatizadores. Otro ejemplo de lo antes dicho se puede ilustrar con la cuarta participación. En (i) ella recurrió al lenguaje para explicitar una duda, la cual de acuerdo a la interpretación de este escrito, está relacionada con la corrección del ejercicio que ella publicó en su tercera intervención. En (ii) para profundizar en la seguridad, que en principio la alumna había experimentado en la tercera participación, ella recurrió a enfatizadores del lenguaje (e. g. el modo indicativo del verbo “estar”).

	Trayectoria genérica de los eec	**Tercera intervención de L**		**Cuarta intervención de L**	
1.	**Antecedentes y eec sobre H’s ligados a la tarea**	Preliminares generales: red matemático conceptual con enfoque pseudo	**O1:** correcto **O2:** correcto **O4:** incorrecto	O1: Que la solución correcta de una ecuación lineal debe aparecer en la forma x=número.	

		estructural de L que se observa en la primera y segunda participación Resaltan las certezas: **O1**: Se obtiene una expresión de la forma x=número **O2:** Se obtiene siempre el mismo resultado (correcto) **O4:** Se restringe la aplicación de las propiedades de la igualdad a las estructuras aditivas		O4: Que la aplicación de las propiedades de la igualdad debe restringirse a las estructuras aditivas. Aplicar las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones. Realizar correctamente las operaciones	
2.	*Marco interpretativo* Surgen: -Necesidades de seguridad epistémica (N1) -Objetivos (O1) que S se plantea para cubrir las necesidades (O1). Con base en lo anterior, S diseña planes de acción que presentan cierta tendencia hacia H.	**N**: necesidad de resolver la ecuación de manera correcta y de llegar a la solución correcta. Para satisfacer N se propone alcanzar los objetivos contenidos en la red mc, pero específicamente: O1: Encontrar una solución de la forma x=número (implícito)	O1: correcto	N: necesidad de resolver la ecuación (planteada en la tercera participación) de manera correcta y de llegar a la solución correcta.	
3.	S realiza *trabajos matemáticos* de acuerdo con objetivos O1, que buscan satisfacer necesidades N1	Lleva a cabo operaciones para resolver la ecuación. No logra O1 (llegar x=número)		Trabajo matemático realizado en la tercera intervención	
4.	S *valora* si alcanzó los objetivos O1 y si sus necesidades N1 están satisfechas (V1)	Valora que no se cumplió el objetivo O1 y que necesidad N no está satisfecha (se observa en sus acciones posteriores).		Valora que no se cumplió el objetivo O1 y que necesidad N no está satisfecha (se observa en sus acciones posteriores).	O1: correcto
5.	En función de la valoración V1, surgen en S **eec sobre H's**	Duda ("en el ejercicio") (en resultado expuesto en P6, y sustentada	Buena calibración	Duda en resultado expuesto en P6, debido a que se incumplió O1	Buena calibración

	ligados a la resolución	en que se incumplió O1).			
6.	*Marco interpretativo* Surgen: -Necesidades de seguridad epistémica (N2) -Objetivos (O2) que S se plantea para cubrir las necesidades. Con base en lo anterior, S diseña planes de acción que presentan cierta tendencia hacia H.	La duda hace referencia a una necesidad (**N**, de sentir seguridad en el ejercicio) no satisfecha Para cubrir N se inclina implícitamente por Objetivo 2 (O2): **Verificar**, a través de la repetición automática, que en su ejercicio se cumplieron objetivos de la red; en particular, que se obtuvo el mismo resultado.	**O2** correcto. Reacción automática (no hay toma de conciencia)	La duda hace referencia a una necesidad (N) de sentir seguridad en el ejercicio (publicado en la tercera participación) Para cubrir **N** se inclina por Objetivo 5 (**O5**): Verificar de manera consciente el cumplimiento de objetivos implicados en la tercera resolución (ya no recurre a la herramienta automática de repetir el ejercicio)	O5 correcto Reacción consciente
7.	S realiza *trabajos matemáticos* de acuerdo con objetivos O2, que buscan satisfacer necesidades N2	L repite el ejercicio	Gestión reactiva Para llevar a cabo la verificación la estudiante recurre a una herramienta automática.	Verifica explícitamente el cumplimiento de O4 a través de cumplimiento de O2. Verifica (implícitamente) incumplimiento de O1	Toma de conciencia del cumplimiento de algunos objetivos implicados en la resolución. Gestión consciente.
8.	S *valora* si cumplió objetivos O2 y si sus necesidades N2 están satisfechas (V2)	Valora explícitamente que obtuvo los mismos resultados, que ha alcanzado O2 y que N está satisfecha. Además, se cumple otro objetivo O3: realizar correctamente las operaciones	Toma de conciencia de que se siente segura debido a que su N está satisfecha porque logró O2 y muy probablemente porque logró O3.	Valora explícitamente cumplimiento de O4 a través de cumplimiento de O2. Valora explícitamente N satisfecha. Valora (implícitamente) incumplimiento de O1. Valora implícitamente N no satisfecha	Toma de conciencia que el cumplimiento de O2 y O4 la llevaron a satisfacer N y a experimentar a partir de eso seguridad. Gestión de sus eec consciente. No hay toma de conciencia de O1, y de cómo ese O1 le provoca la insatisfacción de N
9.	En función de valoración V2, surgen en S **eec sobre H's ligados a la**	'Seguridad en el ejercicio' (con base en O2, O3 y resultado expuesto en P6).	Mala calibración (seguridad en un resultado parcialmente incorrecto -en P6-	'Seguridad en el ejercicio (porque alcanzó O4 y O2) (explícita)	Mala calibración: (seguridad en un resultado parcialmente incorrecto -en P6-

	resolución		con razones que no son suficientes, O2)	Duda implícita del resultado (porque no se logró O1)	con base en razones incorrectas O4) Buena calibración: (duda en un resultado parcialmente incorrecto -en P6- con base en razones correctas O1)
10.	*Marco interpretativo* Surgen: -Necesidades de seguridad epistémica (N3) -Objetivos (O3) que S se plantea para cubrir las necesidades. Con base en lo anterior, S diseña planes de acción que presentan cierta tendencia hacia H.	Necesidad de sentir seguridad en el ejercicio cubierta (explícita) Tendencia automática de apego a los resultados encontrados (no se plantea otros trabajos matemáticos para alcanzar O1 (una solución x=número)	Gestión reactiva	La certeza hace referencia a la necesidad N satisfecha. La duda hace referencia a la necesidad N no satisfecha y a O1 no alcanzado. Predomina la duda: Tendencia de reflexión hacia los resultados encontrados Posible recapitulación de la historia de las dudas y las seguridades y de la forma de encarar esas dudas y de acceder a estados de seguridad, que inicia en tercera participación paso 6. **O5**: Inclinación hacia la verificación de la veracidad de O4 a través de la reflexión compartida	Gestión consciente Posible recapitulación de las experiencias de dudas y seguridades.
11.	S realiza *trabajos matemáticos* de acuerdo con objetivos O3, que buscan satisfacer necesidades N3	Se detiene el trabajo matemático	Gestión reactiva L preserva la necesidad satisfecha y no se plantea nuevos objetivos de verificación y trabajos matemáticos.	Reflexión sobre su proceder, verificación de la verdad de O4 (indirectamente) y solicitud de opinión y de ayuda	Metacognición sobre su proceder y la validez de O4

Tabla 4. Trayectorias de los eec, identificadas en de L

5.5 APUNTE DE LA ELECCIÓN DEL MARCO DE LA COMPETENCIA EN ÁLGEBRA

Para analizar la competencia en álgebra, en la presente investigación se recurrió al marco propuesto por Sfard & Linchevski (1994). En ese marco, se distingue una competencia en la que se aplican algoritmos de forma correcta, pero sin una justificación razonable (competencia pseudoestructural); de otra, en la que además de ejecutar manipulaciones correctamente, se les otorga una justificación matemática (competencia estructural). En investigaciones más recientes esa distinción sigue vigente. En particular, en palabras de Hoch & Dreyfus (2006), se espera que los alumnos no solo aprendan cómo aplicar manipulaciones algebraicas (conocimiento procesal), sino que además sepan cuándo y por qué aplicarlas (conocimiento conceptual).

Contrario a lo que los expertos esperan de la competencia de los alumnos en el álgebra escolar, a lo largo del tiempo se ha reportado que los estudiantes no muestran comprensión sobre cuándo y por qué aplicar algoritmos. Sfard & Linchevski (1994), por ejemplo, exponen el caso de un estudiante quien, para resolver una desigualdad cuadrática, aplicó mecánicamente la fórmula para resolver una ecuación cuadrática (p. 221). Asimismo, las autoras concluyen que, con respecto a la resolución de ecuaciones lineales, la gran mayoría de los alumnos no pueden proporcionar ninguna justificación razonable para las operaciones que aplican y que, para ellos, estas operaciones no son más que "reglas del juego" arbitrarias (p.222). Más recientemente, Hoch (2003) reporta el caso de un alumno que, al tratar de simplificar la expresión $4x+8$, dividió por 4 como si tratara de resolver una ecuación.

Para explicar el hecho de que los estudiantes no saben cuándo y por qué aplicar un algoritmo, tanto Sfard & Linchevski (1994) como Hoch (2003) y Hoch & Dreyfus (2006), coinciden en que los alumnos no analizan las expresiones algebraicas antes de aplicar algoritmos. A continuación se expone con más detalle las explicaciones que han ofrecido estos autores.

Para Sfard & Linchevski (1994), las expresiones algebraicas pueden interpretarse como objetos (un número, una función, una secuencia de instrucciones sobre las operaciones a realizar) o dejarse sin significado (una cadena de símbolos que no representa nada) (p.191). De acuerdo a las autoras, esas diferentes interpretaciones conducen a diferentes maneras de abordar un problema y a distintas soluciones (p. 192). Por ejemplo, ante una desigualdad cuadrática, un estudiante que suele dejar a las expresiones algebraicas sin significado, puede tener una reacción automática y aplicar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, únicamente guiado por la forma ax^2+bx+c de alguno de los lados de la expresión.

Para Sfard & Linchevski es importante que los estudiantes tengan la capacidad de interpretar las expresiones algebraicas de distintas formas (versatilidad) y aplicar esas interpretaciones en la resolución de problemas (adaptabilidad). Esto es un prerrequisito para que los alumnos sepan cuándo y por qué utilizar un determinado algoritmo (p.211) . Por ejemplo, en la resolución de ecuaciones lineales, la idea de realizar la misma operación a ambos miembros de la igualdad solo puede ser concebida para quienes los lados de una ecuación y las expresiones con las que se operan esos lados son objetos, mientras que el signo igual es un símbolo de equivalencia. Según las autoras, realizar la misma operación a ambos miembros es inconcebible para los alumnos que no otorgan significado a los símbolos. Así que, desde el punto de vista de las autoras, los estudiantes no saben cuándo y por qué aplicar los algoritmos porque no desarrollan la capacidad para interpretar las expresiones algebraicas de distintas formas y aplicar esas interpretaciones en la resolución de problemas.

Más recientemente, para explicar por qué los estudiantes no tienen un conocimiento conceptual en álgebra, Hoch (2003) propuso el constructo de “sentido de la estructura”. Ese constructo hace referencia a la capacidad de reconocer la estructura de una expresión algebraica y usar las características apropiadas de esa estructura en el contexto dado como una guía para elegir qué operaciones realizar. En otros escritos (v. Hoch & Dreyfus, 2004) se aclara que, con "estructura algebraica", el autor quiere decir "la forma (apariencia externa) en que una expresión algebraica está compuesta por sus partes (cantidades y operaciones) y un análisis de las relaciones entre esas partes". Por ejemplo, una ecuación cuadrática es cualquier ecuación polinómica que se puede transformar en su forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$; con a, b y c parámetros en los números reales y el signo igual una relación de equivalencia.

Para el álgebra de secundaria, Hoch & Dreyfus (2005) han dado criterios de cuándo un estudiante muestra un sentido de la estructura. Para los autores, un alumno muestra sentido de la estructura cuando trata a un "término literal compuesto" como un objeto, cuando reconoce la equivalencia entre estructuras familiares y elije manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de la estructura. Por ejemplo, un estudiante muestra sentido de la estructura si antes de factorizar la expresión $6(5 - x) + 2x(5 - x)$, él interpreta a $5 - x$ como un objeto (e.g. un número) y luego extrae ese objeto como factor común de la expresión. En otro ejemplo, un alumno muestra sentido de la estructura si antes de factorizar la expresión $64x^6 - 36y^4$, él reconoce a la expresión como una diferencia de cuadrados. Además, citando a Sfard & Linchevsky (1994), Hoch (2003) incluyó al criterio de tener conciencia de las diferentes interpretaciones de una expresión algebraica, como parte del sentido de la estructura.

En general, desde la perspectiva de Hoch (2003) y de forma similar a Sfard & Linckevsky (1994), los estudiantes no desarrollan una competencia conceptual en álgebra porque no "ven (la estructura algebraica)" antes de "hacer (las manipulaciones algebraicas)". De modo que se puede considerar que la perspectiva general de Sfard & Linckevsky (1994) sobre la competencia en algebra sigue vigente a tal punto de que se ha incluido la "conciencia de las diferentes interpretaciones de una estructura algebraica" como un criterio de constructos más actuales como "sentido de la estructura". Esta es una de las razones por las que se eligió el marco de Sfard & Linckevsky (1994).

Otra razón que justifica la elección de ese marco es que, los datos empíricos tratan sobre la resolución de ecuaciones lineales en la transición de la aritmética al algebra y las autoras proporcionan criterios específicos para distinguir cuándo un estudiante ha desarrollado una competencia conceptual en ese tema particular y en esas condiciones.

Adicionalmente, Sfard & Linckevsky (1994) resaltan una problemática que no se ha retomado en investigaciones recientes sobre el aprendizaje en álgebra, pero que está relacionada con este escrito: el problema es que cuando un estudiante realiza operaciones algebraicas su única preocupación es poner orden y combinar, de acuerdo con reglas conocidas, los signos que tiene ante él; y acepta con confianza los resultados así obtenidos (p.225). En otras palabras, el problema no es sólo que los estudiantes no den significado a las expresiones algebraicas, sino que acepten con confianza los resultados que así obtienen. Con los resultados del presente escrito se puede aportar que una posible solución (aunque parcial e inicial) a esa problemática está relacionada con la forma en que los alumnos manejan sus eec.

En suma, se eligió el marco de Sfard & Linckevsky (1994) por sobre otras perspectivas más recientes porque ese marco sigue vigente, porque proporciona criterios específicos para distinguir tipos de competencia en estudiantes bajo las mismas condiciones y en el tema del caso que se eligió en este estudio y porque, con los resultados de esta investigación se puede aportar a una problemática relacionada con los eec (que Sfard & Linchevsky resaltan) y que las investigaciones actuales en álgebra han dejado de retomar.

CAPÍTULO VI EL MODELO TEÓRICO DE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (Meec)

El Capítulo está dedicado a la presentación y explicación del Modelo Teórico de los Estados Epistémicos de Convencimiento (Meec) que ha sido elaborado en el marco de la presente investigación (siguiendo los principios de la Teoría Fundamentada). En el Capítulo se expone ese Modelo describiendo sus categorías, sus propiedades y dimensiones; se dejan ver las relaciones entre esas categorías y el orden que en el modelo se les ha dado. Se cubre así el objetivo general de la investigación y también se cumplen los objetivos específicos. Con base en el Meec se ofrecen algunas explicaciones relacionadas con los eec, en particular se identifican condiciones bajo las cuales los eec pueden influir positivamente en el progreso del conocimiento o las competencias matemáticas. Se da así respuesta a las preguntas generales de investigación (1 y 2) formuladas en el presente trabajo y a las preguntas específicas (3, 4 y 5).

6.1 CATEGORÍAS QUE INTEGRAN EL MODELO TEÓRICO DE LOS ESTADOS EPISTÉMICOS DE CONVENCIMIENTO (MEEC)

6.1.1 Exposición de categorías que integran el Meec

Detrás de los actos humanos -sostiene Maslow (1943)- está el deseo, consciente o inconsciente, de satisfacer necesidades fundamentales. Éstas se refieren a las distintas dimensiones de bienestar de las personas: están desde las necesidades biológicas de conservación de la vida hasta las necesidades relativas al desarrollo pleno de la vida, es decir, lo que requiere el ser humano para que su vida progrese y esté llena de significados.[26] Las acciones y lo que las personas creen y piensan se pueden considerar desde distintas perspectivas. Está lo que hacen, cómo lo hacen y está el por qué y el para qué lo hacen. Las necesidades responden y proveen el porqué y el para qué de todo lo que las personas hacen; dan significado y sentido a sus

---

[26] Maslow (1943) sugiere una jerarquización de necesidades que modela acudiendo a una pirámide; coloca a las necesidades fisiológicas en la parte más baja, luego incluye las de conexión, afecto y pertenencia; después las relativas a la autorrealización y autoestima y en la cima de la pirámide coloca necesidades de auto-actualización (de motivación de crecimiento).

experiencias y a sus actos. Las necesidades son así, un referente que ayuda a comprender y permite explicar el porqué, la motivación o la justificación de lo que las personas hacen y piensan. Por ejemplo, lo que motiva a las personas a dormir es cubrir una necesidad fisiológica de descanso… ¿por qué duermen las personas? Porque tienen necesidad de descanso. ¿Por qué los adultos estudian una carrera universitaria? Porque requieren resolver una necesidad de estabilidad económica; o una de superación personal, o la de aprender nuevos conocimientos. Ahora bien. Las personas, dependiendo del contexto cultural en el que se inscriben, satisfacen sus necesidades siguiendo determinadas estrategias. De acuerdo con Maslow (1943), mientras las necesidades son universales, las estrategias o satisfactores que las personas eligen para satisfacer las necesidades son culturales.

Siendo las necesidades tan vitales, el organismo requiere de un sistema de alarma que indique su carencia. Maslow (1943) extiende el principio de la homeostasis a las necesidades: cuando una necesidad no está cubierta -él sostiene- el organismo genera una cierta experiencia interna que indica a la persona que alguna necesidad no está cubierta. El hambre, el sueño o la sed son alarmas que tiene el organismo que le avisan cuando una necesidad está pendiente de saldar. De acuerdo con De la Torre (2018), las emociones forman parte de ese sistema de alarma, que advierten que el organismo ha sufrido algún desequilibrio debido a que alguna necesidad fundamental no ha sido cumplida.

Fischbein (1987) reflexiona en torno a una necesidad muy específica y que resulta fundamental para los seres humanos. Se trata de la necesidad de sentir seguridad, confianza o certeza en torno a lo que ellos afirman, hacen y creen. Si bien es una necesidad que se presenta en cualquier ámbito de la vida es, de hecho, una necesidad que acompaña y orienta casi invariablemente cualquier actividad de contenido matemático. En los profesionales de las matemáticas, por ejemplo, la necesidad de certeza (de sus teoremas y de sus pruebas) es una necesidad medular que orienta su trabajo. Si hay algo que pueda explicar las acciones del matemático es su necesidad de contar con niveles altos de convicción -o de ser posible, de certeza- en torno a las proposiciones que ellos demuestran y en torno a la validez de sus pruebas. Como dice Ortega y Gasset, "Si el hombre se ocupa en conocer, si hace ciencia o filosofía, es porque un buen día se encuentra con que está en la duda sobre asuntos que le importan y aspira a estar en lo cierto" (1945, p. 57)[27]. Esta necesidad de certeza (en los resultados, en la estrategia, en una regla matemática) está, por supuesto, también presente en los estudiantes de matemáticas, como ya se mencionó capítulos precedentes.

En la presente investigación a esta necesidad se le ha denominado 'necesidad de seguridad en la verdad de algún H' o 'necesidad de seguridad epistémica' (como ya también se indicó). Se trata de una de las categorías que forman parte del Meec.

En la investigación se considera que los eec no son experiencias aisladas, puntuales, separadas del resto de las experiencias de las personas (cognitivas o emocionales o incluso corporales). Los eec se suscitan y se enmarcan en un proceso dinámico, cuyos límites son borrosos y que no tiene claramente un principio y un final. En el Meec, a este proceso se le ha denominado '*la trayectoria de los eec'*[28]. Esta es otra de las categorías que conforman el modelo.

En lo que resta del presente apartado, y para fines de la explicación del Meec, se hace una descripción de una 'trayectoria genérica de los eec' y se detallan las categorías que la integran y el porqué de las relaciones de orden que se les ha dado en esa trayectoria. Esa trayectoria

---

[27] Aunque hay que reconocer que esas necesidades no son las únicas que motivan al matemático y que explican sus acciones. Los matemáticos también están motivados por la necesidad de contribuir al conocimiento, por la necesidad de tener un reconocimiento en la comunidad, y por muchísimas más.
[28] En lo que sigue se resaltan en itálicas las categorías que conforman el Meec.

genérica fue resultado de una cierta 'inducción' o 'generalización' que se hizo a partir del estudio de casos empíricos específicos; los que en este documento se han expuesto (en capítulos precedentes) son el de L, el de Saccheri y el de Gauss. Es por eso que las categorías del Meec se explican en lo que sigue ilustrándolas acudiendo a esos casos. Para que el lector tenga una idea sintética de la trayectoria genérica de los eec, con todas las categorías que la conforman y con los ejemplos de cada categoría, se ha elaborado la Tabla 7. En la primera columna, aparece esa trayectoria genérica; en las columnas restantes las categorías se ejemplifican con los casos empíricos que aquí se han expuesto.

La TF no tiene como objetivo final el establecimiento de afirmaciones generales. No obstante, la metodología y las técnicas de análisis de la TF permiten generar comprensiones y explicaciones teóricas que, aunque basadas en el análisis de casos específicos, se pueden transferir a otros casos, siempre y cuando se desarrollen bajo condiciones semejantes (Corbin & Strauss, 2015; Reichertz, 2007). De modo que el marco teórico que aquí se propone (el Meec con sus categorías y las trayectorias genéricas de los eec, que de alguna manera organizan esas categorías), así como las explicaciones que aquí se sugieren con base en ese marco teórico, aunque surgidas del caso de Gauss y Saccheri y L, se pueden eventualmente aplicar a casos semejantes: a casos de la historia o a casos del ámbito educativo que presenten condiciones semejantes a los casos de Gauss, Saccheri y L, es decir, casos en donde personajes de la historia o del escenario escolar se planteen retos o tareas matemáticas y hagan el trabajo matemático para encararlas. Pero, no está de más reiterarlo, lo que interesa en las investigaciones de la TF es la generación de hipótesis para validar, reformular, ampliar, completar o replantear en nuevos datos; es decir, los resultados de la TF son siempre provisionales, en espera de ser modificados o completados con nuevas aportaciones basadas en nuevos datos empíricos. Y tampoco está de más repetirlo, lo que en este proceso realmente importa no es la ‘representatividad’ de esos nuevos datos (como sucede en la investigación cuantitativa), sino la ‘generalidad’ (ie, nivel de abstracción, profundidad y alcance) de las categorías y las explicaciones dadas con base en esos datos.

Ya que las necesidades permiten explicar las acciones que realizan las personas, la categoría de la trayectoria de los eec con la que resulta natural iniciar su descripción es la relativa a las necesidades fundamentales que están asociadas a los eec. Se trata, claramente, de las *necesidades de experimentar seguridad en la verdad (validez, corrección) de algún hecho de las matemáticas (H);* es decir, se trata de las necesidades de seguridad epistémica en torno a algún H.

En el caso de Saccheri, por ejemplo, se puede decir que como matemático, muy posiblemente tenía distintas necesidades (contribuir al conocimiento, fundamentar la geometría); pero una sobresaliente y que puede explicar en gran parte su comportamiento, es la de demostrar formalmente la verdad del V. No obstante, había otras necesidades ligadas a ésta. Por sus acciones se infiere que en Saccheri había también la necesidad de mantener el statu quo, esto es, de sostener y reafirmar en su calidad de certezas incuestionables una serie de presupuestos de contenido ontológico y epistemológico (aquellos incluidos en la red g-f). De esas certezas se desprendía que el V era verdadero y que era posible demostrarlo; de esas certezas se desprendía que la única geometría posible era la euclidiana. Esas necesidades filosóficas también dan cuenta del por qué y el para qué hacía Saccheri (y quizás muchos de sus colegas) el trabajo matemático: deducir el V como teorema permitía ratificar o consolidar esas certezas de la red; de no hacerlo, esos presupuestos se ponían en entredicho. Así que el V no solo representaba un problema matemático, asociado al hecho de que la necesidad formal de seguridad en su verdad no estaba satisfecha. Representaba también la necesidad de reconfirmar la veracidad de otras proposiciones, pero éstas de carácter extra-matemático.

Por su parte, Gauss, en su escrito del 1799, asume como necesidad por cubrir la de fundamentar la geometría de manera estricta. Ciertamente, esta necesidad incluía la necesidad de demostrar rigurosamente la verdad del V. No obstante, es viable suponer que él se percata de que el problema del V ya no es puramente de carácter lógico; se trata de un problema que alcanza y toca los propios fundamentos de la geometría.

En su escrito del 1824 Gauss deja ver, mediante las acciones que realiza, necesidades muy distintas. Se puede inferir su necesidad epistémica de fundamentar (no sólo desde el punto de vista matemático sino también filosófico) rigurosamente las geometrías (que incluye a la euclidiana y a la no euclidiana). Con relación a esta necesidad está la de desarrollar una geometría distinta a la euclidiana (cuya verdad se pueda verificar en el espacio físico).

Cada matemático busca satisfacer o cumplir sus necesidades epistémicas mediante la consecución de ciertos *objetivos*. Saccheri se plantea el *objetivo* de demostrar el V de manera indirecta (buscando derivar una contradicción). Para cubrir esas necesidades, en 1799 Gauss se propone el *objetivo* de demostrar la verdad del V, a través de una prueba indirecta, buscando derivar una contradicción, al igual que lo hiciera Saccheri. El *objetivo* que en 1824 Gauss se plantea para cubrir sus necesidades epistémicas consiste en verificar si de la hipótesis del ángulo agudo se deriva una contradicción, quizás con la intención central de comprobar la consistencia de la geometría no euclidiana (más que de verificar la posible verdad del V).

En consonancia con las necesidades y los objetivos que cada matemático se traza para cubrirlas, los matemáticos llevan a cabo *los trabajos matemáticos* correspondientes.

Saccheri investiga sobre tres hipótesis (ángulo recto, agudo, obtuso) en el cuadrilátero; en el caso del ángulo agudo se topa con un comportamiento inesperado de la recta, que califica de repugnante, y que interpreta como una contradicción. Contraviene necesidades matemáticas de rigor, las que supedita a su necesidad de no contravenir las certezas ontológicas.

Gauss en el escrito del 1799, también busca derivar una contradicción; reconoce que no consigue derivarla. Pero él sí se apega estrictamente a criterios de rigor matemático.

En el escrito del 1824, Gauss le otorga a la contradicción un papel muy distinto: el hecho de no derivarla le da fundamentos matemáticos para sugerir una geometría distinta a la euclidiana, que es consistente; reconoce que tiene alcances y que también presenta limitaciones y que posee un carácter empírico. Aquí Gauss da muestras de una visión integral de la geometría y de una fidelidad estricta a los criterios de rigor de la matemática.

Como se ha dicho, los matemáticos realizan sus investigaciones para conseguir ciertos objetivos que les permiten llenar sus necesidades. Es natural que, una vez que hayan derivado resultados de esas investigaciones ellos hagan *evaluaciones* -de manera consciente y explícita o de forma inconsciente- sobre si alcanzaron esos objetivos, y sobre si lograron realizar las necesidades no cumplidas.

Saccheri consideró haber alcanzado el objetivo de derivar una contradicción (y seguramente habrá experimentado satisfacción en sus resultados); Gauss, en 1799, evidencia no haber conseguido ese objetivo y se declara insatisfecho; y Gauss (en 1824) revela haber conseguido el objetivo de verificar que la geometría no euclidiana es consistente (por no haber derivado alguna contradicción) y comunica estar satisfecho de los resultados obtenidos (sólo hay una necesidad no satisfecha que él la tiene muy presente).

Los *eec* surgen asociados a estas valoraciones positivas o negativas; esas evaluaciones están directamente relacionadas con la experiencia de haber cubierto (o no) ciertas necesidades de seguridad en la verdad de un H, por haber alcanzado (o no) ciertos objetivos determinados. Cuando una persona valora que las necesidades de seguridad en la verdad de algún H están satisfechas, experimenta eec positivos en torno a ese H (confianza, convicción, certeza, convencimiento, presunción). Cuando una persona valora que las necesidades de seguridad en la verdad de algún H no están cumplidas, surgen en ella eec negativos en torno a ese H (duda, incertidumbre, desconfianza). En lo que sigue se fundamentan estas afirmaciones con base en los casos empíricos.

Tómese, por ejemplo, el caso de Saccheri. Asociada a su necesidad de seguridad en la verdad del V resuelta, él experimenta un estado de certeza (que se deja ver claramente en las acciones que después realiza). Gauss, en cambio, en el 1799 reconoce que no alcanzó sus objetivos (de derivar una contradicción), que su necesidad (de seguridad en la verdad el V) no está satisfecha y explicita en consecuencia un estado de ‘duda en la geometría’ (posiblemente derivada de la consideración de que el problema del V no es sólo de carácter lógico). A diferencia de lo anterior, en 1824 Gauss muestra un eec de confianza en una nueva geometría (no euclidiana), que es distinta a la euclidiana y que es consistente. Esto fue resultado de haber conseguido el objetivo de no derivar contradicción alguna, y de sentirse satisfecho con los resultados.

Los datos empíricos revelan que los eec se pueden experimentar de manera consciente e incluso se pueden explicitar y comunicar a otros o bien, se pueden experimentar fuera de los alcances de la conciencia.

Saccheri, por ejemplo, no deja ver (hasta donde se tienen evidencias) que haya tomado conciencia de su certeza, ni se percata de aquello de lo que se desprendió (de qué necesidades, de qué objetivos y de cómo los alcanzó) y mucho menos parece darse cuenta de cómo las certezas extra-matemáticas influyeron en sus decisiones matemáticas. En este sentido, se dice que su *gestión de sus eec es de 'tipo reactivo'*. Gauss, a diferencia de Saccheri, despliega en 1799 una '*gestión consciente de sus ecc'*, de muy alto nivel, al percatarse y explicitar sus eec y los objetos a los que los aplica, pero sobre todo, al identificar los condicionantes que generaron su duda: el no haber podido satisfacer las necesidades de demostrar de manera rigurosa la verdad del V y no haber alcanzado los objetivos que se planteó para cumplir con esas necesidades. En 1824 Gauss de nueva cuenta exhibe altos niveles de gestión de su confianza: reconoce su eec de confianza y los objetos a los que los aplica, y sobre todo, identifica los condicionantes en los que basa esa confianza: necesidades (de desarrollo de una nueva geometría consistente) satisfechas por haber alcanzado el objetivo de haber desprendido una buena cantidad de resultados de esa geometría sin contradicción entre ellos.

Otra característica que enseñan los datos empíricos tiene que ver con la '*calibración'*. Saccheri exhibe un nivel de calibración muy bajo, ya que experimenta certeza en hechos de las matemáticas que son falsos y su certeza está basada en razones extra-matemáticas. En contraste con esto, en su comunicación del 24 Gauss hace ostensible un alto nivel de calibración, ya que siente confianza en resultados válidos, todo ello con base en razones matemáticas.

Por otra parte, los datos empíricos también dejan ver que los eec generan *tendencias* a favor del H en ciernes, cuando se trata de eec positivos (que como se dijo, provienen de la valoración de necesidades satisfechas por haber alcanzado ciertos objetivos). El caso de Saccheri como el de Gauss en el 1824, son una evidencia en este sentido; ambos tienden a retener o mantener el objeto de su convicción: en Saccheri, la geometría euclidiana como la única posibilidad de modelización del espacio; en Gauss, la consideración de la geometría no euclidiana como una geometría alternativa. Estas tendencias a favor, y la tendencia de alejamiento cuando las necesidades de seguridad epistémica no se han cubierto, se pudieron observar regularmente en una cantidad importante de otras fuentes empíricas. Se trata de las tendencias 'automáticas' que generan los eec.

Sin embargo, los eec no sólo marcan tendencias a favor o en contra de los H en ciernes. También generan un encuadre o *marco interpretativo* que filtra los distintos aspectos del problema de manera muy particular. El marco interpretativo es una categoría central en el Meec que merece la pena explicarla con detalle. El marco interpretativo está presente casi siempre como resultado de la presencia de emociones. Un ejemplo de ese marco es la idea fatalista que se hace un niño, de que nunca podrá acreditar examen alguno, después de sentirse frustrado por haber reprobado un examen específico de matemáticas; su generalización fatalista es resultado de un encuadre o marco, derivado de su frustración, a partir del cual él juzga todo su desempeño futuro. De manera semejante, los eec también generan un marco interpretativo a partir del cual, de manera consciente o no consciente, la persona interpreta y re-significa aspectos relacionados con los distintos aspectos del problema en ciernes y con la trayectoria seguida; con base en ese marco interpretativo la persona, entre otras cosas, repasa (muchas veces de manera inconsciente y muy rápidamente) las necesidades que han sido cubiertas y los objetivos logrados, y a partir de esto, ratifica necesidades y objetivos, o los rectifica. Todo ello sirve de guía para planear las nuevas acciones que llevará a cabo, otra vez para preservar necesidades satisfechas o llenar necesidades no satisfechas.

Gauss por ejemplo, en el 1799, después de explicitar su duda y reflexionar sobre sus orígenes, busca 'sentirse seguro', para lo cual ratifica el objetivo de trabajar en la verdad del V (con el fin de satisfacer las necesidades que expresó a lo largo de todo el escrito: probar la verdad del V y de fundamentar de manera estricta la geometría). En ese mismo comunicado, la duda que él experimenta también sirve de base para reflexionar en torno a cómo él duda (seguramente, considerando los criterios de rigor en los que él se basa para dudar) y cómo de lo que él duda, sus colegas pueden llegar a estar convencidos (muy probablemente también percatándose de que no actúan de acuerdo con un 'verdadero espíritu geométrico' como en muchas ocasiones Gauss se los dice directa y crudamente, dicho sea de paso). En el comunicado del 1824, desde el marco interpretativo que le da su confianza en la geometría no euclidiana, Gauss reflexiona sobre cómo los presupuestos metafísicos pueden desviar la atención de los criterios de rigor, impidiendo la obtención de resultados matemáticamente válidos (que se pueden considerar como 'paradójicos' ante ojos 'no expertos').

Otra vez, esta parte de la trayectoria se puede experimentar de manera consciente o se puede transitar por ella sin percatarse de las experiencias relacionadas con los eec.

En los dos comunicados de Gauss, se observa de nueva cuenta una *gestión consciente de sus eec*, incluso de muy alto nivel por así decirlo; de entrada, la duda no lo lleva a un rechazo 'automático' hacia el objeto de su duda (la verdad del V postulado, o hacia la geometría euclidiana) (como suele suceder cuando alguien experimenta un estado de duda). Al contrario, en este caso Gauss toma conciencia de que él está dudando y de aquello que la origina y, con el fin de conseguir 'estar seguro', resuelve mantener el objetivo de demostrar formalmente la verdad de V; esta elección la toma de manera razonada buscando la ratificación o rectificación de los resultados ya encontrados. Y no se diga cuando Gauss compara la manera en la que él se convence y la que siguen sus colegas para ese propósito; aquí él muestra sensibilidad no sólo hacia sus propios eec sino hacia los que pudieran experimentar sus pares, y no sólo hacia las razones en las que él fundamenta sus eec, sino en las que pudieran poner en juego sus pares. Y esos altos niveles de gestión de sus eec también los exhibe cuando, en el comunicado del 1824, se percata de cómo los eec (e. g., las certezas 'metafísicas') efectivamente generan un marco interpretativo que puede llegar a influir negativamente en el avance del conocimiento (por cierto, ¡qué mayor apoyo de la pertinencia y factibilidad de nuestra categoría 'marco interpretativo derivado de los eec' que el Gauss nos regala en esta comunicación del 1824!). Saccheri, por su parte, no da ningún indicio para suponer que él haya tomado conciencia de sus eec de certeza, y menos aún del estado de duda que eventualmente pudo haber experimentado y de lo que le estaba señalando; tampoco da señas de que se haya percatado de las secuelas que la experiencia de esos eec tenían sobre sus decisiones matemáticas. Se supone, por esto, que él *gestionó de manera reactiva sus eec.*

Por otra parte, en todas sus comunicaciones Gauss muestra estar perfectamente *calibrado*. Duda de hechos matemáticos que son inciertos, y lo hace con base en razones matemáticas y confía en hechos matemáticos que han sido derivados válidamente.

Lo que los datos empíricos revelan después es que los eec preparan para que la gente actúe. Y la gente entonces *realiza trabajos matemáticos* en consecuencia con lo que le informa su marco interpretativo. Saccheri, en consonancia con lo que determinaban sus certezas, desechó su trabajo; en 1799 Gauss continúa con sus trabajos relativos al V y el Gauss del 1824, continúa con sus trabajos de fundamentación de las geometrías, acompañando su trabajo matemático de reflexiones filosóficas acordes.

En la Tabla 7 se expone de manera sintética todo lo antes dicho.

Trayectoria genérica de los eec	**Resolución de una ecuación lineal (3ª l)**	**Saccheri Problema del V Postulado (necesidad de demostrar formalmente su verdad)**	**Gauss, 1799 Problema del V Postulado**	**Gauss, 1824 Explorar el caso de la hipótesis del ángulo agudo ('el nudo real')**
Eec sobre H's ligados a la tarea	Preliminares generales: red matemático conceptual con enfoque pseudo estructural de L que se observa en la primera y segunda participación Resaltan las certezas: **O1**: Se obtiene una expresión de la forma x=número **O2:** Se obtiene siempre el mismo resultado (correcto) **O4:** Se restringe la aplicación de las propiedades de la igualdad a las estructuras aditivas	Por sus acciones posteriores se puede suponer en Saccheri: Certeza en la verdad (ontológica) del V; Certeza de que se puede derivar (no hay otra opción); Duda muy incipiente de cómo demostrarlo o de la posibilidad de demostrarlo; Certeza de que no existe otra posible geometría. Certeza de que las únicas intuiciones posibles de la recta provienen de la GE	Certeza en la verdad (ontológica) del V; Duda (más intensa con relación a sus antecesores) de cómo demostrarlo o de la posibilidad de demostrarlo.	Duda de la GE; cuestiona el papel de la lógica; objeta carácter a priori de la geometría; considera la posibilidad de una nueva geometría (y muestra interés por verificar su verdad)
Marco interpretativo que se deriva, de manera sobresaliente, de la experiencia de eec (explícito o implícito) y que genera: -tendencias (de aproximación o distanciamiento hacia los H's) -Significados asociados a la tarea. En función de lo anterior, en S surgen: -Necesidades de	*Necesidad* (N) de resolver la ecuación de manera correcta y de llegar a la solución correcta. Para satisfacer N se propone alcanzar los *objetivos* contenidos en la red mc, pero específicamente: O1: Encontrar una solución de la forma x=número (implícito)	Por sus acciones posteriores se puede suponer en Saccheri: Tendencias a favor de la verdad del V y de la posibilidad de demostrarlo; *Necesidad* de demostrar el V; Necesidad de mantener certezas ontológicas; *Objetivo*: demostrar el V de manera indirecta.	Tendencias a favor de la verdad del V y de la posibilidad de demostrarlo (menos acusadas, quizás que S); *Necesidad* de fundamentar la geometría de manera estricta (que pasa por la Necesidad de demostrar rigurosamente el V); *Objetivo:* demostrar el V de manera indirecta y de manera estricta.	*Necesidad* epistémica de fundamentar rigurosamente las geometrías (que incluye las GE y las GNE), tanto de manera matemática como de manera filosófica; Necesidad de desarrollar una geometría distinta a la euclidiana (cuya verdad se pueda verificar en el espacio físico). *Objetivo*: derivar una contradicción de la hipótesis del ángulo menor de 180º para demostrar la

seguridad epistémica y necesidades epistémicas que se presentan en S asociadas a la tarea (N1) -Objetivos que S se plantea para cubrir las necesidades (O1). Con base en lo anterior, S diseña planes de acción				consistencia de la geometría no euclidiana (¿y comprobar eventualmente la veracidad del V?) y derivar nuevos resultados de esa construcción y de verificarlos en el espacio físico.
S realiza *trabajos matemáticos* de acuerdo con objetivos O1, que buscan satisfacer necesidades N1	Lleva a cabo operaciones para resolver la ecuación. No logra O1 (llegar x=número)	Plantea las tres hipótesis en el cuadrilátero. Para la hipótesis del ángulo agudo llega a un resultado 'repugnante' que considera contradictorio (prevalece particularmente idea intuitiva de la recta). Saccheri contraviene criterios de rigor matemático	Trata de derivar una contradicción a partir de la hip del ángulo agudo. Aplica estrictamente criterios de rigor de la matemática.	Reporta haber realizado (por más de 30 años) trabajos matemáticos en la hipótesis del ángulo menor a 180ª. Reporta que esa geometría es consistente y distinta de la ge; se puede resolver todo excepto el cálculo de la constante que no se puede determinar a prioiri. En el caso límite coincide con la ge. Aplica estrictamente criterios de rigor de la matemática.
S *valora* si alcanzó los objetivos O1 (generalmente de manera implícita, pero puede ser explícitamente) y si sus necesidades N1 están satisfechas (V1)	Valora que no se cumplió el objetivo O1 y que necesidad N no está satisfecha (se observa en sus acciones posteriores).	Saccheri considera que él logró el objetivo de derivar una contradicción y demostrar la verdad del V. (por lo que muestra posteriormente) Saccheri seguramente experimenta que sus necesidades de seguridad en la verdad del V están cubiertas	No logra objetivo de derivar una contradicción. No experimenta satisfacción en los resultados; su necesidad de probar la verdad del V no está cubierta.	El objetivo de (no) detectar contradicción alguna, se cumple, de lo cual deriva que la geometría no euclidiana es consistente (¿será que comienza a intuir con más fundamento la indemostrabilidad del V a partir de la geometría absoluta?); Gauss se declara satisfecho con los resultados encontrados sobre la geometría no euclidiana.
En función de la valoración V1, surgen en S **eec sobre H's ligados a la resolución** (pueden surgir varios eec, y en torno a distintos componentes de	Duda ("en el ejercicio") (en resultado expuesto en P6, y sustentada en que se incumplió O1). Buena calibración: tiene duda de un	Certeza en la verdad del V y en la geometría euclidiana como única geometría posible del espacio (¿se refuerza la certeza?) (esto se supone por las acciones que realiza	Duda de la verdad de la geometría (posiblemente también duda de la posibilidad de demostrar el V) (pone en duda certezas ontológicas de la red). La	Confianza en los resultados de la GNE: tanto a nivel lógico como a nivel de posibilidad física (sólo falta determinar experimentalmente la constante); se abre la posibilidad de aceptar

la resolución)	resultado incorrecto tomando como base una regla matemática correcta No parece haber toma de conciencia de los eec que experimenta ni del objetivo incumplido. Gestión reactiva.	posteriormente). Muestra muy bajos niveles de calibración: tiene un alto nivel de certeza en un resultado matemático tomando como base consideraciones extra-matemáticas. No parece haber toma de conciencia de los eec que experimenta ni de cómo estos afectaron sus decisiones matemáticas. Gestión reactiva.	fidelidad estricta a criterios de la disciplina y habiendo separado los aspectos del rigor de los ontológicos, le permitieron ver de manera integral el problema: el del V no era sólo de tipo lógico. Como no se sabe a qué obedece su duda y si está basada en consideraciones matemáticas, no se puede decidir si en este momento está bien calibrado o no. Gestión consciente: toma conciencia de sus eec y de los objetos a los que los aplica.	que la geometría no euclidiana sea verdadera. Muestra muy alta calibración matemática: siente confianza en resultados válidos con base en razones matemáticas. Pone en duda la posibilidad de conocer el espacio (la naturaleza esencial del espacio) (en el caso en el que la GNE fuera verdadera). Muestra muy alta calibración matemática: siente duda en resultados inviables con base en consideraciones matemáticas. Gestión consciente: toma conciencia de sus ee y de los objetos a los que los aplica.
Marco interpretativo que se deriva, de manera sobresaliente, de la experiencia de eec (explícito o implícito) y que genera: -*tendencias* (de aproximación o distanciamiento hacia los H's) -*Significados* asociados a la tarea. En función de lo anterior, en S surgen: -*Necesidades* de seguridad epistémicas y necesidades epistémicas que se presentan en S asociadas a la tarea (N2)	La duda hace referencia a una necesidad (**N**, de sentir seguridad en el ejercicio) no satisfecha Tendencia "automática" de alejamiento hacia la resolución Para cubrir N se inclina implícitamente por Objetivo 2 (O2): **Verificar**, a través de la repetición automática, que en su ejercicio se cumplieron objetivos de la red; en particular, que se obtuvo el mismo resultado.	Tendencias 'automáticas' de apego a los resultados (la verdad del V está demostrada) y a las consecuencias ontológicas relacionadas. Se refuerza certeza de la geometría euclidiana como la única posible ciencia del espacio. Saccheri muestra muy bajos niveles de calibración: tiene un alto nivel de certeza en un resultado matemático erróneo apelando a consideraciones extra-matemáticas. Necesidades de seguridad epistémicas	Muestra una gestión consciente de su convencimiento al reflexionar sobre cómo se duda él - seguramente orientado siempre por los criterios de rigor- de lo que sí se convencen sus colegas. Gauss muestra altos niveles de calibración al dudar de resultados inciertos, con base en consideraciones matemáticas. Comparte la necesidad de 'estar seguro' (¿para paliar su duda? ¿Para verificar el contenido de su duda?) ¿Y es que quizás se da cuenta de los	En un argumento no lineal reflexiona sobre cómo las certezas 'metafísicas' pueden llevar a confundir lo no natural con lo paradójico y a descartar conclusiones geométricas. Muestra gestión consciente de sus eec: aquí Gauss no sólo se percata de sus eec y es sensible a los eec de sus colegas; se percata incluso de los mecanismos que hacen que las certezas extra-matemáticas desvíen la obtención rigurosa de resultados matemáticos y busca evadir esos mecanismos (¡es una gestión muy sofisticada de los eec!).

-*Objetivos* que S se plantea para cubrir las necesidades (O2). Con base en lo anterior, S *diseña* planes de acción		completamente satisfechas, no es necesario realizar más acciones. Gestión: No se ve (o no se tienen datos) de que Saccheri haya reflexionado sobre los muy fuertes compromisos que suponía asumir esas certezas ontológicas y de la influencia que tuvieron sobre su trabajo matemático.	alcances de su duda y no quiere dar pasos en falso? Muestra niveles de gestión consciente al percatarse de su duda, de las necesidades de seguridad epistémica derivada de sus duda que quedaban sin atender, de los objetivos que se plantea para satisfacer esa necesidad.	Hay el planteamiento de una necesidad de seguridad en la verdad de la constante no satisfecha. Quizás se plantea como objetivo, el hacer la medición de manera empírica (aunque sabe de las limitaciones que se tienen para ello)
S realiza *trabajos matemáticos* de acuerdo con objetivos O2, que buscan satisfacer necesidades N2	L repite el ejercicio	Detiene las acciones. Desecha su trabajo. No se ve (o no se tienen datos) de que Saccheri se haya percatado de los muy fuertes compromisos que asumió al aceptar esas certezas ontológicas y no se percata de la imponente influencia que ejercían sobre su trabajo matemático… ¡al grado de llevarlo a él mismo a su anulación!	Realiza trabajos y hace un intento fallido por re-formular el V	Sigue realizando mediciones; Sigue derivando resultados de la gne Reflexiones filosóficas sobre el carácter empírico de la geometría Trabajos en geometría diferencial y reflexiones sobre el espacio.
S *valora* si cumplió objetivos O2 (generalmente de manera implícita, pero puede ser explícitamente) y si sus necesidades N2 están satisfechas (V2)	Valora explícitamente que obtuvo los mismos resultados, que ha alcanzado O2 y que N está satisfecha. Además, se cumple otro objetivo O3: realizar correctamente las operaciones		Reporta de nuevo no haber alcanzado los objetivos y no estar satisfecho con los resultados	
En función de valoración V2, surgen en S **eec sobre H's ligados a la resolución** (pueden surgir	'Seguridad en el ejercicio' (con base en O2, O3 y resultado expuesto en P6).		Ya no los explicita	

varios eec, y en torno a distintos componentes de la resolución)	Mala calibración (seguridad en un resultado parcialmente incorrecto -en P6- con razones que no son suficientes, O2.) Tendencia automática de apego a los resultados encontrados (no se plantea otros trabajos matemáticos para alcanzar O1 (una solución x=número)) Gestión reactiva.			
Marco interpretativo que se deriva, de manera sobresaliente, de la experiencia de eec (explícito o implícito) y que genera: -*tendencias* (de aproximación o distanciamiento hacia los H's) -*Significados* asociados a la tarea. En función de lo anterior, en S surgen: -*Necesidades* epistémicas que se presentan en S asociadas a la tarea (N3) -*Objetivos* que S se plantea para cubrir las necesidades (O3). Con base en lo anterior, S diseña *planes de acción*	Necesidad de sentir seguridad en el ejercicio cubierta (explícita) Tendencia automática de apego a los resultados encontrados (no se plantea otros trabajos matemáticos para alcanzar O1 (una solución x=número)			
S realiza *trabajos matemáticos* de	Se detiene el trabajo			

acuerdo con objetivos O3, que buscan satisfacer necesidades N3	matemático			

Tabla 7. La trayectoria de los eec en L, Gauss y Saccheri

Como se explicó, en la primera columna de la Tabla 7 aparece la trayectoria genérica de los eec, con las categorías que la integran; las categorías poseen propiedades y dimensiones que se explicitan también en la Tabla 7 y las categorías se relacionan entre sí de acuerdo con un cierto orden, cuya justificación se expuso en lo antes dicho. Se trata de una trayectoria integrada por conjuntos de categorías genéricas o de componentes genéricos que se repiten cíclicamente (inician con las necesidades de seguridad epistémica y los objetivos para satisfacerlas y terminan en la evaluación del cumplimiento de los objetivos), aunque los contenidos específicos de las categorías que integran cada ciclo se van modificando. Con esto se cubre el objetivo general del trabajo.

En esa trayectoria se pueden identificar las categorías que hacen referencia a los condicionantes de los eec: necesidades de seguridad en la verdad de un H, objetivos para cubrirlas, realización de trabajo matemático; activación de mecanismos de valoración del cumplimiento de necesidades y objetivos. En la trayectoria genérica también se pueden identificar los efectos de los eec: el surgimiento de un marco interpretativo, trabajo matemático en consecuencia con el marco interpretativo y valoración del cumplimiento de necesidades y objetivos, con lo cual se reinicia el ciclo. Con esto se cubren los objetivos específicos planteados al inicio del trabajo.

6.1.2 Una posible explicación basada en el Meec

Lo que antes se ha expuesto descubre la complejidad de los eec y algunas de sus posibles propiedades. Resta explicar en qué condiciones posibles los eec representan un impulso para el avance de la competencia (o para el desarrollo de conocimientos matemáticos) y en qué condiciones los eec funcionan como un freno.

Para este propósito se acude a dos categorías que forman parte del Meec y que, aunque ya se mencionaron, no se han descrito con cuidado. Estas dos categorías son la de 'gestión consciente (o reactiva) de los eec' y la categoría de 'calibración'.

Las personas pueden experimentar la trayectoria de los eec tomando conciencia de sus eec, de los condicionantes que los generan y de sus posibles efectos. A esta forma de experimentar esa trayectoria se le denomina en este escrito 'gestión consciente de los eec'. En contraparte, las personas pueden vivir esa trayectoria sin percatarse de ninguno (o de muy pocos de) los componentes de la trayectoria. A este modo de recorrer esa trayectoria en este escrito se le denomina 'gestión reactiva o automática de los eec'. En una gestión consciente las personas llevan a cabo procesos metacognitivos en los cuales centran su atención en los eec que experimentan, en lo que los origina y en sus efectos. En una gestión reactiva de sus eec, las personas no son conscientes de las condiciones que generan sus eec, ni de las secuelas que estos pueden tener sobre sus trabajos matemáticos.

Por otra parte, se dice que una persona da una respuesta bien calibrada matemáticamente cuando experimenta un eec positivo en torno a un resultado matemáticamente correcto o válido y su eec lo funda en razones de tipo matemático. En caso contrario, se dice que no ha dado una respuesta bien calibrada. A diferencia de Foster (2016) quien centra su definición en la corrección de la respuesta, en este trabajo se centra la definición de calibración en el tipo de razones que la persona ofrece para fundamentar su respuesta (un caso reciente de una estudiante que tiene dislexia y que por tanto se suele equivocar en su respuesta, incluso con conciencia de ello, pero que sus patrones de justificación son siempre de tipo matemático, permitió reafirmar esta consideración sobre la calibración).

Lo que se argumenta en el escrito es que una buena gestión de los eec, acompañada de una buena calibración, representan buenas circunstancias iniciales para el avance en el aprendizaje o para el desarrollo del conocimiento matemático. Esto responde la pregunta 1 de investigación.

En la Tabla 8 se explica sintéticamente cómo una buena calibración aunada a una buena gestión de los eec puede eventualmente coadyuvar para el avance del conocimiento. La idea central consiste en que en una buena gestión la persona toma conciencia de las necesidades (satisfechas o no satisfechas) y los objetivos (cumplidos o no) que desencadenan sus eec. Esa información es fundamental para que ella pueda orientar o re-orientar las acciones que le siguen al surgimiento de los eec. Otra vez, con una buena gestión guiada por una buena calibración, la persona puede ratificar o redefinir nuevas necesidades y puede ratificar o rediseñar objetivos que le permitan cubrirlas; con base en ello puede planear, siguiendo criterios matemáticos, sus tareas matemáticas. Esto por supuesto no sucede en una gestión reactiva de los eec. Ahí, los eec generan tendencias de acción 'automáticas' que, una persona que no es consciente de ellas, es incapaz de modificar. Esto responde la pregunta 2 de investigación.

Gestión consciente de los eec & buena calibración matemática	
La persona toma conciencia de Condicionantes de los eec:	
	-Necesidades de seguridad epistémica en la verdad de algún H
	-Objetivos que se plantea para satisfacerlas
	-Tareas que hizo para satisfacer necesidades en función de objetivos
	-(Criterios que tomó en cuenta para) valorar cumplimiento de objetivos y satisfacción de necesidades

Con base en la toma de conciencia de los condicionantes de los eec y del eec que haya surgido, y orientados por una buena calibración matemática, la persona puede modificar o regular los efectos de los eec, a través de:	
	Correcciones deliberadas en el Marco interpretativo, que se dan a través de: -correcciones deliberada y fundadas de las tendencias (a favor o en contra de H), -correcciones en los significados asociados, con base en la buena calibración -ratificación o rectificación de necesidades, con base en los significados generados -ratificación o rectificación de objetivos, con base en todos los cambios previos. -planes del nuevo trabajo matemático, en correspondencia con todo lo anterior
	La persona lleva a cabo el trabajo matemático siguiendo planes que diseñó aplicando criterios de la matemática.

Tabla 8 El impacto de la gestión consciente de los eec y la buena calibración matemática en el avance del conocimiento

Una buena gestión de los eec acompañada de una buena calibración forma parte de las circunstancias bajo las cuales actuó Gauss. Aquí se argumenta, apelando a las evidencias empíricas que se han proporcionado a lo largo del presente escrito, que si bien no justifican la totalidad de sus descubrimientos y resultados, sí pueden ayudar a descifrar algunos aspectos que coadyuvaron a ellos. Esto permite responder a la pregunta 4 de investigación

Saccheri, por su parte, ni presenta una buena gestión de sus eec, ni está bien calibrado, en un momento decisivo de la construcción de su trabajo. Aquí se argumenta, tomando como base las evidencias empíricas que se han proporcionado a lo largo del presente escrito, que en una buena medida esto forma parte de las razones del por qué Saccheri no pudo progresar más en su trabajo y por qué no pudo sacarle el máximo provecho. Esto permite responder a la pregunta 3 de investigación.

6.1.3 Otros apuntes sobre el Meec

La trayectoria genérica, así como las categorías condicionantes de los eec y las categorías que representan los efectos de los eec forman una parte del Meec. También forman parte del Meec las categorías de gestión consciente de los eec, gestión reactiva de los eec, y de calibración matemática (alta o baja). Otras categorías que forman parte del Meec son los criterios para valorar los eec que experimenta una persona en torno a un H, expuestos en 5.4.1.

El trabajo interpretativo que aquí se ha puesto a la consideración del lector ha sido resultado de un proceso de reconstrucción muy parecido al que realizan arqueólogos o paleontólogos. A partir de escasos vestigios, ellos construyen interpretaciones complejas de modos de vida, sistemas económicos y políticos, de estructuras culturales o visiones religiosas o filosóficas de toda una civilización. En el estudio que aquí se expone, también fue a partir de las muy escasas pistas que dejaba ver L, y que se completaban con las que exiguamente mostraban Saccheri y Gauss, que se construyó el Meec. Las comparaciones constantes entre los datos empíricos, así como el muestreo teórico (aplicando las etiquetas conceptuales y los conceptos en construcción a diferentes datos empíricos), y la contrastación al nivel del conjunto de las categorías -ordenadas a través de la trayectoria de los eec- para verificar sus huecos lógicos y sus posibles inconsistencias, fue la base que posibilitó esa re-construcción. Se trata de un proceso complejo en el que se tuvo que intervenir ‘con bisturí’, una gran cantidad de ocasiones, apoyándose en la técnica del micro análisis para poder explorar y comprender a profundidad los casos analizados.

El número del *Educational Studies of Mathematics* (vol 100, No. 3), publicado en junio del 2019, está dedicado al estudio de ‘las múltiples trayectorias de las relaciones entre afecto y competencia matemática’. En ese número de la revista se exponen investigaciones sobre distintas emociones que surgen durante el trabajo matemático, como el miedo o la ansiedad; hay también estudios sobre actitudes, motivaciones y creencias, todo ello referido a la educación matemática. No se mencionan eec como la certeza, la confianza o la duda que estudiantes, matemáticos o profesores puedan experimentar en torno a los H's que surgen durante su práctica matemática. Para los expertos que intervinieron en la elaboración de ese número, esos eec no parecen estar incluidos en el ámbito de los afectos. En esta investigación tampoco se puede asumir el compromiso de determinar si los eec son un cierto tipo de emoción (que eventualmente se convierte en sentimiento, al estilo de Damasio, en 2010[b]); o si son conceptos, siguiendo la idea de emoción como concepto, que propone Feldman (2019), o si siquiera forman parte del mundo afectivo o del mundo cognitivo, o si están a medio camino entre ambos.

A partir de las evidencias empíricas con las que cuentan, los autores que participaron en el presente estudio sólo están en condiciones de hacer algunas posibles sugerencias o plantear algunas posibles hipótesis. Aquí se conjetura que los eec están asociados a mecanismos de regulación del organismo, que responden a ciertas condicionantes relacionadas básicamente con necesidades no cubiertas; específicamente, con necesidades de seguridad epistémica. Que, al igual que otros mecanismos de auto-regulación, incluyen señales que se disparan ante esas condicionantes, y que justamente los eec juegan el papel de esas alarmas, que alertan a la persona de que su necesidad de seguridad epistémica no está cubierta (o está en riesgo o, por el contrario, de que sí ha sido cumplida de manera satisfactoria). Por ejemplo, la duda sería entonces la alarma que se detona ante necesidades de seguridad epistémica no cubiertas. Se sugiere también que esos eec preparan a la persona para actuar con el propósito de cubrir esa necesidad (o preservarla, en el caso de que esté cubierta) y restablecer su equilibrio psico físico. Dicho en resumen, en la investigación se conjetura que, en el contexto de la práctica matemática, los eec en torno a un H funcionan como alarmas que se activan ante necesidades de seguridad epistémica que no han sido atendidas (relacionadas con ese H) y que preparan a la persona para realizar trabajo matemático con el fin de restablecer sus niveles de equilibrio psicofísico, derivados de la insatisfacción de esa necesidad de seguridad epistémica en riesgo.

CAPÍTULO VII CONSIDERACIONES FINALES. ALGUNOS APUNTES PARA LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Filósofos de las matemáticas e investigadores en educación matemática (De Villiers, 2010; Fischbein, 1982; Hanna & Jahnke, 1996; Hersh, 1986; Tymoczko, 1986) concuerdan en que los eec intervienen centralmente en las actividades matemáticas. Ellos sostienen que, en el contexto de los procesos heurísticos, los eec estimulan el trabajo o pueden detenerlo; y ya en las etapas de evaluación de los resultados del trabajo matemático, el convencimiento es un criterio de demarcación que permite distinguir entre lo que es una prueba de lo que no lo es, entre lo que es una justificación razonable de la que no resulta aceptable en un contexto escolar dado (Mariotti, 2006).

Sin embargo, en esta investigación se aportan evidencias de que los eec también intervienen de otras maneras, pero siempre medulares, en la construcción del conocimiento matemático, tanto a nivel de los profesionales de la disciplina como en la arena de la educación matemática.

Aquí se han dado muestras empíricas provenientes de la historia de la matemática, así como de la educación matemática, de que las certezas y las dudas (matemáticas, pero también extra-matemáticas, como las ontológicas o las epistemológicas) son un vector que orienta el trabajo matemático; que las certezas y las dudas repercuten directamente en el tipo de contenidos matemáticos que se ponen a consideración en el trabajo disciplinar e inclinan e incluso predisponen a la persona hacia ciertas decisiones que guían ese trabajo. Asimismo, en este estudio se han identificado las condiciones bajo las cuales esos eec representan un impulso para el avance del conocimiento matemático o para el progreso de las competencias matemáticas y en qué condiciones actúan como un freno. Además, se han ofrecido confirmaciones empíricas de que una buena gestión de los eec puede modificar la calidad del procesamiento cognitivo, al estimular las funciones ejecutivas de la mente (Diamond, 2013): el buen manejo de los eec coadyuva al auto-control de los eec (la resistencia a actuar impulsivamente a lo que dictan en automático esos eec); favorece el rompimiento de certezas preeminentes; promueve la flexibilidad cognitiva, en la medida que genera entornos propicios para formular nuevas preguntas y producir nuevos significados y comprensiones de los resultados matemáticos, y da espacio para el pensamiento creativo. Las evidencias aquí expuestas han permitido responder a las preguntas de investigación que orientaron el presente estudio.

Para dar respuesta a esas preguntas de investigación ha sido necesario construir, prácticamente desde cero, un modelo teórico interpretativo que permitiera comprender, aunque de manera inicial e incipiente, la naturaleza de los eec y explicar algunos fenómenos de los eec presentes en la educación matemática.

Es cierto que hay diversos estudios en los que se ha investigado aspectos diferentes sobre los eec en el ámbito educativo y que han dado ciertas pautas para la reflexión. Están no solo los citados en el Capítulo I de este estudio (relativo a la revisión bibliográfica). Otros investigadores han hecho trabajos sobre temas específicos, como las relaciones entre convicción y validez. Fischbein (1982) muestra en un trabajo con estudiantes que algunos de ellos pueden hacer pruebas correctamente, pero que no les convencen del todo. Segal (2000) da evidencias de que estudiantes de nivel superior encuentran diferencias entre convicción y validez. Por ejemplo, ellos afirman que los argumentos empíricos les convencen pero reconocen que no son válidos; en cambio, los argumentos deductivos les convencen y aceptan su validez. Bell (1976), por otra parte, sostiene que normalmente se accede a la convicción por otros medios que siguiendo una prueba lógica y Harel y Sowder (1998) afirman que, en muchos casos, la certeza y convicción de los estudiantes en la verdad de un argumento no está basada en implicaciones lógicas y deductivas, sino en evidencia empírica, en intuiciones, o incluso en la autoridad.

No obstante, esos estudios no resultan suficientes para comprender lo que está en el origen de los eec y los efectos que esos eec ejercen en el contexto de la práctica matemática. Y menos aún, no resultan suficientes para proponer fundadamente investigaciones e intervenciones didácticas relacionadas con esos estados. En lo que sigue se explica el punto.

Desde la perspectiva de este estudio, es muy posible que los eec en torno a algún hecho de las matemáticas H funcionen como un mecanismo de regulación cognitiva y emocional, mecanismo que es sensible a la insatisfacción (o satisfacción) de necesidades de seguridad epistémica en torno a H; la valoración de que esa necesidad no ha sido satisfecha funciona como un detonador que provoca ciertos estados de desequilibrio de los que informa la duda (o cualquier otro eec negativo) (lo propio sucede con los eec positivos). Si es así, es importante que el investigador conozca de antemano las posibles secuelas (positivas o negativas) que sus estudios pueden tener sobre los estudiantes o los profesores. Fischbein, con una sensibilidad hacia las personas que participan en los estudios de investigación, lo puso en claro. Haciendo referencia a trabajos que buscaban 'mejorar' la calibración en estudiantes, él sostiene:

> El problema no es solo mejorar su calibración intentando que ellos reduzcan su sobre-confianza. Al luchar por convencer a los alumnos de que muy frecuentemente sostienen convicciones erradas, sin proveerles con herramientas metacognitivas, lo único que se hace es destruir su auto confianza. (1987, p. 40).

Fischbein sugiere que, en el intento porque los alumnos disminuyan su confianza en sus reacciones espontáneas, los investigadores debieran buscar, en paralelo, que ellos no pierdan su confianza en sus capacidades matemáticas y su auto-confianza en general (1987, p. 41).

En este trabajo se concuerda totalmente con los cuestionamientos que Fischbein hace hacia los trabajos de intervención en los que se intenta incrementar los niveles de calibración en los alumnos.

Y se está totalmente de acuerdo con él de que en los estudios que se llevan a cabo, los investigadores tengan sumo cuidado, y que asuman con conciencia los preceptos de la ética de la investigación científica, para no provocar en los estudiantes la pérdida de su auto-confianza o de suscitar en ellos cualquier otro tipo de desequilibrio cognitivo o emocional.

El problema es que, desde el escaso conocimiento que actualmente se tiene sobre el tema del convencimiento y la duda, y aunque los investigadores tengan presentes esos preceptos éticos, será difícil hacer intervenciones didácticas bien fundamentadas, bien orientadas, que no solo no generen posibles dificultades en los alumnos, sino que los ayuden realmente a aprender a lidiar con sus eec, de tal manera que esos eec actúen como impulsores del avance de sus aprendizajes y no como un freno.

Bowers (2018) plantea la urgente necesidad de seguir abriendo espacios de reflexión y análisis, tanto en la investigación en educación matemática como en la formación de profesores o en su desarrollo profesional, que ofrezcan nuevas herramientas conceptuales y metodológicas y nuevas aproximaciones teóricas hacia los problemas de la didáctica de la disciplina. Afirma que el desarrollo profesional del profesor se ha centrado en que ellos realicen actividades que tengan implicaciones directas, visibles e inmediatas para la clase. Esto se observa en las publicaciones. La mayoría de los artículos en revistas que publica NCTM están orientados a describir ejemplares de lecciones, técnicas pedagógicas, estilos de enseñanza. Sostiene que estas prácticas, si bien son valiosas, pueden llegar a estrechar el espacio de posibilidades y de acción del profesor y de sus estudiantes.

Su propuesta consiste en que en la investigación matemática se promuevan estudios de contenido filosófico, sobre cuestiones de la epistemología o la ontología de las matemáticas. Aunque estas investigaciones carecen aparentemente de implicaciones visibles e inmediatas para la práctica -él sostiene- son un medio que permitirá abrir el espacio hacia el empoderamiento de profesores y alumnos al interactuar con la disciplina.

Respondiendo a este llamado, en este trabajo se ha introducido un marco teórico de los eec, fundamentado en bases empíricas, que en la educación matemática no solo resulta totalmente novedoso sino necesario. Retomando a Bowers (2018), se considera que este trabajo permite a los interesados en educación matemática reflexionar a profundidad en temas del convencimiento y la duda y aporta algunos elementos teóricos y metodológicos para el diseño futuro de intervenciones didácticas, fundamentadas y éticamente responsables, en el tema del convencimiento, la incertidumbre, la presunción o la certeza. Este tema, aunque no es directamente visible, está presente en casi cualquier tipo de práctica matemática. Como dice Ortega y Gasset:

Quien tiene una certeza, quien no duda, no moviliza su angustiosa actividad de conocimiento. Éste nace en la duda y conserva siempre viva esta fuerza que lo engendró. El hombre de ciencia tiene que estar constantemente ensayando dudar de sus propias verdades (1945, p. 58).

Y como apunta Kline:

(al hacer matemáticas) se debería constantemente reexaminar las convicciones más firmes, porque éstas son las más propensas a ser sospechosas. Porque ellas marcan más las limitaciones que los logros positivos (Kline, 2009, p. 577).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abelson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist*, *43(4)*, 267.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory. A practical Guide*. Londres, Inglaterra: SAGE Publications.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Bonola, R. (1951). *Geometrías no euclidianas.* Buenos Aires: Espasa.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Bowers, D. M. (2018). Opening space for change and empowerment through philosophical and structural contemplation in teacher professional development. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski, (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 286-293). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4^{nd} ed.). California, USA: Sage Publications, Inc.

Coxeter, H.S.M. (1977). Gauss as a Geometer. *Historia matemática, 4,* 379-396.

Damasio, A. (2010[a]). *El error de Descartes: la emoción, la razón y el cerebro humano*. Barcelona, España: Crítica.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1983). *The mathematical experience*. Harmondsworth: Penguin Books.

Damasio, A. (2010[b]). *En busca de Spinoza: neurobiología de la emoción y los sentimientos.* Barcelona, España: Bocket.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

De la Torre, P. (2018). *Fundamentos y prácticas de comunicación no violenta*. Barcelona: Arpa Editores.

Diamond, A. (2013). Executive Functions. *Annual Reviews Psychology. 64*, 135-168.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Ernest, P. (2016). The problem of certainty in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *92(3),* 379–393.

Feldman, L. (2019). *La vida secreta del cerebro*. Ciudad de México: Ediciones Culturales Paidós.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3(2)*, 9–24.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, *91(2)*, 271-288.

Gauss, C. F. (1900). *Werke 8.* Gottingen: Koniglichen gesellschaft der wissenschaften.

Goleman, D. (1995). *La inteligencia emocional*. México, D. F.: Javier Vergara Editor.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877–908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998*).* Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid´s Elements*. New York: Dover Publications.

Hersh, R. (1986). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy: ERME.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference* *of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Hyland, K., & Milton J. (1997). Qualification and Certainty in L1 and L2 Students. *Journal of second Language Writing*, *6(*2), 183-205.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66(1)*, 3-21.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días.* Madrid: Alianza editorial.

Kline, M. (1985). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre.* México: Siglo XXI.

Kline, M. (2009). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.* México: FCE.

Lombardo-Radice, L. (1974). Lobacevskij, matemático-filosofo. In N. I. Lobacevskij. *Nuovi Princípi della Geometria, con una teoria completa delle parallele* (pp. 13-54). Universale Scientifica Boringhieri (Traducción S. Ursini, disponible en Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México).

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and future* (pp. 173-203). UK: Sense Publishers.

Martínez, B. & Rigo, M. (2013). Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (I CEMACYC)* (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI. ISBN: 978-9945-415-55-1

Martínez, B., y Rigo, M. (2014a). Mathematical certainties in history and distance education. En Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C. & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (pp. 177-184, Vol 4). Vancouver, Canada: PME.

Martínez, B., Rigo, M. (2014b). ¿La certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Martínez, B., & Rigo, M. (2015a). Determinaciones mutuas entre certeza, duda y comprensión. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* (pp. 1-13), Chiapas, México.

Martínez, B., & Rigo, M. (2015b). Sobre la recuperación de la certeza. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 361-370). Alicante, España. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (SEIEM). ISBN: 978-84-9717-385-8. ISSN: 1888-0762.

Martínez, B. y Rigo, M. (2016a). Dynamic relations between convincement and comprehension in the construction of grounds. In M. B. Wood, E. Turner, M. Civil & J. Eli. *Proceedings 38th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education. pp. 628-643. Arizona: The University of Arizona College of Science. ISBN 978-0-692-62876-8. http://www.pmena.org/proceedings/

Martínez & Rigo (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 335-345). Zaragoza: SEIEM.

Maslow, A. H. (1943). A Theory of Human Motivation. *Psychological Review*, 50, 370-396.

Montesinos, J. M. (2012). Un problema Bimilenario: La geometría no euclidiana hiperbólica. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. , 105(2),* 217-226.

Muis, K. R., Psaradellis, C., Lajoie, S. P., Di Leo, I., & Chevrier, M. (2015). The role of epistemic emotions in mathematics problem solving. *Contemporary Educational Psychology*, *42*, 172-185.

Ortega y Gasset, J. (1945). *Ideas y Creencias*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

Reichertz, J. (2007). Abduction: The Logic of Discovery of Grounded Theory. En A. Bryant & K. Charmaz (Eds.), *The SAGE Handbook of Grounded Theory* (pp. 214-228). Bangalore, India: SAGE Publications Ltd.

Reventós, A., & Rodríguez, C.J. (2007). Gauss y la geometría. Geodesia y Geometría no euclidiana. Recuperado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:VfIlf2o4jjoJ:vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php%3Foption%3Dcom_docman%26task%3Ddoc_download%26gid%3D542%26Itemid%3D75+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=mx

Rigo, M. (1989). Del continuo euclidiano al continuo de Dedekind: ¿filiación o ruptura? (Tesis de maestría). Cinvestav, México.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics, 84(1)*, 71-91.

Rigo, M. & Martínez, B. (2017). Epistemic States of Convincement. A study based on the professional practice of mathematics and on a neurobiological model of affect. In U. Xolocotzin (Ed.), *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning.* USA: Elsevier.

Rosenberg, M. (2006). *Comunicación no violenta. Un lenguaje de vida*. Buenos Aires, Argentina: Gran Aldea Editores

Ruiz, A. (1995). Introducción (a Disquisitiones Arithmeticae). Recuperado de http://epsaleph.tripod.com/sitebuildercontent/sitebuilderfiles/disquisitionesarithmeticae.pdf

Sánchez-Upegui, A. (2009). Nuevos modos de interacción educativa: análisis lingüístico de un foro virtual. *Educación y Educadores, 12(2)*, 29-46.

Segal, J. (2000). Learning About Mathematical Proof: Conviction and Validity. *Journal of mathematical behavior, 18 (2)*, 191-210.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gaings and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sholz, E. (2005). Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría. *La Gaceta de la RSME, 8 (3),* 638-712.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan.

Tymoczko, T. (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S. (2001). La aportación de Gauss a la geometría hiperbólica: su carteo con matemáticos y científicos de la época. *Miscelánea Matemática, 33,* 1-19.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza*. Barcelona: Editorial Gedisa.

ANEXO 1. PUBLICACIONES RELACIONADAS CON ESTE DOCUMENTO

ARTÍCULOS PUBLICADOS EN ACTAS DE CONGRESOS

INTERNACIONALES

Martínez B. & Rigo M. (2014). Mathematical certainties in history and distance education. En Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 4*(pp. 177-184). Vancouver, Canada: PME.

Martínez B. & Rigo M. (2014). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XVIII.* Pp. 445-454.Salamanca, España: SEIEM.

Martínez B. & Rigo M. (2015). Determinaciones mutuas entre certeza, duda y comprensión. In Scott, P., & Ruiz, A. (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2015,* Vol. 15 (p.p. 96-107). Chiapas, México: CIAEM.

Martínez, B., & Rigo, M. (2015). Mathematical certainties: Obstacles or drivers for comprehension? En Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, p. 187. Hobart: PME (Short Oral). ISSN 0771-100X. Hobart: PME.

Martínez, B. & Rigo, M. (2016) Relaciones dinámicas entre convencimiento y comprensión en la construcción de sustentos (Dynamic relations between convincement and comprehension in the construction of grounds). In Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education,* pp. 628-643*.* Tucson, AZ: The University of Arizona.

Martínez B. & Rigo M. (2017). Confidence and comprehension building processes regarding mathematical content. In Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., & Choy, B.H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3,* pp. 217-224. Singapore: PME.

Martínez Navarro, B. y Rigo Lemini, M. (2017). Análisis de procesos didácticos para lograr convencimiento en un conocimiento matemático bien fundamentado. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J.

Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 335-345). Zaragoza: SEIEM.

CAPÍTULO DE LIBRO

Rigo, M. & Martínez, B. (2017). Epistemic States of Convincement. A study based on the professional practice of mathematics and on a neurobiological model of affect. In U. Xolocotzin (Ed.), *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning*. USA: Elsevier.

MEMORIAS DE COLOQUIOS NACIONALES

Martínez B. & Rigo M. (2015). Las certezas matemáticas ¿Obstáculo o impulso para la comprensión? En Acuña, C., Rigo, M., Sánchez, E., Torres, O., & Valdez, J. C. (Eds.), *3er Coloquio de Doctorado* (p.p. 1-9). Ciudad de México, México: Cinvestav.