



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Sintonización de un observador predictor para sistemas
no lineales con retardo en la entrada**

TESIS

Que presenta

BRYAN JOSUÉ ROJAS RICCA

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

CONTROL AUTOMÁTICO

Directores de la Tesis:

Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange

Dr. Fernando Castaños Luna

Agradecimientos

*A la **Dra. Sabine Mondié** y al **Dr. Fernando Castaños**
por su excelente guía e instrucción.*

*A **CONACYT** por becarme y financiarme estos dos años.*

*A mi amada esposa **Geraldine Saucedo** por su hermoso
amor y apoyo incondicional.*

*A mi mamá **Nora** y a mi papá **Gil** por educarme con
cariño y paciencia.*

*A **Kevin, Jonathan** y **Etna** por ser los mejores
hermanos del mundo.*

*A **Diego Tristán** por ser un verdadero amigo.*

*A mi **Padre Celestial** por que cada
segundo de mi vida es un regalo.*

Notación

Símbolos y operadores

h	Retardo.
i	El número imaginario $i^2 = -1$.
s	Operador de Laplace.
$\Re(z)$	Es la parte real de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.
$\Im(z)$	Es la parte imaginaria de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.
I, I_n	Es la matriz identidad de dimensión $n \times n$.
M^T, M^{-1}	Matriz transpuesta y matriz inversa de M .
$\det(A)$	Determinante de la matriz A
$\dot{x}(t), x'(t)$	Primera derivada de $x(t)$
$\ddot{x}(t), x''(t)$	Segunda derivada de $x(t)$
$x^{(n)}(t)$	La n -ésima derivada de $x(t)$
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana.
$\ \varphi\ _h$	Norma del supremo $\ \varphi\ _h = \sup_{\theta} \ \varphi(\theta)\ , \forall \theta \in [-h, 0]$.

Conjuntos

\mathbb{N}	Es el conjunto de números naturales.
\mathbb{R}	Es el conjunto de números reales.
\mathbb{R}_+	Es el conjunto de números reales no negativos.
\mathbb{C}	Es el conjunto de números complejos.
$C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Es el espacio de funciones continuas tales que $[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$
$PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Espacio de funciones continuas a trozos tales que $[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Índice general

Resumen	V
Abstract	VI
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Estado del arte	3
1.4. Objetivos	5
1.5. Estructura de la tesis	6
2. Antecedentes	7
2.1. Análisis del espectro de sistemas con retardos	7
2.2. Concepto de estabilidad exponencial	8
2.3. Observador de alta ganancia	8
3. Minimización de la abscisa espectral	10
3.1. Resultados preliminares	11
3.2. Asignación de la raíz con multiplicidad máxima	17
3.3. La multiplicidad induce dominancia	19
4. Sub-predictores y alta ganancia	23
4.1. Optimalidad y alta ganancia	24
4.2. Sintonización del predictor	25
5. Ejemplo ilustrativo: El péndulo simple	30
5.1. Definición del sistema	30
5.1.1. Sistema libre de retardos	31
5.1.2. Sistema con retardos	31
5.2. Optimalidad y alta ganancia	33
5.2.1. Escalamiento del retardo con alta ganancia	33
5.2.2. Sub-predictores secuenciales	35
5.3. Simulación	38
6. Conclusiones y trabajo futuro	41

A. Análisis de polinomios	43
A.1. División de polinomios	43
A.2. El algoritmo de Euclides	43
A.3. El Teorema de Sturm	44
A.4. El Teorema de Rolle	44
B. Demostración del Lema 3.6	45
Bibliografía	48

Resumen

En esta tesis se propone un método de sintonización de parámetros para un cuasipolinomio particular en el cual se asigna una raíz de máxima multiplicidad. Se exponen las condiciones para que dicha raíz sea dominante. Este resultado es útil en el diseño de observadores predictores para sistemas con retardo a la entrada.

Se enuncia un resultado que establece condiciones necesarias y suficientes para que la solución del cuasipolinomio sea exponencialmente estable asignando una raíz dominante de multiplicidad máxima. Se demuestra formalmente que la abscisa espectral se ubica en el semiplano complejo izquierdo.

Se estudian sistemas no lineales con retardos a la entrada. Se muestra que los sistemas con una cadena de integradores asociada a la parte lineal no afectada por el retardo se pueden representar con el cuasipolinomio bajo estudio. Se expone el compromiso entre optimalidad y alta ganancia para los algoritmos predictores.

Se plantea un nuevo esquema de observadores-predictores basado en subpredictores con efecto de alta ganancia para una clase particular de sistemas no lineales con retardo en la entrada y/o salida, y se propone un método de sintonización que garantiza la convergencia del error de predicción a cero. Se expone que el nuevo esquema de predicción mantiene la optimalidad y alta ganancia al mismo tiempo. Se emplea el método de sintonización desarrollado en esta tesis para asignar la ganancia óptima. Se establece la estabilidad exponencial inclusive para valores arbitrarios del retardo.

Se realizan simulaciones numéricas para validar el método de asignación, se ilustra la adecuada predicción del estado mediante el ejemplo de un péndulo simple. Finalmente, se discute la utilidad del método propuesto de sintonización del cuasipolinomio en otros problemas de control.

Abstract

In this thesis a tuning method for the parameters of a given quasipolynomial that assigns a dominant root with maximum multiplicity is proposed. This result is useful for design predictors-based observers for input-output time-delay systems.

Necessary and sufficient conditions that guarantee that the solutions of the system associated to the quasipolynomial are exponentially stable are proved. It is also shown that the spectral abscissa of the quasipolynomial is located in the complex left half-plane.

The above quasipolynomial is crucial in the design of observer-predictors of nonlinear systems with input delay involving a chain of integrators. The trade-off between optimality and high gain for prediction algorithms with high gain effect is explained.

A new scheme of a chain of sequential subpredictors with a high gain effect is presented. The tuning method developed in this thesis is used to assign the optimal gain, in order to guarantee convergence of the prediction error to zero, thus, overcoming the trade-off between optimality and high gain. Exponential stability is established for an arbitrary input delay.

The proposed method is validated with numerical simulations by applying the design strategy to a pendulum example. Finally, the results are discussed.

Capítulo 1

Introducción

A continuación se presentan generalidades sobre los sistemas con retardos, los fenómenos que pueden así como los métodos de análisis para su estudio. El problema de control que se aborda en esta tesis consiste en estabilizar un sistema no lineal con retardos mediante el diseño de un observador predictor. Se expone el estado del arte y se plantean los objetivos, tanto generales como particulares de nuestro estudio. Finalmente se describe como está organizada esta tesis.

1.1. Generalidades

Los sistemas con retardos son aquellos cuya velocidad de cambio no depende sólo del tiempo en el instante actual sino también valores de tiempo previos. A las diferencias entre dichos tiempos y el instante actual se les conoce como retardos o tiempos muertos. Estos pueden clasificarse como retardo simple si se trata del valor entre un instante previo y el actual o retardos múltiples si son dos o más de ellos y el instante actual. Además, existen sistemas de retardos puntuales donde el retardo corresponde a instantes de tiempo específicos o distribuidos si se definen en un intervalo continuo. Los sistemas con retardos también pueden catalogarse dependiendo si el retardo se encuentra en la entrada, en la salida o en el estado.

Desde la segunda mitad del siglo XX, esta clase de sistemas ha recibido particular interés debido a que fenómenos de *transporte* o *propagación* pueden ser expresados matemáticamente como retardos en ecuaciones diferenciales en diferencias. La teoría relacionada a los sistemas con retardos se aplica a una gran variedad de problemas de control y en áreas diversas como redes de comunicación, amortiguamiento activo anti-sísmicos para edificios, robótica móvil, vehículos aéreos no tripulados (*Unmanned Aerial Vehicle*, UAV por sus siglas en inglés) o sistemas de teleoperación [1–4]. Como se mencionó anteriormente, los lapsos de espera que pueden modelarse como retardos afectan la entrada, el estado o la salida del sistema y se deben, entre otras cosas, a tiempos que los sensores tardan en obtener una señal o transmitirla, al tiempo de cómputo de la ley de control, a flujos de materia o calor, incluso retardos de comunicación en redes [5]. Una de las principales motivaciones para el estudio de los sistemas con retardos se debe a que la

presencia de un retardo en alguna variable del sistema puede ocasionar la inestabilidad en el lazo cerrado. Por ello en las últimas décadas se han desarrollado diversos enfoques y herramientas para el análisis y el diseño de controladores [6–8] para sistemas con retardos.

Una característica matemáticamente interesante de los sistemas con retardo es que su estado no es puntual, sino que está definido en un intervalo de tiempo acotado, lo cual significa que estos sistemas son infinito-dimensionales. En la literatura existen dos enfoques principales para el análisis de los sistemas con retardos. El primero es el análisis en el dominio de la frecuencia y se basa en el estudio de los cuasipolinomios característicos que representan el comportamiento del sistema. El segundo corresponde al análisis en el dominio del tiempo y extiende la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov a los sistemas con retardos mediante dos enfoques. Por un lado está el enfoque de Lyapunov-Krasovskii [9] donde se emplean funcionales que dependen del estado completo. Su análisis se basa en desigualdades lineales matriciales (*Linear Matrix Inequalities*, LMI por sus siglas en inglés). Por el otro lado, se tiene el enfoque de Lyapunov-Razumikhin, que emplea funciones dependientes del estado puntual pero involucran condiciones adicionales.

Esta tesis se enfoca en los sistemas con un retardo a la entrada o a la salida. Para controlar en lazo cerrado esta clase de sistemas, si idealmente se conociera el estado en los instantes futuros, éste podría emplearse en las leyes de control para compensar el retardo. Claramente, no se tiene acceso a esta información futura. Sin embargo, existen métodos para obtener un estimado de esos estados futuros como los algoritmos predictores basados en observadores [10]. El desafío es en este caso demostrar que el estimado converge al valor futuro real, o en otras palabras, que el error de predicción converge a cero. En esta tesis se plantea un nuevo esquema de observadores-predictores para una clase particular de sistemas no lineales con retardo en la entrada/salida, además se estudia el caso libre de perturbaciones y ruido externo. Se propone un método de sintonización que garantiza la convergencia del error de predicción a cero.

1.2. Planteamiento del problema

El problema de observación que se aborda en este trabajo de investigación consiste en estimar el estado adelantado de un sistema no lineal con retardos empleando observadores-predictores. El punto de partida es el observador-predictor de alta ganancia propuesto por Lei y Khalil [11, 12] que asigna una dinámica lineal dominante, lo que permite compensar no linealidades, incertidumbres y perturbaciones en el sistema, incluso las dinámicas lineales no deseadas. Esto se logra asignando una estructura particular de cociente a la ganancia del observador-predictor, donde un parámetro se emplea como denominador para escalar el valor de la ganancia. Así, al seleccionar el valor más pequeño posible para este nuevo parámetro se produce la ganancia de observación más alta posible.

En el caso de sistemas libres de retardos, los observadores de alta ganancia [13] son

muy útiles ya que puede seleccionarse el parámetro de ganancia tan grande como se quiera sin perder estabilidad. En cambio, cuando se aborda el caso de sistemas con retardos con el método de observadores basados en predicción esta propiedad se pierde. En efecto, el escalamiento de tiempo en la prueba de estabilidad del error de observación se puede realizar igualmente para el caso de sistemas con retardos [11, 12]. Sin embargo, como se expone en esta tesis, el nuevo parámetro no sólo aumenta la ganancia de observación, sino, también el valor del retardo, lo cual puede ocasionar inestabilidad en el sistema. Por lo anterior, en el caso de sistemas con retardo en la entrada, es necesario sintonizar la ganancia con suma cautela.

En el observador-predicador de Jei y Khalil [11, 12] la estabilidad del error de predicción se establece mediante el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Dado que los métodos basados en éste enfoque y LMI's son sumamente conservativos, sólo aseguran condiciones suficientes de estabilidad siempre que el retardo se mantenga pequeño.

En años recientes Najafi [14] propuso una estructura de subpredicadores secuenciales en cascada para sistemas lineales con retardos. Esta estructura consiste en concatenar un número determinado de predicadores, de modo que el estado estimado de cada subpredicador es la entrada del siguiente. Esto permite repartir el valor del retardo entre cada subpredicador.

En esta tesis se propone superar las limitaciones del esquema propuesto por Jei y Khalil [11, 12] empleando por un lado la idea de los subpredicadores de Najafi y por otro lado, proponiendo un método de sintonización de las ganancias que garantice la estabilidad para valores arbitrarios del retardo.

1.3. Estado del arte

A mediados del siglo XX comenzó el interés por el estudio de los sistemas con retardos, ya que se identificaron los principales problemas ocasionados por el retardo, como el hecho de que para un valor suficientemente grande de retardo los sistemas en lazo cerrado pierden su estabilidad. Entonces, se desarrollaron métodos para extender las teorías y herramientas de análisis existentes para resolver los nuevos problemas que presentaban los sistemas con retardos. El uso de algoritmos predicadores es uno de los principales enfoques empleados para abordar estos sistemas y consiste en obtener estimados de los valores adelantados del sistema con el objetivo de compensar la falta de información en el instante actual que produce el retardo y permite el uso de algoritmos desarrollados para el sistema libre de retardos. El Predicador de Smith fue uno de los primeros esquemas de predicción, propuesto en 1957 por el norteamericano Otto Smith (PS) [15], constituye el compensador de tiempo muerto más utilizado en el control de sistemas con retardo debido a su elevada efectividad y simple implementación, sin embargo, tiene limitaciones importantes, como por ejemplo, no puede aplicarse a sistemas con integradores, tampoco a ningún sistema que sea inestable originalmente, o con retardos variantes en el tiempo, otra limitante es que se deben conocer los parámetros de la planta para implementarlo.

Por ello se han desarrollado diversas modificaciones al predictor de Smith con el fin de resolver sus limitaciones y mejorar su desempeño [16].

En las últimas décadas se han presentado diversos esquemas para resolver los desafíos que se encuentran en los sistemas no lineales con retardos. Puesto que pueden presentarse los problemas ocasionados tanto por el retardo como por las no linealidades. Un enfoque particularmente útil es el diseño de observadores-predictores ya que pueden encargarse de compensar el retardo, dejando así que la ley de control se encargue de las no linealidades. Por ejemplo, en 2017 Estrada-Sánchez y coautores [10] propusieron un predictor para el control de sistemas no lineales con retardos a la entrada, bajo el supuesto de que existe un control que estabiliza al sistema libre de retardo. La predicción del estado adelantado se emplea en el control por realimentación para compensar el retardo y la estabilidad asintótica del error de predicción se demuestra mediante una funcional de tipo completo según el enfoque de Lyapunov-Krasovskii.

Recordando que para sistemas no lineales se han desarrollado los observadores de alta ganancia [13], que mediante un parámetro adicional en la ganancia de observación, puede escalarse el valor de las ganancias y así obtener un comportamiento lineal dominante. Una reciente extensión de esta teoría por Lei y Khalil [11, 12] introduce retardos en la entrada al observador de alta ganancia, dando lugar a un observador-predictor de alta ganancia. Además, empleando un control por realimentación, la estabilidad del lazo cerrado se analiza mediante una funcional de Lyapunov-Krasovskii. Sin embargo, el predictor de alta ganancia propuesto sólo puede garantizar la estabilidad mientras que el retardo del sistema se mantenga suficientemente pequeño.

Esta necesidad de que el retardo se mantenga pequeño es una limitación importante que se produce por el efecto de alta ganancia con el esquema tradicional. Se debe recordar que en la teoría para observadores de alta ganancia para sistemas no lineales libres de retardos se agrega un parámetro que escala a la ganancia de observación [17, 18]. Entre más pequeño sea el valor del parámetro, más grande será el valor de la ganancia de observación y a su vez aumenta la región de atracción de la solución trivial. Este parámetro puede ser aislado de una parte lineal deseada y tratado como una perturbación singular que multiplica a la dinámica no deseada. De esta manera, entre más pequeño sea el parámetro de escalamiento, más insignificante será la dinámica no deseada y así podrán desprejarse los efectos de las no linealidades, perturbaciones o incertidumbre, todo esto sin perder estabilidad del sistema. En contraste, cuando se introducen los retardos en el sistema, el problema estriba en que al escalar la ganancia de observación, el retardo también se escala incrementando su valor junto con la región de atracción, y puede incrementarse aún hasta que el valor del retardo sea suficientemente grande como para inestabilizar al sistema.

Los grandes valores en el retardo se consideran un problema abierto en los sistemas con retardos. Con un enfoque diferente al de Lei y Khalil en 2013 Najafi [14] propuso para sistemas lineales una nueva estructura de predictores, colocando una cantidad determinada de estos en cascada, de modo que el primero estima la entrada del siguiente y

así sucesivamente, pudiendo repartir el retardo en valores más pequeños y así evitar los grandes valores de retardo en el lazo cerrado. Además, demostró la estabilidad asintótica del lazo cerrado mediante LMI's. Como cada predictor emplea otro estado estimado los llamó subpredictores secuenciales.

Ahora, hablando de estabilidad, uno de los pioneros en abordar la estabilización de sistemas en presencia de retardos fue N. Krasovskii, que en 1964 presentó una extensión del enfoque de estabilidad en el sentido de Lyapunov a los sistemas con retardos. La estabilidad de Lyapunov-Krasovskii [9] propone emplear funcionales de Lyapunov en lugar de funciones y para su análisis se requieren resolver LMI's. En contraste con el enfoque de estabilidad en el sentido de Lyapunov-Krasovskii, el método frecuencial no hace uso de LMI's, más bien, se emplea el análisis de cuasipolinomios de dimensión infinita que pueden representar a los sistemas en el dominio de la frecuencia y además permiten observar algunas propiedades interesantes [19, 20]. Como por ejemplo, el hecho de que la multiplicidad de las raíces en el espectro puede inducir una raíz dominante, esto es de particular importancia debido a que la ubicación de la raíz dominante puede determinar la clase de estabilidad del sistema. Esta propiedad es conocida como MID (*Multiplicity Induced Dominancy*) y fue introducida en 2016 por Boussaada y Niculescu [21]. Esta propiedad indica que la raíz de multiplicidad máxima satisface algunas condiciones para ser una raíz dominante, es decir, que dicha raíz múltiple define el valor de la abscisa espectral. Sin embargo, la multiplicidad máxima posible en las raíces corresponde al máximo número de parámetros libres o grados de libertad con los que cuente el sistema para asignar las raíces [22]. Más aún, una raíz de multiplicidad máxima $2n$ es necesariamente dominante [19] y solución de las $2n - 1$ derivadas de dicho polinomio [23]. Un sistema que pueda ser descrito mediante un cuasipolinomio con una raíz de multiplicidad $2n$ es asintóticamente estable [21]. Sin embargo, para sistemas con retardos representados mediante una cadena de integradores, la multiplicidad máxima posible en sus raíces es menor a $2n$ y no es necesariamente dominante como se demuestra en [20].

1.4. Objetivos

En esta tesis se propone un nuevo esquema de observadores de alta ganancia basado en cadenas de subpredictores secuenciales, el cual es sintonizado mediante la asignación de raíces dominantes múltiples. Los objetivos particulares se enuncian de la siguiente manera:

- Establecer que el esquema de subpredictores secuenciales tiene un efecto de dominancia y permite asignar una dinámica lineal deseada en el error de predicción.
- Establecer una metodología para garantizar que el error de predicción sea exponencialmente estable y además cumpla las condiciones de optimalidad para un máximo decaimiento exponencial.
- Ilustrar mediante un ejemplo numérico la sintonización de la cadena de subpredictores y su efectividad para estimar el estado futuro de un sistema.

1.5. Estructura de la tesis

A continuación se describe la organización de esta tesis. En el capítulo 2 se hace un recordatorio de los conceptos básicos para el análisis de los sistemas con retardos haciendo particular énfasis en el dominio de la frecuencia. Se hace un recordatorio de los conceptos básicos y algunos de los principales resultados del análisis de sistemas con retardos en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo.

Se desarrolla el capítulo 3 una nueva metodología para asignar la abscisa espectral de manera que satisfaga las condiciones de un mínimo local en el semiplano complejo izquierdo. También se demuestra que dicha asignación produce la raíz de multiplicidad máxima dominante.

En el capítulo 4 se plantea el problema de control estudiado. Se introduce una nueva metodología para resolverlo. Se discute el compromiso entre optimalidad y alta ganancia. Se presenta un esquema de subpredictores con efecto de alta ganancia y se expone la manera en que este esquema permite optimalidad y alta ganancia.

A lo largo del capítulo 5 se presenta el ejemplo ilustrativo de un péndulo simple. Se demuestra explícitamente el compromiso entre optimalidad y alta ganancia. Se sintoniza la cadena de subpredictores empleando la metodología presentada en el capítulo 4. Se asigna el espectro de la dinámica del error de predicción con una raíz dominante y se demuestra su funcionamiento mediante simulación.

Al final de la presente memoria de tesis, se exponen conclusiones y perspectivas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

El propósito de este capítulo es presentar las herramientas de análisis y diseño a utilizar. Se presenta el método para determinar la ecuación característica para sistemas con un retardo. También se exponen los conceptos de estabilidad, tanto para el dominio de la frecuencia como para el dominio del tiempo. Además, se presenta el desarrollo de observadores de alta ganancia para sistemas no lineales.

2.1. Análisis del espectro de sistemas con retardos

El espectro de un sistema lineal sin retardos es el conjunto de soluciones para su ecuación característica definida por un polinomio; en el caso de los sistemas con retardos la ecuación característica se define mediante un cuasipolinomio. A continuación el procedimiento para obtener dicho cuasipolinomio.

Sea un sistema con retardos de la forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

donde A_i , $i = 0, 1$ son matrices reales dadas de dimensión $n \times n$ y $h \geq 0$ es el retardo del sistema. El estado corresponde al segmento $[t-h, t]$ en la solución de (2.1) y es usual denotarlo como

$$x_t := x(t+\theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

Las condiciones iniciales están dadas por $\varphi := x_{t_0}$ o $\varphi(t)$ para $t \in [t_0-h, t_0]$. Es importante notar que el estado y la condición inicial pertenecen a un espacio de dimensión infinita. El cuasipolinomio característico que describe al sistema (2.1) esta dada por

$$D(s) = \det(sI - A_0 - A_1e^{-sh}).$$

El espectro de (2.1) es toda raíz s que satisfaga la ecuación

$$D(s) = 0.$$

El espectro de un sistema con retardos también es de dimensión infinita, sin embargo, existen diversas propiedades que permiten analizarlo y definir un comportamiento dominante deseado. La abscisa espectral se define como la parte real de la raíz más a la

derecha de todo el espectro, es decir,

$$\sup \{ \Re(s) : D(s) = 0 \}.$$

2.2. Concepto de estabilidad exponencial

Como se mencionó en el capítulo 1, existen dos enfoques para abordar la estabilidad de un sistema con retardos, ahora se introduce el concepto de estabilidad exponencial para el sistema (2.1) en el enfoque frecuencial.

Teorema 2.1 ([5]) *El sistema (2.1) es exponencialmente estable si y sólo si todo el espectro del sistema se encuentra en el semiplano complejo izquierdo, es decir,*

$$\sup \{ \Re(s) : D(s) = 0 \} < 0$$

Por otro lado el enfoque de Lyapunov-Krasovskii proporciona condiciones suficientes para determinar la estabilidad exponencial del sistema (2.1) mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.2 ([5]) *El sistema (2.1) es exponencialmente estable si existe una funcional*

$$v : PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que las siguientes condiciones se cumplen.

1. *Para algunas constantes positivas α_1 y α_2 se satisface que*

$$\alpha_1 \|\varphi(0)\|^2 \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \|\varphi\|_h^2, \quad \varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n).$$

2. *Para algún $\beta > 0$ la desigualdad*

$$\frac{dv(x_t)}{dt} \leq -\beta \|x(t)\|^2, \quad t \geq 0$$

se satisface para todo $x(t)$.

2.3. Observador de alta ganancia

Ahora se exponen las nociones básicas de los observadores de alta ganancia para sistemas no lineales sin considerar retardos. El diseño de un observador permite compensar la falta de información del estado de un sistema, considerando sólo la información disponible en la salida. El observador de alta ganancia [13] es una técnica ampliamente usada en sistemas no lineales, ya que permite estimar información del sistema sin preocuparse por las dinámicas no lineales.

Se considera la siguiente estructura particular para ejemplificar mejor estos conceptos. Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bf(x, u) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con el par (A, C) observable, u el control y f una función localmente Lipschitz que contiene las no linealidades del sistema. Diseñando un observador de la forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bf(\hat{x}, u) + H(y(t) - C\hat{x}(t))$$

y definiendo el error de observación como $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, se tiene que la dinámica del error está dada por

$$\dot{e}(t) = (A - HC)e(t) + B[f(x, u) - f(\hat{x}, u)],$$

donde no es evidente que el término $(A - HC)$ domine al término $B[f(x, u) - f(\hat{x}, u)]$. Para lograrlo, se propone un diseño especial para la ganancia de observación H , dada por un vector de parámetros cocientes con $\epsilon > 0$ en el denominador y $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ en el numerador de la siguiente manera

$$H := \left[\frac{\alpha_1}{\epsilon} \quad \frac{\alpha_2}{\epsilon^2} \quad \frac{\alpha_3}{\epsilon^3} \quad \dots \quad \frac{\alpha_n}{\epsilon^n} \right]^\top.$$

El parámetro ϵ se emplea para modificar la escala de tiempo en razón de $\frac{1}{\epsilon}$ y con un cambio de variable $\eta(t)_i := \frac{e(t)}{\epsilon^{n-i}}$ el error de observación puede expresarse como

$$\epsilon \dot{\eta}(t) = (A - HC)\eta(t) + \epsilon B[f(x, u) - f(\hat{x}, u)],$$

donde ahora es evidente que al hacer ϵ suficientemente pequeño, puede garantizarse que la parte lineal $(A - HC)$ domina al resto.

Se han establecido y definido los conceptos básicos de sistemas con retardos y las herramientas que se utilizarán para determinar la estabilidad en el desarrollo de los capítulos siguientes y así facilitar la comprensión.

Capítulo 3

Minimización de la abscisa espectral

En este capítulo se realiza el análisis de sistemas con retardos que pueden ser representados por un cuasipolinomio particular. Se establece la metodología para asignar un espectro dominante y exponencialmente estable de dicho cuasipolinomio. Muchos sistemas pueden ser representados mediante cadenas de integradores mediante una transformación o cambio de coordenadas en el estado [13, pág. 505-550]. Un caso particular del sistema descrito en la sección 2.1 se presenta cuando puede aislarse una cadena de integradores en la parte no retardada en el sistema, dando lugar a la siguiente estructura

$$\dot{x}(t) = Jx(t) + A_1x(t-h), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

donde $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un bloque de Jordan, $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz real dados por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

respectivamente, $h \geq 0$ es el retardo del sistema, el cual se supone conocido. La ecuación característica de sistema (3.1) está dada por

$$\det(sI - J - A_1e^{-sh})$$

y es

$$D(s) = s^n + (\alpha_1s^{n-1} + \alpha_2s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n) e^{-sh}. \quad (3.2)$$

Defínase al vector de parámetros α_k , con $k = 1, 2, \dots, n$ como

$$L := [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]^\top, \quad (3.3)$$

y ahora se establecen las condiciones para el vector L de modo que la solución del sistema (3.1) sea estable y además tenga el máximo decaimiento exponencial. Desde el punto de vista de optimización, el problema consiste en encontrar el valor de la abscisa espectral negativa lo más alejada posible del eje imaginario, es decir,

$$\min_L \sigma(L),$$

donde la función objetivo está dada por

$$\sigma(L) := \sup \{ \Re(s) : D(s) = 0 \}. \quad (3.4)$$

Esta función no es continuamente diferenciable, además las discontinuidades en su derivada no sólo pueden ocurrir debido a la función supremo cuando la raíz más a la derecha cambia, sino también cuando la raíz más a la derecha tiene multiplicidad mayor a uno. El siguiente resultado proporciona información sobre las raíces más a la derecha de (3.4).

Teorema 3.1 ([24]) *Sea L^* un mínimo local de $\sigma(L)$ definida en (3.4). Entonces para $L = L^*$ existen al menos $n + 1$ raíces con parte real igual a $\sigma(L^*)$*

Se observa además, que una raíz de multiplicidad n satisface

$$D(s) = 0, \quad D'(s) = 0, \quad D''(s) = 0, \quad \dots, \quad D^{(n-1)}(s) = 0, \quad D^{(n)}(s) = 0, \quad (3.5)$$

o, dicho de otra forma, una raíz con multiplicidad n es solución de $D(s) = 0$ y sus primeras n derivadas [23, 24].

3.1. Resultados preliminares

Ahora se presentan algunas propiedades estructurales para (3.2) que serán de utilidad en la demostración de dominancia de una raíz. Lo primero que se necesita es identificar el conjunto de soluciones que cumplen las condiciones de un mínimo local, es decir, los valores que son solución del arreglo de ecuaciones homogéneas, formado por el cuasipolinomio y sus primeras n derivadas. Por ello es necesario derivar el cuasipolinomio n veces. El Lema 3.2 proporciona una notación que facilita la derivación del cuasipolinomio. Con dicha notación se establece un polinomio cuyas raíces constituyen el conjunto de soluciones que se buscan en el Lema 3.3 y por último se establece en el Lema 3.4 la monotonicidad de las soluciones del polinomio en un intervalo específico.

Con el objetivo de simplificar la obtención de las derivadas (3.5) del cuasipolinomio en (3.2) se enuncia el siguiente lema

Lema 3.2 ([25]) *Sea $P(s) = s^n$. La k -ésima derivada de $P(s)e^{sh}$ con respecto a s está dada por*

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} P(s)e^{sh} = R_k(s; h)e^{sh},$$

donde

$$R_k(s; h) = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-1)!} s^{n-k+i-1} h^{i-1}. \quad (3.6)$$

Prueba. Derivando $P(s)e^{sh} = s^n e^{sh}$ k veces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} P(s)e^{sh} &= [ns^{n-1} + hs^n] e^{sh} \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} P(s)e^{sh} &= [n(n-1)s^{n-2} + 2hns^{n-1} + h^2s^n] e^{sh} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^k}{\partial s^k} P(s)e^{sh} &= \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-1)!} s^{n-k+i-1} h^{i-1} \right] e^{sh}, \end{aligned}$$

por lo tanto (3.6) se sigue de la ecuación anterior. ■

Corolario 3.2.1 ([25]) *El polinomio $R_k(s; h)$ definido en (3.6) puede ser escrito en términos de $R_{k-1}(s; h)$ como*

$$R_k(s; h) = hR_{k-1}(s; h) + \frac{\partial}{\partial s} R_{k-1}(s; h).$$

Prueba. Por definición

$$R_k(s; h)e^{sh} = \frac{\partial}{\partial s} [R_{k-1}(s; h)e^{sh}],$$

aplicando la derivada del producto se obtiene

$$\begin{aligned} R_k(s; h)e^{sh} &= R_{k-1}(s; h) \left[\frac{\partial}{\partial s} e^{sh} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial s} R_{k-1}(s; h) \right] e^{sh} \\ R_k(s; h)e^{sh} &= R_{k-1}(s; h)he^{sh} + \left[\frac{\partial}{\partial s} R_{k-1}(s; h) \right] e^{sh} \\ R_k(s; h)e^{sh} &= \left[hR_{k-1}(s; h) + \frac{\partial}{\partial s} R_{k-1}(s; h) \right] e^{sh} \\ R_k(s; h) &= hR_{k-1}(s; h) + \frac{\partial}{\partial s} R_{k-1}(s; h) \end{aligned}$$

■

Corolario 3.2.2 ([25]) *La derivada del polinomio $R_k(s; h)$ definido en (3.6) con respecto a h es*

$$\frac{\partial}{\partial h} R_k(s; h) = kR_{k-1}(s; h).$$

Prueba. Aplicando la derivada se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial h} R_k(s; h) &= \frac{\partial}{\partial h} \left[\sum_{i=1}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-1)!} s^{n-k+i-1} h^{i-1} \right] \\
&= \sum_{i=2}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-1)!} s^{n-k+i-1} \left[\frac{\partial}{\partial h} h^{i-1} \right] \\
&= \sum_{i=2}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-1)!} s^{n-k+i-1} [(i-1)h^{i-2}] \\
&= \sum_{i=2}^{k+1} \binom{n}{k-i+1} \frac{k!}{(i-2)!} s^{n-k+i-1} h^{i-2}.
\end{aligned}$$

Si se aplica el cambio de índices en la sumatoria $j = i - 1$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial h} R_k(s; h) = \sum_{j=1}^k \binom{n}{k-j} \frac{(k-1)!k}{(j-1)!} s^{n-k+j} h^{j-1}.$$

Por la definición (3.6) para $k - 1$ se sigue el resultado. ■

Además, como contribución al lema 3.6, en esta tesis se enuncia el siguiente corolario

Corolario 3.2.3 *El polinomio $R_n(s; h)$ definido en (3.6) para $k = n$ está dado por*

$$R_n(s; h) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} (sh)^j,$$

y además su grado para ambas variables s y h es n .

Prueba. Por la definición en (3.6) se tiene

$$R_n(s; h) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{n-i+1} \frac{n!}{(i-1)!} s^{i-1} h^{i-1},$$

si se cambian los índices de la sumatoria por $j = i - 1$ entonces, la ecuación de arriba puede reescribirse como

$$R_n(s; h) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \frac{n!}{j!} s^j h^j.$$

Ahora, aplicando la definición del coeficiente binomial, se tiene

$$R_n(s; h) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} \frac{n!}{j!} s^j h^j.$$

o bien,

$$R_n(s; h) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} s^j h^j,$$

donde es fácil ver que el máximo grado para ambas variables es n . ■

Como resultado del Corolario 3.2.3 se puede expresar $R_n(s; h)$ en términos de una sola variable, si se define $r = sh$. Para expresar el polinomio $R_n(s; h)$ en términos de r se emplea la siguiente definición

$$q(r) := R_n(s; h) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} r^j. \quad (3.7)$$

Ahora, en esta tesis se proponen el siguiente lema y sus corolarios, que establecen algunas propiedades con el polinomio $q(r)$ y luego sin perder generalidad se extienden a $R_n(s; h)$.

Lema 3.3 *El polinomio $q(r)$ tiene n raíces reales negativas distintas*

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n$$

Prueba. Nótese que el polinomio $q(r)$ es de grado n por lo que tiene n raíces. Ahora, empleando el Teorema de Sturm (Teorema A.2) se demuestra que todas las raíces se encuentran sobre la parte negativa del eje real.

Primero, se obtiene la secuencia de Sturm definida en el apéndice A.3. Entonces se construye el algoritmo de Euclides para el polinomio $q(r)$ y su derivada $q'(r)$.

$$\begin{aligned} q(r) &= p_1(r)q'(r) + c_2 f_2(r) \\ q'(r) &= p_2(r)f_2(r) + c_3 f_3(r) \\ &\vdots \\ f_{n-2}(r) &= p_{n-1}(r)f_{n-1}(r) + c_n f_n(r) \\ f_{n-1}(r) &= p_n(r)f_n(r), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} p_1 &= r - n, \\ p_k &= 2(n - k + 1), \quad k = 2, \dots, n, \\ c_k &= (n - k + 1)(n - k + 2), \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

y puede sustituirse $q'(r)$ por $f_1(r)$ para seguir la siguiente definición

$$f_i(r) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(n-i+1)!}{(j+1)!} r^j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nótese que $q(r)$ y $q'(r)$ son coprimos ya que

$$f_n(r) = \sum_{j=0}^{n-n} \binom{n-n}{j} \frac{(n-n+1)!}{(j+1)!} r^j = \binom{0}{0} \frac{1!}{1!} r^0 = 1.$$

Por lo tanto la secuencia de Sturm está dada por

$$\{q(r), f_1(r), \dots, f_n(r)\}.$$

El siguiente paso es obtener el número de cambios de signo para $r = 0$ y $r \rightarrow -\infty$ en la secuencia de Sturm.

Para $r = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} q(0) &= n! \\ f_i(0) &= (n-i+1)!. \end{aligned}$$

Claramente no hay cambios de signo en $r = 0$, por lo que $S_0 = 0$.

Para $r \rightarrow -\infty$ se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} q(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} r^j = \lim_{r \rightarrow -\infty} r^n \left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \frac{r^j}{r^n} \right].$$

Como el segundo termino entre corchetes tiende a cero cuando $r \rightarrow -\infty$, se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} q(r) = (-1)^n \infty,$$

por lo tanto, el signo de $q(r)$ cuando $r \rightarrow -\infty$ es positivo si n es par o negativo si n es impar. Similarmente,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow -\infty} f_i(r) &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \frac{(n-i+1)!}{(j+1)!} r^j \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} r^{n-i} \left[1 + \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{n-i}{j} \frac{(n-i+1)!}{(j+1)!} \frac{r^j}{r^{n-i}} \right] \end{aligned}$$

por lo que,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} f_i(r) = (-1)^{n-i} \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Obsérvese que cuando $r \rightarrow -\infty$ la secuencia de Sturm tiene n cambios de signo, entonces $S_{-\infty} = n$.

El Teorema A.2 establece que el polinomio $q(r)$ tiene $S_{-\infty} - S_0 = n$ raíces reales distintas en el intervalo $(-\infty, 0]$. ■

Puesto las raíces del polinomio $R_n(s; h)$ están relacionadas con las raíces de $q(r)$ mediante la expresión $r = sh$, pueden enunciarse los dos siguientes corolarios para extender el resultado anterior a $R_n(s; h)$. Ambos resultados desarrollados en este trabajo.

Corolario 3.3.1 *Sea h un valor constante positivo, entonces el polinomio $R_n(s; h)$ tiene n ra3ces reales negativas*

$$s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n < 0.$$

Prueba. Dado que $\forall h > 0$ la expresi3n $s_i = \frac{r_i}{h}$, $i = 1, 2, \dots, n$ debe ser negativa, se concluye el resultado. ■

Corolario 3.3.2 *Sea ahora s un valor constante negativo y θ variable, entonces el polinomio $R_n(s; \theta)$ tiene n ra3ces reales positivas.*

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n.$$

Prueba. De la misma manera que en el corolario anterior es f3cil ver que $\forall s < 0$ el polinomio $R_n(s; \theta)$ tiene ra3ces reales positivas para θ puesto que $\theta = \frac{r_i}{s}$, $i = 1, 2, \dots, n$, lo cual, concluye el resultado. ■

N3tese que si $s_i = \frac{r_i}{h}$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $\theta_{n-i+1} = h$ es ra3z de $R_n(s_i; \theta)$, por la simetr3a sobre el eje vertical observada en los dos corolarios anteriores. Ahora se presenta otro resultado desarrollado en esta tesis sobre el polinomio $q(r)$ que establece sus propiedades en un intervalo determinado.

Lema 3.4 *Sea $q(r)$ definido en (3.7), si r_n es la ra3z m3s a la derecha de $q(r)$, entonces*

$$q(r) > 0, \quad \forall x \in (r_n, 0]. \quad (3.8)$$

M3s a3n, $q(r)$ es estrictamente creciente en ese intervalo.

Prueba. N3tese de (3.7) que $q(0) = n!$ y del Lema 3.3 que $q(r_n) = 0$. Claramente, $q(r)$ no tiene ra3ces en el intervalo $(r_n, 0]$, por lo tanto se mantiene positiva en ese intervalo. Ahora, sea $q'(r)$ la derivada de $q(r)$ con respecto de r

$$q'(r) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} \frac{\partial}{\partial r} r^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{j!} j r^{j-1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{n!}{(j-1)!} r^{j-1},$$

redefiniendo los 3ndices como $i = j - 1$ se tiene que

$$q'(r) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \frac{n!}{i!} r^i. \quad (3.9)$$

N3tese que (3.9) tiene $n - 1$ ra3ces y por el Teorema de Rolle (Teorema A.3) se tiene que cada una de esas ra3ces se debe encontrar entre dos ra3ces de $q(r)$. Lo que implica que en el intervalo $(r_n, 0]$ $q'(r)$ no tiene ra3ces y su signo se mantiene. Como $q'(0) = n!n$ se concluye que $q'(r) > 0$ en el intervalo $(r_n, 0]$, Por lo tanto $q(r)$ es una funci3n creciente de r . ■

Ahora, se extiende a $R_n(s_n; \theta)$ el resultado del lema anterior mediante el siguiente corolario.

Corolario 3.4.1 *Sea $r_n = s_n h$, entonces*

$$R_n(s_n; \theta) > 0, \quad \forall \theta [0, h)$$

es una función decreciente de θ .

Prueba. Un resultado directo de la definición de r_n y junto con que $s_n < 0$, se concluye por simetría. ■

Así, se han desarrollado las herramientas para asignar un espectro con multiplicidad máxima.

3.2. Asignación de la raíz con multiplicidad máxima

En esta sección se expone la nueva metodología propuesta en este trabajo para seleccionar los coeficientes del cuasipolinomio (3.2) con el fin de obtener una solución que cumpla las condiciones del máximo decaimiento exponencial. Esto se logra asignando una raíz dominante con multiplicidad $n + 1$ en $s = -\sigma$ para $\sigma > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ y se presentan las condiciones para que esta raíz múltiple sea dominante.

Primero, el siguiente resultado establece las condiciones para obtener la máxima multiplicidad posible en una raíz del cuasipolinomio $D(s)$, asignando los valores de sus coeficientes.

Teorema 3.5 *Sea r_l una de las n raíces del polinomio $q(r)$ definido en (3.7). El cuasipolinomio $D(s)$ en (3.2) tiene una raíz real con multiplicidad de $n + 1$ en*

$$-\sigma := s_l = \frac{r_l}{h} \quad (3.10)$$

si y sólo si los coeficientes α_k están dados por

$$\alpha_k = \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=1}^j \left[(-1)^{n+j} \binom{n}{i-j} \binom{j-1}{n-k} \frac{1}{(i-1)!} r_l^{i-1} \right] \sigma^k e^{r_l} \quad (3.11)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Prueba. Sea s_l una raíz con multiplicidad $n + 1$ de $D(s)$ de modo que s_l es solución del siguiente conjunto de $n + 1$ ecuaciones:

$$D(s) = 0, \quad \frac{\partial D(s)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 D(s)}{\partial s^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n D(s)}{\partial s^n} = 0. \quad (3.12)$$

Considerando (3.2) la primera ecuación puede expresarse como

$$D(s) = P(s) + Q(s)e^{-sh} = 0,$$

donde

$$P(s) = s^n \quad (3.13)$$

$$Q(s) = \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n. \quad (3.14)$$

Si se multiplica la expresión anterior por e^{sh} se tiene que

$$P(s)e^{sh} + Q(s) = 0. \quad (3.15)$$

Puesto que las derivadas sucesivas de $D(s)$ y las de (3.15) son iguales a cero. Empleando el Lema 3.2 para definir el conjunto de ecuaciones equivalentes a (3.12) para (3.15) se tiene

$$\begin{aligned} R_0(s; h)e^{sh} + \sum_{i=1}^n \alpha_i s^{n-i} &= 0 \\ R_1(s; h)e^{sh} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (n-i) s^{n-i-1} &= 0 \\ &\vdots \\ R_k(s; h)e^{sh} + \sum_{i=1}^{n-k} \alpha_i \frac{(n-i)!}{(n-i-k)!} s^{n-k-i} &= 0 \\ &\vdots \\ R_n(s; h)e^{sh} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ahora, para simplificar la notación se define una matriz $S(s) \in \mathbb{R}^{n \times n} [s]$ tal que

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & \frac{(j-1)!}{(j-1)!} s^{j-1} & \cdots & s^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{(j-1)!}{(j-2)!} s^{j-2} & \cdots & \frac{(n-1)!}{(n-2)!} s^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \frac{(j-1)!}{(j-i)!} s^{j-i} & & \frac{(n-1)!}{(n-i)!} s^{n-i} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (n-1)! \end{bmatrix},$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$, y los vectores $R(s; h)$ y L como

$$R(s; h) = \begin{bmatrix} R_0(s; h) \\ R_1(s; h) \\ R_2(s; h) \\ \vdots \\ R_{n-1}(s; h) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Se puede reescribir el conjunto de ecuaciones en (3.16) de forma matricial como

$$S(s)L + R(s; h)e^{sh} = 0. \quad (3.17)$$

Se observa que todos los elementos de la diagonal en $S(s)$ son distintos de cero, es decir, $S(s)$ es una matriz no singular, lo que implica su inversa $S^{-1}(s)$ existe y est1 dada por

$$S^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s & \cdots & (-1)^{j+1} \frac{1}{(j-1)!} s^{j-1} & \cdots & (-1)^{n+1} \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & (-1)^{j+2} \frac{1}{(j-2)!} s^{j-2} & \cdots & (-1)^{n+2} \frac{1}{(n-2)!} s^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & (-1)^{j+i} \frac{1}{(i-1)!(j-i)!} s^{j-i} & & (-1)^{n+i} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} s^{n-i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix},$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto, cuando $s = s_l$ se puede despejar L de la ecuaci3n (3.17) como

$$L = -S^{-1}(s_l)R(s_l; h)e^{s_l h}. \quad (3.18)$$

Ahora, por las definiciones de $S^{-1}(s)$ y $R(s; h)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_k &= - \left[\sum_{j=n-k+1}^n \left(\frac{(-1)^{j+n-k+1}}{(n-k)!(j-n+k-1)!} s_l^{j-n+k-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^j \binom{n}{j-i} \frac{(j-1)!}{(i-1)!} s_l^{n-j+i} h^{i-1} \right] e^{hs_l} \\ &= \left[\sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=1}^j (-1)^{n+j-k} \binom{n}{j-i} \binom{j-1}{n-k} \frac{1}{(i-1)!} s_l^{k+i-1} h^{i-1} \right] e^{hs_l}, \end{aligned}$$

entonces (3.11) sigue de (3.10), sustituyendo $-\sigma = s_l$, lo cual concluye la demostraci3n. ■

El siguiente Lema 3.6 presenta una factorizaci3n del cuasipolinomio $D(s)$ que demuestra expl3citamente la multiplicidad de la ra3z en s_l .

Lema 3.6 *Sean los coeficientes del cuasipolinomio $D(s)$ tales que satisfagan al Teorema 3.5. Entonces, $D(s)$ admite la siguiente factorizaci3n:*

$$D(s) = \frac{1}{n!} (s - s_l)^{n+1} \int_0^h R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta, \quad (3.19)$$

La prueba se detalla en el ap3ndice B.

Ahora se cuenta con las herramientas necesarias para establecer condiciones que permitan asignar un espectro exponencialmente estable.

3.3. La multiplicidad induce dominancia

A continuaci3n se presenta uno de los resultados principales de esta tesis, el cual establece las condiciones para que una ra3z con multiplicidad $n+1$, dada por el Teorema 3.5, sea tambi3n dominante.

Teorema 3.7 Sea r_n la raíz más a la derecha de $q(r)$ y sean los coeficientes del cuasi-polinomio $D(s)$ definido en (3.2) dados por

$$\alpha_k = \sum_{j=n-k+1}^n \sum_{i=1}^j \left[(-1)^{n+j} \binom{n}{j-i} \binom{j-1}{n-k} \frac{1}{(i-1)!} r_n^{i-1} \right] \sigma^k e^{r_n} \quad (3.20)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, entonces $D(s)$ tiene una raíz real dominante con multiplicidad $n+1$ ubicada en

$$-\sigma := s_n = \frac{r_n}{h} \quad (3.21)$$

Prueba. La multiplicidad de s_n se sigue del Teorema 3.5. Para establecer la dominancia de la raíz s_n se considera como punto de partida la factorización mostrada en el Lema 3.6. Entonces, sólo se debe demostrar que el factor

$$f(s) = \int_0^h e^{-(s-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) d\theta$$

no tiene ninguna raíz con parte real mayor a s_n .

Para comenzar la demostración, se va a probar que $f(s)$ no tiene raíces reales. Para ello, se supone que $s = a$, $a \in \mathbb{R}$, por el Corolario 3.4.1 se tiene que

$$R_n(s_n; \theta) > 0, \theta \in [0, h].$$

Además

$$e^{-(a-s_n)\theta} > 0$$

es estrictamente positiva en el intervalo $[0, h]$. Por lo tanto, es claro que $f(s)$ no puede ser igual a cero para ningún valor de a .

Ahora, se considera que sucede para el caso de raíces complejas conjugadas. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $s = a \pm ib$ es un par de raíces conjugadas de $f(s)$, además suponiendo que $a > s_n$. Sin perder generalidad, se supone $b > 0$.

$$f(a + ib) = \int_0^h e^{-(a-ib-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) d\theta = \int_0^h e^{-(a-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) e^{ib\theta} d\theta.$$

Por la identidad de Euler la expresión anterior se reescribe como

$$\int_0^h e^{-(a-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) (\cos(b\theta) + j \sin(b\theta)) d\theta = 0. \quad (3.22)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria se tiene

$$\Re(f(a + ib)) = \int_0^h e^{-(a-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) \cos(b\theta) d\theta = 0 \quad (3.23)$$

$$\Im(f(a + ib)) = \int_0^h e^{-(a-s_n)\theta} R_n(s_n; \theta) \sin(b\theta) d\theta = 0. \quad (3.24)$$

Ahora, se define $2l\pi \leq bh \leq 2(l+1)\pi$ para $l \geq 0$, $l \in \mathbb{N}$. Además, el término senoidal de (3.24) tiene valores positivos o negativos para $b\theta$ si $b\theta \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ o si $b\theta \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ respectivamente $\forall k < l$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces, con el cambio de variable $\theta = \frac{\zeta}{b}$, la ecuación (3.24) puede reescribirse como

$$\Im(f(a + ib)) = \frac{1}{b} \int_0^{bh} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta.$$

Separando la integral en los periodos completos y el resto, es decir de cero al máximo múltiplo de 2π y la parte restante hasta bh . Se define la primera parte como g_m y el resto como g_r de modo que

$$\Im(f(s)) s = \frac{1}{b}(g_m + g_r)$$

donde

$$g_m = \int_0^{2l\pi} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta$$

y

$$g_r = \int_{2l\pi}^{bh} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta.$$

Primero, se analiza el segmento $[0, 2l\pi]$. Dividiendo la integral g_m de acuerdo a los valores positivos y negativos de la función senoidal

$$g_m = \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta \right\}.$$

El Corolario 3.4.1 establece que $R_n(s_n; \theta) > 0$ es positivo y estrictamente decreciente para todo $\theta \in [0, h]$, además, como $a > s_n$ el término $e^{-(a-s_n)\theta}$ también es positivo y estrictamente decreciente y debido a la alternancia de los signos en la función senoidal, la primera mitad positiva de la ecuación entre llaves es mayor que la siguiente mitad negativa, Por lo tanto, todo periodo de $2k\pi$ a $(2k+1)\pi$ de la integral entre llaves es estrictamente positivo $\forall k$.

Ahora, considerando la parte de la integral descrita en g_r , que corresponde al segmento $[2l\pi, bh]$. Si $bh \in (2l\pi, (2l+1)\pi)$ la senoidal es positiva, por lo que g_r también lo es, o si $bh \in ((2l+1)\pi, 2(l+1)\pi)$, se puede dividir la integral de $2l\pi$ a bh como

$$g_r(s) = \int_{2l\pi}^{(2l+1)\pi} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta + \int_{(2l+1)\pi}^{bh} e^{-(a-s_n)\frac{\zeta}{b}} R_n(s_n; \frac{\zeta}{b}) \sin(\zeta) d\zeta.$$

Con el mismo argumento que para g_m , puede concluirse que g_r es estrictamente positiva. En consecuencia $f(s)$ también es estrictamente positiva y no puede ser igual a cero para ningún s con parte real mayor a s_n . Por lo tanto, no existen raíces reales ni complejas conjugadas con parte real mayor a s_n tal que $f(s) = 0$, de modo que s_n es la raíz dominante, como se quería demostrar. ■

En resumidas cuentas, se han determinado condiciones necesarias y suficientes para que la abscisa espectral de (3.2) esté determinada por una raíz de multiplicidad máxima $n+1$ y que además sea dominante en el semiplano complejo izquierdo. Se observa que s_n forma parte del conjunto de soluciones s_l que cumplen la condición de multiplicidad máxima $n+1$, y por lo tanto s_n cumple la condición para ser un mínimo local de la abscisa espectral de (3.2). Finalmente, con ayuda del Teorema 2.1 se concluye la estabilidad exponencial para (3.2).

Capítulo 4

Sub-predictores y alta ganancia

En este capítulo se presenta el nuevo esquema de predicción basado en cadenas de subpredictores secuenciales para una clase de sistemas no lineales con retardo, se puntualizan las limitaciones del predictor de alta ganancia propuesto por Lei y Khalil [11,12] exponiendo el efecto de alta ganancia que proporcionan los subpredictores. Se muestra que la principal ventaja es la posibilidad de determinar la estabilidad del sistema dominante mediante el enfoque frecuencial.

Como se mencionó al principio del capítulo 3, en este trabajo se estudia una clase de sistemas no lineales que puede ser representado por una cadena de integradores como sigue

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Jx(t) + B\phi(x(t), u(t-h)) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un bloque de Jordan con $\lambda = 0$ (ver la ecuación (3.1)), $B = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^\top$, $C = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ y $\phi(x(t), u(t-h))$ es una función localmente Lipschitz que contiene las no linealidades del sistema y h un retardo dado. Se supone que existe una ley de control $u(t)$ para que el sistema (4.1) libre de retardos (con $h = 0$) en lazo cerrado sea estable.

Para el caso en que $h \neq 0$, se obtiene un estimado $\hat{x}(t)$ del estado futuro $x(t+h)$ y se emplea dicho estimado en la ley de control $u(t-h)$ para compensar el tiempo de retardo. Se propone el siguiente observador-predictor

$$\dot{\hat{x}}(t) = J\hat{x}(t) + B\phi(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t-h)),$$

donde el vector L , definido en (3.3), es la ganancia de observación.

Se define el error de predicción como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t-h).$$

La dinámica del error de predicción está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t-h) \\ &= Jx(t) + B\phi(x(t), u(t-h)) - J\hat{x}(t-h) \\ &\quad - B\phi(\hat{x}(t-h), u(t-h)) - L(y(t-h) - C\hat{x}(t-2h)),\end{aligned}$$

Sustituyendo la definición de $y(t)$ y agrupando el error de predicción, se tiene

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t-h) + B[\phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))]. \quad (4.2)$$

Se desea que la dinámica de los dos primeros términos de (4.2) sea dominante sobre el resto. Este análisis se desarrolla en dos partes, en primer lugar, se muestra como asignar la dinámica deseada en los primeros dos términos y en segundo lugar, se muestra el efecto de alta ganancia que inducen los subpredictores, con el cual se establece la dominancia antes mencionada. Notese que la ecuación característica de $Je(t) - LCe(t-h)$ es

$$D(s) = s^n + (\alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) e^{-sh}, \quad (4.3)$$

la cual se estudió en el capítulo anterior. Por lo tanto, el objetivo es sintonizar la ganancia de observación $L = L^*$ de tal manera que el cuasipolinomio (4.3) tenga todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo y el sistema asociado a dicho cuasipolinomio sea exponencialmente estable, con el máximo decaimiento exponencial. Además, se garantiza que la dinámica de los primeros dos términos de (4.2) domine al resto. La asignación del máximo decaimiento exponencial de (4.3) se discutió en el capítulo anterior y se obtiene al asignar los parámetros α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ de acuerdo con el Teorema 3.7. El problema que se aborda en este capítulo consiste en lograr que la dinámica de los términos $Je(t) - LCe(t-h)$ dominen al resto del sistema en (4.2).

4.1. Optimalidad y alta ganancia

Como se mencionó en el capítulo 1 la teoría de observadores de alta ganancia ha sido recientemente extendida a sistemas lineales con retardos. La ganancia de observación tiene la misma estructura que emplea ϵ para aumentar el valor de la ganancia y para la demostración de estabilidad también se realiza el escalamiento temporal. Como se discutió en la sección 2.3, el retardo del sistema h también se ve afectado por el escalamiento temporal en razón de $\frac{h}{\epsilon}$, de modo que no puede reducirse el valor de ϵ con libertad y garantizarse la estabilidad al mismo tiempo.

Nótese que se desea asignar la ganancia de observación L^* , que cumple las condiciones de un mínimo local estable para la abscisa espectral, como se mostró en los teoremas 3.1 y 3.7. No se puede emplear la estructura de la ganancia de observación con ϵ en el denominador, porque modifica el valor de la ganancia y pierde optimalidad. Además, existe el riesgo de perder la estabilidad por escalar el retardo. Así, resulta evidente que existe un compromiso entre optimalidad y alta ganancia con la estructura del observador tradicional, este compromiso se ilustra con mas detalle en el ejemplo de la sección 5.2.1.

El nuevo esquema de predicción que se propone en esta tesis satisface las condiciones de optimalidad en el sentido de minimización para la abscisa espectral, a través de las ganancias del observador, y además produce un efecto de alta ganancia que no compromete la estabilidad del sistema (4.1) cuando éste funciona en lazo cerrado.

4.2. Sintonización del predictor

A continuación se presenta el diseño y sintonización para una variación de la cadena de subpredictores propuesta por Najafi [14]. Este nuevo enfoque tiene el objetivo de evitar que la alta ganancia afecte al retardo y así, se pueda mantener la estabilidad. Se propone la siguiente cadena de $\rho \in \mathbb{N}$ observadores subpredictores secuenciales:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1(t) &= J\hat{x}_1(t) + B\phi(\hat{x}_1(t), u(t)) + LC(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t - \tilde{h})) \\
\dot{\hat{x}}_2(t) &= J\hat{x}_2(t) + B\phi(\hat{x}_2(t), u(t - \tilde{h})) + LC(\hat{x}_3(t) - \hat{x}_2(t - \tilde{h})) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_i(t) &= J\hat{x}_i(t) + B\phi(\hat{x}_i(t), u(t - (i - 1)\tilde{h})) + LC(\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t - \tilde{h})) \quad (4.4) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_{\rho-1}(t) &= J\hat{x}_{\rho-1}(t) + B\phi(\hat{x}_{\rho-1}(t), u(t - (\rho - 2)\tilde{h})) + LC(\hat{x}_\rho(t) - \hat{x}_{\rho-1}(t - \tilde{h})) \\
\dot{\hat{x}}_\rho(t) &= J\hat{x}_\rho(t) + B\phi(\hat{x}_\rho(t), u(t - (\rho - 1)\tilde{h})) + LC(y(t) - \hat{x}_\rho(t - \tilde{h})),
\end{aligned}$$

donde $\tilde{h} = \frac{h}{\rho}$ y para valores de $\rho > 1$, esta cadena de subpredictores permite dividir el retardo en intervalos más pequeños como se muestra en la figura 4.1.

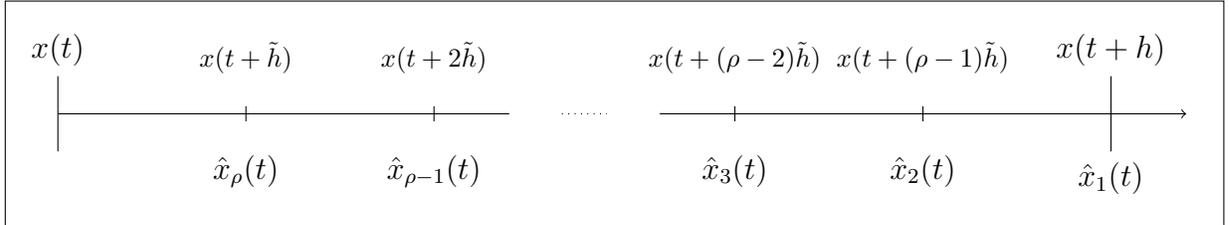


Figura 4.1: Esquema de la división del retardo para el intervalo $[t, t + h]$ entre los subestados estimados $\hat{x}_i, i = 1, 2, \dots, \rho$.

Definiendo el error de predicción como

$$e_i(t) = \hat{x}_{i+1}(t - (\rho - i)\tilde{h}) - \hat{x}_i(t - (\rho - i + 1)\tilde{h})$$

y para simplificar

$$\Phi_i(t) := \phi\left(\hat{x}_{i+1}(t - (\rho - i)\tilde{h}), u(t - (\rho - 1)\tilde{h})\right) - \phi\left(\hat{x}_i(t - (\rho - i + 1)\tilde{h}), u(t - \rho\tilde{h})\right),$$

con $i = 1, 2, \dots, \rho$. La dinámica del error se expresa como

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= J e_1(t) + LC \left(e_2(t - \tilde{h}) - e_1(t - \tilde{h}) \right) + B \Phi_1(t) \\
\dot{e}_2(t) &= J e_2(t) + LC \left(e_3(t - \tilde{h}) - e_2(t - \tilde{h}) \right) + B \Phi_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{e}_i(t) &= J e_i(t) + LC \left(e_{i+1}(t - \tilde{h}) - e_i(t - \tilde{h}) \right) + B \Phi_i(t) \\
&\vdots \\
\dot{e}_\rho(t) &= J e_\rho(t) - LC e_\rho(t - \tilde{h}) + B \Phi_\rho(t)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $\dot{e}_i(t) = [\dot{e}_{i,1}(t) \ \dot{e}_{i,2}(t) \ \dots \ \dot{e}_{i,j}(t) \ \dots \ \dot{e}_{i,n}(t)]^\top$ para $i = 1, 2, \dots, \rho$.

La ecuación característica de la parte lineal definida por (J, L, C) del sistema de ecuaciones anterior está dada por

$$\tilde{\Delta}(s) = \det \left(sI_{n\rho} - \text{diag}(J, J, \dots, J) - \begin{bmatrix} -LC & LC & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -LC & LC & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -LC & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -LC \end{bmatrix} e^{-s\tilde{h}} \right),$$

o bien

$$\tilde{\Delta}(s) = \det \begin{pmatrix} sI_n - J + LCe^{-s\tilde{h}} & -LC & \dots & 0 \\ 0 & sI_n - J + LCe^{-s\tilde{h}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -LC \\ 0 & 0 & \dots & sI_n - J + LCe^{-s\tilde{h}} \end{pmatrix}.$$

De la expresión anterior es fácil ver que

$$\tilde{\Delta}(s) = \left[\det \left(sI_n - J + LCe^{-s\tilde{h}} \right) \right]^\rho,$$

por lo tanto

$$\tilde{\Delta}(s) = \left[s^n + (\alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) e^{-s\tilde{h}} \right]^\rho. \tag{4.6}$$

Se observa que la ecuación anterior es el resultado de elevar a la potencia ρ , el cuasi-polinomio en (4.3), pero con un valor del retardo dividido entre ρ . A continuación, se determina la relación entre las ecuaciones (4.3) y (4.6) a través del Teorema 3.7 y su asignación de la abscisa espectral estable y dominante. Para ello, se adopta la siguiente notación:

$$\sigma_h = -\frac{r_n}{h} \quad y \quad \sigma_{\tilde{h}} = -\frac{r_n}{\tilde{h}}.$$

Debido a que $\tilde{h} = \frac{h}{\rho}$, la relación entre el valor de la abscisa espectral de (4.3) y la de (4.6) está dada por la siguiente expresión

$$\sigma_{\tilde{h}} = -\frac{r_n \rho}{h} = \sigma_h \rho. \quad (4.7)$$

Ahora, por el Teorema 3.7, se definen α_k^* , $k = 1, 2, \dots, n$ como el conjunto de parámetros que asignan la abscisa espectral de (4.3). Por la expresión en (4.7), el conjunto de parámetros α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ que asignan la abscisa espectral a (4.6), está dado por

$$\alpha_k = \alpha_k^* \rho^k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

Es fácil ver que el parámetro ρ no se ajusta en la ganancia del observador L , sino que, está dado por la cantidad de subpredictores, así, el valor de la abscisa espectral de (4.6) se ajusta al valor dado de ρ , además, $\sigma_{\tilde{h}}$ no puede cambiar de signo para ningún valor de $\rho > 1$, por lo que mantiene su estabilidad exponencial. Esto permite conservar la optimalidad, al mismo tiempo que asignar una dinámica lineal dominante. Ahora, se va a demostrar que esto se logra mediante un efecto de alta ganancia en la dinámica del error (4.5) con

$$L = [\alpha_1^* \rho \quad \alpha_2^* \rho^2 \quad \dots \quad \alpha_n^* \rho^n]^\top.$$

Definiendo el cambio de variable

$$\eta_{i,j}(t) = e_{i,j}(t) \rho^{n-j}$$

para $i = 1, 2, \dots, \rho$ y $j = 1, 2, \dots, n$, y sea

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b \\ 1 & \text{si } a = b \end{cases}, \quad (4.8)$$

la función delta de Kronecker. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{1,1}(t) &= \dot{e}_{1,1}(t) \rho^{n-1} \\ &= \left[e_{1,2}(t) + \alpha_1^* \rho \left(e_{2,1}(t - \tilde{h}) - e_{1,1}(t - \tilde{h}) \right) \right] \rho^{n-1} \\ &= \left[e_{1,2}(t) \rho^{n-2} + \alpha_1^* \left(e_{2,1}(t - \tilde{h}) \rho^{n-1} - e_{1,1}(t - \tilde{h}) \rho^{n-1} \right) \right] \rho \\ &= \left[\eta_{1,2}(t) + \alpha_1^* \left(\eta_{2,1}(t - \tilde{h}) - \eta_{1,1}(t - \tilde{h}) \right) \right] \rho \\ &\quad \vdots \\ \dot{\eta}_{1,j}(t) &= \left[\eta_{1,j+1}(t) + \alpha_j^* \left(\eta_{2,1}(t - \tilde{h}) - \eta_{1,1}(t - \tilde{h}) \right) \right] \rho \\ &\quad \vdots \\ \dot{\eta}_{1,n}(t) &= \alpha_n^* \left[\eta_{2,1}(t - \tilde{h}) - \eta_{1,1}(t - \tilde{h}) \right] \rho + \Phi_1(t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{\eta}_{i,j}(t) &= \left[(1 - \delta_{n,j}) \eta_{i,j+1}(t) + \alpha_j^* \left(\eta_{i+1,1}(t - \tilde{h}) - \eta_{i,1}(t - \tilde{h}) \right) \right] \rho + \delta_{n,j} \Phi_i(t) \\ &\quad \vdots \\ \dot{\eta}_{\rho,n}(t) &= \left[-\alpha_n^* \eta_{\rho,1}(t - \tilde{h}) \right] \rho + \delta_{n,j} \Phi_\rho(t) \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{1}{\rho}$ y escribiendo las ecuaciones en forma matricial se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\dot{\eta}_1(t) &= J\eta_1(t) + L^*C \left(\eta_2(t - \tilde{h}) - \eta_1(t - \tilde{h}) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_1(t) \\ \frac{1}{\rho}\dot{\eta}_2(t) &= J\eta_2(t) + L^*C \left(\eta_3(t - \tilde{h}) - \eta_2(t - \tilde{h}) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{1}{\rho}\dot{\eta}_\rho(t) &= J\eta_\rho(t) - L^*C\eta_\rho(t - \tilde{h}) + \frac{1}{\rho}B\Phi_\rho(t).\end{aligned}$$

Ahora, realizando un cambio en la escala de tiempo $\tau := t\rho$ se tiene

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\eta_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right) + L^*C \left(\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) - \eta_1\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \\ \frac{\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right) + L^*C \left(\eta_3\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) - \eta_2\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \\ &\vdots \\ \frac{\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right) - L^*C\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right).\end{aligned}$$

Definiendo $\bar{\eta}(\tau) := \eta\left(\frac{\tau}{\rho}\right)$ y $\bar{\Phi}_i(\tau) := \Phi_i\left(\frac{\tau}{\rho}\right)$ para $i = 1, 2, \dots, \rho$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\eta}_1(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_1(\tau) + L^*C (\bar{\eta}_2(\tau - h) - \bar{\eta}_1(\tau - h)) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_1(\tau) \\ \frac{d\bar{\eta}_2(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_2(\tau) + L^*C (\bar{\eta}_3(\tau - h) - \bar{\eta}_2(\tau - h)) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_2(\tau) \\ &\vdots \\ \frac{d\bar{\eta}_\rho(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_\rho(\tau) - L^*C\bar{\eta}_\rho(\tau - h) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_\rho(\tau).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Ahora se debe determinar la dominancia del sistema no perturbado, para ello se calcula la ecuación característica de la parte lineal definida por (J, L^*, C) en (4.9),

$$\Delta(s) = \det \left(sI_{n\rho} - \text{diag}(J, J, \dots, J) - \begin{bmatrix} -L^*C & L^*C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -L^*C & L^*C & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -L^*C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -L^*C \end{bmatrix} e^{-sh} \right),$$

o bien

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} sI_n - J + L^*Ce^{-sh} & -L^*C & \cdots & 0 \\ 0 & sI_n - J + L^*Ce^{-sh} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -L^*C \\ 0 & 0 & \cdots & sI_n - J + L^*Ce^{-sh} \end{pmatrix}.$$

De la expresión anterior se obtiene que la ecuación característica es

$$\Delta(s) = [s^n + (\alpha_1^*s^{n-1} + \alpha_2^*s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}^*s + \alpha_n^*) e^{-sh}]^\rho. \quad (4.10)$$

Nótese que se ha asignado la abscisa espectral estable y dominante en la ecuación (4.10). Si bien, no se ha determinado que las condiciones de optimalidad que cumplen los parámetros L^* para (4.3), se cumplan también para (4.10), sí se puede determinar el valor de la abscisa espectral en σ_h y la estabilidad exponencial es una conclusión directa porque $\sigma_h < 0$. Esto se cumple para cualquier valor de $\rho > 1$ y puede hacerse ρ tan grande como se requiera para que la parte lineal definida por (J, L^*, C) de (4.9) domine al resto.

Capítulo 5

Ejemplo ilustrativo: El péndulo simple

En este capítulo se presenta el desarrollo del nuevo esquema de predicción para el sistema del péndulo simple. Se sintonizan las ganancias del predictor y se demuestra el funcionamiento mediante simulación.

5.1. Definición del sistema

Sea la ecuación del péndulo simple

$$\ddot{\theta}(t) = -c \sin(\theta(t)) + u(t - h), \quad (5.1)$$

donde $\theta(t)$ es la posición angular, $\dot{\theta}(t)$ es la velocidad angular y $\ddot{\theta}$ la aceleración angular, además, $c > 0$ es una constante, $u(t)$ es la entrada de control y h es el retardo de entrada. Se supone que se desea controlar la posición del péndulo en $\theta = \delta$ por lo que, definiendo

$$x_1(t) = \theta - \delta; \quad x_2(t) = \dot{\theta}, \quad (5.2)$$

se puede reescribir el sistema como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -c \sin(x_1(t) + \delta) + u(t - h) \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde solo la posición está disponible a través de mediciones por lo que $y(t)$ es la salida. Definiendo

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^\top \quad (5.4)$$

para el estado y

$$\phi(x(t), u(t - h)) = -c \sin(Cx(t) + \delta) + u(t - h) \quad (5.5)$$

para la no linealidad, entonces se tiene una cadena de integradores de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Jx(t) + B\phi(x(t), u(t - h)) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = [1 \quad 0].$$

5.1.1. Sistema libre de retardos

Considérese primero el sistema libre de retardos, es decir, $h = 0$ y la ley de control dado por

$$u(t) = c \sin(Cx(t) + \delta) - Kx(t)$$

con $K = [k_1 \quad k_2]$ y como se mencionó arriba δ es la posición angular deseada. El sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -c \sin(Cx(t) + \delta) + c \sin(Cx(t) + \delta) - Kx(t) \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (J - BK)x(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{5.7}$$

entonces, el sistema es exponencialmente estable para todas $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, además el comportamiento deseado puede asignarse con la siguiente expresión

$$\det(sI - J + BK) = s^2 + k_2s + k_1.$$

5.1.2. Sistema con retardos

Considerando $h \neq 0$, el problema de observación consiste en obtener un estimado $\hat{x}(t)$ del estado adelantado en h unidades de tiempo $x(t+h)$. Para ello, primero se considera el observador-predicador

$$\dot{\hat{x}}(t) = J\hat{x}(t) + B\phi(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t-h)),$$

donde $L = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^\top$ es la ganancia de observación y defínase el error de predicción como

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t-h).$$

Ahora, la dinámica del error de predicción está dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t-h) \\ &= Jx(t) + B\phi(x(t), u(t-h)) - J\hat{x}(t-h) \\ &\quad - B\phi(\hat{x}(t-h), u(t-h)) - L(y(t-h) - C\hat{x}(t-2h)), \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión anterior la definición de $y(t)$ y agrupando el error de predicción se tiene

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t-h) + B[\phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))].$$

Se analiza la no linealidad

$$\phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))$$

por su definición se expresa como

$$\begin{aligned} &= [-c \sin(Cx(t) + \delta) + u(t-h)] - [-c \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta) + u(t-h)] \\ &= -c \sin(Cx(t) + \delta) + u(t-h) + c \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta) - u(t-h) \\ &= -c [\sin(Cx(t) + \delta) - \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta)] \\ &= -2c \cos\left(\frac{1}{2}C(x(t) - \hat{x}(t-h))\right) \sin\left(\frac{1}{2}C(x(t) + \hat{x}(t-h))\right) \\ &= -2c \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right). \end{aligned}$$

Entonces, la dinámica del error está dada por

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t-h) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right). \quad (5.8)$$

El problema de sintonización del observador-predicor consiste en diseñar L de modo que el origen de (5.8) sea estable y el término $Je(t) - LCe(t-h)$ se dominante. Esto implica que el estado observado $\hat{x}(t)$ converge al estado adelantado $x(t+h)$.

Se observa que la ley de control se expresa como

$$u(t-h) = c \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta) - K\hat{x}(t-h), \quad (5.9)$$

entonces, el lazo cerrado de (5.6) y (5.9) es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Jx(t) + B(-c \sin(Cx(t) + \delta) + u(t-h)) \\ &= Jx(t) + B(-c \sin(Cx(t) + \delta) + c \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta) - K\hat{x}(t-h)) \\ &= Jx(t) - BK\hat{x}(t-h) - cB(\sin(Cx(t) + \delta) - \sin(C\hat{x}(t-h) + \delta)) \\ &= Jx(t) - BK\hat{x}(t-h) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \\ &= Jx(t) - BK(x(t) - e(t)) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \\ &= (J - BK)x(t) + BKe(t) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

El sistema extendido con (5.10) y (5.8) es

$$\dot{x}(t) = (J - BK)x(t) + BKe(t) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \quad (5.11a)$$

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t-h) - 2cB \cos\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce(t)\right). \quad (5.11b)$$

Se puede observar que el sistema anterior sin término no lineales es Hurwitz.

Por ahora se analiza sólo la parte lineal que se desea que sea dominante en (5.8)

$$\dot{e}(t) = Je(t) - LCe(t - h). \quad (5.12)$$

Su ecuación característica está dada por

$$\begin{aligned} D(s) &= \det(sI - J + LCe^{-sh}) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-sh} & 0 \\ \alpha_2 e^{-sh} & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} s + \alpha_1 e^{-sh} & -1 \\ \alpha_2 e^{-sh} & s \end{bmatrix} = s^2 + \alpha_1 s e^{-sh} + \alpha_2 e^{-sh} \end{aligned}$$

o bien,

$$D(s) = s^2 + (\alpha_1 s + \alpha_2) e^{-sh}.$$

Ahora, para seleccionar los parámetros α_1^* y α_2^* tal que (5.12) sea exponencialmente estable y además el decaimiento exponencial sea máximo, se asigna una raíz múltiple dominante con el Teorema 3.7. El polinomio $q(r)$ definido en (3.7) para este caso es

$$2 + 4r + r^2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene

$$r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Seleccionando la solución más a la derecha

$$s_2 = \frac{r_2}{h},$$

del Teorema 3.7 se obtienen

$$\alpha_1^* = -(2s_2 + hs_2^2) e^{hs_2} = -\frac{r_2(r_2 + 2) e^{r_2}}{h} \quad (5.13)$$

$$\alpha_2^* = -(s_2^2 e^{hs_2} + \alpha_1 s_2) = \frac{r_2^2(r_2 + 1) e^{r_2}}{h^2}. \quad (5.14)$$

entonces

$$L^* = [\alpha_1^* \quad \alpha_2^*]^\top.$$

Cabe mencionar que el análisis de estabilidad formal del sistema (5.11) no se realiza en esta tesis, sin embargo, se considera como trabajo futuro.

5.2. Optimalidad y alta ganancia

5.2.1. Escalamiento del retardo con alta ganancia

Como se explica en el capítulo 4.1 no puede emplearse la estructura de un observador de alta ganancia tradicional

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix}^\top,$$

para dominar la no linealidad cuando existen retardos, esta sección se realiza el análisis e ilustrar esta imposibilidad. Sea

$$\dot{e}(t) = Je(t) - HCe(t-h) + B[\phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))] \quad (5.15)$$

la dinámica del error de predicción. Aplicando el siguiente cambio de variable

$$\eta_1(t) = \frac{e_1(t)}{\epsilon}, \quad \eta_2(t) = e_2(t),$$

por lo que

$$\dot{\eta}_1(t) = \frac{1}{\epsilon}\dot{e}_1(t) = \frac{1}{\epsilon}\left(e_2(t) + \frac{\alpha_1}{\epsilon}e_1(t-h)\right) = \frac{1}{\epsilon}(\eta_2(t) + \alpha_1\eta_1(t))$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2(t) &= \dot{e}_2(t) = \frac{\alpha_2}{\epsilon^2}e_1(t-h) + \phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h)) \\ &= \frac{1}{\epsilon}(\eta_1(t-h) + \phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))). \end{aligned}$$

Ahora se puede reescribir la ecuación (5.15) de la siguiente forma

$$\epsilon\dot{\eta}(t) = J\eta(t) - LC\eta(t-h) + \epsilon B[\phi(x(t), u(t-h)) - \phi(\hat{x}(t-h), u(t-h))],$$

Donde $\dot{\eta} := [\dot{\eta}_1 \quad \dot{\eta}_2]^\top$. Defínase ahora $\tau := \frac{t}{\epsilon}$ para un cambio en la escala de tiempo, entonces $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon}$ y se puede reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{d\eta(\epsilon\tau)}{d\tau} = J\eta(\epsilon\tau) - LC\eta(\epsilon\tau-h) + \epsilon B[\phi(x(\epsilon\tau), u(\epsilon\tau-h)) - \phi(\hat{x}(\epsilon\tau-h), u(\epsilon\tau-h))],$$

y definiendo $\bar{h} := \frac{h}{\epsilon}$, $\bar{\eta}(\tau) := \eta(\epsilon\tau)$ y $\bar{\phi}(\tau) := \phi(x(\epsilon\tau), u(\epsilon\tau-h)) - \phi(\hat{x}(\epsilon\tau-h), u(\epsilon\tau-h))$ se sigue que

$$\frac{d\bar{\eta}(\tau)}{d\tau} = J\bar{\eta}(\tau) - LC\bar{\eta}(\tau-\bar{h}) + \epsilon B\bar{\phi}(\tau). \quad (5.16)$$

La ecuación en (5.16) representa la dinámica del error de predicción en la nueva escala de tiempo. Nótese que para ϵ suficientemente pequeña se podría dominar a la parte no lineal.

Considérese la ecuación característica para la parte lineal de (5.16),

$$D(s) = s^2 + (\alpha_1 s + \alpha_2) e^{-s\bar{h}}. \quad (5.17)$$

Empleando el Teorema 3.7 se tiene que las ganancias optimas están dadas por

$$\alpha_1 = -(2s_2 + \bar{h}s_2^2) e^{\bar{h}s_2} = -\frac{r_2(r_2+2)e^{r_2}}{\bar{h}} = \alpha_1^*\epsilon \quad (5.18)$$

$$\alpha_2 = -(s_2^2 e^{\bar{h}s_2} + \alpha_1 s_2) = \frac{r_2^2(r_2+1)e^{r_2}}{\bar{h}^2} = \alpha_2^*\epsilon^2. \quad (5.19)$$

Sin embargo, para asignar este optimo en el cuasipolinomio (5.17) se requiere

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1^*\epsilon & \alpha_2^*\epsilon^2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* \end{bmatrix}^\top = L^*,$$

Nótese que el parámetro ϵ se cancela por lo que no puede ser ajustado en H con el fin de dominar la no linealidad y a la vez conservar el máximo decaimiento exponencial que proporciona L^* , esta es la principal desventaja de este esquema de observación.

5.2.2. Sub-predictores secuenciales

Ahora se propone la siguiente cadena de ρ observadores subpredictores secuenciales:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1(t) &= J\hat{x}_1(t) + B\phi(\hat{x}_1(t), u(t)) + LC(\hat{x}_2(t) - \hat{x}_1(t - \tilde{h})) \\
\dot{\hat{x}}_2(t) &= J\hat{x}_2(t) + B\phi(\hat{x}_2(t), u(t - \tilde{h})) + LC(\hat{x}_3(t) - \hat{x}_2(t - \tilde{h})) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_i(t) &= J\hat{x}_i(t) + B\phi(\hat{x}_i(t), u(t - (i - 1)\tilde{h})) + LC(\hat{x}_{i+1}(t) - \hat{x}_i(t - \tilde{h})) \quad (5.20) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{x}}_{\rho-1}(t) &= J\hat{x}_{\rho-1}(t) + B\phi(\hat{x}_{\rho-1}(t), u(t - (\rho - 2)\tilde{h})) + LC(\hat{x}_\rho(t) - \hat{x}_{\rho-1}(t - \tilde{h})) \\
\dot{\hat{x}}_\rho(t) &= J\hat{x}_\rho(t) + B\phi(\hat{x}_\rho(t), u(t - (\rho - 1)\tilde{h})) + LC(y(t) - \hat{x}_\rho(t - \tilde{h})),
\end{aligned}$$

donde $\tilde{h} = \frac{h}{\rho}$. Definiendo el error de predicción como

$$e_i(t) = \hat{x}_{i+1}(t - (\rho - i)\tilde{h}) - \hat{x}_i(t - (\rho - i + 1)\tilde{h})$$

y para simplificar

$$\Phi_i(t) := \phi\left(\hat{x}_{i+1}(t - (\rho - i)\tilde{h}), u(t - (\rho - 1)\tilde{h})\right) - \phi\left(\hat{x}_i(t - (\rho - i + 1)\tilde{h}), u(t - \rho\tilde{h})\right),$$

con $i = 1, 2, \dots, \rho$. Nótese que siguiendo el desarrollo de la no linealidad en la sección 5.1.2, puede expresarse como

$$\Phi_i(t) := -2c \cos\left(\frac{1}{2}Ce_i(t)\right) \sin\left(\frac{1}{2}Ce_i(t)\right),$$

para $i = 1, 2, \dots, \rho$. La dinámica del error se expresa como

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= Je_1(t) + LC\left(e_2(t - \tilde{h}) - e_1(t - \tilde{h})\right) + B\Phi_1(t) \\
\dot{e}_2(t) &= Je_2(t) + LC\left(e_3(t - \tilde{h}) - e_2(t - \tilde{h})\right) + B\Phi_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{e}_i(t) &= Je_i(t) + LC\left(e_{i+1}(t - \tilde{h}) - e_i(t - \tilde{h})\right) + B\Phi_i(t) \\
&\vdots \\
\dot{e}_\rho(t) &= Je_\rho(t) - LCe_\rho(t - \tilde{h}) + B\Phi_\rho(t)
\end{aligned}$$

donde $\dot{e}_i(t) = [\dot{e}_{i,1}(t) \ \dot{e}_{i,2}(t) \ \dots \ \dot{e}_{i,j}(t) \ \dots \ \dot{e}_{i,\rho}(t)]^\top$ para $j = 1, 2$ y $i = 1, 2, \dots, \rho$. Considerando primero la parte lineal definida por (J, L, C) del sistema de ecuaciones anterior, cuya ecuación característica es

$$\tilde{\Delta}(s) = \left[s^2 + (\alpha_1 s + \alpha_2) e^{-s\tilde{h}}\right]^\rho. \quad (5.21)$$

Además, en esta tesis ya se ha estudiado el cuasipolinomio entre llaves y se sabe que tiene una raíz múltiple dominante cuando sus parámetros están dados por

$$\alpha_1 = -\frac{r_2(r_2+2)e^{r_2}}{\tilde{h}} = \alpha_1^*\rho,$$

y

$$\alpha_2 = \frac{r_2^2(r_2+1)e^{r_2}}{\tilde{h}^2} = \alpha_2^*\rho^2.$$

Ahora, se muestra como ρ permite asignar una dinámica lineal dominante. Defínase el cambio de variable

$$\eta_{i,1} = e_{i,1}(t)\rho, \quad \eta_{i,2} = e_{i,2}(t)$$

para $j = 1, 2$ y $i = 1, 2, \dots, \rho$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{1,1}(t) &= \dot{e}_{1,1}(t)\rho = \rho \left(e_{1,2}(t) + \alpha_1^*\rho \left(e_{2,1}(t-\tilde{h}) - e_{1,1}(t-\tilde{h}) \right) \right) = \rho \left(\eta_{1,2}(t) + \alpha_1^* \left(\eta_{2,1}(t-\tilde{h}) - \eta_{1,1}(t-\tilde{h}) \right) \right) \\ \dot{\eta}_{1,2}(t) &= \dot{e}_{1,2}(t) = \alpha_2^*\rho \left(e_{2,2}(t-\tilde{h}) - e_{1,2}(t-\tilde{h}) \right) + \Phi_1(t) = \rho \left(\alpha_2^* \left(\eta_{2,2}(t-\tilde{h}) - \eta_{1,2}(t-\tilde{h}) \right) \right) + \Phi_1 \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{\rho,1}(t) &= \dot{e}_{\rho,1}(t)\rho = \rho \left(e_{\rho,2}(t) - \alpha_1^*\rho e_{\rho,1}(t-\tilde{h}) \right) = \rho \left(\eta_{\rho,2}(t) - \alpha_1^*\eta_{\rho,1}(t-\tilde{h}) \right) \\ \dot{\eta}_{\rho,2}(t) &= \dot{e}_{\rho,2}(t) = -\alpha_2^*\rho e_{\rho,2}(t-\tilde{h}) + \Phi_\rho(t) = -\rho\alpha_2^*\eta_{\rho,2}(t-\tilde{h}) + \Phi_\rho(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\dot{\eta}_1(t) &= J\eta_1(t) + L^*C \left(\eta_2(t-\tilde{h}) - \eta_1(t-\tilde{h}) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_1(t) \\ \frac{1}{\rho}\dot{\eta}_2(t) &= J\eta_2(t) + L^*C \left(\eta_3(t-\tilde{h}) - \eta_2(t-\tilde{h}) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{1}{\rho}\dot{\eta}_\rho(t) &= J\eta_\rho(t) - L^*C\eta_\rho(t-\tilde{h}) + \frac{1}{\rho}B\Phi_\rho(t). \end{aligned}$$

Ahora, realizando un cambio en la escala de tiempo $\tau := t\rho$ se tiene

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right) + L^*C \left(\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) - \eta_1\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_1\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \\ \frac{\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right) + L^*C \left(\eta_3\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) - \eta_2\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) \right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_2\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \\ &\vdots \\ \frac{\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right)}{d\tau} &= J\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right) - L^*C\eta_\rho\left(\frac{\tau}{\rho} - \tilde{h}\right) + \frac{1}{\rho}B\Phi_\rho\left(\frac{\tau}{\rho}\right). \end{aligned}$$

definiendo $\bar{\eta}(\tau) := \eta(\frac{\tau}{\rho})$ y $\bar{\Phi}_i(\tau) := \Phi_i(\frac{\tau}{\rho})$ para $i = 1, 2, \dots, \rho$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\eta}_1(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_1(\tau) + L^*C(\bar{\eta}_2(\tau-h) - \bar{\eta}_1(\tau-h)) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_1(\tau) \\ \frac{d\bar{\eta}_2(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_2(\tau) + L^*C(\bar{\eta}_3(\tau-h) - \bar{\eta}_2(\tau-h)) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_2(\tau) \\ &\vdots \\ \frac{d\bar{\eta}_\rho(\tau)}{d\tau} &= J\bar{\eta}_\rho(\tau) - L^*C\bar{\eta}_\rho(\tau-h) + \frac{1}{\rho}B\bar{\Phi}_\rho(\tau). \end{aligned} \quad (5.22)$$

La parte lineal de interés es la definida por (J, L^*, C) sea dominante en el sistema (5.22). La ecuación característica de la parte lineal definida con (J, L^*, C) está dada por

$$\Delta(s) = \det \left(sI_{n\rho} - \text{diag}(J, J, \dots, J) - \begin{bmatrix} -L^*C & L^*C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -L^*C & L^*C & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -L^*C & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -L^*C \end{bmatrix} e^{-sh} \right),$$

o bien

$$\Delta(s) = \det \begin{pmatrix} sI_n - J + L^*C e^{-sh} & -L^*C & \dots & 0 \\ 0 & sI_n - J + L^*C e^{-sh} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -L^*C \\ 0 & 0 & \dots & sI_n - J + L^*C e^{-sh} \end{pmatrix}.$$

De la expresión anterior es fácil ver que

$$\Delta(s) = [\det(sI_n - J + L^*C e^{-sh})]^\rho.$$

Por lo tanto

$$\Delta(s) = [s^2 + (\alpha_1^*s + \alpha_2^*)e^{-sh}]^\rho. \quad (5.23)$$

De modo que por el Teorema 3.7 la abscisa espectral de (5.23) está ubicada en

$$\sigma_h = \frac{-2 + \sqrt{2}}{h},$$

Por ello es exponencialmente estable con un decaimiento exponencial de σ_h .

5.3. Simulación

En esta sección se presentan los resultados del ejemplo mediante su simulación, donde se comparan el control ideal por realimentación contra nuestro esquema de predicción para el sistema con retardos. En el caso del lazo de control ideal se conoce y puede obtenerse toda la información del estado, como se muestra en la figura 5.1. Aunque esto casi nunca es posible o práctico, si es de utilidad para realizar una comparación cualitativa de la efectividad de nuestro predictor.

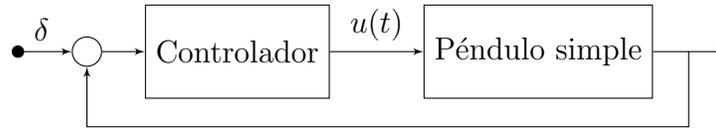


Figura 5.1: Caso ideal de control por realimentación de estado.

Se presentan dos simulaciones del sistema en lazo cerrado, la primera para una cadena con dos subpredictores y la segunda para otra con tres de ellos. El diagrama de control del primer caso se puede observar en la figura 5.2 y del segundo en la figura 5.3. Al observar estos dos diagramas de control resulta evidente la facilidad con la que se puede aumentar el número de subpredictores.

El parámetro que se considera para la simulación es $c = 32.7$, por que representa a un péndulo con 0.3 metros de longitud. Considerando un control de linealización por realimentación de estado, en el que se asignen dos raíces en -10 , al ajustar las ganancias del controlador con $k_1 = 100$ y $k_2 = 20$. Para las simulaciones es importante recordar que al seleccionar las unidades para representar la constante c , también se definen las unidades para la señal de control en $[Nm]$ (par) y el tiempo en segundos $[Seg]$.

Se considera un retardo de $h = 0.1$, se puede observar numéricamente que con este valor de retardo el sistema lazo cerrado con el control ideal se vuelve inestable. Ahora, los parámetros que asignan el espectro óptimo son

$$\alpha_1^* = \frac{0.4612}{0.1} = 4.612$$

y

$$\alpha_2^* = \frac{0.0791}{0.1^2} = 7.91,$$

por el Teorema 3.7. Entonces, la ganancia de predicción es

$$L_2 = [9.224 \quad 31.64]^\top$$

y

$$L_3 = [13.836 \quad 71.19]^\top,$$

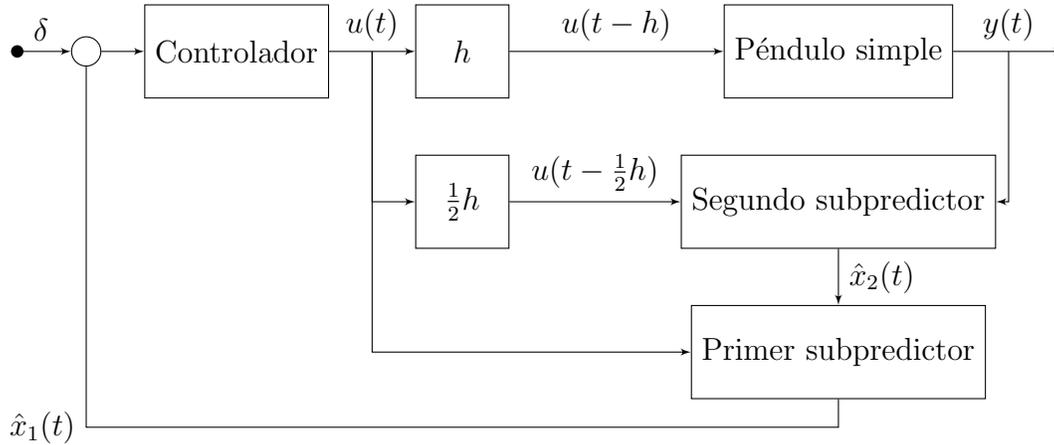


Figura 5.2: Diagrama de control del sistema en lazo cerrado con dos subpredictores.

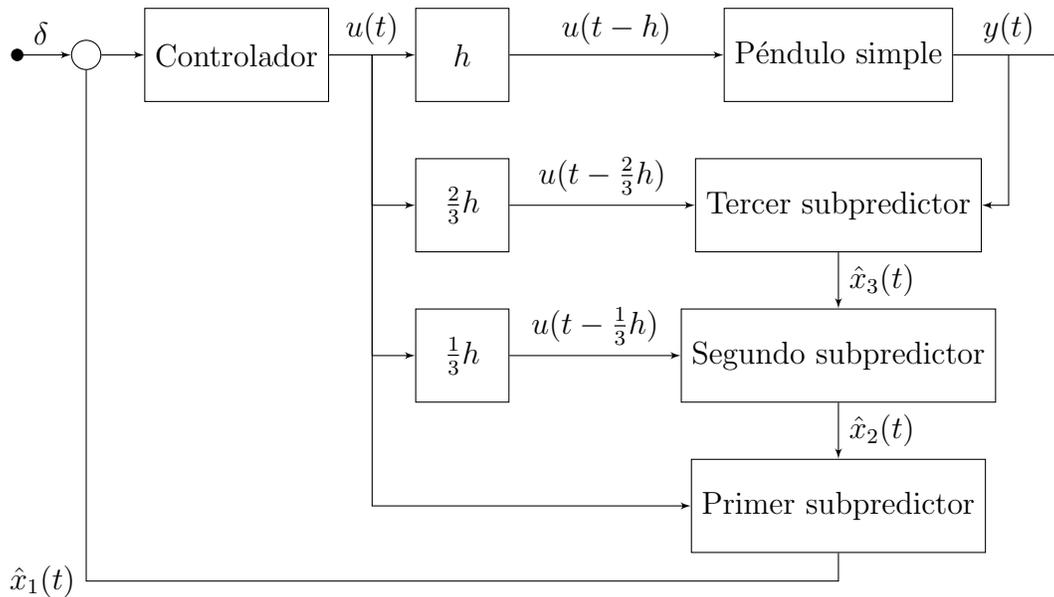


Figura 5.3: Diagrama de control del sistema en lazo cerrado con tres subpredictores.

para los casos $\rho = 2$ y $\rho = 3$ respectivamente. Se observa en la figura 5.4 que se recupera un comportamiento estable semejante al caso ideal, por lo que se puede concluir que, el efecto negativo del retardo ha sido compensado por las cadenas de subpredictores.

En contraste, se puede observar en la figura 5.5 que se producen magnitudes excesivamente grandes en la señal de control, por lo que se realizó una simulación considerando la saturación del controlador en 30 Nm , se observa en las figuras 5.6 y 5.7 que la estabilidad se mantiene y el método propuesto en esta tesis es candidato a implementación.

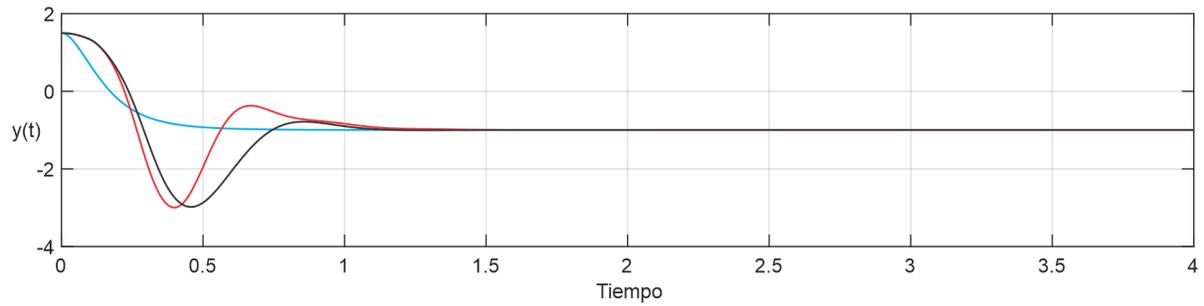


Figura 5.4: Comparación de la salida del sistema en lazo cerrado para los casos: ideal (azul), dos subpredictores (rojo) y tres subpredictores (negro).

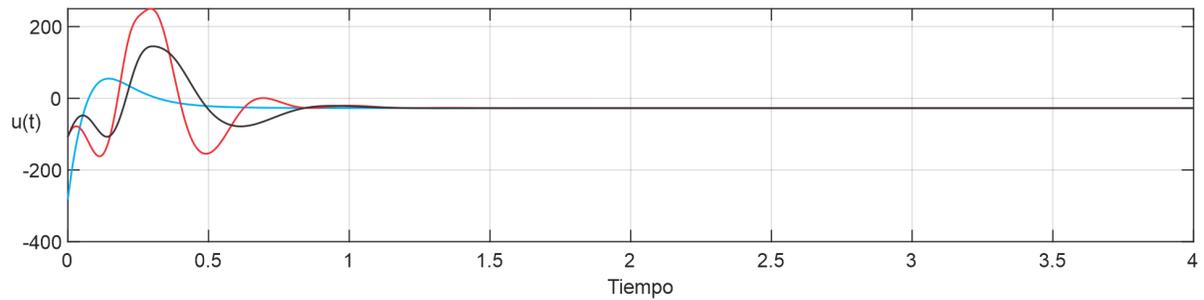


Figura 5.5: Comparación de la señal de control para los casos: ideal (azul), dos subpredictores (rojo) y tres subpredictores (negro).

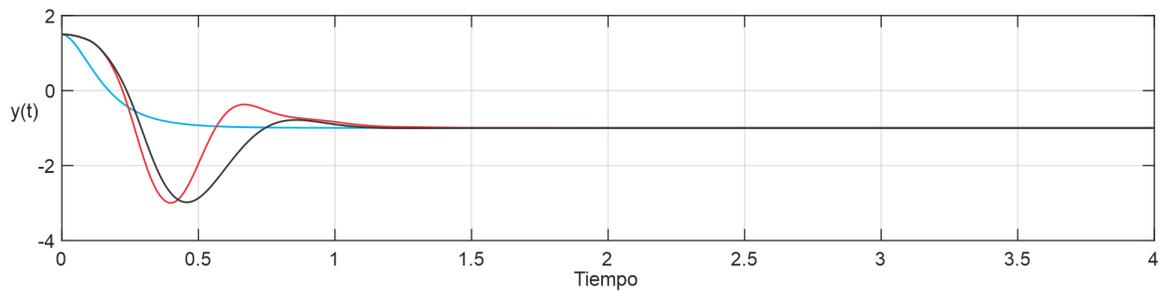


Figura 5.6: Comparación de la señal de salida con saturación en la ley de control para los casos: ideal (azul), dos subpredictores (rojo) y tres subpredictores (negro).

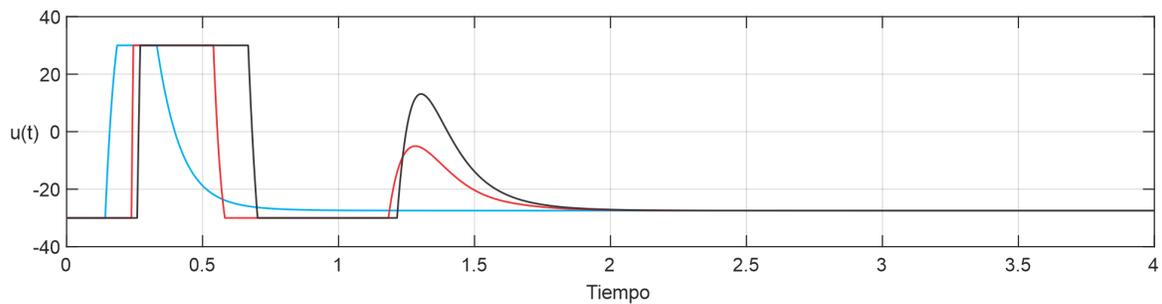


Figura 5.7: Simulación de la ley de control con saturación para los casos: ideal (azul), dos subpredictores (rojo) y tres subpredictores (negro).

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

A continuación, se resumen las principales contribuciones de este trabajo de investigación y se presentan algunas direcciones de investigación futura.

Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado una nueva prueba de dominancia para un cuasipolinomio característico particular, que puede representar sistemas con retardos con una cadena de integradores en la parte no retardada. Además, se determinó un valor óptimo para la abscisa espectral que depende únicamente de la dimensión del sistema y del retardo. Ahora se han determinado condiciones necesarias y suficientes para que la abscisa espectral esté determinada por una raíz de multiplicidad máxima y además sea dominante. Se hace uso de este resultado para resolver un problema de observación en sistemas no lineales con retardos, donde se ha propuesto un nuevo esquema para el diseño de observadores-predictores de alta ganancia basado en las cadenas de subpredictores secuenciales, el cual es sintonizado mediante la metodología de asignación de raíces dominantes y múltiples que se presentó. Se ha asignado una abscisa espectral estable y dominante en la ecuación. Además, se determinaron las condiciones para que el error de predicción sea exponencialmente estable y cumpla las condiciones de optimalidad para un máximo decaimiento exponencial.

Se pudo determinar el efecto de alta ganancia en los subpredictores secuenciales y eliminar el compromiso entre optimalidad y alta ganancia que se presentaba con la estructura Jeı y Khalil, sólo con el costo de multiplicar la dimensión del error de predicción por la cantidad de subpredictores. Aunque no se concluye la optimalidad en el esquema completo de los subpredictores, se observa que el lugar geométrico se asigna de acuerdo con la metodología que se propuso para el cuasipolinomio, por lo que se mantienen las condiciones que garantizan estabilidad exponencial. Si bien, no se determinó si las condiciones de optimalidad se cumplen, si se determinó que la abscisa espectral se ubica en el semiplano complejo izquierdo, por lo que, la estabilidad exponencial es una conclusión directa.

Se ha demostrado la efectividad del método propuesto mediante el ejemplo ilustrativo de un péndulo simple, en el cual se observa la metodología de sintonización y la buena de predicción del estado futuro, o en otras palabras la convergencia a cero del error de predicción.

Perspectivas

La continuación natural de esta tesis es el análisis en el dominio del tiempo del sistema en lazo cerrado en el marco de Lyapunov-Krasovskii. Otra dirección de estudio es la aplicación de los resultados frecuenciales obtenidos a otros problemas.

- Para el esquema propuesto de subpredicadores puede analizarse la estabilidad del sistema en lazo cerrado con el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. De esta manera, se puede asegurar la atenuación de la parte no lineal, y en consecuencia concluir sobre la estabilidad local del equilibrio.
- Existe la perspectiva de poder emplear el efecto de alta ganancia producido por los subpredicadores para mitigar perturbaciones. El análisis temporal de Lyapunov-Krasovskii mencionado anteriormente es indudablemente la herramienta privilegiada para analizar problemas de incertidumbre en:
 - Parámetros.
 - Retardo.
 - Ruido externo.
- Dado que el cuasipolinomio estudiado en el capítulo 3 es bastante general, puede estar asociado a otros problemas como el caso de leyes de control que introducen retardos de manera deliberada. Considérese por lo tanto que los resultados obtenidos pueden aplicarse a otros problemas, como el diseño de controladores que garanticen estabilidad exponencial.

Apéndice A

Análisis de polinomios

Se hace un recordatorio sobre algunas propiedades útiles de los polinomios.

A.1. División de polinomios

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios mónicos cualesquiera, entonces existen los polinomios $q(x)$, $r(x)$ tales que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad \forall x,$$

con $q(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo. Además, el grado de $r(x)$ es siempre menor que el grado de $g(x)$.

A.2. El algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides se usa para encontrar el máximo común divisor entre dos polinomios.

Teorema A.1 *Algoritmo de Euclides:* *El máximo común divisor $r_n(x)$ de dos polinomios cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$, se encuentra en el último residuo distinto de cero del siguiente arreglo*

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) &= q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\ &\vdots \\ r_{n-2}(x) &= q_n(x)r_{n-1}(x) + br_n(x) \\ r_{n-1}(x) &= q_{n+1}(x)r_n(x), \end{aligned}$$

donde b es una constante tal que $r_n(x)$ sea mónico.

A.3. El Teorema de Sturm

El Teorema de Sturm [26] es un método que permite determinar el número exacto de raíces reales distintas en un intervalo dado para un polinomio cualquiera con coeficientes reales. La secuencia de Sturm consiste en una sucesión de un polinomio cualquiera, su derivada y los residuos del algoritmo de Euclides entre ambos.

Secuencia de Sturm: Sea $f_0(x)$ un polinomio arbitrario y $f_1(x)$ su derivada. El algoritmo de Euclides entre $f_0(x)$ y $f_1(x)$ es

$$\begin{aligned} f_0(x) &= q_1(x)f_1(x) + c_2f_2(x) \\ f_1(x) &= q_2(x)f_2(x) + c_3f_3(x) \\ &\vdots \\ f_{k-2}(x) &= q_{k-1}(x)f_{k-1}(x) + c_kf_k(x) \\ f_{k-1}(x) &= q_k(x)f_k(x). \end{aligned}$$

Los polinomios en la secuencia de Sturm son $\{g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x)\}$, donde k es el número de divisiones posibles en el algoritmo de Euclides, $g_0(x) = f_0(x)$ y $g_i(x)f_k(x) = f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$. La longitud de la secuencia de Sturm k es a lo más el grado de $f_0(x)$.

Teorema A.2 Teorema de Sturm: Sean S_a y S_b el número de cambios de signo en la secuencia de Sturm para $x = a$ y $x = b$ respectivamente. Un polinomio con coeficientes reales $f_0(x)$ tiene exactamente $S_a - S_b$ raíces distintas en el intervalo $a < x \leq b$.

A.4. El Teorema de Rolle

El Teorema de Rolle [27] establece que si una función continua cruza el eje horizontal en dos puntos, la derivada de dicha función cruza el eje horizontal al menos una vez entre esos dos puntos.

Teorema A.3 Teorema de Rolle: Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b) , tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto interior $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Apéndice B

Demostración del Lema 3.6

Lema B.1 Sean los coeficientes α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ del siguiente cuasipolinomio

$$D(s) = s^n + (\alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n) e^{-sh}$$

definidos por el Teorema 3.5. Entonces, $D(s)$ admite la siguiente factorización:

$$D(s) = (s - s_l)^n \left[1 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\bar{h}} R_{n-1}(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right]. \quad (\text{B.1})$$

Prueba. Primero, por el Teorema 3.5 los coeficientes α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ de $D(s)$ están dados por la ecuación (3.11), por lo que se puede reescribirlos en con la forma matricial

$$L = -S^{-1}(s_l)R(s_l; h)e^{s_l h}. \quad (\text{B.2})$$

donde $L = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n-1} \ \alpha_n]^\top$ para algún $s_l = -\sigma$, $l = 1, 2, \dots, n$. Definiendo $\delta = [1 \ s \ s^2 \ \dots \ s^{n-1}]^\top$ tal que

$$Q(s) = L\delta = -\delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \bar{h})e^{s_l \bar{h}}. \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado, se tiene que

$$\delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; 0) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i s^i s_l^{n-i} = s^n - (s - s_l)^n = P(s) - (s - s_l)^n,$$

despejando $P(s)$ de la expresión anterior

$$P(s) = \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; 0) + (s - s_l)^n. \quad (\text{B.4})$$

Ahora, sustituyendo (B.3) y (B.4) en $D(s)$ se obtiene

$$D(s) = \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; 0) + (s - s_l)^n - \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \bar{h})e^{-(s-s_l)\bar{h}}.$$

Se puede reescribir la ecuación anterior como una integral de la forma

$$\begin{aligned}
D(s) &= (s - s_l)^n + \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; 0) - \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \bar{h})e^{-(s-s_l)\bar{h}} \\
&= (s - s_l)^n - \left[\delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} \right]_0^{\bar{h}} \\
&= (s - s_l)^n - \int_0^{\bar{h}} \frac{d}{d\theta} \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} d\theta. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Para reescribir el término en integral se obtiene la derivada con respecto de θ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} &= \delta^\top S^{-1}(s_l) \frac{d}{d\theta} [R(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta}] \\
&= \delta^\top S^{-1}(s_l) \left[\left(\frac{d}{d\theta} R(s_l; \theta) \right) e^{-(s-s_l)\theta} + R(s_l; \theta) \left(\frac{d}{d\theta} e^{-(s-s_l)\theta} \right) \right] \\
&= \delta^\top S^{-1}(s_l) \left[\left(\frac{d}{d\theta} R(s_l; \theta) \right) - (s - s_l)R(s_l; \theta) \right] e^{-(s-s_l)\theta}.
\end{aligned}$$

Con ayuda de las definiciones por de los lemas 3.2.1 y 3.2.2 se obtiene la siguiente expresión para el término en la integral

$$\frac{d}{d\theta} \delta^\top S^{-1}(s_l)R(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} = -\frac{1}{(n-1)!} (s - s_l)^n R_{n-1}(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta}. \tag{B.6}$$

Así, substituyendo (B.6) en (B.5) se tiene que

$$D(s) = (s - s_l)^n + \int_0^{\bar{h}} \frac{1}{(n-1)!} (s - s_l)^n R_{n-1}(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} d\theta,$$

o bien,

$$D(s) = (s - s_l)^n + \frac{1}{(n-1)!} (s - s_l)^n \int_0^{\bar{h}} R_{n-1}(s_l; \theta)e^{-(s-s_l)\theta} d\theta.$$

Al factorizar $(s - s_l)$ de la expresión anterior se obtiene (B.1). ■

Lemma 3.6:

Prueba. Dado que el cuasipolinomio $D(s)$ satisface al Teorema 3.5 implica que cumple también con el Lema B.1. Por lo tanto $D(s)$ admite la factorización en (B.1). Al integrar por partes a (B.1) se tiene que

$$\begin{aligned}
D(s) &= (s - s_l)^n \left[1 + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{n} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} \Big|_0^{\bar{h}} + \frac{1}{n} (s - s_l) \int_0^{\bar{h}} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right) \right] \\
&= (s - s_l)^n \left[1 + \frac{1}{n!} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} \Big|_0^{\bar{h}} + \frac{1}{n!} (s - s_l) \int_0^{\bar{h}} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right] \\
&= (s - s_l)^n \left[1 + \frac{1}{n!} \underbrace{R_n(s_l; \bar{h})}_0 e^{-(s-s_l)\bar{h}} - \frac{1}{n!} \underbrace{R_n(s_l; 0)}_{n!} + \frac{1}{n!} (s - s_l) \int_0^{\bar{h}} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right] \\
&= (s - s_l)^n \left[1 - 1 + \frac{1}{n!} (s - s_l) \int_0^{\bar{h}} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right] \\
&= (s - s_l)^n \left[\frac{1}{n!} (s - s_l) \int_0^{\bar{h}} R_n(s_l; \theta) e^{-(s-s_l)\theta} d\theta \right].
\end{aligned}$$

De modo que al factorizar el término común se sigue (3.19). ■

Bibliografía

- [1] L. Vite, M. A. Gomez, J. Morales, and S. Mondié, “A new control scheme for time-delay compensation for structural vibration**this work was supported by projects sep-cinvestav 155 and conacyt a1-s-24796.,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, pp. 4804–4809, 2020.
- [2] J. E. Hernández-Díez, S.-I. Niculescu, C.-F. Méndez-Barrios, E. J. González-Galván, and R. Hernández-Molinar, “A transparent bilateral control scheme for a local teleoperation system using proportional-delayed controllers,” in *2016 12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, 2016.
- [3] Y. Kawai, T. Namerikawa, and M. Fujita, “Bilateral teleoperation of wheeled mobile robot with time delay using virtual image robot,” in *2010 IEEE International Conference on Control Applications*, 2010.
- [4] M. Kim, S. Lee, and H. Son, “Effects of time delay on long range formation control for unmanned aerial vehicles,” in *2016 13th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, 2016.
- [5] V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser Boston, 2013.
- [6] J. P. Richard, “Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems,” *Automatica*, vol. 39, pp. 1667–1694, 2003.
- [7] K. Watanabe, E. Nobuyama, and A. Kojima, “Recent advances in control of time delay systems - a tutorial review,” in *35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996.
- [8] H. Wernecke, B. Sándor, and C. Gros, “Chaos in time delay systems, an educational review,” *Physics Reports*, vol. 824, p. 1–40, 2019.
- [9] N. N. Krasovskii, “Stability of motion. applications of lyapunov’s second method to differential systems and equations with delay,” *Stanford University Press*, vol. 48, p. 1–188, 1963.
- [10] I. Estrada-Sánchez, M. Velasco-Villa, and H. Rodríguez-Cortés, “Prediction-based control for nonlinear systems with input delay,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. Volume 2017, p. Article ID 7415418, 2017.

-
- [11] J. Lei and H. K. Khalil, “Feedback linearization for nonlinear systems with time-varying input and output delays by using high-gain predictors,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 61, pp. 2262–2268, 2016.
- [12] J. Lei and H. K. Khalil, “High-gain-predictor-based output feedback control for time-delay nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 71, pp. 324–333, 2016.
- [13] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [14] M. Najafi, S. Hosseinnia, F. Sheikholeslam, and M. Karimadini, “Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors,” *International Journal of Control*, vol. 86, pp. 599–609, 2013.
- [15] O. J. Smith, “Closer control of loops with dead time,” *Chemistry Engineering Progress*, vol. 53, pp. 217–219, 1957.
- [16] Z. J. Palmor, “Time-delay compensation smith predictor and its modifications,” *The Control Handbook*, vol. 1, pp. 224–229, 1996.
- [17] A. Dabroom and H. Khalil, “Output feedback sampled-data control of nonlinear systems using high-gain observers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 1712–1725, 2001.
- [18] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, “Observability and observers for nonlinear systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 32, pp. 975–994, 1994.
- [19] G. Mazanti, I. Boussaada, and S. I. Niculescu, “On qualitative properties of single-delay linear retarded differential equations: Characteristic roots of maximal multiplicity are necessarily dominant,” *arXiv: Optimization and Control*, 2020.
- [20] I. Boussaada and S. I. Niculescu, “On the dominance of multiple spectral values for time-delay systems with applications,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, pp. 55–60, 2018.
- [21] I. Boussaada, H. U. Unal, and S. I. Niculescu, “Multiplicity and stable varieties of time-delay systems : A missing link,” in *22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2016.
- [22] I. Boussaada, S. I. Niculescu, A. El Ati, R. Pérez-Ramos, and K. Liviu Trabelsi, “Multiplicity-induced-dominancy in parametric second-order delay differential equations: Analysis and application in control design,” *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 26, p. 57, 2020.
- [23] G. Mazanti, I. Boussaada, and S. I. Niculescu, “Multiplicity-induced-dominancy for delay-differential equations of retarded type,” *Journal of Differential Equations*, vol. 286, pp. 84–118, 2021.
- [24] W. Michiels and S. I. Niculescu, *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

- [25] T. Balogh, I. Boussaada, T. Insperger, and S. I. Niculescu, “Conditions for stability of time-delay systems with real-rooted plant.” working paper or preprint, July 2021.
- [26] B. E. Meserve, *Fundamental Concepts of Algebra*. Dover Publications, 1982.
- [27] T. Apostol, *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.