



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

**Construcción de figuras durante la resolución de tareas
geométricas. Diferentes casos dentro del entorno de la geometría
dinámica**

Tesis que presenta

Mario Alfredo Mayorga Sánchez

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

Ciudad de México

Julio, 2023



CONAHCYT

CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías por el apoyo económico que me brindó para desarrollar la presente investigación doctoral.

No. de becario: 703591

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Gonzalo Zubieta Badillo por la confianza y apoyo brindados durante estos últimos años. Por permitirme aprender de usted en lo académico y en lo personal, gracias, Dr.

A mis sinodales, los Dres. Álvaro Bustos Rubilar, Víctor Larios Osorio, Hugo Rogelio Mejía y Luis Moreno Armella, por sus observaciones y consejos para mejorar este trabajo.

Al personal administrativo del Departamento de Matemática Educativa. En particular a Adriana Parra por su atención y amabilidad siempre que necesité su ayuda, gracias, Adri.

Agradezco a la vida por permitirme conocer y compartir con personas maravillosas durante este periodo. Compañeros y amigos que me enseñaron que más allá de lo brillante que es su talento, son personas extraordinarias.

Dedico este trabajo a mi familia, por ellos y para ellos, siempre.

CONTENIDO

| | |
|--------------------|------|
| RESUMEN | xiii |
| ABSTRACT | xiv |
| PRESENTACIÓN | xv |

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

| | |
|---|----|
| 1.1 Investigaciones referentes a la figura geométrica..... | 1 |
| 1.2 Definición del término figura geométrica | 4 |
| 1.2.1 <i>Figura como representación mental</i> | 4 |
| 1.2.2 <i>Figura como organización de trazos</i> | 5 |
| 1.2.3 <i>Figura como el conjunto referente-dibujo</i> | 6 |
| 1.2.4 <i>¿Cómo se relacionan estas definiciones?</i> | 6 |
| 1.3 Representación gráfica en geometría..... | 7 |
| 1.3.1 <i>Representación externa e icónica de una figura</i> | 7 |
| 1.3.2 <i>Niveles de representación</i> | 8 |
| 1.3.3 <i>Estructura de las figuras geométricas</i> | 9 |
| 1.4 Razonamiento geométrico | 11 |
| 1.5 Funciones de la figura geométrica..... | 12 |
| 1.5.1 <i>Función heurística de la figura geométrica</i> | 13 |
| 1.5.2 <i>Interacciones con diagramas</i> | 14 |
| 1.6 Planteamiento del problema | 15 |
| 1.6.1 <i>Objetivo general de la investigación</i> | 16 |
| 1.6.2 <i>Preguntas de investigación</i> | 17 |

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

| | |
|--|----|
| 2.1 Visualización de una figura | 19 |
| 2.2 Deconstrucción en geometría | 21 |
| 2.2.1 <i>Deconstrucción instrumental</i> | 21 |
| 2.2.2 <i>Deconstrucción dimensional</i> | 21 |

| | |
|--|----|
| 2.3 Tipos de razonamiento en geometría..... | 22 |
| 2.4 Relación entre el registro verbal y el gráfico..... | 24 |
| 2.5 Instrumentos para la construcción de figuras | 25 |
| 2.6 Geometría dinámica para la construcción de figuras | 26 |
| 2.6.1 <i>El lugar geométrico</i> | 27 |

CAPÍTULO 3 MÉTODO

| | |
|---|----|
| 3.1 Tipo de investigación | 35 |
| 3.2 Participantes del estudio | 36 |
| 3.2.1 <i>Participantes de la primera etapa</i> | 36 |
| 3.2.2 <i>Participantes de la segunda etapa</i> | 37 |
| 3.3 Recolección de datos y forma de trabajo..... | 38 |
| 3.3.1 <i>Primera etapa</i> | 38 |
| 3.3.2 <i>Segunda etapa</i> | 39 |
| 3.4 Selección y objetivo de las tareas propuestas | 40 |
| 3.4.1 <i>Tareas de la primera etapa</i> | 40 |
| 3.4.2 <i>Tareas de la segunda etapa</i> | 47 |

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

| | |
|----------------------------|----|
| 4.1 Primera etapa | 55 |
| 4.1.1 <i>Tarea 1</i> | 55 |
| 4.1.2 <i>Tarea 2</i> | 60 |
| 4.1.3 <i>Tarea 3</i> | 66 |
| 4.1.4 <i>Tarea 4</i> | 72 |
| 4.1.5 <i>Tarea 5</i> | 79 |
| 4.2 Segunda etapa..... | 85 |
| 4.2.1 <i>Tarea 1</i> | 85 |
| 4.2.2 <i>Tarea 2</i> | 90 |
| 4.2.3 <i>Tarea 3</i> | 96 |

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

| | |
|---|-----|
| 5.1 Resumen de resultados | 103 |
| 5.1.1 <i>Primera etapa</i> | 103 |
| 5.1.2 <i>Segunda etapa</i> | 104 |
| 5.2 Respuesta a las preguntas de investigación | 105 |
| 5.3 Reflexiones finales | 110 |
| 5.3.1 <i>Aportes principales y proyección hacia el futuro</i> | 111 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 115 |

RESUMEN

La investigación que se reporta en esta tesis es referente a los procesos de construcción de figuras presentados durante la solución de tareas con geometría dinámica. El trabajo se llevó a cabo con seis estudiantes de maestría del departamento de Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN. El acopio de la información se estableció en dos etapas: en la primera, tres estudiantes resolvieron cinco tareas cuya característica principal fue la construcción de figuras a partir de ciertas unidades que las conforman (lados, vértices, ángulos, etc.); mientras que, en la segunda, se plantearon tres nuevas tareas a tres nuevos resolutores, donde la actividad principal fue la reproducción de figuras a partir de una imagen inicial y justificar una relación entre los elementos de cada construcción.

Para el análisis de los datos, se consideraron los primeros acercamientos de los estudiantes con las figuras que pretendían construir, a través de la visualización que hacían sobre ellas. Después, se caracterizaron los elementos teóricos y prácticos que utilizaron para la resolución de las tareas propuestas, mediante el tipo de deconstrucción que hacían sobre una figura inicial; y se mencionan cuáles fueron los tipos de razonamientos observados durante el trabajo de los estudiantes.

Los resultados señalan que más allá del nivel académico de un individuo, los argumentos que presenta para justificar un protocolo de construcción están relacionados de manera directa con la herramienta que utiliza. Al respecto, la geometría dinámica jugó un papel heurístico como apoyo a las ideas de los estudiantes, en el sentido de que exploraron y modificaron diferentes figuras, para reactivar conocimientos previamente adquiridos o para validar propiedades dentro de sus construcciones.

Como aporte a la disciplina, en esta investigación se puede encontrar un estado del arte en el que se enmarcan los principales estudios referentes a la figura geométrica; el análisis de diferentes casos donde las figuras construidas jugaron un papel importante antes y durante la resolución de tareas en geometría euclidiana; y se muestra cómo con el uso de softwares como GeoGebra, se amplía la gama de figuras y soluciones que se pueden presentar, ya que, con herramientas como el *lugar geométrico*, por ejemplo, se desarrollaron protocolos de construcción distintos y más precisos que los que se podrían establecer con papel y lápiz.

ABSTRACT

The research that is reported in this thesis refers to the processes of construction of figures presented during the solution of tasks with dynamic geometry. The work was carried out with six master's students from the Department of Educational Mathematics at Cinvestav-IPN. The collection of information was established in two stages: in the first, three students solved five tasks whose main characteristic was the construction of figures from certain units that make them up (sides, vertices, angles, etc.); while, in the second, three new tasks were posed to three new solvers, where the main activity was the reproduction of figures from an initial image and justifying a relationship between the elements of each construction.

For the analysis of the data, the first approaches of the students with the figures they intended to build were considered, through the visualization they made of them. Afterwards, the theoretical and practical elements that they used to solve the proposed tasks were characterized, through the type of deconstruction that they did on an initial figure; and the types of reasoning observed during the student's work are mentioned.

The results indicate that beyond the academic level of an individual, the arguments that he presents to justify a construction protocol are directly related to the tool he uses. In this regard, dynamic geometry played a heuristic role in supporting the ideas of the students, in the sense that they explored and modified different figures, to reactivate previously acquired knowledge or to validate properties within their constructions.

As a contribution to the discipline, in this research you can find a state of the art in which the main studies referring to the geometric figure are framed; the analysis of different cases where the constructed figures played an important role before and during the resolution of tasks in Euclidean geometry; and it shows how with the use of software such as GeoGebra, the range of figures and solutions that can be presented is expanded, since, with tools such as the locus, for example, different and more precise construction protocols were developed than those that could be laid out with pen and paper.

PRESENTACIÓN

A partir de una investigación previa donde se caracterizó el papel de las figuras que acompañan a la proposición de una tarea (Mayorga-Sánchez, 2017), se propuso un nuevo estudio en el que se analizaran aquellas figuras que se construyen antes y durante la resolución de una tarea. El trabajo se desarrolló en dos etapas con estudiantes de maestría, quienes utilizaron GeoGebra como herramienta de exploración, construcción y validación.

En la primera etapa, se propuso a tres estudiantes la resolución de cinco tareas en las cuales se solicitó la construcción de figuras a partir del conocimiento de ciertas unidades que las componían (lados, vértices, ángulos, etc.). La información se obtuvo a través de videoconferencias, registrando los protocolos de construcción en GeoGebra y las expresiones verbales de los estudiantes. Los resultados principales se presentaron para una evaluación predoctoral, donde investigadores especializados en las áreas de geometría y tecnología sugirieron acciones para enriquecer la investigación.

En la segunda etapa, tres nuevos resolutores trabajaron con tres tareas diferentes sobre construcciones geométricas. Esta vez se buscó que los estudiantes pudieran reproducir diferentes figuras no solo a partir de una proposición, sino también de una representación. Además del trabajo realizado en GeoGebra, se registraron los argumentos que presentaron los estudiantes para justificar propiedades específicas de las figuras que construyeron.

Con la información obtenida en ambas etapas, se estructuró el presente documento en cinco capítulos, cuyo contenido se describe a continuación:

En el primer capítulo se presenta una revisión bibliográfica que expone cómo ha sido estudiada la figura geométrica a través de los años por diferentes investigadores. Se describen algunas de las definiciones y caracterizaciones que se han hecho sobre la figura geométrica y su representación gráfica. Después, se mencionan algunos estudios referentes al tipo de razonamiento involucrado durante la interacción con figuras geométricas y la función de estas figuras durante la resolución de una tarea. Finalmente, con base en los antecedentes señalados, se presentan el problema y objetivo general de la investigación, así como las preguntas planteadas para responder al finalizar el proyecto.

En el segundo capítulo se muestra el marco teórico de referencia para el análisis de la información obtenida, así como los elementos conceptuales que sirvieron para comprender el entorno de la investigación. En primer lugar, se describe el trabajo de Duval (2005) referente a las formas de visualizar y deconstruir una figura geométrica. Después, se señalan los posibles razonamientos presentes durante el trabajo geométrico de los estudiantes (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001) y la relación entre los registros gráfico y verbal durante este proceso. Finalmente, se subraya el papel de los instrumentos involucrados en la construcción de figuras (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2015; y Artigue, 2002), particularmente, el de la geometría dinámica con herramientas como el lugar geométrico (Gomez-Chacon, Botana, Escribano y Abánades, 2016).

En el tercer capítulo se exponen los elementos metodológicos de la investigación. Primero, se menciona el tipo de estudio que se desarrolló con base en la población y el entorno en el que se trabajó. Después, se describen los antecedentes académicos y profesionales de los participantes del proyecto, así como la forma en que se trabajó con ellos durante la aplicación de las tareas. Finalmente, se muestran las tareas aplicadas en ambas etapas, señalando su propósito y una posible solución para cada una.

En el cuarto capítulo se analiza y discute la información obtenida, tomando en cuenta las acciones, conductas y protocolos de construcción de los estudiantes. Se consideran las formas de visualización hacia las figuras que se propusieron construir; así como la deconstrucción que hicieron sobre una figura inicial, para reconstruirla a partir de los elementos que identificaron en ella (Duval, 2005). Además, en el análisis se incluyen los tipos de razonamientos identificados durante el trabajo de los estudiantes con las tareas propuestas (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001).

Por último, en el quinto capítulo se presenta un resumen de los resultados obtenidos con base en el análisis de la información. También, se explica cómo ha sido alcanzado el objetivo general y se responden las preguntas de investigación. Finalmente, se exponen las reflexiones finales del trabajo teniendo en cuenta los aportes a la matemática educativa y una proyección hacia investigaciones futuras.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La figura geométrica ha sido estudiada a lo largo de los años por diversos investigadores en educación matemática. Existen estudios enfocados en la definición y características de una figura geométrica, su representación gráfica, el razonamiento geométrico de los individuos al interactuar con ella y aquellos que describen las funciones de la figura durante la resolución de una tarea. Considerando la revisión bibliográfica realizada en revistas de matemática educativa, libros y memorias de diferentes congresos dentro de la disciplina, en este capítulo se presentan los principales aportes de estudios referentes a la figura geométrica y con base en ello, el planteamiento del problema de la presente investigación.

1.1 Investigaciones referentes a la figura geométrica

Para conocer los antecedentes de investigación relacionados con la figura geométrica y sus principales características, se hizo una revisión bibliográfica de las revistas con mayor índice de aceptación dentro de la matemática educativa, según la clasificación presentada por Williams y Leatham (2017). En esta clasificación se consideran la frecuencia con la que se citan diferentes revistas de la disciplina y las opiniones de expertos respecto a la calidad de las publicaciones que en ellas se presentan. Tomando en cuenta estos dos factores, los autores presentan un listado de las 20 revistas con mayor índice de aceptación, cuyos trabajos han sido citados a nivel mundial y considerados referentes para el desarrollo de múltiples investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Particularmente, parte de la revisión bibliográfica de esta investigación se basa en las primeras 10 revistas de la clasificación de Williams y Leatham (2017), donde se analizaron las publicaciones de las últimas tres décadas y se rescataron aquellas que hacían referencia a la figura geométrica y alguna de sus características (Tabla 1).

Tabla 1. Clasificación de Williams y Leatham considerada en esta investigación.

| Clasificación | Revista |
|----------------------|--|
| 1 | Educational Studies in Mathematics (ESM) |
| 2 | Journal for Research in Mathematics Education (JRME) |
| 3 | Journal of Mathematical Behavior (JMB) |
| 4 | For the Learning of Mathematics (FLM) |
| 5 | Mathematical Thinking and Learning (MTL) |
| 6 | Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE) |
| 7 | Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM; The International Journal on Mathematics Education) |
| 8 | Mathematics Education Research Journal (MERJ) |
| 9 | International Journal of Math Education in Science and Technology (IJMEST) |
| 10 | International Journal of Science and Mathematics Education (IJSME) |

Cabe señalar que la clasificación anterior es de publicaciones escritas en inglés, dada la importancia de este idioma a nivel mundial. Sin embargo, para esta investigación también se consideraron publicaciones escritas en español, libros de matemática educativa y trabajos presentados en congresos referentes al estudio de la figura geométrica. En la tabla 2 se presenta un resumen de los aportes referentes a la figura geométrica que se encontraron en cada una de las publicaciones que se revisaron.

Tabla 2. Principales aportes de la bibliografía revisada.

| Revista | Autor (s) | Año | Aporte |
|----------------|----------------------------|-------------|---|
| ESM | Parzys | 1988 | Niveles de representación de una figura. |
| ESM | Gagatsis y Patronis | 1990 | Uso de modelos geométricos para estimular un pensamiento reflexivo. |
| ESM | Fischbein | 1993 | Definición y propiedades conceptuales y figurales. |
| ESM | Chen y Herbst | 2013 | Interacción entre los gestos, el discurso y los diagramas en el razonamiento geométrico de los estudiantes. |
| ESM | Mithalal, Balacheff | 2019 | Actividades en entornos de geometría dinámica en 3D para reducir la brecha entre las deconstrucciones instrumental y dimensional. |

| | | | |
|---|---------------------------------------|-------------|--|
| JRME | Dimmel y Herbst | 2015 | Estructura semiótica de los diagramas geométricos. |
| JMB | Mesquita | 1998 | Obstáculos conceptuales vinculados a la representación externa en geometría |
| FLM | Nunokawa | 1994 | Función heurística de los diagramas en resolución de problemas. |
| FLM | Komatsu | 2014 | Problemas de prueba con diagramas. |
| JMTE | Stylianou | 2010 | Concepciones de los docentes sobre la representación en matemáticas. |
| ZDM | Herbst | 2004 | Interacciones con diagramas. |
| ZDM | Duval | 2014 | Visualización de la figura en geometría. |
| IJMEST | Panaoura | 2014 | Interrelaciones del rendimiento cognitivo en geometría y las creencias de autoeficacia sobre el uso de representaciones. |
| IJSME | Gómez y Kuzniak | 2015 | Efecto de un entorno dinámico en las relaciones entre los génesis figural, instrumental y discursivo. |
| IJSME | Lee y Wu | 2018 | Movimientos oculares en la integración de texto y figuras geométricas. |
| EDUCACIÓN MATEMÁTICA | Guirette y Zubieta | 2010 | Lectura y construcción de figuras geométricas realizadas por profesores. |
| RELIME | Acuña | 2010 | Funciones figurales y epistémicas de los dibujos. |
| RELIME | Michael-Chrysanthou y Gagatsis | 2014 | Formas de ver las figuras geométricas. |
| CERME2 | Maracci p.478 | 2001 | Dibujos en el proceso de resolución de problemas. |
| CERME2 | Robotti p.564 | 2001 | Verbalización como mediador entre aspectos teóricos y figurales. |
| CERME5 | Gobert p.121 | 2007 | Sobre el planteamiento de problemas, distinguiendo el significante del referente de una figura. |
| CERME6 | Deliyianni, et al. p.696 | 2009 | Comprensión de la figura geométrica por estudiantes de secundaria. |
| CERME7 | Deliyianni, et al. p.696 | 2011 | Comprensión de la figura geométrica por estudiantes de bachillerato. |
| PME14 | Ferrari p.217 | 1992 | Interacciones entre figura y estrategia en resolución de problemas. |
| PME-NA25 | Elia, Gagatsis p.349 | 2003 | Entendimiento de las formas geométricas por niños pequeños. |
| La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación | Acuña | 2012 | Revisión bibliográfica de investigaciones referentes a la visualización de representaciones en matemática educativa. |
| Meaning in Mathematics Education | Laborde | 2005 | Relaciones entre el dominio de los diagramas en entornos de papel y lápiz o software y el dominio de los objetos teóricos de la geometría. |

| | | | |
|---|--------------------------|-------------|--|
| Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education | Duval | 1995 | Tipos de aprehensión de una figura geométrica. |
| Recherches en Didactique des Mathématiques | Laborde y Copponi | 1994 | Distinción entre dibujo y figura geométrica. |

Con base en esta revisión bibliográfica se destacaron cuatro subtemas que enmarcan las características principales de la figura geométrica: definición de una figura geométrica, representación gráfica de una figura, razonamiento geométrico y función de una figura geométrica. En los siguientes apartados se describirán estos subtemas, destacando los trabajos referentes a cada uno y la relación de estos trabajos con la presente investigación.

1.2 Definición del término figura geométrica

Dentro de las investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de la geometría es común que se adopte una postura sobre lo que se entiende por el término figura geométrica. En este apartado se muestran tres de las principales definiciones que se han introducido sobre este término, las relaciones entre estas definiciones y lo que en adelante se entenderá por figura geométrica cuando se mencione en este trabajo.

1.2.1 Figura como representación mental

Fischbein (1993) distingue tres tipos de representaciones mentales: *conceptos*, *imágenes mentales* y *conceptos figurales*. Los conceptos son aquellas ideas abstractas que representan a un conjunto de objetos o eventos con propiedades como idealidad y exactitud; por otro lado, las imágenes mentales son representaciones sensoriales de un objeto o evento con propiedades espaciales como extensión, forma, ubicación y magnitud. El autor ejemplifica estas representaciones considerando la idea de un metal: como concepto, un metal nos evoca a un grupo de materiales con propiedades en común (dureza, conductividad térmica o eléctrica, etc.); pero como imagen, un metal nos evoca a un objeto particular con propiedades espaciales y visuales específicas (forma, color, tamaño, etc.).

El tercer tipo de representaciones mentales son los conceptos figurales. En estas representaciones se integran tanto las propiedades de un concepto como las de una imagen. El autor afirma que los conceptos figurales son lo que comúnmente se conoce como figuras

geométricas. Por ejemplo, objetos geométricos como un punto, un círculo o una línea recta poseen propiedades conceptuales como generalidad, abstracción y perfección absoluta. Sin embargo, también tienen propiedades espaciales como forma, ubicación y magnitud, de aquí la afirmación de que una figura geométrica trabaja de manera conjunta con propiedades de un concepto y de una imagen.

Evidentemente, acceder de manera independiente a las propiedades conceptuales y espaciales de un concepto figural no es una tarea sencilla. Se debe realizar un esfuerzo didáctico para conducir a los estudiantes hacia una interpretación de la figura como un constructo teórico-espacial, por lo que la participación de los profesores es indispensable en la búsqueda y diseño de actividades que permitan distinguir las propiedades de una figura y sus diferentes tratamientos.

1.2.2 Figura como organización de trazos

Duval (1995) considera que una figura es una organización de contrastes de brillo, los cuales son percibidos por la presencia de trazos y manchas regidas por las leyes Gestalt¹ y señales perceptivas. Para hacer una distinción entre la percepción visual de una imagen y la de una figura, el autor menciona que, “la imagen retinal resulta de estímulos y la figura percibida resulta de su organización” (p. 142). Particularmente, la organización de una figura geométrica está vinculada a restricciones internas determinadas por las condiciones iniciales de una definición o de un problema. Estas restricciones pueden dar la pauta para resolver el problema o encontrar la idea principal para probar un resultado.

El objetivo principal de Duval (1995) es mostrar el papel heurístico de una figura geométrica durante la resolución de una tarea. Para alcanzar este objetivo, el autor introduce la definición de cuatro aprehensiones cognitivas: *perceptual*, *secuencial*, *discursiva* y *operativa*. Las características de estas aprehensiones y su relación con la figura geométrica serán descritas en el apartado 1.5, correspondiente a las funciones de una figura.

¹ Principios que caracterizan las formas de percibir una representación gráfica: figura-fondo, semejanza, proximidad, cerradura, continuidad y simetría, (Acuña, 2012).

1.2.3 Figura como el conjunto referente-dibujo

Uno de los principales aspectos que se han discutido en torno a la figura geométrica es la distinción entre un dibujo y el objeto geométrico al que representa. Laborde y Capponi (1994) señalan que un dibujo es una identidad material sobre un soporte (papel o computadora, por ejemplo), la cual actúa como un significante de un referente. En estos términos, el referente es un objeto geométrico determinado teóricamente a través de axiomas y definiciones; mientras que el significante es la representación material de dicho referente. Con base en lo anterior, los autores definen a la figura geométrica como un conjunto de pares, cuyos componentes son un referente geométrico y uno de los posibles dibujos que lo representan.

Las relaciones entre el dibujo y su referente son construidas e interpretadas por quien produce o lee el dibujo, así, el significado de una figura geométrica es determinado por quien interactúa con ella. Por ejemplo, si se habla de una circunferencia como dibujo, basta con considerar el trazo de una forma circular; pero si se quiere considerar a la circunferencia como figura geométrica, se deben tener en cuenta sus propiedades matemáticas.

1.2.4 ¿Cómo se relacionan estas definiciones?

Las definiciones descritas anteriormente comparten una dualidad en común. Por un lado, en ellas se involucra un aspecto teórico, el cual vincula a las propiedades conceptuales descritas por Fischbein (1993), las restricciones de organización mencionadas por Duval (1995) y el referente descrito por Laborde y Capponi (1994). Este aspecto teórico se establece mediante axiomas, teoremas y definiciones de la teoría geométrica con la que se trabaja. Al respecto, tanto en las investigaciones anteriores como en la que aquí se presenta, los elementos geométricos con los que se trabaja pertenecen a la geometría euclidiana.

El otro aspecto que caracteriza a las definiciones de la figura geométrica tiene que ver con su representación gráfica. La forma en que se plasman las propiedades de un objeto o una situación geométrica sobre un soporte material está vinculada con las propiedades espaciales descritas por Fischbein (1993). Estas propiedades son representadas a través de los trazos organizados mencionados por Duval (1995) o la definición de dibujo establecida por Laborde y Capponi (1994).

El objeto de estudio de la presente investigación son las construcciones geométricas elaboradas por estudiantes de maestría dentro del entorno de la geometría dinámica. Por lo tanto, en adelante, cuando se utilice el término *figura geométrica*, se estará haciendo referencia a las construcciones hechas por los estudiantes con base en las condiciones establecidas en las tareas que se les propusieron.

1.3 Representación gráfica en geometría

Acuña (2010) menciona que, “las representaciones, en el aprendizaje de la geometría, tienen un papel destacado debido a que, es a través de ellas que podemos tener acceso a los llamados objetos geométricos” (p. 117). En este sentido, las representaciones de objetos y situaciones geométricas tienen la finalidad de que algunas de sus características y propiedades sean percibidas visualmente. Se entiende el término “representar” en su sentido clásico, donde *algo* ocupa el lugar de *otro algo* (Duval, 1995). En este caso, el *algo* es una figura representada gráficamente; mientras que el *otro algo* son los objetos geométricos que representan las figuras. En los párrafos siguientes se analizarán las diferentes formas en que se han considerado las representaciones en geometría dentro de algunas investigaciones especializadas en el tema.

1.3.1 Representación externa e icónica de una figura

Mesquita (1998) utiliza el término *figura* como sinónimo de *representación* en geometría. La autora distingue dos tipos de representaciones: *externa e icónica o figurativa*. La representación externa es aquella que se materializa en un papel u otro soporte; mientras que la representación figurativa está determinada por una imagen visual que se evoca al conocer el nombre o definición del objeto que se representa.

La representación figurativa puede apoyar la intuición de las personas, es decir, ayuda a visualizar las relaciones entre los elementos de los objetos geométricos que se representan. Sin embargo, con esta representación no es posible distinguir los elementos o condiciones iniciales que se proponen en una tarea (lo que se da), de los elementos que se desean mostrar al finalizar dicha tarea (la conclusión). Además, es importante considerar que, el apoyo visual que brinda una representación figurativa a la intuición puede resultar contraproducente, ya

que las relaciones geométricas pueden resultar "evidentes" para los estudiantes, evitando que desarrollen un razonamiento geométrico².

Por otro lado, aunque una representación externa, por sí misma, no permite acceder a la solución de un problema, puede contribuir en la definición de su estructura y facilitar sus tratamientos. Además, existe un grado de ambigüedad a la hora de identificar los objetos de una representación externa. Por ejemplo, el dibujo de una línea recta puede considerarse, dependiendo de la situación, como la representación de una recta infinita, una semirrecta o un segmento de recta. Por lo tanto, resulta necesario hacer explícitas las características y propiedades de los objetos representados a través de otros registros, específicamente, el verbal o el escrito.

1.3.2 Niveles de representación

Parzysz (1988) propuso que, “la figura es el objeto geométrico que se describe en el texto que lo define” (p. 80). Con esta definición se sugiere que una figura es un objeto dentro de la teoría de la Geometría, cuyas características son conocidas a través de una definición escrita. Lo anterior señala una necesidad de exteriorizar lo que se sabe de un objeto geométrico (propiedades, relaciones con otros objetos, etc.) a través de un proceso de representación.

El autor desarrolla su estudio con base en la distinción de dos tipos de representaciones gráficas: dibujos y modelos. Los primeros se refieren a las representaciones de figuras bidimensionales que pertenecen a la geometría plana; mientras que los segundos, son las representaciones de objetos geométricos tridimensionales estudiados en la geometría espacial. La relación que existe entre una figura y su representación es descrita mediante los siguientes niveles:

- *Nivel 1 (representación cercana)*: donde la representación se asemeja a la figura representada en el sentido de que ambas son de igual dimensión. Lo anterior permite un movimiento de lo abstracto a lo concreto.

- *Nivel 2 (representación distante)*: donde la dimensión de la representación es estrictamente inferior a la del objeto que representa, por lo que se requiere una interpretación

² En el apartado 1.4 se profundiza en la descripción de este término.

y análisis adicional a la percepción visual, para caracterizar las propiedades geométricas de dicho objeto.

En toda representación de un objeto geométrico existe, necesariamente, una pérdida de información cuando se avanza de un nivel a otro (ilustración 1). Por ejemplo, en el nivel 1 no se pueden mostrar todas las propiedades de una figura en su representación, aunque ésta sea de la misma dimensión que el objeto geométrico representado. Lo anterior se debe a que algunas propiedades de la figura son sobreentendidas por quien lee la representación, gracias a una cultura geométrica común con quien la crea.

| | | Geometría | |
|-------------------------|---------|-----------|--------|
| | | 2D | 3D |
| | nivel 0 | figura | |
| Representación cercana | nivel 1 | dibujo | modelo |
| Representación distante | nivel 2 | X | dibujo |

Perdida
de
información




Ilustración 1. Niveles de representación (Parzysz, 1988, p.80).

Las figuras geométricas con las que se trabajó en el presente estudio son parte de las representaciones que Parzysz (1988) define como *dibujos*, ya que todas las configuraciones que se propusieron eran correspondientes a objetos geométricos bidimensionales. Por lo tanto, las construcciones que realizaron los estudiantes corresponden al nivel de representación 1 (*representaciones cercanas*), ya que tenían la misma dimensión que los objetos geométricos que se representaron.

1.3.3 Estructura de las figuras geométricas

Dimmel y Herbst (2015) señalan la necesidad de establecer una alfabetización visual para apoyar la lectura de lo que una figura geométrica pretende comunicar. El término alfabetización visual se refiere a la conceptualización de las unidades y señalamientos inmersos en las figuras geométricas. Con el propósito de promover dicha alfabetización, los autores introducen un catálogo semiótico donde caracterizan la estructura de las figuras geométricas y los recursos visuales que contienen para transmitir información.

El catálogo semiótico se realizó considerando a las figuras geométricas como textos esquemáticos y en este sentido, se analizaron de manera análoga a la forma en que se analizan los constructos lingüísticos. La lingüística funcional sistémica vincula una expresión lingüística con los significados interpretados en contextos de uso, análogamente, dentro de una figura geométrica se pueden distinguir diferentes sistemas semióticos que transmiten significados dependiendo de los elementos que la compongan. En particular, los autores describen cuatro sistemas semióticos:

El sistema tipo. En este sistema se toman en cuenta las partes visibles que componen una figura. Se consideran los trazos que la conforman (rectos o curvos), las regiones delimitadas por la figura, los puntos señalados (aislados o como parte de un elemento) y los símbolos que expresan nombres, medidas o relaciones entre los elementos.

El sistema de posición. En este sistema se describen las relaciones espaciales entre los componentes de una figura. Es decir, se considera la forma en que se colocan las partes de una figura en relación con las otras; y en relación con el marco de referencia que se utilice.

El sistema de prominencia. En este sistema se considera el grado de énfasis que se pone en los elementos de una figura dependiendo de lo que se desee transmitir. El sistema cuenta con dos subsistemas: *énfasis* y *diferencia*. El *énfasis* señala las partes resaltadas en una figura, mediante opciones de peso (para trazos), tamaño (para puntos) y transparencia (para regiones); por otro lado, el subsistema de *diferencia* señala la pertenencia a diferentes categorías a través de variaciones de color, patrón de los trazos, relleno de puntos y efectos de fuente para los símbolos.

Sistema de atributos. Es una colección de símbolos con los cuales la figura transmite, explícita y directamente, las propiedades del objeto que representa. Los atributos pueden ser relacionales, existenciales u operativos. Los relacionales son las marcas o etiquetas que transmiten alguna relación entre los elementos de la figura (marcas de congruencia por ejemplo); los existenciales se refieren a los fenómenos que son reconocidos simplemente por el hecho de “estar”, por ejemplo, al colocar una flecha al final de un trazo recto, se le atribuirán las propiedades de una semirrecta (o recta si se utilizan dos flechas); y por último,

los atributos operativos son propios del discursos matemáticos que transmiten un proceso, generalmente algebraico, que se debe desarrollar para conocer una propiedad de la figura.

En las figuras que fueron construidas para el presente trabajo se pueden observar la mayoría de los componentes considerados en los sistemas semióticos descritos por Dimmel y Herbst (2015). Aunque el objetivo de la investigación no es distinguir cada uno de estos componentes, el catálogo semiótico resulta útil para considerar los recursos que utilizaron los estudiantes al construir sus figuras y lo que pretendían transmitir al presentar sus resultados.

1.4 Razonamiento geométrico

Samper, Leguizamón y Camargo (2001) mencionan que, “probablemente no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar y discutir el concepto y el papel del razonamiento [...] en matemáticas” (p. 147). Al respecto, Mariotti (1995), con base en la definición de conceptos figurales de Fischbein (1993), menciona que, “el razonamiento geométrico se puede interpretar en términos de un proceso dialéctico entre lo figurativo y lo conceptual” (p.94). Por su parte, Hjelte, Schindler y Nilsson (2020) mencionan que el razonamiento geométrico sirve para comprender y explicar lo que sucede cuando se trabaja con tareas geométricas, relacionando diferentes entidades como objetos geométricos y diagramas. En este sentido, se puede interpretar el razonamiento geométrico como la capacidad de los individuos para relacionar los aspectos teóricos y representacionales que se involucran en la proposición de una tarea o un problema en geometría.

Para Mariotti (1995), la interacción entre elementos teóricos y representacionales de una figura geométrica puede representar un reto desde la perspectiva de los estudiantes, por lo que es importante contar con herramientas para rastrear y describir el desarrollo de este tipo de razonamiento. Al respecto, Duval (1998) propone tener en cuenta tres procesos cognitivos involucrados en el desarrollo del razonamiento geométrico: *visualización*, donde tiene lugar la representación visual de una proposición geométrica; *construcción*, a través del uso de herramientas; y *razonamiento*, donde entran en juego acciones discursivas para la comunicación del conocimiento, la explicación y la prueba.

Como lo menciona Jones (1998), es importante tener claro qué se entiende por razonamiento geométrico y cómo se describe su desarrollo. En la presente investigación se adopta la postura de Samper, Leguizamón y Camargo (2001), quienes consideran a los procesos de razonamiento como “todas las acciones que las personas realizan, para comunicar y explicar a otros y a ellos mismos lo que ven, lo que piensan y lo que concluyen” (p. 148). Particularmente, los autores describen el razonamiento en geometría con las siguientes características:

- establecer relaciones entre conceptos o información geométrica conocida;
- argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica;
- comprender los distintos elementos que conforman una teoría geométrica;
- dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos;
- comunicar, en forma convincente los resultados de indagaciones en geometría.

En el capítulo 2 se describirán los posibles razonamientos presentes durante el trabajo geométrico de los individuos (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001). Particularmente, el razonamiento geométrico de los participantes de esta investigación se caracterizó tomando en cuenta las construcciones geométricas que realizaron, así como las expresiones verbales y escritas que manifestaron al interactuar con las figuras que se les propuso construir.

1.5 Funciones de la figura geométrica

La figura, pensada como un sistema de signos gráficos, siempre ha acompañado al pensamiento, estableciendo una estrecha relación con los objetos geométricos (Mariotti, 1996). El papel que juega la figura geométrica para apoyar el razonamiento geométrico de un individuo ha sido analizado en diferentes investigaciones (Gagatsis y Patronis, 1990; Nunokawa, 1994; Chen y Herbst, 2013). La mayoría de ellas coincide en que una de las funciones básicas de la figura tiene que ver con su capacidad de ilustrar objetos o situaciones geométricas y sus relaciones, es decir, la figura traduce a un registro gráfico la proposición verbal o escrita de una tarea (función descriptiva).

Por otro lado, las investigaciones referentes al papel de la figura también tienen como uno de sus objetivos principales estudiar su función heurística. El propósito de esta función

es fomentar un pensamiento reflexivo³ en los estudiantes durante la resolución de una tarea geométrica. En los siguientes párrafos se describirán con más detalle estas funciones y se mencionará cuáles de ellas pueden observarse en los resultados de esta investigación.

1.5.1 Función heurística de la figura geométrica

Duval (1995) sugiere que la figura geométrica puede jugar un papel heurístico durante la resolución de una tarea. Desde este punto de vista, la figura geométrica puede ayudar a encontrar la idea principal de una prueba o apoyar la solución de un problema, dependiendo de los cambios o acciones que se realicen sobre ella. Para describir el papel heurístico de la figura geométrica, el autor considera su tratamiento como una aprehensión cognitiva, y define cuatro formas en las que esta aprehensión se presenta:

Aprehensión perceptual. Es la manera en que un individuo reconoce una figura a primera vista. Se puede identificar con un nombre (línea, punto, círculo, etc.), e incluso identificar subfiguras que no necesariamente dependen de su construcción.

Aprehensión secuencial. Es requerida siempre que se deba construir una figura o describir su construcción. La organización de los trazos no depende de una aprehensión perceptual, sino de restricciones técnicas que cambian dependiendo de la herramienta de construcción, y las propiedades matemáticas involucradas en la figura.

Aprehensión discursiva. Las propiedades matemáticas de una figura son dadas en primera instancia por un discurso (proposición, denominación o hipótesis) y otras se derivan de las relaciones entre las propiedades dadas. En este sentido, lo que una figura muestra (aprehensión perceptiva) es lo que se ve sin un análisis a conciencia; mientras que lo que una figura representa está determinado por actos discursivos.

Aprehensión operatoria. La aprehensión operatoria surge a través de la modificación de una figura, la cual ayuda a generar ideas para la solución de un problema. Se destacan tres formas en las que una figura puede ser modificada: *mereológica*, *óptica* y *de lugar*. La

³ Proceso en el que un sujeto observa un procedimiento (mental, mecánico o natural) e intenta entenderlo y/o explicarlo a otros. Por lo tanto, el pensamiento reflexivo no solo indica el progreso en la solución de un problema, sino también el grado de conciencia que se adquiere sobre el proceso de solución (Gagatsis y Patronis, 1990).

primera se refiere a la división de una figura en partes que pueden ser analizadas por separado para la generación de nuevas figuras o subfiguras. La segunda se refiere a las modificaciones visuales que se pueden realizar sobre la figura (alargar, ensanchar, reducir, etc.). Por último, la modificación de lugar se refiere al cambio de posición u orientación de una figura.

Las modificaciones de una aprehensión operatoria se pueden presentar física o mentalmente, y constituyen el proceso en el que una figura tiene una función heurística. Por lo tanto, se requiere de una interacción activa de los estudiantes con las figuras para que esta función heurística se pueda presentar. Particularmente, los participantes de la presente investigación tuvieron *aprehensiones secuenciales* al establecer los protocolos de construcción de las figuras que se les solicitaron; *aprehensiones discursivas* para comunicar las relaciones geométricas que identificaron en las figuras; y *aprehensiones operatorias* cuando modificaron la forma (tipo óptica) y la posición (tipo de lugar) de las figuras utilizando geometría dinámica.

1.5.2 Interacciones con diagramas

Con el objetivo de fomentar el trabajo de conjeturar y probar proposiciones al resolver tareas geométricas, Herbst y Arbor (2004) describen los modos de interacción que puede tener un individuo con un diagrama y el objeto geométrico que representa. Cabe señalar, que los autores se refieren al término *diagrama* de igual forma que en este trabajo nos referimos al término *figura geométrica*, por lo que en este escrito ambos términos pueden ser considerados como equivalentes. Los modos de interacción descritos por los autores son los siguientes:

Empírico: es aquella interacción donde un sujeto realiza operaciones físicas sobre un diagrama (por ejemplo, medir, observar o incorporar nuevos elementos). Los argumentos que se presentan sobre estas acciones son restringidos por las características del diagrama y las propiedades de los instrumentos que se utilizan (regla, compás, etcétera). En este sentido, el sujeto considera al diagrama como un equivalente del objeto geométrico que representa, lo que le permite comunicar sus resultados con base en las operaciones que realiza.

Representacional: en este modo de interacción el sujeto interpreta al objeto geométrico a través del diagrama, limitándose a considerar únicamente las características de dicho objeto

establecidas en una proposición. Con esta interacción el diagrama no aporta un conocimiento adicional sobre el objeto geométrico, sino que actúa únicamente como un signo de este. A diferencia de la interacción empírica, las características del diagrama no están restringidas por operaciones físicas, sino por el conocimiento geométrico del sujeto para interpretar y representar lo establecido en una proposición.

Descriptivo: en este modo de interacción se consideran dos sistemas superpuestos dentro del diagrama: un sistema de referentes, el cual consta de las propiedades y características establecidas en una proposición; y un sistema de signos, los cuales transmiten relaciones entre los componentes del diagrama. Ambos sistemas deben ser considerados por el individuo para su discurso de una tarea, ya que en la medida en que el diagrama sea aceptado como preciso, por la presencia del sistema de signos, estará actualizando al objeto que representa.

Generativo: es el modo de interacción mediante el cual se proporcionan condiciones y restricciones, de tal forma que un sujeto pueda identificar, de manera anticipada, posibles operaciones sobre un diagrama y sus resultados. Estas operaciones restringen la interpretación de los resultados al atribuir propiedades al objeto, es decir, implica la creación de referentes (como trazos que no pertenecen al diagrama original).

Si bien dentro de los objetivos que se persiguen en este estudio no está la producción de pruebas por parte de los estudiantes, en los resultados es posible observar comportamientos que están vinculados con las cuatro interacciones descritas por Herbst y Arbor (2004). La interacción empírica se observa en aquellas construcciones que se justificaron a partir de una posición particular de la figura; la interacción representacional se observa cuando los participantes únicamente consideraron los elementos descritos en las tareas para establecer sus configuraciones; la interacción descriptiva se presenta cuando los participantes comunicaron el proceso de construcción de sus configuraciones; y la generativa se manifiesta cuando los participantes incorporaron nuevos elementos en las figuras para satisfacer las condiciones dadas en las tareas.

1.6 Planteamiento del problema

La mayoría de los estudios que se describieron en los antecedentes enfocan el análisis de sus resultados en las figuras que son construidas previo a la resolución de una tarea, por el

profesor o investigador; o en las figuras presentadas en los libros de texto. Sin embargo, en nuestra investigación el análisis está enfocado en las figuras geométricas que son construidas por los estudiantes, durante y para la resolución de una tarea. Al respecto, Dimmel y Herbst (2015) afirman que los estudiantes no solo deben desarrollar la capacidad de interpretar sino también de crear textos esquemáticos (figuras geométricas).

Además, es importante considerar que durante el proceso de construcción de figuras no solo se ve involucrado un registro gráfico, sino también otros registros como el verbal o el escrito, para la presentación de argumentos y conclusiones. Al respecto, Nunokawa (1994) sugiere que el contenido de una figura sólo se puede comprender cuando se tienen en cuenta tanto el protocolo de construcción como el contexto del individuo que lo construye.

Con base en las consideraciones anteriores, lo que en este trabajo se plantea como problema de investigación es el estudio del papel que juegan las figuras construidas con geometría dinámica durante la resolución de una tarea; considerando desde la visualización que se hace sobre una figura por construir, hasta los elementos y estrategias seleccionadas para su construcción. Además, se busca indagar la relación de estas figuras con el razonamiento geométrico de un estudiante y describir si los procesos de construcción de figuras apoyan u obstaculizan este razonamiento.

1.6.1 Objetivo general de la investigación

Tomando en cuenta la problemática que se planteó, con el análisis de los resultados obtenidos en esta investigación se busca alcanzar el siguiente objetivo:

Caracterizar el proceso de solución en tareas sobre construcciones geométricas que estudiantes de maestría desarrollan utilizando geometría dinámica. Para alcanzar este objetivo se tendrán en cuenta las siguientes acciones de los estudiantes:

- a) Su primer acercamiento hacia una figura por construir según el tipo de visualización que manifiestan (Duval, 2005).

- b) Los elementos y relaciones que consideran necesarios para la construcción de una figura, teniendo en cuenta el tipo de deconstrucción que hacen sobre una figura inicial (Duval, 2005).
- c) Las ideas y justificaciones que presentan durante la resolución de una tarea, describiendo el tipo de razonamiento que desarrollan durante este proceso (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001).

1.6.2 Preguntas de investigación

Considerando el objetivo planteado, con la presente investigación se espera responder a las siguientes preguntas

- 1.- ¿Cómo es el primer acercamiento de un estudiante con una tarea sobre construcciones geométricas que tiene que resolver utilizando geometría dinámica?
- 2.- ¿Cuáles son los métodos y estrategias que un estudiante desarrolla durante la resolución de una tarea sobre construcciones geométricas utilizando geometría dinámica?
- 3.- ¿Qué tipo de razonamiento exhibe un estudiante durante la construcción de figuras para la resolución de una tarea y durante la justificación de alguna de las propiedades de las figuras construidas?

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Para analizar y describir los resultados de esta investigación, nos apoyamos en elementos teóricos útiles para caracterizar el proceso de construcción de figuras durante la resolución de una tarea. Dichos elementos teóricos abarcan la visualización de una figura geométrica, las unidades figurales consideradas para su construcción y el tipo de razonamiento involucrado durante el trabajo de los estudiantes. Además, como referentes conceptuales se describe el papel de las herramientas que se utilizan para la construcción de una figura, particularmente, el papel de la geometría dinámica para la resolución de una tarea. Finalmente, se describe la incidencia del registro verbal para complementar o argumentar lo establecido en un registro gráfico.

2.1 Visualización de una figura

Duval (2005) define a la visualización en matemáticas como el reconocimiento, más o menos espontáneo y rápido, de lo que es matemáticamente relevante en cualquier representación visual (una figura geométrica, por ejemplo). Evidentemente, la visualización de un profesor o un matemático es diferente a la de un estudiante. Es decir, los estudiantes no siempre ven lo que el maestro ve o cree que verán.

Para definir aquellos componentes que un individuo identifica durante la visualización de una figura, el autor introduce la noción de unidad figurativa. Las unidades figurativas son los elementos que se reconocen rápidamente y que son matemáticamente relevantes en una representación visual. En este sentido, la visualización puede cumplir un papel significativo para la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas, cuando un individuo es capaz de distinguir todas las unidades figurativas relevantes en una representación visual dada.

En geometría, las representaciones visuales son las figuras que acompañan a una proposición o que se construyen durante y para la resolución de una tarea. La caracterización

y clasificación de estas representaciones se realizan con base en el tipo de visualización que se haga sobre ellas. Duval (2005) define dos tipos de visualización: la *icónica* y la *no icónica*. La *visualización icónica* se trata de la percepción y reconocimiento espontáneo de una figura a través de imágenes mentales disponibles. Por ejemplo, si se habla de un cuadrado, comúnmente se evoca la imagen de una forma con un par de lados horizontales y otro par verticales, sin tener en cuenta las relaciones entre estos lados.

Por otro lado, en la *visualización no icónica* se toman en cuenta los elementos que componen una figura y sus relaciones para su construcción, de tal forma que se cumplan ciertas propiedades geométricas específicas. Así, mientras que para la visualización icónica la operación principal es el reconocimiento discriminativo de formas; para la visualización no icónica es la identificación de objetos correspondientes a las formas reconocidas.

Un ejemplo que ilustra la diferencia entre la visualización icónica y la no-icónica son algunas de las pinturas del artista neerlandés Maurits Cornelis Escher (ilustración 2). En dichas pinturas se reta la percepción del mundo como lo conocemos (visualización icónica), a través de figuras cuyas características se perciben mediante una mirada profunda y analítica de su estructura (visualización no icónica).

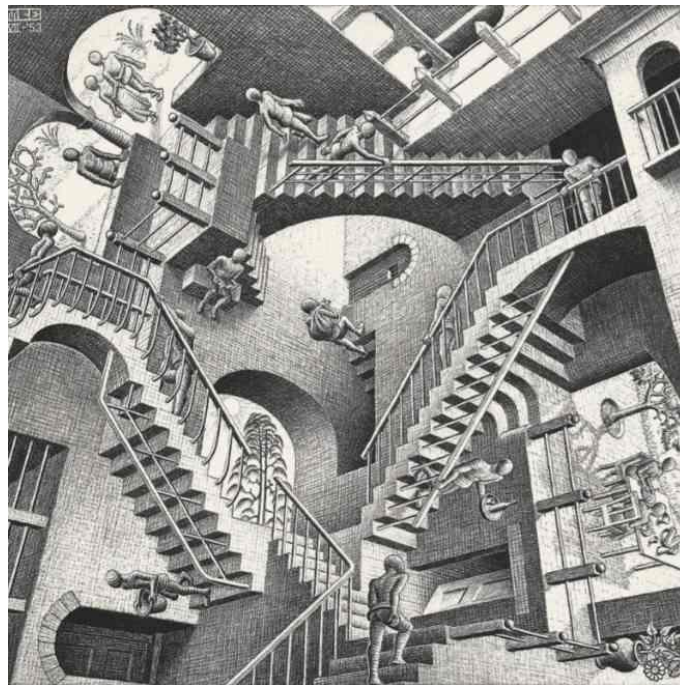


Ilustración 2. Pintura en la que se reta la forma de ver la estructura de una escalera.

2.2 Deconstrucción en geometría

La visualización no-icónica en geometría está estrechamente vinculada con el proceso de descomposición de figuras denominado por Duval (2005) como *deconstrucción*. El autor caracteriza dos formas de descomponer una figura: *deconstrucción instrumental* y *deconstrucción dimensional*. En el primer caso, las unidades figurativas se identifican mediante los instrumentos utilizados para la construcción de una figura; mientras que, en el segundo caso, las unidades deben ser percibidas mentalmente por el individuo con base en las propiedades y relaciones geométricas que conozca sobre la figura. A continuación, una descripción más amplia de ambos procesos.

2.2.1 Deconstrucción instrumental

Con la *deconstrucción instrumental* se busca entender cómo ha sido construida una figura a partir de los trazos que la componen. El término *instrumental* es referente a la herramienta de construcción utilizada, ya que como lo señalan Mithalal y Balacheff (2019), la producción de trazos corresponde tanto a la movilización de instrumentos (como la regla y el compás), como a la ejecución automática dentro del entorno de la geometría dinámica.

En este tipo de deconstrucción, la figura es considerada como un constructo asociado a un objeto geométrico, cuyos componentes son generados siguiendo un orden específico de acciones e instrucciones (protocolo de construcción). La actividad central de la *deconstrucción instrumental* es la reconstrucción de una figura inicial, la cual frecuentemente acompaña al enunciado de un problema, pero también puede ser construida a partir de este enunciado. Este proceso conduce a la producción de trazos que no necesariamente pertenecen a la figura, sino que son utilizados como rutas auxiliares para su construcción.

2.2.2 Deconstrucción dimensional

La *deconstrucción dimensional* sirve para identificar y entender las relaciones geométricas entre los componentes de una figura. Duval (2005) considera a estos componentes como unidades figurativas que se relacionan incrementando dimensionalmente. Es decir, se reconocen los elementos de más baja dimensión dentro de una figura y a partir de sus relaciones geométricas se identifican los elementos de dimensiones más grandes.

En este caso, se considera a la figura como un conjunto de unidades relacionadas por ciertas propiedades geométricas. Por ejemplo, si se desea analizar un poliedro bajo el enfoque de la deconstrucción dimensional, se deberán considerar en primer lugar la relación entre sus vértices (unidades adimensionales) para identificar sus lados (unidades unidimensionales); después, la relación entre los lados para identificar sus caras (unidades bidimensionales); y finalmente la relación entre sus caras para conocer el poliedro (figura tridimensional).

En este sentido, se puede decir que la deconstrucción dimensional ayuda a conectar a las figuras con los objetos geométricos que representan, por lo que permite establecer un vínculo con la geometría deductiva. Duval (2005) señala que esta deconstrucción se realiza de manera conjunta con una actividad discursiva, ya que las relaciones entre las unidades figurativas identificadas deben ser expresadas a través de un registro verbal o escrito.

Los tipos de visualización y deconstrucción descritos anteriormente son herramientas conceptuales que se utilizaron para describir los resultados obtenidos en esta investigación. Los primeros se utilizaron para describir la manera en que los estudiantes percibieron las figuras que construyeron y la relación de esta percepción con los argumentos que mencionaron para justificar sus construcciones. Por otro lado, las deconstrucciones sirvieron para analizar los protocolos de construcción de los estudiantes e identificar las unidades figurativas que consideraron para realizar sus construcciones.

2.3 Tipos de razonamiento en geometría

Como se mencionó en el capítulo anterior, durante el trabajo geométrico de un individuo es posible que se presenten distintos razonamientos. Samper, Leguizamón y Camargo (2001) caracterizan estos razonamientos como: *razonamiento visual*, *razonamiento intuitivo o informal* y *razonamiento inferencial*. Estos razonamientos no se presentan de manera aislada y dependiendo de la complejidad de la tarea que se realice, se complementan los unos a los otros. A continuación, se muestra una descripción de estos razonamientos y su posible presencia dentro de los resultados de esta investigación.

Razonamiento visual: son aquellos procesos en los que se presentan conclusiones sobre representaciones mentales de objetos geométricos. Tales representaciones se manifiestan a partir de observar la construcción o transformación de una figura. Por ejemplo, en esta tesis

se muestran resultados donde los participantes justifican el cumplimiento de diferentes condiciones geométricas a partir de una posición particular de la figura que construyeron; o al cambiar dicha posición y observar que una propiedad de la figura se mantiene.

Razonamiento intuitivo o informal: se refiere a aquellas ideas expresadas en lenguaje natural, donde se pretende describir, explicar o argumentar el trabajo dentro de una tarea geométrica. Este razonamiento se presenta a partir de una exploración de configuraciones, cuyas transformaciones conducen a un individuo, dada su experiencia, a comunicar y explicar a otros una idea geométrica. En la presente investigación, el *razonamiento intuitivo o informal* se presentó cuando los participantes, a partir de la exploración de una figura inicial, reconocieron o intuyeron las ideas principales para desarrollar sus respectivos protocolos de construcción; y al expresar los argumentos por los cuales ellos creían que las figuras cumplieran con las condiciones solicitadas.

Razonamiento inferencial: se presenta a través de procesos inductivos, abductivos y deductivos, donde el individuo demuestra la validez de una afirmación utilizando un lenguaje matemático formal. En el presente trabajo se presentaron pocos casos de razonamiento inferencial. Sin embargo, hubo manifestaciones de interés por parte de algunos estudiantes de desarrollar justificaciones formales a partir de procesos deductivos, para validar el cumplimiento de ciertas condiciones dentro de las figuras que construyeron.

Se busca una integración de los diferentes tipos de razonamiento por parte de los estudiantes, para alcanzar un mayor dominio del campo geométrico en el que se trabaje (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001). Particularmente, en tareas sobre construcciones geométricas, el *razonamiento visual* está estimulado por el *razonamiento intuitivo e informal*, al explorar las propiedades y entender las diferentes relaciones y propiedades que debe tener una figura. Además, el *razonamiento inferencial* se presenta en este tipo de tareas al explicar el protocolo de construcción seguido para la construcción de una figura. Este tipo de acciones comunicativas vincula al registro gráfico con el lenguaje, cuya relación se describe en el siguiente apartado.

2.4 Relación entre el registro verbal y el gráfico

La geometría requiere la unión cognitiva de dos registros de representación: el registro gráfico para la representación de objetos geométricos; y el lenguaje para enunciar las propiedades y relaciones de dichos objetos. Por lo tanto, para un análisis efectivo del razonamiento geométrico de los estudiantes durante la resolución de una tarea, se deben tomar en cuenta todos los sistemas semióticos involucrados (Chen y Herbst, 2013). Particularmente, los sistemas semióticos que juegan un papel durante la interacción con figuras son los dibujos y el lenguaje oral o escrito. Al respecto, Nuñez (2004) menciona que las expresiones verbales sirven no solo como formas de comunicar ideas, sino también de generarlas. Cuando los estudiantes presentan sus resultados, estas expresiones les ayudan a comunicar sus acciones sin la necesidad de usar un lenguaje matemático formal, involucrándolos en procesos de argumentación sobre objetos o situaciones geométricas.

Duval (2005) afirma que la articulación cognitiva entre el registro gráfico y el del lenguaje se produce a través de proposiciones. En este sentido, se puede construir una figura para ilustrar un enunciado, pero también se puede producir un enunciado para describir o explicar una figura. Estas dos situaciones son cognitivamente diferentes y no conducen necesariamente a los mismos resultados. Por lo tanto, el autor señala la necesidad de distinguir los estados de representación de los dos registros involucrados durante la resolución de tareas geométricas.

Un estado de representación se entiende como la función que tiene el registro gráfico en relación con el lenguaje o viceversa. Si una figura sirve únicamente para ilustrar lo que se menciona en una proposición o como soporte intuitivo de esta, se dirá entonces que la figura es una representación auxiliar, mientras que la proposición es una representación autosuficiente. Por el contrario, si se utiliza una proposición para describir un estado particular de la figura o una operación sobre ella, la proposición será la representación auxiliar mientras que la figura será la representación autosuficiente. Duval (2005) afirma que lo anterior es útil para identificar en cuál de los dos registros está anclado el razonamiento geométrico de un estudiante.

En el análisis de los resultados presentados en este documento, no solo se consideran las construcciones geométricas elaboradas por los participantes (registro gráfico), sino también los comentarios que expresaron durante la descripción de sus construcciones y los argumentos que mencionaron (lenguaje) para justificar algunas de sus acciones. El propósito de lo anterior es conocer y describir de manera más amplia el razonamiento geométrico de los participantes y verificar si este razonamiento está anclado en sus construcciones o en sus proposiciones.

2.5 Instrumentos para la construcción de figuras

Una de las principales características de las figuras geométricas, al menos de las que corresponden a la teoría euclidiana, es que son construibles con la ayuda de instrumentos. Debido a la regularidad que un instrumento impone al movimiento del trazo, es posible producir formas visuales que representan objetos y situaciones geométricas. Mediante el uso de un instrumento los estudiantes pueden darse cuenta de que las propiedades geométricas no son solo características perceptivas, sino que también son construibles (Duval, 2005).

Gómez-Chacón y Kuzniak (2015) describen el concepto de *génesis instrumental* como la transformación de artefactos a herramientas durante un proceso de construcción. Al respecto, Artigue (2002) distingue una dirección ascendente y una descendente durante la génesis instrumental. La dirección ascendente es denominada *instrumentación*, la cual describe el dominio y la manipulación de herramientas de dibujo por parte de los individuos; y la dirección descendente denominada *instrumentalización*, con la que se describe la elección y el uso de un instrumento para la construcción de una figura, tomando en cuenta el conocimiento geométrico de los individuos.

Los instrumentos considerados para el desarrollo de esta investigación son los utilizados en el entorno de la geometría dinámica. En un principio, se pretendía describir el trabajo de los estudiantes también dentro del entorno tradicional del lápiz y papel, sin embargo, debido a la situación pandémica que aquejó a la población mundial en los años recientes, la información que se muestra en esta tesis se obtuvo únicamente con trabajos elaborados con geometría dinámica.

2.6 Geometría dinámica para la construcción de figuras

Uno de los principales factores que influyeron para que la geometría tuviera un mayor interés en educación matemática fue la introducción de la tecnología (Mariotti, 2006). Con los softwares de geometría dinámica (Cabri, GeoGebra, etc.) se introdujo una nueva forma de plantear, explorar y resolver actividades geométricas. El uso de estos softwares para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones debido a las oportunidades que brindan para la exploración de propiedades de figuras geométricas; la posibilidad de identificar patrones e invariantes en ellas; y el soporte para plantear conjeturas a través de acciones como el *arrastre* o herramientas como el *lugar geométrico*⁴, cuyas funciones permiten observar una dependencia relacional durante el movimiento de una figura.

Las computadoras han revolucionado por completo el papel de los instrumentos para la construcción de figuras, ya que facilitan su uso y ofrecen la posibilidad de hacer exploraciones dinámicas. Su ventaja, además de la ejecución automática, es la precisión de los trazos que con ellas se realizan, ya que se eliminan las imprecisiones correspondientes a la mano en el uso de los instrumentos (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2015). Además, los softwares de geometría dinámica proporcionan diversas herramientas para personalizar la apariencia visual de una figura, lo cual es útil para resaltar las unidades que la componen o alguna de sus propiedades.

Sandoval (2009) destaca la influencia de la geometría dinámica para apoyar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, mencionando que, en las clases tradicionales de geometría (en pizarrón) se pretendía que los alumnos movilizaran sus ideas geométricas a través de una representación estática, mientras que, con la geometría dinámica, dicha movilización podía ser observada. En este sentido, una de las características más significativas de la geometría dinámica es que actúa como herramienta mediadora entre el conocimiento perceptivo y el geométrico, es decir, ayuda a que los argumentos presentados por los estudiantes pasen de un estado visual hacia uno deductivo.

⁴ Como ejemplo, en la sección 2.6.1 se profundizará en la caracterización del concepto de lugar geométrico y su utilidad como herramienta de la geometría dinámica.

2.6.1 El lugar geométrico

Para ilustrar el impacto de las herramientas de la geometría dinámica en los procesos de construcción de figuras, consideremos el concepto del lugar geométrico. Como lo señalan Gomez-Chacon, Botana, Escribano y Abánades (2016), el concepto de lugar geométrico es tan antiguo como la geometría misma, ya que fueron los griegos los primeros interesados en el análisis de la trayectoria de puntos que formaban distintas curvas como el círculo o las cónicas. A través de los años, la utilidad de este concepto ha evolucionado para analizar la trayectoria de curvas cada vez más complejas o de diferentes mecanismos.

Particularmente, en GeoGebra la herramienta *lugar geométrico* solicita la selección del punto que definirá al lugar geométrico y un punto móvil al que está vinculado. Una vez seleccionados estos puntos, el software realiza una aproximación numérica para definir y mostrar la construcción del lugar geométrico. Sin embargo, esta construcción es un objeto auxiliar del cual se ignora cualquier información algebraica, es decir, solo ilustra la trayectoria de un punto dependiente de la movilidad de otro.

GeoGebra cuenta con otras herramientas con las que es posible determinar o aproximar la expresión algebraica de algunos lugares geométricos. Por ejemplo, si se sabe que un lugar geométrico debe ser una recta, esta se puede construir colocando dos puntos sobre él y uniéndolos con la herramienta *recta*. Existen también lugares geométricos que determinan diferentes curvas, las cuales se pueden determinar o aproximar con la herramienta *cónica por cinco puntos*.

Consideremos como ejemplo una de las soluciones adjudicada a Arquímedes para el problema de la trisección de un ángulo (ilustración 3). En la solución se propone que, si AB es una cuerda de un círculo con centro en O y al prolongar esta cuerda se produce el segmento BC de tal forma que este sea igual al radio del círculo; y al unir CO con una recta, de tal forma que corte al círculo en los puntos D y E; entonces el arco AE será igual a tres veces el arco BD (Heath, 1897).

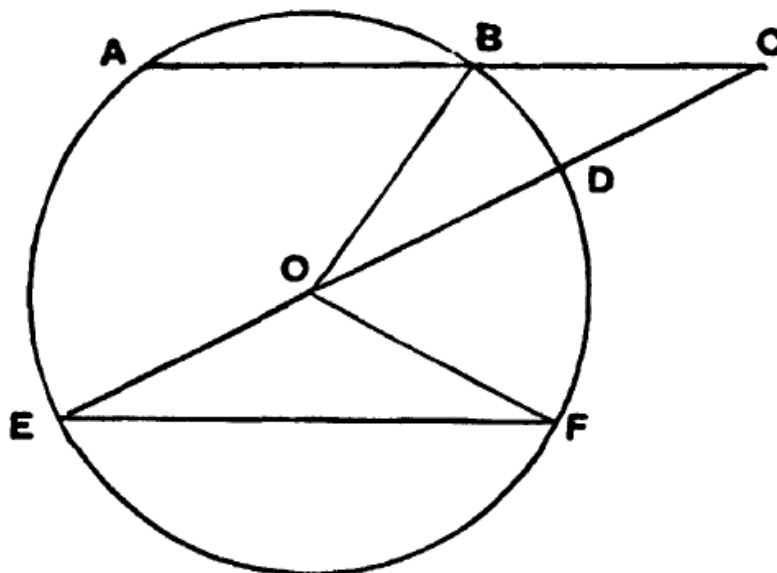


Ilustración 3. Construcción de Arquímedes utilizada para la trisección de un ángulo

La clave para establecer esta solución es determinar aquel punto D sobre la circunferencia, cuya unión con el centro O determine la igualdad de los segmentos BO y BC. Con regla y compás esto se puede determinar a través de un método de *neusis*, donde se ajusta manualmente la posición de la regla para que un segmento de longitud dada pase por un punto en particular. Sin embargo, con geometría dinámica es posible utilizar lugares geométricos para determinar la posición del punto D.

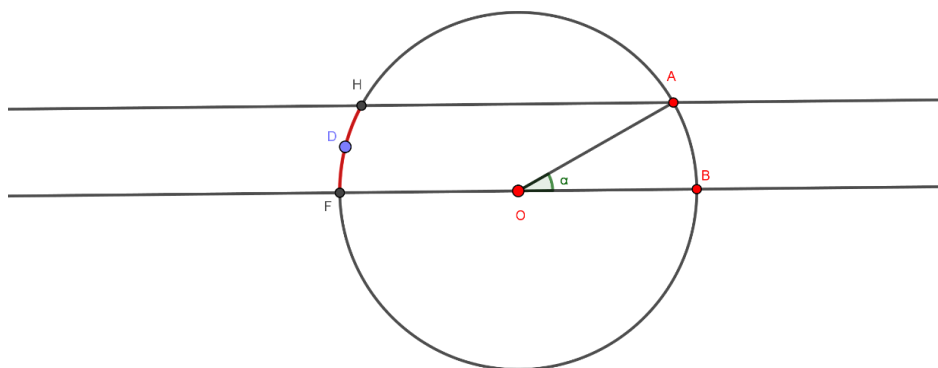


Ilustración 4. Arco de circunferencia FH con el punto móvil D

La construcción dinámica de esta solución se determina partiendo de una circunferencia con dos radios que forman el ángulo que se desea trisecar. Al prolongar uno de los radios que determinan este ángulo, se obtiene el punto F sobre la circunferencia; después, se puede trazar una recta paralela a la prolongación anterior, de tal manera que pase por el otro extremo del ángulo sobre la circunferencia y determine el punto H. De esta manera se obtiene el arco de circunferencia FH donde se coloca un punto móvil D (ilustración 4).

Una vez determinado el punto D, se debe unir con A de tal manera que corte a la prolongación del ángulo en el punto J; después, se traza una circunferencia con centro D y radio igual al de la primera circunferencia, la cual también intersecará a la prolongación del ángulo en el punto K. Así entonces, lo que se busca es aquella posición del punto D para la cual los puntos J y K sean el mismo (ilustración 5).

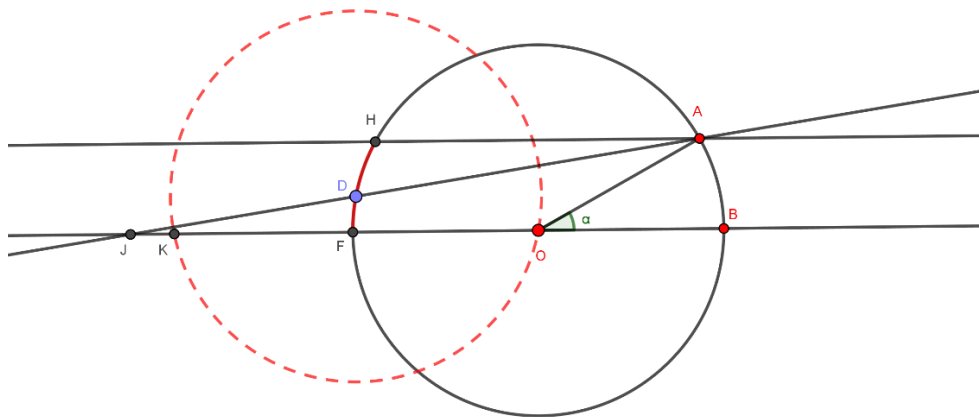


Ilustración 5. Construcción dinámica donde se busca que J y K sean iguales

Para encontrar la posición buscada del punto D lo que se propone es determinar los lugares geométricos de un par de puntos, definidos a partir de las características de la figura construida. El primer punto que se propone definir tiene como abscisa la longitud de arco DH, cuyo valor depende de la posición del punto D; mientras que la ordenada del punto que se define es el segmento DK. Una vez definido el punto R con las características anteriores,

se define su lugar geométrico (con el ícono correspondiente en GeoGebra) a partir del movimiento del punto D (ilustración 6).

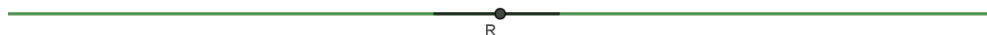


Ilustración 6. Lugar geométrico del punto R.

Dado que la ordenada del punto R es el segmento DK y la longitud de este, por construcción, es constante, el lugar geométrico trazado será un segmento formado por aquellos puntos con ordenada constante y abscisa igual al valor de la longitud del arco DH. Para poder acceder a los valores particulares de los puntos que forman este lugar geométrico, es posible definir una recta que lo contenga uniendo dos puntos sobre él.

El segundo punto que se propone definir también tiene como abscisa la longitud de arco DH; mientras que su ordenada es el segmento DJ. El lugar geométrico de este nuevo punto P también se define a partir del movimiento del punto D. Sin embargo, tanto la abscisa como la ordenada de este punto son variables que dependen de la posición del punto D, por lo tanto, se espera que el lugar geométrico definido por P no sea un segmento como en el caso de R.

Analizando la construcción original, la longitud del segmento DJ parte desde cero (cuando J es igual a D), e incrementa gradualmente hasta un valor muy grande a medida que el arco DH se hace más pequeño. Tomando en cuenta este análisis, se espera que el lugar

geométrico definido por P sea una curva que crece rápidamente en el eje de las ordenadas al mover el punto D (ilustración 7). Los valores de esta curva pueden ser conocidos al aproximarla con la herramienta *cónica por cinco puntos*.

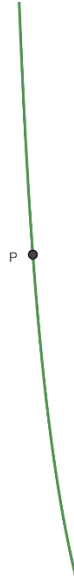


Ilustración 7. Lugar geométrico del punto P.

Los lugares geométricos de los puntos R y P tienen un punto de intersección, ya que para una posición particular del punto D, los segmentos DJ y DK son iguales.

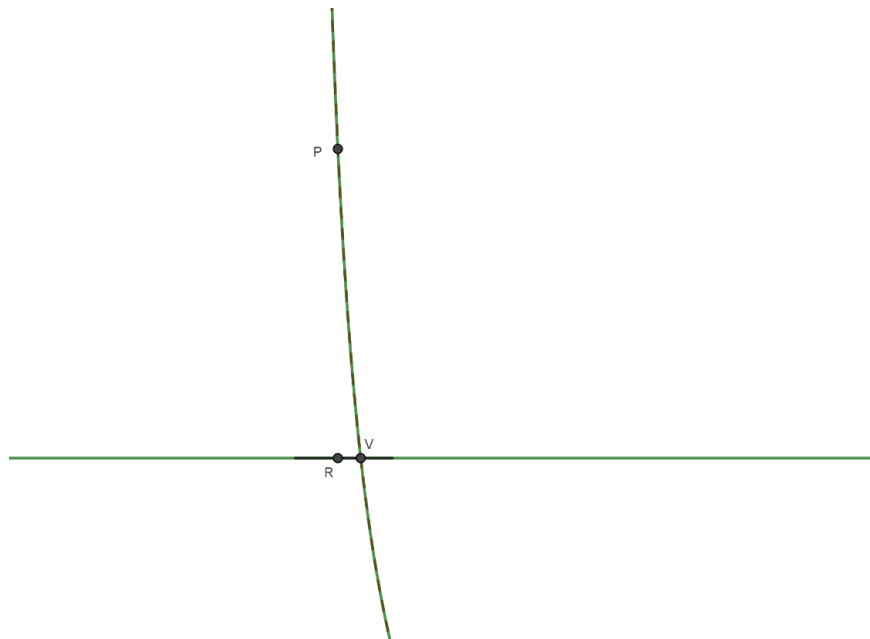


Ilustración 8. Intersección de los lugares geométricos producidos por P y R

Las coordenadas de la intersección V se pueden conocer una vez que se determine el valor de los puntos que forman los lugares geométricos, con las herramientas de GeoGebra *recta y cónica por cinco puntos* (ilustración 8).

Así entonces, para resolver el problema de la trisección de un ángulo basta recordar que la abscisa del punto de intersección V de los lugares geométricos es la longitud de arco DH donde se garantiza la igualdad de los segmentos DK y DJ; y por lo tanto, donde DJ es igual al radio de la circunferencia. En este punto se cumplen las condiciones de construcción requeridas para determinar el ángulo $\angle DOF$ de medida igual a un tercio del ángulo original $\angle AOB$ (ilustración 9).

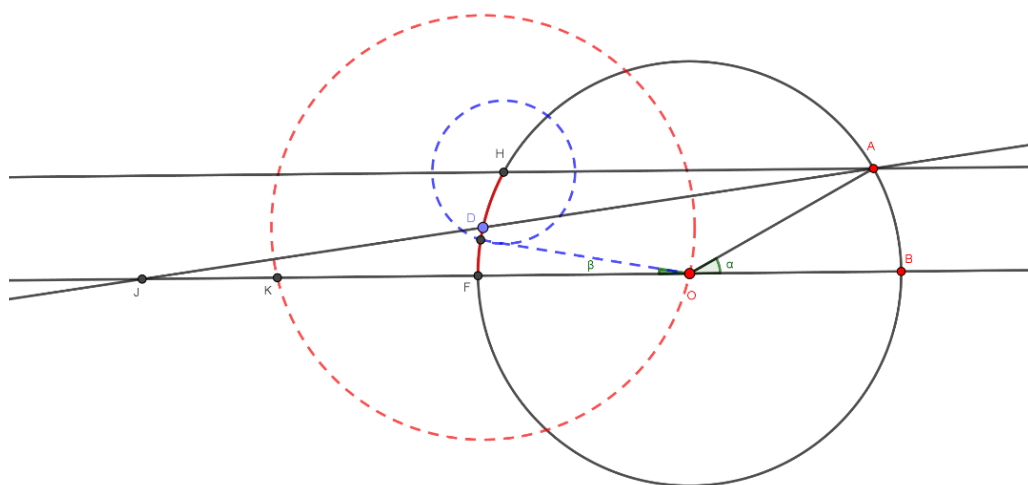


Ilustración 9. Construcción dinámica para la trisección de un ángulo.

En este sentido, podemos decir que la geometría dinámica juega un papel relevante para la definición y análisis de un lugar geométrico. Lo anterior conlleva la posibilidad de observar y conocer las propiedades de construcciones cuya definición es gracias al dinamismo de un punto, además esto brinda y facilita posibles tratamientos para la resolución de una tarea.

CAPÍTULO 3. MÉTODO

En este capítulo se describe y justifica el tipo de investigación desarrollada, considerando el contexto y entorno en el que se implementó el estudio. También, se mencionan los antecedentes académicos de los participantes del estudio y la forma en que trabajaron durante la resolución de las tareas que se les propuso. Por último, se exponen las fuentes de donde fueron elegidas las tareas propuestas, la justificación de su elección, la estructura de cómo fueron presentadas a los estudiantes y una posible solución para cada una de ellas.

3.1 Tipo de investigación

La presente investigación muestra un estudio de caso de tipo exploratorio y descriptivo (Simons, 2009). Debido a lo anterior, tanto el entorno en el que se desarrolló el trabajo como el análisis de la información obtenida es específico de un grupo de estudiantes de maestría con condiciones académicas particulares. En este sentido, las conclusiones que se establezcan sobre los resultados del estudio son referentes únicamente a este grupo de estudiantes. Sin embargo, como lo señalan Cohen, Manion y Morrison (2007), los resultados de un estudio de caso pueden ayudar a comprender otros casos en condiciones similares.

El estudio de caso es de tipo exploratorio debido que se busca conocer cuáles son los acercamientos de los estudiantes con las figuras geométricas que construyen, a través de la visualización que tienen sobre ellas (Duval, 2005). Por otro lado, el estudio también es de tipo descriptivo en el sentido de que se caracterizan los elementos que los estudiantes consideran necesarios para la construcción de una figura y cómo desarrollan su razonamiento geométrico para llevar a cabo esta construcción.

3.2 Participantes del estudio

El estudio se desarrolló con la participación de seis estudiantes de maestría, tres en la primera etapa (Javier, Karla y Araceli) y tres más en la segunda etapa (Fernanda, Alan y Mónica)⁵. Estos estudiantes pertenecen a las áreas de tecnología y medio superior en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Enseguida se presenta una descripción de los antecedentes académicos de cada uno de estos estudiantes.

3.2.1 Participantes de la primera etapa

- *Javier*: Estudió la licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de México (UNAM). Durante ese periodo, tomó cuatro cursos de geometría, dos de geometría euclidiana y dos de geometría analítica. En cuanto a su experiencia como docente, Javier es ayudante en la Facultad de Ciencias, donde desde hace tres años imparte cursos de matemáticas (actualmente, el de Geometría Analítica 1). Además, cuenta con diez años de experiencia como docente en primaria.
- *Karla*: Estudió la licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. En este periodo curso cinco materias de geometría: Elementos de Geometría, Geometría Plana, Geometría del Espacio, Geometría Analítica y Geometría no Euclidiana. Como docente, tiene un año de experiencia a nivel primaria y un año y medio a nivel secundaria, en este último nivel impartió el curso de Geometría Plana.
- *Araceli*: Estudio la licenciatura en Matemática Educativa en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. El único curso de geometría que tomó durante su licenciatura fue el de Geometría Euclidiana del primer semestre. Este curso tuvo que ser interrumpido a la mitad debido a problemas personales de su profesora, por lo que no pudo impartir todo su contenido. En cuanto a su experiencia como docente, Araceli ha impartido cuatro cursos a nivel bachillerato: Álgebra para primer semestre; Geometría Analítica para tercer semestre (en dos ocasiones); Precálculo para cuarto semestre; y Cálculo Diferencial e Integral para sexto semestre. Además, durante un periodo de ocho meses impartió todas las

⁵ Se utilizaron seudónimos para hacer referencia a los participantes del estudio.

materias del área de fisicomatemáticas de Preparatoria Abierta. También, a nivel licenciatura ha impartido el curso de Cálculo Diferencial e Integral para estudiantes de primer semestre en la carrera de Ingeniero Agrónomo Zootecnista.

3.2.2 *Participantes de la segunda etapa*

- *Fernanda:* Estudió la licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Autónoma del Estado de México. Durante su bachillerato, Fernanda tomó un curso de Geometría Euclidiana, en el cual, según menciona, se tocaron los temas de manera superficial sin utilizar algún software de geometría dinámica. Durante su licenciatura, la estudiante solo tomó un curso de Geometría Analítica.

Como docente, Fernanda ha impartido clases particulares y durante su licenciatura, como parte de sus prácticas profesionales, dio asesorías de las materias de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales.

- *Alan:* Estudió la licenciatura en Física y Matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional. Durante este periodo, tomó los cursos de Geometría Plana, Geometría Analítica, Geometría Proyectiva y Geometrías no Euclidianas, esta última desde un enfoque histórico, según lo mencionado por el estudiante.

Alan ha impartido los cursos de Álgebra, Geometría Analítica, Geometría Euclidiana y Cálculo a nivel bachillerato; mientras que a nivel licenciatura ha impartido el curso de Optimización Lineal.

- *Mónica:* Estudio la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Tabasco. En el primer semestre de este periodo, tomó el curso de Geometría Elemental; mientras que en el segundo semestre tomó el de Geometría Analítica.

Como experiencia docente, Mónica únicamente ha dado asesorías a nivel secundaria sobre temas de Álgebra.

El último curso de geometría que los seis estudiantes tomaron antes de participar en este estudio fue el de Algebra y Geometría durante el segundo semestre de la maestría en Matemática Educativa del Cinvestav.

3.3 Recolección de datos y forma de trabajo

Como se mencionó en la presentación de este documento, la investigación que aquí se presenta se desarrolló en dos etapas, la primera con el objetivo de conocer y caracterizar la forma en que los estudiantes abordan y resuelven una tarea sobre construcciones geométricas; y la segunda con el objetivo de ampliar los resultados a través de tareas con características diferentes a las de la primera etapa. En seguida se describe la forma en que se trabajó con los estudiantes en cada una de estas etapas.

3.3.1 Primera etapa

El registro del trabajo de los estudiantes se obtuvo mediante videoconferencias a través de la plataforma Zoom. Se les propusieron cinco tareas sobre construcciones geométricas que debían resolver con el apoyo del software de geometría dinámica GeoGebra. La información recolectada se obtuvo mediante dos registros: el primero fueron los archivos de las construcciones que se realizaron, las cuales se solicitó que se enviaran por correo; y el segundo fueron las expresiones verbales que los estudiantes expresaban durante la resolución de las tareas, las cuales se obtuvieron a través de la grabación de las videoconferencias.

Los estudiantes trabajaron por separado alrededor de dos horas cada uno. En primer lugar, a cada uno se les solicitó que leyeran las cinco tareas y que comenzaran a resolverlas en el orden que prefirieran (los tres estudiantes resolvieron las tareas en el orden en el que se les presentaron). Conforme iban resolviendo cada una de las tareas se les cuestionó sobre el proceso de construcción que siguieron y sobre acciones específicas que el investigador observó en su trabajo. Por último, se les solicitó guardar y compartir las construcciones de cada tarea para posteriormente poder analizar sus respectivos protocolos de construcción.

En esta etapa, el investigador monitoreó el trabajo de los estudiantes durante la resolución de las tareas propuestas. Su atención se centró en el protocolo de construcción desarrollado, las dificultades enfrentadas y las dudas que podrían surgir respecto a lo solicitado en cada tarea. La incidencia del investigador se presentó cuando los estudiantes manifestaban un bloqueo en su razonamiento que les impedía continuar con su trabajo, cuestionando acciones específicas que les permitieran observar o recordar propiedades útiles para concluir o justificar la construcción de las figuras propuestas.

3.3.2 Segunda etapa

Para la segunda etapa, la información obtenida se obtuvo en dos partes. En la primera parte, se aplicaron tres tareas a los participantes de manera presencial en el departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. En dichas tareas se solicitó a los estudiantes que reprodujeran una figura dada y que justificaran alguna de sus propiedades a partir de su construcción. Al igual que en la primera etapa, los estudiantes trabajaron con GeoGebra para la construcción de las figuras propuestas y presentaron de manera escrita la justificación que se solicitó en cada tarea. Los estudiantes trabajaron alrededor de dos horas con las tareas propuestas y al finalizar entregaron tanto sus construcciones vía correo electrónico, como las hojas en las que desarrollaron sus justificaciones.

La segunda parte de esta etapa se desarrolló a través de videoconferencias en la plataforma Zoom, donde se le cuestionó a los estudiantes sobre partes específicas de sus protocolos de construcción y sus justificaciones. Cada videoconferencia duró alrededor de una hora y sirvió para que los estudiantes profundizaran en sus respuestas o identificaran en ellas aspectos que podrían corregir o modificar.

De esta manera, la información de esta etapa de la investigación se obtuvo de los archivos de GeoGebra enviados por los estudiantes, el trabajo escrito de sus justificaciones y las expresiones verbales que manifestaron durante las reuniones en Zoom. Los datos de ambas etapas de la investigación se analizaron bajo las mismas herramientas teóricas con la finalidad de ampliar el alcancé de los resultados y sus respectivas conclusiones.

En la primera parte de esta etapa, el investigador se limitó a facilitar el material de trabajo para los estudiantes⁶ y a resolver dudas respecto a los enunciados de cada tarea. Para la segunda parte, la incidencia del investigador se presentó al cuestionar a los estudiantes sobre acciones específicas de su trabajo, impulsándolos a profundizar en su análisis o reconocer errores o ambigüedades en sus respuestas.

⁶ Asignando una computadora a cada estudiante y dando las respectivas hojas de trabajo.

3.4 Selección y objetivo de las tareas propuestas

Las tareas implementadas en cada etapa de la investigación tuvieron un objetivo específico. En la primera etapa se esperaba conocer la forma en que los estudiantes enfrentaban una tarea sobre construcciones geométricas; mientras que en la segunda se buscó describir la capacidad de los estudiantes para reproducir una figura a partir de ciertas condiciones. A continuación, se muestran las tareas implementadas en cada etapa, así como una posible solución de estas.

3.4.1 Tareas de la primera etapa

Con base en los objetivos que se persiguen, las primeras dos tareas que se implementaron fueron seleccionadas de los problemas planteados por Wernick (1982). En ellos, se identifican dieciséis puntos de un triángulo (vértices, pies de las alturas, pies de las bisectrices, puntos medios, ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro), de los cuales, se proporcionan tres y se solicita la construcción del triángulo que cumple con las relaciones entre los puntos dados.

Los problemas de Wernick (1982) que se seleccionaron para esta investigación fueron tomados de una lista proporcionada por Nirode (2014), la cual se destaca por identificar aquellos problemas cuya solución pueda ser obtenida utilizando un software de geometría dinámica. Se eligieron estas tareas para que los estudiantes pudieran familiarizarse con el tipo construcciones que se les iban a presentar, a través del uso de las herramientas disponibles en GeoGebra. Las dos tareas mencionadas son las siguientes:

1.- De un triángulo ABC se conocen el vértice A, el punto medio del lado AC (punto M_b) y el baricentro G (punto de intersección de las medianas del triángulo). A partir de la relación entre estos tres puntos, construye el triángulo ABC.

Posible protocolo de construcción:

- Una vez que se hayan trazado los tres puntos mencionados en la tarea se puede reflejar el vértice A respecto al punto medio M_b para obtener el vértice C (ilustración 10a).

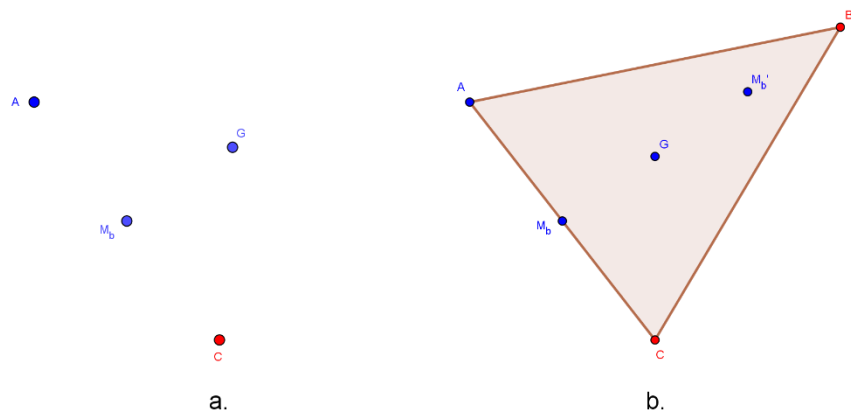


Ilustración 10. Posible construcción para la tarea 1

- Para determinar el vértice B se debe tener en cuenta la proporcionalidad de la distancia del baricentro al punto medio y del baricentro al vértice (la segunda tiene el doble de longitud que la primera). Así, se pueden hacer un par de reflexiones con el comando simetría central: primero reflejar M_b respecto al baricentro; y después, el baricentro respecto al primer punto reflejado M_b' (ilustración 10b).

2.- De un triángulo ABC se conocen el vértice A , el punto medio del lado BC (punto M_a) y el circuncentro O (punto de intersección de las mediatrices del triángulo). A partir de la relación entre estos tres puntos, construye el triángulo ABC . ¿Los puntos descritos pueden ser cualesquiera? Explica tu respuesta.

Posible protocolo de construcción:

- Se puede unir el circuncentro O y el punto medio M_a con una recta y trazar su perpendicular por M_a , de tal forma que los vértices restantes se encontrarán en dicha perpendicular (ilustración 11a).
- Para encontrar los vértices B y C se debe recordar que el circuncentro de un triángulo es equidistante a los vértices de este, por lo que las intersecciones de la

circunferencia con centro en O y radio OA y la recta perpendicular mencionada en el punto anterior, serán los vértices buscados (ilustración 11b).

- Para que esta construcción sea válida se debe considerar que la distancia entre el circuncentro y el vértice A debe ser mayor a la distancia entre el circuncentro y el punto medio M_a .

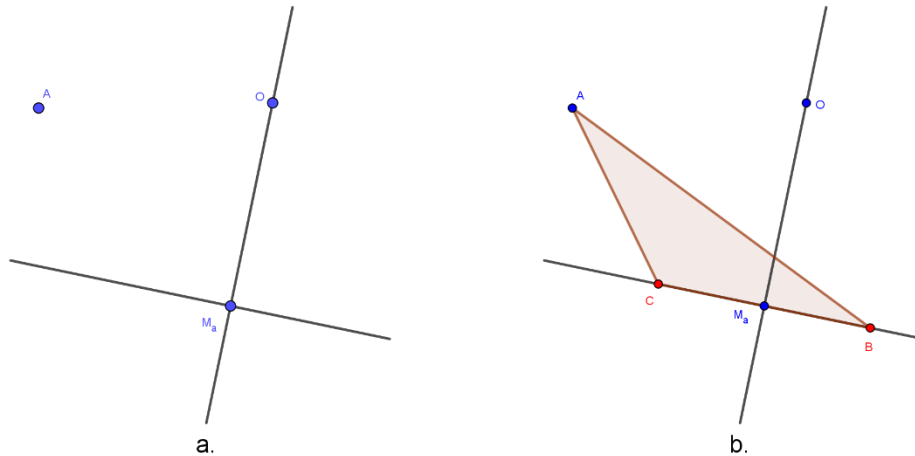


Ilustración 11. Posible construcción para la tarea 2

Las siguientes dos tareas que se implementaron fueron seleccionadas del libro *The secrets of triangles* de Posamentier y Lehmann (2012), donde se propone que un triángulo sea construido a partir de ciertos elementos dados (lados, alturas, ángulos, etc.). El propósito de la elección de este tipo de tareas es que los estudiantes no solo identifiquen las relaciones entre las unidades adimensionales de una figura (puntos), sino también las relaciones entre unidades unidimensionales (lados, alturas, etc.) con medidas específicas. Con esto, se espera caracterizar de mejor manera las deconstrucciones que hacen los estudiantes sobre las figuras que se les propusieron (Duval, 2005). Las dos tareas mencionadas son las siguientes:

3.- En la siguiente imagen (ilustración 12) se muestran los lados BC y AC de un triángulo, cuyas longitudes son 7 y 4 respectivamente. También, se presenta el ángulo α , opuesto a alguno de los lados mencionados, cuya medida es de 30 grados. Construye el triángulo al que pertenecen estos tres componentes. ¿Cuántas construcciones cumplen con las condiciones dadas?

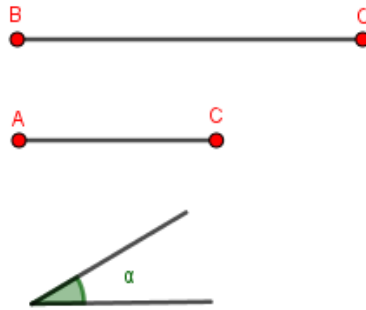


Ilustración 12. Imagen presentada en la tarea 3

Posible protocolo de construcción:

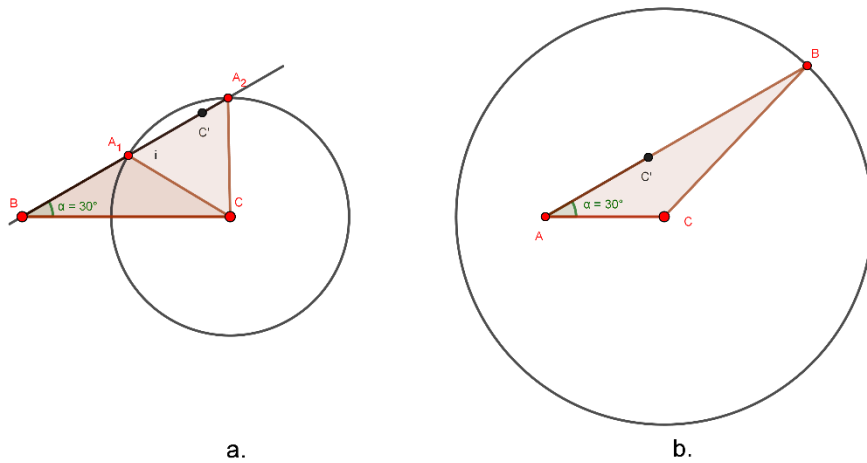


Ilustración 13. Posible construcción para la tarea 3

- Utilizando el comando rotación se puede determinar el ángulo de 30 grados a partir de alguno de los lados que se dan en la tarea.
- Si el ángulo se traza rotando el lado BC tomando a B como centro de rotación, se puede trazar una circunferencia con centro en C y radio 4. De esta manera, al prolongar con una recta el lado BC rotado (BC'), se encontrarán dos intersecciones con la circunferencia anterior. Dichas intersecciones representan dos soluciones diferentes para la tarea (ilustración 13a).
- Si al ángulo se traza rotando el lado AC tomando al vértice A como centro de rotación, se deberá trazar entonces una circunferencia con centro en C y radio 7. Prolongando el lado rotado ($A'C'$), se encontrarán dos intersecciones con la

circunferencia anterior, pero solo una cumplirá con las condiciones establecidas en la tarea (ilustración 13b).

Por lo tanto, con el protocolo de construcción anterior se pueden hallar al menos tres soluciones diferentes para la tarea propuesta.

4.- En la siguiente imagen (ilustración 14) se muestran los lados BC y AC de un triángulo, cuyas longitudes son 7 y 5 respectivamente. También, se muestra la altura correspondiente al vértice A de este triángulo (h_a), cuya longitud es de 4.5. Construye el triángulo al que pertenecen estos tres componentes. ¿Cuántas construcciones cumplen con las condiciones dadas?

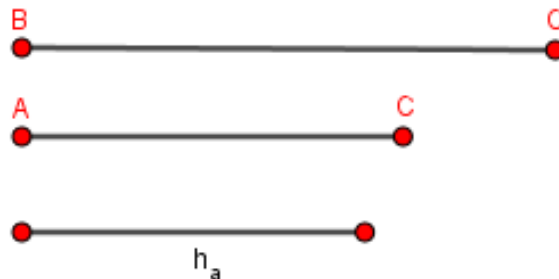


Ilustración 14. Imagen presentada en la tarea 4

Posible protocolo de construcción:

- Se puede partir de la construcción de la altura propuesta y una recta perpendicular a esta. Así, los vértices B y C deberán encontrarse sobre la perpendicular trazada.
- Para encontrar el vértice C, se debe trazar una circunferencia con centro en A (extremo del segmento que representa la altura) y radio 5. Con lo anterior se obtendrán dos posibles puntos para ubicar al vértice C, estos son las intersecciones C_1 y C_2 de la circunferencia con la perpendicular trazada en el punto anterior (ilustración 15a).
- A partir de cualquiera de los puntos en los que se decida ubicar a C, se debe trazar una circunferencia de radio 7. Con esto se obtendrán dos posibles puntos para determinar el vértice B, estas son las intersecciones B_1 y B_2 de esta última circunferencia con la perpendicular trazada en el primer punto (ilustración 15b).

- Por lo tanto, con cada uno de los posibles puntos que pueden representar al vértice C, se pueden encontrar dos soluciones.

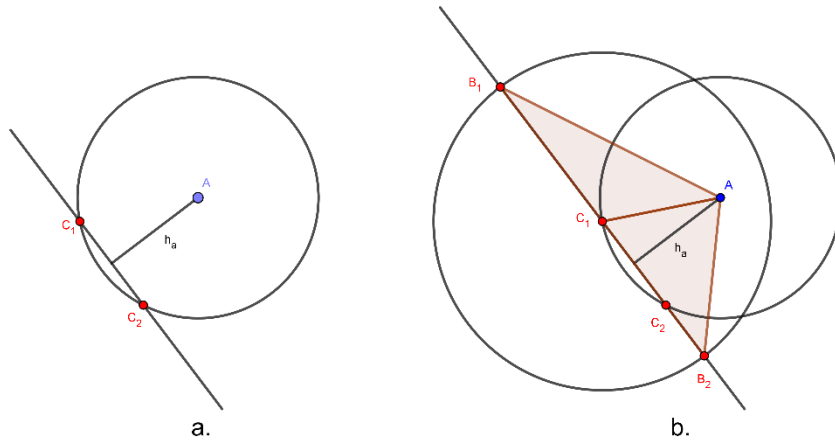


Ilustración 15. Posible construcción para la tarea 4

Cabe mencionar que, para las dos tareas anteriores, se señaló que las unidades de longitud de los segmentos mostrados eran las determinadas por GeoGebra.

Para la quinta tarea se tomaron en cuenta las categorías señaladas por Guirette y Zubieta (2010), sobre la estructura *entrada-salida* que tienen las tareas de construcción geométrica. En dicha estructura participan dos registros: la figura y el texto. Debido a que las primeras cuatro tareas tienen la estructura texto-figura, la quinta se pensó con una estructura figura-figura con la intención de identificar, si es que existen, formas diferentes de deconstrucción de figuras por parte de los estudiantes. La tarea referida es la siguiente:

5.- En la siguiente imagen (ilustración 16) se muestra un triángulo con cuatro círculos inscritos. Los círculos son tangentes entre sí y a los lados del triángulo. Reconstruye la configuración conservando sus propiedades y describe el proceso de construcción.

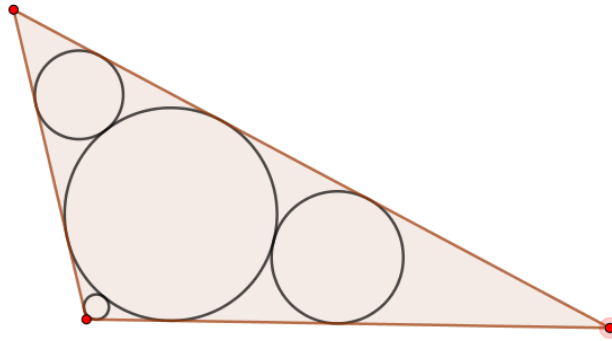


Ilustración 16. Imagen presentada en la tarea 5

Posible protocolo de construcción:

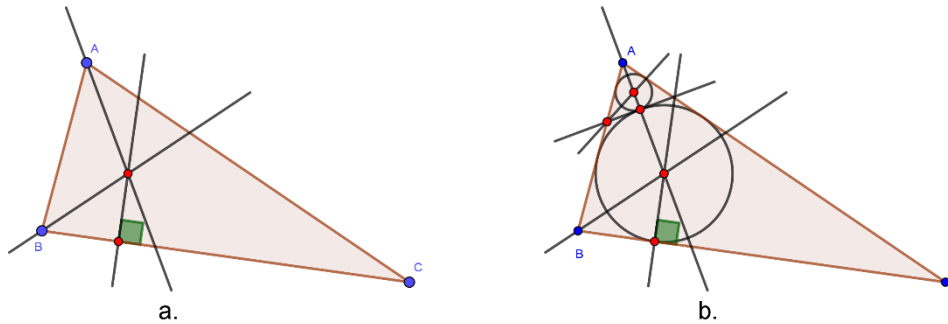


Ilustración 17. Posible construcción para la tarea 5

- La construcción debe iniciar con el trazo de un triángulo cualquiera. Después, se debe trazar un par de bisectrices del triángulo, cuya intersección será el incentro.
- Con una recta perpendicular a uno de los lados del triángulo que pase por el incentro, se determinará el punto de tangencia para la circunferencia de mayor tamaño inscrita en el triángulo (ilustración 17a).
- La intersección de una bisectriz del triángulo con la circunferencia inscrita hasta este punto determinara el punto de tangencia entre esta circunferencia y una segunda.
- Para encontrar el centro de la segunda circunferencia se debe trazar una recta perpendicular a la bisectriz elegida que pase por el punto de tangencia entre

ambas circunferencias. Con esta última perpendicular se formará un nuevo triángulo dentro del original, por lo que se puede seguir el procedimiento del primer punto para determinar su circunferencia inscrita (ilustración 17b).

- Las dos circunferencias restantes se pueden obtener siguiendo el procedimiento descrito en los dos puntos anteriores.

3.4.2 Tareas de la segunda etapa

Para la segunda etapa, se eligieron tareas del libro Geometría Euclidiana, del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (López, 1984). Se eligieron estas tareas con el objetivo de que los estudiantes reprodujeran ciertas figuras a partir de su visualización y el conocimiento de algunas de sus condiciones. Además, las tareas de esta etapa involucran temas diferentes a las de la primera, como las propiedades del círculo y las paralelas, con la finalidad de ampliar el alcance del contenido matemático y con ello conocer otros tipos de razonamientos geométricos.

1.- En la siguiente figura (ilustración 18) se cumple que: los ángulos 1 y 2 son iguales; los segmentos NM y CA son paralelos; y el segmento CB es tangente a la circunferencia con centro en O , en el punto C . Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que el ángulo del vértice B es un ángulo recto?

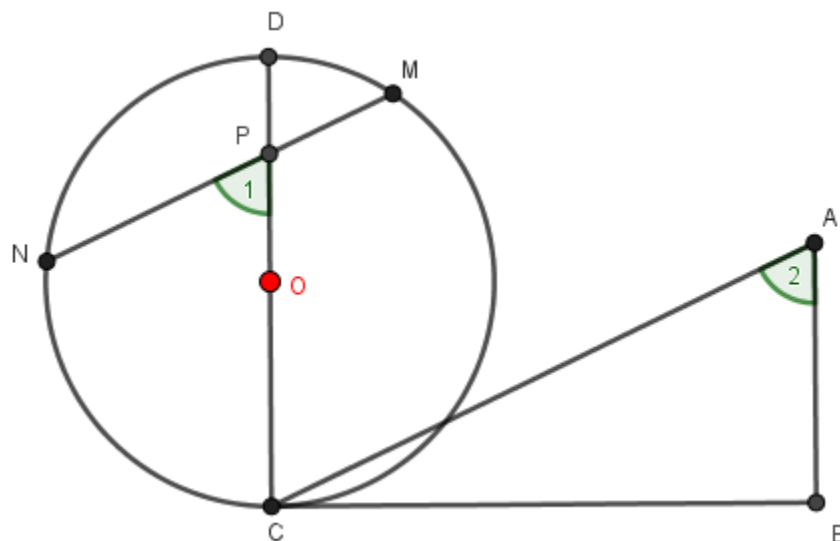


Ilustración 18. Figura presentada en la tarea 1

Posible protocolo de construcción

- Se puede iniciar trazando una circunferencia con la cuerda NM y el diámetro DC dentro de ella. El ángulo que forman la cuerda y el radio será el ángulo 1.
- Por el punto C se debe trazar una paralela a NM y sobre ella colocar un punto A. De esta forma se cumple la condición de NM paralelo a CA.
- Para formar el ángulo 2 igual a el ángulo 1, se debe trazar una paralela al diámetro DC que pase por el punto A (ilustración 19).
- Por último, para determinar el punto B se debe trazar la tangente a la circunferencia por el punto C y marcar la intersección de esta recta con la trazada en el punto anterior.

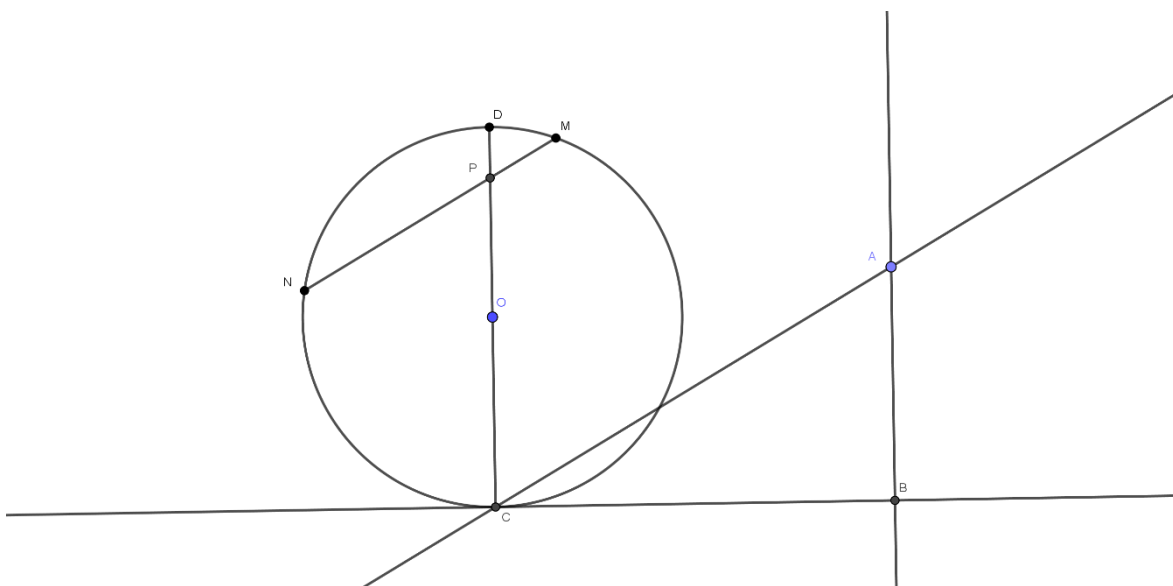


Ilustración 19. Posible construcción de la tarea 1

Para justificar que el ángulo en el vértice B es recto a partir de la construcción, basta considerar el paralelismo entre el diámetro con el lado AB. Ambos segmentos están cortados por la tangente, por lo que el ángulo en C formado entre el diámetro y la tangente (ángulo recto) es igual al ángulo en el vértice B.

2.-En la siguiente figura (ilustración 20) se cumple que: AB es diámetro de la circunferencia con centro en O; AC es secante de la circunferencia en el punto N; y los segmentos BM y NM son tangentes de la circunferencia, en B y N respectivamente. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que el punto M es punto medio del segmento BC?

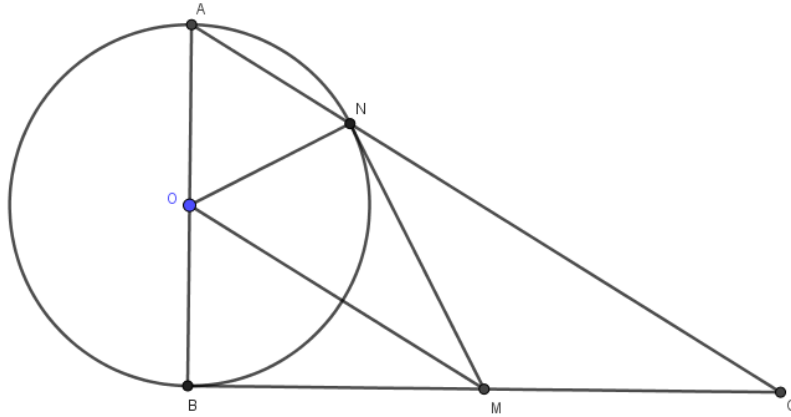


Ilustración 20. Figura presentada en la tarea 2

Posible protocolo de construcción

- Se puede iniciar con la construcción de la circunferencia con centro en O y el diámetro AB dentro de ella. Además, sobre la circunferencia se debe colocar el punto N cuya unión con el punto A determinará una secante a la circunferencia.
- Después, se deben trazar las tangentes a la circunferencia por el punto N y B. La intersección entre estas tangentes determinará el punto M; mientras que la intersección de la tangente por B con la secante determinará el punto C.
- Por último, con un par de segmentos unir los puntos ON y OM para cumplir con todas las condiciones que se proponen en la tarea (ilustración 21).

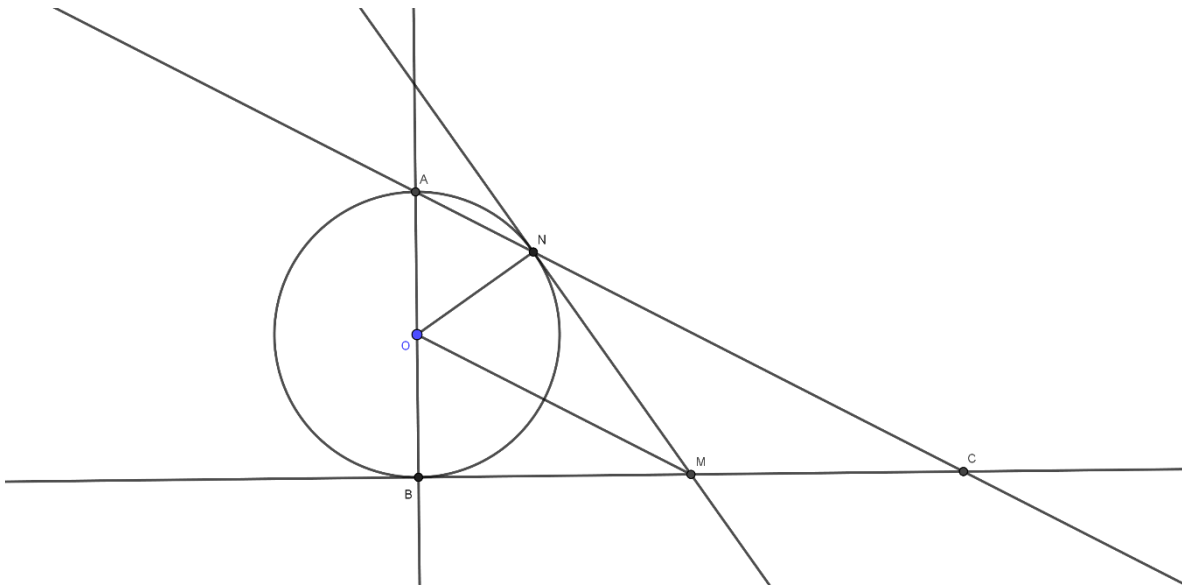


Ilustración 21. Posible construcción de la tarea 2

Para justificar que el punto M es punto medio del lado BC, una posible alternativa es justificar que el triángulo NMC es isósceles. Con lo anterior se justificaría que MC es igual a MN y como MN es igual a MB, por ser M punto en común de dos tangentes, entonces MB será igual a MC por transitividad; y por lo tanto M punto medio de BC.

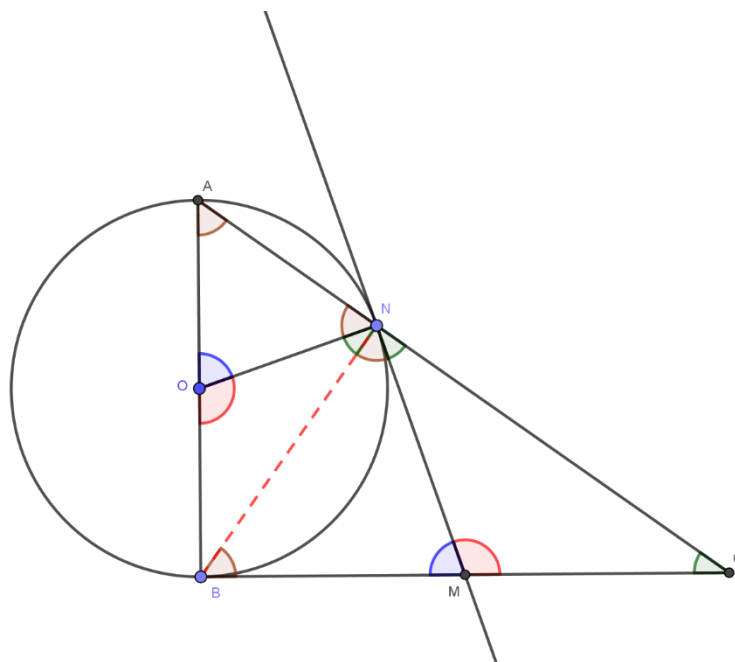


Ilustración 22. Congruencia de ángulos señalada por colores dentro de la figura

La justificación anterior se puede presentar considerando los ángulos dentro de la figura (ilustración 22). En la Tabla 3 se muestran los ángulos a considerar y la respectiva justificación de su igualdad.

Tabla 3. Protocolo de la justificación

| Ángulos | Justificación |
|--|--|
| $\angle NMC = \angle BON$ | Ambos son suplementarios del ángulo $\angle NMB$ |
| $\angle NMB = \angle NOA$ | Ambos son suplementarios de ángulos congruentes |
| $\angle OAN = \angle ONA$ $\angle MBN = \angle MNB$ | Dos pares de ángulos iguales en un par de triángulos isósceles con ángulos desiguales congruentes. |
| $\angle ONB = \angle MNC$ | Ambos son complementarios del ángulo $\angle BNM$ |
| $\angle MNC = \angle MCN$ | Por semejanza entre los triángulos BON y CMN |

3.- En la siguiente figura (ilustración 23) se cumple que: los ángulos 1 y 2 son iguales; los ángulos en los vértices B y G son ángulos rectos; y los segmentos AG y BC son iguales. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que los segmentos BF y GD son iguales?

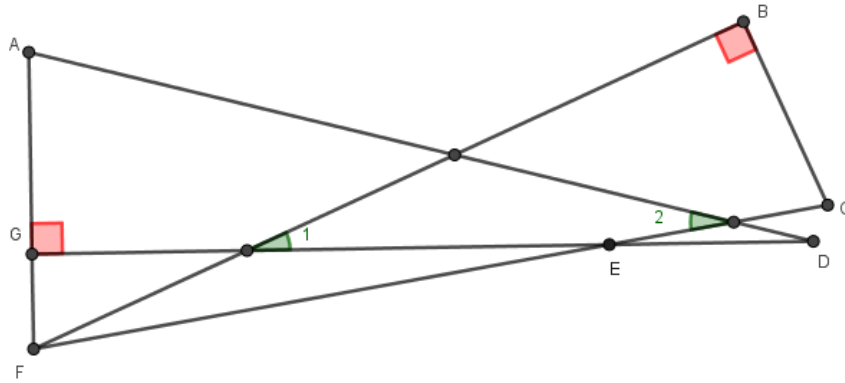


Ilustración 23. Figura presentada en la tarea 3

Posible protocolo de construcción

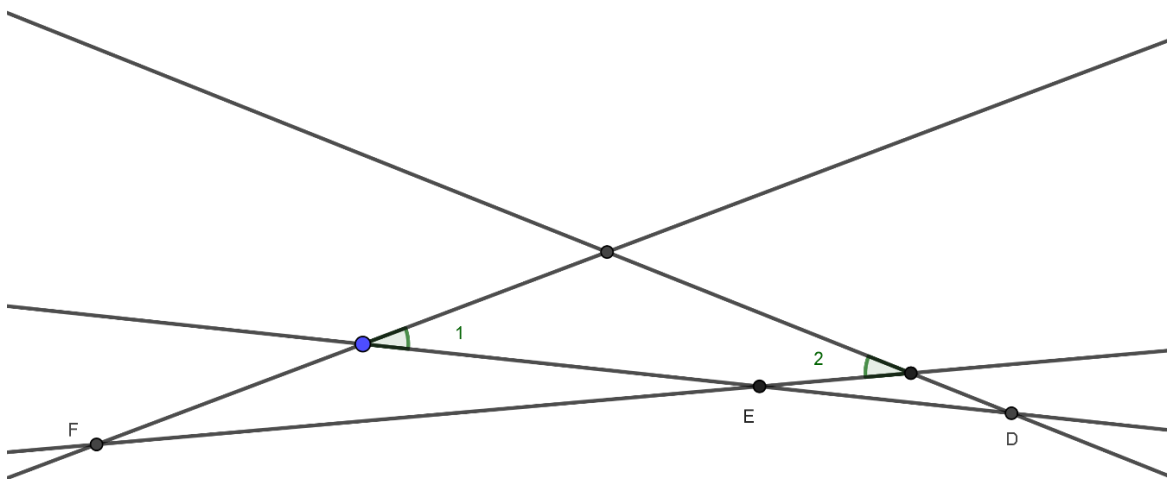


Ilustración 24. Construcción de ángulos 1 y 2 iguales

- Se propone iniciar la construcción con los ángulos 1 y 2 mencionados en la tarea. Para asegurar la igualdad de estos ángulos, se debe usar la herramienta *rotación* de GeoGebra, donde se puede reproducir la medida de un ángulo dado, el ángulo 1 en este caso (ilustración 24).
- Las intersecciones de los lados de estos ángulos determinaran los puntos F y D. Por el punto F se deberá pasar una perpendicular a uno de los lados del ángulo 1.
- Las intersecciones de la perpendicular anterior con uno lado de los ángulos 1 y 2 determinará los puntos A y G; y con ello el triángulo rectángulo AGD.
- Hasta este punto se cumple que el triángulo AGD tiene un ángulo recto en G y que los ángulos 1 y 2 son iguales. Para determinar el punto B, se propone colocar un punto móvil en un lado del ángulo 1, el cual sera el centro de una circunferencia con radio igual a el segmento AG (ilustración 25).

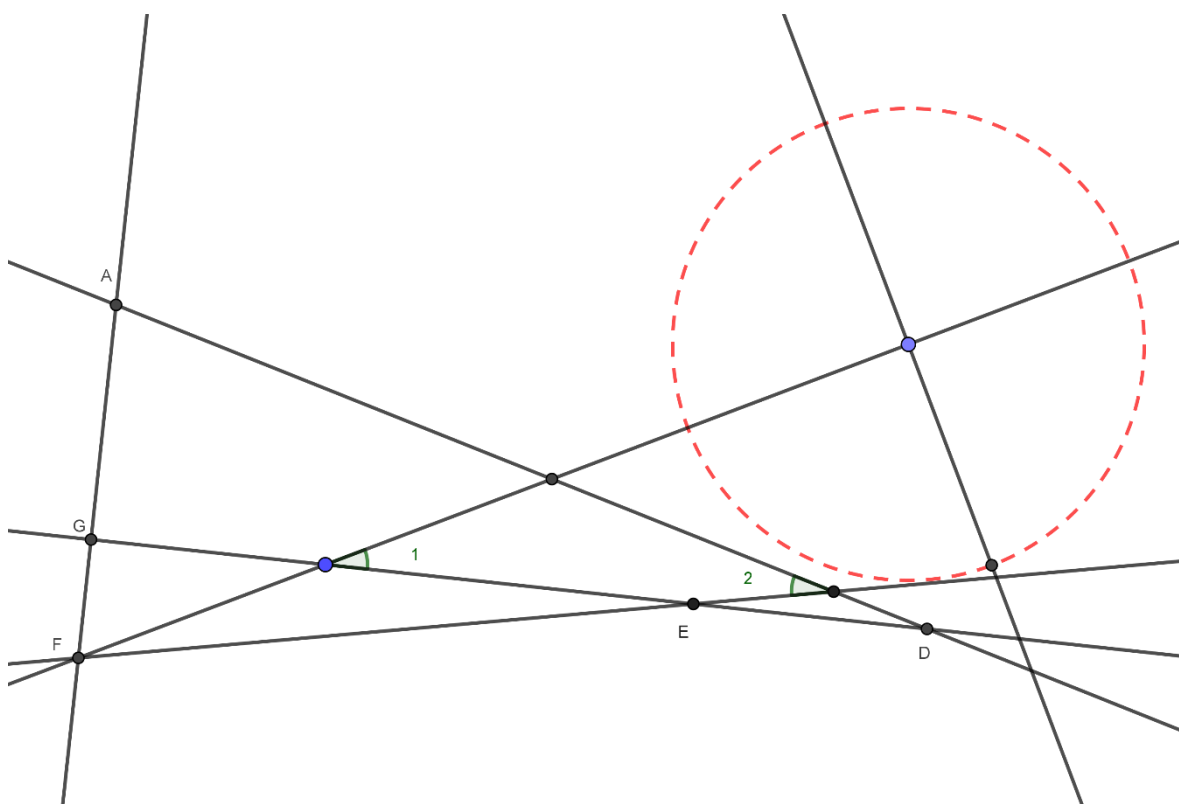


Ilustración 25. Construcción del vértice B móvil

- Por el centro de la circunferencia móvil se deberá trazar un perpendicular al lado posterior del ángulo 1, de tal forma que se determine el ángulo recto que debe tener

el vértice B. La intersección de esta perpendicular con la circunferencia será un punto móvil del cual se puede obtener su lugar geométrico.

- La intersección del lugar geométrico (línea punteada azul) con el lado del ángulo 2 determinará el punto C, con él se podrá encontrar el punto B mediante una perpendicular al lado del ángulo 1 (ilustración 26).

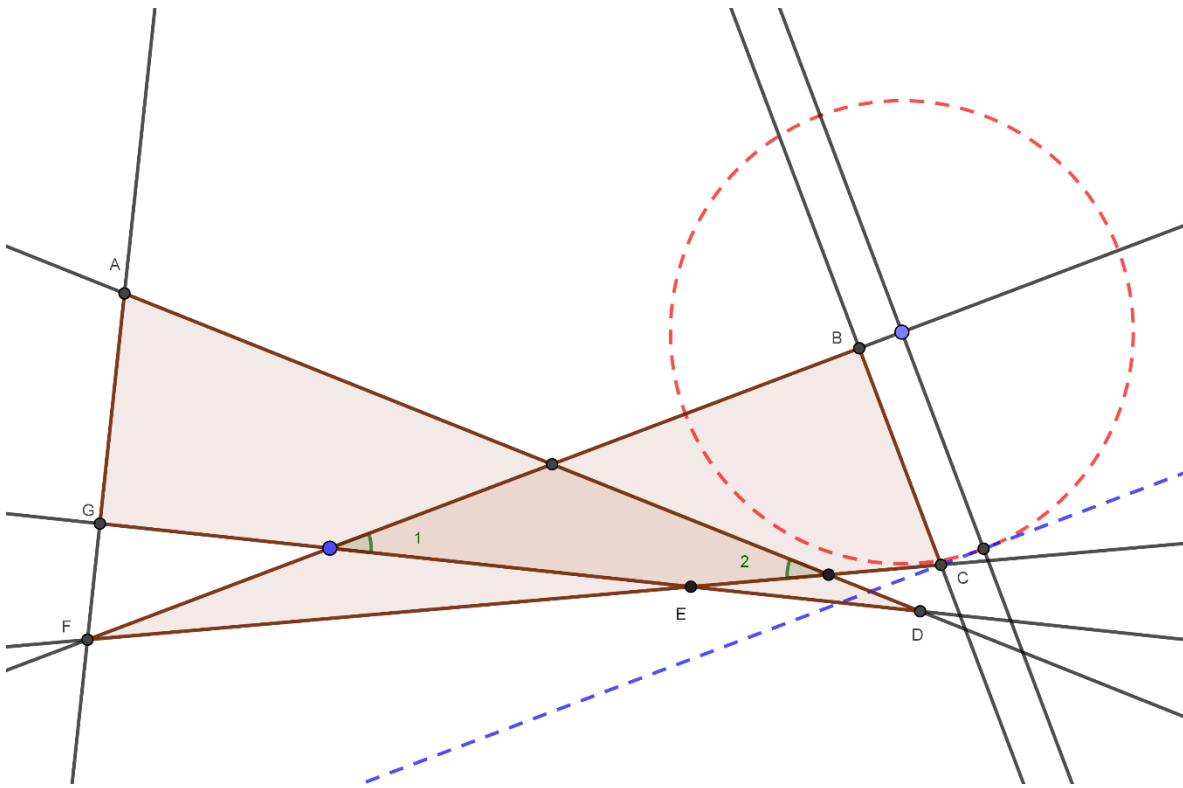


Ilustración 26. Posible construcción de la tarea 3.

Para justificar que los segmentos BF y GD son iguales se debe probar que los triángulos FBC y DGA son congruentes. Consideremos a los vértices de los ángulos 1 y 2 como los puntos P y R respectivamente. Tomando en cuenta lo anterior, se puede justificar que los triángulos FPE y DRE son semejantes por tener sus ángulos correspondientes iguales. Entonces, dado que los ángulos $\sphericalangle RDE$ y $\sphericalangle PFE$ son iguales, los ángulos $\sphericalangle DAG$ y $\sphericalangle FCB$ también son iguales por la suma de los ángulos internos de los triángulos FBC y DGA; por lo tanto, estos triángulos son congruentes por el criterio ángulo-lado-ángulo.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo serán mostradas las respuestas de los estudiantes a las tareas aplicadas en las dos etapas de la investigación. Las figuras que se construyeron en cada una de estas etapas serán analizadas tomando en cuenta las unidades figurativas que los estudiantes identificaron, es decir, los tipos de visualización y deconstrucción observados y manifestados en sus respuestas (Duval, 2005). Además, se mencionará el tipo de razonamiento identificado en estas respuestas según lo establecido por Samper, Leguizamón y Camargo (2001).

4.1 Primera etapa

4.1.1 Tarea 1

De un triángulo ABC se conocen el vértice A , el punto medio del lado AC (punto M_b) y el baricentro G (punto de intersección de las medianas del triángulo). A partir de la relación entre estos tres puntos, construye el triángulo ABC .

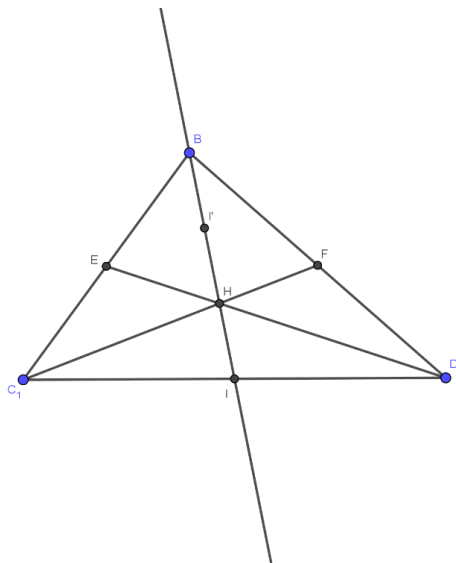


Ilustración 27. Construcción inicial de Javier para explorar las propiedades del baricentro.

Protocolo de construcción del estudiante 1 (Javier): la primera acción que realizó el estudiante fue la construcción de un triángulo arbitrario, con la intención de explorar la relación entre el baricentro, vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice (ilustración 27). Javier mencionó que sabía que existía una relación de proporcionalidad entre estos puntos, pero no recordaba el orden en que se cumplía.

Una vez que reconoció que la distancia del vértice al baricentro es el doble que la del baricentro al punto medio correspondiente, Javier colocó los tres puntos propuestos para iniciar la construcción solicitada (ilustración 28a). Después, con el ícono *simetría central* de GeoGebra, reflejó el vértice A respecto al punto medio M_b para obtener el vértice C; y colocó el punto medio entre el vértice A y el baricentro G para reflejarlo respecto este último y obtener el punto medio M_a (punto J' en su construcción). Por último, para determinar el vértice B (punto C' en su construcción), reflejó el vértice C respecto al punto J' (ilustración 28b). Una vez hallados los tres vértices, únicamente los unió con segmentos y finalizó su construcción (ilustración 28c).

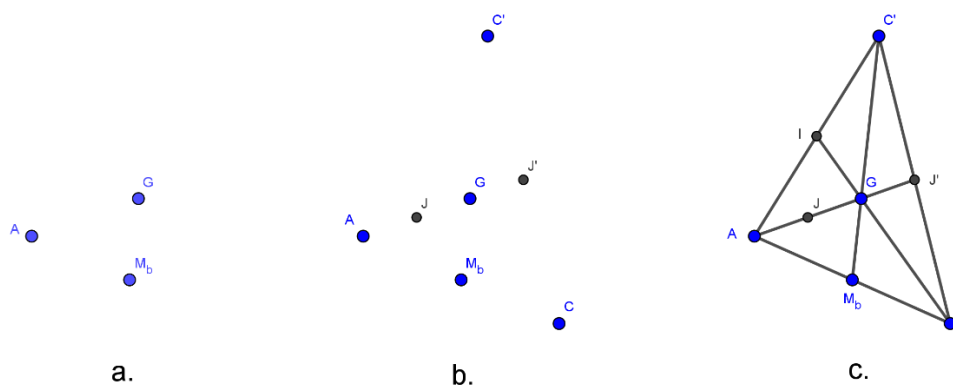


Ilustración 28. Proceso de construcción de Javier.

El estudiante consideró las relaciones geométricas entre los puntos dados en la tarea. En este sentido, la visualización que tuvo sobre la figura es del tipo no-icónica, ya que tomó en cuenta los elementos que la componen para su construcción. Además, la deconstrucción que

hizo sobre su figura inicial es de tipo dimensional porque a partir de la identificación de unidades figurativas adimensionales (puntos dados y determinados) y sus relaciones, obtuvo la figura bidimensional propuesta.

Sobre el razonamiento del estudiante, se observa una transición del *razonamiento visual* hacia el *razonamiento intuitivo*. Lo anterior se señala debido a que, al inicio de su respuesta, intentó recordar una propiedad del baricentro a través de explorar y observar el dinamismo de un triángulo arbitrario. Una vez reconocida esta propiedad, Javier explicó y justificó el protocolo de construcción de su figura final.

Protocolo de construcción de la estudiante 2 (Karla): el primer trazo de la estudiante fue la recta que une al vértice y al punto medio dados. Después, trazó una circunferencia con centro en M_b y radio igual a la distancia entre A y M_b , para que su intersección con la recta determinara el vértice C (ilustración 29).

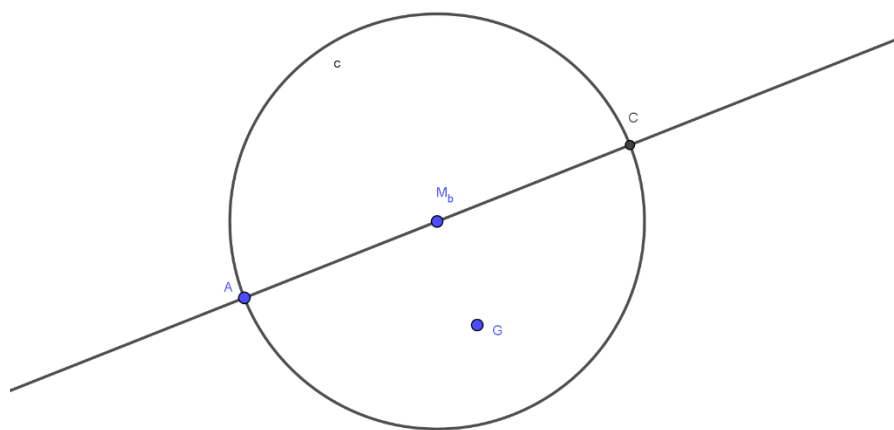


Ilustración 29. Construcción del vértice C a partir de los puntos dados.

La estudiante mencionó que sabía que existía una relación entre el vértice, el baricentro y el punto medio del lado opuesto al vértice, sin embargo, no la recordaba. El investigador le propuso trazar un triángulo cualquiera (figura inicial) y explorar la relación mencionada. Una vez reconocida la propiedad entre estos puntos, Karla regresó a su construcción original.

Los siguientes trazos fueron la recta que une al vértice C con el baricentro, y el punto medio entre estos dos. Mediante una circunferencia con centro en G y radio igual a la distancia entre G y B, determinó el punto D, el cual representó el punto medio M_c del triángulo buscado (ilustración 30a). Por último, para encontrar el vértice B (punto E en su construcción), la estudiante realizó el mismo procedimiento con el que obtuvo el vértice C (ilustración 30b).

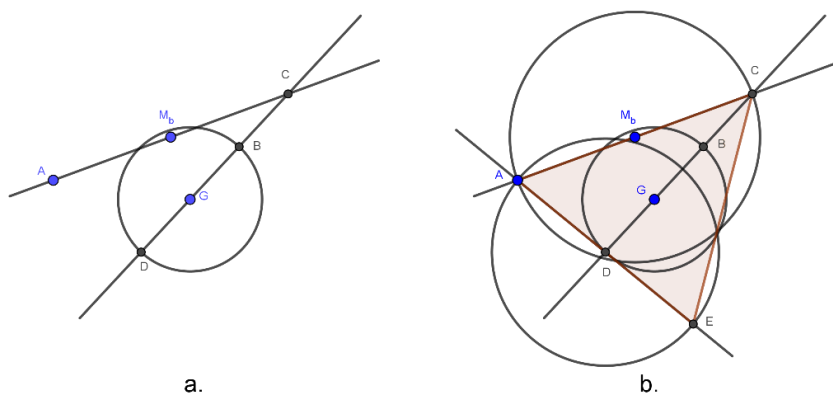


Ilustración 30. Proceso final en la construcción de Karla.

Aunque la estudiante también consideró las relaciones entre los puntos dados para construir la figura (visualización no icónica), el proceso de construcción que desarrolló fue distinto al de Javier. Los trazos que realizó Karla no eran elementos propios del triángulo solicitado, sino trazos auxiliares que fueron necesarios para construirlo. Por lo tanto, la deconstrucción que realizó sobre la figura inicial fue de tipo instrumental, ya que la reconstrucción de esta figura se obtuvo a través de un conjunto de trazos externos determinados por los instrumentos utilizados (Duval, 2005).

Respecto al razonamiento observado, hubo manifestaciones de *razonamiento visual* cuando la estudiante evocó propiedades del baricentro mediante la exploración dinámica de un triángulo arbitrario. Sin embargo, esta exploración, y por lo tanto este razonamiento, no fueron propiciados por ella, sino sugeridos por el investigador. Este procedimiento concluyó con un *razonamiento intuitivo* cuando Karla explicó con lenguaje natural el protocolo de construcción de su figura.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Araceli): al igual que los primeros dos participantes, esta estudiante construyó una figura inicial para explorar las propiedades del baricentro. No obstante, su proceso de construcción refleja una diferencia respecto al de sus compañeros. La figura inicial de la estudiante fue un triángulo rectángulo, dentro del cual resaltó con un color diferente los puntos dados en la tarea (ilustración 31).

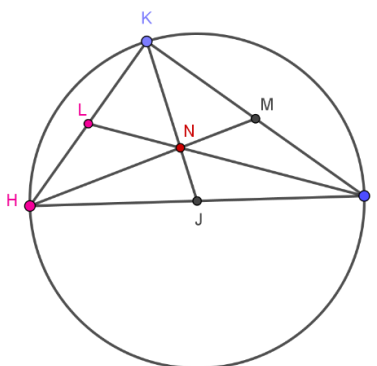


Ilustración 31. Figura inicial que exploró Araceli.

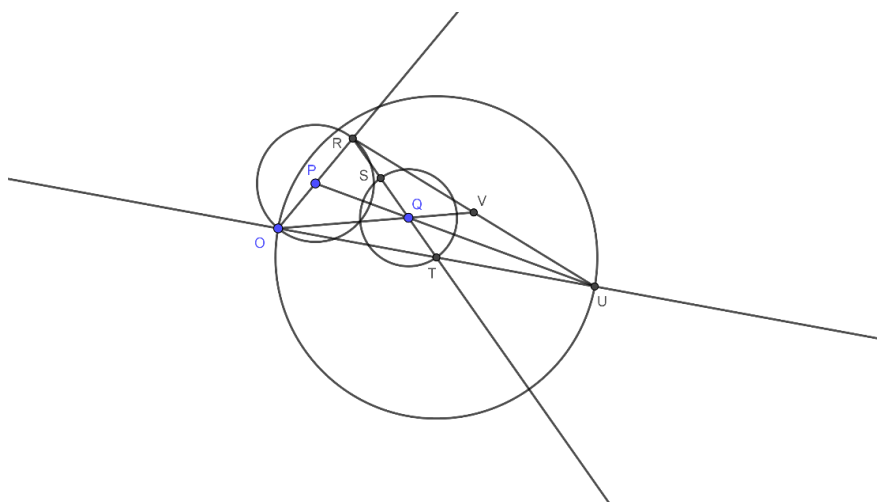


Ilustración 32. Construcción final de Araceli (triángulo ORU).

Después de explorar brevemente su construcción inicial, Araceli se dio cuenta de que la distancia de un vértice al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al punto medio correspondiente. Sin embargo, la estudiante no tomó esto en cuenta, ya que intentó reproducir

su figura inicial, a partir de los puntos dados, fijándose en que la posición de estos fuera visiblemente similar en ambas configuraciones (ilustración 32).

Para su construcción final, Araceli desarrolló un protocolo similar al de Karla (rectas y circunferencias), por lo que la deconstrucción de la figura inicial también es considerada de tipo instrumental. Por otra parte, no se puede afirmar que la visualización de la estudiante sobre la figura fue cien por ciento icónica o no-icónica, ya que, por un lado, la construcción se realizó tomando en cuenta la percepción visual de una figura inicial (icónica); y por otro, los trazos de la construcción final se realizaron tomando en cuenta las propiedades geométricas de la figura propuesta (no-icónica).

En cuanto al razonamiento de la estudiante, se observa una marcada tendencia hacia un *razonamiento visual*. Esto se manifestó desde la exploración de la figura inicial, ya que intentó reproducir esta figura tal y como la observó, sin mencionar que sus propiedades se pueden cumplir para cualquier otro triángulo. El *razonamiento intuitivo* también estuvo presente, pero de una forma menos marcada, cuando Araceli describió el protocolo de construcción de su figura final.

4.1.2 Tarea 2

De un triángulo ABC se conocen el vértice A, el punto medio del lado BC (punto M_a) y el circuncentro O (punto de intersección de las mediatrices del triángulo). A partir de la relación entre estos tres puntos, construye el triángulo ABC. ¿Los puntos descritos pueden ser cualesquiera? Explica tu respuesta.

Protocolo de construcción del estudiante 1 (Javier): al igual que en la tarea anterior, el estudiante inició con la construcción de un triángulo cualquiera para explorar sus propiedades. Esta exploración le sirvió para recordar que el circuncentro de un triángulo es equidistante a sus vértices.

Después de recordar la propiedad del circuncentro, el estudiante colocó los tres puntos dados en una posición arbitraria y trazó una circunferencia con centro en O y radio OA (ilustración 33a). Además, unió el circuncentro y el punto medio dados con un segmento y trazó la perpendicular a este, pasando por el punto medio M_a . Por último, determinó los

vértices B y C mediante las intersecciones de la circunferencia y la recta perpendicular antes mencionada (ilustración 33b).

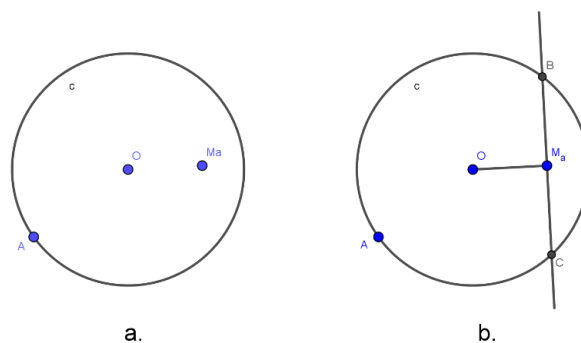


Ilustración 33. Proceso de construcción de Javier.

Sobre la pregunta que se plantea al final de la tarea, Javier no tuvo inconveniente en percatarse de que, para que su construcción mantuviera las condiciones establecidas, la distancia del circuncentro al punto medio M_a debía ser menor que la distancia del circuncentro al vértice A. Si lo anterior no se cumpliera, la propiedad de equidistancia del circuncentro a los vértices de un triángulo tampoco se cumpliría.

Nuevamente el estudiante realizó una deconstrucción dimensional sobre su figura inicial, ya que, si bien utilizó trazos auxiliares para realizar su construcción, estos trazos pueden considerarse como unidades figurativas que componen a la misma figura (circunferencia que circunscribe al triángulo y recta que contiene uno de sus lados). Además, la visualización que tuvo sobre la figura fue no-icónica, ya que para su construcción se apoyó en las relaciones geométricas de las unidades que la componían.

Javier exhibió un *razonamiento visual* al explorar su construcción inicial y observar la propiedad de equidistancia del circuncentro de un triángulo hacia sus vértices. Después, este razonamiento pasó a ser *intuitivo* cuando el estudiante explicó el protocolo de construcción de su figura final. Esta explicación la comunicó a través de un lenguaje informal, tomando en cuenta las condiciones geométricas que se cumplían en la figura.

Protocolo de construcción de la estudiante 2 (Karla): el proceso de construcción de esta estudiante fue prácticamente el mismo que el de Javier. La única diferencia entre ambos estudiantes es que Karla comenzó con el trazo de la perpendicular a la recta que pasa por M_a y O (ilustración 34a), para posteriormente trazar la circunferencia con la que determinó los vértices B y C (ilustración 34b).

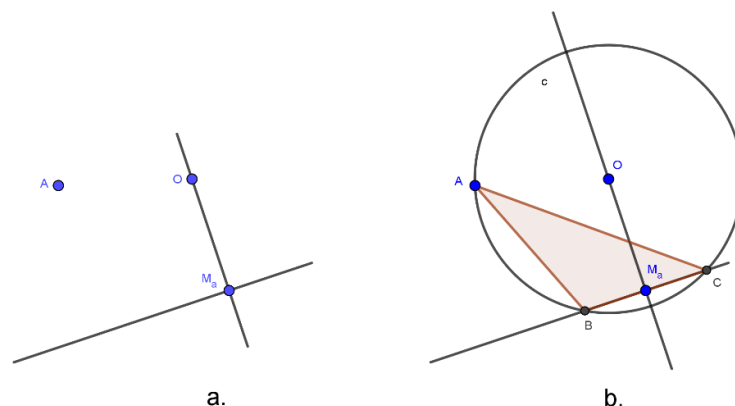


Ilustración 34. Proceso de construcción de Karla.

Dada la similitud en los protocolos de construcción de los estudiantes 1 y 2, se considera que el tipo de visualización para sus respectivas figuras fue el mismo. Es decir, en ambos casos se observó una visualización no-icónica. En cuanto a la desconstrucción, Karla no construyó una figura inicial de la cual pudiera considerar sus unidades figurativas, sino que estas unidades fueron identificadas directamente del enunciado de la tarea y, por lo tanto, no hubo una figura inicial que desconstruir.

Respecto a la pregunta que se planteó en la tarea, la estudiante no logró identificar ni deducir la condición necesaria para que su construcción no se perdiera por el movimiento de alguno de los puntos que la componían. Por lo tanto, el investigador tuvo una interacción con ella, de tal manera que, con preguntas e instrucciones particulares, la dirigió hacia la percepción de la condición buscada. A continuación, se muestra un fragmento de esta interacción:

Karla: - (después de explorar su construcción) ... no, la verdad no se me ocurre qué condición se debe cumplir.

Investigador: - Para que se forme el triángulo, fíjate que se tiene que intersectar la circunferencia con la recta.

Karla: - Sí.

Investigador: - Entonces, si quieres, ve alejando un poquito el circuncentro.

Karla: - ¿De tal manera que no haya intersección?

Investigador: - De tal manera que haya intersección.

Karla: - Sí.

Investigador: - Entonces, fíjate, en ese punto (señala punto M_a cuando este es punto de tangencia), ¿cómo es la distancia del circuncentro al punto medio con relación a la distancia del circuncentro al vértice?

Karla: - Pues esta es mayor, en este caso OM_a es mayor...

Investigador: - Cuando es tangente sería la misma ¿no?

Karla: - Sí, cuando es tangente sería igual.

Investigador: - Ok, ¿y cuando es mayor?

Karla: - Cuando es mayor no se da la intersección.

Investigador: Entonces, ¿ahí se podría concluir alguna condición? ¿con ese segmento?

Karla: - Que la distancia del circuncentro al punto medio no puede ser mayor a la distancia del circuncentro al vértice.

En la primera parte de la respuesta se observa un *razonamiento intuitivo*, ya que, con ideas geométricas expresadas en un lenguaje natural, la estudiante explicó el protocolo de construcción de su figura. Sin embargo, la segunda parte de la respuesta se ancla en un *razonamiento visual*, dado que al determinar la condición necesaria para que su figura se

mantuviera válida, Karla observó su construcción en distintas posiciones a través de una exploración dinámica.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Araceli): la estudiante construyó dos figuras iniciales antes de la que se propuso en la tarea. En la primera observó cómo se comportaba el circuncentro de un triángulo; mientras que en la segunda resaltó los puntos dados con un color diferente (ilustración 35a).

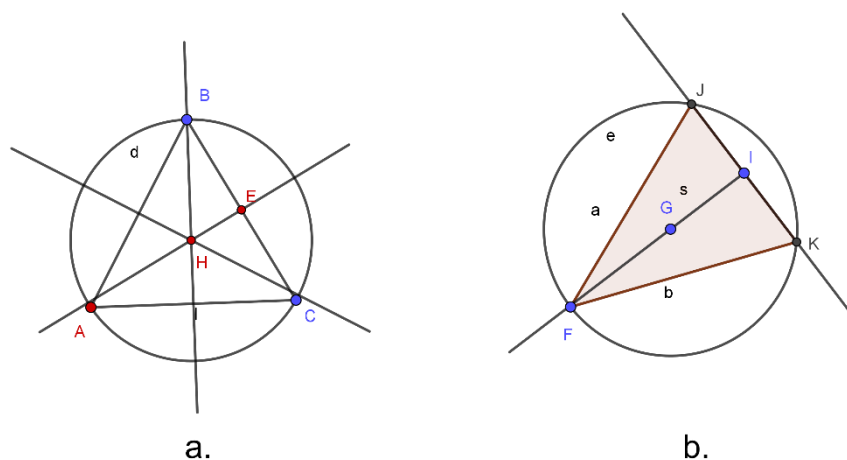


Ilustración 35. Construcción inicial y construcción final de Araceli.

Con un procedimiento similar al de Karla, Araceli reprodujo su segunda construcción tomando en cuenta las relaciones entre las unidades figurales que identificó. Debido a que esta construcción la obtuvo sin involucrar trazos que no fueran propios del triángulo buscado, se considera que la deconstrucción que hizo la estudiante sobre la figura inicial fue de tipo dimensional (ilustración 35b).

Respecto a la pregunta que se planteó en la tarea, Araceli tampoco logró identificar o deducir la condición necesaria para que la figura mantuviera sus propiedades. De hecho, su exploración la orilló a plantear conjeturas erróneas como que los puntos dados deberían ser colineales. Después de observar este comportamiento, el investigador intervino con una serie de preguntas e instrucciones, con el objetivo de apoyar a la estudiante a reconocer las condiciones bajo las cuales la configuración era válida. A continuación, un fragmento de la interacción entre el investigador y la estudiante:

Investigador: - ¿En qué punto se empieza a formar el triángulo que construiste?

Araceli: - Cuando esta circunferencia, la circunferencia e , toca también a I (punto medio). Y si no la toca, pues no se forma el triángulo.

Investigador: - Por ejemplo, ahí, cuando pareciera que es tangente, ¿cómo es la distancia del punto medio al circuncentro en relación con la distancia del circuncentro al vértice?

Araceli: - Iguales.

Investigador: - A partir de esa idea, ¿alguna condición que propongas para que la tarea tenga solución?

Araceli: Que sea más grande la distancia del circuncentro al punto medio que del circuncentro al vértice.

Investigador: - ¿Mas grande del circuncentro...

Araceli: - No, más pequeña, más pequeña, ajá, sí, más pequeña. Esta distancia de G a I que de G a F .

Investigador: - Ok, para que tenga solución el ejercicio ¿no?

Araceli: - Sí, porque si no, no da, se pierde el triangulito.

Como en la tarea 1, la visualización de la estudiante sobre la figura fue parte icónica y parte no-icónica. Esto se debe a que al inicio intentó reproducir una figura por su aspecto visual (icónica), pero después de la interacción con el investigador, recurrió a las propiedades geométricas de la figura para su construcción (no-icónica).

El razonamiento de la estudiante se considera de tipo *visual* debido a la intención de reproducir su figura inicial, con base más en la posición de sus elementos que en sus propiedades geométricas. Este razonamiento se mantuvo durante la búsqueda de una condición que validara su construcción, ya que fue durante la exploración dinámica de la figura que Araceli reconoció esta condición y la pudo comunicar.

4.1.3 Tarea 3

En la siguiente imagen (ilustración 36) se muestran los lados BC y AC de un triángulo, cuyas longitudes son 7 y 4 respectivamente. También, se presenta el ángulo α , opuesto a alguno de los lados mencionados, cuya medida es de 30 grados. Construye el triángulo al que pertenecen estos tres componentes. ¿Cuántas construcciones cumplen con las condiciones dadas?

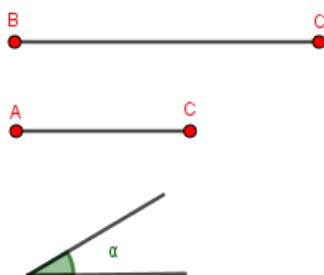


Ilustración 36. Elementos del triángulo presentados en la tarea 3.

Protocolo de construcción del estudiante 1 (Javier): el primer trazo del estudiante fue el lado BC; y con centro B trazó una circunferencia de radio 4 (ilustración 37a). Después, mediante el ícono *rotación* de GeoGebra, rotó 30 grados al lado BC en sentido antihorario, tomando como centro de rotación al vértice C (ilustración 37b). Por último, unió los puntos C y B' con una recta, de tal forma que esta intersecara a la circunferencia de radio 4 en dos puntos, los cuales representarían dos posibles soluciones para la tarea (ilustración 37c).

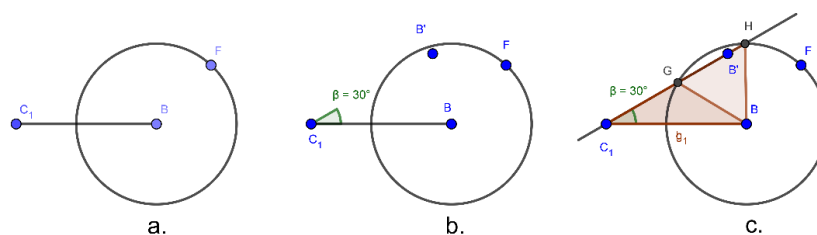


Ilustración 37. Proceso de la primera construcción de Javier.

Para su segunda construcción, Javier nuevamente comenzó trazando el lado de longitud 7 (segmento IJ) y la circunferencia de radio 4 con centro en uno de sus extremos. Después, sobre la circunferencia colocó un punto móvil (punto K), el cual usó como centro de rotación para rotar el centro de la circunferencia (punto J) 30 grados en sentido antihorario (ilustración 38a). Por último, el estudiante unió con una recta al punto rotado J' y al punto móvil sobre la circunferencia, el cual colocó de tal forma que la recta pasara por uno de los extremos del lado IJ (ilustración 38b).

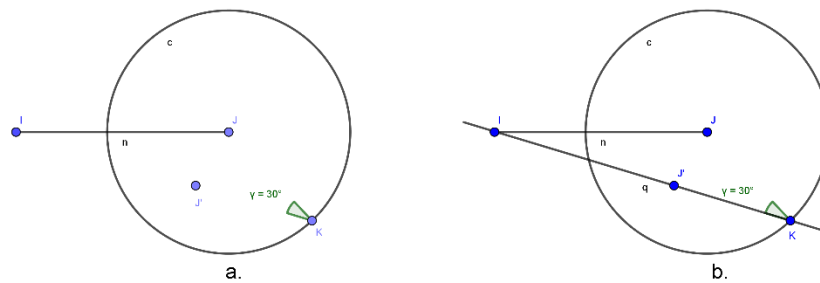


Ilustración 38. Proceso de la segunda construcción de Javier.

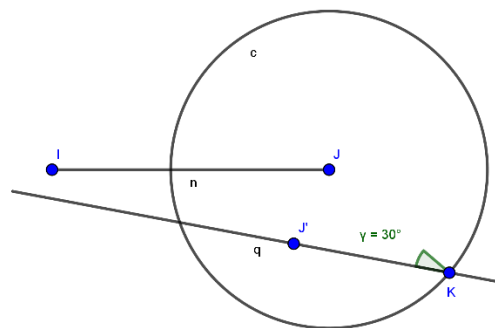


Ilustración 39. Solución no válida al mover el punto K.

A diferencia de su primera construcción, Javier no justificó las propiedades de la segunda figura que presentó con relaciones geométricas, sino por lo observado en ella en una posición particular (ilustración 39). Por lo tanto, la solución era válida únicamente de manera visual en dicha posición particular del punto móvil K.

A continuación, se muestra parte de la interacción entre el investigador y Javier, quien acepta, de manera coloquial, que parte las acciones que realizó para su segunda construcción no eran matemáticamente válidas.

Investigador: - ... de esta segunda construcción, la de acá abajo, ¿me podrías describir el procedimiento de cómo la hiciste?

Estudiante: - Igual, este...agarré de base digamos, entre comillas, como horizontal el lado largo, el de siete, e hice una circunferencia de radio cuatro y fijé un ángulo de 30 grados aquí (señala punto móvil K).

Investigador: - Ok

Estudiante: - en este punto en la circunferencia. Entonces, ahora sí dije, tramposamente, ah, pues lo muevo para que empate con este (señala intersección en el punto I). Ahí está.

En las dos construcciones descritas se puede observar una marcada diferencia entre una visualización icónica y una no-icónica. Por un lado, la primera construcción fue realizada con base en las relaciones geométricas que el estudiante conocía, por lo que se puede hablar de una visualización no-icónica. Sin embargo, la segunda construcción fue justificada por su apariencia visual, por la posición y forma que Javier observó en la figura, manifestando de esta manera una visualización icónica.

En cuanto a la deconstrucción de las figuras, el estudiante identificó sus respectivas unidades figurativas a partir del enunciado de la tarea, por lo que no hubo una figura inicial que deconstruir. No obstante, la geometría dinámica como herramienta para la construcción de la figura jugó un papel importante. En el primer caso, la figura se construyó a partir de un conjunto de trazos auxiliares y elementos colocados con comandos particulares de GeoGebra; mientras que, en el segundo caso, la construcción se justificó gracias al dinamismo brindado por el software. Es decir, la herramienta le permitió al estudiante, al

arrastrar un punto sobre la circunferencia, colocar los elementos de la figura en una posición visualmente correcta, pero sin considerar las relaciones geométricas entre estos elementos.

El razonamiento geométrico de Javier transitó de lo *intuitivo* a lo *visual*. Lo anterior se menciona debido a que, en sus primeras dos soluciones, el estudiante comunicó ideas geométricas en un lenguaje natural (*razonamiento intuitivo*); mientras que, para su tercera solución, únicamente se apoyó en lo percibido en una posición particular de la figura, aun sabiendo que esta solución solo se cumplía cuando el punto K aparentemente era colineal con los puntos I y J' (*razonamiento visual*).

Protocolo de construcción de la estudiante 2 (Karla): la estudiante comenzó con el trazo de un par de circunferencias, una de radio 7 y otra de radio 4; esta última con centro en un punto sobre la primera (ilustración 40a).

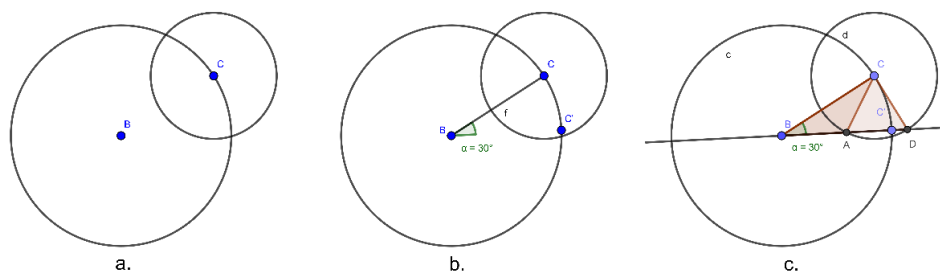


Ilustración 40. Proceso de la primera construcción de Karla.

Karla unió con un segmento los centros de las circunferencias para determinar el lado BC. Después, rotó al vértice C 30 grados en sentido horario, tomando como centro de rotación al vértice B (ilustración 40b). Por último, unió con una recta el punto rotado C' y el vértice B, de tal forma que esta recta intersecara en dos puntos a la circunferencia de radio 4 (ilustración 40c). Dichos puntos representaron dos soluciones para la tarea propuesta.

Para su segunda construcción la estudiante también comenzó con el trazo de dos circunferencias, pero esta vez en un orden inverso. Primero colocó la de radio 4 y con centro en un punto sobre ella trazó la de radio 7 (ilustración 41a). Después, unió los centros de las circunferencias con una recta y rotó uno de ellos (vértice B) 30 grados en sentido antihorario,

tomando como centro de rotación al vértice A (ilustración 41b). Por último, trazó la recta que une al punto rotado B' con el vértice A, de tal forma que intersecara a la circunferencia de radio 7 en dos puntos (ilustración 41c). Sólo uno de estos puntos representó otra solución para la tarea (punto C).

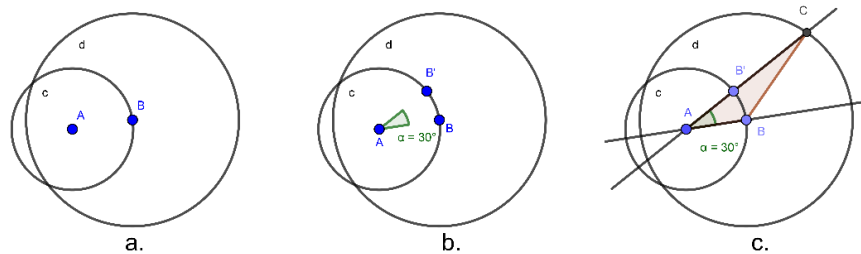


Ilustración 41. Proceso de la segunda construcción de Karla.

En las tres soluciones que presentó Karla, consideró las relaciones geométricas entre los elementos de la figura para su construcción. Por lo tanto, se puede considerar que la visualización que tuvo sobre la figura fue de tipo no-icónica. Por otra parte, a pesar de que las soluciones se desarrollaron a través de trazos auxiliares que no pertenecían a la figura solicitada, la estudiante no presentó una figura inicial para realizarlas, por lo que no se puede hablar de alguna deconstrucción en este caso.

El razonamiento que se puede observar en esta tarea es de tipo *intuitivo*, ya que las tres soluciones que se presentaron fueron desarrolladas a partir de ideas geométricas que la estudiante conocía sobre la figura propuesta. Después, dichas ideas fueron comunicadas en un lenguaje informal para explicar el protocolo de construcción de las figuras y justificar por qué eran válidas según las condiciones solicitadas.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Araceli): como en las tareas anteriores, la estudiante comenzó trazando un triángulo arbitrario para explorarlo e intentar reproducirlo según la posición de sus elementos.

La base de la primera construcción que presentó fue el ángulo dado en la tarea, el cual trazó con el comando *ángulo dada su amplitud*. Después, con centro en el vértice de este ángulo, trazó una circunferencia de radio 4 que lo intersecó en dos puntos (ilustración 42a).

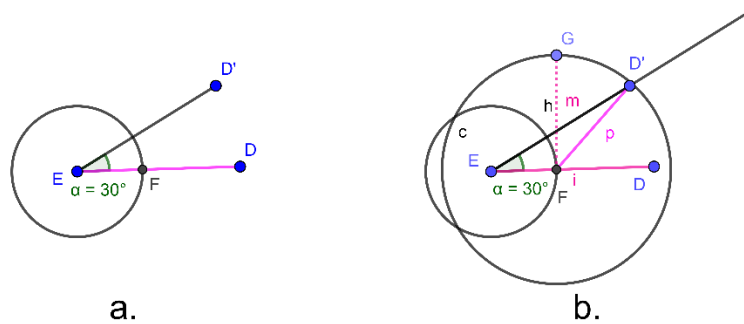


Ilustración 42. Primera solución presentada por Araceli.

Enseguida dibujó una nueva circunferencia de radio 7 con centro en una de las intersecciones antes mencionadas. Después de explorar el comportamiento de un punto móvil sobre esta última circunferencia, prolongó uno de los lados del ángulo con una semirrecta de tal manera que la intersecara en un punto (ilustración 42b). Este punto representó la primera solución encontrada por la estudiante.

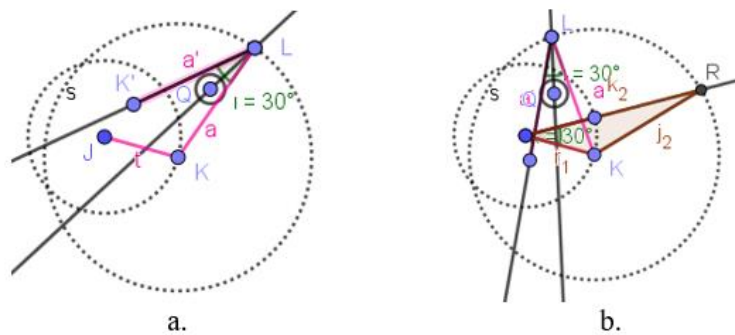


Ilustración 43. Exploración dinámica y segunda solución presentada por Araceli.

Con un proceso de construcción diferente, Araceli encontró la misma solución que se describió en el párrafo anterior. Básicamente, este proceso es el mismo que el que desarrolló Karla en su segunda construcción, la única diferencia es que en este caso se exploró

dinámicamente la posición en la que debía ser colocado el ángulo de 30 grados, opuesto al lado de longitud 7 (ilustración 43a). Finalmente, Araceli halló dicha posición y con ella, una solución a la tarea donde su construcción no se alterara con el movimiento de algún punto (ilustración 43b).

En ambas construcciones, la visualización que hizo la estudiante sobre la figura es mayormente icónica, porque si bien sus soluciones respetan las condiciones geométricas establecidas en la tarea, estas fueron encontradas por la exploración dinámica que se realizó y fue esta exploración la que visualmente mostró dónde debían ser colocados los puntos solución de la tarea. Por otro lado, la deconstrucción que se observa sobre la figura inicial es de tipo instrumental, ya que, además de utilizar un conjunto de trazos auxiliares para obtener las construcciones finales, las relaciones entre los elementos de estas fueron reveladas gracias al dinamismo brindado por GeoGebra.

El razonamiento exhibido por la estudiante en esta tarea es un híbrido entre el *razonamiento visual* y el *razonamiento intuitivo*. Esto se debe a que, durante todo el desarrollo de la respuesta, Araceli consideró tanto la posición de los elementos de su figura inicial, para reproducirla posteriormente; como las relaciones geométricas entre estos elementos para explicar su protocolo de construcción.

4.1.4 Tarea 4

En la siguiente imagen (ilustración 44) se muestran los lados BC y AC de un triángulo, cuyas longitudes son 7 y 5 respectivamente. También, se muestra la altura correspondiente al vértice A de este triángulo (h_a), cuya longitud es de 4.5. Construye el triángulo al que pertenecen estos tres componentes. ¿Cuántas construcciones cumplen con las condiciones dadas?

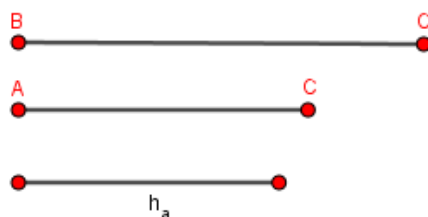


Ilustración 44. Elementos del triángulo presentados en la tarea 4.

Protocolo de construcción del estudiante 1 (Javier): el estudiante comenzó con el trazo de un segmento de longitud 5 considerando que se trataba del lado BC (BC_1 en su construcción) y no el AC como se solicita en la tarea. Sobre este segmento colocó un punto móvil y una perpendicular por dicho punto. Después, tomando como centro al punto móvil D, trazó una circunferencia de radio 4.5; y otra circunferencia de radio 7 con centro en C_1 (ilustración 45a).

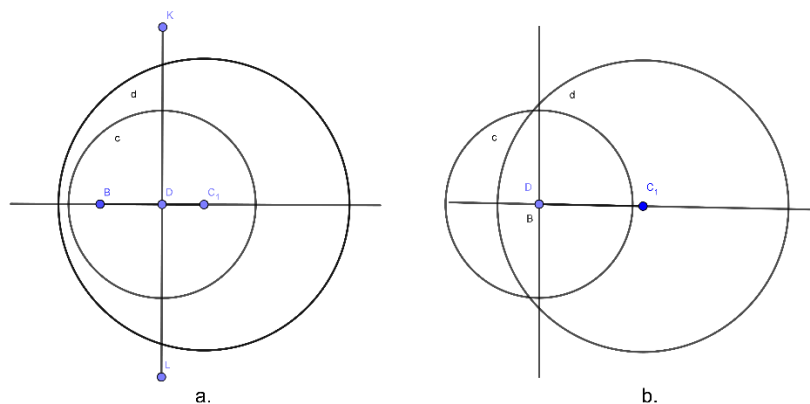


Ilustración 45. Construcción de Javier donde no observa una solución a la tarea.

Después de explorar dinámicamente su primera construcción, Javier afirmó que no había solución para la tarea propuesta, ya que no había un punto en el que ambas circunferencias y la recta perpendicular se intersecaran (ilustración 45b). Sin embargo, después de interactuar con el investigador y de una nueva exploración, el estudiante cambió de opinión. A continuación, se muestra la parte de la interacción entre el investigador y estudiante en la que se presenta esta situación.

Investigador: - ¿Ahí qué estás buscando?, en esa configuración.

Javier: - Pues estoy buscando el triángulo, según yo, no existe.

Investigador: - Ok

Javier: - Acá tenemos... espera (marca la intersección entre la perpendicular y la circunferencia de radio 4.5). Este punto nos marcaría el vértice, cuya altura serían los 4.5 y el círculo grande nos marca los lados de 7, pero ningún punto puede tocar este

punto (señala punto E) a la circunferencia grande. Entonces, según yo, no existe un triángulo que tenga esas cualidades.

Investigador: - ¿Y no habrá otro procedimiento de construcción donde se pueda llegar a la solución? o con esa configuración ya determinas que no existe la solución del triángulo.

Javier: - Pues es que mira, vámonos a casos extremos (coloca el punto móvil en el extremo B del segmento) ... no, no, espérame, ah, no, sí existe, perdón.

Una vez que el estudiante se dio cuenta que sí había solución para la tarea, modificó su configuración. Primero, prolongó con una recta el lado BC_1 , de tal manera que ahora el punto móvil D se desplazaba a través de esta recta, junto con la perpendicular y la circunferencia de radio 4.5 (ilustración 46a). Después, dibujó una recta paralela al lado AC que pasara por el punto E, de tal manera que intersecara la circunferencia de radio 7 en dos puntos (ilustración 46b). Estos dos puntos representaron las dos soluciones encontradas por el estudiante.

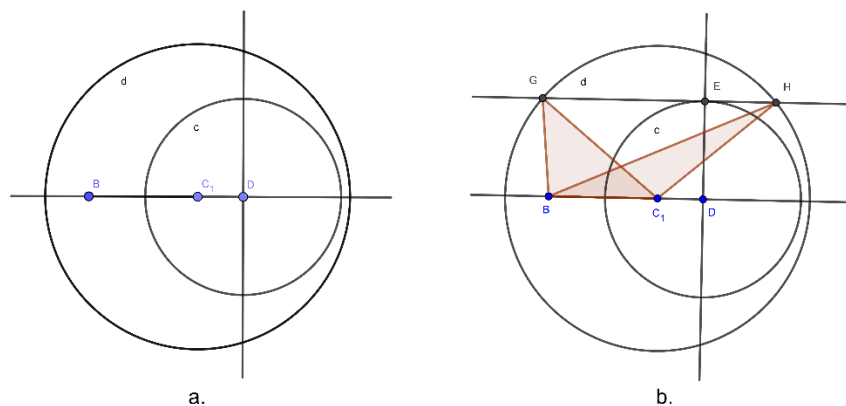


Ilustración 46. Construcción final de Javier.

A pesar de considerar la longitud de los lados de manera distinta a lo solicitado en la tarea, Javier presentó dos soluciones en las que el protocolo de construcción y la exploración dinámica lo condujeron a reconocer que debía hacer una modificación en su construcción inicial. Tomando esto en cuenta, se considera que la visualización que el estudiante tuvo

sobre la figura fue de tipo no-icónica, ya que para su construcción se valió de las relaciones geométricas que él consideraba necesarias para cumplir con las condiciones de la tarea.

En este caso no se presentó ninguna deconstrucción ya que no hubo una figura inicial que sirviera como punto de partida para obtener las soluciones. Sin embargo, estas soluciones se encuentran dentro de un conjunto de trazos auxiliares que no son propios de la figura buscada (como las circunferencias o las rectas perpendicular y paralela), por lo que la herramienta utilizada jugó un papel importante para obtenerlas.

El razonamiento del estudiante en esta tarea tuvo una transición de lo *intuitivo* a lo *visual* y viceversa. En primer lugar, Javier comunicó sus ideas con base en los conocimientos con los que contaba para construir la figura propuesta (*razonamiento intuitivo*). Después, su razonamiento estuvo anclado en la percepción de su primera construcción, ya que esta percepción lo hizo afirmar que no había solución para la tarea (*razonamiento visual*). Finalmente, volvió a recurrir a sus conocimientos para modificar y explicar el protocolo de su construcción final (*razonamiento intuitivo*).

Protocolo de construcción de la estudiante 2 (Karla): la estudiante comenzó trazando un par de circunferencias, una de radio 7 y una de radio 5, donde el centro de la segunda fue un punto móvil sobre la primera. Con una recta unió los centros de estas circunferencias para determinar el lado BC (ilustración 47a). Además, colocó un punto móvil sobre la circunferencia de radio 5 y por él pasó una perpendicular a la recta anterior. Por último, trazó una tercera circunferencia de radio 4.5 con centro en la intersección de las rectas perpendiculares (ilustración 47b).

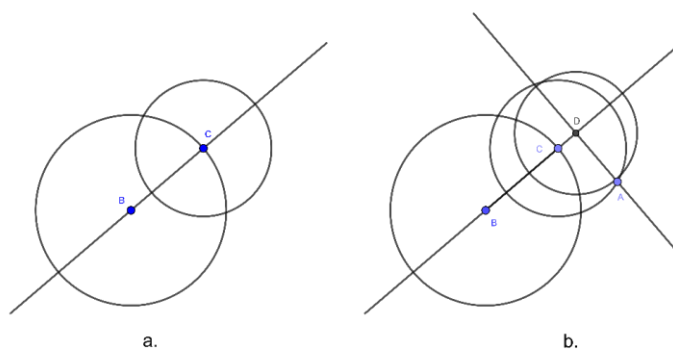


Ilustración 47. Proceso de construcción de Karla.

Después de explorar su configuración, la estudiante mencionó que sólo podía observar un par de soluciones, pero que estas dependían de la posición del punto móvil A (ilustración 48a). Es decir, su construcción no cumplía con lo solicitado cuando no había una intersección entre las circunferencias de radio 5 y 4.5 (ilustración 48b).

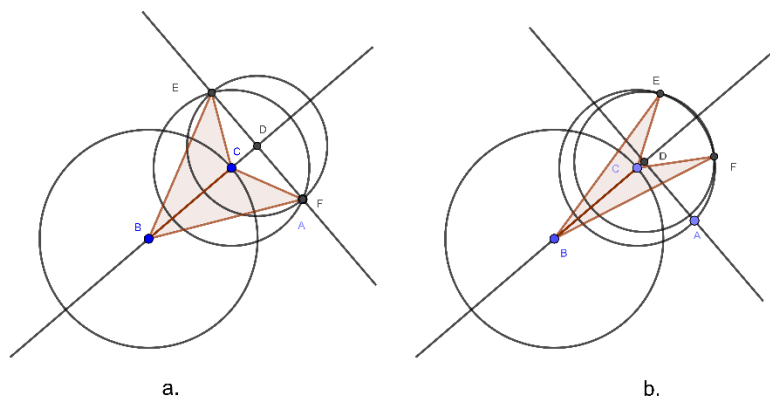


Ilustración 48. Posiciones del punto A donde se cumplen y no se cumplen las condiciones de la tarea.

A continuación, se muestran las expresiones verbales de la estudiante cuando se encontró en esta situación.

Karla: - Es que no sé si (explora su construcción) ... porque es que no en todos los casos está como esa intersección de esta circunferencia (se refiere a la de radio 4.5 con la de radio 5).

Karla: - Entonces, por ejemplo, en este caso está esta intersección y esta intersección (señalas las intersecciones entre las circunferencias). Entonces, estos puntos, si no estoy mal, son triángulos que cumplirían con esa condición.

Karla: - Pero no en todos los casos se cumple como esa intersección, además de que depende de este punto que yo le puse (señala al punto móvil A).

A pesar de que en la mayor parte de su respuesta Karla consideró las relaciones geométricas necesarias para que las condiciones de la tarea se cumplieran, la visualización que tuvo sobre la figura fue de tipo icónica. Esto se debe a que su conclusión fue determinada por la apariencia visual de la figura en una posición particular. Por otro lado, la figura construida está vinculada a un conjunto de trazos auxiliares, pero estos no se ejecutaron por

la identificación de unidades de una figura inicial, sino por el enunciado de la tarea, por lo que en este caso no hubo algún tipo de deconstrucción.

En esta tarea, el razonamiento que sostiene la respuesta de Karla es el *razonamiento visual*. Lo anterior se debe a que desarrolló su justificación con base en una posición particular que percibió en su figura. Después de explorar esta figura, la estudiante mantuvo su posición respecto lo que hacía válida su construcción, siendo esto su percepción visual y no un argumento matemático.

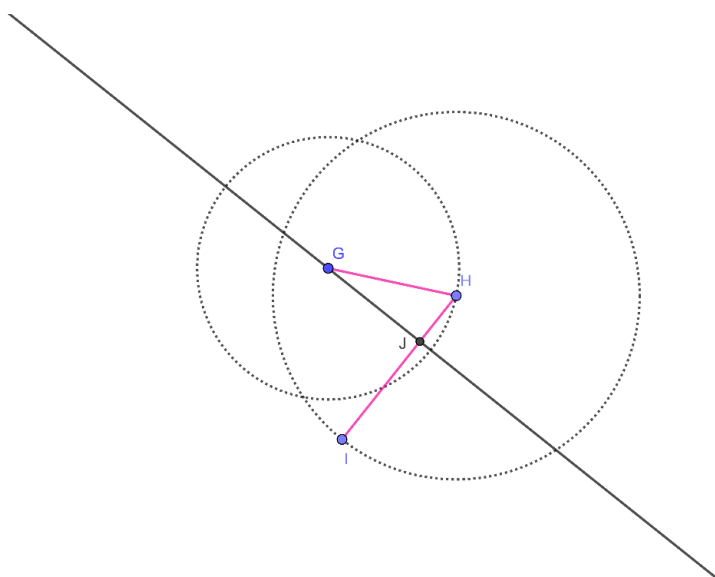


Ilustración 49. Construcción para observar el comportamiento del punto J.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Araceli): al igual que en el caso de Karla, la construcción de Araceli inició con el trazo de las circunferencias de radio 7 y 5. Sin embargo, en este caso, el centro de la de radio 7 fue un punto móvil sobre la de radio 5. Además, colocó un punto móvil sobre la circunferencia más grande y mediante un segmento trazó su radio. Después, la estudiante trazó la recta perpendicular al segmento mencionado de tal manera que pasara por el centro de la circunferencia de radio 5, señalando el pie de esta perpendicular como el punto J (ilustración 49).

Después de una exploración dinámica para observar el comportamiento del punto J, la estudiante decidió trazar su lugar geométrico y concluyó que se debía tratar de una

circunferencia cuyo centro es el punto medio del lado GH (ilustración 50a)⁷. Después, trazó otra circunferencia de radio 4.5, concéntrica con la de radio 5, y señaló su intersección con la circunferencia que obtuvo a partir del lugar geométrico. Por último, con un par de semirrectas unió el punto H con los puntos de intersección señalados (puntos L y M), de tal forma que intersecaran, en un punto respectivamente, a la circunferencia de radio 7 (ilustración 50b). Estas últimas intersecciones representaron la única solución que Araceli encontró para la tarea.

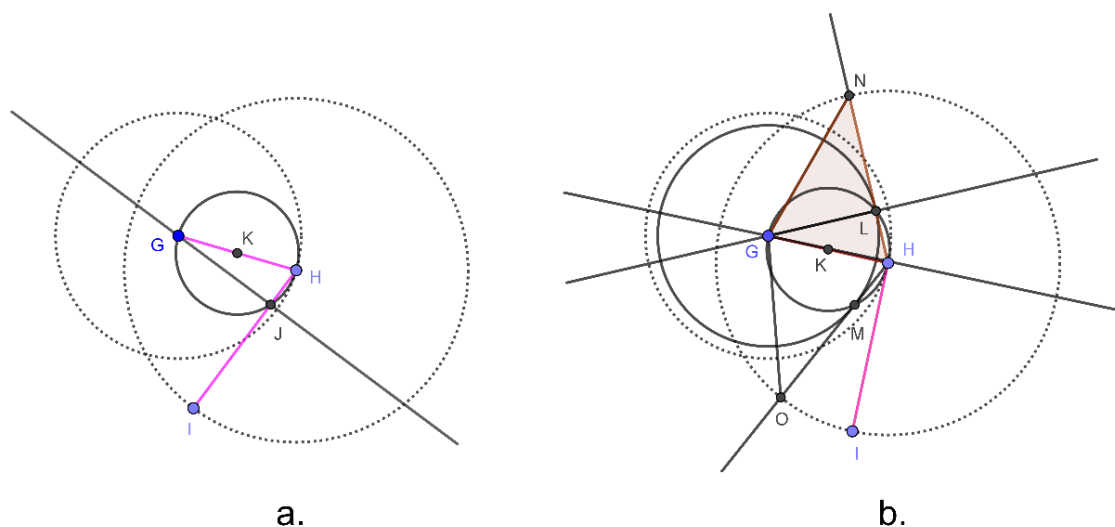


Ilustración 50. Solución de Araceli a partir de un lugar geométrico.

Este procedimiento muestra una tendencia hacia el uso de las herramientas dinámicas brindadas por GeoGebra, como el *lugar geométrico*. Por la utilidad que la estudiante dio a esta herramienta, se puede reconocer una deconstrucción de tipo instrumental; y ya que también tomó en cuenta las relaciones geométricas que debía cumplir la configuración, también se reconoce una visualización de tipo no-icónica.

En este caso, Araceli logra ir más allá del *razonamiento visual* que había predominado en sus respuestas anteriores. Se afirma lo anterior debido a que la estudiante no solo se apoyó en la apariencia visual de su construcción inicial, sino que también recurrió a sus

⁷ Esta condición se cumple por la propiedad que indica que un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia tendrá como hipotenusa al diámetro de dicha circunferencia.

conocimientos para comunicar las ideas de su respuesta y explicar esta respuesta con un lenguaje natural (*razonamiento intuitivo*).

4.1.5 Tarea 5

En la siguiente imagen (ilustración 51) se muestra un triángulo con cuatro círculos inscritos. Los círculos son tangentes entre sí y a los lados del triángulo. Reconstruye la configuración conservando sus propiedades y describe el proceso de construcción.

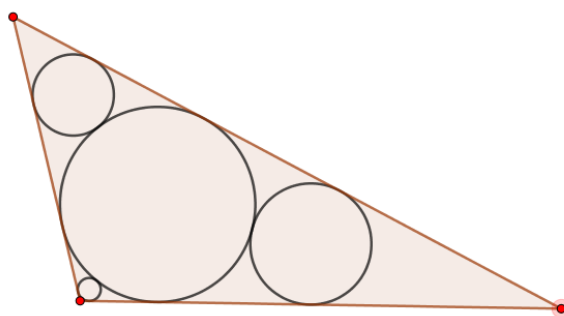


Ilustración 51. Triángulo presentado en la tarea 5.

Protocolo de construcción del estudiante 1 (Javier): el estudiante comenzó con el trazo de un triángulo arbitrario, cuyo incentro halló con un par de bisectrices. Después, trazó la perpendicular a uno de los lados del triángulo de tal manera que pasara por el incentro para determinar un punto de tangencia. Finalmente, dibujó la primera circunferencia inscrita en el triángulo, con centro en el punto D (incentro) y radio igual a la distancia del incentro al punto de tangencia señalado (ilustración 52).

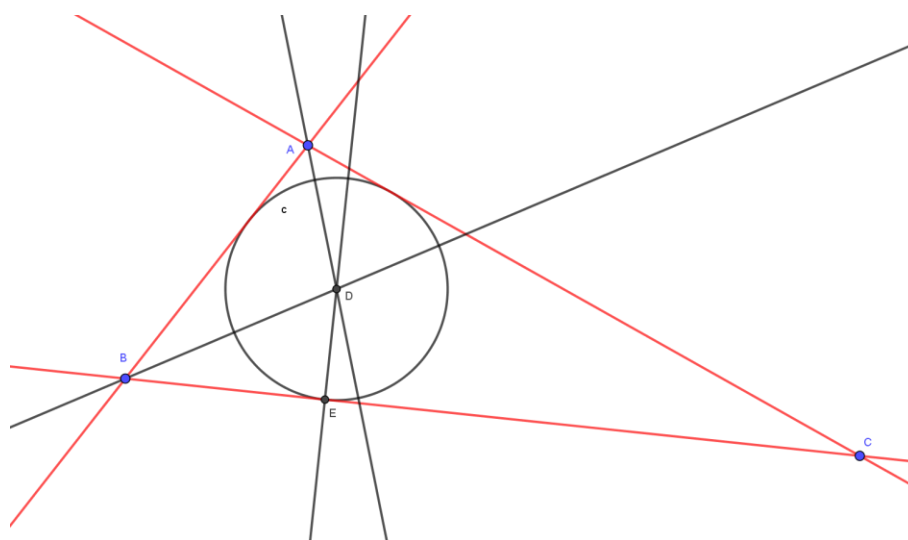


Ilustración 52. Circunferencia inscrita en el triángulo ABC construida por Javier.

Para obtener las otras tres circunferencias, el estudiante desarrolló el mismo procedimiento. Trazó una recta tangente a la primera circunferencia, cuyo punto de tangencia es la intersección de la circunferencia con una bisectriz. De esta manera, el estudiante reconoció que dentro de su configuración se formaba un nuevo triángulo, el cual comparte una de sus bisectrices con el triángulo original. Por lo tanto, para determinar la circunferencia inscrita dentro de este nuevo triángulo, Javier siguió el mismo procedimiento descrito en el párrafo anterior (ilustración 53).

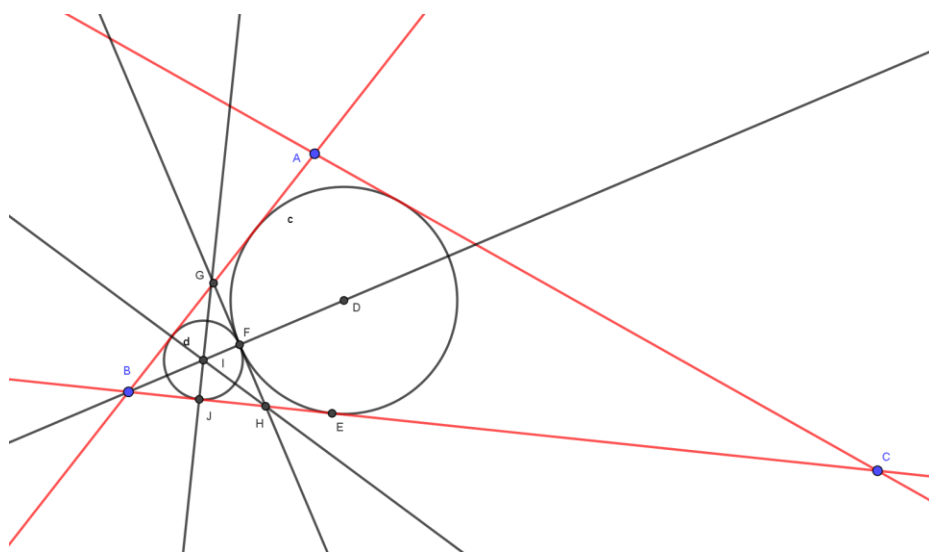


Ilustración 53. Circunferencia tangente a otra circunferencia y a un par de lados del triángulo.

Las acciones del estudiante en esta tarea exhiben un conocimiento sobre las relaciones geométricas de un triángulo y su incentro (unidad adimensional), así como sobre las propiedades de una recta tangente a una circunferencia (unidades unidimensionales). Por lo tanto, se concederá que la visualización del estudiante sobre la figura es de tipo no-icónica. Además, también se puede hablar de una deconstrucción instrumental, ya que la figura propuesta se obtuvo a través de un conjunto de trazos auxiliares (bisectrices, perpendiculares y tangentes.)

Javier recurrió a sus conocimientos para comunicar el protocolo de construcción de su figura y justificar sus acciones a través de un lenguaje cotidiano. Lo anterior muestra un *razonamiento intuitivo* que podría avanzar hacia un *razonamiento inferencial* si se ocupara un método y un lenguaje matemático formal.

Protocolo de construcción de la estudiante 2 (Karla): el procedimiento que desarrolló Karla es prácticamente el mismo que desarrolló Javier, ya que solo existe una acción en la que se diferencian.

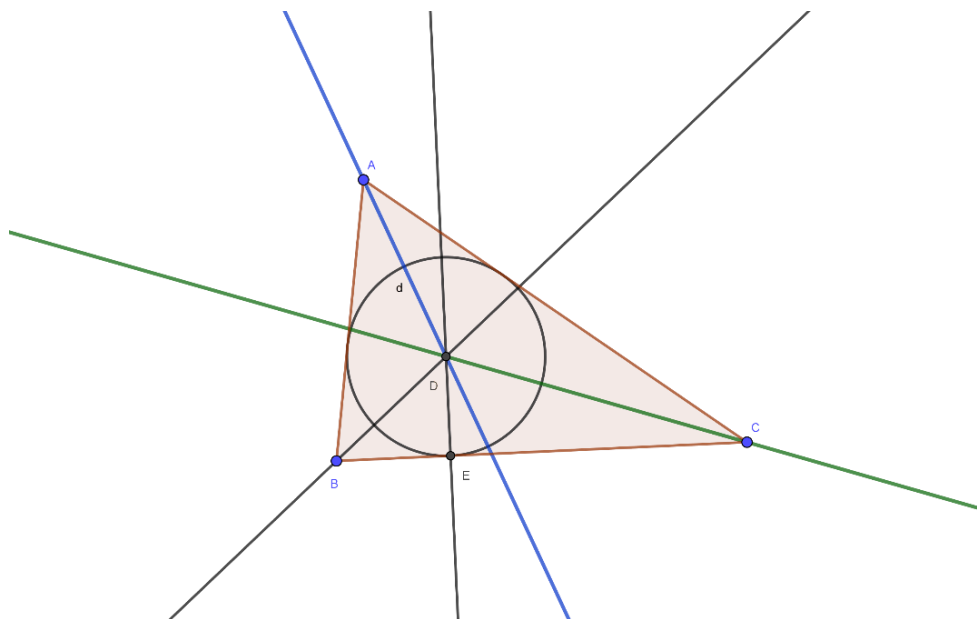


Ilustración 54. *Circunferencia inscrita en el triángulo ABC construida por Karla.*

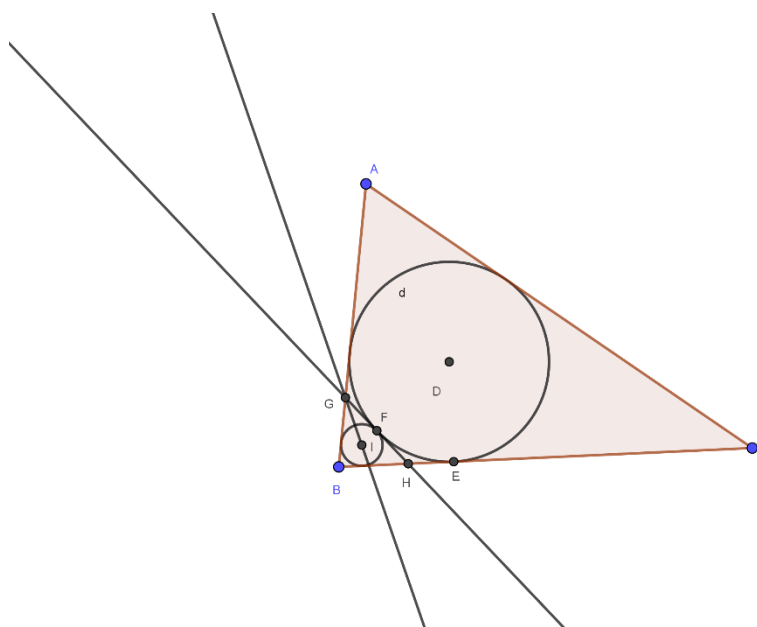


Ilustración 55. *Circunferencia tangente a otra circunferencia y a un par de lados del triángulo.*

La primera circunferencia inscrita que construyó la estudiante fue determinada de la misma manera, con bisectrices para el incentro y una recta perpendicular para el punto de tangencia (ilustración 54). Para las otras tres circunferencias, la estudiante no trazó una

perpendicular a los lados del triángulo para hallar el punto de tangencia, ya que se dio cuenta que la perpendicularidad se cumple entre la tangente a la circunferencia principal y la bisectriz del triángulo (porque pasa por su centro). Por lo tanto, los puntos de tangencia determinados para las tres circunferencias de menor tamaño fueron compartidos con la circunferencia principal (ilustración 55).

La diferencia entre los protocolos de construcción de los estudiantes uno y dos no influye en los tipos de visualización y deconstrucción que realizaron sobre sus respectivas figuras. Ambos consideraron las relaciones geométricas entre las unidades figurativas que identificaron para sus construcciones (visualización no-icónica); y ambos utilizaron trazos auxiliares por medio de las herramientas del software para establecer sus configuraciones (deconstrucción instrumental).

También se puede hablar de un mismo razonamiento exhibido por parte de Karla y Javier (*razonamiento intuitivo*), ya que ambos estudiantes recurrieron a sus conocimientos para comunicar sus ideas durante el protocolo de sus construcciones.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Araceli): como en todas las tareas anteriores, Araceli recurrió a la exploración dinámica de una figura inicial antes de establecer su construcción final. Sobre la bisectriz de un triángulo arbitrario colocó un punto móvil, por el cual trazó una perpendicular a uno de los lados del triángulo. De esta manera, obtuvo una circunferencia móvil, tangente a los lados del triángulo que determinaban la bisectriz.

Después de construir y explorar una segunda circunferencia móvil y tangente a los mismos lados (ilustración 56), la estudiante, a sugerencia del investigador, trazó una segunda bisectriz y señaló el incentro del triángulo. A continuación, mostramos parte de la interacción entre la estudiante y el investigador.

Araceli: - Ay, no me acuerdo cómo hacer que sea tangente a otra circunferencia.

Investigador: - Hace un momento mencionaste que los centros deben estar en la misma bisectriz, ¿no?

Araceli: - Ajá

Investigador: - que sería la bisectriz del vértice A

Araceli: - Sí.

Investigador: -Ahora, ¿qué otra condición debe cumplir para que también sea tangente al lado que falta.

Araceli: - mmm ...

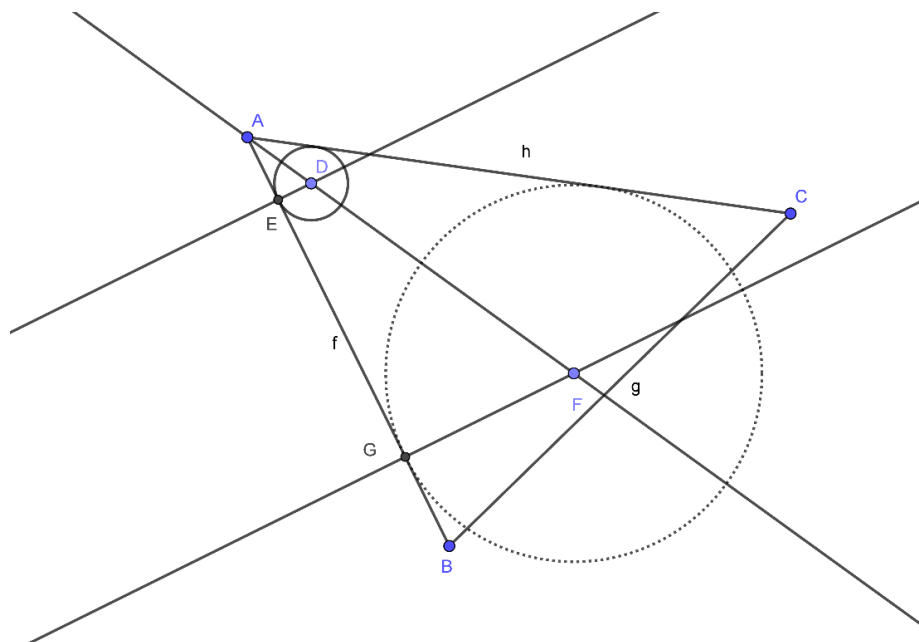


Ilustración 56. Circunferencias móviles construidas por Araceli.

Después de esta interacción, la estudiante desarrolló el siguiente procedimiento: por la posición en la que se encontraba el triángulo, supuso que el punto de tangencia del lado que le faltaba era la intersección de la bisectriz con el lado opuesto al vértice de donde partía (ilustración 57a). Es decir, no tomó en cuenta la propiedad de perpendicularidad que debe cumplir la tangente a un círculo, aunque en sus exploraciones anteriores si lo había hecho (ilustración 57b).

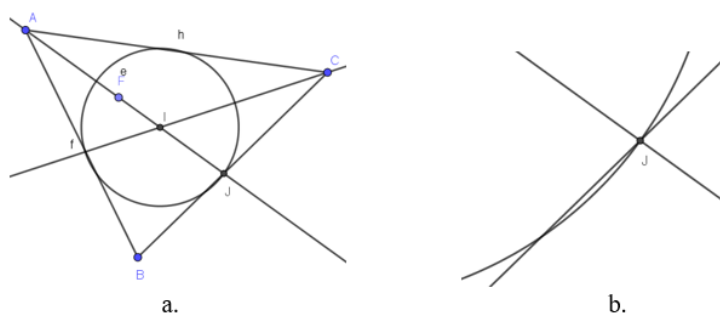


Ilustración 57. Circunferencia con punto de tangencia erróneo.

La construcción de las otras tres circunferencias fue con el mismo procedimiento que el desarrollado por la estudiante 2, esto es, trazando una nueva bisectriz y compartiendo el punto de tangencia con la circunferencia principal (ilustración 58). Por lo tanto, la configuración final de la estudiante está compuesta por una circunferencia que no está inscrita en el triángulo (ya que no es tangente a sus lados) y tres circunferencias tangentes a la circunferencia anterior y a un par de lados del triángulo.

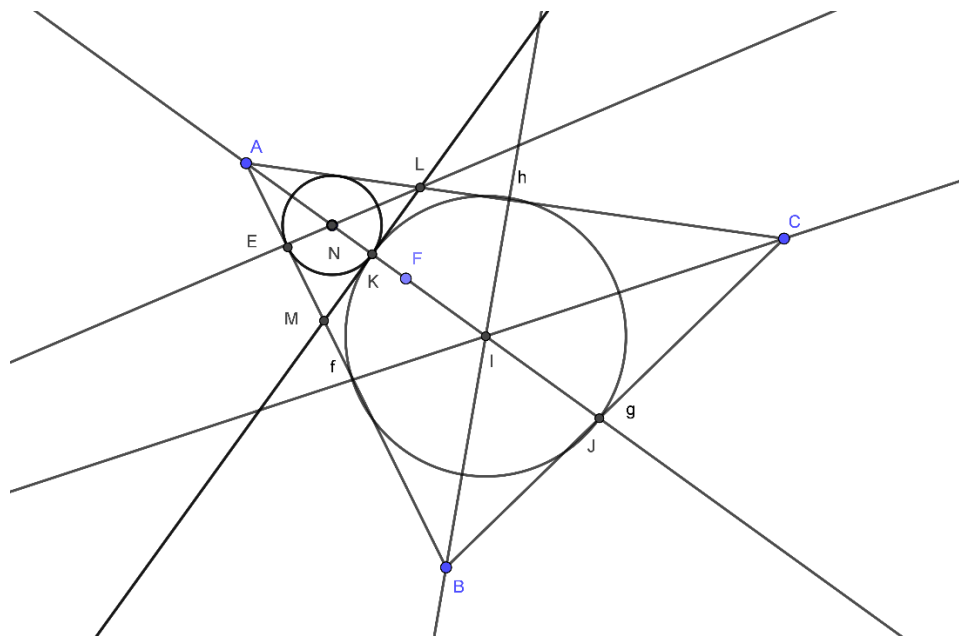


Ilustración 58. Construcción de los triángulos pequeños desarrollada por Araceli.

La visualización de Araceli sobre esta figura vuelve a tener una tendencia hacia el tipo icónica, ya que la apariencia visual que en un determinado momento tiene la figura se impuso a las relaciones geométricas que se debían cumplir, a pesar de que la estudiante mostró conocer estas relaciones es sus exploraciones previas.

Sin duda esta estudiante fue quien más se apoyó en los recursos brindados por la geometría dinámica, ya que en todas sus construcciones intentó conocer el comportamiento de elementos particulares al ser movilizadas. Con base en lo anterior y en los trazos plasmados en su construcción, se puede decir que nuevamente existió una deconstrucción instrumental por parte de Araceli sobre la figura.

En esta tarea, el *razonamiento visual* de la estudiante la condujo a suponer una condición errónea sobre su figura inicial. Esto se debe a que la apariencia visual de esta figura, en una

posición particular, hizo suponer a Araceli que la primera circunferencia era tangente a los tres lados del triángulo. A pesar de que el resto de la respuesta fue mediante un *razonamiento intuitivo*, el error mencionado no pudo ser corregido.

4.2 Segunda etapa

Con base en los resultados obtenidos en la primera etapa de la investigación, se desarrolló una segunda etapa donde se aplicaron tres nuevas tareas, con conceptos diferentes, a tres nuevos resolutores. La razón de implementar esta nueva etapa fue para identificar, si es que los había, nuevos procesos, estrategias y formas de razonamiento por parte de los estudiantes. Las tareas que se aplicaron en esta segunda etapa son similares a la última tarea que se aplicó en la primera, debido a que se buscó enriquecer los resultados de aquellas tareas donde los estudiantes tuvieron que reproducir una figura a partir de su imagen y el conocimiento de algunas de sus propiedades. Además, para que los resultados obtenidos en ambas etapas pudieran ser contrastados, se eligieron estudiantes del mismo nivel académico que los de la etapa anterior (maestría en matemática educativa).

4.2.1 Tarea 1

En la siguiente figura (ilustración 59) se cumple que: los ángulos 1 y 2 son iguales; los segmentos NM y CA son paralelos; y el segmento CB es tangente a la circunferencia con centro en O, en el punto C. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que el ángulo del vértice B es un ángulo recto?

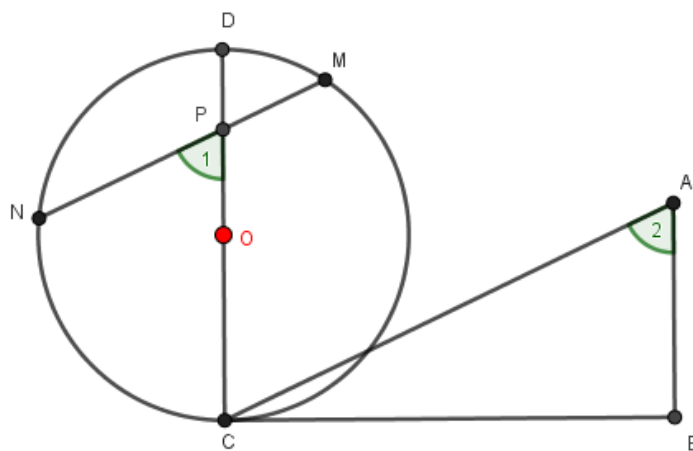


Ilustración 59. Figura presentada en la tarea 1.

Protocolo de construcción de la estudiante 1 (Fernanda): la estudiante inició con el trazo de la circunferencia con los segmentos DC y NM. Después, con una recta perpendicular al diámetro, trazó la tangente a la circunferencia en el punto C. Por último, Fernanda trazó un par de rectas: la primera paralela a la cuerda NM por el punto C y sobre ella colocó un punto móvil A; y la segunda, paralela al diámetro DC por el punto A (ilustración 60).

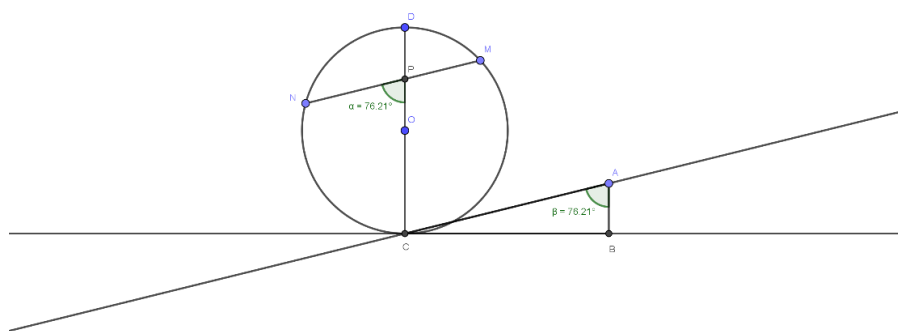


Ilustración 60. Construcción presentada por Fernanda.

La visualización de la estudiante sobre a figura inicial fue de tipo no-icónica, debido a las relaciones geométricas que reconoció entre las unidades que la componen. Además, también se reconoce una deconstrucción instrumental sobre esta figura, debido a los trazos auxiliares y las herramientas particulares de GeoGebra que Fernanda utilizó.

1.- En la siguiente figura se cumple que: los ángulos 1 y 2 son iguales; los segmentos NM y CA son paralelos; y el segmento CB es tangente a la circunferencia con centro en O, en el punto C. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que el ángulo del vértice B es un ángulo recto?

① Al ser $NM \parallel CA$, entonces se satisface que $1 = \angle NPC = \angle PCA$.
 Pues son ángulos internos alternos, entonces se cumple que $1 = \angle PCA = \angle CAB = 2$.
 Por hipótesis, de donde se sigue que $PC \parallel AB$.
 Al ser el segmento CB tangente a la circunferencia con centro en O, en el punto C...

entonces es equivalente a ② que $PC \perp CB$, y al ser $PC \parallel AB$, se sigue que $AC \perp CB$, es decir $\angle ABC = 90^\circ$.

Ilustración 61. Justificación presentada por Fernanda.

En cuanto a la justificación que se plantea en la tarea, la estudiante utilizó como argumento inicial la igualdad de los ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle PCA$ por ser alternos internos. Después, Fernanda concluyó que los ángulos $\sphericalangle PCA$ y $\sphericalangle 2$ deben ser iguales (por transitividad) y, por lo tanto, los segmentos DC y AB tendrían que ser paralelos. Finalmente, Fernanda mencionó que, dado que DC es perpendicular a CB por ser tangente a la circunferencia, entonces AB debe ser perpendicular a CB, ya que DC y AB son paralelos (ilustración 61).

Nota: La estudiante menciona en su respuesta que AC y CB deben ser perpendiculares, lo cual corrige en la entrevista mencionando que confundió el segmento AC con el segmento AB. A continuación, el fragmento de la entrevista donde ocurre este hecho:

Investigador: ¿Cuáles eran los segmentos que querías señalar perpendiculares?

Fernanda: Era el segmento AB perpendicular al segmento CB

Investigador: Que era lo que se pedía justificar

Fernanda: Sí, ahí era AB (refiriéndose a la parte de su justificación donde escribió $AC \perp CB$)

Dada su justificación, se puede reconocer una transición del *razonamiento intuitivo* hacia el *razonamiento inferencial* por parte de la estudiante. Lo anterior se debe a la forma en que Fernanda estructuró su respuesta, explicando cada paso del procedimiento con argumentos deductivos en un lenguaje semiformal.

Protocolo de construcción del estudiante 2 (Alan): el estudiante construyó la figura siguiendo el mismo protocolo que Fernanda: trazó una circunferencia con los segmentos DC y NM, la tangente a la circunferencia y un par de rectas paralelas.

Al final de su construcción, Alan agregó un par de trazos auxiliares, un radio $D'O$, donde D' es móvil sobre la circunferencia y una recta paralela a este radio que pasa por el punto A (ilustración 62). Dichos trazos fueron colocados por el estudiante para hacer explícito el hecho de que, la construcción únicamente sería válida si DC es un diámetro de la circunferencia dada (ilustración 63).

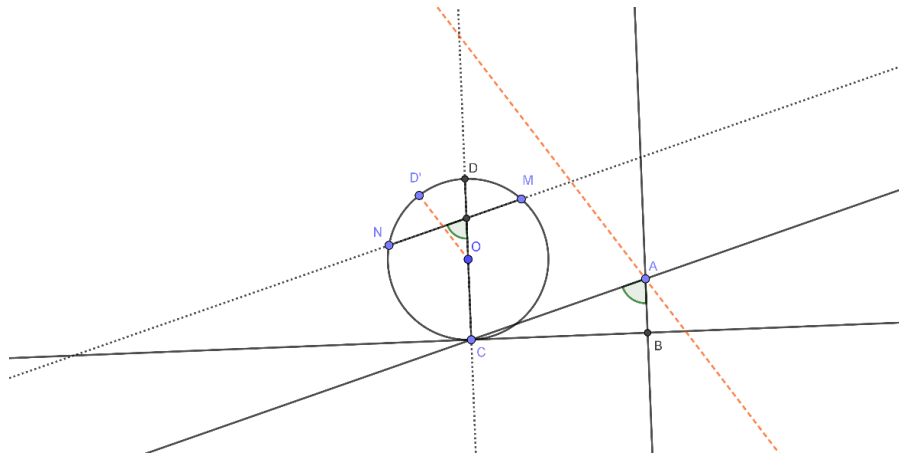


Ilustración 62. Construcción de Alan con un par de segmentos auxiliares.

Todo esto, suponiendo DC como diámetro, pueden serlo el ángulo B deja de ser recto, pues su construcción depende de la congruencia $\sphericalangle 1 \sphericalangle 2$ mediante paralelas

Ilustración 63. Explicación del estudiante sobre el uso de trazos auxiliares.

Alan justificó la función de los trazos auxiliares que utilizó durante la entrevista con el investigador:

Investigador: Estos dos últimos trazos, este punto móvil D' y esta recta ¿cómo las utilizaste o para qué te sirvieron?

Alan: Ah, es que no se dice en el enunciado, me acuerdo, que el punto D sea diametralmente opuesto al C. Entonces, si no es así, solo pongo a muestra de que el enunciado que se está dando pues no se podría cumplir, que B sea recto.

Dado el análisis que realizó sobre la figura inicial, se puede hablar de una visualización no-icónica y una deconstrucción instrumental por parte del estudiante. Lo anterior se afirma debido a que Alan reconoció las relaciones geométricas necesarias para construir la figura; y utilizó diferentes trazos auxiliares para lograr esta construcción, además de apoyarse en el software para validar su procedimiento.

Respecto a la justificación que se pide, Alan utilizó la propiedad de las paralelas cortadas por una secante. Mencionó que los segmentos paralelos DC y AB podrían considerarse

cortados por el segmento CB, y dado que el ángulo $\sphericalangle BCD$ es recto por ser C un punto de tangencia, entonces el ángulo del vértice B también debe ser recto.

En este caso, el razonamiento percibido en el estudiante es de tipo *intuitivo*. La razón de este hecho es que Alan comunicó y explicó el protocolo de construcción de su figura de manera adecuada, pero sin utilizar más allá de un lenguaje natural para lograrlo. Además, también se observa un *razonamiento visual* al mostrar, mediante trazos auxiliares dinámicos, la razón por la cual su construcción era válida.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Mónica): al igual que sus compañeros, la estudiante trazó la circunferencia con los segmentos DC y NM. Después, trazó la tangente a la circunferencia por el punto C y la paralela a NM por el mismo punto. Sin embargo, trazó el segmento AB con una perpendicular a la tangente de tal forma que pasara por el punto A. Es decir, la estudiante tomó en cuenta la propiedad que se pedía justificar para hacer su construcción (ilustración 64).

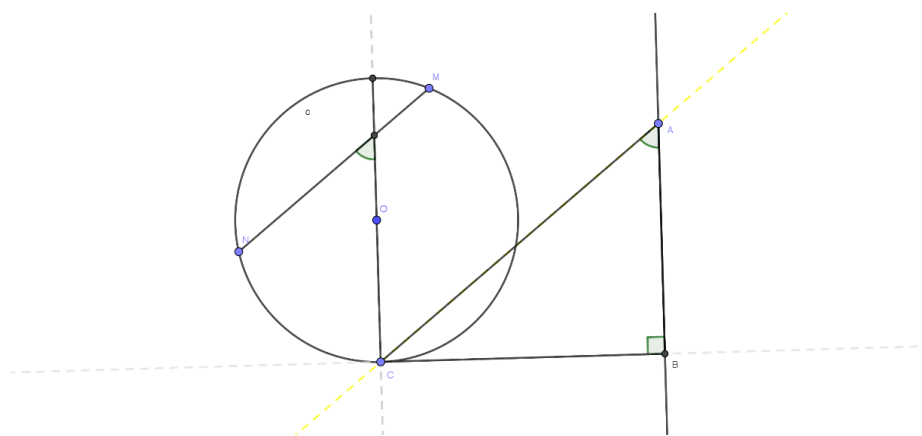


Ilustración 64. Construcción presentada por Mónica.

En el protocolo de construcción de la estudiante se exhibe una visualización icónica de la figura inicial. Esto se debe a que la perpendicularidad que se pidió justificar, Mónica la reprodujo tomando en cuenta lo observado en la figura y no las relaciones geométricas que se debían cumplir. Además, la deconstrucción que se observa sobre la figura inicial es de tipo instrumental, dados los trazos auxiliares utilizados para construirla.

La justificación de Mónica fue similar a la de Alan, pero ella no mencionó por que los segmentos DC y AB debían ser paralelos, sino que lo dio por hecho dada la igualdad de los

ángulos $\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 2$. Después, mencionó que los ángulos sobre paralelas deben ser iguales y como el ángulo en C es recto por ser un punto de tangencia, entonces el ángulo en B también debe ser recto (ilustración 65).

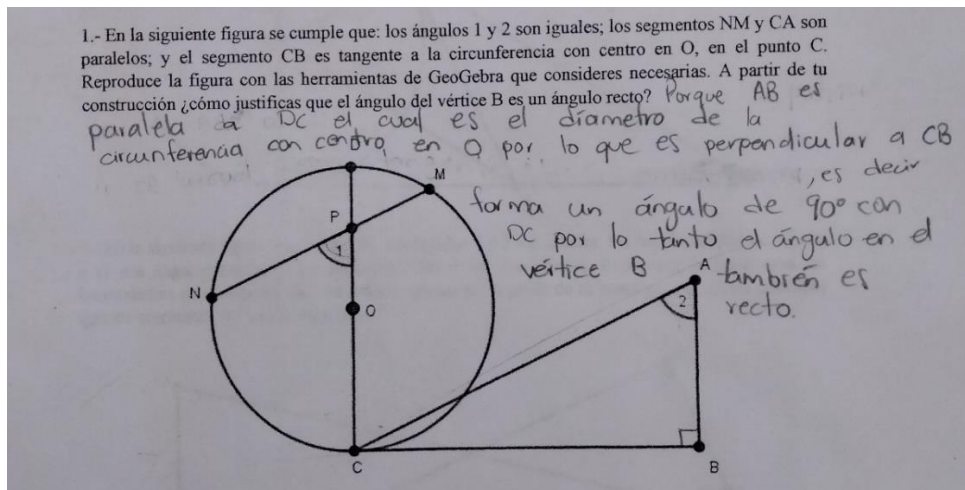


Ilustración 65. Justificación presentada por Mónica.

El razonamiento de la estudiante durante la resolución de esta tarea está más anclado en lo *visual* que en lo *intuitivo*. Si bien explicó sus ideas para construir la figura con un lenguaje informal, estas ideas están basadas en una propiedad que observó en la figura inicial y no en las relaciones geométricas que se debían cumplir.

4.2.2 Tarea 2

En la siguiente figura (ilustración 66) se cumple que: AB es diámetro de la circunferencia con centro en O; AC es secante de la circunferencia en el punto N; y los segmentos BM y NM son tangentes de la circunferencia, en B y N respectivamente. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que el punto M es punto medio del segmento BC?

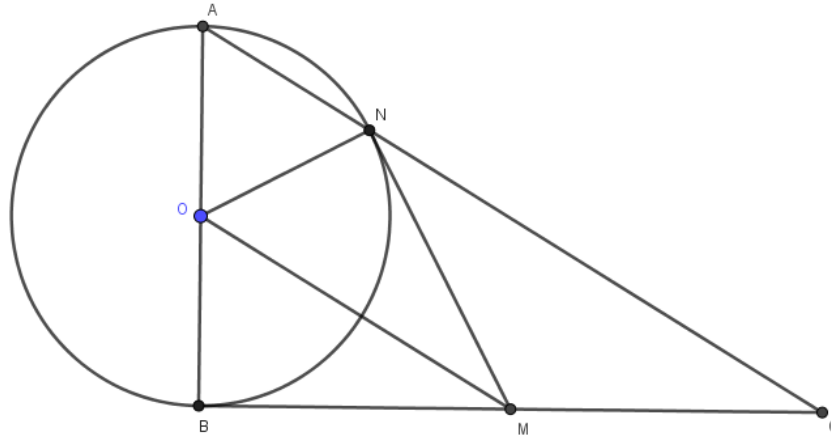


Ilustración 66. Figura presentada en la tarea 2.

Protocolo de construcción de la estudiante 1 (Fernanda): la estudiante comenzó colocando la circunferencia y el diámetro AB señalados en la tarea. Después, sobre la circunferencia colocó el punto móvil N y con una semirrecta prolongó el segmento AN. Además, con una recta perpendicular al diámetro determino la tangente a la circunferencia por el punto B y con la intersección de esta tangente a la semirrecta anterior obtuvo el punto C. Finalmente, trazó la otra tangente por el punto N para determinar el punto M, el cual unió con el centro de la circunferencia (ilustración 67).

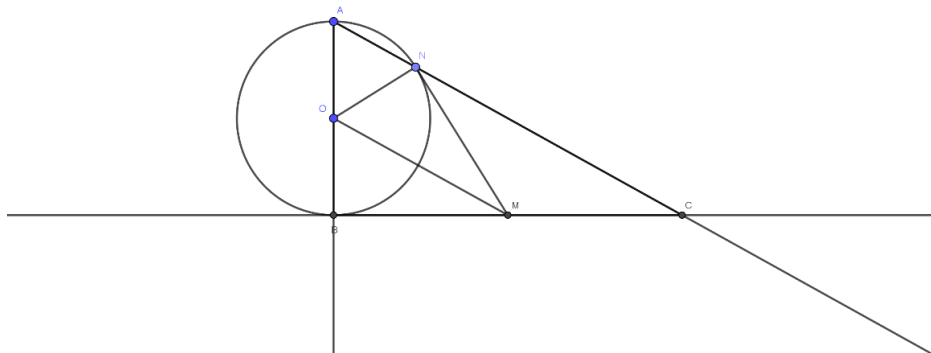


Ilustración 67. Construcción presentada por Fernanda.

La visualización y deconstrucción que la estudiante realizó sobre la figura son de tipo no-icónica e instrumental respectivamente. Esto se debe a las relaciones geométricas que ella consideró necesarias para construir su figura; y los diferentes trazos auxiliares que utilizó para determinar dicha construcción.

Consideramos el triángulo ABC, tal que $\angle BAC = \alpha$, entonces $\angle ACB = 90^\circ - \alpha = \beta$.
 Por otra parte, el ángulo $\angle BAC$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, por lo que el ángulo $\angle BON$ (que es el ángulo central) mide 2α .
 Observamos que ON es de la misma longitud que OB pues son radios de la circunferencia, NM y BM son tangentes a la circunferencia, entonces, el segmento OM es la bisectriz del ángulo $\angle NMB$.
 Sin pérdida de generalidad supongamos que $\angle NMB = \angle NBO + \angle OMB = 2\theta$.
 Al ser ONMB un cuadrilátero, se cumple

$$\angle ONM + \angle NMB + \angle MBO + \angle BON = 360^\circ \Rightarrow 90^\circ + 2\theta + 90^\circ + 2\alpha = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2\theta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta + \alpha = 90^\circ$$

 Pero por construcción $\theta + \alpha = \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = \alpha$

Ilustración 68. Justificación propuesta por Fernanda.

Para justificar que M es punto medio del segmento BC, la estudiante demostró la semejanza de los triángulos ABC y OBM, considerando las propiedades de un cuadrilátero y de una bisectriz. Concluyó que al ser semejantes estos triángulos, se debía cumplir una razón de proporcionalidad 2:1 entre sus lados; y como el lado AB tiene el doble de longitud que el lado OB (por ser diámetro y radio de una misma circunferencia), se demuestra que M es punto medio del lado BC (ilustración 68).

De esta forma se satisface, por criterio AA-D que los triángulos ABC y OBM son semejantes.
 Por construcción $AB = 2OB$, entonces los lados del triángulo ABC son el doble que de longitud que los del triángulo OBM, de donde se obtiene que M es el punto medio de BC.

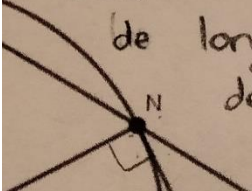


Ilustración 69. Conclusión de la justificación de Fernanda.

En esta tarea, la estudiante exhibió un razonamiento *inferencial*. Esto se debe a que presentó su justificación desarrollando un proceso deductivo en donde argumentó sus afirmaciones con un lenguaje matemático correcto (ilustración 69).

Protocolo de construcción del estudiante 2 (Alan): al igual que en el caso anterior, Alan inició su construcción con el trazo de la circunferencia, el diámetro AB, el punto móvil N y la cuerda NA. Después, trazó las tangentes a la circunferencia por los puntos B y N, de tal forma que se intersecaran en el punto M. Finalmente, marcó la intersección de la recta que contiene a AN, con la tangente de la circunferencia por el punto B, para determinar el punto C (ilustración 70).

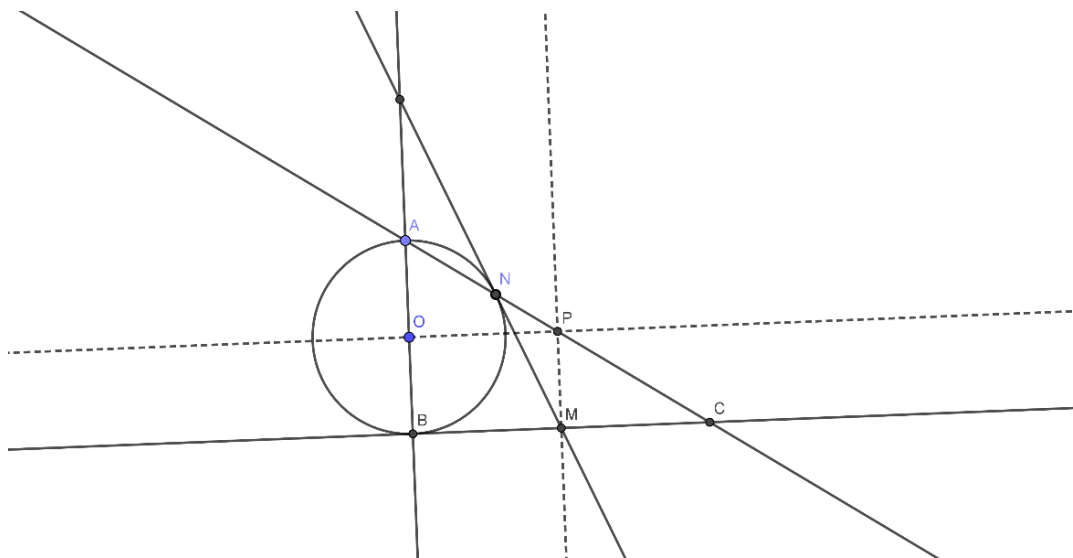


Ilustración 70. Construcción presentada por Alan.

Dado que el protocolo de construcción de los estudiantes uno y dos son prácticamente los mismos, se puede considerar que tanto la visualización como la deconstrucción que hicieron sobre la figura presentada también son las mismas. Es decir, se puede hablar de una visualización no-icónica y una deconstrucción instrumental en ambos casos.

Después de construir la figura propuesta, Alan agregó un trazo auxiliar para desarrollar su justificación. Trazó una paralela a la recta que contiene al lado BC de tal forma que pasara por el centro O de la circunferencia y marcó la intersección de esta paralela con la recta que contiene al lado AC (punto P). Después, trazó una paralela al diámetro AB que pasa por el punto P, de tal forma que esta paralela interseca al lado BC en un punto que llamó M'.

El estudiante mencionó que para justificar que M es punto medio del lado BC se tenía que demostrar que M y M' eran el mismo punto. Para lograr lo anterior, propuso probar de manera analítica que las tangentes y la paralela que pasa por P eran concurrentes en un mismo punto. Sin embargo, su justificación quedó solo en esta propuesta ya que no la desarrolló.

Debido a los trazos auxiliares que utilizó para desarrollar su justificación y el análisis que realizó con estos trazos, se puede hablar de un *razonamiento visual* por parte del estudiante. Esto se afirma debido a que, a partir de la posición observada de los puntos M y M', Alan propuso demostrar que se trataba del mismo punto. Si esta proposición se hubiera desarrollado, se podría hablar de un *razonamiento intuitivo* o *inferencial*, según la formalidad con las que se presentaran los argumentos.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Mónica): la estudiante comenzó trazando una circunferencia con un punto móvil B sobre ella, por el cual hizo pasar una tangente. Después, con una perpendicular a la tangente determinó el diámetro AB de la circunferencia. Sobre la tangente colocó un punto móvil C y lo unió con un segmento al punto A para intersecar a la circunferencia en el punto N. Finalmente, trazó una segunda tangente a la circunferencia por N para determinar el punto M y los segmentos ON y OM (ilustración 71).

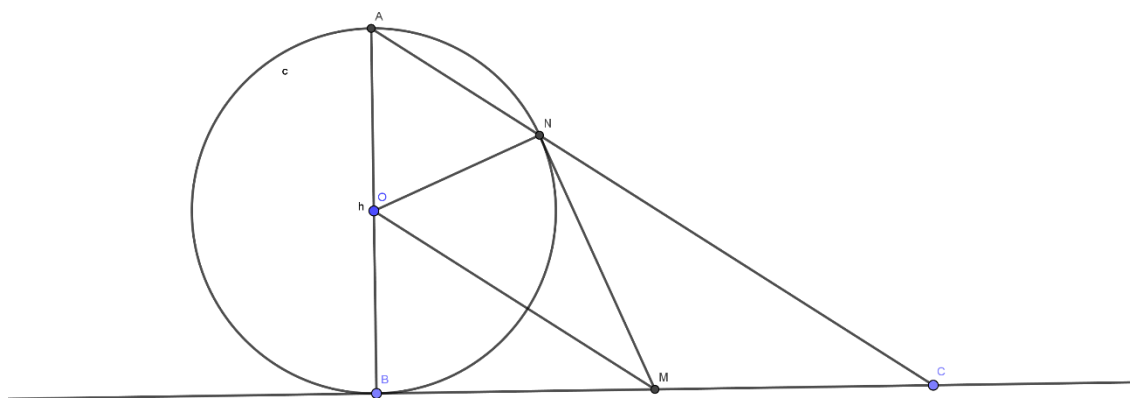


Ilustración 71. Construcción presentada por Mónica.

La visualización de la estudiante sobre la figura que presentó es de tipo no-icónica, debido a que tomó en cuenta las relaciones entre las unidades de la figura para su construcción. Por otra parte, la deconstrucción que hizo sobre la figura fue de tipo instrumental, debido a los trazos auxiliares que utilizó para determinar su construcción.

La justificación de Mónica se basó en un argumento visual, ya que mediante una circunferencia auxiliar con centro en N y radio AN, mencionó que AN tenía un tercio de la longitud del lado AC. Es decir, la estudiante sabía que existía una relación de

proporcionalidad que se cumplía en las medianas de un triángulo y desde su punto de vista, esta relación era válida en su construcción (ilustración 72).

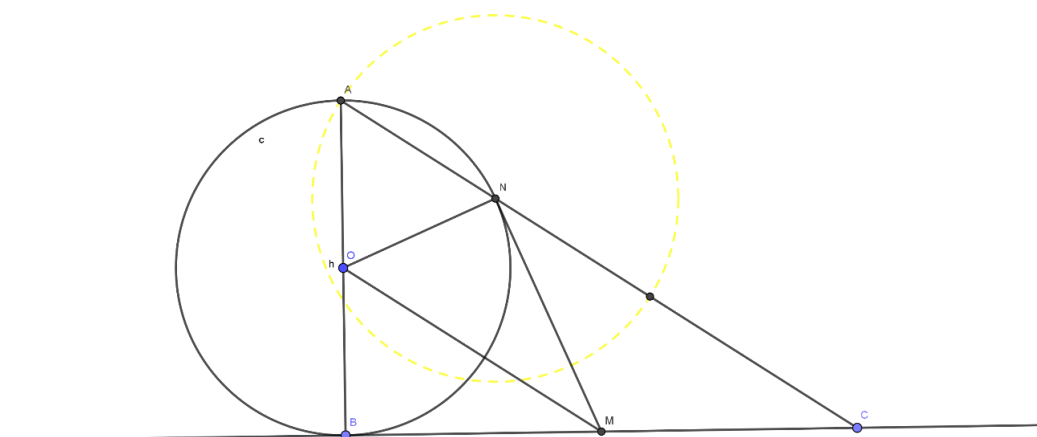


Ilustración 72. Trazo auxiliar en la construcción de Mónica.

Después de aclarar con el investigador que los conceptos que intentó utilizar no se cumplían en su figura, la estudiante propuso una nueva justificación. Mencionó que al trazar una paralela al lado AC que pase por el centro O, esta va a intersectar al lado BC en M aunque el punto móvil C cambie de posición. Si bien lo anterior se cumple, Mónica no propuso ningún argumento matemático para que suceda, sino que fue la observación de la figura la que provocó esta conclusión.

Durante el proceso de construcción de la figura solicitada, la estudiante mostró un *razonamiento intuitivo*. Esto se debe a que explicó sus acciones durante dicho proceso con ideas geométricas expresadas en un lenguaje informal. Sin embargo, el razonamiento pasó a ser *visual* cuando la estudiante hizo una exploración dinámica para mostrar que M era punto medio del lado BC y sus argumentos se fundamentaron en lo observado durante este hecho (ilustración 73).

Medio del segmento BC.
 AB es el diámetro de la circunferencia con centro O,
 por lo que O es el punto medio de AB, además
 AN representa $\frac{1}{3}$ de la longitud de AC por lo que
 M es el punto medio de BC, esto debido a
 un postulado.

Ilustración 73. Justificación presentada por Mónica.

4.2.3 Tarea 3

En la siguiente figura (ilustración 74) se cumple que: los ángulos 1 y 2 son iguales; los ángulos en los vértices B y G son ángulos rectos; y los segmentos AG y BC son iguales. Reproduce la figura con las herramientas de GeoGebra que consideres necesarias. A partir de tu construcción ¿cómo justificas que los segmentos BF y GD son iguales?

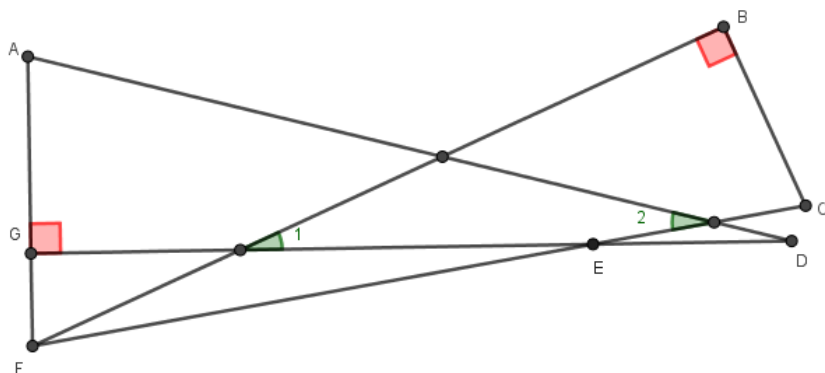


Ilustración 74. Figura presentada en la tarea 3.

Protocolo de construcción de la estudiante 1 (Fernanda): después de hacer varias exploraciones, la estudiante no encontró una manera de realizar la construcción sin utilizar lo que se pedía justificar, es decir, que los segmentos BF y GD son iguales.

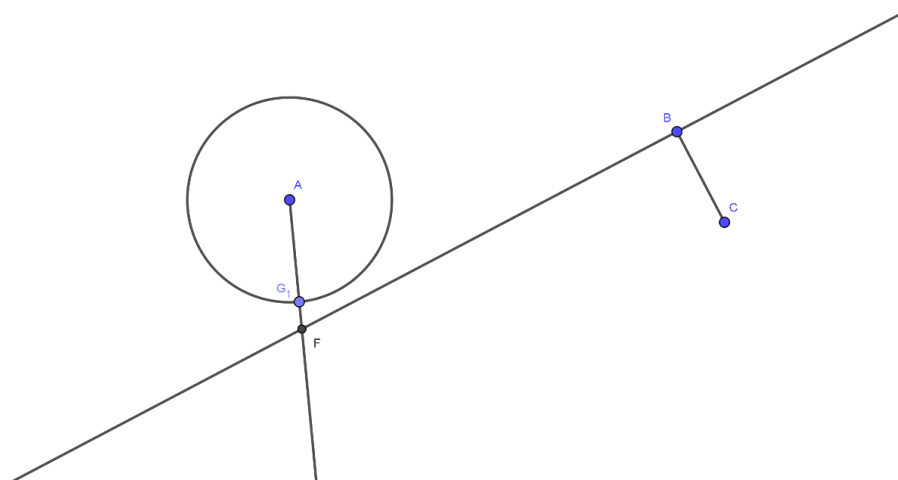


Ilustración 75. Primeros trazos de la construcción de Fernanda.

Tomando esto en cuenta, Fernanda inició colocando el segmento BC y su perpendicular por el punto B . Después, con centro en un punto A trazó una circunferencia con radio igual

al segmento BC y prolongó este radio con una semirrecta, de tal manera que intersecara a la perpendicular de BC en el punto F (ilustración 75). Además, trazó una segunda perpendicular al radio de la circunferencia por G_1 y unió el segmento CF para obtener los puntos G y E. Finalmente, con una circunferencia con centro en G_1 y radio BF obtuvo el punto D, formando así los dos triángulos congruentes propuestos (ilustración 76).

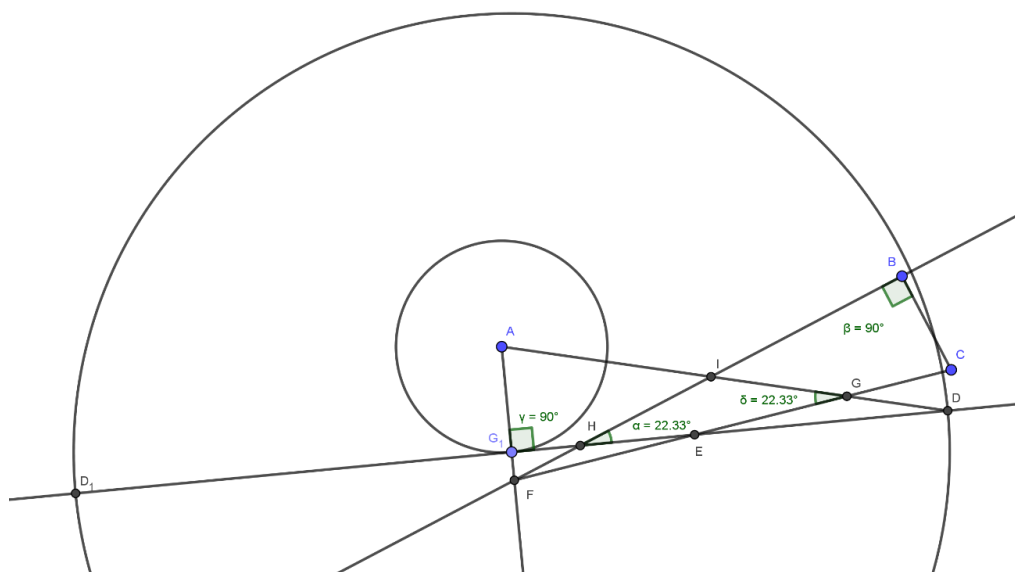


Ilustración 76. Construcción final de Fernanda.

En esta repuesta no se puede hablar de una visualización cien por ciento no-icónica por parte de la estudiante. Esto se debe a que, si bien Fernanda recurrió a las relaciones geométricas necesarias para construir su figura, esta construcción la produjo después de observar y utilizar la propiedad que se pedía justificar (visualización icónica). También, se pudo percibir una deconstrucción instrumental por parte de la estudiante, dados los trazos auxiliares a los que recurrió para construir su figura.

Respecto a la justificación que se solicitó, la estudiante probó que los ángulos internos de los cuadriláteros AGHI y BCGI eran congruentes tomando en cuenta que: un par eran opuestos por el vértice; un par eran ángulos rectos; y otro par eran suplementarios de los ángulos iguales 1 y 2; por lo que los ángulos en los puntos A y C también debían ser congruentes. Por lo tanto, en los triángulos AGD y CBF se cumple el criterio de congruencia *ángulo-lado-ángulo* y con ello, la igualdad de los segmentos BF y GD (ilustración 77).

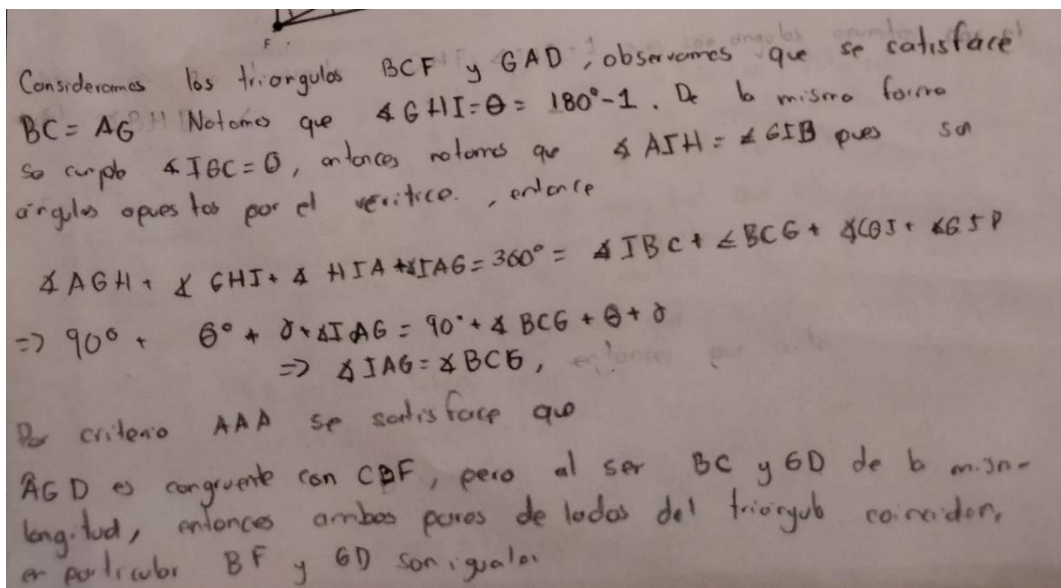


Ilustración 77. Justificación presentada por Fernanda.

En este caso particularmente, se pudo observar una transición por los tres tipos de razonamiento descritos por Samper, Leguizamón y Camargo (2001). El *razonamiento visual* se presentó cuando Fernanda analizó la figura inicial y con base en lo observado en ella, desarrolló su construcción. Después, el *razonamiento intuitivo* se exhibió cuando la estudiante comunicó las ideas geométricas a las que recurrió para desarrollar su construcción. Finalmente, el *razonamiento inferencial* se presentó de manera parcial en la justificación solicitada en la tarea, cuando la estudiante presentó sus argumentos a través de un método deductivo con un lenguaje matemático adecuado.

Protocolo de construcción del estudiante 2 (Alan): la construcción del estudiante no cumplió con las condiciones de la figura propuesta, ya que está sujeta a puntos móviles cuyo cambio de posición provoca que las propiedades solicitadas en la tarea no se mantengan.

Alan tenía claro que no podía suponer que los segmentos BF y GD eran iguales, ya que era lo que tenía que justificar. Durante la entrevista, mencionó que después de varias exploraciones solo logró que su construcción se aproximara a la figura solicitada, pero no cumplía con todas las condiciones propuestas (ilustración 78).

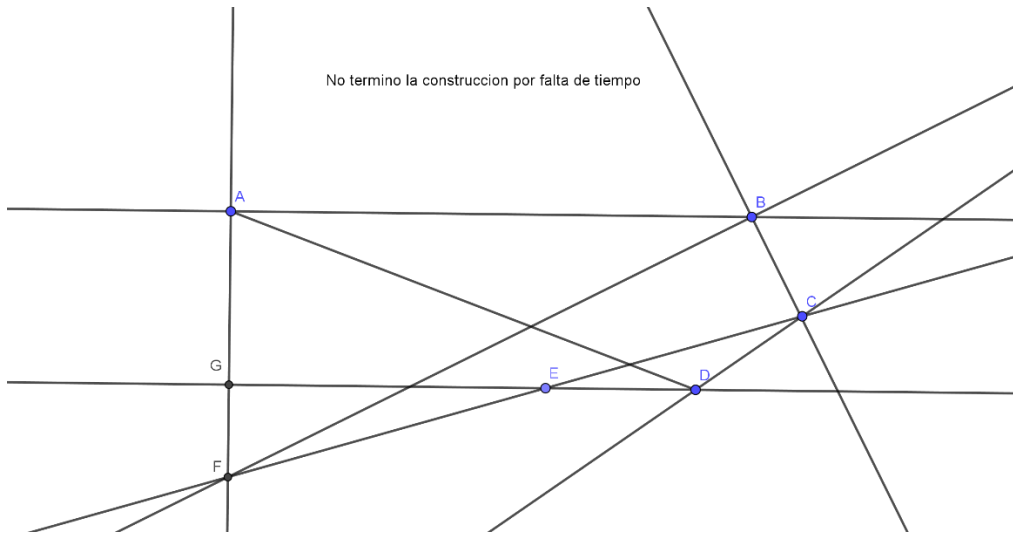


Ilustración 78. Construcción presentada por Alan.

El análisis que el estudiante hizo sobre la figura se quedó en una visualización icónica, ya que su construcción solo era válida visualmente en una posición particular. También, Alan intentó hacer una deconstrucción instrumental de la figura presentada en la tarea, ya que recurrió a diferentes herramientas del software y trazos auxiliares para poder reproducirla.

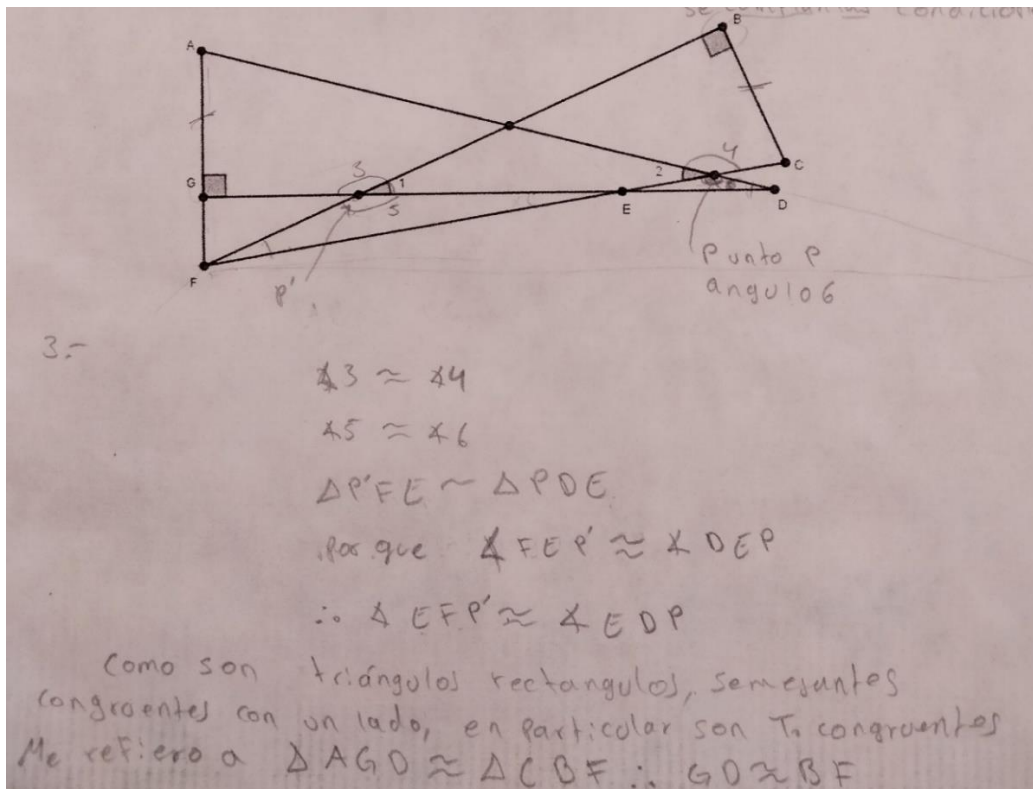


Ilustración 79. Justificación presentada por Alan.

Sobre la justificación solicitada, el estudiante consideró a los triángulos P'FD y PDE y probó su semejanza por la suma de sus ángulos internos⁸. Después, concluyó que al ser iguales los ángulos de los puntos F y D, los triángulos AGD y CBF deberían ser congruentes y, por lo tanto, los lados BF y GD iguales (ilustración 79).

Después del *razonamiento visual* exhibido durante la construcción de su figura, el estudiante manifestó un *razonamiento intuitivo* e indicios de *razonamiento inferencial* al presentar su justificación. Lo anterior se afirma debido al lenguaje que utilizó para comunicar y explicar el procedimiento de dicha justificación.

Protocolo de construcción de la estudiante 3 (Mónica): en este caso la estudiante construyó una figura que aparentemente cumplía con las condiciones de la tarea. Sin embargo, esta construcción estaba condicionada por la posición de los puntos que la componían, ya que al mover cualquiera de estos puntos y en particular el punto D, la condición de que los ángulos 1 y 2 sean iguales no se cumplía (ilustración 80).

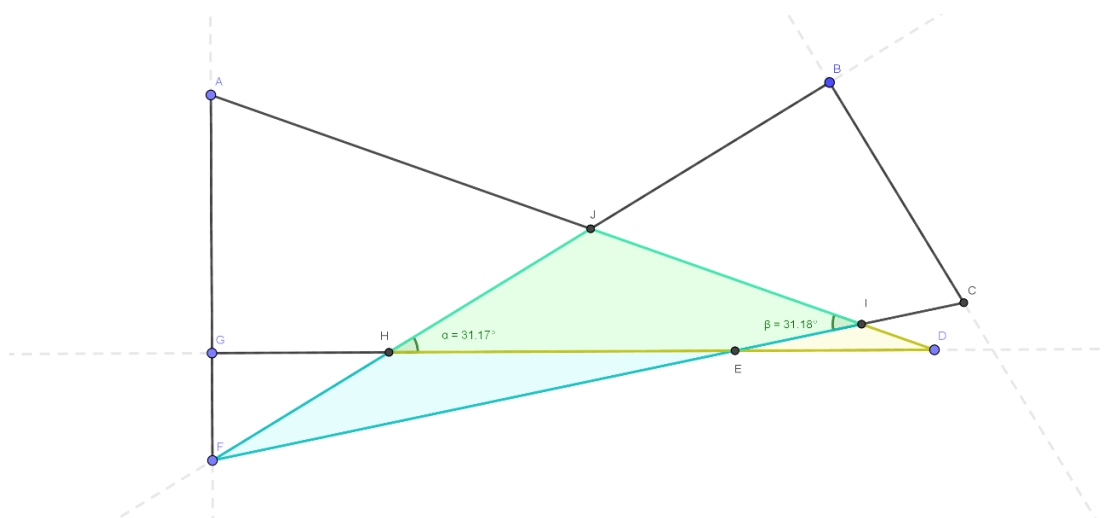


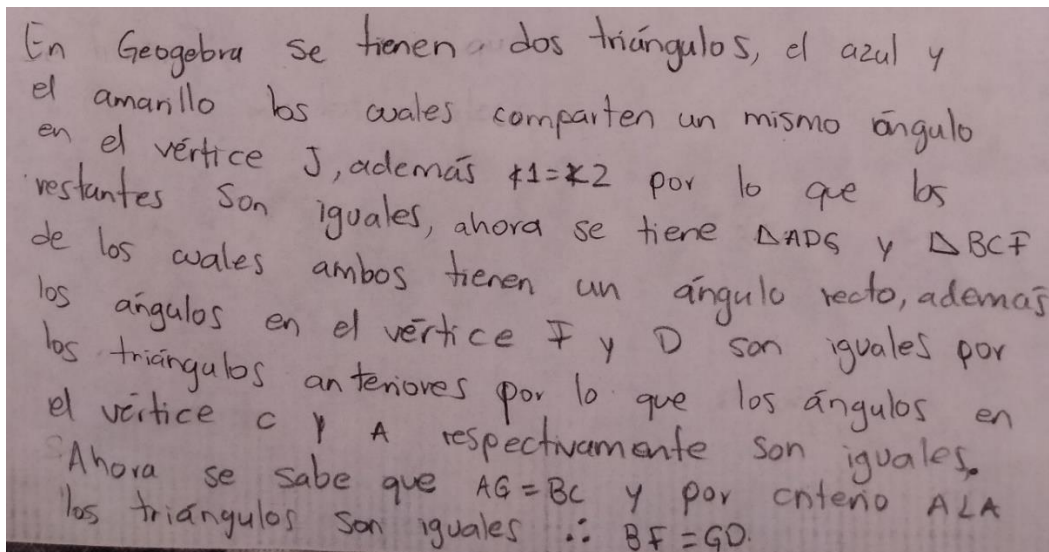
Ilustración 80. Construcción presentada por Mónica.

Aunque los protocolos de construcción no son los mismos, las condiciones de visualización y deconstrucción establecidas por Mónica y Alan fueron las mismas. Esto se debe a que ambos estudiantes validaron su construcción por lo observado en ella en una posición particular (visualización icónica); y desarrollaron esta construcción con

⁸ Los puntos P y P' fueron puntos que Alan determinó dentro de la figura que se le presentó.

herramientas particulares de GeoGebra a través de diferentes trazos auxiliares (deconstrucción instrumental).

Mónica justificó la semejanza de los triángulos FIJ y DHJ por tener sus respectivos ángulos iguales⁹. A partir de este hecho, la estudiante mencionó que como los ángulos en F y D eran iguales, se cumplía que los triángulos ADG y CFB eran congruentes por el criterio *ángulo-lado-ángulo* y, por lo tanto, los lados BF y GD deberían ser iguales (ilustración 81).



En Geogebra se tienen dos triángulos, el azul y el amarillo los cuales comparten un mismo ángulo en el vértice J, además $\angle 1 = \angle 2$ por lo que los restantes son iguales, ahora se tiene $\triangle ADG$ y $\triangle CFB$ de los cuales ambos tienen un ángulo recto, además los ángulos en el vértice F y D son iguales por los triángulos anteriores por lo que los ángulos en el vértice C y A respectivamente son iguales. Ahora se sabe que $AG = BC$ y por criterio A-L-A los triángulos son iguales $\therefore BF = GD$.

Ilustración 81. Justificación presentada por Mónica.

En este caso, también se puede hablar de un *razonamiento visual* por parte de la estudiante, dada la construcción de su figura y debido a la validación visual que realizó sobre ella; y un híbrido entre el *razonamiento intuitivo* y el *inferencial* durante su justificación, por la forma de comunicar y explicar los argumentos que presentó.

⁹ Los puntos H, I y J fueron puntos que Mónica determinó dentro de la figura que construyó.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

El capítulo final de este documento está dividido en tres apartados: en el primero se hace un resumen de los resultados obtenidos, analizados bajo el marco teórico del capítulo 2; en el segundo se menciona cómo ha sido alcanzado el objetivo general de la investigación y se responden las preguntas planteadas en el capítulo 1. Finalmente, en el tercer apartado se exponen las reflexiones finales del trabajo, señalando los aportes y las proyecciones a futuro tomando en cuenta sus resultados.

5.1 Resumen de resultados

En las siguientes tablas se muestra un resumen de las conductas de visualización y deconstrucción (Duval, 2005), percibidas en las respuestas de los participantes de las dos etapas de la investigación. También, se muestran los tipos de razonamiento (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001) que se observaron en ambas etapas.

5.1.1 Primera etapa

Tabla 4. Resumen de resultados en las tareas 1 y 2.

| Tarea 1 | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| Análisis | Visualización | Deconstrucción | Razonamiento |
| Javier | no-icónica | dimensional | visual-intuitivo |
| Karla | no-icónica | instrumental | visual-intuitivo |
| Araceli | icónica no-icónica | instrumental | visual-intuitivo |
| Tarea 2 | | | |
| Javier | no-icónica | dimensional | visual-intuitivo |
| Karla | no-icónica | - | intuitivo-visual |
| Araceli | no-icónica | dimensional | visual |

Con las tareas 1 y 2 (Tabla 4) se buscó la construcción de triángulos a partir de unidades adimensionales que los componía (vértices, puntos medios o puntos notables). Por otra parte, en la Tabla 5 se resumen los resultados de las tareas 3 y 4, donde se buscó la construcción de triángulos proporcionando otro tipo de unidades como lados, alturas o ángulos.

Tabla 5. Resumen de resultados en las tareas 3 y 4.

| Tarea 3 | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| Análisis | Visualización | Deconstrucción | Razonamiento |
| Javier | no-icónica icónica | - | intuitivo-visual |
| Karla | no-icónica | - | intuitivo |
| Araceli | icónica | instrumental | visual-intuitivo |
| Tarea 4 | | | |
| Javier | no-icónica | - | intuitivo-visual |
| Karla | icónica | - | visual |
| Araceli | no-icónica | instrumental | intuitivo |

En la Tabla 6 se resumen los resultados de la tarea 5, donde se solicitó reproducir un triángulo cuya propiedad principal era la tangencia de circunferencias inscritas, tanto a los lados del triángulo como entre las mismas circunferencias.

Tabla 6. Resumen de resultados de la tarea 5.

| Tarea 5 | | | |
|-----------------|----------------------|-----------------------|---------------------|
| Análisis | Visualización | Deconstrucción | Razonamiento |
| Javier | no-icónica | instrumental | intuitivo |
| Karla | no-icónica | instrumental | intuitivo |
| Araceli | icónica | instrumental | visual |

5.1.2 Segunda etapa

En la segunda etapa se propusieron tres tareas referentes a la reproducción de figuras a partir de una imagen y una proposición que describía sus condiciones geométricas. Además, se solicitó a los estudiantes que justificaran el cumplimiento de una propiedad de las figuras propuestas, a partir de su construcción. Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 7.

Tabla 7. Resumen de resultados en la etapa 2.

| Tarea 1 | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| Análisis | Visualización | Deconstrucción | Razonamiento |
| Fernanda | no-icónica | instrumental | intuitivo-inferencial |
| Alan | no-icónica | instrumental | intuitivo-visual |
| Mónica | icónica | instrumental | visual |
| Tarea 2 | | | |
| Fernanda | no-icónica | instrumental | inferencial |
| Alan | no-icónica | instrumental | visual |
| Mónica | no-icónica | instrumental | intuitivo-visual |
| Tarea 3 | | | |
| Fernanda | no-icónica icónica | instrumental | visual-intuitivo-inferencial |
| Alan | icónica | instrumental | visual-intuitivo-inferencial |
| Mónica | icónica | instrumental | visual-intuitivo-inferencial |

Cabe señalar que parte de los resultados obtenidos, en ambas etapas, fueron observados parcialmente. Esto se presentó en los casos donde se evidenció más de un tipo de visualización; donde no hubo una figura inicial que deconstruir; y donde se manifestó una transición a través de más de un tipo de razonamiento por parte de los estudiantes. La postura y conclusiones respecto a estos casos se presentará en el siguiente apartado.

5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

El objetivo general que se planteó para la presente investigación fue el siguiente:

Caracterizar el proceso de solución en tareas sobre construcciones geométricas que estudiantes de maestría desarrollan utilizando geometría dinámica, teniendo en cuenta las siguientes acciones de los estudiantes:

- a) Su primer acercamiento hacia una figura por construir según el tipo de visualización que manifiestan (Duval, 2005).
- b) Los elementos y relaciones que consideran necesarios para la construcción de una figura, teniendo en cuenta el tipo de deconstrucción que hacen sobre una figura inicial (Duval, 2005).

- c) Las ideas y justificaciones que presentan durante la resolución de una tarea, describiendo el tipo de razonamiento que desarrollan durante este proceso (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001).

Para alcanzar el objetivo anterior se consideraron los resultados presentados por seis estudiantes de maestría en tareas propuestas para resolverse utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Los resultados se obtuvieron en dos etapas compuestas por cinco y tres tareas respectivamente, en las que se proponía la construcción de figuras a partir de diferentes condiciones geométricas. En el trabajo de los estudiantes se observó un acercamiento y revisión constante de las propiedades y definiciones involucradas en la proposición de cada tarea; además, de manera recurrente hicieron exploraciones dinámicas como método de evaluación y validación de sus construcciones.

La caracterización del trabajo de los estudiantes se estructuró de manera que se pudieran responder las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1.

¿Cómo es el primer acercamiento de un estudiante con una tarea sobre construcciones geométricas que tiene que resolver utilizando geometría dinámica?

Se utilizaron las definiciones de visualización icónica y no-icónica (Duval, 2005) como herramienta teórica para el análisis del primer acercamiento de los estudiantes hacia las figuras que se les propuso construir. En la mayoría de las tareas se manifestaron casos de visualización no-icónica, ya que previo a construir una figura, los estudiantes identificaron las unidades que la componían y sus respectivas relaciones geométricas. Sin embargo, aun en el nivel académico de maestría, existen casos donde la forma de una figura, en una posición particular, es el factor más influyente en la decisión de cómo desarrollar su construcción (visualización icónica).

Los casos donde se observó una visualización totalmente icónica fueron los de Javier en la tarea 3, Karla en la tarea 4 y Araceli en la tarea 5 de la primera etapa de la investigación. En estos tres casos, la posición de las respectivas figuras dio pie a que los estudiantes afirmaran que se trataba de una solución a las tareas propuestas, a pesar de que eran conscientes de que la construcción era válida solo bajo determinadas condiciones.

En la segunda etapa, la visualización icónica se percibió con Mónica en la tarea 1, donde construyó una figura a partir de lo observado en la imagen que se le presentó y no en las relaciones y condiciones descritas en la proposición. En la tarea 3 también se observó este tipo de visualización por parte de los estudiantes, debido a que ninguno logró reproducir la figura propuesta, sino que modificaron sus figuras para que tuvieran una estructura visualmente cercana a la solicitada.

¿Cuáles son los métodos y estrategias que un estudiante desarrolla durante la resolución de una tarea sobre construcciones geométricas utilizando geometría dinámica?

Se utilizaron los conceptos de deconstrucción instrumental y deconstrucción dimensional (Duval, 2005), para describir las acciones que realizaron los estudiantes durante la resolución de las tareas propuestas. En los casos donde se identificaron las unidades de las figuras directamente de los enunciados de las tareas, se concluyó que no había algún tipo de deconstrucción, ya que no existía una figura inicial que reconstruir. Sin embargo, aun en estos casos, la geometría dinámica jugó un papel determinante para construir las figuras y que estas cumplieran con las condiciones establecidas en cada tarea.

El hecho de que los estudiantes trabajaran con GeoGebra propició que se presentara una deconstrucción instrumental sobre las figuras en la mayoría de las tareas propuestas. Esto se interpretó en los casos donde se construyó una figura inicial para identificar las unidades que la componían y explorar el comportamiento dinámico de sus propiedades. La reconstrucción de las figuras iniciales se produjo mediante trazos o rutas auxiliares determinados por comandos particulares del software (*ángulo dada su amplitud, lugar geométrico, rotación, etc.*). Si bien estos trazos y rutas no pertenecían a las figuras que se solicitaron, fueron necesarias durante el proceso de su construcción.

En la primera etapa únicamente se observaron tres casos de deconstrucción dimensional, Javier en las tareas 1 y 2 y Araceli en la tarea 2. Javier no mostró dificultad para construir las figuras que se le propusieron, por lo que se limitó a considerar las relaciones entre las unidades que las componían, desde las adimensionales (puntos) hasta las unidimensionales (segmentos). Por otro lado, Araceli no tuvo necesidad de utilizar trazos auxiliares para establecer su construcción, sino que la determinó a partir de las unidades que se dieron.

En la segunda etapa, las figuras iniciales acompañaban a la proposición de cada tarea, con la intención de que los estudiantes las reprodujeran a partir de las condiciones que se daban. Este hecho propició que sólo se presentaran deconstrucciones instrumentales donde se utilizaron diferentes herramientas de GeoGebra, como el *lugar geométrico*, y diferentes trazos auxiliares para construir las figuras propuestas.

¿Qué tipo de razonamiento exhibe un estudiante durante la construcción de figuras para la resolución de una tarea y durante la justificación de alguna de las propiedades de las figuras construidas?

A través de los tipos de razonamientos definidos por Samper, Leguizamón y Camargo (2001), se caracterizó el trabajo geométrico desarrollado por los estudiantes en ambas etapas de la investigación. Las ideas, conocimientos y heurísticas expresadas, tanto en las reuniones por zoom como en el material gráfico y digital, fueron interpretadas como *razonamiento visual*, *razonamiento intuitivo* o *razonamiento inferencial*, según las acciones observadas en cada tarea. Como se mencionó en el marco teórico, estos razonamientos no se presentaron de manera aislada y en la mayoría de los casos se complementaron.

En las tareas donde se dieron elementos adimensionales de una figura para su construcción (tareas 1 y 2 de la primera etapa), el razonamiento observado transitó mayormente de lo visual a lo intuitivo. Antes de construir la figura propuesta, los estudiantes construyen otras figuras y las exploran dinámicamente para observar sus propiedades. Esto los condujo a recordar conocimientos previamente adquiridos y aplicarlos a las construcciones propuestas en las tareas.

Solo Karla y Araceli manifestaron un razonamiento diferente en la segunda tarea: Karla pasó de lo intuitivo a lo visual al desarrollar su construcción tomando en cuenta sus conocimientos, pero validándola mediante una exploración dinámica; mientras que Araceli mostró un razonamiento visual al intentar reproducir su construcción inicial considerando únicamente la posición de sus componentes.

El razonamiento de los estudiantes en tareas donde se solicitó presentar más de una solución (3 y 4 de la primera etapa) no alcanzó a ser de tipo inferencial. Se observó un

contraste entre el razonamiento visual y el intuitivo, según el tipo de soluciones presentadas, ya que unas se desarrollaron con base en las ideas y conocimientos de los estudiantes; mientras que otras se presentaron por lo observado en una posición particular de la figura construida.

Por ejemplo, en la respuesta de Javier de la tarea 3 se presentaron tres soluciones, las primeras dos las desarrolló considerando las relaciones que se debían cumplir entre las unidades de la figura; mientras que la tercera era válida únicamente en una posición particular, dependiendo de un punto móvil.

Los procesos de solución en la tarea 5 de la primera etapa reflejaron razonamientos mayormente intuitivos, ya que los estudiantes tomaron en cuenta las propiedades necesarias para que se cumpliera la tangencia a las circunferencias y al triángulo descrito. Sin embargo, Araceli manifestó un razonamiento visual cuando consideró que la tangencia entre una circunferencia y un lado del triángulo se cumplía por lo observado en su construcción, y no por las condiciones geométricas que se debían cumplir.

Con la intención de enriquecer la información referente a las tareas sobre reproducción de figuras a partir de una imagen inicial, se aplicaron tres tareas más de este estilo, a tres nuevos resolutores en una segunda etapa. El razonamiento percibido en esta etapa transitó por tres tipos de razonamiento (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001), conforme el nivel de dificultad de las tareas aumentó.

En las primeras dos tareas, los estudiantes mostraron un razonamiento mayormente intuitivo e incluso Fernanda alcanzó a manifestar un razonamiento inferencial. Por ejemplo, en la tarea 2, la estudiante realizó la construcción solicitada con base en las ideas y conocimientos que consideró pertinentes y, además, comunicó estas ideas con un lenguaje matemático adecuado para validar su construcción y justificar la propiedad que se le propuso.

El hecho de que se observara un razonamiento inferencial en las primeras dos tareas puede estar relacionado con su nivel de dificultad, ya que tanto las construcciones como las justificaciones solicitadas fueron más sencillas que en la tarea 3. Sin embargo, aun con un nivel de dificultad bajo, siguen existiendo casos donde el razonamiento visual predomina en las respuestas de los estudiantes, particularmente para validar el cumplimiento de una

propiedad dentro de sus construcciones, como en los casos de Alan y Mónica en las tareas 1 y 2 respectivamente.

Debido a que el nivel de dificultad de la última tarea fue mayor al de las dos anteriores, los estudiantes no lograron reproducir la figura que se les propuso. Sus construcciones no cumplían las condiciones descritas, eran válidas solo en una posición particular o se realizaban considerando lo que se pedía justificar. Por lo tanto, el razonamiento reportado en esta tarea se interpretó según el trabajo de los estudiantes, para intentar reproducir la figura y para desarrollar la justificación solicitada.

Referente a las construcciones presentadas en esta última tarea, el razonamiento de los estudiantes no fue más allá de lo visual, ya que intentaron validar las propiedades de sus figuras por lo observado en ellas, y no por las condiciones geométricas que debían de cumplir. En lo que respecta a sus justificaciones, se reconoce un razonamiento intuitivo e indicios de razonamiento inferencial, debido a la forma de comunicar sus ideas y argumentos.

5.3 Reflexiones finales

La figura es considerada como un constructo asociado a un objeto geométrico (Mithalal y Balacheff, 2019). En este sentido, las tareas en las que los estudiantes construyen figuras, a partir de diferentes condiciones geométricas, permiten un acercamiento y revisión constante de las propiedades, axiomas y definiciones involucradas en sus proposiciones. En la investigación presentada en este documento se caracterizó el proceso de resolución de tareas referentes a construcciones geométricas, desarrollado por estudiantes de maestría en Matemática Educativa. Los resultados arrojaron información relevante respecto al primer acercamiento de los estudiantes hacia las figuras que pretenden construir utilizando geometría dinámica; los elementos que identificaron en ellas para su construcción; y su razonamiento durante la resolución de las tareas propuestas.

Los estudiantes pudieron ejecutar diferentes protocolos de construcción para cumplir con las condiciones de una misma tarea, lo cual propició el desarrollo de diferentes tipos de razonamiento. En particular, pudimos observar cómo el razonamiento geométrico de un estudiante puede transitar desde lo visual hasta lo inferencial (Samper, Leguizamón y

Camargo, 2001) dependiendo de las acciones que realiza, partiendo de la visualización de una figura inicial y culminando con la construcción de otra.

El hecho de que la investigación se desarrollara dentro del entorno de la geometría dinámica proporcionó una mirada particular hacia el trabajo geométrico de los estudiantes, la cual contrasta con las condiciones impuestas dentro del entorno tradicional del lápiz y papel. Por ejemplo, la exploración dinámica y herramientas particulares que brinda GeoGebra (como el *lugar geométrico*), ayudó a que los estudiantes tuvieran acceso a nuevas formas de producir y validar las condiciones de diferentes figuras que difícilmente se podrían alcanzar con lápiz y papel.

En este sentido, el papel de las figuras no solo fue descriptivo al representar las situaciones geométricas que se propusieron, sino que también tuvieron un papel heurístico a través de la exploración dinámica de sus propiedades. Los estudiantes utilizaron esta exploración para validar los argumentos en sus respuestas o para buscar patrones e invariantes que los ayudaran a justificar alguna propiedad.

Lo anterior podría esperarse dado el nivel académico de los participantes, sin embargo, aun en maestría existen respuestas ancladas en la percepción visual y en la posición particular de una figura. Por lo tanto, consideramos importante seguir indagando aquellas ideas y conocimientos que emergen durante el trabajo geométrico necesario para la construcción de una figura, principalmente, si dichos conocimientos han sido adquiridos y olvidados por estudiantes de grados académicos avanzados.

5.3.1 Aportes principales y proyección hacia el futuro

El estado del arte descrito en el capítulo 1 de este documento, enmarca las principales investigaciones referentes a la figura geométrica desde hace más de tres décadas. La revisión bibliográfica está basada en la selección de publicaciones con mayor impacto dentro de la matemática educativa (Williams y Leatham, 2017); así como investigaciones presentadas en congresos y literatura relacionada. Por lo tanto, esta tesis puede servir como fuente referencial para futuras investigaciones en las que se estudie a la figura geométrica, considerando su definición, representación y función durante el razonamiento de un individuo.

Respecto al trabajo en los salones de clase, se espera que los casos descritos en esta investigación sean útiles en la búsqueda de actividades referentes a la construcción de figuras con geometría dinámica. También, intentamos promover un monitoreo constante por parte de los profesores hacia los protocolos de construcción realizados por sus alumnos, ya que en ellos es posible observar y evaluar las acciones y decisiones tomadas durante la resolución de una tarea. Además, el uso de la geometría dinámica en el aula puede impulsar la búsqueda y reconocimiento de resultados geométricos que han sido estudiados con anterioridad en el entorno tradicional del papel y lápiz.

Creemos que involucrar a los estudiantes en actividades sobre construcción de figuras con geometría dinámica, permite que conecten diferentes conocimientos y refuercen otros que han sido adquiridos en el pasado. Como lo mencionan Conway, Cohen y Stanhope (1992), en la medida en que un dominio del conocimiento se preste a una representación esquemática, puede ser un factor importante en la retención a muy largo plazo. Así que, como un aporte adicional, se desarrolló un trabajo con parte de los resultados de esta investigación en el que se muestra cómo la geometría dinámica puede ser el instrumento mediante el cual los estudiantes recuperen algunos de los conocimientos adquiridos en su formación previa (Mayorga-Sánchez y Zubieta, 2023).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acuña, C. (2010). Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. *Relime*, 13(4-I), 115-128.
- Acuña, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. Barcelona: Editorial Gedisa, S.A.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 7(3), 245–274.
- Chen, C. y Herbst, P. (2013). The interplay among gestures, discourse, and diagrams in students' geometrical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 285-307.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison K. (2007). *Research Methods in Education*, 6ª Ed. Nueva York, NY: Taylor & Francis Group.
- Conway, M., Gohen, G. y Stanhope, N. (1992). Very Long-term Memory for Knowledge Acquired at School and University. *Applied Cognitive Psychology*, 6, 467-482.
- Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A. y Panaoura, A. (2009). A theoretical model of student's geometrical figure understanding. En Vol. Durand-Guerrier, S. Soury. *Proceedings of Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 6, pp. 696-704.
- Deliyianni, E., Gagatsis, A., Monoyiou, A., Michael, P., Kalogirou, P. y Kusniak, A. (2011). Towards a comprehensive theoretical model of student's geometrical figure understanding and its relation with proof. *Proceedings of 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 7, pp. 598-607.
- Dimmel, J. K. y Herbst, P. (2015). The Semiotic Structure of Geometry Diagrams: How Textbook Diagrams Convey Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(2), 147-195.

- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representational and specific processing, En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental mathematics with computers in Mathematics education*, (pp. 142-157). Berlín, Alemania: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-57771-0
- Duval, R. (1998), Geometry from a Cognitive Point of View. En C. Mammana and V Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology end semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 46, 159-170.
- Elia, I., Gagatsis, A. y Kyriakides, L. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: the role of geometric models. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*. Vol.2, pp. 349-355.
- Ferrari, P. (1992). Problem-solving in geometrical setting: interactions between figure and strategy. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, pp. 217-224.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Gagatsis, A. y Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 29-54.
- Gobert. S. (2007). Ways of thinking about the uses of images in learning and teaching geometry: a more thorough investigation of the links between drawings and figures. *5nd*

Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 121-130).

Gómez-Chacón, I., Botana, F., Escribano, J. y Abánades, M. (2016). Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. *Bolema*, 30(54), 67-94. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a04>

Gómez-Chacón, I. y Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 201-226.

Guirette, R. y Zubieta, G. (2010). Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático. *Educación Matemática*, 22(2), 93-121.

Heath, T. (1897). *The works of Archimedes*. London: C. J. Clay and Sons, Cambridge University Press Warehouse, Ave Maria Lane.

Herbst, P. y Arbor, A. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 36(5), 129–139. doi:10.1007/BF02655665

Hjelte, A., Schindler, M., y Nilsson, P. (2020). Kinds of Mathematical Reasoning Addressed in Empirical Research in Mathematics Education: A Systematic Review. *Education Sciences*. 10(289), 1-15. doi: 10.3390/educsci10100289

Jones, K. (1998), Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1&2), 29-34.

Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., y Koike, N. (2014). Proof problems with diagrams: an opportunity for experiencing proofs and refutations. *For the Learning of Mathematics*, 34, 36-42.

- Laborde, C. y Capponi B. (1994). “Cabri-Géomètre constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núm. 12, pp. 165-210.
- Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in student’s construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*, (pp.159-179). Monash University, Melbourne, Australia.
- Lee, W. y Wu, C. (2018). Eye Movements in Integrating Geometric Text and Figure: Scanpaths and Given-New Effects. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 699-714.
- López, G. (1984). *Geometría Euclidiana. Fase de Capacitación Niveles Medio Superior y Superior*. México: Programa nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas.
- Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. [Electronic version]. *2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 478-488).
- Mariotti, M. A. (1995), Images and Concepts in Geometrical Reasoning. En R. Sutherland y J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*, (pp. 97-116). Berlín, Alemania: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-57771-0
- Mariotti, M. A. (1996). Costruzioni in geometria. *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. 19B(3), 261–288.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics education: Past, Present and Future*, (pp. 173-204). Rotterdam, Netherlands.
- Mayorga-Sánchez, M. (2017). *Uso y construcción de figuras en actividades geométricas y procesos de justificación. Un estudio desde la teoría fundamentada con estudiantes de licenciatura*. Tesis de maestría. Cinvestav, México.

- Mayorga-Sánchez, M. y Zubieta, G. (2023). Recuperación de Conocimientos Utilizando Geometría Dinámica. *Suma*. En prensa.
- Mesquita, A. L. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Michael-Chrysanthou, P. y Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in way of looking at geometrical figures. *Relime*, 17(4-I), 165-179. Doi: 10.12802/relime.13.1748
- Mithalal, J. y Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, 100, 161-176.
- Nirode, W. (2014). Triangles from Three Points. *The Mathematics Teacher*, 108(1), 32-38.
- Nunokawa, K. (1994). Improving Diagrams Gradually: One Approach to Using Diagrams in Problem Solving. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 34-38.
- Núñez, R. (2004). Do real numbers really move? Language, thought, and gesture: The embodied cognitive foundations of mathematics. In F. Iida, R. Pfeifer, L. Steels, & Y. Kuniyashi (Eds.), *Embodied artificial intelligence* (pp. 54–73). Berlin: Springer.
- Panaura, A. (2014). Using representations in geometry: a model of students' cognitive and affective performance. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 45(4), 498-511. doi: 10.1080/0020739X.2013.851804
- Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing.” Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79–92. doi:10.1007/BF00428386
- Posamentier, A. y Lehmann, I. (2012). *The Secrets of Triangles “A Mathematical Journey”*. Amherst, New York: Prometheus Books
- Robotti, E. (2001). Verbalization as a mediator between figural and theoretical aspects. [Electronic version]. *2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 564-576).

- Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2001). Razonamiento en geometría. *Revista EMA*, 6(2), 141-158.
- Sandoval, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21 (1), 5-27.
- Simons, H. (2009). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.
- Stylianou, D. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 13, 325-343.
- Wernick, W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points. *Mathematics Magazine*, 55(4), 227-30.
- Williams, S. y Leatham, K. (2017). Journal Quality in Mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 369-396.