



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

**Análisis e implementación de la metodología ABN, una apuesta por
el aprendizaje de algoritmos aritméticos que subsanen sus
consecuencias negativas**

Tesis que presenta

José Roberto Anaya Pineda

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

Ciudad de México

Junio, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo de manutención que me fue otorgado y gracias al cual pude realizar mis estudios de maestría.

José Roberto Anaya Pineda

CVU 1080524

Resumen

El aprendizaje de los algoritmos aritméticos que tradicionalmente se han venido enseñando en la educación básica conlleva importantes consecuencias en la cognición de los alumnos y surge un problema cuando somos conscientes de que muchas de estas son negativas. Debemos dar relevancia a estas consecuencias y elaborar propuestas para poder subsanarlas, pues la aritmética, y sus contenidos algorítmicos, es uno de los primeros contenidos matemáticos en la educación básica con el que los estudiantes tienen contacto en su vida académica.

Para poder subsanar dichas consecuencias negativas de aprender algoritmos aritméticos, primero hicimos una distinción de estos tipos de algoritmos, así notamos que hay algunos cuyo aprendizaje conlleva menos consecuencias negativas, distinguimos entre los algoritmos aritméticos Cerrados Basados en Cifras (CBC), que a lo largo de este escrito nos referiremos a estos como tradicionales o usuales a modo de sinónimos, y por otro lado las propuestas alternativas a estos, por ejemplo, los algoritmos Abiertos Basados en Números (ABN), que también haremos más explícitos en la secciones siguientes.

Cabe notar que existe una fuerte tendencia, en los planes y programas de estudio de la educación básica, de incluir los contenidos de algoritmos usuales o tradicionales, que son precisamente los que conllevan las consecuencias negativas que nos ocupan en este proyecto.

Entonces, seleccionamos de la literatura analizada una propuesta alternativa a los algoritmos usuales: la metodología de los algoritmos ABN, la cual evaluamos con ayuda de un modelo conceptual de desarrollo cognitivo con el que encontramos el valor de aprender dichos algoritmos, dentro de ese modelo. Y obtenemos que, de acuerdo con este modelo, los estudiantes aprenden algoritmos ABN dentro de un nivel cognitivo alto.

Nuestro proyecto fue implementar, en un medio digital, esta propuesta ABN la cual ya hemos confirmado teóricamente como una mejor apuesta por el aprendizaje de la

aritmética. Dicha implementación la construimos como una plataforma web, en la cual los alumnos pueden tener contacto con esta propuesta alternativa y practicarla. Teniendo como hipótesis, por las justificaciones previamente mencionadas, que aprenderán algoritmos aritméticos en un alto nivel cognitivo.

Learning the usual algorithms of arithmetic has important consequences for students' cognition, and the problem arises when we realize that many of these consequences are negative.

We must give relevance to these consequences and work on proposals to offset them, since arithmetic, and its algorithmic contents, is one of the first mathematical contents in basic education with which students come into contact in their academic life.

To make up for these negative consequences of learning arithmetic algorithms, we first made a distinction between these types of algorithms, noting that there are some whose learning entails fewer negative consequences. We distinguished between traditional arithmetic algorithms (CBC) and on the other hand the alternative approaches to these (e.g., ABN).

It should be noted that there is a tendency in basic education curricula to include the usual or traditional algorithmic contents, which are precisely those that entail the negative consequences that concern us in this project.

Then we selected, from the analyzed literature, an alternative proposal to the usual algorithms, the methodology of open number-based algorithms (ABN), which we evaluated with the help of a conceptual model of cognitive development with which we found the value of learning such algorithms, according to this model. And we obtain that, according to this model, students learn ABN algorithms at a high cognitive level.

Thus, our work was to implement, in a justified way, this ABN proposal. Such implementation we give it as a web platform, in which students can approach this alternative proposal and practice it within our digital environment. Having as a hypothesis, due to the previously mentioned justifications, that they will learn arithmetic algorithms at a high cognitive level.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
2. ANTECEDENTES.....	4
INTERÉS GENERAL Y SU DELIMITACIÓN	4
ANTECEDENTES QUE EXPONEN LAS CONSECUENCIAS NEGATIVAS DE APRENDER MEDIANTE ALGORITMOS	5
¿QUÉ SE HA HECHO CON RESPECTO A LAS CONSECUENCIAS NEGATIVAS DE APRENDER ARITMÉTICA?	13
USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE NIVEL PRIMARIA	28
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU DELIMITACIÓN	34
OBJETIVO Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	37
3. MARCO CONCEPTUAL	39
DEFINICIÓN DE ALGORITMOS.....	39
DISTINCIÓN DE DOS TIPOS DE ALGORITMOS ARITMÉTICOS	40
DEFINICIÓN DE ALGORITMOS CBC	42
EL MÉTODO ABN.....	46
EL MODELO COGNITIVO DE APRENDIZAJE DE ALGORITMOS DE FAN Y BOKHOVE (2014)	53
4. LOS ALGORITMOS ABN EVALUADOS EN EL CONTEXTO DEL MODELO COGNITIVO DE FAN Y BOKHOVE (2014)	60
EL PAPEL DE LOS ALGORITMOS ABN EN EL APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA DE ACUERDO CON EL MODELO DE FAN Y BOKHOVE	61
IDENTIFICACIÓN DE LAS IDEAS DE FERNÁNDEZ CON LAS IDEAS DE FAN Y BOKHOVE, Y LA METODOLOGÍA ABN	66
NOTA SOBRE LA DIDÁCTICA TRADICIONAL, LA ESCUELA ACTIVA Y LOS ALGORITMOS ABN.....	67
5. IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS ABN EN LA PLATAFORMA DIGITAL	70
INTRODUCCIÓN A LA PLATAFORMA DIGITAL Y SUS ALCANCES. ¿POR QUÉ DESARROLLAR EL MÉTODO ABN EN UNA PLATAFORMA DIGITAL?.....	70
ELEMENTOS DE LA LITERATURA CONSIDERADOS EN LA CREACIÓN DEL CONTENIDO ABN DE LA PLATAFORMA DIGITAL.....	74
ELEMENTOS IMPORTANTES DE LA PLATAFORMA QUE FAVORECEN PRESENTAR EL CONTENIDO ABN	77
PROPUESTAS DE APRENDIZAJE DE ALGORITMOS ABN CONSIDERADAS EN EL CONTENIDO DE LA PLATAFORMA.....	78
PRIMER EJE DE LA PLATAFORMA	90
SEGUNDO EJE DE LA PLATAFORMA	106
6. CONCLUSIONES Y RESULTADOS	120
7. BIBLIOGRAFÍA	123

1. Introducción

Podemos pensar que el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria es crucial para el desarrollo cognitivo de los niños. Y basta con tan sólo pensar en jóvenes que, por malas experiencias en su vida académica durante su infancia, quedan agotados de las matemáticas y hasta les genera recelo el solo escuchar el nombre de esta ciencia.

Más aún, por tales malas experiencias, o más preocupante, por las consecuencias negativas del aprendizaje matemático que han tenido durante su infancia, se generan huecos de aprendizaje que terminarán socavando cimientos relacionados a las matemáticas posteriores y que serán muy importantes en su vida académica y profesional.

Si consideramos lo previamente mencionado podemos notar que la educación matemática que se da en la etapa de la primaria tiene gran importancia en el desarrollo cognitivo de los estudiantes y también podemos ver, con gran temor, todas las posibilidades que existen de que los alumnos desde dicha etapa minen su interés por las matemáticas o se plaguen de malos entendidos, poca comprensión de las matemáticas y, en general, se llenen de consecuencias negativas debido al aprendizaje que han logrado de las mismas.

Específicamente trabajamos con las consecuencias negativas que conlleva el aprendizaje de la aritmética de los números naturales, que se construye en la educación primaria durante los tres primeros años y es donde cobra más relevancia dicho contenido matemático, así como un poco en la educación preescolar en la cual se estudian nociones de conteo y conocimiento de los números.

Más específicamente consideramos las consecuencias negativas que implica el aprendizaje de los algoritmos aritméticos usuales que se enseñan en las escuelas primarias. Esto porque recurriendo a los planes y programas de estudios oficiales del país notamos muy

claramente la presencia de dichos contenidos algorítmicos entre los aprendizajes esperados (SEP, 2022)¹.

Motivados por lo anterior, en el capítulo de antecedentes, indagamos profundamente sobre estas consecuencias negativas de aprender aritmética mediante los algoritmos clásicos, mientras que especificamos aún más el porqué de nuestro interés. También fue importante indagar sobre los trabajos e investigaciones que se han hecho al respecto de dichas consecuencias negativas, por lo que describimos estas investigaciones previas en ese mismo capítulo. Y puesto que el uso de la tecnología digital es una pieza fundamental de nuestro trabajo incorporamos antecedentes sobre este uso en la educación matemática del nivel básico, particularmente en los temas de aritmética, destacamos desarrollos digitales actuales que comparten características con nuestro trabajo.

En el capítulo 2 describimos concretamente nuestro problema de investigación y la delimitación de este, enfocándolo de manera tal que sale a relucir claramente nuestro objetivo, bosquejamos los desarrollos teórico y práctico que hacemos en el proyecto.

Para pasar meramente a estos desarrollos comenzamos describiendo, en el Marco Conceptual, todos aquellos elementos que necesitamos para lograr nuestro objetivo y satisfacer nuestro interés. Consideramos desde la propia definición de algoritmos, la distinción de tipos de algoritmos que adoptamos, la propuesta alternativa de algoritmos aritméticos que usamos en el proyecto y, en general, todos los conceptos y herramientas teóricas que necesitamos para desarrollar y justificar nuestro proceder.

El capítulo 4 incluye los resultados y el análisis teórico que hacemos a la propuesta alternativa de algoritmos aritméticos que hemos elegido, como una de las más adecuadas para que los alumnos aprendan contenido aritmético, analizando el desarrollo cognitivo que los alumnos pueden tener con esta metodología mediante una herramienta teórica o marco para analizar algoritmos. También hacemos explícitas las relaciones que

¹ La revisión que hicimos de los planes y programas de estudio de la SEP la llevamos a cabo a través del portal web al que lleva el enlace de la referencia. Es sencillo navegar a través de esa tabla dinámica en la que la SEP organiza el contenido de todos los temas desde preescolar hasta secundaria. Incluye y explica tanto temas considerados en el plan, como objetivos esperados.

encontramos entre diferentes trabajos teóricos sobre el tema, que en principio parecen no tener relación alguna, pero que en realidad comparten muchísimas características y podemos fácilmente identificar algunas ideas particulares con otras.

Pasamos al siguiente capítulo: Implementación de la metodología ABN en la Plataforma Digital, en el cual mostramos todo el desarrollo práctico, que previamente mencionamos. Es decir, explicamos con detalles nuestra implementación de la propuesta alternativa de los algoritmos aritméticos en el medio digital que hemos hecho mediante una plataforma web. No solo explicamos dicha práctica, sino que justificamos teóricamente tanto la forma en la que presentamos el contenido, así como el medio digital en sí mismo y sus características.

Finalmente, mostramos en el último capítulo nuestros resultados y conclusiones con respecto al objetivo que nos planteamos en el proyecto y sobre todo damos una breve discusión de lo logrado, aspectos importantes a mejorar y sus perspectivas a futuro.

2. Antecedentes

Interés general y su delimitación

Como lo comenzamos a describir en la introducción, el tema general que tratamos en este proyecto son las competencias²³ matemáticas que adquieren los estudiantes de primaria cuando en su aprendizaje de la aritmética se ve relaciona la enseñanza de algoritmos.

Analizar cómo es que impacta la enseñanza y el aprendizaje de algoritmos en la maduración cognitiva de los niños en temas de matemáticas de primaria es interesante y conlleva una amplia discusión en cuestiones como: la conveniencia de usar o no usar algoritmos en la enseñanza de la aritmética; cuáles algoritmos son mejores; qué temas enseñar y muchas preguntas más que se han estado planteando investigadores sobre el tema.

Específicamente nosotros nos centramos en las competencias matemáticas relacionadas con la aritmética básica, esto es, competencias que adquieren los niños estudiantes de primaria en su proceso de aprendizaje de las operaciones aritméticas mediante algoritmos.

Estas competencias las podemos identificar claramente cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas aritméticos: adición, sustracción, multiplicaciones y divisiones, ya sean propuestos de manera directa como aplicaciones de algoritmos o considerando aspectos de contexto y problemáticas reales que conducen a los estudiantes a darle significado a los temas aprendidos.

Todas las competencias en cuestión se relacionan con las estrategias y métodos de resolución de problemas aritméticos, capacidad y habilidad en el cálculo aritmético y el sentido que le dan los estudiantes a las operaciones aritméticas que efectúan. Y las estaremos tratando a lo largo del proyecto, pues analizar la calidad de estas competencias y su mejora es de nuestro interés.

² Competencia: Pericia, aptitud o idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado (RAE, 2022).

³ Entendemos la palabra competencia con el significado de la misma palabra, sin atribuirle modelos pedagógicos, corrientes u algún otro significado más que el que la Real Academia Española nos otorga.

Cuando nos referimos a analizar y evaluar la calidad de las competencias matemáticas de los estudiantes que aprenden algoritmos aritméticos nos referimos a distinguir que tan competentes son después de haber aprendido algún tipo específico de algoritmo. En otras palabras, nos interesa analizar las consecuencias tanto negativas, como positivas, de aprender aritmética mediante algoritmos.

Antecedentes que exponen las consecuencias negativas de aprender mediante algoritmos

Una parte fundamental de nuestro trabajo es que nos interesa subsanar las consecuencias negativas que conlleva el aprendizaje de algoritmos que tradicionalmente se utilizan en las operaciones aritméticas. Por lo cual resulta importante hacer explícitas estas consecuencias y expresarlas con base en la literatura.

Podemos fácilmente recurrir a la experiencia empírica, en nuestro entorno social y académico, con la cual nos podemos dar cuenta del rechazo o desapego de los estudiantes de primaria a los temas de aritmética, lo que podemos comprender como parte de las consecuencias de que la estructura de enseñanza y aprendizaje de estos temas inhibe al alumno al no poderse involucrar más que repitiendo pasos, incluso para algunos de ellos pasos completamente sin sentido.

Por lo cual, a nuestra opinión y dichas experiencias empíricas, los alumnos podrían comenzar a ver a las matemáticas como un terreno hostil, excluyente, confuso y aburrido, lo que podría socavar su interés por temas posteriores de matemáticas pues recordemos que el estudio de la aritmética de los números naturales constituye el inicio de las matemáticas en su vida académica. Así que vale la pena estudiar las alternativas de aprendizaje de la aritmética, alternativas que no conlleven estas consecuencias negativas o se ven minimizadas.

A continuación presentamos algunos resultados de la literatura que expresan claramente estas consecuencias negativas generadas por un aprendizaje de la aritmética de manera tradicional.

Kamii y Dominick (1997) hicieron un interesante estudio experimental con 4 grupos de estudiantes por nivel educativo considerando: primero, segundo, tercero y cuarto de primaria. Donde algunos de los estudiantes habían sido motivados, en grados previos a los que se encontraban durante el estudio, a inventar sus propios algoritmos para sumar y multiplicar números naturales. Mientras otros tantos, habían permanecido completamente aprendiendo los algoritmos de los libros, lo que identificamos como los algoritmos que involucran el “acarreo” y el “prestado”.

En el estudio experimental les presentaron a los estudiantes, en una entrevista, una serie de problemas formulados de diversas maneras en los que simplemente se utilizó lápiz, papel y unas fichas como material de apoyo. Estos problemas estaban destinados a que las soluciones de los estudiantes le otorgaran a los investigadores información sobre las nociones de valor posicional y sentido numérico que manejaban dichos estudiantes.

Encontraron que los estudiantes que fueron instruidos mediante los algoritmos comunes que involucran el acarreo y el préstamo fueron menos capaces de resolver los problemas presentados y de dar una justificación de los resultados que encontraron.

Más explícitamente, encontraron que el aprendizaje de estos algoritmos tradicionales desprende en los alumnos el valor posicional de los números y el sentido de cantidad, pues en adiciones y sustracciones realizaban el algoritmo correctamente pero no le prestaban importancia al valor posicional de los números de manera tal que operaban sin fijarse en las unidades y las decenas, lo que originaba un resultado erróneo del cual incluso los alumnos no podían ni argumentar su validez.

El sentido numérico, en esta investigación se relaciona con la noción de cantidad de los números manejados, y los investigadores veían en la incapacidad de los alumnos de argumentar la validez de sus respuestas, la falta de esa noción de cantidad. Por ejemplo, los resultados expresados por los alumnos, en algunas ocasiones, discrepaban muchísimo de las cantidades manejadas y no prestaban atención a esos detalles.

Esto anterior lo vemos en la tabla de la siguiente Figura 1 donde los autores nos muestran las respuestas que dieron los alumnos de tres grupos de segundo año de primaria para la

suma horizontal $7 + 52 + 186$. Los tres grupos se encontraban en la misma situación de llevar un año de aprendizaje, pero el grupo con la etiqueta "Algorithms" aprendió totalmente mediante los algoritmos tradicionales, el grupo con la etiqueta "Some Algorithms" hacía tareas con dichos algoritmos solamente en casa y el grupo "No Algorithms" estuvo aislado del aprendizaje de dichos algoritmos tradicionales.

TABLE 1
Answers to $7 + 52 + 186$ Given by Three Classes of Second Graders

	Algorithms <i>n</i> = 17	Some Algorithms <i>n</i> = 19	No algorithms <i>n</i> = 20
	9308		
	1000		
	989		
	986		
	938	989	
	906	938	
	838	810	
	295	356	617
.....			
			255
			246
245	(12%)	(26%)	(45%)
			243
			236
			235
.....			
	200	213	138
	198	213	—
	30	199	—
	29	133	—
	29	125	—
	—	114	—
	—	—	—
		—	—
		—	—

Dashes indicate that the child declined to try to work the problem.

Figura 1.- Mostramos uno de los resultados experimentales de Kamii y Dominick (1997, p. 54).

Notamos de inmediato que el grupo que aprendió completamente con los algoritmos tradicionalmente trabajados obtuvo el menor porcentaje de respuestas correctas, sin embargo, lo que más interesa hacer notar es la discrepancia de resultados de los dos

primeros grupos, sobre todo del grupo que tuvo un aprendizaje basado solo por los algoritmos convencionales.

Hay una discrepancia total en los resultados dados por los alumnos de dicho grupo, podemos ver que hay respuestas desde decenas hasta millares, con lo que podemos notar que no tienen desarrollado el sentido holístico de las cantidades en juego. Este es solo uno de los resultados de la investigación, pues se repite este fenómeno para los niveles posteriores de la primaria.

De igual manera, está documentado algo similar también para los grupos de segundo grado de primaria, donde se percibe inmediatamente que la mayor parte del grupo que aprendió algoritmos pierde el sentido completo de las cantidades y también el valor posicional de los números. Lo que ocurre es que al presentarles exactamente la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +35 \\ \hline 24 \\ ? \end{array}$$

el 79% de los alumnos del grupo que aprendió los algoritmos tradicionales tuvo una respuesta incorrecta de “99”, mientras que de los alumnos del grupo que no aprendió algoritmos tradicionales solo el 11% escribió “99” como respuesta. Es claro que los alumnos del primer grupo estuvieron sumando columnas de unidades, sin mostrar siquiera que se percatan de la organización de la adición en columnas, realizan el algoritmo como simples pasos sin proceder con un análisis de este. E incluso cuando se les pregunta si tiene sentido el valor que han puesto como respuesta no se dan cuenta de que esta es errónea (Kamii & Dominick, 1997).

Aunado a esto, los autores llegaron a la conclusión de que estos algoritmos tradicionales inciden en el desarrollo del sentido numérico. Pues, nuevamente en sus respuestas, notaron que al considerar los algoritmos comunes para efectuar las adiciones y productos los alumnos no perciben de manera holística al número, esto es, que no son capaces de separar un número natural en sus posibles sumandos para proceder de manera diferente,

siempre comienzan de izquierda a derecha desprendiendo el sentido del número completo que se encuentran utilizando.

Tal como dicen Kamii y Dominick (1997), ver la multiplicación 42×7 y hacer la operación mediante el algoritmo tradicional no nos mete en muchos problemas a nosotros como adultos cuando llegue el momento de que tengamos que hacer 4×7 , pues sabemos que ese 4 representa las 4 decenas que componen al número 42. Pero para un estudiante que se encuentra aprendiendo, esa información resulta estar oculta y en sus experimentos estos autores demuestran que los algoritmos tradicionales, como los que involucran en préstamo y el acarreo, minan el este sentido numérico en los estudiantes.

Finalmente, en sus conclusiones, los autores aseguran que la enseñanza de algoritmos aritméticos para estos estudiantes resultó dañina para el desarrollo de su sentido numérico y comprensión del valor posicional, desaprobando en gran medida la enseñanza de estos algoritmos tradicionalmente enseñados. Y considerando que una mejor práctica es promover la construcción, por parte de los estudiantes, de conexiones mentales necesarias para construir el sentido numérico.

Sobre el hecho de que el aprendizaje de estos algoritmos aritméticos usuales mina la apropiación del valor posicional del sistema de numeración que están aprendiendo los alumnos, que en este caso es el sistema decimal, encontramos otra investigación un poco más reciente, Pantano et al. (2014), en la que los autores nos describen que en los algoritmos aritméticos están implícitas dos cosas: la notación y el procedimiento. Mientras que la primera está relacionada con el uso de la numeración Indo arábica, la segunda está relacionada con llevar a cabo el propio proceso algorítmico que está sustentado en el valor posicional de cada una de las cifras involucradas en la operación.

Sin embargo lo que sucede, según Pantano et al. (2014), por ejemplo para el caso de la multiplicación, es que al efectuar cada uno de los pasos del algoritmo estándar es usual que se olvide por completo el valor posicional porque al momento de multiplicar las cifras todas estas se conciben como unidades.

Así podemos pensar, por ejemplo, en el número 42, existe el problema de que el número 4 lo consideran los alumnos como unidad y no como decena, de esta manera olvidando con mucha frecuencia que en el algoritmo estándar de la multiplicación también hay decenas, centenas, unidades de millar, etc.

Los autores solo mencionan el algoritmo de la multiplicación pues su objetivo fue presentar una secuencia didáctica hecha con estudiantes de nivel primaria en la que relacionan su sentido numérico con el sentido geométrico al utilizar materiales concretos para construir el algoritmo de la multiplicación. Sin embargo, fácilmente podemos retomar estas ideas del desprendimiento, que se presenta en los estudiantes, del valor posicional y sentido de los números involucrados en una adición mediante el algoritmo usual que considera el acarreo.

Es decir, si repasamos brevemente comenzando de derecha a izquierda una operación aditiva, resulta que al sumar $42+49$ se considera un acarreo en la suma de $9+2$ y el 1 únicamente se considera como una unidad, donde el algoritmo oculta a los estudiantes el sentido holístico del número. Ahora pensando en la suma de las siguientes dos cifras $4+4$, tenemos evidentemente que estas son consideradas como unidades en el algoritmo y es desprendido completamente el valor posicional de estas cifras, lo que vemos aún más marcado cuando sumamos el 1 considerado como unidad del acarreo previo.

Si bien es cierto que estos autores centran su atención en el desarrollo de su propuesta de secuencia didáctica para introducir la multiplicación de números naturales, es interesante que se percaten de estas consecuencias de utilizar estos algoritmos usuales en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, incluso nos parece interesante y concreta su propuesta didáctica para considerarla en nuestra plataforma digital.

Ya que en su propuesta los autores argumentan que detrás de esos procesos abstractos y escondidos en los algoritmos normalmente enseñados en la primaria, los alumnos deben construir nociones de fondo, como lo son el sentido numérico y el valor posicional de los números, que se encuentran en los algoritmos usuales y esto se logra, proponen ellos, mediante el uso de materiales concretos (Pantano et al., 2014, p. 629).

Continuando con los argumentos que muestran antecedentes de las consecuencias negativas de utilizar algoritmos tradicionales en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, documentamos un interesante trabajo de Aragón-Mendizábal et al. (2017), en el cual nuevamente citan ideas de Kamii y Dominick (1997), incluso previas a las que citamos nosotros, en las cuales muestra un rechazo a utilizar algoritmos tradicionales en la aritmética debido a que el aprendizaje de estos da lugar al aprendizaje memorístico y pasivo sin que los alumnos comprendan los principios subyacentes de las operaciones, de los cuales ya hablamos: valor posicional y sentido numérico.

Otras consecuencias negativas son las que se incluyen en el estudio empírico de Montero (2014) en el cual, como nos dice Aragón-Mendizábal et al. (2017), muestra que los efectos sobre los estudiantes que aprenden algoritmos aritméticos tradicionales son: empobrecimiento de las estrategias y métodos espontáneos para enfrentarse a tareas no rutinarias, el anidamiento de errores conceptuales graves en los fundamentos del cálculo que las estructuras algorítmicas usuales ocultan y la carencia de significación de las cantidades expresadas en cifras en un intervalo de edad del alumnado más amplio de lo esperado.

Aragón-Mendizábal et al. (2017) identifican a estos algoritmos usuales en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, mismos algoritmos que tienen implícitos el acarreo y el préstamo, como los algoritmos Cerrados Basados en Cifras (CBC).

Cabe mencionar también que estos últimos tres efectos o consecuencias negativas de aprender aritmética mediante los algoritmos usuales (CBC), identificados por Montero (2014), son especialmente relevantes porque este mismo autor fue quien diseñó formalmente los algoritmos Abiertos Basados en Números (ABN) precisamente como una forma alternativa de tratar a la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones aritméticas.

Mato (2015) en su tesis de grado de maestría, es más fuerte en sus críticas a los métodos usuales en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. Pues no emplea el adjetivo obsoleto en la descripción del algoritmo tradicional usado en las operaciones aritméticas.

Describe la necesidad de cambiar los algoritmos tradicionales, sustentando sus argumentos en que estos tienen mucho tiempo de haberse creado cuando las necesidades escolares, laborales e intelectuales eran otras. Y obviamente no se crearon considerando la psicología de los niños estudiantes y mucho menos con la intención de promover su desarrollo intelectual.

Lo que inmediatamente implica consecuencias negativas en el aprendizaje de los estudiantes, como aquellas que ya estuvimos tratando en esta sección, sobre todo el hecho de que estos algoritmos construidos con fines específicos para sus usuarios y su época ocultan información y conceptos matemáticos más profundos y superiores a los niños estudiantes en la actualidad. Lo que también se aprecia en que los algoritmos convencionales evaden procesos de estimación y cálculo mental que, en la actualidad y en el contexto de las herramientas tecnológicas, son habilidades indispensables para su correcto uso y aplicación en la vida cotidiana (Attard, 2017).

Resumen e importancia de tomar en consideración a las consecuencias negativas

Finalmente, ya que tenemos bien identificadas las consecuencias negativas de aprender aritmética mediante los algoritmos usuales, que podemos resumir, para esta entrega del proyecto, como problemáticas relacionadas al valor posicional de los números y sentido numérico de las cantidades tratadas en las operaciones aritméticas, podemos recurrir a las reflexiones que hacen Mastachi (2015) y Aragón-Mendizábal et al. (2017) sobre lo que puede ocurrir si no se atienden estas. Pues estos autores nos dicen que existe el riesgo de que estos problemas con la aritmética se conserven en niveles escolares posteriores y, más aún, se propaguen generando nuevas deficiencias, ya no solo en la aritmética, sino en álgebra y posteriormente en cálculo.

También es muy importante considerar, nuevamente, el hecho de que estos temas de aritmética son los primeros contactos de los estudiantes con las matemáticas en su vida académica, por lo que resulta indispensable que los estudiantes no los consideren como simples recetas a seguir repitiendo pasos, incluso para algunos de ellos, sin sentido y que

posteriormente estas ideas socaven su interés por las matemáticas considerándolas aburridas, confusas y excluyentes.

Aprovechamos este apartado para aclarar que, aunque hemos dado pruebas documentadas de que aprender algoritmos aritméticos como convencionalmente se ha hecho trae consecuencias negativas bastante profundas, no es nuestra intención señalar que se deben dejar de hacer las prácticas que se han hecho hasta ahora, es decir, no nos involucramos con las prácticas convencionales para enseñar aritmética. Simplemente observamos las deficiencias de estas, analizando las consecuencias negativas que conlleva el aprendizaje de los algoritmos convencionales, pues nuestra intención es reducir dichas consecuencias.

¿Qué se ha hecho con respecto a las consecuencias negativas de aprender aritmética?

Cuando nos referimos a las consecuencias negativas de aprender aritmética mediante algoritmos, queremos enfatizar nuevamente, nos referimos a los algoritmos considerados como tradicionales o los que aquí también llamamos algoritmos usuales.

La preocupación por estas consecuencias negativas que han traído dichos algoritmos en el aprendizaje de la aritmética ha llevado a los investigadores a crear otras aproximaciones algorítmicas y a hacer estudios relacionados con la cognición vinculados con estos procesos de aprendizaje algorítmico de la aritmética. Dentro de los productos que se han obtenido de estos esfuerzos encontramos interesantes métodos y plataformas que innovan la forma de enseñar y aprender algoritmos aritméticos.

En Mato (2015, pp. 11-14) encontramos un interesante y basto listado de varias de estas metodologías y plataformas alternativas para el aprendizaje de la aritmética. Son en general propuestas muy robustas y completas, elaboradas contemplando un desarrollo sistemático de varias etapas que los alumnos tendrán que cursar.

Incluso en varias propuestas encontramos con gran sorpresa aspectos interesantes como el hecho de que el programa “ALOHA Mental Arithmetic” contempla aspectos fisiológicos

tales como la división en hemisferios del cerebro. Partiendo del hecho de que la actividad del hemisferio izquierdo es cotidiana y se desperdicia el potencial del hemisferio derecho. Este programa, a través de sus actividades interactivas de uso y visualización del ábaco, saca mayor provecho a ese hemisferio y de la capacidad intelectual de los niños en general.

La metodología ABN, algoritmos Abiertos Basados en Números, es otra de las propuestas alternativas a la enseñanza y aprendizaje tradicionales de la aritmética elemental. Esta propuesta será particularmente importante para nosotros pues es base de nuestro proyecto y por tal motivo dedicamos una sección completa, en el marco conceptual, para desarrollar y describir dicha metodología ABN de manera detallada.

Existe otra propuesta de algoritmos alternativos a los tradicionales, es llamada OAOA, Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas, la cual comparte muchos rasgos importantes con los algoritmos ABN, sobre todo en considerar procesos cognitivos importantes que desarrollan el cálculo mental. En realidad el cálculo mental es una diferencia fundamental entre ambos acercamientos pues la metodología ABN lo considera como resultado adyacente del propio aprendizaje de los alumnos, mientras que para OAOA se vuelve la finalidad.

Por ejemplo, los algoritmos ABN son más flexibles con la manera en cómo los alumnos deciden representar sus algoritmos y llevar a cabo sus cuentas, en realidad se proponen formatos específicos para desarrollar los algoritmos, tal como lo podemos ver en la implementación de la metodología en nuestra plataforma digital donde programamos un formato específico para llevar a cabo las sustracciones ABN, y los OAOA ponen en práctica los algoritmos de manera mental directamente como actividad principal (OAOA, 2018)⁴.

⁴ Un concentrado de toda la información sobre la propuesta de OAOA lo vemos en dicha referencia, la cual es su sitio web, en el podemos encontrar los videos explicativos de los propios creadores, propuestas para diversos grados escolares y su blog con varias entradas y contenidos.

En otras palabras, la estructura algorítmica que propone la metodología ABN nos parece más clara, mejor estructurada y en general la metodología ABN se encuentra más justificada y puesta a prueba, aunado a que es un poco más antañá.

A pesar de que ambas metodologías surgieron y fueron ampliamente puestas en marcha en España, la propuesta OAOA no menciona a la metodología ABN, la cual es anterior, ni se preocupan tanto por justificar sus aproximaciones. No es que tengamos en mala concepción a la metodología relacionado con OAOA, simplemente decidimos quedarnos con la metodología ABN porque, a nuestra concepción, la de OAOA ya están contenidos en la metodología ABN. Y aunado a esto, sucede algo peculiar con el acercamiento por medio de OAOA, tal como puede observarse en el blog de la cita previamente hecha, y es que tuvieron un fuerte impulso entre los años 2016-2018 y de manera súbita dejaron esta aproximación, ya no se ven actualizaciones con información reciente y en general se perdió el rastro de lo que se ha hecho con la metodología OAOA.

Regresando a otras aproximaciones también encontramos plataformas digitales completas que desarrollan la enseñanza de las matemáticas de manera distinta, en particular refiriéndonos a estos temas de aritmética. Con plataformas completas nos referimos a que son sistemas en internet, la mayoría de pago, en los que los usuarios, tanto alumnos, como padres de familia, se registran en una base de datos y, después del pago, obtienen acceso a las actividades educativas y se registra el avance de los alumnos de manera personalizada.

El ejemplo que encontramos en Mato (2015) es la plataforma Smartick.es, la cual, según dicha autora, se basa teóricamente en el método Kumon para enseñar matemáticas y lenguaje pero aprovecha las herramientas tecnológicas para programar la presentación de las actividades adecuadas al avance particular de cada estudiante, también genera informes periódicos de la evolución de los alumnos en dichos temas.

Es importante resaltar el hecho de que tanto la plataforma Smartick.es, así como el método Kumon, en el que Smartick.es se basa, y otras metodologías que podemos ver en Mato (2015, pp. 11-14) sí tratan la aritmética, pero no pretenden desarrollar exclusivamente

dichos temas, en realidad cada uno tiene bien definidos sus contenidos y propósitos para los que han sido creados.

Pero también podemos encontrar otras aproximaciones, que igual podemos ver en Mato (2015, pp. 11-14), que sí están meramente enfocadas a los temas de aritmética como el ya mencionado programa “ALOHA Mental Arithmetic” y en menor medida el sistema Qbits creado para que los niños aprendan a contar, sumar, restar, multiplicar, dividir y los contenidos matemáticos desde preescolar hasta sexto de primaria.

Ahora bien, todas estas aproximaciones diferentes de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética involucran actividades algorítmicas y no algorítmicas, pero es importante mencionar que encontramos una fuerte carga de actividades no algorítmicas que promueven aspectos del quehacer matemático de la ecuación básica que, como posteriormente explicaremos, consideramos importantes, entre otras: composición y descomposición de números, complementos a 10, 100 y 1000, manejo súbito de operaciones, conteo y agregar, quitar y comparar cantidades entre colecciones de elementos.

Cabe mencionar que nos referimos a actividades no algorítmicas porque no cumplen con nuestra definición de algoritmos que adoptamos y que en capítulos más adelante explicaremos, es decir, son actividades que no tienen la finalidad de realizar una secuencia paso por paso para resolver un problema matemático. Dichas actividades, en su mayoría, son llevadas a cabo de manera aislada, con la finalidad únicamente de promover esos aspectos antes mencionados de manera particular o desarrollar el cálculo mental, tal como ocurre en la aproximación de Smartick.es y también en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP, 2022).

Analizamos particularmente las actividades de carácter algorítmico de estas aproximaciones, pues los algoritmos aritméticos son centrales y muy importantes en nuestro proyecto. Para esto, lo que hacemos es elegir ciertas aproximaciones que tienen relación con nuestro trabajo y que a continuación describimos para analizar los sustentos

de sus actividades algorítmicas y poder de alguna manera compararlos con el método de los algoritmos ABN que es central para nosotros y del cual hacemos un análisis especial en la sección del Marco Conceptual.

ALOHA Mental Arithmetic

Este programa, que nació en Asia en la década de los noventa está basado en el uso del ábaco japonés pero desarrollado con la intención de que “fuera más allá y potenciara la coordinación y desarrollo de ambos hemisferios cerebrales: izquierdo y derecho” (Aritmetic, 2016)⁶. ALOHA es acrónimo de Abacus Learning of Higher Arithmetic, nombre que refleja las mismas intenciones del programa.

ALOHA es un programa completo⁷ que desarrolla un sistema de enseñanza dirigido a estudiantes de 5 a 13 años de edad que tiene la finalidad de crear una amplia red de conexiones cerebrales de los estudiantes de aritmética a través del instrumento de cálculo que han elegido: el ábaco.

En la primera etapa la idea es que los alumnos aprendan a llevar a cabo operaciones aritméticas mediante el ábaco físico o digital, pues en la plataforma en línea del programa ALOHA se ha implementado un ábaco digital inmerso en un contexto de historias de superhéroes y superpoderes que hace divertido el aprendizaje, posteriormente con el tiempo los alumnos se hacen de una imagen mental del ábaco con la cual realizan ahora las operaciones aritméticas. Ver Figura 2.

⁶ Dentro de la página web de ALOHA encontramos las secciones correspondientes para los alumnos y buena parte de la información que aquí mostramos puede ser encontrada directamente en un informe de un estudio hecho por los mismos creadores de ALOHA sobre el “Impacto del aprendizaje de aritmética mental con ábaco en las habilidades cognitivas de los niños”. Al cual podemos acceder mediante la sección de preguntas frecuentes en el pie de la página web. La cita textual se encuentra en la página 3 de dicho informe.

⁷ En la misma referencia del sitio web de la plataforma encontramos un video introductorio para descubrir ALOHA y entender a que nos referimos con programa completo: <https://youtu.be/ogkle7isLA4>



Figura 2.- Estudiantes comenzando con las actividades del programa ALOHA; obtenida del Informe en la página web (Aritmetic, 2016).

Y justamente es ahí donde el programa ALOHA influye en el desarrollo mental de los niños pues de acuerdo con el mismo promocional del programa y su sitio web ejercita mucho los procesos que implican el uso de ambos hemisferios del cerebro, esto es, que cada vez que presentan a los niños información numérica o una operación aritmética esta es recibida en el hemisferio izquierdo del cerebro y con las propias actividades del programa se favorece un tránsito al hemisferio derecho donde la operación y los números son procesados en un formato propio de la imagen mental del ábaco que han desarrollado los niños para finalmente regresar al hemisferio izquierdo con la información numérica después de resolver la operación.

Entonces, de acuerdo con la información que brinda el programa ALOHA, a través de este proceso es que se potencializa el uso del ábaco en el aprendizaje de la aritmética y no solo es visto, con este enfoque, como un instrumento de cálculo, sino como un instrumento de desarrollo del cálculo mental de los alumnos. Esta es la razón por la cual hacemos énfasis en esta aproximación del aprendizaje de la aritmética pues dicho aprendizaje está en un nivel cognitivo más alto comparado con el aprendizaje de algoritmos aritméticos usuales.

Como hemos mencionado todo el programa ALOHA Mental Arithmetic consiste básicamente en dichas acciones que giran alrededor del conocimiento, uso, aplicación e interiorización del ábaco japonés para el aprendizaje de la aritmética. Se sustentan en el desarrollo mental de los estudiantes con base en los aspectos fisiológicos del cerebro (separación de este en dos hemisferios) y la plasticidad cerebral en las edades que comprende el intervalo de 5 a 13 años (Aritmetic, 2016)⁸.

No distinguimos actividades algorítmicas, aparte de los algoritmos que se dan con el propio uso del ábaco japonés, la implementación digital de este y el ábaco mentalmente interiorizado que consiguen los alumnos. En realidad, los procesos que se deben llevar a cabo con el ábaco físico son los mismos que se espera que realicen los alumnos mentalmente cuando ya han interiorizado el ábaco y son los sustentos del aprendizaje de la aritmética en esta aproximación.

Por lo tanto, los sustentos algorítmicos con los que este programa trabaja son los mismos sustentos que tiene el ábaco japonés y el ábaco en general, podemos identificar sobre todo el valor posicional de los números involucrados en las operaciones. Sustento que por sí solo es interesante porque con los algoritmos tradicionales la evidencia indica que el aprendizaje de los alumnos queda lejos de adquirir buenas nociones de lo que es el valor posicional de los números, lo que si sucede con los resultados que presenta el ábaco y por lo que esta aproximación suena cautivadora.

Entonces, estos procesos relacionados con el uso del ábaco y las actividades que los promueven mejoran y complementan son los sustentos de esta aproximación para el aprendizaje de la aritmética. La presentación del programa es muy variada y se hace de manera presencial en aulas de clases con profesores frente a grupos o también de manera virtual a través de su plataforma web. Donde la modalidad mediante la plataforma web parece replicar las clases presenciales pero a distancia.

⁸ En dicha referencia podemos encontrar toda la información que aquí presentamos concentrada, sin embargo, nos gustaría otorgar el siguiente enlace a un video introductorio por parte del mismo programa ALOHA en el que se describen algunas de estas características: <https://youtu.be/b6uk8QEIsOY>

En esta plataforma en línea se aprovechan las tecnologías digitales para sumergir todos los procesos y actividades con el ábaco previamente mencionadas dentro de una historia bastante elaborada de superhéroes, ver Figura 3, y se adaptan las mismas actividades con el ábaco pero de manera virtual, podríamos considerar que han programado un ábaco virtual con sus respectivas actividades dentro de un contexto persiguiendo la misma finalidad original de usar el ábaco para aprender aritmética de manera potencializada.



Figura 3.- Ejemplo de la historia en la que ALOHA sumerge el aprendizaje de la aritmética; obtenida de la página web del programa (Aritmetic, 2016).

Es interesante como esta aproximación si trata meramente a la aritmética y es vista desde su creación como proceso complementario a las actividades académicas estándares de los niños, pues también nuestra propuesta tiene esa misma esencia.

Smartick.es

A diferencia de ALOHA Mental Arithmetic, esta aproximación es un “método en online de matemáticas y lectura para niños de 4 a 14 años de edad” (Smartick, 2022)⁹, más que un método es toda una plataforma digital completamente en línea que se encuentra

⁹ Al igual que en todas las referencias de una página web, en este documento, presentamos la liga a la página principal en la Bibliografía, la cual concentra toda la información que usamos. En esta vemos el enlace para el Blog, de la misma plataforma, en la barra de navegación, y en cuya sección de “Sobre Smartick” encontramos esta cita textual. Es importante reconocer que las entradas del Blog son hechas por colaboradores y creadores de Smartick.

estructurada con base en el método Kumon y agrega elementos tecnológicos que potencian el aprovechamiento de las actividades de dicho método.

Primero es importante notar que esta plataforma no está meramente enfocada en el aprendizaje de la aritmética de niños de las edades correspondientes, es tan general como el método Kumon e involucra más temas de matemáticas. Sin embargo, con lo que corresponde a la aritmética, navegando e indagando en la propia información de Smartick, sus blogs y actividades podemos caracterizar el panorama de los sustentos que maneja esta aproximación del aprendizaje de la aritmética.

Comenzando con que los creadores de Smartick muestran un gran interés porque los niños se desarrollen en el cálculo mental¹⁰, por lo que implementan, como parte de la plataforma, actividades que fomentan y desarrollan estrategias del cálculo mental. Explícitamente tienen la intención de desarrollar estrategias de descomposición de números y estrategias de salto, que no es otra cosa que la descomposición de números pero considerando como apoyo la recta numérica para “saltar” por esta.

Para lograr el desarrollo de esas estrategias de cálculo mental ellos consideran necesario que los alumnos aprendan y trabajen previamente ciertos aspectos interesantes que ellos llaman “hechos numéricos”¹¹, los cuales, como primer objetivo, deben ser interiorizados por los alumnos para dar lugar a poderlos aplicar en la resolución de problemas matemáticos, es decir, desarrollar estrategias de cálculo mental.

El entrenamiento cognitivo que se propone en Smartick de esos “hechos numéricos y estrategias de cálculo mental” nos parece interesante porque, como lo veremos más adelante, en la aproximación de los algoritmos ABN que nosotros adoptamos también se encuentran implícitos y explícitos dichos procesos cognitivos.

¹⁰ La información se encuentra en el Blog de Smartick previamente mencionado, específicamente en la categoría Sumas y Restas en la entrada del 25 de marzo de 2021 con nombre: Estrategias de cálculo mental para niños.

¹¹ En la misma entrada del Blog de Smartick: Estrategias de cálculo mental para niños, podemos encontrar dicha definición.

Y es interesante que los hayan implementado en una plataforma digital, tal como es uno de nuestros objetivos, por lo que podemos reflexionar que dichas aproximaciones digitales para el aprendizaje de la aritmética resultan interesantes, tanto que hasta se puede comercializar con estas.

En nuestro caso, esos “hechos numéricos” son considerados como procesos previos antes de que los alumnos aborden a los algoritmos ABN porque incluso hacen uso de estos cuando están tratando ya con la metodología ABN. Por lo que consideramos en nuestra implementación de la plataforma digital, actividades propuestas por Espinosa (2015) y Mato (2015) para que los alumnos conozcan, usen y puedan interiorizar dichos “hechos numéricos”. En general, se cuida que en las actividades de la plataforma se note la presencia y necesidad de dichos hechos numéricos.

Lo referente a nuestro trabajo puede ser consultado en la sección correspondiente y para comparar con lo que la plataforma Smartick presenta podemos ver a continuación algunas de las actividades¹² que propone y que se relacionan con nuestro trabajo.

Actividades para desarrollar sentido numérico, es decir, la noción de cantidad.

Les interesa que los alumnos establezcan relaciones entre los números y las cantidades que les corresponden. Para esto lo que hacen es asociarles objetos a los números para que los relacionen con las cantidades de los objetos considerados y preguntan a los alumnos específicamente sobre dichas relaciones, por ejemplo, vemos la actividad con las cartas de la Figura 4, donde preguntan cuál de dos cartas es la de menor valor, una carta conteniendo números y la otra un conjunto de objetos con una cardinalidad asociada de forma tal que se pueden comparar los números naturales expresados en las tarjetas y los objetos representados en las tarjetas.

¹² Dichas actividades nuevamente se encuentran en la correspondiente entrada del Blog de Smartick: Estrategias de cálculo mental para niños.



Figura 4.- Actividad presentada para desarrollar el sentido numérico en la plataforma Smartick; obtenida del blog de la plataforma web (Smartick, 2022).

Actividades de descomposición aditiva y subitización con el Rekenrek

En el desarrollo de varias actividades, que tienen diferentes fines dentro de Smartick como es el caso de llevar a cabo los “hechos numéricos” previamente tratados, los creadores de esta plataforma presentan una implementación interesante de un ábaco digital llamado Rekenrek¹³, a través del cual se pueden implementar estrategias para hacer adiciones.

El Rekenrek no solo es utilizado en la plataforma como medio para desarrollar estrategias respecto a la adición, sino que también lo utilizan en actividades de subitización, como se puede ver en la Figura 5, donde se pide a los alumnos relacionar el número mostrado en el Rekenrek con la típica representación de números con los dedos de la mano, con el fin de que los alumnos se vuelvan diestros en la subitización.

¹³ Este componente digital para efectuar cálculos es la implementación del ábaco holandés o rejilla de cálculo holandesa, la cual adopta Smartick de acuerdo con lo presentado en la entrada del Blog con nombre: Aprende a sumar con la ayuda del Rekenrek.



Figura 5.- Actividad de Smartick para la subitización utilizando el Rekenrek; obtenida del blog de la plataforma web (Smartick, 2022).

Este material digital de Smartick, el Rekenrek, lo tienen sustentado¹⁴ en el hecho de que la referencia a los números 5 y 10 es muy clara y el manejo de dichos números es muy importante en los “hechos numéricos” y el cálculo mental.

Así utilizan el Rekenrek en las actividades de descomposición aditiva y para desarrollar estrategias para dichas descomposiciones. Podemos ver la Figura 6 donde se tiene la representación de un número en el Rekenrek y la representación simbólica de dicho número, para que en ambas representaciones los estudiantes hagan sus posibles descomposiciones, se vuelvan diestros con éstas y las interioricen como “hechos numéricos”.

¹⁴ Podemos ver más a fondo el uso de este ábaco que ha implementado Smartick, su justificación y una vista general de esta herramienta en la misma entrada del blog y en el video ahí presente: <https://youtu.be/RJogFtRSy2w>



Figura 6.- Actividad de Smartick para la descomposición aditiva de números menores a 10. Obtenida del blog de la plataforma web (Smartick, 2022).

También los creadores de Smartick desarrollaron una especie de tabla de 100 números, como la que desarrollamos nosotros con base en el trabajo de Espinosa (2015) y que ésta explicada en la sección correspondiente, la cual tiene la finalidad de desarrollar estrategias para la descomposición aditiva de números menores a 100.

Nuevamente, tal como sucede con ALOHA Mental Arithmetic, los sustentos algorítmicos que podemos apreciar en estas actividades tienen que ver meramente con los sustentos algorítmicos del propio uso del ábaco, donde podemos ver que resalta la importancia del valor posicional de los números y el conocimiento del sistema de numeración decimal.

Sin embargo, a diferencia del programa anterior, en esta plataforma sí hacen explícita su concepción de los algoritmos tradicionales y alternativos para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética. Lo que nos resulta interesante porque muestra su propuesta de implementación de algoritmos aritméticos en un medio digital.

Resulta que apoyan “la combinación de métodos y enfoques pedagógicos para alcanzar la excelencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje” (Smartick, 2022)¹⁵ y lo sustentan en

¹⁵ La cita textual la podemos encontrar en la entrada del Blog con el nombre de: Uso de algoritmos alternativos como herramienta de aprendizaje. En la categoría: sumas y restas, con la fecha de entrada de 07 de mayo.

“las experiencias reales de éxito, que prueban que el mejor camino a seguir en el campo de la educación no es otro que el que bebe de las mejores fuentes” (Smartick, 2022)¹⁶.

Defienden que su plataforma Smartick no entra en conflicto con ninguna aproximación diferente a los algoritmos aritméticos tradicionales y son muy explícitos al decir que estas aproximaciones alternativas son los algoritmos Abiertos Basados en Números (ABN), que resultan muy importantes para nuestro trabajo, y los Otros Algoritmos para Operaciones Aritméticas (OAOA), que contienen el mismo espíritu de los algoritmos ABN, pero que difieren en estructura y objetivos, basándose en el desarrollo de estrategias de descomposición, redondeo, conteo, etc.

Nos parece interesante que Smartick de la bienvenida a estas aproximaciones alternativas e incluso justifica porque es favorable considerar muchas aproximaciones algorítmicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética. Algo peculiar es que, aunque es abierto a los algoritmos alternativos, no los formaliza en la implementación digital, es decir, plantean actividades más bien relacionadas con los algoritmos tradicionales o actividades relacionadas con desarrollar las estrategias antes mencionadas y no tienen considerados planes formales de estudio de algoritmos alternativos.

No queremos decir que los omiten totalmente, lo que sucede es que simplemente se quedan con aspectos importantes de ellos para implementarlos en sus actividades, por ejemplo, enriquecer el sentido numérico, el uso de materiales manipulativos, “hechos numéricos”, como los previamente tratados, y en general procesos que llevan a desarrollar el cálculo mental, lo que por cierto está muy fuertemente marcado en la aproximación OAOA (2018).

Entonces, lo que hacen en Smartick con respecto a la aritmética es considerar actividades que fomentan dichos procesos cognitivos relevantes en las aproximaciones alternativas a los algoritmos tradicionales. Y no adoptan completamente ninguna de estas

¹⁶ De igual manera la cita textual se encuentra en la entrada del Blog: Uso de algoritmos alternativos como herramienta de aprendizaje.

aproximaciones, menos la implementan en la plataforma digital, en realidad lo que hacen es una especie de mezcla entre los algoritmos tradicionales y dichas actividades alternativas, con el fin de que los alumnos tengan un aprendizaje más significativo de los algoritmos tradicionales.

Podemos ver, por ejemplo, en la Figura 7 la imagen de una actividad Smartick para hacer la sustracción. Son explícitos al decir que utilizan bloques de base 10, ideas propias de los algoritmos alternativos, para darle más significado a la sustracción tradicional que se observa en la derecha, donde incluso se considera la llevada de las unidades a las decenas.

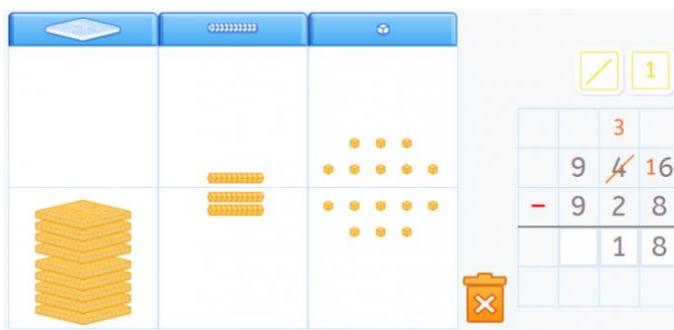


Figura 7.- Se percibe la influencia de las aproximaciones alternativas de la sustracción en la representación gráfica que da significado a las cantidades involucrada, pero también persiste claramente el algoritmo tradicional.

La intención de Smartick de conservar a los algoritmos tradicionales en la plataforma es que no tiene la intención de innovar respecto a los algoritmos aritméticos, más que preocuparse por los algoritmos, se preocupa por la planificación de actividades adecuadas para desarrollar la aritmética de los alumnos y de acuerdo al blog de Smartick (2022)¹⁷ existía una gran preocupación por parte de los padres de familia y de los profesores por la compatibilidad de los algoritmos alternativos y las actividades de enseñanza de aritmética de la plataforma, por lo que decidieron justificar dicha compatibilidad aclarando que utilizan los algoritmos tradicionales mezclados con ideas de las aproximaciones alternativas.

¹⁷ Información correspondiente en la entrada del Blog con nombre: ¿Es bueno utilizar algoritmos alternativos como ABN “mezclados” con los tradicionales?.

Entonces los fundamentos algorítmicos de Smartick no se encuentran muy lejos de los fundamentos de las aproximaciones aritméticas alternativas, pues la plataforma rescata muchos de estos aspectos como ya se ha descrito, sin llegar a ser una implementación puramente alternativa a los algoritmos tradicionales. Es decir, conserva la propuesta algorítmica tradicional y la complementa para hacer su aprendizaje más significativo, sin referirse a ella misma como una implementación de las propuestas ABN, OAOA, etc.

Regresando a nuestro trabajo, aunque la intención del proyecto no es solamente crear una plataforma digital para la metodología ABN podríamos, aprovechando esta sección, mencionar que nos interesa aplicar las tecnologías digitales que hemos aprendido durante los estudios de este grado para obtener un medio digital innovador en el cual podemos mostrar a los alumnos, y que ellos desarrollen, los algoritmos de la metodología ABN.

Dicha metodología ABN es la que, por sus características, hemos elegido para tratar de una manera innovadora la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética.

Uso de la tecnología en la educación matemática de nivel primaria

En nuestra propuesta es muy relevante el uso de un escenario virtual, nuestra plataforma web. La cual pensamos como un medio interesante e innovador para mostrar los algoritmos aritméticos ABN, como bien se puede ver a lo largo del proyecto. Pues creemos que aprovechando las características que la plataforma digital nos ofrece, sobre todo el registro de representación visual y el hecho de que podemos otorgar a los alumnos inmediata retroalimentación, tenemos un ambiente ideal para que los alumnos de primaria desarrollen actividades con estos algoritmos.

Esta relevancia que le damos a un medio virtual para mostrar contenido matemático no es algo nuevo. Incluso ahondar más en este tema nos estaría alejando de nuestro propósito, pues pensar en el uso que se le da a la tecnología en la educación matemática es algo muy basto.

Pero es muy relevante hacer notar que dentro de las propuestas alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, que hemos estado analizando en los antecedentes, encontramos que buena parte de estas tienen un fuerte tinte innovador en la manera de presentar el contenido matemático, nos referimos a las plataformas Smartick y ALOHA Mental Arithmetic, desarrollos en los que encontramos que gran parte de sus fundamentos son utilizar la tecnología para mostrar contenido aritmético a estudiantes de primaria.

Entonces nos llega de manera muy natural la pregunta ¿Cómo repercute el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria? Específicamente pensando en los primeros temas de matemáticas con que los estudiantes se enfrentan en su vida académica: la aritmética.

Al indagar para responder a dicha pregunta lo que obtuvimos fueron los antecedentes de los usos que se le dan a la tecnología en la educación primaria y diversos acercamientos relativamente nuevos explicando el uso de la tecnología digital para el desarrollo de la aritmética. Con lo que de alguna manera también obtenemos sustentos teóricos y experimentales que usamos para introducir y justificar nuestra plataforma web de los algoritmos ABN.

Así encontramos diversas investigaciones y opiniones, entre las que nosotros seleccionamos algunas; (Attard, 2017), (Yelland y Kilderry, 2010), (Ingram, Williamson-Leadley, & Pratt, 2015), (Daniel Ajoy, 2021) y (Carvalho, Palhares, Osório, Gomes, & Mamede, 2012), la mayor parte están a favor pero con ciertas precauciones, de que se utilicen las tecnologías digitales y tecnologías de la información en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria, más aún, referidas específicamente al uso de la tecnología digital para desarrollar la aritmética.

Contamos con un trabajo interesante de Attard (2017), quien nos habla de cómo es que las niñas y niños del siglo XXI se vuelven “aritméticos”, concepto que podría tener una traducción más entendible como “numéricos” y que es utilizado, en estudios de educación

de edades tempranas, como adjetivo para referirse a la capacidad de funcionar eficazmente utilizando las habilidades, los procesos y conocimientos matemáticos en la vida cotidiana (Yelland & Kilderry, 2010, p. 91).

En estas investigaciones destaca el importante papel de las tecnologías digitales en dicho proceso de volverse “aritmético”. Incluso Attard (2017, p. 91) hace mención del currículo de educación primaria australiano, en el cual nos dice que, aparte de darle un peso importante a la enseñanza y aprendizaje de la aritmética, se hace obligada la introducción de las tecnologías digitales. Es decir, ya no son opcionales para los profesores y los alumnos, ahora son tan obligadas que los centros de educación primaria cuentan ya con la infraestructura necesaria para incluirlas en el currículo.

Algo interesante que menciona la misma autora sobre la inclusión tan marcada de las computadoras, tabletas y demás dispositivos digitales portátiles en las primarias es que esto marca un enlace entre las actividades académicas que los estudiantes realizan con estos dispositivos y las actividades que realizan en casa con electrónicos tan cotidianos, como el teléfono móvil o celular.

Creemos que actualmente, es muy posible dicha inclusión de los aparatos electrónicos comunes con finalidades académicas en los hogares por la facilidad que existe de acceder a programas, de uso gratuito y de paga, especializados para desarrollar competencias matemáticas.

Sin embargo, en México el camino es largo aún pues la implementación de las tecnologías de la información dentro de las primarias, hablando desde aspectos de políticas públicas, no se hace obligatoria sino que se manejan sugerencias muy específicas y a decisión de los profesores y, por ejemplo, no se sugieren actividades extra clase con herramientas tecnológicas (SEP, 2022).

Este enlace de las actividades académicas en la escuela y las actividades académicas que realizan los estudiantes en el hogar puede traer una consecuencia negativa que también resulta de interés: el aumento del tiempo frente a pantalla de los estudiantes.

Sin embargo, puede verse esta inclusión de la tecnología digital como un buen puente para que las matemáticas no se terminen en las horas de clase de matemáticas de la escuela, es decir, que los estudiantes, a través de estos dispositivos y herramientas digitales adecuadas, puedan hacer matemáticas en su casa, Attard (2017).

En realidad, en otro artículo la misma autora hace una evaluación de su proyecto “Matific” que es una serie de recursos digitales de aplicaciones basadas en juegos enfocadas cada una a diferentes conceptos matemáticos y encuentra sorprendentemente que una ventaja de esta implementación digital fue que los niños estudiantes empezaron a utilizar voluntariamente su tiempo frente a pantalla para hacer matemáticas. Y evidentemente, disfrutando el uso de medios tecnológicos, pasaron de ver a las matemáticas como algo que había que tolerar a algo que resulta divertido de aprender (Attard, 2016).

Este reporte de investigación nos resulta interesante porque analiza la implementación de una plataforma digital en la que, aprovechando las características de esta, los alumnos trabajan conceptos matemáticos específicos. En este apartado no entraremos en detalles, solamente hacemos la mención de este trabajo que valida la implementación de una plataforma digital que desarrolla conceptos y habilidades matemáticas en niños de primaria, incluyendo algunos temas de aritmética.

También encontramos otro artículo (Yelland y Kilderry, 2010) donde examinan cómo es que los niños hacen aritmética en el siglo XXI, cabe destacar que las condiciones evaluadas son también para Australia pero en general hacen referencia a las tecnologías de la información y comunicación que son parte integral de la vida diaria en la actualidad y destacan en qué condiciones de aprendizaje los estudiantes más jóvenes pueden llegar a hacer aritmética.

En dicho trabajo Yelland y Kilderry (2010) sugieren, explícitamente para la aritmética y tareas matemáticas relacionadas, que las tecnologías digitales han proporcionado oportunidades para un cambio del enfoque tradicional, el cual es un aprendizaje de las matemáticas de manera memorística, a un enfoque con propósito y aplicación en el contexto de resolución de problemas.

Nuevamente, esta investigación es interesante para nosotros porque nos otorga un marco con el que los profesores podemos ampliar el trabajo académico de los niños en las matemáticas de la escuela primaria considerando, claro está, el caso de la aritmética y un replanteamiento de las actividades de aprendizaje que tomen en cuenta la inclusión de las tecnologías digitales, así tornándose el aprendizaje en un enfoque de resolución de problemas.

Como bien mencionamos previamente esta inclusión de las tecnologías en la educación ya no es una opción, un ejemplo claro es el currículo australiano del que hemos hablado, en el que vemos claramente que se da un fuerte enfoque a desarrollar la aritmética, pero incluyendo la estimación y el cálculo mental, las que, según la autora, son habilidades necesarias para el uso de la tecnología (como calculadoras) de manera eficiente.

Y en general, cabe notar, que las aproximaciones alternativas para la enseñanza y aprendizaje de la aritmética consideran fuertemente a estos aspectos, y muchos más, como lo analizamos en la sección de lo que se ha hecho para resolver nuestro problema y en la sección donde describimos a los algoritmos alternativos que seleccionamos para trabajar en el proyecto.

Entonces, es muy evidente que brota la necesidad de desarrollar las matemáticas de los estudiantes de nivel primaria, nos limitamos a la aritmética, con enfoques que incluyan procesos cognitivos diferentes a los tradicionales y, muy importante, relacionarlos con el uso de las tecnologías digitales.

Sin embargo, aunque la tecnología digital está fuertemente arraigada en nuestras vidas y hemos visto muchos ejemplos de la necesidad inherente de incluirlas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, no debe ser el único recurso usado para enseñar matemáticas. Por ejemplo, hay que tener cuidado, como profesores, en elegir las herramientas digitales adecuadas que en verdad apoyen a los niños en el aprendizaje de nuevos conceptos y habilidades matemáticas (Attard, 2017).

Sobre esto último encontramos un uso que le están dando los profesores de matemáticas a las herramientas tecnológicas, específicamente nos referimos a las aplicaciones para tabletas llamadas “mostrar y contar”, que son plataformas digitales que permiten a los alumnos de primaria y secundaria mostrar y explicar la solución a un problema matemático usando voz e imágenes.

Esta reportado que con el uso de este tipo de aplicaciones los profesores notaron más participación de los alumnos y de mejor calidad, les permitió a los profesores llevar una pedagogía eficaz en sus prácticas de clase y un resultado interesante de aplicar estas herramientas digitales fue que el pensamiento de los alumnos se hizo más visible para el profesor y para ellos mismos, lo que permitió llevar a cabo debates sobre los conceptos matemáticos y estrategias involucradas (Ingram et al., 2015).

Hasta ahora hemos visto antecedentes específicamente relacionados con la aplicación de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en el nivel primaria. Sin embargo, es importante reconocer que en general en muchas áreas de la educación, incluso dentro de la educación matemática, se ha hecho muchísima investigación de las implicaciones de introducir herramientas tecnológicas en estos procesos.

No abordaremos detalladamente ninguno de estos trabajos, pues estaríamos alejándonos de nuestro objetivo principal que se relacionan explícitamente con la aritmética en los primeros años de la educación básica, fue por eso importante para nosotros describir específicamente estos trabajos previos.

Pero queremos mencionar, con especial atención por el área tecnológica de la cual surgió, al lenguaje de programación LOGO, del cual se han hecho muchos trabajos desde que apareció en 1967. LOGO más que un lenguaje de programación es un lenguaje para aprender, siendo una herramienta útil para enseñar el proceso de aprendizaje y pensamiento, y se ha aplicado a muchísimos tópicos y evidentemente a las matemáticas (Daniel Ajoy, 2021).

Resulta interesante como con la introducción de LOGO, concebido como herramienta tecnológica, se ha generado muchísima investigación y evidencias de la repercusión de dicha introducción tecnológica en varias áreas de la educación. En el caso específico de las matemáticas notamos con gran interés un trabajo de Carvalho et al. (2012) en el cual estos autores no solo describen el nuevo papel del profesor repercutido por la introducción de LOGO sino que también describen técnicas adecuadas de aprendizaje de conceptos de estadística mediante LOGO.

Para finalizar es importante reiterar que como parte del proyecto realizamos una plataforma digital, con la justificación y los objetivos especificados en las secciones correspondientes, pero lo que podemos mencionar es que buscamos mejorar el aprendizaje de conceptos matemáticos y estrategias, específicamente de la aritmética, en los primeros años de la educación primaria sin que exista un desapego total a las actividades de enseñanza y aprendizaje de matemáticas que se realizan de manera tradicional, más bien, queremos conseguir nuestros objetivos apoyados en las características que las tecnologías digitales nos ofrecen. Por lo que optamos por un medio digital complementario a lo que se realiza en las aulas escolares y fácilmente accesible desde cualquier lado, una plataforma web.

Problema de investigación y su delimitación

Nuestro problema de investigación surge de analizar las competencias matemáticas involucradas en el aprendizaje de la aritmética mediante algoritmos. Con analizar las competencias matemáticas nos referimos a evaluar la calidad y características de estas.

Todo surge distinguiendo que generalmente los currículos educativos, de nuestro país pero en general de muchas regiones del mundo, manejan algoritmos en la enseñanza de la aritmética, es decir, asocian algoritmos a las operaciones aritméticas y de este modo, el aprendizaje de algoritmos usuales se vuelve una finalidad en este tema matemático.

Es cierto que el plan de estudios está complementado con actividades para desarrollar otras características del pensamiento aritmético como la destreza mental (SEP, 2022)¹⁸ pero es muy marcado el hecho de recaer siempre en la enseñanza de algoritmos aritméticos usuales o tradicionales, tal como lo podemos ver en la misma referencia anterior, quedando dichas actividades un tanto disociadas de los objetivos finales de enseñar los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas.

Incluso si pensamos en el aprendizaje que se espera que se genere con dichos planes y programas, podemos apreciar que se tienen las intenciones más puras de evaluar competencias matemáticas relacionadas con los algoritmos usuales, hablando exclusivamente de saberlos llevar a cabo (INEE, 2019).

Cabe mencionar que no es nuestra intención encontrar alternativas para la enseñanza de la aritmética en la primaria o juzgar las nuevas propuestas o el camino que se ha estado llevando a cabo en la enseñanza de la aritmética involucrando el aprendizaje de algoritmos. Incluso creemos que dadas las características del tema es muy conveniente enseñarlo mediante algoritmos por diversas ventajas educativas, entonces estamos a favor del aprendizaje de algoritmos aritméticos.

Es en las consecuencias de aprender algoritmos donde entra nuestro problema: las consecuencias negativas de aprender aritmética mediante algoritmos. Es importante aclarar que se desarrolla en el proyecto una distinción de algoritmos aritméticos, como lo podemos ver en el marco teórico y a continuación reseñamos.

Primero encontramos en varias referencias que las operaciones aritméticas tradicionalmente se han manejado de manera sumisa (Fernández, 2005) mediante algoritmos que se vuelven simples recetas a seguir en las que los alumnos no comprenden

¹⁸ Planes de estudio revisados desde Preescolar hasta los 3 primeros años de la educación Primaria. Revisamos todo lo relacionado con los aparatados de pensamiento matemático y matemáticas, incluyendo asignaturas y aprendizajes esperados, así como propuestas de enseñanza que da la SEP a los profesores.

su significado, recurren a la memorización y generan un pensamiento pasivo simplemente siguiendo pasos de manera mecánica.

Identificamos a estos algoritmos usados normalmente en la enseñanza y aprendizaje de la aritmética como los algoritmos cerrados basados en cifras (CBC) que son los que durante mucho tiempo en el contexto escolar han adquirido relevancia en el aprendizaje y la práctica de la aritmética (Mendizábal, Canto López, Consejero, Guzmán, & Villagrán, 2017).

Y tal como citan dichos autores, el aprendizaje estos algoritmos incide negativamente en el desarrollo de las habilidades cognitivas de orden inferior de los estudiantes, tales como: el empobrecimiento de las estrategias y métodos espontáneos de resolución de problemas; anidamiento de errores conceptuales en los fundamentos del cálculo que la estructura de estos algoritmos oculta y por último la carencia de significado de los cálculos aritméticos y cantidades manejadas.

En otras palabras, el aprendizaje de la aritmética mediante algoritmos tradicionales conlleva estas consecuencias negativas ya mencionadas e incluso hay estudios más específicos que argumentan que el aprendizaje de algoritmos aritméticos genera que se desprenda el valor posicional de los números y disuaden a los niños de desarrollar el sentido numérico (Kamii y Dominick, 1997), dos aspectos que nos interesan bastante.

Aunado a estas consecuencias negativas, como bien citan Fan y Bokhove (2014), se tiene una percepción muy particular sobre el aprendizaje y manejo de algoritmos, de los algoritmos usuales, con respecto a su valor de generar conexiones lógicas entre contenidos matemáticos que ya se han aprendido o se encuentran aprendiendo los alumnos, pues típicamente se perciben a los algoritmos como pasos procedimentales que son principalmente secuenciales y esto genera conexiones pobres entre el contenido y también genera entendimiento superficial en el mismo procedimiento.

También ocurre que este contenido algorítmico de los temas de aritmética es parte de los primeros contactos con temas matemáticos que tienen los estudiantes en su trayectoria académica, lo cual si se ve mermado por las consecuencias negativas que se consideran

adjuntas de aprender algoritmos usuales, podría desembocar naturalmente en un futuro rezago por parte de los estudiantes cuando se enfrenten a temas matemáticos en niveles posteriores como álgebra en secundaria y posteriormente cálculo en la educación superior (Mastachi, 2015).

Objetivo y Pregunta de investigación

Lo que nos interesa es proponer y justificar una manera de subsanar esas consecuencias negativas de aprender algoritmos aritméticos de números naturales, consecuencias que ya tratamos previamente y concebimos como nuestro problema. Para lograrlo primero analizamos una clasificación de algoritmos aritméticos con la que podamos distinguir qué tipos de algoritmos son mejores para ser aprendidos por los alumnos, pues queremos encontrar un tipo de algoritmo ideal que implique que su aprendizaje conlleve contrarrestar las consecuencias negativas previamente tratadas.

Posterior a la selección de ese tipo de algoritmos ideales surge nuestro objetivo principal del proyecto:

Crear una plataforma digital en la cual los alumnos encuentren un espacio para aprender y practicar el contenido algorítmico indicado para que se vean subsanadas las consecuencias negativas de aprender los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas con números naturales.

Siendo parte del objetivo justificar al contenido de la plataforma y a la plataforma en sí misma como una buena e innovadora manera de presentar dicho contenido algorítmico de la aritmética de números naturales. Así también, de la justificación de los algoritmos que consideramos mejores para aprenderse, surge la siguiente pregunta de investigación que fue la que nos atañó durante el proyecto:

¿Cómo debe estar diseñado un currículo escolar para presentar mediante una aplicación web a los algoritmos ABN?

Pues bien es cierto que se espera que el aprendizaje de estos algoritmos alternativos deje mejores resultados en los estudiantes, y de alguna manera está sustentado en los mismos trabajos que presentan a estos algoritmos, sin embargo, nosotros nos preguntamos por detalles concretos de un diseño curricular para el aprendizaje de estos algoritmos aritméticos que consideramos innovadores.

Y dado que nuestro objetivo principal es obtener una plataforma digital en la cual los estudiantes puedan aprender estos algoritmos, nos preguntamos concretamente por las características que debería tener este currículo de aprendizaje de algoritmos ABN presentado de manera digital mediante una plataforma web.

3. Marco Conceptual

Definición de Algoritmos

El análisis de algoritmos aritméticos es parte fundamental de nuestro trabajo, en las siguientes secciones de este capítulo describiremos explícitamente los algoritmos aritméticos encontrados en la literatura definiéndolos y explicándolos, pero resulta muy importante que adoptemos una primera definición general de qué es un algoritmo.

A continuación daremos varias definiciones de lo que se considera un algoritmo en diferentes áreas de estudio y adoptaremos una con la que nos identificamos en este trabajo.

Primero es importante saber que la palabra “algoritmo” tiene raíces debidas al matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (780-850) quien escribió un libro sobre aritmética en el que hace una exposición bastante profunda del sistema de numeración hindú, este sistema comenzó a conocerse, en su honor, como el de Al-Khowarizmi que derivó en la palabra algoritmo (Fernández, 2005, p. 32).

Este mismo autor, Fernández (2005), nos describe que “un algoritmo se ha identificado como el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema” (p. 32).

Y en el trabajo de Fan y Bokhove (2014) nos describen que de acuerdo con el diccionario en inglés un algoritmo se define como “un procedimiento para resolver problemas” (p. 3). Y nosotros, como es natural, recurrimos al diccionario de la RAE, donde encontramos que un algoritmo es “un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución a un problema”, así como “un método y notación en las distintas formas del cálculo” (RAE, 2022).

También Fan y Bokhove (2014, p. 3) nos describen las siguientes concepciones de lo que es un algoritmo: “un procedimiento paso a paso llevado a cabo de manera rutinaria” (Holmes, 1995, p. 209). Así también en ciencias de la computación se define a un algoritmo como “un cierto tipo de método general para resolver una familia de preguntas relacionadas”

(Taylor, 1998, p. 15). Y otra definición en ciencias de la computación es “una secuencia de reglas definida con precisión que indica cómo producir información de salida específica a partir de información de entrada dada en un número finito de pasos” (Knuth, 1974, p. 323).

Desde un punto de vista que contempla tanto a las matemáticas como a las ciencias de la computación se considera a un algoritmo como “una secuencia lógica de pasos para resolver un problema” (Fan y Bokhove, 2014, p. 3).

Finalmente, decidimos adoptar la definición que Fan y Bokhove (2014) utilizan en su trabajo, porque consideramos que los algoritmos que tratamos en las siguientes secciones se adaptan muy bien a esta definición y los resultados de estos investigadores son muy relevantes para el análisis que haremos de estos, así nos apegamos a la siguiente definición de un algoritmo: “un conjunto fijo de procedimientos paso por paso para resolver un problema matemático” (p. 3).

Distinción de dos tipos de algoritmos aritméticos

Es importante distinguir los algoritmos que aprenden los estudiantes en los primeros años de la escuela primaria cuando estudian los contenidos de aritmética en sus primeros cursos de matemáticas. Pues al hacerlo nos estamos volviendo partícipes de un cambio que implicaría saber qué algoritmos enseñar, no solo los convencionales o tradicionalmente usados, para tener otra aproximación a los conocimientos que el estudiante debe adquirir.

Por ejemplo, Mato (2015) hizo su trabajo, que fue descrito en la sección correspondiente, a partir de la siguiente premisa: “Los algoritmos que se enseñan en la escuela hoy en día son los mismos que se llevan enseñando a lo largo de muchos años, sin importar los adelantos que se han producido en materia de psicología infantil sobre cómo adquieren los niños el conocimiento.” (p. 7). Lo que nos deja en claro que considera obsoleta la metodología convencional de enseñar aritmética mediante los algoritmos tradicionalmente usados.

En nuestra postura no estamos completamente de acuerdo con la premisa completa de Mato (2015, p. 7), pues consideramos que la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética

básica, tal cual se hace en la actualidad, si ha mostrado algunos cambios o intenciones de considerar algo más que solamente la memorización y repetición de pasos ya establecidos.

Basta con que recurramos a la gran cantidad de nuevos métodos de enseñanza y aprendizaje que se están aplicando en los centros educativos, algunos de los cuales ya hemos descrito: los intentos de incluir a las tecnologías digitales en las aulas y los objetivos que buscan lograr los planes de estudios de nivel primaria. Sobre esto último tenemos como ejemplo a nuestro país donde si bien es cierto que no se hacen cambios meramente hablando de algoritmos tradicionales, pues explícitamente los siguen conservando, sí se proponen actividades con el objetivo de desarrollar el cálculo mental y tener una mejor noción de lo que es el valor posicional de los números.

E incluso, sin considerar estos cambios, es importante reconocer que la enseñanza y el aprendizaje tal cual se hacen en la actualidad han sido productos de esfuerzo, dedicación y experiencia acumulada durante muchos años, que finalmente ha generado resultados, positivos y negativos.

Con esto último lo que queremos aclarar nuevamente es que no tenemos como objetivo desestimar y reemplazar la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética que se esté enseñando en los diferentes centros educativos de nivel primaria actualmente, sino que, queremos complementarlas de forma tal que se tengan mejores resultados.

Creemos conveniente separar en dos clases a los algoritmos aritméticos que se ven en la escuela primaria. Como se ha venido introduciendo, una clase correspondería a los algoritmos tradicionales o convencionales, que también son llamados algoritmos CBC (Espinosa, 2015, p. 14; Mato, 2015, p. 21; Mendizábal et al., 2017, p. 2), y que nosotros los asociamos con el tipo de algoritmos sumisos que propone Fernández (2005, p. 32). A pesar de que los autores los reconocen con diferentes sustantivos y en diferentes épocas, ambos algoritmos corresponden a uno solo, del cual vemos sus características en la siguiente sección.

Y la otra clase son los algoritmos de las propuestas alternativas a los algoritmos tradicionales, particularmente adoptamos a los algoritmos ABN, que asociamos con el tipo

de algoritmos innovadores, también de Fernández (2005, p. 33). Pues, nuevamente, las características que presentan los algoritmos ABN corresponden con estos, tal como lo vemos en la sección correspondiente.

Entonces, en las siguientes secciones daremos una descripción más detallada de esta distinción de los algoritmos aritméticos, comenzamos describiendo los algoritmos CBC, que están identificados dentro de la primera clase de algoritmos tradicionales Mato (2015, p. 17), y que nosotros relacionamos con el tipo de algoritmos sumisos. Y posteriormente describiremos el método ABN, identificado como una metodología que considera la psicología del aprendizaje del estudiante (Mato, 2015), y que tiene algoritmos que nosotros identificamos como innovadores.

Definición de Algoritmos CBC

Primero destacamos que encontramos en la literatura que la metodología clásica, hablando en general de algoritmos tradicionales, clásicos y convencionales, con la que se enseña y los estudiantes aprenden aritmética en el nivel básico, se asocia con los algoritmos involucrados en el método Cerrado Basado en Cifras (CBC) (Espinosa, 2015, p. 14; Mato, 2015, p. 17; Mendizábal et al., 2017, p. 2).

Este método CBC resulta ser el que reúne a los algoritmos tradicionalmente usados en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética. Más explícitamente cuando nos referimos al método CBC nos referimos a aquellos algoritmos que por tradición se encuentran en los currículos de las escuelas primarias para enseñar a los estudiantes a sumar, restar, multiplicar y dividir.

No es relevante aclarar a qué tipo particular de algoritmo nos referimos dentro de esta clase de los algoritmos tradicionales, pues en cada cultura, en cada país y diferentes sociedades se pueden considerar de manera distinta algoritmos que entran en esta misma clase. Es decir, los algoritmos tradicionales usados en la aritmética son, finalmente, convenciones que se asumen en una determinada sociedad en un determinado tiempo (Kamii & Dominick, 1997, p. 59).

Estos mismos autores nos ponen un ejemplo de que la convención hindú para sumar números de varios dígitos fue proceder de izquierda a derecha, al igual que en los libros de texto de Estados Unidos alrededor del año 1900. Y por ejemplo, en nuestro país, la convención es sumar de derecha a izquierda.

Es interesante esta característica, que hacen notar Kamii y Dominick (1997), del carácter de convención social de los algoritmos aritméticos, pues si el objetivo es que los alumnos aprendan la estructura lógica y las matemáticas que hay detrás de los algoritmos, con estos algoritmos tradicionales la atención del alumno se estaría redirigiendo a aprender el algoritmo en sí mismo y sus convenciones.

Estos algoritmos tradicionales, identificados como algoritmos Cerrados Basados en Cifras (CBC), tienen ciertas características que los definen. Dentro de las cuales hay una que consideramos un resumen de lo que es un algoritmo CBC. Y es que, de acuerdo con Mato (2015, p. 17), los algoritmos CBC son aquellos algoritmos aritméticos que al hacer cuentas u operar no consideran la descomposición de los números involucrados en unidades, decenas, centenas, etc., solo se tratan cifras aisladas e independientes, así en las operaciones aritméticas los números utilizados adquieren su dimensión dependiendo de su colocación correspondiente en el algoritmo.

En general, los algoritmos Cerrados Basados en Cifras tiene las siguientes características que los describen (Espinosa, 2015, p. 15; Mendizábal et al., 2017, p. 56):

- Son Cerrados: porque solo existe un solo procedimiento algorítmico correcto a realizarse y solo existe una respuesta correcta.
- Son Basados en Cifras: porque solo trabajan con las cifras por separado de los números involucrados y no con las cantidades globales y todo su significado.
- Con estos algoritmos los alumnos no son capaces de ver la relación entre el concepto de número y cantidad.
- La práctica de estos algoritmos oculta información como la noción de valor posicional de los números, dicha información se omite en el algoritmo.

- Al ejecutar estos algoritmos también se impide el desarrollo de ciertos procesos de cálculo por parte de los alumnos, como la estimación y compensación, pues desarrollar un buen nivel operatorio resulta más directo y relevante.

Y son por estas mismas características aquí descritas que creemos muy certero asociar los algoritmos CBC con los tipos de algoritmos “sumisos” que propone Fernández (2005, p. 32), pues él clasifica a los algoritmos involucrados en estas actividades escolares, relacionadas con la aritmética, como algoritmos “sumisos” en contraposición a los “innovadores”.

Siendo los algoritmos sumisos aquellos que someten el pensamiento de los estudiantes a la aceptación de un procedimiento y la realización operativa y rutinaria de este sin entender porque lo están haciendo (Fernández, 2005, p. 32). Como podemos notar inmediatamente los algoritmos CBC al anteponer el algoritmo en sí mismo y ocultar procesos de cálculo importantes que los estudiantes deben desarrollar cumplen también con la descripción de los algoritmos sumisos.

Ejemplos de algoritmos CBC

Con la descripción detallada que hemos dado de los algoritmos CBC creemos que ya es posible identificar aquellos algoritmos que cumplen con esta descripción, los cuales, entre otras características, manejan cifras aisladas y pierden el sentido de los números involucrados y por lo tanto también ocultan información importante sobre el uso de los números.

Es importante decir que en los algoritmos CBC aparecen concepciones tradicionales como los llamados acarreo y préstamos para que puedan funcionar de la manera convencional y, dependiendo de la región y época en la que los estudiantes aprenden los algoritmos, estos pueden variar pero siempre siguen cumpliendo las características de los algoritmos CBC.

En las sumas y en las restas, cuando el cálculo con dos números ya supera la decena, se hacen acarreo y préstamos respectivamente. Lo vemos en las siguientes suma y resta de manera vertical y operando cifra por cifra de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} + 1324 \\ + 4328 \\ \hline 5652 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 8542 \\ - 1334 \\ \hline 7208 \end{array}$$

El número 2 en el primer dígito, de derecha a izquierda, del resultado de la suma se obtuvo considerando las cifras aisladas inmediatamente arriba del 2, es decir 8 y 4, las cuales fueron sumadas y se obtuvo 12, resultado que fue separado nuevamente en cifras y el 1 que representa la decena se consideró como unidad nuevamente para sumarlo con los números 2 y 2 de las siguientes cifras.

Algo similar ocurrió con la resta, el número 8 del resultado, en el primer dígito, fue obtenido considerando en realidad la resta de 12 menos 4, pues el algoritmo trabaja considerando que la cifra 2 debe hacerse de un préstamo de la siguiente cifra, con lo que se le aumenta el valor a esta cifra de 2 unidades a 12 unidades.

El ejemplo para la multiplicación usual o convencional lo mostramos a continuación, lo obtenemos de Fan y Bokhove (2014, p. 7) y corresponde a la Figura 8, en el que se muestra la organización y operación usual de un algoritmo para un producto, en realidad podemos ver cuatro representaciones del producto 12 por 13 con diferentes algoritmos, que en mayor o menor medida podemos considerarlos más sencillos, más transparentes o incluso mejores, sin embargo, todos siguen conservando las características previamente descritas de los algoritmos CBC, con excepción del tercer algoritmo de izquierda a derecha en el cual sí podemos ver considerada la descomposición de los números del producto, de esta forma considerando números y no cifras, y resaltando el valor posicional de dichos números.

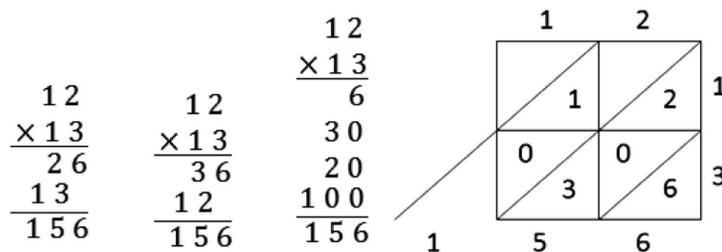


Figura 8.- Muestra de 4 algoritmos convencionales diferentes para calcular el producto 12 x 13, obtenidos de Fan y Bokhove (2014, p. 7).

El método ABN

Ya que hemos identificado a todos los algoritmos tradicionales (clásicos o convencionales) en la clase de los algoritmos Cerrados Basados en Cifras (CBC) nos quedamos con la segunda clase de la distinción que hemos hecho de los algoritmos aritméticos.

Esta clase reúne a aquellos algoritmos que ya no consideramos tradicionales o clásicos, es decir, que ya no cumplen con sus características. Incluimos metodologías y desarrollos cuyos autores se esfuerzan por llevar a cabo de manera diferente los procesos de enseñanza y aprendizaje de la aritmética en el nivel básico, y podemos darnos una idea de la variedad de estos métodos y formas diferentes de aprender aritmética viendo la sección de antecedentes.

El método ABN de los algoritmos Abiertos Basados en Números es una de estas metodologías diferentes de enseñanza y aprendizaje de la aritmética básica, estos algoritmos son una alternativa a los algoritmos aritméticos tradicionales.

Mato (2015, p. 12) nos describe que el autor de esta propuesta didáctica, Jaime Martínez Montero, defiende que este método tiene como propósito que los estudiantes consigan hacer operaciones y resolver problemas de una variedad de formas posibles: recurriendo a sus propias experiencias, siendo autónomos en sus acciones y tomando en consideración su capacidad de cálculo, lógica matemática y razonamiento. O sea que, con este método se quiere lograr que los alumnos no aprendan las operaciones aritméticas de forma memorística y mecánica.

Como bien mencionamos el creador del método ABN es Jaime Martínez Montero, quien comenzó a trabajar en esta metodología desde su tesis doctoral en 1995, sin embargo, fue hasta su primer libro “Una nueva didáctica para calcular en el siglo XXI”, en el año 2000, que sentó la propuesta de su alternativa a los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas y en su segundo libro “Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica” hizo explícita finalmente su metodología (Espinosa, 2015, p. 17).

Esta propuesta didáctica es considerada por su creador, de acuerdo con Mato (2015), como más motivadora, más fácil y más conectada con el pensamiento de los estudiantes, así como más adaptada a sus necesidades futuras y eficaz para que alcancen competencia matemática (p. 16).

Pronto se fue extendiendo la metodología ABN a partir del año 2008 por toda España, comenzó en Andalucía con un grupo de primer año de primaria y en el año 2011 se asentó a nivel nacional en España. Para el año 2013 ya se había reportado el uso de esta metodología en varios centros educativos de nivel básico en regiones de habla hispana (Espinosa, 2015, p. 17).

Su auge se debe precisamente a las características de estos algoritmos aritméticos alternativos, que a continuación describimos, así como a los resultados que se fueron obteniendo y reportando durante varios años por diversos grupos de investigación, incluyendo al mismo autor del método, con resultados sobresalientes comparados con los algoritmos tradicionales CBC. En particular los estudiantes que aprendieron algoritmos ABN mostraron mejor rendimiento en el cálculo mental, operaciones aritméticas y resolución de problemas (Montero, 2014, pp. 106-108).

Las características que describen a estos algoritmos ABN son las siguientes (Espinosa, 2015, p. 15; Mato, 2015, p. 17):

- Son Abiertos: No hay una única forma aceptada de llevarlos a cabo, cada alumno los puede hacer de forma distinta en función de su desarrollo, dominio del cálculo e incluso gusto, respetando los ritmos distintos de cada estudiante. A diferencia de los algoritmos clásicos estos pueden modificarse y llevarse a cabo a voluntad de cada estudiante.
- Son Basados en Números: A diferencia de los algoritmos tradicionales CBC no se usan cifras con un mismo tratamiento a cada una de ellas, sino que siempre se emplean combinando números completos con todo su significado. Y se hacen descomposiciones en unidades, decenas, centenas, etc., para utilizarlos. Con esta concepción de las operaciones se eliminan los problemas de los formatos que

consideran operar con cifras, como los acarreos y los préstamos, y se da relevancia a la noción del número completo.

- Los algoritmos ABN involucran formatos transparentes que permiten detectar exactamente puntos de errores cometidos en el proceso y sobre todo son evidentes los pasos del algoritmo que los alumnos están haciendo. Podemos percatarnos que es lo que el alumno está pensando y su razonamiento. Así también se hacen evidentes para los alumnos procesos importantes del cálculo, como la compensación, descomposición y estimación.
- También con estos algoritmos ABN aparece inherentemente la reversibilidad de operaciones, es decir, por defecto y de manera muy evidente en la suma aparece la resta y viceversa.

También tenemos que los algoritmos ABN fueron principalmente diseñados a partir del movimiento de renovación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas denominado Educación Matemática Realista (EMR) que fue impulsado por Hans Freudenthal desde la década de 1970 en Holanda. Los principios que ha ido estableciendo este movimiento aunados a los modelos de la corriente constructivista, principalmente ideas de Jean Piaget, son la base de la metodología ABN (Mato, 2015, p. 16).

El perfil que sigue el movimiento EMR está orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática y el razonamiento matemático considerando el uso de materiales manipulativos para aumentar la motivación y el interés (Mendizábal et al., 2017, p. 56). Y en general, el enfoque EMR define a la matemática en la escuela como una actividad humana que debe adaptarse a las características de los alumnos y que debe estar conectada con sus vidas y necesidades.

Partiendo de las evidencias, de cómo aprenden los estudiantes matemáticas, del enfoque EMR tenemos que los principios en los que se basa la metodología ABN, y que su creador identifica con el movimiento EMR, son los siguientes (Espinosa, 2015, p. 19):

- Principio de Igualdad: Si bien es cierto que cada alumno es distinto, aprende de forma distinta y con tiempos distintos, existe el principio de igualdad en el que todo

el alumnado, con las debidas ayudas, es capaz de alcanzar las competencias matemáticas que se esperan.

- Principio de la Experiencia: Puesto que la matemática es una materia muy abstracta y los estudiantes llegan siempre a fases donde deben abstraer diversos conceptos, particularmente pensemos cuando usan operaciones concretas, es necesaria la experiencia mediante la manipulación de materiales concretos o el aprendizaje verbal donde el propio alumno es el constructor de su aprendizaje.
- Principio del empleo de números completos: Los alumnos, a diferencia de con los algoritmos clásicos o tradicionales (CBC), ya no utilizan cifras sueltas, en esta metodología ABN operan, estiman y calculan con números completos y el sentido de cantidad que se le asocia a esos números.
- Principio de la transparencia: En la metodología ABN se siguen algoritmos transparentes en los que los alumnos pueden visualizar claramente los pasos y procesos que se hacen en la aritmética.
- Principio de la adaptación al ritmo individual de cada sujeto: Como se mencionó en el Principio de la Igualdad, es razonable pensar que cada alumno tiene su propio modo de resolver operaciones aritméticas y por lo tanto a cada alumno le puede tomar más o menos tiempo hacer cierta tarea. La metodología ABN es flexible permitiendo a los estudiantes efectuar los cálculos de forma más personalizada y facilitando el cálculo, lo que no es posible con el formato tradicional.
- Principio del autoaprendizaje y del autocontrol: Las posibilidades que ofrece la metodología ABN, tales como: agrupar o desdoblar cálculos, manejar la estructura aditiva o multiplicativa y controlar pasos intermedios, da la posibilidad de que los propios alumnos evalúen sus acciones y razonamientos, verificando la exactitud con la que proceden al calcular.

Por las características y principios de la metodología ABN, nuevamente, enfatizamos que aplicar dicha metodología en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética conlleva ciertas ventajas. Como lo ha experimentado el mismo Montero (2014) quien obtuvo excelentes resultados sobresaliendo con respecto a la metodología CBC.

Y también, en Espinosa (2015, p. 15), encontramos los resultados de Canto y Navarro (2014) quienes dejan muy concisas las siguientes ventajas, tras su profundo análisis, del método ABN: Los alumnos aprenden mejor y más rápido, mejoran su capacidad de cálculo mental y estimación, incrementa su capacidad de resolución de problemas, crean procedimientos y estrategias propias, desaparecen dificultades del método tradicional y los alumnos tienen mejor actitud frente a las matemáticas.

Con lo anterior nos fue sencillo llegar a la idea de que esta metodología de los algoritmos ABN es la indicada para enseñar y aprender aritmética obteniendo una mejoría en todos los aspectos previamente mencionados y por supuesto subsanando las consecuencias negativas que implica el aprendizaje de algoritmos aritméticos, consecuencias negativas que vimos previamente en el problema de investigación y que en realidad son las que nos atañan en este proyecto.

Ejemplos de algoritmos ABN

Como podemos notar, en la descripción de las características de estos algoritmos, no hay un solo formato para llevar a cabo los algoritmos ABN, pues son flexibles, abiertos y dependen del desarrollo que lleve a cabo cada estudiante.

A diferencia de los diversos formatos que existen para los algoritmos CBC, los ABN no se toman como absolutos, es decir, en los diversos formatos de los algoritmos CBC aparece una característica distintiva la cual es que son cerrados, o sea que, solo se admite un procedimiento como válido. Así el alumno solo aprende ese procedimiento, o algún otro también cerrado, y con ellos es con lo que calcula. En el caso de los algoritmos ABN también existen muchos formatos pero estos desde su creación dependen del propio estudiante y, por lo tanto, son diferentes, o sea que, no se toma un solo procedimiento como absoluto.

Sucede también que se les enseña a los estudiantes un formato de algoritmo ABN específico, por ejemplo, para restar, y con este aprenden, practican e incluso lo usan como herramienta para resolver problemas. Pero finalmente los procesos dentro del propio formato siguen siendo propios del alumno.

Consideremos, por ejemplo, nuestro caso, hemos elegido un formato particular para efectuar restas, el cual podemos ver en el capítulo de la implementación de nuestra plataforma digital. Primero tenemos que este formato no es único, hay más formatos compatibles con las restas, y después tenemos que la manera de llevarlo a cabo depende enteramente del propio estudiante, él mismo decide como manipular los números, que cantidades quitar, como descomponer y componer las cantidades, si aplica procesos compensatorios u otras estrategias, etc.

Con todo esto anterior daremos un ejemplo para el caso de la adición de dos cantidades de dos dígitos, ejemplo que aparece en Espinosa (2015, p. 28) y que vemos en la Figura 9, con el que podemos notar la diversidad de algoritmos ABN que existen (se pueden crear), la variedad de soluciones de la adición, donde todas las soluciones son correctas, y ejemplificar lo recién descrito.

25 + 13		
AÑADO	QUEDA	SUMA
2	11	27
1	10	28
5	5	33
5	0	38

25 + 13		
AÑADO	QUEDA	SUMA
1	12	26
2	10	28
10	0	38

25 + 13		
AÑADO	QUEDA	SUMA
3	10	28
10	0	38

25 + 13		
AÑADO	QUEDA	SUMA
13	0	38

Figura 9.- Ejemplos de diversos algoritmos ABN para la misma suma de 25 más 13 obtenido de Espinosa (2015, p. 28).

En estos distintos algoritmos podemos apreciar toda la bondad de los algoritmos ABN pues queda claro que son incluyentes al considerar como válida cualquier creación correcta del algoritmo. Un estudiante muy diestro puede sumar inmediatamente ambas cantidades, como se ve en el último algoritmo, mientras que un estudiante que necesite o quiera hacer más pasos lo puede hacer sin problemas.

Y podemos ver que todo esto se hace usando el mismo formato de tres columnas “Añado”, “Queda” y “Suma” que propone el autor y que es muy usual, pero sin ningún problema en la metodología ABN se puede utilizar algún otro formato o incluso el estudiante puede crear el suyo y hacer sus propios algoritmos dentro de ese formato personalizado.

Los algoritmos del ejemplo funcionan completamente con base en la composición y descomposición de los números completos involucrados, se utilizan cifras aisladas y permiten ver cada paso claramente.

Ahora podemos ver el siguiente ejemplo, también de Espinosa (2015, p. 31), donde se utiliza un formato completamente distinto al anterior, es más ya aparece la operación de resta como bien se esperaba por las características de los algoritmos ABN, y se muestra una estrategia importante del redondeo y de estos algoritmos: la compensación.

+/-	35	25
+30	65	-5
-5	<u>60</u>	0

La idea es que el alumno sume decenas completas y luego le reste lo que le añadió en exceso a ese número original que sumo. Este algoritmo está pensado para potenciar el cálculo de las sumas y las restas y podemos percatarnos, aparte de la presencia muy notoria de las características de los algoritmos ABN, de que la disposición de la suma está colocada de manera horizontal, lo que sigue abriendo el panorama del cálculo mental a los estudiantes.

Muchos más ejemplos para las sumas y restas, y algunos formatos interesantes, aparecen en la intervención didáctica que propone Espinosa (2015) y que en secciones posteriores analizamos profundamente para la implementación de los algoritmos ABN en nuestra plataforma digital.

En su propuesta Espinosa (2015) no habló explícitamente ejemplos de algoritmos para la multiplicación y como bien hemos delimitado en el alcance de este proyecto, dichos algoritmos para la multiplicación y división no nos competen hasta este punto, sin embargo queremos por lo menos describir algunas ideas para la multiplicación en esta sección.

Espinosa (2015, p. 38) da ideas importantes a considerar en el aprendizaje de los algoritmos ABN de la multiplicación, sobre todo la noción de considerar dobles y mitades, así como

que los alumnos aprendan de manera lúdica las series de 5 y otras más que sirvan de base para sus multiplicaciones y divisiones.

También Fernández (2005, p. 41) considera la idea primordial de que los estudiantes deben saber, por ejemplo, que la tabla del 8 es el doble de la tabla del 4, considerar y establecer esas relaciones entre las tablas es lo primordial. Así podemos concebir, aunque el autor no lo haga explícito de esta forma, el siguiente ejemplo de algoritmo ABN para la multiplicación:

x		=	considere	+
123	5	615	50	6150
123	4	492	90	4920
123	4	492	94	492
123	4	492	<u>98</u>	492
123x98				<u>12054</u>

En este ejemplo anterior, aunque sea largo, podemos percatarnos de que solamente se utiliza la tabla del 5 y del 4 y es posible llegar a un resultado correcto de una cifra relativamente grande en pocos pasos, sin olvidar el sentido holístico de los números involucrados y pudiendo observar los pasos realizados de manera más clara.

[El modelo cognitivo de aprendizaje de algoritmos de Fan y Bokhove \(2014\)](#)

Fan y Bokhove (2014) hicieron una revisión de la literatura sobre las concepciones de aprender algoritmos en la educación matemática. Comenzaron comparando las diferencias de aprendizaje y enseñanza, con respecto al aprendizaje memorístico, entre las culturas del Este y del Oeste. Para posteriormente analizar cómo es que la comprensión matemática está asociada con el aprendizaje de algoritmos y así proponer un nuevo modelo para relacionar a los algoritmos con una comprensión y razonamiento matemático de orden superior. Para lograr esta reconceptualización de los algoritmos recurren a la taxonomía de Bloom (1956) y la categorización de Säljö (1979) del aprendizaje, así obtienen un marco para analizar el rol de aprender algoritmos en la educación matemática.

Estos autores describen las diferencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de las dos regiones, occidente y oriente, basándose en el trabajo de Leung (2001), quien

afirma que dichas diferencias son debidas a valores y paradigmas culturales de cada región. En su trabajo Leung (2001) identificó seis dicotomías relacionadas con estas diferencias, de las cuales Fan y Bokhove (2014) consideran dos especialmente relacionadas con el tema de los algoritmos: producto frente a proceso y aprendizaje memorístico frente a aprendizaje significativo.

De estas dicotomías parten a una discusión en la que dejan claro que la postura del occidente se ha visto muy negada a admitir la memorización y viejas prácticas que la incluyen, considerando a la escuela oriental como pasada de moda y que dirige sus esfuerzos a objetivos de bajo nivel cognitivo, como la memorización. Mientras que las ideas del oriente admiten una postura más tradicional en la que creen que el occidente ha exagerado en sus innovaciones al desechar ideas tradicionales. Lo que resulta peculiarmente curioso cuando se recurren a las pruebas internacionales donde los resultados de los estudiantes de Asia Oriental son sobresalientes (Fan & Bokhove, 2014, p. 1).

También Fan y Bokhove (2014) recurren a varios autores más para poder afirmar que el papel de la memorización en Asia Oriental es trabajar en conjunto con la comprensión para generar resultados de mayor calidad, considerando a la repetición como el vínculo entre la memorización y la comprensión (p. 2). De modo que la repetición con significado si puede generar una impresión profunda, o sea memorización, pero también conduce a descubrir nuevos significados, lo que a su vez puede arribar en la comprensión (Li, 1999), esto de acuerdo con lo que encontramos en el trabajo de Fan y Bokhove (2014, p. 2).

Lo anterior fue lo que motivo a estos autores a considerar a los algoritmos desde una perspectiva de mayor comprensión, lo que podría hacer que las dicotomías de Leung (2001) ya mencionadas se vean menos polarizadas (Fan y Bokhove, 2014, p. 2), y así desarrollaron un modelo para conectar el aprendizaje de algoritmos con la comprensión matemática profunda y pensamiento de orden superior.

Haciendo uso de dos modelos cognitivos existentes Fan y Bokhove (2014) desarrollan la noción de los diferentes niveles de aprendizaje de algoritmos que proponen en su modelo.

La idea de estos autores es jerarquizar el aprendizaje de algoritmos en tres niveles dependiendo de la actividad cognitiva que implique algún algoritmo en particular.

Uno de estos modelos es la taxonomía de Bloom la cual otorga una clasificación de objetivos de aprendizaje en seis niveles: Conocimiento, Comprensión, Aplicación, Análisis, Síntesis y Evaluación. Y el otro modelo, el de Säljö, está dado desde la perspectiva de aprendizaje de los alumnos e identifica cinco categorías de actividades de aprendizaje que podríamos conectar con la taxonomía de Bloom sencillamente (Fan y Bokhove, 2014, p. 5).

Como estos dos modelos anteriores son completamente generales, y por ejemplo la taxonomía de Bloom describe objetivos esperados de aprendizaje y no actividades cognitivas, Fan y Bokhove (2014) analizaron una modificación en particular que se le ha hecho a la taxonomía de Bloom, los trabajos de Anderson et al. (2001) y Krathwohl (2002), donde se ha pasado de describir objetivos de aprendizaje a dos dimensiones: procesos cognitivos y una dimensión de conocimiento (Fan y Bokhove, 2014, p. 5).

Al hacer este cambio de considerar, en una clasificación, objetivos de aprendizaje, ahora para considerar procesos cognitivos y conocimiento, ocurre que los procesos considerados en la taxonomía de Bloom pasan a ser ahora verbos, que representan procesos cognitivos asociados con cada uno de la taxonomía de Bloom.

Fan y Bokhove (2014, p. 5) nos describen que la categoría original de la taxonomía de Bloom Conocimiento se renombró Recordar, la categoría Comprensión se renombró Entender, Síntesis se renombró Crear y se colocó en una categoría superior, ya que se afirmó que primero es necesario poder Evaluar antes de poder Crear, y las categorías restantes cambiaron a sus formas verbales: Aplicar, Analizar y Evaluar.

También encontramos descrito por Fan y Bokhove (2014, p. 5) que Krathwohl (2002, p. 215) hace notar que conviene relajar el requisito de una jerarquía estricta para permitir que las categorías se superpongan entre sí, en realidad en esta taxonomía los diferentes procesos cognitivos se pueden manifestar en diferentes niveles de conocimiento. Es decir, esta taxonomía permite que no exista un orden estricto de la jerarquía.

Entonces, al igual que lo que ocurre con otras áreas de aprendizaje, los algoritmos pueden ser aprendidos en diferentes niveles cognitivos (Fan & Bokhove, 2014, p. 6) por lo que finalmente, delimitando su modelo, estos autores nos indican explícitamente sus tres niveles cognitivos de aprendizaje de algoritmos, relacionándolos con las categorías de las taxonomías que revisaron. A continuación, presentamos su modelo y lo explicamos:

Tabla 1.- Se muestra el modelo cognitivo de aprendizaje de algoritmos de Fan y Bokhove (2014). Traducción propia, en la que solo hay dos notas importantes a destacar; la primera es que el verbo Understand se ha traducido a Entender y Comprehension se ha traducir a Comprender, y la segunda es que el verbo comprender, aunque en la taxonomía revisada de Bloom se cambió a entender nuevamente (Fan & Bokhove, 2014, p. 5), es el que en este contexto adquiere un sentido más holístico y profundo sobre el aprendizaje de algoritmos.

Modelo cognitivo sobre el aprendizaje de algoritmos				
Un nivel inferior soporta a uno superior y viceversa 		Bloom	Säljö	Bloom Revisada
	1. Conocimientos y Habilidades	1. Conocimiento	A. Aumento de los conocimientos. B. Memorización. C. Adquisición de hechos, habilidades y métodos.	1. Recordar
	2. Entendimiento y Comprensión	2. Comprensión 3. Aplicación 4. Análisis	D. Dar sentido o abstracción del significado.	2. Entender 3. Aplicar 4. Analizar
3. Evaluación y Construcción	5. Síntesis 6. Evaluación	E. El aprendizaje como interpretación y comprensión.	5. Evaluar 6. Crear	

1. Conocimientos y Habilidades

Los autores relacionan su primer nivel del modelo, Conocimientos y Habilidades, con la noción tradicional de algoritmos, esto es, la noción clásica de lo que se considera que es aprenderlos, ya que se trata solo de conocimientos, memoria y habilidades procedimentales relacionadas con el uso clásico de los algoritmos.

Siendo la actividad clave en este primer nivel la de recordar un algoritmo específico y saberlo aplicar correctamente, es decir, el alcance máximo de este nivel es utilizar directamente un determinado algoritmo como un proceso.

De igual manera, Fan y Bokhove (2014, p. 6) indican que su primer nivel está ligado a la comprensión instrumental de la que habla Richard Skemp en el aprendizaje de las matemáticas en general, siendo un nivel más avanzado la comprensión relacional, que ya estaría en los niveles dos y tres de su modelo.

Para ejemplificar las actividades claves de este primer nivel cognitivo del aprendizaje de algoritmos los autores nos recuerdan que la actividad primordial es recordar el algoritmo. En este sentido, por ejemplo, para efectuar una multiplicación de dos dígitos el alumno incluso podría elegir el algoritmo de su preferencia y recordarlo sabiendo aplicarlo y llevarlo a cabo de manera mecánica. De igual manera, para sumar los primeros n números naturales, en este primer nivel, las actividades serían reconocer y recordar la serie dada por la fórmula cerrada y aplicarla directamente en una situación sencilla.

2. Entendimiento y Comprensión

El segundo nivel, Entendimiento y Comprensión, consiste en entender un algoritmo sabiendo por qué funciona y aplicarlo en una situación relativamente compleja, lo cual requerirá cierto grado de comprensión.

Una actividad clave de este nivel es que, aparte de que los alumnos conozcan y recuerden los algoritmos, como ocurría en el primer nivel, se establezcan conexiones con lo ya aprendido. Hacer conexiones, comprender cómo se deriva un algoritmo y cómo funciona son actividades que pertenecen a este segundo nivel del modelo.

Como podemos notar en la Tabla I que describe el modelo, la abstracción, de la clasificación de Saljo, se encuentra relacionada con este segundo nivel cognitivo, puesto que Fan y Bokhove (2014) la consideran más bien como establecer conexiones (p. 6), actividad que es clave en este nivel.

Por estas características previamente descritas es que los autores identifican el segundo nivel de su modelo con la comprensión relacional de la teoría del aprendizaje de matemáticas de Richard Skemp, aunque particularmente para el caso de aprendizaje de algoritmos.

Entonces, para que los alumnos se encuentren en este nivel de aprendizaje deben comprender los algoritmos, aunado a lo del primer nivel que es conocerlos y aplicarlos, deben analizar los algoritmos entendiendo cómo funcionan y cómo fueron obtenidos dichos algoritmos. El alcance máximo de este nivel es que se domine todo lo anterior respecto a un solo algoritmo, porque cuando se evalúan varios algoritmos existentes y se construye un nuevo algoritmo se alcanza el tercer nivel. Pues como mencionamos previamente Fan y Bokhove (2014, p. 6) consideran en mayor nivel cognitivo a la evaluación comparada con la comprensión.

Finalmente, ejemplifican este segundo nivel de su modelo recurriendo a la misma fórmula para la suma de los primeros números naturales; ahora ya no solo resulta relevante, para estar en este nivel cognitivo de aprendizaje, conocerla y saberla operar, sino que es importante como se obtiene y por qué funciona.

También Fan y Bokhove (2014) ejemplifican el aspecto clave de la comprensión de algoritmos de este nivel cognitivo mostrando en una multiplicación vertical explícitamente cada paso que el algoritmo oculta y se apoyan de un diagrama pictórico para representar y hacer notar cada uno de estos pasos evidenciando la comprensión del algoritmo y por lo tanto el aprendizaje en este segundo nivel cognitivo (p. 6).

3. Evaluación y Construcción

En este tercer y último nivel del modelo cognitivo de aprendizaje de algoritmos se trata de observar el más amplio panorama de los algoritmos, esto es, comparar algoritmos unos con otros, evaluar algoritmos comparando su eficacia y generalidad, y crear algoritmos propios.

Como podemos notar, este tercer nivel cognitivo es el más alto y está asociado inmediatamente con el verbo crear de la taxonomía de Bloom modificada, que revisaron Fan y Bokhove (2014, p. 5), y con el proceso de evaluar de la taxonomía de Bloom original. Sin embargo, cabe mencionar que, como bien nos percatamos en la Tabla I descriptiva del modelo cognitivo y nos dicen Fan y Bokhove (2014, p. 7), los niveles inferiores respaldan a los superiores y viceversa, no existe un orden estricto en el que se van desarrollando o apareciendo los niveles de aprendizaje.

El aprendizaje en este nivel requiere que los estudiantes se dediquen más al pensamiento independiente y a la autorreflexión. Así pues, en este nivel, el producto del aprendizaje es ser capaz de juzgar el valor o la valía de un algoritmo, reconstruir un algoritmo ya existente o construir un nuevo algoritmo (Fan & Bokhove, 2014, p. 8).

Entonces este nivel de aprendizaje de algoritmos implica habilidades de pensamiento de orden superior que incluyen tanto la capacidad crítica, como la creativa, con un aspecto evaluativo y de creación que va más allá del nivel de comprensión y entendimiento del segundo nivel.

O sea que, para que los alumnos estén en este nivel cognitivo se requiere que sean capaces de construir nuevos algoritmos, juzgar el valor individual de un algoritmo, compararlo con otros algoritmos y juzgar si existe la necesidad y la posibilidad de que un método se pueda generalizar para resolver una familia de preguntas similares.

4. Los algoritmos ABN evaluados en el contexto del modelo cognitivo de Fan y Bokhove (2014)

A lo largo de la revisión de la literatura sobre la metodología ABN hemos encontrado estudios comparativos entre esta metodología y la metodología tradicional (Montero, 2014), propuestas didácticas para implementar la metodología ABN de manera correcta (Espinosa, 2015; Mato, 2015) e incluso un análisis experimental de los perfiles cognitivos que tienen los niños estudiantes que aprendieron mediante la metodología ABN (Mendizábal et al., 2017).

Sin embargo, no hemos encontrado alguna investigación teórica en la que se ponga a prueba la metodología ABN enmarcándola en un cierto contexto. Es un hecho que los algoritmos ABN son diferentes a los tradicionales, como ya explicamos en la sección correspondiente, y desde su creación representan una propuesta alternativa e innovadora para aprender aritmética básica.

Pero nos interesa evaluar la propuesta de la metodología ABN, al menos de manera teórica, dentro de un marco o modelo, para que tengamos una mejor noción sobre qué podemos esperar de que los alumnos aprendan estos algoritmos ABN.

Para esta finalidad hemos elegido al modelo cognitivo de aprendizaje de algoritmos de Fan y Bokhove (2014) como marco para evaluar a los algoritmos del método ABN, pues, como los mismos autores lo proponen en su introducción, este modelo nos sirve de herramienta para reconceptualizar el rol de los algoritmos. Es decir, tomaremos como un instrumento de medición a este modelo y mediremos el alcance cognitivo, que podrían llegar a tener los alumnos que aprendan algoritmos ABN.

Los estudios experimentales confirman que los alumnos que aprenden la metodología ABN tienen un perfil cognitivo de más alto nivel comparado con aquellos alumnos que aprenden la metodología tradicional, para profundizar en esto podemos ver el marco conceptual. Y en realidad, como ya se comentó, desde las ideas principales de las cuales surgieron los

algoritmos ABN, como es el caso de los principios de la matemática realista de Freudenthal, podemos apreciar lo innovador de estos algoritmos.

Sin embargo, en esta sección nuestra intención es hacer un análisis teórico explícito de las características de los algoritmos ABN medidas con la regla que nos da el modelo de Fan y Bokhove para obtener en qué niveles cognitivos de aprendizaje se encuentran los alumnos que aprenden aritmética con la metodología ABN.

De igual manera, en este análisis de la calidad del aprendizaje de los algoritmos ABN haremos explícitas las relaciones que hemos encontrado entre el modelo de Fan y Bokhove (2014), la categorización de algoritmos de Fernández (2005) y la metodología ABN, temas que fueron introducidos en el marco conceptual.

[El papel de los algoritmos ABN en el aprendizaje de la aritmética de acuerdo con el modelo de Fan y Bokhove](#)

Como Fan y Bokhove (2014) han hecho la identificación de su modelo con la taxonomía modificada de Bloom, pues recordemos que les interesa cambiar una clasificación de aprendizajes esperados por la clasificación de procesos cognitivos, en esta descripción de los algoritmos ABN consideramos solamente a dicha taxonomía modificada y al mismo modelo propuesto por estos autores para analizar los algoritmos en cada nivel cognitivo de acuerdo con las características que tienen.

En la siguiente Tabla II, en la que describimos la identificación que hacemos de los algoritmos ABN dentro del modelo de reconceptualización del rol que tiene el aprendizaje de algoritmos en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, identificamos explícitamente las características de los algoritmos ABN con las características esenciales de cada nivel del modelo, explicando en qué medida se relacionan las intenciones de la metodología ABN con los niveles cognitivos de este modelo de aprendizaje de algoritmos.

Podemos notar en las descripciones que hay dentro de la Tabla I que los algoritmos aritméticos de la metodología ABN, de entrada, cuentan con ciertas características que los hacen estar dentro del segundo y tercer nivel cognitivo. Pero mejor pasemos a la Tabla II

completa, en la que en cada nivel del modelo por separado hacemos explícita nuestra identificación de los algoritmos ABN dentro del nivel correspondiente, de acuerdo con las características que estos algoritmos presentan.

Tabla II.- Mostramos nuestra identificación de los algoritmos ABN dentro del modelo de reconceptualización del rol que tiene el aprendizaje de algoritmos en el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Primer nivel cognitivo del modelo de aprendizaje	
<p>1. Conocimientos y habilidades</p> <p>Conocer los procedimientos de un algoritmo y saber llevarlo a cabo de manera directa.</p>	<p>1. Recordar</p>
<p>Identificación de los algoritmos ABN en este nivel cognitivo</p> <p>En las propuestas de enseñanza de los algoritmos ABN que revisamos siempre encontramos una etapa de introducción a estos algoritmos, es decir, de manera clásica o tradicional se comienzan a mostrar los algoritmos a los alumnos (Espinosa, 2015; Mato, 2015), de forma tal que aprenden, en primera instancia, algunos de estos y los pueden repetir en situaciones de manera directa.</p> <p>Por lo que inmediatamente podemos identificar el aprendizaje de estos algoritmos con este nivel cognitivo que tiene como esencia conocer esos algoritmos específicos, por ejemplo, podría ser uno para la adición de dos números de un dígito descomponiéndolos en unidades y realizando un conteo del total de unidades, y saberlo utilizar en situaciones directas donde sea requerido.</p> <p>Sin embargo, cabe mencionar que no se prioriza que los alumnos aprendan un cierto algoritmo dado, se puede mostrar a modo de ejemplo, pero lo importante es que los alumnos aprendan procesos de descomposición de números enteros, primero decenas en unidades, y después centenas en decenas (Espinosa, 2015).</p> <p>En este sentido algoritmos sencillos, por ejemplo, algoritmos que involucren las posibles descomposiciones aditivas que equivalen a un número dado (menor o igual a 5), aparte de ser fundamentales en el aprendizaje de los niños que estudian aritmética básica (Fernández, 2005, p. 9), podrían ser considerados en este nivel cognitivo. Pues, por ejemplo, para descomponer el número 2 en unidades solamente existe una solución y un método de hacerlo, el alumno es capaz de realizar la actividad cognitiva de recordarlo, como lo podemos ver en las sugerencias de Fernández (2005, p. 10), y ejecutarlo mediante relaciones para ahora descomponer el número 3, 4, 5, etc.</p> <p>Finalmente, sí podríamos encontrar cabida al aprendizaje de algoritmos ABN en este nivel cognitivo, sin embargo, no existe ninguna ganancia con intentarlo, incluso, siguiendo el ejemplo anterior, podríamos encontrar que los alumnos ya se aventuren a</p>	

crear sus propios algoritmos, pues la idea es formarlos en las descomposiciones aditivas simplemente como entrada al método ABN, debe existir la libertad de los alumnos de decidir qué hacer.

Claramente los algoritmos ABN pueden encontrarse en este nivel cognitivo, pues la parte primordial de este nivel es recordar un algoritmo y saberlo utilizar, eso se puede cumplir, pero los algoritmos ABN tienen más potencial que ofrecer y por lo tanto embonarían mejor en los siguientes niveles cognitivos, como a continuación se muestra.

Segundo nivel cognitivo del modelo de aprendizaje

<p>2. Entendimiento y Comprensión</p> <p>Conocer cómo es que un algoritmo funciona y cómo puede ser utilizado en una situación relativamente compleja.</p>	<p>2. Entender, Aplicar y Analizar</p>
---	---

Identificación de los algoritmos ABN en este nivel cognitivo

Una de las características primordiales de este segundo nivel cognitivo es comprender los algoritmos analizando cómo funcionan y cómo se obtienen. Y un aspecto importante de los algoritmos aritméticos ABN es que son transparentes, lo que permite que los alumnos vean claramente el funcionamiento de estos algoritmos pudiendo apreciar los procesos de estimación, composición y descomposición con los que funciona cada algoritmo.

De igual manera los estudiantes que aprenden estos algoritmos ABN pueden llevar a cabo el proceso cognitivo de comprender cómo es que se obtienen los algoritmos, pues los algoritmos ABN son abiertos, lo que quiere decir que la forma de llevarlos a cabo depende casi exclusivamente del estudiante y al efectuarlo el estudiante por sí mismo podemos considerar que él mismo lo está obteniendo cada vez que lo usa y aplica.

Es decir, en la misma metodología ABN aparece inherentemente la obtención de los algoritmos y la comprensión de cómo es que funcionan, dejando a los estudiantes el deber de encargarse ellos mismos y decidir el camino de la obtención del algoritmo. Y podemos mencionar que en una etapa previa, antes de tener cierto grado de dominio de los algoritmos ABN, los formatos transparentes de estos permiten que los alumnos aparte de comprender cómo funcionan dejan expuesta información matemática como el valor posicional y sentido numérico de los números.

Entonces resumiendo, la obtención de algún algoritmo ABN, que hace cada estudiante, tiene sustento en los procesos (compensación, composición y descomposición) ya aprendidos previamente por lo que también concuerda con que el alumno, en este nivel cognitivo, comprende los algoritmos, es decir, analiza cómo funcionan.

De igual manera un aspecto importante de este nivel cognitivo de aprendizaje es que los alumnos son capaces de crear relaciones con los conocimientos que ya han aprendido. En este sentido los algoritmos ABN responden muy bien, pues la idea es que los estudiantes gradualmente se apropien de conocimientos, como las ya mencionadas composiciones aditivas de los primeros 5 números cardinales, y posteriormente las puedan utilizar en cálculos más complejos, es decir, relaciones con conocimientos previos en situaciones no tan directas.

Tercer nivel cognitivo del modelo de aprendizaje

<p>3. Evaluación y Construcción</p> <p>Ser capaz de hacer juicios y comparar el valor y la eficacia de un algoritmo o diferentes algoritmos, construir nuevos algoritmos o generalizaciones de algoritmos.</p>	<p>3. Evaluar y Crear</p>
---	----------------------------------

Identificación de los algoritmos ABN en este nivel cognitivo

Uno de los procesos cognitivos que destaca en este tercer nivel del modelo, y que creemos es el que más se relaciona inmediatamente con la metodología ABN, es la creación de algoritmos. Ya no solo resulta importante conocer y comprender a fondo los algoritmos ya establecidos, sino que en este nivel resulta importante esta actividad que implica un proceso cognitivo de más alto nivel, crear nuevos algoritmos.

Sucede algo peculiar, que es importante hacer explícito en esta sección, con los algoritmos ABN, pues como bien hemos aclarado en secciones anteriores desde su creación uno de los objetivos de esta metodología es que los algoritmos sean desarrollados por los mismos alumnos (Mendizábal et al., 2017; Montero, 2014). Es decir, la creación propia de algoritmos ABN viene implícita en la metodología.

Y entonces es importante aclarar que lo que en verdad crean los alumnos siguen siendo algoritmos del tipo ABN (es decir, que cumplen con sus características) y no están creando algo distinto a los ABN, pero por las mismas características de los algoritmos ABN, resulta que cada algoritmo de esta clase es distinto, es decir, dentro de la misma clase se pueden crear algoritmos completamente nuevos.

Así, cuando un alumno está creando su propio algoritmo ABN, sí podemos considerar que se encuentra llevando a cabo el proceso cognitivo de crear, tal cual se describe en este nivel del modelo, pues es capaz de inventar algoritmos nuevos.

Podemos concebir la noción de que también los alumnos pueden ser capaces de evaluar sus nuevos algoritmos ABN creados, pues hay que recordar que estos son transparentes y el alumno, así como el profesor, pueden percatarse de todos los pasos del algoritmo (Espinosa, 2015, p. 15; Mato, 2015, p. 17) y con la correcta retroalimentación sería

factible que los alumnos realicen la evaluación de su algoritmo creado, sobre todo su eficiencia.

Con respecto a evaluar la generalidad del algoritmo no sería inmediatamente notorio el aprendizaje en este nivel de los estudiantes, pues recordemos que los algoritmos ABN están pensados especialmente, en este trabajo, para las primeras operaciones aritméticas con números naturales y por lo tanto, de entrada, todos los algoritmos ABN cumplirían la misma generalidad. Lo que si resulta inmediatamente notorio es que los alumnos pueden hacer juicios sobre la eficiencia de su algoritmo creado, nuevamente con la correcta retroalimentación. Por ejemplo, se les puede cuestionar sobre la cantidad de pasos que tiene su algoritmo y si es posible reducirlos.

Entonces, considerando esta misma idea de que los algoritmos que se encuentran dentro de la clase de los algoritmos ABN pueden ser diferentes cada uno de ellos, podemos también afirmar que los estudiantes que aprenden algoritmos ABN pueden evaluar y juzgar algoritmos diferentes, por ejemplo, su algoritmo originalmente creado con otro que desarrollen y que sea más o menos eficiente.

A modo de resumen, identificamos, por ejemplo, que parte esencial de esta metodología es que los alumnos creen sus propios algoritmos, así encontrándose los alumnos en el tercer nivel cognitivo inmediatamente. Claro que esta afirmación es cierta si en verdad se cumple el objetivo de que el alumno cree sus propios algoritmos, y sin generalizar ni teniendo el afán de ser muy duros y contundentes, podemos pensar que si los crea podría ser que su aprendizaje esté en este nivel cognitivo superior.

Y de acuerdo con investigaciones experimentales previas y sus resultados, es un hecho que los alumnos sí crean en verdad sus propios algoritmos ABN (Mendizábal et al., 2017; Montero, 2014). Ocurre algo similar con otras características, que también se analizan y describen en la Tabla II anterior, como es el caso de la comprensión de los algoritmos, la evaluación individual y su comparación con otros algoritmos, así como la repetición mecánica de estos.

Cabe hacer notar, en esta sección, que el análisis de los algoritmos ABN dentro del modelo cognitivo de Fan y Bokhove, a través de la identificación de las características esenciales de esta metodología con las características de cada nivel del modelo, aunado a no encontrarse reportado en la literatura, nos permitió extraer aspectos de la metodología que tomamos

en consideración al diseñar la plataforma digital, con el fin de que aprender y desarrollar los algoritmos ABN en este medio digital también permita que el aprendizaje de los estudiantes se encuentre en un alto nivel cognitivo.

Identificación de las ideas de Fernández con las ideas de Fan y Bokhove, y la metodología ABN

Las investigaciones de Fan y Bokhove (2014) y Fernández (2005) son, como hemos podido apreciar, fundamentales en nuestro proyecto. Por lo que puede resultar importante relacionar dichos trabajos, es decir, aunada a la información que podemos extraer de estos para lo que nos interesa sobre el aprendizaje de algoritmos aritméticos, es interesante analizar las relaciones que existen entre estos.

Pues en ninguna de las dos fuentes anteriores se emplean los términos ni las ideas explícitas de la metodología ABN, ni dichas investigaciones se mencionan entre sí, son estudios que podemos considerar ajenos.

Sin embargo, es impresionante la sencillez con la que podemos realizar una identificación muy coherente entre las ideas previas, en este caso, de Fernández (2005) y las posteriores ideas que Fan y Bokhove (2014) desarrollaron sobre el aprendizaje de algoritmos.

En el trabajo que hace Fernández (2005) exhibe los estereotipos y avatares del aprendizaje y enseñanza de algoritmos en las matemáticas, no es su intención total considerar un replanteamiento del rol que juegan los algoritmos en la educación matemática, sin embargo, al describir los avatares, esto es las fases y los cambios con los que se consideran a los algoritmos, también describe en cierta medida una concepción muy propia del rol de los algoritmos. Lo que recordemos, es el objetivo principal de Fan y Bokhove (2014), pues dichos autores tenía la intención de replantear el rol de los algoritmos.

Particularmente es interesante que Fernández (2005, p. 32) hace una distinción dual de los algoritmos, aquellos que son sumisos y los que son innovadores, y al describir esta clasificación podemos darnos cuenta de que los algoritmos que clasifica como sumisos embonan perfectamente con el primer nivel del modelo cognitivo de Fan y Bokhove (2014).

Es decir, de acuerdo con las ideas de los autores del modelo cognitivo, aprender dichos algoritmos sumisos conllevaría a aprenderlos en un bajo nivel cognitivo. Lo que también concuerda con las descripciones que da Fernández (2005, p. 32) de este tipo de algoritmos.

Y lo que ocurre con los algoritmos innovadores de Fernández (2005) es que él los considera como aquellos algoritmos en los que el algoritmo en sí mismo es el fin de un proceso cognitivo, es decir, no se toman como herramientas de la cual partir al cálculo, sino que obtener el algoritmo como fin último es el objetivo y esto inmediatamente hace que el algoritmo entre en la clasificación de algoritmo innovador (p. 33).

Si consideramos esta descripción de un algoritmo innovador nos podemos percatar de la relación que existe con el proceso de creación de algoritmos que aparece en el tercer nivel del modelo cognitivo, así como con la comprensión de algoritmos que aparece en el segundo nivel cognitivo con respecto a comprender la obtención de un algoritmo.

Es decir, sin ningún problema podemos identificar que el aprendizaje de los algoritmos innovadores de Fernández (2005) se encontraría en un alto nivel cognitivo, podría encajar perfectamente tanto en el segundo, como en el tercer, nivel del modelo cognitivo de aprendizaje de algoritmos.

Lo que resulta nuevamente interesante porque, como lo podemos apreciar, las ideas de ambos estudios son consistentes.

[Nota sobre la didáctica tradicional, la escuela activa y los algoritmos ABN](#)

Finalmente, encontramos que Fan y Bokhove (2014) relacionan explícitamente el primer nivel cognitivo de su modelo con la comprensión instrumental de la teoría del aprendizaje de matemáticas de Richard Skemp (p. 6) esto lo hacen porque identifican las características de dicho nivel cognitivo con dicha comprensión instrumental.

Y retomando la idea principal de Skemp, en la que postula la comprensión instrumental como: el saber hacer, continuamos teniendo una concordancia al haber identificado a los algoritmos sumisos de Fernández (2005, p. 32) con este nivel del modelo cognitivo. Pues lo relevante de los algoritmos sumisos es que se haga una acción operatoria sometida a una

aceptación sin entender por qué se está haciendo, o sea que, sale a relucir simplemente el saber hacer.

Cuando consideramos la comprensión tanto de lo que se está haciendo, como el porqué de lo que se hace ya estamos hablando de algoritmos innovadores, según Fernández (2005, p. 33). Y de acuerdo con la idea principal de Skemp sobre su comprensión relacional, en la que ahora lo relevante es el saber qué y el saber por qué, seguimos teniendo coherencia en nuestra identificación de los algoritmos innovadores dentro del segundo y tercer nivel del modelo cognitivo pues Fan y Bokhove (2014, p. 6) identifican explícitamente a la comprensión relacional sobre todo con su segundo nivel.

El saber hacer de la comprensión instrumental, característica inherente del primer nivel del modelo y de los algoritmos sumisos, está íntimamente relacionado con la didáctica tradicional, donde no se consideran, ni la acción del estudiante, ni cómo este aprende como elementos a tomar en cuenta en la didáctica.

Y por otro lado el saber qué, de la comprensión relacional, características inherentes del segundo y tercer nivel del modelo y los algoritmos innovadores en los cuales consideramos particularmente a los ABN, están relacionadas con la didáctica de la escuela activa en la que la acción del estudiante representa un elemento indispensable en su adquisición del conocimiento y destrezas matemáticas.

Con lo anterior podemos enfatizar que para conseguir estos niveles cognitivos superiores de aprendizaje es necesario considerar la acción propia del alumno. Podemos ver esto claramente en el modelo, pues parte de la esencia del tercer nivel cognitivo es que los alumnos creen sus propios algoritmos y dicha acción cognitiva de creación de algoritmos también es un elemento intrínseco de los algoritmos ABN. Por lo que podemos seguir asegurando que la práctica y aprendizaje de algoritmos ABN conlleva aprender aritmética básica en un alto nivel cognitivo.

Como reflexión final, ahora que hemos analizado la importancia de la actividad del alumno en su proceso de aprendizaje y nuestro objetivo es conseguir dicho aprendizaje en un alto nivel cognitivo, creemos que es muy importante ocuparnos por el ambiente o medio en el

que los alumnos pueden llevar a cabo dichas actividades. Por lo que proponemos una plataforma digital que, dadas sus características, resultaría ser un ambiente favorable para que los alumnos aprendan y desarrollen aritmética básica en el segundo y tercer nivel cognitivo de este modelo.

5. Implementación de los algoritmos ABN en la Plataforma Digital

Introducción a la Plataforma Digital y sus alcances. ¿Por qué desarrollar el método ABN en una Plataforma Digital?

Ya habiendo justificado la importancia de continuar con la enseñanza y aprendizaje de algoritmos aritméticos, como previamente fue descrito, y teniendo en cuenta la idea, presentada en la sección de antecedentes, de que es muy relevante el medio en el que se enseñan y aprenden estos algoritmos, podemos continuar con el objetivo principal de nuestro trabajo que fue crear una plataforma digital, en contexto de páginas web, en la cual mostramos a los algoritmos ABN de manera interactiva.

Es decir, en la plataforma los alumnos pueden conocer, desarrollar, ejercitarse y tener diferentes acercamientos a estos algoritmos a través de su propia acción, siendo dos ejes principales los que conforman la plataforma.

El primer eje tiene como objetivo mostrar algunos algoritmos ABN a los alumnos en sus primeras experiencias de modo que tengan diversos acercamientos a estos, se familiaricen con ellos y practiquen actividades que ayudan a habilidades indispensables para esta propuesta alternativa, por ejemplo, el uso de los números complementarios a 10, el conteo, la subitización, etc.

Como segundo eje la idea principal fue conseguir un ambiente en el cual los alumnos puedan practicar estos algoritmos y desarrollarlos con la finalidad de ejercitarse, contemplamos un ambiente digital basado en resolución de problemas. La idea general fue programar algunos de los formatos para llevar a cabo los algoritmos ABN y así hacer las operaciones aritméticas para resolver por los problemas propuestos.

Mediante estos formatos digitales los alumnos resuelven la operación aritmética pero en el contexto de la metodología ABN implementada en la plataforma web, es decir, llevan a cabo los algoritmos ABN dentro del esquema que hemos creado. Y se contempla que desarrollar dichos algoritmos en este medio digital trae ventajas en el aprendizaje de los algoritmos aritméticos.

Estas ventajas las analizamos más a fondo en los elementos importantes que consideramos en la plataforma digital, sin embargo, a modo de introducción, son dos aspectos claves por los que conviene mostrar a los algoritmos ABN y las actividades introductorias en este medio: la retroalimentación a los alumnos y el registro dual: simbólico y gráfico, que tenemos para presentar la metodología y la información.

Es importante mencionar que los formatos para realizar algoritmos ABN tratados en este proyecto no son de nuestra creación o impuestos en la plataforma de manera improvisada, son tomados de trabajos teóricos que nos parecen bastante interesantes y podemos analizar en las secciones correspondientes.

En realidad, dichos formatos son abiertos, incluso los propios alumnos los pueden crear, por lo que la intención más general que tenemos para este segundo eje de la plataforma es crear un catálogo de problemas y un catálogo de formatos de algoritmos ABN a los que los alumnos puedan tener acceso para conocerlos, practicarlos, comprenderlos y ejercitarse.

En esta entrega del proyecto hemos sentado las bases para la construcción de dichos catálogos de los problemas aritméticos y los formatos de algoritmos ABN, como podemos notar en las secciones correspondientes, eligiendo una categorización de problemas aritméticos que se tratan en la educación primaria y analizando las dos propuestas didácticas de algoritmos ABN que adoptamos en este proyecto.

Dentro de las bases previamente mencionadas, ya hemos dejado planteado un problema por cada tipo de problema aditivo-sustractivo de la clasificación que adoptamos, así también elaboramos la programación de un formato específico para llevar a cabo la resta ABN con la retroalimentación y características que conlleva la plataforma digital y que describimos más a detalle en la secciones a continuación.

Quedando para futuras entregas programar más componentes que contengan otros formatos para las restas y sumas ABN, ampliar el catálogo de problemas aditivos-sustractivos de manera tal que los alumnos puedan combinar, probar y resolver diferentes problemas con diferentes formatos de algoritmos ABN. Y, un poco más ambiciosos,

considerar también en la plataforma los problemas y formatos de algoritmos ABN de la multiplicación-división.

De igual manera es importante planificar, de acuerdo con la propuesta de intervención de los algoritmos ABN y la clasificación de problemas que adoptamos, cómo es que se mostraran las actividades dependiendo del grado escolar en el que se encuentren los niños. Pues bien, pensamos que esta plataforma puede quedar libre para que los estudiantes exploren lo que ellos deseen, pero sí es conveniente separar las actividades, por ejemplo, por las cantidades que se consideran.

En esta entrega de la plataforma, y como lo vemos más adelante, se incluyen simplemente cantidades menores a una centena, es decir, decenas y unidades, por lo que para poder contemplar a todos los estudiantes entre el preescolar y tercero de primaria aún debemos considerar más aspectos importantes basados en las propuestas didácticas formales que tratamos.

También la concepción que tenemos de la utilidad de la plataforma es que esta sea auxiliar en el aprendizaje usual de la aritmética de los niños en la escuela. Y concretando el alcance de esta versión de la plataforma nos quedamos con esa concepción sin entrar a detalles, pues para formalizar su utilidad y su finalidad debemos afinar otros aspectos muy importantes como: ¿En qué preciso momento del proceso de enseñanza de aritmética introducir la plataforma? ¿Accederán los estudiantes fuera de la escuela o dentro de esta al medio digital? ¿Tendrá valor curricular o meramente es por motivación del alumno? y un factor muy importante ¿Cuál es el rol del profesor con respecto a la plataforma?.

Pues, por ejemplo, con respecto a lo que se refiere al rol del profesor, en esta entrega del proyecto lo consideramos como una figura con la cual se le puede sacar más provecho a las actividades de la plataforma, e incluso es un guía a lo largo de las mismas, pues se sale de nuestros alcances una plataforma totalmente autocontenida y autoexplicada, entonces la presencia del profesor es relevante, pero se debe aclarar con detalles dicho rol, teniendo en cuenta la temática con la que se muestre la plataforma digital, lo que ya no es parte de nuestros objetivos hasta ahora, son aspectos a considerar en futuras entregas.

Aunque falta mucho para poder obtener la plataforma en su concepción más general, las bases ya consolidadas en el proyecto que hemos logrado son importantes.

Pues, a nivel teórico, ya hemos justificado la propuesta alternativa que hemos adoptado para aprender algoritmos aritméticos, hemos justificado su implementación en un medio digital y tenemos un camino, también justificado, para seguir proponiendo actividades para aprender y practicar algoritmos ABN inmersos en la resolución de problemas.

Y a nivel práctico, referente a la programación, es importante destacar que la plataforma digital que proponemos tiene características muy específicas, podríamos considerarla como hecha a la medida para nuestros objetivos, por lo que era muy complicado buscar algún programa o servicio ya hecho con el pudiésemos producir nuestra plataforma, porque finalmente sería muy complicado obtener algo exactamente como lo buscamos, lo más viable fue construirla desde el inicio de acuerdo con nuestras necesidades.

Para esto comenzamos el proyecto con código puro de las 3 tecnologías base de la parte frontal del desarrollo web: JavaScript, CSS y HTML, con lo que construimos el primer eje de la plataforma previamente mencionado.

Fuimos, para esta entrega, lo más cuidadosos posibles con respecto a la parte visual de la plataforma, nos preocupamos por crearla de manera responsiva, es decir, que se adapta al tamaño de diversas pantallas donde se está usando la plataforma, hasta ahora consideramos pantallas arriba de 14 pulgadas y tabletas.

De igual manera, mostramos imágenes y gráficos lo más profesionalmente posible, de acuerdo con los tiempos que tuvimos para llevar a cabo la plataforma. Si bien es cierto que dichos aspectos ya se salen de nuestra área de interés, no es difícil recurrir a diseñadores gráficos profesionales o consultorías de imagen para formalizar este aspecto de la plataforma.

Posteriormente, nos pasamos a un *framework* de JavaScript llamado VueJS para ocuparnos de la escalabilidad del proyecto, pues dentro del *framework* ya desarrollamos el segundo eje de la plataforma digital y podemos hacerlo crecer sin ningún problema gracias a las

ventajas de esa tecnología, creando más componentes, que son formatos de algoritmos ABN y problemas aritméticos, y relacionándolos entre si con relativa facilidad.

También este framework nos puede permitir añadir fácilmente aspectos que le hacen falta a la plataforma: informes y control del avance de los estudiantes en las actividades y bases de datos para registrar usuarios. Por lo que ya dejamos muy bien establecido el camino para continuar con esta plataforma digital.

Entonces, a modo de resumen, afirmamos que este medio digital que hemos creado es el adecuado para mostrar la propuesta alternativa de los algoritmos ABN, por las razones antes descritas y también porque nos otorga mejores condiciones para llevar a cabo el aprendizaje y práctica de esta metodología, como lo veremos más adelante en el capítulo.

[Elementos de la literatura considerados en la creación del contenido ABN de la plataforma digital](#)

Ya que hemos hablado de la plataforma web en general, de sus características e importancia para nuestros objetivos, ahora nos interesa mostrar una justificación del contenido en sí mismo que desarrollamos en la plataforma, es decir, del propio contenido de los algoritmos ABN en la plataforma digital. Pues es importante aclarar que no tomamos de manera deliberada a los algoritmos ABN y los programamos, fue importante considerar aspectos teóricos de estudios formalmente realizados sobre estos temas.

Primero cabe notar que en la literatura podemos encontrar diversos estudios, sobre todo experimentales, en los que los investigadores dedican sus esfuerzos para probar en la práctica esta metodología. También han hecho interesantes comparaciones del aprendizaje y la enseñanza de los algoritmos usuales y los algoritmos ABN.

Aunque hay bastantes trabajos de estos en la literatura, a continuación hacemos explícitos dos que consideramos relevantes, y de provecho para nuestro proyecto, en la prueba y aplicación de los algoritmos ABN y de los cuales obtenemos información para estructurar el contenido de nuestra plataforma: “Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático con el método algoritmo abierto basado en números (ABN)” de Aragón-Mendizábal et al.

(2017) y “Una forma alternativa de hacer cuentas: Algoritmos Abiertos Basados en Números” de Albase et al. (2016).

Sin embargo, existe mucha más literatura sobre intervenciones didácticas con esta metodología ABN y resultados obtenidos al haberlas aplicado: “Método ABN. Por un aprendizaje matemático sencillo, natural y divertido” de Espinosa (2015) y “Algoritmos ABN: Abiertos Basados en Números” de Mato (2015), entre otras que no tratan directamente los algoritmos ABN, pero de las que también obtenemos información para estructurar y fundamentar el contenido de nuestra plataforma.

Aragón-Mendizábal et al. (2017) evaluaron el perfil cognitivo de estudiantes que fueron instruidos con los algoritmos usuales de la aritmética, los algoritmos identificados como algoritmos CBC, y el perfil cognitivo de estudiantes instruidos con el método ABN.

Se dieron cuenta, gracias a sus resultados experimentales, que este segundo grupo de alumnos instruidos con el método ABN operan en un perfil cognitivo distinto al de los alumnos que aprendieron los algoritmos usuales. Específicamente desarrollan en mayor medida la memoria de trabajo visoespacial, a diferencia de la memoria de trabajo verbal que es más desarrollada en alumnos instruidos con el método CBC.

Este mayor desarrollo de la memoria de trabajo visoespacial es debido a lo que implica el proceso de enseñar mediante el método ABN, pues esta enseñanza conlleva el uso de una variedad de material manipulativo y figurativo. Lo que inmediatamente se ve reflejado en el proceder de los alumnos enseñados con el método ABN, pues resultan ser más eficientes y diestros en el cálculo de las operaciones aritméticas (Aragón-Mendizábal et al., 2017, pp. 63-64). Incluso estos resultados, como bien nos dicen los autores, se empatan con los resultados experimentales que obtuvo el creador del método Martínez-Montero.

Entonces para la implementación del contenido del método ABN en la plataforma digital es importante considerar el uso de una variedad de materiales que se puedan manipular y representen a algún elemento abstracto. Pues aunado a las justificaciones anteriores, y como bien argumentamos previamente, en las matemáticas se requieren materiales

concretos que representen cada paso del algoritmo para aterrizar las ideas abstractas y hacerlas comprensibles (Pantano et al., 2014, p. 627).

Ahora bien, puesto que en los algoritmos ABN no se utilizan cifras, sino números de manera holística, es importante en la plataforma diseñar ejercicios de modo que tengamos diversos registros de representación en los que se puedan visualizar las abstracciones de los números.

Esto ya se encuentra presente en las intervenciones didácticas que hemos encontrado del método ABN pues asocian, por ejemplo, el valor de una unidad a un “palillo dental” y los agrupan por decenas cobrando, ese bonche de palillos, otro significado (Espinosa, 2015, p. 21).

Ahora bien, nuestra intención en la plataforma digital es aprovechar el dinamismo que podemos tener al actualizar automáticamente la representación de las cantidades mediante palillos, o cualquier objeto concreto que se adapte a la situación tratada, y viceversa, esto es, que mediante la representación gráfica, de objetos en la plataforma, los estudiantes puedan arribar a expresar las cantidades simbólicamente en unidades, decenas, etc., recibiendo retroalimentación de lo que están haciendo.

El hecho de trabajar con números y no con cifras “permite a los estudiantes hacerse de facetas del sentido numérico como la percepción de la magnitud y destrezas para estimar” (Albase et al., 2016, p. 193), lo que significa que estos algoritmos ABN superan a los algoritmos usuales, subsanando la consecuencia importante de que con los algoritmos CBC los alumnos no desarrollan el sentido numérico, ni mucho menos adquieren una gama de opciones para poder estimar.

Del mismo modo, como los algoritmos son abiertos y flexibles, lo que quiere decir que no hay forma única y unívoca de llevar a cabo los pasos de los algoritmos, cada estudiante puede optar por trabajar como se sienta más cómodo de acuerdo con sus gustos o incluso nivel educativo, pues en principio estos algoritmos se adaptan fácilmente a los diferentes niveles de desarrollo de los estudiantes. Lo que inmediatamente implica mayor inclusión de los alumnos pues ya se rompen con las ideas rígidas descalificativas de que los alumnos

son o no son aptos para las matemáticas (Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2015), al menos para estos primeros temas de la educación primaria.

También encontramos la investigación de Albase et al. (2016), en cuyo informe los autores describen un taller que han hecho de iniciación al método ABN para la formación de maestros de primaria, el cual nos resulta interesante para este capítulo pues nos muestran intervenciones educativas y ejemplos de problemas propuestos.

Los autores también hacen explícitas las ideas del creador del método ABN sobre dos aspectos importantes en los que se basa dicho método: el conocimiento profundo del sistema de numeración decimal y la utilización constante de la descomposición y composición de los números.

Así que en la creación del contenido de la plataforma consideramos importante llevar a cabo actividades de composición y descomposición de números, programándolas de manera tal que queden libres y a elección de los alumnos, es decir, las presentamos de tal forma que ellos decidan cómo proceder, pero retroalimentando sus actividades mediante una representación gráfica de las cantidades que están considerando.

Dentro de estas actividades incluimos explícitamente formatos de algoritmos ABN para efectuar operaciones aditivas-sustractivas. En realidad una parte importante de la plataforma es la presentación de estos formatos, los cuales también programamos de manera tal que son fieles a las descripciones del párrafo anterior.

Haciendo estas actividades en la plataforma digital esperamos que los alumnos también desarrollen en mayor medida sus habilidades de cálculo mental y la estimación, tal como lo argumentan Albase et al. (2016) en sus conclusiones, e incluso el mismo autor del método, con lo que nuevamente estaríamos ganando ventaja sobre los resultados de los algoritmos usuales.

Elementos importantes de la plataforma que favorecen presentar el contenido ABN

Hasta ahora hemos hablado de tomar con importancia, en la estructura y planeación de la plataforma y su contenido, el uso de material (digital) que sea manipulable por los

estudiantes y que estos materiales concretos tengan significado, es decir, que representen aspectos y pasos abstractos de los algoritmos ABN pero ya de forma concreta.

Para lograr esto anterior, de forma tal que también las actividades de la plataforma puedan contribuir con el desarrollo de los alumnos de la memoria visoespacial, aprovechamos el registro de representación gráfica que podemos generar con imágenes y diagramas interactivos en el medio digital.

También tomamos en consideración el registro de representación simbólica de las cantidades usadas en los algoritmos y al registro de representación gráfica, a través de los cuales estaremos dando retroalimentación inmediata a los estudiantes, una característica importante que nos permite este medio digital.

De igual manera este medio digital nos permite, a nosotros como profesores y a los mismos estudiantes, dar seguimiento al proceso de creación y ejercitación de algoritmos ABN. Pues, como la retroalimentación se puede dar de manera inmediata en este medio digital, los alumnos tienen la posibilidad de autoevaluar sus algoritmos ABN creados.

En realidad, en nuestra propuesta nos aprovechamos de esa retroalimentación inmediata que el medio ofrece y programamos, sin caer en lo mayéutico, respuestas, mensajes, indicaciones, etc., que guían al alumno en su aprendizaje y práctica de los algoritmos ABN.

Podemos ver toda esa retroalimentación, uso de la representación gráfica y simbólica y demás características que consideramos importantes de la plataforma digital, y de las cuales echamos mano, en las descripciones que hacemos más adelante de los dos ejes de la plataforma.

[Propuestas de aprendizaje de algoritmos ABN consideradas en el contenido de la plataforma](#)

Ya que hemos hablado de todas esas características que nos ofrece un medio digital, y las hemos identificado para ser consideradas en la implementación de nuestra plataforma web y en el contenido de los algoritmos ABN en sí mismos, es importante pasar a los trabajos en los que se presentan propuestas formales de secuencias didácticas y propuestas de

intervención para los algoritmos ABN, de los cuales obtenemos las ideas que nos parecen ser las más correctas para mostrar nuestro contenido, pues previamente han sido estudiadas.

En este proyecto fue relevante preocuparnos por el contenido ABN, es decir, no solo tuvimos la intención de mostrar contenido aislado que nos pareció adecuado, sino que indagamos en propuestas ya bien estudiadas e implementadas para el aprendizaje de los algoritmos ABN, para basarnos en esos estudios confiables y tomarlos como fuente principal del contenido ABN que incluimos en la plataforma digital.

Aquí cabe notar, que estas propuestas para el aprendizaje de algoritmos aritméticos ABN están planteadas desde su creación para implementarse de manera tradicional, es decir, frente a grupo en aulas de clases con pizarrones y lápiz y papel. En realidad, en la literatura los autores poco se preocupan por el medio en que muestran sus propuestas de aprendizaje usando la metodología ABN.

Y nuestra intención, al llevarlas a la plataforma, no fue simplemente hacer una copia de lo que ya se hace, pero ahora en un medio digital, pues estamos bien conscientes de que eso no es correcto, por tal razón, lo que hicimos, y podemos ver en las secciones anteriores, fue un estudio profundo para conocer cuáles son las características esenciales de la metodología ABN y plantearnos cómo implementarla de acuerdo con las ventajas que nos ofrece un medio digital.

Entonces, nos preocupamos por hacer una descripción detallada de estas propuestas de aprendizaje de la metodología ABN y en las secciones posteriores del capítulo veremos cómo es que las implementamos como parte principal del contenido ABN que presentamos en la plataforma web.

Una de las propuestas que adoptamos en el proyecto es el trabajo de Espinosa (2015), el cual está pensado para el primer curso de primaria, sin embargo, por las características de la metodología ABN, la intención es que la información puede ser tratada en cualquier nivel educativo. Por eso, resulta importante considerarlo desde el primer curso. Poniendo

énfasis que nuestra plataforma está dirigida a estudiantes de preescolar y de los 3 primeros años de la primaria.

Otro estudio tomado en cuenta es la propuesta de intervención de Mato (2015), cuyo estudio está más orientado a niños de preescolar, y a nosotros nos otorga ejemplos de actividades previas a los algoritmos ABN que debemos tomar en cuenta para desarrollar las habilidades necesarias de esta metodología.

Trabajo de Espinosa (2015) y Mato (2015)

Espinosa (2015, pp. 20-38) creó una secuencia de contenidos que se debe seguir a lo largo de un curso educativo completo, el autor también dice que la secuencia se debe desarrollar combinando los diferentes apartados de un modo progresivo. Esta secuencia contiene los siguientes apartados que serán explicados con base en lo que se expone en su trabajo:

- Numeración

Para trabajar con la numeración es muy importante la práctica del conteo y justo en la numeración es el momento idóneo para aprender los nombres de las decenas y familias de decenas. Las que se consiguen a partir de la agrupación de elementos unidad contando y haciendo la respectiva transformación a la nueva entidad llamada “decena” cuando se hayan agrupado 10 elementos.

Lo que propone Espinosa (2015, p. 21) es que mediante palillos de dientes se agrupen elementos de 1 en 1, 5 en 5, etc., y se cuenten los palillos agrupados en familias de diez, es decir, las decenas 10, 20, 30, etc., lo ideal es que los alumnos logren identificar los números, más que las cifras, para que les encuentren sentido dentro del sistema de numeración decimal.

Es algo curioso que justo estas ideas, pero más desarrolladas, las vemos en el trabajo de Fernández (2005), en el cual este autor propone más exhaustivamente que los alumnos deben aprender, antes de dominar las decenas, todos los posibles sumandos de números enteros 0-9 que forman al 10. E ir progresando para ahora componer diferentes decenas, es decir, que los alumnos sean capaces de reconocer y proponer diferentes sumas que nos arrojen 30, 40, etc.

Esas ideas de Fernández no las haremos explícitas en este trabajo pero nos muestran detalladamente como podemos progresar en la enseñanza del sistema de numeración desde unidades, decenas, centenas hasta millares y generalizar. De este modo podemos sentar las bases en los alumnos de uno de los fundamentos del método ABN: el conocimiento profundo del sistema de numeración.

También es importante notar que detrás de estas ideas se encuentra la intención de que los alumnos se apropien de diferentes estrategias y técnicas para el aprendizaje y manejo del sistema de numeración decimal y que empiecen a darle sentido a los cálculos que están haciendo (Espinosa, 2015).

- Composición y descomposición de números

Esos procesos son parte fundamental de los algoritmos ABN y este autor hace una propuesta en la que ejemplifica diversas técnicas a través de las cuales los alumnos pueden descomponer números. Siendo importante hacer estas actividades de forma ascendente, comenzando con números básicos y después con familias de decenas y centenas.

Lo que nuevamente se empata con las ideas de Fernández (2005) al indicar que los alumnos pueden trabajar con decenas hasta que se tenga un completo dominio de separar números naturales menores a la decena en sus posibles sumandos.

Dentro de las actividades que propone el autor se encuentra “el árbol de los números” en el que se representa una especie de árbol genealógico de un número abuelo que contiene dos hijos (padres) y cada hijo (padre) a su vez tiene dos hijos (nietos). La idea es poner un número natural, en el ejemplo que da el autor es el 47 como número abuelo, y el alumno puede separar de manera libre en dos hijos que son 40 y 7, a su vez el 40 tiene dos hijos 20 y 20, y el 7 tiene como hijos 6 y 1.

Podemos notar inmediatamente que lo que se encuentran usando los estudiantes son números y no cifras, así también estos procesos de sumas implícitas están siendo libres y transparentes en todo momento.

Sin embargo, estas actividades están siendo llevadas a cabo con lápiz y papel o en el pizarrón, medio en el que se está limitando la retroalimentación al estudiante, pues si bien es cierto que existe un control, debido a la jerarquía, de las cantidades que está considerando el estudiante, yo creo fervientemente que hay aspectos aún ocultos en ese proceso, o falta de retroalimentación que ayude a los estudiantes a autoevaluarse.

Con esto último, me refiero a que en los procesos de composición y descomposición tener un registro de representación gráfica podría contribuir rotundamente a la estimación. Por ejemplo, la cantidad completa original podría representar la capacidad total de un contenedor vacío y al momento de que el alumno vaya descomponiendo las cantidades, en cada nivel de padres e hijos, este contenedor dinámicamente se esté llenando. ¿Quién nos puede asegurar que todos los alumnos descomponen de manera correcta?

Con lo que los estudiantes, aparte de tener dos registro de representación que sirven de retroalimentación, también estarían llevando a cabo ambos procesos: la descomposición y composición al mismo tiempo, lo que hace que este ejercicio sea más nutritivo para los alumnos con el simple hecho de cambiar el medio en el que se les muestra.

- La adición

El autor nos dice que la adición debe comenzar mediante la manipulación de objetos, en lo que principalmente sale a relucir el conteo, el cual creemos que de manera natural se trata en nuestra plataforma, en las actividades correspondientes al primer eje, tal como podemos apreciar en las siguientes secciones.

En esta sección, está descrito el uso de una tabla para sumar, que en realidad es propuesta por el mismo creador del método, la cual debe ser llenada por los alumnos en un proceso de tres fases. En la primera fase suman dos cantidades de números naturales que van del uno al cinco y se tiene reportado que las sumas las

hacen los alumnos sin problemas por subitización, es decir inmediatamente reconocen las cantidades y su suma.

En la segunda fase, deben sumar dos cantidades pero de las cuales una va desde el uno hasta el diez, es decir, el resultado da cantidades con decenas. La técnica propuesta es que el alumno guarde en su cabeza el sumando mayor y que le sume con los dedos el sumando menor. Por ejemplo, la suma $8 + 4$, en su cabeza guarda el 8 y suma con los dedos 4 comenzando a contar a partir del 8: 9, 10, 11 y 12, rápidamente dominan estas sumas (Espinosa, 2015).

En la tercera fase ambas cantidades son mayores a 5, es decir, son enteros entre 6 y 10. La técnica que proponen es que comiencen los estudiantes a trabajar en parejas, donde cada estudiante representa con sus diez dedos la cantidad necesaria. Por ejemplo, $6+9$, el primer estudiante levanta 6 dedos y el segundo 9, haciéndoles ver que no es necesario contar las manos con dedos totalmente levantados pues tienen físicamente 10 dedos, el primer alumno cuenta el único dedo que tiene levantado: 11 y continua el segundo: 12, 13, 14 y 15.

Posteriormente los alumnos automatizan este proceso e individualmente pueden efectuar la suma, por ejemplo $7+9$, suponen dos manos completamente levantadas y en efecto tienen 10. Ahora cuentan 2 más que corresponden al 7: 11 y 12, y finalmente 4 que corresponden al 9: 13, 14, 15, 16.

Nos menciona Espinosa (2015, p. 26) que el propio autor del método asegura que este proceso es rápido y entendible sin dificultad para los niños estudiantes y que con este pueden afrontar sin inseguridades adiciones y sustracciones.

- Los dobles y las mitades

Pasadas las etapas previas de la secuencia se hacen relevantes actividades donde se usen dobles y mitades. Los estudiantes aprenden rápidamente la adición de dígitos repetidos y mitades sin problemas (Espinosa, 2015) por lo que no recomiendan actividades específicas.

Finalmente, estas acciones con mitades y dobles son la iniciación de la multiplicación y división.

- Complementarios del 10

Como fue mencionado en la etapa del sistema de numeración, las ideas de Espinosa (2015) comparten ciertos rasgos con las que describe Fernández (2005). Sobre todo el hecho de que es necesario que los alumnos dominen de forma eficiente las posibles sumas de números entre 0 y 9 que den 10.

Es importante que los alumnos dominen estas tres tareas: las sumas de los complementarios a 10, dado un número menor de 10, decir qué falta para llegar a 10 y dado el número 10 decir qué número queda si se quita uno más pequeño de 10 (Espinosa, 2015). Sin embargo, como única recomendación didáctica es crear una lista donde se considere al 9 como el número 10 que se le ha quitado 1, al 8 como el número 10 que se le han quitado 2, etc.

Lo que si resulta más interesante en esta sección, es que el autor considera que antes de pasar a adiciones formales del método ABN es importante que también se dominen las adiciones dentro de un modelo que llaman tabla 100. Se trata de una tabla de 10 filas y columnas en las que se enumeran los elementos de la tabla del 0 al 99.

Y el autor propone una estrategia a seguir para su actividad con la tabla, la cual ya cuenta con cierto orden y se describe a continuación. Siendo la idea principal posicionarse en la casilla que indica la primera cantidad, por ejemplo 42, y desplazarse tantas casillas indique la segunda cantidad, por ejemplo 2: 43 y 44.

El primer paso es considerar sumas que no cambien de filas, como la anterior $42+2$, que no cambia de la cuarta fila, otro ejemplo es $12+7$ que no cambia de la segunda fila. Es decir, que el alumno no se desplazará más allá de la décima columna de la fila donde se encuentre.

En el segundo paso, se consideran ambas cantidades como decenas completas, por ejemplo $20+30$, o una cantidad como decena incompleta, $55+40$. Y surgen

enunciados como: “he partido del número 38 y llegado al 58, ¿Cuántas decenas avance?”

El tercer paso implica sumas que no tienen “llevadas” o sea que no consideran acarreo, por ejemplo: $14+35$ o $22+47$. La propuesta que nos da el autor es continuar con el uso de la tabla primero sumando las decenas (hacia abajo) y después las unidades desplazando el conteo hacia la derecha.

Finalmente, en el cuarto paso ya se consideran sumas que implícitamente contienen el acarreo, por ejemplo la que da el autor: $16+9$. En su estrategia de la tabla estas sumas implican un salto de línea y la manera más rápida de hacerlas es descomponer las cantidades de forma tal que queden como complemento a 10 y añadir el resto, por ejemplo: $16+9 = 11+9+5 = 20+5=25$ (Espinosa, 2015).

Detrás de estas actividades ya se encuentra la compensación de los métodos ABN y nos dice el autor que es importante que se continúen con estos ejercicios para seguir potenciando estas características. Nos da ejemplos explícitos de ejercicios para redondeos, compensaciones y familias de adiciones.

- La sustracción

Con respecto a la sustracción, nos describe el autor en esta sección de la secuencia didáctica, que la dificultad con los algoritmos incrementa para los alumnos, pues existen cuatro tipos de formatos de sustracción que a continuación se describen de acuerdo con esta propuesta didáctica que estamos analizando.

Es importante aclarar que describimos todos los formatos que nos presenta el autor porque adoptamos algunos y los incluimos en la plataforma digital, programándolos de manera especial para que cumplan con los objetivos originales del aprendizaje de la aritmética. Y en general, como ya hemos mencionado antes, buscamos plasmar los formatos en la plataforma digital para que ahí los estudiantes los usen.

Detracción: De una determinada cantidad se quita otra cantidad y se cuenta lo que queda. Como ejemplo Espinosa (2015) nos propone el siguiente enunciado: “En una tienda hay 476 zapatos, el martes se vendieron 259, ¿Cuántos zapatos quedan para

el miércoles?. Y los alumnos proceden en un formato de tabla que tiene por columnas: “quito”, “quedan por quitar” y “restan”.

En la primera columna el alumno debe representar la cantidad que por sí mismo decide ir quitando del sustraendo y del minuendo y en la segunda y la tercera columna se reflejan respectivamente éstos sustraendo y minuendo. De forma tal que, al quedar cero en el sustraendo, la cantidad que haya quedado en el minuendo es el valor de la sustracción. Podemos darnos cuenta de que este algoritmo funciona porque si quitamos la misma cantidad a dos valores distintos la diferencia entre estos valores sigue siendo la misma.

Escalera ascendente: el alumno debe partir de una determinada cantidad a la que hay que añadir valores para llegar a otra. La propuesta del autor también es construir una tabla en cuya primera columna los alumnos ponen a elección la cantidad que van a añadir al sustraendo de la sustracción, de forma tal que van añadiendo cantidades que se escriben en la segunda columna hasta que lleguen al valor del minuendo.

Finalmente, sumando todos esos valores añadidos tenemos esta diferencia entre un valor y el otro o también podemos decir que tenemos “cuanto añadimos a uno para alcanzar al otro”. Y es importante notar que en estos procesos los alumnos hacen en su mente combinaciones para encontrar decenas o centenas completas y seguir llevando a cabo el algoritmo, sin necesidad de recurrir al clásico préstamo del algoritmo usual (Espinosa, 2015).

Escalera descendente: Es un formato contrario al de la escalera ascendente, en el cual los alumnos parten de una cantidad a la que se le va quitando valores hasta llegar a otra cantidad. Se organiza también en una tabla en la cual en su primera columna se encuentran las cantidades que se le quitarán al minuendo, el proceder depende del alumno, y en la segunda columna se encuentra la actualización de la cantidad original ya considerando lo que le fue quitado.

Comparación: Aparecen problemas cuando se deben comparar dos cantidades que no necesariamente son conocidas. El ejemplo del autor es: “Salvador tiene 15 juguetes y su primo 4 menos que él, ¿Cuántos juguetes tiene su primo?”

Para proceder en estos problemas se debe hacer una tabla de tres columnas. En la primera se ve reflejada la cantidad que el alumno decide quitar al minuendo y en la segunda y tercera columna respectivamente se coloca el resultado de quitarle ese valor al minuendo y al sustraendo. Evidentemente cuando se llegue a cero en el valor del sustraendo podemos ver en el valor del minuendo la diferencia que existía. Así como ocurrió con la adición, el autor afirma que se debe seguir una secuencia en la presentación de los ejercicios, digamos que debemos estudiar estas sustracciones en orden ascendente de dificultad. De igual manera, recomienda comenzar con restas, de números complementarios a 10. Continuar con decenas completas menos decenas completas y seguir con decenas incompletas menos decenas completas. Así como poner atención a decenas completas menos unidades.

Ya que se tengan dominados y ejercitados los casos anteriores, proceder con las centenas completas, centenas incompletas menos centenas completas, centenas completas menos centenas con decenas, restas entre centenas con decenas, centenas completas menos centenas incompletas y sustracciones entre centenas incompletas.

Finalmente, también encontramos ejercicios explícitos, todos a lápiz y papel en los formatos de tablas previamente mencionados, que son propuestos para potenciar las destrezas de compensación de los algoritmos ABN.

- Operaciones compuestas

Encontramos en esta sección una descripción de las operaciones compuestas que se pueden hacer, esto es, que con los algoritmos ABN podemos considerar dos operaciones en el mismo procedimiento. Podemos sumar dos cantidades a una cantidad inicial y también podemos hacer una adición y una sustracción en el mismo

proceso. Todo consiste en agregar una columna a la tabla donde primero se considerarán las operaciones de la primera suma y posteriormente las de la segunda.

O como bien vemos en esta referencia, primero efectúan la operación entre los valores, ya sea suma o resta, y posteriormente se añade este resultado a la cantidad principal. Lo que nos parece interesante es que al trabajar con números en el algoritmo siempre estamos al tanto de las cantidades de manera holística, podemos percatarnos cuando se ha sumado completamente una cantidad o cuando ha sido restada.

- La resolución de problemas

En el método de los algoritmos ABN, la metodología tiene un cambio significativo porque los problemas no se consideran en una sección aparte de la correspondiente a las propias operaciones aritméticas. La forma de enseñar es que el docente propone un algoritmo específico y el alumno es el que tiene que poner un enunciado a esa operación. Es decir, que se deben resolver problemas con cada algoritmo u operación en el método ABN (Espinosa, 2015).

- Iniciación de la multiplicación

Tal como previamente el autor comentó, se podría introducir la multiplicación mediante dobles y mitades, recordando que con dobles se refiere a la adición de un número más este mismo número y mitades a la identificación de dos números iguales que componen a otro. En realidad, en esta secuencia didáctica, la multiplicación se introduce en el segundo curso de la primaria pero, el mismo autor, comenta que sería interesante que niños más pequeños empiecen a enfrentarse con estas ideas.

Después de esa introducción con dobles y mitades, que en principio resultan ser fáciles para los niños de estas edades (Espinosa, 2015), el autor recomienda las

series de cinco que en realidad es la tabla del cinco, al que podríamos asociar un enunciado como el siguiente: “Si tenemos 15 lápices, cuántas manos serían”. Finalmente, el autor propone enseñarles a los niños las primeras tablas de multiplicar usando sus dedos, pero de manera lúdica, ya no recurriendo a la memorización sin sentido.

En los párrafos anteriores se describió la secuencia didáctica que propone Espinosa (2015), nosotros la consideramos en la creación de los dos ejes de la plataforma digital para mostrar, en las primeras experiencias de los estudiantes, los algoritmos ABN y cómo es que se usa en este método para el caso de adiciones y sustracciones.

Tomamos en cuenta gran parte de las ideas de las propuestas de Espinosa (2015), como lo vemos en las descripciones de nuestras actividades, sobre todo se volvieron relevantes las ideas de los apartados de Numeración (pp. 20-22) y Composición y Descomposición (pp. 22-24) para el primer eje de la plataforma. Y los apartados de Suma (pp. 24-31) y Resta (pp. 31-35) para el segundo eje de la plataforma.

También en el segundo eje utilizamos los formatos de la secuencia didáctica, específicamente los formatos de detracción, escalera ascendente y escalera descendente (Espinosa, 2015, pp. 31-33), los cuales programamos con el debido cuidado y considerando los aspectos mencionados en las secciones anteriores para lograr implementarlos en el contexto de la plataforma y con las ventajas que esto conlleva.

Existe otro trabajo de Mato (2015), en el que la autora propone una intervención didáctica constituida por tres actividades, las cuales están totalmente orientadas a dos contenidos principales del método ABN: la decena y principalmente conocer los números complementarios del 10.

En este sentido la intervención didáctica de Mato está diseñada para niños aún menores, en realidad habla en su estudio de niños con edades entre 4 y 5 años, es decir de preescolar. Es interesante esto, pues las primeras ideas previamente presentadas por Espinosa (2015), dirigidas a niños de 6 y 7 años, se empatan con las ideas de Mato (2015).

De lo que podemos notar que efectivamente los algoritmos ABN son versátiles en cuestión de que alumnos de diversas edades los puedan estudiar y también que la estructura para introducir el método ABN que nos presenta Espinosa (2015, pp. 20-38) está bastante organizada, completa y es una buena referencia para la creación de nuestro primer eje de la plataforma digital. Y aunque no hacemos explícitas las actividades de la propuesta de Mato (2015), también tomamos algunas ideas para implementar ejercicios del método ABN, tal como lo podemos ver en la sección del segundo eje de la plataforma.

Primer eje de la plataforma

Nos ocupamos del primer eje de la plataforma digital, que es la introducción a las primeras experiencias de los alumnos con los algoritmos ABN, en las cuales son fundamentales las dos propuestas de aprendizaje de algoritmos previamente descritas.

La intención de este primer eje es fungir como etapa introductoria de los algoritmos ABN, lo que hacemos a través de varias actividades cuidadosamente seleccionadas de las propuestas didácticas anteriores, las cuales enfocamos a desarrollar las habilidades necesarias para la metodología ABN, por ejemplo: el conteo, la subitización, el uso de los complementos a 10 y 100, etc., en el contexto que nos ofrece la plataforma digital.

Cabe mencionar que en las propuestas alternativas, que hemos estudiado en el capítulo de los antecedentes, encontramos que las plataformas web, sobre todo Smartick.es y ALOHA Mental Arithmetic, han puesto en funcionamiento, de manera digital, actividades parecidas a las que nosotros implementamos en esta sección, pues ellos tienen la finalidad muy específica de desarrollar esas habilidades, sobre todo, aquellas que favorecen el cálculo mental.

Y este hecho empata, en cierta medida, con la finalidad de nuestro primer eje pues desarrollar esas habilidades que impulsan el cálculo mental, el conteo, conocimiento del sistema decimal, etc., es importante en nuestra introducción a la metodología ABN. Por lo cual, empleamos estas actividades aisladas que desarrollan específicamente dichas habilidades, tal como lo hacen esas propuestas estudiadas en los antecedentes.

Sin embargo, en nuestra plataforma resalta el hecho de que hemos considerado la programación de los formatos para efectuar los algoritmos ABN de manera concreta. Es decir, sí, estamos creando una plataforma específicamente para desarrollar algoritmos ABN, sobre todo en el segundo eje de la plataforma, pero la cuarta actividad de este eje tiene la finalidad de presentar una introducción a los formatos de los algoritmos ABN para la resta y para la suma; hasta esta entrega de la plataforma hemos considerado 2 formatos para la sustracción ABN y uno para la adición ABN.

Y precisamente, después de indagar arduamente, no encontramos un desarrollo digital que incluya el uso completo de los algoritmos ABN y sus formatos, mucho menos que estos se vuelvan primordiales en el medio digital, simplemente se limitan a las actividades aisladas para desarrollar determinadas habilidades que ya mencionamos previamente. Es decir, ninguno de los proyectos que indagamos contempla el diseño de una propuesta para mostrar contenido de la metodología ABN en un medio digital.

A continuación explicamos cada una de las actividades que hasta ahora proponemos, en el primer eje de nuestra plataforma digital. Describimos la actividad en sí misma, el contenido matemático y algorítmico que implica la actividad y las características interesantes que aparecen por la implementación en el medio digital.

Actividad 1: Portamonedas

Se trata de una actividad en la que presentamos conjuntos de monedas; cada moneda tiene valor 1, estos conjuntos van de 1 moneda a 10 monedas, adyacente a estos conjuntos mostramos un contenedor tipo “marimba” portadora de monedas y contiguamente hay una sección en la que se muestra la retroalimentación simbólica de las adiciones que van haciendo los estudiantes.

La idea es que gráfica o simbólicamente conciban la noción de la cantidad que les indica el número de monedas que caben en el portamonedas y, como la instrucción es llenar ese portamonedas, deben arrastrar dos conjuntos que consideren adecuados hasta el contenedor de manera tal que la suma de las monedas lo llene y se estarán actualizando

tanto el contenedor con las monedas indicadas por los estudiantes, así como el registro simbólico que representa la adición hecha por el alumno.

Dentro de la retroalimentación simbólica el estudiante puede dar clic sobre los números que indican las monedas que añadió, lo que le permitirá saber las descomposiciones de dichos números en números naturales menores a este, pues resulta importante que los niños sepan descomposiciones y se entrenen en establecer relaciones con otras descomposiciones (Fernández, 2005, p. 39). Entonces, trabajar con las primeras descomposiciones de los números naturales es un objetivo de la actividad, lo cual es muy importante, de acuerdo con lo previamente estudiado para desarrollar algoritmos ABN.

Por lo cual, diseñamos la actividad en dos partes, una en la que se incluyen conjuntos de 1 a 5 monedas y otra más compleja que comprende conjuntos de 1 a 10 monedas. Pues, recordando los trabajos de Fernández (2005, pp. 39-41) y Espinoza (2015, p. 20), resulta de gran importancia mostrar estos contenidos de manera progresiva de forma tal que los estudiantes vayan usando el conteo y diversas descomposiciones paulatinamente, primero considerando del 1 al 5 y posteriormente a 10.

Se trata de una actividad de creación propia que originalmente fue pensada para desarrollar habilidades sobre conteo y descomposición de los primeros números naturales en los estudiantes, está dirigida a quienes se encuentren interactuando con estos temas, sin embargo, como hemos mencionado previamente, cualquier alumno puede hacerla, tanto para sus primeras experiencias en la plataforma, como para ejercitarse.

Podemos notar claramente las ventajas de contar con la representación gráfica de este medio digital, pues el alumno puede contar las monedas de las imágenes y las del contenedor, y al interactuar con el medio se estarán actualizando los cambios dinámicamente y éstos pueden ser fácilmente percibidos, motivando así, un nuevo conteo de monedas faltantes. Por ejemplo, si el alumno ha agregado 3 monedas obtiene ayuda inmediata de la retroalimentación gráfica donde puede llevar a cabo un conteo de las 2 faltantes, como lo podemos ver en la Figura 10.

[Índice](#)
[Iniciar Sesión](#)
[Primer Eje](#)
[Segundo Eje](#)

Portamonedas: Ayudanos a llenar el portamonedas con la cantidad de monedas indicada, para eso cuentas con los conjuntos de monedas que se te muestran.

Para empezar da click en los botones a continuación. Debes arrastrar y soltar solamente dos conjuntos para llenarlo. Cada moneda vale 1 unidad.

Caben 5 monedas de 1

La suma de monedas que estas agregando es:
 $3 + \underline{\quad} = 3$

Figura 10.- Actividad Portamonedas. Mostramos un ejemplo en el que se ha arrastrado el conjunto de 3 monedas y ha sido soltado sobre el contenedor. En la segunda parte se contempla un contenedor con 10 monedas.

Dicha retroalimentación es considerada a lo largo de toda la actividad, retroalimentación tanto del registro gráfico, como simbólico, y es acompañada de mensajes claves importantes para orientar a los alumnos en el resultado de sus acciones, por ejemplo, si se pasan de las monedas que puede recibir el contenedor, se les da una alerta sobre la adición de monedas, que hicieron e indicaciones de reintentar. Así también, si sueltan inmediatamente el conjunto de 5 monedas y llenan el contenedor con un solo conjunto, se les cuestiona por qué y se les pide ver la descomposición del número 5.

Actividad 2: La Tabla de 100 números

Durante el estudio de la numeración y el conteo es el momento idóneo para que los alumnos identifiquen los nombres de las decenas y de las familias de decenas. Por lo que es importante que los alumnos lleven a cabo conteos hacia delante y hacia atrás utilizando series de 1, de 2, de 5, de 10, etc. También es importante que los alumnos se habitúen a la nueva unidad de las decenas (Espinosa, 2015, p. 20).

Por lo que recurrimos a una actividad de conteo apoyados en una clásica tabla de 10 por 10 casillas en la que cada casilla representa a un número del 1 al 100. Esta tabla es presentada en la propuesta de Espinoza (2015, p. 22) y nuestra intención fue adaptarla en la plataforma digital de manera los estudiantes hagan conteos, pero más interactivos y retroalimentados, como se mostrará más adelante. Sin embargo, es importante mencionar que posteriormente encontramos que el uso de dicha tabla es bastante común, incluso la encontramos ya implementada digitalmente en Smartick (2022)¹⁹ donde precisamente la utilizan para desarrollar el conteo.

Es cierto que la finalidad que persigue dicha implementación de la Tabla y la nuestra es similar, pues en realidad tienen la misma finalidad en esa plataforma, y resaltan sobre todo las intenciones de que los alumnos utilicen el sistema de numeración decimal, puedan ubicar los números del 1 al 100 en relación con los números cercanos a éstos, se habitúen a las decenas y a los saltos de alguna decena respecto de otra, por ejemplo, cuando al 19 se le suman 2.

Todo esto lo hacen apoyados en la Tabla de 10 por 10 casillas, con la que los estudiantes adquirirán diferentes estrategias para emplear la tabla, por ejemplo, si quieren contar diez menos, entonces suben un cuadro de la Tabla, y si quieren contar 11 más, entonces bajan un cuadro y se mueven uno a la derecha (Espinoza, 2015, p. 22).

Y con el mismo desarrollo de esas estrategias y el uso en la Tabla, los alumnos van utilizando números en lugar de cifras y le encuentran sentido a los cálculos que efectúan a través de sus acciones (Espinoza, 2015, p. 22). Razón por la cual encontramos interesante programar 4 botones cuyo acción es añadir o restar una unidad o una decena al número que esté considerando el alumno y que se visualiza en la Tabla.

¹⁹ Dentro de la página principal de Smartick.es, a la que lleva el enlace de la referencia, podemos encontrar fácilmente en la parte superior la liga que lleva al Blog de la página, en dicho blog encontramos una entrada llamada “Estrategias de Cálculo Mental” en la cual podemos ver la implementación que hacen de esta Tabla.

Así que, en la actividad mostramos la Tabla con los 100 números y debajo de ésta vemos los 4 botones con su significado correspondiente de restar o sumar, ya sea una decena o una unidad. En el costado de la Tabla podemos ver otros 4 botones que nos indican las 4 partes en las que dividimos la actividad y en la parte derecha mostramos un espacio en el que se les proporcionan las instrucciones y la respectiva retroalimentación simbólica a los estudiantes, es decir, se les muestra qué se encuentran haciendo respecto a su conteo, pero en la notación usual de adiciones y sustracciones. Todo esto lo podemos apreciar en la Figura 11.

La Tabla de 100 números

Vas a practicar el conteo. Es muy importante que practiques contar de 1 en 1 y de 10 en 10.

Objetivo: Identificar correctamente a los números en la Tabla del 1 al 100.
Y contar las cantidades indicadas a partir del número original.

Da click en los botones Parte 1, 2, 3 y 4 y sigue las instrucciones.
Muevete con los botones en las diferentes direcciones para cumplir los objetivos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Parte 1
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Parte 2
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Parte 3
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	Parte 4
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

↑ Resta 10

← Resta 1

Suma 1 →

Suma 10 ↓

Con el boton Resta 1 cuenta 4 casillas menos.
¿A cuál número llegas? 38-4=¿Cuál?

Posición Original
Correcto estás en el cuadro 38

Posición Actual
Número: 34. Lo lograste, mira la operación que obtuviste

Acción
Restar columnas

Significado
Resta 1

Operación Aritmética
38 - 4 = 34
38-1-1-1-1 = 34

Figura 11.- Actividad: La Tabla de los 100 números. Ejemplo mostrando una actividad correctamente completada de la Parte 1.

En realidad, la retroalimentación de la actividad la consideramos bastante completa, pues aparte de orientar al alumno en lo que se encuentra haciendo muestra las adiciones y sustracciones que se encuentran detrás de sus conteos y a la vez mostramos la composición de todos esos “pasos” que ha dado sobre la Tabla, al manipular los botones, en la operación aritmética que se puede obtener de moverse de un número a otro.

La idea es que de entrada posicionamos al alumno en una casilla inicial y le pedimos que llegue hasta otro número, las instrucciones específicas que se le dan dependen de en qué parte de la actividad se encuentren pues, como bien fue declarado previamente, existen 4 partes de la actividad en las que se intenta que los alumnos desarrollen y practiquen distintos elementos del conteo, composición de números y conocimiento del sistema de numeración decimal.

Estas 4 partes en las que dividimos la actividad están inspiradas en los ejercicios de la propuesta de intervención educativa de Espinosa (2015, p. 21) y a continuación hacemos una descripción de cada una de estas partes:

Parte 1.- La idea es posicionar inicialmente al alumno en algún número dado y pedir que cuente un determinado número de casillas antes o después de dicho número (avanzando o retrocediendo entre columnas) sin que se rebase la decena considerada para poder efectuar una adición o una sustracción según corresponda.

Y bien es cierto que a partir de este conteo con los botones, inmediatamente se posicionará el estudiante sobre el resultado. Por ejemplo, si la posición original es 68 y se pide retroceder 3 casillas entonces el alumno llegará al 65 inmediatamente. Pero, en nuestra plataforma, hacemos explícito el hecho de que en el fondo el estudiante se encuentra llevando a cabo la operación $68-3=65$, la cual se irá actualizando automáticamente para mostrar al alumno el sentido de hacer esas acciones, tal como se muestra en la Figura 11.

Parte 2.- Con la misma filosofía de la presentación anterior, ahora lo importante son desplazamientos entre filas (subir o bajar entre filas), es decir, agregar o quitar decenas completas, con la intención de que el alumno se apropie de las ideas de nuestro sistema decimal y busque siempre pensar en base 10. Y mostramos actualizada la información de lo que van haciendo los estudiantes y de lo que sus acciones significan, es decir, de los cálculos que están efectuando.

En esta parte, también son importantes los casos particulares cuando se tratan de sumar decenas completas, es decir, 10, 20, 30, ..., etc., y el descubrimiento de las filas en preguntas

enunciadas como: Si se parte del 28 y hemos llegado al 48, ¿Cuántas decenas se han sumado? (Espinosa, 2015, p. 29).

Parte 3.- Aquí la intención es que el alumno se enfrente a conteos que superen a la decena en cuestión: $9+2$, $48+3$, $10+1$, etc., y también a restas que involucren cambios de filas: $12-5$, $63-4$, etc. Pero siempre considerando que el conteo que hará el estudiante sea menor a una decena. De igual manera se incluye la retroalimentación que se ha venido haciendo en las partes previas de la actividad.

Parte 4.- Ahora consideramos adiciones y sustracciones más generales, esto es, que el alumno lleve a cabo conteos que se vean reflejados en sumas y restas que, clásicamente, involucrarían los llamados acarreos y prestamos, por ejemplo, $74+17$, $38+49$, etc., así cuentan más de una decena y se enfrentan a notar el cambio de decenas cuando se rebasa la decena de la cual parten o, caso contrario, notan el cambio a una decena menor, por ejemplo, $71-2$, $55-7$, $92-11$, etc.

En la actividad, el alumno parte de una posición inicial a partir de la cual debe moverse sobre la tabla de 100 números, bajando o subiendo entre filas y moviéndose entre columnas, encontrando su propia estrategia, hasta llegar a una posición final que se presenta aleatoriamente sobre la misma tabla, es decir, al comenzar la actividad podrá moverse libremente en hacia las cuatro direcciones, colocado en un número aleatorio y el objetivo será llegar a otro número.

La estrategia de conteo que genero el estudiante es preservada en los rastros que van dejando sus acciones sobre la Tabla, y también en el registro simbólico que sirve de retroalimentación, en el cual también componemos todos esos “pasos” que realizó el estudiante en un único número que es añadido o restado al número original para llegar al número solicitado en la actividad. Esto lo podemos apreciar en la Figura 12, en los rastros de colores que deja la ruta ya creada y en su representación simbólica en la sección de la derecha.

La Tabla de 100 números

Vas a practicar el conteo. Es muy importante que practiques contar de 1 en 1 y de 10 en 10.

Objetivo: Identificar correctamente a los números en la Tabla del 1 al 100. Y contar las cantidades indicadas a partir del número original.

Da click en los botones Parte 1, 2, 3 y 4 y sigue las instrucciones. Muevete con los botones en las diferentes direcciones para cumplir los objetivos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Parte 1
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Parte 2
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Parte 3
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	Parte 4
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

↑ Resta 10
← Resta 1 Suma 1 →
Suma 10 ↓

"Con los botones Resta 1, Resta 10, Suma 1 y Suma 10 llega al número con marco verde"

"¿Cuánto debes sumar o restar para llegar?"

Operación Aritmética
 $43 + 10 + 10 + 10 + 10 - 1 - 1 = 81$
 $43 + 40 - 2 = 81$
 $43 + 38 = 81$

Posición Original
Correcto estás en el cuadro 43

Posición Actual
Número: 81. Lo lograste, mira la operación que obtuviste y la ruta hecha en la tabla

Acción
Restar 1

Figura 12.- Actividad: La Tabla de los 100 números. Ejemplo mostrando una actividad correctamente completada de la Parte 4.

Las ideas importantes de la retroalimentación de esta última parte son que el alumno sea consciente de sus cálculos como reflejos de sus acciones con los botones; que identifique las composiciones asociadas a cada una de las 4 acciones que hizo al contar, e identifique la composición total de su conteo dentro de una representación de una resta con el número original.

También es importante, como introducción a los algoritmos ABN, que los alumnos se desempeñen utilizando explícitamente números y no cifras por lo que en todas sus experiencias pasadas no llevan a cabo ningún préstamo o acarreo, simplemente se pueden percatar de las ideas del sistema de numeración decimal con respecto a las unidades y decenas. Es decir, el paso de una decena a otra y de una unidad a otra.

Actividad 3.- El árbol de los números – Ayudante de Laboratorio

En su apartado de "Composición y Descomposición", Espinosa (2015, pp. 22-24) presenta la propuesta de descomposición de un determinado número, en dos de sus posibles

sumandos y posteriormente cada uno de estos sumando se descompone en dos posibles sumandos más.

A nosotros nos interesó dicha actividad por la inmediata acción de descomposición de un determinado número que pueden hacer los estudiantes y, así como lo hemos estado considerando a lo largo de las actividades anteriores, al tomar en cuenta las ideas del apartado “Suma” de Espinosa (2015, pp. 24-31) podemos complementar la actividad del árbol de los números en la plataforma digital.

Esto lo hacemos mostrando a los estudiantes la composición que se puede generar de su propia descomposición como un proceso inverso, es decir, nos interesa en primera instancia dar retroalimentación a los estudiantes de la descomposición que han hecho, corroborando su propuesta, pero a la vez, haciéndolos conscientes del proceso inverso de composición de los mismos números en el número original.

Entonces planteamos la presentación de esta actividad como se muestra en la Figura 13. Consideramos el árbol de los números de ese autor con casillas a ser llenadas por los estudiantes, y son retroalimentados inmediatamente por la plataforma al mostrar dichos números de su descomposición, pero ahora sumados para obtener el número del cual provienen y una representación gráfica de lo que va haciendo el estudiante.

Cabe mencionar que, motivados por el propio espíritu de los algoritmos ABN, introducimos esta actividad en un contexto en el que el estudiante debe resolver un problema de descomposición y lo hace mediante el árbol. Se trata a grandes rasgos, de un líquido químico que debe ser distribuido en dos contenedores, de capacidades que elige el estudiante, y posteriormente para transportarse debe distribuirse nuevamente en dos contenedores más pequeños. De esta manera buscamos que los alumnos le encuentren sentido a los cálculos que están efectuando.

El árbol de los números - Ayudante de Laboratorio

Objetivo: Al darle click en comenzar te aparecerá un número que indica cuantos mililitros de líquido químico debes llevar para tu experimento, para hacerlo debes distribuir esa cantidad en dos contenedores

¿Cuántos mililitros le deben caber a cada contenedor para que juntes esa cantidad del químico?. Verifica si estas considerando correctamente las capacidades de los contenedores en la sección derecha.

Consumo de sustancia química

$32+20=52$

Correcto, distribuiste bien los 52 mililitros de químico necesarios en contenedores de las capacidades que especificaste. Prosigue con la segunda distribución en contenedores más pequeños

$12+20=32$

Correcto, distribuiste bien los 32 mililitros de químico del primer contenedor en contenedores más pequeños de las capacidades que especificaste

$10+ \dots = 10$

Vas bien, ¿Cuántos mililitros de químico deben caber en tu otro contenedor?

Figura 13.- Actividad: El árbol de los números. Mostramos un ejemplo de una actividad a punto de concluirse.

Así, en la plataforma tienen la posibilidad de controlar y corroborar sus descomposiciones y composiciones mediante un registro de representación gráfica, acorde al contexto tratado, que estará indicando dinámicamente la situación de los números que vayan colocando en las casillas, esto es, indicará a los alumnos si van estimando bien o si están fallando en su estimación. Aunado a que esta retroalimentación muestra el proceso inverso de su descomposición, planteándola como una adición con la que se llega al número original.

Esta actividad, según Espinosa (2015, p. 24), la debemos tratar por medio de un proceso ascendente, comenzando por los números básicos, después las familias de las decenas y posteriormente las centenas, etc. Si bien, esto lo podemos hacer de manera sencilla en nuestra implementación, nosotros consideramos dejar números aleatorios entre 10 y 100 para que los alumnos puedan practicar estas descomposiciones con el fin de ejercitarse y

que aleatoriamente se enfrenten a problemas de descomponer decenas completas e incompletas.

Actividad 4.- Restas y Sumas sin prestamos ni llevadas

“En el algoritmo ABN no existen llevadas, el alumnado que trabaja con el método ABN realiza en su mente combinaciones para encontrar la decena o la centena completa, y a partir de ahí, seguir realizando el algoritmo” (Espinosa, 2015, p. 33). Por lo que son importantes las estrategias de completación a la decena y compensación que se pueden desarrollar con ayuda de estas actividades introductorias del primer eje de la plataforma.

Y más aún, es importante ya considerar propiamente formatos de algoritmos ABN para hacer adiciones y sustracciones, tanto para que los alumnos los vayan conociendo como para que vayan aplicando las estrategias antes mencionadas en dichos formatos.

Por lo que en esta última actividad del primer eje de la plataforma presentamos 3 formatos propios de algoritmos ABN, dos para la sustracción y uno para la adición, la implementación digital de estos formatos de algoritmos aritméticos ABN es lo que distingue a nuestra propuesta de las encontradas en la literatura y en los desarrollos digitales. Y dichos formatos los hemos obtenido de la propuesta de Espinosa (2015, pp. 24-37), en la cual podemos ver la secuencia formal para presentar estos contenidos que propone el autor.

Si bien es muy importante esta secuencia, pues como lo aclaramos al inicio esta intervención didáctica está pensada para llevarse a cabo de manera progresiva, en esta actividad introductoria optamos por continuar en la dirección en la cual se han propuesto las primeras actividades, o sea que, estaremos utilizando sustracciones y adiciones con números de dos dígitos de forma tal que todas las cantidades utilizadas se encuentran entre el número 10 y el número 99.

Es decir, en las actividades que propone Espinosa (2015, pp. 24-37) notamos que comienzan con sustracciones y adiciones tales que sus operaciones entre dígitos no rebasen o bajen de la decena, por ejemplo: $54+11$, $33+35$ y $56-52$ y $95-34$. Y después continúan operando, pero ahora con cantidades cuyos dígitos correspondientes a las

unidades rebasen a la decena, por ejemplo: $54+17$ y $33+39$, y también tratan con restas del tipo: $56-19$ y $75-56$.

En nuestra propuesta, y en esta entrega de la plataforma, no hacemos distinción de estos hechos, pues esperamos que igualmente los alumnos tomen estos primeros contactos con los algoritmos ABN para explorarlos y analizar el funcionamiento de los formatos, de manera la plataforma muestra de manera aleatoria problemas que impliquen y no impliquen las clásicas llevadas y préstamos.

Así los estudiantes se podrán estar enfrentando a los retos donde surgen las llevadas y préstamos de los algoritmos clásicos, pero los estarán afrontando con las ventajas que implica la metodología ABN. Recordando que en la metodología ABN se evitan esos recursos clásicos optando por que los alumnos piensen en la composición y descomposición de los números involucrados, trabajando con unidades y decenas completas y considerando a los números con más significado, donde sale a colación el sentido de cantidad que implica un número en un contexto dado.

A continuación describiremos nuestra propuesta comenzando con lo correspondiente a la sustracción y posteriormente a la adición, donde cabe notar que en esta actividad adaptamos el uso de los formatos de los algoritmos ABN dentro de un contexto para cada uno.

En cada caso se trata de resolver un problema, cuyos datos numéricos son aleatorios, se conserva el problema y cambian los datos. Para resolverlo se debe efectuar una operación aritmética mediante el formato del algoritmo ABN correspondiente. A diferencia de las actividades que mostraremos en el segundo eje, la retroalimentación para el alumno, en esta actividad, está orientada a los propios formatos, pues recordemos que la intención de esta actividad es introducirlos, y tiene como objetivo que el alumno sea consciente del uso del formato y lo que significa dicho uso con respecto a la notación usual de adición y sustracción.

Entonces mostramos, en cada caso, el problema específico a resolver, el formato ABN para que los estudiantes desarrollen sus propios algoritmos y un registro simbólico en el que podrán ver su algoritmo creado, la composición de los números que van considerando y la operación aritmética usualmente escrita con el resultado que ellos mismos van generando.

Sustracciones: En su propuesta Espinosa (2015, pp. 31-35) nos presenta cuatro diferentes formatos a través de los cuales se puede desarrollar el algoritmo de la resta. Sin embargo, para estas actividades introductorias consideramos relevantes el segundo y tercer formato: Escalera Ascendente y Escalera Descendente, pues resultan complementarios y nos parecen los más adecuados para que los alumnos empiecen a desarrollar las estrategias que necesitan en esta metodología.

El formato de la escalera ascendente lo podemos ver en la Tabla de la Figura 14, en la que se muestra en su encabezado la sustracción que debe efectuar y se trata de añadir al sustraendo una determinada cantidad que el estudiante decida, y que va colocado en la primera columna, dicha cantidad tiene la finalidad de ser añadida al sustraendo hasta igualar al minuendo, lo que en nuestra implementación vamos haciendo automáticamente y se muestra la suma total y retroalimentación correspondiente a los estudiantes.

Escalera Ascendente: Debes partir del número menor de la resta (sustraendo) y añadir las cantidades que consideres adecuadas hasta igualar al número mayor de la resta (minuendo). ^

Una bandeja de papel de una impresora tiene 46 hojas blancas al inicio del día. Los empleados de la oficina le agregaron algunas hojas y al final del día la bandeja cuenta con 91 hojas blancas. ¿Cuántas hojas le han agregado?

91 - 46	
Añado	Llego a
Hojas 5	51
Hojas 9	60
Hojas 10	70
Hojas

Hojas que vas agregando a la bandeja:

$$46 + 5 + 9 + 10 = 70$$

$$46 + 24 = 70$$

Añadir fila

Figura 14.- Escalera Ascendente. Podemos apreciar la actividad en la cual desarrollamos un ejemplo de resta ABN con el formato llamado escalera ascendente.

El formato de la escalera descendente lo podemos ver en la Tabla de la Figura 15; en la que se trata de quitar términos del minuendo hasta que se iguale con el sustraendo y al sumar esos términos quitados el alumno consigue el valor de la resta a la que se debe llegar.

Escalera Descendente: Debes partir del número mayor de la resta (minuendo) y quitar/consumir las cantidades que consideres adecuadas hasta igualar al número menor de la resta (sustraendo).

Al inicio del día la bandeja de papel de una impresora tiene 62 hojas blancas. Los empleados de la oficina usaron varias veces la impresora, al terminar el día la bandeja cuenta con 42 hojas blancas. ¿Cuántas hojas consumieron los empleados?

62 - 42	
Consumo	Llego a
Hojas 2	60
Hojas 10	50
Hojas 8	42

Hojas que vas agregando a la bandeja:
 $62 - 2 - 10 - 8 = 42$
 $62 - 20 = 42$

Bien hecho. Comenzar

Figura 15.- Escalera Descendente. Podemos apreciar la actividad en la cual desarrollamos un ejemplo de resta ABN con el formato llamado escalera descendente.

De igual manera en esta actividad nuestra implementación permite una retroalimentación dentro del mismo formato, guiando a los alumnos en la descomposición deseada del minuendo y retroalimentándolos con la suma que nos da la diferencia entre el minuendo y el sustraendo.

Cabe notar que en las características de la metodología ABN resalta el hecho de que el alumno es libre de hacer los pasos que requiera en su algoritmo de acuerdo con su propio criterio, por lo que en nuestra implementación consideramos botones que crean filas de la tabla para continuar realizando su algoritmo o borrar algún paso si lo necesitan.

Una idea importante detrás de estas actividades, aparte de que son complementarias, es que se resalta a la sustracción como una diferencia y que en el proceso de restar podemos fácilmente encontrar a la suma y viceversa. En este punto no nos interesa que los alumnos hagan la adición, sino que se den cuenta de que sus acciones están encaminadas a calcular esta diferencia o resta. Y en el caso del formato de la adición nos interesa que el alumno

use números, conciba a la sustracción dentro de este proceso y reciba retroalimentación del uso y significado del formato con el que están creando sus algoritmos.

Adiciones: La secuencia particular que propone Espinosa (2015, pp. 24-28) para el caso de la adición se ve en su mayoría reflejada en las primeras actividades de este eje introductorio, claro está que este autor es mucho más específico desmenuzando profundamente los pasos para introducir la adición y propone otras actividades que aquí no incluimos.

Sin embargo, continuando con lo heredado por las primeras actividades de este eje podemos sin problemas secuenciar las sumas de dos cantidades de dos dígitos, de forma similar a como lo hemos hecho con la sustracción. Y tal como lo dice Espinosa (2015, p. 28), para la adición ABN se pretende que los alumnos puedan pasar la cantidad que deseen de un sumando a otro y encuentren adiciones equivalentes, de manera que lleguen al resultado componiendo y descomponiendo los números involucrados.

De hecho, en esa acción de pasar cierta cantidad que el alumno desee, o considere apropiada, de un sumando a otro, hasta llegar al resultado, se basa el formato que hemos elegido para llevar a cabo las adiciones en esta metodología. Este formato no tiene un nombre específico en la literatura previamente referenciada, pero lo hemos llamado adición por transferencia.

Consta de una Tabla que podemos ver en la Figura 16, en la que como encabezado se encuentra la adición a efectuar y tiene tres columnas en las que se pone la cantidad que se va a mover, cuánto sobra del sumando del que se ha elegido mover y cuánto suma al término al que se le agrega.

Suma por transferencia: Debes ir moviendo las cantidades que consideres adecuadas de un sumando al otro (en este caso del número menor al mayor). En la columna "añado" coloca la cantidad que quieras mover del número menor al mayor y en la columna "suma" coloca el valor de la **suma** de ambos. Mientras que en la columna "queda" visualizaras lo que va sobrando del sumando menor que esta siendo descompuesto.

Sara tiene 50 canicas de colores y su madre le regala 18 ¿Cuántas canicas tiene ahora?

50 + 18		
Añado	Queda	Suma
Canicas 8	10	Suma canicas 58 Eliminar
Canicas 2	8	Suma canicas 60 Eliminar
Canicas 8	0	Suma canicas Eliminar

Canicas que vas pasando:
 $18 - 8 - 2 - 8 = 0$
 $18 - 18 = 0$

Figura 16.- Suma por transferencia. Podemos apreciar la actividad en la cual desarrollamos un ejemplo de suma ABN con el formato que hemos llamado suma por transferencia.

De igual manera, en esta parte no nos interesa que el alumno haga la resta, lo que si consideramos importante es que se percate de esa operación en la columna respectiva de "sobra" y que mediante la retroalimentación dentro del mismo formato se vea claramente como se agota la cantidad que se mueve y como se va agregando al otro sumando.

Para esto damos una retroalimentación inmediata, similar a la de las actividades de la sustracción, por descomposición del número que se va a mover, las sumas parciales que se van obteniendo en cada paso del algoritmo y finalmente, mostramos simbólicamente a los estudiantes el algoritmo que han creado a través del formato y la suma que han hecho escrita de la manera usual.

Segundo eje de la plataforma

Como bien se mencionó la idea principal del segundo eje de la plataforma digital es dotarla de características que permitan que esta sea un espacio para que los alumnos puedan crear sus propios algoritmos ABN y practicarlos de manera libre para desarrollar su aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas.

Para formalizar esta idea fundamental del segundo eje de la plataforma digital si tomaremos en cuenta las ideas centrales de los estudios teóricos previos que hemos abordado, pues aunque estas propuestas didácticas han sido consideradas para desarrollarse con lápiz, papel y materiales escolares son investigaciones teóricas y prácticas que ya plasman la esencia de los algoritmos innovadores ABN.

En realidad, no es nuestra intención modificar estas propuestas, que además son relativamente recientes, sino más bien tomarlas y adaptarlas a la plataforma digital complementándolas de acuerdo con las características que esta ofrece. Y, tal como lo hicimos en el primer eje de la plataforma, presentar la metodología ABN aprovechando las ventajas que nos ofrece un medio digital para la creación y práctica de los algoritmos, principalmente la ventaja de la retroalimentación automática que se puede proporcionar al alumno y los diversos registros de representación con los que podemos complementar la retroalimentación.

Entonces, en este segundo eje, creamos una serie de actividades ya más enfocadas a ejercicios para que los alumnos puedan crear, evaluar y practicar los algoritmos ABN y así complementar su aprendizaje de la aritmética básica. Pues recordemos que no es nuestra intención sustituir la enseñanza y el aprendizaje usuales de este tema matemático que se lleva a cabo en las escuelas, sino que es reforzar y complementar este aprendizaje subsanando las consecuencias negativas de aprender aritmética mediante los algoritmos usuales.

La idea de la versión final del segundo eje de la plataforma digital es tener un catálogo de problemas que continúen respetando la clasificación formal de problemas aritméticos en la educación primaria que adoptamos de Echenique (2006, pp. 30-36), de la cual hablaremos más adelante. Y tener programados varios formatos diferentes de algoritmos ABN que los alumnos puedan usar a su gusto en diversos problemas y a modo de retos sugerirles resolver algún problema con algún formato en específico.

De manera tal que puedan resolver los problemas del catálogo, que son problemas para solucionarse con una alguna de las 4 operaciones aritméticas, mediante los formatos de algoritmos ABN de su elección o, incluso, promover retos que motiven a crear diferentes algoritmos con diferentes formatos y compararlos, pues todo esto sigue fielmente el espíritu de la metodología ABN. La idea es que puedan resolver una gran variedad de problemas aritméticos disponiendo de distintos formatos de algoritmos ABN.

En esta etapa del proyecto, entregamos en el segundo eje de la plataforma un pequeño catálogo de 4 problemas, uno por cada tipo de problema aditivo-sustractivo (Echenique, 2006, pp. 31-34) que describiremos más adelante, pero nos enfocamos específicamente en sustracciones, para lo cual implementamos un solo formato de sustracción ABN, que describiremos a continuación, y que acompaña a cada problema.

Podemos ver de qué manera quedó nuestro catálogo de problemas en la primera vista que tenemos del segundo eje de la plataforma, en la Figura 17, donde mostramos cada una de las actividades con un pequeño resumen, las cuales contienen el problema antes mencionado y también está incluido el formato de la sustracción ABN con el cual los estudiantes solucionarán el problema.

$0 + 0 = 0$ $1 + 9 = 10$
escamas escamas

Brisa con Escamas

Toma 1 Escama

Los peces salen de viaje
Vamos a ejercitarnos y abordar las parejas de números naturales menores a 10 que sumen precisamente una decena.

Comenzar

$8 + 2 = 10$

Bien hecho. Juntaste a los peces que suman 10 escamas.

Los peces salen de viaje 2
Continuamos con la historia de los peces cuyas escamas y el número 10 (la decena) están muy relacionados.

Comenzar

77 - 42

Quito 77 42 Checar

Mi consumo de gasolina
Resolveras un problema de cambio que implica hacer una resta. Haz la resta mediante el formato de algoritmo ABN y visualiza que ocurre.

Comenzar

Total de asientos 40 Asientos ocupados 11 Checar

Asientos en el autobus
Resuelve haciendo la resta ABN mediante el formato propuesto. Ayúdame a saber cuántos asientos disponibles tiene el autobus.

Comenzar

87 - 61

Quito

Tinaco lleno 87 lt Tinaco lleno 61 lt

1 6

Agua en la escuela
Ayuda al personal de la primaria a calcular cuántos litros más de agua tiene el tinaco más lleno comparado con el más vacío.

Comenzar

100 - 85

Quito

Golosinas amigo 100 Mis golosinas 85

Mis golosinas
Resolveras un problema mediante el formato para la resta ABN. Calcula la diferencia del contenido de ambas bolsas y logra igualar ambas cantidades.

Comenzar

Figura 17.- Captura de pantalla de la primera vista del segundo eje de la plataforma.

Clasificación de problemas aritméticos considerada en el segundo eje de la plataforma

En la metodología ABN destaca el hecho de que se deben desarrollar actividades mediante resolución de problemas que tengan significado para los alumnos pues, como ya se mencionó previamente, en la metodología ABN toda operación o cálculo que se haga debe tener la finalidad dar solución a un problema (Espinosa, 2015, p. 37).

Entonces al diseñar la estructura del segundo eje de la plataforma propusimos que todas las actividades de algoritmos ABN se desarrollen a través de problemas aritméticos que se estudian en la educación primaria.

Y como la intención de la plataforma es complementar a la educación aritmética que llevan los niños en las escuelas primarias podemos recurrir a cualquier clasificación que organice a estos problemas, sin peligro de interferir con lo que los niños aprenden en sus clases diarias, particularmente pensamos en el trabajo de Echenique (2006) y observamos la clasificación en la Figura 18 (p. 30):

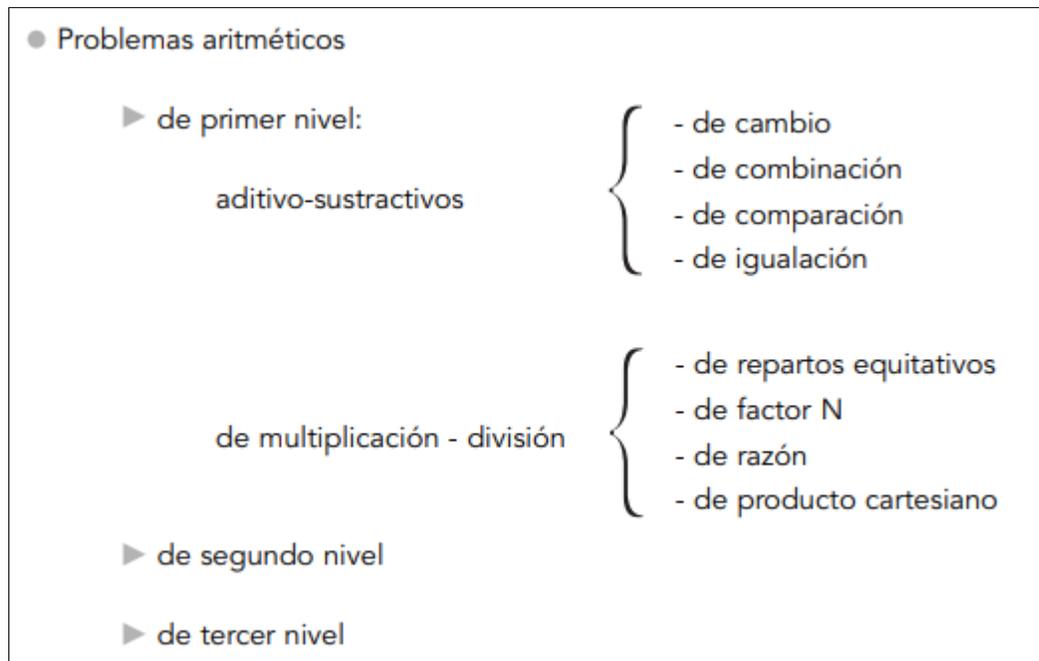


Figura 18.- Clasificación de problemas aritméticos por niveles y por tipos de acuerdo con Echenique (2006, pp. 31-34).

Echenique (2006, pp. 31-34) primero divide a los problemas aritméticos en 3 tipos de acuerdo con su nivel. Por nivel considera en cierta medida la dificultad de los problemas, esta dificultad radica en que en el primer nivel simplemente es necesaria una operación para resolver el problema, en el segundo nivel ya hay necesidad de 2 o más operaciones y con un cierto orden para resolver el problema y en el tercer nivel se presentan situaciones del primer y segundo nivel pero aparecen datos numéricos de otros tipos, ya no solo números naturales, por ejemplo: fraccionarios, decimales y porcentuales.

En la plataforma decidimos incluir únicamente los problemas de primer nivel donde sale a relucir que con una única operación aritmética se puede encontrar solución al problema,

así podemos centrar la atención de los alumnos en el algoritmo ABN para dicha operación aritmética.

Y la autora también hace una subclasificación de este primer nivel en problemas aditivo-sustractivos y de multiplicación-división. Hasta esta entrega de la plataforma, sólo consideramos los problemas aditivo-sustractivos, sin embargo, con la literatura que hemos considerado para desarrollar el proyecto, tenemos bastante material con el cual podemos extenderlo fácilmente a los problemas de multiplicación-división.

Dentro de los problemas aditivo-sustractivos encontramos los cuatro tipos de problemas que aparecen en la Figura 18 y de los cuales hemos diseñado un problema por cada tipo para ser tratado con el formato de la sustracción ABN que hemos programado.

Es decir, en la plataforma mostramos actividades en las que los alumnos pueden conocer, practicar y desarrollar sus algoritmos para la sustracción ABN con ese formato que describiremos a continuación. Solo cabe hacer notar que hemos sido cuidadosos con el diseño de los problemas y los contextos presentados para que los estudiantes puedan resolverlos de manera adecuada con ese formato.

Formato elegido para crear algoritmos ABN de la sustracción

Es importante reiterar que nuestra intención, en primera instancia, es considerar solamente la sustracción en cada actividad de cada tipo de problema. También mantendremos el mismo formato para las sustracciones en todas las actividades.

El formato es aquel al que podemos recurrir en Albase et al. (2016, p. 195), en este formato se les quita una misma cantidad tanto al minuendo, como al sustraendo y cuando se agota el sustraendo la diferencia, que se puede ver en lo que sobra del minuendo, se reconoce como el valor de la resta.

Tal como nos lo dicen Albase y colaboradores (2016), matemáticamente lo que se está aplicando en este formato es la propiedad de que si se quita una misma cantidad a dos cantidades que están restando entonces la diferencia entre ellas es la misma. Y esta

cantidad que se quita depende, como es evidente por la metodología ABN que usado, enteramente de las decisiones de los alumnos.

Es importante notar que la elección adecuada de las cantidades a quitar en los elementos de la sustracción de este formato específico puede facilitar enormemente el paso de las decenas a las unidades, lo que se da en las restas clásicas de la metodología CBC mediante los procesos conocidos como “prestamos” (Albase et al., 2016, p. 195), que son precisamente los que ocultan el valor posicional de los números. Por lo que podemos encontrarle un gran valor al simple hecho de que los alumnos practiquen un sólo formato de sustracción ABN. Aunque claro está, que la idea general del proyecto es contemplar muchos formatos más.

En su trabajo, Albase y colaboradores (2016) describen un taller de iniciación a la metodología ABN para profesores, en este taller trataron los algoritmos ABN inmersos en el contexto de resolución de problemas a modo de iniciar a los profesores en esta metodología. Y de alguna manera ha sido nuestra motivación para utilizar esta clasificación de problemas, que previamente presentamos, pues entre otras cosas, consideramos que la plataforma puede ser el primer contacto de los alumnos con esta metodología ABN.

Por la misma razón de que en la plataforma consideramos tanto a los alumnos que nunca han experimentado con los formatos ABN, como a los alumnos que ya los están practicando, nos basamos en el formato ya mencionado de Albase et al. (2016, p. 195), el cual mostramos en la Figura 19, para la sustracción $12785 - 12707$, que es el ejemplo que dan los propios autores.

QUITO	QUEDA	QUEDA
	12 785	12 707
10000	2 785	2 707
2000	785	707
700	85	7
5	80	2
2	78	0

Figura 19.- Formato de Albase y colaboradores (2016, p. 195) para realizar el algoritmo ABN de la sustracción.

En nuestra implementación de este formato, que podemos ver en la Figura 20, consideramos, como lo hemos venido haciendo, las ventajas que podemos extraer del medio digital. En las actividades consideramos restas de dos cantidades que no superen la centena, respetando el contexto en el que hemos hecho esta implementación de los algoritmos ABN, sin embargo, los formatos están diseñados para cualquier cantidad con números naturales.

78 - 29			
Quito	Gasolina Inicial	Gasolina Final	Checar
	78	29	
8	70	21	Correcto
1	69	20	Correcto
9	60	11	Correcto
1	59	10	Correcto
10	49	0	Terminaste. Escribe la resta

Figura 20.- Formato implementado en la plataforma para trabajar la sustracción ABN.

El formato en sí mismo contiene mensaje de retroalimentación que indica a los alumnos dinámicamente cómo es que van en la creación de sus algoritmos ABN, por ejemplo, si se han pasado o quedado cortos en sus estimaciones, de esta forma los estudiantes pueden

ir evaluando su propio algoritmo paso a paso y también tienen la posibilidad de seguir sumando filas al formato, es decir, considerar más pasos del algoritmo.

Actividades del Segundo Eje

A diferencia de la cuarta actividad, descrita en el primer eje de la plataforma, en este segundo eje la retroalimentación tiene más presencia, pues sí sale a relucir el registro de representación gráfica con el que damos otro tipo de retroalimentación.

En este registro los estudiantes pueden notar los efectos de sus cálculos visualmente en las animaciones presentadas, lo que les genera un mayor sentido de lo que se encuentran haciendo, no se desapegan del carácter de cantidad de los números, pueden autoevaluar sus algoritmos, orientarse mejor en la creación de éstos y en sus estimaciones, etc.

Finalmente, en la plataforma mostramos las 4 actividades de una manera similar, primero introducimos el contexto con una breve descripción y una imagen alusiva, para pasar propiamente a la actividad, donde mostramos brevemente el problema: resaltamos los datos numéricos del problema y hacemos explícita la pregunta.

Ahí mismo colocamos el formato en el que los alumnos crearan sus algoritmos para sustracción ABN. Y también mostramos el registro de representación simbólica antes mencionado retroalimentando al alumno. Esto lo ilustramos a continuación en la Figura 21 con nuestra primera actividad “Consumo de gasolina” correspondiente al problema de cambio.

Quiero saber mi consumo de gasolina

El lunes por la mañana mi automóvil tenía **74 litros de gasolina**, durante toda la semana trabajé y al final de la semana solo tenía **31 litros**. **¿Cuántos litros de gasolina gaste en la semana?**

74 - 31			
Quito	Gasolina Inicial	Gasolina Final	Checar
1	74	31	Correcto
20	73	30	Correcto
...	53	10	Correcto
...	<input type="button" value="Validar"/>

[Ver Actividades](#)

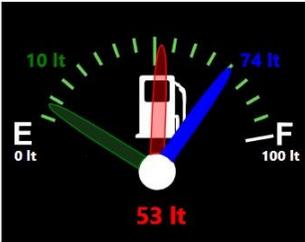


Figura 21.- Problema de cambio. Actividad creada para resolver un ejemplo de este tipo abordando este formato de sustracción ABN.

En este ejemplo podemos percibir cómo es que al llenar el formato de la sustracción ABN se actualiza, paso a paso del algoritmo, el registro gráfico propio del contexto, pues las manecillas del indicador de gasolina se mueven e indican la cantidad de gasolina actualizada. Y también, paso a paso del algoritmo, nuestra implementación digital del formato de sustracción ABN propicia que el propio alumno vaya evaluando su algoritmo creado, esto en la columna “Checar” la cual debe validar antes de continuar con su algoritmo.

Cuando el alumno haya creado un algoritmo tal que dé con la solución de la operación aritmética también recibirá la retroalimentación pertinente tanto en el formato del algoritmo ABN, como en la representación gráfica. Pero se le solicitará, en una pregunta emergente, de la cual podemos ver un ejemplo en la Figura 22, que escriba la operación aritmética que acaba de efectuar, esto con la finalidad de motivar a que los estudiantes establezcan relaciones entre los formalismos matemáticos que se emplean en la escuela y los algoritmos ABN que crean con estos formatos, así como que estén consientes del contenido aritmético que están aprendiendo y practicando.

Quiero saber mi consumo de gasolina

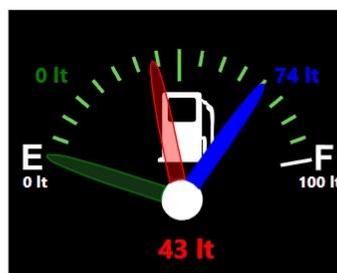
El lunes por la mañana mi automóvil tenía **74 litros de gasolina**, durante toda la semana trabajé y al final de la semana solo tenía **31 litros**. **¿Cuántos litros de gasolina gaste en la semana?**

74 - 31			
Quito	Gasolina Inicial	Gasolina Final	Checar
	74	31	
1	73	30	Correcto
20	53	10	Correcto
10	43	0	Terminaste. Escribe la resta

Agrega Fila

Entonces, ¿Cuántos litros de gasolina gaste en la semana? Escribe la resta completa que te lleva a la solución que obtuviste.

Prueba tu respuesta



[Ver Actividades](#)

Figura 22.- Problema de cambio. En esta imagen continuamos con la actividad de la Figura 21, donde ahora se realiza un tercer paso de modo que se completa el algoritmo de la sustracción ABN.

Las otras actividades continúan con esta misma idea de presentación, pero enfocadas a diferentes contextos y con la finalidad de estudiar la sustracción mediante el mismo formato ABN, pero considerando diferente representación gráfica, correspondiente al contexto. Por lo que, en la siguiente Figura 23 podemos apreciar, a modo de una vista previa de lo que se ve en la plataforma web, como se muestran las actividades correspondientes a los problemas de combinación (el autobús), comparación (los contenedores de agua) e igualación (la balanza).

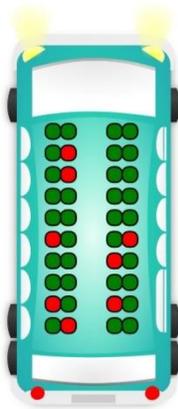
Cuántos lugares disponibles tiene el autobús

Para estas vacaciones llevaré a mi familia de paseo a la playa. Pero al comprar los boletos en un sitio de internet solo obtengo una vista de los asientos con: rojo ocupados, verde: disponibles.

He contado **8 asientos ocupados** de los **40 asientos totales** del autobús. **Ayúdame a saber cuántos asientos quedan libres mediante el algoritmo ABN de la resta.**

40 - 8			
Quito	Total de asientos	Asientos ocupados	Checar
	40	8	
...	Validar
...	Validar
...	Validar

Agrega Pila



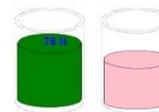
Cuántos litros de agua tiene de más el tinaco

La escuela primaria donde estudio tiene dos tinacos de agua para los baños. Actualmente uno está más lleno que el otro y es importante saber cuál es la diferencia en litros de agua entre estos tinacos.

El tinaco más lleno tiene **78 litros de Agua** mientras que el más vacío tiene **62 litros de agua**. **Ayúdanos a calcular la diferencia de agua entre los tinacos.**

78 - 62			
Quito	Tinaco lleno	Tinaco vacío	Checar
	78	62	
...	Validar
...	Validar
...	Validar

Agrega Pila



Cuántos gramos de golosinas me faltan para tener tantos como tiene mi amigo

Ayúdame al vendedor a calcular cuántos gramos de golosinas le hacen falta a mi bolsa para tener tantos como mi amigo mediante el formato de la resta ABN y equilibra la balanza.

100 - 82			
Quito	Golosinas amigo	Mis golosinas	Checar
	100	82	
...	Validar
...	Validar
...	Validar

Agrega Pila



Figura 23.- Podemos apreciar la primera vista que se muestra en la presentación de las actividades que corresponden a los problemas de combinación, comparación e igualdad, con sus respectivos contextos.

Con respecto a las dos primeras actividades de la plataforma, las de complemento a 10, están inspiradas en la propuesta de Mato (2015, pp. 30-41), quien en realidad propuso tres actividades y nosotros extraemos esas dos para su implementación en nuestra plataforma. Y tienen la mera intención de ser un puente entre el primer eje y el segundo eje, pues es importante que los alumnos desarrollen y practiquen las descomposiciones de la decena, en sumandos de dos números menores a 10, para aprender y volverse diestros en la metodología ABN.

La primera actividad tiene la intención de tratar directamente el complemento a 10, como lo podemos ver en la Figura 24, la idea es que se les completen 10 escamas a todos los peces, por ejemplo, se le completan sus 10 escamas al pez con 0 escamas, por lo que el alumno debe agregar 10 escamas y explícitamente notar la siguiente suma: $0+10=10$, que damos en la retroalimentación. Una idea importante es que los alumnos puedan hacerse

de una especie de acervo de todas las sumas de dos números naturales menores a 10 que sumen precisamente la decena.

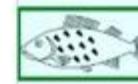
				
El pez de 0 escamas ahora tiene:	El pez de 1 escamas ahora tiene:	El pez de 2 escamas ahora tiene:	El pez de 3 escamas ahora tiene:	
0 + 10 = 10 escamas	1 + 9 = 10 escamas	2 + 8 = 10 escamas	3 + 7 = 10 escamas	
Éxito, conseguieste darle al pez sus 10 escamas				
				El pez de 4 escamas ahora tiene:
			El pez de 10 escamas ahora tiene:	4 + 0 = 4 escamas
			10 + 0 = 10 escamas	
				El pez de 9 escamas ahora tiene:
				9 + 1 = 10
				
El pez de 5 escamas ahora tiene:	El pez de 6 escamas ahora tiene:	El pez de 7 escamas ahora tiene:	El pez de 8 escamas ahora tiene:	
5 + 5 = 10	6 + 4 = 10	7 + 0 = 7	8 + 2 = 10	

Figura 24.- Complemento a 10 – Parte 1. Mostramos los 11 peces de la actividad.

Por otro lado, en la segunda actividad, les presentamos a los alumnos los 11 peces con sus escamas originales, también pintados de colores tal que los complementos de la decena son de un solo color, por ejemplo, 1 y 9 son verdes, 2 y 8 son azules, etc., para el caso particular del pez de 5 escamas, éste es mostrado dos veces.

Y se les pide a los alumnos agrupar a los peces de forma tal que las escamas con que cuenten actualmente sumen 10. Sería interesante poner en práctica esta actividad con los niños para notar cómo es que proceden con los colores de los peces, si como mera casualidad y perciben las parejas después de hacer el conteo o se auxilian de los colores y no hacen el conteo que se pretende con la actividad.

Finalmente, los alumnos también reciben la respectiva retroalimentación que se compone de mensajes para guiarlos en la actividad y la suma explícita de los complementos a 10 que han creado. Todo esto lo podemos ver en la Figura 25 donde mostramos esta actividad.

Diagram illustrating a math activity with fishbowls and fish. The activity involves grouping fish based on the number of scales they have to sum to 10.

The fishbowls and their corresponding math problems are:

- Bowl 1: Empty. $\text{Pez 1} + \text{Pez 2} = \dots$ Esperando
- Bowl 2: 1 purple fish. $9 + \text{Pez 2} = 9$
- Bowl 3: Empty. $\text{Pez 1} + \text{Pez 2} = \dots$ Esperando
- Bowl 4: 3 green fish. $3 + 7 = 10$
- Bowl 5: 2 purple fish. $2 + \text{Pez 2} = 2$
- Bowl 6: Empty. $\text{Pez 1} + \text{Pez 2} = \dots$ Esperando

Feedback message: Bien hecho. Juntaste a los peces que suman 10 escamas.

Individual fish shown below:

- 1 grey fish (0 scales)
- 1 purple fish (1 scale)
- 1 yellow fish (2 scales)
- 1 pink fish (3 scales)
- 1 pink fish (4 scales)
- 1 yellow fish (5 scales)
- 1 purple fish (6 scales)
- 1 grey fish (7 scales)

Note: Si necesitas colocar algún pez fuera de la pecera, ponlo aquí

Figura 25.- Complemento a 10 – Parte 2. Mostramos 12 peces con diferente número de escamas cada uno, escamas de 0 a 10, y 6 peceras donde los peces deben formar parejas para sumar 10 escamas.

6. Conclusiones y Resultados

Tras hacer el proyecto y elaborar esta tesis damos una serie de conclusiones que hacen referencia al objetivo y a la pregunta de investigación planteada al inicio del proyecto.

Como resultado de la indagación teórica sobre los algoritmos aritméticos y parte de la literatura correspondiente hemos encontrado que, de las propuestas alternativas a los algoritmos usuales de la aritmética de números naturales, la metodología ABN sí es una buena candidata para poder subsanar las consecuencias negativas, previamente tratadas, que nos interesan de aprender algoritmos aritméticos.

Y no sólo eso, también con el análisis hecho a la metodología ABN mediante el modelo de aprendizaje de algoritmos del capítulo 4, podemos respaldar aún más nuestra apuesta por los algoritmos ABN.

Con lo realizado en los capítulos 3, 4 y 5 pudimos dar una respuesta satisfactoria a nuestra pregunta de investigación, pues obtuvimos un diseño curricular, planeado para ejecutarse de manera digital mediante una aplicación web, de los algoritmos ABN.

Es decir, implementamos dicha metodología ABN en un medio digital, mismo medio que también fue justificado, con lo que obtuvimos nuestro resultado final: una plataforma web desarrollada especialmente para implementar la metodología ABN de manera que los estudiantes pueden obtener mayor provecho de aprender y practicar algoritmos ABN. En dicha plataforma plasmamos nuestra propuesta sobre el diseño del currículo que nos planteamos en la pregunta de investigación.

Generamos, hasta esta entrega del proyecto, bases teóricas con las que justificamos el medio digital en el que implementamos una propuesta, también justificada, de la metodología ABN. Ambos elementos, tanto la propuesta del método ABN así como el medio digital que hemos creado, ya cuentan con bases sólidas para continuar con el desarrollo iniciado en este proyecto.

Donde es importante que seamos conscientes de los aspectos faltantes, y a completar en futuras entregas, tanto de la parte teórica y planeación del proyecto como de la plataforma digital. Y estos son específicamente tres aspectos:

1.- Un plan concreto de los grados específicos a los cuales están dirigidas determinadas actividades, pues nuestra plataforma está pensada esencialmente para estudiantes de los 3 primeros años de la educación primaria y también para estudiantes de preescolar que estén estudiando los temas correspondientes al “Eje Número” de acuerdo con los planes y programas de la SEP (2022)²⁰.

Sin embargo, aunque nuestra intención es que cualquier estudiante se pueda enfrentar con cualquier actividad de la plataforma, es conveniente considerar separar por niveles, es decir, considerar en futuras entregas algún mecanismo para que los estudiantes lleven a cabo las actividades que deben hacer de acuerdo con su grado escolar.

Dentro de este mecanismo de separación también deberemos considerar el tipo de contextos abordados en las actividades planteadas en la plataforma, cabe señalar nuevamente que, en esta primera entrega del proyecto, se dejan las actividades como modelos pendientes a ser refinados y extendidos con las debidas intervenciones más especializadas sobre los contextos y el nivel de dificultad de las operaciones aritméticas que se estarán presentando en los problemas.

2.- Definir de que forma la propuesta digital será introducida a los cursos normales de los alumnos, pues la finalidad de la plataforma es complementar su aprendizaje estándar de la aritmética pero subsanando las consecuencias negativas. Pero es importante, para poder concretar esta finalidad, definir, entre otros aspectos, en qué momento de la enseñanza de la aritmética introducir la plataforma y bajo qué proceso, o pasos a seguir, con los alumnos.

²⁰ En la Tabla dinámica que se muestra en dicha liga, que lleva a los planes y programas de la SEP, podemos encontrar el apartado de la educación preescolar, donde notamos que la única intersección, de temas de matemáticas, con nuestro trabajo es el eje de Número.

3.- Lo anterior nos lleva a la necesidad de definir el rol del profesor dentro de ese proceso que se debe proponer para presentar la plataforma digital a los alumnos, es importante que se aclaren esos detalles de cómo los alumnos abordarían la plataforma y dentro de ese contexto que se genere, cuál será el papel del profesor. Pues todo esto implicaría también modificar características de la misma plataforma, como: instrucciones más precisas, nuevo diseño de los componentes para hacerlos más o menos autocontenidos y auto explicados, etc.

Todos estos aspectos anteriores se salen de los objetivos que tenemos en el proyecto, de nuestros alcances y nuestro interés hasta esta entrega de la plataforma. Pues bien estos serían los primeros aspectos para considerar cuando se pase a una etapa de prueba y experimentación de la plataforma digital.

Finalmente, un tema importante que no debemos omitir, pues es parte esencial de nuestro objetivo, es que queda pendiente hacer pruebas formales de nuestra propuesta, es decir, probar tanto la metodología ABN implementada en la plataforma, como la plataforma digital en sí misma, con alumnos de los grados escolares correspondientes y obtener datos experimentales para saber cómo es que se está cumpliendo nuestro objetivo: subsanar las consecuencias negativas de aprender algoritmos aritméticos.

7. Bibliografía

- Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2015). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, 3(1).
- Albase, V., Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2016). *Una forma alternativa de hacer cuentas: Algoritmos Abiertos Basados en Números*. Limón.
- Anderson, L., Krathwohl, D., Airasian, P., Cruikshank, K., Richard, M., Pintrich, P., ... Wittrock, M. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*.
- Aragón-Mendizábal, E. L., Carmen Canto-López, M. del, Marchena-Consejero, E., Navarro-Guzmán, J. I., & Aguilar-Villagrán, M. (2017). Cognitive Profile in Learning Mathematics With Open Calculation Based on Numbers Algorithm. *Revista de Psicodidáctica (English ed.)*, 22(1), 54–59. <https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.16396>
- Aritmetic, A. M. (2016). ALOHA Spain SL. Recuperado el 5 de julio de 2022, de <https://www.alohaspain.com/es/>
- Attard, C. (2016). *Research evaluation of matific mathematics learning resources: Project report*.
- Attard, C. (2017). Technology in the classroom can improve primary mathematics. Recuperado el 31 de enero de 2022, de The Conversation website: <https://engagingmaths.com/2017/09/06/technology-in-the-classroom-can-improve-primary-mathematics/>
- Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain*. New York: David McKay Company. Inc.
- Canto, M. C., & Navarro, A. I. (2014). Abn Method. Recuperado el 14 de febrero de 2022, de <https://prezi.com/prgj0tm2-nbg/abn-method/>
- Carvalho, P., Palhares, P., Osório, A., Gomes, A., & Mamede, E. (2012). *LOGO and Elementary Mathematics Education in Portugal*. <https://doi.org/10.4018/978-1-4666-0068-3.ch018>
- Daniel Ajoy. (2021). neoparaiso. Recuperado el 4 de febrero de 2022, de <https://neoparaiso.com/logo/>
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Gobierno de Navarra. Departamento de Educación.
- Espinosa, Á. (2015). *Método ABN. Por un aprendizaje matemático sencillo, natural y divertido*. Universidad de Málaga.
- Fan, L., & Bokhove, C. (2014). Rethinking the role of algorithms in school mathematics: a conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(3), 481–492. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0590-2>
- Fernández, J. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, Vol. 4, pp. 31–46.

- Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM).
- Holmes, E. E. (1995). *New directions in elementary school mathematics: Interactive teaching and learning*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- INEE. (2019). INEE La educación obligatoria en México Informe 2019. Recuperado el 19 de noviembre de 2021, de https://www.inee.edu.mx/medios/informe2019/stage_01/cap_0302.html
- Ingram, N., Williamson-Leadley, S., & Pratt, K. (2015). Showing and telling: using tablet technology to engage students in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 28. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0162-y>
- Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(1), 51–61. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90007-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90007-9)
- Knuth, D. E. (1974). Computer Science and its Relation to Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 81(4), 323–343. <https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993556>
- Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom’s Taxonomy: An Overview. *Theory Into Practice*, 41(4), 212–218. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2
- Leung, F. K. S. (2001). In Search of an East Asian Identity in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 47(1), 35–51. <https://doi.org/10.1023/A:1017936429620>
- Li, S. (1999). Does Practice Make Perfect? *For the Learning of Mathematics*, 19(3), 33–35.
- Mastachi, M. del C. (2015). *Aprendizaje de las operaciones básicas en aritmética a través de la resolución de problemas*. Universidad Veracruzana, Poza Rica.
- Mato, M. (2015). *Algoritmos ABN: Abiertos Basados en Números*.
- Mendizábal, E. L. A., Canto López, M. del C., Consejero, E. M., Guzmán, J. I. N., & Villagrán, M. A. (2017). Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático con el método algoritmo abierto basado en números (ABN). *Revista de Psicodidáctica*, 22(1), 54–67. <https://doi.org/10.1387/RevPsicodidact.16396>
- Montero, J. M. (2014). El Método de cálculo Abierto Basado en Números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales Cerrados Basados en Cifras (CBC). *Bordón. Revista de Pedagogía*, 63(4), 95–110.
- OAOA. (2018). OAOA Matemáticas. Recuperado el 23 de agosto de 2022, de <http://oaoamatematicas.org/>
- Pantano, O. L., Castaño Giraldo, J. E., & VegaVega, J. C. (2014). El material concreto y el pensamiento geométrico: una manera de construir el algoritmo de la multiplicación. *Revista científica*, 2, 626–630. <https://doi.org/10.14483/23448350.7739>
- RAE. (2022). Real Academia Española. Recuperado el 3 de febrero de 2022, de <https://dle.rae.es/>
- Säljö, R. (1979). *Learning in the Learner’s Perspective: I. Some Common Sense Conceptions*. Gothenburg, Sweden.
- SEP. (2022). Planes y Programas de Estudio. Recuperado el 19 de agosto de 2022, de <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/index-mapa-curricular.html>

Smartick. (2022). Smartick Method. Recuperado el 19 de julio de 2022, de <https://mx.smartickmethod.com/>

Taylor, R. G. (1998). *Models of computation and formal languages*. New York: Oxford University Press.

Yelland, N., & Kilderry, A. (2010). Becoming numerate with information and communications technologies in the twenty-first century. *International Journal of Early Years Education*, 18(2), 91–106. <https://doi.org/10.1080/09669760.2010.494426>