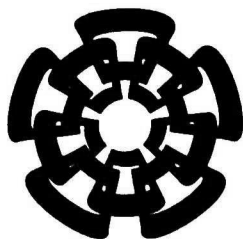


xx(11 6558.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Identificación de Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos: Una aproximación desde las Redes de Petri

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

Tesis que presenta:
Armando Barragán Naranjo

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería eléctrica

Director de Tesis
Dr. Antonio Ramírez Treviño

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Guadalajara, Jalisco, Agosto del 2004.

CLASIF.: TK165-6B B37 2004
ADQUIS.: SS1-323
FECHA: 27-I-2005
PROCED.: Don.-2005
\$ _____

ID: 11629-2001

Identificación de Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos: Una aproximación desde las Redes de Petri

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería eléctrica**

Por:

Armando Barragán Naranjo
Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán 1995-1999

Becario de CONACYT, expediente no. 165262

Director de Tesis
Dr. Antonio Ramírez Treviño

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Agosto del 2004.

Agradecimientos

A mis padres y hermanos por todo su apoyo.

Al doctor Antonio Ramírez Treviño por su tutoría.

A los doctores que fueron mis maestros en la maestría: Dr. Antonio Ramírez

Treviño, Dr. Bernardino Castillo Toledo, Dr. Arturo Sánchez Carmona, Dr.

José Javier Ruiz León, Dra. Ofelia Begovich Mendoza, Dr. Alexander

Loukianov, Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos.

A María y Luis Isidro por su apoyo en la revisión de esta tesis.

Al CONACyT por su apoyo financiero como becario No. 165262

Resumen

En esta tesis se estudia el problema de identificación de Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos (SED) utilizando el formalismo de Redes de Petri (RP). En particular se aborda el problema de obtener exclusión mutua cuando: 1) el lugar que comparte marcas y que se requiere para modelar la exclusión es no medible, 2) al considerar la relación de subsecuencias de transiciones que ocurren en exclusión, obteniendo exclusiones que restringen estados no alcanzados y, 3) en la situación en la que son alcanzados estados restringidos mediante exclusión, siendo necesario obtener exclusiones que restrinjan a los subconjuntos de estados que no se han alcanzado.

Con la identificación de exclusión mutua se obtienen RP que presentan un conjunto de estados alcanzables igual al conjunto de estados observados en la salida de un SED. Lo que permite obtener un modelo más exacto y en consecuencia se facilita el análisis de las propiedades ese SED.

Con los resultados obtenidos, además de la introducción de conceptos y herramientas formales, se obtiene un algoritmo del cual se presentan algunas de sus funcionalidades mediante un ejemplo.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Revisión bibliográfica . | 1 |
| 2. Preliminares | 5 |
| 2.1. Introducción . | 5 |
| 2.2. Redes de Petri | 5 |
| 2.2.1. Marcado de RP | 6 |
| 2.2.2. Estructura | 7 |
| 2.2.3. Evolución | 8 |
| 2.2.4. Ecuación de estado | 8 |
| 2.2.5. Grafo de alcanzabilidad de una RP | 9 |
| 2.3. Propiedades de RP | 9 |
| 2.4. Redes de Petri Interpretadas | 11 |
| 2.4.1. Definición | 11 |
| 2.4.2. Lenguajes en RPI | 12 |
| 2.4.3. Propiedades en RPI | 12 |
| 2.4.4. Componentes en RPI | 13 |
| 2.5. Definiciones de observabilidad e identificación en RPI | 13 |
| 2.6. Derivación de RPI de Sistemas de Transiciones (TS) | 15 |
| 2.7. Representación de RP como un conjunto de dependencias | 18 |
| 3. Análisis del problema de identificación | 21 |
| 3.1. Introducción . | 21 |
| 3.2. Análisis del problema de identificación | 22 |
| 3.2.1. RPI que generan un mismo comportamiento | 22 |
| 3.3. Método para obtener exclusión mutua en RPI de la clase Ψ | 28 |
| 4. Algoritmo | 39 |
| 4.1. Introducción . | 39 |
| 4.2. Funciones para etiquetado de lugares, transiciones y vectores de salida | 39 |

| | |
|--|------------|
| 4.3. Caracterización de transiciones en RPI | 40 |
| 4.4. Algoritmo para identificar RPI de la clase Ψ | 43 |
| 5. Conclusiones y trabajo futuro | 111 |
| 5.1. Conclusiones | 111 |
| 5.2. Trabajo futuro | 112 |

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo estudia la identificación de Sistemas de Eventos Discretos (SED). Un SED es un sistema de estados discretos manejado por eventos, esto es, el cambio abrupto de su estado depende enteramente de la ocurrencia de eventos discretos en el tiempo [15]. Ejemplos de SED son los sistemas de manufactura flexible, sistemas de tráfico, redes de computadoras, protocolos de comunicación, entre otros. En la literatura se encuentran trabajos que se han enfocado en la utilización de autómatas finitos (AF) para su descripción [13] [15]. Sin embargo, dado que en algunos sistemas las representaciones en AF quedan muy grandes, numerosos grupos de control han adoptado las Redes de Petri (RP) como herramienta formal, dado que en RP se pueden obtener representaciones más compactas y mayor capacidad de análisis.

Algunas de las investigaciones reportadas en la literatura, enfocadas a obtener modelos de SED, se presentan en la revisión bibliográfica.

1.1. Revisión bibliográfica

Un sistema interactúa con su ambiente mediante sus entradas y salidas; al par entradas-salidas se le denomina comportamiento del sistema. Una forma de analizar un sistema es mediante su modelo matemático. El modelo matemático de un sistema se puede obtener utilizando un algoritmo el cual utiliza como entrada el comportamiento de ese sistema. En casos particulares resulta conveniente hacer síntesis de modelos matemáticos a partir de otros, con la finalidad de facilitar el análisis. En la literatura se reportan investigaciones enfocadas a realizar identificación y síntesis de modelos matemáticos, algunos autores se mencionan en la figura 1.1. Una breve descripción de estos trabajos se presenta a continuación.

Gold (1967) [9] presenta su trabajo "Identificación en el límite de lenguajes", donde dada una clase posible de lenguajes \mathfrak{S} y un método de presentación de información (i.e. asignar a cada lenguaje L un conjunto de secuencias de entrenamiento $\sigma_1, \sigma_2, \dots$), verifica si existe un modelo de aprendizaje de lenguajes (del cual se obtiene un algoritmo) que pueda ser usado para hacer la identificación de un lenguaje $L \in \mathfrak{S}$, entonces, para cada unidad de información el algoritmo

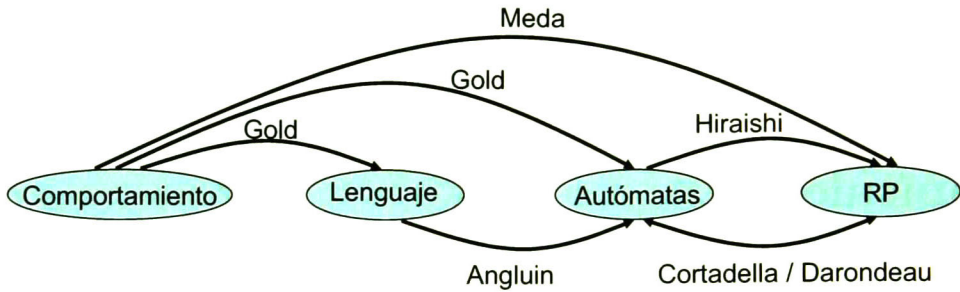


Figura 1.1:

debe indicar si la información es suficiente para determinar cuál de los posibles lenguajes es el lenguaje desconocido; el algoritmo debe tener la propiedad de identificabilidad en el límite, i.e. dado algún lenguaje de la clase, presentando secuencias de entrenamiento permitidas, para este lenguaje, como entrada al algoritmo; existe un tiempo finito después del cual el resultado del algoritmo es el mismo y estará correcto. Propone un total de 12 modelos para el aprendizaje de lenguajes, aplicables a la identificación desde lenguajes de cardinalidad finita hasta lenguajes recursivamente enumerables.

Posteriormente Gold (1972) [10] presenta el trabajo "Identificación de sistemas vía caracterización del estado", en el cual hace identificación en el límite mediante caracterización del estado. La caracterización del estado consiste en seleccionar una muestra de los estados del sistema desconocido, eligiendo un conjunto de experimentos a realizar sobre cada estado, de esta manera los resultados de los experimentos se usan para realizar una clasificación de los estados del sistema. La caracterización del estado se presenta como un método esencialmente no lineal y no paramétrico para el diseño de experimentos los cuales determinan directamente una representación en el espacio de estados de un sistema a identificar, usando los resultados para caracterizar al sistema en términos de propiedades observables. El número de experimentos requeridos es el orden de la dimensión del espacio de estados que se utilizará para construir el autómata. Este método asume que la dimensión del espacio de estados es finita pero desconocida, el sistema se puede llevar al estado inicial en cualquier momento y su comportamiento es determinístico.

Más tarde Angluin (1982) [8] propone hacer "Inferencia de lenguajes reversibles" los cuales son una subclase de lenguajes regulares. Un lenguaje L es reversible si y sólo si existe un aceptor (autómata) reversible A tal que $L = L(A)$, donde un aceptor A es reversible si existe su inverso A^r (visto gráficamente al intercambiar los estados iniciales y finales e invirtiendo cada una de las flechas de las transiciones de A). Para hacer la inferencia presenta una familia de algoritmos eficientes que utilizan como entrada subconjuntos finitos de cadenas pertenecientes al lenguaje a inferir y utilizando clases de equivalencia obtiene una representación en el espacio de estados.

Como pionero de la síntesis de RP Hiraishi (1992) [11] propone "La Construcción de redes

de Petri seguras presentando ejemplos. ^Apoyándose en la Inferencia de lenguajes reversibles [8], genera un aceptor, a partir del cual presenta un algoritmo de síntesis de RP binarias, vivas y puras.

Por su parte, Cortadela/Darondeau (1998) [2] presenta su trabajo "Derivando RP de sistemas de transiciones finitos" en el que asume existente una representación del comportamiento del sistema en la forma de un autómata, y presenta algoritmos para obtener RP de distintas clases, cuyos grafos de alcanzabilidad son isomorfos al autómata inicial. Toma como base la teoría de regiones, en la que un conjunto de estados se relacionan si las transiciones entrantes y salientes de los estados simulan el comportamiento del disparo en una RP. Además, define una clase de autómatas llamados sistemas de transiciones de excitación cerrada (STEC). Entonces, dado un autómata, obtiene una representación de éste en la clase STEC y mediante la relación de transiciones entrantes y salientes genera un conjunto de clases de equivalencia. En la RP a sintetizar, una clase de equivalencia c_x corresponde a un lugar p_x , el conjunto de transiciones entrantes a la clase c_x corresponde al preconjunto de transiciones de p_x y el conjunto de transiciones salientes de la clase c_x corresponde al postconjunto de transiciones de p_x .

Como uno de los trabajos más recientes Meda (2002) [1] presenta un algoritmo para hacer "Identificación en línea", con el cual es posible determinar una RP, perteneciente a una clase de RP que llamaremos Γ -. a partir de la observación del comportamiento de un SED. Una RP perteneciente a la clase Γ es viva, cíclica, pura, evento detectable, binaria y no contiene lugares no medibles implícitos. Para realizar identificación utiliza las palabras generadas por el comportamiento observado del SED a identificar; tal que, cada vez que se presenta una palabra, utiliza ésta y las anteriores para corregir o continuar generando la RP. Para hacer esto, presenta un algoritmo de identificación asintótico, con el cual se obtiene una RPI perteneciente a la clase Γ .

Otros autores se enfocan en determinar cuál es la secuencia de menor cardinalidad, la cual contiene a las palabras del lenguaje que describe el comportamiento de un SED; la complejidad de este problema es NP duro. Vazirani [16], se refiere a encontrar esa secuencia como el problema de encontrar la "supersecuencia" más corta y presenta un algoritmo de complejidad polinomial con el que se obtienen supercadenas con cardinalidad próxima a la cardinalidad óptima.

Dado que en RP se tiene mayor capacidad de análisis y representaciones más compactas, este trabajo se enfoca en la identificación de RP a partir del comportamiento de SED. Con respecto a los trabajos anteriores, en esta tesis se obtiene un algoritmo para identificar RP las cuales modelan únicamente a los estados alcanzados por el comportamiento de los SED a modelar.

Con esta breve introducción comenzamos a describir las Redes de Petri en el capítulo 2. En el capítulo 3 se presenta el análisis del problema de identificación. En el capítulo 4 se presenta la descripción del algoritmo propuesto para hacer identificación junto con un ejemplo. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y trabajo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción

Las Redes de Petri (RP) poseen un atractivo importante para el modelado y simulación de sistemas, dado que integran en el mismo formalismo gráfico, la representación del sistema y el entorno de animación respectivo. Además, el modelo de Petri es suficientemente general como para representar una gran variedad de sistemas, y es especialmente idóneo para todos aquéllos que tienen un comportamiento asíncrono, son distribuidos, actúan en paralelo, etc. Su modo de operación es en general no determinista y permiten reflejar, entre otros aspectos, la ejecución concurrente de distintos procesos, representar la disponibilidad de recursos, imponer restricciones de acceso a datos compartidos, y representar la evolución dinámica de los sistemas. Extensiones posteriores al modelo inicial permiten manejar el tiempo, asignar prioridades de actuación, estructuración jerárquica, etc.

En este capítulo se presenta la definición de RP, sus características y propiedades; se presentan las Redes de Petri Interpretadas; posteriormente las definiciones de observabilidad e identificabilidad en RPI; además de su derivación a partir de sistemas de transiciones; terminando con su representación como un conjunto de dependencias.

2.2. Redes de Petri

Una Red de Petri (RP) es un grafo bipartito, dirigido; y consta de dos clases de nodos, llamados *lugares* (que representan a los sensores del SED) y *transiciones* (que representan las acciones del SED). Un lugar se representa por un círculo y una transición por un rectángulo. Tanto el número de lugares como el de transiciones son finitos y diferentes de cero. Estos nodos se conectan mediante arcos dirigidos, y van de un lugar a una transición o de una transición a un lugar. Cada arco se etiqueta con un peso (un entero positivo), donde un arco con peso $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ se puede interpretar como el conjunto de k arcos paralelos (se omite usualmente la etiqueta para un arco con peso de 1). A continuación se presenta la definición de Red de Petri.

Definición 1 Una Red de Petri G es un grafo bipartito, dirigido, con peso en sus arcos, definido por la tupla $G = (P, T, I, O)$ donde

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ es un conjunto ordenado finito de m vértices llamados lugares.

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ es un conjunto ordenado finito de n vértices llamados transiciones.

$I : T \times P \rightarrow \mathbb{Z}^{>0}$ función de entrada, que indica el peso de cada arco dirigido de una transición a un lugar.

- $O : P \times T \rightarrow \mathbb{Z}^{>0}$ función de salida, que indica el peso de cada arco dirigido de un lugar a una transición.

Al conjunto de pesos indicados por las funciones I y O se representan por dos arreglos en forma de matrices de $m \times n$ donde el elemento (i, j) corresponde al i -ésimo lugar y a la j -ésima transición. Las matrices se simbolizan con I (llamada matriz de entrada) y O (llamada matriz de salida).

Todo nodo (transición o lugar) perteneciente a la RP G presenta un preconjunto y postconjunto (de lugares o transiciones) definidos a continuación:

Definición 2 Para algún nodo x de G , su **preconjunto** $\bullet x$ esta definido por

$$\bullet x = \{y \in G \mid (y, x) \in F\} \quad (2.1)$$

Definición 3 Para algún nodo x de G , su **postconjunto** $x\bullet$ esta definido por

$$x\bullet = \{y \in G \mid (x, y) \in F\} \quad (2.2)$$

donde $F = I \cup O$ es llamada función de flujo.

Un ejemplo de una RP se muestra en la figura 2.1.a.

2.2.1. Marcado de RP

Una RP representa el comportamiento dinámico de un SED con ayuda de marcas (las cuales se representan por puntos o números enteros positivos circunscritos en los lugares). El marcado de cada lugar perteneciente al conjunto de m lugares P se representa por $M(p_i)$ ó M_i , donde M es una función de la forma $M : P \rightarrow \{\mathbb{Z}^{\geq 0}\}^m$ que indica el número entero de marcas existentes en cada lugar de la red. La distribución de marcas en un instante dado sobre la RP se denomina marcado y es análogo a la noción de estado estable. Así, los estados de la RP se definen por su marcado.

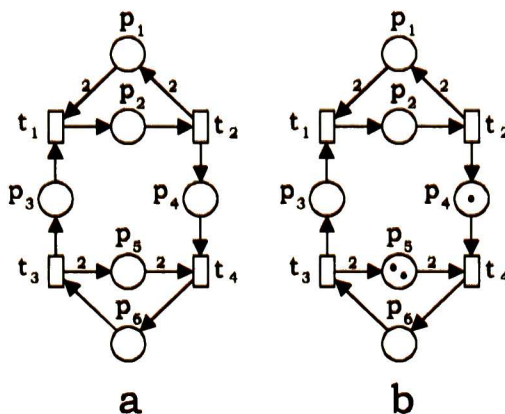


Figura 2.1: Ejemplo de una RP.

Definición 4 El **marcado de una RP** (estado) con m lugares se define mediante el mapeo $M : P \rightarrow \{Z^{\geq 0}\}^m$, resultando un vector con m elementos enteros positivos.

Una RP con un marcado inicial se define como sigue.

Definición 5 Una **RP marcada**, se representa por $N = (G, M_0)$, donde M_0 es el marcado inicial.

En la figura 2.1.b se muestra una RP que presenta un marcado inicial $M_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]^T$

2.2.2. Estructura

La estructura de una RP se representa mediante las matrices de entrada I y salida O ; y es usual que se represente en la forma de una sola matriz al hacer la diferencia entre estas matrices, respectivamente. i.e.

$$C_{(i,j)} = I_{(i,j)} - O_{(i,j)} \tag{2.3}$$

C es llamada "matriz de incidencia".

Como ejemplo, se presenta a continuación la matriz de incidencia de la red de la figura 2.1.a.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Evolución

El comportamiento dinámico de una RP se puede describir mediante la evolución de las marcas en la red. Aquí, las transiciones juegan un papel importante ya que cada una de ellas, al habilitarse y dada su ocurrencia "mueven" las marcas desde sus preconjuntos de lugares de entrada hacia sus postconjuntos de lugares de salida.

Mediante la evolución del comportamiento de la RP, se presentan distintos marcados alcanzables. El conjunto marcados alcanzables se define como sigue.

Definición 6 *El conjunto de alcanzabilidad de una RP $N = (G, M_0)$ definido por $\mathbf{R}(N, M_0)$, es el conjunto de todos los marcados alcanzables desde M_0 , dada la ocurrencia de secuencias de transiciones habilitadas, donde $\mathbf{R}(N, M_0)$ se puede ver como una función que etiqueta con elementos del conjunto ordenado $\{M_0, M_1, \dots, M_d\}$ a los distintos vectores de marcado que presenta la RP.*

El marcado de una RP evoluciona de acuerdo a las siguientes reglas.

Definición 7 Regla de habilitación. *Una transición $t_r \in T$ está habilitada en un marcado $M_j \in \mathbf{R}(N, M_0)$ si $\forall p_i \in \bullet t_r \ M(p_i) \geq O_{(i,r)}$.*

Definición 8 Regla de ocurrencia. *La ocurrencia de una transición $t_r \in T$ habilitada en un marcado M_k remueve de $\forall p_i \in \bullet t_r \ O_{(i,r)}$ marcas, y añade a $\forall p_l \in t_r \bullet \ I_{(r,l)}$ marcas, alcanzando así el marcado M_{k+1} (también escrito como $M_k \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$).*

A continuación se definen las secuencias de ocurrencia de transiciones de T .

Definición 9 *Sea $M \in \mathbf{R}(N, M_0)$, si $M \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots \xrightarrow{t_k} M_k$ son ocurrencias de transiciones, entonces $\sigma = t_i t_j \dots t_k$ es una secuencia de ocurrencia que lleva del marcado M al marcado M_k , y se escribe $M \xrightarrow{\sigma} M_k$.*

Es posible representar en la forma de un vector la ocurrencia de las transiciones involucradas en una palabra, a este vector se le conoce como vector de Parikh, su definición es la siguiente:

Definición 10 *El vector de Parikh correspondiente a una secuencia de ocurrencias σ en una RP con n transiciones se define mediante el mapeo $\sigma : T \rightarrow \{Z^{\geq 0}\}^n$, del cual se obtiene un vector $\vec{\sigma}$ en el que $\vec{\sigma}(i)$ representa el número de ocurrencias de la transición t_i .*

2.2.4. Ecuación de estado

Es posible calcular el cambio que se origina mediante la ocurrencia de una transición t_r en el marcado de la red con la siguiente ecuación, llamada ecuación de estado.

$$M_r = M_k + C \vec{\sigma} \quad (2.4)$$

donde:

- M_k es el marcado en el instante k .

C es la matriz de incidencia de la RP de tamaño $m \times n$.

- $\vec{\sigma}$ es una secuencia de ocurrencias en la forma de un vector de Parikh.
- M_r es el marcado resultante de la ocurrencia de las transiciones de la secuencia σ .

2.2.5. Grafo de alcanzabilidad de una RP

El grafo de alcanzabilidad de una RP es una representación en el espacio de estado y se define como sigue.

Definición 11 *Grafo de alcanzabilidad.* Sea $N = (G, M_0)$ una RP. El grafo de alcanzabilidad de N es $RG(N) = (S_N, T_N, F_N, s_{in})$, donde $S_N \subseteq 2^P$, $F_N \subseteq 2^P \times T \times 2^P$ tal que:

$$S_N = R(N, M_0).$$

$$F_N = \{(M, t, M') \mid M, M' \in S_N \wedge M \xrightarrow{t} M'\}.$$

$$T_N = \{t \mid t \in T \wedge \exists (M, t, M') \in F_N\}.$$

2.3. Propiedades de RP

En un modelo de RP se pueden estudiar dos tipos de propiedades: aquéllas que dependen del marcado inicial y aquéllas que son independientes del marcado inicial. A las primeras se las llama *propiedades dinámicas o del comportamiento* y a las segundas *propiedades estructurales*.

De entre las propiedades dinámicas destacan las siguientes:

- **Alcanzabilidad.** Es una base fundamental para el estudio de las propiedades dinámicas de cualquier SED. Una secuencia de ocurrencia de eventos da lugar a una secuencia de marcados alcanzados. Un marcado M_n se dice que es alcanzable desde un marcado M_0 si existe una secuencia de ocurrencia de eventos que transforma M_0 en M_n . Aunque el estudio de la alcanzabilidad es un problema decidible la complejidad de dicho cálculo es, en términos generales, muy elevada.

Acotabilidad. Una RP N se dice que está *k-acotada* o simplemente *acotada* si el número de marcas en cada lugar no excede un número finito k para ningún marcado alcanzable desde M_0 . Una RP N se dice que es *binaria* si es 1-acotada. El límite de marcado inferior y superior de un lugar p_k se representa por $M^{LB}(p_k) = \text{mín } M(p_k)$ y $M^{UB}(p_k) = \text{máx } M(p_k)$ respectivamente. La diferencia máxima de marcado de un lugar p_x se representa por $D^{MAX}(p_x) = M^{UB}(p_x) - M^{LB}(p_x)$. Dado el conjunto P de lugares de una RP, con $|P| = n$, el marcado inferior y superior además de la diferencia de marcado máxima

de los lugares de P se representan por los vectores $M^{LB}(P) = [M^{LB}(p_1) \cdots M^{LB}(p_n)]$, $M^{UB}(P) = [M^{UB}(p_1) \cdots M^{UB}(p_n)]$ y $D^{MAX}(P) = [D^{MAX}(p_1) \cdots D^{MAX}(p_n)]$.

Vivacidad. Este concepto está íntimamente relacionado con la ausencia completa de bloqueos en SED. Una RP N se dice que es *viva* (o que M_0 es un marcado vivo para N) si sea cual sea el marcado alcanzado desde M_0 , es posible disparar alguna transición desde él.

- **Persistencia.** Una RP N es *persistente* si para dos transiciones habilitadas cualesquiera el disparo de una de ellas no deshabilita a la otra. En una red persistente, una vez que una transición está habilitada, se mantiene habilitada hasta que se dispara.

De entre las propiedades estructurales se destacan las siguientes:

Transición fuente. Una transición $t \in T$ se transición dice fuente si $\bullet t = \emptyset$.

- **Transición sumidero.** Una transición $t \in T$ se dice transición sumidero si $t \bullet = \emptyset$.

Autolaso. Se dice que existe un autolaso entre un lugar p y una transición t si uno es tanto preconjunto como postconjunto del otro, i.e. $p \subset \{\bullet t \cup t \bullet\}$ y $t \subset \{\bullet p \cup p \bullet\}$.

- **p-semiflujo.** Un p-semiflujo es un vector no negativo X el cual satisface que $X^T C = 0$. Al conjunto $\langle X \rangle = \{p_i | X(i) > 0\}$ se llama soporte de X .
- **t-semiflujo.** Un t-semiflujo es un vector no negativo Y el cual satisface que $CY = 0$. Al conjunto $\langle Y \rangle = \{t_i | Y(i) > 0\}$ se llama soporte de Y .
- **Vivacidad estructural.** Una RP N se dice que es *estructuralmente viva* si existe un marcado inicial vivo para N . Por ejemplo, se puede afirmar que todo grafo marcado es estructuralmente vivo.
- **Acotamiento estructural.** Una RP N se dice que es *estructuralmente acotada* si está acotada para cualquier marcado inicial finito M_0 .
- **Conservatividad.** Una RP N se dice que es *conservativa* si existe un entero positivo para todo lugar $p_i \in P$ tal que la suma de marcas es una constante para todo $M \in R(N, M_0)$, i.e. si existe un vector $X \in \{Z^{\geq 0}\}^n$ tal que $X^T C = 0$.

Cíclicidad. Una RP N se dice que es *cíclica* para un marcado M_0 si existe una secuencia de ocurrencia de eventos σ que permitan alcanzar el marcado inicial M_0 a partir de cualquier marcado M sucesor de M_0 , i.e. si existe un vector $Y \in \{Z^{\geq 0}\}^m$ tal que $CY = 0$.

Concurrencia. Sea $Y \in \{Z^{\geq 0}\}^m$ tal que $CY = 0$, dos transiciones $t_i, t_j \in Y$ son concurrentes si existen secuencias de ocurrencia $\sigma_q \neq \sigma_p \in L(Y)$, tal que se presentan $\sigma_q = \cdots t_i \cdots t_j \cdots$ y $\sigma_p = \cdots t_j \cdots t_i \cdots$.

Libre elección. Existe libre elección en una RPI si $\exists t_i \in T$ tal que $\forall p_k, p_j \in \bullet t_i$ con $|\bullet t_i| \neq \emptyset$ se tiene que $p_k \bullet = p_j \bullet$.

- **Pura.** Una RP es pura si no contiene autolasos.

Lugar implícito. Un lugar $p \in P$ de una RP N , está implícito si sólo existe un p-semiflujo X que lo contiene, tal que el p-semiflujo X comparte $\langle X \rangle - \{s\}$ lugares con al menos otro p-componente.

En la siguiente sección se define una clase de RP, las cuales heredan las propiedades antes mencionadas.

2.4. Redes de Petri Interpretadas

2.4.1. Definición

Las Redes de Petri Interpretadas (RPI) se presentan como un formalismo en el que se hace clara la relación existente entre una RP y un SED.

En RPI el conjunto de lugares como el de transiciones se dividen en dos grupos cada uno, según su representación física, definiéndose como sigue.

Definición 12 *El conjunto de lugares P se divide en:*

1. *El conjunto de **lugares medibles** P_{med} , es aquel en el que todo lugar $p \in P_{med}$ tiene un sensor asignado (perteneciente al SED); representados por un círculo sin relleno.*
2. *El conjunto de **lugares no medibles** P_{nmed} es aquel en que todo lugar $p \in P_{nmed}$ no tienen sensores asignados; representados por un círculo con relleno negro, a estos se les llama frecuentemente lugares negros.*

En este trabajo los lugares no medibles se rellenan con color gris oscuro, para poder observar las marcas que contienen en los ejemplos que se presentan.

Definición 13 *El conjunto de transiciones T se divide en:*

1. *El conjunto de transiciones controlables T_C , es aquel en el que una transición $t \in T_C$ son controladas desde la entrada del SED.*
2. *El conjunto de Transiciones no controlables T_{NC} , es aquel en el que una transición $t \in T_{NC}$ no se pueden controlar desde la entrada del SED.*

La definición de RPI es la siguiente.

Definición 14 *Una Red de Petri Interpretada (RPI) es la tupla $Q = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$ denotado en este trabajo como (Q, M_0) , para enfatizar que existe un marcado inicial en Q , donde:*

- $N = (G, M_0)$ es una RP marcada,

$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h\}$ es el alfabeto de entrada de la red, donde α_i es un símbolo de entrada.

$\lambda : T \rightarrow \Sigma \cup \{\epsilon\}$ es una función que asigna etiqueta a los eventos, tal que $\forall t_j, t_k \in T$ con $t_j \neq t_k$ si $\bullet t_j \neq \bullet t_k \wedge t_j \bullet \neq t_k \bullet$, con $\bullet t_j \neq \emptyset$, $\bullet t_k \neq \emptyset$, $t_j \bullet \neq \emptyset$ y $t_k \bullet \neq \emptyset$.

$\varphi : R(Q, M_0) \rightarrow (\mathbb{Z}^{\geq 0})^\varkappa$ es una función de salida, que asocia a cada marcado en $R(Q, M_0)$ un vector de salida. Aquí \varkappa es el número de salidas.

La función de salida φ puede verse como una función lineal de la forma $\varphi : \{Z^{\geq 0}\}^m \rightarrow \{Z^{\geq 0}\}^q$, que puede ser representada como una matriz de $q \times m$, donde m es el número de lugares, q es el número de lugares medibles y el i -ésimo vector renglón de φ es la transpuesta del vector elemental e_j , con $e_j[i \neq j] = 0$ y $e_j[j] = 1$. Podemos ver que hace falta una función lineal γ de la forma $\gamma : \{Z^{\geq 0}\}^m \rightarrow \{Z^{\geq 0}\}^{(m-q)}$, que puede ser representada por una matriz de la forma $(m-q) \times m$, donde $(m-q)$ es el número de lugares no medibles; el i -ésimo vector renglón γ_i de γ es la transpuesta del vector elemental e_j , con $e_j[i \neq j] = 0$ y $e_j[j] = 1$, de acuerdo al orden dado por el etiquetado de lugares. Así, la matriz de incidencia de una RPI se puede representar como sigue.

$$C = \begin{bmatrix} \varphi C \\ \gamma C \end{bmatrix}$$

2.4.2. Lenguajes en RPI

Una RPI presenta dos lenguajes importantes, definidos a continuación.

Definición 15 El lenguaje $L_{in}(SED) \subseteq \Sigma^*$ es el generado por las secuencias de ocurrencia de eventos manipulables se expresa en RPI por $L_{in}(Q, M_0) = \{t_i t_j \dots t_k | \lambda(t_i) \lambda(t_j) \dots \lambda(t_k) \in L_{in}(SED)\}$, llamado **lenguaje de entrada de la RPI** (Q, M_0) .

Definición 16 El lenguaje $L_V(SED)$ es el generado por las secuencias de vectores de salida del SED se expresa en RPI por $L_{out}(Q, M_0) = \{M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_w \xrightarrow{t_k} \dots | \varphi(M_0) \varphi(M_1) \dots \varphi(M_w) \in L_V(SED), t_i t_j \dots t_k \in L(Q, M_0)\}$, llamado **lenguaje de salida**.

2.4.3. Propiedades en RPI

Algunas definiciones de propiedades de RPI se presentan a continuación.

Definición 17 Evento detectabilidad. Una RPI es evento-detectable si el disparo de alguna transición se puede determinar únicamente por: el conocimiento de la entrada dada a la RPI y las señales de salida que se producen.

Definición 18 Leyes conservativas de mercado. Sea (Q, M_0) una RPI, al conjunto de ecuaciones $CML = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j^i \cdot M(p_j) = k_i \mid i \in [1, \dots, s], \alpha_j^i \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \right\}$. donde $\forall \alpha_k^i \neq 0$ se mantiene que k_i / α_k^i es un valor entero, se denomina conjunto de leyes conservativas de mercado, cuando todos los lugares no medibles de la red están contenidos en al menos una ecuación i.e. si p_j es un lugar no medible entonces $\exists i$ tal que $\alpha_j^i \neq 0$.

Definición 19 Mercado detectabilidad. Una RPI es mercado detectable en k pasos (con $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$) si y sólo si $\forall w \in L_{in}(N, M_0)$, en la que $|w| \leq k < \infty$, la información dada por el conocimiento de la palabra de entrada w , la palabra generada por w , la estructura y una CML es suficiente para determinar únicamente $M_k \in \mathbf{R}(N, M_0)$, donde $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_k$ y σ es la secuencia de disparo generada por w .

2.4.4. Componentes en RPI

Los p-componentes o t-componentes en RPI son subredes que se obtienen a partir de p-invariantes o t-invariantes de la matriz de incidencia, su respectiva definición se presenta a continuación.

Definición 20 Un p-componente $(PC_i, M_0^{PC_i})$ es una subred de (Q, M_0) , i.e., $(PC_i, M_0^{PC_i}) \subseteq (Q, M_0)$, la cual contiene en su conjunto P_{PC_i} de lugares a los que forman parte del soporte de un p-invariante X_i de Q y en el conjunto T_{PC_i} de transiciones a las que contienen tanto en su preconjunto como en su postconjunto al menos un lugar contenido en P_{PC_i} .

Definición 21 Un t-componente $(TC_j, M_0^{TC_j})$ es una subred de (Q, M_0) , i.e., $(TC_j, M_0^{TC_j}) \subseteq (Q, M_0)$, la cual contiene en su conjunto T_{TC_j} de transiciones a las que forman parte del soporte de un t-invariante Y_j de Q y en el conjunto P_{TC_j} de lugares a los que contienen tanto en su preconjunto como en su postconjunto al menos una transición contenida en T_{TC_j} .

Toda p-componente o t-componente hereda las propiedades de la RPI a la que pertenece.

2.5. Definiciones de observabilidad e identificación en RPI

Para presentar la definición de identificación y observabilidad es necesario presentar las siguientes definiciones [12].

Definición 22 Una secuencia de símbolos entrada-salida de (Q, M_0) es una secuencia $\omega = (\alpha_0, \zeta_0)(\alpha_1, \zeta_1) \cdots (\alpha_n, \zeta_n)$, aquí $\alpha_i \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ y α_{i+1} es la entrada actual a la RPI cuando la salida cambia de ζ_i a ζ_{i+1} . Se asume que $\alpha_0 = \epsilon$, $\zeta_0 = \varphi(M_0)$ y $(\alpha_{i+1}, \zeta_{i+1})$ pertenece a la secuencia cuando:

(α_i, ζ_i) pertenece a la secuencia,

- $\zeta_{i+1} \neq \zeta_i$, y
- no existe $\zeta_j \neq \zeta_i$, $\zeta_j \neq \zeta_{i+1}$ que ocurra después de la ocurrencia de ζ_i y antes de la ocurrencia de ζ_{i+1} .

Definición 23 Sea (Q, M_0) una RPI. El conjunto $\Lambda(Q, M_0) = \{\omega_1, \omega_2, \dots \mid \omega_i \text{ es una secuencia de pares de símbolos entrada-salida}\}$ denota el conjunto de todas las secuencias de símbolos entrada-salida de la RPI (Q, M_0) . Al conjunto de secuencias entrada-salida de cardinalidad mayor o igual que k será denotado por $\Lambda^k(Q, M_0)$, i.e. $\Lambda^k(Q, M_0) = \{\omega \in \Lambda(Q, M_0) \mid |\omega| \geq k\}$.

Definición 24 Si $\omega = (\alpha_0, \zeta_0)(\alpha_1, \zeta_1) \cdots (\alpha_n, \zeta_n)$ es una secuencia de símbolos entrada-salida, entonces la secuencia de ocurrencia de transiciones $\sigma \in L(Q, M_0)$ cuya ocurrencia genera a ω , es denotada por σ_ω . El conjunto de todas las secuencias de ocurrencia de transiciones que puede generar a la secuencia ω esta definida como $\Omega(\omega) = \{\sigma \mid \sigma \in L(Q, M_0) \wedge \text{la ocurrencia de } \sigma \text{ produce } \omega\}$.

Definición 25 El conjunto de todas las secuencias entrada-salida que llevan a un marcado final en la RPI (marcados que no habilitan transiciones o sólo habilitan transiciones en autolazo) se denota por $\Lambda_B(Q, M_0)$, i.e. $\Lambda_B(Q, M_0) = \{\omega \in \Lambda(Q, M_0) \mid \exists \sigma \in \Omega(\omega) \text{ tal que } M_0 \xrightarrow{\sigma} M_j \wedge \text{ si } M_j \xrightarrow{t_i} \text{ entonces } C(\bullet, t_i) = \vec{0}\}$.

Definición 26 Lenguaje entrada-salida. Sea (Q, M_0) una RPI, el lenguaje entrada-salida $L_{I/O}(Q, M_0)$, es aquel que contiene secuencias entrada-salida, donde $\omega_i \in L_{I/O}(Q, M_0)$ es generada por $\sigma_i \in L(Q, M_0)$.

Tomando las definiciones anteriores como base, las definiciones de identificación y observabilidad son las siguientes.

Definición 27 Una RPI dada por (Q, M_0) , donde M_0 puede ser desconocido, es observable si existe un entero $k < \infty$ tal que $\forall \omega \in \Lambda^k(Q, M_0) \cup \Lambda_B(Q, M_0)$ se mantiene que la información dada por ω y (Q, M_0) es suficiente para determinar unicamente el marcado inicial M_0 y el marcado M_i alcanzado por el disparo de una secuencia de disparo de transiciones σ_ω .

Definición 28 Una RPI (Q, M_0) en la que ocurre al menos una vez cada uno de sus t -componentes, es identificable si se presenta un subconjunto de secuencias entrada-salida $\Xi \subseteq \Lambda^k(Q, M_0) \cup \Lambda_B(Q, M_0)$ que permita determinar la matriz de incidencia C .

En la siguientes sección se presenta un método para obtener RPI a partir de sistemas de transiciones de excitación cerrada.

2.6. Derivación de RPI de Sistemas de Transiciones (TS)

Con la derivación de RPI a partir de TS (presentado en [2]), nos referimos a la síntesis de RP binarias que no contienen lugares implícitos, cuyo grafo de alcanzabilidad es bisimilar (concepto definido en esta sección) al TS original.

A continuación presentamos la definición de un TS. Un ejemplo se muestra en la figura 2.2.

Definición 29 *Un sistema de transiciones (TS) es un grafo dirigido representado por la tupla (S, T, F, s_{in}) donde:*

S : conjunto no vacío de estados.

T : conjunto de eventos.

$F \subseteq S \times T \times S$: relación de transiciones.

s_{in} : estado inicial.

*Un TS puede ser determinístico, no determinístico, cumple con la cerradura transitiva (relación de alcanzabilidad entre estados) denotada por T^**

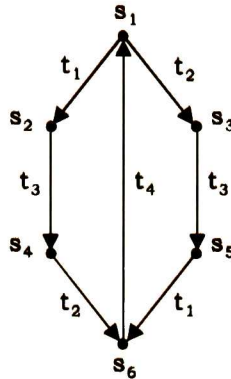


Figura 2.2: Ejemplo de un Sistema de Transiciones.

A continuación se presenta el concepto de isomorfismo y bisimilaridad en TS.

Definición 30 *Isomorfismo. Sean TS_1 y TS_2 dos sistemas de transiciones. Un isomorfismo h entre TS_1 y TS_2 es el par (h_s, h_t) de mapeos biyectivos de la forma:*

$$h_s : S_1 \longrightarrow S_2$$

$$h_t : T_1 \longrightarrow T_2$$

$$\text{los cuales satisfacen } (s, t, st) \in T_1 \iff (h_s(s), h_t(t), h_s(st)) \in T_2.$$

Un ejemplo de un isomorfismo se muestra en la figura 2.3, en la que se satisface la definición de isomorfismo

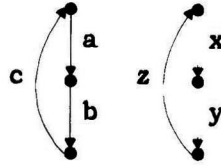


Figura 2.3: Isomorfismo

Definición 31 *Bisimulación.* Sean TS_1 y TS_2 dos sistemas de transiciones con el mismo conjunto de eventos. Una bisimulación entre TS_1 y TS_2 es una relación binaria R entre S_1 y S_2 tal que:

$$1.a \quad \forall s_i \in S_1, \exists s_j \in S_2 : s_i R s_j.$$

$$1.b \quad \forall s_j \in S_2, \exists s_i \in S_1 : s_i R s_j.$$

$$2.a \quad \forall (s_i, t, s_k) \in T_1 \wedge \forall s_j, s_l \in S_2 : s_i R s_j, \exists (s_j, t, s_l) \in T_2 : s_k R s_l.$$

$$2.b \quad \forall (s_j, t, s_l) \in T_2 \wedge \forall s_i, s_k \in S_1 : s_i R s_j, \exists (s_i, t, s_k) \in T_1 : s_k R s_l.$$

Un ejemplo de una simulación se muestra en la figura 2.4.

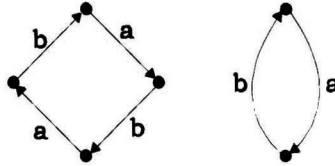


Figura 2.4: Bisimulación.

Intuitivamente, las condiciones 1.a y 2.a definen una simulación de TS_1 por TS_2 . Dos TS's se dicen similares si se pueden simular entre sí, i.e., si existe una bisimulación entre ellos.

Es posible la existencia de una bisimulación en un mismo TS , y se define como sigue.

Definición 32 *Auto-bisimulación y estados bisimilares [5].* Sea $TS = (S, T, F, s_{in})$ un TS . Una auto-bisimulación de TS es una bisimulación entre TS y el mismo. Dos estados $s_1, s_2 \in S$ son bisimilares si $s_1 R s_2$ para alguna auto-bisimulación de TS .

La relación R ("es bisimilar a") es una relación de equivalencia y particiona a los TS 's en clases de equivalencia. Un TS se dice que es mínimo si ningún otro elemento en su clase de equivalencia tiene un conjunto de estados con cardinalidad menor, la definición se presenta a continuación.

Definición 33 *TS mínimo.* Un TS se dice mínimo si éste no contiene estados diferentes, s_1 y s_2 , los cuales sean bisimilares.

Para obtener una RP a partir de un TS mínimo se utiliza el concepto de región. Intuitivamente una región en un TS es un conjunto de estados, tal que las transiciones entrantes y salientes simulan el comportamiento del disparo de una transición en RP.

Para presentar la definición formal de región se utiliza la siguiente definición:

Definición 34 Dado un $TS = (S, T, F, s_{in})$, sea $S' \subseteq S$ y $t \in T$

$$in(t, S') \equiv \exists (s, t, s') \in F : s, s' \in S'$$

$$out(t, S') \equiv (s, t, s') \in F : s, s' \notin S'$$

$$enter(t, S') \equiv (s, t, s') \in F : s \notin S' \wedge s' \in S'$$

$$exit(t, S') \equiv (s, t, s') \in F : s \in S' \wedge s' \notin S'$$

La definición de región es la siguiente.

Definición 35 Sea $TS = (S, T, F, s_{in})$, $r \subseteq S$ es una región si

$$1. \quad enter(t, S') \equiv (s, t, s') \in F : s \notin S' \wedge s' \in S'$$

$$2. \quad exit(t, S') \equiv (s, t, s') \in F : s \in S' \wedge s' \notin S'$$

Notación.

R_{TS} : Conjunto de regiones no triviales.

R_s : $s \in S$, conjunto de regiones no triviales conteniendo a s .

${}^\circ t$: conjunto de prerregiones de la transición t . $exit(t, s)$.

t° : conjunto de postregiones de la transición t . $enter(t, s)$.

Definiciones sobre regiones.

Definición 36 *Subregión:* r' es subregión de r ssi $r' \subset r$.

Definición 37 *Región mínima:* r es mínima si no existe una región r' tal que $r' \subset r$.

Propiedades sobre regiones.

1. Si r y r' son regiones diferentes tal que r' es una subregión de r , entonces $r - r'$ es una región.
2. El conjunto de estados r es una región ssi su complemento $\bar{r} = S - r$ es una región.
3. Toda región puede ser representada como la unión de regiones mínimas disjuntas.

El método que se utiliza para la síntesis de RP utiliza una clase especial de TS, llamado Sistema de Transiciones Elementales (ETS). Un ETS requiere que se satisfagan los siguientes axiomas:

1. No existen autolazos: $(s_i, t, s_j) \in F : s_i \neq s_j$.
2. Toda transición tiene una ocurrencia: $t \in T : \exists (s_i, t, s_j) \in F$.
3. Todo estado es alcanzable desde el estado inicial: $\forall s \in S : s_{in} \xrightarrow{*} s$.
4. Propiedad de separación del estado: $\forall s_i, s_j \in S : [R_{s_i} = R_{s_j} \implies s_i = s_j]$.
5. Propiedad de cerradura hacia adelante: $\forall s \in S \wedge \forall t \in T : [{}^{\circ}t \subseteq R_s \implies s \xrightarrow{t}$

Se mostró en [4] que el RG de una RP es siempre un ETS y viceversa, i.e, si un TS es elemental, entonces se puede construir una RP con un grafo de alcanzabilidad isomorfo al TS.

El algoritmo dado en [4] para la síntesis de RP $N_{TS} = (P_{TS}, T_{TS}, F_{TS}, M_{0_{TS}})$ a partir de un ETS mínimo, i.e, un $TS = (S, T, F, s_{in})$ elemental que satisface los axiomas y es mínimo, es el siguiente.

Para cada transición $t \in T$, generar una transición etiquetada con t en la RP.

- Para cada región r_i , generar un lugar $p_{i \in R_{TS}}$.
- El lugar p_i contendrá una marca en el estado inicial si y sólo si la región correspondiente r_i contiene el estado inicial s_{in} del ETS.

La relación de flujo es como sigue: $t \in p_i \bullet$ si y sólo si su región correspondiente r_i es una prerregión de t , y, $t \in \bullet p_i$ si y sólo si su región correspondiente r_i es una postregión de t , i.e.

$$F_{TS} = \{(p, t) \mid p \in P_{TS} \wedge t \in T \wedge p \in {}^{\circ}t\} \cup \{(t, p) \mid p \in P_{TS} \wedge t \in T \wedge p \in t^{\circ}\}$$

A continuación se presenta un método alternativo para representar RPI, mas no se presenta el conjunto de algoritmos necesarios para obtener la RPI a partir del comportamiento que propone Meda, dada su cantidad, dejando como referencia [1].

2.7. Representación de RP como un conjunto de dependencias

Dependencias es un método alternativo para representar la estructura de una RPI. Se presentan a continuación la definición de dependencia e independencia presentada en [1], a las que se realizan modificaciones técnicas.

Definición 38 Sea T el alfabeto del lenguaje $L_i \subseteq T^*$ generado por una RPI (Q_i, M_0) . El subconjunto $\beta_k \times \beta_m \in T \times T$ se dice que forma una dependencia si $\exists p_x$ tal que $\forall t_i \in \beta_k$ y $\forall t_j \in \beta_m$ se tiene a $p_x \subset \{t_i \bullet\} \cap \{\bullet t_j\}$, y se denotada por $\bullet p_x \bullet = \{\dots, (t_i, t_j), \dots\}$.

Como ejemplo se tiene la dependencia $\bullet p_x \bullet = \{(t_i, t_j)\}$ que se muestra en la figura 2.5, en el par (t_i, t_j) se coloca t_i antes que t_j para indicar que se dirige un arco de t_i a p_x y un arco de p_x a t_j . A una dependencia que contiene sólo un par, i.e., $\bullet p_x \bullet = \{(t_i, t_j)\}$, se le llama dependencia simple. El conjunto de dependencias de una RPI (Q_i, M_0) se denota por $Dep(Q_i)$.

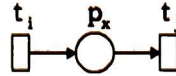


Figura 2.5: Estructura de la dependencia $\bullet p_x \bullet = \{(t_i, t_j)\}$.

Definición 39 Sea T el alfabeto del lenguaje $L_i \subseteq T^*$ generado por una RPI (Q_i, M_0) . El subconjunto $\beta_k \times \beta_m \in T \times T$ se dice que forma independencias si $\forall t_i \in \beta_k$ y $\forall t_j \in \beta_m$ $\nexists p_x \subset \{t_i \bullet\} \cap \{\bullet t_j\}$. El conjunto de independencias de una RPI (Q_i, M_0) se denota por $Ind(Q_i) = \{\dots, (t_i, t_j), \dots\}$.

Si una dependencia contiene más de una dependencia simple, como se muestra en la figura 2.6, donde la dependencia $\bullet p_x \bullet = \{(t_i, t_j), (t_i, t_l), (t_k, t_j), (t_k, t_l)\}$, se le conoce como dependencia compleja.

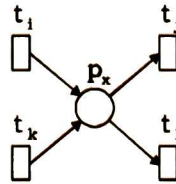


Figura 2.6: Estructura de una dependencia compleja.

Como pueden existir lugares medibles y no medibles en una RPI (Q_i, M_0) el conjunto de dependencias, denotado por $Dep(Q)$, se divide en dependencias medibles, denotado por $MDep(Q)$, y dependencias no medibles, denotado por $NDep(Q)$; i.e., $Dep(Q) = MDep(Q) \cup NDep(Q)$. Una dependencia medible y una dependencia no medible se muestran en la figura 2.7.

Así, la estructura de una RPI (Q_i, M_0) se puede representar como la unión del conjunto de dependencias medibles y no medibles, i.e. $MDep(Q) \cup NDep(Q)$.

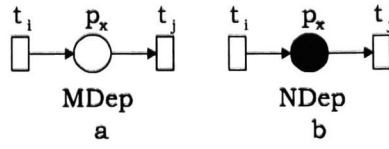


Figura 2.7: Dependencia a) medible y b) no medible.

Capítulo 3

Análisis del problema de identificación

3.1. Introducción

Una forma de analizar un sistema es mediante su modelo matemático. El modelo matemático de un sistema se puede obtener mediante un identificador, el cual es generalmente un algoritmo, que toma como entrada el comportamiento del sistema.

El problema de identificación se define como: obtener un identificador de modelos matemáticos, tal que un modelo matemático obtenido describa el comportamiento que se da como entrada al identificador.

En la literatura de SED, como se mencionó en la sección 1.1, existen trabajos que presentan identificadores en línea, los cuales utilizan a las RP como herramienta de modelado, dado que con estas se tiene mayor capacidad de análisis y modelos más compactos. Una buena aproximación a la solución del problema de identificación de RPI para modelar SED es el trabajo presentado por Meda [1], en donde se define una subclase de RPI, a la cual se hará referencia como la clase Γ de RPI, para la cual se presenta un algoritmo de identificación en línea, cuya entrada es el comportamiento de un SED. Sin embargo, se vera que en la clase Γ de RPI pueden existir otras estructuras de RPI que también generan un mismo comportamiento. Entonces, uno de los problemas a resolver es encontrar las propiedades adicionales que deben cumplir las RPI de la clase Γ , definiendo una clase Ψ de RPI, en la cual sea posible identificar la RPI $(Q_i, M_0) \in \Psi$ que genere el comportamiento del sistema observado. Además, una RPI identificada de la clase Ψ debe generar un comportamiento más próximo al comportamiento observado de un sistema, en comparación con el comportamiento generado por la RPI identificada de la clase Γ .

Además, uno de los problemas no resueltos en [1] es determinar la existencia de lugares no medibles que modelan exclusión en un recurso compartido por dos o más actividades. Para resolver el problema se presenta un método basado en una propiedad entre actividades, a la cual denominamos pseudo concurrencia.

3.2. Análisis del problema de identificación

A continuación se analiza el problema de identificación en línea estructural de modelos internos y modelos entrada/salida (E/S). La identificación en línea se refiere a que el modelo matemático se identifica conforme evoluciona el sistema. La identificación estructural se refiere a la identificación de la estructura del modelo del sistema. El modelo interno es el que presenta de manera exacta los parámetros y los vectores de la matriz de entrada, de la matriz de salida y de la matriz de estado, del sistema. El modelo E/S es el que presenta el orden del polinomio del numerador y denominador más sus coeficientes, en la función de transferencia del sistema.

Dado que un modelo interno genera de manera única el comportamiento del sistema, se comienza haciendo la identificación en línea estructural del modelo interno, para lo cual se requiere que dada una clase de comportamientos de SED se defina una clase de RP, tal que un comportamiento contenido en esa clase de comportamientos sea modelado por una única RPI contenida en esa clase de RP. Lo anterior establece un isomorfismo entre la clase de comportamientos y la clase de RP.

En uno de los trabajos que se reportan en la literatura [1] se presenta un algoritmo para realizar identificación en línea de RPI a partir del comportamiento de un SED, en éste se define la clase Γ de RPI, donde una RPI perteneciente a esta clase de RPI es viva, cíclica, evento detectable, binaria y no contiene lugares no medibles implícitos. Verificando si con la clase Γ de RPI es posible establecer un isomorfismo entre una clase de comportamientos y la clase Γ de RPI, se encontró que pueden existir más de dos RPI que generan un mismo comportamiento en la clase Γ de RPI. Además, si a partir del comportamiento del sistema se genera un autómata a partir del cual se hace síntesis de RPI [2], se obtiene el mismo resultado. Esto se presenta a continuación.

3.2.1. RPI que generan un mismo comportamiento

Podemos demostrar, usando un contraejemplo, que existen RPI en la clase Γ que generan el mismo comportamiento descrito por un conjunto de secuencias entrada-salida y cuya identificación no es posible. Por ejemplo, las RPI de la figura 3.1 pertenecen a la clase Γ . Estas RPI presentan la característica de que contienen a dos t-componentes que evolucionan de manera exclusiva, además generan el mismo conjunto $\Lambda(Q, M_0)$ de secuencias entrada-salida, i.e. $\Lambda(Q, M_0) = \Lambda(Q_1, M_0^1) = \Lambda(Q_2, M_0^2)$, el cual se presenta a continuación:

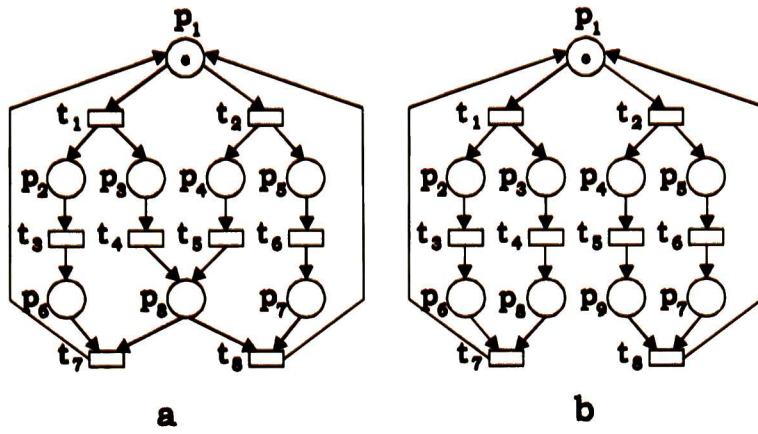


Figura 3.1: RPI pertenecientes a la clase Γ a) (Q_1, M_0^1) , b) (Q_2, M_0^2) .

$$\Lambda(Q, M_0) = \left[\begin{array}{l} \omega_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ \omega_2 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right]$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_2, 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_6, 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_5, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t_8, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\omega_4 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_2, 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_6, 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_5, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ t_8, 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aquí los vectores de salida involucran únicamente a los 7 lugares medibles.

Entonces, para verificar si es posible la identificación de estas RPI a partir del comportamiento que modelan, se considera el conjunto $\Lambda(Q, M_0)$ de secuencias entrada-salida como la entrada al algoritmo de Meda [1]. El resultado es la RPI de la figura 3.1.b, aún en el caso de que la estructura de la RPI a identificar sea la mostrada en la figura 3.1.a.

Para obtener la RPI (Q_1, M_0^1) de la figura 3.1.a (que contiene menor número de lugares) a partir de la RPI (Q_2, M_0^2) de la figura 3.1.b, es necesario realizar una combinación lineal entre los renglones de la matriz de incidencia para los lugares no medibles p_8 y p_9 de la RPI (Q_2, M_0^2) . Esto permite obtener el renglón correspondiente al lugar no medible p_8 en la RPI (Q_1, M_0^1) , substituyendo así los lugares p_8 y p_9 en la RPI (Q_2, M_0^2) . Este es un caso especial en el que se puede hacer la combinación lineal entre dos lugares no medibles y se conserva el comportamiento en la RPI. Un caso en el que no es posible hacerlo es en la RPI (Q_3, M_0^3) de la figura 3.2.a, ya que si se hace la combinación lineal de los lugares no medibles p_6 y p_7 se obtiene la RPI (Q_4, M_0^4) de la figura 3.2.b (donde p_6 substituye a p_6 y p_7 en (Q_3, M_0^3)) la cual genera un conjunto $\Lambda(Q_4, M_0^4)$ de secuencias entrada-salida mayor al que genera la RPI (Q_3, M_0^3) .

Entonces, para obtener la RPI cuyo número de lugares no medibles sea menor, es necesario generar un algoritmo de orden exponencial que determine cuáles son las combinaciones lineales de lugares no medibles que se pueden realizar, tal que la RPI resultante genere únicamente el conjunto de secuencias entrada-salida de la RPI en cuestión. Entonces, dada la complejidad del algoritmo requerido, no resulta (en general) posible la identificación de RPI como (Q_1, M_0^1) y (Q_4, M_0^4) .

Un método para realizar síntesis de RPI a partir de un autómata obtenido mediante un conjunto $\Lambda(Q, M_0)$ de secuencias entrada-salida es el que presenta Cortadella [2], basándose en la teoría de regiones. Este método se utiliza para verificar si es posible obtener RPI como (Q_1, M_0^1) y (Q_4, M_0^4) , representando en la forma de un autómata (fig 3.3.b) el conjunto $\Lambda(Q, M_0)$,

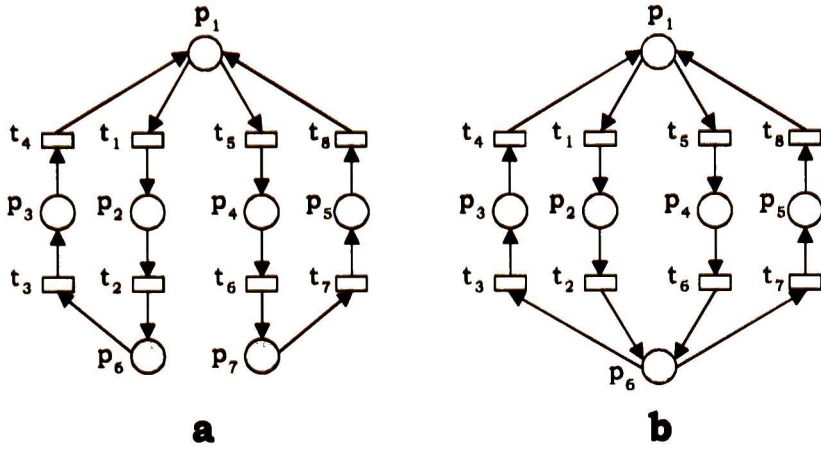


Figura 3.2: a) RPI (Q_3, M_0^3) , b) RPI (Q_4, M_0^4) .

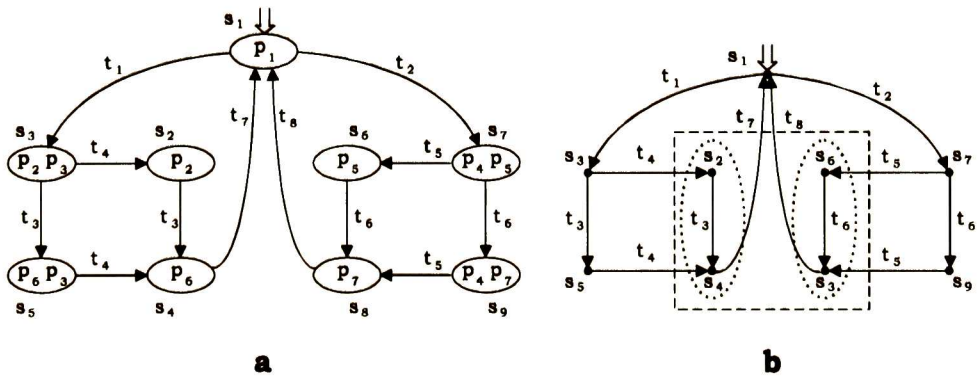


Figura 3.3: Grafos isomorfos. a) Grafo de alcanzabilidad de la RPI de la figura ?? a) Autómata.

el cual resulta isomorfo al grafo de alcanzabilidad tanto de (Q_1, M_0^1) como de (Q_2, M_0^2) (fig 3.3). Utilizando este método, se obtiene la RPI (Q_2, M_0^2) de la figura 3.1.b. Esto se debe a que si se utilizan las regiones mínimas $r_1 = \{s_1\}$, $r_2 = \{s_2, s_3\}$, $r_3 = \{s_3, s_5\}$, $r_4 = \{s_7, s_9\}$, $r_5 = \{s_6, s_7\}$, $r_6 = \{s_4, s_5\}$, $r_7 = \{s_8, s_9\}$, $r_8 = \{s_2, s_4\}$ y $r_9 = \{s_6, s_8\}$ se obtiene la RPI (Q_2, M_0^2) , donde el índice de éstas corresponde al índice de los lugares en la RPI de la figura 3.1.b. Para obtener la RPI (Q_1, M_0^1) es necesario generar la región no mínima r_{10} a partir de las regiones mínimas r_8 y r_9 , i.e., $r_{10} = r_8 \cup r_9$, con la cual se obtiene el lugar p_8 de la RPI (Q_1, M_0^1) de la figura 3.1.a. Este es un caso especial en el que se puede obtener una RPI con menor número de lugares utilizando regiones mínimas. En general, si se quiere determinar cuando es posible generar regiones no mínimas, tal que la RPI obtenida genere el conjunto $\Lambda(Q, M_0)$ de secuencias entrada-salida observado, se requiere de un algoritmo con complejidad exponencial, dado que es preciso realizar una combinatoria entre las distintas regiones mínimas, lo cual hace no posible a la identificación.

Se observa que es posible para un conjunto de secuencias entrada-salida la existencia de más de dos RPI que generan este conjunto, donde los lugares no medibles de la estructura de una RPI (Q_a, M_0^a) (por ejemplo p_8 y p_9 en (Q_2, M_0^2)) sean combinación lineal de un lugar no medible (p_8 en (Q_1, M_0^1)) de otra RPI (Q_b, M_0^b) y ambas generen el mismo conjunto de secuencias entrada-salida, i.e., $\Lambda(Q_a, M_0^a) = \Lambda(Q_b, M_0^b)$.

Un poco más formalmente, es posible que se puedan combinar linealmente lugares no medibles contenidos en al menos dos t-componentes $(TC_x, M_0^{TC_x}), (TC_y, M_0^{TC_y})$, las cuales están en exclusión en la RPI $(Q_a, M_0^a) \in \Gamma$ que genera el conjunto $\Lambda(Q_a, M_0^a)$ de secuencias entrada-salida. La combinación lineal de estos lugares da lugar a una segunda RPI (Q_b, M_0^b) que genera el mismo conjunto $\Lambda(Q_a, M_0^a)$ de secuencias entrada-salida. Este es el caso de las RPI de la figura 3.1. Otro posible caso es el de la RPI (Q_3, M_0^3) de la figura 3.2.a, en el que el resultado de la combinación lineal de los lugares no medibles es el lugar no medible de la RPI (Q_4, M_0^4) . Como en este caso se incrementa el número de t-semiflujos, entonces también lo hace el conjunto $\Lambda(Q_4, M_0^4)$ de secuencias entrada-salida. Por consiguiente, para poder obtener una RPI, cuya identificación sea practicable, a partir de un conjunto de secuencias entrada-salida, es necesario añadir una condición a la clase Γ de RPI, tal que no se consideren las RPI que se pueden construir de una segunda RPI mediante combinación lineal de lugares no medibles contenidos en distintas t-componentes en exclusión. Esta condición lleva a presentar una de las propiedades con las cuales se define la clase Ψ de RPI, la definición es la que se presenta a continuación.

Definición 40 *Lugar no combinable linealmente.* Sean al menos dos t-componentes, i.e., $(TC_i, M_0^{TC_i}), \dots, (TC_j, M_0^{TC_j}) \subseteq (Q_a, M_0^a)$, en exclusión obtenidas a partir de un conjunto $\Lambda(Q_a, M_0^a)$ de secuencias entrada salida, la RPI (Q_a, M_0^a) es lugar no combinable linealmente si los lugares no medibles que comparten las t-componentes no son el resultado de una combinación lineal de lugares independientes de una segunda RPI (Q_b, M_0^b) tal que $\Lambda(Q_a, M_0^a) = \Lambda(Q_b, M_0^b)$.

Así, una RPI (Q, M_0) perteneciente a la clase Ψ de RPI identificables es la que presenta las

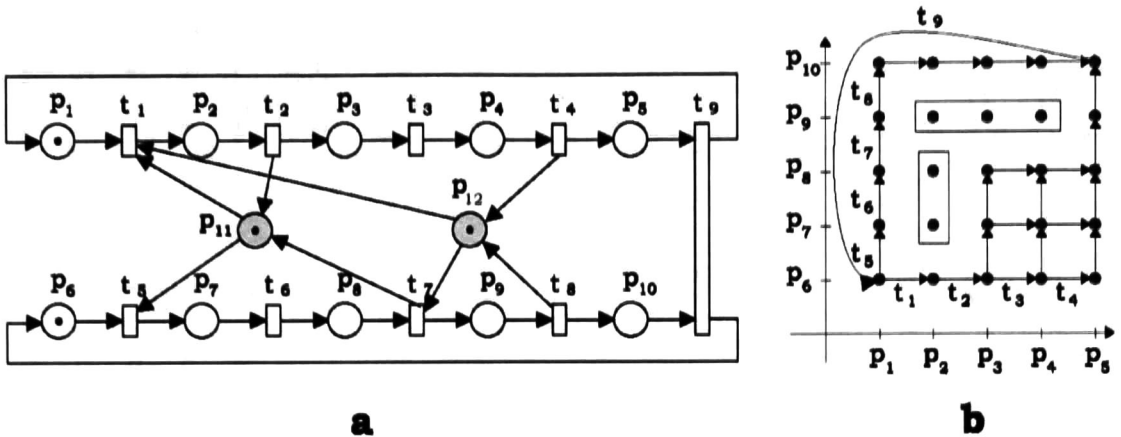


Figura 3.4: a) RPI (Q_A, M_0) que presenta dos exclusiones mutuas, b) Gráfica bidimensional del grafo de alcanzabilidad de la RP (Q_A, M_0) .

siguientes propiedades:

- Viva.
- Cíclica.
- Evento-detectable.
- Pura.
- Binaria.

No contiene lugares no medibles implícitos.

- Lugar no combinable linealmente.

Una vez definida la clase Ψ de RP, se procedió a verificar si con esta clase de RPI es posible establecer el isomorfismo, para lo cual se encontró que existen múltiples RPI que generan un mismo comportamiento, i.e. suponiendo que se ha identificado la RPI (Q_A, M_0) de la figura 3.4.a la cual modela exclusión mutua, restringiendo un conjunto de estados encerrados por los rectángulos que se presentan en la gráfica de alcanzabilidad de la figura 3.4.b; el mismo conjunto de estados se restringe en la RPI (Q_B, M_0) que se presenta en la figura 3.5.a, la cual modela el mismo comportamiento que la RPI de la figura 3.4.a.

Aquí se podría añadir otra propiedad a la clase Ψ de RPI definiendo una manera de hacer el agrupamiento de los estados a restringir mediante exclusión mutua, pero se haría muy restrictiva la clase Ψ de RPI a definir. Entonces, se obtiene que pueden existir dos o más RPI en la clase Ψ de RPI que modelan un mismo comportamiento.

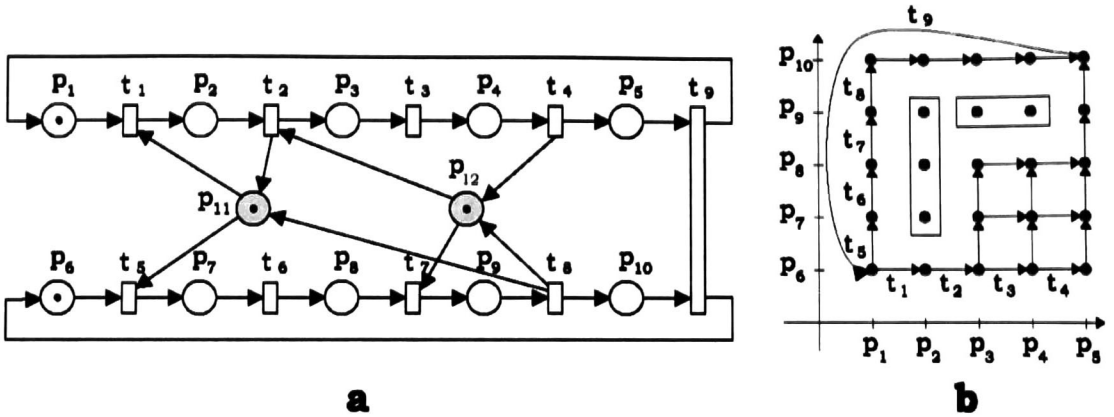


Figura 3.5: a) RPI (Q_B, M_0) que presenta dos exclusiones mutuas, b) Gráfica bidimensional del grafo de alcanzabilidad de la RP (Q_B, M_0) .

De lo anterior se concluye que no es posible establecer el isomorfismo. Por lo tanto, no es posible realizar identificación en línea estructural de modelos internos.

Por lo tanto, se continua con la identificación en línea estructural de modelos entrada-salida para SED, problema ya considerado en la literatura [1], resolviendo el siguiente problema.

Problema de tesis. Obtener un algoritmo para hacer identificación en línea estructural entrada-salida de RPI, tal que el conjunto $\Lambda(Q_{ident}, M_0^{ident})$ de secuencias que genera una RPI (Q_{ident}, M_0^{ident}) identificada, contenga al conjunto $\Lambda(Q_{syst}, M_0^{syst})$ de secuencias entrada salida que representan el comportamiento del sistema a identificar y este contenido en el conjunto de secuencias $\Lambda(Q_{lit}, M_0^{lit})$ que genera la RPI (Q_{lit}, M_0^{lit}) identificada con los algoritmos presentados en la literatura actual [1], i.e. $\Lambda(Q_{syst}, M_0^{syst}) \subseteq \Lambda(Q_{ident}, M_0^{ident}) \subseteq \Lambda(Q_{lit}, M_0^{lit})$.

Para darle una solución al problema de tesis, se debe presentar un algoritmo para realizar identificación en línea estructural de RPI entrada-salida que modelen únicamente a los estados alcanzados por el comportamiento que se da como entrada al algoritmo. Lo cual se logra presentando un método para obtener exclusión mutua como se muestra en la siguiente sección, en donde se presenta un método para determinar la existencia de lugares no medibles que modelan exclusión en un recurso compartido por dos o más actividades.

3.3. Método para obtener exclusión mutua en RPI de la clase

Ψ

Se propone resolver el problema de identificar RPI que modelan exclusión mutua, donde el lugar en exclusión es no medible. Utilizamos el concepto de pseudo concurrencia y concurrencia [1] para este caso, cuya definición se presenta a continuación.

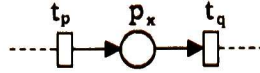


Figura 3.6: Ruta para $\sigma_i = \dots t_p t_q \dots$



Figura 3.7: Autolasos.

Definición 41 Sea (Q, M_0) una RPI y $(TC_k, M_0^{TC_k}) \subseteq (Q, M_0)$ una t -componente, dos transiciones t_r y t_s pertenecientes a TC_k son transiciones pseudo concurrentes si existen dos secuencias de transiciones $\sigma_x \neq \sigma_y \in \mathcal{L}(TC_k, M_0^{TC_k})$, tal que $\sigma_x = \dots t_r \psi_a t_s \dots$ y $\sigma_y = \dots t_s \psi_b t_r \dots$ con $|\psi_a| > 0$ o $|\psi_b| > 0$. Además, si ocurre que existen $\sigma_i = \dots t_r t_s \dots$ y $\sigma_j = \dots t_s t_r \dots$ entonces se dice que t_r y t_s son concurrentes.

Estas definiciones se estudian a continuación.

Sea una palabra de la forma $\sigma_i = \dots t_p t_q \dots$ con el algoritmo presentado en [1], se obtiene una ruta como se muestra en la figura 3.6.

Si en una etapa posterior a σ_i , ocurre $\sigma_j = \dots t_q t_p \dots$ i.e., t_p y t_q son concurrentes, entonces, se elimina el arco dirigido de t_p a p_x y el de p_x a t_q de acuerdo a [1], y se añade el par (t_p, t_q) al conjunto de transiciones concurrentes Θ , i.e $(t_p, t_q) \in \Theta$. La eliminación de arcos se realiza porque si con σ_j se añade un arco de t_q a p_x y otro de p_x a t_p (figura 3.7), se crean autolasos, violando así la propiedad de que las RPI en Ψ son puras.

Ahora, redibujando la ruta obtenida por la secuencia $\sigma_i = \dots t_p t_q \dots$ como se muestra en la figura 3.8.a, si una secuencia posterior es $\sigma_j = \dots t_q \psi t_p \dots$ con $|\psi| > 0$ (figura 3.8.b), i.e., t_p y t_q son pseudo concurrentes, en [1] el arco dirigido de t_p a p_x y el de p_x a t_q se eliminan obteniendo una RPI que llega a generar un lenguaje mucho mayor al observado. Entonces, para evitar esta situación, se considera la posibilidad de que con la ocurrencia de una transición t_s posterior a t_q en ψ (figura 3.8.c), se esté colocando una marca en el lugar p_x . Así, con la marca en p_x es posible la ocurrencia de la transición t_q en σ_j . Por consiguiente, se considera la existencia de una transición t_t que posterior a la ocurrencia de t_s en σ_j quita la marca de p_x (figura 3.8.d) y con la ocurrencia de la transición t_p en σ_j se coloca una marca en p_x nuevamente. Lo anterior se ilustra en la figura 3.8. Entonces, cuando se presente pseudo concurrencia se pretende obtener dos cadenas de transiciones de la forma $w_1^{p_x} = t_q \dots t_s$ y $w_2^{p_x} = t_t \dots t_p$ si existen, las cuales generan rutas describiendo actividades que requieren de una marca en p_x para realizarse.

Estas cadenas se encuentran de la siguiente forma.

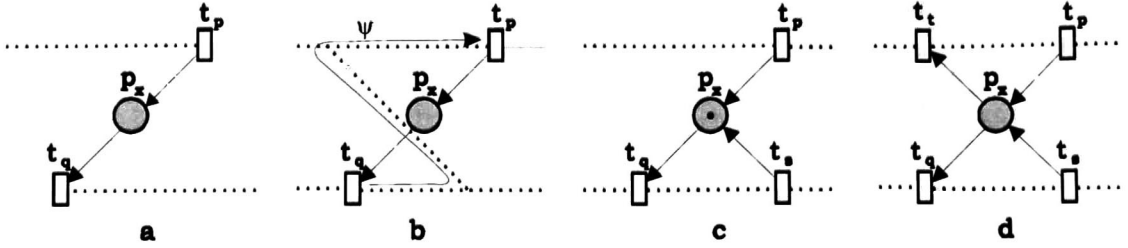


Figura 3.8:

Rescribiendo $\sigma_j = \psi_1 t_q \psi_2 t_p \psi_3$, donde ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son secuencias de transiciones, una vez identificada la estructura para la secuencia de transiciones ψ_1 , y siguiendo con la transición t_q , como existe un arco del lugar p_x a la transición t_q y p_x no tiene marca, suponemos que el lugar p_x tuvo una marca que habilita a t_q , la cual con la ocurrencia de t_q la pierde; así, con t_q se inicia una cadena $w_1^{p_x} = t_q$ a la cual se le concatenan ordenadamente por la derecha las transiciones de la secuencia ψ_2 que cumplan con la condición de que $w_1^{p_x}$ describa una ruta; si t_s es la última transición que cumple con esta condición, entonces, con la siguiente transición, i.e., t_t , que no cumple con la condición, se inicia una segunda cadena $w_2^{p_x} = t_t$ a la cual se concatenan ordenadamente por la derecha las transiciones restantes de ψ_2 que cumplan con la condición de que $w_2^{p_x}$ describa una ruta; una vez que se hayan recorrido todas las transiciones de ψ_2 , se concatena por la derecha la transición t_p a $w_2^{p_x}$, donde con la ocurrencia de t_p se considera que se regresa la marca a p_x .

Suponiendo que ya se identificó la estructura para la secuencia $\sigma_i = \dots t_p t_q \dots$, el método que se propone para obtener de $\sigma_j = \dots t_q \psi t_p \dots$ las cadenas $w_1^{p_x}$ y $w_2^{p_x}$ se describe en los siguientes pasos.

Obtención de $w_1^{p_x}$ y $w_2^{p_x}$

1. Dada $\sigma_j = \psi_1 t_q \psi_2 t_p \psi_3$, una vez identificada la estructura para la secuencia de transiciones ψ_1 , y siguiendo con la transición t_q , crear e inicializar la cadena $w_1^{p_x} = t_q$, y $\forall t_i \in \psi_2$, con $|\psi_2| = c$ $i = 1 \dots c$, concatenar ordenadamente por la derecha la transición t_i , si se cumple lo siguiente:
 - a) que t_i no sea concurrente con la última transición de $w_1^{p_x}$.
 - b) que mediante la matriz de incidencia obtenida con la ocurrencia de t_i , se pueda obtener una ruta descrita por $w_1^{p_x} \cdot t_i$,
 - c) si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_a \in \bullet t_i$ contenido en el postconjunto de alguna transición t_h que forme parte de $w_1^{p_x}$; si resulta

Verdadero. Se suprimen en $w_1^{p_x}$ las transiciones posteriores a t_h , y se concatena t_i a $w_1^{p_x}$.

Falso. Se continua al siguiente paso si $1 < i < c$, de lo contrario se termina la construcción de cadenas, dado que no será posible encontrar exclusión mutua, i.e., la cadena actual sólo contendrá a la transición t_q o la siguiente cadena a construir sólo contendrá a la transición t_p , donde dependiendo de la situación, la única transición de una de las cadenas resultantes no puede quitar y poner marcas en p_x dado que se violan las hipótesis de marcado.

Suponiendo que t_s es la última transición para la cual se cumplieron las condiciones anteriores, entonces $w_1^{p_x} = t_q \dots t_s$.

2. Suponiendo que t_t , contenida en ψ_2 , es la transición que no cumplió con las condiciones del paso anterior, se crea e inicializa la cadena $w_2^{p_x} = t_t$, y siguiendo con las transiciones restantes de ψ_2 , se concatena ordenadamente por la derecha la transición t_i , posterior a t_t , a $w_2^{p_x}$, si se cumple que:

- a) t_i no sea concurrente con la última transición de $w_2^{p_x}$
- b) mediante la matriz de incidencia obtenida hasta antes de la ocurrencia de t_i , se pueda obtener una ruta descrita por $w_2^{p_x} \cdot t_i$,
- c) si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_b \in \bullet t_i$ contenido en el postconjunto de alguna transición t_l que forme parte de $w_2^{p_x}$ si resulta verdadero, entonces, se suprimen en $w_2^{p_x}$ las transiciones posteriores a t_l , y se concatena t_i a $w_2^{p_x}$

Nota 42 Aquí no se considera el caso en que sea falso, ya que, debe existir una ruta descrita por el resto de las transiciones de ψ_2 , la cual si no existe, se ira formando mediante dependencias simples no medibles restrictivas [1], para las transiciones $t_{(i-1)}$ y t_i , i.e., $(t_{(i-1)}, t_i) \in \bullet p_f \bullet$ para algún lugar no medible p_f que se añada a la RPI.

3. Una vez que se haya terminado con las transiciones de ψ_2 , se concatena t_p a $w_2^{p_x}$ si se cumplen las condiciones 2.a, 2.b y 2.c, obteniendo así, las subcadenas $w_1^{p_x} = t_q \dots t_s$ y $w_2^{p_x} = t_t \dots t_p$, entonces, resta verifica si $|w_1^{p_x}| \geq 2$ y $|w_2^{p_x}| \geq 2$ para determinar si realmente existe exclusión mutua, si resulta:

Verdadero. Se añade un arco de t_s a p_x y otro de p_x a t_t en la estructura de la RPI, describiendo así exclusión mutua.

Falso. Se eliminan los arcos dirigidos de t_p a p_x y de p_x a t_q , de la estructura de la RPI.

Dado que en una RPI puede existir una gran cantidad de lugares que modelan exclusión con un conjunto finito de subcadenas, no resulta práctico el crear un conjunto que contenga a las

subcadenas que están en exclusión para cada uno de estos lugares. Y como en una etapa del algoritmo que se presenta en el siguiente capítulo, se requiere conocer cuales son las subcadenas para un lugar p_x exclusión. Se considera lo siguiente.

Asumiendo que el orden en que se presentan los índices de las etiquetas de las transiciones en una matriz de incidencia se debe al orden en que inicialmente éstas se detectaron, dada la ocurrencia de las distintas p-componentes que describe la matriz C de incidencia obtenida en un instante del proceso de identificación. Entonces, si existe un lugar p_x en exclusión entonces existe un orden en la aparición de sus subcadenas en la matriz de incidencia. Así, para obtener de la matriz de incidencia las secuencias que describen actividades en exclusión, las cuales requieren de la marca en el lugar no medible p_x para ocurrir, se utiliza el renglón correspondiente a p_x en la matriz de incidencia como sigue.

Comenzando con $i = 1$, se hace un análisis de izquierda a derecha sobre el renglón correspondiente a p_x , y con la ocurrencia i de un valor negativo se considera la etiqueta de la columna que lo contiene, como la primer transición de una secuencia w_i , y mientras no se encuentre un valor positivo sobre el renglón se hace lo siguiente: concatenar ordenadamente por la derecha la transición t_g , si se cumple lo siguiente

1. que t_g no sea concurrente con la última transición de w_i ,
2. que se pueda obtener una ruta descrita por $w_i \cdot t_g$,
3. si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_a \in \bullet t_g$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_h \subset w_i$, si resulta

Verdadero. Se suprimen en w_i las transiciones posteriores a t_h , y se concatena t_i a $w_1^{p_x}$.

Falso. Se continua con la siguiente transición.

Una vez que se encuentre un valor positivo se considera la etiqueta de su columna como la última transición de la secuencia w_i , se incrementa i y se continua con el análisis de columnas de izquierda a derecha en C .

De acuerdo a la definición de concurrencia, la exclusión mutua casi satisface este concepto en el sentido general (i.e. dos transiciones se dicen concurrentes si una de ellas puede ocurrir antes, después o en paralelo con la otra), para las subcadenas $w_1^{p_x}$ y $w_2^{p_x}$ que junto con p_x describen exclusión, a excepción del caso en que pueden ocurrir en paralelo. Ahora, en la situación en que las transiciones, es claro que si t_h es concurrente con t_j , y t_j lo es con t_k , entonces t_h es concurrente con t_k , de lo cual se puede observar una relación transitiva. Entonces, si se obtiene una primer exclusión con las cadenas $w_1^{p_x}$ $w_2^{p_x}$ y el lugar p_x , y una segunda exclusión con las cadenas $w_1^{p_y}$ $w_2^{p_y}$ y el lugar p_y , donde $p_x \neq p_y$ como se muestra en la figura 3.9.a; y sucede que entre las subcadenas $w_1^{p_x}$ y $w_2^{p_y}$ existe un empotramiento entre las rutas que describen, tal que comparten al menos dos transiciones y un lugar, por ejemplo como se muestra en la figura 3.9.b; las cadenas $w_2^{p_x}$ y $w_1^{p_y}$ se relacionan generando exclusión mutua si al menos una transición de

$w_2^{p_x}$ no es concurrente con al menos una transición de $w_1^{p_y}$, pues de lo contrario no se puede establecer la relación.

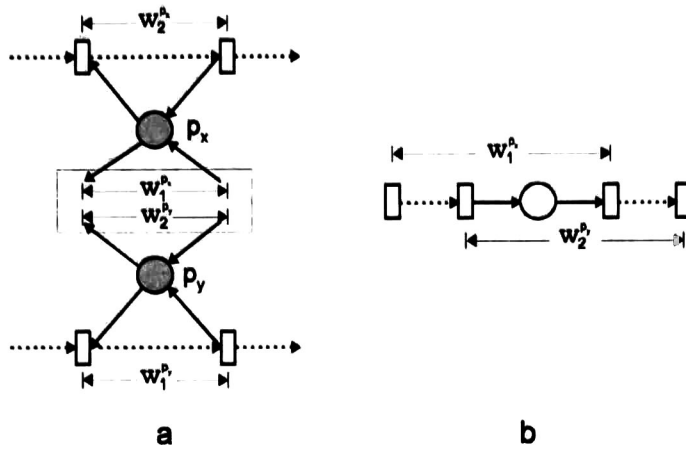


Figura 3.9:

El método para obtener esta relación se describe a continuación.

Si se presenta una palabra $\sigma_i = \dots t_p t_q \dots t_u t_v \dots$, con la cual, se identifica una ruta como se muestra en la figura 3.10,

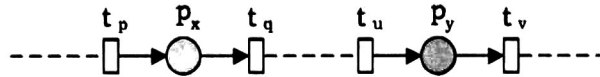


Figura 3.10:

y si en una etapa posterior se presenta $\sigma_j = \dots t_v \dots t_q \dots t_u \dots t_p \dots$ con la cual se encuentra exclusión mutua con las subcadenas $\dots t_v \dots t_u \dots$ y $\dots t_q \dots t_p \dots$, obteniendo $w_1^{p_y} = t_v \dots t_x$ y $w_2^{p_y} = t_z \dots t_u$ para la primera subcadena, y $w_1^{p_x} = t_q \dots t_s$ y $w_2^{p_x} = t_t \dots t_p$ para la segunda subcadena, y no existen transiciones en $w_1^{p_y}$ que sean concurrentes con las de $w_2^{p_x}$, para encontrar la relación entre $w_1^{p_y}$ y $w_2^{p_x}$, se propone realizar lo que se presenta a continuación, según sea la situación.

Situación 1. si $w_2^{p_y} = w_1^{p_x}$, se elimina p_x (p_y) y se añade un arco dirigido de la última transición de $w_2^{p_x}$ ($w_1^{p_y}$) a p_y (p_x) y otro de p_y (p_x) a la primera transición de $w_2^{p_y}$ ($w_1^{p_x}$).

Situación 2. si $w_1^{p_x}$ ($w_2^{p_y}$) es un sufijo propio de $w_2^{p_y}$ ($w_1^{p_x}$), i.e., es sufijo pero $w_1^{p_x} \neq w_2^{p_y}$. entonces, se añade un arco dirigido de la última transición de $w_1^{p_y}$ ($w_2^{p_x}$) a p_x (p_y) y otro de p_x (p_y) a la primera transición de $w_1^{p_y}$ ($w_2^{p_x}$).

Situación 3. si $w_2^{p_y}$ ($w_1^{p_x}$) es un prefijo propio de $w_1^{p_x}$ ($w_2^{p_y}$), i.e., es prefijo pero $w_2^{p_y} \neq w_1^{p_x}$, se

añade un arco de la ultima transición de $w_2^{p_x}$ ($w_1^{p_y}$) al lugar p_y (p_x) y otro de p_y (p_x) a la primera transición de $w_2^{p_x}$ ($w_1^{p_y}$).

Situación 4. sea ϖ_r una subcadena, si ϖ_r es sufijo propio de $w_2^{p_y}$ ($w_1^{p_x}$) y es prefijo propio de $w_1^{p_x}$ ($w_2^{p_y}$), entonces, añadir un lugar no medible p_z , lugar en exclusión, añadir arcos dirigidos de la ultima transición de $w_1^{p_y}$, $w_2^{p_x}$ y ϖ_r a p_z ; y añadir arcos dirigidos de p_z a la primer transición de $w_1^{p_y}$, $w_2^{p_x}$ y ϖ_r .

Ejemplos de RPI para cada una de estas situaciones se presentan en las figuras 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17, donde los arcos con líneas punteadas son los que forman parte de la estructura ya identificada que modela exclusión mutua, los lugares con relleno a rayas son los lugares que se eliminan, los lugares no medibles p_z distintos de p_x y p_y son lugares que se añadieron, y los arcos con línea sólida que entran y salen de los lugares anteriores son los arcos que se quedan de acuerdo a la situación; además para cada situación se presenta una pseudo gráfica del espacio de alcanzabilidad de las RP, donde los ejes están etiquetados por los p-semiflujos que se obtienen de la parte observable de la RPI y se enumeran de acuerdo al orden descendente en que aparecen en la RPI; por ejemplo, para la RPI de la situación 1, el conjunto de lugares contenido en cada p-semiflujo son $P_1 = \{p_{10}, p_1, p_2, p_3\}$, $P_2 = \{p_{10}, p_4, p_5, p_6\}$ y $P_3 = \{p_{10}, p_7, p_8, p_9\}$, las etiquetas de las subcadenas se presentan en la gráfica para representar a los lugares que pertenecen a las rutas que describen. Así, los estados delimitados por los hexaedros corresponden a los que restringe una exclusión mutua existente entre los tres p-semiflujos; por ejemplo, en la RPI de la figura 3.11, los estados delimitados por el hexaedro son los estados no alcanzables por la RPI, dada la exclusión; los rectángulos que yacen en los planos, delimitan los estados que no son alcanzables únicamente por los dos p-semiflujos que forman el plano.

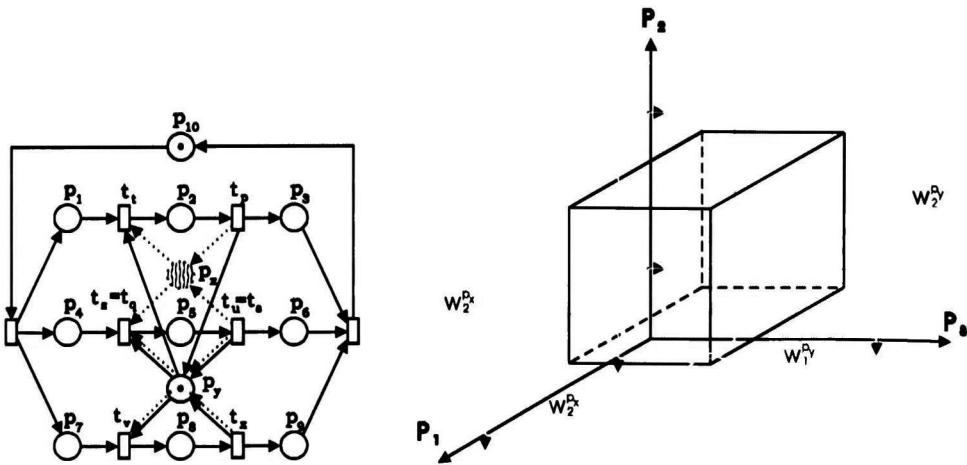


Figura 3.11: Situación 1. $w_2^{p_y}$ es igual a $w_1^{p_x}$

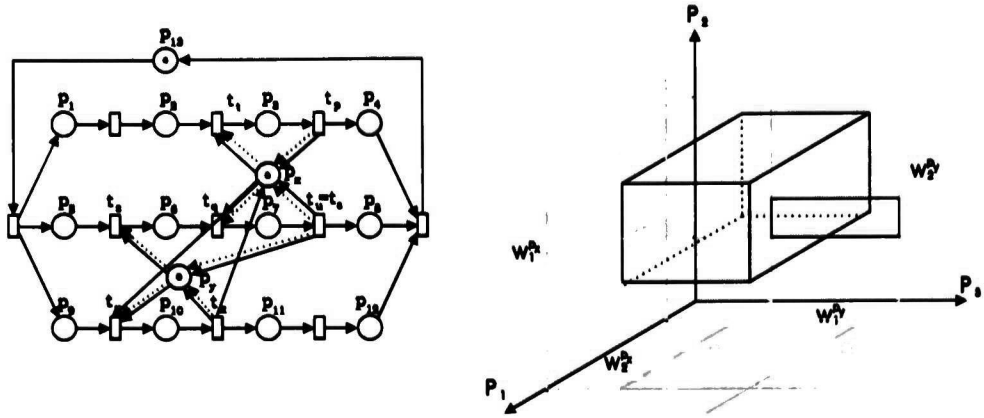


Figura 3.12: Situación 2. $w_1^{p_x}$ es un sufijo propio de $w_2^{p_y}$

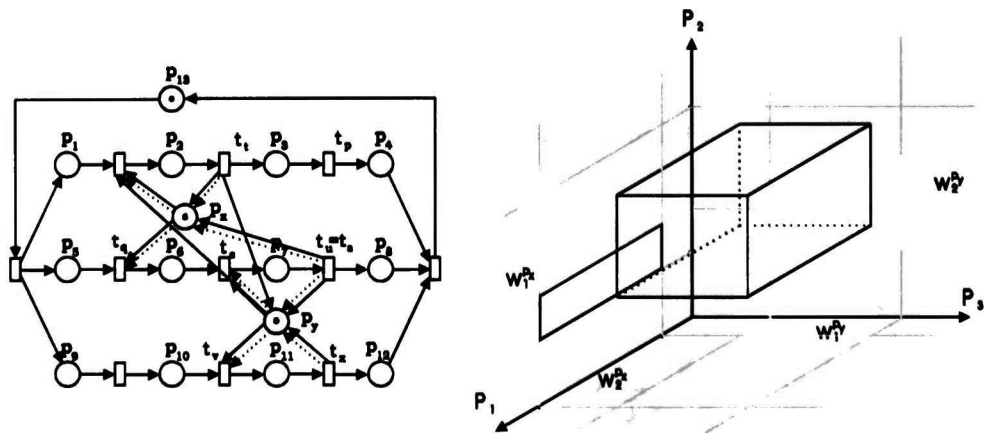


Figura 3.13: Situación 2. $w_2^{p_y}$ es un sufijo propio de $w_1^{p_x}$

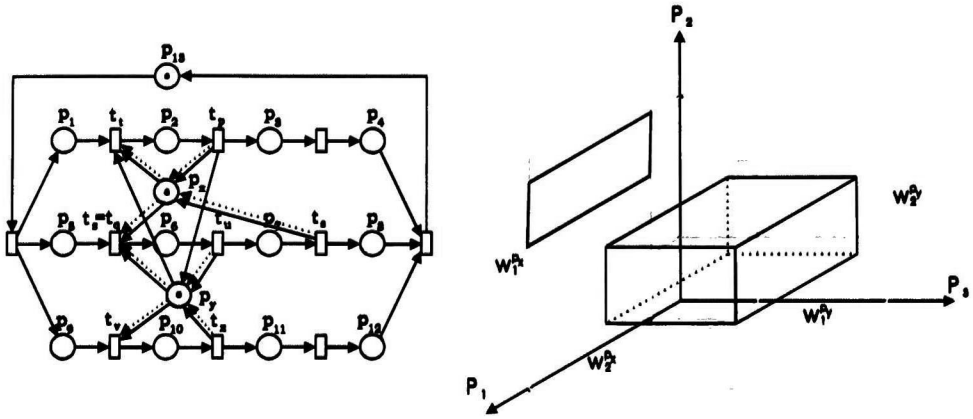


Figura 3.14: Situación 3. w_2^{py} es un prefijo propio de w_1^{px}

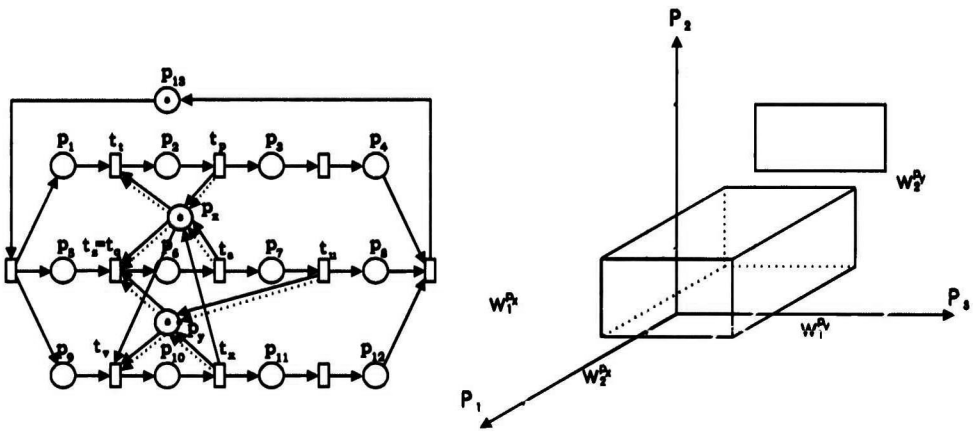


Figura 3.15: Situación 3. w_1^{px} es un prefijo propio de w_2^{py}

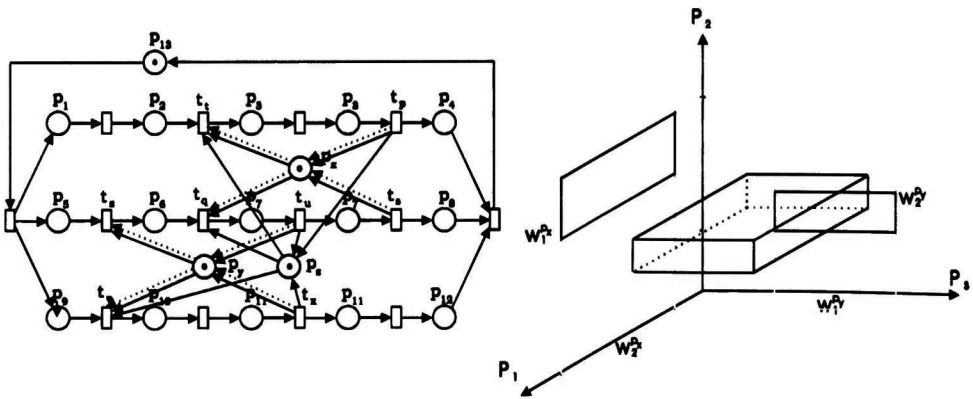


Figura 3.16: Situación 4. $\varpi_r = t_q \cdots t_u$ es sufijo propio de w_2^{py} y es prefijo propio de w_1^{px}

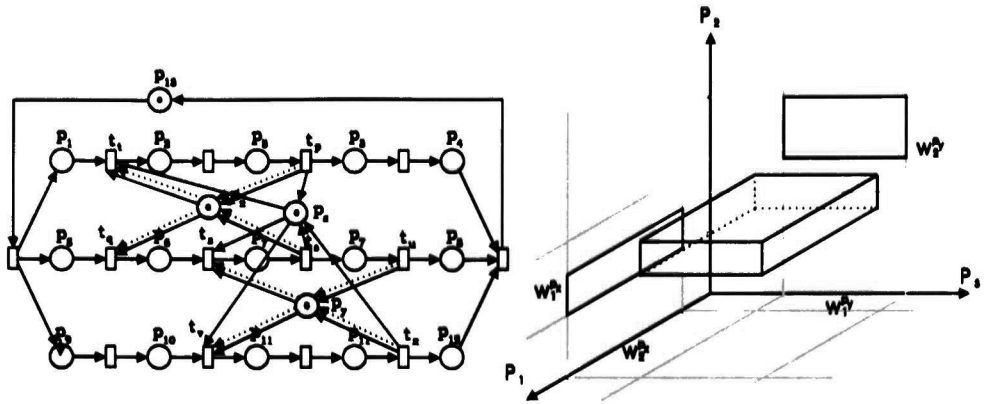


Figura 3.17: Situación 4. $\omega_r = t_z \cdots t_s$ es sufijo propio de $w_1^{p_x}$ y es prefijo propio de $w_2^{p_y}$

No es difícil ver que considerando estas situaciones es posible encontrar exclusión mutua entre más de tres p-semiflujos.

Como ya se ha presentado el método para obtener exclusión mutua, en el siguiente capítulo se presenta el algoritmo.

Capítulo 4

Algoritmo

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta un algoritmo que permite hacer identificación en línea estructural de RPI entrada-salida. Antes de presentar el algoritmo es necesario introducir ciertos conceptos y herramientas formales. Inicialmente, se presentan funciones para etiquetar lugares, transiciones y vectores de salida, en las distintas etapas del proceso de identificación. Enseguida, se introduce el concepto de tabla de observación, la cual es la herramienta principal a utilizar por el algoritmo. Posteriormente, se presenta como hacer uso de los preconjuntos y postconjuntos de las transiciones, para formular un algoritmo que realice una composición entre transiciones. Finalmente se presenta, junto con un ejemplo, el algoritmo para realizar identificación en línea estructural de RPI entrada-salida.

4.2. Funciones para etiquetado de lugares, transiciones y vectores de salida

En esta sección se definen funciones para etiquetar vectores salida, transiciones controlables e incontrolables, y lugares medibles junto con los no medibles. Se introduce el concepto de tabla de observación, donde una tabla de observación se utiliza en este trabajo para recopilar de manera ordenada información observada del comportamiento de un sistema a identificar.

Conforme evolucione el SED bajo estudio, se deben etiquetar los vectores de salida, las transiciones y los lugares medibles junto con los no medibles, utilizando las siguientes funciones.

1. $\mathbf{R}' : \Delta \rightarrow V$ es una función biyectiva que etiqueta a los vectores de salida de manera única, donde
 - $\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_v\}$ es el conjunto ordenado de v símbolos correspondientes a los distintos vectores de estado que presenta el SED, donde $L_V(SED) \subseteq \Delta^*$

- $V = \{\varphi(M_0), \varphi(M_1), \dots, \varphi(M_v)\}$ es el conjunto ordenado de v símbolos correspondientes a los vectores de salida generados por la RPI a identificar, donde $L_{out}(Q, M_0) \subseteq V^*$

Inicialmente $\Delta = \{\zeta_1\}$, aquí ζ_1 corresponde al vector de salida inicial, y se añaden elementos a Δ conforme se presentan distintos estados en el SED.

2. $\lambda : T \rightarrow \Sigma_C \cup \Sigma_I$ es una función biyectiva que etiqueta a las transiciones con elementos del conjunto T donde $n = |T|$, $\Sigma_C = \{\vartheta_1 \dots \vartheta_q\}$ es el conjunto ordenado de q transiciones controlables y $\Sigma_I = \{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_h\}$ es el conjunto ordenado de h transiciones incontrolables. Inicialmente $\Sigma_C = \Sigma_I = \{\epsilon\}$, y cuando ocurre una transición t_i controlable ó incontrolable, se le asocia el símbolo $\lambda(t_i)$.
3. $\varpi : P \rightarrow B \cup H$ es una función biyectiva que etiqueta a los lugares con elementos del conjunto P donde $m = |P|$, $B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ es el conjunto ordenado de r lugares medibles conocidos a priori, y H es el conjunto de lugares negros a inferir durante el proceso de identificación; inicialmente $H = \{\epsilon\}$ y su cardinalidad es $\mu = |H|$. Los lugares no medibles η_i se añaden a H conforme se determina su existencia.

Para hacer lo anterior se utilizará una tabla de observación, i.e., una matriz bidimensional U donde los renglones y columnas están etiquetados por símbolos. En este trabajo, una tabla de observación U se utiliza para recopilar de manera ordenada las secuencias de vectores de salida que presenta una RPI a identificar, etiquetando sus renglones ordenadamente con elementos del conjunto P y etiquetando sus columnas ordenadamente con elementos del conjunto Δ , y a partir de está se genera una segunda tabla de observación U' con la cual se hace el análisis y se alteran sus dimensiones según se determine agregar o quitar lugares no medibles; en U' se etiquetan los renglones ordenadamente los elementos del conjunto P y se etiquetan las columnas ordenadamente con elementos del conjunto T .

4.3. Caracterización de transiciones en RPI

Utilizando $L_{out}(Q, M_0) \subseteq V^*$ es posible caracterizar el conjunto de transiciones T , i.e., para $t_r \in T$ determinar $\bullet t_r$ y $t_r \bullet$, debido a que la RPI $(Q_i, M_0) \in \Psi$ a identificar es evento-detectable, lo cual hace que la caracterización sea única. A una transición caracterizada se le referirá en este trabajo como un t -átomo. Una definición intuitiva de un t -átomo es la siguiente.

Definición 43 *Un átomo en RPI es el formado por un nodo $x \in X$, donde X es el conjunto de lugares o transiciones, dopado con un conjunto $(\bullet x \cup x \bullet)$ de nodos pertenecientes al conjunto Y donde Y es el conjunto de transiciones ó lugares, respectivamente.*

La representación gráfica de un átomo se muestra en la figura 4.1.

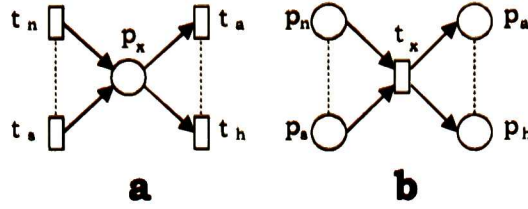


Figura 4.1: Ejemplo de un a) p-átomo y un b) t-átomo.

Para diferenciarlos, a los que tienen como "núcleo" ya sea un lugar o una transición, se les llamará p-átomos o t-átomos respectivamente. En el algoritmo que se presenta se utilizan t-átomos.

Entonces, podemos decir que es posible formar la estructura de una RPI a partir de sus t-átomos. Para demostrar esto, se presenta a continuación una definición formal de t-átomo.

Definición 44 Un t-átomo lo representa la tupla $\alpha = (P_\alpha, T_\alpha, I_\alpha, O_\alpha)$, donde

- El conjunto T_α de transiciones sólo contiene la transición t_α del t-átomo,
- El conjunto P_α de lugares está formado por la unión $\bullet t_\alpha \cup t_\alpha \bullet$,
- $I_\alpha : \{t_a\} \times t_\alpha \bullet \rightarrow \mathbb{Z}^{>0}$ es una función de entrada, que indica el peso de cada arco dirigido de t_a a un lugar del postconjunto $t_\alpha \bullet$,
- $O_\alpha : \bullet t_\alpha \times \{t_a\} \rightarrow \mathbb{Z}^{>0}$ es una función de salida, que indica el peso de cada arco dirigido de un lugar del preconjunto $\bullet t_\alpha$ a t_a .

Para obtener una RPI a partir de sus distintos t-átomos, desde el punto de vista de grafos, es necesario realizar una composición de t-átomos.

La composición de t-átomos se usa para establecer una relación entre dos o más t-átomos, i.e. esta composición se puede ver de manera gráfica como la fusión de dos o más lugares que tienen la misma etiqueta. Así, dado un conjunto ordenado de t-átomos $W = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, mediante su composición se forma una $RP G = (P, T, I, O)$. El algoritmo para realizar la composición de t-átomos se presenta a continuación.

Algoritmo 45 Tomando como entrada el conjunto ordenado $W = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ de r t-átomos, y como salida una RP.

Sea $G = (P, T, I, O)$ una RPI a obtener a partir de W , donde inicialmente $P = T = I = O = \emptyset$. La composición de un subconjunto $W_{q-1} \subseteq W$ ordenado de $q - 1$ t-átomos, con $q = 1 \dots r$, y el p-átomo α_q , se realiza de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
T_{W_{q-1}|\alpha_q} &= T_{W_{q-1}} \cup T_{\alpha_q}, \\
P_{W_{q-1}|\alpha_q} &= (P_{W_{q-1}} - P_{\alpha_q}) \cup (P_{\alpha_q} - P_{W_{q-1}}) \cup (P_{\alpha_q} \cap P_{W_{q-1}}), \\
O_{W_{q-1}|\alpha_q} &= \{(p_i, t_{\alpha_i}) | p_i \in P_{W_{q-1}} \wedge p_i \in \bullet t_{\alpha_i} \wedge t_{\alpha_i} \in T_{W_{q-1}}\} \cup \\
&\quad \{(p_j, t_{\alpha_j}) | p_j \in P_{\alpha_q} \wedge p_j \in \bullet t_{\alpha_j} \wedge t_{\alpha_j} \in T_{\alpha_q}\}, \\
I_{W_{q-1}|\alpha_q} &= \{(t_{\alpha_i}, p_i) | p_i \in P_{W_{q-1}} \wedge p_i \in t_{\alpha_i} \bullet \wedge t_{\alpha_i} \in T_{W_{q-1}}\} \cup \\
&\quad \{(t_{\alpha_j}, p_j) | p_j \in P_{\alpha_q} \wedge p_j \in t_{\alpha_j} \bullet \wedge t_{\alpha_j} \in T_{\alpha_q}\}
\end{aligned}$$

Para realizar una composición de p -átomos, se tendrá que realizar una fórmula similar, intercambiando lugares por transiciones y transiciones por lugares.

▲▲▲

Para determinar cuales son algunos de los lugares que pertenecen a un t -átomo a partir de los vectores de salida, se hace el siguiente análisis a la ecuación de salida de RP.

$$\varphi M_j = \varphi M_{j-1} + \varphi C \vec{t}_i \quad (\text{ecuación de salida}) \quad (4.1)$$

$$\varphi C \vec{t}_i = \varphi M_j - \varphi M_{j-1} \quad (\text{resolviendo para } \varphi C \vec{t}_i) \quad (4.2)$$

$$\varphi(I - O) \vec{t}_i = \varphi M_j - \varphi M_{j-1} \quad (\text{haciendo } C = (I - O)) \quad (4.3)$$

Aquí I y O son matrices de enteros positivos. Entonces interpretando el primer miembro de la ecuación 4.3 tenemos que los valores que resulten positivos en el vector resultante de la resta del miembro derecho de esta ecuación, corresponden a la operación $\varphi(I) \vec{t}_i$, y los valores negativos corresponden a la operación $\varphi(-O) \vec{t}_i$. Ahora como $\varphi(I) \vec{t}_i$ es el vector que representa los arcos dirigidos de la transición t_i a un subconjunto de lugares y $\varphi(-O) \vec{t}_i$ es el vector que representa a los arcos dirigidos de un subconjunto de lugares a la transición t_i , entonces, el índice de los elementos positivos en el vector resultante de evaluar el miembro derecho de la ecuación 4.3 corresponden a los índices de los lugares pertenecientes a $t_i \bullet$ y el índice de los renglones que corresponden a los elementos negativos corresponden a los índices de los lugares pertenecientes a $\bullet t_i$. De lo anterior se concluye que es posible generar la parte medible de un t -átomo para una transición t_i (o abreviado t_i -átomo), utilizando el vector φM_{t_j} de marcado posterior a su ocurrencia y el vector de marcado $\varphi M_{t_{j-1}}$ anterior a su ocurrencia.

Cabe notar que un t_i -átomo se representa en la matriz de incidencia (donde el orden de las columnas corresponde al orden de los índices de las transiciones) por el vector columna i . Así, a diferencia del punto de vista de grafos, viendo a cada t -átomo como un vector, sólo se requiere de generar un conjunto ordenado de vectores correspondientes a cada t -átomo, para formar la matriz de incidencia C , simulando así la composición de t -átomos.

A continuación se presenta un algoritmo con el que es posible caracterizar los t -átomos de una RPI de la clase Ψ , obteniendo además su marcado inicial.

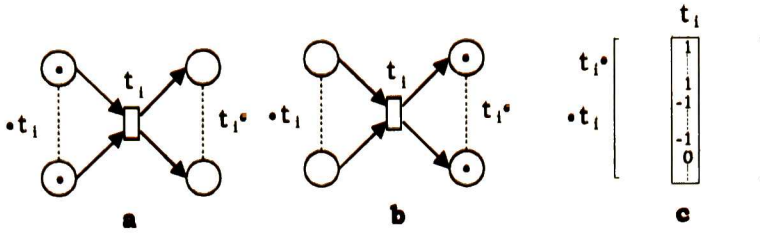


Figura 4.2: Efecto de la ocurrencia de la transición t_i , y su representación en la matriz de incidencia. a) Transición habilitada. b) Resultado de la ocurrencia de la transición. c) Representación de t_i en la matriz de incidencia de la RPI.

4.4. Algoritmo para identificar RPI de la clase Ψ

El algoritmo para identificar RPI pertenecientes a la clase Ψ , se presenta a continuación. Además, como ejemplo se propone identificar la RPI de la figura, la cual modela el comportamiento de un SED.

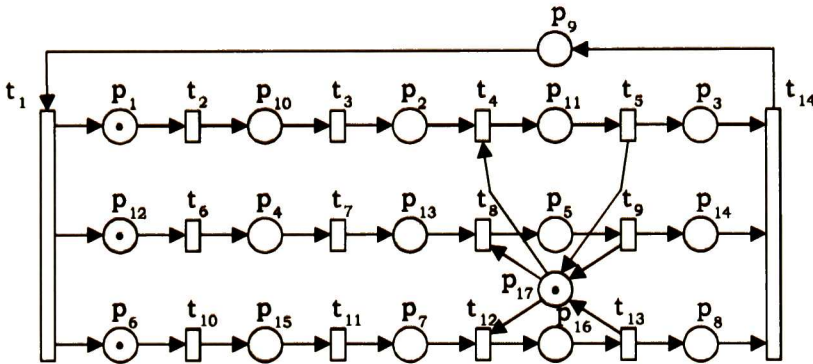


Figura 4.3: RPI (Q, M_0) a identificar.

Algoritmo 46 Inferencia de t -átomos.

Entrada: secuencias de vectores de salida.

Salida: RPI identificada perteneciente a la clase Ψ .

1. Sea B el conjunto de r sensores que contiene el SED. Crear el conjunto P de r lugares medibles y mediante ϖ etiquetar a cada sensor; crear e inicializar las variables para el número de lugares, transiciones y vectores de salida, i.e. inicialmente $m = r$, $n = 0$ y $\nu = 1$, respectivamente; crear el vector de marcado inicial M_1 de tamaño $m \times 1$, el cual

se inicializa con el vector de salida inicial ζ_1 ; crear la matriz de incidencia C de tamaño 0×0 ; crear el conjunto ordenado Δ de vectores de salida observados, añadiéndole el vector de salida inicial ζ_1 obteniendo $\Delta = \{\zeta_1\}$; crear el conjunto Θ el cual contendrá a los pares de transiciones concurrentes; y crear el vector Λ de tamaño $|P| \times 1$ el cual indica en el renglón i la categoría del lugar p_i , donde $\Lambda(p_i) = 3$ indica que se construirán exclusiones cuyas cadenas tendrán una cardinalidad menor que las que se obtienen de p_i , $\Lambda(p_i) = 2$ si con p_i se modela exclusión mutua, $\Lambda(p_i) = 1$ si para p_i se está buscando exclusión mutua, $\Lambda(p_i) = 0$ si para p_i no ocurre ninguna de las anteriores.

▲▲▲

Para el ejemplo, inicialmente dados los ocho sensores se tiene que $r = 8$, entonces se crea el conjunto P que contiene en total $m = 8$ lugares medibles, $n = 0$ transiciones, inicialmente $\nu = 1$ es el número de vectores de salida, $\Delta = \{\zeta_1\}$, la matriz de incidencia es $C = []$, el vector de categorías es $\Lambda = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ el conjunto de pares de transiciones concurrentes es $\Theta = \emptyset$, el marcado inicial es $M_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Los lugares medibles ya etiquetados se muestran en la figura 4.4.

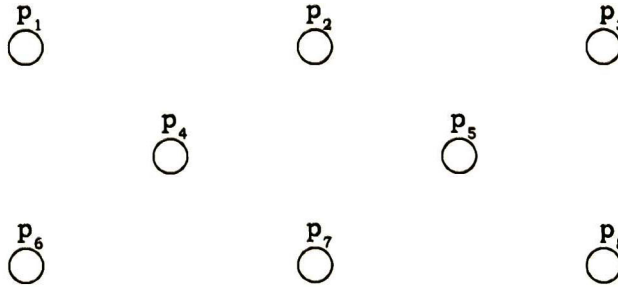


Figura 4.4: Lugares medibles de la RPI 4.3.

2. Crear una tabla de observación U de tamaño $r \times \nu$ e inicializar un contador de columnas $q = 1$, donde q se incrementa con el incremento de vectores de salida observados, los cuales se colocan en U . Colocar el vector de salida inicial en la columna $q = 1$ de U . Etiquetar los renglones de U con elementos del conjunto P ordenadamente. Con el símbolo ζ_1 del vector de salida inicial etiquetar la primer columna de U .

▲▲▲

Para el ejemplo, el número de columnas inicial de U_1 es $q = 1$, la tabla de observación, con la primer columna correspondiente al vector de salida inicial y los renglones etiquetados es la siguiente.

$$U_1 = \begin{matrix} & \zeta_1 \\ p_1 & \boxed{0} \\ p_2 & \boxed{0} \\ p_3 & \boxed{0} \\ p_4 & \boxed{0} \\ p_5 & \boxed{0} \\ p_6 & \boxed{0} \\ p_7 & \boxed{0} \\ p_8 & \boxed{0} \end{matrix}$$

Nota 47 En lo sucesivo se suprimirán los ceros para hacer más claras las modificaciones que se harán sobre las tablas de observación.

- Conforme se observe un vector de salida, se incrementa en uno el contador de columnas q y el número de columnas de U , y se coloca el nuevo vector en la nueva columna de U . Si el vector de salida es distinto a los ya observados, se incrementa el contador ν de vectores de salida, se etiqueta con el símbolo ζ_ν y se añade el vector al conjunto de vectores de salida Δ . Este proceso se sigue hasta que se analice el último vector de la secuencia de vectores de salida que se está observando.

▲▲▲

Para el ejemplo, se supone que se ha presentado una secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

$$U_1 = \begin{matrix} & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_{20} & \zeta_4 & \zeta_{20} & \zeta_5 & \zeta_6 & \zeta_5 & \zeta_7 & \zeta_5 & \zeta_8 & \zeta_9 & \zeta_8 & \zeta_{10} & \zeta_1 \\ p_1 & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ p_2 & & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ p_3 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ p_4 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ p_5 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ p_6 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ p_7 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ p_8 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \end{matrix}$$

De acuerdo a la tabla de observación, el número de columnas es $q = 15$, el número de distintos vectores de salida que se han presentado es $\nu = 10$, y por conveniencia se presenta el conjunto de vectores de salida sólo con sus símbolos, i.e. $\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}\}$.

- Utilizando U se crea una segunda tabla de observación U' cuyos renglones tienen las mismas etiquetas que los renglones de U , pero con una columna menos, i.e. U' es de tamaño $(m) \times (q - 1)$. Se asigna a la columna i de U' la diferencia entre el vector de salida

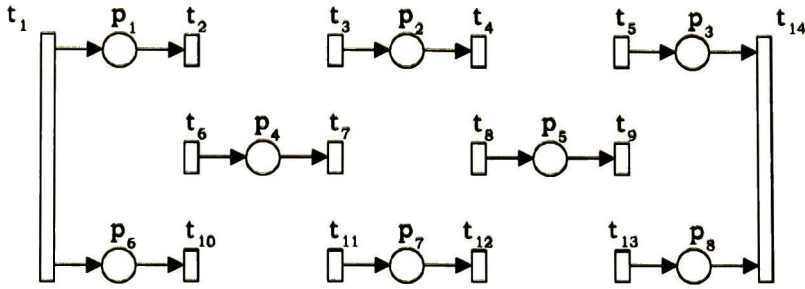


Figura 4.5:

de la columna $i + 1$ y la columna i de U , con $i = 1..(q - 1)$. Si el vector resultante no se encuentra en la parte medible de C (φC) se incrementa n y mediante λ se etiqueta con el símbolo t_n este nuevo vector el cuál se añade a la matriz C de incidencia. Y finalmente, se añade a U' la parte no medible correspondiente a cada transición su parte no medible contenida en γC .

▲▲▲

Para el ejemplo, se obtiene a partir de U_1 la tabla de observación U'_1 , de tamaño 8×14 . Como hasta el momento no hay una matriz de incidencia las columnas se etiquetan ordenadamente de t_1 a t_{14} , y se hace $n = 14$. La tabla de observación U'_1 y la RPI (figura ??) que se obtiene a partir de U' y M_1 se presentan a continuación.

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |

La parte no medible de la matriz de incidencia no se le añade a esta tabla, porque ésta no existe hasta el momento.

5. Dada U' es posible obtener la palabra observada generando una cadena vacía σ_{obs} y concatenándole por la derecha las etiquetas correspondientes a las columnas de U'

▲▲▲

Para el ejemplo la palabra observada es $\sigma_{obs_1} = t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_{14}$.

6. Hacer un análisis por columnas en U' de izquierda a derecha, verificando si las características de cada columna en U' satisfacen las condiciones de los casos que se presentan enseguida. Además, a cada columna que se va a analizar se le suma el marcado anterior, comenzando con el marcado inicial M_1 , donde el resultado es el marcado alcanzado por la transición correspondiente a cada columna. Los casos, mencionados en la figura 4.6, se presentan a continuación.

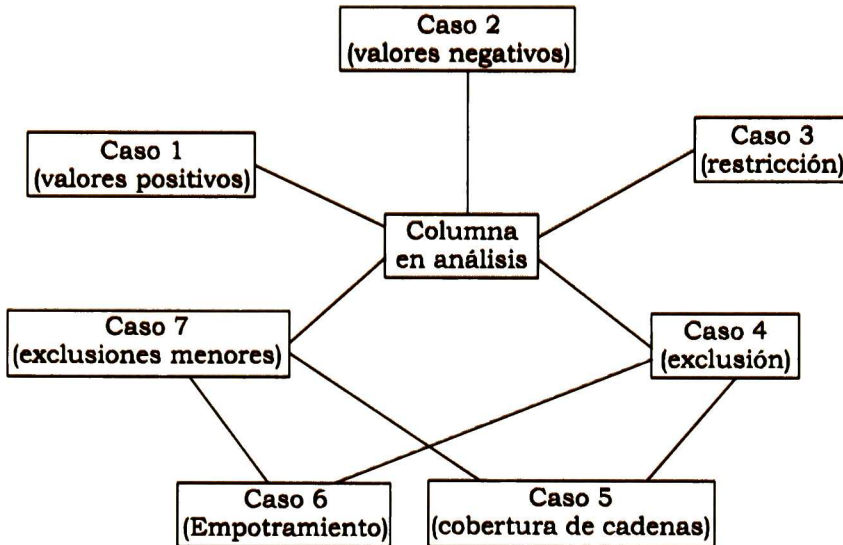


Figura 4.6:

.....

Caso 1.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j \dots$, donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si al sumar el marcado M_{t_i} con la columna de la transición t_j , obteniendo M_{t_j} , se observa que el número de marcas en M_{t_j} es mayor al de M_{t_i} , y no existen lugares en la intersección $t_i \bullet \cap \bullet t_j = \emptyset$. Entonces, se verifica si existe un lugar no medible p_k^{nm} en el postconjunto $t_i \bullet$, si resulta:

Verdadero. Se añade p_k^{nm} al preconjunto $\bullet t_j$ y se hace $M_{t_j}(p_k^{nm}) = 0$, y si $M_{t_i} = M_1$ se hace $M(p_k^{nm}) = 1$.

Falso. Se crea un nuevo renglón en U' , Λ , M_{t_j} y en M_1 ; se incrementa m en uno; se etiqueta este nuevo lugar con p_m^{nm} ; se añade este lugar al postconjunto $t_i \bullet$ y al preconjunto $\bullet t_j$; y se hace $M_{t_j}(p_m^{nm}) = 0$, y si $M_{t_i} = M_1$ se hace $M(p_m^{nm}) = 1$.

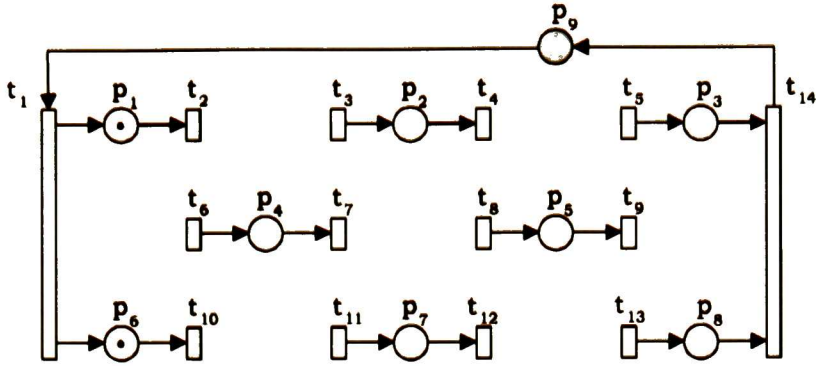


Figura 4.7:

Continuando con la columna de la transición t_2 , se observa que ésta sólo contiene valores negativos distintos de cero, para esta situación se presenta el siguiente caso.

.....

Caso 2.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j t_k \dots$, donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si al sumar el marcado M_{t_i} con la columna de la transición t_j se observa que el número de marcas en M_{t_j} es menor al de M_{t_i} y para todo renglón en la columna de t_j que tiene un valor negativo, existe un valor positivo en la columna de t_i para el mismo renglón, se debe a que $t_j \bullet \cap \bullet t_k = \emptyset$. Entonces, se verifica si existe un lugar no medible p_r^{nm} en el postconjunto $t_j \bullet$, si resulta

Verdadero. Se añade p_r^{nm} al preconjunto $\bullet t_k$ y se hace $M_{t_j}(p_r^{nm}) = 1$, y si $M_{t_j} = M_1$ se hace $M(p_k^{nm}) = 1$.

Falso. Se crea un nuevo renglón en U' , Λ , M_{t_j} y en M_1 ; se incrementa m en uno; se etiqueta el nuevo renglón de U' p_m^{nm} ; se añade este lugar al postconjunto $t_j \bullet$ y al preconjunto $\bullet t_k$; y se hace $M_{t_j}(p_m^{nm}) = 1$, y si $M_{t_j} = M_1$ se hace $M_1(p_m^{nm}) = 1$.

Nota 50 En caso de que t_j corresponda a la última columna de U' se considera t_k a la transición de la primer columna de U'

Nota 51 Este caso se presenta cuando sólo existen valores negativos, en la columna de la transición t_j .

.....

Para el ejemplo, continuando con el análisis de la columna de la transición t_2 se tiene que, de acuerdo al paso 2, las transiciones son: $t_i = t_1$, $t_j = t_2$ y $t_k = t_3$, observando que la columna sólo contiene valores negativos distintos de cero, y las condiciones son:

- el marcado alcanzado

$$M_{t_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \text{ al compararlo con el marcado}$$

$M_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ se observa que el número de marcas en M_{t_2} es menor al de M_{t_1} , para el valor negativo en la posición (p_i, t_2) se tiene el valor positivo en la posición (p_1, t_1) ;

- las transiciones t_2 y t_3 no comparten lugares, i.e. $t_2 \bullet \cap \bullet t_3 = \emptyset$; y
- no existen lugares no medibles en el postconjunto $t_3 \bullet$.

Entonces, es necesario añadir un lugar no medible haciendo lo siguiente:

se crea un nuevo renglón en U'_1 , M_1 y M_{t_2} ;

- se incrementa $m = 9$ en uno, i.e. $m = 10$;
- se etiqueta el nuevo renglón en U'_1 con p_{10}^{nm} ;

en la tabla U'_1 se añade un 1 en la posición (p_{10}^{nm}, t_2) y un -1 en la posición (p_{10}^{nm}, t_3) , i.e. $p_{10}^{nm} \in t_2 \bullet \cap \bullet t_3$; y

se añade una marca a p_{10}^{nm} en M_{t_2} obteniendo

$$M_{t_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

La tabla U'_1 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.8) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| $U'_1 = p_5$ | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |

Al hacer lo anterior se modifican las características de la columna correspondiente a la transición t_3 , la cual ahora muestra valores positivos y negativos, no se satisfacen las condiciones del caso 1 o 2, entonces no es necesario hacer modificaciones en la estructura para t_3 .

Continuando con la columna de la transición t_4 , se observa que sólo se tienen valores negativos diferentes de cero, satisfaciendo las condiciones del caso 2, i.e.

el número de marcas en $M_{t_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es menor con respecto al número de marcas en M_{t_3} ,

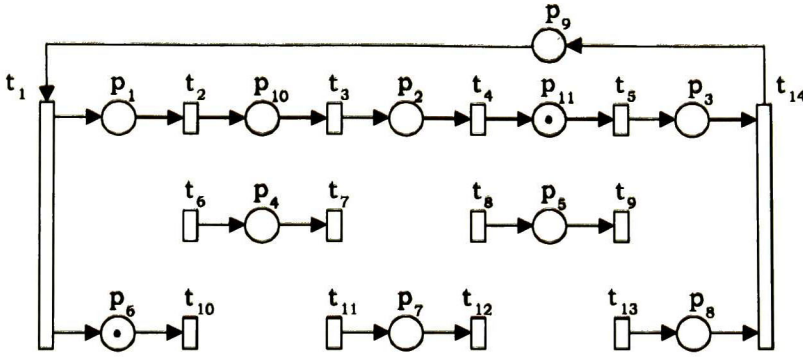


Figura 4.9:

Al hacer lo anterior se modifican las características de la columna correspondiente a la transición t_5 , la cual muestra valores positivos y negativos, y dado que con la ocurrencia de t_5 no se indica una pérdida o ganancia de marcas en el mercado

$M_{t_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ con respecto al mercado
 $M_{t_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ i.e. se conserva el número de marcas, y el lugar p_{11}^{nm} se encuentra en la intersección $t_4 \bullet \cap \bullet t_5$, entonces no es necesario hacer modificaciones en la estructura para t_5 .

Continuando con la columna de la transición t_6 , la cual sólo contiene valores positivos, se observa que se cumplen las condiciones del caso 1, i.e. en esta columna las condiciones son:

sólo se tienen valores positivos diferentes de cero;

el número de marcas en $M_{t_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ es mayor con respecto al número de marcas en M_{t_5} ;

- las transiciones t_5 y t_6 no comparten lugares, i.e. $t_5 \bullet \cap \bullet t_6 = \emptyset$;
no existen lugares negros en el postconjunto $t_5 \bullet$

Entonces, es necesario añadir un lugar no medible haciendo lo siguiente:

se crea un nuevo renglón en U'_1 , Λ y en M_{t_6} ;

se incrementa $m = 11$ en uno, i.e. $m = 12$;

se etiqueta el nuevo renglón en U'_1 con p_{12}^{nm} ;

- en la tabla U'_1 se añade un 1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_5) y un -1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_6) , i.e. $p_{12}^{nm} \in t_5 \bullet \cap \bullet t_6$; y

se añade una marca a p_{12}^{nm} en M_{t_5} obteniendo

$M_{t_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ con lo cual el mercado alcanzado por t_6 es

$M_{t_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

La tabla U'_1 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.10) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |

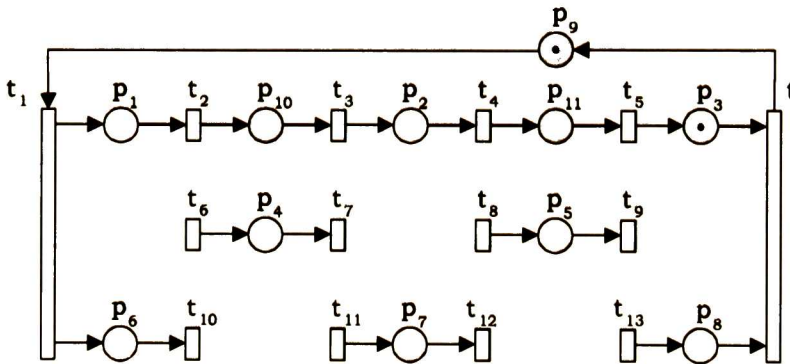


Figura 4.10:

Resumiendo el proceso necesario para terminar el recorrido de izquierda a derecha sobre la tabla U'_1 , en la siguiente tabla se presenta el caso en el que cae cada transición.

| Transición | Caso |
|------------|------|
| t_1 | 1 |
| t_2 | 2 |
| t_3 | N.A. |
| t_4 | 2 |
| t_5 | N.A. |
| t_6 | 1 |
| t_7 | 2 |
| t_8 | N.A. |
| t_9 | 2 |
| t_{10} | 2 |
| t_{11} | N.A. |
| t_{12} | 2 |
| t_{13} | N.A. |
| t_{14} | N.A. |

Así, la tabla U'_1 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.11) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| $U'_1 = p_8$ | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | | | 1 | -1 | | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 16$, $\nu = 10$, se asigna U'_1 a C , $\Theta = \emptyset$, $\Lambda = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$, y el marcado inicial encontrado es $M_1 = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$

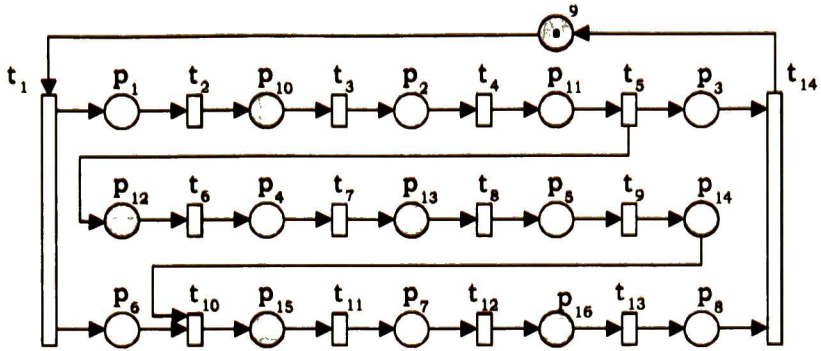


Figura 4.11:

Ahora, suponiendo que se presenta una segunda secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_{11} | ζ_2 | ζ_{12} | ζ_2 | ζ_3 | ζ_4 | ζ_3 | ζ_5 | ζ_8 | ζ_9 | ζ_8 | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $U_2 = p_4$ | | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | | |
| p_6 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | | 1 | | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 12$ así $VS = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}\}$.

Siguiendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | t_1 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| $U'_2 = p_8$ | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| p_{13}^{nm} | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | 1 | | | | | -1 | | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs_2} = t_1 t_6 t_7 t_8 t_9 t_2 t_3 t_4 t_5 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_{14}$.

De acuerdo a lo lo indicado en el punto 6, y comenzando con el análisis de izquierda a derecha sobre U'_2 se tiene que la columna de la transición t_1 contiene valores positivos y negativos, y no se satisfacen las condiciones del caso 1 o 2, entonces no es necesario hacer modificaciones en la estructura para t_1 . Continuando con la columna de la transición t_6 , se observan valores positivos y negativos en éstas, y al comparar M_{t_6} con M_{t_1} no se observa pérdida o ganancia de marcas; pero no existe un lugar en la intersección $t_1 \bullet \cap \bullet t_6$. Como hasta el momento no se tiene que t_1 sea concurrente con t_6 , i.e. $(t_1, t_6) \notin \Theta$, es necesario restringir el comportamiento. Para hacer esto se presenta el siguiente caso.

.....

Caso 3.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j \dots$ donde la columna de t_j es la que se está analizando. Si existen valores positivos y negativos tanto en la columna de t_i como en la columna de t_j , no existen lugares contenidos en la intersección $t_i \bullet \cap \bullet t_j = \emptyset$, el par de transiciones (t_i, t_j) no está contenido en el conjunto Θ de transiciones concurrentes, y no se está generando la primer secuencia de una exclusión mutua, tal que t_i pertenece a la primer cadena que se está formando (esto se ve en el caso 4); entonces crear un

nuevo renglón en U' , Λ , M_{t_j} y en M_1 ; se incrementa m en uno; se etiqueta el nuevo renglón de U' con p_m^{nm} ; se añade este lugar al postconjunto $t_i \bullet$ y al preconjunto $\bullet t_j$; y se hace $M_{t_j}(p_k^{nm}) = 0$.

Nota 52 Este caso sucede cuando para todo renglón que contiene un valor negativo en el vector columna correspondiente a la transición t_j no existe un elemento positivo en la columna de la transición t_j para estos renglones.

.....

Para el ejemplo, las transiciones son: $t_i = t_1$ y $t_j = t_6$, donde la columna de la transición t_6 es la que se está analizando actualmente. Se tiene las siguientes condiciones:

Las columnas de t_1 y de t_6 contienen valores positivos y negativos

- No existen lugares contenidos en la intersección $t_1 \bullet \cap \bullet t_6 = \emptyset$; y
- el par (t_1, t_6) no está contenido en el conjunto Θ de transiciones concurrentes.
- t_1 no pertenece a alguna cadena que se esté formando para obtener exclusión mutua (esto se ve en el caso 4).

Entonces, es necesario añadir un lugar no medible haciendo lo siguiente:

se crea un nuevo renglón en U'_2 , M_1 , Λ y en M_{t_6} ;

- se incrementa $m = 16$ en uno, i.e. $m = 17$;
- se etiqueta el nuevo renglón en U'_2 con p_{17}^{nm} ;

en la tabla U'_2 se añade un 1 en la posición (p_{17}^{nm}, t_1) y un -1 en la posición (p_{17}^{nm}, t_6) , i.e. $p_{17}^{nm} \in t_2 \bullet \cap \bullet t_3$; y

se hace $M_{t_6}(p_{17}^{nm}) = 0$ obteniendo

$$M_{t_6} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$$

La tabla U'_2 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.12) que ésta describe se presentan a continuación.

$U'_2 =$

| | t_1 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| p_{13}^{nm} | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | 1 | | | | | -1 | | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_{17}^{nm} | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |

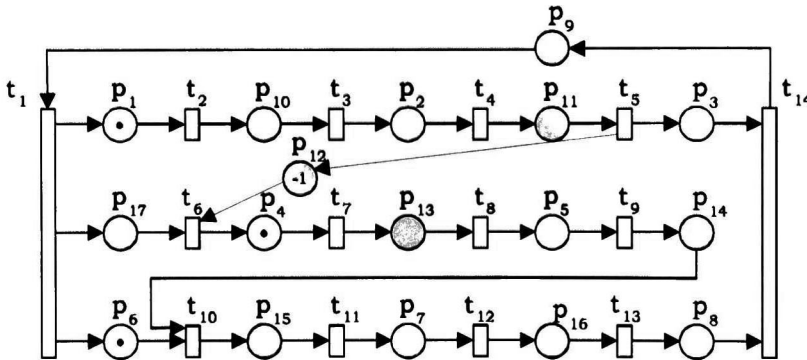


Figura 4.12:

Ahora, se observa que en M_{t_6} existe un valor negativo en el lugar p_{12}^{nm} , el cual no está contenido en el postconjunto $t_1 \bullet$; lo cual indica que la transición t_6 no se habilitó con el marcado M_{t_1} . Entonces, para resolver este problema se presenta el siguiente caso.

.....

Caso 4.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j \dots$, donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si existen tanto valores positivos como negativos en

las columnas de las transiciones t_i y t_j , existen lugares en la intersección $t_i \bullet \cap \bullet t_j$, i.e. $(t_i, t_j) \notin \Theta$, y el marcado M_{t_j} alcanzado con la transición t_j presenta un valor negativo en la posición de al menos un lugar no medible p_x^{nm} , y no se está buscando exclusión mutua con p_x^{nm} . i.e. $\Lambda(p_x^{nm}) \neq 1$ entonces, es posible que el lugar no medible p_x^{nm} modele exclusión mutua. Para determinarlo, se indica que se está buscando exclusión mutua para p_x^{nm} haciendo $\Lambda(p_x^{nm}) = 1$, y se deben seguir los pasos que se presentan a continuación con cada columna de U' a partir de t_j .

a) Crear e inicializar la cadena $w_1^{p_x^{nm}} = t_j$, y continuando con el análisis de las columnas de U' se concatenan por la derecha a $w_1^{p_x^{nm}}$ la transición t_g si se satisfacen las siguientes condiciones.

- 1) que t_g no sea concurrente con la última transición de $w_1^{p_x^{nm}}$
- 2) que exista al menos un lugar p_d en la intersección del postconjunto de la última transición de $w_1^{p_x^{nm}}$ y el preconjunto de t_g .
- 3) Si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_a \in \bullet t_g$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_h \subset w_1^{p_x^{nm}}$ si resulta:

Verdadero. se suprimen en $w_1^{p_x^{nm}}$ las transiciones posteriores a t_h .

Falso. Se habilita el siguiente paso.

b) Si t_t es la transición que no cumplió con las condiciones del paso anterior, se crea e inicializa la cadena $w_2^{p_x^{nm}} = t_t$ y continuando con el análisis de las columnas de U' , se concatena por la derecha a $w_2^{p_x^{nm}}$ la transición t_k si se satisfacen las siguientes condiciones, hasta que se observe una transición $t_p \in \bullet p_x^{nm}$.

- 1) que t_k no sea concurrente con la última transición de $w_2^{p_x^{nm}}$
- 2) que exista al menos un lugar p_e en la intersección del postconjunto de la última transición de $w_2^{p_x^{nm}}$ y el preconjunto de t_k ,
- 3) Si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_f \in \bullet t_k$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_o \subset w_2^{p_x^{nm}}$ si resulta:

Verdadero. se suprimen en $w_2^{p_x^{nm}}$ las transiciones posteriores a t_o , y se concatena t_k a $w_2^{p_x^{nm}}$

Falso. Se continua con la siguiente columna.

c) Una vez obtenidas las secuencias de la forma $w_1^{p_x^{nm}} = t_q \dots t_s$ y $w_2^{p_x^{nm}} = t_t \dots t_p$, se verifica si $|w_1^{p_x^{nm}}| \geq 2$ y $|w_2^{p_x^{nm}}| \geq 2$, para determinar si realmente existe exclusión mutua, si resulta:

Verdadero. Se añaden los arcos descritos por los pares (t_s, p_x^{nm}) y (p_x^{nm}, t_t) , se hace $\Lambda(p_x^{nm}) = 2$ para indicar que el lugar p_x^{nm} está modelando exclusión mutua, y se coloca una marca al lugar p_x^{nm} en M_1 y en M_{t_p} .

Falso. Se eliminan los arcos descritos por los pares (t_p, p_x^{nm}) y (p_x^{nm}, t_q) ; y se consideran concurrentes las transiciones de $w_1^{p_x^{nm}}$ con las de $w_2^{p_x^{nm}}$ añadiéndose a la matriz de transiciones concurrentes Θ , y se hace $\Lambda(p_x^{nm}) = 0$. Si en el renglón

de p_x sólo existen ceros, se elimina este renglón de M_1 , Λ y M_{t_p} . Si existe un lugar no medible entre la primer transición de $w_1^{p_x^{nm}}$ y la primer transición de $w_2^{p_x^{nm}}$, se desplaza el arco de entrada a ese lugar una transición hacia atrás sobre el mismo p-componente del cual sale el arco.

.....

Para el ejemplo, las transiciones son: $t_i = t_1$ y $t_j = t_6$, donde la columna de la transición t_6 es la que se está analizando actualmente; se observa que existen valores positivos y negativos en las columnas de t_1 y t_6 , el marcado alcanzado con t_6 es $M_{t_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. En M_{t_6} se tiene que $M_{t_6}(p_{12}^{nm}) = -1$ y se tiene que $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 0$; entonces se hace $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 1$. Y de acuerdo al paso 1 se crea e inicializa la cadena $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_6$.

Siguiendo con el análisis de columnas, se tiene que la columna de la transición t_7 no cae en ningún caso. Entonces, tenemos que t_7 es t_9 , de acuerdo al paso a del caso 4, y comprobando lo indicado en este paso, se tiene que:

- t_7 no es concurrente con la transición t_6 , i.e. $(t_6, t_7) \notin \Theta$,
- el lugar p_4 está contenido en la intersección $t_6 \bullet \cap \bullet t_7$,

Entonces, se concatena t_7 a $w_1^{p_{12}^{nm}}$ i.e. $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_6 t_7$.

Continuando con el análisis de columnas, se tiene que la columna de la transición t_8 satisface las mismas condiciones que t_7 , i.e. $(t_7, t_8) \notin \Theta$ y $p_{13}^{nm} \in t_7 \bullet \cap \bullet t_8$. Entonces, se concatena t_8 a $w_1^{p_{12}^{nm}}$ i.e. $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_6 t_7 t_8$.

Lo mismo sucede para la columna de la transición t_9 , i.e. $(t_8, t_9) \notin \Theta$ y $p_5 \in t_8 \bullet \cap \bullet t_9$.

Entonces, se concatena t_9 a $w_1^{p_{12}^{nm}}$ i.e. $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_6 t_7 t_8 t_9$.

Ahora, avanzando a la columna de la transición t_2 se tiene que:

t_2 no es concurrente con la transición t_6 , i.e. no está contenido el par (t_6, t_7) en Θ , pero

- no existe algún lugar en la intersección $t_9 \bullet \cap \bullet t_2$, entonces comprobando si $\exists p_a \in \bullet t_2$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_h \subset w_1^{p_x^{nm}}$, resulta:

Falso. Se habilita el siguiente paso.

Siguiendo lo indicado en el paso b del caso 4, se crea e inicializa la cadena $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_2$; siguiendo con el análisis de columnas, se tiene que la columna de la transición t_3 no cae en ningún caso anterior al caso 4. Entonces, comprobando lo indicado en el paso b, se tiene que:

- t_3 no es concurrente con la transición t_2 , i.e. $(t_2, t_3) \notin \Theta$,
- el lugar p_{10} está contenido en la intersección $t_2 \bullet \cap \bullet t_3$,

Entonces, se concatena t_3 a $w_2^{p_{12}^{nm}}$ i.e. $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_2 t_3$. Las transiciones t_4 y t_5 , satisfacen las mismas condiciones, i.e. $(t_3, t_4) \notin \Theta$, $p_2 \in t_3 \bullet \cap \bullet t_4$, $(t_4, t_5) \notin \Theta$, y $p_{12}^{nm} \in t_4 \bullet \cap \bullet t_5$. Hasta el momento se obtiene la cadena $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$. Y como sucede que $t_5 \in \bullet p_{12}^{nm}$; entonces, siguiendo lo indicado en el paso 3, se tiene que $|w_1^{p_{12}^{nm}}| = 4$ y $|w_2^{p_{12}^{nm}}| = 4$, entonces:

- se coloca un 1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_9) y un -1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_2) ,
- se indica que se está modelando exclusión mutua con el lugar p_{12}^{nm} , i.e. $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 2$,
y

- se coloca una marca en M_{t_5} y en M_1 para p_{12}^{nm} obteniendo

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$M_{t_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

La tabla U'_2 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.13) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | | | | | |
| p_{13}^{nm} | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | 1 | | | | | -1 | | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_{17}^{nm} | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |

Además, continuando con la columna de la transición t_{10} se cumplen las condiciones del caso 3, i.e. considerando a $t_5 = t_i$ y $t_{10} = t_j$ se tiene que:

- existen valores positivos y negativos en t_5 y t_{10} ;
- no existen lugares contenidos en la intersección $t_5 \bullet \cap \bullet t_{10} = \emptyset$; y
- el par $(t_5, t_{10}) \notin \Theta$ de transiciones concurrentes;

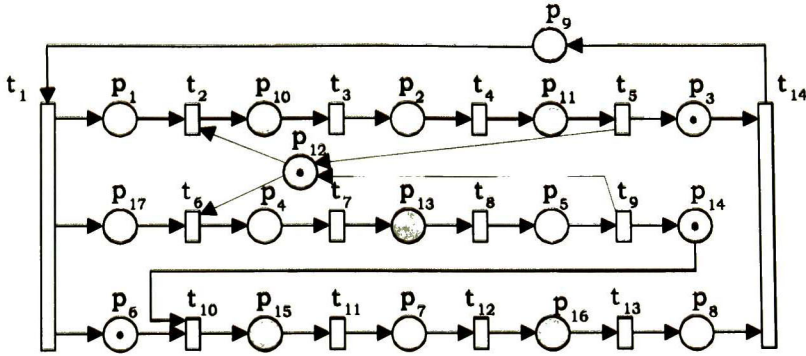


Figura 4.13:

t_5 no pertenece a la primera cadena que se está formando para obtener exclusión mutua para un lugar no medible p_x^{nm} , i.e. $t_5 \notin w_1^{p_x^{nm}}$

Entonces, es necesario añadir un lugar no medible haciendo lo siguiente:

- se crea un nuevo renglón en U'_2, Λ, M_1 y $M_{t_{10}}$;
- se incrementa $m = 17$ en uno, i.e. $m = 18$;

se etiqueta el nuevo renglón en U'_2 con p_{18}^{nm} ;

en la tabla U'_2 se añade un 1 en la posición (p_{18}^{nm}, t_5) y un -1 en la posición (p_{18}^{nm}, t_{10}) , i.e. $p_{18}^{nm} \in t_5 \bullet \cap \bullet t_{10}$; y

- se hace $M_{t_{10}}(p_{18}^{nm}) = 0$ obteniendo

$$M_{t_{10}} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$$

La tabla U'_2 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.14) que ésta describe se presentan a continuación.

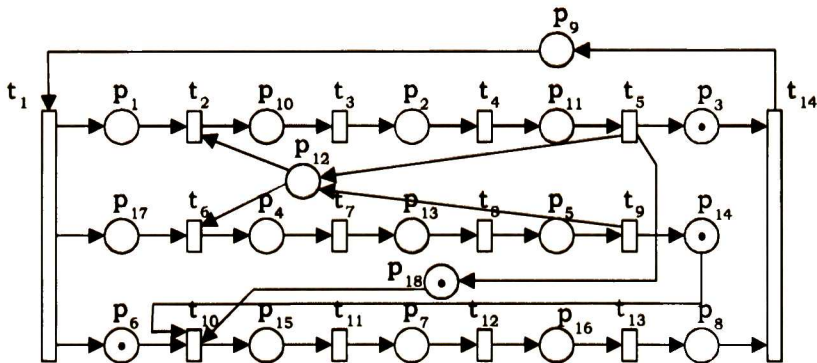
$$U'_2 = \begin{matrix} & t_1 & t_6 & t_7 & t_8 & t_9 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_{10} & t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9^{nm} \\ p_{10}^{nm} \\ p_{11}^{nm} \\ p_{12}^{nm} \\ p_{13}^{nm} \\ p_{14}^{nm} \\ p_{15}^{nm} \\ p_{16}^{nm} \\ p_{17}^{nm} \\ p_{18}^{nm} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & -1 \\ & & 1 & -1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & -1 & & & & & \\ & & & & & 1 & -1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & -1 & & & & \end{matrix} \end{matrix}$$


Figura 4.14:

Continuando ordenadamente con las columnas de las transiciones t_{10} , t_{11} , t_{12} , t_{13} y t_{14} , se observa que éstas no satisfacen las condiciones de los casos anteriores. Para resumir el proceso necesario para terminar el recorrido de izquierda a derecha sobre la tabla U'_2 , se presenta la siguiente tabla en la que se indica para la columna de cada transición el caso cuyas condiciones se satisfacen.

| Transición | Caso |
|------------|-----------|
| t_1 | 3 |
| t_6 | 4-paso1 |
| t_7 | 4-paso1 |
| t_8 | 4-paso1 |
| t_9 | 4-paso1 |
| t_2 | 4-paso2 |
| t_3 | 4-paso2 |
| t_4 | 4-paso2 |
| t_5 | 4-paso2,3 |
| t_{10} | N.A. |
| t_{11} | N.A. |
| t_{12} | N.A. |
| t_{13} | N.A. |
| t_{14} | N.A. |

Hasta el momento se tiene que: $n = 14, m = 18, \nu = 12$, se asigna U'_2 a $C, \Theta = \emptyset, \Lambda = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$ y el marcado inicial encontrado es $M_1 = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$

Ahora, suponiendo que se presenta una tercera secuencia $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_{13} \zeta_{14} \zeta_{13} \zeta_{15} \zeta_{16} \zeta_{15} \zeta_{17} \zeta_{15} \zeta_{18} \zeta_{19} \zeta_{18} \zeta_{10} \zeta_1$ de vectores de salida y se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_{13} | ζ_{14} | ζ_{13} | ζ_{15} | ζ_{16} | ζ_{15} | ζ_{17} | ζ_{15} | ζ_{18} | ζ_{19} | ζ_{18} | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| p_2 | | | | | | | | | | | | 1 | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | | | | | 1 | |
| $U_3 = p_4$ | | | | | | | 1 | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | | 1 | | | | | | |
| p_6 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | 1 | | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 19$ obteniendo $VS = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{15}, \zeta_{16}, \zeta_{17}, \zeta_{18}, \zeta_{19}\}$.

Siguiendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | t_1 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|-------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| $U'_3 = p_9^{nm}$ | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_{14}^{nm} | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | |
| p_{15}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_{18}^{nm} | | -1 | | | | | | | 1 | | | | | |

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs_3} = t_1 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9 t_{14}$.

De acuerdo a lo indicado en el punto 6, haciendo un análisis de las columnas de U'_3 de izquierda a derecha se tiene que la columna de la transición t_1 no cae en ninguno de los casos. El marcado alcanzado con t_1 es $M_{t_1} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$.

Continuando con la columna de la transición t_{10} , se tiene que el marcado alcanzado es $M_{t_{10}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1]$ En $M_{t_{10}}$ se tiene que $M_{t_{10}}(p_{14}^{nm}) = -1$ y $M_{t_{10}}(p_{18}^{nm}) = -1$ lo cual nos lleva al caso 4. Entonces, se hace $\Lambda(p_{14}^{nm}) = 1$ y $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 1$ de acuerdo al paso a del caso 4, se crean e inicializan las cadenas $w_1^{p_{14}^{nm}} = t_{10}$ y $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_{10}$.

Siguiendo con el análisis de columnas, se tiene que las columnas de las transiciones t_{11} , t_{12} y t_{13} no satisfacen las condiciones de los casos anteriores al caso 4, y resulta verdadero lo que se tiene que comprobar en el paso 1 para estas columnas. Así, las secuencias obtenidas son $w_1^{p_{11}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$ y $w_1^{p_{13}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$.

Continuando con la columna de la transición t_2 y comprobando lo indicado en el paso 1 del caso 4 se tiene que:

t_2 no es concurrente con la transición t_{13} , i.e. $(t_6, t_7) \notin \Theta$, pero no existe algún lugar en la intersección $t_{12} \bullet \cap \bullet t_2$, entonces

comprobando si $\exists p_a \in \bullet t_2$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_h \subset w_1^{p_{14}^{nm}}$ o $t_h \subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ resulta:

Falso. Entonces se habilita el paso b.

Siguiendo lo indicado en el paso b, se crean e inicializan las cadenas $w_1^{p_{14}^{nm}} = t_2$ y $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_2$; siguiendo con el análisis de columnas, se tiene que sólo las columnas de las transiciones t_3, t_4 y t_5 satisfacen lo indicado en el paso b. Entonces, se obtienen las cadenas $w_2^{p_{14}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$ y $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$. Además, se tiene que $t_5 \in \bullet p_{18}^{nm}$. Continuando con lo indicado en el paso c, para $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{18}^{nm}}$ se tiene que $|w_1^{p_{18}^{nm}}| = 4$ y $|w_2^{p_{18}^{nm}}| = 4$, entonces:

se coloca un 1 en la posición (p_{18}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{18}^{nm}, t_2) ,

Se indica que se está modelando exclusión mutua con el lugar p_{18}^{nm} , i.e. $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 2$,

Hasta aquí se termina la generación de cadenas para p_{18}^{nm} , pero se debe continuar generando la segunda cadena para p_{14}^{nm} . Antes de hacerlo se tiene que el marcado alcanzado con t_5 es

$$M_{t_5} = \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \right]^T$$

La tabla U'_3 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.15) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|-------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| $U'_3 = p_9^{nm}$ | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_{14}^{nm} | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | |
| p_{15}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_{18}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | | | | | |

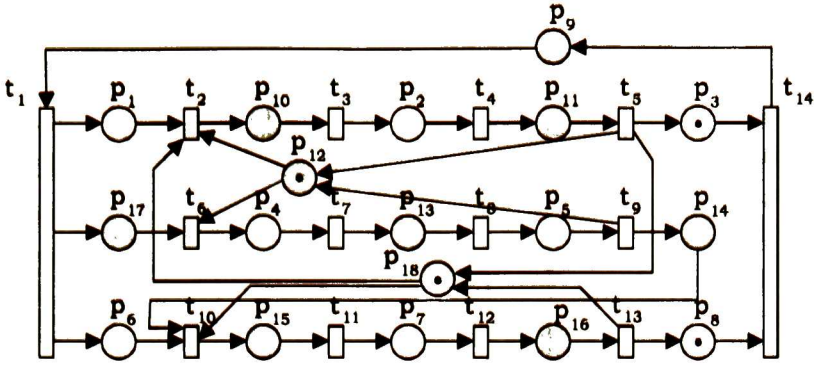


Figura 4.15:

Continuando con el análisis de columnas, se tiene que las columnas de las transiciones t_6 , t_7 , t_8 y t_9 si satisfacen las condiciones del paso b, para $w_2^{p_{14}^{nm}}$. Entonces, se obtiene la cadena $w_2^{p_{14}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9$. Además, se tiene que $t_9 \in \bullet p_{14}^{nm}$. Continuando con lo indicado en el paso 3 se tiene que $|w_1^{p_{14}^{nm}}| = 4$ y $|w_2^{p_{14}^{nm}}| = 8$, entonces:

- se coloca un 1 en la posición (p_{14}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{14}^{nm}, t_2) , se indica que se está modelando exclusión mutua con el lugar p_{14}^{nm} , i.e. $\Lambda(p_{14}^{nm}) = 2$,
- y colocando una marca a p_{14}^{nm} en M_1 y M_{t_9} , se tiene que el marcado alcanzado con t_9 es

$$M_{t_9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

y el marcado inicial es

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Antes de presentar la tabla obtenida hasta el momento, se observa que la transición t_{14} cae en el caso 3, i.e. $t_9 \bullet \cap \bullet t_{14} = \emptyset$, $(t_1, t_6) \notin \Theta$; t_9 no pertenece a la primer cadena que se está formando para obtener exclusión mutua.

Entonces, se añade un lugar no medible haciendo lo siguiente:

- se crea un nuevo renglón en U'_3, Λ, M_1 y en $M_{t_{14}}$;
 - se incrementa $m = 18$ en uno, i.e. $m = 19$;
- se etiqueta el nuevo renglón con p_{19}^{nm} ;
- en la tabla U'_3 se añade un 1 en la posición (p_{19}^{nm}, t_9) y un -1 en la posición (p_{19}^{nm}, t_{14}) , i.e. $p_{19}^{nm} \in t_9 \bullet \cap \bullet t_{14}$; y
- se hace $M_{t_{14}}(p_{19}^{nm}) = 0$, i.e.

$$M_{t_{14}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

La tabla U'_3 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.16) que ésta describe se presentan a continuación.

$U'_3 =$

| | t_1 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|---------------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_{14}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | | | | | 1 | |
| p_{15}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | 1 | | | | | | | | | | -1 | | | |
| p_{18}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | | | | | |
| p_{19}^{nm} | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |

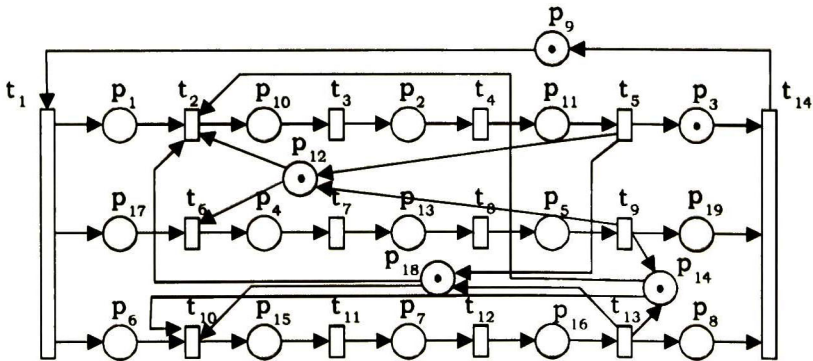


Figura 4.16:

Resumiendo el proceso necesario para terminar el recorrido de izquierda a derecha sobre la tabla U'_3 , en la siguiente tabla se indica para cada transición el caso cuyas transiciones satisface la columna de dicha transición.

| Transición | Caso |
|------------|------------------|
| t_1 | N.A. |
| t_{10} | 4-paso1 |
| t_{11} | 4-paso1 |
| t_{12} | 4-paso1 |
| t_{13} | 4-paso1 |
| t_2 | 4-paso2 |
| t_3 | 4-paso2 |
| t_4 | 4-paso2 |
| t_5 | 4-paso2, 4-paso3 |
| t_6 | 4-paso2 |
| t_7 | 4-paso2 |
| t_8 | 4-paso2 |
| t_9 | 4-paso2, 4-paso3 |
| t_{14} | 3 |

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 19$, $\nu = 12$, se asigna U'_3 a C , $\Theta = \emptyset$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ y el marcado inicial encontrado es:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Si observamos la RPI obtenida hasta el momento, al ejecutar la secuencia $\sigma = t_1 t_6 t_7 t_8 t_9$, se tiene que con la ocurrencia de t_9 se entrega una marca a p_{14} , obteniendo que $M(p_{14}) = 2$, entonces, la RPI obtenida con la secuencia σ_{obs_3} no es binaria. Se tiene la observación de que la cadena $w_2^{p_{14}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_9$ contiene a las cadenas $w_1^{p_{12}} = t_6 t_7 t_8 t_9$ y $w_2^{p_{12}} = t_2 t_3 t_4 t_5$, i.e. $w_2^{p_{14}^{nm}} = w_2^{p_{12}} \cdot w_1^{p_{12}}$. Para resolver este problema, al momento que se identifica una exclusión se debe realizar lo indicado en el siguiente caso.

.....

Caso 5.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j \dots$ donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si t_j es la última transición que se concatena a una cadena con que se detectó para modelar exclusión mutua con el lugar p_x^{nm} , entonces es necesario verificar si al menos una de las cadenas que se encontraron para p_x^{nm} , se pueden formar concatenando al menos dos cadenas encontradas para modelar exclusión mutua con algún otro lugar no medible p_y^{nm} distinto a p_x^{nm} . Para hacer esto, es necesario obtener las cadenas de los lugares con los cuales se modela exclusión

mutua. Estos lugares están indicados por un 2 en el vector Λ . El procedimiento es el siguiente.

- a) Dada la matriz C de incidencia obtenida hasta el momento, se inicializa un contador, por ejemplo $\zeta = 1$, para cada lugar que contiene un 2 en Λ , i.e $\Lambda(p_y^{nm}) = 2$ para un lugar p_y^{nm} . Enseguida, se hace un análisis de columnas en C de izquierda a derecha sobre cada renglón correspondiente a cada uno de estos lugares, por ejemplo p_y^{nm} . Con la ζ -ésima (inicialmente $\zeta = 1$) presencia de una valor negativo, por ejemplo para la columna de la transición t_q , se crea e inicializa la cadena $w_\zeta^{p_y^{nm}} = t_q$, y hasta que se observe un valor positivo se hace lo siguiente, se concatena por la derecha a $w_\zeta^{p_y^{nm}}$ la transición t_g , posterior a t_q , si se cumple lo siguiente:

- 1) que t_g no sea concurrente con la última transición de $w_\zeta^{p_y^{nm}}$
- 2) que se pueda obtener una ruta descrita por $w_\zeta^{p_y^{nm}} \cdot t_g$,
- 3) si no se cumple ninguna de las anteriores, se verifica si $\exists p_a \in \bullet t_g$ contenido en el postconjunto de alguna transición $t_h \subset w_\zeta^{p_y^{nm}}$, si resulta:

Verdadero. Se suprimen en $w_\zeta^{p_y^{nm}}$ las transiciones posteriores a t_h , y se concatena t_g a $w_\zeta^{p_y^{nm}}$

Falso. Se continúa con la siguiente transición.

Así, si el valor positivo se encuentra en la columna de la transición t_s se obtiene $w_\zeta^{p_y^{nm}} = t_q \dots t_s$. Entonces, se incrementa en uno ζ y se vuelve a iniciar el proceso a partir de la columna posterior a la de t_s .

De esta manera, cuando se termine el análisis de columnas, se obtendrán las distintas secuencias para cada lugar.

- b) Entonces, se procede a verificar si en la secuencia $w_1^{p_x^{nm}} (w_2^{p_x^{nm}})$ la primer transición de ésta se encuentra en la primer transición de la secuencia $w_i^{p_y^{nm}}$, y si la última transición de $w_1^{p_x^{nm}} (w_2^{p_x^{nm}})$ se encuentra en la secuencia $w_j^{p_y^{nm}}$ donde el conjunto de secuencias $\{\dots, w_i^{p_y^{nm}}, \dots, w_j^{p_y^{nm}}, \dots\}$, con $w_i^{p_y^{nm}} \neq w_j^{p_y^{nm}}$ son las encontradas para algún lugar p_y^{nm} . Entonces, si resulta:

Verdadero para $w_1^{p_x^{nm}} (w_2^{p_x^{nm}})$. Se eliminan los arcos de la primer y última transición de $w_1^{p_x^{nm}} (w_2^{p_x^{nm}})$ que salen y entran de y a p_x^{nm} respectivamente. Si queda únicamente la cadena $w_2^{p_x^{nm}} (w_1^{p_x^{nm}})$ entonces se elimina el renglón del lugar p_x^{nm} , eliminando su respectivo renglón en U' y en M_1 .

Falso. Se mantiene la exclusión encontrada con el lugar p_x^{nm}

.....

Entonces, para el ejemplo suponiendo que se está analizando la columna de la transición t_9 tal que con t_9 ya se encontraron las cadenas $w_1^{p_{14}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$ y $w_2^{p_{14}^{nm}} = t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8t_9$ que junto con p_{14}^{nm} se modela exclusión mutua. Como se tiene que

$\Lambda = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \right]^T$ donde aparte de p_{14}^{nm} se observa que $\Lambda(p_{12}^{nm}) = \Lambda(p_{18}^{nm}) = 2$. Entonces, haciendo lo indicado en el caso 5, se obtienen las secuencias $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$ y $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_6 t_7 t_8 t_9$ para p_{12}^{nm} , y $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$ y $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$ para p_{18}^{nm} . Haciendo la verificación se tiene que $w_2^{p_{14}^{nm}}(1) = w_1^{p_{12}^{nm}}(1) = t_2$ y $w_2^{p_{14}^{nm}}(8) = w_2^{p_{12}^{nm}}(4)$. Dado lo anterior se hace lo siguiente.

- Se eliminan los arcos en las posiciones (p_{14}^{nm}, t_2) y (p_{14}^{nm}, t_9) .
- Se tiene que la única cadena que queda para p_{14}^{nm} es $w_1^{p_{14}^{nm}}$. Entonces, se elimina el renglón del lugar p_{14}^{nm} en U'_3, C, M_1, Λ y en el marcado alcanzado por la transición t_9 , i.e. M_{t_9} .

La tabla U'_3 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.16) que ésta describe se presentan a continuación.

| | t_1 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|-------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| $U'_3 = p_9^{nm}$ | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_{15}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_{18}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | | | | | |
| p_{19}^{nm} | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |

Otra observación que se puede hacer sobre la RPI de la figura 4.17, es que cada una de las transiciones de la secuencia $t_6 t_7 t_8 t_9$ resultan ser concurrentes con cada una de las transiciones de la cadena $t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$, lo cual hace que el lenguaje que esta RPI genera es mucho más grande al observado. Esto se puede evitar si es posible encontrar una relación entre los lugares en exclusión. Una observación es que en esta RPI existe un empotramiento entre las cadena $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$ y $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$, i.e. $w_2^{p_{18}^{nm}} = w_1^{p_{12}^{nm}}$. En general, se presenta un empotramiento entre las cadenas w_x y w_y si un sufijo(prefijo) de w_x es prefijo(sufijo) de w_y . Para resolver este problema, al

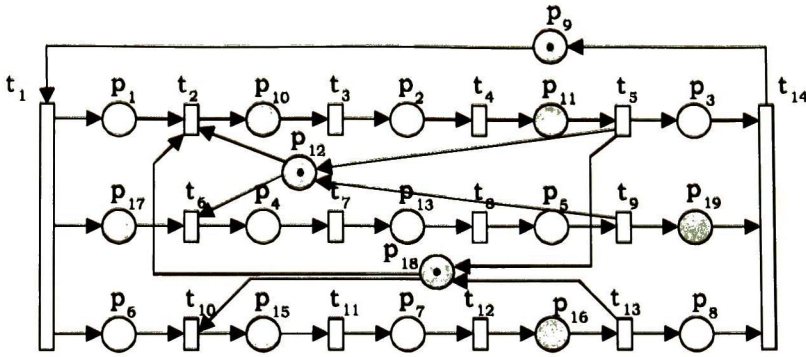


Figura 4.17:

momento en que se identifica una exclusión se debe realizar lo indicado en el siguiente caso.

Caso 6.

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i t_j \dots$ donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si t_j es la última transición con que se detectó una exclusión mutua para el lugar p_y^{nm} obteniendo las cadenas $w_1^{p_y^{nm}}$ y $w_2^{p_y^{nm}}$. Es necesario verificar si existe algún empotramiento entre la ruta que describe la cadena $w_1^{p_y^{nm}}$ ($w_2^{p_y^{nm}}$) y alguna de las rutas que describen las cadenas obtenidas para los lugares no medibles, por ejemplo p_x^{nm} , en los que $\Lambda(p_x^{nm}) = 2$, como son $w_1^{p_x^{nm}}$ y $w_2^{p_x^{nm}}$. Primero, para encontrar las cadenas del lugar p_x^{nm} se debe hacer lo indicado en el punto a del caso 5. Así, una vez obtenidas las cadenas de p_x^{nm} ; si se observa un empotramiento, por ejemplo, entre las cadenas $w_1^{p_y^{nm}}$ y $w_2^{p_x^{nm}}$ tal que están involucradas al menos dos transiciones consecutivas; y sucede que ninguna de las transiciones de $w_2^{p_y^{nm}}$ son concurrentes con alguna de las transiciones de $w_1^{p_x^{nm}}$; entonces se debe hacer lo siguiente dependiendo de la situación.

- Si $w_1^{p_y^{nm}} = w_2^{p_x^{nm}}$ se elimina el renglón del lugar $p_x^{nm}(p_y^{nm})$ en U', Λ, M_1 y M_{t_j} , se decreta en uno m y se añade un arco dirigido de la última transición de $w_1^{p_x^{nm}}$ ($w_2^{p_y^{nm}}$) a $p_y^{nm}(p_x^{nm})$ y otro de $p_y^{nm}(p_x^{nm})$ a la primer transición de $w_1^{p_x^{nm}}$ ($w_2^{p_y^{nm}}$).
- Si $w_2^{p_x^{nm}}$ ($w_1^{p_y^{nm}}$) es un sufijo propio de $w_1^{p_y^{nm}}$ ($w_2^{p_x^{nm}}$), i.e. es sufijo pero existe la secuencia w_z , con $|w_z| > 0$, tal que $w_1^{p_y^{nm}}$ ($w_2^{p_x^{nm}}$) = $w_z \cdot w_2^{p_x^{nm}}$ ($w_z \cdot w_1^{p_y^{nm}}$), entonces se añade un arco dirigido de la última transición de $w_2^{p_y^{nm}}$ ($w_1^{p_x^{nm}}$) a $p_x^{nm}(p_y^{nm})$ y otro de $p_x^{nm}(p_y^{nm})$ a la primer transición de $w_2^{p_y^{nm}}$ ($w_1^{p_x^{nm}}$), se elimina el arco

dirigido de la última transición de $w_1^{p_y}(w_2^{p_x})$ a $p_y(p_x)$ y se añade un arco de la primer transición de $w_2^{p_x}(w_1^{p_y})$ a $p_y(p_x)$.

- c) Si $w_1^{p_y^m}(w_2^{p_x^m})$ es un prefijo propio de $w_2^{p_x^m}(w_1^{p_y^m})$, i.e. es prefijo pero existe una secuencia w_v , con $|w_v| > 0$, tal que $w_2^{p_x^m}(w_1^{p_y^m}) = w_1^{p_y^m} \cdot w_v(w_2^{p_x^m} \cdot w_v)$, entonces se añade un arco de la última transición de $w_1^{p_x^m}(w_2^{p_y^m})$ al lugar $p_y^{nm}(p_x^{nm})$ y otro de $p_y^{nm}(p_x^{nm})$ a la primer transición de $w_1^{p_x^m}(w_2^{p_y^m})$, se elimina el arco dirigido de $p_x(p_y)$ a la primer transición de $w_2^{p_x^m}(w_1^{p_y^m})$ y se dirige un arco de $p_x(p_y)$ a la última transición de $w_1^{p_x^m}(w_2^{p_y^m})$.
- d) Si no se cumple ninguna de las situaciones anteriores, y el empotramiento está descrito por la subcadena ϖ_r , i.e. existe un sufijo propio w_a y un prefijo propio w_b , con $|w_a| > 0$, $|w_b| > 0$ y $|\varpi_r| > 0$, tal que $w_1^{p_y}(w_2^{p_x}) = \varpi_r \cdot w_a$ y $w_2^{p_x}(w_1^{p_y}) = w_b \cdot \varpi_r$, entonces crear un nuevo renglón para el lugar no medible p_z^{nm} en U' , Λ , M_1 y M_{t_j} , y añadir arcos dirigidos de la última transición de $w_2^{p_y^m}, w_1^{p_x^m}$ y ϖ_r a p_z^{nm} ; y añadir arcos dirigidos de p_z^{nm} a la primer transición de $w_2^{p_y^m}, w_1^{p_x^m}$ y ϖ_r , además se añade una marca al lugar p_z^{nm} en M_1 y M_{t_j} ; se elimina el arco dirigido de la última transición de ϖ_r a $p_x(p_y)$ y se agrega un arco dirigido de la primer transición de ϖ_r a $p_x(p_y)$; finalmente se elimina el arco dirigido de $p_y(p_x)$ a la primer transición de ϖ_r y se agrega un arco dirigido de $p_y(p_x)$ a la última transición de ϖ_r .

▲▲▲

Para el ejemplo, se tiene que con la columna de la transición t_9 se obtuvieron las cadenas $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$, $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_2t_3t_4t_5$ para el lugar no medible p_{18}^{nm} . Haciendo lo indicado en el paso *a* del caso 5, para obtener las cadenas que están en exclusión mutua con p_{12} se obtiene que $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_6t_7t_8t_9$ y $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_2t_3t_4t_5$. Entonces, se observa que existe un empotramiento entre $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{12}^{nm}}$, y como se satisface que comparten al menos dos transiciones consecutivas, i.e. $t_2t_3t_4t_5$, además de que hasta el momento no se han detectado transiciones de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ concurrentes con las transiciones de $w_1^{p_{12}^{nm}}$; en consecuencia, se debe hacer lo indicado en la situación 1 del caso 6, como sigue:

- Se elimina p_{18}^{nm} , y se coloca un 1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{12}^{nm}, t_{10}) .

La tabla U'_3 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.16) que ésta describe y haciendo un retiquetado de lugares, dado que en este momento sólo se tienen $m = 17$ lugares, se presentan a continuación.

$$U'_3 =$$

| | t_1 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|---------------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | | | | | -1 | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | 1 | | | | | | | | | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_{14}^{nm} | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_{17}^{nm} | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |

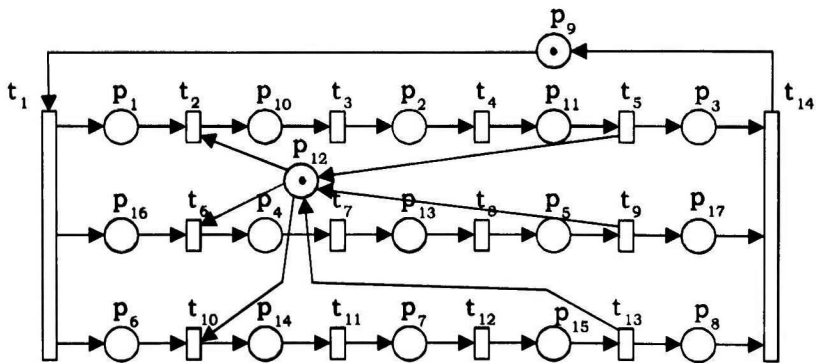


Figura 4.18:

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 17$, $\nu = 19$, se asigna U'_1 a C , $\Theta = \emptyset$, $\Lambda = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$, y el marcado inicial encontrado es $M_1 = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$

Ahora, suponiendo que se presenta una cuarta secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_3 | ζ_{20} | ζ_{21} | ζ_4 | ζ_{22} | ζ_4 | ζ_3 | ζ_5 | ζ_8 | ζ_{19} | ζ_{18} | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|-----------|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $U_4 = p_4$ | | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | 1 | | | | | | | | |
| p_6 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | | 1 | | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 22$ obteniendo $\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{15}, \zeta_{16}, \zeta_{17}, \zeta_{18}, \zeta_{19}, \zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22}\}$.

Siguiendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | t_1 | t_2 | t_6 | t_3 | t_7 | t_8 | t_9 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | 1 | | | | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | 1 | | -1 | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| $U'_4 = p_9^{nm}$ | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | -1 | | | | 1 | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_{16}^{nm} | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | | | | | | | 1 | | | | | | | -1 |

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs_4} = t_1 t_2 t_6 t_3 t_7 t_8 t_9 t_4 t_5 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_{14}$.

De acuerdo a lo indicado en el punto 6, haciendo un análisis de las columnas de U'_4 de izquierda a derecha se tiene que las columnas de las transiciones t_1 y t_2 no satisfacen las condiciones de los casos anteriores al caso 5. Entonces, obtenemos que

$$M_{t_2} = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right]^T$$

Continuando con la columna de la transición t_6 , el marcado alcanzado es

$M_{t_6} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$ en el cual se observa que $M_{t_6}(p_{12}^{nm}) = -1$, entonces se debería comenzar a buscar las secuencias que modelan exclusión mutua para p_{12}^{nm} , pero ya existe exclusión mutua para p_{12}^{nm} i.e. $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 2$. Entonces, es necesario buscar exclusiones mutuas donde la cardinalidad de las cadenas a encontrar es menor que la cardinalidad de las cadenas del lugar p_{12}^{nm} , restringiendo así un menor número de estados. Para poder determinar esto se presenta el siguiente caso.

.....

Caso 7.

.....

Dada la secuencia observada $\sigma_{obs} = \dots t_i \dots t_j \dots$ donde t_j corresponde a la columna que se está analizando actualmente. Si el par (t_i, t_j) no está contenido en Θ , el marcado M_{t_j} alcanzado con la transición t_j presenta un valor negativo en la posición de al menos un lugar no medible p_x^{nm} para el cual $\Lambda(p_x^{nm}) = 2$ o 3 , y utilizando el paso a del caso 5 se obtienen al menos dos secuencias de transiciones $w_1^{p_x} = t_t \dots t_p$ y $w_2^{p_x} = t_q \dots t_s$, tal que $t_q = t_j$, $t_i \subset w_1^{p_x}$ y $t_j \subset w_2^{p_x}$ donde t_i es alguna transición encontrada buscando hacia atrás sobre las cadenas distintas a $w_2^{p_x}$; entonces para indicar que se buscarán exclusiones más pequeñas con las cadenas $w_1^{p_x}$ y $w_2^{p_x}$ se hace $\Lambda(p_x^{nm}) = 3$ y $M_{t_j}(p_x) = 0$. Continuando con el análisis de columnas de U' se hace lo indicado en las siguientes fases, hasta que se hayan recorrido la última las transición de $w_1^{p_x}$ o $w_2^{p_x}$

a) Si al verificar que $t_i \neq t_t$ resulta:

Verdadero. Crear e inicializar $w_t^{p_x^{nm}} = t_t$, colocarse en la columna de la transición t_t en U' , y concatenar por la derecha a w_t toda transición t_g , posterior a t_q tal que la secuencia $w_t^{p_x^{nm}} \cdot t_g$ describa una ruta; hasta llegar a t_i .

Falso. Crear e inicializar $w_t^{p_x^{nm}} = t_i$.

Entonces, si se cumple que $|w_t| \geq 2$, se añade un renglón en M_1, Λ, U' y M_{t_j} , correspondiente a un nuevo lugar no medible p_a^{nm} tal que junto con las secuencias w_t y $w_2^{p_x}$ se modele exclusión mutua; se añaden los arcos denotados por los pares $(t_i, p_a^{nm}), (t_p, p_a^{nm}), (p_a^{nm}, t_q)$ y (p_a^{nm}, t_t) ; se añade una marca a p_a^{nm} en M_1 , y se hace $\Lambda(p_a^{nm}) = 2$ y $M_{t_j} = 0$.

Finalmente, se limpia el contenido de w_t , i.e. se hace $w_t = \epsilon$.

b) Ahora, a partir de t_i y t_j , siguiendo el proceso de recorrer de izquierda a derecha la tabla de observación U' si se observa que no se cumple con el caso 1 y 2 para las transiciones t_k y t_l , donde $t_k \in w_1^{p_x}(w_2^{p_x})$ y $t_l \in w_2^{p_x}(w_1^{p_x})$, entonces a partir de la columna de t_l , donde $w_2^{p_x}(g) = t_l(w_1^{p_x}(g) = t_l)$, si al verificar que $g > 1$ resulta:

Verdadero. Crear la subsecuencia $w_r^{p_x^{nm}} = t_f t_l$, donde $w_2^{p_x}(g-1) = t_f(w_1^{p_x}(g-1) = t_f)$.

Falso. Crear e inicializar la secuencia $w_r^{p_x^{nm}} = t_l$.

Así, continuando con el análisis de las columnas de U' se le concatena a w_r por la derecha toda transición t_h posterior a t_l si se cumple que la secuencia $w_r \cdot t_h$ describa una ruta y $t_h \subset w_1^{p_x}(w_2^{p_x})$, si $t_h \not\subset w_2^{p_x}(t_h \not\subset w_1^{p_x^{nm}})$ entonces se continua con la siguiente transición. Cuando no se cumpla lo anterior, se crea una segunda subsecuencia $w_s^{p_x} \subset w_1^{p_x}(w_2^{p_x})$ que contenga sólo las transiciones posteriores a t_k en $w_2^{p_x}(w_1^{p_x})$. Entonces, si existen lugares implícitos en p_c^{nm} , i.e. que toda secuencia que se obtiene para un lugar p_y^{nm} , con $\Lambda(p_c^{nm}) = 2$, esté contenida en una secuencia de p_c^{nm} ; se deben eliminar los renglones en U' , Λ , M_1 y M_{t_j} . Además, se verifica lo siguiente haciendo lo indicado.

- 1) Si t_k es la transición inicial de $w_1^{p_x}(w_2^{p_x})$ entonces se indica, en el conjunto Θ de transiciones concurrentes, que t_k es concurrente con t_l y toda transición posterior a t_l en w_r .
 - 2) Si $|w_r^{p_x}| \geq 2$ y $|w_s^{p_x}| \geq 2$ entonces es necesario añadir un lugar p_b^{nm} no medible tal que junto con las secuencias $w_r^{p_x}$ y $w_s^{p_x}$ se modele exclusión mutua. Así, una vez creado el renglón en U' , en M_{t_k} , en Λ y en M_1 , se añaden los arcos denotados por los pares (p_b^{nm}, t_a) , (p_b^{nm}, t_c) , (t_b, p_b^{nm}) y (t_d, p_b^{nm}) , se añade una marca a p_b^{nm} en M_{t_k} y M_1 , y se hace $\Lambda(p_b^{nm}) = 2$. Además, como se ha encontrado exclusión mutua, se debe verificar si no existe un empotramiento entre las cadenas de p_b^{nm} , haciendo lo indicado en el caso 6 sin considerar el renglón del lugar p_x^{nm} .
 - 3) Si $w_s^{p_x} = t_s(t_p)$ entonces, se indica en el conjunto Θ de transiciones concurrentes que t_s es concurrente con t_l y toda transición posterior a t_l en w_r . Finalmente, se limpian los contenidos de w_s y w_r , i.e. se hace $w_s = w_r = \epsilon$.
- c) Una vez que se recorren las transiciones de las secuencias de p_x^{nm} , se elimina el renglón de p_x^{nm} en U' , Λ , M_{t_j} y M_1 . Además, si existen secuencias de p_x^{nm} para las que no ocurre el caso 7 se hace lo siguiente.
- 1)
 - Crear un lugar p_c^{nm} no medible en U' , Λ y en M_1 , al cual se le asignan los mismos valores que tiene el renglón de p_x^{nm} eliminando los arcos que se tienen con la transición inicial y final de $w_z^{p_x}$, donde $w_z^{p_x}$ es una de las cadenas a la que se le aplico el caso 7, se hace $\Lambda(p_c^{nm}) = 2$, $M_1(p_c^{nm}) = 1$ y $M_{t_j}(p_c^{nm}) = 0$ para p_c^{nm} . Además, como se encontró exclusión mutua, se debe verificar si no existe un empotramiento entre las cadenas de p_c^{nm} haciendo lo indicado en el caso 6, sin considerar el renglón del lugar p_x .

Continuando con el análisis de la columna de la transición t_6 en el ejemplo, se tiene que $(t_2, t_6) \in \Theta$, en el marcado alcanzado con t_6 se tiene que $M_{t_6}(p_{12}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 2$. Entonces, se hace $\Lambda(p_{12}^{nm}) = 3$, y realizando lo indicado en el paso *a* del caso 5 para el renglón de p_{12}^{nm} , se obtienen las secuencias $w_1^{p_{12}^{nm}} = t_2t_3t_4t_5$, $w_2^{p_{12}^{nm}} = t_6t_7t_8t_9$ y $w_3^{p_{12}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$. Aquí se observa que $t_2 \subset w_1^{p_{12}^{nm}}$ y $t_6 \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$. De acuerdo a lo indicado en la fase *a* del caso 7 se tiene que las transiciones son $t_2 = t_k$ y $t_6 = t_l$, Como t_2 es la primer transición de $w_1^{p_{12}^{nm}}$ se crea e inicializa la cadena $w_t = t_2$; entonces como $|w_t| = 1$, no se añade ningún lugar, y se hace $w_t = \epsilon$.

Según lo indicado en la fase 2, las transiciones son $t_2 = t_k$ y $t_6 = t_l$ con $t_2 \subset w_1^{p_{12}^{nm}}$ y $t_6 \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$. Como t_6 es la primer transición de $w_2^{p_{12}^{nm}}$ se crea la secuencia $w_r = t_6$. Como la siguiente columna corresponde a la transición t_3 y sucede que $t_3 \not\subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ entonces de acuerdo al punto 1 de la fase *b* se consideran concurrentes las transiciones t_2 y t_6 , y se añade el par (t_2, t_6) a Θ . Ahora, como existe la tercera cadena $w_3^{p_{12}^{nm}}$ entonces

- Se crea un nuevo lugar p_{18}^{nm} en U' , en Λ y en M_1 , al cual se le asignan los mismos valores que tiene el renglón de p_{12}^{nm} ; eliminando los arcos que se tienen con la transición inicial y final de $w_1^{p_{12}^{nm}}$, se hace $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 2$ y $M_1(p_{18}^{nm}) = 1$. Además, no considerando el renglón del lugar p_{12}^{nm} se tiene que no existe empotramiento con las cadenas de p_{18}^{nm}
- Se crea el nuevo lugar p_{19}^{nm} en U' en Λ y en M_1 , al cual se le asignan los mismos valores que tiene el renglón de p_{12}^{nm} , eliminando los arcos que se tienen con la transición inicial y final de $w_2^{p_{12}^{nm}}$, se hace $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 2$ y $M_1(p_{19}^{nm}) = 1$. Además, no considerando el renglón del lugar p_{12}^{nm} se tiene que existe un empotramiento entre cadenas $w_1^{p_{19}^{nm}} = t_2t_3t_4t_5$ y $w_2^{p_{19}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$ de p_{19}^{nm} con las cadenas $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_6t_7t_8t_9$ y $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$ de p_{18}^{nm} , i.e. $w_2^{p_{19}^{nm}} = w_2^{p_{18}^{nm}}$ pero como existen transiciones concurrentes entre $w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $w_1^{p_{18}^{nm}}$ i.e. $(t_2, t_6) \in \Theta$, no se modifica la estructura en U'_4 .

Dado que se ha incrementado el número de lugares, se hace $m = 19$, y se coloca una marca para los lugares p_{18}^{nm} y p_{19}^{nm} en M_1 .

Finalmente se hace $w_r = \epsilon$.

Continuando con la transición t_3 , según lo indicado en la fase *b*, las transiciones son $t_6 = t_k$ y $t_3 = t_l$ con $t_6 \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ y $t_3 \subset w_1^{p_{12}^{nm}}$. Como $w_1^{p_{12}^{nm}}(2) = t_3$, resulta que $g = 2$ y $g > 1$, entonces se crea la subcadena $w_r = t_2t_3$. Continuando con el análisis de las columnas de U'_4 se tiene que la siguiente columna corresponde a la transición t_7 , donde $t_7 \not\subset w_1^{p_{12}^{nm}}$. Entonces, creando la subcadena $w_s \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ (de acuerdo a la fase *b*), que contiene sólo a las transiciones posteriores a t_6 se tiene que $w_s = t_7t_8t_9$, y se tiene que w_r y w_s satisfacen sólo las condiciones del punto *b* de la fase 2, i.e. $|w_r| \geq 2$ y $|w_s| \geq 2$; entonces haciendo lo indicado en este punto se hace lo siguiente:

- Se añade el lugar p_{20}^{nm} no medible, creando su renglón en U'_4 , M_{t_6} , Λ y en M_1 ; para añadir los arcos, se coloca un 1 en las posiciones (p_{20}^{nm}, t_9) y (p_{20}^{nm}, t_3) , y un -1 en las posiciones (p_{20}^{nm}, t_2) y (p_{20}^{nm}, t_7) , se añade una marca a p_{20}^{nm} en M_{t_6} y en M_1 , se hace $\Lambda(p_{20}^{nm}) = 2$.

Como se ha encontrado una exclusión mutua para p_{20}^{nm} , se verifica si la cadena $w_r(w_s)$ se puede formar concatenando al menos dos de las cadenas encontradas para el lugar p_{18}^{nm} o p_{19}^{nm} tal y como se indica en el caso 5, lo cual resulta falso; además es necesario verificar si existe un empotramiento entre las cadenas w_r y w_s de p_{20}^{nm} y las cadenas de los lugares que modelan exclusión mutua en U'_4 a excepción de p_{12}^{nm} , haciendo lo indicado en el caso 6, y resulta que sí existe un empotramiento entre las cadenas $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_6t_7t_8t_9$ y $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$ de p_{18}^{nm} , $w_1^{p_{19}^{nm}} = t_1t_2t_3t_4$ y $w_2^{p_{19}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}$ de p_{19}^{nm} , y las cadenas w_r y w_s de p_{20}^{nm} . Entonces, como se empotran w_s y $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y no existen transiciones en w_r que sean concurrentes con las de $w_2^{p_{18}^{nm}}$ se cae en el la situación 2 del caso 6, i.e. w_s es sufijo propio de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ entonces se pone un 1 en la posición (p_{20}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{20}^{nm}, t_{10}) . Y como también se empotran w_r y $w_1^{p_{19}^{nm}}$, y no existen transiciones en w_s que sean concurrentes con las de $w_2^{p_{19}^{nm}}$, se cae en el la situación 3 del caso 6, i.e. w_r es prefijo propio de $w_1^{p_{19}^{nm}}$ entonces se pone un 1 en la posición (p_{20}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{20}^{nm}, t_{10}) .

De lo anterior se puede observar que los arcos se colocan en las mismas posiciones, esto se debe a que están empotradas $w_2^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{19}^{nm}}$ i.e. $w_2^{p_{18}^{nm}} = w_2^{p_{19}^{nm}}$

Finalmente se hace $w_r = w_s = \epsilon$.

La tabla U'_4 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.19) que ésta describe se presentan a continuación.

$$U'_4 =$$

| | t_1 | t_2 | t_6 | t_3 | t_7 | t_8 | t_9 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | 1 | | | | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | 1 | | -1 | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | -1 | -1 | | | | 1 | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{13}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{15}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_{16}^{nm} | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{17}^{nm} | | | | | | | 1 | | | | | | | -1 |
| p_{18}^{nm} | | | -1 | | | 1 | | | | -1 | | | 1 | |
| p_{19}^{nm} | | -1 | | | | | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{20}^{nm} | | -1 | | 1 | -1 | | 1 | | | -1 | | | 1 | |

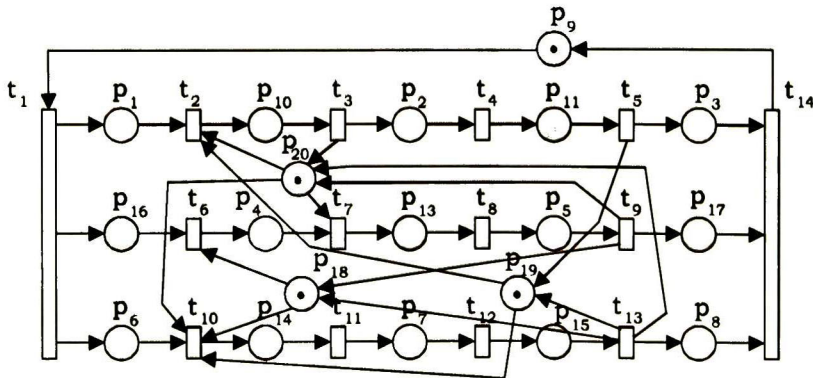


Figura 4.19:

A continuación se analiza la columna de la transición t_7 . Para ésta resulta falsa la comprobación de la fase a ; y continuando con la fase b se tiene que $t_3 = t_k$ y $t_7 = t_l$, donde $t_7 \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ y $t_3 \subset w_1^{p_{12}^{nm}}$; y $w_2^{p_{12}^{nm}}(2) = t_7$, obteniendo que $g = 2$, entonces como $g > 1$ se hace $w_r = t_6 t_7$, y continuando con el análisis de las columnas se tiene que se forma una ruta con las transiciones t_8 y t_9 , obteniendo $w_r = t_6 t_7 t_8 t_9$, y como la siguiente columna corresponde a la transición t_3 donde $t_3 \notin w_2^{p_{12}^{nm}}$, entonces se crea la subcade-

na $w_s \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ sólo con las transiciones posteriores a t_3 , i.e. $w_s = t_4 t_5$. Continuando con la fase *b.i* se tiene que $|w_r| \geq 2$ y $|w_s| \geq 2$, entonces se añade el lugar no medible p_{21}^{nm} . que junto con w_r y w_s se describe exclusión mutua, creando su renglón en U'_4 , M_{t_3} , Λ y en M_1 , y se hace $(p_{21}^{nm}, t_9) = (p_{21}^{nm}, t_5) = 1$ y $(p_{21}^{nm}, t_6) = (p_{21}^{nm}, t_4) = -1$. Como aquí se acaba de encontrar una exclusión mutua es necesario verificar si una de las cadenas w_r o w_s se puede formar concatenando al menos dos de las cadenas encontradas para modelar exclusión con los lugares p_{18}^{nm} , p_{19}^{nm} y p_{20}^{nm} para los cuales se tiene que $\Lambda(p_{18}^{nm}) = \Lambda(p_{19}^{nm}) = \Lambda(p_{20}^{nm}) = 2$, de acuerdo al caso 5, lo cual resulta falso; además se debe verificar si con la cadena w_s o w_r existe algún empotramiento entre la ruta que describen estas cadenas y alguna de las rutas que describen las cadenas obtenidas para los lugares no medibles p_{18}^{nm} y p_{19}^{nm} de acuerdo al caso 6, para lo cual resulta un empotramiento entre w_s y la cadena $w_1^{p_{19}^{nm}}$, i.e. w_s es sufixo propio de $w_1^{p_{19}^{nm}}$ y no existen transiciones en w_r que sean concurrentes con las de $w_2^{p_{19}^{nm}}$ entonces se pone un 1 en la posición (p_{21}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{21}^{nm}, t_{10}) ; y como también se empotran w_r y $w_1^{p_{18}^{nm}}$ i.e. $w_r = w_1^{p_{18}^{nm}}$ y no existen transiciones en w_s que sean concurrentes con las de $w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se pone un 1 en la posición (p_{21}^{nm}, t_{13}) y un -1 en la posición (p_{21}^{nm}, t_{10}) , y se elimina p_{18}^{nm} en U'_4 , Λ , M_1 , y M_{t_j} , se decrementa m en uno obteniendo que $m = 20$. Entonces, se debe continuar con el análisis de columnas.

Analizando la columna de la transición t_4 se tiene que resulta falsa la comprobación de la fase *a*; continuando con la fase *b* se tiene que $t_9 = t_k$ y $t_4 = t_l$, con $t_9 \subset w_2^{p_{12}^{nm}}$ y $t_4 \subset w_1^{p_{12}^{nm}}$ y $w_1^{p_{12}^{nm}}(3) = t_4$, obteniendo que $g = 3$, entonces como $g > 1$ se hace $w_r = t_3 t_4$, y continuando con el análisis de las columnas se tiene que se forma una ruta con la transición t_5 , obteniendo $w_r = t_3 t_4 t_5$, pero como ya se recorrieron todas las columnas de las transiciones contenidas en $w_1^{p_{12}^{nm}}$ y $w_2^{p_{12}^{nm}}$, entonces para terminar con la fase *b* se hace $w_s = w_r = \epsilon$. Entonces, continuando con la fase *c* se elimina el renglón de p_{12}^{nm} en U'_4 , Λ , M_{t_5} y en M_1 , Terminando así el ejemplo de aplicar el caso 7 con las columnas de las transiciones contenidas en $w_1^{p_{12}^{nm}}$ y $w_2^{p_{12}^{nm}}$

Ahora, el marcado alcanzado con la transición t_5 es

$M_{t_5} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$, y continuando el análisis de la columna t_{10} se observa que ésta no satisface las condiciones de ninguno de los casos, lo mismo sucede para las transiciones t_{11} , t_{12} , t_{13} y t_{14} .

Resumiendo el proceso necesario para terminar el recorrido de izquierda a derecha sobre la tabla U'_4 , en la siguiente tabla se indica para cada transición el caso cuyas condiciones satisface la columna de dicha transición.

| Transición | Caso |
|------------|--------------------------------|
| t_1 | N.A. |
| t_2 | N.A. |
| t_6 | 5-paso a , 7-fase b.i |
| t_3 | 7-fase b.ii |
| t_7 | 7-fase b.ii |
| t_8 | 7-fase b |
| t_9 | 7-fase b |
| t_4 | 7-fase b.ii |
| t_5 | 5-paso a , 6- a , 7-fase c |
| t_{10} | N.A. |
| t_{11} | N.A. |
| t_{12} | N.A. |
| t_{13} | N.A. |
| t_{14} | N.A. |

La tabla U'_4 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.20) que ésta describe y haciendo un retiquetado de lugares, dado que en este momento sólo se tienen $m = 19$ lugares, se presentan a continuación.

| | t_1 | t_2 | t_6 | t_3 | t_7 | t_8 | t_9 | t_4 | t_5 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | 1 | | | | -1 | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | 1 | | -1 | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_6 | 1 | | | | | | | | | -1 | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | 1 | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_{13}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_{15}^{nm} | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | 1 | | | | | | | -1 |
| p_{17}^{nm} | | -1 | | | | | | | 1 | -1 | | | 1 | |
| p_{18}^{nm} | | -1 | | 1 | -1 | | 1 | | | -1 | | | 1 | |
| p_{19}^{nm} | | -1 | | | | | 1 | -1 | 1 | -1 | | | 1 | |

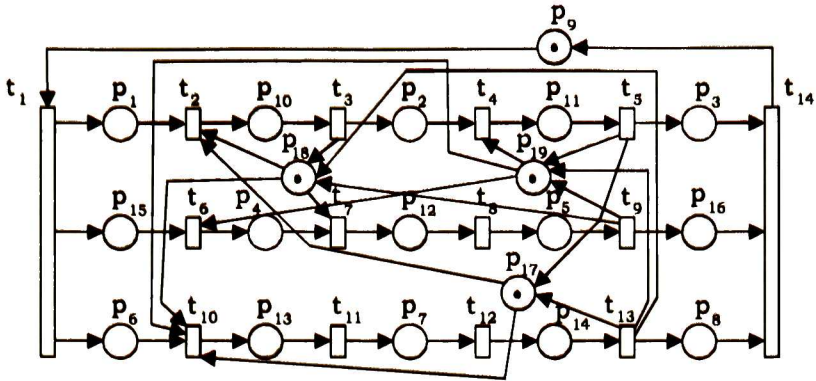


Figura 4.20:

Se actualiza la matriz de incidencia si se hizo alguna modificación a la tabla U' se actualiza el marcado inicial, retiquetando los lugares en caso de que se haya eliminado alguno de ellos, se eliminan las tablas U , y U' , y se regresa al paso 2, para disponerse a observar otra secuencia de vectores de salida.

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 19$, $\nu = 23$, se asigna U'_1 a C , $\Theta = \{(t_2, t_6)\}$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

y el marcado inicial encontrado es

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Ahora, suponiendo que se presenta una quinta secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_{13} | ζ_{16} | ζ_{24} | ζ_1 | ζ_{25} | ζ_{26} | ζ_{27} | ζ_1 | ζ_{18} | ζ_{19} | ζ_{18} | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|--------------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | | | | | 1 | |
| $U_5 = p_4$ | | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | | |
| p_6 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 27$ obteniendo

$$\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{15}, \zeta_{16}, \zeta_{17}, \zeta_{18}, \zeta_{19}, \zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}, \zeta_{24}, \zeta_{25}, \zeta_{26}, \zeta_{27}\}.$$

Siguiendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

$$U'_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} t_1 & t_{10} & t_6 & t_2 & t_7 & t_8 & t_{11} & t_9 & t_{12} & t_3 & t_{13} & t_4 & t_5 & t_{14} \\ p_1 & 1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\ p_2 & & & & & & & & & & 1 & & -1 & & \\ p_3 & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 \\ p_4 & & & 1 & & -1 & & & & & & & & & \\ p_5 & & & & & & 1 & & -1 & & & & & & \\ p_6 & 1 & -1 & & & & & & & & & & & & \\ p_7 & & & & & & 1 & & -1 & & & & & & \\ p_8 & & & & & & & & & & 1 & & & & -1 \\ p_9^{nm} & -1 & & & & & & & & & & & & & 1 \\ p_{10}^{nm} & & & & 1 & & & & & & -1 & & & & \\ p_{11}^{nm} & & & & & & & & & & & & 1 & -1 & \\ p_{12}^{nm} & & & & & 1 & -1 & & & & & & & & \\ p_{13}^{nm} & & 1 & & & & & -1 & & & & & & & \\ p_{14}^{nm} & & & & & & & & & 1 & & -1 & & & \\ p_{15}^{nm} & 1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\ p_{16}^{nm} & & & & & & & & & 1 & & & & & -1 \\ p_{17}^{nm} & & -1 & & -1 & & & & & & & 1 & & 1 & \\ p_{18}^{nm} & & -1 & & -1 & -1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & \\ p_{19}^{nm} & & -1 & & -1 & & & & 1 & & & 1 & -1 & 1 & \end{array} \end{array}$$

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs_5} = t_1 t_{10} t_6 t_2 t_7 t_8 t_{11} t_9 t_{12} t_3 t_{13} t_4 t_5 t_{14}$.

Hasta aquí ya se han presentado los casos cuyas condiciones pueden satisfacer las columnas de una tabla de observación U' . Entonces, para la tabla de observación U'_5 que se acaba de encontrar sólo se resume que casos satisfacen las características de cada columna de U'_5 , y se presenta como se realiza lo indicado en cada caso cuyas condiciones se satisfacen.

.....
 t_1 Para la columna de la transición t_1 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_{10} Para la columna de la transición t_6 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_6 $M_{t_6} = \left[1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \right]^T$
 p_{19}^{nm} Verificando las condiciones del caso 7, se tiene que $(t_{10}, t_6) \notin \Theta$, $M_{t_{10}}(p_{19}^{nm}) = -1$ y $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 2$. Entonces, utilizando el paso a del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{19}^{nm}} = t_4 t_5$, $w_2^{p_{19}^{nm}} = t_6 t_7 t_8 t_9$ y $w_3^{p_{19}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$, aquí $t_6 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $t_{10} \subset w_3^{p_{19}^{nm}}$; y se hace $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 3$ y $M_{t_{10}}(p_{19}^{nm}) = 0$. Además, no se cumplen las condiciones

de la fase a del caso 7. De acuerdo a la fase b del caso 7, se tiene que $t_{10} = t_k$ y $t_6 = t_i$; además como $w_2^{p_{19}^{nm}}(1) = t_6$ se crea la cadena $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_6$, donde el superíndice $(2,3)$ se refiere a que se está generando $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$ para las cadenas $w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $w_3^{p_{19}^{nm}}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

Se obtiene $M_{t_6} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$

.....
 $t_2 M_{t_2} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]^T$

p_{17}^{nm} Verificando las condiciones del caso 7, se tiene que $(t_{10}, t_2) \notin \Theta$, $M_{t_2}(p_{17}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{17}^{nm}) = 2$. Utilizando el paso a del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{17}^{nm}} = t_2 t_3 t_4 t_5$ y $w_2^{p_{17}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$. Aquí $t_2 = t_j$ con $t_2 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs_5} la primer transición contenida en $w_2^{p_{17}^{nm}}$ se obtiene $t_{10} \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$, entonces $t_{10} = t_i$. Hacer $\Lambda(p_{17}^{nm}) = 3$ y $M_{t_2}(p_{17}^{nm}) = 0$. Además, no se cumplen las condiciones de la fase a del caso 7. De acuerdo a la fase b del caso 7, se tiene que $t_{10} = t_k$ y $t_2 = t_i$; además como $w_1^{p_{17}^{nm}}(1) = t_2$ se crea la cadena $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_2$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Verificando las condiciones del caso 7, se tiene que $(t_{10}, t_2) \notin \Theta$, $M_{t_2}(p_{18}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 2$. Utilizando el paso a del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_2 t_3$, $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_7 t_8 t_9$ y $w_3^{p_{18}^{nm}} = t_{10} t_{11} t_{12} t_{13}$. Aquí $t_2 = t_j$ con $t_2 \subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs_5} la primer transición contenida en $w_2^{p_{18}^{nm}}$ o en $w_3^{p_{18}^{nm}}$ se obtiene $t_{10} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$, entonces $t_{10} = t_i$. Hacer $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 3$ y $M_{t_2}(p_{18}^{nm}) = 0$. Además, no se cumplen las condiciones de la fase a del caso 7. De acuerdo a la fase b del caso 7, se tiene que $t_{10} = t_k$ y $t_2 = t_i$; además como $w_1^{p_{18}^{nm}}(1) = t_2$ se crea la cadena $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_2$, donde el superíndice $(1,3)$ se refiere a que se está generando $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$ para las cadenas $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}$ y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

p_{19}^{nm} Como $t_2 \not\subset w_1^{p_{19}^{nm}}$ $t_2 \not\subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $t_2 \not\subset w_3^{p_{19}^{nm}}$ no se toman acciones. Se espera a la siguiente transición que esté contenida en $w_1^{p_{19}^{nm}}$ $w_2^{p_{19}^{nm}}$ o $w_3^{p_{19}^{nm}}$

Se obtiene $M_{t_2} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$

.....
 $t_7 M_{t_7} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right]^T$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ como $t_7 \not\subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ y $t_7 \not\subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, se tiene que $t_7 \not\subseteq w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $t_7 \not\subseteq w_3^{p_{18}^{nm}}$; pero como $t_7 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ se debe volver aplicar el caso 7.

De acuerdo al caso 7, se tiene que $(t_2, t_7) \notin \Theta$, $M_{t_7}(p_{18}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 3$. Aquí $t_2 = t_j$ con $t_7 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs_5} alguna transición contenida en $w_1^{p_{18}^{nm}}$ o en $w_3^{p_{18}^{nm}}$ se obtiene $t_2 \subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ entonces $t_2 = t_i$. Además, no se cumplen las condiciones de la fase *a* del caso 7. De acuerdo a la fase *b* del caso 7, se tiene que $t_2 = t_k$ y $t_7 = t_l$; además como $w_2^{p_{18}^{nm}}(1) = t_7$ se crea la cadena $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)} = t_7$, donde el superíndice (1, 2) se refiere a que se está generando $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$ para las cadenas $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{18}^{nm}}$ y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$

Además, continuando la búsqueda hacia atrás sobre σ_{obs_5} alguna transición contenida en $w_3^{p_{18}^{nm}}$ se obtiene $t_{10} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ entonces $t_{10} = t_i$ y ya se tiene $t_7 = t_j$. Aquí, no se cumplen las condiciones de la fase *a* del caso 7. De acuerdo a la fase *b* del caso 7, se tiene que $t_{10} = t_k$ y $t_7 = t_l$; además como $w_2^{p_{18}^{nm}}(1) = t_7$ se crea la cadena $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_7$, donde el superíndice (1, 3) se refiere a que se está generando $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$ para las cadenas $w_2^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}$ y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

Se hace $M_{t_2}(p_{19}^{nm}) = 0$.

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_7 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_6 t_7$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

$$\text{Ahora } M_{t_7} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

$$\dots\dots\dots$$

$$t_8 \ M_{t_8} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ como $t_8 \not\subseteq w_1^{p_{17}^{nm}}$ y $t_8 \not\subseteq w_2^{p_{17}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, como $t_8 \not\subseteq w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $t_8 \not\subseteq w_2^{p_{18}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$ se tiene que $t_8 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)} = t_7 t_8$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_8 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_7 t_8$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$ se tiene que $t_8 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_6 t_7 t_8$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

$$t_{11} M_{t_{11}} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_{11} \not\subset w_1^{p_{17}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{10} se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_2^{p_{17}^{nm}}(1) = t_{10}$; entonces se añaden los pares de transiciones (t_{10}, t_6) , (t_{10}, t_7) y (t_{10}, t_8) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_2 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; como $t_2 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ y $w_2^{p_{17}^{nm}}(2) = t_{11}$, crear $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{10} t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, se tiene que $t_{11} \not\subset w_1^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{10} se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_{11} t_{12} t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_3^{p_{18}^{nm}}(1) = t_{10}$. Se añade el par de transiciones (t_{10}, t_2) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_2 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; como $t_2 \subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}(2) = t_{11}$, crear $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_{10} t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$, como $t_{11} \not\subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $t_{11} \not\subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$ se tiene que $t_{11} \not\subset w_2^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{10} se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_{11} t_{12} t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_3^{p_{18}^{nm}}(1) = t_{10}$; entonces, se añaden los pares de transiciones (t_{10}, t_7) y (t_{10}, t_8) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.ii dado que $|w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 2$ y $|w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 3$; entonces se añade el lugar p_{20}^{nm} creando un renglón en U'_5 , M_1 , Λ y en $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{20}^{nm}} = t_7 t_8$ y $w_2^{p_{20}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_{11}}(p_{20}^{nm}) = 1$, $M_1(p_{20}^{nm}) = 0$, $\Lambda_1(p_{20}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{20}^{nm}, t_8) y (p_{20}^{nm}, t_{13}) , y un -1 en las posiciones (p_{20}^{nm}, t_7) y (p_{20}^{nm}, t_{11}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_8 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; como $t_8 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}(2) = t_{11}$, crear $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_{10} t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_{11} \not\subset w_3^{p_{20}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{10} se crea $w_s^{p_{20}^{nm},(2,3)} = t_{11} t_{12} t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_3^{p_{20}^{nm}}(1) = t_{10}$. Se añaden los pares de transiciones (t_{10}, t_6) , (t_{10}, t_7) y (t_{10}, t_8) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.ii dado que $|w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}| = 3$ y $|w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)}| = 3$; entonces se añade el lugar p_{21}^{nm} creando un renglón en U'_5 , M_1 , Λ y en $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{21}^{nm}} = t_6 t_7 t_8$ y $w_2^{p_{21}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_{11}}(p_{21}^{nm}) = 1$, $M_1(p_{21}^{nm}) = 1$, $\Lambda_1(p_{21}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{21}^{nm}, t_8) y (p_{21}^{nm}, t_{13}) , y un -1 en las posiciones (p_{21}^{nm}, t_7) y (p_{21}^{nm}, t_{11}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso. Aquí, se cumple que las secuencias de p_{20}^{nm} están contenidas en las secuencias de p_{21}^{nm} , i.e. $w_1^{p_{20}^{nm}} \subset w_1^{p_{21}^{nm}}$ y $w_2^{p_{20}^{nm}} \subset w_2^{p_{21}^{nm}}$; entonces se eliminan los renglones en U' Λ , M_1 y $M_{t_{11}}$ para el lugar p_{20}^{nm}

Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_8 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; como $t_8 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_3^{p_{19}^{nm}}$ y $w_3^{p_{19}^{nm}}(2) = t_{11}$, crear $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_{10} t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

$$\text{Ahora } M_{t_7} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

$$t_9 \ M_{t_9} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ como $t_9 \not\subseteq w_1^{p_{17}^{nm}}$ y $t_9 \not\subseteq w_2^{p_{17}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, como $t_8 \not\subseteq w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $t_8 \not\subseteq w_2^{p_{18}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$ se tiene que $t_9 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)} = t_7 t_8 t_9$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$ se tiene que $t_9 \not\subseteq w_3^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_8 se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_9$, y se observa que sólo se satisface la condición en *b.iii* dado que la última transición de $w_2^{p_{18}^{nm}}$ es t_9 . Se añaden los pares de transiciones (t_9, t_{10}) y (t_9, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_9 , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_{11} = t_k$ y $t_9 = t_i$; como $t_9 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{18}^{nm}}(4) = t_9$, crear $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_8 t_9$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$ se tiene que $t_9 \not\subseteq w_3^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_8 se crea $w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_9$, y se observa que sólo se satisface la condición en *b.iii* dado que la última transición de $w_2^{p_{19}^{nm}}$ es t_9 . Se añaden los pares de transiciones (t_9, t_{10}) y (t_9, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_9 , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_{11} = t_k$ y $t_9 = t_i$; como $t_9 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_3^{p_{19}^{nm}}$ y $w_2^{p_{19}^{nm}}(4) = t_9$, crear $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_8 t_9$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

Aquí no se modifica el marcado M_{t_9} .

$$t_{12} \ M_{t_{12}} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, se tiene que $t_{12} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_{10}t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$ como $t_{12} \not\subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $t_{12} \not\subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$ se tiene que $t_{12} \not\subset w_2^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{11} se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_{12}t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.ii dado que $|w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 2$ y $|w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 2$; entonces se añade el lugar p_{22}^{nm} creando un renglón en U'_5 , M_1 , Λ y en $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{22}^{nm}} = t_8t_9$ y $w_2^{p_{22}^{nm}} = t_{12}t_{13}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_{12}}(p_{22}^{nm}) = 0$, $M_1(p_{22}^{nm}) = 1$, $\Lambda_1(p_{22}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{22}^{nm}, t_9) y (p_{22}^{nm}, t_{13}) , y un -1 en las posiciones (p_{22}^{nm}, t_8) y (p_{22}^{nm}, t_{12}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_9 = t_k$ y $t_{12} = t_l$; como $t_9 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ $t_{12} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}(4) = t_{12}$, crear $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_{12} \not\subset w_2^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{11} se crea $w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_{12}t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.ii dado que $|w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 2$ y $|w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)}| = 2$; se debe añadir un lugar, pero antes de hacerlo verificando si las cadenas $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$ y $w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)}$ están contenidas en las cadenas de otro lugar, se tiene que están contenidas en las cadenas de p_{22}^{nm} , i.e. $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} \subset w_1^{p_{22}^{nm}}$ y $w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} \subset w_2^{p_{22}^{nm}}$ entonces no se añade ningún lugar.

b.iii dado que la última transición de $w_3^{p_{19}^{nm}}$ es t_{12} . Se añaden los pares de transiciones (t_9, t_{10}) y (t_9, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{11} , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_9 = t_k$ y $t_{12} = t_l$; como $t_9 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$, $t_{12} \subset w_3^{p_{19}^{nm}}$ y $w_3^{p_{19}^{nm}}(4) = t_{12}$, crear $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

$$t_3 M_{t_{12}} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_3 \notin w_2^{p_{17}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_2 se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = t_3t_4t_5$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_1^{p_{17}^{nm}}(1) = t_3$. Se añaden los pares de transiciones (t_2, t_{10}) , (t_2, t_{11}) y (t_2, t_{12}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.ii dado que $|w_r^{p_{17}^{nm}}| = 3$ y $|w_s^{p_{17}^{nm}}| = 3$; entonces se añade el lugar p_{23}^{nm} creando un renglón en U'_5 , M_1 , Λ y en $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{23}^{nm}} = t_3t_4t_5$ y $w_2^{p_{23}^{nm}} = t_{10}t_{11}t_{12}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_3}(p_{23}^{nm}) = 0$, $M_1(p_{23}^{nm}) = 1$, $\Lambda_1(p_{23}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{23}^{nm}, t_5) y (p_{23}^{nm}, t_{12}) , y un -1 en las posiciones (p_{23}^{nm}, t_3) y (p_{23}^{nm}, t_{10}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_3 , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_{12} = t_k$ y $t_3 = t_l$; como $t_3 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ $t_{12} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ y $w_1^{p_{17}^{nm}}(2) = t_3$, crear $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_2t_3$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, se tiene que $t_3 \notin w_3^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_2 se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_3$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_1^{p_{18}^{nm}}(1) = t_2$; entonces, se añaden los pares de transiciones (t_2, t_{11}) y (t_2, t_{12}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_3 , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_{12} = t_k$ y $t_3 = t_l$; como $t_3 \subset w_1^{p_{18}^{nm}}$ $t_{12} \subset w_3^{p_{18}^{nm}}$ y $w_1^{p_{18}^{nm}}(2) = t_3$, crear $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_2t_3$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,2)}$ se tiene que $t_3 \notin w_2^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_2 se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_3$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ es t_3 . Se añaden los pares de transiciones (t_3, t_8) , y (t_3, t_9) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = \epsilon$, y como se han analizado todas las secuencias de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_2^{p_{18}^{nm}}$ se espera a que se analicen las secuencias de $w_3^{p_{18}^{nm}}$ para aplicar el paso 3 de la fase *b* del caso 7.

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$, como $t_3 \notin w_2^{p_{18}^{nm}}$ y $t_3 \notin w_3^{p_{18}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$, como $t_3 \notin w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $t_3 \notin w_3^{p_{19}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$

$$\dots\dots\dots$$

$$t_{13} M_{t_{13}} = \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_{13} \notin w_1^{p_{17}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{12} se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_2^{p_{17}^{nm}}$ es t_{13} . Se añade el par de transiciones (t_{13}, t_3) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{13} , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_3 = t_k$ y $t_{13} = t_l$; como $t_3 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ $t_{13} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ y $w_2^{p_{17}^{nm}}(4) = t_{13}$, crear $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{12}t_{13}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(1,3)}$, se tiene que $t_{13} \notin w_3^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{12} se crea $w_s^{p_{18}^{nm},(1,3)} = t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_3^{p_{18}^{nm}}$ es t_{13} . Se añade el par de transiciones (t_{13}, t_3) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

y como se han analizado todas las secuencias de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ y $w_3^{p_{18}^{nm}}$ se espera al análisis de la columna de t_{13} para la secuencia $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$ para aplicar el paso 3 de la fase *b* del caso 7.

Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_{13} \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$; y se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = t_{11}t_{12}t_{13}$, y se obtiene $w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = \epsilon$. Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{18}^{nm},(2,3)} = \epsilon$, y como se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{18}^{nm} , se aplica la fase c del caso 7. Se elimina el renglón de p_{18} en U'_5 , Λ , $M_{t_{13}}$ y M_1 .

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)}$, se tiene que $t_{13} \subset w_3^{p_{19}^{nm}}$; y se obtiene $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = t_{11}t_{12}t_{13}$ entonces con las transiciones posteriores a t_9 se crea $w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = \epsilon$. Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm},(2,3)} = w_s^{p_{19}^{nm},(2,3)} = \epsilon$, y como no se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{19}^{nm} , se espera a que se analicen.

$$t_4 M_{t_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_4 \not\subset w_2^{p_{17}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_3 se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = t_4t_5$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.ii dado que $|w_r^{p_{17}^{nm}}| = 2$ y $|w_s^{p_{17}^{nm}}| = 2$; entonces se añade el lugar p_{24}^{nm} creando un renglón en U'_5 , M_1 , Λ y en $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{24}^{nm}} = t_4t_5$ y $w_2^{p_{24}^{nm}} = t_{12}t_{13}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_3}(p_{24}^{nm}) = 0$, $M_1(p_{24}^{nm}) = 1$, $\Lambda_1(p_{24}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{24}^{nm}, t_5) y (p_{23}^{nm}, t_{13}) , y un -1 en las posiciones (p_{24}^{nm}, t_4) y (p_{24}^{nm}, t_{12}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta que $w_2^{p_{24}^{nm}} = w_2^{p_{22}^{nm}}$, entonces se elimina p_{24}^{nm} y se añade un 1 en la posición (p_{22}^{nm}, t_5) y un -1 en la posición (p_{22}^{nm}, t_4) .

Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_4 , de acuerdo a lo indicado en la fase b del caso 7, ahora se tiene que $t_{13} = t_k$ y $t_4 = t_l$; como $t_4 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ $t_{13} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ y $w_1^{p_{17}^{nm}}(4) = t_4$, crear $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_3t_4$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{19}^{nm} Aquí la transición $t_4 \subset w_1^{p_{19}^{nm}}$ no satisface las condiciones de los casos.

$$t_5 M_{t_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_5 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$; entonces se obtiene que $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_3t_4t_5$. Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{17}^{nm} ; entonces se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$ y se aplica la fase c del caso 7. Se elimina el renglón de p_{17} en U'_5 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

p_{19}^{nm} Aquí ya se analizaron todas las transiciones de las secuencias de p_{19}^{nm} . Dado que no se aplicó el caso 7 para las secuencias $w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $w_3^{p_{19}^{nm}}$ se debe generar los siguientes lugares.

p_{24}^{nm} creando un renglón en U'_5 , Λ , M_1 , y M_{t_5} , y se asigna a este renglón en U'_5 los mismos valores que tiene p_{19}^{nm} , eliminando los arcos que tiene con $w_2^{p_{19}^{nm}}$ y se hace $\Lambda(p_{24}^{nm}) = 2$, $M_1(p_{24}^{nm}) = 1$ y $M_{t_5}(p_{24}^{nm}) = 1$. Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

- p_{25}^{nm} creando un renglón en U'_5 , Λ , M_1 , y M_{t_5} , y se asigna a este renglón en U'_5 los mismos valores que tiene p_{19}^{nm} , eliminando los arcos que tiene con $w_3^{p_{19}^{nm}}$, y se hace $\Lambda(p_{25}^{nm}) = 2$, $M_1(p_{25}^{nm}) = 1$ y $M_{t_5}(p_{25}^{nm}) = 1$. Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

Ahora, se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{19} en U'_5 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

.....

t_{14} Continuando con el análisis de la columna de la transición t_{14} , se tiene que ésta no satisface las condiciones de los caso, entonces se termina el análisis de las columnas en U'_5 .

La tabla U'_5 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.21) que ésta describe y haciendo un retiquetado de lugares, dado que en este momento sólo se tienen $m = 20$ lugares, se presentan a continuación.

$$M_1 = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \right]^T$$

Ahora, suponiendo que se presenta una sexta secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_{23} | ζ_{21} | ζ_{24} | ζ_{28} | ζ_{21} | ζ_1 | ζ_{27} | ζ_9 | ζ_8 | ζ_{10} | ζ_{29} | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------|--------------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | | 1 | | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $U_6 = p_4$ | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | | 1 | | |
| p_6 | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 29$ obteniendo $\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{15}, \zeta_{16}, \zeta_{17}, \zeta_{18}, \zeta_{19}, \zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}, \zeta_{24}, \zeta_{25}, \zeta_{26}, \zeta_{27}, \zeta_{28}, \zeta_{29}\}$.

Seguendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | t_1 | t_2 | t_6 | t_{10} | t_3 | t_4 | t_7 | t_{11} | t_5 | t_{12} | t_{13} | t_8 | t_9 | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|----------|-------|----------|----------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | 1 | | | | | -1 |
| p_4 | | | 1 | | | | -1 | | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | | | -1 | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | | | | | 1 | | -1 | | | | |
| p_8 | | | | | | | | | | | 1 | | | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | | | -1 | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | 1 | | | -1 | | | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | | 1 | | | | | -1 | | |
| p_{13}^{nm} | | | | 1 | | | | -1 | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{15}^{nm} | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_{17}^{nm} | | | -1 | | | | | -1 | | | 1 | 1 | | |
| p_{18}^{nm} | | | | | | -1 | | | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | |
| p_{19}^{nm} | | | | -1 | -1 | | | | 1 | 1 | | | | |
| p_{20}^{nm} | | | -1 | | | -1 | | | 1 | | | | 1 | |
| p_{21}^{nm} | | | | -1 | | -1 | | | 1 | | 1 | | | |

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs_5} = t_1 t_2 t_6 t_{10} t_3 t_4 t_7 t_{11} t_5 t_{12} t_{13} t_8 t_9 t_{14}$.

t_1 Para la columna de la transición t_1 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_2 Para la columna de la transición t_2 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_6 Para la columna de la transición t_6 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_{10} Para la columna de la transición t_{10} no se satisfacen las condiciones de los casos.

$$t_3 M_{t_3} = \left[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \right]^T$$

p_{19}^{nm} De acuerdo al caso 7, se tiene que $(t_{10}, t_3) \notin \Theta$, $M_{t_2}(p_{19}^{nm}) = -1$. $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 2$. Utilizando el paso a del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{19}^{nm}} = t_3 t_4 t_5$ y

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ como $t_7 \not\subseteq w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $t_7 \not\subseteq w_2^{p_{19}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$, se tiene que $t_7 \subset w_2^{p_{20}^{nm}}$, entonces se obtiene que $w_r^{p_{20}^{nm}} = t_6 t_7$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{20}^{nm}}$

p_{21}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{21}^{nm}}$ como $t_7 \not\subseteq w_1^{p_{21}^{nm}}$ y $t_7 \not\subseteq w_2^{p_{21}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{21}^{nm}}$

.....

$$t_{11} M_{t_{11}} = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

p_{17}^{nm} De acuerdo al caso 7, se tiene que $(t_6, t_{11}) \notin \Theta$, $M_{t_2}(p_{17}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{17}^{nm}) = 2$. Utilizando el paso *a* del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{17}^{nm}} = t_6 t_7 t_8$ y $w_2^{p_{17}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$. Aquí $t_{11} = t_j$ con $t_{11} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs_6} la primer transición contenida en $w_1^{p_{17}^{nm}}$ se obtiene $t_7 \subset w_1^{p_{17}^{nm}}$ entonces $t_7 = t_i$. Hacer $\Lambda(p_{17}^{nm}) = 3$ y $M_{t_{11}}(p_{17}^{nm}) = 0$. Y Dado que $t_i = t_7$, de acuerdo a las condición de la fase *a* del caso 7, como t_6 no es la primer transición de $w_1^{p_{17}^{nm}}$ se crea $w_t^{p_{17}^{nm}} = t_6 t_7$; entonces como $|w_t^{p_{17}^{nm}}| = 2$, se añade el lugar no medible p_{22}^{nm} agregando un reglón en M_1 , Λ , U'_6 , $M_{t_{11}}$, el cual junto con las secuencias $w_1^{p_{22}^{nm}} = t_6 t_7$ y $w_2^{p_{22}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$ modela exclusión mutua; se hace $M_{t_{11}}(p_{22}^{nm}) = 0$, $M_1(p_{22}^{nm}) = 1$, $\Lambda_1(p_{22}^{nm}) = 2$, y para agregar los arcos se añade un 1 en las posiciones (p_{22}^{nm}, t_4) y (p_{22}^{nm}, t_{12}) , y un -1 en las posiciones (p_{22}^{nm}, t_3) y (p_{22}^{nm}, t_{11}) . Verificando lo indicado en el caso 5 resulta falso, por lo que no se modifica la estructura en este caso. Verificando si existe un empotramiento, como se indica en el caso 6, resulta falsa la comprobación de este caso.

De acuerdo a la fase *b* del caso 7, se tiene que $t_7 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; además como $w_2^{p_{17}^{nm}}(1) = t_{11}$ se crea la cadena $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ se tiene que $t_{11} \not\subseteq w_1^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{10} se crea $w_s^{p_{19}^{nm}} = t_{11} t_{12}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_2^{p_{19}^{nm}}(1) = t_{10}$. Se añaden los pares de transiciones (t_{10}, t_3) y (t_{10}, t_4) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ se tiene que $t_5 \notin w_2^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_4 se crea $w_s^{p_{19}^{nm}} = t_5$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{19}^{nm}}$ es t_5 . Se añade el par de transiciones (t_5, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_5 , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_{11} = t_k$ y $t_5 = t_l$; como $t_5 \subset w_1^{p_{19}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ y $w_1^{p_{19}^{nm}}(3) = t_5$, crear $w_r^{p_{19}^{nm}} = t_4 t_5$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$ se tiene que $t_5 \notin w_2^{p_{20}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_4 se crea $w_s^{p_{20}^{nm}} = t_5$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_2^{p_{20}^{nm}}(1) = t_6$. Se añaden los pares de transiciones (t_4, t_6) y (t_4, t_7) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{20}^{nm}}$ es t_5 . Se añaden los pares de transiciones (t_5, t_6) y (t_5, t_7) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{20}^{nm}} = w_s^{p_{20}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_5 , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_7 = t_k$ y $t_5 = t_l$; como $t_5 \subset w_1^{p_{20}^{nm}}$ $t_7 \subset w_2^{p_{20}^{nm}}$ y $w_1^{p_{20}^{nm}}(2) = t_5$, crear $w_r^{p_{20}^{nm}} = t_4 t_5$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{20}^{nm}}$

p_{21}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{21}^{nm}}$ se tiene que $t_5 \notin w_2^{p_{21}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_4 se crea $w_s^{p_{21}^{nm}} = t_5$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{21}^{nm}}$ es t_5 . Se añade el par de transiciones (t_5, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{21}^{nm}} = w_s^{p_{21}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_5 , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_{11} = t_k$ y $t_5 = t_l$; como $t_5 \subset w_1^{p_{21}^{nm}}$ $t_{11} \subset w_2^{p_{21}^{nm}}$ y $w_1^{p_{21}^{nm}}(2) = t_5$, crear $w_r^{p_{21}^{nm}} = t_4 t_5$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{21}^{nm}}$

$$t_{12} M_{t_5} = \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$, entonces se obtiene que $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \not\subset w_1^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{11} se crea $w_s^{p_{19}^{nm}} = t_{12}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_2^{p_{19}^{nm}}$ es t_{11} . Se añade el par de transiciones (t_5, t_{11}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm}} = w_s^{p_{19}^{nm}} = \epsilon$.

Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{19}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{19} en U'_6 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$ como $t_{12} \not\subset w_1^{p_{20}^{nm}}$ y $t_{12} \not\subset w_2^{p_{20}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{20}^{nm}}$

p_{21}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{21}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \not\subset w_1^{p_{21}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{11} se crea $w_s^{p_{21}^{nm}} = t_{12}t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.ii dado que $|w_r^{p_{21}^{nm}}| = 2$ y $|w_s^{p_{21}^{nm}}| = 2$; entonces se debe añadir el lugar no medible p_{24}^{nm} , con las secuencias $w_1^{p_{24}^{nm}} = t_4t_5$ y $w_2^{p_{24}^{nm}} = t_{12}t_{13}$, pero como éstas están implícitas en las secuencias de p_{18}^{nm} , no se añade el lugar p_{24}^{nm}

Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm}} = w_s^{p_{19}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{12} , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_5 = t_k$ y $t_{12} = t_i$; como $t_5 \subset w_1^{p_{21}^{nm}}$ $t_{12} \subset w_2^{p_{21}^{nm}}$ y $w_2^{p_{21}^{nm}}(3) = t_{12}$, crear $w_r^{p_{21}^{nm}} = t_{11}t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{21}^{nm}}$

$$t_{13} M_{t_{13}} = \left[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_{13} \subset w_2^{p_{17}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{17}^{nm}} = t_{11}t_{12}t_{13}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{17}^{nm}}$

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$ como $t_{13} \not\subset w_1^{p_{20}^{nm}}$ y $t_{13} \not\subset w_2^{p_{20}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de

la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{20}^{nm}}$

p_{21}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{21}^{nm}}$ se tiene que $t_{13} \subset w_2^{p_{21}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{21}^{nm}} = t_{11}t_{12}t_{13}$. Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{21}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{21} en U'_6 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

$$t_8 M_{t_8} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]^T$$

p_{17}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{17}^{nm}}$ se tiene que $t_8 \not\subset w_2^{p_{17}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_{11} se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = t_{12}t_{13}$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{17}^{nm}}$ es t_8 . Se añade el par de transiciones (t_8, t_{13}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{17}^{nm}} = w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$.

Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{17}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{17} en U'_6 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$ se tiene que $t_8 \not\subset w_1^{p_{20}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_7 se crea $w_s^{p_{20}^{nm}} = t_8t_9$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.ii dado que $|w_r^{p_{20}^{nm}}| = 2$ y $|w_s^{p_{20}^{nm}}| = 2$; entonces se debe añadir el lugar no medible p_{24}^{nm} con las secuencias $w_1^{p_{24}^{nm}} = t_4t_5$ y $w_2^{p_{24}^{nm}} = t_8t_9$, pero como éstas están implícitas en las secuencias de p_{18}^{nm} , no se añade el lugar p_{24}^{nm} .

Finalmente se hace $w_r^{p_{20}^{nm}} = w_s^{p_{20}^{nm}} = \epsilon$.

Continuando con el análisis de la transición t_{12} , de acuerdo a lo indicado en la fase *b* del caso 7, ahora se tiene que $t_5 = t_k$ y $t_8 = t_l$; como $t_5 \subset w_1^{p_{20}^{nm}}$ $t_8 \subset w_2^{p_{20}^{nm}}$ y $w_2^{p_{20}^{nm}}(3) = t_8$, crear $w_r^{p_{20}^{nm}} = t_7t_8$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{20}^{nm}}$

$$t_9 M_{t_9} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]^T$$

p_{20}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{20}^{nm}}$ se tiene que $t_9 \subset w_2^{p_{20}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_5 se crea $w_s^{p_{17}^{nm}} = \epsilon$. Aquí no se satisfacen las condiciones de los casos, además se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{20}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{20} en U'_6 , Λ , M_{t_5} y M_1 .

t_{14} Para la columna de la transición t_{14} no se satisfacen las condiciones de los casos.

.....
 La tabla U'_6 obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.22) que ésta describe y haciendo un retiquetado de lugares, dado que en este momento sólo se tienen $m = 19$ lugares, se presentan a continuación.

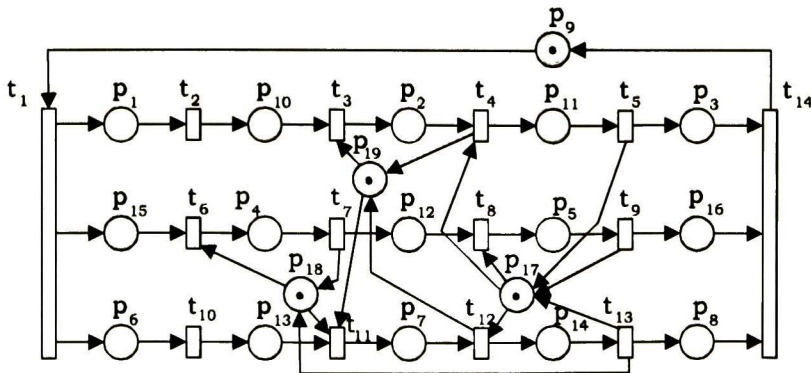
$$U'_6 = \begin{array}{c|cccccccccccccccc} & t_1 & t_2 & t_6 & t_{10} & t_3 & t_4 & t_7 & t_{11} & t_5 & t_{12} & t_{13} & t_8 & t_9 & t_{14} \\ \hline p_1 & 1 & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ p_2 & & & & & 1 & -1 & & & & & & & & & \\ p_3 & & & & & & & & & 1 & & & & & & -1 \\ p_4 & & & 1 & & & & -1 & & & & & & & & \\ p_5 & & & & & & & & & & & & 1 & -1 & & \\ p_6 & 1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\ p_7 & & & & & & & & 1 & & -1 & & & & & \\ p_8 & & & & & & & & & & & 1 & & & & -1 \\ p_9^{nm} & -1 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ p_{10}^{nm} & & 1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\ p_{11}^{nm} & & & & & & 1 & & & -1 & & & & & & \\ p_{12}^{nm} & & & & & & & 1 & & & & & & -1 & & \\ p_{13}^{nm} & & & & 1 & & & & -1 & & & & & & & \\ p_{14}^{nm} & & & & & & & & & & 1 & -1 & & & & \\ p_{15}^{nm} & 1 & & -1 & & & & & & & & & & & & \\ p_{16}^{nm} & & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 \\ p_{17}^{nm} & & & & & & -1 & & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & & \\ p_{18}^{nm} & & & -1 & & & 1 & & -1 & & 1 & & & & & \\ p_{19}^{nm} & & & & & -1 & 1 & & -1 & & 1 & & & & & \end{array}$$


Figura 4.22:

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 21$, $\nu = 29$, se asigna U'_5 a C , $\Theta = \{(t_2, t_6)$,

$$(t_{10}, t_6), (t_{10}, t_7), (t_{10}, t_8), (t_{10}, t_2), (t_{10}, t_9), (t_9, t_{11}), (t_{11}, t_2), (t_2, t_{12}), (t_3, t_8), (t_{13}, t_3), (t_3, t_9), (t_5, t_{11}), (t_4, t_6), (t_4, t_7), (t_5, t_6), (t_5, t_7), (t_8, t_{13})\},$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]^T \text{ y el marcado inicial encontrado es}$$

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]^T$$

Ahora, suponiendo que se presenta una séptima secuencia de vectores de salida tal que se obtiene la siguiente tabla de observación.

| | ζ_1 | ζ_2 | ζ_3 | ζ_{21} | ζ_{22} | ζ_{28} | ζ_{30} | ζ_{28} | ζ_{31} | ζ_{19} | ζ_{18} | ζ_{10} | ζ_{29} | ζ_{10} | ζ_1 |
|-------------|-----------|-----------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------|
| p_1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | |
| $U_7 = p_4$ | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | | 1 | | |
| p_6 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | |
| p_8 | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

De acuerdo a la tabla de observación, su número de columnas es $q = 15$; el número de vectores de salida que se han presentado hasta el momento es $\nu = 31$ obteniendo $\Delta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6, \zeta_7, \zeta_8, \zeta_9, \zeta_{10}, \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}, \zeta_{15}, \zeta_{16}, \zeta_{17}, \zeta_{18}, \zeta_{19}, \zeta_{20}, \zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}, \zeta_{24}, \zeta_{25}, \zeta_{26}, \zeta_{27}, \zeta_{28}, \zeta_{29}, \zeta_{30}, \zeta_{31}\}$.

Siguiendo lo indicado en el punto 4, se obtiene la siguiente tabla de observación.

$$U'_7 = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_6 & t_3 & t_{10} & t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_7 & t_4 & t_5 & t_8 & t_9 & t_{14} \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9^{nm} \\ p_{10}^{nm} \\ p_{11}^{nm} \\ p_{12}^{nm} \\ p_{13}^{nm} \\ p_{14}^{nm} \\ p_{15}^{nm} \\ p_{16}^{nm} \\ p_{17}^{nm} \\ p_{18}^{nm} \\ p_{19}^{nm} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & -1 \\ & & 1 & & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & -1 & \\ 1 & & & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & -1 \\ -1 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & & 1 & -1 & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & \\ & & & -1 & & & -1 & 1 & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & -1 & 1 & & & 1 & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Haciendo lo indicado en el punto 5, se obtiene que la palabra observada es $\sigma_{obs7} = t_1 t_2 t_6 t_3 t_{10} t_{11} t_{12} t_{13} t_7 t_4 t_5 t_8 t_9 t_{14}$.

t_1 Para la columna de la transición t_1 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_2 Para la columna de la transición t_2 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_6 Para la columna de la transición t_6 no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_3 Para la columna de la transición t_{10} no se satisfacen las condiciones de los casos.

t_{10} Para la columna de la transición t_{10} no se satisfacen las condiciones de los casos.

$$t_{11} M_{t_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

p_{18}^{nm} De acuerdo al caso 7, se tiene que $(t_6, t_{11}) \notin \Theta$, $M_{t_{11}}(p_{18}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 2$.
 Utilizando el paso a del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{18}^{nm}} = t_6 t_7$ y $w_2^{p_{18}^{nm}} = t_{11} t_{12}$.

Aquí $t_{11} = t_j$ con $t_{11} \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs7} la primer transición contenida en $w_1^{p_{18}^{nm}}$ se obtiene $t_6 \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces $t_6 = t_i$. Hacer $\Lambda(p_{18}^{nm}) = 3$ y $M_{t_{11}}(p_{18}^{nm}) = 0$. Además, no se cumplen las condiciones de la fase *a* del caso 7. De acuerdo a la fase *b* del caso 7, se tiene que $t_6 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; además como $w_2^{p_{18}^{nm}}(1) = t_{11}$ se crea la cadena $w_r^{p_{18}^{nm}} = t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm}}$

p_{19}^{nm} De acuerdo al caso 7, se tiene que $(t_3, t_{11}) \notin \Theta$, $M_{t_{11}}(p_{19}^{nm}) = -1$, $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 2$. Utilizando el paso *a* del caso 5 se obtienen las secuencias $w_1^{p_{19}^{nm}} = t_3 t_4$ y $w_2^{p_{19}^{nm}} = t_{11} t_{12}$. Aquí $t_{11} = t_j$ con $t_{11} \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ y buscando hacia atrás sobre σ_{obs7} la primer transición contenida en $w_1^{p_{19}^{nm}}$ se obtiene $t_3 \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ entonces $t_3 = t_i$. Hacer $\Lambda(p_{19}^{nm}) = 3$ y $M_{t_{11}}(p_{19}^{nm}) = 0$. Además, no se cumplen las condiciones de la fase *a* del caso 7. De acuerdo a la fase *b* del caso 7, se tiene que $t_3 = t_k$ y $t_{11} = t_l$; además como $w_2^{p_{19}^{nm}}(1) = t_{11}$ se crea la cadena $w_r^{p_{19}^{nm}} = t_{11}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

$$t_{12} M_{t_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm}} = t_{11} t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm}}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ se tiene que $t_{12} \subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{19}^{nm}} = t_{11} t_{12}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

$$t_{13} M_{t_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm}}$ se tiene que $t_{13} \subset w_2^{p_{18}^{nm}}$ entonces se obtiene que $w_r^{p_{18}^{nm}} = t_{11} t_{12} t_{13}$, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si la transición se puede concatenar a $w_r^{p_{18}^{nm}}$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ como $t_{13} \not\subset w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $t_{13} \not\subset w_2^{p_{19}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

$$t_7 M_{t_7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

p_{18}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{18}^{nm}}$ se tiene que $t_7 \not\subset w_2^{p_{18}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_6 se crea $w_s^{p_{18}^{nm}} = t_7$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_1^{p_{18}^{nm}}(1) = t_6$. Se añaden los pares de transiciones (t_6, t_{11}) , (t_6, t_{12}) y (t_6, t_{13}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{18}^{nm}}$ es t_7 . Se añaden los pares de transiciones (t_7, t_{11}) , (t_7, t_{12}) y (t_7, t_{13}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{18}^{nm}} = w_s^{p_{18}^{nm}} = \epsilon$.

Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{18}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{18} en U_7' , Λ , M_{t_7} y M_1 .

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ como $t_7 \notin w_1^{p_{19}^{nm}}$ y $t_7 \notin w_2^{p_{19}^{nm}}$ no se toman acciones, y se espera el análisis de la columna de la siguiente transición, para determinar si esa transición se puede concatenar a $w_r^{p_{19}^{nm}}$

.....

$$t_4 M_{t_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

p_{19}^{nm} Continuando con la concatenación de transiciones a $w_r^{p_{19}^{nm}}$ se tiene que $t_4 \notin w_2^{p_{19}^{nm}}$; entonces con las transiciones posteriores a t_3 se crea $w_s^{p_{18}^{nm}} = t_4$, y se observa que se satisfacen las condiciones en:

b.i dado que $w_1^{p_{19}^{nm}}(1) = t_3$. Se añaden los pares de transiciones (t_3, t_{11}) y (t_3, t_{12}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes.

b.iii dado que la última transición de $w_1^{p_{19}^{nm}}$ es t_4 . Se añaden los pares de transiciones (t_4, t_{11}) y (t_4, t_{12}) al conjunto Θ de transiciones concurrentes. Finalmente se hace $w_r^{p_{19}^{nm}} = w_s^{p_{19}^{nm}} = \epsilon$.

Aquí, se han analizado todas las transiciones de las secuencias de p_{19}^{nm} ; entonces se aplica la fase *c* del caso 7. Se elimina el renglón de p_{19} en U_7' , Λ , M_{t_7} y M_1 .

.....

t_5 Para la columna de la transición t_5 no se satisfacen las condiciones de los casos.

.....

t_8 Para la columna de la transición t_8 no se satisfacen las condiciones de los casos.

.....

t_9 Para la columna de la transición t_9 no se satisfacen las condiciones de los casos.

.....

t_{14} Para la columna de la transición t_{14} no se satisfacen las condiciones de los casos.

.....

La tabla U_7' obtenida hasta el momento junto con la RPI (figura 4.23) que ésta describe se presentan a continuación.

$U'_7 =$

| | t_1 | t_2 | t_6 | t_3 | t_{10} | t_{11} | t_{12} | t_{13} | t_7 | t_4 | t_5 | t_8 | t_9 | t_{14} |
|---------------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| p_1 | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | |
| p_2 | | | | 1 | | | | | | -1 | | | | |
| p_3 | | | | | | | | | | | 1 | | | -1 |
| p_4 | | | 1 | | | | | | -1 | | | | | |
| p_5 | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | |
| p_6 | 1 | | | | -1 | | | | | | | | | |
| p_7 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | |
| p_8 | | | | | | | | 1 | | | | | | -1 |
| p_9^{nm} | -1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| p_{10}^{nm} | | 1 | | -1 | | | | | | | | | | |
| p_{11}^{nm} | | | | | | | | | | 1 | -1 | | | |
| p_{12}^{nm} | | | | | | | | | 1 | | | -1 | | |
| p_{13}^{nm} | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | |
| p_{14}^{nm} | | | | | | | 1 | -1 | | | | | | |
| p_{15}^{nm} | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | |
| p_{16}^{nm} | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 |
| p_{17}^{nm} | | | | | | | -1 | 1 | | -1 | 1 | -1 | 1 | |

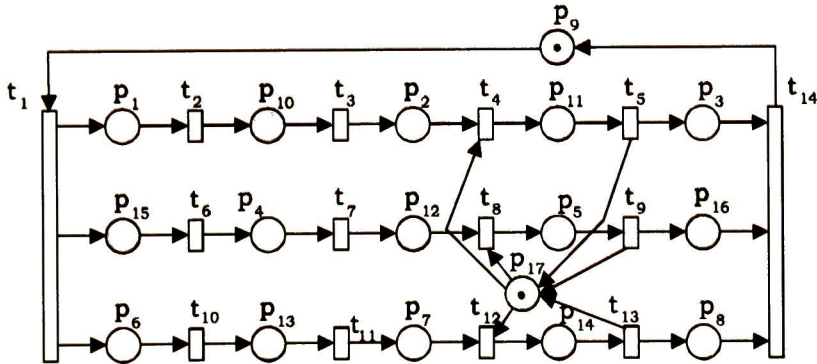


Figura 4.23:

Hasta el momento se tiene que: $n = 14$, $m = 17$, $\nu = 31$, se asigna U'_7 a C , $\Theta = \{(t_2, t_6), (t_{10}, t_6), (t_{10}, t_7), (t_{10}, t_8), (t_{10}, t_2), (t_{10}, t_9), (t_9, t_{11}), (t_{11}, t_2), (t_2, t_{12}), (t_3, t_8), (t_{13}, t_3), (t_3, t_9), (t_5, t_{11}), (t_4, t_6), (t_4, t_7), (t_5, t_6), (t_5, t_7), (t_8, t_{13}), (t_6, t_{11}), (t_6, t_{12}), (t_6, t_{13}), (t_7, t_{11}), (t_7, t_{12}), (t_7, t_{13}), (t_3, t_{11}), (t_3, t_{12}), (t_4, t_{11}), (t_4, t_{12})\}$, $\Lambda = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \right]^T$, y el marcado inicial encontrado

es $M_1 = \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]^T$

Con respecto al algoritmo, ya se han introducido todos los casos necesarios para el paso 6, sólo hace falta presentar el punto en el cual se actualice la información obtenida

hasta el momento, éste se presenta a continuación.

8. Se actualiza la matriz de incidencia si se hizo alguna modificación a la tabla U' , se actualiza el marcado inicial, retiquetando los lugares en caso de que se haya eliminado alguno de ellos, se eliminan las tablas U , y U' , y se regresa al paso 2, para disponerse a observar otra secuencia de vectores de salida.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

En esta tesis se mostró que no es posible realizar identificación en línea estructural de RPI internas, dado que pueden existir dos o más RPI que modelen un mismo comportamiento. Por lo que esta dedicado a la identificación en línea estructural de RPI entrada-salida. Para realizar este tipo de identificación se define la clase Ψ de RPI, en la cual sólo existen RPI que se pueden identificar.

Se le da una solución al problema de tesis, i.e. obtener un algoritmo para hacer identificación en línea estructural de RPI entrada-salida, tal que el conjunto $\Lambda(Q_{ident}, M_0^{ident})$ de secuencias que genera una RPI (Q_{ident}, M_0^{ident}) identificada, contenga al conjunto $\Lambda(Q_{syst}, M_0^{syst})$ de secuencias entrada salida que representan el comportamiento del sistema a identificar y este contenido en el conjunto de secuencias $\Lambda(Q_{lit}, M_0^{lit})$ que genera la RPI (Q_{lit}, M_0^{lit}) identificada con los algoritmos presentados en la literatura actual, i.e. $\Lambda(Q_{syst}, M_0^{syst}) \subseteq \Lambda(Q_{ident}, M_0^{ident}) \subseteq \Lambda(Q_{lit}, M_0^{lit})$.

Para darle una solución al problema de tesis se propone un método para obtener exclusión mutua, el cual se basa en el concepto de concurrencia y pseudo concurrencia. Con lo que se logra obtener RPI que modelan únicamente a los estados alcanzados por el comportamiento que se da como entrada al algoritmo. Para ejemplificar lo anterior se muestran las RPI de la figura 5.1, obtenidas al observar las secuencias de transiciones $\sigma_1 = w_1 w_2 t_{s+1}$ y $\sigma_2 = w_2 w_1 t_{s+1}$. Si la ruta descrita por w_1 contiene p lugares y la ruta descrita por w_2 contiene q lugares, entonces con la RPI (Q_a, M_0^a) se están alcanzando $p \cdot q$ estados que no están siendo alcanzados por la RPI (Q_b, M_0^b) , dado que esta última está modelando exclusión mutua.

Además, considerando que se han observado únicamente dos secuencias de transiciones, i.e. $\sigma_1 = w_1 w_2 t_{s+1}$ y $\sigma_2 = w_2 w_1 t_{s+1}$, con $g = |w_1|$ y $h = |w_2|$, la RPI (Q_a, M_0^a) genera $g \cdot h$ secuencias de transiciones y la RPI (Q_b, M_0^b) genera únicamente a las dos secuencias observadas, i.e. σ_1 y σ_2 , para este ejemplo.

Además del método para obtener exclusión mutua, se presentan varias técnicas para determinar si es necesario relacionar o modificar las estructuras que modelan exclusión mutua, si se

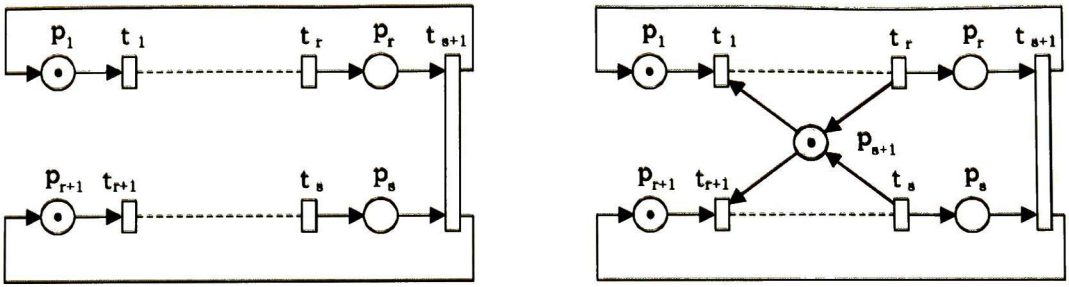


Figura 5.1: a) RPI (Q_a, M_0^a) identificada con los algoritmos presentados en [2] y [1]. b) RPI (Q_b, M_0^b) obtenida con el algoritmo obtenido en esta tesis.

ha encontrado una exclusión mutua o si en un instante se presenta una secuencia que recorre estados restringidos por tal exclusión mutua. Las distintas técnicas se utilizan de acuerdo a los casos cuyas condiciones satisfacen las columnas de la tabla de observación U' , en esa tabla se presenta la parte observable de las transiciones de una secuencia. La utilización de estas técnicas es tal que, durante el análisis de columnas de U' , inicialmente dos o más transiciones se consideran pseudo concurrentes antes de encontrar que son concurrentes. Así, la pseudo concurrencia lleva a la concurrencia.

Con respecto a las secuencias de vectores de salida, en este trabajo se considera que se ha presentado una secuencia de vectores de salida cuando se detecta que una transición t_i pertenece al conjunto de transiciones con las cuales se está formando la secuencia en observación o pertenece a otro t-componente ya encontrado.

Con el algoritmo presentado en este trabajo, no sólo se puede hacer identificación en línea estructural de RPI entrada-salida contenidas en la clase Ψ , sino también aquellas RPI que se pueden forzar a presentar un comportamiento similar al que presentan las RPI de la clase Ψ tal que se permita su identificación. Por ejemplo, aquellas RPI en las que los lugares marcados en el marcado inicial presentan el máximo número de marcas que pueden contener; de tal manera que si ocurre una transición, entonces se considerara que ocurre tantas veces como para dejar con el menor número de marcas a los lugares de su preconjunto, tal que el marcado de uno de estos lugares no sea suficiente para contribuir en la habilitación de transiciones, y en el mayor número de marcas a los lugares de su postconjunto, tal que el marcado de uno de estos lugares sea suficiente para contribuir en la habilitación de transiciones.

5.2. Trabajo futuro

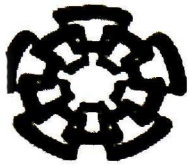
Para realizar identificación en línea estructural de RPI entrada salida, es necesario interactuar con el SED a modelar, mediante las entradas del SED. Esto reducirá el tiempo y costo de identificación.

Para hacer esto se debe utilizar la RP identificada en una etapa del proceso de identificación, para determinar como interactuar con las entradas del SED.

Bibliografía

- [1] M. Meda, "On-line Identification of Discrete Event Systems: Fundamentals and Algorithms for the Synthesis of Petri Net Models" Ph. D. thesis, Cinvestav-Gdl, November 2002.
- [2] J. Cortadella, M. Kishinevsky, L. Lavagno, and A. Yakovlev, "Deriving Petri Nets from Finite Transition Systems", Technical Report UPC-DAC-1996-19, Dept. of Computer Architecture, Universitat Politècnica de Catalunya, June 1996.
- [3] M. Silva, "Las Redes de Petri: en la automática y la informática", Editorial AC, libros científicos y técnicos de Madrid, 1985.
- [4] M. Nielsen, G. Rozenberg, and P.S. Thiagarajan, "Elementary Transition Systems" Theoretical Computer Science. vol. 96, pp. 3-33, 1992.
- [5] A. Arnold, "Finite Transition Systems", Prentice Hall, 1994.
- [6] Peterson, J.L. "Petri Net Theory and the Modeling of Systems", Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, N.J. 1981.
- [7] Zadeh, L. A. "From circuit theory to system theory", Proc. IRE, 50, 856-865. 1962.
- [8] D. Angluin "Inference of Reversible Languages" J. ACM, 29(3):741-765, July 1982.
- [9] E.M. Gold, "Language identification in the limit", Information and Control 10 (1967), 447 - 474.
- [10] E. Mark Gold, "System identification via state characterization", Automatica, 8:621-636, 1972.
- [11] Kunihiko Hiraishi, "Construction of a Class of Safe Petri Nets by Presenting Firing Sequences" Application and Theory of Petri Nets 1992: 244-262.
- [12] I. Rivera, "Geometrical Characterization of Observability in Interpreted Petri Nets" submitted to the Journal of Kybernetika 2003.
- [13] W.M. Wonham, "Notes on Control of Discrete Event Systems" 1997-2003.

- [14] P. Eykhoff, "System identification: parameter and state estimation", John Wiley, 1974.
- [15] C. Cassandras, "Introducción to Discrete Event Systems", Kluwer Academic Publishers, September 1999.
- [16] Vijay V. Vazirani, "Approximation Algorithms", Springer-Verlag New York, 2001.
- [17] J. Desel and J. Esparza, "Free choice Petri Nets". Cambridge University Press, 1995.



CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA


El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Identificación de Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos: Una aproximación desde las Redes de Petri

del (la) C.

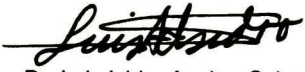
Armando BARRAGÁN NARANJO


el día 27 de Agosto de 2004.


Dr. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara


Dr. Luis Ernesto López Mellado
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara


Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara


Dr. Luis Isidro Aguirre Salas
Profesor
Universidad de Guadalajara, Centro
Universitario de la Costa Sur,
Departamento de Ingenierías


Dr. María Elena Meda Campaña
Profesor Titular
Universidad de Guadalajara, Centro
Universitario de Ciencias Economico Administrativas, CUCEA.
Departamento de Información



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SS1T000007364