CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

ESTUDIO DIDÁCTICO SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN EN LA ESCUELA PRIMARIA

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación

P r e s e n t a

DAVID FRANCISCO BLOCK SEVILLA

Licenciado en Sociología

Directora de Tesis

M. en C. IRMA ROSA FUENLABRADA VELÁZQUEZ

Diciembre, 1987

A BEATRIZ

A MIS PADRES

A G R A D E C I M I E N T O S

La realización de este trabajo ha sido posible gracias al apoyo y a la colaboración del equipo de investigadores del Laboratorio de Psicomatemática del DIE. En particular, quiero expresar mi agradecimiento a las profesoras fundadoras de este grupo: Irma Fuenlabrada, Grecia Gálvez e Irma Sáiz quienes nos abrieron de par en par y desinteresadamente las puertas de una valiosa experiencia acumulada en varios años de investigación. A Irma Fuenlabrada le agradezco además el apoyo que me brindó para realizar este trabajo.

Entre mis compañeros de equipo, quiero hacer un especial reconocimiento a la colaboración de Hugo Balbuena y de Ma. del Carmen Álvarez quienes participaron en la definición del problema que se abordaría, así como en las líneas generales que orientarían su desarrollo. El profesor Hugo Balbuena fue, además, el conductor de todas las sesiones experimentales y, asumiendo este trabajo como propio, dedicó gran parte de su tiempo a discutir conmigo el diseño de cada situación didáctica así como los resultados obtenidos en la experimentación.

Le agradezco a Mireya González Ramos, a María Guadalupe Rodríguez, a Rosa María Martínez y a Claudia Arceo el haberse hecho cargo de la transcripción mecanográfica de este trabajo, y a Juan Manuel Montiel por la reproducción del mismo.

Finalmente, agradezco a Margarita Ramírez y Laura Reséndiz el arduo trabajo de corrección de estilo y de edición necesario para la publicación de este trabajo en la edición del 2005.

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN **5**

CAPITULO I. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS **10**
1. Ubicación teórica 10
2. Metodología de esta investigación. 19

CAPÍTULO II. LOS NÚMEROS RACIONALES **22**
1. Interpretaciones del Número Racional 22
2. Definición algebraica de número racional: como cociente de dos enteros 29
3. Algunas consecuencias para el aprendizaje y la enseñanza de los números racionales en la escuela primaria 31
Conclusiones 37

CAPÍTULO III. SECUENCIA DE SITUACIONES-PROBLEMA PARA INTRODUCIR LA NOCIÓN DEL NÚMERO RACIONAL. Descripción y Fundamento **39**
1. El contexto: Medición de longitudes 39
2. La situación-problema fundamental y la interpretación subyacente del número racional 40
3. La secuencia de situaciones-problema 44

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS **48**
Índice de Actividades de la Secuencia 49
Situación didáctica 1.1: Repartir 3 pasteles entre 2 niños 51
Situación didáctica 1.2: ¿Cuáles son mitades? 66
Situación didáctica 1.3: Repartir 2 pasteles entre 3 niños 79
Situación didáctica 1.4: Repartir “X” pasteles entre “Y” niños 93
Situación didáctica 2.1: Construir el entero 106
Situación didáctica 2.2: Construir el entero (3 chocolates, 2 niños) 117
Situación didáctica 2.3: Seleccionar el entero 123
Situación didáctica 2.4: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños? 131
Situación didáctica 2.5: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños? 139
Situación didáctica 3.1: Mensajes (Situación Fundamental) 145
Situación didáctica 3.2: Análisis colectiva de los mensajes (3er grado) 170
Situación didáctica 3.3: Reducción de mensajes 175
Situación didáctica 3.4: Anticipaciones 198

CONCLUSIONES FINALES **221**
1. Acerca de los procedimientos movilizados por los niños en relación a la secuencia de situaciones didácticas. 221
2. Otros aspectos de las situaciones didácticas previas (1.1 a 2.5) que resultaron problemáticos para los niños. 231
3. En relación a los procesos de formulación, validación e institucionalización. 234
4. Las técnicas de observación y registro y la organización del trabajo colectivo 239
5. Etapas siguientes de la secuencia. 240

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **243**

INTRODUCCIÓN

Un hombre *X* se encuentra en su camino a otros dos, uno de los cuales viene de un país en el que todos dicen mentiras y el otro viene de uno en el que todos dicen la verdad. ¿Cómo puede averiguar el hombre *X*, con una sola pregunta, cuál es el hombre que miente?

Ésta fue la pregunta que planteó el especialista en lógica matemática a Gaspar[1]. Le interesaba conocer el *funcionamiento del pensamiento lógico* de ese salvaje rescatado hacía poco tiempo de una cueva donde pasó gran parte de su vida.

Gaspar reflexiona un momento, se turba y no puede responder. El lógico, sin poder ocultar una expresión de triunfo, le da la respuesta: la solución es preguntar a alguno de los dos, ¿qué me diría el otro si yo le preguntara si es mentiroso?, y expone en seguida una doctoral explicación que Gaspar no parece entender. Pero, un momento después se iluminan los ojos de Gaspar y exclama que él ya tiene otra respuesta. El especialista se inquieta.

Le preguntaría –dice Gaspar- que si él es un sapo. El especialista tarda un momento en reponerse... pero en seguida, refuta la respuesta porque ésta –dice- no sigue las leyes de la lógica.

1. Antecedentes

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria, que se desarrolla en el Laboratorio de Psicomatemática del DIE.

Entre los múltiples factores que inciden en este proceso, uno de los que nosotros consideramos determinante y sobre el cual realizamos nuestra investigación, es el de la metodología de enseñanza. En efecto, en los últimos años se ha destacado un elemento que había sido subestimado en el análisis de los problemas de aprendizaje en esta área: nos referimos al proceso a través del cual el niño se apropia de su conocimiento. Hasta hace poco tiempo este análisis se había centrado, de manera muy unilateral, en carencias individuales de los sujetos que fracasan o en los contenidos matemáticos propuestos en el programa.

Sin duda, la psicología genética ha tenido una influencia considerable en el replanteamiento del problema, al haber puesto de manifiesto, que **existe** un proceso particular a través del cual los niños construyen su conocimiento y que en éste, la

[1] Escena de la película "El enigma de Gaspar Hauser" de W. Harzog.

interacción del niño con el medio juega un papel fundamental. En consecuencia, se tiene ahora una mayor conciencia de que los fracasos de los niños en su intento de aprender matemáticas son, en muchos casos, consecuencia de una mala adaptación de la metodología que se implementa para enseñar a la forma en que los niños se apropian del conocimiento. En los últimos 10 ó 15 años se han multiplicado notablemente los intentos de llevar al campo de la enseñanza algunas tesis fundamentales de la psicología genética. Sin embargo, en un gran número de casos, estos intentos, o bien se han reducido a la formulación de principios generales acerca de la adquisición del conocimiento, dejando sin resolver el problema de la adquisición de contenidos matemáticos, o bien han desviado el problema, al pasar a segundo plano la cuestión de estos contenidos, priorizando en su lugar objetivos relativos al desarrollo cognitivo[2].

Contribuir a superar esta laguna de los estudios abocados al proceso de aprendizaje de las matemáticas en la escuela fue el propósito con el cual el equipo del Laboratorio de Psicomatemática inició sus actividades.

Más precisamente, se propuso construir una alternativa metodológica basada en la concepción constructivista del proceso de adquisición de conocimientos y estudiar las condiciones de su implementación en aula escolar. Para ello, se realizó un estudio experimental con dos grupos de una escuela a lo largo de sus seis años de educación primaria. Se diseñaron y se experimentaron situaciones didácticas relativas a la mayoría de los contenidos del programa oficial de matemáticas de este nivel escolar. A partir de esta experiencia pudieron conocerse, en algunos casos con mayor profundidad que en otros, ciertos aspectos fundamentales del proceso didáctico en estudio, entre ellos: los procedimientos que movilizan los niños de determinado grado escolar en situaciones problemáticas que involucran a ciertas nociones matemáticas; el grado de éxito o de fracaso de determinadas intervenciones didácticas destinadas a propiciar la evolución de dichos procedimientos; la existencia de dificultades específicas para los niños relativas a ciertos conceptos matemáticos; ciertas características de los procesos de representación simbólica…

Paralelamente, en el curso de esta experiencia se fueron distinguiendo y explicitando algunas de las múltiples variables de distinto orden que intervienen en una situación didáctica en el contexto escolar y cuya influencia en el proceso se consideró necesario estudiar. De igual manera, se fue destacando la necesidad de enriquecer los recursos metodológicos que permitiesen realizar estos estudios. La identificación de

[2] Un análisis bastante completo de las aplicaciones de la psicología genética a la enseñanza puede verse en la compilación realizada por César Coll (1983).

estos problemas específicos del estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, aunada a la interacción constante con otros grupos de investigadores –entre éstos, la relación con el Instituto de Investigaciones en Enseñanza de las Matemáticas (IREM) de la Universidad de Burdeos, Francia fue especialmente valiosa– ha favorecido un importante enriquecimiento teórico y metodológico de la investigación y la ha colocado frente a la necesidad de responder a un nuevo problema: el de la construcción de una teoría que contribuya a explicar los fenómenos propios del campo de la didáctica de las matemáticas.

En consecuencia, las investigaciones experimentales que se desarrollan actualmente en el Laboratorio (y en el campo de la didáctica en general) tienden a diferenciarse en dos tipos distintos aunque aún muy relacionados entre sí y a veces difíciles de distinguir: por un lado, están aquéllos cuyo objetivo es continuar la construcción y la experimentación de situaciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de diversos temas de matemáticas en el aula, implementando los aportes teóricos y metodológicos, de la otra variante, cuyo objetivo es responder a preguntas más específicas formuladas en el seno de la teoría en didáctica de la matemática que se quiere desarrollar.

2) Propósito de la presente investigación

La investigación que reporto en el presente trabajo se ubica más en el primer tipo de investigaciones (construcción y experimentación de situaciones didácticas).

La introducción al concepto de fracción fue el tema elegido por ser uno de los contenidos del programa de matemáticas de la primaria que no pudieron abordarse en el proyecto de seis años mencionado antes, y por tratarse de un tema sumamente conflictivo para los niños y para los maestros, con grandes consecuencias para el aprendizaje de matemáticas en los niveles escolares siguientes.

Nos hemos propuesto, en primer término, construir una secuencia de situaciones didácticas para propiciar el aprendizaje de ciertos aspectos de la noción de número racional, en el nivel básico. El diseño de esta secuencia, intenta responder a nuestra concepción sobre la adquisición del conocimiento matemático como construcción de un instrumento ante la necesidad de resolver determinados problemas (ver capítulo I). Por lo tanto, la primera fase de nuestra tarea consistió en analizar, en diversas familias de problemas, la forma en la que comprometen a la noción de número racional. Estudiamos algunas implicaciones matemáticas y didácticas de las alternativas que consideramos más viables, en particular, la compatibilidad entre las interpretaciones que se desarrollarían y la noción matemática de número racional, y la posibilidad de pasar de una interpretación a otra (ver capítulo II).

A partir de este análisis, optamos por una interpretación y nos abocamos entonces a estudiar el diseño de los problemas de la secuencia, atendiendo a otro aspecto fundamental: el nivel escolar en el que trabajaríamos. Los problemas debían satisfacer dos condiciones: ser significativos para los niños de dicho nivel en el sentido de poder ser abordados por ellos a partir de sus conocimientos previos, y presentar las dificultades que propicien la evolución de sus procedimientos en la dirección que esperamos.

En el curso de este análisis, decidimos aplicar esta primera etapa de la secuencia en 3° y 4° grados de primaria (niños entre 8 y 10 años de edad). Estimamos que, a partir de estos niveles, los niños tienen ya un dominio suficiente sobre las nociones fundamentales que les permitirían abordar los problemas de la secuencia. En particular: cierto manejo de los números naturales menores que cien (contar, comparar, sumar, multiplicar), la coordinación de las dos relaciones que subyacen al acto de repartir en parte iguales (exhaustividad del reparto, igualdad de las partes y la posibilidad de comparar longitudes). Con respecto a otras operaciones relativamente complejas implicadas en la resolución de los problemas, como la coordinación de las dos variables inversamente proporcionales que intervienen en un reparto (número de enteros que se reparten, número de personas entre quienes se reparte) para determinar el tamaño del producto del reparto, la posibilidad de pensar en la acción inversa a un reparto o anticipar el producto de una composición de operaciones, estimamos que los niños de estos niveles podrían realizarlas progresivamente dentro de un contexto significativo para ellos y con el apoyo de las representaciones concretas proporcionadas por cada situación.

Es preciso reconocer que la forma en la que valoramos la presencia de estas condiciones (accesibilidad, posibilidad de hacer evolucionar…) relativas a la edad de los niños en las situaciones que diseñamos es, en cierta medida, intuitiva. Es posible que una investigación sobre las nociones relativas al concepto de número racional, que los niños de edades distintas movilizan espontáneamente frente a determinados problemas, aportaría una información útil para adecuar el diseño de las situaciones didácticas a cada nivel escolar. No obstante, a partir de la experimentación de estas situaciones obtuvimos hasta cierto punto esa información, y fue posible realizar adecuaciones posteriores en ese sentido. En el capítulo III describimos la secuencia de problemas.

Finalmente, a partir de la experimentación de la secuencia nos propusimos averiguar, fundamentalmente, en qué grado los problemas planteados propician la implementación por parte de los niños de los procedimientos que hemos previsto. Intentamos analizar al mismo tiempo si estos procedimientos manifiestan la movilización de las relaciones matemáticas que hipotéticamente estarían en juego.

Por otro lado, las desviaciones con respecto a nuestras hipótesis nos permitieron identificar otros aspectos que son problemáticos para los niños y que no fueron previstos o, simplemente, la existencia de otros recursos que los niños ponen en juego, de tal suerte que las restricciones propias a cada situación no propician los cambios esperados. En el capítulo IV reportamos el análisis de cada situación de la secuencia y en las conclusiones finales hacemos un análisis global.

Hagamos una última precisión, volviendo a un punto que tocamos antes: en una situación didáctica, además de la compleja relación entre los problemas que planteamos, los procedimientos que implementan los niños y las nociones que subyacen a esos procedimientos, hay otras relaciones de orden didáctico (y, evidentemente, muchas otras de orden no-didáctico) que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Sin ir muy lejos, está la relación de la interacción entre los niños y la interacción con el maestro, con el proceso de aprendizaje de cada niño. Algunas de estas relaciones, forman parte ya del campo de “fenómenos de la didáctica” que son investigados sistemáticamente en el afán de conocer su influencia en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, no nos propusimos estudiarlas en forma específica en este trabajo, aunque intentamos dar cuenta de ellas, tanto a nivel teórico en el capítulo primero, como en la organización y análisis de cada situación didáctica.

CAPITULO I. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

1. Ubicación teórica

Durante los últimos veinticinco años se han desarrollado en varios centros de investigación europeos, principalmente en los IREM[3] de Francia, investigaciones en didáctica de las matemáticas que pueden ser identificadas como una corriente. Nos referimos a los trabajos del equipo de G. Brousseau, de Y. Chevallard, de G. Vergnaud y de otros más. Su primera característica común es el propósito de hacer del proceso de transmisión y adquisición de las matemáticas, un objeto de investigación científica. Esto significa, en primer término, pasar de la propuesta de medios didácticos, al estudio sistemático de las condiciones en las que se realizan los aprendizajes. Asumen, por lo tanto, la tarea de discriminar los factores que intervienen en el proceso didáctico y de conocer la forma en que éstos intervienen.

El estudio de estas condiciones, en las investigaciones a las que hacemos referencia, pasa por la producción misma del proceso didáctico en el aula. Con esto, la didáctica adquiere la importante posibilidad de acceder al terreno de la experimentación, de someter a prueba hipótesis controlando en mayor medida las variables que se logran destacar.

En este contexto, la experimentación tiene la función de responder a preguntas específicas que se formulan a partir de diversas aproximaciones teóricas.

La unidad de estas aproximaciones radica no sólo en el objeto de estudio que comparten, sino en la concepción epistemológica que subyace a todas ellas. En ésta el conocimiento matemático es visto como el resultado de una “adaptación de la humanidad a un medio que ofrece resistencias, contradicciones, desequilibrios" (Brousseau, 1984), como un instrumento que se crea ante la necesidad de resolver determinados problemas para los cuales los conocimientos anteriores resultan insuficientes. Un nuevo conocimiento nace, por lo tanto, bajo la forma de instrumento que funciona en un contexto específico. Su sentido está dado por los problemas que permite resolver. No es sino posteriormente que este conocimiento instrumento se desliga de su origen, cobra una forma más autónoma, se relaciona con otros conocimientos convirtiéndose así en objeto cultural (Douady, 1983).

Consecuentemente con esto, se considera que la actividad principal en matemáticas es la resolución de problemas. Ésta, -afirma Vergnaud- "es la fuente y el criterio del saber; ... la fuente

[3] Institut de Recherches sur 1’ Enseignement des Mathématiques.

porque en estas situaciones se elaboran las nociones y se abstraen las propiedades pertinentes; el criterio porque también en estas situaciones se prueban los conocimientos operativos" (Vergnaud, 1981).

En esta conceptualización de la relación cognitiva entre el sujeto y el objeto de conocimiento encontramos un estrecho vínculo entre la didáctica y la psicología genética: esta última, interesada en los procesos de formación del conocimiento, ha creado una teoría en la que se postula que el sujeto adquiere su conocimiento construyéndolo a través de una interacción entre él y el medio. Ha puesto de manifiesto la existencia de fases en la evolución de la conceptualización que el sujeto hace de determinados objetos del conocimiento, y ha estudiado, a partir de la teoría de la equilibración, mecanismos de transición de una fase a otra.

En varios sentidos los hallazgos de la psicología genética son valiosos para la didáctica, especialmente en lo que se refiere a la explicación que proporciona del proceso de evolución de un conocimiento (Teoría de la equilibración).

Sin embargo, es importante recordar que la didáctica se interesa por el proceso de formación de conocimientos matemáticos específicos. Si bien a estos conocimientos subyacen operaciones mentales que el sujeto construye a lo largo de su desarrollo, sin intervenciones didácticas específicas, los conocimientos matemáticos en tanto tales, no son un producto necesario de ese desarrollo. A este respecto, son muy claras las siguientes citas de J. Piaget:

> "Las estructuras operatorias de la inteligencia, aún siendo de naturaleza lógico-matemática, no son conscientes en tanto que estructuras en la mente de los niños: Son estructuras de acciones o de operaciones que dirigen, por supuesto, el razonamiento del niño, pero no constituyen un objeto de reflexión para él. La enseñanza de las matemáticas, por el contrario, invita a los sujetos a una reflexión sobre las estructuras". Y más adelante añade: "subsiste por completo el problema pedagógico de encontrar los métodos más adecuados para pasar de estas estructuras naturales pero no reflexivas, a la reflexión sobre tales estructuras y a su teorización" (Piaget, citado por Brun, 1980).

Una tarea fundamental de la didáctica es precisamente la organización del medio con el cual el niño ha de interactuar para construir determinados conocimientos matemáticos. Para ello, tendría que responder interrogantes que son específicas de su campo: ¿Qué conocimientos de los que propone la escuela son susceptibles de ser *reconstruidos* por el niño? ¿Qué tipos de procedimientos movilizan los niños frente a determinados problemas matemáticos? ¿Cuáles son los problemas que favorecen dicha reconstrucción? ¿Cómo influyen en el proceso las múltiples variables que están en juego en una sesión de clase escolar?

La diversidad de aproximaciones teóricas en esta corriente de la didáctica, responde a los diferentes componentes del sistema didáctico sobre los que se ha centrado la atención. A grandes rasgos, puede decirse que estas investigaciones abordan dos vertientes: el estudio de la evolución de las concepciones del sujeto en relación a conocimientos matemáticos específicos (G. Vergnaud, J. Brun, entre otros) y, por otro lado, el estudio teórico de las situaciones didácticas destinadas a favorecer una génesis artificial del conocimiento (Brousseau, Rouchier, Chevallard...). Estos avances teóricos tienden hacia la construcción de una teoría en didáctica de las matemáticas, que permita interrogar los hechos, estructurar los hallazgos, validar las respuestas que se generan, y, principalmente, proporcionar al maestro conocimientos que le permitan tomar decisiones con un mayor control sobre el proceso de transmisión y adquisición de las matemáticas.

A continuación desarrollaré más detalladamente algunos aspectos centrales de los trabajos teóricos de Guy Brousseau quien es uno de los investigadores que están a la cabeza de esta corriente y en cuyos planteamientos teóricos se inscribe la investigación que presentaré más adelante.

Brousseau ha centrado su trabajo de teorización en lo que denomina *la situación didáctica*, esto es, "un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, cierto medio (que eventualmente comprende los instrumentos y los objetos) y un sistema educativo (el profesor) cuya finalidad es que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vía de constituirse" (Brousseau, 1982).

El estudio del funcionamiento de estas situaciones, lo mismo que su diseño, obedecen a presupuestos epistemológicos definidos de los cuales ya hemos hablado. Estos pueden leerse claramente en la siguiente descripción de Pérez (1982), acerca del proceso de aprendizaje en clase:

> "El camino que hemos seguido, consiste primeramente en construir un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no sea enseñado directa o indirectamente por el maestro, sino que aparezca progresivamente en el niño a partir de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos hallados en el curso de su actividad. Son pues las múltiples acciones en el seno de la situación las que deben provocar por sí solas las modificaciones en el alumno y favorecer así la aparición de los conceptos deseados (...) Si el conocimiento contemplado por el aprendizaje debe aparecer en la.- medida en que se vuelve necesario para adaptarse a una situación que se ha vuelto problemática (las estrategias empleadas espontáneamente se revelan ineficaces), todos los esfuerzos del didacta deben orientarse hacia esa situación. El problema primordial consiste en primer lugar en saber, en efecto, en qué es realmente problemática la situación en el niño".

A. La situación-problema

Un elemento fundamental de la situación didáctica es, por lo tanto, la determinación del problema, o más bien, de la situación-problema relativa a un conocimiento específico, que será objeto de la interacción del alumno y que ha de propiciar una génesis de dicho conocimiento.

De acuerdo con lo anterior, esta situación problema debe satisfacer las siguientes condiciones:

- El primer problema de la secuencia que se plantea al alumno es significativo para él, es decir, el alumno puede comprender de lo que se trata, y, por lo tanto, puede esbozar por lo menos un procedimiento de resolución (así sea de ensayo y error), movilizando sus conocimientos previos. Dispone por lo tanto, de una *estrategia de base* para abordar el problema.

- A través del manejo de variables determinadas de la situación-problema (llamadas variables didácticas de comando), se generan en ésta obstáculos cuya intención es invalidar las estrategias de base que el alumno ha movilizado hasta ahora, o bien, volverlas demasiado costosa (en tiempo, en número de acciones elementales, etc.).

  El problema planteado por la situación entonces es tal, que el procedimiento de resolución (o estrategia) más económico compromete al conocimiento en cuestión. Es esta pérdida momentánea del control sobre la situación por parte del alumno, lo que da sentido al conocimiento que está por construirse. Éste aparecerá como el medio que permite suplir esta carencia.

  A este respecto es importante el concepto de *salto informacional.* Una vez establecidos los rangos de valores de determinada variable en los que diferentes estrategias resultan funcionales, se denomina *salto informacional* a la sustitución, en la situación-problema, de un rango por otro más elevado, con miras a propiciar la evolución de dichas estrategias. (El Bouazzaoi, 1982).

- Por otro lado, una condición indispensable para que las estrategias desplegadas por el alumno sean susceptibles de evolucionar es que exista un *dialogo* entre el niño y la situación; ésta última debe devolver al alumno información acerca de cada una de sus acciones, información que le permitirá evaluarlas y eventualmente reorganizarlas. La exclusión de la mediación de un tercero en este diálogo (del maestro, por ejemplo) es importante en la medida en que se quiera que el alumno se responsabilice totalmente de la organización de su actividad.

La elaboración de estas situaciones-problema, para un conocimiento específico, implica la determinación de los problemas cuya resolución involucra de manera privilegiada a ese conocimiento. En algunos casos, el estudio de la evolución de ese conocimiento en la historia puede ayudar a localizar situaciones *clave* que favorecieron su desarrollo. Este estudio aporta también información sobre formas distintas a la instituida actualmente bajo las cuales ese conocimiento ha funcionado y que, en ciertos casos, pueden ser aproximadas a las que implementan los niños en determinadas etapas del proceso.

Por otro lado como lo señala J. Pérez en la cita anterior falta aún precisar en qué resulta problemática la situación para el niño. La existencia de una estrategia de base, la posibilidad de su evolución frente a los obstáculos que se crean son hipótesis que deben ser verificadas, y cuyo planteamiento requiere de un conocimiento acerca de los procedimientos y de las conceptualizaciones de los niños frente a problemas específicos. En muchos casos se dispone aún de poca información en este sentido.

Finalmente, señalemos otro elemento a considerar en el diseño de las situaciones-problema: diversos problemas pueden funcionalizar un concepto de manera sensiblemente diferente, propiciando interpretaciones también diferentes. El pasar de un problema a otro puede generar un enriquecimiento del concepto: se abordan otros aspectos del mismo, se le reconoce como un instrumento que permite resolver situaciones distintas a aquélla en que fue generado, es decir, se descontextualiza (Douady, 1982). Pero es necesario prever que las estrategias (y las interpretaciones correspondientes del concepto) que se generan en la situación inicial puedan funcionar como estrategias de base en las demás situaciones. De lo contrario, se corre el riesgo de provocar un disociamiento entre dichas interpretaciones.

B. Diferenciación de relaciones cognitivas a lo largo del proceso del aprendizaje.

G. Brousseau (1972) distingue, en las relaciones que el alumno establece con el conocimiento matemático en el seno de la situación didáctica, cuatro fases interrelacionadas que tienen lugar a lo largo del proceso de adquisición de ese conocimiento. Esta categorización representa un paso importante en lo que se refiere al proyecto de construir una teoría que permita diseñar situaciones didácticas y analizar el proceso de construcción de un conocimiento matemático en relación a éstas (proceso de matematización).

A continuación describimos estas cuatro fases.

a) Fase de acción

Corresponde al momento en el que el alumno *actúa* sobre la situación, guiado por un objetivo preciso: la búsqueda de un resultado determinado (ganar un juego, construir algo...). El alumno está en condiciones (por experiencias y conocimientos anteriores) de comprender claramente lo que plantea el problema, de ensayar algún procedimiento de resolución (que puede ser ensayo y error o estar estructurado en una estrategia más o menos consciente) y de estimar si se ha aproximado o no a su objetivo, es decir, de *recibir* informaciones de la situación; se utiliza el concepto de *modelo*[4] *mental espontáneo* o *modelo de base* para dar cuenta del conjunto de conocimientos -implícitos o explícitos- que se manifiestan en esta interacción con la situación.

A lo largo de este *diálogo* el alumno enriquece, modifica o abandona dicho modelo. El resultado hipotético de la fase de acción es la construcción por parte del sujeto de una estrategia, a lo cual subyace un modelo implícito, que lo aproxima al resultado buscado.

b) Fase de formulación

El objetivo en esta fase es la explicación a través de un lenguaje verbal, gráfico o simbólico de los modelos implícitos que fueron movilizados en la fase de acción. Se intenta que esta explicitación no sea una exigencia artificial para el alumno. Para ello, se diseñan situaciones especiales en las que *comunicar* algo a alguien sea una necesidad *sine qua non* para lograr determinado objetivo. Con esto se intenta por un lado que la formulación tenga un sentido para el alumno, y por otro lado, que el proceso de formulación se realice a través de una dialéctica entre emisores y receptores que favorezca su evolución.

Este proceso de formulación, que implica una reconstrucción de las relaciones implícitas en la acción sobre la situación, da lugar a la construcción progresiva de un lenguaje. Las insuficiencias del lenguaje: ambigüedades, falta de información, etc., se reflejan en la mala interpretación que el receptor hace de él. Como en la fase de acción, en ésta, la misma situación proporciona a los interlocutores los medios para verificar el éxito o fracaso de una comunicación. Así, a través de un proceso de comunicaciones sucesivas (y, eventualmente, con la introducción de ciertas restricciones como: “no dibujar” o “hacerlo lo más breve posible”, el lenguaje se precisa, se abrevia, adopta convenciones locales aproximándose de esta manera al lenguaje matemático. Por lo tanto, en estos

[4] En didáctica solemos encontrar la utilización del término modelo para hacer referencia tanto a una descripción hipotética que hace el investigador de un sistema de conocimientos que tiene el alumno en un momento dado, como para referirse a un modelo propiamente matemático. Esta última interpretación se utiliza también en dos sentidos: se dice que determinado conocimiento matemático puede funcionar como modelo de una situación no matemática (del mundo físico, por ejemplo). En este sentido el modelo es una descripción particular (matemática) de dicha situación que permite entender o manejar o prever determinados aspectos de la misma. Pero, en 1ógica-matemática el término modelo se usa en otro sentido: el modelo es una interpretación particular de un sistema formal. El énfasis está puesto esta vez no en su papel de representación de una situación, sino de interpretación de una teoría.
Para evitar confusiones utilizaremos en este trabajo el término modelo (matemático) para referirnos a una descripción en el lenguaje matemático de una situación determinada. Para referirnos a la situación en sí utilizaremos los términos situación, o interpretación. Cuando interese referirnos a un sistema de conocimientos del alumno cuya existencia suponemos, o cuando explícitamente queramos hacer una descripción hipotética de dicho sistema, emplearemos también el término modelo, precisando siempre que nos referimos a los conocimientos del sujeto.

mensajes se está conformando un modelo matemático (o cuasi-matemático) de la situación. Este proceso culmina cuando dichos modelos funcionan como un *medio* para realizar anticipaciones sobre la situación; un medio que será preferible en virtud de la economía importante que permite realizar (en tiempo, en esfuerzo ...). Este paso: convertir al modelo en medio de anticipar, puede favorecerse, cuando es necesario, a través de ciertas modificaciones sobre la situación misma que vuelvan excesivamente costoso o incluso imposible el trabajo directo sobre ésta[5].

c) Fase de validación

Hemos visto ya que la situación misma debe permitir la realización de una *validación empírica* de los ensayos de resolución que se ponen en juego. Ahora se tratará de otro tipo de validación, ya no sobre informaciones, sino sobre *declaraciones*: procedimientos formulados, generalizaciones, propiedades, etc.

La necesidad de argumentar por qué algo que se afirma es correcto (o mejor que otras alternativas) lleva al sujeto a elaborar demostraciones. El sentido de éstas está dado por la necesidad de convencer a sus pares. Estas demostraciones pueden ser de índole muy distinta dependiendo, entre otras cosas, del acervo de proposiciones ya validadas, del tipo de razonamiento que los niños están en posibilidad de realizar (según su edad), y de las exigencias del interlocutor.

Las demostraciones pueden *regresa*r al nivel más elemental de la prueba empírica o consistir en relaciones entre proposiciones ya validadas. Los instrumentos que los niños utilizan para demostrar varían y, evidentemente no corresponden siempre, necesariamente al modelo matemático de la deducción lógica. Éste último también atraviesa un prolongado proceso de construcción; durante largos periodos los niños pueden acordarle un estatuto de prueba satisfactoria a razonamientos *vecinos* al de la deducción como, por ejemplo, la generalización de una proposición a partir de constatar que para X casos particulares ésta funciona.

Por otro lado, a través de este proceso, tienden a explicitarse también reglas de construcción de lenguaje que permanecieron implícitas en la fase de formulación.

[5] Con respecto a esta fase de formulación encontramos en los trabajos de G. Brousseau, aportaciones importantes en lo que respecta a las condiciones que propician una formulaci6n matemática.
No hay, en cambio, un estudio más profundo acerca de este proceso desde el punto de vista del sujeto: ¿Con qué problemas específicos se enfrenta el niño en la construcción de una representación verbal, gráfica o simbólica? Sobre éste punto pueden verse estudios más particulares en (Brun, 1984; Brun et al., 1981; Piaget, 1976).

Cabe señalar, por último, la importancia de que los interlocutores sean los niños y no el maestro. La validación que pudiera proporcionar este último corre el riesgo de estar cargada de una autoridad suplementaria que la erija en sentencia incuestionable, en verdad *a priori*. Es verdad que este problema puede darse también entre los mismos niños; puede ocurrir que acepten la validez de algo sólo por el hecho de que quién lo propone tiene algún tipo de prestigio, pero, el efecto de estas *autoridades infantiles* no es comparable del que tiene la de un adulto. Por otro lado, el tipo de razonamiento que el maestro utilice para validar o invalidar una proposición puede resultar ajeno, sin significación para los niños.

d) Fase de institucionalización del conocimiento

En lo expuesto hasta aquí puede leerse claramente el propósito de asignar al maestro, en la situación didáctica, un papel muy distinto al usual: no interviene ya como *fuente del saber*, como *proveedor de conocimientos*. Organiza las situaciones que exigirán a sus alumnos una adaptación cuyo resultado sea la producción de nuevos conocimientos.

Durante los primeros años de las investigaciones de Brousseau, esta *no intervención* del maestro tendió a ser extremada. Se pretendió trabajar en situaciones llamadas *cuasi-aisladas* en el sentido de reducir la participación del maestro a la transmisión de las consignas y a la organización de las tres fases del proceso de las que ya hemos hablado. La intención era analizar el proceso de construcción de un conocimiento, en las condiciones más *puras* que fuese posible**.** Sin embargo, a lo largo de las sesiones experimentales aparecían reiteradamente momentos en que la situación exigía del maestro ciertas intervenciones no previstas sin las cuales no se podía continuar. Ésta producía una y otra vez fenómenos que escapaban al análisis del proceso. El objeto de este tipo de intervenciones consistía generalmente en realizar especies de balances, síntesis o conclusiones, de poner en claro para todo mundo aquello que ya se había logrado y que no era necesario volver a hacer… incluso, de identificar con un nombre un conocimiento que ya se tiene. Estos fenómenos aparentemente aislados y que en un principio parecían acusar simplemente la dificultad para el maestro de cambiar ciertas actitudes, fueron reinterpretados. Se vio en ellos la expresión de múltiples *paradojas* (Brousseau, l984): el alumno construye un nuevo conocimiento mediante una adaptación a una situación que le era conflictiva; el juego para él consistía en lograr algo para lo cual no tenía previamente los medios necesarios. Una vez que ha logrado disponer de la estrategia adecuada, resuelve la situación. Para él, si la ha resuelto es porque *podía* *resolverla*, es decir, no necesitó de un nuevo conocimiento. No tiene conciencia de que en el proceso ha adquirido un nuevo conocimiento. No es lo mismo -dice Brousseau-, la evolución que el conocimiento de la evolución. Este problema se origina desde el inicio de la relación entre alumno y maestro: el alumno va a aprender algo nuevo y su maestro se lo va a enseñar. Pero el maestro no puede decir al alumno qué es lo que éste debe hacer... más allá de plantearle el problema. El alumno, a su vez, se verá muchas veces desconcertado: ¿por qué su maestro no le dice lo que espera?

A través del proceso (iniciado en la consigna) ha de lograr lo que Brousseau denomina *la devolución del problema*, es decir, el hecho de que el alumno *rompa* toda expectativa de recibir conocimientos de su maestro y asuma la total responsabilidad de su investigación. Pero entonces, ¿en qué momento el alumno sabrá que... ya sabe?

El proceso de institucionalización del saber tiende a responder a estas paradojas. Su función es dar a los productos generados en el proceso de construcción que realizan los alumnos el estatuto de conocimiento, de nuevo saber al que se puede hacer *legítimamente referencia*. Incluye el hecho de nombrarlo de alguna manera e implica también, en consecuencia, una progresiva descontextualización del mismo (se le reconoce como saber cultural instituido) a través de la cual éste se hace más *negociable* en otros contextos (en los que aparecerán sus límites, la necesidad de transformarlo o, eventualmente, de desecharlo).

Cabe señalar que, además de los momentos en los que el maestro interviene en la situación con el propósito consciente de propiciar un proceso de institucionalización, éste ocurre en forma sutil en muchos otros momentos. Por ejemplo, en las confrontaciones colectivas sobre resultados determinados en cualquier fase del proceso, ocurre con frecuencia que al maestro se *escapan* involuntariamente actitudes que acusan su predilección por aquellas propuestas que se aproximan más a las instituidas socialmente o bien, él mismo emplea inconscientemente el lenguaje *instituido* para referirse a determinados productos del trabajo de los niños, (Artigue et al., 1982). Digamos, por último, que tradicionalmente en las clases de matemáticas se pone a los alumnos de entrada en relación con el conocimiento en su forma institucionalizada socialmente (o se acude a ella después de muy breves momentos de *informalidad*). El contexto aparece primero como ilustración del conocimiento y, posteriormente, como campo en el que ese conocimiento se aplica y adquiere sentido. Podríamos decir entonces que en la perspectiva constructivista en la que nos ubicamos, el proceso intenta realizarse en sentido opuesto: con la institucionalización culmina un ciclo que se originó ante la necesidad de resolver un problema.

Las cuatro fases. Estas cuatro fases constituyen un ciclo que se realiza en cada etapa del proceso de matematización. Las estrategias y los modelos subyacentes que se instituyen en cada etapa vuelven a ser comprometidos en la etapa siguiente, en la que funcionan nuevamente como estrategias y modelos de base.

A lo largo del proceso, esta sucesión de fases no se da necesariamente en el estricto orden en que fueron expuestos y tampoco ocurre siempre una diferenciación tan nítida entre una y otra.

Por otro lado, cabe señalar que cada una de estas fases tiene muchas veces efectos que obstaculizan el desarrollo de las otras. Por ejemplo, ciertos momentos de *formulación*, programados o espontáneos, a lo largo de una fase de acción, inciden en ésta de manera determinante; la explicitación por algunos niños de ciertos elementos del problema posiblemente hará que otros centren su atención en esos elementos, que quizá no son los más importantes, en detrimento de la riqueza del problema.

Otro ejemplo característico es el efecto que puede tener una estrategia que se institucionaliza (ya sea por el prolongado tiempo en que fue utilizada o bien por el gran dominio que sobre ella tienen los niños) sobre la acción: los niños pueden llegar a resistirse absolutamente a abandonarla. Intentarán más bien *adaptarla* aun a costa de un trabajo excesivo o bien se desalentarán para seguir adelante. Esta estrategia se habrá convertido en un obstáculo para el desarrollo del proceso.

2. Metodología de esta investigación.

Me restringiré ahora a plantear las líneas generales de la metodología que utilicé en la presente investigación. No abordaré por lo tanto la discusión más general que libra actualmente la didáctica de las matemáticas en torno a este punto[6].

Nuestro trabajo de investigación consiste, básicamente, en someter a prueba determinadas hipótesis acerca del proceso de adquisición de ciertos aspectos de la noción de número racional, en el contexto escolar. Mas precisamente, nos interesa saber si ciertos problemas en condiciones didácticas específicas, son susceptibles de propiciar la implementación y la evolución de determinados procedimientos por parte de los niños; la reflexión sobre determinadas

[6] Un resumen claro e interesante de esta discusión puede verse en el artículo "Reproductibilité et Modélisation en Didactique de Mathématiques', de M. Artigue (1984).

propiedades de la noción de racional y la construcción de un lenguaje *cuasi-matemático* relativos a esta noción. Para tal fin, hemos seguido los siguientes pasos:

a) Análisis matemático del concepto de número racional y de algunas de sus interpretaciones más importantes para el nivel básico.

b) Construcción de una secuencia de problemas relativos a una de las interpretaciones de este concepto, con las características que hemos detallado en el punto anterior de este capítulo.

c) Construcción de una secuencia de situaciones didácticas (incluyen a los problemas mencionados en el capítulo II y se especifican las condiciones de su realización: materiales, tiempos, organización de diversos tipos de interacción entre los niños y con el maestro).

d) Análisis previo a la experimentación. En éste intentamos básicamente explicitar nuestras hipótesis acerca de los posibles procedimientos que implementarán los niños, de su relación con los aspectos involucrados de la noción de racional, y de los cambios de procedimiento que se espera propiciar a lo largo de los problemas de la secuencia.

   En las situaciones diseñadas expresamente para propiciar un proceso de formulación, el análisis se centre en éste. (La etapa de la secuencia que abarcamos en este trabajo no incluye situaciones específicas de validación o de institucionalización).

   Este análisis incluyó eventualmente, sesiones de pre-experimentación con algunos niños de otros grupos. Por otro lado, en estos análisis intentamos precisar aquello que interesaba más observar y registrar en cada situación.

e) Experimentación de la secuencia. El carácter del trabajo que realizamos (estudiar las condiciones en las que se realiza el aprendizaje de las matemáticas en el aula) nos hace descartar la experimentación en situación de laboratorio. Sin embargo, tampoco optamos por la experimentación en condiciones absolutamente cualesquiera (en cualquier escuela, bajo la conducción de cualquier maestro) debido a que no estamos en el momento de probar la validez de una propuesta didáctica, sino de comprender mejor algunos aspectos importantes del proceso de aprendizaje. Por lo tanto, la experimentación se llevó a cabo en dos grupos de una escuela relativamente pequeña[7] cuya población es de extracción social heterogénea. La conducción de las sesiones estuvo a cargo de un maestro de esa misma escuela, que se ha integrado al equipo de investigación del Laboratorio de

[7] Centro Escolar Primaria del Sindicato de Trabajadores de la UNAM.

Psicomatemática desde hace varios años y que participó en todo el proceso de esta investigación.

Los grupos en los que trabajamos, uno de 3er. grado[8] y uno de 4o. grado, tienen cada uno treinta alumnos (consideramos que éste número de alumnos fue demasiado grande en relación a nuestras posibilidades para observar y registrar). Las edades de los niños son entre 8 y 9 años en tercero y entre 9 y 10 años en cuarto.

f) Observación y registro. La información que nos interesó obtener de la experimentación se recabó principalmente a través de la observación directa de las sesiones, orientada a partir, de los señalamientos que hicimos en el análisis previo. Cuando se consideró necesario, el observador participó en las sesiones, ya fuera haciendo preguntas a todo el grupo o a algún niño en particular.

Otra parte importante de la información de cada sesión estuvo constituida por los trabajos realizados por los alumnos.

g) Análisis dé la información. Al término de cada sesión se hizo un primer análisis de lo ocurrido, destinado principalmente a realizar las modificaciones que se consideraron pertinentes en la parte siguiente de la secuencia. Se elaboró un primer reporte de la sesión que incluyó las notas tomadas durante la sesión, otros elementos que no pudieron ser registrados en el momento y las decisiones no previstas que se tomaron a partir de esa sesión.

Al término de la experimentación se realizó el análisis global del proceso, en relación a las hipótesis que planteamos en el análisis previo.

[8] Cabe señalar aquí que el grupo de 3er. grado resultó particularmente conflictivo. Con mucha facilidad se creó un clima de desorden y, con frecuencia, de agresividad entre ellos mismos.

CAPÍTULO II. LOS NÚMEROS RACIONALES

El concepto de número racional, como cualquier otro concepto matemático, puede verse como un modelo abstracto, general, de múltiples situaciones concretas (o interpretaciones) que lo involucran, cada una de manera específica y distinta.

En este capítulo, veremos primero algunas de estas interpretaciones; para ello retomaremos las que destaca Kieren (1976) por considerar que son las más relevantes desde el punto de vista didáctico.

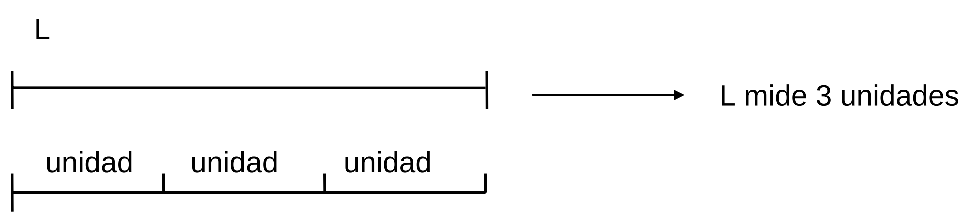
Posteriormente, abordaremos el concepto de número racional en su acepción más general, esto es, a partir de las propiedades de su estructura algebraica.

Finalmente, analizaremos algunos problemas, derivados de la complejidad específica de este concepto, relativos a la elección de alternativas para su enseñanza en el nivel básico.

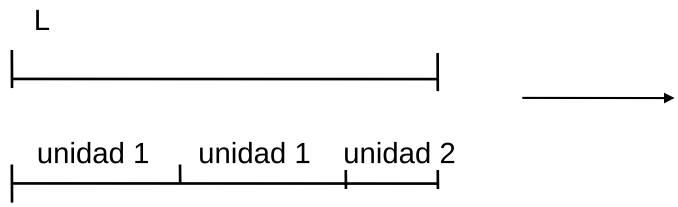
1. Interpretaciones del Número Racional

A. Fraccionamiento de la Unidad

Si nos preguntamos ¿para qué nos sirven, en la vida, diaria las fracciones?, acuden a nuestra mente, entre otras, expresiones como *medio litro de leche*, *tres cuartos de hora*, *3 metros y medio*, *un octavo de pulgada*, etc., expresiones que proceden del acto de medir. Esta antigua actividad social: medir, está, en efecto, en el origen de muchos conceptos matemáticos, y, en particular, de los números racionales. Al medir, por ejemplo, una longitud, lo que hacemos, finalmente, es contar el número de unidades (que no son más que otras longitudes) que *caben* en ésta.

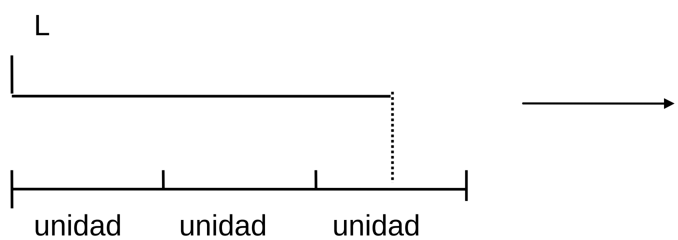


Pero, cuando la unidad no *cabe* un número entero de veces en lo que medimos, los números naturales no nos permiten ya expresar con exactitud la medida, a no ser que agreguemos unidades suplementarias más pequeñas:



L mide 2 unidades (1) +
1 unidad (2)

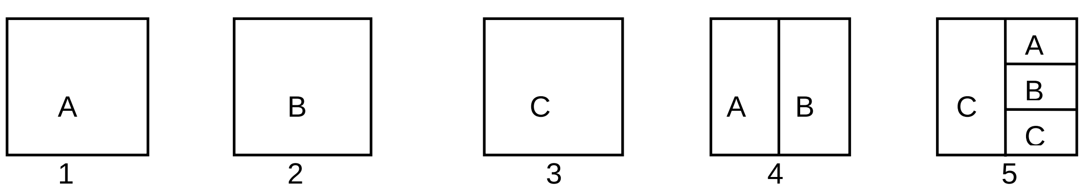
Sin embargo, esta salida llevaría a crear una cantidad inagotable de *nuevas unidades* más pequeñas sin relación entre ellas. No es difícil imaginar los problemas de comunicación que esto acarrearía. La solución que ha acabado instituyéndose consiste en **fraccionar** la unidad:



L mide 2 unidades +
½ de unidad

y, la expresión de la medida de estas fracciones de unidad genera precisamente a las **fracciones** en su interpretación más utilizada comúnmente: ¾ de unidad significa 3 partes de unidad, obtenidas al dividir la unidad entre cuatro.

Otro problema muy antiguo que conduce a la necesidad de fraccionar la unidad es el que se genera en situaciones de reparto: si repartimos, por ejemplo, 5 pasteles entre 3 personas, a cada persona toca un pastel entero y sobran dos. Para repartirlos, necesitamos dividirlos. Esta es una forma, entre otras:



A cada una le toca: 1 pastel + medio pastel + un sexto de pastel. Una vez más, los números naturales no permiten expresar la cantidad con precisión y se vuelve necesario utilizar *nuevos* números que cuantifiquen fracciones de unidad[9].

[9] Cabe señalar de paso, que de las situaciones de reparto tienden a generarse más que fracciones comunes, sumas de fracciones unitarias (de numerador uno). Volveremos más adelante sobre esto.

Ambos problemas, el de la medición y el de reparto, se presentan igualmente cuando la unidad es una magnitud discreta. Por ejemplo, con un abono de cine se puede entrar a 30 funciones. Si hemos entrado ya a 6 funciones, ¿qué parte del abono hemos utilizado?, o bien, si en un grupo hay 10 mujeres y 20 hombres, ¿qué parte del grupo son mujeres?

Echando un vistazo a algunos precursores de nuestros números racionales en la historia, observamos dos cosas: una, que efectivamente la necesidad de cuantificar fracciones de unidad en problemas de medición y de reparto está vinculada a la aparición de los racionales; y la otra, absolutamente previsible, que estos problemas no dieron lugar a los racionales tal y como los conocemos hoy en día. Veamos un conocido ejemplo[10].

Los egipcios, hacia 1700 a.C., tenían desarrollado un sistema de fracciones que consta, en primer lugar, de un número **limitado** de *fracciones naturales*: un medio, un tercio, dos tercios y tres cuartos. Éstas eran las más utilizadas en la vida diaria y eran designadas con nombres propios. Las demás fracciones se obtenían a partir de éstas e incluían únicamente fracciones unitarias. En virtud de esto, una característica de estas fracciones (y que hoy puede verse como una gran limitación) es que se escribían con un solo número natural, precedido de un símbolo que significa *parte*. No existían las fracciones formadas por dos enteros, numerador y denominador, tal y como los conocemos hoy en día.

Así, cualquiera de nuestras fracciones no unitarias eran escritas por los egipcios como sumas de fracciones unitarias: por ejemplo, 2/5 se escribía -traduciendo a nuestros símbolos- así:

(3) + (15)   (2/5 = 1/3 + 1/15)

El no utilizar numeradores volvía, en muchos casos, muy difíciles los cálculos. Por ejemplo, para obtener el doble de una fracción, como 1/6, bastaba con reducir el denominador a la mitad: 1/3.

Pero si el denominador era impar, como 1/5, para obtener el doble, a nosotros nos basta con duplicar el numerador: 2/5. Ellos debían encontrar la suma de fracciones unitarias que resultase igual a 2/5.

No obstante, toda fracción puede expresarse bajo esta forma. De hecho, los egipcios resolvieron cálculos muy complejos con sus fracciones (algunos de los cuales constan en

[10] Tomado de *Álgebra I*, Maestría en Matemática Educativa, Sección de Matemática Educativa SEP-CIEA, México, 1981.

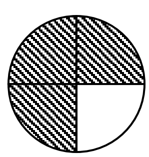
el *Papiro de Rhind* y otros se han deducido de las construcciones piramidales que realizaron).

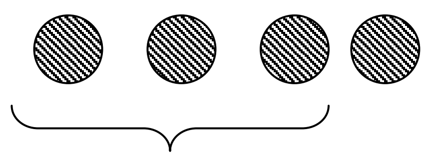
Estos datos históricos se vuelven muy significativos cuando nos preguntamos por los problemas que podrían propiciar —en clase— la construcción de las fracciones. Retengamos por ahora el hecho de que los problemas de medición y, sobre todo, los problemas de reparto son susceptibles de engendrar un sistema de fracciones unitarias cuyo margen de funcionalidad es relativamente amplio, pero el paso a las fracciones no unitarias, a partir de estos problemas puede ser difícil de propiciar.

Por otro lado, cabe señalar que tradicionalmente y hasta la fecha, las fracciones se introducen en la escuela primaria a partir de lo que se ha llamado ya *el modelo egipcio*, es decir, se introducen primero las fracciones 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, etc., y no es sino después que se ven fracciones no unitarias. Estas últimas se obtienen reduciendo sumas de fracciones unitarias 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5 (ver, por ejemplo, Matemáticas 3er grado, México, SEP, 1972). Estas fracciones representan siempre el estado final de una transformación y no a la transformación misma (dividir, multiplicar).

En resumen, en esta interpretación (fraccionamiento de la unidad) el número racional describe la relación cuantitativa entre un todo y sus partes. La fracción *a/b*, donde *a* y *b* son enteros y *b* es distinto de cero, referida a una unidad, significa: dividir la unidad en *b* partes iguales y tomar *a* de esas partes:

$\frac{3}{4}$





$\frac{3}{4}$

B. El número racional como decimal finito o periódico

En esta interpretación el número racional aparece —igual que en la anterior— como respuesta a la necesidad de cuantificar fracciones de unidad. Lo que cambia es la forma de expresar numéricamente estas fracciones. En este caso, la escritura se realiza mediante una *extensión* del sistema de numeración decimal: un punto después de las unidades de primer orden indicará que las cifras que siguen (a la derecha) representan fracciones **decimales** de unidad:

23.138 significa 2.10’+3.10º + $\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{8}{10^3}$ ó 23+ $\frac{138}{1000}$

Sin embargo, sólo las fracciones **decimales**, esto es, aquéllas cuyo denominador es divisor de una potencia de 10, pueden expresarse en esta notación, con un número **finito** de cifras después del punto:

$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=.25$ $\qquad$ $\frac{5}{8}=\frac{625}{1000}=.625$ $\qquad$ etc.

Las demás fracciones (aquéllas cuyo denominador no es divisor de una potencia de 10), en su expresión decimal, tienen un número infinito de cifras después del punto que se repiten periódicamente:

$\frac{1}{3}=.33333...$ $\qquad$ $\frac{2}{7}=.2857142857....$

Queda claro, por lo tanto, que las fracciones que pueden expresarse con exactitud en la notación decimal, es decir, las fracciones decimales, son un **subconjunto** de los números racionales[11]. Las demás fracciones (las no decimales) sólo pueden ser **aproximadas** mediante las fracciones decimales. Así, .3; .33; .333, etc. son sólo aproximaciones de la fracción 1/3[12].

Una ventaja evidente de trabajar con el subconjunto de fracciones decimales, expresadas en notación decimal –y que fácilmente puede convertirse en desventaja desde el punto de vista de la enseñanza, como veremos más adelante- es la facilidad que ofrece para calcular. Los algoritmos que funcionan para los números enteros pueden aplicarse -añadiendo unas cuantas reglas- al cálculo con decimales, ahorrándose así el pesado trabajo con fracciones.

Esta expresión decimal permite también identificar a otro conjunto de números: los irracionales. Estos aparecen expresados como decimales infinitos no periódicos. Por ejemplo:

$\sqrt{2}=1.4142135....$

[11] Este subconjunto contiene también al conjunto de números enteros.

[12] Este recurso que consiste en expresar o aproximar fracciones de unidad mediante divisiones de la unidad en potencias sucesivas de la base del sistema de numeración (en nuestro caso la base es 10), se remonta también a épocas antiguas: en la matemática babilónica, aproximadamente 2000 a.C., las fracciones se expresaban en notación sexagesimal (su sistema de numeración era posicional, como el nuestro, de base 60, aunque la parte entera se expresaba en combinación con la base 10).

C. El número racional como razón

A diferencia de las dos interpretaciones anteriores en las que el número racional expresa una medida, en ésta, aparece como expresión de algo más abstracto: de la relación (multiplicativa) que hay entre dos números enteros. Decimos por ejemplo que 1 y 2 están en la misma **razón** que 2 y 4 porque en ambos casos el segundo elemento es el doble del primero, o bien, porque el número por el que hay que multiplicar al primer elemento para obtener el segundo, es el mismo en ambas parejas.

Hasta aquí, la noción de razón no involucra **explícitamente** a la noción de racional: se limita a establecer relaciones entre números enteros. Ya en Euclides encontramos un amplio estudio de las propiedades de esta relación multiplicativa entre enteros, propiedades que precisamente fueron analizadas y descritas en términos de números enteros aunque hoy en día estas mismas propiedades se expresan con números racionales.

Veamos algunos ejemplos[13].

Definición: "Dos pares de números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero es del cuarto".

Hoy escribimos esta definición así: (a,b) y (c,d) son proporcionales si $a/b = c/d$. No obstante, es perfectamente posible prescindir del concepto explícito de racional. Aunque la razón de 2 a 3 no es expresable con un entero, puede determinarse fácilmente qué otro par de enteros están en la misma razón. La definición nos dice cómo hacerlo: 2 es parte de 3 porque 3 veces 2 es igual a **2** veces 3.

Busquemos otro par de números en el que el primero sea "las mismas partes" del segundo. Por ejemplo: 4 y 6 (**3** veces 4 es igual a **2** veces 6).

Otro ejemplo, proposición 5: "Si un número es parte de otro número, y otro número es la misma parte de otro, la suma de los dos primeros es la misma parte que la suma de los dos segundos".

Esta proposición hoy día, es una propiedad entre otras de la equivalencia de racionales:

Si $a/b = c/d$ entonces $a+c/b+d = a/b$

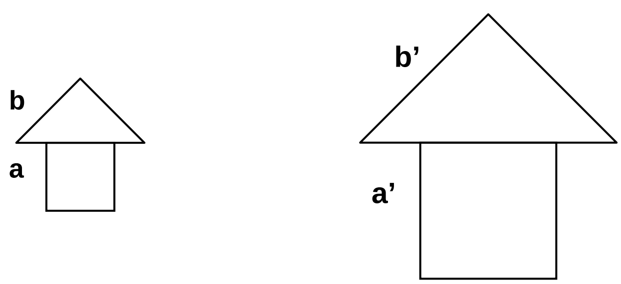
[13] Tomados del libro VII de los elementos de Euclides.

En esta interpretación, el problema específico que engendra a los números racionales es el siguiente: si, por ejemplo, 1 es a 2 como 2 es a 4, como 3 es a 6, etc., ¿qué número es a 1? Este número no es un natural y, puesto que forma una razón con 1 igual a la razón de 1 con 2, podría ser expresado así: (1,2) o bien, así, 1/2. Entonces, ½ es el número cuya razón con 1 es la misma que la de 1 con 2.

El problema consiste en principio en crear nuevos números cuya razón con 1 es la misma que la razón de un entero con otro.

D. El número racional como *operador multiplicativo* (o aplicación)

Toda situación de proporcionalidad implica a la noción de número racional. Ésta puede verse en la igualdad de razones, por ejemplo: en dos figuras geométricas semejantes, la razón entre dos lados cualesquiera de una es igual a la razón entre los lados correspondientes de la otra, o bien, en el operador multiplicativo que asocia a cada valor de una de las magnitudes, un valor de la otra magnitud:



igualdad de razones *a/b = a'/b'* o *(a/a' = b/b')*

operador multiplicativo: *a/a'* [14] puesto que: *b' x a/a' = b* y *a'xa/a' = a*

Como operador multiplicativo, el número racional *a/a'* se construye a partir de la composición de los operadores (÷ a') (xa):

$$a' \xrightarrow{(\div a')} 1 \xrightarrow{(xa)} a$$

$$a' \xrightarrow{(\div a')\quad (xa)} a$$

En este mismo problema nos podemos también preguntar por el operador multiplicativo que asocia *a* a *b* —es decir la medida de un lado de una figura a la medida de otro lado de la misma figura— con el fin de encontrar *b'*, conociendo *a'*. En este caso,

[14] O bien b/b'. Todos los operadores formados de esta manera (el valor de una magnitud entre el valor correspondiente de la otra, serán equivalentes).

el operador sería $\frac{b}{a'}$, puesto que: *a(÷a)·(+b) = b,* y, dado que la razón entre estos dos lados debe ser la misma que la que existe entre sus homólogos, tendremos que: *a' + b/a = b'*.

En general, toda situación de proporcionalidad implica la necesidad de determinar a un operador multiplicativo que a un valor *x* asocia un valor *y*. Este operador es el racional *y/x* el cual, en este contexto, significa la composición de los operadores (÷x) · (y).

Esta interpretación constituye un contexto idóneo en el que la multiplicación de los números racionales adquiere significado a partir de la composición de dos o más operadores racionales y, así mismo, permite destacar las propiedades estructurales de esta operación (elemento neutro, inverso multiplicativo, conmutatividad, asociatividad)[15]

2. Definición algebraica de número racional: como cociente de dos enteros

Desde el punto de vista algebraico, los números racionales aparecen como los elementos que enriquecen las propiedades estructurales de los enteros. Veamos esto de más cerca:

La adición de números enteros (Z, +) tiene las siguientes propiedades:

1) Es cerrada: $\forall\ a,b \in Z \qquad a+b \in Z$

Es decir, a cualquier par de elementos de Z, la operación + les asocia un elemento de Z.

2) Es asociativa: $\forall a,b,c \in Z \quad (a+b)+c = a+(b+c)$

3) Existe un elemento neutro, el cero:

$\forall(a) \in Z, a+0 = 0+a = a$

4) Todo elemento de Z tiene un inverso aditivo:

$\forall(a) \in Z, \quad \exists(a') \in Z\ tal\ que\ a+a'=0$

[15] El número racional aparece también como operador multiplicativo en otras interpretaciones. Por ejemplo, si en la interpretación que hemos llamado *fraccionamiento de la unidad*, nos interesamos no en el *estado final*: ¾ de pastel, sino en la transformación que sufrió la unidad, nos encontramos nuevamente con la composición de los operadores (÷ 4) (x3), es decir, con el operador x3/4.

5) Es conmutativa: $\forall a,b \in Z, \quad a+b=b+a$

Estas propiedades dan al sistema (Z,+) una estructura de grupo conmutativo[16]. Ahora bien, la multiplicación de enteros (Z, x) tiene las mismas propiedades que la adición -su elemento neutro es el 1- excepto la del inverso: no existe ningún número entero que multiplicado por otro entero distinto de 1, dé como resultado el 1.

En general, la ecuación $x \cdot a = 1$, siendo *a* un entero cualquiera distinto de ± 1, no tiene solución en el conjunto de números enteros (y por lo tanto la división[17] no es una operación cerrada en este conjunto).

Los números racionales definidos como el cociente de dos enteros, (existen otras formas de definirlos) son el conjunto en el que la ecuación anterior **tiene** solución. Con los racionales, por lo tanto, la multiplicación adquiere la propiedad del inverso multiplicativo (y la división se vuelve una operación cerrada): el número que multiplicado por *a*, da 1, es precisamente *1/a*.

En general: $\forall (a) \in$ Q $-\{0\}, \exists (a')\ tal\ que\ a \cdot a' = 1\ (a' = \frac{1}{a})$

El conjunto de racionales queda entonces definido así:

$$\text{Q} = \left\{ x = \frac{a}{b}, \quad a \in Z, b \in Z - \{0\}\ tal\ que \quad x \cdot b = a \right\}$$

Este conjunto contiene al conjunto de números enteros (puesto que cualquier entero puede expresarse como cociente de 2 enteros: $\forall$ a $\in$ Z, a = $\frac{a}{1}$). Los sistemas (Q,+) y (Q,x) tienen ambos estructuras de grupo conmutativo y, como además la multiplicación es distributiva con respecto a la adición, el sistema (Q,+,x) adquiere una estructura de campo.

Finalmente, la relación de orden en los racionales adquiere una característica que no tenía en los enteros: la densidad. En ambos sistemas, la relación de orden es total ($\forall\ (x,y) \in Z^2, \quad x < y \quad ó \quad x \geq y \ldots$). Pero, en el conjunto de números enteros, entre

---

[16] Notemos que el conjunto de los números naturales, con la operación +, tienen todas estas propiedades excepto la del inverso aditivo (no existe ningún natural que, por ejemplo, sumado a 1 dé cero). Los enteros aparecen también como los elementos que dan a la suma la propiedad del inverso aditivo, formándose así un grupo conmutativo (y por lo tanto la resta es una operación cerrada en este conjunto).

[17] Resta y división son operaciones que se definen a partir de la suma y de la multiplicación, respectivamente.

un número y su sucesor no existe ningún otro entero. En los racionales, en cambio, entre cualquier par de números, existe **siempre** una infinidad de números racionales.

3. Algunas consecuencias para el aprendizaje y la enseñanza de los números racionales en la escuela primaria

En el apartado anterior hemos visto, por un lado, algunas familias de problemas que engendran, cada una, una interpretación específica y distinta del número racional, y, por otro lado, hemos visto una definición algebraica de este concepto. Esta última constituye, a final de cuentas, un modelo de todas aquellas interpretaciones, las cuales a su vez implican, cada una, una realización **parcial** de la estructura del sistema (Q, +, x).

Por ello, la riqueza del concepto de número racional que los niños adquieren está en relación a la diversidad de interpretaciones en que progresivamente pueden funcionalizarlo (Kieren, 1976).

A continuación, abordaremos algunos de los principales problemas que esto plantea a nivel de la enseñanza y del aprendizaje escolar del concepto de número racional.

A. La elección de una primera interpretación para introducir el concepto de número racional

La introducción al concepto de racional en la escuela primaria pasa necesariamente por la selección de una primera interpretación del mismo, en aras de favorecer que este concepto tenga un mínimo de sentido para el alumno, esto es, que aparezca como un lenguaje que describe, explica o permite hacer predicciones sobre un fragmento significativo para él, de la realidad.

Haciendo a un lado la enseñanza que se limita a definir al racional como algo dotado de un numerador y un denominador, y que inmediatamente después propone los algoritmos para operar, en todas las demás propuestas a nivel básico, sea cual sea el enfoque metodológico, encontramos este recorte: se busca una situación concreta que realice una parte de la estructura del sistema.

Los criterios para seleccionar esta primera interpretación varían y muy pocas veces son explicitados, pero es claro que entre los más comúnmente asumidos están el de la familiaridad (en el sentido de experiencia previa y uso social) que los educandos tengan con la interpretación y el de la posibilidad de aplicar en ésta, con la menor modificación posible, los conocimientos previos.

Sin embargo, los conocimientos previos y las nociones intuitivas que se tienen acerca de determinados conceptos matemáticos no constituyen siempre —**por sí solos**— el mejor camino para aproximarse a ellos, y éste es el caso del concepto que nos ocupa.

H. Freudenthal (1973) destaca el hecho de que, en el campo de los números racionales se verifican propiedades que lejos de ser accesibles intuitivamente, contradicen la intuición; estos son algunos ejemplos: el producto de dos números racionales puede arrojar un resultado **inferior** a cualquiera de los factores e, inversamente, el resultado de la división de dos números puede ser **mayor** que el dividendo.

Señala, además, que estas dos operaciones difícilmente encuentran una interpretación que las vuelva *intuitivas*. Para él, el único problema que justifica y da sentido a los racionales es, finalmente, el problema algebraico al cual deben su estatuto matemático: convertir a la división en una operación cerrada.

Esto implicaría una introducción al concepto de racional a partir del análisis a nivel de estructuras; todas las propiedades de las fracciones se **deducen** entonces de los axiomas de la estructura de campo. Esto, evidentemente, no constituye una alternativa a nivel básico[18].

Sin extraer las mismas conclusiones, G. Brousseau (1981) va más lejos en el análisis de estas dificultades; a partir de un estudio sistemático acerca de los errores que produce un muestreo de niños de diversas edades en el manejo de los números racionales, discrimina una categoría importante de errores cuya frecuencia es significativa y estable y en los que Brousseau lee la extrapolación de propiedades de los números naturales a los números racionales.

Los ejemplos más característicos son los que ya mencionamos anteriormente: errores en la multiplicación de racionales que podrían provenir de una resistencia a aceptar productos inferiores que los factores (además la multiplicación está fuertemente asociada a la idea de una suma iterada -esta interpretación no funciona en lo absoluto con los números racionales-) y los relativos al manejo de la relación de orden:

[18] La deducción lógica es una operación del pensamiento que en general los niños de 8 o 9 años no pueden ejercer aún en forma sistemática. Los niños realizan deducciones en situaciones particulares sólo después de un proceso más o menos largo en el que la experiencia con la situación particular le permite tomar conciencia de aquello que da lugar, precisamente, a sustituir la experiencia por la deducción.

- Un número con más cifras que otro es mayor que éste;
- Entre 0.33 y 0.34 no existe ningún otro racional (y por lo tanto los racionales tienen sucesores).

El trabajo que los niños han desarrollado con los números naturales ha propiciado la generación de propiedades —explícitas o implícitas— que funcionan sistemáticamente en ese dominio. Estas mismas propiedades tienden a ser aplicadas en nuevos conjuntos numéricos, en este caso, en el conjunto de los racionales, en los cuales muchas veces ya no son válidas.

Para Brousseau (1976), estos conocimientos se han constituido en obstáculos epistemológicos para la adquisición del conocimiento de los números racionales. La adquisición del concepto de racional debe pasar por lo tanto, por la toma de conciencia y la explicitación de estas contradicciones.

Por otro lado, este problema se acentúa cuando en la enseñanza de los números racionales se opta por una interpretación que enfatiza las similitudes de estos números y los naturales. Este es el caso, por ejemplo, de la presentación de los racionales como *enteros con punto decimal*, a la que se acude con frecuencia debido a que ofrece el atractivo de permitir la aplicación de los algoritmos para operar con números naturales a las operaciones con racionales (con unas cuantas reglas adicionales). En esta interpretación, las diferencias estructurales entre ambos sistemas quedan definitivamente soslayadas (más adelante veremos otros problemas relativos a esta interpretación).

Este caso incluye, finalmente, a todos los intentos didácticos de reducir *a priori* el trabajo con números racionales a un trabajo con enteros. Un indicio muy conocido de esta tendencia puede verse en la socorrida metáfora que, a una suma como 2/5 + 1/5 asocia la idea de *2 manzanas + 1 manzana* y cuya moraleja es: así como se suman manzanas con manzanas, deben sumarse medios con medios, tercios con tercios, etc, y, recíprocamente, así como no se suman peras con manzanas, no pueden sumarse medios con tercios…

B. Tendencia a la particularización

La decisión didáctica acerca de cómo introducir la noción de racional no se limita a la elección de una primera interpretación. Cualquier interpretación es susceptible de ser particularizada en mayor o menor medida, a través de una reducción del tipo de casos estudiados, del tipo de representaciones utilizadas, y, consecuentemente, del tipo de problemas abordados. De hecho, en la mayoría de las propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas en el nivel elemental encontramos una tendencia a la particularización extrema.

En algunos casos, este fenómeno obedece a la necesidad de eludir determinados aspectos del concepto de que se trate, por considerarlos no accesibles a los niños de determinada edad. Sin embargo, el grado de particularización que alcanza la mayoría de las propuestas didácticas no se explica con esta consideración, y, en cambio, implica, un innecesario empobrecimiento del concepto[19].

En los libros de texto gratuito de matemáticas para la enseñanza básica en México, por ejemplo (cf. Matemáticas 3er grado, SEP, 1972), se introduce el concepto de racional a partir de la interpretación que hemos denominado *fraccionamiento de la unidad,* pero durante gran parte de esta introducción (3º y 4º) se ven sólo fracciones menores que la unidad (*propias*) y la mayor parte, de numerador uno; estas fracciones se refieren en un alto porcentaje de casos únicamente a unidades continuas. La representación de las fracciones se restringe a la presentación de figuras geométricas planas, regulares, divididas siempre de la misma manera y al uso de la recta numérica[20].

En algunos casos la particularización de la interpretación elegida, además de empobrecer el concepto, genera propiedades particulares contradictorias con las propiedades de los racionales, produciéndose con esto una deformación del concepto cuyas consecuencias siempre acaban por manifestarse. El ejemplo más característico de esto es la ya citada presentación de los racionales como enteros con punto, generados a partir del uso del sistema métrico decimal.

El *punto decimal* aparece como un medio para cambiar de unidad: 29.31m significa (y equivale a) 29m 3dm 1cm o 2931cm. En este contexto, todos los racionales que se manejan pueden equipararse a números enteros: 0.13m = 13cm; 5.2cm = 52mm, etc., y tienen, por lo tanto, las mismas propiedades que los enteros.

[19] Ameritaría investigar a qué necesidades responde este típico fenómeno escolar. Ives Chevallard (1980) ha acuñado el término de *transposición didáctica*, para destacar y describir el proceso de transformaciones que sufre un concepto al pasar de su origen en la ciencia a su modo de existir en la escuela. Por su parte Guy Brousseau (1980) adelanta los posibles motivos de la reducción de la enseñanza de los decimales al manejo de algoritmos. Entre otros, menciona el siguiente: los algoritmos consisten en una serie de pasos perfectamente definidos y la respuesta que se obtiene al aplicarlos es siempre única. Esto proporciona al maestro un alto grado de control sobre el trabajo de sus alumnos.

[20] Sobre este punto puede consultarse el trabajo de Lorenzo González, (1985).

A esto puede añadirse que, en este contexto, se está trabajando con un **subconjunto** de los números racionales: aquéllos que pueden expresarse como decimales finitos, y dentro de éstos, se ven sólo aquéllos que tienen hasta 3 cifras después del punto.

C. El paso de una interpretación a otra

Se trata aquí de otro punto muy problemático y, una vez más, aparentemente no considerado en lo absoluto en la elaboración de propuestas didácticas. Por lo general, la primera interpretación que se elige, se mantiene mientras ésta permite abordar determinados aspectos del sistema.

Cuando interesa abordar otros aspectos que ya no pueden ser realizados naturalmente en esa interpretación, sucede una de las siguientes cosas:

- La interpretación en cuestión desaparece y en su lugar aparecen nuevas propiedades, reglas o algoritmos desprovistos de todo significado.
- Cuando algunos elementos de la primera interpretación pueden funcionar en tanto casos muy particulares de los nuevos aspectos que interesa abordar, se aprovechan para introducir estos aspectos y después, dado que esta interpretación no permite generalizarlos, simplemente se le abandona. La generalización queda, en sí misma, desprovista de significado.
- Se hacen coexistir dos o más interpretaciones sin que medie un trabajo previo o posterior que permita vincularlas.

Veamos algunos ejemplos característicos de estos problemas en la enseñanza de los números racionales:

- La interpretación en la que se introducen los números racionales como *enteros con puntos* utilizando el sistema métrico decimal, los racionales aparecen al principio, como expresiones de medidas, referidas siempre a una unidad. Más adelante, cuando interesa ver decimales con más de cierto número de cifras después del punto, dado que no se suelen utilizar unidades convencionales menores que el mm, además, éstas son ya difíciles de visualizar, se *evapora* la unidad.
- En la interpretación de fraccionamiento de la unidad como en la de decimales generados a partir del sistema métrico decimal, no hay mayor dificultad en dar un sentido a la adición de racionales, dado que éste puede ser el mismo que tiene la adición de enteros (si a y b son las medidas de dos segmentos L_1 y L_2, a+b es la

medida del segmento L_1UL_2). Sin embargo, como ya vimos anteriormente, no ocurre lo mismo con la multiplicación: la interpretación de ésta como suma iterada no es aplicable al campo de los racionales, excepto en el caso restringido en el que uno de los factores es un número entero.

Ante la necesidad de introducir la multiplicación de racionales suele suceder:

Que se defina fuera de toda interpretación;

Que se le dé sentido a través de casos muy particulares, dentro de la primera interpretación. Por ejemplo, *a/b x c/d* es el número que cuantifica el área de un rectángulo cuyas dimensiones son a/b y *c/d*. Posteriormente se hace observar a los niños que el área es igual a *ac/bd*. Después de constatar esta observación en algunos casos, se define la regla general: *a/b x c/d = ac/bd*, regla que se aplicaría en lo sucesivo en cualquier otra interpretación[21].

Otro ejemplo característico de coexistencia implícita de dos interpretaciones no vinculadas entre sí lo constituye la utilización, en la escuela primaria (y en los libros de texto oficiales), de la noción de racional como fracción de unidad y la noción, más general, como cociente de dos enteros. La primera se utiliza para introducir el concepto de racional. La segunda aparece, en algunos casos, hasta el momento en que se quiere utilizar como un recurso para escribir una fracción en notación decimal:

$$\frac{2}{3} \qquad\qquad \begin{array}{r} \underline{0.6} \\ 3/2\ 0 \\ 20 \end{array} \qquad\qquad 2/3 = 0.66$$

y, en otros casos, en el momento de pasar a la multiplicación de un entero por una fracción (Matemáticas, 5º grado. SEP, 1982, pp. 166-171). En este caso, se intenta compatibilizar ambas interpretaciones a través de un argumento cargado de implícitos:

A partir de igualdades como ésta:

[21] En los libros de texto oficiales para la educación básica, se recurre a una alternativa menos problemática: el producto, por ejemplo, ½ x ¾ está asociado a la idea de ½ de ¾ de unidad. Esta interpretación se acerca a la concepción del racional como operador multiplicativo (o aplicación lineal). En este contexto, la multiplicación de racionales se desprende de la composición de operadores. Ésta última es posiblemente la interpretación más propicia para estudiar las propiedades estructurales de la multiplicación de racionales.

½ + ½ + ½ + ½ = 4 x ½ = 4/2 = 2

acompañados de un dibujo donde aparecen **4 mitades**. Se le pide al niño que se concentre en dos igualdades intermedias: 4 x ½ = 2 y que concluya que al multiplicar al 4 por ½ se obtiene la mitad de 4. El 4 jugaba al principio el papel de un operador (4 veces 1/2, como reducción de ½ + ½ + ½ + ½), y al querer sacar la conclusión buscada, el 4 juega de pronto el papel de *estado* y ahora ½ es el operador. El 4 apareció concretado como 4 mitades de naranja (no como cuatro naranjas) pero se concluye que... el 4 fue dividido entre 2. El hecho es que, para los niños, una fracción como "3/4 de naranja" significaría, al mismo tiempo, lo que se obtiene de partir una naranja entre 4 y tomar 3 pedazos, y lo que se obtiene de tomar 3 naranjas y repartirlas entre 4, o, simplemente, el resultado de dividir 3 entre 4, sin que medie una forma de comprobar efectivamente que estas dos interpretaciones son equivalentes.

Conclusiones

El análisis anterior acerca de las características conceptuales del número racional, nos da por un lado, elementos para el estudio del recorte conceptual que se opera en una propuesta didáctica específica, y, por otro lado, nos proporciona cierto tipo de orientaciones para el diseño mismo de situaciones didácticas relativas al aprendizaje de este concepto (es claro que los aspectos que se toman en cuenta para el diseño de estas situaciones no pasan únicamente por el análisis matemático del concepto en cuestión; este punto fundamental ha sido discutido ya en el capítulo sobre didáctica).

A continuación enunciamos los principales factores que hemos intentado considerar a este nivel:

- Deben evitarse interpretaciones para introducir el concepto de racional cuyas características particulares favorezcan la producción de propiedades locales incompatibles con las del sistema.
- La primera interpretación que se elija debe implicar preferentemente un trabajo con los números racionales en calidad de *nuevos números* (por oposición a "números enteros con características especiales"), esto es: números que resuelvan un tipo de problemas que los enteros no permiten resolver y, particularmente, números cuyas propiedades son distintas a las de los enteros.

- En consecuencia, es preferible una interpretación que implique en una conceptualización más general (en la medida de lo posible) del número racional, para abordar posteriormente interpretaciones que constituyen casos particulares de la primera, y en las que aparecen, eventualmente, propiedades particulares.
- Finalmente, en la primera interpretación que se elija debe analizarse la posibilidad o las dificultades que presenta para extenderse a otras interpretaciones.
-

CAPÍTULO III. SECUENCIA DE SITUACIONES-PROBLEMA[22] PARA INTRODUCIR LA NOCIÓN DEL NÚMERO RACIONAL. Descripción y Fundamento

1. El contexto: Medición de longitudes

De acuerdo con los principios didácticos planteados en el capítulo I, la elaboración de una propuesta destinada a favorecer la construcción del concepto de número racional implicó la elección de un primer problema cuya resolución lo comprometiese y que, a la vez, fuese significativo para los niños a quienes sería planteado. Hemos visto, en el capítulo II, algunas situaciones con la primera de estas características, las cuales, a grandes rasgos, podrían agruparse en dos familias: aquéllas que implican al concepto de racional como expresión de una medida y aquéllas en las que una situación de proporcionalidad lo moviliza como razón de enteros o como operador multiplicativo. En esta investigación hemos decidido explorar las posibilidades que ofrece la primera de estas familias (problema de medición) para introducir la noción en los niveles de 3° y 4° de primaria. Consideramos que las otras situaciones, las de proporcionalidad, tienen la importante ventaja de destacar, desde un principio, propiedades generales (estructurales) de la multiplicación de racionales (como la del inverso multiplicativo), pero implican, evidentemente, a la noción misma de proporcionalidad. Es probable que el manejo que de esta noción exigiría un trabajo con racionales basado en ella, no haya sido aún alcanzado en el nivel escolar en el que nos interesó trabajar[23]. No obstante, esto habría que verificarlo en situaciones didácticas específicas. Ésta y otras alternativas quedan aún por se exploradas.

En el terreno de la medición nos enfrentamos también a otras interrogantes: la medida de una cosa es, finalmente, una propiedad abstracta de ésta, a través de la cual se le puede equiparar a otras cosas (que miden lo mismo) por encima de infinidad de elementos en los que no son equiparables, como en el caso de dos segmentos que pueden tener la misma longitud independiente de su dirección, o dos superficies que pueden tener la misma área independientemente de su forma, etc., y es hoy en día bien sabido que esta deducción es producto de una construcción progresiva por parte del

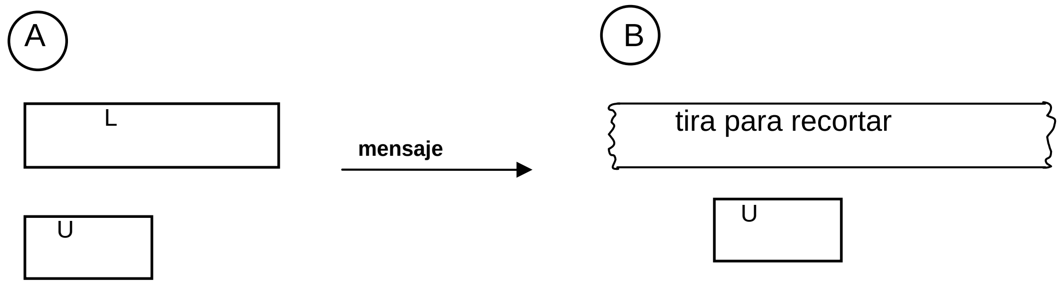
[22] Por *situación-problema* nos referimos únicamente al problema matemático que forma parte de la situación didáctica. Esta última contempla, además, la organización de otras múltiples interacciones en el aula.
[23] Sobre la construcción de la noción de proporcionalidad en los niños, puede consultarse el trabajo: *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept* de G. Noelting (1980).

sujeto. De hecho, en algunas sesiones informales -previas a la experimentación- pudimos constatar que varios niños de un grupo de 3^er^ grado y algunos pocos de 4° grado consideraban de diferente tamaño a dos superficies cuando una se obtenía de la otra recontándola y acomodando los pedazos de diferente manera. Esta apreciación se volvía aún más sistemática -y esto era absolutamente previsible- cuando se les mostraban dos mitades de hojas de papel iguales, pero una de ellas obtenida (frente a ellos) partiendo la hoja a lo largo y la otra a lo ancho. En este último caso no había comparación directa de las superficies. Para afirmar que miden lo mismo era necesario tener en cuenta su relación con las unidades de origen y la relación entre estas unidades. Consideramos que esta *no conservación del área* podría ser un obstáculo en el momento en que se quisiera que los niños clasificasen fracciones de superficies en función de su área para más adelante expresar su medida con un racional. Pero, una vez más, era posible que en una situación didáctica que les proporcionase los medios para verificar sus hipótesis, pudiesen movilizar procedimientos locales que les permitieran constatar que dicha conservación se verifica. No obstante, preferimos iniciar el trabajo a partir de la equiparación de longitudes, tratando con esto de reducir el número de variables a manejar e interpretar. Consideramos que la comparación de la longitud de diversos objetos que sólo difieren en ésta, así como la construcción de un objeto con mayor, menor o igual longitud que otro son problemas para los cuales los niños de 3° de primaria ya disponen de estrategias adecuadas, como por ejemplo, la superposición.

2. La situación-problema fundamental y la interpretación subyacente del número racional

La situación problema fundamental de la secuencia que hemos elaborado es la siguiente: un equipo (A) de niños dispone de una tira L y de una tira U, ambas de cartoncillo. La medida de la longitud de L, *m (L)*, no es ni múltiplo ni divisor de la medida de la longitud de U, *m (U)*. Otro equipo (B), dispone también de la tira U, pero no de la tira L. Tiene además una tira larga para recortar. Todas las tiras tienen el mismo ancho[24]**.** El equipo A enviará un mensaje escrito, sin dibujos, al equipo B para que éste último construya una tira del mismo tamaño que la tira L:

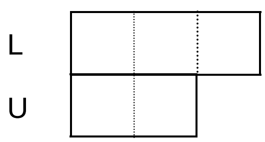
[24] El detalle del material empleado así como de la organización de esta actividad se dan en la ficha 3.1 en el capítulo siguiente.



La información que el equipo A enviará al equipo B será, independientemente del recurso utilizado, la medida de L. Dado que los niños sólo disponen del material descrito -y no tienen, por lo tanto, regla graduada- es fuertemente probable que utilicen la longitud de U como unidad de medida. Finalmente, dado que *m (L)* no es ni múltiplo ni divisor de *m (U)* (si lo fuera, un número entero permitiría expresar la medida de L en función de la U o la de U en función de la de L), dos recursos, en última instancia, permiten resolver el problema[25]:

a) El fraccionamiento de L o de U:

Se divide, por ejemplo, la tira U en partes iguales y se ve cuántas de estas partes yuxtapuestas coinciden con L. Ejemplo:

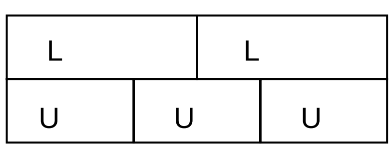


L mide 3 veces la mitad de U ó *m (L)*= 3/2
(Siendo U la unidad)

b) La conmensuración de L y de U:

Se busca el número de tiras L y el número de tiras U que yuxtapuestas, coinciden en longitud.

La medida de L se deduce de la ecuación: *p veces m(L) = q veces m(U).* Ejemplo:



2L mide 3U ó L mide 3 U entre 2, ó m (L) = 3/2 (siendo U la unidad)

[25] Esto es cierto, evidentemente siempre y cuando dichas longitudes sean conmensurables. Esta condición debe tenerse en cuenta, para cualquiera de las dos opciones, al diseñar los materiales que serán objeto de medición. Cabe señalar también que se mencionan aquí dos de los recursos más factibles de ser implementados en el aula. Hay otros recursos posibles, algunos de los cuales hemos visto ya en el capítulo II.

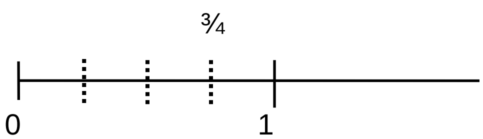
Cada uno de estos dos recursos genera una interpretación distinta del número racional. A partir del primero (fraccionamiento) el racional $\frac{a}{b}$, referido a una unidad U, significará: *a* partes de la unidad dividida en *b* partes iguales: $(U \div b) \times a$.

En cambio, a partir del segundo (conmensuración) el racional $\frac{a}{b}$ significará A **unidades** divididas entre *b*: $(U \times a) \div b$.

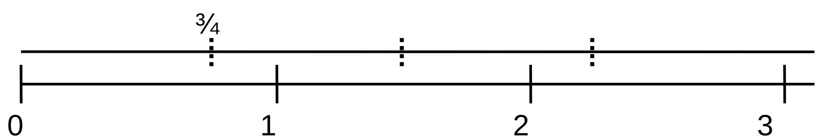
Si bien a nivel algebraico las ecuaciones $(U \div b) \times a$ y $(U \times a) \div b$ son equivalentes, a nivel de las interpretaciones hay, de entrada, una significativa diferencia. Ilustrémosla para el caso del racional ¾:

En la recta numérica:

Fraccionamiento:



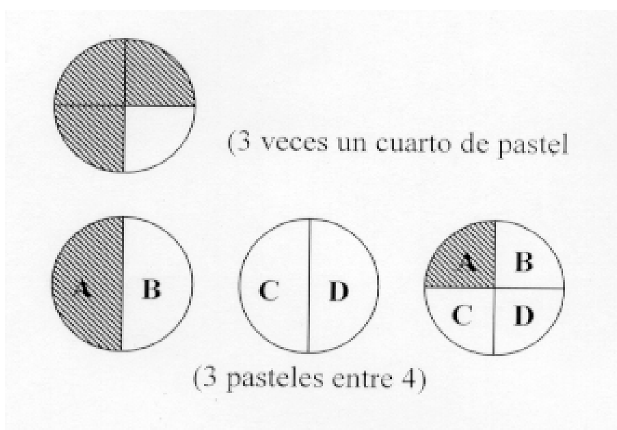
Conmensuración:



¾ de pastel:

Fraccionamiento:

Conmensuración:



[26]

Esta diferencia es, finalmente, la que existe entre las interpretaciones del racional como fracción de unidad y como **cociente de dos enteros**. Ya hemos hablado de ella en el capítulo II.

En esta propuesta hemos decidido propiciar el recurso a la **conmensuración** a través de las actividades previas y de las condiciones materiales en que se realiza esta actividad.

[26] Esta es una nueva manera, entre muchas otras, de dividir 3 unidades entre 4.

Esta elección responde, fundamentalmente, al motivo siguiente: la interpretación del número racional, como cociente de enteros, que se desprende del recurso a la conmensuración, es **más general** que la otra (fraccionamiento) y, no obstante, es factible de ser movilizada por niños de 8 ó 9 años en el contexto específico proporcionado por la situación didáctica antes descrita. Una de las consecuencias importante de esto, es que la construcción de la interpretación *fraccionamiento de la unidad*, a partir de la otra (cociente) es muy probablemente más factible de propiciar que la construcción del racional como cociente a partir del racional como fracción de unidad. Es decir, si el racional ¾ (de unidad) es interpretado como *3 unidades entre 4*, para concebir que ese resultado es equivalente a *3 veces un cuarto de unidad,* bastaría con apoyarse en un razonamiento como el que sigue: si se reparten 3 pasteles entre 4 personas (a cada una toca 3 entre 4, es decir ¾) cada una recibe un pedazo 3 veces más grande que si sólo se hubiera repartido un pastel (en cuyo caso a cada una toca 1 entre 4, es decir, ¼) por lo tanto, ¾ = 3 x ¼; o bien, lo mismo les toca si se reparten los tres pasteles de una vez (a cada uno toca ¾) que si se reparten primero un pastel (a cada uno toca ¼) luego otro y luego otro.

Por lo tanto ¾ = ¼ + ¼ + ¼

Dado que el numerador es unitario (se divide una sola unidad), ambas interpretaciones coinciden y el problema se reduce a expresar el racional a/b (a unidades entre b) como suma de racionales de numerador unitario.

Una vez visto que ¾ es equivalente a ¼ + ¼ + ¼, la construcción de ¾ de unidad podría realizarse según cualquiera de las dos interpretaciones: dividiendo la unidad en 4 y tomando 3 de esas partes, o bien, dividiendo tres unidades entre cuatro.

Este paso a la interpretación del racional como fracción de unidad puede propiciarse mediante situaciones como éstas:

- Sólo se tiene una unidad para construir la parte correspondiente a a/b de U.

- Se tiene por ejemplo, la parte que corresponde a $\frac{2}{5}$. No se tiene la unidad, y es necesario construir la parte que corresponde a $\frac{1}{5}$.

Habrá dos soluciones posibles: a partir de la parte $\frac{2}{5}$, reconstruir la unidad y con ésta construir la parte $\frac{1}{5}$, o bien, descubrir que la parte $\frac{2}{5}$ debe ser dos veces más grande que la parte $\frac{1}{5}$, y entonces, bastará con partir a la mitad la parte $\frac{2}{5}$. De esta última estrategia se desprende la equivalencia: $\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5}$.

El camino inverso: construir la interpretación como cociente a partir de la interpretación como fracción de unidad, es, probablemente, mucho más difícil de propiciar, aunque, como hemos visto en el capítulo anterior, este camino, es el más usual (se opta, no por propiciar **la construcción** de las interpretaciones como cociente, sino por **mostrar** que ésta es equivalente a la otra). Los recursos más socorridos son: conmutar los operadores que forman al racional, (÷ a) (xb)$\rightarrow$(xb) (÷ a), y constatar que en ambos casos se obtienen partes de la unidad iguales; o bien, se echa mano de elaboradas deducciones como la que describimos en el capítulo II.

Otro camino posible para pasar del fraccionamiento al cociente es el siguiente: una vez que los alumnos conocen la interpretación del racional como fracción de unidad, puede plantearse un problema en el que es necesario dividir *a* entre *b*, por ejemplo, 3 entre 4, en donde 3 enteros equivalen a 12 cuartos. Se divide entonces 12 cuartos entre 4, el resultado es 3 cuartos (3/4). En general: $a \div b = \frac{a \cdot b}{b} \div b = \frac{a}{b}$, pero, nuevamente, la transición se apoya en una deducción que difícilmente los niños podrían llevar a cabo.

3. La secuencia de situaciones-problema

El problema fundamental que hemos visto en el punto anterior está precedido por una serie de problemas sobre reparto cuyo objeto es crear condiciones para que los niños destaquen y manejen progresivamente la relación de conmensuración entre dos valores de una magnitud, en un contexto que les es conocido. Se espera que el conocimiento de esta relación sea movilizada posteriormente como estrategia privilegiada para abordar el problema fundamental (de medición).

Los primeros problemas (1.1 a 1.4) consisten en repartir cierto número *n* de *pasteles* (hoja de papel)[27] entre cierto número *m* de niños.

A partir de aquí, la relación de conmensuración entre enteros y pedazos ($n \cdot enteros = m \cdot pedazos$) está ya presente, aunque a un nivel totalmente implícito, es decir, para realizar el reparto, no se le necesita tener en cuenta explícitamente, excepto en el momento de verificar si el reparto fue correcto (la unión de todos los pedazos debe coincidir con la unión de todos los enteros).

En los problemas siguientes (2.1 a 2.5), generados a partir de los anteriores convirtiendo en incógnita lo que antes era un dato y en dato lo que era incógnita, se buscó que su resolución implicase la consideración cada vez más explícita de la relación de conmensuración $n \cdot enteros = m \cdot pedazos$. Por ejemplo:

- Se conocen los datos del reparto -número de pasteles repartidos (n) y número de niños (m)-; se tiene el pedazo que tocó a cada niño. Se trata de construir el pastel entero. Una forma de resolver este problema es dividir la unión de todos los pedazos entre el número de enteros. Esta estrategia pasa por la consideración de que la unión de todos los pedazos es igual a la unión de todos los enteros.
- Se tienen el pedazo que tocó a cada niño y el entero. Se trata de determinar cuántos enteros se repartieron entre cuántos niños. En este caso sería necesario buscar un problema en el que se verifique la igualdad $n \cdot enteros = m \cdot pedazos$. A un nivel implícito, empieza a establecerse una correspondencia, para un entero dado, entre cada *tamaño* de pedazo y un conjunto de pares (*n, m*) equivalente.

En este momento la relación de conmensuración entre enteros y pedazos se estará manejando a un nivel explícito. Sin embargo, en este contexto (reparto) esta relación no es funcionalizada como instrumento de medición, y, evidentemente, el par de números enteros (*n, m*) que se genera **no** representa para los niños una medida. Es decir, el par (*n, m*) no es un par de enteros que da cuenta de la relación de conmensuración entre dos *pedazos* cualesquiera. Dicho par significa, simplemente, que *n* enteros se repartieron entre *m* niños.

[27] En estas primeras actividades (1.1 a 1.4) se trabajó con superficies debido a que con éstas es más factible obtener, para un reparto dado, formas distintas de fraccionar las unidades que trabajando únicamente con longitudes. Esta diversidad de productos del reparto contribuye a hacer necesaria la **verificación.**

No es sino a partir del problema siguiente (3.1), que es el problema fundamental de la secuencia del cual ya hablamos antes, que la relación de conmensuración -en caso de ser movilizada por los niños- empezaría a funcionar **implícitamente** como medio para proporcionar una medida. En este problema un equipo de niños tiene el entero y un pedazo, supuestamente obtenido de un reparto. Otro equipo tiene sólo el entero. Los primeros enviarán un mensaje a los segundos para que éstos construyan un pedazo del mismo tamaño. Aunque momentáneamente se conserva el contexto de reparto, contexto en el cual hipotéticamente los niños desarrollaron la estrategia de base para este nuevo problema, ahora la situación es típicamente de medición[28]. Así, los emisores del mensaje, apoyándose en las actividades anteriores, pueden manejar un recurso basado inicialmente en la siguiente consideración: el pedazo proviene de un reparto de enteros. Si se indica cuántos enteros se repartieron y entre cuántos niños, los receptores podrán construir un pedazo del mismo tamaño.

Los problemas siguientes (3.2 a 3.5), se generan a partir del problema fundamental (3.1) mediante el manejo de determinadas variables. Sus objetivos son los siguientes:

- Abreviar los mensajes del tipo *n pasteles entre m niños* hasta llegar a la escritura mínima (*n, m*).
- Concebir la relación de conmensuración -más allá del contexto de reparto- como un medio para proporcionar la medida de una longitud en función de otra longitud.
- Utilizar el lenguaje construido como modelo que permite realizar anticipaciones sobre la comparación de la longitud de determinados segmentos -anticipan a partir de los pares *(n, m)* asociados a dos longitudes, si una es mayor, menor o igual que la otra, o bien, si una es mayor, menor o igual que la unidad...-.
- Construir ciertas generalizaciones -a nivel del modelo- acerca de la relación de equivalencia entre pares (*n, m*), y acerca de algunos aspectos de la relación de orden. ¿Cuándo dos pares representan medidas iguales (pares equivalentes)? ¿Cómo reconocer a dos pares equivalentes? ¿Cómo genera pares equivalente? ¿Cuándo un par representa la medida de una longitud mayor que la que representa otro par?, etc.

[28] Este cambio de contexto -de reparto a medición- teóricamente puede resultar problemático: se dan condiciones a los niños para que perfeccionen un instrumento que, -finalmente- estará destinado a funcionar en otras condiciones, para otros fines. Volveremos sobre este problema en las conclusiones.

Con estos problemas termina la parte de la secuencia que corresponde a la introducción de la noción de número racional y que fue abarcada en esta investigación.

En las conclusiones finales de este trabajo señalaremos las líneas generales de las etapas siguientes.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

En este capítulo presentamos el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación de cada una de las situaciones didácticas de la secuencia. Los análisis incluyen una descripción sucinta del desarrollo de cada sesión en ambos grupos (3o y 4o), pero en el caso de cuarto grado, sólo comentamos aquello en que difiere significativamente con respecto a tercero.

El análisis de cada situación termina con un apartado de conclusiones en el que intentamos analizar (o resumir, en caso de que ya hayamos analizado) los aspectos que nos parecieron más importantes (el análisis global viene en las conclusiones finales).

Para mayor facilidad de lectura, presentaremos al mismo tiempo que el análisis de cada situación, la ficha en la que se describe la organización de la misma y el análisis previo.

Hemos incluido al principio un índice de las sesiones experimentales en el que se indica el contenido de la sesión, los objetivos didácticos, el grado en que se aplicó y la fecha.

Índice de Actividades de la Secuencia

1. Reparto de *x* pasteles entre *y* niños

No. DE ACTIVIDAD / GRADO	FECHA	CONTENIDO	OBJETIVOS
1.1 / 3° y 4°	20-05-85	Repartir 3 pasteles entre 2 niños.	• Obtener *m* pedazos iguales a partir de *n* enteros. • Verificar que *m pedazos = n enteros* • Comparar diferentes formas de realizar la partición de enteros. Los pedazos que resultan tienen misma área aunque diferentes formas. • Asocian progresivamente los datos (*n, m*) del reparto con el tamaño del pedazo.
1.2 / 3° y 4°	23-05-85	Discriminar entre varios pedazos de un entero, cuáles son mitades.	
1.3 / 3° y 4°	24-05-85	Repartir 2 pasteles entre 3 niños.	
1.4 / 3° y 4°	27-05-85	Cada equipo hace un reparto diferente. Se realizan algunas anticipaciones acerca del tamaño de los pedazos.	

2. A partir del pedazo *y* de los datos del reparto construir el entero.
A partir del entero *y* del pedazo, determinar los datos del reparto.

2.1 / 3° y 4°	29-05-85	Dado el pedazo y los datos del reparto (2 enteros, 5 niños; 4 enteros, 3 niños) construir el entero.	• Tomar conciencia y utilizar la relación *n enteros = m pedazos*. • Asociar progresivamente los datos (*n, m*) del reparto con el tamaño del pedazo.
2.2 / 3° y 4°	31-05-85	Misma actividad (3 enteros, 2 niños).	
2.3 / 3° 4°	03-06-85 31-05-85	Dado el pedazo y los datos del reparto, escoger el entero entre tres posibles.	
2.4 / 3° 4°	05-06-85 03-06-85	Dado el entero y el pedazo, determinar los datos del reparto (3 enteros, 5 niños; 4 enteros, 3 niños).	

3. Mensajes

No. DE ACTIVIDAD/GRADO	FECHA	CONTENIDO	OBJETIVOS
3.1 / 3° y 4°	10-05-85	Emisores tienen el entero y un pedazo (diferente en cada equipo). Receptores sólo tienen el entero y una tira para recortar. Emisores envían mensaje *telefónico* a receptores para que éstos construyan un pedazo del mismo tamaño.	• Favorecer el recurso a la conmensuración como un medio para medir una longitud con una unidad determinada. • Favorecer la creación de un lenguaje que permita expresar una medida faccionaria. • Dar dicho lenguaje la función de medio para realizar anticipaciones (modelo matemático).
3.1 / 3° 4°	12-06-85 14-06-85	Misma actividad.	
3.2 / 3° (no se aplica en 4°)	17-06-85	Se confrontan mensajes elaborados en la sesión anterior; construyen el pedazo que corresponde a alguno de esos mensajes.	
3.2 / 3° / 4°	19-06-85 25-06-86 17-06-86 19-06-86	Reducción de los mensajes a la escritura simbólica (k, y). Interpretación de dichos mensajes (construyen pedazos).	
3.4 / 4° (no se aplica en 3°)	25-06-86	Se establecen ciertas relaciones entre el tamaño de los pedazos a partir de la expresión simbólica de su medida (x, y).	

Situación didáctica 1.1: Repartir 3 pasteles entre 2 niños

Desarrollo

Primera Parte

1. *Consigna 1*: “En las clases que siguen vamos a estudiar cómo repartir pasteles. En esta clase, cada equipo va a repartir 3 pasteles iguales a éste (muestra la hoja entera) entre dos niños. A cada equipo le debe tocar lo mismo de pastel y no debe de sobrar nada de pastel. Cuando se hayan repartido los pasteles, marcan lo que se le toca a cada uno con un color diferente”. (5 min.)

2. *Trabajo en equipos*: Realizan el reparto (15 min.)

3. *Confrontación*: El maestro explica brevemente que cada equipo manda a un representante a mostrar al grupo su reparto. El grupo dirá si el reparto estuvo bien hecho o no.

   El maestro selecciona los equipos que deberán pasar, escogiendo particiones diferentes, y en particular particiones erróneas.

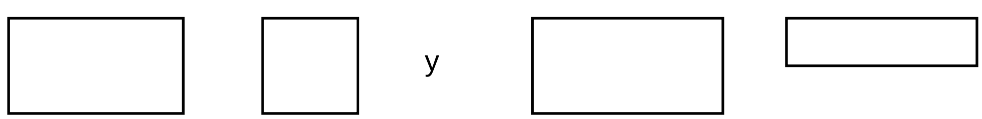
   Cuando pasa un representante, el maestro lo deja dar sus explicaciones y espera (o solicita) las preguntas o comentarios del grupo. Si el grupo no hace las siguientes preguntas, el maestro las hace:

   a) ¿Cómo podemos saber que los pedazos son iguales?
   b) ¿Cómo podemos saber que nos sobró pastel?
   El número de equipos que el maestro haga pasar variará según la diversidad de repartos, los errores encontrados y la motivación del grupo (20 a 30 min.).

Segunda Parte

4. Los pedazos obtenidos en participaciones diferentes, ¿son iguales o desiguales?

   El maestro selecciona el resultado de 2 tipos de reparto, correctos ambos, como éstos:



   (Si alguno no apareció, el maestro lo realiza, lo muestra al grupo y verifica frente a éste que es correcto, utilizando alguno de los procedimientos movilizados por los niños). (5 min.)

El maestro dice al grupo: A cada niño del equipo *x* le tocó esto de pastel (señala uno de los repartos) y a cada niño del equipo *y* le tocó esto (señala el otro reparto). ¿A cada niño del equipo (*x*) le tocó lo mismo de pastel que a cada niño del equipo (*y*)?

Se propicia la discusión colectiva, se piden justificaciones (20 min.).

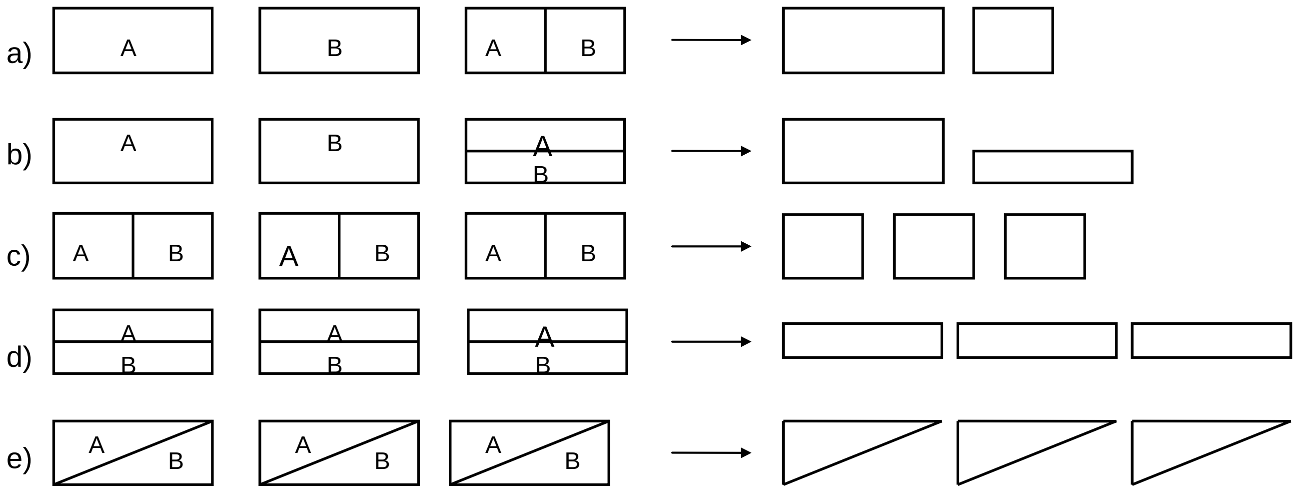
5. El maestro propone que cada equipo (ahora equipos de 4) averigüe si los pedazos son iguales o cuál es más grande[29]. Entrega a cada equipo una mitad *a lo largo* y una *a lo ancho* (15 min.).
6. *Confrontación:* Pasa un representante por equipo a exponer su conclusión (20 min.).

Análisis previo de la S. D. 1.1: Repartir tres pasteles entre dos niños

En la primera fase los niños repartirán los pasteles y verificarán si el reparto fue correcto. El reparto les llevará a fraccionar en dos por lo menos un entero. Esto no representa ningún problema para ellos. En la verificación esperamos que se expliciten las dos condiciones que debe satisfacer un buen reparto: igualdad de las partes (que pueden comprobar superponiéndolas) y el hecho de que la unión de las partes debe ser igual a la unión de los enteros. Es probable que esto último lo consideren obvio y no lo expliciten (si sólo usaron las tres hojas para obtener las partes ¿por qué no habrían de volverse a obtener las tres hojas al unir los pedazos?), aunque el hecho de que aparezcan pedazos con diferentes formas puede ser motivo de **duda** acerca de si ciertos repartos (de otros) cumplen con esa condición.

Pueden aparecer las siguientes formas de repartir:

[29] O bien pregunta: “¿qué podemos hacer para estar seguros?” Después, propone que lo hagan.



f) No parten en pedazos iguales.

Para partir una hoja a la mitad pueden acudir al doblado, o, en el caso e), pueden trazar la diagonal y cortar a lo largo de ésta.

La forma de repartir que más probablemente será utilizada es la a), en la que se fracciona el menor número de enteros (tendencia a economizar) y el corte se realiza a lo ancho de la hoja (hemos visto que así tienden a cortar, ¿por qué es más fácil?, ¿por qué se obtienen pedazos más parecidos a un cuadrado?).

En la segunda fase tendrían que anticipar y verificar si lo que toca a cada niño en un reparto como el a) es lo mismo o no que en un reparto como el b):

(a) (b)

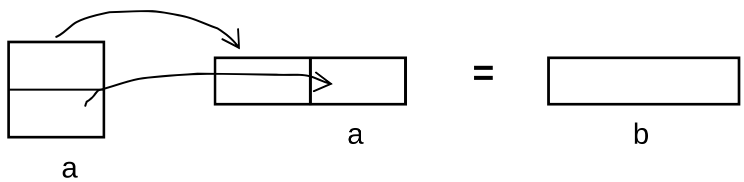
La discusión se concentrará obviamente en las dos mitades. El maestro propicia que los niños digan lo que piensan.

Es probable que un número considerable de niños piense que en uno de los dos casos toca más pastel. Afirmar lo contrario, que hay lo mismo de pastel en a) y en b), implica relacionar las mitades a) y b) con los enteros de origen y relacionar también a los enteros entre sí (son iguales). Es poco probable que los niños hagan este razonamiento. Si algunos niños lo llegan a hacer, podrían dar un argumento como éste: “la mitad a) y la mitad b) son iguales porque son mitades de cosas iguales”.

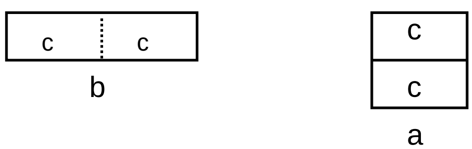
En la verificación, descubrirán o confirmarán que ambas mitades son iguales, siempre y cuando encuentren un procedimiento para compararlas (lo que no es demasiado difícil).

Estos son los procedimientos más factibles:

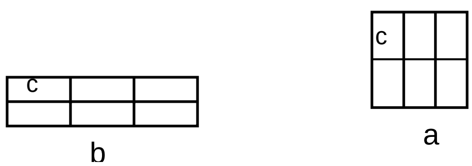
1. Buscando una manera de superponerlas: recortando la mitad a) a la mitad y poniendo ambas partes sobre la mitad b):



2. Doblando ambas mitades y observando que contienen el mismo número de rectángulos iguales, (estas mitades de mitades tienen nuevamente la misma forma):



3. Cuadriculando ambas mitades y observando lo mismo que en (2):



Estos son procedimientos de comparación de área. Implican también el que se acepte que el cambio de formas no altera el área. Si esto no es aún evidente para los niños, posiblemente no implementarán estos procedimientos ni serán convencidos por quienes los utilicen.

Por otro lado, aún los niños que los implementen y se convenzan con ellos de que la mitad *a* “es igual” a la mitad *b*, aceptarán esta igualdad **sólo para el caso particular.**

¿Hasta qué punto estos problemas de conservación de área afectan la adquisición de la noción de fracción? Si el trabajo de fracciones se basa en la medición de áreas, podría no tener significado para el niño la designación, con un mismo número (1/2, por ejemplo), de la medida de dos superficies que para él no miden los mismo.

Análisis de la experimentación de la S. D. 1.1: Repartir tres pasteles entre tres niños

Fecha: 20-05-85
Duración 3°: 1 h. 10 min.
4°: 1 h.

En 3^er grado

Primera Parte. Repartir y verificar (15 equipos de 2 niños)

Una vez explicada la consigna y entregada el material, prácticamente todos los niños se dieron inmediatamente a la tarea de hacer sus repartos. La tarea les resultó totalmente accesible. En un primer momento se escucharon comentarios como:

> Al 1: "*¡Es fácil! A todos un medio, tres mitades a cada quien"*
> Al 2: "D*os a cada quien (hojas enteras) y éste lo partimos a la mitad*"
> Al 1: "*¿Lo podemos partir en 4?"*
> Al 2: "*¡Ya sé! Una a cada quien y ésta la partimos a la mitad"*
> Al 1: "*¡Ah, pues claro!"*
> Al 1: (Partieron las tres hojas a la mitad) *"también se hubiera podido (dar) una hoja a cada uno y la otra en cuartos y 2 cuartos a cada uno".*

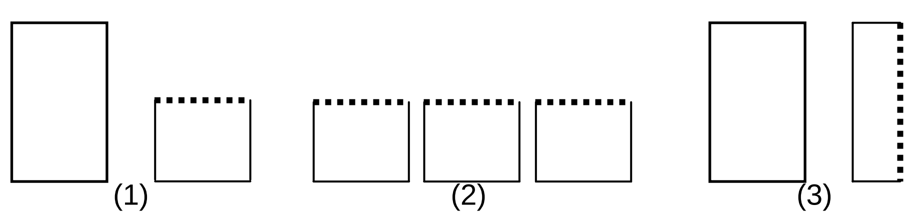
Varios alumnos utilizan espontáneamente la palabra *mitad* (sin que ésta fuera pronunciada en la consigna). Posteriormente, se verá que para algunos de ellos, esta palabra sólo significa "pedazo". Uno o dos alumnos recuerdan algunas cosas que se les han enseñado sobre fracciones y parece gustarles aplicar esos conocimientos, como el que dice que hubiera podido dar *dos cuartos a cada uno*.

Las diferentes formas de reparto que aparecen son:

1) Una hoja y media hoja partida a lo ancho[30] a cada uno: 8 equipos.

2) 3 medias hojas partidas a lo ancho a cada uno: 5 equipos.

3) Una hoja y media hoja partida a lo largo a cada uno: 2 equipos (vecinos).



Como habíamos previsto, (ver análisis previo) la forma de reparto más socorrida es la 1): economizar lo más posible el *partir hojas* y partir la hoja a lo ancho.

[30] Posteriormente los niños proponen *mitad corta y mitad larga*.

Confrontación colectiva y verificación:

Con esta confrontación esperamos que los niños mostraran al equipo sus repartos y probaran que eran correctos (es decir, que a cada quien le tocó lo mismo y que no sobró pastel). Esto último resultó un poco artificial, primero porque a simple vista podían apreciar si les había tocado lo mismo o no y les resulta evidente que no había sobrado pastel, y segundo, porque no estaban muy motivados para discutir los resultados de sus compañeros.

Fue el maestro quien los llevó a explicarse y justificarse mediante preguntas como: ¿Cómo sabemos que les tocó lo mismo?, ¿cómo sabemos que nos les sobró pastel?

Ante la primera pregunta, la respuesta de algunos niños fue: *midiendo*. No quedó muy claro qué querían decir con eso. Algunos niños entienden por medir, usar la regla, otros, comparar superponiendo. Finalmente, se propuso superponer un pedazo sobre otro. Las mitades *largas* producen más desconfianza en los niños y son objeto de otros procedimientos de prueba: una alumna dobla una hoja a la mitad (mitad *larga*) y la superpone sobre cada una de las mitades *largas* que están en el pizarrón probando así que éstas eran *iguales* (aplicando implícitamente la transitividad de la igualdad).

Finalmente, un alumno implementa otro procedimiento que no es atendido por el grupo y que en realidad no prueba la igualdad de las dos partes de la hoja sino otra cosa: toma ambas mitades *largas* y las superpone sobre una hoja entera. Pareciera que este niño acepta *a priori* que ambas partes son iguales, y decide probar que son mitades de la hoja. Esto es perfectamente justo ya que, en realidad, no basta con que 2 áreas sean iguales entre sí para afirmar que son mitades de determinada unidad.

Al hacer esto, las mitades yuxtapuestas quedaron ligeramente más cortas $(\pm 1mm.)$ que la hoja entera. Esto seguramente se debió a cierta falta de destreza al acomodar las hojas. Sin embargo, varios niños protestaron. Dijeron que no eran mitades porque sobraba "un pedacito". Es claro que consideraron como requisito para que las 2 partes fueran mitades, que su unión coincidiera con la unidad.

Dado que la forma de repartir dentro de cada equipo arrojó siempre *pedazos* con la misma forma, el procedimiento de superponer funcionó bien. El problema de pedazos con misma área pero distinta forma, se vería después.

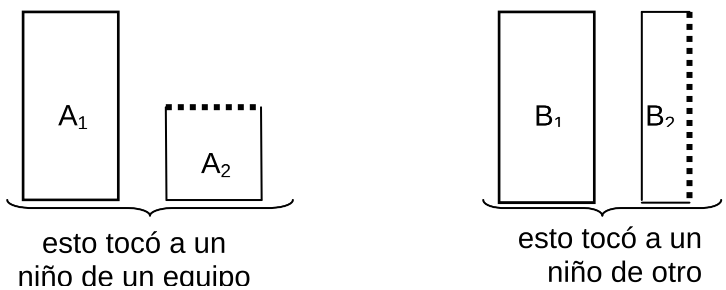
Con respecto a la segunda pregunta: ¿cómo podemos saber que no sobró pastel? Lo que en general hicieron fue relatar la forma en que se repartieron el pastel: "una hoja para cada quien, ya van dos hojas y la otra hoja la mitad para cada quien, ya están las tres hojas". Diciendo la forma en que a partir de las 3 hojas obtuvieron las partes que ahora muestran consideraban probado que no había sobrado pastel.

Sólo un equipo acudió al tipo de prueba que esperábamos: reconstruir los 3 pasteles uniendo las partes.

Segunda Parte. Comparación de una mitad *corta* con una misma *larga* (7 equipos de 4 niños y uno de 2 niños).

corta *larga*

Están pegados en el pizarrón los pedazos que tocaron a cada niño, correspondientes a 2 repartos distintos:

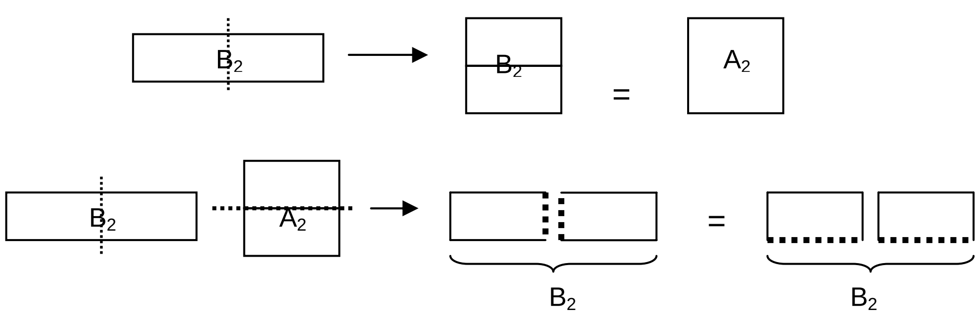


El maestro toma los pedazos A_2 y B_2 y pregunta al grupo si les tocó lo mismo a ambos niños.

Se escuchan simultáneamente algunos "sí" y otros "no". Un niño agrega: "no estoy seguro, habría que probarlo". Algunos niños se acercan al pizarrón. El maestro les pregunta "que si lo quieren averiguar" y reparte a cada equipo un pedazo A_2 y un pedazo B_2 (por cierto, se sorprende al ver que "ya lo tenía todo preparado").

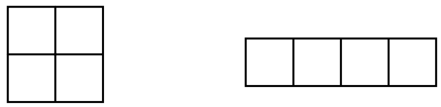
Procedimientos de comparación observados:

1) Recortar uno de los pedazos o los dos a la mitad y reacomodar las partes de tal forma que coincidan.



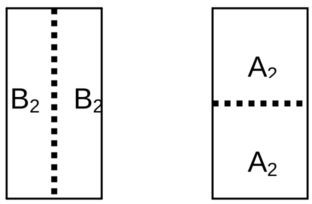
(4 equipos)

2) Doblar en 4 tanto A_2 como B_2 y observar que ambas mitades están formadas por 4 rectángulos iguales:



A_2 B_2 (un equipo)

3) Yuxtaponer dos mitades A_2 y dos mitades B_2, superponer las primeras sobre las segundas.



(Dos alumnos)

4) Argumentar (en la confrontación) que A_2 y B_2 deben ser iguales por ser mitades de *pasteles iguales*:

Al: *"Está igual porque ésta (señala A_2) es la mitad del pastel entero y ésta también (señala B_2) pero en la horizontal (superpone cada mitad sobre el pastel entero)".*

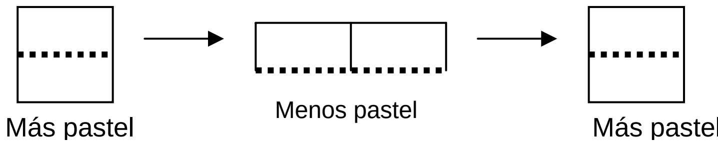
M: *"Si las dos mitades, ¿tienen que ser iguales?"*

Al: "*Sí, pero siendo del mismo tamaño el pastel que vamos a partir*" (1 alumno).

Análisis de estos procedimientos

Antes de que se pusieran a verificar, muchos niños dudaban que las partes fueran iguales. (En una sesión de pre-experimentación, la mayoría de los niños a los que aplicamos la prueba, afirmaron que el pedazo A_2 era más grande, los demás, que el otro era más grande. En sus discusiones aparecían argumentos compensatorios: es más "gordo", "sí pero es más largo", etc.) Es muy probable que hayan sido estos niños los que aplicaron los procedimientos 1 ó 2. Estos son procedimientos de comparación directa de áreas que prescinden totalmente del hecho de que ambos pedazos son mitades de una misma unidad.

Para que el procedimiento 1 funcione, es necesario que se acepte que al cambiar la forma de una superficie (recortándola y reacomodando las partes) el área de ésta se conserva. Más generalmente, que los cambio de forma pueden no alterar el área. Por lo menos en un equipo de 3° (implementó el procedimiento 1) no aceptan aún estos supuestos: si la forma cambia, el área cambia. Incluso, teniendo sobre la mesa una mitad cortada a su vez en 2 y reacomodándola varias veces de diversas formas, una niña de este equipo afirmaba que “cambia” la cantidad de pastel que ella se comería.



En los demás equipos, al aplicar el procedimiento 1 (recortar, reacomodar) los niños observan y se convencen a veces con sorpresa que ambos pedazos (A_2 y B_2) son iguales, pero sólo se convencen, obviamente, para este caso particular. En ningún momento relacionan este hallazgo con el hecho de que estos pedazos son mitades.

El procedimiento 2 implica la utilización de una unidad de medida de área. Supone, como el 1, que el área es independiente de la forma.

El procedimiento 3 no fue previsto. En este no se acude a la comparación directa de las superficies A_2 y B_2. Se prueba que: 2 veces A_2 coincide con 2 veces B_2 y, de ahí, se deduce que A_2 es igual a B_2 *($2A_2 = 2B_2 \Rightarrow A_2 = B_2$).* Se está aceptando, por lo tanto, que **mitades de enteros iguales son iguales entre sí**, sin que la diferencia de formas sea un obstáculo.

¿Hay alguna diferencia entre el razonamiento $A = B \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$ y $2A = 2B \Rightarrow A = B$? Quizás la haya y ésta se manifieste en el hecho de que dos niños que implementaron este procedimiento **necesitaron** comprobar que $2A_2$ coincidía con $2B_2$, pese a que sabían que A_2 y B_2 eran mitades de hojas iguales. O bien, ¿hicieron esa comprobación no para ellos sino para los demás?, o, por último, ¿dejaron de tener en cuenta la primera acción (obtener A_2 y B_2 partiendo hojas iguales a la mitad) y trataron a las partes A_2 y B_2 como mitades de enteros cualesquiera, o, incluso, como pedazos cualesquiera?

Estos niños no participan en la confrontación colectiva de resultados por lo cual no tenemos más elementos para interpretar mejor su procedimiento.

Notemos, por último, que este procedimiento puede ser un principio de *conmensuración*, si detrás de él está la intención de buscar la equiparación de *n pedazos A con m pedazos B* (en este caso n = 2, m = 2) como medio para comparar A y B.

Finalmente, el procedimiento 4, atestigua que se tiene en cuenta la relación de las mitades con las unidades de origen y la relación entre estas unidades. Este es un razonamiento deductivo acabado, no necesita de verificación empírica. Para estos niños 2 mitades cualesquiera, procedentes de unidades iguales son siempre iguales. Resulta interesante observar que este razonamiento lo establecen sólo una minoría de niños de 3er grado (4 de 30). En la confrontación, los primeros en pasar a demostrar su conclusión fueron estos niños. Lo único que hicieron fue emitir su razonamiento: “Está igual porque ésta es la mitad de un pastel entero y ésta también pero en horizontal”. Otro alumno parece considerar poco convincente este argumento y pasa a probarles a todos su procedimiento: recortar y reacomodar.

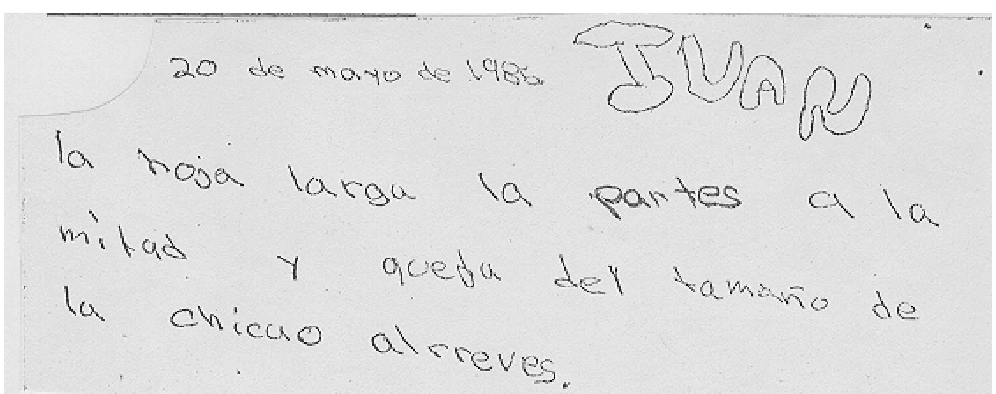
Es claro que el razonamiento que deduce la relación entre las *mitades* de la relación entre los enteros no es en lo absoluto inmediato para los niños. Es un conocimiento cuya construcción toma su tiempo. En esta sesión hemos podido apreciar en diferentes niños varias etapas previas a este conocimiento:

- negar la igualdad cuando las formas cambian
- aceptarla sólo mediante comprobación empírica
- suponerla gracias a razonamientos compensatorios.

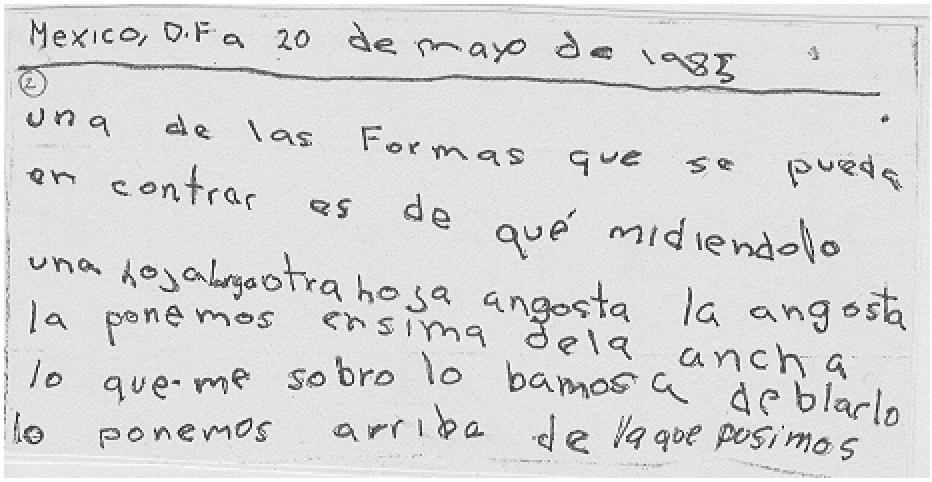
En todos estos razonamientos se prescinde de la relación entre las unidades (los enteros).

Al finalizar la sesión, el maestro quiso aprovechar unos minutos sobrantes y pidió a los niños -después de hacer énfasis en que habían aparecido “muchas maneras diferentes de probar que los pedazos eran iguales”- que escribieran una de esas maneras. Anexamos a continuación algunos de estos escritos:

Recortar y superponer

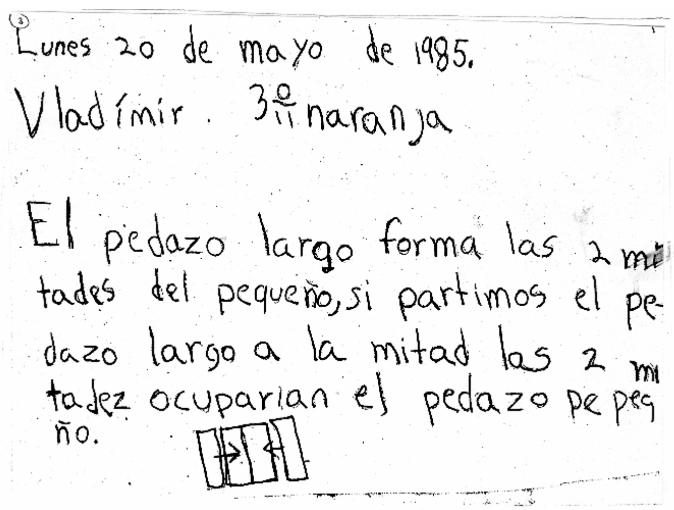

20 de mayo de 1985 JUAN

la hoja larga la partes a la mitad y queda del tamaño de la chicao alreves.


Mexico, D.F a 20 de mayo de 1985

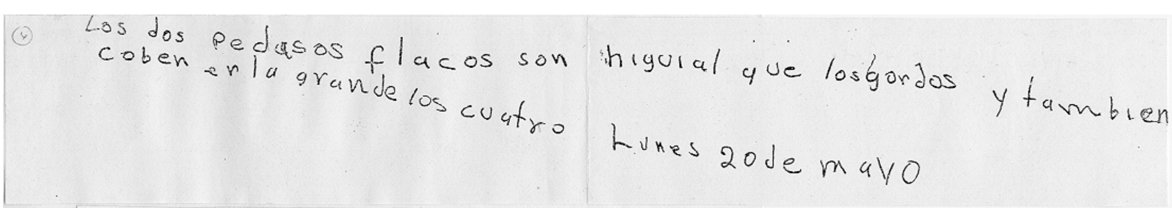
② una de las Formas que se pueda
en contrar es de qué midiendolo
una hojalargaotra hoja angosta la angosta
la ponemos ensima dela ancha
lo que me sobro lo bamos a deblarlo
lo ponemos arriba de la que pusimos

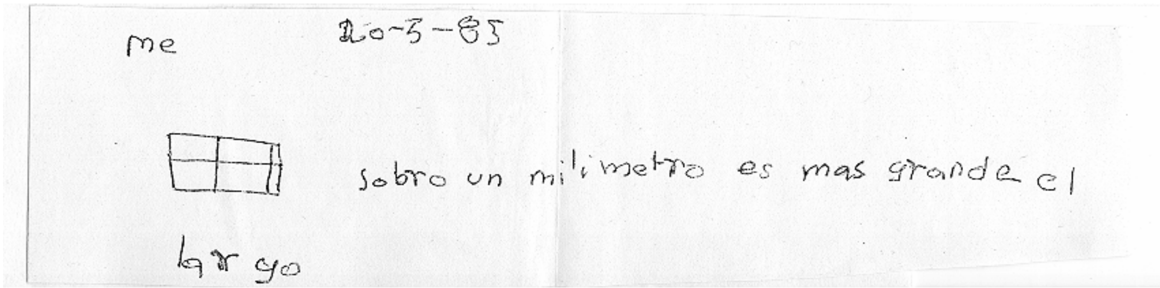
Recortar y superponer


Lunes 20 de mayo de 1985.
Vladímir. 3º II naranja

El pedazo largo forma las 2 mitades del pequeño, si partimos el pedazo largo a la mitad las 2 mitadez ocuparian el pedazo pequeño.

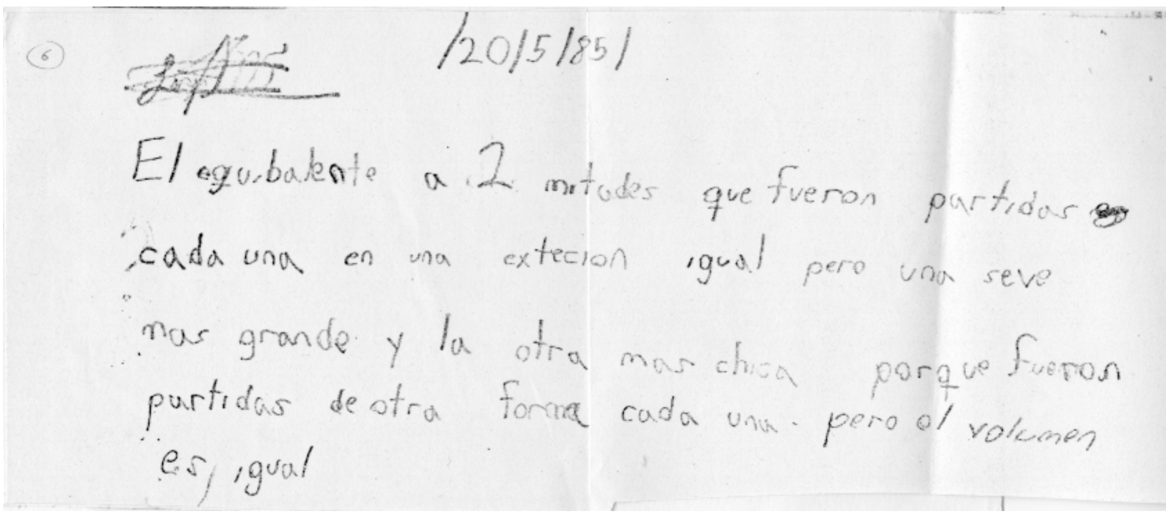
$2A = 2B \Rightarrow A = B$


Los dos pedasos flacos son higual que losgordos y tambien coben en la grande los cuatro
Lunes 20de mayo


me 20-3-85

sobro un milimetro es mas grande el lar go

$$A = B \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$$


6 /20/5/85/

El eguibakente a 2 mitodes que fueron partidas cada una en una extecion igual pero una seve mas grande y la otra mas chica porque fueron partidas de otra forma cada una. pero el volumen es igual

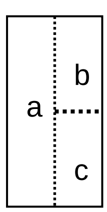
En 4° grado

Pensamos que en 4° grado esta actividad resultaría relativamente monótona. Sin embargo, ocurrieron problemas inesperados que la volvieron interesante.

- Tendencia espontánea a nombrar las fracciones: ¿tercios o cuartos?

  Casi todos los equipos repartieron sus 3 *pasteles* dando uno a cada uno y partiendo el otro a la mitad verticalmente. Sin embargo, varios se empeñaron en seguirlos partiendo, formando pedazos cada vez más pequeños y se notó un gusto aún más pronunciado que en 3° por dar el nombre de la fracción correspondiente a cada pedazo: “aquí tengo un medio o dos cuartos o cuatro octavos”.

  En cierto momento estaba pegada en el pizarrón, entre otras, una hoja recortada como sigue:



Un alumno pregunta a las autoras de este reparto: ¿cómo están seguras de que es una hoja?; una alumna toma una hoja y la superpone sobre uno de los rectángulos

Al: "*¿Cómo se llaman las partes? ¿Medios? ¿Tercios? ¿Cuartos?"*

En ese momento se arma el barullo. Unos dicen que son medios, otros que son tercios y otros que son cuartos. Un niño propone que el "pedazo largo" (a) se parta en 2 para salir de la duda. Nadie afirma que (a) es un medio y (b) y (c) son cuartos.

Es claro que les estorba que el entero no esté dividido en partes iguales como lo han visto siempre en sus clases sobre fracciones.

El pedacito (b) podía ser ¼ porque es la mitad de ½ y se nota que caben 4 en la unidad, pero la unidad está dividida en 3, entonces podría ser 1/3.

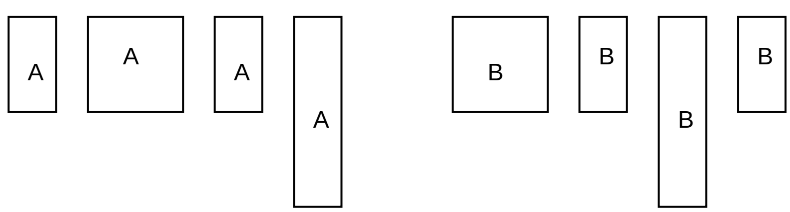
Esta duda se desprende lógicamente de la conocida definición: "cuartos se llaman los pedazos de una unidad partida en 4 pedazos iguales" aunado al hecho de que la representación de una fracción siempre sea del mismo tipo.

- Más dificultades para repartir que en 3°

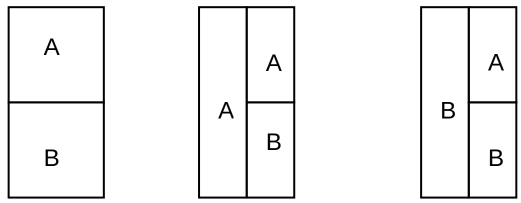
Varios niños de 4° se empeñaron en dividir sus hojas usando la regla graduada. Se enfrentaron a varias dificultades: medir a partir del inicio de la regla en vez de a partir del cero; la regla no alcanzaba y entonces tenían que unir 2 reglas; la medida no era igual a un número entero de centímetros; tenían que dividir milímetros. Finalmente abandonaron la regla optando por el recurso de *doblar* utilizado por sus compañeros.

- La verificación-colectiva tiene más sentido que en 3°

Además de la actitud de más concentración e involucración con el trabajo, otro factor que influyó para que esta confrontación de resultados tuviese más sentido fue el tipo de recorte que muchas veces no fue sencillo: por ejemplo, en un equipo se repartieron los pasteles así:



A simple vista, se podía juzgar que a cada uno le tocó lo mismo. Pero surgió la pregunta: ¿cómo saben que nos les sobró pastel? Para probarlo, reconstruyeron los pasteles:



varios equipos probaron de esta manera que no les sobró pastel. Otros simplemente hicieron el relato de cómo se los repartieron.

- La mayoría considera iguales a las mitades *corta* y *larga*

Nos llamó la atención la notoria diferencia en este punto con respecto a $3^{er.}$ grado.

A la pregunta del maestro, señalando un reparto con mitad *corta* y otro con mitad *larga*: ¿a quién le tocó más? La mayoría de los niños afirma inmediatamente que les toca igual.

Uno solo niño, Nicolás, afirma que le toca más a Eloísa (quien tiene la mitad vertical).

Otro afirma: “No porque son iguales, son medios”. El maestro pide a Nicolás que pase a defender su *apuesta*.

> *Nicolás: “Le tocó más a Eloísa porque éste (mitad corta) es un cuadrado y obtiene más pastel, es como si lo pintáramos...”*

El maestro provoca a los demás: “Ya se van convenciendo de que tiene razón ¿verdad?” Varios niños quieren pasar, están impacientes por demostrar el error de Nicolás.

Pasa uno y dice: “Son iguales, éste es más gordito pero éste es más largo”. Otro niño toma dos pedacitos de ¼ de hoja, los superpone sobre la mitad corta y luego sobre la mitad larga mostrando que hay coincidencia. Después intenta partir un pedazo en dos para volver a demostrar sus afirmaciones. El maestro pide su opinión a Nicolás: él, preocupado, dice: “Yo no aposté con ustedes, nada más con él... ahora sí me convencieron al medir con éste (señala el pedacito de ¼), yo pensaba que éste era más grande por el largo”.

Resulta claro que la conservación del área variando la forma no es evidente aún en 3^{er} grado y ya lo es para la casi totalidad de niños de 4° grado. El argumento que emiten al principio corresponde a un razonamiento deductivo muy claro: los dos pedazos son mitades (subraya: de enteros iguales) entonces son iguales. No necesitan acudir a una verificación empírica. Sólo cuando quieren convencer a Nicolás, acuden a las pruebas que intuyen lo convencerán: argumentos compensatorios (más largo pero menos ancho) o medición de ambas áreas con una unidad adecuada.

Conclusiones

Se pudo desarrollar toda la actividad. Resultó accesible y motivante en ambos grupos, excepto la confrontación colectiva de la fase 1, en la cual los niños de 3^er^ grado no mostraron necesidad de demostrar ni de inquirir sobre el trabajo de otros.

En términos generales los procedimientos reales de los niños coinciden con los previstos, excepto en los siguientes casos:

a) No hubo ningún caso de reparto en partes desiguales.
b) Hubo 3 niños en 3^{er} grado y la mayoría de 4^{o} grado que utilizaron implícitamente o emitieron explícitamente el razonamiento que deduce la igualdad de dos partes del hecho de ser mitades de enteros iguales.
c) Entre los procedimientos para comparar las mitades *larga* y *corta* de la hoja, apareció uno no previsto: yuxtaponer $2A_2$ y $2B_2$ y superponer.

Por otro lado, cabe agregar que: 1) La mayoría de los niños de 3^{o} que dudaban acerca de la igualdad de las dos mitades, se convencen de ella después de la verificación (todos menos un equipo de 4 niños). 2) La condición que debe verificar un reparto: la unión de los *pedazos* debe ser igual a la unión de los enteros, fue explicitada en ambos grupos por muy pocos alumnos. La necesidad de que esta condición se cumpla podría ser tenida en cuenta en mayor medida si de entrada los niños no tuvieran exactamente las tres hojas que deben repartir.

- Comentario sobre la enseñanza del concepto de mitad:

  Por lo general se considera que el concepto de mitad es sencillo y que por ello puede ser el primer eslabón de la secuencia del tema “fracciones”, abordable desde el primer grado de primaria.

  Casi siempre en los libros de texto de 1^{o} y 2^{o} de primaria se introduce la noción de mitad mostrando diversos objetos partidos a la mitad o pidiendo al niño que los parta. Sin embargo, lo que hemos visto en esta sesión nos ha mostrado que, cambiando ligeramente las situaciones didácticas relacionadas con la noción de mitad, aparecen múltiples problemas, muchas veces insospechados y que forman parte sustancial de dicha noción. Así, por ejemplo, nos encontramos niños de 3er grado que pueden muy bien dividir una superficie en 2 partes iguales pero piensan que dos mitades del mismo entero pueden ser desiguales, o niños de 4^{o} grado que, cuando un entero está dividido en 3 partes desiguales no saben si éstos son tercios o no.

El interés de esto no sólo radica en poner a descubierto ciertos problemas que suelen permanecer ocultos. El enfrentamiento del alumno con estos problemas (si este enfrentamiento no es demasiado problemático) da lugar a un valioso trabajo de investigación, verificación, corrección de hipótesis que lo llevará paso a paso a las conclusiones adecuadas.

Situación didáctica 1.2: ¿Cuáles son mitades?

Desarrollo

1. *Consigna:* “Vamos a entregar a cada equipo un pastel entero y varios pedazos. Se trata de que ustedes nos ayuden a escoger todos los que son mitades.” (5 min.)

2. *Trabajo en equipos*. (15-20 min.)

3. *Confrontación.* El maestro irá mostrando cada una de las partes y se recibirá la opinión de cada equipo. Si todos los equipos coinciden pasarán uno o dos niños a explicar cómo hicieron para estar seguros de que es o no es mitad. Si hay opiniones contrarias pasarán por lo menos dos niños de opiniones contrarias. (20-25 min.)

4. *Segunda consigna:* “Lo que queremos ahora es que nos ayuden a escoger los pedazos que tienen la misma cantidad de pastel.” (5 min.)

5. *Trabajo en equipos.* (15 min.)

6. *Segunda confrontación.* Se pegarán en el pizarrón los pedazos escogidos por un equipo (de preferencia uno que no haya escogido correctamente) y se pedirá al resto de los niños que busquen razones para contradecir.

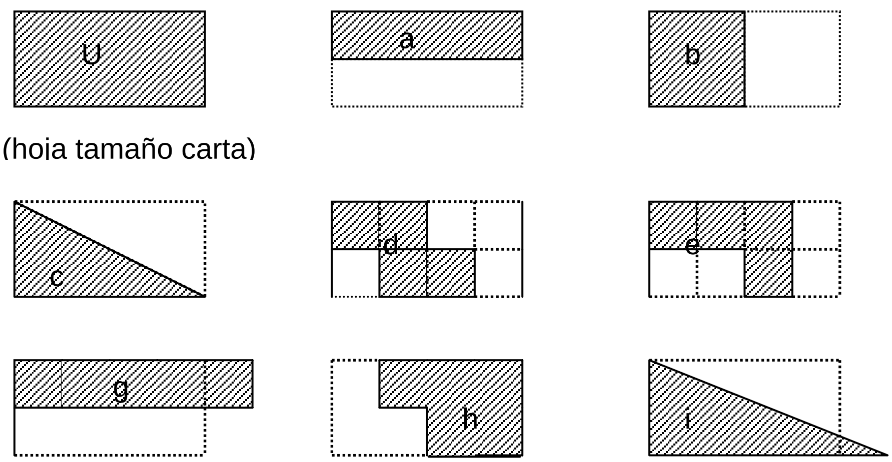
   Como resultado de la discusión se irán discriminando los que se demuestren que no son iguales y agregando los que sí lo son. (15 min.).

Organización:

Equipos de 4 niños

Material:

A cada equipo una hoja tamaño carta (± 21 cm x 28 cm) y un juego de 8 partes de hoja, algunas de las cuales son mitades de la hoja y otras no (el maestro tendrá un sobrante de cada una de estas partes por si los niños las necesitan).



(Los pedazos a, b, c, d, e, son mitades de la unidad (U). Los pedazos g, h, i, no son mitades).

Análisis previo de la S. D. 1.2.: ¿Cuáles son mitades?[31]

Primera parte. Discriminar qué pedazos son mitades de U

Tener que *repartir* un pastel rectangular entre 2 moviliza una acción simple, familiar a los niños, que consiste en doblar y hacer que las partes coincidan (en el caso de que tengan la noción de mitad). Subyace únicamente el que las 2 partes sean iguales. En cambio, tener la unidad y varios *pedazos* de la que hay que discriminar mitades, implica reflexiones más complejas:

[31] Esta actividad no estaba programada originalmente en la secuencia. El análisis de la relación entre las partes de un todo y el todo se propicia básicamente a partir de la segunda parte (Situación 2.1 $\rightarrow$ 2.4). Sin embargo, la posibilidad demostrada por los niños en la situación anterior de implementar recursos para comparar dos superficies, aunada al hecho de que en esa situación la verificación de que las partes deben coincidir con el todo, no se sintió necesaria, nos motivó a introducir esta actividad.
Señalamos también que la utilización del término *mitad* se debe a que los niños lo utilizaron en la sesión anterior, y, a lo largo de ésta, pareció quedar claro su significado. Sin embargo, no es nuestro objetivo en este momento designar las fracciones de unidad con un nombre, y menos aún con un número.

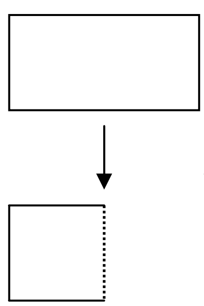
1) Hacer la acción inversa de reparto: construir otra parte igual a la dada y ver si juntas reconstituyen el todo. Esto implica saber que las dos mitades deben ser iguales (como en la acción de reparto) y las dos mitades deben formar el todo (cosa no explícita en la acción del reparto).

2) Desprender del todo la parte complementaria a la supuesta mitad y ver si estas dos coinciden. En este caso la relación de igualdad entre el todo y la unión de las partes no es tan explícita aunque sí implícita en el hecho de usar al todo como referencia.

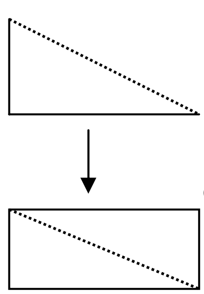
3) Hacer el reparto y verificar si una de las partes obtenidas coincide con la parte dada. En cuyo caso sólo se está retomando la acción directa como **criterio**: lo que salga del reparto es la referencia para discriminar mitades de no mitades.

4) En los casos en que la parte (como “d”) no se desprende de un reparto común (doblando la hoja) la reflexión que se exige es más compleja aún: -se debe pensar esta vez explícitamente que lo que debe ser “mitad” es el área, independientemente de la forma (conservación de área)-. Esta reflexión permite pensar en recortar o cuadricular la parte y comprobar que sus “pedazos” son efectivamente la mitad del área total.

En resumen:



Sacar la mitad $\Rightarrow$ Saber que las dos partes deben ser iguales (no se reflexiona explícitamente en que las dos partes deben formar la unidad)



Determinar si es mitad $\Rightarrow$

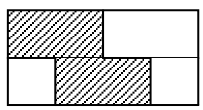
- Saber que las 2 partes deben ser iguales
- Saber que las 2 partes forman al todo
- Saber que no importa que las dos partes tengan la misma forma
- Inventar recursos para comparar áreas

Por ello pensamos que esta actividad exige en mayor medida que la anterior el tener en cuenta la relación entre el todo y sus partes, y nos permite a nosotros explorar más profundamente las concepciones de los niños sobre la noción de mitad.

Procedimientos posibles para cada caso:

En el caso de los pedazos a, b, c, g, h, i, el procedimiento más económico es el 2 (ver primera página de este análisis). Éste puede aplicarse ya sea superponiendo el pedazo sobre la hoja y apreciando a simple vista si lo que queda sin cubrir es igual al pedazo (apreciación visual facilitada por la simetría). O bien, recortando la parte que queda sin cubrir y superponiéndola sobre el pedazo. Por ello, es poco probable que para estos pedazos se utilice cualquiera de los otros procedimientos.

En el caso del pedazo (d), y posiblemente también en el caso de (e) es poco probable que se apliquen los procedimientos 1, 2, ó 3. Si se superpone (d) al entero, la mitad complementaria queda, *fragmentada*.



En este caso, el procedimiento más factible es el 4: recortar (d) y darle la forma de una mitad ya comprobada o cuadricular (d) y el entero (o d y otra mitad ya comprobada) y observar que *miden* lo mismo. Es posible también que consideren *a priori* que (d) no es mitad, ya sea porque a simple vista no lo parece, ya sea porque no acepten que la otra mitad esté fragmentada y/o tenga una forma distinta a la primera. No se sabe qué es más probable que suceda. Sólo se puede prever que si no consideran mitad a (d), podemos concluir que sólo reconocen por simetría.

Si por lo menos un equipo establece que (d) es mitad, será interesante conocer los argumentos que dé en la confrontación, y su aceptación o rechazo por los demás.

Segunda Parte. Agrupar los pedazos que tienen la misma cantidad de pastel

El objetivo de esta actividad es seguir propiciando **casos** en los que los alumnos puedan comprobar que sus hipótesis acerca de “mitades que no son iguales” son falsas. No esperamos con esto que ellos logren generalizar “mitades de la misma unidad son iguales”, pero sí que tengan experiencias concretas repetidas que favorezcan, a la postre, dicho razonamiento.

En casos de que no consideren de entrada, que las mitades *contienen lo mismo de pastel*, tendrán que comparar directamente unos pedazos con otros, guiándose por aquéllos que intuitivamente les parezcan iguales. No debe esperarse, por lo tanto, que logren terminar la clasificación.

Para ello aplicarán algunos de los procedimientos de comparación de área señalados en S.D. 1.1: recortar y reacomodar, compensación visual, cuadricular, etc.

Análisis de la experimentación de la S. D. 1.2: ¿Cuáles son mitades?

Fecha: 25-05-85
Duración: 3er grado: 1 hr. 10 min.
4o grado: 1 hr.

Primera Parte: Discriminar qué pedazos son mitades de U

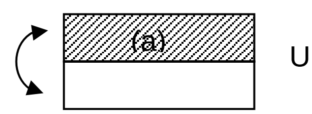
En 3er grado.

Consigna: "Les voy a entregar a cada equipo, así como están acomodados (grupos de 4), varios pedazos de pastel de diferentes sabores y un pastel entero. Quiero que ustedes me digan cuáles de estos pedazos son mitades (muestra el pastel entero y las mitades)."

En general los equipos encontraron rápidamente algún procedimiento para discriminar las *mitades*. No les parece difícil la tarea y aciertan en casi todos los casos, excepto con el pedazo (d) que la mayoría considera *a priori* "no-mitad".

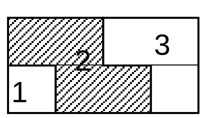
Procedimientos observados[32]

1) Superponen un pedazo sobre la hoja entera, y aprecian a simple vista si lo que sobra (parte no cubierta) es igual al pedazo:

compara 

Este procedimiento, muy utilizado, se aplicó a todos los pedazos.

En el caso del pedazo (d), este procedimiento dio lugar a los razonamientos siguientes:

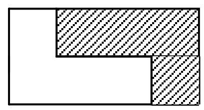


[32] A los 15 minutos de iniciado el trabajo, el maestro dijo al grupo que *se valía recortar*. Sólo un equipo decidió hacerlo. Recortó el pedazo (d) en dos partes.

Al*: "No es (mitad), no puede haber 3 mitades" (se refiere a las 3 secciones en que queda dividida la hoja entera).*

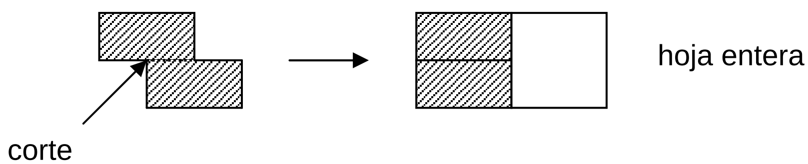
2) Superponen el pedazo sobre la hoja entera, marcan el contorno del pedazo sobre la hoja y luego ven si el pedazo coincide con la otra parte.

3) En el caso de la figura (e): un alumno afirma a otro que es mitad porque, "si la cortamos queda igual" (se refiere a la parte de la hoja que queda sin cubrir)



4) Después de la aclaración del maestro acerca de la posibilidad de cortar, en un equipo deciden recortar el pedazo (d). Antes de que esto ocurriera, estos niños ya tenían la hipótesis de que ese pedazo sí era mitad.

Después de recortarlo, superponen ambas partes sobre la unidad:

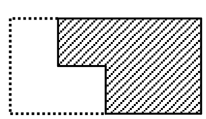


Analizaremos estos procedimientos más adelante, junto con los que fueron explicitados en la confrontación.

Confrontación colectiva de resultados:

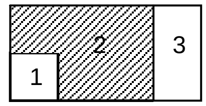
El maestro pega un pedazo en el pizarrón. Hace una lista de las *apuestas* de cada equipo (acerca de si ese pedazo es mitad o no lo es). Posteriormente, en caso de que aparezcan divergencias, pasa un equipo a defender un punto de vista y otro equipo a defender el otro.

Pedazo h



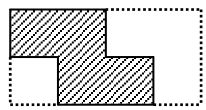
Varios niños gritan "no es". Uno más añade: "No es porque si partimos otra mitad así (señala el pedazo *h*) no da igual" (tal vez quiso decir que entre los dos pedazos (h) no forman uno igual al entero, o bien que el complemento del pedazo *h* no es igual a éste). Toma el pedazo *h* y lo superpone sobre la hoja entera. Muestra los pedazos desiguales.

Pasa otro niño al pizarrón y coloca el pedazo así:



Y dice: "No es mitad porque se forman 3 pedazos, **una mitad es de dos partes iguales y ahí son 3**". Entonces una niña le dice: "Pero lo podríamos poner así" (endereza el pedazo en tal forma que no queden huecos). El primero agrega: "Pero no serían iguales". Todos están de acuerdo.

Pedazo (d)



Equipos	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuestas (es mitad)	sí	sí	no	no	no	no	no	x

Pasa un alumno del equipo 2 con 2 pedazos en la mano (*d* partido en dos), los superpone sobre U y muestra así que (d) es mitad.

Los alumnos se sorprenden mucho. Algunos están perplejos, otros protestan, un niño exclama: "Pero no es la misma figura".

El maestro les pregunta si se ve dónde salieron los dos pedazos, los alumnos ya no atienden. Están excitados, se arremolinan alrededor del niño que hizo la prueba.

Un niño se acerca al observador y le dice que ese pedazo **no puede ser mitad porque "se forman tres mitades**" (nuevamente se refiere a las secciones en que queda dividida la hoja entera cuando se superpone el pedazo *d*).

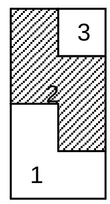
Una niña insiste varias veces que **recortando el pedazo "no es lo mismo**", después agrega que recortando todo sería mitad. Es claro que está pensando que al recortar el pedazo se le quita una parte.

Una niña dice: "Está mal recortado, pero bien recortado sí sería mitad". El maestro toma un pedazo (d) y lo parte a la mitad frente a todo el grupo para mostrarle la procedencia de las 2 partes que se usaron en la prueba.

No se ve muy claro si los niños ya están convencidos. El maestro decide pasar al pedazo siguiente (piensa que algunas de sus dudas se aclararán con los demás pedazos). Fue lamentable que esta discusión tuviese que interrumpirse. Hubiese sido muy interesante que los niños que estaban convencidos de que (d) era mitad, se defendieran de los argumentos pronunciados por los demás, como: "Recortándola ya no es la misma figura o no es mitad porque... se forman 3 mitades".

Sin embargo, al principio de la sesión siguiente, retomamos el caso de esta figura. El maestro preguntó a los niños si recordaban lo que se había decidido con respecto a ella. Todos dijeron que era una mitad. El maestro insistió recordando algunos de sus argumentos en contra:

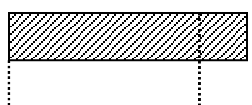
*M: **"**¿Cómo este pedazo va a ser mitad, si al acomodarlo quedan 3 pedazos?"*
*Al**:** **"**Pero si los juntamos ..."*
M: "Creo que OM no estaba de acuerdo"
OM: "Estaba para la hoja"
M: "Cambia a:"



OM:"Pasa y señala compensaciones: '1+ 3 forman 2'"
M: "¿Entonces no importa que queden separados y de todos modos es mitad?"
Al: "Sí, no importa"
Al: "Señala otra compensación"
Al: "Yo digo que tiene otra forma, pero tiene la misma extensión que la mitad del pastel"

Parece que los niños quedaron bien convencidos.

Pedazo (g)



Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuesta (es mitad)	no	sí	no	sí	no	no	no	no

En este momento pasa algo curioso. Mientras el maestro va llenando el cuadro de respuestas, varios alumnos están recortando su pedazo (g). Parece que el caso anterior los dejó con la idea de que se trataba de *quitar lo que sobra*.

Al responder si es mitad o no, se nota que titubean, lo que antes no habían ocurrido. Es claro que el que se haya desmentido, con el pedazo (d), una convicción de casi todo el grupo, los ha dejado inseguros.

Pasa un niño que afirmó que (g) es mitad. Lo que hizo fue quitarle un pedacito. Pasa OM, superpone (g) sobre la hoja entera y dice: "**Sería mitad de otro pastel más largo**". Todos están de acuerdo.

Con los demás pedazos no ocurren problemas. Todos están de acuerdo. El maestro no se detiene para pedir explicaciones (que los niños no sienten necesarias), sólo una que otra vez él mismo finge dudar de la respuesta. Rápidamente "lo convencen" tomando 2 pedazos iguales del tipo en cuestión, y mostrando que coinciden con la hoja entera.

- Inventario de los diferentes procedimientos implementados por los niños del 3er grado en la discriminación de *mitades* y en la confrontación. (Llamaremos *A* al pedazo y *U* a la hoja entera).

  1) Ponen *A* sobre *U* y estiman el resto.
  2) Dibujan el contorno de *A* sobre *U* y superponen *A* sobre la otra parte de *U*.
  3) Modifican (recortando y reacomodando) la forma de *A* y aplican el procedimiento (1).

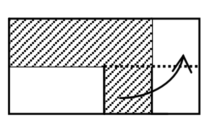
  Estos tres procedimientos se basan en el razonamiento siguiente:

$$\boxed{\text{A es mitad si U-A = A}}$$

Los dos primeros procedimientos se utilizaron con mucha frecuencia cuando las dos mitades que componen un entero tienen la misma forma. Es el caso de todos los pedazos con los que trabajamos excepto el (d) y el (h) si es colocado de manera que la hoja entera quede seccionada en 3.

En el caso del pedazo (d) hemos visto que la mayoría lo considero *no mitad*. Los alumnos que sí lo consideraron mitad aplicaron el procedimiento (3). Esta acción supone la aceptación de que el área de una superficie puede ser independiente de su forma. Ya vimos que para muchos alumnos de 3° esto aún no es evidente y a veces no lo aceptan. Recordemos que varios se opusieron al procedimiento (3): "Ya no es la misma figura"; "Recortando el pedazo no es lo mismo".

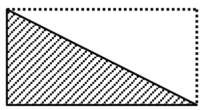
4) Hacen compensaciones dando imaginariamente a un pedazo *A* una forma que permita aplicar el procedimiento (1):



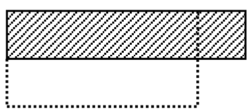
5) Superponen dos pedazos iguales a *A* sobre *U*:

$$\boxed{\text{A es mitad si A + A = U}}$$

Este procedimiento se uso también para casi todos los casos. Nos pareció que se utilizó más frecuentemente cuando la forma del pedazo *A* no era regular, por ejemplo, pedazo (e) o (h), y por lo tanto les quedaban dudas. También se utilizó para probar en la confrontación que *A* no era mitad (*A* no es mitad si $2A > U$):

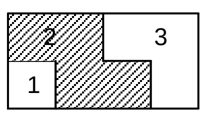


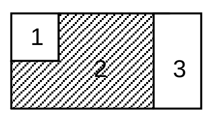
"Sí es mitad, si tuviéramos otro de éstos formaríamos otro pastel"



"No es, porque si tuviéramos otro, formaríamos un pastel más grande"

6) Para que *A* sea mitad, la hoja entera tiene que quedar divida en 2 partes y no más. Esto fue una sorpresa para nosotros. Es el caso de los dos o tres niños que afirmaron que (d) o (h) no podían ser mitades porque "No puede haber tres mitades".



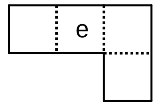


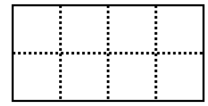
En verdad esta suposición es bastante comprensible: las *mitades* que vemos en la vida diaria y en los libros de texto son casi siempre iguales entre sí en todo. Hay que reconocer también que un pastel nunca se parte a la mitad de esta manera.

No obstante, fue el pedazo (d) el único que propició interesantes discusiones entre los niños y los llevó a reflexiones importantes sobre el concepto de área y de mitad. Quedaron al descubierto simultáneamente algunas ideas que los niños se hacen sobre estas nociones.

En cuarto grado. En 4^{o} grado aparecieron, además de los procedimientos de 3^{o} (excepto el 6) los siguientes:

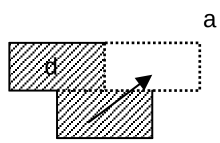
7) Fabricar una unidad de medida y medir los pedazos: un alumno dobla el pedazo (e) en 4 y dobla la hoja entera en 8, obteniendo divisiones rectangulares del mismo tamaño en ambos, "Ya lo vi, aquí tiene cuatro cuartos y aquí ocho".



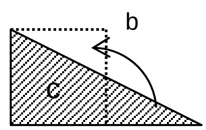


Con el pedazo (h) hace lo mismo y afirma: “Es una mitad y un octavo”. Intenta aplicar este procedimiento al pedazo (d) y no lo logra (no puede doblar d). Concluye que no es mitad.

8) Comparar los pedazos con una mitad ya comprobada, haciendo compensaciones. Concluyen que el pedazo (d) es una mitad comparándola con el pedazo a:



Este procedimiento fue bastante validado por el maestro. Quizá esto explique que lo siguieran utilizando aún en casos en los que no resulta tan práctico:



Estos procedimientos se apoyan en el hecho de que los pedazos que son mitades de una misma superficie tienen la misma área entre sí. Quizá esto explique que en tercer grado no lo hayan implementado.

Segunda Parte. Reunir los pedazos que tienen la misma cantidad de pastel. (Esta parte se realizó en la sesión siguiente: dos días después).

3er grado: 20 min

Sólo la aplicamos en 3er grado porque consideramos que en 4^{o} era ya evidente que las mitades de una misma superficie miden lo mismo (esta evidencia se desprende tanto de sus afirmaciones: “Son figuras diferentes pero abarcan lo mismo, son la mitad”, como de los procedimientos que utilizaron para discriminar mitades: usar unidades de medida y utilizar una mitad para seleccionar las otras).

También para algunos niños de 3^{o} resultó esta vez evidente; un niño exclamó: ¡Otra vez lo mismo! El maestro le aclaró la consigna y el niño reunió inmediatamente todos los pedazos que sí eran mitades y dijo que ésos tenían lo mismo de pastel.

Estos son otros argumentos registrados: “Sí son iguales porque están partidos en mitades del mismo pastel”, “aunque se ve más grande, tiene lo mismo de pastel”.

Sin embargo, la mayoría hizo nuevamente caso omiso de cuáles eran mitades y se dieron a la tarea de comparar directamente las áreas superponiendo y recontándolas o estimando compensaciones.

En dos casos ocurrió que habían agrupado las mitades (por ser mitades) y cuando el experimentador les pregunta: "¿Y las mitades, tienen lo mismo de pastel?" Dudan y deciden verificar.

No consideramos que un objetivo previo al aprendizaje de las fracciones sea que los niños establezcan el razonamiento en cuestión (A y B son mitades de U $\Rightarrow$ A y B miden lo mismo). Consideramos que con el tiempo y, sobre todo, enfrentándose una y otra vez a diversas situaciones que involucran esa relación, los niños la irán construyendo.

Conclusiones

Los procedimientos previstos de los niños coinciden en general con los reales. En realidad esto se debe en parte a que no anticipamos en el análisis previo cuáles procedimientos serían más probables (sólo señalamos la gama de posibilidades).

Así, por ejemplo, sabíamos que el pedazo (d) podía generar problemas. No sabíamos, sin embargo, que en 3er grado la mayoría los tendría y en 4^{o} grado prácticamente nadie. Con respecto a este mismo pedazo, no nos imaginamos que los niños lo rechazaran por **concebir a la mitad como división de un entero en 2 partes necesariamente**.

Uno de los procedimientos previstos nunca fue implementado: decidir si un pedazo *A* es mitad volviendo a **repartir** el entero y comparando *A* con esas partes. Nos parece muy explicable que este procedimiento no haya aparecido. Si el pedazo tiene una forma complicada es muy difícil imaginarse cómo se hizo el reparto. Si tiene una forma sencilla, es mucho más fácil usar cualquiera de los otros procedimientos.

Comentarios sobre el diseño de la situación:

- Estaba previsto realizar las dos partes de la ficha en una sola sesión (1. discriminar mitades y confrontación; 2. agrupar pedazos con igual área y confrontación). Con la primera sesión sólo se pudo realizar la primera parte (3^{o}, 1 h. 10 min; y 4^{o}, 1 h.).

  En la segunda sesión se aplicó sólo la segunda parte sin la confrontación ($\pm$ 20mm) y sólo en 3er grado.

Deben preverse por lo tanto 2 sesiones para esta ficha.

- No hay devolución de información. La actividad de *discriminar cuáles pedazos son mitades* tal y como está diseñada, no permite que la situación devuelva al alumno información acerca de sus resultados. Si un niño considera que un pedazo **no** es mitad cuando sí lo es, o viceversa, lo afirma y no hay medios evidentes dentro de la situación misma que lo desmientan.

  El único momento de *verificación* y validación de resultados se dio en la fase de confrontación. Afortunadamente siempre hubo alumnos que encontraron una respuesta correcta y la pudieron probar ante los demás. Pero, si en algún caso todos los alumnos se hubiesen contentado con una apreciación falda (por ejemplo, que el pedazo *d* no era mitad), esta apreciación habría quedado validada, al menos por el momento.

- Demasiado *pedazos* no problemáticos. El trabajo que los niños tuvieron que realizar en el caso de todos los pedazos excepto el (d), es decir, 7 pedazos, fue prácticamente el mismo. El pedazo (d), en cambio, exigía reflexiones y procedimientos distintos e interesantes. Es posible que sea conveniente reducir el número de pedazos sencillos y agregar uno o dos más que pongan en juego y enfrenten algunas concepciones que los niños tienen sobre la noción de *mitad*.

No obstante, esta actividad resultó ser una de las más motivantes para el grupo de 3er grado. Enfrentó a los niños a situaciones que son problemas para ellos y que estaban en condiciones de abordar, es decir, de emitir hipótesis, de discutir, de probar y de juzgar los resultados de sus pruebas.

Destaquemos aquí algunos de estos problemas:

a) Dos mitades de una misma superficie, ¿tienen necesariamente la misma área?

b) Si modificamos la forma de un pedazo, ¿sigue teniendo la misma área?

c) Dos superficies miden lo mismo cuando:

- superponiéndolas coinciden
- cuando las partes que no coinciden se compensan
- cuando coinciden después de modificar su forma
- cuando son mitades de la misma superficie

d) Una superficie *A* es mitad de otra *B*

- ¿sólo cuando *B* está dividida en dos partes?
- ¿cuándo $B = 2A$?
- ¿cuándo $A = B-A$?
- cuando, sabiendo que *A*' es mitad, comprobamos que $A=A'$.

Situación didáctica 1.3: Repartir 2 pasteles entre 3 niños

Desarrollo

1. *Consigna:* "Se trata de que en cada equipo de 3 niños se repartan 2 pasteles. A cada niño debe tocarle la misma cantidad y no debe sobrar pastel.". (5 min.)
2. *Trabajo en equipos:* Realizan el reparto. (15-20 min.)
3. *Verificación:* Se pide a los niños que intercambien los pedazos para que el equipo A verifique si el equipo B repartió bien y viceversa. (5-10 min.)
4. *Confrontación:* Se enumeran en el pizarrón los equipos y delante de cada número se va anotando *sí* o *no*, según haya estado bien o mal el reparto. Se revisan primero los casos erróneos.

   Un representante del equipo que verificó explicará por qué consideran que el reparto estuvo mal. El equipo implicado argumentará si reconoce el error o no. Registrar cuidadosamente los procedimientos utilizados para verificar.

   Después de esta etapa se fijan en el pizarrón algunos pedazos de igual área pero de distinta forma y se pregunta a toda la clase: ¿A quién le tocó más pastel? Se abre otra discusión entre los que consideran que los pedazos son iguales y los que piensan que no. (15 a 20 min.)

Organización:

- Equipos de 3 niños

Material:

- A cada equipo 2 hojas tamaño oficio (± 33 cm x 21 cm)
- Tijeras

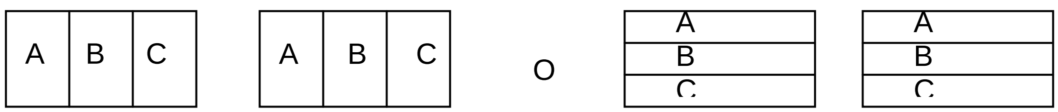
Análisis previo de la S. D. 1.3: Repartir 2 pasteles entre 3 niños

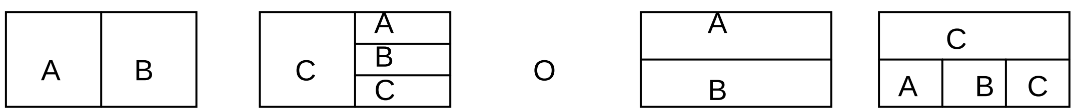
El reparto

En esta situación es factible que aparezca una variedad mayor de maneras de repartir que en las anteriores. Las diferencias de forma entre los productos de cada tipo de reparto pueden llegar a ser considerables. Esto propiciará que los dos problemas involucrados en el reparto: unión de enteros igual a unión de pedazos y, pedazos de distinta forma, procedentes de maneras de repartir distintas, tienen la misma área, cobren mayor relevancia.

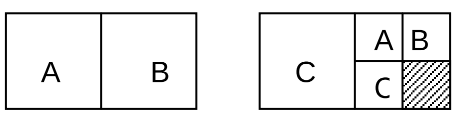
Las formas de repartir que pueden aparecer son:

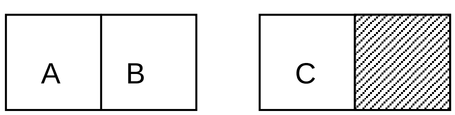
- Correctas

a)


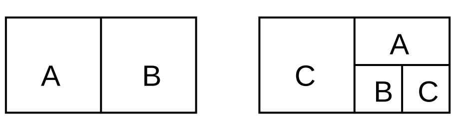
b)


- Sobra pastel

c)


d)


- Partes desiguales

e)


Hemos visto que la partición en tres no es implementada espontáneamente por los niños[33]: tienden más bien a partir en dos, en cuatro, en ocho, etc. (doblando o gráficamente). Por ello, las formas de reparto más probables son *c*, *d* o *e*: después de partir entre 2 ó 4 u 8 ... la parte que queda sin repartir puede ser considerada insignificante y no ser repartida, o bien, puede repartirse en partes desiguales (la diferencia es ya muy pequeña).

Este procedimiento que da lugar a una suma de fracciones unitarias del tipo $\frac{1}{2^n}$ permite aproximarse tanto como se quiera a cualquier fracción de unidad dada. Está basado en el mismo principio que el de nuestras fracciones decimales (que se expresan como suma de fracciones del tipo $\frac{a}{10^n}$, con $a \in Z$).

Por otro lado, en caso de que se recurra a la división de una parte entre 3, el tipo de reparto más probable es el (b): ya sea porque se observa la necesidad de partir en 3 después de haber intentado partir en 2, o simplemente por una tendencia a economizar particiones. Este tipo de reparto da lugar también a sumas de fracciones de unidad, pero no exclusivamente con denominador 2.

Hay que considerar, además, que aquéllos que de entrada no piensen en partir entre 3, adoptarían pronto ese recurso si lo llegan a ver implementar por alguno de sus compañeros (finalmente sólo ese recurso permite que no sobre pastel).

La verificación

Debe pedirse de antemano que la verificación consista en: a) a cada uno le toca lo mismo; b) se repartieron exactamente 2 pasteles.

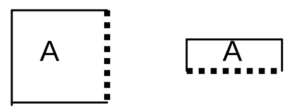
La verificación de que a cada uno le toca lo mismo, se llevará a cabo por superposición o yuxtaposición. Aquí es donde pueden aparecer señalamientos de errores en procedimientos como *e* (si así ocurre, basta con que estos errores sean señalados; es muy probable que los niños acaben por implementar la partición en 3 partes iguales).

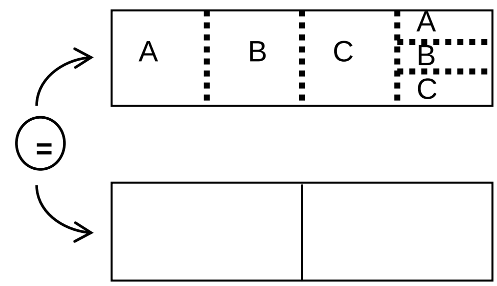
Con respecto a los procedimientos a o b, quizá sólo aparezcan problemas de recortado impreciso.

[33] Cf. Balbuena, H., C, Espinosa, H. Espinosa, D. Fregona, I. Saiz, (1984) *Descubriendo las fracciones*. México, DIE, Laboratorio de Psicomatemática No. 5.

La verificación de que se repartieron dos pasteles exactamente -si no es obviada- se realizará reconstruyendo el todo a partir de las partes. Por ejemplo:

Producto de reparto *Verificación*





Es aquí donde se enfrentarán los errores de los repartos tipo *c* o *d*.

Los niños tendrán entonces que seguir repartiendo sus sobrantes.

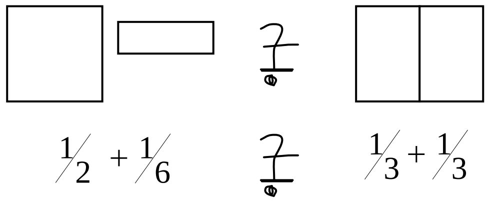
NOTA: Si en la verificación no se destacan los problemas citados de los repartos tipo *c*, *d* o *e* (esto puede ocurrir si ningún alumnos hace un reparto tipo *a* o *b*) el maestro insistirá, al término de la confrontación, en la consigna “ a cada uno debe tocar lo mismo y no debe sobrar pastel”, e invita a los alumnos a que busquen otro procedimiento.

La confrontación

Los puntos más importantes a manejar en la confrontación son:

- dar a conocer diferentes formas de repartir, en particular aquélla en la que se divide entre tres (sólo incluir repartos hechos por los niños).
- explicitar y acordar colectivamente las dos condiciones que deben satisfacer los productos del reparto, así como la manera de verificarlos.
- propiciar una discusión entre los niños acerca de si lo que toca a un niño en un tipo de reparto es igual o no a lo que le tocaría en otro tipo de reparto. Nuevamente aquí está en juego la posibilidad de utilizar como criterio de igualdad del área de las diferentes partes (*A*, *B*, *C*...) el hecho de que: *3A = 2U; 3C = 2U; etc*. Parece evidente que los niños que no hicieron este razonamiento para el caso de las mitades, tampoco lo harán ahora. Queda la duda de si los demás sí lo harán en este caso que es bastante más complejo.

  Nótese que ahora, visualmente, la igualdad del área no es nada evidente:



Este último punto de la confrontación debe ser visto sólo como exploratorio.

No nos interesa en este momento desarrollar un trabajo específico sobre fracciones de área.

Análisis de la experimentación de la S. D. 1.3: Repartir 2 pasteles entre 3 niños

Fecha: 24-05-85
Duración: 3er grado: ± 1h 10’
4^{o} grado: ± 1 h

En 3er grado

Consigna: “Vamos a hacer un nuevo trabajo, vamos a repartir dos pasteles entre...”

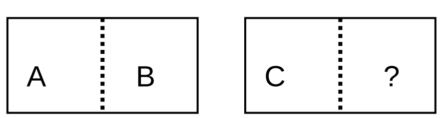
Al: *“¡Dos niños! ¡Tres niños!”*
M: “*Va a ser entre tres niños. Que les toque lo mismo y que no sobre pastel”*

El reparto (trabajo en equipos)

Efectivamente, el reparto en tercios resultó difícil para los niños. Fueron pocos los equipos (3 de 8) que encontraron inmediatamente alguna forma de repartir. Sólo dos equipos hicieron el reparto *clásico* que consiste en dividir cada hoja en 3 partes.

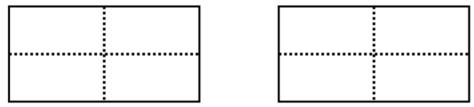
La mayoría empieza doblando una hoja, o las dos, en 2 partes. A veces, buscando que aparezcan 3 divisiones, siguen doblando en dos y se sorprenden al no ver aparecer sus 3 divisiones (¡aunque doblen 3 veces en 2!).

Equipo 4: Parten a la mitad los 2 pasteles. Asignan a cada uno de los *tres niños* una mitad y se dan cuenta de que les sobra una mitad ...

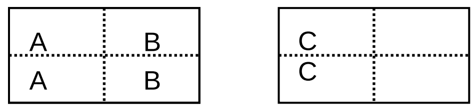


se quedan pensativos.

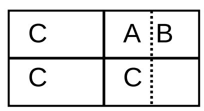
Una niña dice: *“Lo voy a hacer en dibujo*”, dibuja 2 hojas partidas en 4:



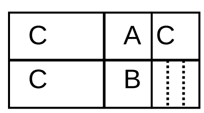
“Dos para cada quien y sobran 1” (sobró un par)



Agrega: *“Ése lo partimos en 2”*



“Y otra vez uno para cada uno y queda 1, ése lo partimos en 3”

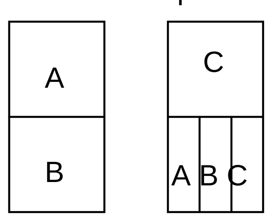


No saben cómo partir ese último pedacito en 3. Intentan con la regla, midiendo, la abandonan y trazan las tres rayitas calculando a simple vista.

Obtienen un reparto del tipo: 2/4 + 1/8 + 1/24. Esto mismo sucedió en 3 equipos más: dividen sistemáticamente en medios. Sólo al llegar a la tercera división deciden dividir el pedacito restante en 3.

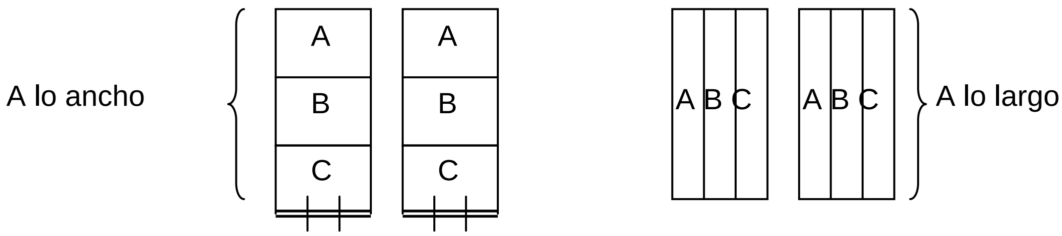
Tal vez piensan que dividiendo varias veces en medio podían llegar a repartir entre 3 y no es sino hasta la tercera división que dudan de su procedimiento (observan que siempre les sobra un pedacito) y deciden dividirlo entre 3.

Otra forma de reparto que apareció en 3 equipos, consistió en dividir ambas hojas en mitades y dividir la cuarta mitad en tres partes.



Aquí se observa otra tendencia que nos parece característica: dividir cada hoja en el menor número de partes posible (*economizar divisiones*).

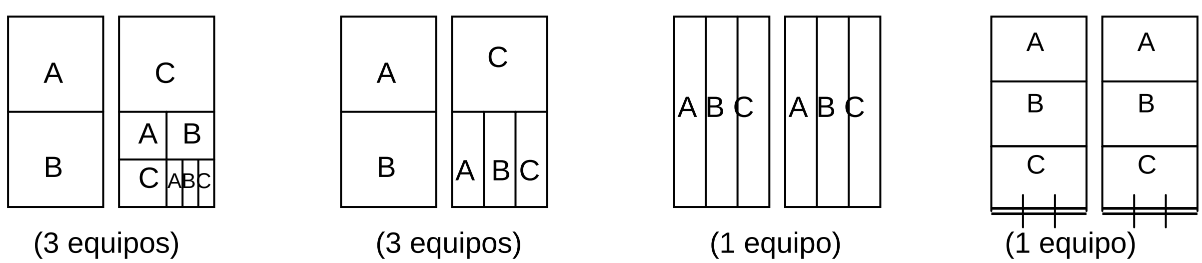
Finalmente, sólo 2 equipos dividieron cada hoja en 3 partes, uno de ellos a lo ancho y el otro a lo largo:



Para partir en 3 los pasteles a lo ancho, miden el largo de la hoja (34 cm) y dividen esto entre 3: obtienen 11 cm. Recortan y les sobra una tirita de 1 cm. Deciden repartirla entre 3. Nosotros pensábamos que doblaría la hoja en 3 para obtener las 3 partes. Más adelante confirmamos esta notoria preferencia por medir con regla en lugar de doblar. Notemos, sin embargo, que no es fácil doblar una hoja en 3 partes iguales y es casi imposible hacerlo con toda exactitud.

Los que dividieron a lo largo, también midieron con regla y dividieron entre 3, (los niños se las arreglan para hacer sus divisiones: buscan el factor que por 3 da 33 o utilizan su tabla).

En resumen, aparecieron las siguientes formas de partir:



La confrontación de resultados (¿les tocó lo mismo?, ¿no sobró pastel?) fue difícil: el grupo estaba muy inquieto. Las comprobaciones de los alumnos resultaron largas sobre todo por lo impráctico de acomodar y pegar sus pedacitos en el pizarrón (los pedacitos se perdían o se revolvían con otros). Sólo se logró que el grupo pudiera observar que se dieron formas muy distintas de repartir los 3 pasteles. Las condiciones de un buen reparto quedaron implícitas.

En 4º grado

Una vez más, y contrariamente a lo que pensábamos, esta actividad resultó muy motivante para los alumnos de 4º grado. La división en tercios presenta las mismas dificultades que en tercero.

Reproducimos aquí algunas de las discusiones entre los niños, registradas durante la 1ª fase (repartir los pasteles) y que expresan bastante claramente los diversos problemas que enfrentaron.

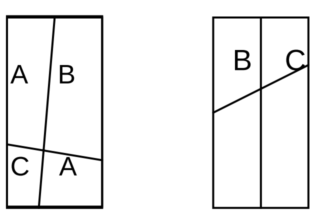
- Problemas para dividir un número entre 3, que culminan con la opción de otra forma de repartir: mitades.

  En el equipo 1, empiezan por medir el largo de la hoja: 34 cm, luego hacen la división:

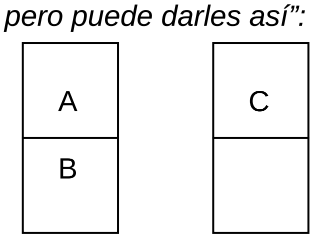
$$\begin{array}{r} \underline{11} \\ 3/\ 34 \\ 04 \\ 1 \end{array}$$

y van marcando sobre la hoja cada 11 cm. Les sobra 1 cm.

Observador: "Pero ¿no importa que sobre ese cachito?"
Al 1: "Sí, y además sobra una hoja, ésta que es el otro pastel"
Al 2: "Ah, entonces tocaría de a 11 cm y medio ¿no?"
Al 1: (No haciendo caso de la observación de Al 2) "Sí, pero de todos modos sobra una hoja"
Al 3: "A ver..." (escribe 11 x 3 = 33, se queda pensativo)
Al 1: "Yo tengo otra idea" (dobla en mitades las 2 hojas y luego dice que en cuartos. Traza divisiones que arrojan unos 'cuartos' bastante desiguales):



Al 1: Agrega: "Ah, no, no se puede, porque te sobrarían dos pedazos y no los pueden repartir a 3 niños"
Al 3: "Ah, pero puede darles así":

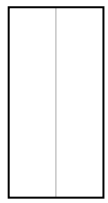


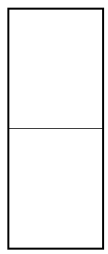
y luego, el que te sobra lo partes en 3 y ya.

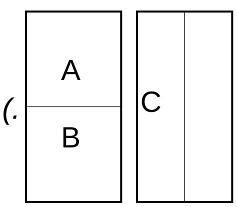
Finalmente optan por este procedimiento. No supimos cómo hicieron la división entre 3. Ellos dijeron que "con la regla".

- Nuevamente parece haber algunas dudas acerca de la igualdad de área de dos mitades de diferente forma:

Al 1: "Primero hay que partir a la mitad (él se queda con una hoja y la otra la toma Al 2)"
Al 2: Ya la partí a la mitad



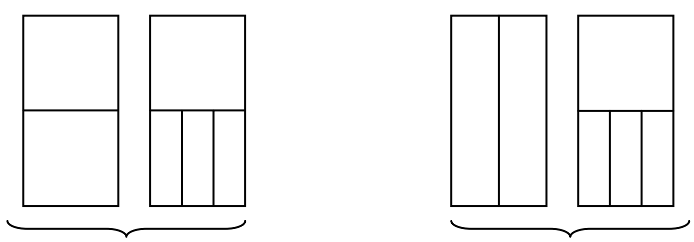
Al 1: (Partió la suya así  *) ¡Ay! No, ya lo hiciste mal, no lo hiciste como yo"*

Al 2: "Pero da lo mismo. Les damos así ..(. 

)

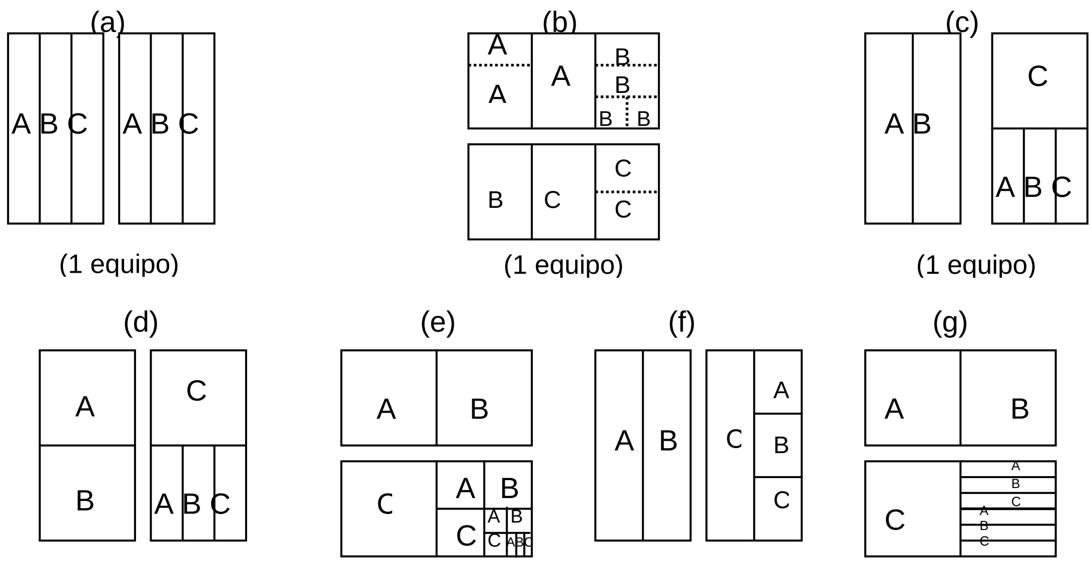
y lo que queda lo partimos en tres, son mitades de todos modos"
Al 1: "No, mejor tomamos otro hoja y hacemos todas las mitades iguales" (trae la hoja).
Al 2: "Te digo que da lo mismo, pero bueno ..."

Finalmente reparten de 2 maneras:



(no se registró cómo hicieron la división en tercios)

En resumen, éstas fueron las diferentes formas de repartir que aparecieron en 4º grado:



(a) (1 equipo) (b) (1 equipo) (c) (1 equipo)

(d) (2 equipos) (e) (1 equipo) (f) (1 equipo) (g) (1 equipo)

Como podemos ver, relativamente pocos recurren a la forma clásica de repartir: dividir entre 3 cada hoja (*a* y *b*), a pesar de que estos alumnos han recibido clases sobre fracciones desde hace un año (fracciones como designación de las partes de un entero dividido en partes iguales).

Como en 3º, vemos aquí aparecer tanto la tendencia a dividir sistemáticamente en mitades (*e* y *g*) como a *economizar divisiones* (*c, d, f*).

En general, todos los equipos tuvieron dificultad para dividir entre 3. Los recursos que se registraron fueron: medir con la regla e intentar dividir esa medida entre 3, encontrándose con problemas como no saber qué hacer con el residuo:

$$\begin{array}{r} \underline{11} \\ 3/34 \\ 04 \\ 1 \end{array}$$

y trazar las divisiones a simple vista.

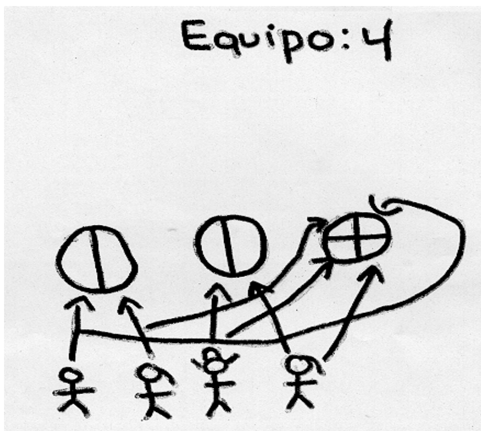
La diversidad de formas de repartir y lo complicado de algunos repartos sí propiciaron en este grupo la necesidad de comprobar, durante la confrontación, la exactitud del reparto. Varios alumnos tuvieron que reconstruir los pasteles y superponer sobre ellos hojas enteras para probar a los demás que efectivamente no habían utilizado ni más, ni menos de 2 hojas.

Representación de gráficas de los repartos

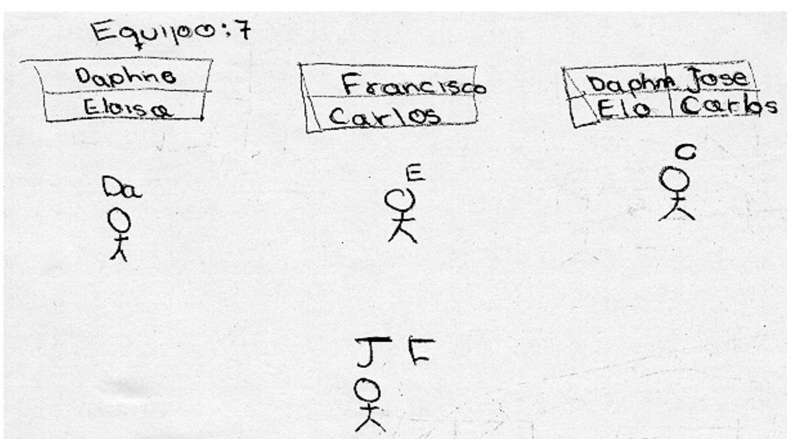
Al término de esta sesión con 4º grado, quedaban aún 15 minutos de clase. El maestro decidió aprovecharlos e improvisó una actividad más de reparto: 3 pasteles entre 4 niños, pero dijo a los niños que ya no teníamos más pasteles y agrego: “Entonces, a ver cómo le hacen”.

Al principio, algunos niños se agenciaron pedazos de papel y construyeron sus 3 pasteles para repartir, pero, finalmente, todos acabaron representando gráficamente el reparto, con dibujos o por escrito. Veamos algunos ejemplos:

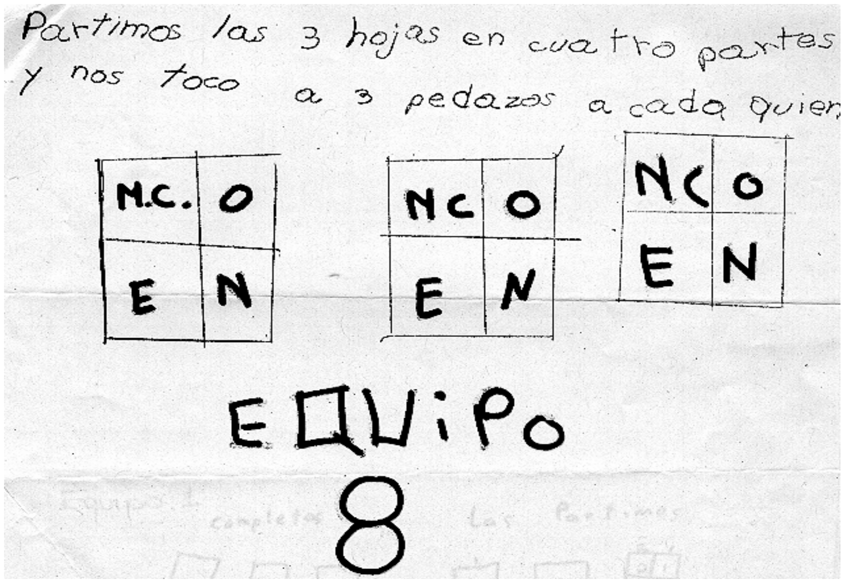
a)



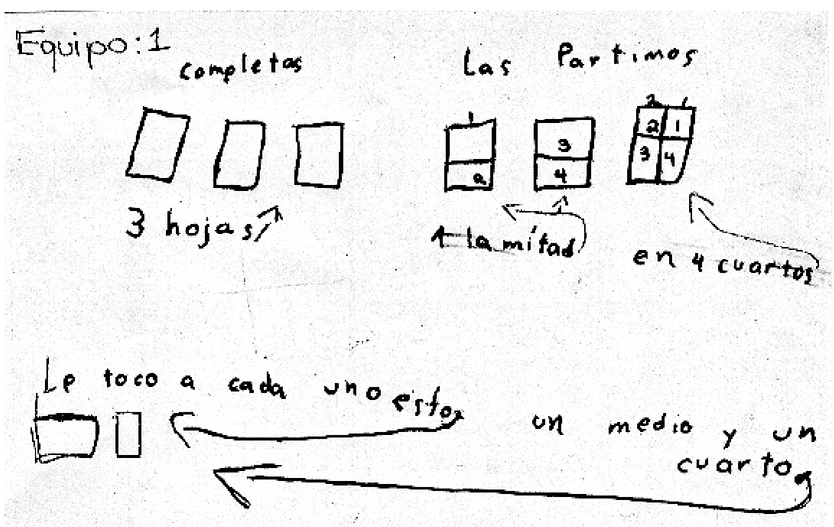
b)



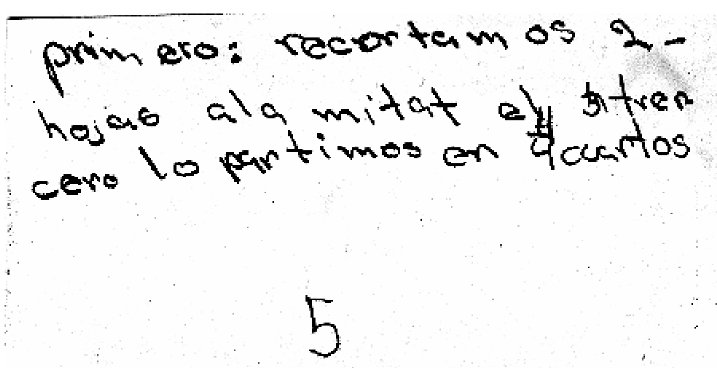
c)


Partimos las 3 hojas en cuatro partes
y nos toco a 3 pedazos a cada quien
N.C. O
E N
NC O
E N
NC O
E N
EQUIPO
8

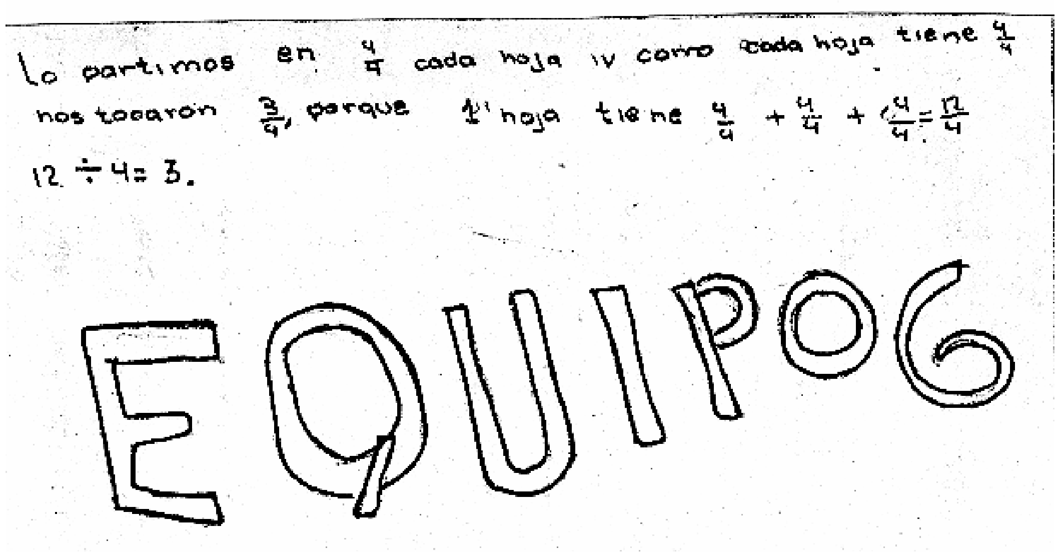
d)


Equipo: 1
completas
Las Partimos
3 hojas
1 la mitad
en 4 cuartos
Le toco a cada uno esto
un medio y un cuarto

e)


primero: recortamos 2
hojas ala mitat el tercero lo partimos en 4cartos
5

f)

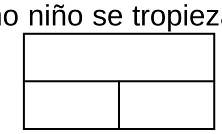

Lo partimos en $\frac{4}{4}$ cada hoja y como cada hoja tiene $\frac{4}{4}$ nos tocaron $\frac{3}{4}$, porque 1 hoja tiene $\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ $12 \div 4 = 3$.

EQUIPO 6

Vemos aparecer las mismas formas de repartir registradas anteriormente. Los recursos para representar los repartos son variados. Algunos describen el proceso de reparto (*d*, *e*, *f*), otros sólo describen el estado final (*a, b, c*).

Algunos expresan, sin dibujar y usando fracciones lo que toca a cada uno (*e* y *f*), otros lo expresan dibujando o dibujando y escribiendo.

La mayoría de los niños que escriben fracciones, utilizan formas aditivas (1/2 + 1/4) correspondientes a la forma en que repartieron. Únicamente un niño (f) escribe 3/4. Notemos que **no** desprende este resultado directamente del hecho de ser 3 pasteles entre 4, sino de dividir 12 cuartos entre 4[34]. Este niño, desde la primera sesión, ha mostrado habilidad en el manejo de los hombres de las fracciones para designar las partes iguales en que se divide un entero, y es tal su gusto por hacerlo cada vez que puede, que se ha ganado entre sus compañeros el seudónimo de “el matemático”.

Sin embargo, este mismo niño se tropieza en lugares inesperados; como preguntarse si cada parte de este entero:  se llama tercio o cuarto.

Conclusiones

- Se omitieron dos fases: la verificación de los repartos y la comparación de los diversos pedazos obtenidos en cada tipo de reparto. La primera omisión se debió a

[34] Éste es un posible camino para pasar de la interpretación del racional como fracción de unidad a la interpretación como cociente

un olvido del observador y del maestro. La verificación no se realizó entonces como estaba prevista, sino en la fase de confrontación colectiva. La segunda omisión se debió -explica el maestro- a la poca claridad en el análisis previo de lo que se pretendía con esta fase y a la ausencia de previsiones acerca de lo que podrían hacer los niños y lo que debíamos hacer nosotros en consecuencia. Acordamos volver sobre este punto en la segunda etapa de la secuencia, cuando se trate de un trabajo de fracciones específicamente en el contexto de áreas.

- Los procedimientos implementados en 3º y en 4º; corresponden en general a lo previsto. No obstante, no tuvimos en cuenta dos elementos importantes: 1) la dificultad técnica para dividir una hoja o una parte de hoja entre 3. El doblado en 3 (como carta) no es fácil de concebir y no permite una división precisa. El uso de la regla graduada trae consigo el problema del residuo. Se vio la posibilidad de en adelante, proporcionar a los niños un instrumento como el de la *hoja rayada*[35] para que efectúen sus divisiones. Sin embargo, en este momento no tuvimos claro si las dificultades que subyacen a este problema eran exclusivamente de orden técnico (no parece serlo, por ejemplo, el hecho de doblar una hoja varias veces en dos, esperando que se obtenga una división en tres). Decidimos por ahora no proponer ningún recurso. 2) En cuarto grado fue evidente que la dificultad de dividir entre 3 fue la que propició en algunos casos que los niños empezaran a dividir en mitades.
- En tercer grado la fase colectiva fracasó. El grupo demostró motivación y entrega en la fase de reparto (acción). Al llegar a la confrontación estaban ya muy inquietos y no se interesaron. Esto se agravó por la dificultad de mostrar al grupo los productos de cada reparto (muchos pedazos que había que pegar en el pizarrón). Sin embargo, en cuarto grado, la confrontación funcionó bien. Se exigió a cada reparto que cumpliese las condiciones -ya explicitadas- de un reparto correcto. Una vez más, la gran diversidad de formas de repartir contribuyó a dar sentido a esta verificación.

  Posiblemente la verificación tendría más sentido si se entregan a los equipos más de 2 *pasteles*. Así será necesario verificar que la unión de los pedazos da exactamente 2 pasteles.

[35] Hoja con rayas paralelas, equidistantes entre sí. Permite dividir un segmento en cualquier número de partes iguales.

Situación didáctica 1.4: Repartir "X" pasteles entre "Y" niños

Desarrollo

Escribir los datos del siguiente cuadro en el pizarrón

Equipos	No. Pasteles	No. Niños	A c/u le toca
Equipo 1	2	3	
Equipo 2	2	4	
Equipo 3	1	3	
Equipo 4	3	2	
Equipo 5	1	5	
Equipo 6	3	6	
Equipo 7	2	6	
Equipo 8	6	4	

1. *Consigna:* "En la actividad de hoy se trata de que cada equipo haga un reparto diferente. El reparto que hará cada equipo es el siguiente: (se muestra el cuadro). Sólo que antes de hacer los repartos haremos algunas apuestas. (Se lee la primera apuesta para explicar en qué consiste y se entrega la hojita donde vienen anotadas 4 apuestas).". (5 min.)
2. *Trabajo en equipos:* En cada equipo discuten para ponerse de acuerdo sobre lo que van a contestar. (20 min.)
3. *Realización de los repartos:* A cada equipo se entregan las hojas necesarias para que hagan el reparto que les corresponde, mismo que está escrito en el pizarrón. (15 min.)
4. *Confrontación:* Conforme los equipos van terminando de hacer el reparto, se va pegando en el pizarrón la parte que le tocó al niño. Cuando todos han terminado pasa un niño de cada equipo a verificar el reparto que hicieron. Finalmente, se van leyendo las apuestas de una en una para ver qué equipos acertaron. Se propicia la explicitación de los razonamientos seguidos. (30 min)

Organización:

Equipos de 3 ó 4 niños.

Material:

A cada equipo:

- Hoja tamaño oficio (± 33 cm x 21 cm), según número de pasteles que repartirá.
- Tijeras.
- Una hoja para escribir las apuestas.
- Hoja con las siguientes preguntas:

APUESTA 1. ¿A los niños de qué equipos les tocará, a cada uno, más de un pastel?

APUESTA 2. ¿A los niños de qué equipos les tocará, la misma cantidad de pastel?

APUESTA 3. ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1?

APUESTA 4. Di por lo menos un equipo del que estés seguro que les toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5.

Análisis previo de la S. D. 1.4: Repartir "X" pasteles entre "Y" niños

En esta situación se pretende dar condiciones para que los niños reflexionen acerca de la relación que existe entre el par *número de pasteles (n) – número de niños (m)* y el tamaño del pedazo que toca a cada niño. Si el *pastel* entero es el mismo en todos los casos entonces ocurre que:

- Si hay más pasteles que niños, el pedazo que toca a cada uno es mayor que el entero.
- Si hay igual número de niños (en dos repartos), entre más pasteles, más toca a cada uno.
- Si hay igual número de pasteles, entre más niños, menos toca a cada uno.
- Si el número de niños y el número de pasteles aumentan en la misma proporción, sigue tocando lo mismo a cada niño.

Debe quedar claro que no interesa por ahora que lleguen a establecer explícitamente esas implicaciones. Simplemente esperamos que las utilicen en casos particulares con el objeto de **iniciar** una reflexión acerca de la relación entre el par (*n*, *m*) y el tamaño del pedazo. En situaciones subsecuentes se volverá sobre este punto.

Una dificultad presente en todas las anticipaciones que se piden es la necesidad de coordinar **dos** variables (n° de pasteles y n° de niños) para finalmente pensar en lo que toca **a cada niño**, independientemente de la cantidad total de pasteles. Nos encontramos aquí -inevitablemente- con la noción de proporcionalidad (constancia de la razón de dos magnitudes). Suponemos que el contexto de reparto la posibilitará.

No obstante, la tarea no sólo consiste en encontrar estas equivalencias sino en desechar las que no lo son, y esto no es nada fácil. Para ello, teóricamente podrán realizar alguno de los razonamientos indicados en la apuesta 2. Debe esperarse que aparezcan casos en los que:

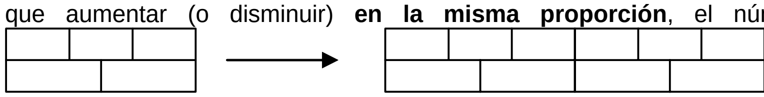
- Seleccionen pares en los que aumentan o disminuyen ambos datos sin que guarden la proporcionalidad, por ejemplo: (1 pastel, 3 niños) y (2 pasteles, 4 niños). Este caso tal vez indicaría que ya se consideran las dos variables.
- Sólo consideren una sola de las variables, por ejemplo, aquéllas en las que el número total de pasteles es el mismo.
- No aborden el problema.

APUESTA 3: ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1?

- equipo 1: 2 pasteles, 3 niños:	(menos de un pastel a cada uno)
- equipo 2: 2 pasteles, 4 niños:	igual n° de pasteles, más niños $\Rightarrow$ reciben menos
- equipo 3: 1 pastel, 3 niños:	igual n° de niños, menos pasteles $\Rightarrow$ reciben menos
- equipo 4: 3 pasteles, 2 niños:	más n° de pasteles, menos niños $\Rightarrow$ reciben más
- equipo 5: 1 pastel, 2 niños:	no se puede saber (excepto si se ve la equivalencia con equipo 2 ó se hace representación gráfica precisa)
- equipo 6: 3 pasteles, 6 niños:	mismo caso que equipo 5
- equipo 7: 2 pasteles, 6 niños:	mismo caso que equipo 2
- equipo 8: 6 pasteles, 4 niños:	mismo caso que equipo 4

Estas reflexiones se realizarán progresivamente[36]

[36] ¿Constituye esta reflexión una parte intrínseca de la noción de equivalencia de números racionales en esta interpretación? Pensamos que sí: para generar una fracción (n_2, m_2) **equivalente** a otra dada (n_1, m_1), habrá que aumentar (o disminuir) **en la misma proporción**, el número de enteros y de pedazos:



$\frac{3}{2}$ $\frac{6}{4}$

APUESTA 1: ¿A los niños de qué equipos les tocará, a cada uno, más de un pastel?

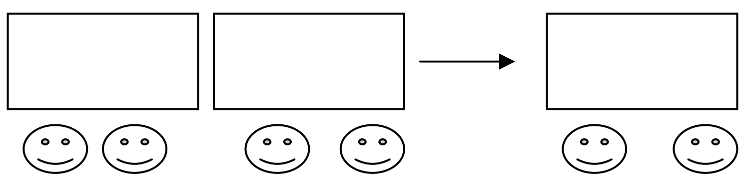
Esta anticipación exige sólo que se tenga en cuenta que, en un reparto, si hay más pasteles que niños, a cada uno le toca más de un pastel, y a la inversa.

APUESTA 2: ¿A los niños de qué equipos les tocaría la misma cantidad de pastel?

Las respuestas correctas posibles son:

- equipo 2 (2 pasteles-4 niños); equipo 5 (1 pastel-2 niños) y equipo 6 (3 pasteles-6 niños)
- equipo 3 (1 pastel-3 niños) y equipo 7 (2 pasteles-6 niños)
- equipo 4 (3 pasteles-2 niños) y equipo 8 (6 pasteles-4 niños)

Un recurso posible para buscar estas equivalencias consiste en reducir (*kn, km*) a (*n*, *m*), al representarse la realización del reparto (*kn, km*). Por ejemplo: si hay dos pasteles para cuatro niños habría que dar 1 pastel para 2 niños ... lo mismo les toca que si sólo hubiera un pastel para dos niños.



En todos los casos, excepto uno, los datos de un reparto son el doble (o la mitad) de los datos del reparto equivalente.

Para identificar equipos en los que cada uno recibe más pastel que el equipo 1, bastará en este caso con localizar aquéllos en los que cada uno recibe más de un pastel. Para desechar a los que reciben menos pastel, será necesario hacer comparaciones manteniendo constante una de las variables. Restan aún dos casos (equipo 5 y 6) en los que no tienen recursos seguros para poder anticipar.

Nuevamente, es posible que sólo tengan en cuenta la cantidad total de pastel, independientemente del número de niños ó bien, que no puedan abordar el problema (y den respuestas, por ejemplo, basadas en la magnitud de los números considerados aisladamente).

APUESTA 4: Di por lo menos un equipo del que estés seguro que les toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5 (1 pastel, 2 niños).

Esta pregunta es y una reducción de la 2. Se da de entrada un caso, el más fácil de visualizar; se debe estimar cuál de los otros es equivalente.

La confrontación

Puede haber dificultades para verificar las apuestas en el caso de que algunos repartos *equivalentes* arrojen pedazos de distinta forma. En este caso, si la equivalencia no fue anticipada, el cotejo con material no ayudará a ver que hay equivalencia. Si ésta sí fue anticipada, será interesante ver si intentan probar que los pedazos de distinta forma en cuestión tienen la misma área. Interesa que se difundan las estrategias empleadas por los niños.

Análisis de la experimentación de la S. D. 1.4: Repartir “X” pasteles entre “Y” niños

Fecha: 27-05-85
Duración: 3er grado: 1 h 15’
4^{o} grado: 1 h

En 3er grado.

Esta actividad resultó difícil de llevar a cabo en 3er grado y los resultados fueron poco satisfactorios. Esto se debió muy probablemente al hecho de que, a los problemas propios de este grupo, se sumó una organización deficiente de la actividad: se dejó a los niños resolver las cuatro apuestas, en vez de irlas resolviendo una por una. Esto dio un tiempo excesivo para este grupo con un trabajo no ligado directamente a la acción. Al poco rato había ya mucho desorden en clase. Además, como veremos enseguida, las *apuestas* no estaban redactadas con suficiente claridad. Tuvimos que irlas re-explicando de equipo en equipo.

Durante la confrontación colectiva no hubo tiempo ni condiciones para que los niños dieran a conocer los razonamientos que les permitieron realizar sus anticipaciones. Deduciremos algunos de estos razonamientos de algunos diálogos y procedimientos que pudimos observar.

Éstas fueron las respuestas proporcionadas por los niños a las 4 apuestas, al inicio de la confrontación colectiva:

Equipos de trabajo / Apuestas	Equipo **1**	Equipo **2**	Equipo **3**	Equipo **4**	Equipo **5**	Equipo **6**	Equipo **7**	Equipo **8**	Total[37]
1. ¿A los niños de qué equipos les tocará más de un pastel?	Sí	(6,4) x	(6, 4) (3,2)	(3, 2)	(3,2) (6,4)	(6,4)	(3,2) (6,4)	(3,2) (6,4)	7/8
2. ¿A los niños de qué equipos les tocará la misma cantidad de pastel	No x	(6,4) (3,2)	(6,4) (3,2)	(2,4)	(2,4) (1,2)	(2,3) (3,2)	Todos	(3,2) (6,4) (2,4) (1,2) (3,6)	4/8
3. ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1 (2,3)?	(3,2)	(6,4) (3,2)	(3,6)	(6,4)	(3,2)	(6,4)	(3,2) (6,4)	(3,2) (6,4)	7/8
4. Di por lo menos un equipo del que estés seguro que les toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5 (1, 2)	(3,6)	(3,6) (2,4)	(3,6)	(2,4)	(1,3)	(3,6)	(2,4) (3,6)	(3,6) (2,4)	7/8
TOTALES	2/4	4/4	3/4	3/4	3/4	3/4	¾	3/4	3/4

Estos datos no corresponden estrictamente a lo que encontraron los niños. En un equipo (7) pudimos observar que cambiaban su respuesta por alguna de las que ya habían sido anotadas en el pizarrón.

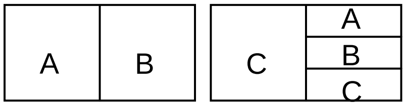
En general, prácticamente todos los equipos, recurrieron a representaciones gráficas para realizar una u otra de las anticipaciones pedidas. Esto dio lugar a que en ciertos casos consideraran del mismo tamaño a ½ y 1/3 de unidad ó ½ y 2/3. Al realizar las representaciones, era notoria la necesidad de nombrar los pedazos obtenidos en cada reparto. Así, ocurrió que llamaran “un medio” a un tercio o “un pedacito” a un sexto. Esta dificultad para nombrar con precisión la fracción de unidad contribuyó a que no pudieran identificar equivalencias.

APUESTA 1: ¿A los niños de qué equipos les tocará, a cada uno, más de un pastel?

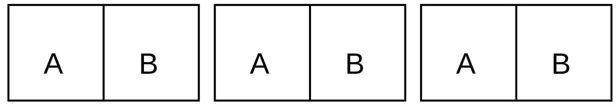
En dos equipos (1 y 7) esta pregunta se interpretó como: ¿en qué equipos se reparte más de un pastel? Obviamente les pareció muy fácil: en el equipo 1 (2 pasteles), en el equipo 2 (2 pasteles), etc.

[37] - Para obtener los totales se consideró correcta una respuesta cuando incluye por lo menos **un** caso con las condiciones que se piden y si no incluye ningún incorrecto.
- Los niños **no** utilizan la notación (n,m) que empleamos aquí.

Cuatro equipos dibujan el reparto correspondiente a cada caso y estiman cuándo toca a cada uno más de un pastel. Uno de ellos, divide sistemáticamente los pasteles en mitades:



(2 pasteles, 3 niños)



(3 pasteles, 2 niños)

De esta manera les cuesta más trabajo identificar los casos en que a cada uno toca más de un pastel. No obstante, en los cuatro equipos encontraron por lo menos un caso (y a veces no encontraron más, simplemente porque se contentaron con uno).

APUESTA 2: ¿A los niños de qué equipos les tocará la misma cantidad de pastel?

Esta pregunta resultó ser la más difícil para los niños (ver análisis previo). La redacción confusa llevó a algunos a contestar: “a todos” (a todos los niños de cada equipo les toca lo mismo). En algunos equipos re-explicamos la pregunta y, en los que pudimos observar, recurrieron a los dibujos. Sin embargo éstos eran imprecisos, difícilmente podían encontrar en ellos las equivalencias. En el caso del equipo 5, al representar el reparto 2 pasteles, 4 niños, uno de ellos dijo: “Aquí es una mitad para cada quien”. A partir de esto, se dedicaron a buscar otro caso en el que también tocara una mitad.

Esperábamos que la familiaridad con la mitad y la posibilidad de visualizar el tamaño del pedazo les haría encontrar las equivalencia $(2, 4) \cong (1,2) \cong (3, 6)$. Sin embargo, como puede verse en el cuadro, éstas sólo fueron identificadas por 2 equipos. La otra, aparentemente más compleja: $(6, 4) \cong (3, 2)$ fue identificada por lo menos por 2 equipo también. Notemos finalmente que sólo un equipo responde buscando números iguales. $(2, 3) \cong (3, 2)$.

APUESTA 4: Di por lo menos un equipo del que estés seguro que les toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5 (1, 2).

Vemos que en este caso, prácticamente todos, encontraron por lo menos una equivalencia, lo que se explica por un lado, por la mayor facilidad de visualizar este pedazo y por el hecho de que ahora sólo deben buscar aquellos repartos que arrojan un pedazo equivalente a otro ya dado.

Extrañamente el equipo 5 que encontró la equivalencia (2, 4) $\cong$ (1, 2) en la pregunta 2, escribe para esta pregunta (1, 3). Esto puede deberse a la imprecisión de sus representaciones gráficas:

(1, 2)   (1, 3)

APUESTA 3: ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1 (2, 3)?

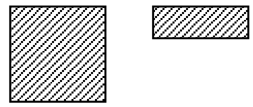
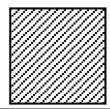
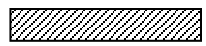
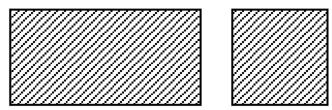
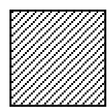
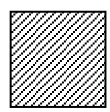
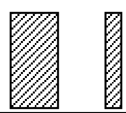
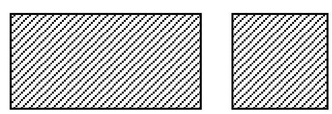
Efectivamente la mayoría de los equipos selecciona los repartos en los que a cada niño toca más de un pastel. No pudimos conocer los procedimientos que emplearon, pero es muy probable -por lo que observamos en las otras preguntas- que se hayan dedicado a discriminar, a partir de sus representaciones, los casos donde tocaba más de un pastel por niño, sin analizar lo que sucedía con los otros casos.

Realización de los repartos

No hubo problemas en esta tarea. Todos hicieron su reparto con bastante precisión aun en los casos difíciles de tercios y sextos. Fue éste el momento en que el grupo se concentró mejor en su trabajo.

Confrontación colectiva

Se pegó en el cuadro del pizarrón el pedazo correspondiente a cada reparto (ver página siguiente). Se pudieron verificar rápidamente las apuestas 1, 3 y 4. A simple vista pudieron constatar las relaciones en cuestión. El maestro hizo algunos intentos para que los niños explicaran cómo habían logrado anticipar. Como los pedazos ya estaban a la vista, los niños no entendían qué pretendía el maestro. Uno dijo enfáticamente: “Pero, ahí está, ahí se ve”. No se pudo ir más lejos.

Equipo	No. de pastel No. de niños	A cada uno toca:
1	2 - 3	 **(½ + 1/6)**
2	2 - 4	 **(½)**
3	1 - 3	 **(1/3)**
4	3 - 2	 **(1 ½)**
5	1 - 2	 **(½)**
6	3 - 6	 **(½)**
7	2 - 6	 **(¼ + 1/12)**
8	6 - 4	 **(1 ½)**

Hubo un solo caso interesante, para la pregunta 2: los pedazos correspondientes a (1 pastel - 3 niños) y a (2 pasteles - 6 niños) no tenían la misma forma y, por lo tanto, no era evidente que fueran del mismo tamaño. Un alumno que había previsto esta equivalencia (ésta no fue anotada en hoja de *apuestas*) se levanta y dice, refiriéndose al reparto (2, 6): "Pero, se hubiera podido repartir así, un pastel para tres niños y un pastel para tres niños, les toca lo mismo". Es claro que hizo una anticipación correcta. Al no funcionar la prueba empírica, se vuelve necesario explicitar el razonamiento seguido.

En 4º grado

En este grado la actividad se desarrolló más ordenadamente. Esto nos permitió registrar mejor los procedimientos de resolución así como algunos argumentos emitidos en la confrontación colectiva.

Se observó una tendencia significativamente mayor que en 3º a realizar las anticipaciones sin acudir a la representación gráfica. Así mismo, los razonamientos seguidos para anticipar fueron casi siempre explicitados.

Éstas son las respuestas proporcionadas por los niños al inicio de la confrontación:

Equipos de trabajo / Apuestas	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4	Equipo 5	Equipo 6	Equipo 7	Equipo 8	Total
1. ¿A los niños de qué equipos les tocará, a cada uno, más de un pastel?	(6, 4)	(6, 4) (3, 2)	(6, 4)	(6, 4) (3, 2)	(3, 2) (6, 4)	(3, 2) (6, 4)	(3, 2)	(6, 4) (3, 2)	8/8
2. ¿A los niños de qué equipos les tocará la misma cantidad de pastel?	(2, 3)	(2 ,4) (1, 2) (3, 6)	(2, 3) (2, 4)	(3, 2) y (2, 4) (3, 2) y (2, 3)	(1, 2) (3, 6) (2, 4)	(3, 2) (2, 3)	(1, 2) (3, 6)	(2, 4) y (1, 2) (6, 4) y (3, 2)	4/8
3. ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1?	(6, 4)	(6, 4)	(6,4)	(6, 4)	(6, 4) (3, 6)	(3, 2) (6,4)	(3, 2)	(6, 4) (3, 2)	8/8
4. Di por lo menos un equipo del que estés seguro que les toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5.	(3, 6)	(2, 4)	(3, 6)	(2, 4) (1, 2)	(1, 2) (2, 4) (6, 8)	(3, 6)	(3, 6)	(2, 4)	7/8
TOTAL	3/4	4/4	3/4	3/4	3/4	3/4	4/4	4/4	

Como en 3º, la apuesta 2 resultó ser la más difícil para los niños.

APUESTA 1: ¿A los niños de qué equipos les tocará, a cada uno, más de un pastel?

Casi todos los equipos encuentran por lo menos un caso. Tres equipos dibujaron el reparto y los otros no. En la confrontación (con los pedazos ya puestos en el pizarrón) un equipo justificará así su respuesta: “Porque son más pasteles que niños”

APUESTA 2: ¿A los niños de qué equipos les tocará la misma cantidad de pastel?

Curiosamente en este grupo sólo un equipo encontró la equivalencia entre (6, 4) y (3, 2) y ninguno encontró la equivalencia entre (1, 3) y (2, 6). La tendencia a identificar sólo los casos que arrojan un medio es más marcada que en 3er grado. Esto puede deberse a que en 3º recurrieron más a la representación gráfica. De los 4 equipos que encontraron equivalencia, dos de ellos no acudieron a la representación gráfica. En la confrontación colectiva, un niño de uno de estos equipos, al ser interrogado por el maestro acerca de cómo encontró las equivalencias (1, 2) $\cong$ (2, 4) $\cong$ (3, 6) dice:

Al: "Por lógica, pensando"
M: "¿Pero cómo es eso, cómo lo supieron?"
Al: "Lo dividimos, al equipo 5[1, 2] le toca un medio y a nosotros [3, 6] un medio y a los del equipo 2 [2, 4] un medio y entonces por lógica nos toca lo mismo.

Nuevamente, parece que la representación mental de la división es factible sólo para el caso de **un medio**. Es claro también que aún no manejan la relación (n, m) = (kn, km). Aparecen también en este grupo ciertos errores característicos: pensar sólo en el total de pasteles, como (2, 3) y (2, 4), o seleccionar pares que contienen números iguales como (3, 2) y (2, 3). Algunos de estos errores pudieron deberse también a estimaciones basadas en representaciones gráficas poco precisas.

APUESTA 3: ¿A los niños de qué equipos les tocará más pastel que a los del equipo 1?

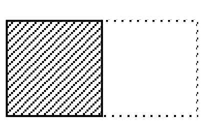
No sabemos cuántos equipos acudieron a la representación gráfica, pero en la confrontación colectiva, una alumna justificó diciendo: "Ahí (2, 3) les toca menos de un pastel y a éstos (3, 2) y (6, 4) les toca más"

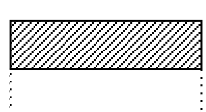
APUESTA 4: Di por lo menos un equipo del que estés seguro que le toca lo mismo de pastel que a los del equipo 5 (1, 2)

Vemos nuevamente que esta pregunta sobre equivalencias para el caso específico de ½ es mucho más accesible que la pregunta 2.

Otros problemas que surgieron en la confrontación colectiva

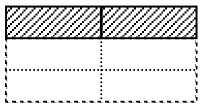
- **Pedazos de misma área pero diferente forma**. Una vez puestos los pedazos arrojados por cada reparto en el pizarrón, pudieron verificarse casi todas las *apuestas* sin problemas. En el caso de los 3 pedazos iguales a un medio del entero, dos de ellos tenían diferente forma:



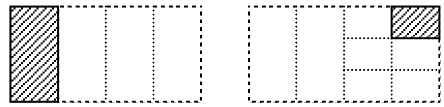


No obstante, todos los alumnos estuvieron de acuerdo en que eran del mismo tamaño, sin necesidad de verificarlo (mantienen su anticipación).

En el caso de los repartos (1, 3) y (2, 6) en los que nadie anticipó que podían ser equivalentes, los pedazos que se obtienen también son de diferente forma y por lo tanto no ven la equivalencia:



(1/6 + 1/6)



(¼ + 1/12)

El maestro insiste un poco: ¿No hay ningún pedazo del mismo tamaño que el de 2 pasteles 6 niños? En ese momento un niño despega los pedazos correspondientes al reparto (1 pastel 3 niños), los intenta sobreponer en los del reparto (2, 6), no lo logra y vuelve a su lugar. Nadie más ve la equivalencia. Este niños tal vez sospechó que podía haber equivalencia al ver la relación numérica entre (1, 3) y (2, 6).

- **Verificación de los repartos**. Varios niños se mostraron escépticos en cuanto a que los repartos estuvieran bien realizados. Pidieron que se verificaran. La verificación consistió en reconstruir los enteros a partir de los pedazos.

Conclusiones

Prácticamente todos los niños de 3º y 4º grado logran abordar el problema, en el sentido de coordinar las dos variables en juego (No. de niños - No. de pasteles) para establecer comparaciones sobre el tamaño de lo que *toca a cada uno*. En cambio, una notoria diferencia entre los niños de 3º y 4º es que por lo menos la mitad de los niños de 4º pueden representarse mentalmente el reparto y, en un caso pudieron formular un criterio general de comparación: *si hay más pasteles que niños, a cada uno toca más de un pastel*. En 3er grado en cambio acuden en general a la representación gráfica para poder anticipar. El que lo hagan es, por supuesto, un paso importante. Sus representaciones son ya un buen modelo de la situación: el tamaño y la forma de los *pasteles* no se respeta, en cambio, los pasteles son entre sí del mismo tamaño, se dividen exhaustivamente y en partes iguales, etc.

La apuesta 2 obtuvo en ambos grupos la mitad de aciertos que los demás, en particular, la mitad de ciertos que la apuesta 4, siendo que la 2 se podía contestar con lo mismo que la 4. Es muy posible que esto se deba al hecho de que en la apuesta 4 se da de entrada un reparto dado (1 pastel - 2 niños) cuyo producto, además, es fácil de visualizar. Los niños tienen que estimar cuáles de los repartos siguientes arrojan un medio. No es difícil que pronto se den cuenta que tiene que haber dos veces más niños que pasteles. En la otra apuesta, en cambio, tienen que discriminar las equivalencias sin un punto de partida: comparan el primer reparto con el segundo, ¿y luego?, el segundo con el tercero, o el primero con todos los demás, pero el primero no es fácil de visualizar (2, 3)... Añadamos a esto el hecho de que no pueden nombrar aún las fracciones que resultan de cada reparto (excepto un medio o quizás un tercio y un cuarto). De cualquier manera es claro que la posibilidad de realizar anticipaciones acerca de la equivalencia, depende en este momento de la posibilidad de representarse la fracción del entero en cuestión. La relación (n, m) = (kn, km), en este contexto, no es manejada por los niños. En situaciones posteriores, ante un problema distinto, veremos a los niños manejar con soltura esa relación.

En la verificación de las apuestas mediante su cotejo con los productos reales del reparto no sucedió siempre -como pensábamos- que la evidencia de los *hechos* (la comparación de los pedazos ya pegados en el pizarrón) fuera el criterio para validar o invalidar las respuestas. Recordemos un ejemplo: los pedazos correspondientes a los repartos (1, 3) y (2, 6) resultaron con formas muy distintas tanto en 3^o como en 4^o. Sin embargo, en 3^o, un alumno había anticipado esa equivalencia, y, no conforme con las apariencias, señala que el reparto (2, 6) podría haberse realizado de otro modo (explica cuál) de tal forma que el pedazo resultante fuera igual al pedazo del reparto (1, 3). En cambio, en 4^o donde nadie anticipó esa equivalencia, los esfuerzos del maestro para que la encontraran fueron inútiles.

Este es un ejemplo en el que la verificación empírica no es contundente, más aún, está afectada por las hipótesis previas de los niños.

Comentarios sobre el diseño de la situación:

La fase dedicada a hacer anticipaciones resultó demasiado larga para el grupo de 3^o. Por otro lado, las *apuestas* están redactadas de una manera poco precisa. La apuesta 2 requiere de un tiempo de realización mucho mayor que las otras tres. Cabe señalar que esta apuesta ya había sido suprimida antes del día en que se realizaría la experimentación de esta situación. En su lugar se proponía otra (Di por lo menos dos equipos de los que estés seguro que les toca, a cada niño, menos pastel que a los del equipo 1). Sin embargo, debido a un error, se fotocopio la hoja original.

Situación didáctica 2.1: Construir el entero

Desarrollo

1. *Consigna:* Cinco niños fueron al cine y en el intermedio decidieron comprar caramelos. El dinero que llevaba sólo les alcanzó para comprar 2 caramelos, de manera que se los repartieron en partes iguales. Sabemos que a cada niño le tocó un pedazo de este tamaño (pedazo de 4 cm). Averigüen de qué tamaño eran los caramelos que compraron los niños. (5 min.)

2. *Trabajo en equipos:* Construyen al caramelo entero; para ello se entregan a cada equipo 5 pedazos de 4 cm. (15 a 20 min.)

3. *Confrontación:* Se coloca el "caramelo" entero de cada equipo en el piso, anotando el número del equipo que lo construyó. En base a las diferencias de tamaño entre unos y otros el maestro preguntará: ¿Cómo podemos saber cuál es el correcto? En caso de que fueran todos iguales, el maestro apostará a un tamaño diferente para provocar la confrontación. (10 min.)

4. *Segunda consigna:* Esta vez 3 niños se repartieron 4 caramelos. Éste es el pedazo que tocó a cada niño (pedazo de 8 cm). Averigüen cuál era el tamaño del caramelo entero. (5 min.)

5. *Trabajo en equipos:* Se entregan a cada equipo 3 pedazos de 8 cm. (10 min.)

6. *Confrontación*: Similar a la anterior.

Organización:

- Equipos de 4 niños

Material:

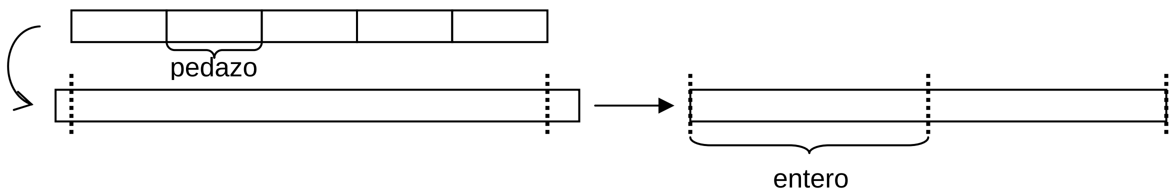
A cada equipo:

- 5 pedazos de popote de 4 cm c/u
- 3 pedazos de popote de 8 cm c/u
- Algunos popotes para recortar (± 20 cm c/u)
- Tijeras

Análisis previo de la S. D. 2.1: Construir el entero[38]

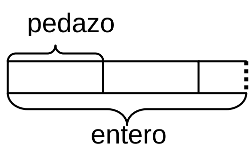
Conociendo los datos del reparto (5 niños, 2 enteros) y teniendo el pedazo que tocó a cada niño, se pueden movilizar los siguientes procedimientos para construir el entero:

1) Unir los 5 pedazos para obtener los dos enteros y después dividir entre dos:



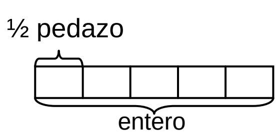
Subyace el tomar en cuenta que la unión de las partes es igual a la unión de los enteros.

2) Unir dos pedazos y medio para formar un caramelo entero:

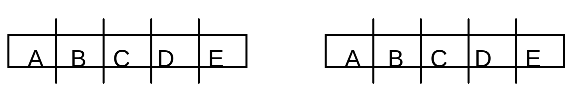


Subyacen la misma reflexión que en 1), pero se realiza mentalmente el cálculo: si los dos enteros están formados por cinco pedazos, un entero está formado por 5 ÷ 2 pedazos, es decir, por 2 ½ pedazos (puede pensarse también como si se tratara de un reparto: de estos 5 pedazos tengo que obtener 2, o repartirlos entre 2).

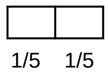
3) Cortar pedazos a la mitad y unir 5 de esas mitades:



Esto ocurrirá si se representa el reparto para saber cómo se formaron los pedazos: (el tamaño de los enteros no es real, lo que interesa es ver cómo están formados los pedazos).



[38] A partir de esta situación trabajaremos con longitudes (Ver Capítulo 3).

Una manera de repartir puede consistir en dividir cada entero entre cinco. A cada uno tocarían dos de esos quintos. Entonces, el pedazo que se les dio está formado por dos de esos quintos: 

.Para reconstruir el entero (deshaciendo el reparto) se necesita cortar en dos (volver a tener 1/5) y unir 5 veces. Este procedimiento es largo, exige tener muy claro que en el pedazo que se les entregó está contenido todo lo que tocó a un niño, pero, en cambio, no exige la reflexión de los procedimientos 1 ó 2.

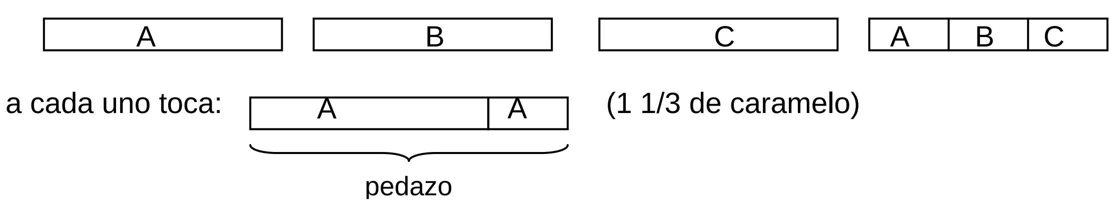
4. Aproximar al tanteo el tamaño del entero.

Si deciden verificar sus aproximaciones, tendrán que comparar sus dos enteros con los cinco pedazos (y estamos prácticamente en el caso 1), o bien, *repartir* sus dos enteros entre cinco, lo cual es demasiado largo.

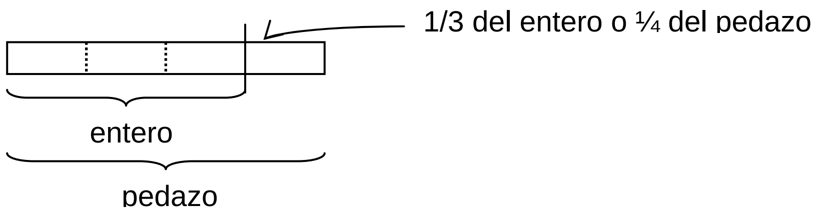
En resumen, los procedimientos que implican la movilización de la relación *n entero = m pedazos* son los más económicos. Por ello tienen mayores probabilidades de ser adoptados, si no de entrada, sí después de la confrontación de resultados. Por otro lado, para llevar a cabo la verificación (¿cómo saber cuál entero es el correcto?) la comparación de *n* enteros con *m* pedazos vuelve a ser la manera más económica, aunque no será convincente para quienes no sea claro que tal igualdad debe darse. Podría suceder que para quienes implementen la estrategia 3, la única prueba satisfactoria fuera el relato de cómo construyeron el entero.

En el segundo problema (4 caramelos, 3 niños) el pedazo que toca a cada niño es más grande que el entero y esto queda un poco *escondido* por el hecho de que les entregamos un pedazo homogéneo en vez de un entero y un pedacito (si se reparten 4 caramelos entre 3 niños, a cada uno toca un entero y un pedacito). Además es más difícil visualizar tercios que medios. No obstante, este problema puede resolverse con los mismos procedimientos que el anterior, aunque, en el caso del procedimiento 3 (a partir de una representación del reparto, averiguar cómo está formado cada pedazo) hay un peligro: al representar cómo fue el reparto (4 caramelos entre 3 niños) descubrirán que cada pedazo está formado por un caramelo entero y un tercio de caramelo:

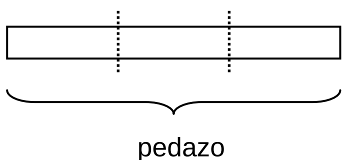
(caramelo entero)



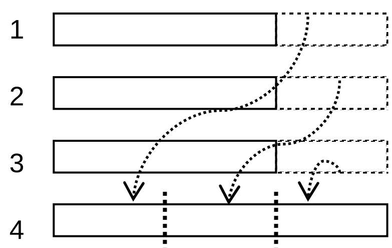
Entonces, como lo que ellos tienen es el pedazo y desean obtener el entero, querrán quitar al pedazo ese tercio que les sobra. Pero, ¿tercio de qué? del **caramelo** y no del pedazo. Ese tercio del **caramelo** es un **cuarto del pedazo**:



y esto es lo que muy posiblemente los niños no verán: Quitarán entonces un **tercio** de pedazo:



Si quitan ese tercio a sus tres pedazos para formar los cuatro enteros caerán en la cuenta de que estos enteros no les quedan del mismo tamaño:



En este caso, sólo la constatación de su error podría hacerlos reflexionar acerca del famoso tercio, o bien, cambiar de estrategia.

En este caso la estrategia 1 es la más económica.

Análisis de la experimentación de la S. D. 2.1: Construir el entero

Fecha: 29 - 05 - 85
Duración: 3^{o}: 1 h 05 min.
4^{o}: 1 h 07 min.

En 3^{er} grado:

Primera parte.

Al escuchar la consigna (5 niños, 2 caramelos) hubo desconcierto en varios alumnos. No entendían de lo que se trataba. Preguntaban que si los caramelos enteros eran los popotes largos que les dimos para recortar o que si los caramelos enteros eran los cinco pedacitos que les dimos. Re-explicamos en varios equipos la consigna, pero en algunos persistieron esas interpretaciones.

Esto no es de extrañar. La consigna original es muy larga y, sobre todo, plantea un problema bastante insólito. Finalmente, el problema se puede resolver como un simple reparto: repartir 5 entre 2, cosa que ellos saben hacer. Pero concebir ese procedimiento pasa por el hecho de poder hacer alguna representación (mental o gráfica), de la acción directa: el reparto (ésta podría consistir por lo menos en estimar el tamaño de los enteros). En la dificultad que muestran los niños para entender la consigna podemos ver que esa reflexión no es inmediata, y mientras no lo hagan, no pueden realizar ninguna acción sobre su material.

De los 8 equipos:

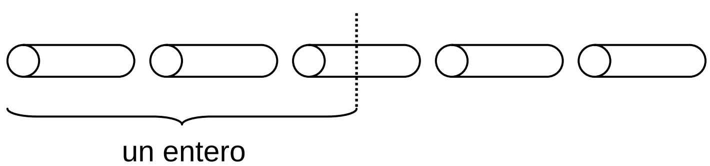
- 3 equipos lograron construir el entero correctamente.

- 1 equipo construyó un entero del tamaño e los 5 pedazos.

- 4 equipos no construyeron el entero.

En los equipos que resolvieron bien este problema, se utilizaron los siguientes procedimientos:

1) Alinean los 5 pedazos, cortan el de en medio a la mitad y forman el entero uniendo 2 pedazos y la mitad de uno:



Es claro que se parte de que los 5 caramelos forman los dos enteros (Procedimiento 2 en análisis previo). Este procedimiento fue utilizado por 2 equipos.

2) Miden la longitud de un pedazo: 4 cm. Multiplican esto por 5 (porque son 5 pedazos): 5 x 4 = 20 cm. Dividen esto entre dos: 20 ÷ 2 = 10 cm. Construyen el entero de 10 cm.

Al multiplicar por 5 obtienen la longitud de los 5 caramelos. Consideran que ésta es igual a la de los 2 enteros, por lo tanto, dividen entre dos (Procedimiento 1 en el análisis previo). Este procedimiento fue utilizado por 1 equipo.

En el equipo en el que reúnen los 5 pedacitos para formar el entero posiblemente consideran que, en efecto, la unión de todo lo que se repartió debe dar el todo que fue repartido. Lo que construyen por lo tanto es el todo. Hay entonces un paso que parecen no poder dar aún: concebir que ese *todo* está formado también por partes. En la confrontación colectiva, cuando estos niños explicaron su procedimiento, un alumno les preguntó: “¿... entonces dónde esta el otro caramelo?”. No pudieron contestar.

La confrontación colectiva. Estamos sentados haciendo rueda en el piso y cada equipo ha puesto su *caramelo*, de manera que se puedan apreciar las diferencias de tamaño entre uno y otro (esta disposición resultó impráctica: los niños de atrás no podían ver, acabaron desinteresándose). Por otro lado, sólo participaron los que habían podido construir un caramelo. Los que no lo hicieron, al menos la mayoría, tampoco se enteraron de las estrategias de sus compañeros.

Para justificar el tamaño del caramelo entero no acudieron, como pensábamos, a la comparación de cinco pedazos con dos enteros. Un alumno propone “medir cada popote con dos pedacitos y medio”. Nadie pregunta por qué ni propone otro recurso. Queda por lo tanto implícito el motivo por el cual el anterior mide dos pedacitos y medio. Posiblemente, si se les hubiera pedido que trajeran los dos enteros, se les hubiera ocurrido comparar 2 enteros con 5 pedazos.

Segunda parte. 4 caramelos, 3 niños

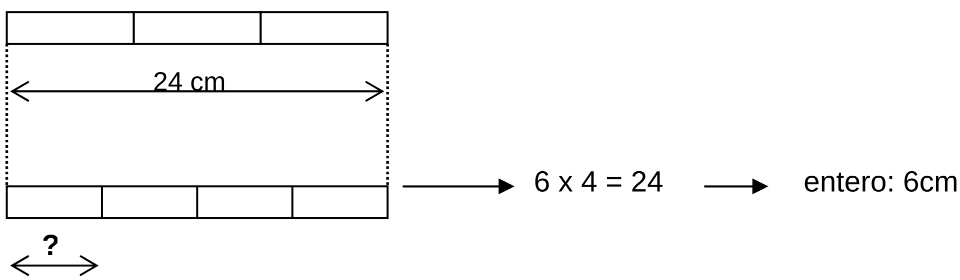
Únicamente los tres equipos que lograron construir el entero en la actividad anterior logran construirlo en ésta. Con respecto a los demás equipos:

- Construyen el entero uniendo los tres pedazos (el equipo que hizo lo mismo en el problema anterior)
- Consideran que los pedazos que les entregamos son los enteros y que por lo tanto les faltó un entero para poder repartirlos (un equipo)
- No construyen el entero (2 equipos). En uno de estos equipos, una niña parece que empezaba a comprender el problema porque dijo “¡pero los enteros no pueden ser más chicos que los pedazos!”. Debió imaginar que si de 4 enteros se sacaron 3 pedazos, las partes debían ser mayores que un entero, y eso, no lo aceptaba.
- Otra niña (pertenece a uno de los equipos que sí pudo construir el entero, aunque ella no participó) afirma: “Si fueran 5 pedazos, tocaría uno a cada uno y un pedazo”

Parece que ha logrado reducir el problema a un reparto: obtener 4 de 3, pero a ella también le *estorba* que haya menos pedazos que enteros (3 pedazos, 4 enteros). Le es más fácil pensar en un caso más común: hay más pedazos que enteros. Entonces cada entero se forma **aumentando** el tamaño del pedazo.

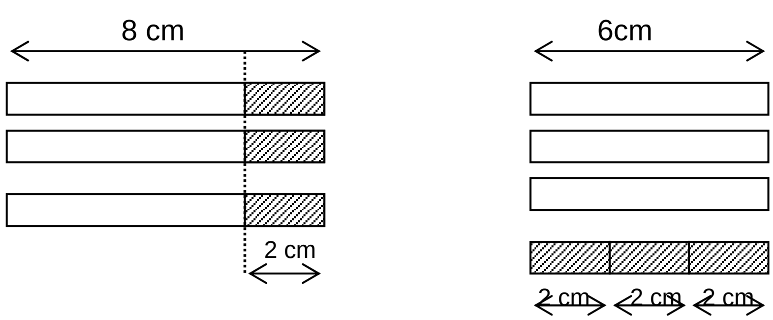
Los procedimientos movilizados por los equipos que construyen los enteros, son los siguientes (un procedimiento por equipo):

1) Juntar los tres pedazos (cada uno representa 1 1/3 de caramelo) y recortar un popote del tamaño de esos tres pedazos juntos; lo miden y observan que son 24 cm, luego, con ayuda de su tabla de multiplicar, buscan un número que multiplicado por 4 dé 24. Construyen el entero de 6 cm.



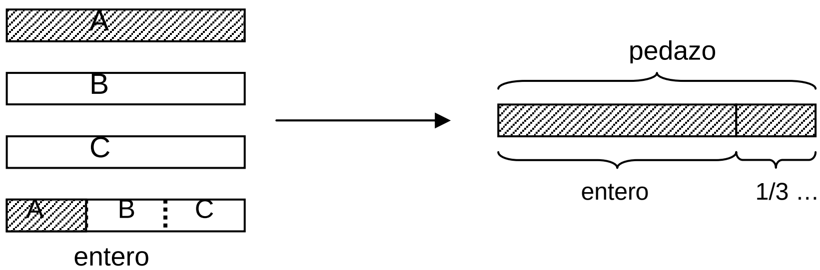
Este procedimiento corresponde al número 1 del análisis previo, un poco modificado.

2) Intentan obtener 4 partes iguales a partir de los 3 pedazos. Miden cada pedazo (8 cm), descubren que quitándole 2 cm a cada pedazo obtienen 3 pedazos de 6 cm, más uno que se forma con los tres de 2 cm:

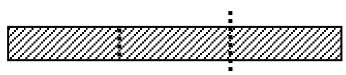


Este procedimiento es similar al número 2 del análisis previo. Subyace igualmente la idea de que del total de pedazos debe obtenerse el total de enteros.

3) Una niña de un equipo representa gráficamente el reparto. Con ayuda del observador, concluye que el pedazo que se le entregó contiene **todo** lo que toca a un niño, es decir, un entero y un tercio:



Decide quitar al pedazo ese tercio para obtener el entero, pero...



quita el pedazo **1/3 del pedazo** en vez de ¼ (ver análisis previos)

Al querer obtener los 3 enteros, ella (y los demás de su equipo) observan que no les quedan del mismo tamaño, pero, se acaba el tiempo y no pueden ya corregir.

En la confrontación colectiva se ponen nuevamente los pedazos entregados por 4 equipos, uno al lado del otro. Dos de ellos coinciden (procedimientos 1 y 2), otro es un poco más largo (procedimiento 3) y uno más es mucho más largo (el equipo que unió los tres pedazos). El maestro pregunta "¿cómo podemos saber cuál es el correcto?" Un solo equipo intenta explicarse (procedimiento 2). Nuevamente **relatan** cómo construyeron su pedazo (no cotejan total de enteros con total de pedazos): "A cada pedazo que mide 8 cm, le quitamos 2 cm de manera que nos quedaran de 6 cm. Con los 3 pedacitos de 2 cm formamos el otro de 6 cm.".

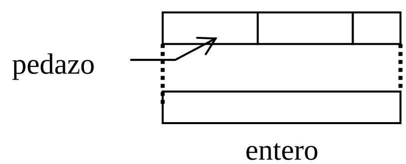
Nuevamente pocos alumnos se interesaron en la confrontación. Es posible que precisamente aquéllos que no lograron construir el entero, no hayan participado en esta fase...

En 4º grado

Suceden los mismos problemas que en 3^er^ grado: se les hace difícil entender la consigna. En el primer problema (5 niños, 2 caramelos) algunos niños insisten en pensar que los caramelos enteros son los pedacitos que les entregamos, o bien, el popote largo para recortar. En un equipo, una niña pregunta al observador: "... entonces, los cinco pedacitos ¿son los dos caramelos?" Se percibe un entusiasmo creciente en los equipos conforme sienten descubrir de lo que se trata.

Finalmente, sólo 4 equipos de los 8 construyen un entero, En los 4 casos éste es del tamaño correcto y en los cuatro aplican el mismo procedimiento: unir 2 pedazos y medio pedazo (procedimiento 2 en análisis previo). Suponemos que en los otros 4 equipos no llegaron a entender la consigna.

En la confrontación, verifican yuxtaponiendo el entero construido con dos pedazos y medio:

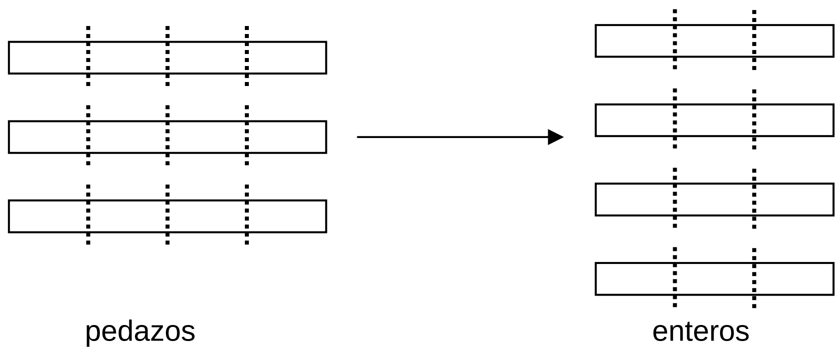


al hacer esto, un alumno dice: "Son 5 niños, compraron 2, uno tuvieron que compartirlo". Es claro que confunde la acción de reparto, 5 entre 2, en la que se tuvieron que compartir los **dos** caramelos, con la acción inversa que él ha desarrollado, reconvertir a los 5 pedazos en dos, en la que sí es necesario *compartir* un pedacito. Su argumento tiende a justificar cómo obtener 2 pedazos de 5.

En el segundo problema, al dar la consigna (3 niños, 4 caramelos) el maestro les pregunta ¿cómo creen que se los repartieron? Un alumno dice "en tercios". Esta pregunta del maestro puede haber propiciado que algunos niños optaran por el procedimiento que consiste en partir de una representación del reparto.

Nuevamente hay más dificultades que en el problema anterior: en un equipo argumentan que el pedazo no puede ser mayor que el entero. (Lo que prueba que ya lograron estimar que así tendría que ser). El observador les pregunta: "Si se reparten entre ustedes tres, 4 caramelos, ¿a cada uno toca más o menos de un caramelo?". Concluyen que el "pedazo" sí puede ser mayor. Hacen una representación gráfica del reparto, deducen que cada niño se comería un entero y un tercio y, después de pensar un momento, deciden cortar uno de los pedazos en 3 partes iguales. Después, no saben cómo seguir; parece inclusive que olvidan lo que querían construir. Parece que la dificultad está en distinguir la acción de reparto que representaron (en la que se divide un entero entre tres) de la acción inversa que ahora tienen realizar (el tercio anterior ya está incluido en el pedazo; hay que quitarlo).

En otro equipo que pudimos observar construyen correctamente el entero con un procedimiento que no apareció en 3^er^ grado: dividir cada uno de los tres pedazos en cuatro partes. Formar entonces los 4 enteros, cada uno de los tres pedazos en cuatro partes. Formar entonces los 4 enteros, cada uno con tres cuartos:



Este procedimiento se parece a aquél de 3^er^ grado en el que quitan 2 cm a cada pedazo para obtener 4 enteros de 6 cm, pero en éste subyace un razonamiento distinto: se trata de una estrategia típica de reparto como si se propusieran repartir 3 cosas entre 4. Evidentemente, concebir esa estrategia implica tener claro de lo que se trata (en este procedimiento es notoria la ausencia de una representación del reparto original, de ahí que no piensen en dividir los pedazos en tercios) y considerar que el total de pedazos es igual al total de enteros.

Tres equipos más lograron construir el entero, dos correctamente y uno incorrectamente. Este último construye un entero quitando 1/3 al pedazo (nuevamente la confusión ya señalada). Los otros dos no supimos qué procedimientos utilizaron. Por lo tanto, 4 de 8 equipos construyeron el entero.

En la confrontación colectiva sólo dio tiempo para que el equipo que construyó los enteros con ¾ de los pedazos justificara su procedimiento. Su explicación fue muy confusa y larga. Nadie logró entender.

Conclusiones

Resumen de procedimientos implementados:

2 caramelos, 5 niños

Procedimiento	En 3°	En 4°	Resultado
• Unir dos pedazos y medio	2 equipos	4 equipos	Correcto
• Dividir la longitud total formada por los 5 pedazos, entre 2	1 equipo	---	Correcto
Comprenden el problema: (Totales)	3 equipos	4 equipos	
• Unir los cinco pedazos	1 equipo	---	Incorrecto
• No construyen el entero	4 equipos	4 equipos	

4 caramelos, 3 niños

Procedimiento	En 3°	En 4°	Resultado
• Dividir la longitud total formada por los 3 pedazos, entre 4	1 equipo	?	Correcto
• Quitar 2 cm a cada pedazo para formar 4 pedazos de 6 cm.	1 equipo	?	Correcto
• Dividir los pedazos en cuartos; cada entero = ¾	---	1 equipo	Correcto
• A partir de una representación del reparto, quitar al pedazo lo que le sobra.	1 equipo	1 equipo	Incorrecto (quitan 1/3 del entero)
Comprenden el problema: (Totales)	3 equipos	4 equipos	
• Unir los tres pedazos	1 equipo	1 equipo	
• Consideran que los pedazos son los enteros	1 equipo	---	incorrecto
• No construyen el entero	2 equipos	3 equipos	

Una primera dificultad para los dos grupos fue entender lo que se plantea en esto problemas: concebir que lo que se tiene no son cosas para repartir, sino productos de reparto. Hemos visto que esta reflexión exige poder representar, mental o gráficamente, la acción directa de repartir, o bien tener presente que el total de pedazos constituye también el total de enteros. Pero aun en este último caso, es necesario pensar en la acción de reparto, ya que es ésta la que indica, que los enteros que se construyen arrojarán los pedazos que se tienen. Se trata por lo tanto de realizar una acción inversa y la condición es tener una representación de la acción directa. Podemos decir que por lo menos la mitad de los niños de ambos grupos tuvieron problemas a este nivel. Esto se refleja en las interpretaciones que se hicieron de la consigna: los enteros son los pedazos, o el popote para recortar, y en la imposibilidad de realizar cualquier acción (podrían, por ejemplo, haber construido un entero por simple estimación). En cambio, en los casos en que se llegó a comprender el problema, se encontró siempre alguna estrategia, aunque a veces hubiera tropiezos en el camino. A pesar de que nuestros registros son muy parciales, podemos identificar un nivel intermedio entre los que no pudieron hacer nada (o identificaron los enteros con los pedazos) y los que sí construyen un entero aproximado: estaría formado por aquéllos que construyen un entero uniendo todos los pedazos. Esta acción supone ya que la unión de los pedazos debe volver a dar el **todo** que fue repartido. El obstáculo está tal vez en no concebir que ese todo esté formado también por partes.

En el segundo problema aparece una dificultad suplementaria: aceptar que el *pedazo* puede ser mayor que el entero. En este caso, el popote que representa el pedazo y la forma de nombrarlo ("pedazo") contribuyen a que haya confusión (el *pedazo* normalmente sería nombrado como *un entero y un pedazo* y su constitución material sería también la de un entero junto a un pedazo). No obstante, esta contradicción al sentido común propició la movilización de procedimientos más variados. Fue más necesario en este caso partir de la relación: *n pedazos = m enteros*.

El hecho de que los mismos equipos que resolvieron el primer problema son los que resolvieron el segundo, es una consecuencia de que, la confrontación colectiva no sirvió de canal para difundir las estrategias. Esto puede deberse a que no se prestó atención y, sobre todo, a que el relato hecho por los pocos que expusieron su procedimiento no tocó aquello que para los otros es aún un obstáculo. En todo caso, es claro que no hemos logrado organizar satisfactoriamente las confrontaciones colectivas.

Hemos decidido volver a aplicar esta situación en S. D. 2.2.

Situación didáctica 2.2: Construir el entero (3 chocolates, 2 niños)

Desarrollo

1. *Consigna:* "Dos niños fueron al cine y con el dinero que les sobró compraron 3 barritas de chocolate que se repartieron en partes iguales. Juntando todo lo que le tocó a un niño, se obtuvo un pedazo de este tamaño (muestra la tira de cartoncito de 6 cm de largo). Averiguar de qué tamaño eran los chocolates que compraron". (5 min.)

2. *Trabajo en equipos:* (20 a 25 min.)

3. *Confrontación:* El *chocolate* construido por cada equipo se pega en el pizarrón. Cuando todos han terminado (o a los 20 minutos) se abre la discusión para que cada equipo defienda su producción. Si hay procedimientos distintos, tratar de que todos sean explicitados. (20min).

Organización:

Equipo de 4 niños.

Material:

Para cada equipo:

- 2 tiras de cartón de 6 cm x 3 cm.
- 1 tira de cartulina de 40 cm x 3 x cm.
- Lápiz, tijeras, una hoja de papel por si la necesitan.

Análisis previo de la S. D. 2. 2: Construir el entero (3 chocolates, 2 niños)

Los niños conocen los datos del reparto (3 chocolates entre 2 niños), tienen el pedazo que tocó a cada uno y deben construir el *chocolate* entero. Este problema se ha planteado ya dos veces a los niños (con otros datos). Decidimos proponerlo una tercera vez porque, en la última sesión aún muy pocos niños (la mitad, a lo más, de los dos grupos) lograron abordarlo. Varios empezaban apenas a comprender lo que plantea el problema, y otros ni siquiera eso. Vimos en este momento la posibilidad de proponer una situación semejante a ésta pero relativamente más accesible (seleccionar el entero entre varios posibles en vez de construirlo). No obstante, el hecho de que varios niños mostraran indicios, en el segundo problema, de empezar a comprender, nos inclinó por repetir la misma situación. En la siguiente sesión (S. D.2.3) se presentará la variante *simplificada* si aún se considera necesario.

En este problema, nuevamente aparecerá la dificultad de aceptar un *pedazo* mayor que el entero, pero las fracciones en juego (medios y tercios) son quizá más fáciles de visualizar.

Por otro lado, dedicaremos toda la sesión (± 1 h.) a la resolución de un solo problema, con el objeto de dar más tiempo para la construcción del entero y para la confrontación colectiva.

Con respecto al material, cambiaremos los popotes por tiras rectangulares de cartón, únicamente con el propósito de facilitar la manipulación. Los popotes se ruedan sobre las mesas inclinadas de los niños y es difícil ponerlos uno después de otro sin que se muevan. Hicimos las tiras suficientemente angostas (3 cm) para propiciar que centren su atención en la longitud. Además, la tira larga que se les da para recortar el *entero*, tiene también 3 cm de ancho. De aquí en adelante usaremos este material.

Análisis de la experimentación de la S. D. 2.2: Construir el entero

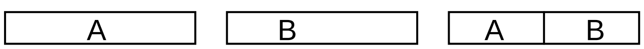
Fecha: 31-05-85
Duración: 3er grado: ± 55 min.
4^{o} grado: ± 40 min.

En 3er grado:

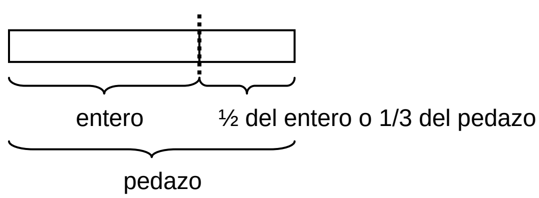
Al escuchar la consigna el grupo, en general, se muestra entusiasmado. Varios alumnos exclaman "¡Qué fácil!", otro pregunta: "Pero, ¿se puede hacer?"

Éstos fueron los resultados:

Equipo 8: Representan gráficamente el reparto (3 chocolates entre dos niños):

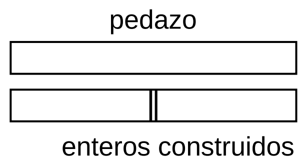


Nuevamente piensan que los pedazos que les dimos son los enteros y parecen quererlos repartir. El observador les vuelve a explicar la consigna; entonces dicen: "En cada pedazo hay uno y medio... con dos de esos medios hacen un chocolate" y concluyen, "Cada pedazo hay que partirlo a la mitad y luego sacar la mitad de la mitad". Parece que sí tienen la idea de que al pedazo se le tiene que quitar la mitad del entero y que ésta no es la mitad del pedazo:



No logran ver que lo que sobra es **1/3 del pedazo** pero, lo aproximan con ½ del ½ (1/4). Descubrir que se trata de 1/3 implica destacar que el entero tiene dos medios y que por lo tanto en total hay 3 medios en el pedazo... ¡no es fácil!

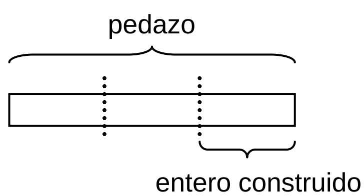
El equipo construye finalmente un pedazo del tamaño de la **mitad** de un entero. En la confrontación, relatan su procedimiento: "... cada pedazo tiene un chocolate y un medio". El maestro les sugiere que lo comprueben con su entero y, en efecto, observan que el pedazo **no** contiene 1 y ½ de sus enteros:



Vuelven a su lugar y reconstruyen el entero, esta vez correctamente. No supimos cómo lo hicieron. Posiblemente mediante aproximaciones sucesivas hasta lograr que 1 entero + ½ entero coincidiera con un pedazo.

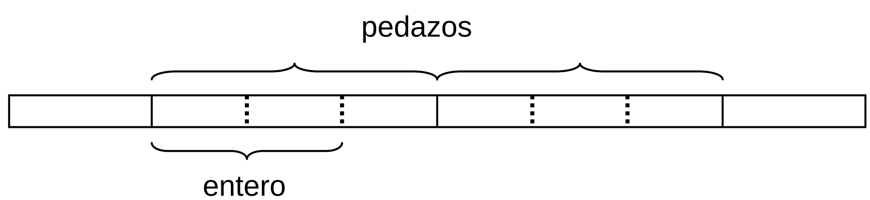
En el equipo 5 también consideraron inicialmente que el entero era el pedazo. Después de volver a explicar varias veces la consigna llegan también a la conclusión de que el pedazo contiene un entero y medio. Dibujan los 2 pedazos y los parten a la mitad. Obtienen 4 mitades (¡y no 3!) y afirman que “así no se puede”.

Finalmente construyen un entero del tamaño de 1/3 de un pedazo:



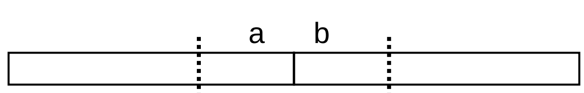
(efectivamente 3 de estos enteros forman un pedazo, pero no dos pedazos)

En la confrontación, un niño (que resolvió el problema) les dice que lo que tienen es la mitad del chocolate, que debían haber hecho lo mismo con el otro pedazo. Una niña de este equipo vuelve a su lugar, y después de un rato, muestra al observador la tira que se les dio para recortar, marcada de la siguiente manera:



y dice: “Al partirlo en tres (se refiere al pedazo), lo partí en mitades (el entero que obtuvo resultó igual a la mitad del que tenía que obtener). Ha podido resolver el problema.

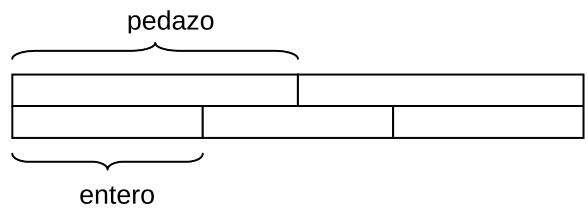
En el equipo 4, traen (en la confrontación) un entero formado por dos mitades del pedazo (es decir, su entero es del mismo tamaño que el pedazo). Sin embargo, al pegar en el pizarrón su entero junto al pedazo, se sorprenden de ver que son del mismo tamaño. ¿Qué pueden haber pensado? Tal vez, a partir de una representación como esta:



estimaron que los pedacitos a y b -que son tercios del pedazo- eran **medios** del pedazo. Los niños no supieron explicarse y volvieron a su lugar. Cabe señalar que éste fue uno de los equipos que puede resolver los dos problemas anteriores.

En equipo 6, repartieron 5 chocolates entre 2 niños. Presentan dos chocolates y medio y dicen que eso tocó a cada niño. Varios alumnos les dicen que no se trataba de repartir. No entendimos que fue lo que interpretaron.

Finalmente, 2 equipos más no hicieron nada y otros dos construyeron correctamente el pedazo (los mismos que lo lograron en los dos problemas anteriores). En uno de ellos, igual que la vez anterior, quitan 2 cm a cada pedazo (de 6 cm) formando así los 3 enteros de 4 cm. En la confrontación relatan su procedimiento sin poder explicar cómo supieron que había que quitar precisamente 2 cm. El otro equipo cortó una tira del tamaño de los dos pedazos y lo dividió entre 3. En la confrontación muestra que los dos pedazos y sus tres enteros miden lo mismo:



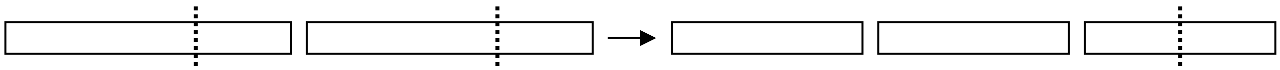
En resumen:

De los tres equipos que ya habían resuelto los problemas anteriores, 2 lo vuelven a resolver y uno no, muy posiblemente debido a una estimación que le hace confundir un medio con un tercio. De los 5 equipos que **no** pudieron resolver los problemas anteriores, 2 lo lograron esta vez, aunque sólo después de verificar que en su primer intento es erróneo. En ambos casos optaron por el camino más difícil: partir de la representación del reparto (en vez de partir de la reflexión que permite equiparar el total de enteros con el total de pedazos), lo que los llevó a la compleja tarea de averiguar qué fracción del pedazo debe ser quitada. Tres equipos siguen sin poder (¿o querer?) resolver el problema.

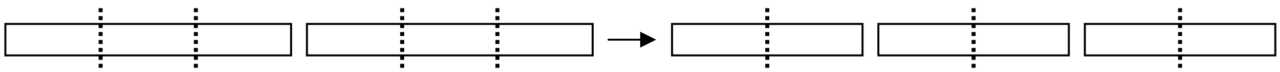
En 4º grado:

De los 8 equipos, 5 equipos construyen el entero correctamente y 3 no lo logran. De los 5 que lo construyen:

- 3 obtienen la longitud de los 2 pedazos alineados (6x2 = 12 cm) y dividen entre 3 para obtener la longitud del entero (4cm)
- En un equipo quitan 1/3 a cada pedazo para obtener 3 enteros (de 2/3 de pedazo cada no):



- En un equipo dividen cada uno de los dos pedazos en tres partes iguales. Forman los 3 enteros, cada uno con dos de esos tercios:



En la confrontación se ve que los pedazos construidos por estos 5 equipos son todos del mismo tamaño. Varios equipos explican su procedimiento relatando lo que hicieron: “Vimos que todo esto eran los 3 chocolates entonces dividimos entre 3...”. Un equipo se limita a mostrar que sus 3 enteros coinciden con los dos pedazos.

De los equipos que no construyeron el entero, sólo pudimos observar a uno. En éste, empezaron por considerar que los enteros eran del tamaño de los pedazos. Después afirmaron que cada pedazo contiene dos enteros. El observador les pregunta que, entonces, cuántos enteros había: “¡Cuatro!”. Por fin corrigen: “En los dos pedazos hay 3 enteros”, pero no intentan construir el entero.

Conclusiones

En esta tercera ocasión en que los alumnos se enfrentan al problema de construir un entero notamos un pequeño avance: 2 equipos más en 3er grado y uno en 4^{o} grado logran resolver el problema. Podríamos preguntarnos: si una buena parte del grupo pudo conocer los procedimientos de resolución de algunos de sus compañeros en la confrontación colectiva, ¿por qué entonces no pueden resolver de entrada el tercer problema que es, finalmente, similar al anterior? En el caso de 3^{o} podríamos explicarlo por el hecho de que la mayoría de los niños no se interesó en la confrontación, pero en 4^{o} no fue así. Nos inclinamos entonces por pensar que los procedimientos de resolución mostrados al grupo no pueden ser apropiados por los niños mientras no logren concebir, una de las dos relaciones que subyacen a estos procedimientos: el total de pedazos contiene (y es igual) al total de enteros, o bien, a partir de una representación del reparto, asignar al pedazo lo que tocará a cada niño. Ambas suponen, reconocer que los *pedazos* son el producto de un reparto, y hemos visto que esto tampoco es inmediato para varios niños (la dificultad aquí está en concernir que se trata de un recorrido inverso a otro que no fue experimentado, y que por lo tanto debe ser aceptado como hipótesis).

Es claro entonces que el trabajo intelectual mayor está en **comprender** la consigna (ésta implica a las reflexiones señaladas). Sólo a partir de esto puede movilizarse alguna estrategia, y puede recibirse la retroalimentación que proporciona la situación y que hará evolucionar la estrategia.

Por otro lado, observamos que los equipos a los cuales más trabajo costó resolver el problema, optaron preferentemente por la estrategia más elaborada: representar el reparto. ¿Se debe a que en las múltiples explicaciones que hicimos de la consigna, enfatizamos que un reparto ya había sido realizado y esto centró su atención en el reparto? O bien, la opción por esa estrategia refleja la necesidad de realizar la acción directa de repartir para poder concebir la acción inversa, o bien, por último, para estos niños, la reunión de los pedazos no necesariamente vuelve a dar el total que fue repartido (no conservación de la longitud). La otra estrategia (dividir el total de pedazos entre el número de enteros), finalmente mucho más sencilla, no se apoya en una representación del reparto. Se basa directamente en la relación *n pedazos = m enteros*. Parece, entonces que esta segunda estrategia refleja una posibilidad mayor de reflexionar sobre una acción no realizada (el reparto), abstrayendo el hecho de que no importa cómo se haya hecho el reparto, el total de los pedazos da el total de los enteros.

Situación didáctica 2.3: Seleccionar el entero

Desarrollo

1. *Consigna*: "Esta vez tenemos un problema similar al de la sesión anterior, sólo que ahora tenemos más información: sabemos que eran 4 niños que se repartieron 3 chocolates. El pedazo de chocolate que tocó a cada niño es de este tamaño (muestra la tira café -6 cm-) y en la tienda sólo vendían chocolates de 3 tamaño (muestra las tiras roja, azul y amarilla). Se trata de averiguar de cuál compraron los niños".

2. *Trabajo en equipos*: Se entrega a cada equipo un *pedazo* (tira café) y un entero de cada color. Se avisa que si necesitan más, pueden tomarlos (15 min.).

3. *Confrontación.* Se registran en el pizarrón los resultados de cada equipo, se discuten las diferencias (si las hay) y se explican los procedimientos distintos para resolver el problema (15 min.).

Organización:

Equipos de 4 niños.

Material:

Para cada equipo:

- 4 tiras de cartón de 6 cm x 3 cm, color café
- 3 tiras de cartón de 8 cm x 3 cm, color rojo
- 3 tiras de cartón de 5 cm x 3 cm, color azul
- 3 tiras de cartón de 10 cm x 3 cm, color amarillo

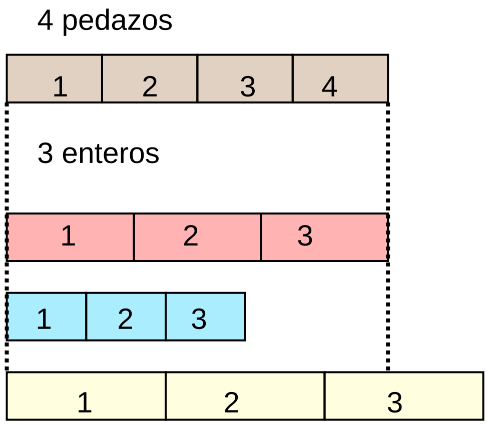
(de cada tira, disponen de un sobrante por si los niños lo necesitan).

Análisis previo de la S. D. 2.3: Seleccionar el entero

Como en las situaciones anteriores, en ésta se conocen los datos del reparto (número de enteros, número de niños), se tiene el pedazo que tocó a cada niño, y es necesario determinar el tamaño de los enteros que se repartieron, sólo que esta vez, en vez de tener que construirlo, únicamente se tiene que seleccionar uno entre tres posibles. Suponemos que la presencia física de los enteros junto a la de los pedazos ayudará a los niños que aún tuvieron dificultades en el problema anterior; a distinguir los dos momentos de la acción, de repartir: el entero aún no repartido y el pedazo, producto del reparto y propiciará que consideren el hecho de que el total de enteros debe ser igual al total de pedazos.

En esta situación sigue habiendo, a grandes rasgos, dos estrategias posibles:

1. Realizar la acción de reparto con cada uno de los 3 enteros y ver en qué caso el pedazo resultante es igual al pedazo dado.
2. Buscar con cuál de los enteros (A, B o C) se verifica una igualdad entre 3 enteros y 4 pedazos:



Esta vez, sin embargo, la estrategia 2 resulta mucho más económica que la 1 (la diferencia en número de acciones entre ambas es mayor que en la situación anterior) y ésta puede privilegiarla sobre la otra. La única reflexión requerida es la necesidad de que haya coincidencia entre los totales de enteros y de pedazos. Es posible también que los argumentos emitidos en la confrontación sean más accesibles para quienes aún no logren resolver el problema... aunque, también es más probable que la técnica de resolución (sumamente simple) sea *copiada* sin que medie una comprensión.

Sólo se entregará a cada equipo un entero de cada tipo y un pedazo, aclarándoles que si necesitan más los pueden tomar. Con esto, ¿inducimos menos la preferencia por la estrategia 2?

Análisis de la experimentación de la S. D. 2.3: Seleccionar el entero

Fecha: 3er grado: 03-06-85
4^{o} grado: 31-05-85
Duración: 3er grado: 55 min.
4^{o} grado: 30 min.

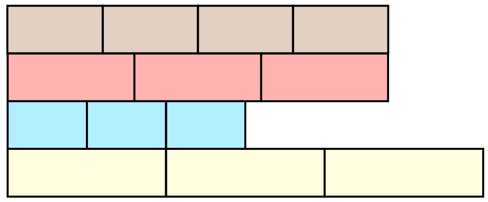
En 3er grado:

Los 6 equipos que resolvieron el problema anterior resuelven éste. Los otros dos equipos no lo lograron resolver, pero, en ambos casos, se ven intentos de hacerlo, cosa que no había ocurrido en el anterior.

Entre los equipos que sí lo resolvieron aparecieron los siguientes procedimientos:

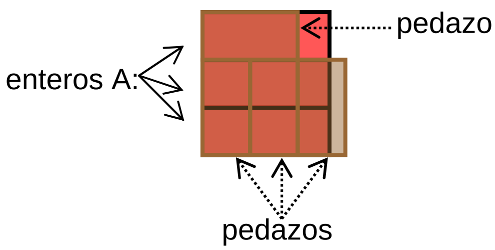
- Alinean los 4 pedazos y comparan la longitud total obtenida con la de los 3 enteros de cada tipo (4 equipos):

4 pedazos:
3 enteros A:
3 enteros B:
3 enteros C:



En tres equipos solicitaron más pedazos y enteros para hacer las comparaciones. En el otro equipo, hicieron marcas sobre una hoja de papel, los pedazos y los enteros.

En uno de estos equipos, después de encontrar que el entero es el A, buscan otra forma de superponer los 4 pedazos sobre los 3 enteros A:

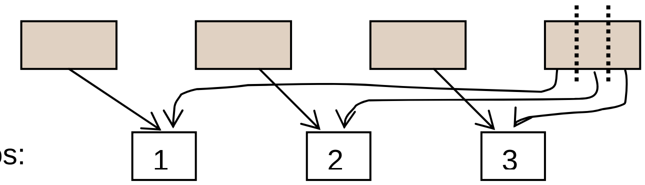


Dudan si la parte que queda sin cubrir es igual a la parte que sobresale. Parece que la coincidencia encontrada al comparar la longitud de los enteros alineados con la de los pedazos alineados no fue para ellos una prueba satisfactoria. Necesitan comprobar que las superficies miden lo mismo. Sin embargo, podrían simplemente haber encimado los pedazos alineados sobre los enteros alineados... ¿o simplemente tienen curiosidad por ver si de otras maneras se les puede hacer coincidir?

- Los otros dos equipos que resolvieron el problema, acudieron a la medición con regla (uno de estos equipos ha utilizado este procedimiento desde el primer problema de este tipo): los cuatro pedazos alineados miden 24 cm. Dividen 24 entre 3, obtienen 8 cm (en uno de estos equipos buscan en su tabla de multiplicar el número que por 3 da 24). Después, buscan cuál de los 3 enteros mide 8 cm....

  Durante la confrontación colectiva, un alumno propone otro procedimiento más: "Uno de esos (se refiere a uno de los 3 enteros) es de 3 pedacitos de a 2 cm, entonces 6 y 2, 8; 6 y 2, 8; 6 y 2, 8 (va señalando los enteros)". Este procedimiento apareció ya en los problemas anteriores: se tienen 4 pedazos de 6 cm y con ellos se quieren construir 3 enteros:

enteros:



entonces, como si se tratara de un reparto, a cada entero "toca" un pedazo y como sobra un pedazo, éste se divide en tres partes (6 cm ÷ 3 = 2 cm), y cada tercio (de 2 cm) se *da* a cada entero.

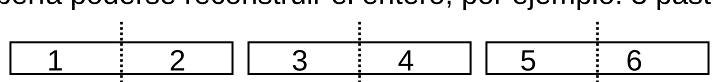
Por lo tanto cada entero mide: 6 cm + 2 cm = 8 cm Notemos que a este procedimiento -que consiste simplemente en repartir- subyace un buen dominio de las relaciones en juego, es decir, si se reduce el problema a obtener 3 partes de 4, es porque se ha logrado destacar lo fundamental: del total de pedazos se obtiene el total de enteros. Es el procedimiento más independiente de la acción *de ida* (el reparto de los enteros).

Veamos ahora lo que sucedió en los dos equipos que no lograron identificar el entro.

- En uno de ellos empiezan por comparar el pedazo con cada uno de los enteros. Después se proponen ver si el pedazo cabe 2 veces en los enteros que son mayores que el pedazo. Ahí se detienen. Dicen al observador que "van a pensarlo".

  Pareciera que consideran que cada uno de los posibles enteros constituye todo lo que se repartió (es decir, como si sólo se hubiera repartido un entero): Entonces buscan un entero en el que el pedazo quepa un número entero de veces, dejando de lado lo que se plantea en la consigna: eran 3 enteros y 4 niños...

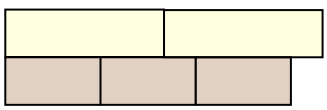
  Al no encontrar ningún resultado, abandonan el problema. También es posible que consideren que en el reparto, de cada entero salieron los pedazos para dos o tres niños (a veces así sucede) y que entonces juntando dos o tres (o más) pedazos debería poderse reconstruir el entero, por ejemplo: 3 pasteles, 6 niños.



Juntando lo que tocó a los niños 1 y 2 se obtiene el entero. Este es el caso de todo reparto cuyo producto es una fracción unitaria del entero ($\frac{1}{n}$). En las actividades sobre reparto (1.1 a 1.4) estos casos particulares fueron, sin embargo, la minoría. No obstante, ¿será necesario retomar algunas de estas actividades con este equipo?

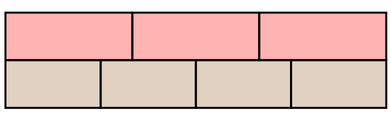
- En otro equipo (6) los niños no están en el problema cuando el observador se acerca. Les pregunta que si saben de lo que se trata. Uno de ellos explica el problema (correctamente) pero parece que no se les ocurre ninguna forma de abordarlo. Consiguen más pedazos y más enteros, superponen unos sobre otros al azar. Uno de ellos lo mide y dice que es el amarillo (el de 10 cm) porque mide 10 cm y el café (el pedazo mide 6 ½ cm). No logra explicarse más. Tal vez escoge el de 10 cm por ser el más grande.

  Otro niño acomoda dos enteros de 10 cm y 3 pedazos así:



enteros de 10 cm
pedazos

  y dice que “de esos dos (enteros) se sacan tres (pedazos)”. En ese momento, otro niño de este equipo que miraba lo que hacían en otros equipos, vuelve y afirma ya saber: toma 4 pedazos y 3 enteros de 8 cm y los pone así:



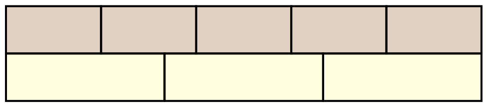
enteros de 8 cm
pedazos

  El observador le pregunta que por qué hizo eso y él afirma que son los rojos porque son los que coinciden. Parece que han podido copiar el procedimiento sin comprender aún el problema.

Al empezar la confrontación colectiva todos afirman que el entero es el rojo (8 cm). Varios equipos explican claramente su procedimiento:

> “Fuimos probando, con tres amarillo sobraba, con tres azules faltaba...”
>
> “Como éstos miden 6 cm (los pedazos) y éstos 8 cm (enteros) entonces buscamos 8x3... esto nos da 24 y estos 4 (los pedazos) nos dan 24...”

Teníamos la duda acerca de si algunos equipos sólo habían copiado el procedimiento. El observador dice entonces que, según él, los enteros eran los amarillos. El maestro advierte que si eso es cierto, todos pierden sus puntos. Pasa el observador al pizarrón para probar su afirmación y muestra que también hay coincidencia con 5 pedazos y tres enteros amarillos (de 10 cm):



5 pedazos

3 enteros amarillos

Varios niños ríen. Algunos dicen: “¡Sí, nos ganó!”. Pronto, otros protestan: “No, ahí hay más... hay 5 y tenían que ser 4”. Otro niño agrega: “Y si le quitas el que le pusiste de más, sobre y el que sí da bien es el rojo”.

Es probable entonces que por lo menos un equipo sólo haya copiado el procedimiento.

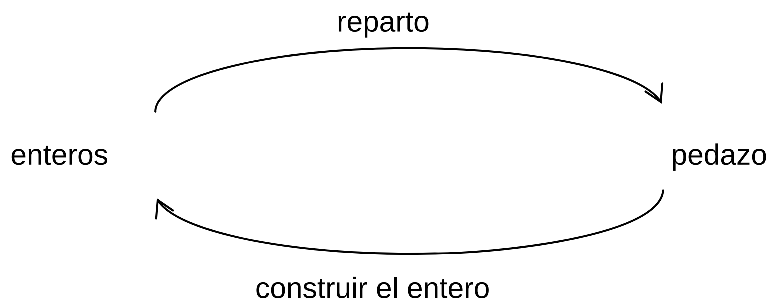
En 4º grado:

Muy rápidamente todos los equipos encontraron el entero adecuado. No hubo dificultad en entender la consigna. Pudimos observar 5 equipos de los 8 y en éstos todos recurrieron al procedimiento de comparar la longitud de 4 pedazos con la de 3 enteros de cada tipo (nadie usó la medición con regla), aunque no siempre lo hicieron inmediatamente: por ejemplo, en un equipo unan niña compara el tamaño del pedazo con el del entero azul. Al ver que el entero es más chico que el pedazo lo desecha (si 3 enteros deben coincidir con 4 pedazos, entonces los enteros deben ser más grandes que los pedazos). Sin embargo, una compañera suya no ve por qué desecharlo: “Sí puede ser (el azul) porque eran 3”. Finalmente, prueban el caso de cada entero.

Conclusiones

La presencia de los enteros posibles ayudó, en efecto, a los equipos que no pudieron abordar los problemas anteriores, a comprender lo que plantea el problema, por lo menos en cuanto a distinguir los pedazos de los enteros. En 3^{er} grado, sin embargo, los dos equipos que están en este caso, no han podido concebir aún una estrategia. Uno de ellos logra abordar el problema reduciéndolo al caso de un solo entero (buscan el entero en el que cierto número de pedazos quepan exactamente). En el otro logran concebir que de los enteros deben sacarse los pedazos, pero no tienen en cuenta los datos del reparto, ni exigen que el total de enteros coincida con el total de pedazos.

Resumimos a continuación las reflexiones subyacentes a las estrategias implementadas por los niños en la resolución de estos problemas (construir el entero): comprender la consigna implica concebir que la acción que se ejecutará es la **inversa** del reparto:



En este punto algunos niños tuvieron dificultades, consideraron que los pedazos eran enteros por repartir. La apariencia física de los pedazos (no están formados por los pedacitos que reflejarían fielmente el reparto) contribuye a esta confusión.

A partir de aquí, hay a grandes rasgos dos estrategias posibles: 1) a partir de la representación del reparto o, 2) partir de la necesaria igualdad entre el total de enteros y el total de pedazos. Esta igualdad no es evidente para todos los niños. Constituye una deducción que deja de lado la forma en la que realizó el reparto. Es probable que algunos niños necesiten para comprender el problema, realizar el reparto (representándolo gráficamente) y que esto los conduzca naturalmente a la primera estrategia.

Al partir de una representación del reparto, se centra la atención en la construcción de un entero. La dificultad está en distinguir la fracción de entero que toca a cada uno de la fracción del pedazo que hay que quitar o agregar a éste para obtener el entero.

En la otra estrategia se consideran todos los enteros (y no uno solo). Se construye primero el **todo** y después cada entero. Esta segunda acción puede ser omitida, por distracción o por cierta dificultad para concebir un todo formado por partes.

Así, las diversas estrategias movilizadas por los niños podrían jerarquizarse de la más apegada a la representación del reparto, a la más independiente de éste, apoyada sólo en la relación: *n enteros = m pedazos*

Situación didáctica 2.4: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños?

Desarrollo

1. *Consigna:* "Sabemos que algunos niños compraron chocolates del mismo tamaño y se los repartieron en partes iguales sin que haya sobrado chocolate. Los chocolates era de este tamaño (muestra el entero de 10 cm) y el pedazo que tocó a cada niño era de este tamaño (muestra el pedazo de 6 cm). Se trata de averiguar cuántos niños eran y cuántos chocolates compraron". (2 min.)
2. *Trabajo en equipos:* Se entrega a cada equipo **un** entero y **un** pedazo aclarando que si necesitan más pueden tomarlos. (15 a 20 min.)
3. *Confrontación.* Se registran en el pizarrón las respuestas de cada equipo y, a partir de las diferencias que existan, los equipos defenderán su respuesta. En caso de surgir pares equivalentes se provoca la reflexión acerca de si sólo uno es correcto, por qué, etc. (15 min.)
4. *Consigna 2:* Mismo problema con entero de 6 cm y pedazo de 8 cm. (2 min.)
5. *Trabajo en equipos:* (10 min.)
6. *Confrontación:* (10 min.)

Organización:

Equipos de 4 niños.

Material:

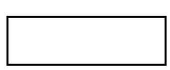
Para cada equipo:

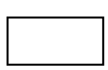
- 5 tiras de cartón de 10 cm x 3 cm, 8 tiras de 6 cm x 3 cm, 5 tiras de 8 cm x 3 cm.

En el primer problema se utilizan las tiras de 10 cm (enteros) y las de 6 cm (pedazos). En el segundo problema se utilizan las de 6 cm (enteros) y las de 8 cm (pedazos).

Análisis previo de la S. D. 2.4: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños?

Se tiene ahora el entero y el pedazo que tocó a cada niño de un reparto:

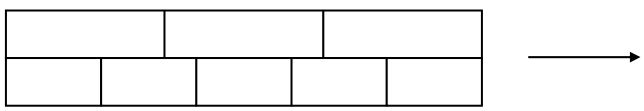

entero (10 cm)


pedazo (6 cm)

Hay que averiguar cuántos enteros se repartieron y entre cuántos niños. Teóricamente hay dos procedimientos de resolución que podrían implementar los niños de 3º y de 4º:

1) Realizar los repartos, aproximándose por ensayo y error: repartir un entero entre dos niños y comparar el pedazo que arroja ese reparto con el pedazo dado. A partir de aquí, repetir otro reparto variando los datos del reparto, en función de ciertas estimaciones. Por ejemplo, para 1 entero 2 niños, el pedazo salió más chico. Probar para dos enteros 3 niños o para 3 enteros 4 niños etc.

2) Si se considera que el total de enteros repartidos desee ser "igual" al total de pedazos obtenidos, se buscará la coincidencia entre cierto número de enteros y cierto número de pedazos:



3 enteros,
5 pedazos

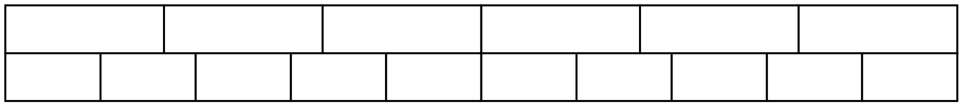
por lo tanto se repartieron 3 enteros entre 5 niños.

La segunda estrategia es claramente más económica y segura (garantiza llegar a un resultado) que la primera. Suponemos que todos los niños que ya han utilizado implícitamente la relación *n enteros = m pedazos*, recurrirán a esta estrategia. El material que se les entrega, además, desfavorece la primera estrategia: las tiras de cartón no son fáciles de recortar, no tienen tijeras, etc.

Es también muy probable que la presencia física de los enteros y los pedazos favorezca (a diferencia de las situaciones anteriores en las que el entero no estaba presente) que los niños tengan en cuenta la relación: *Total entero = Total pedazos*.

Si así sucede, la relación entre enteros y pedazos estará ahora en primer plano: se convierte en el recurso explícito para resolver el problema. Por otro lado, en esta situación, a nivel implícito, se están ya relacionando dos magnitudes a través de la conmensuración. El par (3, 5) que se obtiene esta destinado a funcionar, en situaciones posteriores, como la **medida** del *pedazo* en función del entero. Esto, por supuesto, no tiene aún nada que ver con lo que este par significará para los niños en este momento.

NOTAS: 1) En la aplicación de la estrategia 2, puede suceder que los niños encuentren otras soluciones (distintas a 3 enteros, 5 niños), si continúan agregando enteros y pedazos después de haber obtenido una primera coincidencia:



6 enteros, 10 pedazos

En este caso, será interesante que se discuta acerca de si sólo una solución es correcto o varias pueden serlo.

¿Cuántas respuestas podría haber? ¿Cómo obtener otras además de las que aparezcan?

2) El segundo problema (4 enteros 3 niños) se diferencia del primero sólo en que los *pedazos* son más grandes que los enteros.

Análisis de la experimentación de la S. D. 2.4: ¿Cuántos enteros ...?

Fecha: 3er grado: 05-06-85;
4^{o} grado: 03-06-85
Duración: 3^{o}: ± 1h 05 min.
4^{o}: ± 1h 10 min.

En 3er grado:

Algunos alumnos tienen un poco de dificultad al principio para diferenciar lo que se plantea en este problema de lo que se planteaba en los anteriores, pero poco después prácticamente todos han comprendido la consigna.

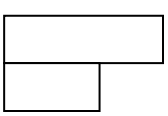
De los 8 equipos, 7 llegaron a un resultado correcto (3 chocolates, 5 niños).

El otro equipo (4) encuentran: (2 chocolates, 3 niños).

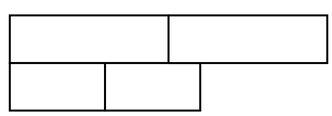
Veamos esto con más detalles.

En el equipo 3:

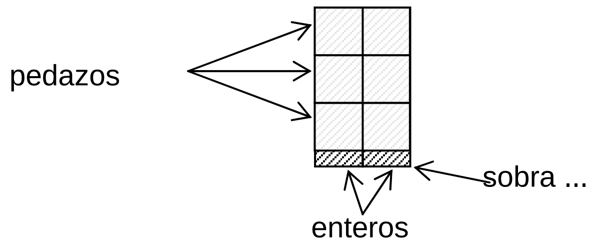
1) Yuxtaponen un entero y un pedazo:



2) Traen otro entero y otro pedazo:

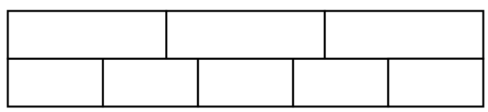


3) al ver que no coinciden de esta manera, buscan otras formas de acomodarlos (sobre la marcha, agregan otro pedazo):



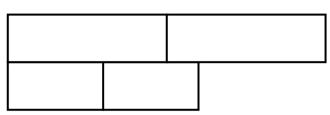
Llama la atención nuevamente que, a pesar de que no coincidieron a lo largo, piensan que acomodándolos de otra manera, podrían coincidir. No deducen de la primera manera de acomodarlos que las superficies son desiguales. ¿No consideran que el ancho de las tiras es el mismo?, o bien, ¿detrás de esto está nuevamente la no conservación del área (cambiando las formas de ambas superficies podrían llegar a coincidir)?

4) Reacomodan los pedazos a lo largo (como en el paso 2) y agregan enteros y pedazos, uno a uno, hasta encontrar la coincidencia:



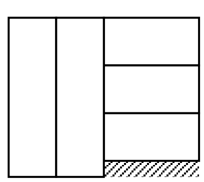
Posiblemente, el haber visto sobre otras mesas las tiras acomodadas así, les sugirió que era mejor volver a esa disposición.

En el equipo 6 (éste es uno de los equipos en donde no pudieron resolver los problemas anteriores) tienen dos enteros yuxtapuestos con dos pedazos a lo largo:



> Un niño dice al observador: “Yo pensaba que eran 3 niños y 2 chocolates, pero no, me equivoqué... Si ponemos otro (pedazo) no completaría, sobraría un espacio”.

Y entonces, también él decide reacomodar de otra manera, agregando ese pedazo:



y dice: “Sobra y esto que sobró no lo podemos quitar porque esto (el pedazo) ya es lo que tocó a cada uno”.

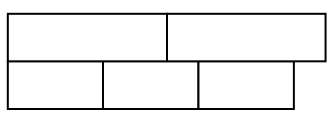
Sin agregar ni pedazos ni enteros, busca otras formas de acomodar. Finalmente se decide a buscar más piezas. Después de un reto encuentra la coincidencia (3 enteros y 5 pedazos a lo largo). Está verdaderamente entusiasmado.

Nos encontramos aquí también la necesidad de reacomodar las piezas para ver si así coinciden, aunque en este caso es claro que tiene influencia la hipótesis que este niño tuvo desde el principio, de que eran 2 chocolates y 3 pedazos. Esta hipótesis se explica bastante bien si pensamos que esos datos, (2, 3) arrojan un pedazo bastante cercano al que tienen y que posiblemente los niños, al querer anticipar, escogen entre datos que les son relativamente familiares (1, 2; 1, 4; 2, 3; 3, 2; ...). En este caso volvemos a constatar cómo estas pequeñas evidencias *empíricas* (las superficies no coinciden) se subsumen a las hipótesis previas de los niños (busca otras maneras de hacerlos coincidir).

De los otros cinco equipos que llegaron a un resultado correcto (3, 5), tres de ellos buscaron sistemáticamente la coincidencia, a lo largo, entre enteros y pedazos, agregando uno a uno. No pudimos observar a los dos restantes, ni al equipo que encontró el resultado (2, 3).

En la confrontación colectiva, los equipos dictan al maestro sus resultados.

> Se apuntan en el pizarrón. Sólo uno difiere (2 pasteles, 3 niños). El maestro pide a este equipo (4) que pase primero, Yuxtaponen a lo largo 2 enteros y 3 pedazos:



y dicen: “Son 2 chocolates y tres niños y el pedacito que sobró lo repartimos entre 3”, otro niño (el del equipo 6, aún sigue muy entusiasmado) pasa al pizarrón y le dice: “No debe sobrar porque ya está dado lo que le tocó a cada niño”.

En el segundo problema (4 chocolates, 3 niños) todos los equipos encontraron un resultado rápidamente. Cuatro equipos encuentran 4 chocolates - 3 niños y los otros cuatro encuentran: 3 chocolates - 4 niños. La resistencia a aceptar que el *pedazo* sea más grande que el entero, les hizo invertir el papel de cada pieza. Pero esto, por otro lado, nos asegura a nosotros que están pensando en el problema y no limitándose a copiar un procedimiento que por lo demás, se presta para ello.

Sólo en uno de los equipos, al ver que varios de sus compañeros dan como resultado 4 chocolates, 3 niños, caen en la cuenta de su error: “¡Confundimos los pedazos con los chocolates!”.

En 4º grado:

Primer problema (3 chocolates, 5 niños). Como en 3º, todos los equipos, excepto uno llegan a un resultado correcto. En todos los casos, el procedimiento consistió en yuxtaponer a lo largo un entero y un pedazo, y en ir agregando uno a uno enteros y pedazos hasta obtener la coincidencia. En uno de estos equipos cuando tienen ya 3 enteros y 5 pedazos, sigue habiendo una muy pequeña diferencia entre las longitudes totales (± 2 mm), seguramente debida a imprecisiones en el acabado del material. Entonces, siguen agregando enteros y pedazos. Llegan a 6 enteros, 10 pedazos. Esto dio lugar a interesantes reflexiones acerca de la relación proporcional implícita en estas equivalencias en la confrontación colectiva (en ésta, se aclara también el error cometido por el equipo que no llegó a un resultado correcto). Reproducimos aquí una parte de la discusión.

En el pizarrón está un cuadro con los resultados de cada equipo:

Equipo	No. de chocolates	No. de niños
1	3	5
3	6	10
2	3	5
4	2	3
5	6	10
6	3	5
7	3	5
8	3	5

M: *"Hay tres respuestas, ¿cuál estará bien?"*
Alos: *"Hay dos que están bien"*
M: *"¿Cómo es eso de que hay dos?"*
Alos.:"*¡Sí Hugo!"*

Un alumno dice que la respuesta del equipo 4 está mal. Pasa a probarlo al pizarrón: yuxtapone 2 enteros y 3 pedazos y muestra que no coinciden. Entonces, una de las integrantes de este equipo defiende su respuesta:

Al: "*Pero el pedacito que sobró lo repartimos así*" (señala con el dedo una división del pedacito entre tres)
Otra Al: "*No, pero lo que le tocó a cada quien ya está ahí, no le puede tocar más"*

El maestro repite la consigna y enfatiza que el pedazo que se entrega es **todo** lo que tocó a cada niño.

Al: *"Estaría bien si se tratara de repartir"*
M: *"Y de las otras, ¿cuál estará bien?"*

Varios alumnos sostienen que las dos están bien. Uno de ellos quiere pasar a probarlo. Yuxtapone 3 enteros y 5 pedazos y muestra que coinciden. Agrega otros 3 enteros y 5 pedazos y muestra que nuevamente coinciden.

M: "¿Está claro para todos?"
Alos: "Sí"

Se escuchan comentarios de algunos niños que dicen que "es la mitad", y otros que dicen que "es el doble". Discuten entre ellos si es mitad o doble. Finalmente interviene una alumna.

Al: "Pero no necesariamente tiene que aumentar 3 chocolates y 5 niños, sino, por ejemplo, otra cantidad"
M: "¿Cómo qué cantidad?"
Al: "No sé, nueve o algo"
M: "¿Cómo podríamos encontrar otros que sí valgan?"
Otro Al: "Multiplicando toda la tabla del 3 y sumando de 5 en 5: 25, 30, 35 ..."

El maestro escribe en el pizarrón:

3 ch., 5 niños
6 ch., 10 niños

y los niños empiezan a dictarle:

9 ch, 15 niños
12 ch, 20 niños
15 ch, 25 niños
18 ch, 30 niños
21 ch, 35 niños

Al: "Sí, cada vez que aumento 3 chocolates se aumenta 5 niños."
Al: "Pero no la mitad"
M: "A ver, ¿qué pasa si lo partimos a la mitad?, ¿qué pasa?"
Als: "Uno y un medio y dos y un medio (mitad de 3 chocolates, 5 niños)"
Al: "A un niño lo partimos a la mitad"

El segundo problema (4 chocolates, 3 niños) fue resuelto muy rápidamente por todos equipos. No sucedió como en 3^er grado que invirtieran los datos. En cambio, varios equipos se complacieron buscando equivalencias:

Equipo	Chocolates	Niños
1	4	3
2	8	6
3	12	9
4	4	3
5	16	12
6	4	3
7	4	3
8	4	3

El maestro les propone que vuelvan a hacer la *tabla* para ver cuáles están bien. Todos resultan estar bien.

Conclusiones

Prácticamente todos los alumnos de 3º y de 4º logran resolver el problema, lo cual implica que consideran la igualdad entre el total de enteros que se reparten y el total de pedazos arrojados por el supuesto reparto. Sólo en un equipo de 3º. Y en uno de 4º hubo dificultad para interpretar la consigna (vuelven nuevamente a la acción de repartir). En todos los casos llegan a la solución buscando en forma sistemática la igualdad en longitud de cierto número de pedazos con cierto número de enteros, aunque, como hemos visto, este recurso no fue inmediato para varios alumnos de 3º, quienes insistían en hacer coincidir la superficie de 2 enteros con la de 3 pedazos (en el primer problema). Es posible que hayan estimado desde el principio que debían ser 2 y 3. Resulta interesante que la disposición de las piezas a lo largo, unas sobre las otras, en la que se muestra la desigualdad de las superficies, no fue para ellos ninguna evidencia y sostuvieron su hipótesis un rato más, buscando otras maneras de hacer coincidir los dos enteros con los tres pedazos.

En 4º grado la actividad dio lugar a una reflexión sobre la relación proporcional entre el número de chocolates que se reparten y el número de niños a quienes se reparte. Llegaron incluso a formular ciertas generalizaciones: “Multiplicando toda la tabla del 3 y sumando de 5 en 5”, mismos que aplican en el problema siguiente y que utilizan (por sugerencias del maestro) como medio **para verificar** si las soluciones encontradas son correctas o no. Hay una notoria diferencia entre estos resultados y los que se obtuvieron en la situación didáctica 1.4 en las apuestas que se referían a este mismo punto: encontrar pares (No de pasteles - No de niños) que arrojasen pedazos de pastel iguales. Recordemos que en estas apuestas tuvieron bastante dificultad en encontrar una o dos equivalencias, no se hable ya de generalizaciones. Esta diferencia es, sin embargo, muy explicable: en la situación 1.4 se trataba de anticipar. Tenían que imaginar (o, a lo más, representar gráficamente) el producto de un reparto del cual sólo conocían los datos. Esta vez, en cambio, tienen en la mano los pedazos y los enteros. Constatan visualmente que, por ejemplo, 3 enteros coinciden con 5 pedazos y que si agregan otro tanto de enteros y pedazos, necesariamente vuelven a coincidir. A partir de esto, no es difícil que repitan mentalmente esta acción: otros 3 enteros con otros 5 pedazos volverán a coincidir, y que hagan la generalización. Dicho de otro modo: en lo que se concreta la equivalencia es en la invarianza del tamaño del pedazo (variando los datos del reparto). En la situación 1.4 tenían que representarse ese tamaño, y en ésta tienen el pedazo en la mano.

Por otro lado, hemos visto que esta actividad (encontrar los datos del reparto) pareció más accesible en ambos grupos que las tres anteriores (construir el entero). La relación entre enteros y pedazos que resultó difícil de ser considerada en las anteriores, es asumida de entrada en ésta. Bien es cierto que ésta la realizaron **después** de las otras, y por lo tanto, el conocimiento de las relaciones en juego en el reparto adquirido en aquéllas (especialmente la relación *n* enteros *m* pedazos) constituye el punto de partida para resolver ésta. Sin embargo, considerándolos aisladamente, la construcción del entero exige un trabajo intelectual posiblemente más complejo; si sólo se tiene el pedazo y es necesario **pensar** que el total de pedazos da el total de enteros y aún resta un trabajo por hacer: unir los pedazos y dividirlos entre el número de enteros (aunque hay otras estrategias posibles). En el caso de la otra actividad se tienen los enteros y los pedazos: el trabajo *fuerte* consiste **únicamente** en considerar la necesaria igualdad entre los totales de enteros y pedazos (ésta es prácticamente la única estrategia) y la presencia física de enteros y pedazos puede apoyar dichas reflexiones.

Por lo tanto el problema de construir el entero (S.D. 2.1, 2.2, 2.3) debería ser posterior al de encontrar los datos del reparto correspondiente a esta situación.

Situación didáctica 2.5: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños?

Desarrollo

1. *Consigna:* “Igual que en la pasada, conocemos el pedazo que tocó a cada niño y el tamaño de los chocolates que se repartieron. Cada equipo tratará de resolver tres situaciones diferentes. Se trata de saber, en cada caso, cuántos niños eran y cuántos chocolates se repartieron”. (5 minutos)

2. *Trabajo en equipos:* Se entrega un entero (tira de 12 cm) a cada equipo, y 3 pedazos de diferente tamaño (como sólo hay 8 pedazos distintos, cada pedazo será trabajado por tres equipos). Se les indica que pueden tomar más enteros o pedazos de los que les tocó.

Los pedazos se reparten de la siguiente manera:

pedazos / equipos	a	b	c	d	e	f	g	h
1	x	x	x					
2				x	x	x		
3						x	x	x
4		x		x	x			
5	x	x	x					
6				x	x	x		
7			x				x	x
8	x						x	x

(20 minutos)

3. *Confrontación:* En un cuadro como el anterior (dibujado en el pizarrón) el maestro pega cada pedazo sobre la letra que le corresponde y, más arriba, el entero. Se vacían los resultados de cada equipo en el cuadro. Se propicia la discusión -pedazo por pedazo- sobre todo cuando aparecen distintos resultados. (25 min.)

Organización:

Equipos de 4 niños

Material:

Para 8 equipos:

- más o menos 40 enteros (tiras de 12 cm x 3 cm)
- 8 pedazos de distinto tamaño (ancho: 3 cm):

a: 6 cm (1/2 del entero) ± 6 piezas

b: 5 cm (5/12 del entero) ± 40 piezas

c: 9 cm (3/4 del entero) ± 15 piezas

d: 8 cm (2/3 del entero) ± 12 piezas

e: 16 cm (4/3 del entero) ± 10 piezas

f: 10 cm (5/6 del entero) ± 20 piezas

g: 18 cm (3/2 del entero) ± 8 piezas

h: 24 cm (2 enteros) ± 5 piezas.

Análisis previo de la S. D. 2.5: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños?

En esta situación, como en la anterior, los niños tendrán el entero y el pedazo y deberán encontrar los datos del reparto (No de enteros, No. De niños). Esta vez se repartirán a los diferentes equipos pedazos de distintos tamaños pero los enteros serán los mismos para todos. De esta manera, en la confrontación colectiva, se podrá observar que, para un entero dado,

- A cada pedazo está asociado un par (No de enteros, No de niños), o varios pares de la *misma familia*. (Equivalentes entre sí).
- Los pares asociados a pedazos de diferente tamaño son distintos entre sí o de *distinta familia* (así como los pares asociados a pedazos del mismo tamaño deberán ser de la *misma familia*).

Esta actividad es el antecedente inmediato de la siguiente (3.1) en la que se espera que los niños utilicen estos pares como medidas del pedazo en función de la unidad.

NOTA: Se trabajará con 8 pedazos de distintos tamaños de los cuales cada equipo recibirá tres. De esta manera, en cada equipo tendrán la posibilidad de trabajar 3 casos y a su vez cada caso será visto por 3 equipos con lo cual habrá mayores posibilidades de obtener resultados distintos (equivalencias) y de detectar errores.

Análisis de la experimentación de la S. D. 2.5: ¿Cuántos enteros entre cuántos niños?

Fecha: 05-06-85
Duración: 3er grado: 1 h 15 min.
4^{o} grado: 1 h 05 min.

En 3er grado:

Este fue otro día especialmente difícil con el grupo de 3^{o}. Cuando llegamos al salón los niños estaban ya en un estado de mucha agitación; el salón en completo desorden, dos niños peleaban, ... pero las vacaciones estaban en puertas, no podíamos aplazar la sesión. No obstante, todos los equipos realizaron el trabajo, aunque prácticamente no se pudo registrar cómo lo hicieron (tanto el maestro como el observador se dedicaron a re explicar la consigna y a intentar mantener un poco de orden). También ocurrió que en el curso de la actividad algunos equipos tomaron pedazos que no les correspondían. Debido a esto, no todos los pedazos fueron tratados por tres equipos.

Estos fueron los resultados que dieron los niños al inicio de la confrontación:

Equipos	Pedazos							
	a (1/2)	b (5/12)	c (3/4)	d (2/3)	e (4/3)	f (5/6)	g (3/2)	h (2)
1		5ch 12 n		2ch 3n			3ch 2n	
2	1ch 2n	5ch 12n					3ch 2n	
3		5ch 12n				5ch 6n		2ch 1n
4	1ch 2n					5ch 6n		1ch
5					3ch 4n		2ch 3n	2ch 1n
6		5ch 12n	3ch 4n		4ch 3n			
7	1ch 2n				4ch 3n			2ch 1n
8	1ch 2n			1ch 1n		1ch 1n		

En el cuadro del pizarrón, arriba de las letras (a, b, c ...) se pegaron los pedazos correspondientes. Más arriba se pegó el entero. Los datos obtenidos se prestaron poco para suscitar discusiones. El equipo 5 confundió en dos casos (e y g) a los pedazos con los enteros -nuevamente cuando los pedazos eran mayores que el entero- pero aclaró su confusión antes de que se iniciara la discusión. Al equipo 8 que dio el resultado 1ch 1n para los pedazos d y f, le contra argumenta un niño: “¿Cómo va a ser uno y uno si el chocolate es más grande? Notamos que el tamaño de estos pedazos es bastante próximo al de un entero. Posiblemente estos niños estimaron.

En 4º grado:

La actividad pudo llevarse a cabo mucho más ordenadamente que en 3º. Durante el trabajo en equipos, la mayoría de los niños toman más piezas (pedazos y enteros) para buscar la igualdad en longitud de pedazos y enteros. Otros equipos simplemente iteran ambas piezas. En un equipo más, al terminárseles las piezas estiman las que faltan para obtener la igualdad (... y se equivocan).

Estos son los resultados proporcionados al empezar la confrontación:

Equipos	Pedazos							
	a (1/2)	b (5/12)	c (3/4)	d (2/3)	e (4/3)	f (5/6)	g (3/2)	h (2)
1	3ch 6n	5ch 15n	3ch 4n					
2				2ch 3n		6ch 10n		
3						3ch 5n	4ch 6n	2ch 1n
4		8ch 20n		4ch 6n				
5	2ch 4n		3ch 4n					
6				2ch 3n	4ch 3n	5ch 6n		
7			3ch 4n				3ch 2n	2ch 1n
8	4ch 8n						1ch 3n	2ch 1n

En la confrontación, se revisa columna por columna. La discusión se centró en los casos en que aparecen distintos resultados. Veamos algunos:

Pedazo a: (3ch, 6n) (2ch, 4n) (4ch, 8n)

Ningún equipo dio la respuesta más simple: 1ch, 2n. En uno de los equipos que observamos obtienen la coincidencia de dos pedazos con un entero, un alumno dice: "Caben dos". Su compañero agrega: "Sí, pero ¿cuántos chocolates compraron?, ¿y cuántos niños?, es lo que tenemos que ver". Entonces se van por más piezas; llegan a 4 chocolates - 8 niños.

Parece que no consideran que 1 chocolate - 2 niños sea una respuestas posible, quizá porque en casi todos los casos que se han trabajado, el todo que se reparte está formado por más de un entero, o bien, sencillamente no aceptan que un conjunto esté formado por **un** solo elemento, máxime cuando se pregunta: "Cuántos chocolates...". Esto mismo pudo haber sucedido en los otros dos equipos, aunque -si vemos las demás respuestas- podemos también suponer que intentan aplicar su regla sobre equivalencia recién descubierta. Volviendo a la confrontación, el maestro pregunta que si (3ch, 6n) y (2ch, 4n) están los dos bien. Casi todos los niños dicen inmediatamente que no. Notemos que ninguna de los dos pares se obtiene del otro aplicando su regla de equivalencia. Los niños aclaran entonces que, o bien (2ch, 4n) y (4ch, 8n) son correctos, o bien (3ch, 6n) es correcto.

Pasa al pizarrón un miembro del equipo que propuso (3ch, 6n) y explica con cierta inseguridad: “Si esto (1ch, 2n) lo ponemos tres veces tocan (3ch, 6n)”.

“¡El triple!” Exclaman algunos alumnos. “¡Sí, los 3 están bien, todos coinciden!” Otro niño agrega: “(los chocolates) suben de 1 en 1 y los niños de 2 en 2”.

Pedazo d: (2ch, 3n) (4ch, 6n) (2ch, 3n)

El maestro dice que hay un resultado distinto. Varios le dicen que todos están bien, que están aumentando al doble.

Pedazo b: (5ch, 15n) (8ch, 20n)

Pasa un niño del equipo que propuso (5ch, 15n), pega las piezas en el pizarrón y dice: “Nosotros empezamos a medir los chocolates con los pedazos que le tocó a cada niño. Llegamos hasta 5 (chocolates). Agarramos más pedacitos y empezamos a calcularte...”. Cuenta los pedacitos que ha puesto. Son 12. Entonces dice que le falló. Este fue el equipo que, a falta de más pedazos, estimo los que le faltaban. Corrigen a (5ch, 12n).

El maestro pregunta que si la otra respuesta está bien (8ch, 20n). Un alumno dice que está mal porque tendría que ser “el doble o el triple o la mitad... En vez de 8 debería ser 10 y en vez de 20, debería ser 24”.

De esta manera se siguieron revisando todas las respuestas.

Conclusiones

Prácticamente todos los niños de los dos grupos pudieron resolver el problema: dado un entero *U*, asocian a un *pedazo A* cualquiera, un par de números *n, m* tales que $n\,U = m\,A$, apoyándose en el contexto de reparto (No de pasteles y No de niños). En 4^{o} grado empiezan a manejar sistemáticamente la relación de equivalencia entre pares: $n\,U = m\,A \Leftrightarrow knU = kmA$, aunque con algunos tropiezos (3ch, 6n y 4ch, 8n ... no son equivalentes).

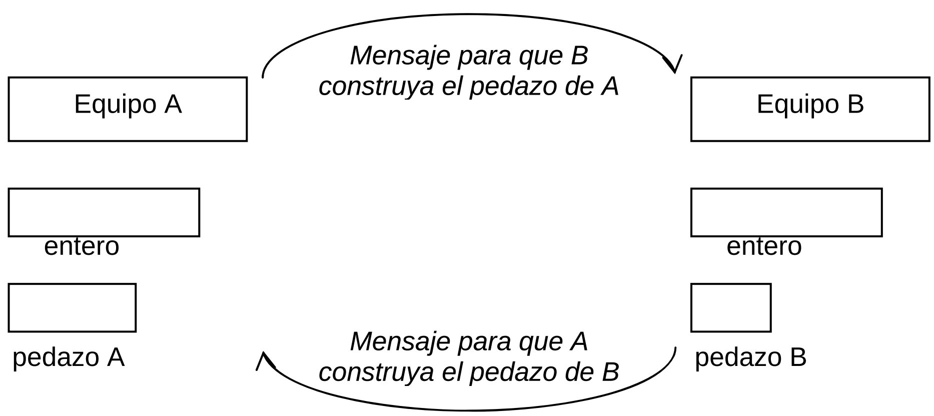
La uniformidad de resultados en 3er grado así como la escasez de errores en ambos grupos impidió reflexiones más interesantes en la confrontación (esperábamos, por ejemplo, que un mismo par fuese asignado a dos pedazos de distinto tamaño). Es posible que a un nivel implícito los niños ya reconozcan que existe una relación biunívoca entre cada tamaño y cada par (o familia de pares equivalentes). Esto se ha de manifestar en la sesión siguiente en la que se espera que utilicen ese par como la información suficiente para construir el pedazo.

Situación didáctica 3.1: Mensajes (Situación Fundamental)

Desarrollo

1. *Consigna*: (Dividir previamente a los 8 equipos en dos bandos de 4 equipos cada uno y entregarles el material que se indica más adelante). “Van a jugar en parejas de equipos: un equipo de este bando con un equipo de este otro bando (asigna a cada equipo su pareja, ver *organización* más adelante). Todos los equipos tienen un chocolate entero como éste (lo muestra). Los equipos de este bando tienen un pedazo de chocolate y los equipos del otro bando también tienen un pedazo, pero de diferente tamaño (**no** los muestra). Se trata de que cada equipo envíe un mensaje a su pareja –que se pueda decir por teléfono- para que ésta pueda construir un pedazo del mismo tamaño. No se vale enseñar el pedazo.”.

   Ejemplificar con dos equipos:

   Añadir que cada equipo tendrá una tira larga (se muestra) para que de ahí recorte el pedazo. La tira tiene el mismo ancho que los enteros y que los pedazos. (15min)

2. *Trabajo en equipos*, *1ª parte*: elaborar el mensaje (15 a 20 minutos).

3. *Intercambio de Mensajes*: El maestro recoge los mensajes (pedir antes que se escriba de qué equipo es y para qué equipo es) y los entrega a los destinatarios (2 minutos).

4. *Trabajo en equipos, 2ª parte*: Interpretan los mensajes, construir el pedazo (10 minutos).

5. *Confrontación Colectiva*: El maestro hará pasar a cada pareja de equipos por turno (pasar a sólo un representante de cada equipo).

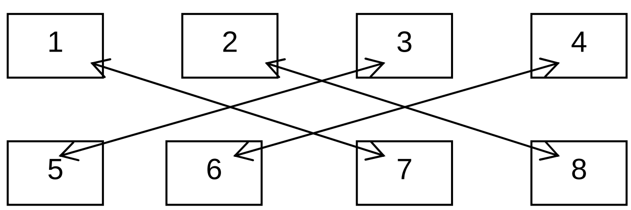
Se verifica primero el pedazo construido por uno de los equipos de la pareja, después el otro. La verificación se realiza simplemente comparando el pedazo original con el pedazo construido. Se lee el mensaje (y, si es posible se escribe en el pizarrón). Si los pedazos no coinciden, se propicia que el grupo juzgue de dónde viene el error: si del mensaje o de su interpretación.

Propiciar también la opinión del grupo en cuanto a la claridad del mensaje y el grado de dificultad para construir el pedazo.

Posiblemente resulte demasiado largo revisar los 8 mensajes. El maestro podría escoger uno de cada tipo de los que aparezcan. (20 minutos)

Organización:

Parejas de equipos de 4 niños. Intentar que los equipos de una misma pareja (de equipos) queden alejados...



Parejas: 1 y 7; 2 y 8; 3 y 5; 4 y 6.

Material:

- El entero para todos los equipos: Tira de cartón de 12cm x 3cm ($\pm$ 3 por equipo).
- Pedazos de distintos tamaños, un tamaño por equipo:

5 tiras de cartón de 8cm x 3 cm. (2/3 del entero)

4 tiras de cartón de 6cm x 3 cm. (1/2 del entero)

6 tiras de cartón de 9cm x 3cm (3/4 del entero)

15 tiras de cartón de 5cm x 3cm (5/12 del entero)

5 tiras de cartón de 16cm x 3cm (4/3 del entero)

2 tiras de cartón de 24cm x 3cm (2 enteros)

8 tiras de cartón de 10cm x 3cm (5/6 del entero)

3 tiras de cartón de 18cm x 3cm (3/2 del entero)

- Una tira por equipo para recortar, de papel o cartulina, de 50cm x 3cm.
- Hoja de papel para escribir el mensaje, lápiz, tijeras (1 por equipo).

NOTA: Al inicio de la sesión se entrega a cada equipo **únicamente** un entero y un pedazo. Se les dice que pueden tomar más si los necesitan.

Análisis previo de la S. D. 3.1: Mensajes

1. La relación de conmensuración entre dos longitudes (materializadas en los enteros y los pedazos) ha sido funcionalizada como un medio más o menos implícito en la resolución de los problemas anteriores: completamente implícita en la actividad de repartir; condición implícita para encontrar una estrategia que permitiera construir el entero; buscada explícitamente para determinar cuántos pasteles se repartieron entre cuántos niños, dados el entero y el pedazo. Nos falta un paso importante: descubrir que la relación de conmensuración nos proporciona la medida del *pedazo* en función del entero, es decir, cuantificar el tamaño del pedazo (la longitud en este caso) siendo el entero la unidad de medida, mediante el par de números que se desprenden de la conmensuración. Queremos, finalmente que los niños lleguen en cierto momento a expresar una medida *L*, en función de una unidad *U* así: *L mide n U entre m, o L mide* $(\frac{n}{m})\ U$.

   La manera como intentaremos propiciar que se dé ese papel a la relación de conmensuración es, simplemente, dando condiciones para que sirva para eso: un equipo A de niños necesita conocer el tamaño de un pedazo, para construirlo. Otro equipo B tiene el pedazo. Ambos tienen los mismos *enteros* (unidades). B dará la información que considere necesaria y suficiente para que A realice su tarea. Se trata de una situación básicamente de comunicación. Esta vez la relación de conmensuración, si es elegida como estrategia, será explicitada en el mensaje. Con esto continuará, esta vez en forma sistemática, la construcción de un lenguaje que exprese dicha relación.

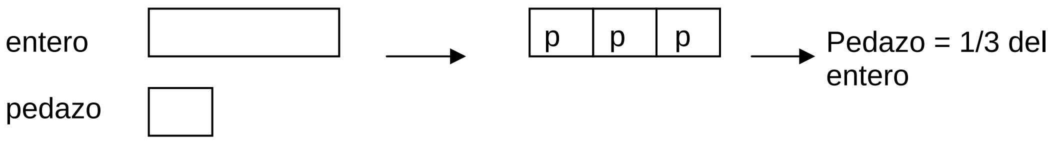
   Por otro lado, la información contenida en estos posibles mensajes (por ejemplo: 4 enteros, 3 pedazos), ¿se refiere a la acción que es necesario ejecutar?, ¿o es considerada ya como la descripción (cuantificación) del pedazo? En el primer caso, el contenido del mensaje estaría jugando el papel de un operador: multiplica por 4, divide entre 3; en el segundo caso jugaría el papel de estado final de la operación: el pedazo mide 4 entre 3. Ambos significados se integran, finalmente, en la noción de número (número como operador, número como medida). En nuestro caso, dadas las características de la situación (“te voy a decir lo que tienes que hacer”) es muy probable que el sentido inicial del mensaje sea el de operador. Sin embargo, en las situaciones sucesivas, se propicia la identificación del contenido del mensaje con el tamaño del pedazo (ver, por ejemplo, situación 3.4). Es por lo tanto posible que al finalizar esta primera etapa, ambos significados estén presentes en una afirmación como: *L mide ¾ de U*. No será sino hasta la tercera etapa que se propiciará expresamente la movilización del racional como operador (ésta ya no forma parte de este trabajo).

2. En esta actividad, el sentido que tendrá para los niños el contenido de sus mensajes estará aún circunscrito al contexto de reparto. La relación de conmensuración entre la unidad y determinada longitud es, para ellos, la relación entre los enteros que se repartieron y los pedazos arrojados por ese reparto. A partir de aquí, suponemos que un trabajo sistemático con longitudes favorecerá que progresivamente el contexto *reparto* pase a segundo plano, es decir, que se destaque de éste la relación entre dos longitudes. Este proceso de descontextualización se propiciará especialmente en una etapa posterior a ésta en la que se abordarán problemas que implican igualmente la conmensuración de dos magnitudes (longitudes, áreas, capacidad…).

3. En esta primera aplicación, las únicas restricciones que se pondrán a los jugadores son: el receptor no debe tomar, ni ver el pedazo del emisor. El emisor no debe enviar en su mensaje una copia dibujada del pedazo. Es muy probable, por lo tanto, que varios emisores soliciten una regla graduada para medir con ella el pedazo y envíen esa medida (es el recurso más económico si ya están familiarizados con la regla). Esto tiene, no obstante, la ventaja de permitir que emisores y receptores lleguen al objetivo y comprendan bien en qué consiste el juego. Si así ocurre, en la segunda aplicación no permitirá el uso de la regla. Pueden aparecer otras estrategias más, alternativas a la de la conmensuración; que se agencien unidades extras de medida más pequeñas que el entero. Este recurso tendrá pocas posibilidades de éxito ya que sería necesario que los receptores tuvieran también esas unidades. O bien, que acudan al fraccionamiento de la unidad. Esto es un poco más probable que suceda en 4° grado, en vista de

los conocimientos que ya tiene sobre fracciones. Sin embargo, este recurso es más complejo y menos sistemático que el de la conmensuración: tendrán que ir haciendo aproximaciones sucesivas, tales como dividir la unidad en dos y probar; en tres y probar, etc.

Es un poco más factible que se implemente este recurso en el caso en que la medida del pedazo es una fracción unitaria ($\frac{1}{n}$) del entero, es decir, cuando el pedazo *cabe* un número entero de veces en el entero:



No obstante, en las confrontaciones colectivas, es muy probable que la conmensuración acabe prevaleciendo por su claridad y sencillez.

4. Acerca de la consigna:

   Ésta es la primera vez que los niños de los grupos experimentales realizarán una actividad de mensajes. Es importante por ello aclarar muy bien la consigna, en particular, en lo que consisten los mensajes “telefónicos” (no deben contener dibujos). Debe aclararse también que, si el mensaje tiene éxito, es decir, si el pedazo construido coincide con el pedazo del emisor, ambos equipos (emisor y receptor) ganan. Si el mensaje no funciona, **ambos** pierden.

5. Aplicación de esta situación en dos grupos control

   Esta misma situación se aplicará en dos grupos, uno de 3° y uno de 4°, que no han participado en la experimentación de las situaciones anteriores. Si hay diferencias significativas entre las estrategias movilizadas por los grupos control y los grupos experimentales, tenderemos más elementos para valorar la influencia del trabajo en las actividades anteriores sobre la manera de abordar esta situación.

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.1: Mensajes

Fecha: 10-06-85
Duración: 3er grado: 1h 15 minutos
4° grado: 1h 15 minutos

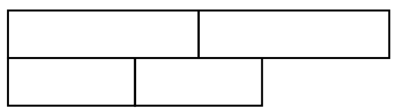
En 3er grado

Antes de iniciar el trabajo, se dio una discusión entre alumnos y maestro acerca de los problemas de indisciplina en el grupo. Transcurrieron 20 minutos.

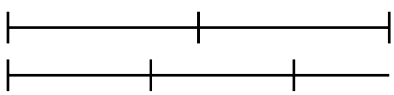
Posteriormente, platican acerca de lo que son los mensajes, para qué sirven, etc. El maestro da la consigna. Todo mundo parece entenderla.

Primera parte. Elaboración de los mensajes:

Para nuestra gran sorpresa, un poco después de iniciada la actividad, varios niños van al escritorio del maestro en busca de más pedazos y más enteros y empiezan, como en las actividades anteriores, a yuxtaponer la serie de pedazos con la serie de enteros, buscando la coincidencia:



Algunos empezaron iterando el entero y el pedazo y marcando con lápiz:



Al ver que otros niños se agencian más pedazos, ellos abandonan este procedimiento y van por más pedazos. Finalmente 5 equipos de los 8 aplicaron este procedimiento que llamamos “**conmensuración**”.

Una vez que encontraron la coincidencia, en ciertos casos, no sabían cómo escribir el mensaje.

La palabra mensaje sugirió a varios niños algo “secreto”. Un niño se puso a buscar en un libro de español palabras “clave”. El observador le dijo: “Acuérdate que el equipo que reciba tu mensaje le debe entender”, y este niño agregó: “Así qué chiste”. Aunque el maestro explicó que una pareja de equipos ganaba cuando el pedazo construido coincidía con el original, esto no quedó muy claro para todos los niños. Recordemos, además, que nunca antes estos niños han tenido una actividad con mensajes.

Sólo dos equipos utilizaron la regla graduada y midieron el pedazo (uno de ellos, después de haber aplicado el procedimiento de *conmensuración*).

Finalmente, dos equipos más, envían mensajes que no aportan información. Uno de ellos pretendía mandar el pedazo envuelto en el mensaje.

El hecho de que cuatro equipos utilizaran sólo la conmensuración y únicamente dos midieran con regla graduada nos pareció extraño. Nosotros pensábamos que dado que el recurso más sencillo, económico y seguro es el de la medición con regla, la mayoría lo utilizaría. Teníamos previsto no permitir el uso de la regla hasta la sesión siguiente.

Nos parece ahora evidente que esta adopción casi inmediata de la conmensuración está estrechamente ligada al hecho de que las actividades anteriores (construir el entero, averiguar cuántos niños y cuántos pasteles) este recurso se utilizó sistemáticamente. Los niños vuelven a tener en la mano un pedazo y un entero, y, a pesar de que el problema es distinto a los anteriores, transfieren el procedimiento.

Nos preguntamos si estaban bien conscientes de que ese procedimiento les iba a servir para los fines de este problema (o si lo aplican sólo porque fue lo que hicieron las últimas veces).

Por lo que sucedió después, en la fase de construcción del pedazo y en la confrontación confirmamos que sí recurrieron a este procedimiento con la intención de resolver este problema. Pero ¿por qué no recurrieron todos a la medición con regla?

Varios niños de los que recurrieron a la conmensuración supusieron desde el principio que los receptores del mensaje tendrían a su disposición varios pedazos para escoger entre ellos el indicado. Como también tenían los enteros, el trabajo de los receptores se limitaría a checar qué pedazo, iterado x veces coincide con y enteros (y en efecto, así ocurrió)[39]. Podemos pensar entonces que, al identificar el problema con el de la situación didáctica 2.3 (seleccionar el entero entre varios posibles), transfieren el procedimiento de resolución que implementaron en aquél. O bien, de manera menos particular, ocurre que el contexto de reparto está muy presente (incluso es retomado en la consigna de este problema), y la tarea de construir un pedazo de chocolate se orienta a partir de las relaciones propias del reparto: repartir pasteles entre niños.

Notemos, antes de continuar, que el tamaño de los pedazos no constituye una variable que explique la adopción de la conmensuración en detrimento de la medición con regla, pues todos los pedazos son fáciles de medir: todos miden un número entero de centímetros, el más pequeño mide 5cm, el más grande 24 cm. Hemos visto además que la mayoría de los niños de 3° están ya familiarizados con el uso de la regla graduada. Queda aún otra explicación: si bien el maestro nunca dijo que no se pudiera usar la regla,

[39] No teníamos previsto que utilizaran los pedazos para elegir uno. Sin embargo, habíamos acordado dejarlos utilizar cualquier procedimiento, excepto el de enviar o dibujar el pedazo. Los pedazos estaban sobre el escritorio del maestro, así que… los niños los utilizaron.

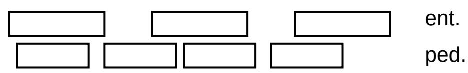
tampoco dijo que sí, y en cambio, enfatizó que los receptores sólo tenían el entero y la tira para recortar ¿Tendrían entonces en cuenta que los receptores no tendrían regla graduada?

Veamos por ahora los mensajes producidos (8 mensajes, uno por equipo):

- Utilizan la conmensuración (4 equipos):

1. "*Dos enteros y tres pedazos*" (pedazo de 8 cm, 2/3 del entero).
2. "*Tres pedazos amarillos y cuatro pedazos anaranjados*" (pedazo de 16 cm, 4/3 del entero).
3. "*Dos azules entre cuatro chocolates enteros*" (pedazo de 24 cm, 2 enteros).
4. "*Tres enteros y cuatro mitades*" (pedazo de 9 cm, ¾ del entero).

   Este mensaje viene con el siguiente dibujo:



- Utilizan medición con regla graduada (2 equipos):

5. "*Lo pueden hacer de diferentes formas, junten 3 pedazos de pasteles enteros o de la cinta que nos dieron recorten 18 cm*" (pedazo de 18 cm, 3/2 del entero).
6. "*De la tira larga recorten 12 cm y de ésas corten 2 cm*" (pedazo de 10 cm, 5/6 del entero).

- No envían información necesaria (2 equipos):

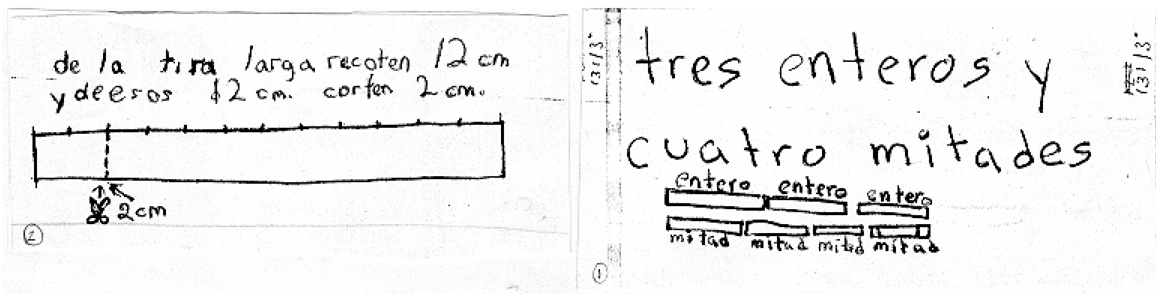
7. "*Queremos que nos hagan con esta tira un pedazo exactamente del mismo tamaño que este chico*" (pedazo de 5 cm, 5/12 del entero).
8. "*Aquí tiene lo que nos pidieron*" (pedazo de 6 cm, ½ del entero).

Los cuatro mensajes que se basan en la conmensuración no describen la acción que debe ejecutar el receptor (por ejemplo: "dos enteros y tres pedazos" en vez de "divide dos enteros entre tres"). Esta redacción es la de las respuestas que se dieron en las dos situaciones anteriores (¿cuántos pasteles, cuántos niños?), lo que posiblemente refleja la influencia de aquéllas sobre la manera de abordar ésta. Notemos, sin embargo, que la palabra *niños* no aparece (la veremos aparecer en 4° grado). Se referirán directamente al pedazo que llaman también por su color o usando la palabra *mitad* (con ésta se refieren a un pedazo cualquiera, no a una mitad). En el mensaje 2, ni siquiera se menciona la palabra *entero*. Es posible que estén centrados en la tarea de averiguar cuántos enteros coinciden con cuántos pedazos y que el supuesto origen de ambos (el reparto) pierda relevancia, pero, es demasiado pronto para asegurarlo.

De los dos mensajes que proponen medición con regla graduada, el 5 anuncia dos formas posibles, la primera –inconclusa- basada también en la conmensuración (faltó indicar la división entre 2).

El mensaje 6 refleja fielmente lo que hicieron sus autores: compararon el entero con el pedazo. La diferencia era de 2 cm. Entonces, había que quitar 2 cm al entero…

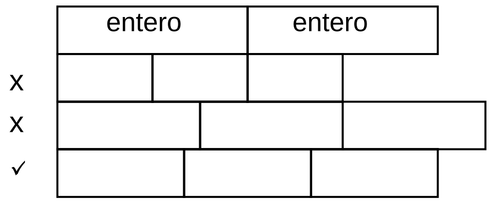
Finalmente, los autores de los dos últimos mensajes (7 y 8) pensaban enviar dentro de su mensaje, el pedazo.



Segunda parte. Construcción de los pedazos:

Para construir los pedazos, algunos de los niños (y después, todos) que recibieron mensajes del tipo *conmensuración* pidieron pedazos de todos los tamaños (éstos estaban en la mesa del maestro). Se les permitió tomarlos. No estaba previsto que los pidieran y por otro lado, habíamos quedado en dejarlos utilizar todos los recursos que se les ocurrieran (excepto el de ir a ver el *pedazo en cuestión*). Nos pareció que el sentido de la actividad no se desvirtuaba mayormente por el hecho de que, en vez de **construir** el pedazo, lo seleccionaran entre un conjunto de 8 pedazos (había 2 de cada color). Se pierde un poco el carácter de generalidad que pude atribuirse a esos mensajes como medio de transmitir una medida. Por ello decidimos, en la sesión siguiente, no facilitar los diferentes pedazos a los receptores.

Una vez con los 8 pedazos, la unidad y el mensaje, se pusieron a probar pedazo por pedazo hasta dar con el deseado. Los dos equipos que observamos (autores de los mensajes 1 y 2) alinearon el número de enteros indicados y, a un lado o encima, el número de pedazos indicados. No habiendo coincidencia desechaban ese pedazo y probaban con otro:



Los equipos que recibieron los mensajes 5 y 6 midieron y recortaron.

Confrontación colectiva

Debido a la discusión suscitada el inicio de la sesión, sólo alcanzó el tiempo para revisar el trabajo de una pareja de equipos (dos mensajes):

Mensaje 6: "D*e la tira larga, recorten 12 cm y de esos recorten 2 cm*"

Los representantes de los equipos emisor y receptor juntan los pedazos (el original y el construido). No coinciden. El receptor se defiende diciendo que "la regla del equipo 2 está mal y que su mensaje no explica nada". El emisor no se defiende. El maestro les dice que perdieron y los manda a su lugar.

Mensaje 1: "*Dos enteros y tres pedazos*"

Los pedazos coinciden. Leen el mensaje y el maestro comenta, admirativamente: "Es un mensaje muy corto el que le llegó al equipo 5". Algunos alumnos preguntan ¿de quién es?

El receptor explica: "Los dos enteros luego supimos que eran éstos (los señala) y los pedazos no sabíamos, entonces tomamos 3 de cada uno de los pedazos y vimos con cuáles tres se hacían dos enteros".

Un alumno protesta: "Pero lo pusieron para que adivinaran, no les dice cuál era, el mensaje no decía cuál". (Este alumno es el autor del mensaje 5. Tal vez piensa que es indispensable mandar la medida en cm.)

Fue clara esta vez, la involuntaria validación que hace el maestro a favor del mensaje 1. Con respecto al mensaje 6, permite que se evidencie que no funcionó y no pide explicaciones (¿por qué no funcionó?), ¡siendo que el mensaje era bueno! El otro mensaje recibe, en cambio, un comentario positivo. No es de extrañar: abrigábamos serias dudas acerca de si los niños verían en la conmensuración un recurso posible, y nos preocupaba por otro lado, que se aferrasen al uso de la regla graduada. Sin embargo, inevitablemente, estas validaciones introducen al juego elementos que teóricamente quisiéramos evitar (la elección de una estrategia en vez de otra se ve influida por la opinión de un adulto con una autoridad especial para los niños).

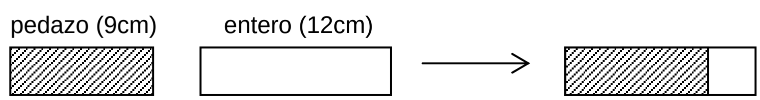
En 4° grado

Como en 3°, sólo dos equipos recurrieron a la medición con regla graduada, 5 equipos aplican la conmensuración y uno más no hace el mensaje.

En este grupo, el maestro añadió a la consigna una restricción (que olvidó plantear en 3°): el mensaje debe ser *telefónico*, esto significa que debe poder ser dicho por teléfono, no debe dibujarse.

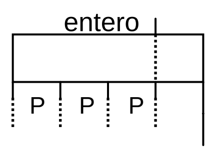
El equipo que no hizo el mensaje, intentó otro procedimiento:

1) Superponen el pedazo sobre el entero:



Al: "Me sobra un pedacito"

2) Ponen el pedazo a lo ancho y ven que cabe 4 veces a lo largo del entero (lo cual se debió a una simple coincidencia, las tiras miden 3cm de ancho y el entero mide 12 cm.):



Al: "¡Es un cuarto! Le tienen que quitar un cuarto pero ¿cómo se los explicamos?"

Han fraccionado la unidad, y a partir de esto, prácticamente encontraron la medida del pedazo: "Le tienen que quitar ¼" de donde podría desprender que el pedazo mide ¾ de U.

Finalmente, los niños de este equipo se enfrascan en una discusión acerca de a quién le toca trabajar con el material, se les agota el tiempo y no producen el mensaje.

Estos son los mensajes que se produjeron:

- Utilizan la conmensuración (5 equipos)

1. "3 *chocolates (y un seis más abajo)*" (pedazo de 6cm, ½ del entero).

2. "*El entero entra dos veces en el pastel"* (pedazo de 24 cm, 2 enteros).
3. "*Tres enteros y seis de los que nos dieron para medir los pedazos que les tocó a cada niño*" (pedazo 18 cm, 3/2 del entero).
4. *"5 enteros y 6 cachitos"* (pedazo 10 cm, 5/6 del entero).
5. *"Unimos 3 caramelos y 4 niños"* (pedazo 9cm, ¾ del entero).

- Conmensuración y medición con la regla graduada (1 equipo).

6. "*Nuestros fueros 3 y fueron 4 enteros, mide de esta manera si mide 15.30 nuestro pedazo, recorta lo que tiene que ser. Mándanos tu medida, nuestra tira es de color amarilla. Y ustedes mándenos cuántos son sus pedazos y cuántas veces en una tira amarilla. Mándenos el color de su tira. Ésta es nuestra mitad de la tira está dibujada*" (no hay nada dibujado) (pedazo 16 cm, 4/3 del entero).

- Medición con regla graduada (1 equipo)

7. "*La medida de nuestro pedazo es de 5 cm. de largo y de ancho 2 cm. y medio (con 3 rayitas) con 3mm milímetros*" (pedazo 5 cm, 5/12 del entero).

La redacción de los mensajes basados en la conmensuración es muy similar a la de los mensajes de 3er grado (no describen la acción que debe ejecutar el receptor). En 4° aparecen referencias explícitas al contexto de reparto (ver mensaje 3 y 5). Hay cierta confusión en los términos utilizados para referirse al entero (chocolate, caramelo, entero) y al pedazo (pastel, pedazo, lo que le tocó a cada niño, cachito, niño), aunque esta confusión no causó problemas en la interpretación.

Los dos mensajes basados en medición con regla reflejan errores cometidos al medir. Las diferencias (15.30 en vez de 16, y 2 y medio con 3 mm en vez de 3) seguramente se deben a que miden a partir del inicio de la regla en vez de a partir del cero.

Construcción de los pedazos:

Igual que en 3° los equipos que reciben mensajes basados en la conmensuración seleccionan el pedazo entre los que hay en vez de construirlo. Todos lo encuentran excepto el equipo que recibió el mensaje 1. Los equipos que reciben los mensajes basados en medición con regla también seleccionan el pedazo entre los disponibles. Los errores de medición son suficientemente pequeños y esto les permite encontrar la tira que más se aproxima.

Confrontación colectiva:

Todos los pedazos construidos coinciden con los originales excepto los correspondientes al mensaje 3 (en efecto, el mensaje elaborado corresponde al pedazo ½ de la unidad en vez de 3/2, los emisores han de haber cambiado el pedazo).

Durante la confrontación se suscitaron dos discusiones interesantes: ante el mensaje “unimos 3 caramelos y 4 niños” un alumno propone que basta con poner “3 caramelos”. Los demás protestan, dicen que así no se puede, pero no explican por qué. Finalmente pasa otro alumno y muestra que 3 enteros coinciden, además de con 4 pedazos, con 2 pedazos (de los que miden 3/2 del entero), y concluye: “No se puede saber cuál”. El hecho de que seleccionaran el pedazo entre los 8 disponibles en vez de construirlo vuelve factible que lo que propuso este alumno funcione (si no hubiera habido dos pedazos distintos que coincidieran con 3 enteros, ¡habría funcionado!). Por ello es importante en adelante, no facilitarles los pedazos.

La otra discusión giró en torno al mensaje 1: “3 chocolates (6)”. Los receptores argumentaron que no construyeron el pedazo porque “podía ser que el paréntesis era que no valía y no sabes si son 6 ó 3 o si son pedazos o qué”. Los autores del mensaje responden diciendo que no importa (si el 6 se refiere a pedazos o a enteros), que de todas maneras se entiende que es la mitad. Las opiniones del grupo se dividen. El maestro les pide que lo prueben, que construyan un pedazo correspondiente a 6 enteros, 3 pedazos y otro para 3 enteros, 6 pedazos. Al escribir esto en el pizarrón, la mayoría del grupo exclama que no son iguales y afirman que no hace falta construir el pedazo.

Finalmente el mensaje 6 fue criticado por *largo* y porque *repite*. El maestro sugiere que le quiten lo que no le hace falta. Queda así: “Nuestros fueron 3 y fueron 4 enteros”.

Se ha llegado por lo tanto a precisar cuál debe ser el contenido mínimo de un mensaje: contener tanto el número de enteros como el número de pedazos, indicando cuáles son los enteros y cuáles los pedazos. O bien… enviar la medida del pedazo.

Resultados obtenidos en los grupos control

En 3^er grado control

El grupo se dividió en 2 partes, cuatro equipos se fueron a otro salón de clase con el maestro y cuatro equipos se quedaron con uno de los observadores.

En cada salón se habló con los niños acerca de lo que es un mensaje y después se planteó la consigna:

"Cada equipo va a recibir un *chocolate entero* y un pedazo de chocolate (se muestra) y va a escribir un mensaje para que un equipo del otro salón construya un pedazo del mismo tamaño. El equipo que reciba el mensaje únicamente tiene chocolates enteros y una tira como esta (se muestra) para construir el pedazo. **No se vale usar regla graduada**".

Se explica además que el mensaje tiene que ser "telefónico" (por lo tanto, no se vale dibujar). Se organizaron las parejas de equipos (emisor-receptor) y se entregó el material (del mismo que se usó anteriormente con 3° y 4°). En uno de los salones se dijo a los niños que si necesitaban más pedazos o enteros podían pedirlos. En el otro, se les entregaron de una vez varios pedazos y varios enteros (esto último no deseábamos que ocurriera por temor a inducir algún procedimiento).

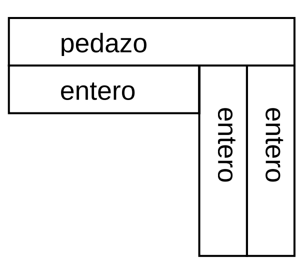
Al principio, prácticamente ningún niño entendía la consigna. Fue necesario reexplicarla varias veces a cada equipo por separado, simplificándola: "Ellos (los receptores) al recibir tu mensaje tiene que poder construir un pedazo como éste. Sólo disponen de enteros, como éste, y de la tira".

Procedimientos que aparecieron

1. Intentos de medir con regla graduada (2 equipos). Varios equipos insistieron en que necesitaban una regla graduada. Al no tenerla, algunos desistieron y dos no; en un equipo **estimaron la medida**: "Recorta tu entero en un decímetro".

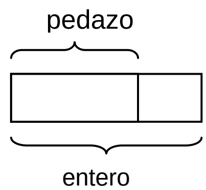
   Otro equipo **marcó una graduación** parecida a la de la regla: I, , , , I, , , , I, , , , I, , , , I a lo largo del pedazo.

2. Uso de una unidad de medida extra, más pequeña: el ancho del entero. En un equipo buscan la manera de hacer coincidir los enteros sobre el pedazo y finalmente la encuentran:



Redactan el siguiente mensaje: “Una acostada y dos paradas arriba de la acostada” (este equipo fue de los que recibió varios pedazos y varios enteros).

3 Intento de fraccionamiento del pedazo. En un equipo observan que el pedazo (8cm) cabe una vez y media en el entero:



Dicen: “Con una rebanada y una mitad de rebanada hacen un entero” y escriben: “recorta tu pastel en ½ (lee: uno y medio)”.

El observador les pregunta si ahí dice uno y medio. Un niño dice que sí, el otro propone 2/1. Finalmente desisten porque “¿Cómo van a saber de qué tamaño es la mitad?” Entonces piden la regla, como no hay, deciden estimar la medida.

4. Dibujan el pedazo (marcando el contorno). En un equipo, después de buscar un rato y no ocurrírseles “ninguna idea”, deciden infringir la regla y mandan el contorno del pedazo.

5. Los dos equipos que recibieron, uno, el pedazo igual a la mitad del entero y el otro, el pedazo igual a dos enteros, encontraron rápidamente esas relaciones y escribieron:

   a) “*una mitad*”

   b) “*recorta tu tira de 2 pedazos de chocolate juntos y forma un pastel y si lo hacen igual ganamos*”.

6 No encuentran **ningún** recurso: 1 equipo.

En 4° grado

1. Intentos de medir con regla (un equipo). También aquí varios niños piden regla graduada. Al no obtenerla, un equipo estima la medida: “Tienen que construir una parte de un chocolate de largo 8cm y de ancho 2cm (casi acertado; el pedazo que tienen estos niños es de 8cm x 3cm) no usen regla porque es trampa. Calculen sus lados”.

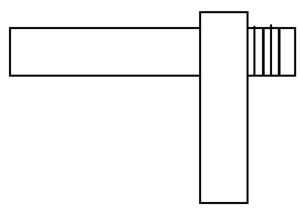
2. Utilizar otras unidades de medida (3 equipos).

a) A algunos equipos se entregó (accidentalmente) una hoja cuadriculada para que escribieran sus mensajes (cuadro de 0.5cm). Uno de ellos utilizó estos cuadros para medir sus pedazos: "Tienes que escribir 36 cuadros de largo y 6 de ancho" (pedazo de 18 cm.). El observador les recuerda que el mensaje es telefónico y que los receptores no tiene la hoja cuadriculada.

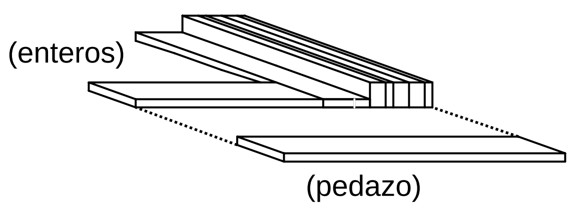
Al.1 "Sí se puede por teléfono porque pueden ir a buscar una hoja de cuadros chicos y ya lo hacen.

Al 2. "Ya sabemos que dos (cuadros) son un centímetro y aunque no tengan regla, les decimos así."

b) Un equipo elabora su mensaje utilizando tres unidades de medida, las tres obtenidas del entero (largo, ancho y grueso): "Necesitan hacer un rectángulo y uno abajo formado como una pistola y poniendo de lado o parado los chocolates, 5 chocolatitos" (pedazo de 16 cm.). Añaden el siguiente dibujo:



Lo que hicieron fue lo siguiente:



c) Un equipo intenta ver cuántas veces cabe su pedazo en la tira que se les dio para recortar. El observador le hace ver que el receptor de su mensaje no tiene una tira larga del mismo tamaño que la suya. Después de esto, no busca otro procedimiento.

3. Utilizan la conmensuración. Dos equipos aplicaron este recurso, uno de ellos con toda claridad:

a) "*Haz un chocolate que sea 3 veces más chico que 2 enteros*".

b) "*Con 4 chocolates enteros medio pedazo del chocolate entero caben 9 pedazos* *de medio chocolate y sobra medio pedazo del chocolate*". Estos niños tenían el pedazo de 5 cm (entero de 12 cm). No lograron hacer coincidir los enteros con los pedazos (se necesitaba iterar el pedazo 12 veces y el entero 5 veces). Sin embargo, parece que concebían este método como un recurso posible.

4) Con los pedazos de la mitad y del doble del entero aparecieron inmediatamente mensajes del tipo: pedazo = 2 enteros y P = ½ entero.

Conclusiones

Resumen de los procedimientos implementados en 3° y 4° (excluimos los casos P=2U y P=½U[40]).

Procedimientos	Grupos experimentales		Grupos control	
	3°	**4°**	**3°**	**4°**
- Intentar medir con regla graduada	2 equipos	2 equipos	2 equipos	1 equipo
- Intentar fraccionar la unidad	---	1 equipo	1 equipo	---
- Utilizar unidades de medida extras independientes de la unidad	---	---	1 equipo	3 equipos
- No abordan el problema (o dibujan el pedazo)	1 equipo	---	2 equipos	---
-Subtotal (procedimientos distintos a la conmensuración)	(3 equipos)	(3 equipos)	(6 equipos)	(4 equipos)
- Aplican la conmensuración	4 equipos	4 equipos	---	2 equipos
Total	6 equipos	6 equipos	6 equipos	6 equipos

(Los equipos que propusieron dos procedimientos fueron contados dos veces)

Lo primero que evidencian estos resultados es que, en efecto, en los grupos experimentales se da una preferencia notoria por la conmensuración, a diferencia de los grupos control. En cambio, en los grupos control aparece una diversidad de procedimientos mayor que en los otros grupos. Añadamos a esto el hecho de que en los grupos experimentales, a pesar de que no se prohibió el uso de la regla, sólo dos equipos de cada grupo la utilizan. En los grupos control la mayoría de los equipos solicitó la regla. Fue sólo porque ésta no se les facilitó que varios de ellos optaron por otros recursos.

Esto nos confirma que en principio, el recurso por el que naturalmente optan los niños frente a esta situación es el uso de la regla, que, evidentemente, es el más económico. Una vez prohibida la regla, la mayoría de los niños del grupo control encuentran una

[40] Excluimos estos dos casos porque ninguno de los dos refleja la preferencia por un procedimiento en particular: en el caso de P=1/2U, fracción conocida y fácil de determinar, es evidente que hay preferencia por el fraccionamiento. En el caso de P=2U, un número natural permite expresar la relación.

manera de poder medir: adoptan unidades de medida suplementarias.

Retomemos ahora la pregunta ¿por qué esta preferencia marcada por la conmensuración en los grupos experimentales? Es evidente que hay una influencia de las actividades anteriores, pero, ¿qué tipo de influencia? Desechamos la posibilidad de que simplemente hayan transferido el procedimiento de la situación anterior a ésta sin tener conciencia de que ese procedimiento servía para resolverla: en el momento de interpretar el mensaje, todos los equipos encontraron el entero. Además, en sus argumentos puede leerse claramente que sabían que sus mensajes servían para el objetivo en juego. Hemos visto que varios alumnos supusieron desde el principio que los receptores de su mensaje podían escoger el pedazo entre varios posibles (en vez de construirlo). Esta reducción del problema favorece la conmensuración (pero no la implica), sobre todo si pensamos que resolvieron ya un problema similar (seleccionar el entero entre varios posibles, S. D. 2.3) aplicando la conmensuración.

Por otro lado, la gama de recursos movilizados por los grupos control, la conmensuración y el fraccionamiento, son los únicos recursos que permiten resolver sistemáticamente la situación (una vez excluida la regla), pero es muy posible que la conmensuración sea el recurso más económico: implica iterar enteros y pedazos y “esperar” a que coincidan. El fraccionamiento -como recurso sistemático- implica dividir la unidad sucesivamente en 2, en 3, en 4 etc., cotejándola cada vez con el pedazo hasta obtener coincidencia entre éste y una de las subdivisiones de la unidad (y, si el pedazo es mayor que el entero, aplicar estos pasos sólo a la parte del pedazo que exceda el entero). Los dos equipos que aplicaron (o lo intentaron) el fraccionamiento lo hicieron para casos en que fue especialmente fácil determinar la fracción: pedazo = un entero y medio, y pedazo = un entero menos un cuarto… y este cuarto fue descubierto gracias a que era igual al ancho de la tira. (Esto no significa que no sea posible diseñar situaciones tales que el fraccionamiento sea la estrategia más favorecida).

Haremos por lo tanto las siguiente suposiciones: 1) la contigüidad en el tiempo entre las actividades previas a ésta y ésta, hace que los niños de los grupos experimentales tiendan a usar el recurso que han venido aplicando en las anteriores, en detrimento del uso de la regla que es el procedimiento más económico. Además, esta contigüidad lleva a algunos niños a reducir el problema a uno previamente resuelto. 2) A largo de las actividades anteriores, los niños han perfeccionado un recurso: la conmensuración, que es el más eficaz (sistemático y sencillo) –exceptuando el uso de la regla- para resolver esta situación. Esto contribuye a explicar el que no necesiten buscar otros recursos, como los que vemos aparecer en el grupo control.

Ahora nos planteamos la pregunta inversa: ¿por qué la mayoría de los alumnos de los grupos control no recurrieron a la conmensuración, una vez que supieron que no se podía usar la regla? En el grupo de 4° grado control el observador sugirió este recurso a dos equipos (eso no estaba planeado): uno había estimado la medida y el otro no encontraba ningún recurso. El observador les dijo prácticamente todo lo que había que hacer: obtener la coincidencia de enteros y pedazos, así los receptores podrían unir los enteros indicados y dividir entre el número de pedazos… ninguno de los dos equipos aceptó el procedimiento. Simplemente, no veían cómo, a partir de todo eso, los receptores sabrían cuál es el tamaño de los pedazos. Podemos suponer dos cosas: 1) Tienden a implementar recursos más próximos a su experiencia: igualar la longitud de un pedazo mediante el uso de unidades más pequeñas (el cuadro de la hoja, el ancho y el grueso de la tira de cartón). En la medida en que éstos les funcionan, no tienen ninguna necesidad de buscar otro procedimiento, y 2) el recurso a la conmensuración no proporciona una respuesta inmediata a la pregunta ¿de qué tamaño es el entero? Pasa por el hecho de realizar mental y anticipadamente la operación: el tamaño de un pedazo se obtiene **dividiendo** el tamaño de *x* enteros –que es igual al de *y* pedazos- entre *y*. Esto, a su vez, implica el que se prevea que cierto número de enteros coincida con cierto número de pedazos. Estas reflexiones fueron favorecidas en los grupos experimentales precisamente en las situaciones previas a ésta: en el contexto de reparto, el pedazo es resultado de una división de cierto número de enteros entre cierto número de niños. A lo largo de las actividades, los niños tuvieron varias ocasiones de manejar la relación que existe entre los datos del reparto y el tamaño del pedazo. La coincidencia entre cierto número de pedazos con cierto número de enteros era un hecho necesario (en el contexto del reparto) y fue implementada para construir el entero y para determinar los datos del reparto.

Parece confirmarse entonces el hecho de que a lo largo de las situaciones previas los niños toman conciencia de las relaciones entre enteros, pedazos y datos del reparto que subyacen a la implementación de la conmensuración como medio para medir. Pero no pedemos afirmar que esas actividades sean un **requisito**. De hecho, hemos visto a dos equipos de 4° grado control implementar la conmensuración. Si se dieran más ocasiones a este grupo de enfrentarse al problema, posiblemente este recurso ganaría *partidarios* entre los demás niños. Si así fuera, habría que cuestionar la pertinencia de las actividades previas (en tanto previas). Hasta ahora, los pocos datos empíricos que tenemos a la mano nos inclinan a pensar que es poco probable que aquello suceda: cuatro meses después de la aplicación de esta situación (incluyendo dos meses de vacaciones) se volvió a aplicar esta misma situación en el grupo **experimental** de 4° grado (para entonces ya era 5° grado).

Sucedió lo siguiente: sólo tres equipos aplican la conmensuración. Los otros cinco equipos implementan procedimientos distintos, similares a los que aparecieron en los grupos control. Pero en la sesión siguiente (se repite la actividad) 5 equipos implementan la conmensuración y tres no.

Por otro lado, el otro grupo de 5° grado (el que fue grupo control el año escolar anterior) fue asignado al maestro que ha participado en esta investigación. El maestro decidió aplicar esta secuencia de situaciones didácticas también en ese grupo. Le sugerimos que intentara empezar a partir de esta situación (mensajes), dejando provisionalmente de lado las situaciones anteriores. El maestro lo intentó durante más o menos cuatro sesiones; ni la conmensuración ni el fraccionamiento pudieron establecerse. El grupo empezó a desinteresarse y el maestro retomó la secuencia desde el principio.

Análisis previo de la S. D. 3.1: Mensajes (2ª. Aplicación).

Esta vez se indicará que los receptores del mensaje no dispondrán de los diferentes pedazos para elegir uno que no se podrá utilizar regla graduada.

Para dar un poco de más sentido a la comunicación –y para evitar que los receptores cedan a la tentación de ir a ver el pedazo del emisor- separaremos a los equipos de cada pareja emisor-receptor: unos en un salón, los otros en otro o en el patio de la escuela.

Se trabajará con el mismo material que en la situación anterior, cuidando que a cada equipo le toque ahora un pedazo distinto al que le tocó en la anterior.

Esperamos que la ausencia de regla graduada propicie en más equipos el recurso a la conmensuración, aunque, el hecho de que los receptores ya no dispongan de pedazos para elegir puede ser un impedimento para que consideren útil ese recurso.

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.1: Mensajes (2ª aplicación)

Fecha: en 3°, 12-06-85
en 4°, 14-06-85
Duración: en 3°: 1h 25 min.
en 4°: 1 h.

En 3er grado

Elaboración de los mensajes:

Resumidos en el siguiente cuadro los procedimientos implementados por cada equipo en la situación anterior y en ésta, así como los cambios de procedimientos entre una y otra.

S. D. 3.1	
1ª aplicación	**2ª aplicación** (no hay regla; no hay pedazos para elegir)
Utilizan la conmensuración: 4 equipos. Eq. 2 – 3 – 4 – 6	Utilizan la conmensuración: 3 equipos. Eq. 7 – 3 – 4
Miden: 2 equipos Eq. 5 – 7	Intentan medir y estiman o abandonan: 3 equipos. Eq. 5 – 2 – 8
No envían la información necesaria: 2 eq. Eq. 1 – 8	No envían la información necesaria: 1 eq. Eq. 1
	Utilizan fraccionamiento de la unidad (para p = ½ U) 1 equipo. Eq. 6.

Al excluirse el recurso a la regla graduada, sólo un equipo más (equipo 7), recurre a la conmensuración. En cambio, el que los receptores ya no dispongan del juego de pedazos para elegir, provoca que dos equipos que habían recurrido a la conmensuración, dejen de hacerlo y soliciten regla graduada (equipos 2 y 6). Al no obtenerla, uno de ellos desiste y el otro descubre que su pedazo es la mitad del entero, y escribe su mensaje en esos términos (fraccionamiento).

En los demás equipos, las nuevas restricciones no producen cambios significativos de procedimiento:

- Dos equipos (3 y 4) siguen aplicando la conmensuración.
- Uno de los equipos (5) que midió, lo vuelve a intentar, esta vez estimando la

medida (¡y acierta!).

- De los dos equipos (1 y 8) que la vez pasada intentaron enviar el pedazo, uno de ellos ahora pide regla graduada y al no obtenerla, abandona. El otro escribe un mensaje que no contiene la información necesaria.

Por lo tanto, en este momento, sólo tres equipos ven en la conmensuración un recurso útil para resolver este problema. Los demás, fuera de la medición con regla, no tienen otro recurso y quedan bloqueados, excepto en el caso en que la fracción implicada es muy fácil de determinar (un medio). Para dos equipos (2 y 6) aparentemente la conmensuración permite resolver el problema de seleccionar el entero, más no el de construirlo.

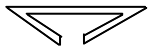
Interpretación de los mensajes, construcción de los enteros

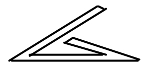
Con respecto a los tres mensajes basados en la conmensuración, dos de ellos los reciben equipos que también utilizaron la conmensuración en esta situación o en la anterior (equipo 2 y equipo 7) y los interpretan correctamente. Los mensajes son: "*poniéndole 12 pedazos chicos azules y 5 enteros y el azul es el pedazo que nos tocó*" (1) y "*2 niños entre 4 chocolates*" (2). Con respecto al primero, la división de la tira en doce partes fue difícil y el pedazo obtenido no coincidió con el original.

El otro mensaje de conmensuración fue recibido por un equipo que en esta situación no recurrió a la conmensuración al elaborar su propio mensaje (equipo 6). El mensaje es: "*dos enteros y tres pedazos*" (3). Al recibirlo, lo interpretan de la siguiente manera: ven si los dos enteros coinciden con tres de sus propios pedazos y, obviamente, no coinciden. Después no saben qué hacer. Parece claro que intentan hacer lo mismo que la vez pasada (seleccionar el pedazo) pero no tienen más que su pedazo, se limitan a ver si éste satisface la condición. Este mismo equipo fue uno de los que habiendo utilizado la conmensuración la vez pasada, no lo hace ahora. El hecho de que no pueda interpretar el mensaje nos confirma que no vieron en la conmensuración un recurso útil para este problema.

Un poco después, la única niña que siguió intentando resolver el problema, pide ayuda a un niño de otro equipo (equipo 7); éste entiende el mensaje, más no lo explica. Se pone a construir el pedazo pero… tiene problemas para dividir la tira en tres partes. La niña que pidió la ayuda, toma la tira y lo intenta:

- Dobla la tira en dos y la desdobla.

- La dobla así:  y la desdobla.

- Finalmente, la dobla como carta. 

El observador le pregunta: “¿Y cuál es el pedazo?”. Ella señala uno de los tercios. ¿Ha comprendido?

En otro equipo que no ha implementado la conmensuración en ninguna de las dos situaciones reciben este mensaje: “*5 chocolates entre un niño*” (4). El mensaje no tiene nada que ver con el pedazo correspondiente (éste era 3/2 del entero). El autor parece haberse basado en el hecho de que, casualmente, tenía 5 enteros sobre su mesa, y da a su mensaje una redacción como la de los mensajes que se reprodujeron en la situación anterior. Los receptores piden pedazos para “*ir probando*”. Al no obtenerlos, una niña del equipo exclama “¡ya se!” y construye un pedazo del tamaño de 5 enteros…

Con respecto a los dos mensajes restantes, no hay problemas: en uno envían la medida en centímetros y los receptores, al no disponer de regla, construyen el pedazo estimado. En el otro envían la fracción (un medio) y los receptores construyen el pedazo correctamente.

En resumen: 5 equipos de los 8 no implementan la conmensuración para resolver este problema. De éstos, uno de ellos tampoco puede interpretar un mensaje basado en la conmensuración. Nos preguntamos cuántos más están en este caso.

La confrontación colectiva tenía asignado un importante papel en el proceso que no se cumplió, una vez más, debido a un ambiente poco favorable al trabajo. Era el momento en que podían manifestarse las limitaciones de aquellos mensajes que proporcionan medidas estimadas, o que simplemente no son claros. De igual modo, debía funcionar como canal para difundir la posibilidad de recurrir a la conmensuración (y la manera de hacerlo), como un recurso sencillo y sistemático. Sólo hubo tiempo para revisar tres mensajes con la mayoría del grupo ya muy disperso.

En 4° grado:

Elaboración de los mensajes (se prohíbe la regla; no se dan pedazos para escoger).

Todos los equipos recurren a la conmensuración, es decir, los cinco que ya lo habían hecho la vez anterior, los dos que habían utilizado regla graduada y el que no había elaborado ningún mensaje. En 10 minutos todos los mensajes estaban listos:

1) "*Cabe 1 vez en 2 pedazos*"	(pedazo = ½ del entero)
2) "*10 chocolates*" *(5)* *12 niños* *(6)*	(pedazo = 5/6 del entero)
3) "*4 enteros y 3 pedazos*"	(pedazo = 4/3 del entero)
4) "Con 3 enteros pueden formar dos chocolates, el chocolate es rojo"	(pedazo = 3/2 del entero)
5) "*En 3 chocolates enteros, entran 4 pedazos*"	(pedazo = 3/4 del entero)
6) "*4 en 2*"	(pedazo = 2 enteros)
7) " *mitad de nuestro pedazo largo y tocan 12 pedazos a cada niño y 5 enteros*"	(pedazo = 5/12 del entero)
8) "*3 pedazos caben en 2 enteros*"	(pedazo = 2/3 del entero)

Dos de los mensajes (4 y 7), además de la relación de conmensuración entre enteros y pedazos, proponen otro recurso (tal vez piensan que la conmensuración no será bien interpretada): el color del pedazo, recurso que no será útil puesto que hay varios pedazos de ese color y, además, los receptores no dispondrán de los pedazos, y dibujan la mitad de su pedazo. Este último recurso no estaba permitido (el mensaje debía se *telefónico*).

El mensaje 2 propone dos pares equivalentes 10 - 12 y 5 - 6. En el mensaje 7 reencontramos de manera confusa una referencia al reparto: … "*Tocan 12 pedazos a cada niño*" ¿quisieron decir, "*tocan pedazos a 12 niños*"? Extrañamente, en la redacción de todos los mensajes sigue estando ausente la explicitación de la acción que debe realizar el receptor. La redacción sigue pareciendo una respuesta a la pregunta ¿cuántos enteros, cuántos pedazos?

Interpretación de los mensajes, construcción de los pedazos

Todos los equipos logran construir más o menos rápidamente el pedazo. Nuevamente, las divisiones de una tira entre 3, 6 y 12 presentan problemas técnicos. En los casos que pudimos observar se implementaron los siguientes recursos:

- para 4 enteros - 3 pedazos: doblan la tira (de 4 enteros) en tres, como carta
- para 2 enteros - 3 pedazos: miden la tira (de 2 enteros: 24cm), buscan el factor que multiplicado por 3, dé 24.
- para 5 enteros - 12 pedazos: hacen aproximaciones sucesivas.

Confrontación colectiva:

Todos los pedazos construidos coinciden con el original, excepto el pedazo correspondiente al mensaje 2. Los emisores argumentan que ese mensaje no se entiende (pero no dicen cómo lo interpretaron). El grupo está de acuerdo: “Hay muchos números”. Los emisores argumentan que “es lo mismo” (se refiere a las parejas 5-6 y 10-12), pero algunos niños entienden que se refiere a las parejas 10-6 y 5-12 y protestan diciendo que “sería la mitad”. Finalmente acuerdan que el mensaje era malo, que podrían haber puesto nada más 5 chocolates, 6 niños.

Conclusiones:

La ausencia de regla graduada ha propiciado que ahora todos los quipos de 4° grado recurran a la conmensuración como un medio para proporcionar la medida de una longitud en función de determinada unidad, apoyándose en el contexto de reparto (las unidades juegan el papel de enteros que fueron repartidos y la longitud en cuestión está materializada por el pedazo que arroja ese reparto).

En cambio, en 3er grado sólo tres equipos movilizan la conmensuración para resolver este problema. Dos equipos más la consideran útil sólo si se trata de seleccionar el pedazo. Detengámonos un poco en el caso de estos dos equipos.

Cuando se trata de seleccionar el pedazo, la relación de conmensuración *x enteros = y pedazos* expresa de una manera bastante directa lo que he hecho se hace para resolver el problema: unir ***x*** enteros y buscar los pedazos que iterados ***y*** veces coincidan con esos ***x*** enteros. Subyace el hecho de que sólo **un** pedazo satisface dicha relación. En cambio, cuando se trata de construir el pedazo, el mensaje *x enteros = y pedazos* ya no expresa directamente lo que tiene que hacer el receptor, puesto que éste no tiene ya en sus manos uno de los términos de la ecuación: el pedazo. Esta vez, emisor y receptor deben saber que de esa ecuación, teniendo el entero, es posible determinar el tamaño del pedazo, es decir, deben leer en esa ecuación la composición de las dos operaciones en juego (unir, dividir) que se aplican al entero para obtener el pedazo. Esto implica también, por supuesto, el poder concebir que el producto de esas dos operaciones es único. Suponemos que en esta diferencia entre las dos situaciones (seleccionar, construir) está la explicación de por qué aplican la conmensuración para resolver la primera y no para la segunda. Más precisamente, suponemos que la dificultad que encierra la segunda (construir el pedazo) es la necesidad de concebir (no de ejecutar) la composición de las dos operaciones en juego.

En el caso de los 3 equipos que no han implementado la conmensuración en ninguna de las dos situaciones, posiblemente la dificultad está más lejos: no se establece una relación entre los datos de un reparto y el tamaño del pedazo que resulta, o dicho en otros términos, no se considera que al a relación *x enteros = y pedazos* corresponda un pedazo determinado. La transformación (. x) (÷ y) no es vista como operación en el sentido de que a un entero dado asocie un único pedazo.

Dado que las confrontaciones colectivas no han funcionado, hemos decidido diseñar una situación más para 3er grado, cuyo objetivo sea propiciar el análisis colectivo de algunos de los mensajes que ya han elaborado en las dos situaciones anteriores. Nos interesa, por un lado, favorecer que se pongan de acuerdo, colectivamente, acerca de los mensajes que no permitan construir el pedazo. Por otro lado, la información que pueden proporcionar los alumnos que han podido resolver el problema aplicando la conmensuración, posiblemente ya pueda ser aprovechada por algunos de los que aún no lo logran. Interesa, en particular, que vean cómo puede ser interpretado un mensaje basado en la conmensuración (esta interpretación es la concretización de las dos operaciones en juego).

Situación didáctica 3.2: Análisis colectiva de los mensajes (3er grado)

Desarrollo

1. *Consigna*: Explicar que se retoman algunos mensajes para los que no hubo tiempo de ver si estaban bien o no. Si el grupo no se pone de acuerdo, o no pueden justificar por qué sirve o no sirve, todos intentarán construir el pedazo

correspondiente. El pedazo original se esconderá en un sobre, y al final, se hará la comparación. (5 min)

Para cada mensaje:

2. *Discusión colectiva sobre el mensaje*: Escribir el mensaje en el pizarrón. (5 a 10 min)
3. *Construcción del pedazo correspondiente al mensaje*: (Sólo si es necesario). El pedazo original correspondiente se mete en un sobre. Se entrega a cada equipo una tira para recortar y un *entero* (pueden tomar más si lo desean). (10 min)
4. *Verificación y discusión colectiva*: Se comparan los pedazos construidos entre sí y después con el original. Intentar que se expliciten los procedimientos seguidos y los errores cometidos o las insuficiencias del mensaje. (10 min)

Organización:

Colectiva y en equipos en la parte 3.

Mensajes que se analizarán:

1) "Dos enteros y 3 pedazos" (pedazo de 8cm, 2/3 del entero).
2) "Queremos que nos hagan con la tira un pedazo exactamente del mismo tamaño que este chico" (pedazo de 10cm, 5/6 del entero).
3) "Poniéndole 12 pedazos chicos y 5 enteros y el azul es el que nos tocó" (pedazo de 5cm, 5/12 del entero).
4) "Lo pueden hacer de diferentes formas. Junten 3 pedazos de pastel enteros o de la cinta recorten 18cm" (pedazo de 18cm, 3/2 del entero).

Material (Sólo en caso de que se decida construir algún pedazo):

- 5 enteros (tira de cartón de 12cm x 3cm)
- dos o tres tiras de cartulina o papel para recortar (40cm x 3cm)

Además el pedazo correspondiente a cada mensaje.

Análisis previo de la S. D. 3.2: Análisis colectivo de los mensajes

Debido a que las confrontaciones de las dos situaciones anteriores no han podido realizarse con éxito en 3er grado, y que es en éstas en las que el grupo puede conocer los diferentes recursos implementados para resolver el problema y discriminar los que funcionan de los que no, retomaremos ahora varios mensajes, de distintos tipos, y propiciaremos la discusión colectiva acerca de cada uno. Si la mayoría del grupo no puede juzgar *a priori* si alguno de los mensajes funciona o no, se les pedirá que lo prueben, es decir, que intenten construir el pedazo a partir del mensaje. Posteriormente se cotejarán pedazos construidos con pedazos originales intentando destacar el motivo de los posibles errores.

Dado que todos los equipos trabajarán cada vez con el mismo mensaje, habrá mayores posibilidades de discusión en torno a cada mensaje: algunos no lo podrán interpretar, pero otros sí, o bien, aparecerán distintas interpretaciones ya sea porque el mensaje es ambiguo, o porque no se interpreta correctamente… La verificación se realizará primero comprando los pedazos producidos por cada equipo y además comparando éstos con el original.

Es importante que la sesión sea ágil: No dar más de 10 minutos para la construcción de los pedazos. Aquéllos que no puedan terminar una vez, lo intentarán en la siguiente.

De esta manera esperamos: 1) que se destaque que la medición estimada no permite construir el pedazo con precisión, y 2) que aquellos alumnos que aún no ven en la conmensuración un recurso posible, tengan una ocasión más de probarlo, o de conocer cómo lo utilizan sus compañeros.

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.2: Análisis colectivo de los mensajes (3er grado)

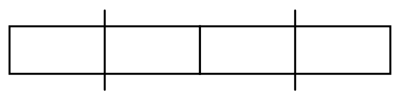
Fecha: 17-06-85
Duración: 1 hora.

Mensaje 1: “Dos enteros 3 pedazos”

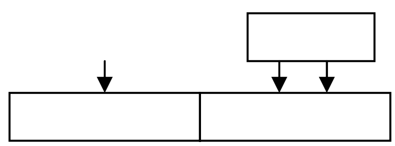
El maestro modifica la situación involuntariamente: pide a los niños que intenten construir el pedazo correspondiente al mensaje, antes de haber propiciado la discusión acerca de si funciona o no funciona. Aunque antes había dicho que se dedicarían a ver qué mensajes sirven y cuáles no, el que de entrada se pida que se construya el pedazo implica una sutil validación de este mensaje.

Cinco equipos de los 8 logran interpretar el mensaje, una vez más, aquéllos que ya habían aplicado la conmensuración en una de las dos situaciones anteriores (equipos 2-3-4-6-7). Por lo tanto, los tres equipos que no la han aplicado, siguen sin poder interpretar el mensaje (equipos 1 y 8; y equipo 5 que recurrió a la conmensuración sólo cuando dispuso de pedazos para elegir). Es necesario decir que en los equipos 1 y 8 no vimos intentos de abordar el problema. Pareciera que cada vez están más ajenos, o más aún, que aprovechan la posibilidad de *rebelarse* que les ofrecen las clases experimentales (su maestra no esta presente). En todo caso, no es posible ya pretender derivar conclusiones sobre la secuencia de problemas a partir del trabajo de estos niños, o sólo una: no logramos motivarlos.

Sólo pudimos observar a un niño de uno de los equipos que interpretó el mensaje: unió dos enteros y pidió una regla graduada (quería medir la longitud de los dos enteros pero dividirla entre tres). Al no obtenerla, pide los diferentes pedazos para probar. Tampoco los obtuvo; entonces dice que podría partir los enteros a la mitad



agrega “no, así saldrían 4 pedazos, es como por aquí (señala con el dedo un pedazo como de ¾ del entero)”. Ayudándose con una hoja de papel, itera ese pedazo:



le sobra… dice que eso lo podría repartir entre los tres (el procedimiento es típico de reparto). Finalmente logra ajustar la medida y obtiene el pedazo correcto.

En la confrontación colectiva se comparan los 4 pedazos producidos entre sí (un equipo más no logra terminar). Tres coinciden, otro es un poco más corto. El maestro saca entonces el pedazo original del sobre. Los alumnos parecen emocionados. Se coteja el original con los pedazos… el que estaba un poco más corto era el incorrecto. El maestro pide a uno de los equipos que lo hizo bien que explique. La explicación es clara: unió dos enteros, recortó la tira de ese tamaño, dividió entre tres:

M: *“¿Por qué dos enteros?”*
Al: *“Porque el mensaje lo dice”*
M: *“¿Y no podrías doblar en 4 o en 5?”*
Al: *“No, porque dice 3 pedazos”*

Mensaje 2: "Queremos que nos hagan con la tira un pedazo exactamente del mismo tamaño que este chico".

Varios alumnos gritan en coro que está mal. Un alumno argumenta: "Dice con esta tira, pero cuál tira? y luego dice del mismo tamaño que este chico, pero cuál chico, el azul, o el amarillo o cuál, no se sabe". Otro alumno: "Puede ser de este tamaño (señala con las manos como 30cm) y ellos lo ven chico".

Mensaje 3: "Poniéndole 12 pedazos chicos azules y 5 enteros y el azul es el que nos tocó".

El equipo que elaboró el mensaje protesta que se ponga a prueba su mensaje, porque ya se había aceptado que era bueno. El maestro insiste y los alumnos no ceden. Los demás alumnos se unen a éstos, tal vez porque quisieran ahorrarse el trabajo de ponerlo a prueba. Finalmente el maestro cede.

Mensaje 4: "Lo pueden hacer de diferentes formas. Junten 3 pedazos de pasteles enteros o de la cinta recorten 18 centímetros".

El pedazo correspondiente a este mensaje medía efectivamente 18cm (3/2 del entero). Parece que la primera manera que proponen es la conmensuración, pero olvidan indicar que se divida entre dos.

Varios alumnos rechazan el mensaje y nadie lo defiende (ni sus autores). Argumentan que no dice '"cuáles son los tres pedazos de pasteles enteros" (los autores se referían a los enteros), que 3 enteros miden 36cm y no 18cm, y que, además, no llevaban regla (lo cual no es exacto, porque en la situación sí se les permitió usar regla).

El maestro da por terminada la sesión, poniendo énfasis en qué mensajes sí fueron aceptados (… los dos que implican la conmensuración).

Conclusiones

Esta vez la confrontación colectiva de mensajes ha dado aparentemente mejores resultados ya que se explicitaron algunos elementos importantes que hacen que un mensaje no funcione: ambigüedad (mensajes 2 y 4), uso de la regla graduada (mensaje 4), imprecisión de los términos (mensaje 4).

Por otro lado, el mensaje que moviliza la conmensuración fue interpretado correctamente por 5 equipos y explicado claramente a todo el grupo. Este mensaje resultó validado de varias maneras: porque fue el único que se puso a prueba sin discusión previa, fue al que más tiempo se le dedicó y, además, pudo ser interpretado por varios equipos. Es muy probable que ante una nueva situación estos cinco equipos recurran a la conmensuración. Sin embargo, con respecto a los otros tres, precisamente aquéllos que no han recurrido a la conmensuración en las otras situaciones, tenemos serias dudas de que lo hagan en lo sucesivo.

Situación didáctica 3.3: Reducción de mensajes

Desarrollo

Primera parte. Elaboración del mensaje

1. *Consigna*: "Nuevamente se trata de escribir un mensaje para que el otro equipo pueda construir un pedazo, pero ahora ganará un solo equipo: el que escriba el mensaje más corto (con el menor número de palabras) y que funcione". (2 min)
2. *Trabajo en equipos*: Se entrega a cada equipo un *pedazo* y el entero. Se les indica que pueden pedir más si los necesitan. Elaboran el mensaje. (15 min.)
3. *Confrontación colectiva*: Se registran en el pizarrón todos los mensajes. Se propicia la discusión: ¿Cuál es el más corto? ¿Funciona?. Una vez elegido el mensaje que satisface las condiciones pedidas, el maestro solicita al grupo que intenten reducirlo aún más. (30 min.)

Segunda parte. Interpretación del mensaje.

4. *Consigna*: "Ahora se trata de construir un pedazo del tamaño que indica el mensaje. A cada equipo se entregarán todos los enteros que necesite". Se escribe en el pizarrón el mensaje para cada equipo. **La redacción del mensaje debe ser la acordada en la primera parte.** (2 min.)

Equipo:	1	2	3	4	5	6	7	8
Mensaje:	(1,2)	(2,1)	(3,4)	(4,3)	(2,4)	(3,6)	(3,2)	(1,3)

   (el primer elemento del par indica el número de enteros y el segundo, el número de pedazos).

5. *Trabajo en equipos*: Se les entrega un entero y una tira para recortar. Construyen el pedazo (10 min.)

6. *Confrontación colectiva*: Analizar colectivamente si los mensajes acordados funcionan o no. En caso de que aún no se haya reducido a su mínima expresión: (x, y), propiciar que se realicen mayores reducciones.

Organización: Equipos de 4 niños.

Material

Primera parte. El mismo que en la S. D. 3.1 (1 entero y 8 pedazos, uno para cada equipo, más excedente de pedazos y enteros, por si los solicitan).

Segunda parte. Para cada equipo:

- $\pm$ 5 enteros: tira de cartón de 9cm x 3 cm.
- Una tira para recortar de 50cm x 3 cm.

Análisis previo de la S. D. 3.3: Reducción de mensajes

El objetivo de esta situación didáctica es propiciar la construcción progresiva de un lenguaje simbólico mediante la reducción de los mensajes elaborados que se basan en la conmensuración. Esta reducción consiste primero en la eliminación de la información superflua o redundante, lo que requiere de poder discriminar la información pertinente de la que no lo es. Por ejemplo, en el mensaje "Con 3 enteros puedes formar dos chocolates, el chocolate es rojo", el último dato puede eliminarse. Esta primera reducción no será difícil de realizar dado que en la mayoría de los mensajes de 3° y 4° que se basan en la conmensuración vemos ya expresada esta tendencia a abreviar (casi todos son del estilo: "*x enteros, y pedazos*").

La reducción de los mensajes pasa además por la adopción de acuerdos que permitan simbolizar aquellos datos que son constantes en la situación pero que necesitan ser identificados, y también acuerdos que permitan eliminar la expresión de información que puede permanecer implícita. Por ejemplo, en los mensajes realizados hasta ahora que son del estilo "*x enteros, y pedazos*" ya se ha dejado implícita cierta información: no se dice por ejemplo que los *x enteros* tienen juntos la misma longitud, o son del mismo tamaño que los *y pedazos* juntos. Ésta es una constante fundamental en la situación que -dentro del grupo- no ha sido necesario expresar. Por otro lado, los datos que informan cuáles son los enteros y cuáles son los pedazos sí son necesarios (esto, en 4° grado, ya fue explicitado), puesto que el pedazo correspondiente a, por ejemplo, 3 enteros, 4 pedazos no es el mismo que el correspondiente a 4 pedazos, 3 enteros. Sin embargo, estos datos son constantes (en la situación, siempre hay enteros y pedazos). Por lo tanto, pueden simbolizarse fácilmente, sin pérdida de eficiencia. Esperamos que lleguen después de varias reducciones sucesivas, y posiblemente con una sugerencia del maestro, a una escritura simbólica como éstas: *x,y* o *x/y* etc., en las que los datos que informan cuáles son los enteros y cuáles son los pedazos estarían simbolizados por la posición de los números o por algún símbolo adicional. Evidentemente, si en la situación se hacen jugar varios enteros de distintos tamaños, será necesaria una información más que indique a qué entero se hace referencia. Pero, por ahora, los enteros son siempre los mismos para todos y esa información puede quedar implícita. Se trata de llegar por lo tanto a la conclusión de que hay dos datos indispensables (el número de enteros y el número de pedazos) y de que es necesario indicar de alguna forma breve y sencilla cuáles son los enteros y cuáles los pedazos.

Preguntamos ahora: ¿Qué significará para los niños la escritura abreviada “x, y”? En principio, esta escritura describe una acción, aquélla que debe ejecutar el receptor para construir un pedazo del mismo tamaño que el del emisor: *une x enteros, divídelos entre y*. Se trata pues de una composición de dos operadores naturales, aunque ésta puede estar implícita si el mensaje se interpreta como: *x partes, y pedazos* coinciden. Pero, por otro lado, haciendo abstracción de las acciones implicadas, este par de números está permitiendo determinar la longitud de una tira (longitud que no podría ser determinada mediante el uso de un número natural). El hecho de que conociendo el par (y la unidad o entero) pueda conocerse el tamaño de la tira -y viceversa- conduce a relacionar progresivamente el par a un tamaño (longitud) determinado. En este sentido, el par *x, y* se empieza a comportar como **un** número-medida. Esto implicará también que en el par *x, y* se lea el resultado de las operaciones involucradas: la tira mide *x entre y*; entendida *x entre y ya no como la operación que hay que hacer, sino como el resultado de la operación* (resultado que no puede expresarse mediante un número natural).

Lo que está en juego aquí, finalmente, es la posibilidad de que se otorgue progresivamente el estatuto de número al par *x, y* (esto es, que no se le considere como dos números naturales aislados). Esto -evidentemente- no es nada fácil que suceda, y, aún más es casi imposible que suceda a corto plazo. Nuestro par de números *x,y* empieza a funcionar ahora como medio para comunicar una media y en tanto composición de operadores naturales. En la situación final de esta etapa, funcionará como modelo que permite realizar anticipaciones sobre algunas relaciones entre las longitudes (en particular, relaciones de orden). Posteriormente, estos pares serán sumados entre sí para anticipar la longitud total de la unión de dos tiras… serán, pues, sometidos progresivamente a un manejo en tanto objetos que permiten cuantificar magnitudes, que se relacionan y se operan entre sí, que guardan ciertas propiedades que los distinguen de los números naturales, pero que a la vez, los relacionan con ellos.

Suponemos que a lo largo de estas experiencias (y de otras también fundamentales como el cambio de contexto conservando la misma interpretación del racional y el enfrentamiento a situaciones que, esta vez, involucran una interpretación distinta) se irá otorgando el estatuto **de número** al par de naturales en juego.

Por último, hagamos una precisión con respecto a las condiciones de nuestros grupos de 3° y 4° grados para abordar esta situación: en el grupo de 4° prácticamente todos los alumnos recurren ya a la relación de conmensuración para resolver la situación fundamental (comunicar la medida de una longitud con una unidad dada). Han inclusive llegado a identificar (y a generar) *mensajes equivalentes*. No será difícil, por lo tanto, que realicen ahora la tarea de reducir los mensajes destacando la información pertinente, adoptando acuerdos, etc. En 3°, en cambio, aunque la mayoría del grupo puede ya interpretar un mensaje en el que se emplea la conmensuración (y algunos siguen necesitando, para interpretar el mensaje, de los pedazos posibles para elegir uno…) por lo menos la mitad del grupo no recurre aún a este medio para elaborar su mensaje. Difícilmente podrían entonces abordar la tarea de reducción de los mismos. Por eso, en 3er grado no se enfatizará el propósito de reducir los mensajes. La situación consistirá para ellos básicamente en una repetición de la situación fundamental (S. D. 3.1).

NOTA: En la fase de interpretar mensajes basados en la conmensuración se dejará a los niños disponer de regla graduada -si la solicitan- para facilitar la tarea de dividir la tira en partes iguales.

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.3: Reducción de mensajes. (3er grado)

Fecha: 19-06-85 y 25-06-85
Duración: 2h 20’ (1h 30’+ 50’)

Primera parte. Elaboración de mensajes.

Aunque el maestro indicó en la consigna que se intentara abreviar los mensajes lo más posible, en pocos equipos se asumió ese propósito. El interés de esta situación está, por lo tanto, en la forma en que los niños de 3^er grado abordan -nuevamente- la situación fundamental.

Al inicio de la actividad en la mayoría de los equipos solicitan regla graduada para elaborar los mensajes. En particular, uno de los equipos que en las sesiones anteriores había recurrido sistemáticamente a la conmensuración, esta vez solicita la regla. Al no obtenerla, dicen que van a hacer entonces un dibujo a escala utilizando la cuadrícula de las hojas de su cuaderno. Se les recuerda que tampoco se puede dibujar. Entonces dice uno de ellos: "… bueno, pero si los otros (los receptores) no lo hacen bien, es su culpa". Pareciera que la retroalimentación que proporciona la situación empieza a actuar en el sentido opuesto al que esperamos: la conmensuración se descubre ante algunos alumnos que la han utilizado como un recurso que no permite llegar a la meta.

Finalmente, al no disponer de la regla y al no poder dibujar, esto fue lo que ocurrió:

- 3 equipos que ya habían implementado la conmensuración anteriormente, vuelven a recurrir a ésta (equipos 3, 4 y 7)
- 2 equipos que también ya han recurrido a la conmensuración[41], reciben respectivamente los pedazos iguales a un medio y a dos enteros y elaboran sus mensajes en esos términos. Podemos pensar que si hubiesen recibido pedazos iguales a una fracción menos sencilla del entero, hubieran recurrido a la conmensuración (equipos 2 y 6).
- Sólo un equipo recurre por primera vez a la conmensuración (equipo 5).
- Los equipos 1 y 8 siguen sin movilizar ningún procedimiento.

Éstos fueron los mensajes elaborados:

Equipo 5:	"4 enteros y 3 pedazos" (pedazo = 3/4 del entero; confundieron al pedazo con el entero).
Equipo 4:	"Es 4 enteros y 3 pedazos". (pedazo = 4/3 del entero)
Equipo 3:	"2 enteros y 3 rojos medianos" (pedazo = 2/3 del entero)
Equipo 7:	"5 enteros y 12 pedazos" (pedazo = 5/12 del entero)
Equipo 6.	"Con 2 enteros" (pedazo = 2 enteros)
Equipo 2:	"Que hagan la mitad del entero" (pedazo = 1/2 del entero).

[41] Elaboraron un mensaje basado en la conmensuración sólo en la situación 3.1, cuando los receptores tenían pedazos para elegir, pero, posteriormente, ambos equipos pudieron **construir** un pedazo a partir de un mensaje basado en la conmensuración.

Por lo tanto, aparentemente, 6 equipos de los ocho, están en condiciones de resolver la situación fundamental recurriendo a la conmensuración. Sin embargo, en la fase siguiente: análisis de los mensajes y puesta a prueba, veremos que el que escriban un mensaje de este tipo no necesariamente significa que están seguros de que se puede interpretar.

Segunda parte. Análisis colectivo de los mensajes y puesta a prueba

El maestro escribe los seis mensajes en el pizarrón e invita a los alumnos a opinar acerca de cada uno. El mensaje del equipo 5 es criticado por algunos alumnos, uno de ellos dice: “no sirve porque ¿cómo se va a construir si no se conocen los pedazos?” Es claro que para él la relación de conmensuración no da la información necesaria. Pero, veamos cómo se defienden los autores del mensaje (se trata del equipo que por primera vez acude a la conmensuración): toman varios pedazos y varios enteros, los iteran a lo largo hasta que 3 enteros y 4 pedazos coinciden. Observan que se habían equivocado y lo dicen (habían escrito 4 enteros, 3 pedazos). Pero, al explicar por qué su mensaje sí sirve dicen que lo único que el receptor tendría que hacer era **elegir** el pedazo que coincidiera… Ningún alumno protesta. El observador les pregunta que qué pasaría si no hubiera pedazo para escoger. Uno de ellos dice: “no habría juego”. Sólo un alumno intenta explicar cómo se podría construir el pedazo.

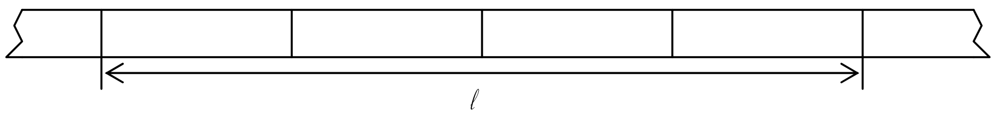
Los demás mensajes que implican la conmensuración producen también dudas entre los alumnos. “Habría que probar”, dicen. Están de acuerdo en que probando uno de ellos, los demás quedan probados. Parece entonces que la mayoría no está -en este momento- muy convencida de que sus mensajes funcionen. Se procedió a probar el mensaje del equipo 4: “es 4 enteros y 3 pedazos”, para ello se entregan a cada equipo varios enteros, una tira para recortar y se les retiran los pedazos que tenían. El pedazo original correspondiente al mensaje se guarda en un sobre que será abierto al final, para verificar.

Sucedió lo siguiente: los seis equipos que elaboraron un mensaje construyen ahora un pedazo. Es decir, sólo los equipos 1 y 8 no lo hacen.

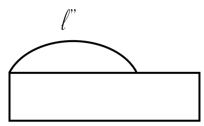
Sin embargo, de los 6 pedazos construidos, sólo uno -justamente el del equipo que hizo el mensaje- coincide con el original. Lo que pudimos observar en dos equipos nos hace suponer que el problema no estuvo en la interpretación del mensaje, sino en su realización técnica: en uno de ellos miden la longitud de 4 enteros, 48 cm. Preguntan al observador que cuál es el número que multiplicado por 3 da 48. El observador no les da la respuesta, y, al ver que se les acababa el tiempo deciden cortar un pedazo *a ojo*.

En otro equipo, uno de sus integrantes (el único que trabajó) hizo lo siguiente:

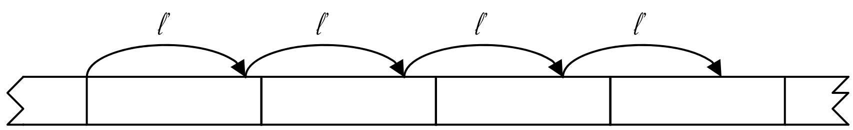
- Marca en su tira para recortar, la longitud de 4 enteros:



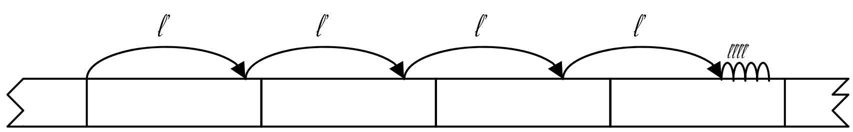
- Marca, sobre uno de los enteros, la longitud que él estima que tendrán los pedazos:



- Itera l’’ sobre l 4 veces (¿por qué 4 veces? quizá confunde los números)



- Observa que no logró llegar al extremo. Decide dividir eso que sobró entre cuatro, pero usando el mismo procedimiento: estimar la longitud del cuarto, iterarla cuatro veces… y le vuelve a faltar un pedacito:



- Ese pedacito que sobra, lo piensa volver a dividir entre 4, cuando exclama: “¡El pedazo es más grande que el entero!”

Este alumno implementó ya una vez este procedimiento: sabe que quiere obtener 3 partes de los 4 enteros (sólo que esta vez se confunde y se propone sacar 4 partes, sin notar que eso le daría exactamente un entero). Entonces, estima el tamaño de una de las partes. Supone que es menor que el entero. Como no llega a abarcar toda la longitud (de los 4 enteros), decide dividir el resto entre 4 (en vez de 3, por la confusión ya señalada). Exactamente como si se tratara de **repartir** 4 cosas entre 3. El procedimiento es perfectamente correcto, aunque técnicamente muy complicado. Es, por cierto un procedimiento entre otros para dividir: si quisiéramos, por ejemplo dividir (o repartir) 48 entre 3, estimamos un primer cociente, digamos 10. Multiplicamos 10 por 3, 30. Nos falta por dividir 48-30 = 18. Ahora queremos dividir 18 entre 3. Volvamos a estimar: 5. 5x3=15.

Nos falta por dividir 18-15 = 3. Ya no hace falta estimar, sabemos que 3÷3=1. Entonces, el cociente buscado es: 10+5+1=16.

Así, de los 6 equipos que construyen el pedazo, sabemos que uno lo hace correctamente y que dos más se atoran en la realización. Con los otros tres no supimos qué sucedió pero suponemos que también tuvieron problemas en ese nivel. Parece entonces que los alumnos pueden interpretar el mensaje, pero no es sino hasta que lo hacen que se convencen de que estos mensajes funcionan. Por ahora, nuevamente, la conmensuración aparece a los ojos de los alumnos como un recurso con pocas probabilidades de éxito. Sin embargo, por lo menos parece que ha quedado claro que es el único recurso del que se dispone.

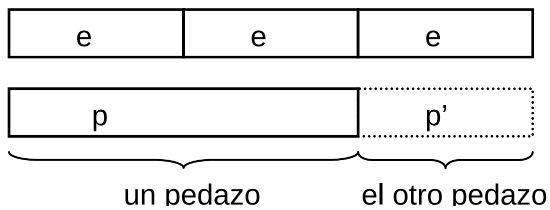
Decidimos poner a prueba otros dos mensajes que implican la conmensuración, esta vez no son mensajes elaborados por el grupo[42]. El maestro dice a los niños que esos mensajes fueron elaborados por niños de otro grupo y que se tratará de ver si los pueden interpretar. Nuevamente, los pedazos originales correspondientes se guardan en un sobre. Los enteros que se les entregan son ahora de 11 cm (en las situaciones anteriores eran de 12 cm).

Mensaje: “3 enteros, 2 pedazos”

Esta vez 7 equipos construyen un pedazo. Por primera vez el equipo 8 lo ha intentado. El equipo 1 es el único que aún no lo hace.

De los 7 pedazos construidos, sólo uno refleja una mala interpretación del mensaje (el del equipo 8): yuxtaponen 3 enteros… intentan medirlos juntos, después intentan medir sólo uno. No usan correctamente la regla, las medidas no caen exactas… por fin, deciden recortar la tira (de tres enteros) en… tres! El observador les pide explicaciones. Tienen claro que de tres enteros deben sacar 2 pedazos, pero afirman que los pedazos deben ser del mismo tamaño que los enteros. No entendemos qué está pensando. Finalmente el pedazo que recortan es del tamaño de dos enteros. En la confrontación colectiva varios niños opinan sobre este caso: uno afirma “pensaron que el mensaje era 2 enteros y 1 pedazo”, otro les dice que obtuvieron dos pedazos, pero desiguales:

[42] La interpretación de estos mensajes se llevó a cabo en la sesión siguiente, 5 días después.



finalmente, otros les dicen que “no les importó nada, que lo hicieron del tamaño que quisieron”.

Los otros seis pedazos fueron construidos a partir de una buena interpretación del mensaje, aunque tres de ellos resultaron medio centímetro más cortos que el original. Esto se debió a que utilizaron la regla graduada para dividir en dos: en dos casos miden la longitud de los tres enteros alineados, 33 cm. Para dividir entre dos, buscan el factor que multiplicado por 2 dé 33. Encuentran el número entero más aproximado, 16. En el otro caso supieron que el pedazo estaba formado por un entero y medio. Para obtener esa mitad, miden el entero, 11 cm. Mitad… 5 cm.

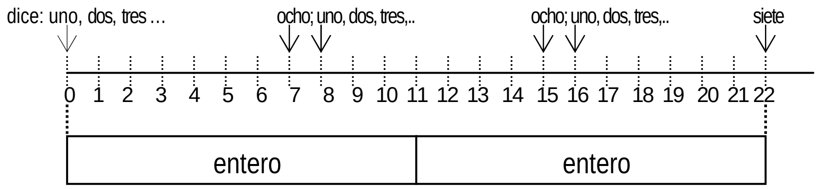
Los tres equipos cuyos pedazos coinciden exactamente con el original acudieron al doblado para obtener las mitades.

Mensaje: “2 enteros, 3 pedazos”

Nuevamente 7 equipos logran construir un pedazo. Esta vez es el equipo 8 el que no lo hace. En cambio el equipo 1 sí lo construye y… ¡correctamente! (recordemos que los equipos 1 y 8 no han participado en lo absoluto desde la situación 3.1, y muy poco en las anteriores). No observamos lo que se hizo en el equipo 1, cabe la posibilidad de que hayan tomado la medida del pedazo de otro equipo.

De estos siete pedazos construidos, 4 son exactos y 3 difieren un poco del original. Evidentemente, hubo dificultad en la realización técnica, en particular, para dividir entre tres. Los procedimientos que pudimos observar fueron:

- Doblar la tira en 3, como carta, haciendo ajustes sucesivos.
- Un niño mide con su regla la longitud de 2 unidades. El observador le ayuda indicándole que empiece a medir a partir del cero y no del inicio de la regla. El niño no se fija en el número que coincide con el otro extremo de la tira (22). Estima que “caben tres ochos” y, para verificarlo, se pone a contar, pero, dice “uno” al señalar el cero, “dos” al señalar el uno, etc. Llega a ocho y continua nuevamente con uno… el último tramo le sale de 7:



Entonces dice que va a probar de 7 ½ en 7 ½ , pero lo hace de 7 en 7, cometiendo el mismo error. Termina con sus tres *sietes* y le faltan aún 2 cm. Dice que los va a "repartir", uno a cada pedazo, pero se le acaba el tiempo, corta el pedazo *a ojo* y… ¡le atina!

Dejando a un lado los serios problemas que se manifiestan en el uso de la regla graduada (y, ¿por qué les gusta tanto usarla?), nos encontramos otra vez con un procedimiento original para dividir un número x entre n: estimar un cociente *q1; multiplicar* q_1 por n. Dividir ahora el residuo (x-q_1n) entre n y así sucesivamente. Al final, sumar los cocientes obtenidos. (Cocientes parciales)

El último procedimiento observado consistente en dar como resultado del cociente 22÷3 el número entero inferior más próximo, 7. Vemos entonces que por lo menos seis equipos de los ocho pueden ya interpretar correctamente los mensajes.

Conclusiones

La mayoría de los alumnos de 3^er^ grado no estaban aún en condiciones de realizar la tarea de reducción de mensajes basados en la relación de conmensuración. Esto era de esperarse: para ellos la conmensuración no constituía aún un medio claro y seguro para resolver la situación, esto es, para ellos ésta no proporcionaba la información que permitiría determinar el tamaño del pedazo.

En este momento, por lo menos seis equipos de los ocho recurren a la conmensuración para elaborar el mensaje e interpretan correctamente los mensajes, aunque no siempre logran construir el pedazo exacto, debido a problemas técnicos (sobre los que volveremos más adelante). Veamos más de cerca las condiciones en las que ocurrieron estos cambios de procedimiento. Resumimos primero en el siguiente cuadro el recorrido de cada equipo.

Situación	Recurren a la conmensuración	Implementan otro recurso	No abordan el problema.
S. D. 3.1 No hay restricciones. Elaboran e interpretan mensajes los receptores seleccionan el pedazo, no lo construyen.	2 – 3 – 4 – 6	5 – 7	1 – 8
S. D. 3.1, segunda aplicación. Restricciones: no usar regla graduada, los receptores no disponen de pedazos para elegir, necesitarán construirlo elaborar e interpretar mensajes.	3 – 4 -7	6 ∗– 5∗ (estiman la medida)	1 – 2 – 8
S. D. 3.2 Interpretar un mensaje basado en la conmensuración (no hay pedazo para elegir).	2 – 3 – 4 – 6 – 7		1 – 5 - 8
S. D. 3.3 Mismas restricciones elaborar mensajes.	3 – 4 – 5∗ – 7	2 – 6 (Pedazo: ½ del entero y 2 enteros)	1 – 8
S.D. 3.3 Interpretar mensajes basados en conmensuración.	2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 (los equipos 1 y 8 intentan por primera vez abordar el problema. El equipo 1 aparentemente logra interpretar uno de los tres mensajes)		1 – 8

Comparemos lo que sucedió en la situación 3.1, segunda aplicación (con restricciones) y en la situación 3.3: los equipos 3, 4 y 7 movilizan de entrada la conmensuración para resolver el problema. Los equipos que cambian de procedimiento a favor de la conmensuración son el 2, 5 y 6 (el 2 y el 6 no elaboran, en la S. D. 3.3, un mensaje basado en la conmensuración, pero esto se debe muy probablemente al hecho de que recibieron pedazos cuya longitud puede expresarse fácilmente con otros medios). Recordemos que los seis equipos que acaban recurriendo a la conmensuración, excepto el 7, partieron de una interpretación particular de la situación: no se trataba para ellos de construir el pedazo, sino de seleccionarlo (S. D. 3.1). El mensaje *x enteros, y pedazos* no expresaba para ellos, por lo tanto, la composición de las dos operaciones que había que realizar sobre el entero, para obtener el pedazo, sino la ecuación que equipara *x enteros y pedazos*. Subyace, por supuesto, la consideración de que sólo un pedazo satisface dicha ecuación.

---

[*] No pueden interpretar mensajes basados en la conmensuración.

Volver a recurrir a la conmensuración cuando ya no se trata de seleccionar el pedazo, sino construirlo, implica desprender de dicha ecuación la composición de las dos operaciones. Esto es lo que hacen los equipos 3 y 4 y lo que no pueden hacer los equipos 2, 5 y 6. Sin embargo, estos últimos pudieron observar en varias ocasiones cómo se interpretó un mensaje basado en la conmensuración para construir el pedazo, más aún, en la situación 3.2, se les da de entrada un mensaje de este tipo para que lo interpreten -lo cual lleva implícito que se puede interpretar- y, de hecho, los equipos 2 y 6 logran realizar la tarea. Por lo tanto, podemos suponer que en el caso de estos tres equipos (2, 5 y 6) la información que reciben del grupo y la información nuestra en la S. D. 3.2., tuvieron influencia para que optaran por el procedimiento de la conmensuración, esto es, no llegan a éste únicamente a través de la interacción con la situación problema fundamental. Esta influencia consistió en mostrar, en la acción, cómo interpretar el mensaje *x enteros y pedazos* en términos de la composición de dos operadores.

Por otro lado, la retroalimentación que podía proporcionar la situación al hacer fracasar mensajes basados en otros recursos y al mostrar que la conmensuración permite lograr el objetivo de manera sistemática, no actuó en ese sentido: muchas veces los fracasos no fueron claramente constatados debido al desorden en que se realizaron las confrontaciones y, por otro lado, la dificultad técnica de construir el pedazo a partir de la conmensuración -o simplemente el hecho de que algunos receptores no pudieron interpretar esos mensajes- tendió a provocar dudas en varios alumnos acerca de la eficiencia de este recurso.

Notemos, por último, que lo que hemos llamado *dificultades técnicas para construir el pedazo* consistieron en dividir la tira en cierto número de partes iguales, sobre todo entre números que no son potencias de 2. Muchas veces los alumnos midieron con regla y su problema consistió en dividir un número (y no la longitud). Al no disponer de un algoritmo para dividir, implementaron recursos originales -correctos- que nos muestran que sabían bien a dónde querían llegar: construir un pedazo que es igual a *x* enteros entre *y*, (sólo cuando se sabe a dónde se quiere llegar se puede prescindir de los algoritmos institucionalizados).

Seis equipos de los ocho parecen estar ahora en condiciones de abordar la situación recurriendo a la conmensuración. Pensamos que requieren de más experiencias aún para dominar dicho procedimiento, antes de abordar la tarea de reducción de mensajes y, sobre todo, antes de intentar que utilicen estos mensajes como modelo para hacer anticipaciones. Sin embargo, este año escolar se ha terminado y no nos sería posible incluir en este trabajo el análisis de la experimentación de las últimas situaciones didácticas de la secuencia en este grupo (las tres sesiones destinadas a ello se dedicaron, como hemos visto, a la reaplicación de la situación fundamental).

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.3: Reducción de mensajes. (4º grado)

Fecha: 17-06-85 y 19-06-85
Duración: 1h 50’ (50’ + 1 h)

Poco antes de aplicar esta situación en 4° grado, decidimos añadir a la segunda parte (interpretación de mensajes abreviados) una actividad breve de anticipaciones. Consideramos que el trabajo de interpretar mensajes no representa ya mucho interés para este grupo que ha realizado con éxito en varias ocasiones esta tarea. La construcción efectiva de los pedazos funcionará entonces como medio para verificar las anticipaciones, dando así una ocasión más a los alumnos de elaborar y confrontar hipótesis acerca de algunas relaciones entre los pares *x, y*.

Primera parte. Elaboración de los mensajes.

El maestro enfatiza en la consigna que esta vez “ganará un solo equipo: aquél que logre hacer el mensaje más corto y que funcione”. Les dice también que si lo desean, emisores y receptores pueden ponerse previamente de acuerdo en lo que quieran.

Los seis equipos que elaboraron mensajes basados en la conmensuración en la situación anterior, vuelven a producir rápidamente mensajes basados en este recurso. En los dos casos que observamos, antes de trabajar con el material para buscar la relación entre enteros y pedazos, acuerdan, al interior de cada equipo (es decir, no consultan, como esperábamos a los receptores), la forma de redactar el mensaje.

Estos fueron los mensajes producidos:

1) *“4 3”* (el 4 está escrito en amarillo, color de los enteros y el 3 en rojo, color de los pedazos de este equipo)
2) *“2 en 1”*
3) *“3n 2ch”*
4) *“12 en 10”*
5) *“3e 2n”*
6) *“4 chocolates*
mitad 2
2 niños
mitad 1”

Han reducido ya el contenido de los mensajes a la información indispensable: número de enteros, número de pedazos y, excepto en dos casos, señalan de alguna manera cuáles son los enteros y cuáles los pedazos. Pasemos al análisis colectivo de estos mensajes. Los mensajes más breves son: “2 en1” y “12 en 10”. Varios niños los critican. Dicen que no pueden saberse cuáles son los enteros y cuáles los pedazos. El maestro propone entonces que se tome un acuerdo acerca del lugar que ocuparán los pedazos y del que ocuparán los enteros. Esta intervención del maestro fue prematura. Seguramente los niños habrían llegado a proponer algo semejante más adelante. En este momento se trataba de ver cuál era el mensaje más breve y que funcionara. Una consecuencia de esto es que varios niños rechazan al principio las modificaciones que se proponen porque… ¡no quieren perder sus puntos! Finalmente, acuerdan que el número de pedazos se escribirá a la izquierda y el de enteros a la derecha. Transcriben los demás mensajes en esos términos (3 en 2; 4 en 2, etc). Se confunden varias veces. Llegan al mensaje “4 chocolates 2 niños” y una alumna dice: “los niños serán los pedazos”.

Posteriormente el maestro pregunta a los niños que si se podría quitar el “en” de “3 en 2” (el maestro parece inusitadamente impaciente). Un alumno dice que no porque se leería “treinta y dos”. El maestro pregunta entonces que cómo se puede hacer para que no se lea así. Los niños sugieren un guión, un punto, pero otros protesta: 2.4 se lee “2 punto 4, 2-4 se lee “2 menos 4”. Acuerdan poner una coma: 2,4.

El maestro les pregunta entonces que si aceptan cambiar el orden: enteros a la izquierda. Justifica esto diciendo que en la mayoría de los otros grupos ese es el orden. El acuerdo definitivo es, pues: “número de enteros, número de pedazos”.

Estas intervenciones del maestro, dirigidas a acercar la escritura propuesta por los niños a la escritura convencional (a/b) estaban previstas, pero habían de realizarse después de dejar a los niños la iniciativa de reducir al máximo los mensajes. No obstante, entre los mensajes originalmente propuestos por los niños y el mensaje finalmente acordado, no hay diferencias de importancia.

Antes de pasar a la segunda parte, detengámonos un poco en los dos equipos que no llegaron a elaborar su mensaje. En uno de ellos, primero yuxtaponen enteros y pedazos y observan que 3 enteros coinciden con 4 pedazos; parece que esto no les dice nada porque uno de los niños dice: “vamos a calcular la mitad del pedazo y les decimos que es la mitad lo que tienen que hacer”. El observador, suponiendo que piensan dibujar esa mitad, les recuerda que el mensaje debe ser *telefónico*. Dicen entonces que van a *calcular* la medida (es decir, que van a estimar la media en centímetros). Finalmente, no elaboran el mensaje.

Parece, por lo tanto, que no consideran aún que la relación de conmensuración proporciona la información necesaria. ¿Por qué, entonces, buscaron la coincidencia de enteros y pedazos? Posiblemente se limitan a reproducir una acción que han visto realizar en varias ocasiones, pero sin la intención de desprender de ella la información que se necesita.

El procedimiento de conmensuración es, finalmente, sumamente sencillo de realizar: iterar enteros y pedazos hasta que coincidan y es, por lo tanto, fácilmente *copiable* sin que medie una comprensión de su posible aplicación. Pero esta explicación no es muy satisfactoria (aunque no encontramos otra) sobre todo si pensamos que 1) sabían bien en qué consistía el problema, puesto que pensaron enviar la medida del pedazo y 2) ya han interpretado mensajes basados en la conmensuración (y lo volverán a hacer ahora).

Al otro equipo que no elabora el mensaje le tocó el pedazo que es igual a 5/12 del entero. Empezaron iterando un pedazo y un entero, haciendo marcas sobre su mesa. Después traen más piezas: 3 enteros y 5 pedazos. Prueban, llegan a 4 enteros y 6 pedazos: no hay coincidencia. Uno de ellos dice: “No se puede…”, otro pregunta al observador que si puede traer más material… lo traen y llegan a 4 eneros y 9 pedazos, otra vez no hay coincidencia, “siempre nos sobra o nos falta un pedacito” El observador los anima a que sigan buscando. Finalmente llegan a 5 enteros, 12 pedazos, pero… resta aún una diferencia como de 3mm, debido al acabado impreciso de las piezas. Por lo tanto, continúan agregando enteros y pedazos, y el tiempo se les acaba.

Aquí estamos frente a un problema difícil: ¿por qué los niños habrían de estar seguros de que en algún momento enteros y pedazos coincidirán? Notemos que cuando los niños proceden como los de este equipo, agregando un entero cada vez y después aproximando la longitud de los enteros yuxtapuestos con pedazos, las diferencias que se van obteniendo (entre la longitud del total de enteros y la del total de pedazos), **no** decrecen siempre (y tampoco crecen siempre). Veamos el caso del pedazo que tocó a estos niños. El entero mide 12 cm y el pedazo 5 cm. Escribamos las medias de las longitudes totales que se van obteniendo, señalando las diferencias entre las medidas más próximas (que son las que seguramente consideran los niños):

enteros:			12						24				36						48				60
pedazos:	5	-	10	-	15	-	20	-	25	-	30	-	35	-	40	-	45	-	50	-	55	-	60
diferencias:			2cm						1cm				1cm						2cm				0cm

Así por ejemplo, al tener 3 enteros y 7 pedazos la diferencia es ya sólo de 1cm, pero, al llegar a 4 enteros con 10 pedazos, la diferencia aumentó: 2cm. No es extraño que algunos niños piensen que no van a llegar nunca a una coincidencia (y por cierto, sabemos que no con cualquier par de segmentos se obtiene la coincidencia buscada, están, precisamente, los inconmensurables…)

Originalmente, de esta coincidencia se podría estar seguro, puesto que el origen hipotético de los pedazos eran los enteros, antes de ser repartidos. La unión de todos los pedazos debía ser igual a la unión de todos los enteros (los números buscados *n* y *m*, eran los datos del reparto: *n pasteles entre m niños*). Sin embargo, en la medida en que ese origen deja de estar presente, la seguridad de que habrá coincidencia pierde también su razón de ser. ¿Es necesario, por lo tanto, recordar en la consigna, que el origen de los pedazos es un reparto? Pensamos que no. Si los niños han visto que la conmensuración constituye un medio para conocer el tamaño del pedazo en función de determinada unidad (ya sea que lo vean sólo como una ecuación, o bien como una composición de operaciones), insistir en el contexto de reparto implicaría impedir que se generalizara el recurso a la conmensuración al trabajo con dos longitudes cualesquiera.

En la medida en que se trabaja con pares *x, y* cuyos elementos sean relativamente pequeños (más o menos menores que 20) pensamos que lo que se debe hacer es poner en juego, desde la primera situación, números mayores que los que hemos utilizado, con el objetivo de dar oportunidad a los niños de trabajar con números que les son un poco menos familiares, aun con el apoyo del material. Además, a partir del momento en que el significado de un mensaje del tipo *x, y* sea claro para los niños, el trabajo que consiste en elaborar el mensaje pierde importancia. Durante un tiempo sólo será necesario interpretar mensajes como medio de verificar ciertas anticipaciones (aunque, en la interpretación también hay limitaciones: dividir una tira en 23 partes iguales, por ejemplo, es ya técnicamente muy difícil). En resumen, el material está destinado a desaparecer progresivamente. Esto nos lleva entonces a otro problema que no hemos explicitado (¡y debimos haberlo hecho!): el de la magnitud de los números en juego.

El proceso de construcción de la interpretación de fracción que esta secuencia pretende propiciar, se ha apoyado exclusivamente en casos en los que los números enteros en juego son menores que doce y el material mismo es adecuado sólo para trabajar más o menos en ese rango. Se espera que progresivamente los niños establezcan relaciones entre los números con independencia del referente concreto, y a partir de ello construyan ciertas generalizaciones. Sin embargo, estas generalizaciones estarán seguramente circunscritas en un rango un poco mayor al que se ha trabajado. Es decir, el que los niños logren realizar razonamientos sobre determinadas fracciones como 3/4, 1/2, 5/6, 7/8, etc., no implica que lo puedan hacer con fracciones como 183/215. Entre unas y otras media una diferencia muy significativa desde el punto de vista de los niños: las primeras pueden representarse más o menos bien, mental o gráficamente, y las otras no. Estas últimas requieren por lo tanto una posibilidad mayor de reflexionar sobre las relaciones construidas con independencia de toda representación. Esto nos plantea preguntas más precisas que deberemos intentar aproximar: ¿cuál es el rango numérico dentro del cual los niños con los que trabajamos pueden aplicar sus generalizaciones?, y más allá de ese rango, ¿debemos diseñar situaciones que involucren esos números mayores?, ¿debemos esperar a que los niños tengan un desarrollo cognitivo mayor y por lo tanto tengan mejores posibilidades de reflexionar sobre relaciones entre números que no pueden ser fácilmente concretizados?

Segunda parte. Anticipaciones e interpretación de los mensajes reducidos[43]

Consigna: "Voy a escribir un mensaje para cada equipo, ustedes van a construir el pedazo. Los enteros van a ser de este tamaño (pega el entero[44] en el pizarrón).

El maestro escribe los datos en el pizarrón:

Equipo	Mensaje
1	1,2
2	2,1
3	3,4
4	4,3
5	2,4
6	3,6
7	3,2
8	1,3

[43] Esta parte se llevó a cabo dos días después.
[44] Los enteros son esta vez de 9cm de largo.

Mientras el maestro escribe esto, se escuchan algunos alumnos decir: “¡Ahh! está fácil”, “¡ya lo entendí!”, “¡yo también!”

M: “Antes van a hacer apuestas. Cada equipo responde a lo que voy a escribir en el pizarrón (se reparten hojas blancas)”.

Apuesta 1. ¿Qué pedazos saldrán más grandes que el entero?

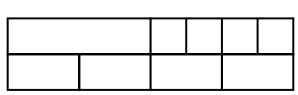
Un buen número de niños tuvieron problemas al principio con la nueva notación *a, b*. Olvidaron el último acuerdo que se tomó en la sesión pasada. Nos llamó la atención que varios niños lo interpretaban así: *a pedazos, b enteros*. Esta interpretación corresponde al acuerdo que ellos tomaron. Posteriormente, el maestro les sugirió cambiar el orden (argumentando que en general se usa de esa manera). Ellos aceptaron, pero ¡lo olvidaron rápidamente! y más bien recuerdan su propio acuerdo.

Éstas fueron las respuestas.

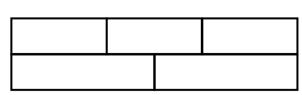
Equipos	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuestas a la apuesta uno	2,1	Todos	Todos	4,3	2,1	2,1	1,2	…
	3,2	excepto 1,2			4,3		3,2	
					3,2		2,4	
							3,6	
							1,3	

En general sucedió lo siguiente:

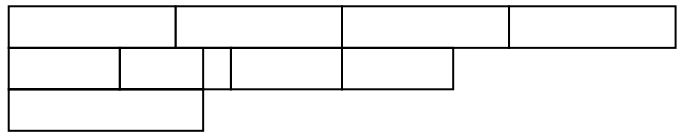
- 3 equipos (2, 3 y 8) dan respuestas incorrectas. A los equipos 3 y 8 se les recordó el significado de la nueva notación *a, b* pero parece que ahí no estaba el problema. En el equipo 3, escriben, después de un rato, “todos”. Les preguntamos que por qué todos y afirman: “todos los equipos reciben más de un pastel”. En la verificación de las apuestas, con los pedazos ya construidos a la vista, un niño de este equipo defiende sus respuestas diciendo, para el caso (3,6): “**les toca más de un entero** porque si juntamos 6 veces éste (el pedazo) saldría más grande que el entero”. Está claro que interpretaron la pregunta en el sentido de *a qué equipos les toca, en total, más de un pastel*. En el equipo 8 empiezan a hacer representaciones gráficas un poco confusas, como éstas:



(2, 4)



(3, 2)

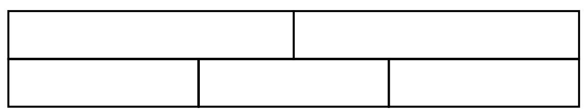


¿(4, 3)?

Uno de los integrantes del equipo está viendo los dibujos que hace su compañero, y afirma de pronto, que en (4, 3) el pedazo es más grande; su compañero no presta atención. Finalmente no escriben ningún caso. No pudimos saber más. Tampoco pudimos explicarnos lo que propone el equipo 2: afirma que en todos los casos -excepto el (1,2)- el pedazo es mayor que el entero. Tal vez sólo descartan el par (1,2) por ser el único en el que pueden visualizar el tamaño del pedazo (un medio).

De los cinco equipos que logran dar por lo menos una respuesta correcta:

- Tres de ellos (1, 4 y 6) recurrieron a representaciones gráficas como ésta:



En la verificación, uno de ellos explica una de sus anticipaciones así: (para el par 3,2), "3 enteros los pusimos en hilera, pusimos abajo la tira, vi que tenían que salir más grandes que el entero".

- Los otros dos (5 y 7) no recurrieron a la representación gráfica. Ésta es una de las explicaciones que dieron (para el par 3, 2): "Son tres enteros y dos pedazos, un entero para cada quién y sobra todavía un pedazo".

Suponemos que quiso decir: "… sobra un entero". Notemos que realizó su anticipación a partir de una representación de un reparto. En cambio, en las representaciones gráficas de aquéllos que recurrieron a ellas, no hay retrasos visibles de la idea de reparto. Se basan directamente en la relación de conmensuración.

Al terminar la verificación de esta *apuesta*, el maestro pregunta que si existían otros *mensajes* que no estuvieran ya escritos y con los que se obtuvieran pedazos más grandes que el entero. Inmediatamente varios niños dan algunos pares: (3,2); (3,1); (4,2); (5,4); (12,6); (7,1); (8,1); (6,2).

El maestro pregunta entonces que "en qué están pensando". Una niña dice: "Que si los enteros, mientras más sean, más grande va a ser el pedazo". La formulación no es aún muy precisa, pero, aunada a los ejemplos, nos deja ver que manejan la relación número de enteros > número de pedazos ⇒ pedazo > entero. Notemos que, por ahora, en sus ejemplos, todos los pares están formados por números relativamente chicos (menores que 13).

Apuesta 2: ¿Los pedazos de qué equipo saldrán iguales entre sí?

Éstas fueron las respuestas:

Equipo	1	2	3	4	5	6	7	8
Respuestas a la apuesta dos	(1,2)	(1,2) y	-----	Ninguno	(2,4)	-----	Ninguno	(1,2)
	(4,3)	(2,1)			(3,6)			(2,1)
	(3,2)	(3,4) y						
		(4,3)						

Y bien… sólo un equipo propone una equivalencia correcta. Dos equipos, el 2 y el 8 proponen pares con números iguales. Un integrante del equipo 8 dice al observador: “a (1,2) y (2,1) les toca lo mismo porque aquí hay dos y aquí también y uno también”. ¿Consideran que en los dos casos hay dos enteros y un pedazo pero escritos en distinto orden?, o bien, ¿consideran que los pedazos correspondientes a “un entero, dos pedazos” y a “dos enteros, un pedazo” son iguales?, o, por último, ¿han desprovisto a los pares de su significado y los tratan como a un conjunto de dos números aislados?

Hay un dato más: todos los equipos, incluyendo a estos dos, interpretarán correctamente los mensajes cuando se trate de construir los pedazos. ¿Entonces…? Nos inclinamos por la última explicación. Esta actividad, a diferencia de la construcción del pedazo, no exige explícitamente tener en cuenta el contexto. Para relacionar estos pares entre sí pueden intervenir entonces conocimientos previos muy firmes (identificar conjuntos iguales cuyos elementos son números naturales), en detrimento de un trabajo posiblemente muy complejo aún para algunos niños, que consistiría en interpretar esos pares como enteros y pedazos que coinciden (o como enteros repartidos entre cierto número de niños). En otras palabras: si para los niños es aún difícil hacer una representación mental del significado del par *x, y,* es muy factible que lo despojen de ese significado cuando los objetos que lo concretizan no están presentes.

Los equipos 3, 4, 6 y 7 no encuentran ninguna equivalencia (sólo dos de ellos afirman que no hay ninguna). Puesto que no proponen pares con números iguales como los equipos anteriores, podemos suponer que en este caso, o bien no entendieron la consigna, o bien, consideraron que pedazos iguales deben corresponder a pares estrictamente iguales, dejando de lado la regla de equivalencia ya manejada en otras ocasiones. Si así fuera, no tenían por qué intentar interpretar los pares. Excepto en un caso, no pudimos observar lo que hicieron estos equipos y no tenemos por lo tanto más elementos para interpretar sus respuestas. En el equipo 3 -que no da ninguna respuesta- interpretaron originalmente la pregunta en el sentido de: al interior de cada equipo, *qué niños reciben lo mismo de pastel*. Su respuesta original fue, *todos*. El observador les explicó nuevamente la pregunta; parecieron entenderla, pero no llegaron a dar ninguna respuesta. Tampoco pudimos entender la respuesta del equipo 1.

En el momento de la verificación, con los pedazos construidos a la vista, observaron que había tres pedazos del mismo tamaño: (1,2), (2,4) y (3,6). El maestro les preguntó que cómo se hubiera podido saber, antes de ver los pedazos. Éstas son algunas de las respuestas de niños que no pudieron anticipar las equivalencias.

- (en 1,2) “Es un entero y dos pedazos, a cada uno toca un medio, en los otros también, un entero entre dos”
- “Es lo mismo, pero el doble” y, después de un momento otro niño agrega:
- “También 4,8 les toca un medio”

En la primera explicación hay una representación del reparto, a partir de la cual se observa que en los tres casos a cada uno toca una mitad (nuevamente, este recurso aparece cuando la fracción es fácil de visualizar). En el segundo caso, se hace referencia a la regla de equivalencia que ya han esbozado antes. Notemos que, con los pedazos ya a la vista, los niños empiezan a encontrar nuevamente razones que explican la equivalencia. Algo parecido ha sucedido ya anteriormente: en la situación 1.4, cuando pedimos a los niños que antes de realizar varios repartos anticiparan en qué equipos los pedazos saldrían iguales, menos de la mitad del grupo pudo hacerlo. Posteriormente, en la situación 2.4 (y 2.5), cuando tenían el pedazo y el entero en la mano, y debían encontrar cuántos enteros se repartieron entre cuántos niños, con mucha facilidad encontraron equivalencias y formularon principios de reglas generales. En este último caso, sus reflexiones se apoyaron también en el hecho de tener en la mano el pedazo, es decir, el elemento que concretiza lo que es invariante en las equivalencias.

Lo que es entonces realmente difícil para los niños, aún ahora, no es ya explicarse una equivalencia dada ni generar un par equivalente a otro dado, sino discriminar entre varios pares aquéllos que son equivalentes: esto requiere de poder hacer representaciones precisas del tamaño del pedazo asociado a cada par, o bien, de discriminar los pares en función de las relaciones numéricas que mantienen entre sí, lo cual a su vez implica un buen dominio de alguna regla de equivalencia.

Interpretación de los mensajes reducidos (construcción de los pedazos).

Hemos dicho ya que en esta parte no hubo dificultades importantes. Todos los equipos lograron construir su pedazo con más o menos precisión. Señalaremos sólo algunos detalles que nos parecieron interesantes.

Los equipos que tenían que construir los pedazos correspondientes a los pares (2,4) -equipo 5- y (3,6) -equipo 6- no proceden, como lo han hecho habitualmente, uniendo los enteros y dividiendo entre el número de pedazos. Simplemente, cortan un entero a la mitad, es decir, prevén que el pedazo es igual a un medio del entero. La construcción de los pedazos se llevó a cabo después de hacer las apuestas, pero antes de verificarlas. El equipo 5 había previsto la equivalencia (2,4) $\cong$ (3,6) pero no la equivalencia (2,4) $\cong$ (1,2), y el equipo 6 no pudo prever ninguna equivalencia. En cambio, ahora, en el momento de construir el pedazo, ¡ambos equipos aplican implícitamente las equivalencias (3,6) $\cong$ (1,2) y (2,4) $\cong$ (1,2)! Las condiciones son ahora menos abstractas: para construir el pedazo es posible que intenten imaginar cómo hacerlo -esto puede consistir en hacer una representación mental de la conmensuración- y, a partir de esto, logran visualizar el resultado. En todo caso, la equivalencia ahora es aplicada implícitamente en calidad de medio para llegar a un resultado (y quizás este hecho podría ser aprovechado: aumentando la cantidad de trabajo *manual* necesario para interpretar un mensaje -por ejemplo (12,18)- posiblemente se verían más motivados para hacer uso de la equivalencia…).

En otro orden de cosas, aún están presentes las dificultades para dividir una longitud determinada en un número de partes que no sean 2^n. En esta sesión volvimos a encontrar a un niño sorprendido al ver que al doblar su tira en 2, dos veces, tres veces y cuatro veces, ¡no obtiene 3 partes iguales!

Conclusiones

Pese a las intervenciones del maestro que indujeron y precipitaron un poco la reducción de los mensajes a la expresión *x, y*, la mayoría de los equipos ya los habían reducido prácticamente a la información indispensable: número de enteros, número de pedazos, faltando únicamente la adopción de ciertas convenciones locales que permitirían reducirlos aún más. Podemos suponer entonces que para la mayoría del grupo la ecuación *n enteros = m pedazos* proporciona la información necesaria y suficiente para conocer el tamaño del pedazo, conociendo el del entero, por lo menos en los casos en que *n y m* son menores que 15 (que es el rango numérico en el que hemos trabajado hasta ahora).

Los tropiezos de un alumno al intentar conmensurar su pedazo con el entero (pensó que nunca iban a coincidir) nos hacen considera dos factores que debimos haber tenido en cuenta desde el principio: en la medida en que el contexto de reparto queda atrás, los niños no tienen por qué estar seguros de que un *pedazo* cualquiera y una unidad cualquiera coincidan al ser iterados. Esta inseguridad puede verse reforzada por el hecho de que, con el material con el que hemos trabajado, en casi todos los casos las piezas acaban coincidiendo al ser iteradas unas cinco veces en promedio. Este problema no es determinante si tenemos en cuenta que la tarea que consiste en elaborar el mensaje a partir del material concreto es sólo transitoria. Una posible solución -evidentemente *local*- consistiría en aumentar, desde el principio, el tamaño de los números enteros en juego, sin exceder los límites que impone el mismo uso del material ($\pm$20)[45]. Si los niños logran resolver el problema **elaborando** un mensaje en el caso de números relativamente pequeños, tendrán muy posiblemente elementos para **interpretar** un mensaje que involucra números mayores (en el caso de la interpretación, la coincidencia entre enteros y pedazos está dada).

Por otro lado, este problema nos remitió a otro más general, que deberemos abordar más adelante: ¿En qué rango numérico pueden aplicar los niños sus generalizaciones?, ¿es necesario diseñar situaciones que proporcionen alguna concretización para fracciones formadas por números enteros relativamente mayores?[46]...

Con respecto a la breve actividad de anticipaciones, destaquemos lo siguiente: una vez más, anticipar equivalencias resultó mucho más difícil para los niños que prever cuándo un par arroja un pedazo mayor que el entero. En este segundo caso varios alumnos pudieron realizar la anticipación apoyándose en representaciones gráficas o mentales. Estas anticipaciones se basaron en algunos casos en la relación de conmensuración entre enteros y pedazos, dejando aparentemente de lado el contexto de

[45] Este límite podría ser franqueado planteado colectivamente la posibilidad de trabajar con aproximaciones, es decir, determinando un rango de error permisible; esta necesidad de aceptar aproximaciones es aún más patente cuando se trabaja en la interpretación de fraccionamiento de la unidad. Pensemos en lo difícil que sería la tarea de encontrar una subdivisión de la unidad que nos permitiera medir con ella una longitud de, por ejemplo, 5/11 de la unidad.

reparto (sobre todo las anticipaciones de aquéllos que recurren a la representación gráfica) y, en otros casos, hacen referencia a ese contexto.

En el caso de la equivalencia en cambio, sólo en un equipo logran hacer la anticipación. Esta diferencia se debe, seguramente, a que, para poder anticipar una equivalencia, es necesario hacer una representación mental o gráfica muy precisa del pedazo correspondiente a cada par, lo cual es muy difícil, o bien, aplicar alguna regla de equivalencia. Varios niños de este grupo han formulado ya antes un principio de regla para generar pares equivalentes a uno dado, pero, por lo vito, no pueden utilizar aún esa regla para discriminar pares equivalentes (esta segunda tarea es claramente más difícil que la primera). Así, al enfrentarse a esta pregunta, varios niños no la contestan, otros afirman que no hay equivalencias y otros más relacionan los pares que tienen números iguales aunque en distinto orden (1,2 y 2,1, por ejemplo), manifestando con esto que dejan de considerar el significado de los pares.

Sin embargo, esta imposibilidad de realizar la anticipación en esta ocasión, no significa que no manejen la noción de equivalencia. Una vez que los pedazos correspondientes a cada par estaban a la vista, algunos niños pudieron explicar por qué varios pedazos resultaron del mismo tamaño. Más aún, al construir el pedazo, pudimos observar a dos equipos utilizar implícitamente la equivalencia para simplificar su trabajo.

Situación didáctica 3.4: A*nticipaciones*

Desarrollo

1. *Consigna:* “Voy a entregar a cada quien una ficha escrita para que traten de resolver, por equipos, lo que en ellas se pide. Si necesitan material pueden tomarlo”. (2mm)

2. *Trabajo en equipos y confrontación colectiva:* Las confrontaciones se realizarán en la medida en que los niños vayan contestando cada pregunta. Para cada pregunta se escribirá en el pizarrón la respuesta de cada equipo. A partir de las diferencias que surjan se proporcionará la discusión colectiva. En los casos en que sea necesario y posible, se procederá a construir los pedazos (1 hora).

[46] Si así fuera, uno de los medios que podría resultar de inapreciable utilidad –precisamente como medio– es la microcomputadora.

Organización:

Equipos de 4 niños.

Material:

- Disponer, por si es necesario, de unos 40 *enteros* (tiras de cartón de 3cm de ancho, el largo esta vez puede ser cualquiera) y dos tiras para recortar por equipo (3cm x ± 40 cm).
- Una ficha con las siguientes preguntas para **cada niño**:

  Escribe un mensaje para construir:

  1. _____ Un pedazo más grande que el entero.
  2. _____ Un pedazo más chico que el entero.
  3. _____ Un pedazo del mismo tamaño que el entero.
  4. Escribe dos mensajes diferentes de tal forma que el pedazo que se construya con uno sea igual al pedazo que se construya con el otro.
  5. Este es un mensaje: 4,3. Escribe otro mensaje con el que se construya otro pedazo más grande.
  6. Este es un mensaje: 4,3. Escribe otro mensaje con el que se construya otro pedazo más chico.
  7. ¿Con cuál de estos dos mensajes: 3,2 ó 3,4 se construye un pedazo más grande? Explica por qué.

Análisis previo de la S. D. 3.4: Anticipaciones

El par ordenado (x, y) es la primera *palabra* de un lenguaje simbólico que está por construirse. Expresa la medida de una longitud en función de determinada unidad. Lo que interesa ahora es hacer funcionar a este lenguaje como un modelo matemático: hacer que nos sea útil como medio para conocer determinadas relaciones entre los elementos del referente concreto (que es finalmente, el sistema cuyos elementos son longitudes, dotado de una relación de orden, de una operación interna -suma-, de una operación escalar, etc.). Esto implicará entonces ampliar nuestro lenguaje, dotarlo de relaciones y operaciones y determinar cómo funcionan… lo cual habrá de realizarse a lo largo de un lento proceso.

Por ahora, empezaremos a multiplicar las experiencias en las que los niños se vean en condiciones de reflexionar acerca de determinadas relaciones del referente concreto a partir del lenguaje simbólico que se ha elaborado. Esto los llevará a movilizar implícitamente primero, y a establecer explícitamente después, relaciones entre los elementos del lenguaje simbólico, es decir, entre los pares (o fracciones) (x, y). En esta situación nos ocuparemos en particular de la relación de orden y de equivalencia: escribir un par (x, y) al que corresponda un pedazo mayor, menor o igual que el entero o que otro pedazo del que sólo se conoce su medida (x, y). No será sino más adelante que abordemos el problema de la explicitación de las condiciones que deben satisfacer los pares (x, y) para que se verifiquen determinadas relaciones entre los elementos del referente. Estaremos entonces en una fase de elaboración de teoremas.

La posibilidad de realizar estas anticipaciones depende del grado en que los niños puedan hacer representaciones mentales o gráficas del significado del par (x, y). Suponemos que aún no disponen de *reglas* que les permitan anticipar. Debemos esperar, por lo tanto, a que la mayoría de los niños acuda a la representación gráfica. Posiblemente para algunos ciertas preguntas resulten aún demasiado abstractas y no reestablezcan la relación semántica del par con el contexto, limitándose entonces -como ya ha ocurrido- a manejar los números del par como dos números naturales aislados, sin relación entre sí. Por ejemplo, ante la solicitud de un mensaje al que corresponda un pedazo mayor a (2, 3), proponen **(5, 8)**, aumentando indiscriminadamente ambos números.

En este proceso juega un papel aún muy importante el referente concreto: cada vez que los niños no se convenzan de algo a partir de los argumentos que se emitan, deben interpretar los mensajes (construir los pedazos) para verificar sus hipótesis. Es en este ir y venir de la anticipación a la realización concreta que podrían modificarse hipótesis aún incorrectas. Al mismo tiempo, es muy probable que algunos niños sigan intentando elaborar *reglas generales* que formularán en la confrontación colectiva para defender su anticipación, o para explicar cómo supieron que *x* cosa iba a ocurrir. Ésta es una información que se difunde en el grupo y pasa a formar parte del acervo de conocimientos con el cual los niños se enfrentarán, nuevamente, al problema.

Señalemos, por último, que en esta situación, el referente concreto pude verse limitado para verificar las anticipaciones. Podría ocurrir, por un lado, que los niños propongan pares con números enteros demasiado grandes, en cuyo caso sería imposible interpretarlos con el material. Si los argumentos que se den no son convincentes para los niños, será necesario acudir a una representación gráfica aproximada… y si ésta tampoco resulta convincente, por ahora esos casos quedarán sin probar (ésta es, sin duda, una limitación de la situación didáctica). Por otro lado, algunas anticipaciones de los niños fundadas en razonamientos *incorrectos* pueden ser acertadas, por ejemplo, pueden proponer un par que arroje un pedazo mayor al correspondiente a (2, 3), aumentando ambas cifras, pensando en que, porque se aumentan las cifras, el pedazo será más grande. Si proponen entonces (5, 6), por ejemplo, habrán acertado. Posiblemente estas anticipaciones no puedan ser invalidadas por ahora. Lo serán más adelante, cuando se trate expresamente de formular pequeños teoremas.

Análisis de la experimentación de la S. D. 3.4: Anticipaciones (4° grado)

Fecha: 25-06-85
Duración: 1h: 15'

En la sesión de clase sólo pudieron realizarse tres confrontaciones colectivas: una para revisar las respuestas a las dos primeras preguntas, otra para la tercera y otra para la cuarta pregunta. Las 4 preguntas restantes no pudieron ser revisadas. No obstante, a pesar del poco tiempo del que dispusieron para contestar estas últimas, siete de los ocho equipos lo intentaron.

Analizaremos las respuestas proporcionadas a cada pregunta. En los casos en que las respuestas fueron confrontadas, incluiremos en el análisis los argumentos emitidos por los niños. En el siguiente cuadro presentamos todas las respuestas, de tal suerte que, para entender la respuesta de un equipo o una pregunta determinada, podemos

Cuadro de respuestas a las 7 preguntas

Pregunta / Equipo	1	2	3	4	5	6	7
	(x, y) > (1,1)	**(x, y) < (1,1)**	**(x, y) = (1,1)**	**(x, y) ≅ (x',y')**	**(x, y) > (4,3)**	**(x, y) < (4,3)**	(3,2) ? (3,4)
1	(3,1)	(2,4)	(1,1)	(2,4) ≅ (3,6)	---	---	---
2	(4,1)	(1,2)	---	(2,4) ≅ (4,8)	(8,6)	(2,2)	(6,8): "porque si aumentamos otra vez (3,4) saldría este resultado: 6,8"
3	(2,1) (6,2)* (9,3)* (12,1)*	(1,2) (1,3)*	(3,3) (100,100)* (1,1)* (22,22)* (3,3)*	(1,2) ≅ (2,4) (3,5)* ≅ (6,10)* (4,2)* ≅ (8,4)* (8,4)* ≅ (6,3)* (6,3)* ≅ (12,6)*	(5,1) (5,3)*	(4,4)	(3,2): "porque los pedazos son ½ y los de (3,4) son más chicos y ½ es más grande"
4	(6,1)	(1,2)	(1,4)	(1,2) ≅ (2,4)	(4,2)	(4,6)	(3,2): "porque son 3 enteros y 2 pedazos y en (3,4) son 3 enteros y 4 pedazos"
5	(3,2)	(1,3)	(1,1)	(3,6) ≅ (2,4)	(5,4)	(3,6)	(3,2): "porque son 3 enteros y 2 pedazos y cabe 1 entero para cada pedazo y sobre un entero, como son dos pedazos lo repartimos en medios"
6	(3,1)	(1,5)	(2,2)	(4,3) ≅ (2,3)	(8,1)	(1,3)	(3,2): "porque el número es más chico que el entero"
7	(7,1)	(1,6) (1,2)	(3,3)	½ 1/6 (1,6)	(3,3) (5,3)*	(3,3)	(3,4): "porque los 4 pedazos son más que 2 pedazos"
8	(3,1) (2,1)	(8,9) (1,5)*	(3,3)	(8,4) ≅ (4,2) (8,9)*	(8,6)	(2,2)	(3,4): "porque son 4 pedazos y 3 niños y forman el mismo entero"

apoyarnos en lo que contestó en las demás preguntas. Con respecto al conjunto de respuestas que aparecen en el cuadro, hagamos una precisión: por lo general los integrantes de cada equipo proporcionaron una sola respuesta *colectiva*, pero hubo casos en los que uno o dos niños del equipo, responden por su cuenta. Para identificar estas respuestas individuales las hemos señalado con un asterisco (*) (evidentemente, en el caso de respuesta única para un equipo, ésta puede ser también individual…).

El maestro dio la consigna e incluyó la aclaración de que no entregaría material, pero que si algún equipo lo necesitaba, podría pedirlo. Ningún equipo lo pidió, tal vez porque sintieron que no sería bien visto por sus compañeros el que lo pidieran. El maestro, por cierto, no valorizó -al dar la consigna- el hecho de que no se usara el material.

En cambio, en cuanto leyeron la primera pregunta, varios niños preguntaron ¿cuál es el entero? El maestro pegó entonces un *entero* en el pizarrón. Las tres primeras preguntas se refieren, en efecto, a comparaciones entre un pedazo de un entero **cualquiera** y ese entero. Las preguntas implican de entrada una generalización (no se trata del caso de un entero en particular) que los niños en este momento, no tenían por qué asumir, aunque no será difícil que lo hagan más adelante. Con el entero a la vista, tienen un punto de apoyo para realizar sus reflexiones.

Señalemos por último, que esta actividad resultó mucho más motivadora para los niños de lo que esperábamos. En las confrontaciones colectivas que pudieron llevarse a cabo, la mayoría de los niños intervino y en algunos casos, se entablaron polémicas muy apasionadas…

Preguntas 1 y 2. $(x, y) > (1, 1)$; $(x, y) < (1, 1)$

Veamos primero el conjunto de respuestas proporcionadas por los niños a estas preguntas. Todos los equipos encuentran por lo menos un par que satisface las condiciones pedidas (ver cuadro de respuestas). Recordemos que en la situación didáctica anterior (S. D. 3.3) realizaron una anticipación similar a éstas, con la única diferencia de que en aquélla los pares estaban ya dados y debían seleccionar los que arrojaban un pedazo mayor que el entero. En aquella situación, 3 equipos no lograron hacer la anticipación, mismos que ahora sí lo logran. Es posible que algunos niños de estos equipos hayan podido comprender las explicaciones y los ejemplos que proporcionaron sus compañeros en la confrontación colectiva de la situación anterior.

Pasemos ahora a las respuestas que proponen en esta ocasión: la mayoría de los pares contienen al número 1. Así, para dar un par al que corresponda un pedazo mayor que el entero, tienden a optar por pares del tipo (x, 1) en los que el pedazo es igual a la unión de todos los enteros, unión que por lo tanto no será dividida. Este es el caso, en efecto, en el que es más fácil visualizar que el pedazo resulta mayor que el entero. Lo mismo ocurre, y de manera más acentuada, en la segunda pregunta: para obtener un pedazo menor que el entero, reducen el número de enteros a 1: (1, x).

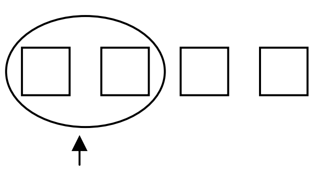
Para la primera pregunta, sólo un niño[47] propone sistemáticamente pares distintos a los anteriores. Tiende, inclusive, a manejar números relativamente más grandes (en la pregunta 3 manejará números muchos más grandes aún; veremos que ésta es su manera de intentar generalizar).

En la segunda pregunta sólo un equipo propone un par con números mayores que 1: (2,4), y un niño del equipo 8 propone también un par de este tipo, pero con números relativamente más grandes y además, con mínima diferencia entre los dos números: (8,9). Este par dará lugar a una interesante polémica entre los niños.

Señalemos por último que casi todos los pares propuestos son *nuevos*, en el sentido de que no pertenecen al pequeño acerco de pares que se han venido manejando hasta ahora.

De cinco equipos que observamos al contestar alguna de estas preguntas, sólo dos de ellos recurrieron a representaciones gráficas. En el equipo 2, están atorados en la primera pregunta (x, y) > (1,1). El observador les pide que digan un mensaje, *el que sea*. Proponen (4,2). Les pregunta entonces que si el pedazo correspondiente a ese mensaje es mayor o menor que el entero.

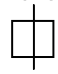
Un niño hace el siguiente dibujo:



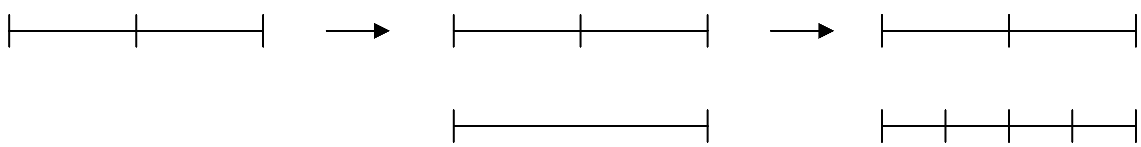
(cuatro enteros)

pedazo

[47] Este niño se destacará a lo largo de esta sesión por su intensa participación en las confrontaciones. Es el único que intentará establecer ciertas generalizaciones. Lo identificaremos con las iniciales de su nombre: J.A.

Encierra en una rueda dos enteros y dice “este es el pedazo, es más grande”. En seguida proponen otros pares: (4,1), (4,3). En este mismo equipo, para la pregunta 2, (x, y) $<$ (1,1) proponen *un medio*. Hacen el siguiente dibujo:  y después escriben: (2,1). Un compañero rectifica: (1,2). Notemos que, en la primera pregunta, sólo a partir de la representación descubren que el par corresponde a un pedazo mayor que el entero. En la segunda pregunta recurren a un conocimiento previo en fracciones: un medio. Apoyándose en una representación gráfica traducen la fracción ½ al lenguaje que ahora utilizan: (1,2). En el caso de fracciones unitarias, ambas interpretaciones (fraccionamiento y conmensuración) coinciden, esto es, representan lo mismo: (1,5) significa 1 entero, 5 pedazos, por lo tanto, el pedazo es la quinta parte del entero y esto mismo es lo que expresa $\frac{1}{5}$ en la interpretación de fraccionamiento. A lo largo de esta sesión veremos en varias ocasiones a los niños relacionar lo que ya conocen de las fracciones con los pares que ahora manejan.

En otro equipo (equipo 1), para contestar a la segunda pregunta [(x, y) $<$ (1,1)] hacen la siguiente representación:



Proponen: (2,4). Establecen un número cualquiera de enteros (2); el segundo segmento que trazan debajo de los enteros representa a estos mismos dos enteros que van a ser divididos, o bien, al total de pedazos que deben coincidir con el total de enteros. Finalmente, se determina el número de pedazos de tal forma que resulten menores que el entero (o, el divisor de tal forma que el cociente sea menor que 1).

Esta representación es posiblemente la que más destaca lo esencial de la relación de conmensuración entre dos longitudes (la encontramos con frecuencia en los márgenes de la hoja de preguntas que se entregó a los alumnos).

Los otros 3 equipos que observamos (equipos 3, 4 y 5) no recurrieron a representaciones gráficas, ¿responde a partir de una representación mental de la conmensuración o del reparto, o bien, aplican relaciones que ya han descubierto [x $>$ y $\Rightarrow$ (x, y) $>$ entero…]? En los casos en que el par contiene el número 1 [(6,1): equipo 4; (3,1) y (2,1): equipo 8] es probable que hayan contestado a partir de una representación mental de la conmensuración, pero en el caso de los pares (6,2); (9,3) y (8,9) esto es menos probable. Veamos los argumentos que dan en la confrontación colectiva:

- Para la pregunta 1 [(x, y) > 1 entero]. Pasaron sólo dos alumnos a defender su resultado. Uno de ellos es el niño del equipo 3 que propuso tres pares, pero frente al grupo sólo da uno: (2,1). Yuxtapone 2 enteros y dice: “Aquí están dos enteros, el pedazo sale del doble”. El otro niño hace algo similar para el par (3,1): “Aquí serían los tres enteros, el pedazo es todo esto”. No hay mas preguntas ni más explicaciones.
- Para la pregunta 2, (x, y) < (1,1). Esta vez el maestro pide a todos los alumnos que den su resultado y escribe los ocho pares en el pizarrón: (1,3); (1,2); (1,3); (2,4); (1,2); (1,5); (1,6); (8,9). En seguida les dice que dará dos puntos al equipo que logre demostrar que algún mensaje es incorrecto. Los niños se quedan pensativos un momento. Se escuchan cuchicheos en algunos equipos. Pronto en un equipo (equipo 2) gritan que el par (8,9) está mal. Dos equipos más se unen después. Uno de los integrantes del equipo que propuso ese par quiere retractarse: dice que se equivocaron, que van a proponer otro mensaje. El maestro les dice que ya no se puede quitar y anima a los niños a que *apuesten*. Finalmente, dos apuestan en contra y dos a favor. Pasa uno de los niños que apostó a favor. Yuxtapone ocho enteros.

Este alumno dice: “De ahí saldrán los nueve pedazos, por lo tanto, tiene que ser más chico”. Los opositores siguen inconformes, insisten en que es más grande; no logramos entender por qué. Otro niño (J.A.) que al principio dijo que él no sabía, que había que ver, les dice ahora: “Siempre, para que te dé uno más grande que el entero, éste (señala el número de enteros) tiene que ser más grande… para sacar nueve de aquí (se refiere a los ocho pedazos que están pegados) tendríamos que cortar uno… a ver… ¿cómo?”. Otra niña dice: “Como son 8 enteros y 9, no alcanza a un entero”. Los opositores siguen sin aceptarlo, aunque no dan argumentos. Uno de ellos dice: “Se puede partir en novenos y sale más de un entero”. El maestro decide dibujar abajo de los enteros los nueve pedazos. Un niño le sugiere que mida, pero él no hace al tanteo. Al terminar, varios niños exclaman: ¡ganamos!

Hasta entonces entendimos a qué se refería uno de los equipos opositores. Un niño de ese equipo dice: “Nos dijeron que uno, los pedazos son mas grandes que uno”. No pensaron en el tamaño de **un** pedazo, sino en el de los nueve juntos: los nueve pedazos juntos son más grandes que un entero. Esto nos da otra explicación de por qué ellos proponen pares del tipo (1, x): el **total de pedazos** no es más grande que **un** solo entero, puesto que sólo hay uno. Añadiendo un entero más (2, x), el total de pedazos ya es más grande que **un** entero (es igual a dos enteros). Según esta explicación se estarían fijando sólo en la cantidad de enteros. Sin embargo, esto no explica por qué, en la pregunta anterior (dar un par al que corresponda un pedazo **mayor** que el entero), proponen pares con varios enteros pero con un solo pedazo. Si para ellos sólo contaran los enteros, podrían haber puesto cualquier número de pedazos.

Por otro lado, notemos que mientras que en el caso de todos los pares que se proporcionaron, excepto el (8,9), la mayoría de los niños se mostró convencida de que eran correctos, para el caso del par (8,9) sólo dos equipos siguen sosteniendo que son correctos. Es claro que lo que diferencia significativamente a este par de los otros - además de contener más de un entero [había otro par con más de un entero: (2,4)] - es el tamaño de los números y la poca diferencia entre ellos. En este caso [(8,9)], es mucho más difícil visualizar la relación de conmensuración con la precisión requerida (o imaginar el producto de un reparto) que en los otros. Para determinar si le corresponde un pedazo mayor o menor que el entero es ahora más necesario realizar mentalmente alguna operación que permita concluir, con independencia de la pequeña diferencia que habrá entre las longitudes. Esto es de hecho, lo que hacen los defensores del mensaje en cuestión. Aluden a la acción que permite obtener 9 pedazos de 8 enteros: “Saldrán más chicos”; “tendríamos que cortar uno”; “no alcanzó”. Parece que piensan en términos de *repartir* 8 cosas entre 9. Si se entrega **una** cosa a cada uno, harían falta 9 cosas. No alcanza.

Finalmente, nuestro niño del equipo 3 (J.A.) que al principio dudó, formula una primera generalización destacando la relación entre el número de enteros y el de pedazos que determina cuándo los enteros son mayores que los pedazos: “Siempre, para que te dé uno más grande que el entero, éste (el número de enteros) tiene que ser más grande”.

Pregunta 3 (x, y) = (1,1).

Del conjunto de respuestas que dan los equipos (ver cuadro de respuestas) observamos lo siguiente: el número de respuestas correctas bajó con respecto a las dos anteriores preguntas y los números con los que forman los pares son también menores (3, 2 y 1) excepto en el caso de un niño del equipo 3 (J.A.) que veremos más adelante. Por ello pensamos que esta pregunta resultó más difícil para los niños, a pesar de que la relación en juego [$x = y \Rightarrow (x, y) = (1,1)$] fue implícitamente manejada en las dos preguntas anteriores. Probablemente la dificultad tenga que ver con el hecho de que ahora se trata de pensar explícitamente en una transformación… que no transforma. El par (x, y) ha descrito en todos los casos a un pedazo mayor o menor que el entero. El que el pedazo sea igual que el entero tal vez pone en entredicho, para algunos niños, que haya una transformación de por medio, y por lo tanto, que exista un par que lo describa.

En uno de los equipos que observamos (equipo 4) proponen los pares (1,2), (1,3) y (1,4) a los que, por cierto, llaman "un medio, un tercio y un cuarto". El observador les pregunta que por qué proponen esos pares. Explican que los pedazos son iguales a un entero… ¡todos los pedazos juntos! Es claro que tienen una idea del tamaño de los pedazos que corresponden a esos pares, pero, nuevamente, interpretan la consigna de una manera particular: establecen la comparación entre los totales (de enteros y de pedazos) y no entre un entero y el pedazo que es producto de las operaciones implícitas en el par.

Intentamos ver esto de más cerca: en el trabajo que tienen que realizar los niños hay por lo general dos momentos en los que tienen que comparar enteros y pedazos. Está, por un lado la comparación (1) señalada por la pregunta entre **un** entero y **un** pedazo (en este caso, se pide que sean iguales). Por otro lado, el tamaño del pedazo se determina a partir de otra comparación (2) con el entero: lo que equipara *x* enteros con *y* pedazos en la relación de conmensuración. A partir de la primera comparación (1 entero con 1 pedazo) los niños deben establecer la otra (*x enteros* = *y pedazos*) con la idea clara de que lo que deben obtener de ésta es **un** pedazo de determinado tamaño.

Sucede que los niños de este equipo (así como los opositores al mensaje (8,9) en la pregunta anterior) no consideran la comparación (1). Igualan a un entero no el pedazo sino el número de enteros de la ecuación *x enteros* = *y pedazos* (y el número de pedazos ya no interesa).

Posiblemente esta manera de interpretar la pregunta no se deba a una simple confusión, sino a la dificultad para coordinar las dos variables del par pensando en el producto que se desea obtener. Los números *x, y* del par son entonces manejados sin relación entre sí. Se considera sólo la variable número de enteros (se iguala a 1), el número de pedazos puede ser cualquiera, el tamaño de un pedazo no interesa, sólo se busca que *x* pedazos sean iguales a un entero.

Veamos ahora las respuestas que da J.A. del equipo 3: [(100,100); (1,1); (22,22);...]. Es claro que este alumno ha descubierto ya la relación entre las variables (x, y) que determina que el pedazo sea igual al entero. Con los números *grandes* que propone parece querer decir "no importa qué número sea".

En la confrontación colectiva, cada equipo propuso un par: (1,1); (1,4); (100, 100); (1,1); (1,4); (2,2); (3,3); (3,3).

Rápidamente dos niños apuestan a que el par (1,4) esta mal: pasa uno de ellos, pone un entero en el pizarrón y dice que abajo irían 4 pedazos; "Está mal" -agrega- "porque no está igual el pedazo que el entero". En seguida, J.A. intenta formular su descubrimiento: "todo número que no sea similar que dos números no es igual y se los puedo demostrar, 1 entero y pedazos ¿sale igual?, 100 enteros y 100 pedazos, un pedazo de ésos es un entero". No hay más discusión. Notemos que J.A. llama *número* al par (x, y). Esto, y cierta tendencia a relacionar los pares (x, y) con las fracciones que conocen, empieza a suceder de cuando en cuando. Por otro lado, en esta misma formulación aparece un primer intento de *demostración*: consta de un ejemplo -con números grandes que constituyen un primer medio para generalizar- y un contra ejemplo que los niños del grupo ya pudieron comprobar. Más adelante estas demostraciones se constituirán -progresivamente- en un objeto explícito de reflexión.

Pregunta 4: (x, y) $\cong$ (x_2 y_2)

Esta pregunta fue planteada también en la situación didáctica anterior, aunque en aquélla debían seleccionar pares equivalentes entre un conjunto de 8 pares (los únicos pares equivalentes que había eran equivalentes a ½). En aquella ocasión sólo un equipo encontró una equivalencia. Cuatro equipos no encontraron ninguna y dos más propusieron pares con números iguales: (a,b) $\cong$ (b,a).

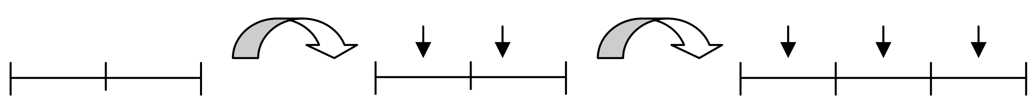
Esta vez cinco equipos proponen una equivalencia correcta, cuatro de los cuales proponen pares que son equivalentes a un medio del entero o a dos enteros. Aunque hemos visto ya que seleccionar pares equivalentes es más difícil para los niños que generarlos, pensamos que la confrontación colectiva de la sesión anterior proporcionó a varios niños elementos que les sirvieron para comprender la pregunta. Por otro lado, en dicha confrontación, con los pedazos ya a la vista, constataron que (1,2), (2,4), y (3,6) eran pares equivalentes. Esta vez, de las ocho respuestas correctas, cuatro de ellas retoman estos mismos pares. Existe también la posibilidad de que hayan memorizado los pares y la pregunta… pero esto nos parece poco probable.

En las ocho respuestas correctas, individuales o de grupo, se distinguen dos tipos:

- Parejas como (2,4) y (4,8); (1,2) y (2,4); (3,5) y (6,10)… en las que un par puede obtenerse del otro aplicando una regla que ya se ha esbozado antes: duplicar, triplicar, etc., ambos elementos del par (en todos los casos duplican).
- Y parejas como (2,4) y (3,6); (8,4) y (6,3) -son menos frecuentes- que no provienen de la aplicación directa de aquella regla. En estos casos, una posibilidad es que un par se haya obtenido con independencia del otro, a partir de una representación mental o gráfica del pedazo que resulta (un medio) de distintos *repartos*, o bien, y esto es mucho menos probable, a partir de mantener constante la razón entre los dos elementos de cada par:

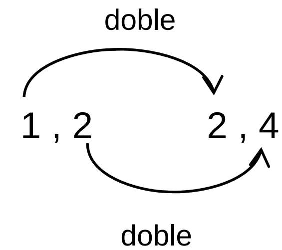
doble	doble
2, 4	3, 6

En el primer caso los niños haría más o menos lo siguiente: a partir de, por ejemplo, dos enteros, buscar la división necesaria para que queden medios. Hacer lo mismo a partir de cualquier otro número de enteros:

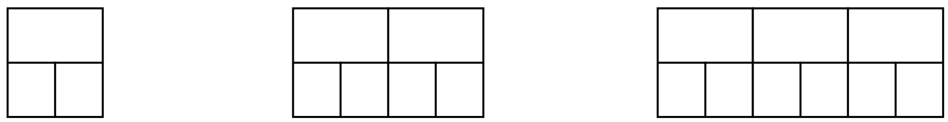


2,4 corresponde a ½ 3,6 corresponde a ½

Notemos que este procedimiento deja de ser tan sencillo en el caso de fracciones en las que uno de los elementos no es múltiplo del otro, como (3,5), o, más aún, en los casos en que la fracción no es tan fácil de visualizar. El segundo caso (mantener la razón constante) nos parece mucho menos probable, aún para el caso de esta fracción sencilla (un medio), en primer lugar porque en la mayoría de los pares con los que se ha trabajado esa razón no es igual a un número entero -por ejemplo en el caso de (3,5)- y por lo tanto, no han tenido ocasiones para destacar esa constante, y en segundo lugar, porque la forma en que, hasta ahora, ellos han identificado o generado equivalencias deja completamente de lado la existencia de esa razón, y destaca, en su lugar, la otra que ya hemos mencionado.

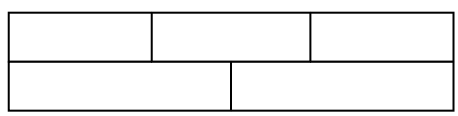


Hay otro procedimiento más que es probable que hayan aplicado en todos los casos: consiste en ir "agregando" un entero y dos pedazos o dos enteros y cuatro pedazos y registrando cada vez el par que se obtiene:



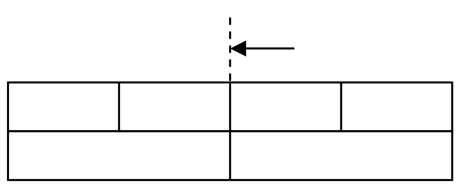
(1,2) (2, 4) (3,6)

Este es el procedimiento más apegado a lo que de hecho ellos hacen con el material. En el único equipo que pudimos observar, un niño implementó un procedimiento muy similar a éste, aunque menos sistemático: empezó representando gráficamente el par (3,2):



Después hizo otra representación en la que puso un solo entero. Se quedó pensativo y dijo: "No se puede". El observador le pregunta, "¿qué es lo que no se puede?" y dice "hacer un pedazo igual".

En seguida dice "con 4,2, en 4 enteros caben dos sería como… no… no… en 8 enteros… no… sería el doble". Hace la siguiente representación:



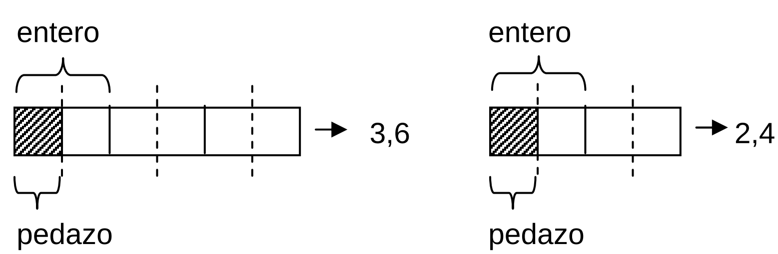
Y dice señalando la mitad, "aquí sería esto". Escribe: (4,2) y (2,1).

Los errores. Esta vez no nos fue posible entender a qué se debieron: el equipo 5 propone la equivalencia (4,3) $\cong$ (2,3). Podríamos pensar que -como en otros casos- no pensaron en el tamaño del pedazo y se limitaron a igualar el número de pedazos en ambos pares. Sin embargo, en este equipo han resuelto correctamente todas las demás preguntas. Pueden tratarse entonces de una simple equivocación como, por ejemplo, haber escrito (4,3) en vez de (4,6) por distracción. Las otras dos respuestas erróneas ½, 1/6 y (8,9) no parecen tener ninguna relación con la pregunta.

La confrontación colectiva no dio lugar, esta vez, a que los niños explicitaran el camino que siguieron para determinar las equivalencias, pero sí se identificaron los errores. Se apuntaron seis parejas de pares en el pizarrón (una por equipo):

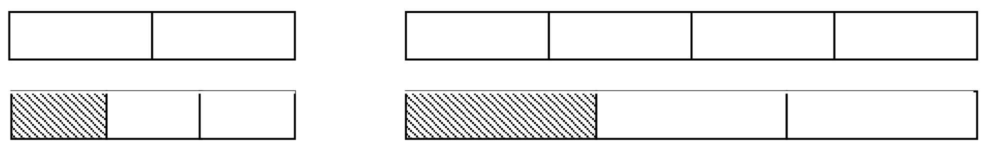
3,6 y 2,6
6,3 y 12,6
2,4 y 3,6
1,2 y 2,4
2,3 y 4,3
8,4 y 4,2

Rápidamente, un niño del equipo 3 (otra vez J.A.) se propone para probar que la pareja 3,6 y 2,4 está mal. Nótese que en esta pareja un par no puede obtenerse del otro duplicado, triplicando, etc. Parece que esto es lo que hace suponer a J.A. que hay error. Varios niños quieren unirse a la *apuesta* de J.A., pero él no acepta. Esta adhesión a la apuesta de J.A. no se debe a que los demás niños piensen también que hay error -parece que no se han preocupado por ver si lo hay o no- se debe más bien al prestigio que este niño se ha ganado frente a algunos de sus compañeros. Confían en él y quieren ganar puntos. Finalmente, después de algunos alegatos, cinco equipos (¡!) apuestan a que hay error. Una niña del equipo que propuso ese par pasa a defender su respuesta. Pone en el pizarrón tres enteros. Marca con gis tres rayas, dividiéndolos así en seis partes. Abajo pone dos enteros y los divide de la misma manera en 4 partes:



Muestra que los dos pedazos son iguales. Los niños se quedan perplejos. J.A. dice: “Sabía que los dos eran mitades, pero pensé que una era más chica que la otra”. No es que J.A. piense que dos mitades de una misma unidad puedan tener distinta medida. Se refiere –esto se aclara más adelante– a casos como (5,2) y (6,2): en ambas parejas el total de enteros se parte “a la mitad” para obtener el pedazo, una “mitad” de ésas es más grande que la otra. La representación que utilizó la niña que demuestra que la equivalencia es correcta nos pareció interesante: evidencia de qué manera los pedazos se obtienen de los enteros. Las operaciones en juego quedan más manifiestas que en la representación que yuxtapone enteros y pedazos.

El maestro invita a los alumnos a que hagan más apuestas. Esta vez, los niños se ven más reservados. J.A. está concentrado en su lugar haciendo algo y finalmente se anima a hacer otra *apuesta*: la pareja (2,3) y (4,3) está mal. De nuevo varios más lo siguen. Esta vez se acuerda que “ya no se vale”. Pone dos enteros en el pizarrón y dibuja abajo 3 pedazos, hace lo mismo con (4,3):



Y dice: “Aquí te da tercios, aquí también pero de una manera más grande, más exagerada”. Los intentos de relacionar lo que saben de fracciones con estos pares ordenados de números son cada vez más frecuentes… por cierto, hasta ahora, el maestro no ha dicho que el propósito de todo este trabajo es conocer las fracciones…

No hubo tiempo para confrontar las respuestas a las 3 preguntas restantes. Nos limitamos a revisar someramente el conjunto de respuestas. Notemos que en estas preguntas es más factible que en las anteriores –en las que no se dio de entrada un par de números– que aparezcan errores debido a que se consideren los elementos del par como números naturales aislados, sin relación entre sí. Esto ocurre, en efecto en tres equipos: proponen pares con números mayores para (x, y) $>$ (4,3) y con números menores para (x, y) $<$ (4,3). En la comparación entre (3,2) y (3,4) dos de ellos afirman que a (3,4) corresponde un pedazo mayor, seguramente porque uno de los números del par (3,4) es mayor que uno del par (3,2). Uno de estos equipos dice explícitamente: “Porque los 4 pedazos son más que dos pedazos”. En la explicación que da el equipo 8 encontramos problemas a nivel del significado del par: ”Porque son 4 pedazos y tres niños y forman el mismo entero”.

Los otros cuatro equipos que responden a estas preguntas lo hacen correctamente. Pueden identificarse los siguientes recursos:

Para (x, y) $>$ (4,3)

- aumentan el número de enteros, dejando fijo el número de pedazos: (5,3)
- dejan fijo el número de enteros, y disminuyen el número de pedazos: (4,2)
- aumentan el número de enteros y disminuyen el número de pedazos: (5,1), (8,1).

Para (x, y) $<$ (4,3)

En este caso se aplican los mismos recursos, esta vez para generar pedazos menores.

Para la pregunta 7

Tres equipos de los cuatro, explicitan claramente en la justificación a su respuesta (3,2) $>$ (3,4) el razonamiento que sugirieron:

- "Porque en (3,2) los pedazos son medios y los de (3,4) son más chicos y un medio es más grande" (a lo que ellos llaman "un medio" es un medio de tres enteros, es decir, 3/2 del entero).
- "Porque son 3 enteros y cabe un entero para cada pedazo y sobra un entero y como son dos pedazos, repartimos en medios".
- "(3,2) porque el número es más chico que el entero". Suponemos que al decir "el número" se refieren al otro par: (3,4).

Tres explicaciones correctas, distintas entre sí: en la primera describen el producto de las transformaciones x3 ÷ 2 y x3 ÷ 4. En la segunda describen la transformación misma (al estilo de un reparto) y observan que en (3,2) al pedazo le *toca* más de un entero, y en la tercera, comparan ambos pares con el entero: (3,4) $<$ (1,1) $<$ (3,2). La cuarta justificación, en cambio, se limita a mencionar la ecuación correspondiente a cada par, como si éstas hablaran por sí mismas: "Porque son 3 enteros y 2 pedazos y en 3,4 son 3 enteros y 4 pedazos".

Conclusiones

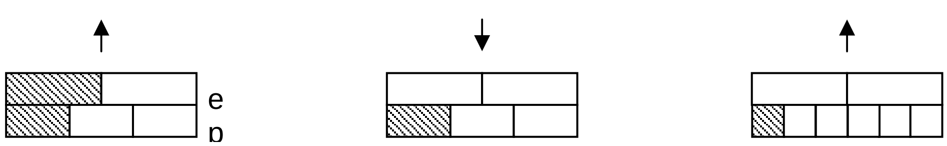
Acerca de las preguntas y de los errores cometidos.

De los ocho equipos, cuatro responden correctamente a por lo menos seis de las siete preguntas. Los otros cuatro equipos responden bien a las dos primeras y fallan más o menos sistemáticamente a partir de la tercera o de la cuarta pregunta. Hemos visto ya que el mayor número de respuestas correctas en las dos primeras: [(x, y) > 1 – (x, y) < 1] y en la cuarta: $(x_1, y_1) \cong (x_2\ y_2)$ puede explicarse en parte por el hecho de que las intentaron resolver ya una vez en la sesión anterior, pudieron confrontar sus respuestas con los pedazos construidos y conocieron lo que hicieron sus compañeros. Otro factor que debe ayudar a explicar esta diferencia de aciertos entres las tres primeras preguntas y las siguientes es su grado de dificultad. Veamos esto con más detalle.

Una dificultad inherente a todas las preguntas está en la necesidad de pensar en el tamaño de **un** pedazo a partir de la ecuación *x enteros* = *y pedazos* implícita en el par (x, y). Esto lo han hecho sistemáticamente los niños en las actividades anteriores al elaborar un mensaje o al interpretarlo. Pero ahora no están esas acciones de por medio, ni los pedazos, ni los enteros. Necesitan por lo tanto disponer de algún recurso que les permita reconstruir el puente entre la escritura simbólica (x, y) y la situación concreta (el significado), a partir del cual puedan pensar en el tamaño resultante de un pedazo. Este recurso puede ser una representación mental o gráfica de la conmensuración, o bien, pensar en términos de un reparto (entre más niños, menos toca a cada uno…). Lo que hemos visto es que a varios niños aún no les es posible reflexionar a partir de estas representaciones más o menos abstractas. Dejan de pensar en el tamaño de un pedazo (producto de las transformaciones del entero) o, más aún, dejan de considerar el significado original del par (x, y), y lo manejan como un conjunto con dos números naturales sin relación entre sí. ¿Por qué entonces, hubo un número significativamente mayor de aciertos en las dos o tres primeras preguntas? Una primera diferencia importante entre estas preguntas y las que siguen es que en las primeras, las comparaciones que se plantean son entre un pedazo y el entero. Esta comparación puede desprenderse directamente de la relación de conmensuración entre enteros y pedazos que se expresará en el par (x, y). En los otros casos, las comparaciones son entre dos pedazos. El tamaño de éstos, a su vez, se determina en relación a los enteros. Habrá entonces dos relaciones de conmensuración en juego de las que hay que destacar el tamaño de cada pedazo:

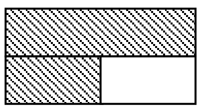
Primeras 3 preguntas (pedazo ~ entero) | Preguntas siguientes (pedazo ~ entero)

(x, y) | (x, y) | (x', y')

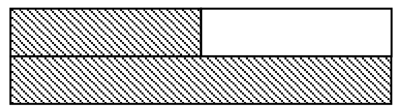


No obstante, ya en la tercera pregunta, unos pocos niños no se centraron en el tamaño del pedazo, e igualaron el total de pedazos al entero.

Otra diferencia entre ambos grupos de preguntas la encontramos en la manera en que la mayoría de los equipos respondió a las primeras: redujeron el número de pedazos o de enteros a uno. De esta manera el tamaño del pedazo se determina a partir de una sola operación (unir enteros o dividir un entero) y no a partir de la composición de dos operaciones. Esto facilita mucho la posibilidad de hacer una representación mental del tamaño del pedazo en relación al del entero.



(1 , 2)



(2, 1)

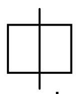
Acerca de los recursos implementados: distintos niveles de abstracción.

Hemos visto que la gran mayoría de los niños propone pares cuyos elementos son casi siempre números menores que cinco. Aunque la elección de este rango puede estar influida en algunos casos por el hecho de que los elementos de la mayoría de los pares que se han venido manejando pertenecen a ese rango, pensamos que en general esta elección está determinada también por la necesidad de hacer una representación –mental o gráfica– de la situación planteada en cada pregunta. Esto manifiesta que los niños, en su mayoría, no han elaborado aún generalizaciones que les permitan contestar con independencia de los casos particulares.

En la confrontación colectiva, por lo menos en un caso, fue notoria la diferencia en cuanto a la posibilidad de los niños de juzgar si una respuesta era correcta o no cuando el tamaño de los números varió significativamente: fue el caso de las respuestas a la pregunta 2, en el que el par (8, 9) propició una acalorada discusión –no sólo con quienes interpretaron mal la pregunta– cosa que no sucedió con los demás pares: (2,4); (1,2); (1,2) etc.

Por otro lado, aún dentro de este rango numérico, los procedimientos de los niños fueron diversos. Frente a cada pregunta, hubo quienes, para dar una respuesta acuden a una representación gráfica y hubo quienes no lo hicieron. No pudimos detectar si hubo una relación entre las preguntas y la tendencia a acudir a representaciones gráficas (en el sentido de si ante ciertas preguntas esa tendencia era mayor). Los niños que no acuden a la representación gráfica pudieron establecer la relación entre pedazos y enteros requerida a partir de una representación mental de la situación. Es muy probable que –por lo menos en este rango de números chicos- la determinación de la respuesta se realizó a partir de una abstracción de ciertas propiedades (relaciones entre las variables *x*, *y* y el tamaño del pedazo), como, por ejemplo *entre más pedazos, más chico es el pedazo*. No podemos, sin embargo, saberlo con precisión porque, por ahora, estos razonamientos supuestos no fueron explicitados.

Los otros procedimientos –los que incluyen una representación gráfica– también guardan entre sí, algunas diferencias importantes. En algunos casos, la representación gráfica jugó el papel de traducir, confirmar o aclarar una respuesta que se obtuvo mentalmente. Recordemos algunos ejemplos: ante la pregunta 2 que pide un par al que corresponda un pedazo menor que el entero, un niño dice: “Un medio”, después dibuja:

 y finalmente escribe (1,2). Ante la pregunta 4 (dar dos pares equivalentes) un niño empieza buscando la equivalencia directamente a partir de la representación gráfica (pone 3 enteros 2 pedazos y parece intentar encontrar un par equivalente con un solo entero) y no llega a un resultado. Opta por otro camino: empieza a pensar (hablando) en un par (x, y) en el que pueda reducir *x* para obtener un nuevo par (x’, y’) equivalente. La reflexión es difícil y vuelve a la representación, esta vez, con la idea de lo que quiere obtener: dibuja 4 enteros y 2 pedazos y observa que dos enteros 1 pedazo es equivalente. Esta manera de utilizar la representación reduce la diferencia entre este procedimiento y el de los que no hacen representación.

En cambio, en otros casos, la representación gráfica parece ser utilizada más directamente para obtener la respuesta. Por ejemplo, para la pregunta 1 (dar un par al que corresponda un pedazo más grande que el entero), en un equipo tiene dificultad para entender la pregunta. Después piensan en un par: (4,2). Dibujan los cuatro enteros, observan que el pedazo está formado por dos enteros y hasta entonces concluyen:… “Es más grande”.

La representación gráfica se presta en ciertos casos para obtener de manera sistemática respuestas cuando no se ha abstraído la relación en juego y cuando hacer una representación mental de la situación es aún difícil.

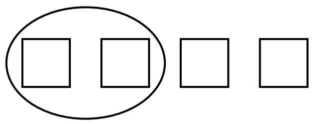
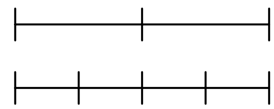
En el único caso en el que los números de los pares que se propusieron fueron de una manera bastante sistemática más grandes –el caso de J.A.– la representación gráfica estuvo siempre ausente. No hay ninguna duda de que J.A. proporcionó sus respuestas a partir de propiedades que logró abstraer (y que llegó a formular en algunas ocasiones). Estas propiedades le permitieron romper el límite en cuanto a rango numérico impuesto por las representaciones gráficas (o por la necesidad de pensar en ellas). Curiosamente en la única pregunta ante la cual J.A. no manejó números grandes (la segunda), tuvo dudas acerca del par (8,9) proporcionado por otro compañero.

Vayamos ahora a otra característica de los procedimientos implementados por los niños, observamos, tanto en sus representaciones gráficas como en los argumentos que pudimos registrar, una tendencia a combinar dos interpretaciones del par (x, y), de hecho, muy relacionadas entre sí: el reparto y la conmensuración. Parece que para pensar en el tamaño del pedazo que corresponde a un par (x, y), en algunos casos es más fácil pensar en términos de reparto, ya sea de pasteles entre niño o de *enteros* entre *pedazos*, porque en el reparto se destaca más la acción que transforma a los enteros en pedazos. Es una representación más dinámica que la conmensuración en la que aparecen estáticos pedazos y enteros. Por ejemplo, los argumentos que dan varios niños para justificar que el pedazo que corresponde al par (8,9) es menor que el entero se refieren a la acción que permite obtener 9 pedazos de 8 enteros. Utilizan, en este caso como otros, palabras como *le toca, no alcanza*, etc. De hecho, en otras situaciones hemos visto a niños que para construir el pedazo, esto es, para dividir *n enteros entre m*, recurren a los mismos procedimientos que utilizaban para repartir: dividir entre un número bastante más pequeño que el cociente, y seguir *repartiendo* los residuos.

Frente a otras preguntas, en cambio, la idea de repartir se desvanece y en su lugar se destaca más la idea de coincidencia entre enteros y pedazos (conmensuración). Esto ocurre, por ejemplo, cuando buscan, cuando justifican o cuando intentan generalizar casos en que hay equivalencia. En estos casos es seguramente más fácil imaginar (o dibujar) la nueva coincidencia que se obtiene cuando se agregan a dos segmentos de enteros y pedazos, más segmentos iguales, que pensar en términos de reparto (*si hay tres veces más niños y tres veces más pedazos, el pedazo que toca a cada uno sigue siendo del mismo tamaño*). En el caso de la equivalencia puede partirse de un pedazo ya determinado (no es necesario pensar en cómo se obtuvo a partir de los enteros). Lo que interesa es qué otros pares arrojan ese mismo pedazo y esto se traduce en cómo agregar o quitar enteros *y* pedazos a la ecuación *n enteros = m pedazos.*

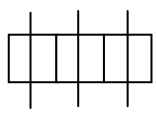
A nivel de las representaciones gráficas encontramos también rastros que acusan la preponderancia de una de las dos interpretaciones, a veces con respecto a la misma pregunta. Veamos algunos ejemplos:

Para las preguntas 1 y 2 (un pedazo mayor o menor que el entero) aparecen, entre otras, estas dos representaciones:

1)  (4, 2) **2)** 

La primera parece reflejar más la idea de repartir 4 cosas entre dos, idea que no destaca la segunda representación. En esta última se manifiesta más bien la idea de coincidencia entre totales de enteros y de pedazos.

Otra representación gráfica que vimos utilizar en dos ocasiones es ésta:

3)  (para obtener el pedazo correspondiente al par (3,6)).

Parece una simplificación de la representación típica de la conmensuración, pero a nuestro juicio destaca más que aquélla la **transformación** de los enteros en pedazos. En este sentido es más parecida a la primera.

Así, ante preguntas que exigen una reflexión sobre medidas fraccionarias de longitudes, expresadas en el lenguaje simbólico (x, y), los niños manifiestan que disponen de una interpretación (reparto-conmensuración) que da sentido a ese lenguaje y que les permite realizar dicha reflexión.

Hemos visto que el grado en que se dispone de esa interpretación para realizar anticipaciones varía: hay niños que no reestablecen la relación semántica entre el par (x, y) y el contexto y responden a las preguntas en función de las propiedades de los números naturales, propiedades que manejan ya muy bien.

Hay quienes pueden establecer la relación en juego sólo a partir de una representación gráfica (que ellos mismos elaboran). Hay quienes necesitan la representación únicamente como apoyo o confirmación de las relaciones que establecen mentalmente. Finalmente, algunos pueden prescindir ya de dichas representaciones. La mayoría realiza sus reflexiones en un rango de números muy chicos, más allá del cual no tienen la misma seguridad ni la posibilidad de aplicar los criterios que han elaborado. Casi todos tienden a reducir la complejidad de las preguntas, en algunos casos eliminando una de las dos operaciones implícitas en el par (x,.y), en otras, optando por fracciones de la unidad que les son muy conocidas (un medio).

Comentarios acerca de las confrontaciones colectivas.

Una vez más, a los errores y a los casos *difíciles* como la aparición de un par con números relativamente grandes, o de pares en los que la equivalencia no podía ser leída fácilmente, se debieron las discusiones más interesantes que libraron los niños. Fue siempre ante la necesidad de probar algo a los otros que se generaron las formulaciones de razonamientos implícitos o, incluso, de generalizaciones. Es cierto también que la intervención del maestro en el sentido de *ofrecer* puntos a los equipos que probaran que alguna respuesta era incorrecta, tuvo un efecto visible en la motivación de los niños por intervenir.

Por otro lado, con respecto a las pruebas proporcionadas por los niños, en todos los casos consistieron en mostrar, con respecto al pedazo en particular, la veracidad o falsedad de alguna respuesta. Sólo J.A. intentó ir más allá, demostrando, mediante algún contra ejemplo, la falsedad de algunas proposiciones, aunque, para probar sus propias proposiciones también él permaneció en el nivel del ejemplo.

CONCLUSIONES FINALES

1. Acerca de los procedimientos movilizados por los niños en relación a la secuencia de situaciones didácticas.

Hemos partido del siguiente supuesto: los problemas de reparto propician que los niños movilicen determinados procedimientos de resolución a los cuales subyacen la relación de igualdad entre enteros por repartir y pedazos repartidos. El recurso a estos procedimientos, así como el descubrimiento de la relación de igualdad mencionada que implican, favorecerían el que los niños movilicen al procedimiento de conmensuración como un medio para determinar una medida fraccionaria (ver capítulo III).

Ya hemos intentado analizar este proceso a lo largo de cada una de las situaciones didácticas que intervinieron en él. Nos proponemos ahora destacar aquellos elementos que nos permitan formarnos una idea más global del proceso y evaluar con mayor precisión nuestro supuesto de partida. Centraremos esta vez nuestra atención en los procedimientos implementados por los niños en relación a las diferentes formas en que los problemas exigieron la movilización de la relación entre enteros y pedazos, relación que de hecho, articula la secuencia de situaciones.

En las primeras situaciones -1.1 a 1.4- los niños realizan los repartos sin dificultad. Las condiciones de un buen reparto, si bien no fueron siempre explicitadas, fueron cumplidas: exhaustividad del reparto, igualdad de las partes. La relación de igualdad entre enteros y pedazos fue casi siempre obviada. Repartieron enteros, obtuvieron pedazos. En dicha transformación no quitaron ni agregaron *pastel*. Ante la pregunta: ¿cómo sabemos que se repartieron *x* pasteles exactamente? relataron su procedimiento (aclarando con esto que no quitaron ni agregaron). En algunos casos aislados reunieron las partes mostrando que coincidían con el todo. Cuando en tercer grado sucedió que aparentemente las partes reunidas y el todo no coincidían, inmediatamente determinaron que ese reparto estaba mal hecho.

Es claro que la presencia del material, la posibilidad de separar y reunir las partes constatando que la cantidad no cambia, constituyó un apoyo para asegurar la verificación de dicha relación (hubo una sola excepción, ver S. D. 1.2. tercer grado).

En la S. D.1.2. (¿Cuáles son mitades?) nuevamente dicha relación fue movilizada implícitamente para determinar si un pedazo era mitad o no, la compararon (de diversas maneras) con el entero.

Las dificultades aparecen a partir de la situación 2.1. De aquí en adelante los procedimientos de los niños empiezan a diferenciarse, manifestando con esto los distintos grados en que manejan la relación en cuestión.

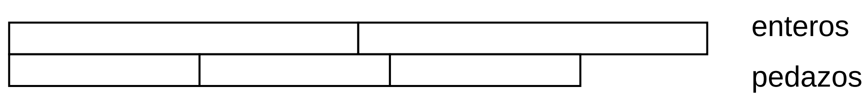
En las situaciones 2.1 y 2.2 (Construir el entero), la relación total enteros=total pedazos subyace al procedimiento de resolución más económico: unir los pedazos y dividir lo que resulta entre el número de enteros. Esta vez no se trata de **constatar** que los pedazos reunidos vuelven a dar el total de enteros. Los pedazos no están presentes. Por lo tanto, esa relación deber ser **pensada**, utilizada como un medio para construir los enteros. Al reunir los pedazos los niños deben ver en ellos el total de enteros.

Hemos visto que esta vez, pocos equipos en ambos grupos movilizaron de entrada esa relación: para la mayoría en ambos grupos, una primera dificultad consistió en entender que esta vez se trataba de realizar la operación inversa de un reparto hipotético. Más o menos dos equipos en ambos grupos no pudieron superar esta dificultad a lo largo de los tres problemas planteados (insistían en considerar a los pedazos como enteros y pretendían repartirlos). En el segundo problema y en algunos casos hasta el tercero, varios equipos de 3^er^ grado logran comprenderlo, pero aplican un procedimiento de resolución que deja de lado la relación entre los totales. Este procedimiento es, por cierto, mucho más complicado que el que se basa en dicha relación: realizan una representación hipotética del reparto y a partir de ésta tratan de averiguar lo que tienen que hacer al pedazo para obtener al entero. Un equipo de 3° y uno de 4° logran movilizar la relación en cuestión hasta el tercer problema. Finalmente, tres equipos de tercero y cuatro de cuarto recurrieron a la igualdad entre los totales desde el primer problema y entre estos equipos, en algunos casos fue notorio que dicha relación constituyó un descubrimiento (así, un niño de tercero exclama: “Entonces, ¿los cinco pedacitos, son los dos caramelos?”. Otro niño de 3° explica: “Vimos que todo esto -la unión de los pedazos- eran los tres chocolates, entonces, dividimos entres tres”).

Resulta bastante claro que si bien los niños de tercero y cuarto aplican implícitamente la relación entre totales cuando reparten, cuando verifican repartos o cuando intentan determinar qué pedazos son mitades, no sucede lo mismo cuando dicha relación tiene que ser **anticipada** (los enteros están ausentes) como un medio para resolver un problema, vemos entonces que no todos los niños de estos niveles han tomado conciencia de dicha relación. Los problemas planteados en estas dos situaciones -2.1 y 2.2- han favorecido en algunos casos -y en otros no- el que los niños la adquieran.

En las tres situaciones siguientes -2.3, 2.4 y 2.5- el número de niños que recurren a la relación entre totales aumenta considerablemente. En la situación 2.3 se trata nuevamente de determinar cuál es el entero que se repartió, (dado el pedazo y los datos del reparto) pero esta vez sólo hay que seleccionarlo entre varios posibles (en vez de construirlo). Seis equipos de tercero y los ocho de cuarto recurren a la relación entre totales para determinar cuál es el entero (yuxtaponen el número indicado de pedazos con el número indicado de enteros de cada tipo, buscando la coincidencia).

En las situaciones 2.4 y 2.5, se da el entero y el pedazo y se trata de determinar los datos del reparto. Todos los equipos de 3° y 4° acaban yuxtaponiendo enteros y pedazos y buscando la coincidencia. Aunque esta elección puede deberse en parte a que, precisamente en las dos situaciones anteriores varios niños descubrieron y movilizaron ese procedimiento, pensamos que hay otro factor importante que la determinó: esta vez los enteros y los pedazos están materialmente presentes. Por un lado esta presencia física ayudó a algunos niños en la situación 2.3 a distinguir enteros de pedazos (recordemos que insistían en considerar a los pedazos como enteros por repartir) y, por otro lado, fue claro que constituyó un apoyo significativo para que recurrieran a la relación de igualdad entre los totales en las tres situaciones. No obstante, un equipo de 3° y uno de 4°, en las situaciones 2.3 y 2.4 (con enteros y pedazos presentes) tienen aún dificultad en concebir que hubo un reparto (hipotético) que ya se realizó: así, por ejemplo, en la situación 2.3 (seleccionar el entero) un niño escoge el entero más grande, yuxtapone 2 de esos enteros con tres pedazos. Los enteros juntos resultan más largos que los pedazos:



Y dicen: “Esto que sobra se reparte”.

Por otro lado, en la S. D. 2.1 y 2.2 (Construir el entero), algunos niños de 3° construyeron un entero reuniendo todos los pedazos, es decir, no dividen el total de pedazos entre el número de enteros para obtener un entero. En este caso, sí consideran la igualdad de los totales. **La dificultad está en concebir al total original, antes de ser repartido, formado también por partes**. Este comportamiento se repite en la situación 2.3, en la que tienen varios pedazos para elegir: hace caso omiso de que en la consigna se dice que se repartieron 3 enteros y se dedican a buscar en cuál de los enteros disponibles, su pedazo cabe un número exacto de veces. Parece que logran comprender el problema (el hecho de que ya no se trata de repartir sino de realizar la operación inversa) reduciendo el reparto hipotético a uno más fácil de visualizar (y más familiar): **aquél en el que se reparte una sola cosa** (y en el que hay, por lo tanto, sólo una operación en juego: dividir).

Así, antes de abordar la situación fundamental 3.1, la mayoría de los niños ha movilizado la relación entre los totales, pero el grado en que lo han logrado varía significativamente:

- Todos la aplican implícitamente en los problemas que consisten en repartir.
- Relativamente pocos equipos (tres de tercero, cinco de cuarto) pueden concebirla como un medio para resolver un problema sin la presencia de los enteros.
- Los demás equipos manifiestan que pueden movilizar dicha relación y utilizarla como medio para determinar el tamaño del entero (dado el pedazo) siempre y cuando dispongan de enteros y pedazos (3 equipos de tercero y 2 de cuarto) o bien, conciben dicha relación reduciendo el dato hipotético (aquello que se repartió) a una unidad (un equipo de tercero); finalmente, por lo menos en un equipo de tercero, subsiste la dificultad, aún disponiendo de enteros y pedazos, de tomar como dato el resultado de un reparto hipotético (tenderán una y otra vez a repartir).

Estos resultados no son estáticos. En el caso de varios equipos se dieron cambios de procedimiento que manifestaron un dominio creciente de la relación en cuestión. No obstante, aquello que resultó problemático para los niños en esas situaciones, vuelve a aparecer en la forma en que abordaron la situación fundamental (S. D. 3.1): la mayoría de los equipos de ambos grados recurren, en efecto, a la conmensuración para resolver el problema, pero todos ellos dan por hecho que los receptores dispondrán de varios pedazos para elegir el indicado. Vuelven entonces a recurrir a la igualdad entre totales (de enteros y pedazos), con los enteros y los pedazos físicamente presentes. Es posible también que, en este caso, no se hayan apoyado en la idea de repartir. Habiendo movilizado la relación de conmensuración en las situaciones anteriores, pudieron ahora haber pensado directamente en conmensurar enteros y pedazos para obtener la ecuación *x enteros = y pedazos*. El tipo de mensajes que escribieron nos hace pensar que así fue: hay pocas referencia a la idea de repartir (ausencia de términos como: *repartir*, *niños*, *entre*...). Tienden a expresar únicamente el número de enteros y el número de pedazos que coinciden.

El que hayan recurrido a este procedimiento implica, en primer lugar, que aceptan que el pedazo ya está dado. Esto fue favorecido por el problema mismo: el receptor debe construir un pedazo del mismo tamaño que el del emisor. En segundo lugar, implica que se reconoce que la ecuación *x enteros = y pedazos* es necesaria y suficiente para determinar, dado el entero, el tamaño del pedazo. Esto tampoco fue evidente de entrada para todos los niños. Recordemos que en la situación 3.1 un niño de 4° grado argumentó que bastaba con dar el número de enteros para identificar al pedazo. Supuso que sólo existía un pedazo que, iterado, coincidiría con ese número de enteros. Fue necesario que un compañero le mostrara que había por lo menos otro pedazo que satisfacía esa condición, para que este niño reconociera la necesidad de los dos datos. Y en tercer lugar implica, en caso de que hayan considerado al pedazo como producto de un reparto, que independientemente de cómo se realizó ese reparto hipotético, el total de pedazos es igual al total de enteros.

El procedimiento de conmensuración movilizado en la situación 3.1 (seleccionar el entero) constituyó por lo tanto el punto de partida para abordar la situación 3.1 segunda aplicación, en la que los receptores ya no dispusieron de pedazos para elegir. Esta vez era necesario construir el pedazo. Del hecho de que *x* enteros coinciden con *y* pedazos, los niños tenían ahora que inferir que el pedazo podía obtenerse a partir del entero, uniendo *x* enteros y dividiendo entre *y*. Nuevamente esta inferencia, similar a la que requerían las situaciones 2.1 y 2.2, no pudo ser realizada por algunos equipos de tercer grado. De hecho, fue a partir de esta situación -3.1 segunda parte- que las trayectorias de ambos grupos se diferencian claramente. Mientras que todos los equipos de cuarto grado pudieron realizar la inferencia en cuestión, sólo tres equipos de tercero lo logran, (justamente los mismos tres equipos que pudieron movilizar la relación *x enteros = y pedazos* para construir el entero en las situaciones 2.1 y 2.2) y otros tres equipos abandonan el procedimiento de conmensuración. Más aún, varios equipos de tercero que reciben mensajes basados en este procedimiento (x enteros – y pedazos) no pueden interpretarlos y en algunos casos afirman explícitamente que el pedazo no puede construirse porque el mensaje “no dice cuál es el pedazo”, o bien, intentan ver si su pedazo satisface la ecuación. Esto es todavía más desconcertante si pensamos que dichos mensajes indican, finalmente (aunque no explícitamente), que debe hacerse un reparto de x enteros entre y, y esto los niños de tercero lo han hecho con éxito varias veces. El principal problema no estuvo por lo tanto en la realización técnica, sino en la interpretación misma de los mensajes.

Es claro que existe una significativa diferencia entre saber repartir y prever que dado un pedazo, existe un reparto que lo determina. Recordemos, sin embargo, que los niños de ambos grupos pudieron movilizar -aunque en otro nivel- esta relación entre datos de un reparto y tamaño del pedazo resultante, en la situación 1.4. Pudieron realizar algunas previsiones sobre el tamaño de los pedazos (mayor, menor o igual que un entero, por ejemplo) a partir de los datos correspondientes a diversos repartos. La diferencia ahora es que el punto de partida no es un reparto, sino un pedazo. El que los niños no puedan interpretar los mensajes en cuestión explica por sí mismo que no hayan recurrido a la conmensuración para elaborar sus mensajes. Esta dificultad para interpretarlos, para realizar la inferencia de la que hablamos antes, podría radicar en una dificultad para pensar en el pedazo como producto de dos operaciones: lo que hay que hacer a los enteros para obtener los pedazos no es una acción simple como agregarles algo, o quitarles algo, o incluso, iterarlos o dividirlos. Es necesario iterarlos y realizar una división sobre el producto de esa interacción. En las situaciones 2.1 y 2.2 en las que el entero también se obtenía del pedazo mediante la aplicación de dos operaciones, hemos visto que algunos niños de 3° tendieron a aplicar una sola de las operaciones: el entero es igual al total de pedazos (no dividieron) o sólo consideran un entero y lo dividen en pedazos (no multiplicaron).

Decidimos insistir con tercer grado en la interpretación de los mensajes. Retomamos los mensajes de conmensuración elaborados por algunos de ellos (y otros no elaborados por ellos) y les pedimos que los interpretaran (S. D. 3.2 y 3.3). La forma en que poco a poco empezaron a poderlos interpretar nos pareció significativa: una vez unidos los enteros indicados, no proceden a dividir esa unión doblando en partes iguales o dividiendo la medida en centímetros; tienden a estimar el tamaño del pedazo y lo iteran buscando la coincidencia con los enteros. Este es, por supuesto, un procedimiento entre otros para dividir y podrían haber recurrido a él por desconocer los otros. Sin embargo, pensamos que es muy probable que su origen esté en que tienden a buscar la coincidencia de los pedazos con los enteros más que a pensar en la transformación (unir-dividir) que convierte a los enteros en pedazos.

Por otro lado, el hecho de que empezaran por estimar el tamaño del pedazo constituyó, en algunos casos, un obstáculo. Está el ejemplo den niño que recibe el mensaje “4 enteros y 3 pedazos”. Unió los enteros y estimó que el pedazo sería más chico que el entero. Después de varios intentos fallidos de hacerlos coincidir, exclama “¡el pedazo es más grande!” (S. D. 3.3). Es muy probable también que la dificultad que manifiestan con frecuencia para dividir una longitud en cierto número de partes iguales (que no sea 2 ó 4) sea otro factor que explique el que no puedan prever que de la composición de las operaciones unir-dividir resulta un pedazo de tamaño bien específico. Por ejemplo, algunos niños estiman el tamaño y lo iteran, y cuando no se cubre la longitud total de los enteros, deciden *repartir* el resto, es decir, vuelven a aplicar el mismo procedimiento: estimar e iterar. El pedazo que resulta se forma uniendo los pedazos obtenidos en estas divisiones parciales. Es probablemente difícil prever que ese pedazo es del mismo tamaño que el emisor iteró para hacerlo coincidir con los enteros.

Por último, los dos equipos de tercer que no movilizaron la relación de conmensuración siquiera en el caso en que había pedazos para elegir, fueron los mismos que no pudieron abordar las situaciones 2.1 y 2.2 y que en la situación 2.3 (Seleccionar el entero) o bien buscaron **un** entero en el que su pedazo cupiera un número entero de veces, o bien seleccionaron el entero más grande y argumentaron que lo que sobrara *lo repartirían*. Una primera dificultad que se manifiesta, y que posiblemente sea el origen de las demás, es partir del resultado de un reparto hipotético y por lo tanto, establecer relaciones entre los enteros y los productos de ese reparto. No sabemos, sin embargo, si en efecto esta dificultad (u otra) fue el motivo de que los demás problemas hayan resultado inaccesibles, dando esto lugar a una actitud de desinterés y de rechazo, o si más bien fue por esa actitud que nos se comprometieron en una búsqueda frente a cada problema.

Con respecto a 4° grado, ningún equipo tuvo problemas para interpretar los mensajes aun sin disponer de pedazos para escoger. Sin mucha dificultad y con algunos intervenciones del maestro, los niños precisaron y redujeron el lenguaje utilizado en los mensajes a su mínima expresión: a, b. (S. D. 3.3). Desde el punto de vista de la sintaxis, sólo faltó adoptar la notación convencional: $\frac{a}{b}$. Este par ordenado expresa la relación de conmensuración entre enteros y pedazos que determina, dado el entero, el tamaño del pedazo. El que haya sido utilizado como información para construir el pedazo, nos asegura que éste es el sentido implícito que tiene para los niños. Esta relación de conmensuración puede ser interpretada en este momento por los niños, ya sea simplemente como la coincidencia de enteros y pedazos, o como la transformación que consiste en “repartir enteros”, esto es, en unirlos y dividirlos para obtener los pedazos. Aunque relacionan ya cada par ordenado con un pedazo bien específico, es poco probable que interpreten por ahora al par como el producto de dicha transformación (estado versus operador).

En la situación 3.4 (anticipaciones), ante preguntas acerca de diversas relaciones entre longitudes expresadas mediante los pares (a, b) –esto es, relaciones entre medidas fraccionarias– la mayoría de los niños pudo movilizar en diferente grado la interpretación de dichos pares como relación de conmensuración o como reparto (ver S. D. 3.4). Algunos niños empezaron a establecer ciertas relaciones entre los pares para anticipar las relaciones correspondientes entre las longitudes. En uno o dos casos, se dieron intentos de elaborar generalizaciones, ya fuera mediante la elección de números relativamente grandes, ya sea mediante la formulación explícita de algún *teorema*. La mayoría de los niños, sin embargo, eligió números pequeños (más o menos menores que cinco); tendieron a simplificar la composición de operaciones reduciendo el número de enteros en juego a uno y se apoyaron de una u otra forma en representaciones gráfica para contestar. En el otro extremo, algunos niños no pudieron reestablecer la relación entre este lenguaje y el contexto. Nuevamente –aunque en otro nivel– la dificultad consistió en pensar en el tamaño de un pedazo a partir de las dos operaciones implicadas en el par (a, b). Tendieron a reflexionar no sobre un pedazo, sino sobre el total de pedazos, o bien, interpretaron los pares ordenados (a, b) como simples conjuntos de dos números sin relación entre sí.

En resumen: las situaciones de reparto (1.1 a 2.5) favorecieron, en efecto, que los niños de ambos grupos movilizaran la relación de igualdad entre enteros y pedazos como un medio para resolver los problemas planteados. Excepto dos equipos de tercero, los demás pudieron tomar como dato el tamaño de un pedazo –producto de un reparto hipotético– y buscaron la coincidencia de dichos pedazos con los enteros, ya fuera para determinar los datos del reparto (dados el entero y el pedazo), ya se para seleccionar el entero. En la situación 3.1 este recurso fue nuevamente implementado como medio para seleccionar el pedazo entre varios posibles a partir de su relación de conmensuración con el entero. Es decir, reconocen que, independientemente de cómo se hizo el reparto hipotético, el total de pedazos es igual al total de enteros (o bien piensan ya directamente en poner en relación enteros y pedazos), y que dicha relación (x enteros = y pedazos) permite determinar (seleccionar) uno de los valores en juego (tamaño del pedazo o del entero) dado el otro valor. Sin embargo, únicamente los equipos de 4° grado y algunos equipos de 3° lograron movilizar la relación en cuestión **sin** la presencia física de alguno de los dos valores que intervienen en ella (pedazos o enteros), para inferir de ésta la transformación que permite obtener el otro valor. Es decir, pudieron ver, en el total de enteros, el total de pedazos (y viceversa) y deducir que un pedazo se obtiene dividiendo ese total de enteros entre el número de pedazos.

Por lo menos tres equipos de tercero manifestaron sistemáticamente la necesidad de disponer del material concreto para poder realizar dichas reflexiones. Cuando no dispusieron del material, o no pudieron abordar el problema, o movilizaron un recurso que deja de lado la relación entre totales (S. D. 2.1), o tendieron a considera sólo una de las dos operaciones de la transformación que convierte a los enteros en pedazos (y viceversa).

Vemos ahora con más claridad que la presencia o ausencia del material concreto (pedazos, enteros) en esta situación constituyó una variable significativa en los niveles en que trabajamos: la relación entre totales que dio origen a la relación de conmensuración y la posibilidad de determinar a partir de ésta el valor de una de las magnitudes en juego constituye deducciones que los niños establecen progresivamente. Iterar pedazos y enteros buscando la coincidencia manifiesta ya que se ha realizado una deducción (los totales deben coincidir). Ver en los enteros el conjunto de pedazos (los pedazos no están concretizados aparte) y prever, por lo tanto, que de esa reunión pueden *recortarse* los pedazos implica otra deducción más compleja cuya posibilidad de realización depende sin duda del grado en que se han apropiado de la primera.

De esto podemos adelantar ya una posible modificación a la secuencia: a los problemas que consisten en construir el entero o el pedazo podrían anteponerse problemas que consisten en seleccionarlos. Nosotros no habíamos previsto incluir en la secuencia estos problemas. La situación 2.3 (Seleccionar el entero) la incluimos al constatar que varios alumnos no pudieron abordar la anterior (construir el entero). En el caso de la situación 3.1, fueron los mismos niños quienes supusieron que habría pedazos para elegir. Notemos que los mensajes destinados a que el receptor seleccione el pedazo entre varios posibles son igualmente susceptibles de ser reducidos a la expresión "número de enteros, números de pedazos". Desde el punto de vista del significado, quedaría implícito el hecho de que el tamaño del pedazo se obtiene aplicando una composición de dos operaciones al tamaño del entero, pero sigue estando en juego el hecho de que la relación de conmensuración entre enteros y pedazos determina el valor de uno de ellos a partir del otro. Habría que cuidar que la cantidad de pedazos entre los que se elija el adecuado sea suficientemente grande para evitar, por un lado, el que haya un solo pedazo que al ser iterado coincida con x enteros (o un solo entero que coincida con *y* pedazos), ya que esto tendría el efecto de crear una situación particular en la que bastaría un número natural para resolver el problema. Por otro lado, un número reducido de pedazos para escoger tendería a dar al procedimiento de conmensuración como medio de medición una validez excesivamente local.

Una modificación que debe evitarse (¡y es tentadora!) es la siguiente: trabajar en un principio únicamente con fracciones unitarias (un solo entero en juego). En efecto, con esto se elimina una dificultad que resultó determinante: poder pensar en la composición de dos operaciones. Sin embargo no vemos en qué medida ese trabajo previo constituiría un apoyo para poder concebir –mas adelante– la composición de dos operaciones. Además, y esto es aún más contundente, si sólo hay un entero en juego, la situación puede resolverse utilizando un solo número natural.

Existen otras modificaciones posibles que consideramos deben evitarse: los niños, todos, pudieron realizar sin mayores problemas las actividades que consisten en repartir. Sin embargo, en la interpretación de los mensajes basados en la conmensuración tuvieron, en tercero, grandes dificultades, a pesar de que, finalmente, era un reparto lo que tenían que hacer. Podríamos pensar entonces en ahorrarnos ese largo proceso de los mensajes y proponer, una vez que los niños han constatado que existe cierta relación entre los datos del reparto y el tamaño del pedazo resultante, que dichos pedazos sean identificados con los datos del reparto. Así por ejemplo, a los pedazos que se obtienen de repartir 3 pasteles entre 5 niños, los identificamos con la pareja “3 pasteles, 5 niños”, que podría reducirse después a (3, 5).

Esta opción presenta, sin embargo, grandes inconvenientes: dado que la cuantificación del pedazo no resulta necesaria, se la impone; nos quedará la duda, además, de si los niños están convencidos de que a ese par de números corresponde un tamaño único y determinado. La pérdida más grande, desde el punto de vista del significado de la fracción, sería la siguiente: no se parte de la comparación de un pedazo ya **dado** con un entero (o unidad), es decir, no se parte del propósito de **medir** una longitud con otra, propósito que da lugar a la creación de una medida fraccionaria. La fracción únicamente describiría el proceso a través del cual los enteros dan lugar a los pedazos sin que quede explícito que ésta describe una relación cuantitativa entre pedazos (o partes) y enteros.

En cambio, será necesario explorar –como se hizo con los grupos control en la situación 3.1– las posibilidades que tienen los niños de 3° y de 4° para iniciar la secuencia con esa situación (3.1), esta vez disponiendo de pedazos para elegir. Esto permitirá valorar nuevamente la pertinencia de las situaciones previas.

2. Otros aspectos de las situaciones didácticas previas (1.1 a 2.5) que resultaron problemáticos para los niños.

En el inciso anterior, con el objetivo de destacar ciertas relaciones entre los procedimientos implementados por los niños y la secuencia de situaciones didácticas hemos dejado de lado algunos problemas que no están directamente vinculados con el eje de la secuencia. Retomamos aquí aquéllos que nos parecen más relevantes.

En los problemas que requieren la realización de un reparto (S. D. 1.1; 1.3; 1.4) ninguno de los niños de tercero ni cuarto tuvieron dificultades para comprender las consignas y para tener en cuenta las condiciones de un buen reparto. En ambos grupos, la única dificultad residió en dividir una superficie o una longitud entre un número distinto de 2 o de una potencia de 2. Estas últimas divisiones se pueden realizar, en última instancia, doblando sucesivamente la hoja a la mitad. En los otros casos el doblado se vuelve difícil de realizar. Los niños tienden a realizar las primeras divisiones entre dos y, algunos de ellos tienen la hipótesis de que doblando sucesivamente entre 2 (2, 4, 8…) en algún momento obtendrán el cociente de una división entre 3. Por otro lado, ya hemos dicho que posiblemente esta dificultad para prever la forma de dividir entre números distintos de 2^n tenga relación con la dificultad para pensar en un pedazo como producto de dos operaciones, una de las cuales es una división. Por ello consideramos que estas actividades de reparto ameritan un trabajo un poco más prolongado. Éste podría realizarse inclusive a partir del segundo grado de primaria, nivel en el cual las condiciones de un buen reparto (exhaustividad, igualdad de las partes) podrían constituir dificultades interesantes para los niños.

En estas situaciones se manifestaron otras dificultades relativas a la comparación de superficies y de fracciones de superficies. Si bien en este trabajo decidimos dejar de lado esta magnitud, es claro que tendrá que ser retomada y, además, que cierto trabajo con superficies puede iniciarse en estos niveles sin pretender llegar al mismo punto al cual llegamos con longitudes. Así, en la situación 1.1 se planteó el problema de comparar dos mitades de superficie de distinta forma, obtenidas de unidades iguales. El problema fue comprendido por todos los niños. En 4° grado la gran mayoría afirmó inmediatamente que dichas superficies eran iguales argumentando que eran mitades de hojas iguales. En tercer grado, en cambio, pocos niños hicieron esta deducción. O manifestaron no saber cuál era más grande, o se inclinaron por alguna de las dos. Sin embargo, excepto dos o tres niños, todos los demás encontraron algún recurso de medición y pudieron verificar su hipótesis inicial. En el caso de los otros niños, la verificación no procedió en virtud de que consideraron que el área de la superficie cambió al cambiar la forma.

En la situación 1.2 (¿Cuáles son mitades?) la mayoría de los niños de tercero y algunos de cuarto, utilizaron como criterio para discriminar mitades la igualdad en tamaño y forma entre la superficie en cuestión y su parte complementaria con respecto a la hoja entera. Rechazaron de entrada, por lo tanto, superficies que sí eran mitades pero que no verificaban esa condición. Nuevamente, pudieron implementar recursos de diversos de medición que los llevaron a constatar su error para cada caso particular.

Estos problemas ponen en juego dos propiedades relacionadas entre sí: la conservación de la superficie y la relación entre fracciones de superficie derivada de la relación entre las unidades de origen. Aunque, como hemos visto, la mayoría de los niños de 3° (y algunos de 4°) no pudieron movilizar aún dichas propiedades frente a estos problemas, sí pudieron abordarlos y constatar sus errores. Consideramos, por lo tanto, que estos problemas (entre otros) proporcionan experiencias valiosas en el nivel de 3° y aun de 4°, experiencias que pueden apoyar la construcción progresiva de las relaciones antes dichas.

En la situación 1.4 se plantearon a los niños preguntas que exigían anticipar ciertas relaciones entre pedazos obtenidos de determinados repartos, a partir de los datos de dichos repartos. Casi todos los equipos pudieron realizarlas cuando se trató de comparaciones con el entero. Por lo tanto, por lo menos con respecto a estas preguntas, los niños pudieron ya coordinar las dos variables en juego (número de pasteles – número de niños) para pensar, en el tamaño del producto del reparto: el pedazo. En cambio, por lo menos, la mitad de los niños en ambos grupos no pudieron anticipar qué repartos arrojarían pedazos del mismo tamaño (equivalencias), excepto en el caso de repartos que arrojan mitades. Frente a esta pregunta, dejaron de considerar la relación entre los datos del reparto reduciéndolos a un simple conjunto de niños aislados o bien simplemente no contestaron. Hemos visto ya que esta pregunta tenía una probabilidad muy baja de poder ser abordada. Al no disponer aún de una regla sobre la relación entre los datos de los repartos que permita identificar aquéllos que son equivalentes, los niños necesitan partir de una representación de los pedazos correspondientes a cada reparto, o bien, de la forma en que se realizan los repartos. Esta tarea es sumamente difícil de realizar cuando se trata de discriminar equivalencias entre varios repartos ya dados (además, nuevamente implica al problema de la conservación de la superficie). En cambio, una vez que los niños tuvieron a la vista los pedazos, varios de ellos fueron capaces de explicar por qué se daba la equivalencia, e incluso, en 4° grado, describieron, a partir de la constatación de ciertas equivalencias, una relación proporcional simple y a partir de ella generaron otras más sin necesidad de apoyarse en las representaciones antes dichas.

Por lo tanto, el problema de la equivalencia puede abordarse ya en estos niveles desde el contexto de reparto, adecuando la forma en la que éste se plantea, en particular, multiplicando las experiencias en las que los niños constaten y expliquen equivalencias y generen repartos equivalentes a uno ya dado.

Estos problemas, junto con los de la comparación con el entero –los cuales pudieron ser resueltos por los niños con mucho menos dificultad y que podrían también diversificarse más– tienen un interés particular debido a que constituyen las primeras experiencias que propician hacer explícita la relación entre los datos del reparto y el tamaño del pedazo resultante.

Con respecto a las situaciones 2 (2.1, 2.2…) ya hemos analizado en el primer punto de estas conclusiones los problemas más importantes que se manifestaron. Destaquemos aquí únicamente que esta familia de problemas derivados del reparto nos pareció adecuada e interesante para los niveles en los que trabajamos, por las nuevas relaciones entre todo y parte que ponen en juego sin haber dejado por ello de constituir problemas accesibles para los niños. Sólo unos pocos de 3° no pudieron abordarlos, posiblemente debido a que aún no pudieron tomar como dato el producto de un reparto hipotético. Para los demás esto ya no constituyó un obstáculo, y, si bien no siempre lograron desarrollar un procedimiento sistemático de resolución, en todos los casos pudieron aproximarse a la solución y verificar sus respuestas, a partir de caminos diversos.

3. En relación a los procesos de formulación, validación e institucionalización.

El análisis que hemos hecho de los resultados de la implementación de esta secuencia de situaciones se ha centrado en la relación entre los procedimientos de los niños y los problemas planteados, es decir, en ciertas características de la **acción** movilizada por los niños frente a cada problema. Hemos dejado inevitablemente de lado al análisis, previo y posterior, de otros momentos fundamentales del proceso –destacados en el primer capítulo–, en particular, el de las formulaciones de los niños. Éstas fueron consideradas siempre en el análisis, ya realizado, mas no fueron objeto de un estudio particular. Los procesos de validación (no empírica) y de institucionalización, constituyen –en tanto procesos– fases posteriores al trabajo realizado hasta ahora, aunque en varias situaciones podemos identificar momentos aislados de ambos tipos. No es nuestro propósito realizar ahora estos análisis –no podríamos hacerlo con los datos que disponemos–, nos limitamos únicamente a señalar algunas características generales observadas en el curso de la experimentación.

Todas las situaciones de la secuencia se diseñaron a partir de un esquema que consiste, en general, en una fase de trabajo en equipos sobre un problema seguido de una confrontación colectiva de los resultados. Con esta organización pretendimos propiciar, en dos niveles distintos, una interacción entre los niños que hiciesen posible, por un lado, cierta colaboración en el trabajo de resolución de problemas y, por otro lado la formulación, el cuestionamiento, la comparación y la difusión de sus distintos saberes. Más adelante señalaremos algunos problemas relacionados con esta organización, por ahora destaquemos que estas dos instancias, trabajo en equipos y confrontaciones colectivas, constituyeron los momentos más importantes del proceso de formulación[48]. A continuación nos referimos únicamente a las confrontaciones colectivas, debido a que no disponemos de registros completos de las formulaciones de los niños en las fases de trabajo en equipo[49].

[48] El caso de las situaciones (3.1, 3.2…) es, en este sentido particular, por tratarse de situaciones de comunicación: la formulación escrita de un procedimiento para medir es el medio a través del cual se resuelve el problema.

[49] También tendremos que dejar de lado, por la misma razón, las breves sesiones de *recordatorio* con las que el maestro inició varias de las clases. En éstas los niños explicaban a alguien que no había estado presente la vez anterior, lo que se había hecho en esa ocasión. Estos fueron otros momentos interesantes de formulación.

El hecho de que las confrontaciones colectivas funcionaron casi siempre como el medio de validación colectiva de resultados, hace que las formulaciones a que éstas dieron lugar, tengan casi siempre el carácter de validaciones (o invalidaciones) de dichos resultados. No se trata de procesos de validación de nuevas proporciones, sino de su formulación con vistas a validar determinados resultados. Esto nos lleva a considerar otro elemento que resultará muy relacionado con estos momentos de formulación: el de la validación empírica. En efecto, a lo largo de las confrontaciones colectivas de la secuencia constatamos que la formulación de ciertas relaciones implícitas tiende a ocurrir en mayor medida por un lado, cuando aparecen divergencias claras entre los niños –muchas veces debido a errores cometidos– y, por otro lado, cuando la validación empírica no resulta contundente para todos. Esta última relación es menos clara; hay ocasiones en que precisamente la posibilidad de identificar los errores a partir de la prueba empírica está en el origen de la explicitación de ciertas relaciones…

Veamos primero algunos ejemplos representativos relativos a estas características de la formulación y posteriormente veremos con más detalle algunos puntos relacionados con la validación empírica.

- En la verificación de los repartos realizados en las situaciones 1.1 y 1.3 se esperaba que los niños explicitaran las dos condiciones que éstos debían cumplir: 1) la unión de las partes debe volver a dar el todo y 2) las partes deben ser iguales entre sí. Estas explicitaciones se realizaron con mucha más frecuencia en cuarto, en donde los repartos se hicieron de manera tan sofisticada que no resultaba evidente la verificación de una o de la otra condición. En tercer grado fue el maestro quien, a través de preguntas, intentó obtener estas explicitaciones. En respuesta, los niños relataban cómo habían hecho el reparto obviando así las condiciones en juego. Sólo en el caso de un reparto que pareció no cumplir la primera condición, algunos niños argumentaron que éste era incorrecto porque sobraba “un pedacito”.
- En este ejemplo es claro que la **no** evidencia de que se cumplan las relaciones en juego o el que no se cumpla alguna de ellas, constituyen el motivo que los lleva a explicitarlas y someterlas a prueba. De la misma manera cuando estas relaciones les parecen evidentes, tienden a no explicitarlas.
- En la situación 1.1, el maestro pide a los niños que emitan un juicio acerca de la comparación de dos mitades de hojas iguales pero de distinta forma. En tercer

grado la mayoría de los niños titubea y optan por averiguarlo empíricamente. En cuarto grado, en cambio, las opiniones se dividen: la mayoría afirma la igualdad de dichas mitades y un solo niño se opone.

Este enfrentamiento claro de opiniones suscitó una acalorada discusión en la que las diferentes partes acudieron a diversos argumentos para defender su posición. Estos son algunos de ellos: "Una mitad es más grande que la otra porque si la pintaran se usaría más pintura"; "Son iguales, una es más ancha pero la otra es más larga"; "Son iguales porque son mitades de hojas iguales…". Esta vez, la prueba empírica fue, afortunadamente, el último argumento (si hubiera sido el primero, no habría habido necesidad de discutir).

Otros ejemplos notables de la relación entre la necesidad de explicitar, la aparición de errores, contradicciones, y la ausencia de una prueba empírica contundente (o aplazamiento de la prueba) pueden verse en las situaciones 1.2, 1.4 y 3.4. A continuación retomaremos algunos de ellos, pero esta vez centraremos nuestra atención en ciertas características de la prueba empírica.

En la mayoría de las situaciones de la secuencia hemos intentado que la situación misma devuelva a los niños la información necesaria (retroalimentación) para que ellos estimen si han logrado o no resolver el problema, o qué tanto se han aproximado, es decir, hemos intentado que las situaciones proporcionen los medios para validar empíricamente los resultados. Sin embargo, durante la experimentación hemos observado que las características de las pruebas empíricas varían significativamente de una situación a otra. Destaquemos estas diferencias a partir de algunos ejemplos:

- En las situaciones 2.1 y 2.2, los niños construyeron el entero a partir del pedazo y de los datos del reparto. ¿Cómo saber si el entero es del tamaño correcto? Los niños que movilizan la relación entre totales para resolver el problema (unir el número adecuado de pedazos y dividir entre el número adecuado de enteros) consideran como prueba de validez el que sus pedazos reunidos coinciden con sus enteros. Esto no constituyó una prueba, para aquellos niños que aún no vieron la necesidad de que dicha relación se verificase. Para quienes partieron de una representación del reparto, la prueba satisfactoria consistió en mostrar que un entero más (o menos) determinada fracción de ese entero coincide, con un pedazo, y posiblemente, ninguna de estas pruebas resultó significativa para quienes no pudieron comprender la consigna. Éste es un caso en el que la situación sí proporciona los medios para verificar los resultados, pero los niños realizan la verificación a partir de las mismas relaciones que movilizaron para resolver el problema y éstas difieren de unos a otros. Había, sin embargo, otra prueba relativamente independiente de los procedimientos movilizados: repartir los enteros construidos y ver si los pedazos arrojados por este reparto resultan del mismo tamaño que los pedazos dados. Posiblemente, cierta insistencia del maestro acerca de cómo estar seguros que sus enteros satisfacen lo que se plantea en la consigna los habría llevado a esta prueba.

- En la situación 1.2 (¿Cuáles son mitades?), no hubo prueba empírica posible independiente de las relaciones particulares movilizadas por los niños. Algunos de ellos parten de la hipótesis (implícita) de que una parte del todo es mitad si y sólo si es igual en forma y tamaño a su complemento con respecto al todo. Este criterio determina a la vez la acción y la verificación. En esta situación la consigna contiene un concepto (*mitad*) cuyo grado de elaboración por los niños es variable y esto hace que el problema pueda ser interpretado de distintas maneras, y, en consecuencia, los resultados pueden ser sometidos a verificaciones distintas. Sin embargo, éste es un ejemplo del caso mencionado más arriba, en el que los resultados contradictorios arrojados por el grupo en conjunto (en 3°) dieron lugar, en la confrontación colectiva, a una explicitación de criterios, a la identificación de ciertos errores en algunos de ellos y a la aceptación por casi todos los niños de una prueba empírica basada, esta vez, en un criterio correcto desde el punto de vista matemático (un pedazo es mitad de un todo si, independientemente de la forma, del número de partes en el que resulte dividido el todo, del hecho de que se recorte… mide lo mismo que su complemento).

- En contraste con los dos ejemplos anteriores, en la situación 3.1 (Mensajes), la validación empírica de resultados fue contundente para todos, independientemente de los procedimientos movilizados. Los niños de estos niveles comparten ya un procedimiento adecuado para comparar dos longitudes (la superposición, haciendo coincidir uno de los enteros). Así, comparan la longitud del pedazo construido por el receptor con la del pedazo del emisor y, a partir de esto, saben si han logrado o no resolver el problema, si sus mensajes funcionaron o no. La posibilidad de identificar inequívocamente los fracasos fue, en este caso, el principal estímulo para cuestionar, modificar o cambiar los procedimientos movilizados[50].

Estos ejemplos ponen de manifiesto la necesidad de precisar, en mucho mayor medida de lo que lo hemos hecho, las relaciones implicadas en los procesos posibles de verificación, así como el grado (o grados) en el que los niños de un grupo las manejan. Debemos estudiar en qué casos las diferencias de criterios con las cuales los niños validan sus resultados enriquecen la situación al propiciar la aparición de ciertas contradicciones y en cuáles es preferible contar, en última instancia, con un criterio bien definido en relación a los conocimientos de los niños como condición para que se establezca un *diálogo* entre la situación y los niños, que favorezca la evolución de sus procedimientos. Finalmente, se trata de propiciar que tanto la aparición de contradicciones entre los niños como la identificación de fracasos, sean conflictos que favorezcan la generación de nuevos conocimientos.

Las situaciones de validación diseñadas expresamente para propiciar la formulación de nuevas proposiciones (*teoremas*) y su validación a partir de otras proposiciones (ya validadas), corresponden a una etapa posterior que se inicia en la situación 3.4. En ésta los niños han empezado ya a formular ciertas proposiciones sobre la comparación de los pares ordenados (a, b) para justificar sus anticipaciones.

En las situaciones siguientes, –similares a la 3.4– se intenta propiciar específicamente la formulación de determinadas proposiciones, acerca del orden y la equivalencia para realizar después un trabajo de validación.

En esta segunda etapa se inicia también un proceso de institucionalización a través del cual se propiciará que los niños pongan en relación los pares ordenados recién construidos con los números naturales: los primeros permiten resolver ciertos problemas de medición frente a los cuales los segundos resultan insuficientes. Más aún, estos pares permiten expresar una medida en casos en que los números naturales no lo permiten. Se identificará a los pares ordenados (a, b) como fracciones y se adoptará la escritura convencional $\frac{a}{b}$. De hecho, este proceso se ha iniciado ya desde la última parte de esta primera etapa, por lo menos en 4° grado, aunque no haya sido propiciado concientemente

[50] El efecto de esta validación no es siempre el que se espera. Recordemos que en tercer grado el procedimiento de conmensuración fue mal interpretado, o no interpretado en lo absoluto, varias veces. Al no poderse aclarar cuál era la dificultad, tendió a ser invalidado. En este mismo grado, seguramente como consecuencia de lo anterior, se tendió a validar este procedimiento frente al grupo a través de ciertas intervenciones involuntarias del maestro (S. D. 3.1- segunda aplicación; S. D. 3.2).

por nosotros: el mensaje (a, b), en el contexto de medición de longitudes, es reconocido ya por la mayoría de los niños como un objeto que sirve para ciertas cosas y tiene ciertas propiedades. En algunos casos aislados lo nombran espontáneamente con la palabra *fracción*, o bien: *medio*, *tercio*, *tercio exageradamente grande*…

4. Las técnicas de observación y registro y la organización del trabajo colectivo

Algunas de las dificultades con las que nos hemos encontrado al realizar el análisis de los resultados de la experimentación, se deben a ciertas insuficiencias en las técnicas de registro que implementamos. A continuación precisamos aquéllas que hemos identificado.

El haber contado con un solo observado para registrar los sucesos relevantes en cada sesión experimental (procedimientos de los niños en cada equipo, diálogos, interacción con el maestro, discusiones en las confrontaciones colectivas), sumando al hecho de que no precisamos lo suficiente, en los análisis previos, aquello que era prioritario registrar, tuvo como consecuencia la producción de registros muy parciales. Esta falta fue más difícil de superar en los casos en que el trabajo de los niños no dejó testimonios escritos o de alguna otra clase. Por otro lado, si bien para cada situación disponemos de un registro más o menos completo de por lo menos un equipo, no tenemos, en cambio, un registro completo de un mismo equipo a lo largo de las trece situaciones didácticas.

La escasa separación entre una sesión y otra (en general se realizaron seis sesiones semanales, tres con cada grupo); nos dio poco tiempo para revisar los resultados obtenidos en una sesión antes de aplicar la siguiente. Esto nos impidió detectar a tiempo ciertas lagunas de información que podrían haber sido suplidas mediante la realización de entrevistas individuales con algunos niños entre una sesión y otra. Lamentablemente no hicimos uso de este excelente recurso que habría sido de gran valor para interpretar ciertos errores que quedaron sin explicación, inclusive, para intentar conocer mejor no sólo en casos de error, las hipótesis que subyacen a los procedimientos de los niños frente a determinados problemas.

Por otro lado, en la organización del trabajo de los niños en cada situación didáctica encontramos problemas de otro orden. En todas las situaciones los niños trabajaron en equipos de cuatro integrantes, excepto en los momentos de confrontación colectiva. Sin embargo, la interacción entre los niños en el seno de cada equipo varió de unos equipos a otros. En algunos equipos los cuatro miembros participaron siempre, aunque la forma de esta participación también fue variable y amerita un estudio particular. En ciertos casos, por ejemplo, fue notoria una especie de división espontánea del trabajo: algún niño tiende a tomar la iniciativa, los otros lo siguen, le ayudan, o bien dos niños la toman con las consecuentes discusiones entre ellos, etc., pero con cierta frecuencia observamos que uno, dos o a veces hasta tres niños de un equipo se mantuvieron al margen.

Es probable que cuatro integrantes por equipo compartiendo la misma tarea sea un número excesivo, por lo menos como forma permanente de trabajo. La posibilidad de que solamente uno o dos niños asuman la responsabilidad –inclusive excluyendo a los otros– es alta.

Debemos por lo tanto estudiar para cada situación diversas formas de organización que favorezcan la participación de cada niño. Entre otras alternativas, pensamos que es fundamental rescatar el trabajo individual más allá de los momentos de evaluación. En ciertos casos el trabajo en equipo puede enriquecerse si previamente cada integrante tiene oportunidad de enfrentarse solo al problema; a su vez el trabajo en equipo puede constituir una valiosa ayuda por reorientar el trabajo individual. Por otro lado, la participación individual en el seno de los equipos puede mejorarse en ciertos casos implementando ciertas técnicas como, por ejemplo, la elección al azar u organizada de algún miembro del equipo para el desempeño de ciertas tareas (jugar contra otro representante, validar los resultados del equipo frente al grupo, etc.).

5. Etapas siguientes de la secuencia.

Describiremos brevemente a continuación algunas extensiones posibles de la secuencia que hemos presentado en este trabajo.

La *segunda etapa* se inicia con un proceso de formulación y validación de algunos teoremas sobre la relación de orden y de equivalencia entre los pares (a, b). Se contempla propiciar el recurso a la recta numérica como modelo gráfico de dichas relaciones y como un apoyo para destacar ciertas relaciones entre los números naturales y los pares (a, b), tales como: existen medidas que pueden expresar con números naturales y otras que sólo se pueden expresar con los pares (a, b); a todo número natural corresponde un par (a, b) que permite expresar la misma medida, más no a la inversa; entre dos pares (a, b), siempre hay otro par; etc.

Con estas actividades se espera propiciar –simultáneamente– la identificación de los pares (a, b) en calidad de un nuevo instrumento que ha permitido resolver un problema ante el cual los números naturales resultaron insuficientes.

Este proceso (que hemos llamado de institucionalización) incluye la adopción del nombre que designa a este instrumento y de la representación simbólica convencional.

En seguida se explorará, a través de actividades de reaplicación, el rango numérico dentro del cual los niños manejan las relaciones entre fracciones antes dichas, siempre en el contexto.

Posteriormente se contemplan las siguientes fases, no necesariamente secuenciadas:

- Situaciones–problema que implican la realización de una suma entre fracciones (incluye multiplicación de un entero por una fracción), formulación y validación de ciertas propiedades; construcción progresiva de algoritmos[51].
- Paso a la interpretación del número racional que hemos llamado *fraccionamiento de la unidad* (ver capítulos II y III).
- Cambios de contexto. Se abordan problemas fundamentales (como el planteado en la situación didáctica 3.1), haciendo intervenir otras magnitudes continuas como la superficie y posible el peso, y, por otro lado, magnitudes discretas.

La *tercera etapa* incluye:

- Fracciones decimales y escritura decimal.
- Multiplicación de fracciones, a partir de la composición de operadores fraccionarios en problemas de proporcionalidad.

Señalamos por último, que esta secuencia no pretende ser representativa de un recorrido *de principio a fin* que se realiza en el proceso de aprendizaje de la noción de número racional en la primaria. Por un lado, varios de los eslabones que ocupan un lugar específico en esta secuencia, contienen temas que pueden ser abordados por los niños, hasta determinados niveles de complejidad, mucho antes de los que aquí se plantea. Por ejemplo, hemos visto ya el interés por explorar las posibilidades de los niños del segundo grado para abordar problemas de reparto; las situaciones de proporcionalidad, ubicadas

[51] Este contenido forma parte de una investigación que continúa a la presente y que realizan actualmente Ma. del Carmen Álvarez y Hugo Balbuena en el Laboratorio de Piscomatemática del DIE.

en el extremo final de esta secuencia (6° grado) pueden ser abordadas más informalmente desde grados anteriores, quizás desde 4° grado. Por otro lado, los problemas que implican la movilización del concepto de número racional, implican a la vez a otros contenidos matemáticos relacionados con éste, como por ejemplo: medición de diversas magnitudes, división y multiplicación de enteros, divisibilidad, composición de operaciones, etc. Es necesario estudiar con cuidado las relaciones que se establecen entre estos contenidos y el nivel hasta el cual los niños pueden movilizarlos, dependiendo del grado escolar en el que se encuentran.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. et al. (1982). “Conceptions du cercle chez les enfants de 7 à 9 ans“, en: *Cahier de didactique des mathématiques,* No. 38. París: IREM.

Artigue, M. (1984). “Modélisation et Reproductibilité en Didactique des Mathématiques“, en: *Cahier de didactique des mathématiques,* No. 8. París: IREM.

Balbuena, H., C. Espinosa, H. Espinosa, D. Fregona, I. Saiz (1984). “Descubriendo las fracciones”. *Laboratorio de Psicomatemática*,. No. 5. México, DIE-CINVESTAV-IPN.

Behr, M., et al. (1980). “Theoretical Foundations for Instructional Research on Rational Numbers”, en: R. Karplus (Ed.) *Proceedings of Fourth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 60-67). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Behr, L. et al. (1981). “Construct analysis, manipulative aids. Representational systems and learning rational number concepts”, en: *Proceedings of fifth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education*. Illinois: Lawrence Hall of Science.

Bouazzaoui, Elh. (1982). *Etudes de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération.* Tesis. Francia: IREM de Bordeaux

Brousseau, G. (1970). “Processus de mathématisation“, en: *La mathématique a l’école élémentaire*. París: APMEP, No. Especial.

Brousseau, G. (1973). "Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels?", en: *Actes du Congrès International des Sciences de l’éducation.* París.

Brousseau, G. (1976). "Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques", en: *Proceedings of the CIEAM*.

Brousseau, G. (1978). "Etude locale des processus d’acquisition en situation scolaire", en: *Cahier de l’IREM de Bordeaux,* No. 18. París: IREM.

Brousseau, G. (1978). "L’observation des activités didactiques", en: *Revue Française de Pédagogie,* No. 45, oct-nov. Francia.

Brousseau, G. (1980). "Problèmes de l’enseignement des décimaux", en: *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 1, No. 1. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Brousseau, G. (1981). "Problèmes de didactique des décimaux", en: *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 2, No. 1. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Brousseau, G. (1982). “Ingénierie didactique“, en: *2ème école de didactique des mathématiques.*

Brun, J. (1980). “Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones“, en: *Infancia y Aprendizaje,* No. 9.

Brun, J. (1984). *L’analyse de l’activité dans une situation mathématique: La construction et la représentation d’un cube*. CIM.

Chevallard, Y. (1980). “La transposition didactique“, *Première école d’été de didactique des mathématiques*. IREM, d’Aix-Marseille.

Coll, C. (comp.) (1983). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. España: Siglo XXI.

Coquand, M. (1981). “Les décimaux”, en: *Grand N,* No. 20-21, feb-oct. Francia.

Dienes, Z.P. (1972). *La mathématique vivante 1. Nombres naturels, entiers, rationnels*, París: Claude Bernard.

Douady, R. (1980). "Approche des nombres réels en situations d’apprentissage scolaire", en: *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 1.1. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Douady, R. (1984). “De la didactique des mathématiques à l’heure actuelle“ en: *Cahier de didactique des mathématiques,* No. 6. París: IREM

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holand, D. Reidel.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la Geometría en la escuela primaria*. Tesis de doctorado. México: DIE-CINVESTAV-IPN.

González, J. L. (1985). *Análisis de las estrategias de enseñanza de las fracciones en el nivel básico del sistema educativo nacional*. Tesis. México: Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN.

Hart, K. (1978). “The understanding of fractions in the secondary school”, en: *Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education* London University, Sept.

Kieren, T.E. (1976). “On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers” en: R. Lesh (ed) *Number and measurement papers from a research workshop*.

Lesh, et al. (1980). “Rational number ideas and the role of representational systems”, en: R. Karplus (Ed.) *Proceedings of Fourth Annual Conference of International Group for Psychology of Mathematics Education*. Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Noelting, G. (1980). “The development of proportional reasoning and ratio concept”, en: *Educational Studies in Mathematics,* No. 1. USA, Boston.

Pérez, J. (1982). Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l'identification des objects et des phénomènes pertinents au cours de l'activité de construction d'un code de désignation a l'école maternelle (documento fotocopiado).

Piaget, J. (1976). *La toma de conciencia*. México: Morata.

Ratsimba, R. (1981). *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques*. Tesis. Francia: IREM de Bordeaux.

Rouchier, A. (1980). "Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs", en: *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 1.2. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Sección de Matemática Educativa, (1981). *Álgebra 1, Maestría en Matemática Educativa*. México: SEP-CIEA.

SEP, (1979). *Matemáticas cuarto grado*. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP, (1980). *Matemáticas sexto grado*. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP, (1982). *Matemáticas quinto grado*. México: Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos.

Streefland, L. et al. (1979). "Young children (6-8) Ratio and proportion", en: *Educational Studies in Mathematics,* No.10. USA, Boston.

Streefland, L. (1981). "Substracting fractions with different denominators", en: *Proceedings of Mathematical Education.* Francia, Grenoble.

Vergnaud, G. et al. (1979). *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré*. Francia: IREM de París.

Vergnaud, G. et al. (1981). "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques". Communication au Congrès du *International Group for Psychology of Mathematics Education*. Francia, Grenoble.