CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemáticas

Una Generalización del Anillo de Adeles

T E S I S

Que presenta

Edwin Alexis Contreras Contreras

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Director de Tesis: Dr. José Guadalupe Martínez Bernal

Ciudad de México | Junio, 2023

Contenido

Dedicado a mis padres,

por su incondicional apoyo y motivación.

Agradecimientos

Primeramente a Dios;

De manera muy especial, a mis padres, Antonio y Angélica, por el apoyo y fortaleza que siempre me han brindado para alcanzar mis objetivos. Y a mis hermanos, por ser parte importante en mi vida;

Al Departamento de Matemáticas del Cinvestav, por la formación y enseñanzas adquiridas;

Al Conahcyt, por la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría;

A todos los profesores que me impartieron clases;

Y a mis compañeros...que se volvieron amigos.

Resumen

Un *campo de números* es una extensión finita del campo de los números racionales. Dos valores absolutos sobre un mismo campo se dicen *equivalentes* si determinan la misma topología. Una *valuación* es una clase de equivalencia de valores absolutos bajo esta relación de equivalencia. Toda valuación de un campo de números determina una *métrica* y por tanto una *completación*, la cual, en particular, también es un campo con una valuación que extiende a la valuación dada. Empezamos con un campo de números. Con todas las completaciones de este campo, las cuales están parametrizadas por las distintas valuaciones definidas sobre él, se construye lo que se conoce como *el anillo de adeles del campo de números*, el cual resulta ser un anillo topológico localmente compacto. En este trabajo hacemos una construcción análoga, pero ahora el campo con el que se empieza es *la cerradura algebraica del campo de los racionales*. Después de definir una topología adecuada sobre el conjunto de valuaciones definidas sobre este nuevo campo, construimos lo que se conoce como *el anillo de adeles continuos*, y cuya relevancia radica en que es un anillo topológico que contiene como subanillo topológico a cada uno de los anillos de adeles de los campos de números construidos anteriormente. La idea principal en la construcción es el uso de una topología definida sobre el conjunto de valuaciones de la cerradura algebraica de los racionales, la cual fue introducida originalmente por Allcock y Vaaler en 2009 y adecuada posteriormente para dichos propósitos por Kelly y Samuels en 2020.

Abstract

A *number field* is a finite extension of the field of rational numbers. Two absolute values on the same number field are said to be *equivalent* if they determine the same topology. A *valuation* is a class of equivalence of absolute values under this equivalence relation. Every valuation on a number field determines a *metric*, an then a *completion*, which, in particular, is also a field with a valuation that extends the given valuation. Starting with a number field, with all its completions, which are parametrized by the distinct valuations defined on it, one construct what is known as the *ring of adeles of the number field*, which is a locally compact topological ring. In this work we make an analogous construction, but now the field we start with is *the algebraic closure of the rational numbers.* After defining an adequate topology on the set of valuations defined on this new field, one obtain what is known as the *ring of continuous adeles*, whose relevance relies on the fact that it contains as a topological subring each one of the rings of adeles of number fields constructed above. The main idea in the construction is the use of a topology defined on the set of valuations of the the algebraic closure of the rational numbers, originally introduced by Allcock and Vaaler in 2009 and subsequently adapted for such purposes by Kelly and Samuels in 2020.

Introducción

In the beginning of their academic careers most mathematicians see little beyond standard mathematics. There are few adventures in other territories and few opportunities to visit some of the more exotic corners of mathematics. Our goal here is to offer such an opportunity by way of a visit to the p-adic universe. Such a visit offers a glimpse of a part of mathematics which is both important and fun and which also is something of a meeting point between algebra and analysis.

F.Q. Gouvêa
p-Adic Numbers

Un *campo de números* es una extención finita del campo de los números racionales. Sobre un campo de números existen, aparte del trivial, sólo dos tipos de valor absoluto, los primeros, llamados arquimedianos, dependen de la forma en que se encaja el campo dentro de los números complejos; mientras que los segundos, llamados no-arquimedianos, dependen de los ideales primos del campo de números. Estos últimos son los que dan lugar mediante completación a los campos de números $\mathfrak{p}$-ádicos. Éstos, a su vez, para cada campo de números K, nos llevan a construir el correspondiente anillo de adeles $\mathbb{A}_K$. Nuestro objetivo en este trabajo es construir el anillo de adeles continuos, el cual es un anillo topológico que tiene la propiedad de contener como subanillo topológico a cada uno de los anillos de adeles $\mathbb{A}_K$ cuando K corre sobre todos los campos de números contenidos en el campo de los números complejos.

La idea principal para la construcción es el uso de una topología en el conjunto de valuaciones definidas sobre la cerradura algebraica de los números racionales; dicha topología fue introducida originalmente por Allcock y Vaaler en 2009 [1]. La condición de finitud, que es un típico requerimiento en la definición del anillo de adeles para un campo de números, se cambia por una condición de compacidad. Además, con una variante adecuada de dicha topología, desarrollada por Kelly y Samuels en 2020 [6], probaremos que los adeles continuos forman un anillo topológico el cual contiene a cada uno de los anillos de adeles de un campo de números como un subanillo topológico. No está de más remarcar desde ahora que todos los resultados que presentamos se desarrollaron de una u otra manera en los trabajos de Allcock, Vaaler, Kelly y Samuels.

Una breve descripción del contenido del trabajo es como sigue:

Capítulo 1: Se introducen los conceptos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo. En la primera sección se introduce la noción de lo que es un grupo localmente compacto; en la segunda se define el producto directo restringido de una familia de grupos topológicos, lo cual es clave para la definición del anillo de adeles de un campo de números; en la tercera recordamos lo que es la topología de Krull sobre un grupo de Galois; en la cuarta se define lo que es una valuación sobre un campo; en la quinta, y última sección, se establecen algunos resultados acerca de la extensión de valuaciones en extensiones de campos, dichas extensiones, asi como su existencia y sus propiedades, juegan un rol predominante a lo largo de todo el trabajo.

Capítulo 2: Se define el campo de los números p-ádicos como una completación de los números racionales, y se mencionan algunas de las diferencias entre los casos arquimediano y no-arquimediano. Se enuncia el importante teorema de Ostrowski, el cual nos da una clasificación completa de las valuaciones sobre el campo de los racionales. De paso, también mencionamos el caso más general de dicho teorema, que es válido no sólo para los racionales, sino para cualquier campo de números. Es bien conocido que al tomar la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}_p$, denotada por $\overline{\mathbb{Q}_p}$, esta no resulta ser un campo completo, a diferencia de $\mathbb{R}$ que con sólo adjuntar el número complejo i ya se obtiene $\mathbb{C}$, que ya es algebraicamente cerrado y completo. Entonces debemos extendernos un paso más y tomar la completación de $\overline{\mathbb{Q}_p}$, para, afortunadamente, ya tener un campo que sea algebraicamente cerrado y completo; el cual se denota por $\mathbb{C}_p$, y se le llama el campo de los números complejos p-ádicos; este tema lo tratamos sólo muy ligeramente. Finalmente, llegamos a la última sección del capítulo: dados K un campo de números, v una valuación de K y K_v su completación con respecto a v, el anillo de adeles de K, denotado por $\mathbb{A}_K$, es el producto directo restringido de la familia de campos locales K_v, con respecto a los anillos de enteros $\mathcal{O}_v$, cuando v corre sobre todas las valuaciones no-arquimedianas de K. En otras palabras, los adeles son aquellos elementos $(x_v)_v$ del producto cartesiano $\prod K_v$ tales que, salvo por una cantidad finita de v's, x_v pertenece al anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ de K_v para todo v. Por lo que $\mathbb{A}_K$, con las operaciones componente a componente, resulta ser un anillo localmente compacto Hausdorff. Aunque en nuestro trabajo no será considerado, cabe remarcar que esta última propiedad topológica del anillo $\mathbb{A}_K$ es de la mayor relevancia, ya que garantiza la existencia de una medida de Haar, lo que, a su vez, permite la aplicación de los métodos del análisis armónico y funcional.

El anillo de adeles fue introducido por Weil en el año de 1937 mientras estudiaba campos de funciones en busca de un método alternativo para la demostración del teorema de Riemann-Roch. Unos años antes, Chevalley ya había definido la noción de ideles, los elementos invertibles de los adeles, los cuales forman un grupo a cuyos elementos se les llamó "élements idéaux" (elementos ideales, que abreviado se escribe: id.el.; de manera similar, adele proviene del nombre elemento aditivo, que abreviado se escribe: ad.el.) Para 1945, Artin y Whaples introdujeron, de manera independiente, los adeles a partir de los ideles. Pero no fue sino hasta el año de 1958 en que Weil formalizó la definición de adele en una charla del seminario Bourbaki titulada *grupos algebraicos y adeles*, porque estaban interesados en estudiar medidas de Tamagawa sobre ciertos grupos algebraicos adélicos para probar varios resultados relacionados con la conjetura de Weil acerca de los números de Tamagawa.

Capítulo 3: Aquí se estudia con más detalle el conjunto de valuaciones definidas sobre la cerradura algebraica de los números racionales; dicho conjunto se denota por $V(\overline{\mathbb{Q}})$. El grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ actúa de manera natural sobre $V(\overline{\mathbb{Q}})$. Se introduce la topología de Allcock y Vaaler sobre $V(\overline{\mathbb{Q}})$, lo que nos permite tener una noción de compacidad sobre dicho conjunto y con ello llegar a definir, como un anillo auxiliar en la construcción, el anillo de adeles estándar $\mathbb{A}$. Terminamos el capítulo definiendo la función conorma, cuya utilidad será que nos permite encajar a los anillos de adeles $\mathbb{A}_K$ en el anillo de adeles estándar $\mathbb{A}$.

Capítulo 4: Hasta aquí, ya hemos construido el anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ de un campo de números K, así como el anillo de adeles estándar $\mathbb{A}$, y mediante la función conorma podemos encajar $\mathbb{A}_K$ en $\mathbb{A}$. Aunque este encaje es un homomorfismo de anillos, topológicamente no tiene un buen comportamiento, por ejemplo, no es continuo [5, p.4]. Entonces, ahora, siguiendo a Kelly y Samuels, se construye el anillo de adeles continuos $\overline{\mathbb{A}}$ como un subanillo de $\mathbb{A}$. Lo interesante es que la función conorma de hecho nos da un encaje de A_K en el subanillo $\overline{\mathbb{A}}$. Además, restringiendo adecuadamente la topología subespacio de $\overline{\mathbb{A}}$, se tendrá que este encaje es un homomorfismo topológico de anillos, el cual es un homeomorfismo sobre su imagen. Por lo que, en conclusión, se ha probado que para todo campo de números K el anillo de adeles continuos $\overline{\mathbb{A}}$ contiene al anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ como un subanillo topológico.

Capítulo 1

Preliminares

We shall develop new tools essential for describing the structure of fields. We obtain these tools by relinquishing the usual meaning of the size of a rational number as given by its absolute value. In this connection we obtain a new conception of arithmetic according to which divisivility and congruence relationships appear as approximations in the sense of this new concept of a valuation.

H. Hasse
Number Theory

En este capítulo se introducen los conceptos básicos necesarios para el desarrollo del trabajo.

1.1 Grupos localmente compactos

Un grupo se dice que es un ***grupo topológico*** si tiene una topología con respecto a la cual las operaciónes de producto e inversión son continuas.

Un espacio topológico se dice ***localmente compacto*** si todo punto del espacio tiene una vecindad compacta, es decir, para todo punto existe un subconjunto compacto que contiene al punto en su interior.

Si un grupo topológico es localmente compacto y Hausdorff, entonces diremos, para abreviar, que es un ***grupo localmente compacto***.

1.2 Topología de Krull

Recordemos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un conjunto X es una ***base para una topología*** de X si $X = \bigcup \mathcal{B}$ y para todo $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. En tal caso, los abiertos de X son las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$.

Una extensión algebraica de campos se dice que es de **Galois** si es normal y separable. Sea E/k una extensión de Galois, posiblemente infinita, con grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(E/k)$. La extensión E/k es una unión de extensiones de Galois finitas de la forma L/k, donde L es un campo intermedio, i.e. $k \subseteq L \subseteq E$. Para un campo intermedio L de la extensión E/k y $\sigma \in G$, la clase lateral $\sigma\mathrm{Gal}(E/L)$ consiste de aquellos elementos τ en G tales que $\tau|_L = \sigma|_L$. Consideremos la familia de clases laterales

$$\mathcal{B} := \{\sigma H : \sigma \in G, H = \mathrm{Gal}(E/L), L/k \text{ es una extensión de Galois finita}\}.$$

Veamos que dicha familia de subconjuntos es base para una topología de G. Notemos primero que haciendo $L = k$ resulta $H = G$, por lo que se cumple que $G = \bigcup \mathcal{B}$.

Sean $\sigma_1 H_1, \sigma_2 H_2 \in \mathcal{B}$, digamos $H_i = \mathrm{Gal}(E/L_i)$. Como L_1 y L_2 son de Galois finitas, también lo es L_1L_2/k, y además $H_1 \cap H_2 = \mathrm{Gal}(E/L_1L_2)$; Para ver esto último, denotamos por E^σ al subcampo de E fijo ante σ, y notamos que $\sigma \in H_1 \cap H_2$ $\Leftrightarrow \sigma|_{L_i} = \mathrm{id}_k \Leftrightarrow L_i \subseteq E^\sigma \Leftrightarrow L_1L_2 \subseteq E^\sigma \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Gal}(E/L_1L_2)$.

Por tanto, si $\sigma \in \sigma_1 H_1 \cap \sigma_2 H_2$, entonces $\sigma H_1 = \sigma_1 H_1$, $\sigma H_2 = \sigma_2 H_2$, y $\sigma_1 H_1 \cap \sigma_2 H_2 = \sigma H_1 \cap \sigma H_2 = \sigma(H_1 \cap H_2)$, por lo que $\mathcal{B}$ es base para una topología de G. Los abiertos de esta topología son las uniones arbitrarias de clases laterales en $\mathcal{B}$. A dicha topología se le llama la ***topología de Krull*** del grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/k)$. Para una prueba del siguente resultado se puede consultar [9, Thm. 17.6].

Proposición 1.2.1. *La topología de Krull es compacta, totalmente disconexa y*

Hausdorff. Además, con esta topología el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(E/k)$ *es un grupo compacto.*

1.3 Producto directo restringido

Dada una familia arbitraria de grupos localmente compactos, sería deseable construir a partir de todos ellos otro grupo que también fuera locamente compacto. El candidato natural es su producto directo, sin embargo, en general, este no resulta ser localmente compacto. Existe, afortunadamente, una variante del producto directo que sí conserva dicha propiedad, esta variante es el lo que se conoce como el producto directo restringido de la familia, y cuya construcción a continuación describimos.

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos, y para casi todo $i \in I$ (i.e. para todos excepto un número finito) sea H_i un subgrupo abierto de G_i.

El ***producto directo restringido*** de los G_i, relativo a los H_i, y denotado por $\prod'_{i\in I} G_i$, es el subgrupo del producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ que consiste de aquellos elementos $(x_i)_i$ tales que $x_i \in H_i$ para casi todo i. El producto directo restringido es un grupo topológico; una base para la topología está dada por los subconjuntos de la forma

$$\prod U_i \subseteq \prod G_i$$

tales que U_i es un subconjunto abierto de G_i para todo $i \in I$, y existe un subconjunto finito J de I tal que $U_i = H_i$ para todo $i \notin J$.

Ejemplos básicos del producto directo restringido son el producto cartesiano ($H_i = G_i$ para todo i) y la suma directa de subgrupos discretos ($H_i = 0$ para todo i). Escribiremos sólamente $\prod'_{i\in I} G_i$ cuando sea claro del contexo quiénes son los H_i.

Cuando todos los G_i son Hausdorff, su producto directo restringido también lo es, y mejor aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.1. [2, p.63] *Si todos los* G_i *son localmente compactos y los* H_i *son* *compactos, entonces su producto directo restringido es localmente compacto.*

Una construcción completamente análoga se tiene para el producto directo restringido de anillos topológicos. En nuestro caso, los anillos serán los campos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, y los subanillos serán los subanillos de enteros $\mathcal{O}_p$, que son abiertos y compactos.

1.4 Valuaciones

Un ***valor absoluto*** sobre un campo K es una función $|\cdot| : K \to [0, \infty)$ tal que para todo $x, y \in K$ se cumple que

(i) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$; (ii) $|xy| = |x||y|$; (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Si el valor absoluto satisface además la condición más fuerte

(iii') $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

entonces se dice que es ***no-arquimediano***, en otro caso se dice que es ***arquimediano***. Todo valor absoluto sobre el campo K induce una métrica: $d(x, y) := |x - y|$, i.e. para todo $x, y, z \in K$ se cumple que

(i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$; (ii) $d(x, y) = d(y, x)$; (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Dicha métrica define, a su vez, una topología sobre K. Dos valores absolutos son ***equivalentes*** si definen la misma topología. Esta relación es una relación de equivalencia sobre los valores absolutos. A cada clase de equivalencia se le llama una ***valuación***. En la práctica, es común identificar una valuación v con uno de sus valores absolutos representantes y denotarlo por $|\cdot|_v$. Si un valor absoluto es no-arquimediano, entonces todos sus valores absolutos equivalentes también son no-arquimedianos, por lo que sin ambigüedad podemos referirnos a una ***valuación no-arquimediana***.

En un espacio métrico (X, d), una sucesión $(x_n)_n$ se dice que es una ***sucesión de Cauchy*** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. El espacio métrico (X, d) es ***completo*** si toda sucesión de Cauchy converge a algún punto de X. Si X es un anillo con una métrica inducida por un valor absoluto $|\cdot|$, diremos que X es ***completo*** con respecto a dicho valor absoluto si como espacio métrico es completo.

En todo campo existe siempre definido un valor absoluto, a saber, el trivial: que asigna el valor 1 a todo elemento no cero. De hecho, sobre un campo finito este es el único valor absoluto que existe.

A continuación enunciamos algunos criterios para reconocer cuando dos valores absolutos son equivalentes.

Proposición 1.4.1. [4, Prop. 3.1.3] *Sean $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ dos valores absolutos definidos sobre el mismo campo K. Los siguientes son equivalentes:*

(i) *Los valores absolutos $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes;*

(ii) *Para cualquier sucesión (x_n) en K se tiene que $x_n \to x$ con respecto a $|\cdot|_1$ si y sólo si $x_n \to x$ con respecto a $|\cdot|_2$;*

(iii) *Para todo $x \in K$ se tiene que $|x|_1 < 1$ si y sólo si $|x|_2 < 1$;*

(iv) *Para todo $x \in K$ se tiene que $|x|_1 \leq 1$ si y sólo si $|x|_2 \leq 1$;*

(v) *Existe un número real positivo s tal que para todo $x \in K$, $|x|_1 = |x|_2^s$.*

Cabe observar que la condición (v) no dice que $|\cdot|_2^s$ es un valor absoluto para todo s positivo, sólo dice que para algún s.

1.5 Extensión de valuaciones

Sea L/K una extensión de campos con valores absolutos $|\cdot|_L$ y $|\cdot|_K$ respectivamente. El valor absoluto $|\cdot|_L$ es una ***extensión*** del valor absoluto $|\cdot|_K$ si la restricción de $|\cdot|_L$ a K coincide con $|\cdot|_K$.

Sean K un campo y v una valuación de K. Es un resultado clásico de la teoría de completaciones en análisis matemático que la completación de K con respecto a v es un campo, denotado por K_v, y que v se extiende a una única valuación v de la completación K_v. Además, dicha valuación v se extiende a una única valuación $\overline{v}$ en la cerradura algebraica de $\overline{\mathbb{Q}}$. En efecto (ver [4]); para definir el valor absoluto de $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ se utiliza el definido en la extensión $K(a)$.

Los siguiente dos resultados nos serán de utilidad.

Proposición 1.5.1. ([8, Prop. XII.2.5]) *Sea K un campo completo con respecto a un valor absoluto no trivial v. Si E/K es una extensión algebraica, entonces v tiene una única extensión a E. Si además la extensión es finita, entonces E es completo.*

Proposición 1.5.2. (Gelfand-Mazur) ([8, Cor. XII.2.4]) *Sea K un campo, el cual es una extensión de $\mathbb{R}$ y tiene un valor absoluto que extiende al valor absoluto usual de $\mathbb{R}$. Entonces $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$.*

Capítulo 2

El Anillo de Adeles

A finales del siglo XIX, Hensel describió su idea de cómo visualizar un número algebraico expresándolo como una expansión en términos de potencias de un número primo p. Una vez justificadas las bases para la convergencia de dichas series p-ádicas, analizó el conjunto de todas las posibles expansiones y asi logró dar una descripción local de los campos de números, a dicho conjunto de expansiones se le denominó el campo de los números p-ádicos. Los números p-ádicos, así como el análisis p-ádico, han jugado un papel central en la teoría de números moderna, su importancia se ve reflejada en las conexiones que ha tenido con otras áreas fuera de las matemáticas, particularmente con la física teórica.

En este capítulo se definirá el campo de los números p-ádicos, se mencionarán algunas de las analogías entre $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$, ambos como completaciones de $\mathbb{Q}$.

Desafortunadamente, al tomar la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}_p$, ésta resulta no ser un campo completo (a diferencia de $\mathbb{R}$ que tan sólo con adjuntar i se obtiene $\mathbb{C}$, que ya es algebraicamente cerrado y completo), por lo cual nos aventuraremos en un campo mucho más grande que $\mathbb{Q}_p$, el cual resultará ser algebraicamente cerrado y completo: los números complejos p-ádicos $\mathbb{C}_p$. Además de que podremos identificar los números p-ádicos como complejos p-ádicos mediante el encaje $\mathbb{Q}_p \hookrightarrow \mathbb{C}_p$.

Asi que, comencemos construyendo de forma breve, para cada número primo p, el campo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, el cual es la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto al valor absoluto p-ádico.

2.1 Números p-ádicos

Considere el campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ y denotemos por $|\cdot|$ al valor absoluto usual sobre $\mathbb{R}$. Tal valor absoluto determina un valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$, que algunas veces se denota por $|\cdot|_\infty$, y que para cada $x \in \mathbb{Q}$ se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por otro lado, se define también el **valor absoluto p-ádico** sobre $\mathbb{Q}$, dado por

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $\mathrm{ord}_p(x)$ es el único entero tal que $x = p^{\mathrm{ord}_p(x)} a/b$, con a y b coprimos con p.

Para el valor absoluto (arquimediano) usual $|\cdot|$ sobre $\mathbb{Q}$, existe una inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, y se verifica que $\mathbb{R}$ es la completación de $\mathbb{Q}$. En efecto,

- $\mathbb{R}$ es completo con respecto a la métrica inducida por el valor absoluto usual.
- $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con respecto a la métrica inducida por el valor absoluto usual.

Esto último y los siguientes hechos pueden consultarse en [4].

Teorema 2.1.1. *Para cada número primo $p \in \mathbb{Z}$ existe un campo $\mathbb{Q}_p$ con un valor absoluto no-arquimediano $\big|\cdot\big|_p$ tal que:*

(i) Existe una inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$, y el valor absoluto inducido por $\big|\cdot\big|_p$ sobre $\mathbb{Q}$ bajo esta inclusión es el valor absoluto p-ádico;

(ii) La imagen de $\mathbb{Q}$ bajo esta inclusión es un conjunto denso en $\mathbb{Q}_p$ con respecto a $\big|\cdot\big|_p$;

(iii) $\mathbb{Q}_p$ *es completo con respecto a* $\left|\cdot\right|_p$.

El campo $\mathbb{Q}_p$ *que satisface estas tres condiciones es único, salvo un isomorfismo que preserva el valor absoluto.*

2.2 Teorema de Ostrowski

Ahora el siguiente paso es saber que esencialmente estos son todos los posibles valores absolutos sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2.1. (Ostrowski) [7, p.3]. *Todo valor absoluto no trivial sobre* $\mathbb{Q}$ *es equivalente al valor absoluto usual* $|\cdot|$ *o a un valor absoluto p-ádico* $|\cdot|_p$.

Este resultado es el que suele justificar el uso de la notación $|\cdot|_\infty$ en lugar del valor absoluto usual $|\cdot|$.

En esta dirección, otros dos de resultados de utilidad son los siguientes:

Teorema 2.2.2. [11, p.124] *Sea* K *un campo completo con respecto a una valuación arquimediana* $|\cdot|$. *Entonces existe un isomorfismo* σ *de* K *sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *para el que* $|a| = |\sigma(a)|^s$ *para todo* $a \in K$ *y algún* $s \in (0, 1]$ *fijo.*

Teorema 2.2.3. (Ostrowski) [3, Thm. 3] *Sea* K *un campo de números. Todo valor absoluto no trivial de* K *es equivalente a un valor absoluto* $\mathfrak{p}$*-ádico para un único primo* $\mathfrak{p}$ *en el anillo de enteros* $\mathcal{O}_K$, *o es equivalente a un valor absoluto asociado a un encaje real o complejo de* K.

2.3 Cerradura algebraica de $\mathbb{Q}_p$

Sea E/K una extensión algebraica de campos. Si E es algebraicamente cerrado, se dice que E es una **cerradura algebraica** de K, la cual se denotará por $\overline{K} = E$.

Sea K una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$. Existe un único valor absoluto sobre K que extiende al valor absoluto p-ádico de $\mathbb{Q}_p$, a la extensión del valor absoluto la llamaremos el **valor absoluto p-ádico sobre** K y dicha extensión del valor absoluto hace a K completo.

Dado $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, la extensión $\mathbb{Q}_p(x)/\mathbb{Q}_p$ es finita, así, por la unicidad del valor absoluto p-ádico sobre $\mathbb{Q}_p(x)$ es posible definir $|x|_p$. Resulta que este valor absoluto no depende del campo sobre el cual lo consideremos, sólo depende de x (como la raíz de algún polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$), asi que tiene sentido decir que este es el valor absoluto del elemento $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, es decir, dicha asignación

$$|\cdot|_p : \overline{\mathbb{Q}_p} \to [0, \infty)$$

define el valor absoluto p-ádico sobre $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Proposición 2.3.1. [4, Thm. 6.8.4] *La cerradura algebraica $\overline{\mathbb{Q}_p}$ no es completa con respecto al valor absoluto $|\cdot|_p$.*

Al igual que $\mathbb{Q}$ no es completo con respecto a $|\cdot|_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ no es completo con respecto a $|\cdot|_p$. Definimos el **campo de los números complejos p-ádicos**, denotado por $\mathbb{C}_p$, como la completación de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ con respecto a la extensión del valor absoluto p-ádico sobre $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

2.4 El anillo de adeles

Sean K un campo de números, v una valuación de K y K_v la completación de K con respecto a v. Si v es no-arquimediana, entonces el **anillo de enteros v-ádicos** es el conjunto

$$\mathcal{O}_v := \{x \in K_v : |x|_v \leq 1\}$$

el cual es un subanillo de K_v, abierto y compacto con respecto a la topología inducida por el valor absoluto $|\cdot|_v$.

El **anillo de adeles** de K, denotado por $\mathbb{A}_K$, es el producto directo restringido de la familia de campos locales K_v, con respecto a los anillos de enteros $\mathcal{O}_v$, donde v corre sobre todas las valuaciones no-arquimedianas de K. En otras palabras, los elementos del anillo $\mathbb{A}_K$, llamados **adeles**, son aquellos elementos $(x_v) \in \prod K_v$ tales que x_v pertenece al anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ de K_v para casi todo v; las operaciones de suma y multiplicación son componente a componente. Por tanto, $\mathbb{A}_K$ es un anillo localmente compacto Hausdorff. La relevancia de esta propiedad topológica está en que nos garantiza la existencia de una medida de Haar, lo que a su vez permite la aplicación de los métodos del análisis armónico y funcional.

Para cada $x \in K$, $x \neq 0$, existen sólo un número finito de valuaciones sobre K para las cuales $|x|_v > 1$ [2, p.60]. Por tanto, podemos considerar a K como un subanillo del anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ vía el encaje diagonal.

Sabemos que sólamente hay una cantidad finita de valuaciones arquimedianas (Teorema 2.2.3), y el hecho de que $\mathcal{O}_v$ no está definido para estas valuaciones arquimedianas no altera la definición del anillo de adeles con la igualdad anterior.

Para una mayor información sobre la historia contemporánea de los adeles, puede consultarse el libro de Peter Roquette "*The Riemann Hypothesis in Characteristic p in historical perspective*"; Lecture Notes in Mathematics 2222.

Capítulo 3

El Anillo de Adeles Estándar

En el capítulo 2 se definió el anillo de adeles de un campo de números, y, además, se mencionó que resulta ser un anillo topológico localmente compacto Hausdorff. De ahora en adelante concentraremos nuestra atención en la cerradura algebraica de $\mathbb{Q}$, denotada por $\overline{\mathbb{Q}}$, dentro del campo de números complejos $\mathbb{C}$. Para cada valuación v de $\overline{\mathbb{Q}}$ definimos la **localización** $\overline{\mathbb{Q}}_v$, lo que nos permitirá definir el anillo de adeles estándar de una manera análoga a como se definió el anillo de adeles de un campo de números. Para este fin, la condición de finitud deberá reemplazarse por una condición de compacidad en una topología que a continuación introducimos sobre el conjunto de todas las valuaciones definidas en $\overline{\mathbb{Q}}$.

3.1 Topología sobre las valuaciones de $\overline{\mathbb{Q}}$

Sea L/K una extensión de campos. Recordemos que una valuación w de L es una extensión de la valuación v de K, o que w divide a v, si la restricción de w al campo K coincide con la valuación v. En ocaciones escribiremos simplemente "$w|v$" para denotar que w divide a v.

Dado un campo L denotamos por $V(L)$ al conjunto de valuaciones de L. Adicionalmente, para una extensión de campos L/K y v una valuación de K denotamos por $V(L/K, v)$ al conjunto de valuaciones de L que dividen a v. En el caso particular en que $L/K = \overline{\mathbb{Q}}/K$ simplemente escribimos $V(K, v)$ en lugar de $V(\overline{\mathbb{Q}}/K, v)$, i.e.

$$V(K, v) := \{s \in V(\overline{\mathbb{Q}}) : s \text{ divide a } v\}$$

Puesto que cada valuación de $\overline{\mathbb{Q}}$ divide a una única valuación de K, se tiene que $V(\overline{\mathbb{Q}})$ es la unión disjunta de los $V(K, v)$, i.e.

$$V(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigsqcup_{v \in V(K)} V(K, v). \tag{3.1}$$

Allcock y Vaaler [1] dotaron a cada $V(K, v)$ con una estructura de espacio topológico compacto Hausdorff totalmente disconexo (esto debido a que cada $V(K, v)$ puede verse como un límite inverso de conjuntos finitos). En consecuencia, por la ecuación (3.1), $V(\overline{\mathbb{Q}})$ adquiere la estructura de un espacio topológico localmente compacto Hausdorff totalmente disconexo (donde un subconjunto de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ es abierto si su restricción a cada $V(K, v)$ es abierto); en particular, cada $V(K, v)$ es un abierto de $V(\overline{\mathbb{Q}})$.

3.2 Acción del grupo de Galois sobre valuaciones

Considere el grupo de Galois, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$, provisto con la topología de Krull (Sec. 1.2). Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ y w es una valuación en $V(K, v)$, definimos la valuación $\sigma(w)$ en $V(K, v)$ dada por

$$|x|_{\sigma(w)} := |\sigma^{-1}(x)|_w, \quad \text{para todo } x \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Cuando $x \in K$, se tiene que $|x|_{\sigma(w)} = |\sigma^{-1}(x)|_w = |x|_w$, por lo que la definición anterior determina una acción del grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ sobre el conjunto compacto $V(K, v)$ para cada valuación v de K. Más aún, esta acción es transitiva [11, Prop. II.9.1], y continua, en el sentido que la función

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \times V(K, v) \to V(K, v), \quad (\sigma, w) \mapsto \sigma(w)$$

es continua [1, Lemma 3]. Cada $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ se extiende a una función en la completación $\overline{\mathbb{Q}}_w$ de $\overline{\mathbb{Q}}$. Es claro ver que $|\sigma(x)|_{\sigma(w)} = |x|_w$ para todo $x \in \overline{\mathbb{Q}}_w$, por lo que σ define un isomorfismo isométrico de $\overline{\mathbb{Q}}_w$ en $\overline{\mathbb{Q}}_{\sigma(w)}$.

3.3 El anillo de adeles estándar

Para una valuación v de $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ se denotará por $\overline{\mathbb{Q}}_v$ a la completación de $\overline{\mathbb{Q}}$ con respecto a v. Si v es arquimediana, entonces $\overline{\mathbb{Q}}_v$ es isométricamente isomorfo al campo de los números complejos $\mathbb{C}$ (Teorema 2.2.2). Mientras que si v es no-arquimediana y v divide a p, considerando a $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}_p$, se tiene que $\overline{\mathbb{Q}}_v$ es isométricamente isomorfo a un subcampo de $\mathbb{C}_p$ [12, Prop. 8.1.5].

Si v es no-arquimediana, consideremos el anillo de enteros v-ádicos

$$\mathcal{O}_v := \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_v : |x|_v \leq 1\}$$

el cual es un abierto en la topología inducida por el valor absoluto $|\cdot|_v$. La definición de un adele estándar es muy similar a la de un adele usual, excepto que la condición de finitud se cambia por una de compacidad. Más específicamente, un punto

$$x = (x_v) \in \prod_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})} \overline{\mathbb{Q}}_v$$

se llama un **adele estándar** de $\overline{\mathbb{Q}}$ si existe un subconjunto compacto $S_0 \subseteq V(\overline{\mathbb{Q}})$ tal que $x_v \in \mathcal{O}_v$ para todo $v \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus S_0$. Puesto que $V(K, \infty)$ es compacto, esta definición tiene sentido a pesar del hecho de que el anillo de enteros $\mathcal{O}_v$ no esté definido cuando v es una valuación arquimediana.

En la misma forma en que definimos la suma y multiplicación de adeles, definimos estas operaciones para los adeles estándar, i.e. componente a componente. Con esto, el conjunto de adeles estándar es un anillo, el cual denotaremos por $\mathbb{A}$.

3.4 La función conorma

Sean K un campo de números, $w \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ y $w|_K$ la restricción de w a K; remarcamos en particular que entonces $w|_K \in V(K)$ y $w \in V(K, w|_K)$. La función **Conorma**, Conor_K, cuyo codominio son los adeles estándar, se define como

$$\mathrm{Conor}_K : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}, \qquad \mathrm{Conor}_K((x_v)_{v \in V(K)}) = (x_{w|_K})_{w \in V(\overline{\mathbb{Q}})}.$$

Puesto que $(x_v) \in \mathbb{A}_K$, existe un subconjunto finito $J \subseteq V(K)$ tal que $x_v \in \mathcal{O}_v$ para todo $v \in V(K) \setminus J$. Haciendo $(y_w)_{w \in V(\overline{\mathbb{Q}})} = \mathrm{Conor}_K((x_v)_{v \in V(K)})$, se cumple que $y_w \in \mathcal{O}_w$ para todo $w \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus \bigcup_{v \in J} V(K, v)$.

Recordando que para toda valuación v de K el conjunto $V(K, v)$ es compacto, entonces la unión finita anterior es compacta, implicando asi que $\mathrm{Conor}_K((x_v)_{v \in V(K)})$ es un adele estándar. La función $\mathrm{Conor}_K : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}$ es un monomorfismo de anillos.

Recordemos que el anillo de adeles estándar es el producto compactamente restringido de los anillos $\overline{\mathbb{Q}}_v$ con respecto a los subanillos $\mathcal{O}_v$.

Consideremos en el anillo de adeles estándar $\mathbb{A}$, a la familia de subconjuntos de la forma

$$\prod_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})} V_v$$

donde cada conjunto V_v es un abierto en $\overline{\mathbb{Q}}_v$, y $V_v = \mathcal{O}_v$, salvo para un compacto de $V(\overline{\mathbb{Q}})$. Puesto que la unión finita de compactos es compacta, se tiene que dicha familia es cerrada ante intersección finita y cubren a todo $\mathbb{A}$, por lo que forma una base para una topología de $\mathbb{A}$. Así, provisto de esta topología, el anillo de adeles estándar tiene la siguiente propiedad.

Teorema 3.4.1. *El anillo de adeles estándar es un anillo topológico.*

Sea L/K una extensión finita de campos de números. Sean $w \in V(L)$ y $v \in V(K)$ valuaciones tales que w divide a v. Considere $(K_v, |\cdot|_v)$ y $(L_w, |\cdot|_w)$ las correspondientes completaciones con valores absolutos iguales sobre K. Por la unicidad de la extensión de un valor absoluto, existe un único K-homomorfismo $K_v \to L_w$ tal que $|\cdot|_v$ es la restricción de $|\cdot|_w$ sobre K_v. Por lo que es posible definir una inclusión natural $\mathbb{A}_K \hookrightarrow \mathbb{A}_L$.

Para la valuación w de L denotemos por $w|_K$ a la restricción de w a K. Se define la función **Conorma**

$$\mathrm{Conor}_{L/K} : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}_L, \qquad \mathrm{Conor}_{L/K}((x_v)_{v\in V(K)}) = (x_{w|_K})_{w\in V(L)}.$$

Dicha función conorma es un monomorfismo de anillos y se verifica que es tanto abierta como continua, vista como función sobre su imagen con la topología de subespacio. Por lo tanto, vía la función $\mathrm{Conor}_{L/K}$, podemos considerar al anillo $\mathbb{A}_K$ como un subanillo topológico de $\mathbb{A}_L$.

Una vez definida la función conorma, se tiene que esta cumple con la siguiente propiedad de transitividad.

Lema 3.4.2. *Sea L/K una extensión de campos de números. Si $x \in \mathbb{A}_K$, entonces*

$$\mathrm{Conor}_K(x) = \mathrm{Conor}_L(\mathrm{Conor}_{L/K}(x)).$$

Proof. Sean $y = \mathrm{Conor}_{L/K}(x)$ y $z = \mathrm{Conor}_L(y)$. Entonces, para $w \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ se tiene que $z_w = y_{w|_L} = x_{(w|_L)|_K} = x_{w|_K}$. Lo cual termina la prueba. $\square$

Capítulo 4

Anillo de adeles Continuos

En este capítulo se introducen los objetos de nuestro principal interés: los adeles continuos. Estos forman un subanillo del anillo de adeles estándar, los cuales se introdujeron en el capítulo 3. Lo interesante es que, bajo cierta topología, que se define en la siguiente sección, los adeles continuos forman un anillo topológico que contiene como subanillo topológico a cada uno de los anillos de adeles $\mathbb{A}_K$ con K un campo de números.

A partir de ahora, a menos de que se diga otra cosa, G_K denotará al grupo de Galois de la extensión $\overline{\mathbb{Q}}/K$, i.e. $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$. Consideramos al grupo G_K provisto con la topología de Krull (Sección 1.2). También, a los conjuntos $V(K, v)$ los consideraremos con la topología dada en la Sección 3.1.

4.1 Diagramas de transición

Para simplificar un poco la notación, definimos un **campo de Galois** como una extensión de Galois finita de $\mathbb{Q}$. Dado un campo de Galois K y una valuación v de K, recordemos que $V(K, v)$ denota al conjunto de valuaciones de la cerradura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ que dividen a v, y que G_K actúa transitiva y continuamente sobre $V(K, v)$.

Se define un **diagrama de transición v-ádico** como una función

$$g : V(K,v) \times V(K,v) \to G_K$$

que satisface las siguientes condiciones para todo $a, b, c \in V(K,v)$:

(I) $g(a,b) \cdot (a) = b$;

(II) $g(b,c) \circ g(a,b) = g(a,c)$;

(III) Si L/K es de Galois finita, entonces existe una vecindad abierta U de (a,a) en $V(K,v) \times V(K,v)$ tal que $g(U) \subseteq G_L$.

Es claro que esta definición de g depende tanto de K como de v, pero mientras no haya posibilidad de ambigüedad omitiremos introducir símbolos adicionales para indicar tal dependencia.

Observemos que para $a, b \in V(K,v)$ se tiene que $g(a,b)$ es un elemento del grupo de Galois G_K que mapea a en b bajo la acción de dicho grupo. La condición (III) puede pensarse como una cierta condición de continuidad.

La existencia de diagramas de transición es una propiedad clave que no es nada obvia. Para demostrar su existencia probaremos primero un par de lemas.

Lema 4.1.1. *Sean $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots$ una sucesión de campos de Galois y v una valuación de K. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existe una función*

$$g_n : V(K,v) \times V(K,v) \to G_K$$

tal que para todo $a, b, c \in V(K,v)$ se tiene que

(i) $g_n(a,a)$ *es la identidad del grupo de Galois* G_K*;*

(ii) $g_n(a,b) \cdot (a) = b$*;*

(iii) $g_n(b,c) \circ g_n(a,b) = g_n(a,c)$*;*

(iv) Si $m \leq n$ y $a, b \in V(K_m, u)$, entonces $g_n(a, b) \in G_{K_m}$.

Proof. Fijemos $r \in V(K, v)$. La prueba procede por inducción sobre n. Iniciamos con el caso $n = 0$. Puesto que el grupo G_K actúa transitivamente sobre el conjunto de valuaciones $V(K, v)$, para cada $a \in V(K, v)$ existe $\sigma_a \in G_K$ tal que $\sigma_a(a) = r$. Definiendo $g_0 : V(K, v) \times V(K, v) \to G_K$ como $g_0(a, b) = \sigma_b^{-1} \circ \sigma_a$, se verifica directamente que esta función satisface las propiedades (i)–(iv) del lema.

Supongamos ahora que g_n satisface las condiciones (i)–(iv) del lema, y construyamos g_{n+1}. Consideremos los siguientes datos:

(1) Para cada $s \in V(K, v)$, sea w_s la restricción de s a K_{n+1}; en particular, $s \in V(K_{n+1}, w_s)$.

(2) Para cada $w \in V(K_{n+1}/K, v)$, fijemos una valuación $r_w \in V(K_{n+1}, w)$. De esta manera, para todo $s \in V(K, v)$ se tiene que $s, r_{w_s} \in V(K_{n+1}, w_s)$.

(3) Para cada $s \in V(K, v)$, sea $\sigma_s \in G_{K_{n+1}}$ tal que $\sigma_s(s) = r_{w_s}$; el hecho de que el grupo de Galois $G_{K_{n+1}}$ actúa transitivamente sobre $V(K_{n+1}, w_s)$ garantiza la existencia de tal σ_s.

Definimos la función

$$g_{n+1} : V(K, v) \times V(K, v) \to G_K, \qquad g_{n+1}(a, b) := \sigma_b^{-1} \circ g_n(r_{w_a}, r_{w_b}) \circ \sigma_a.$$

Se verifica directamente que dicha función satisface las propiedades (i)–(iii) para $n + 1$, por lo que sólo resta verificar que también cumple (iv).

Supongamos que $m \leq n + 1$ y sean $a, b \in V(K_m, w)$. Por hipótesis de inducción $\sigma_a, \sigma_b \in G_{K_{n+1}} \subseteq G_{K_m}$.

Caso 1. Si $m = n + 1$, entonces $w_a = w_b$, y así, por la propiedad (i), $g_n(r_{w_a}, r_{w_b})$ es la identidad de G_K, por lo cual $g_{n+1}(a, b) = \sigma_b^{-1} \circ \sigma_a$, de donde se sigue que $g_{n+1}(a, b) \in G_{K_m}$.

Caso 2. Si $m < n+1$, entonces como a y r_{w_a} dividen a la misma valuación de K_{n+1}, se tiene que deben dividir a la misma valuación de K_m, es decir, $a \mid w$ y $r_{w_a} \mid w$. De la misma forma $b \mid w$ y $r_{w_b} \mid w$. De la propiedad (iv) obtenemos que $g_n(r_{w_a}, r_{w_b}) \in G_{K_m}$. Asi que, por definición de g_{n+1}, y del hecho de que $\sigma_a, \sigma_b \in G_{K_m}$, se obtiene que $g_{n+1}(a,b) \in G_{K_m}$. □

Lema 4.1.2. *Sea $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots$ una sucesión de campos de Galois. Entonces, para cada valuación v de K existe una función*

$$g : V(K,v) \times V(K,v) \to G_K$$

que satisface las siguientes propiedades para todo $a,b,c \in V(K,v)$:

(i) *$g(a,a)$ es la identidad del grupo G_K;*

(ii) *$g(a,b) \cdot (a) = b$;*

(iii) *$g(b,c) \circ g(a,b) = g(a,c)$;*

(iv) *Si $m \in \mathbb{N}_0$ y $a, b \in V(K_m, u)$, entonces $g(a,b) \in G_{K_m}$.*

Proof. Hagamos $I = V(K,v) \times V(K,v)$ y $G = G_K$. Se denotará por $F(I,G)$ al conjunto de las funciones de I en G, equipado con la topología producto. Puesto que G es compacto con la topología de Krull, se sigue del teorema de Tychonov que $F(I,G)$ es compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, consideremos la función $g_n : I \to G$ descrita en el Lema 4.1.1, luego $g_n \in F(I,G)$. Al ser $F(I,G)$ compacto, existe una subsucesión convergente en $F(I,G)$. Sin pérdida de generalidad supondremos que la sucesión g_n es de hecho convergente, y ya que $F(I,G)$ es Hausdorff, este límite es único. Por lo cual es posible definir $g : I \to G$ como

$$g(a,b) := \lim_{n\to\infty} g_n(a,b).$$

Es claro que $g(a,a)$ es la identidad de G, lo que verifica (i). Veamos que se satisface (ii). Por [1, Lemma 3], la función

$$G \times V(K,v) \to V(K,v), \quad (\sigma, s) \mapsto \sigma(s)$$

es continua. Puesto que $\lim_{j\to\infty}(g_n(a,b),a) = (g(a,b),a)$ en $G \times V(K,v)$, por la continuidad de la función anterior y por las propiedades que cumple g_n, obtenemos que

$$g(a,b)(a) = \lim_{n\to\infty} g_n(a,b)(a) = b.$$

Ahora, al ser G en un grupo topológico, la función

$$G \times G \to G \quad (\sigma, \rho) \mapsto \sigma \circ \rho \tag{4.1}$$

es continua. Por definición de g sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}(g_n(b,c), g_n(a,b)) = (g(b,c), g(a,b)),$$

luego, por la continuidad de la función (4.1),

$$g(b,c) \circ g(a,b) = \lim_{n\to\infty}[g_n(b,c) \circ g_n(a,b)] = \lim_{n\to\infty} g_n(a,c) = g(a,c)$$

lo que muestra (iii).

Finalmente, sea $m \in \mathbb{N}_0$ y suponga que a y b dividen a la misma valuación de K_m. Si $n_0 \geq m$, por las propiedades de g_n se sigue que $g_n(a,b) \in G_{K_m}$ para todo $n \geq n_0$. Al ser G_{K_m} un conjunto cerrado, se tiene (iv):

$$g(a,b) = \lim_{n\to\infty} g_n(a,b) \in G_{K_m}. \qquad \square$$

Con la ayuda de estos dos lemas ya podemos probar el resultado relevante de esta sección.

Teorema 4.1.3. *Para todo campo de Galois K y toda valuación v de K existe un diagrama de transición v-ádico.*

Proof. La familia de campos de números contenidos en $\overline{\mathbb{Q}}$ es numerable. Sea $\mathcal{A} = \{K'_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ el conjunto de todos los campos de Galois que contienen a K y supongamos que hemos elegido estos K'_m de tal manera que $K = K'_0$. Definimos de forma inductiva

$$K_0 = K'_0, \quad \text{y para cada } m \in \mathbb{N}, \quad K_m = K_{m-1}K'_m.$$

De esta manera, para cada $m \in \mathbb{N}_0$ obtenemos que K_m es un campo de Galois, y además, $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots$ por lo que al aplicar el Lema 4.1.2, existe una función $g : V(K, v) \times V(K, v) \to G_K$ que satisface las propiedades (i)–(iv) del mismo lema. Esto implica que g satisface las condiciones (I) y (II) en la definición de diagrama de transición. Entonces únicamente nos resta verificar la condición (III).

Sea L/K una extensión de Galois finita. Luego, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $L = K'_m$, y así, $L \subseteq K_m$. Aplicando la condición (iv) del Lema 4.1.2 obtenemos

$$\bigcup_{w \in V(K_m/K,v)} V(K_m, w) \times V(K_m, w) \subseteq g^{-1}(G_{K_m}) \subseteq g^{-1}(G_L).$$

Esta unión, que corre sobre los w en $V(K_m/K, v)$, es un abierto y contiene a la diagonal de $V(K, v) \times V(K, v)$: en efecto, si $s \in V(K, v)$, entonces la restricción de s a K_m, digamos w, divide a v, por lo que $s \in V(K_m, w)$. De esto se sigue inmediatamente (III). Por lo tanto g es un diagrama de transición v-ádico. □

4.2 Invarianza de la continuidad

Una vez probada la existencia de un diagrama de transición v-ádico, se tiene el siguiente teorema, que posteriormente nos permitirá definir lo que es un adele continuo.

Teorema 4.2.1. [1, Thm. 3.2] *Sea $x = (x_v)_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})}$ un adele estándar de $\overline{\mathbb{Q}}$, y sean K y L dos campos de Galois. Supongamos dados los siguientes datos.*

(i) *Para cada $v \in V(K)$, g_v es un diagrama de transición v-ádico y $r_v \in V(K, v)$;*

(*ii*) *Para cada* $w \in V(L)$*,* h_w *es un diagrama de transición* w*-ádico y* $s_w \in V(L,w)$*;*

(*iii*) *La función* $d_v : V(K,v) \to \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}$ *está dada por* $d_v(y) = g_v(y, r_v)(x_y)$*;*

(*iv*) *La función* $e_w : V(L,w) \to \overline{\mathbb{Q}}_{s_w}$ *está dada por* $e_w(y) = h_w(y, s_w)(x_y)$*.*

Entonces d_v *es continua para todo* $v \in V(K)$ *si y sólo si* e_w *es continua para todo* $w \in V(L)$*.*

El teorema anterior nos garantiza que la continuidad de las funciones del tipo

$$y \mapsto g_v(y, r_v)(x_y)$$

para todo $v \in V(K)$, depende únicamente del adele estándar x. Esta observación nos da la clave para definir el concepto principal de este trabajo: los adeles continuos.

Antes de dar la definición, debemos mostrar el Teorema 4.2.1, para esto, mostraremos primero un caso particular de dicho teorema, en donde se considera un solo campo de números K y una sola valuación v de K.

Teorema 4.2.2. *Sean* $x = (x_v)_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})}$ *un adele estándar de* $\overline{\mathbb{Q}}$*,* K *un campo de números y* v *una valuación de* K*. Sean* g, h *dos diagramas de transición* v*-ádicos y* $r, s \in V(K,v)$*. Supóngase que* $d : V(K,v) \to \overline{\mathbb{Q}}_r$ *y* $e : V(K,v) \to \overline{\mathbb{Q}}_s$ *están dadas por*

$$d(y) = g(y,r)(x_y) \quad \text{y} \quad e(y) = h(y,s)(x_y).$$

Entonces d *es continua si y sólo si* e *es continua.*

Para demostrar el Teorema 4.2.2 requerimos de la ayuda de los siguientes tres lemas.

Lema 4.2.3. *Sean* K *un campo de Galois,* v *una valuación de* K *y* g *un diagrama de transición* v*-ádico.*

(*i*) *Si* $a \in V(K,v)$*, entonces* $g(a,a)$ *es el elemento identidad de* G*;*

(*ii*) *Si* $a, b \in V(K, v)$*, entonces* $g(a, b) = g(b, a)^{-1}$*;*

(*iii*) *Si* L/K *es una extensión de Galois finita y* $w \in V(L/K, v)$*, entonces al restringir el dominio de* g *a* $V(L, w) \times V(L, w)$*, se tiene que* g *es un diagrama de transición* w*-ádico.*

Proof. (i) Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Sea L/K una extensión de Galois tal que $\alpha \in L$. Sea $a \in V(K, v)$, entonces sabemos que existe una vecindad abierta U de (a, a) contenida en $V(K, v) \times V(K, v)$ tal que $g(U) \subseteq G_L$. Luego $g(a, a)(\alpha) = \alpha$, probando asi que $g(a, a)$ es el elemento identidad de G.

(ii) Por la propiedad (II), tenemos $g(a, b) \circ g(b, a) = g(a, a)$ para todo $a, b \in V(K, v)$, por lo cual $g(a, b) = g(b, a)^{-1}$.

(iii) Sea $w \in V(L)$ tal que w divide a v. Notemos que g, para elementos en $V(L, w)$, cumple las primeras dos condiciones en la definición de diagrama de transición w-ádico. Para probar la tercera condición, sea E/L una extensión finita tal que $E/\mathbb{Q}$ es de Galois y sea $a \in V(L, w)$. Entonces E/K es finita y $a \in V(K, v)$. Se sigue de (III) que existe un abierto W de $V(K, v) \times V(K, v)$ tal que $(a, a) \in W$ y $g(V) \subseteq G_E$. Tenemos que $W \cap (V(L, w) \times V(L, w))$ es un abierto en $V(L, w) \times V(L, w)$ y

$$(a, a) \in W \cap (V(L, w) \times V(L, w)) \subseteq g^{-1}(G_E).$$

Suponga que h es la restricción de g sobre $V(L, w) \times V(L, w)$, entonces

$$(a, a) \in W \cap (V(L, w) \times V(L, w)) \subseteq h^{-1}(G_E). \qquad \square$$

Lema 4.2.4. *Sean* K *un campo de Galois,* v *una valuación de* K *y* $c \in V(K, v)$*. Sean* g, h *dos diagramas de transición* v*-ádicos, entonces la función*

$$f : V(K, v) \to \mathrm{Stab}_G(c), \quad f(b) = h(b, c) \circ g(c, b)$$

es continua.

Proof. La función f está bien definida pues para todo $b \in V(K,v)$ se tiene por (I) que

$$f(b)(c) = (h(b,c) \circ g(c,b))(c) = h(b,c)(g(c,b)(c)) = h(b,c)(b) = c.$$

Veamos que f es continua. Sea A un abierto básico de G, luego existe una extensión de Galois finita $E/\mathbb{Q}$ y $\sigma \in G$ tales que $A = \sigma \cdot G_E$. Denotemos por $H = G_E$, así $A = \sigma \cdot H$. Si mostramos que $f^{-1}(A)$ es abierto terminamos. Sea $b \in f^{-1}(A)$, entonces $h(b,c) \circ g(c,b) = f(b) \in \sigma \cdot H$, eso implica que

$$\sigma^{-1} \circ h(b,c) \circ g(c,b) \in H. \tag{4.2}$$

Al ser g un diagrama de transición v-ádico, existe un abierto U tal que $(b,b) \in U \subseteq g^{-1}(G_E)$. Por definición de la topología sobre $V(K,v)$, existen L_1, L_2 extensiones finitas de K con valuaciones w_1, w_2, respectivamente, tales que

$$(b,b) \in V(L_1,w_1) \times V(L_2,w_2) \subseteq g^{-1}(G_E).$$

De forma análoga, con los mismos argumentos, pero ahora para h, existen L_3, L_4 extensiónes finitas de K con valuaciones w_3, w_4, respectivamente, tales que

$$(b,b) \in V(L_3,w_3) \times V(L_4,w_4) \subseteq h^{-1}(G_E).$$

Sea $L/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois finita tal que $L_i \subseteq L$ para $1 \leq i \leq 4$. Sea w la única valuación de L tal que b divide a w. Por construcción, w divide a w_i para todo i, luego $V(L,w) \subseteq V(L_i,w_i)$ para todo i. Esto implica que

$$(b,b) \in V(L,w) \times V(L,w) \subseteq g^{-1}(G_E) \cap h^{-1}(G_E). \tag{4.3}$$

Puesto que $V(L,w)$ es abierto en $V(K,v)$, si mostramos que $V(L,w) \subseteq f^{-1}(A)$ terminamos. Sea $a \in V(L,w)$. Al ser g, h diagramas de transición v-ádicos, se tiene

$$\sigma^{-1} \circ h(a,c) \circ g(c,a) = \sigma^{-1} \circ h(b,c) \circ h(a,b) \circ g(b,a) \circ g(c,b).$$

Sea $\alpha \in E$, luego $g(c,b)(\alpha) \in E$, pues $E/\mathbb{Q}$ es de Galois. Más aún, de la ecuación (4.3) se tiene que $h(a,b), g(b,a) \in H$, por lo que $(h(a,b) \circ g(b,a) \circ g(c,b))(\alpha) = g(c,b)(\alpha)$. Por lo cual

$$(\sigma^{-1} \circ h(a,c) \circ g(c,a))(\alpha) = (\sigma^{-1} \circ h(b,c) \circ g(c,b))(\alpha) = \alpha,$$

para todo $\alpha \in E$, donde la última igualdad se sigue de la ecuación (4.2). Por lo tanto,

$$\sigma^{-1} \circ h(a,c) \circ g(c,a) \in H.$$

Así, $f(a) \in \sigma \cdot H$, luego $a \in f^{-1}(\sigma \cdot H) = f^{-1}(A)$, y por lo tanto $V(L,w) \subseteq f^{-1}(A)$, probando asi que f es continua. $\square$

Lema 4.2.5. *Para $c \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ la función*

$$g : \mathrm{Stab}_G(c) \times \overline{\mathbb{Q}}_c \to \overline{\mathbb{Q}}_c, \quad g(\sigma,\alpha) = \sigma(\alpha)$$

es continua.

Proof. La función g está bien definida pues dado $\sigma \in \mathrm{Stab}_G(c)$ es posible extenderlo a un isomorfismo isométrico de $\overline{\mathbb{Q}}_c$ en $\overline{\mathbb{Q}}_c$. Sean $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_c$ y $r > 0$, considere la bola con centro en α y radio r,

$$B(\alpha,r) = \{\beta \in \overline{\mathbb{Q}}_c : |\beta - \alpha|_c < r\}.$$

Sea U un subconjunto abierto de $\overline{\mathbb{Q}}_c$ y sea $(\sigma,\alpha) \in g^{-1}(U)$. Entonces $\sigma(\alpha) \in U$ y existe $r > 0$ tal que $B(\sigma(\alpha), r) \subseteq U$. Al ser $\overline{\mathbb{Q}}_c$ la completación de $\overline{\mathbb{Q}}$ con respecto a c, existe $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $|\beta - \alpha|_c < \frac{r}{2}$. Como $\sigma \in \mathrm{Stab}_G(c)$, entonces $\sigma(c) = c$, luego

$$|\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)|_c = |\sigma(\beta - \alpha)|_{\sigma(c)} = |\beta - \alpha|_c < \frac{r}{2}$$

por lo que

$$B(\sigma(\beta), \frac{r}{2}) \subseteq B(\sigma(\alpha), r) \subseteq U.$$

Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión de Galois finita tal que $\beta \in K$. Sea $H = G_K$, entonces $\sigma \cdot H$ es abierto en G. Así,

$$(\sigma, \alpha) \in \left(\sigma \cdot H \cap \mathrm{Stab}_G(c)\right) \times B(\beta, \frac{r}{2}) =: U'$$

es un abierto en $\mathrm{Stab}_G(c) \times \overline{\mathbb{Q}}_c$.

Veamos que $U' \subseteq g^{-1}(U)$. Sea $(\sigma', \alpha') \in U'$, se tiene que $\sigma' = \sigma h$ donde $h \in H$. Puesto que h deja fijos a los elementos de K, entonces $h(\beta) = \beta$. Por lo cual

$$|g(\sigma', \alpha') - \sigma(\beta)|_c = |\sigma'(\beta) - \sigma(h(\beta))|_c = |\sigma'(\alpha') - \sigma'(\beta)|_c = |\sigma'(\alpha' - \beta)|_c.$$

Pero $\sigma' \in \mathrm{Stab}_G(c)$, por lo que

$$|g(\sigma', \alpha') - \sigma(\beta)|_c = |\alpha' - \beta|_c < \frac{r}{2}$$

pues $\alpha' \in B(\beta, \frac{r}{2})$. Esto significa que $g(\sigma', \alpha') \in B(\sigma(\beta), \frac{r}{2}) \subseteq U$, luego $(\sigma', \alpha') \in g^{-1}(U)$. Por lo tanto $U' \subseteq g^{-1}(U)$, lo que implica que g es continua. $\square$

Con estos lemas ya podemos dar una demostración del Teorema 4.2.2.

Prueba del Teorema 4.2.2. Al ser g, h, r, s arbitrarios, basta con suponer que d es continua para mostrar que e es continua. Considere la función ℓ definida de la siguiente forma

$$\ell : V(K, v) \to \overline{\mathbb{Q}}_s \qquad \ell(y) = g(y, s)(x_y).$$

Luego, para todo $y \in V(K, v)$ se tiene que

$$d(y) = g(y, r)(x_y) = g(s, r)(g(y, s)(x_y)) = (g(s, r) \circ \ell)(y).$$

Por el Lema 4.2.3 (ii) es posible despejar ℓ de la siguiente manera $\ell = g(s, r)^{-1} \circ d = g(r, s) \circ d$, donde $g(r, s) : \overline{\mathbb{Q}}_r \to \overline{\mathbb{Q}}_s$ es continua, luego ℓ es composición de dos funciones continuas y por lo tanto es continua.

Considere las funciones

$$\phi : V(K, v) \to V(K, v) \times V(K, v), \quad \phi(y) = (y, y);$$

$$\varphi : V(K, v) \to \mathrm{Stab}_G(s), \quad \varphi(y) = h(y, s) \circ g(s, y);$$

$$\psi : \mathrm{Stab}_G(s) \times \overline{\mathbb{Q}}_s \to \overline{\mathbb{Q}}_s, \quad \psi(\sigma, \alpha) = \sigma(\alpha).$$

La función ϕ es la función diagonal, la cual es continua, y tanto las funciones φ y ψ son continuas por los Lemas 4.2.4 y 4.2.5, respectivamente. Luego, en particular, la función

$$\varphi \times \ell : V(K, v) \times V(K, v) \to \mathrm{Stab}_G(s) \times \overline{\mathbb{Q}}_s, \quad (\varphi \times \ell)(x, y) = (\varphi(x), \ell(y))$$

es continua. Así, para cada $y \in V(K, v)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ (\varphi \times \ell) \circ \phi)(y) &= \psi((\varphi \times \ell)(y, y)) \\
&= \psi(\varphi(y), \ell(y)) \\
&= \psi(h(y, s) \circ g(s, y), g(y, s)(x_y)) \\
&= (h(y, s) \circ g(s, y))(g(y, s)(x_y)) \\
&= (h(y, s) \circ g(s, y) \circ g(y, s))(x_y) \\
&= (h(y, s) \circ g(y, y))(x_y) \\
&= h(y, s)(x_y) \\
&= e(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función e es continua, pues es composición de funciones continuas. $\square$

Con el resultado anterior ya podemos dar una demostración del Teorema 4.2.1. Al ser d_v y e_w arbitrarias, basta con suponer que d_v es continua para todo $v \in V(K)$ y mostrar que e_w es continua para todo $w \in V(L)$.

Prueba del Teorema 4.2.1. Sea $w \in V(L)$ y consideremos $E = KL$ el campo generado por K y L, así

$$V(L, w) = \bigcup_{u|w} V(E, u).$$

Dado que esta es una unión de conjuntos abiertos, si mostramos que e_w es continua sobre $V(E, u)$ para todo u que divide a w terminaremos.

Sea $u \in V(E)$ tal que u divide a w y sea v la única valuación de K tal que u divide a v. Fijemos $a \in V(E, u)$ y consideremos la función

$$\overline{d} : V(E, u) \to \overline{\mathbb{Q}}_a \qquad \overline{d}(y) = g_v(y, a)(x_y).$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}(g_v(r_v,a)\circ d_v)(y) &= g_v(r_v,a)(d_v(y))\\ &= g_v(r_v,a)(g_v(y,r_v)(x_y))\\ &= (g_v(r_v,a)\circ g_v(y,r_v))(x_y)\\ &= g_v(y,a)(x_y)\\ &= \overline{d}(y)\end{aligned}$$

para todo $y \in V(E,u)$, por lo cual $\overline{d} = g_v(r_v,a)\circ d_v$, y por lo tanto $\overline{d}$ es continua sobre $V(E,u)$.

Ahora, consideremos la función

$$\overline{e} : V(E,u) \to \overline{\mathbb{Q}}_a \qquad \overline{e}(y) = h_w(y,a)(x_y).$$

Por el Lema 4.2.3(iii), al restringir g_v y h_w a $V(E,u)\times V(E,u)$, estos resultan ser diagramas de transición u-ádicos. Entonces tomando $K = E$ y $v = u$, por el Teorema 4.2.2 se sigue que $\overline{e}$ es continua sobre $V(E,u)$. Con el mismo razonamiento, se obtiene que $\overline{e} = h_w(s_w,a)\circ e_w$, y asi se concluye, despejando e_w, que e_w es continua sobre $V(E,u)$ para todo u que divide a w. □

4.3 El anillo de adeles continuos

Después de una larga espera, ahora podemos dar la definición central del capítulo.

Recordemos que el anillo de adeles estándar se definió como el producto compactamente restringido de los anillos $\overline{\mathbb{Q}}_v$, con respecto a los subanillos de enteros $\mathcal{O}_v$, donde v corre sobre todas las valuaciones de la cerradura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$. Sean K un campo de Galois, v una valuación de K, g_v un diagrama de transición v-ádico, y $r_v \in V(K,v)$. Se dice que el adele estándar $x = (x_v)_{v\in V(\overline{\mathbb{Q}})} \in \mathbb{A}$ es un **adele continuo** si las funciones

$$f_v : V(K,v) \to \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}, \qquad f_v(y) = g_v(y,r_v)(x_y)$$

son continuas para todo $v \in V(K)$. Esto podría pensarse como una condición de continuidad. Al conjunto de adeles continuos se le denota por $\overline{\mathbb{A}}$. Como se mencionó antes, el que la función $y \mapsto g_v(y, r_v)(x_y)$ sea continua para todo $v \in V(K)$, depende sólamente del adele estándar $(x_v)_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})}$, y así la definición anterior tiene sentido.

Una vez definidos los adeles continuos, estos cumplen ciertas propiedades. La primera de estas propiedades es la siguiente.

Teorema 4.3.1. [5, Thm. 3.3] *Los adeles continuos forman un subanillo del anillo de adeles estándar.*

Dado que la función conorma va de $\mathbb{A}_K$ en $\mathbb{A}$, una pregunta natural es si su imágen contendrá adeles continuos. Este planteamiento queda resuelto en el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Si K es un campo de números y $x \in \mathbb{A}_K$, entonces* $\mathrm{Conor}_K(x)$ *es un adele continuo.*

Proof. Por el Lema 3.4.2, y el hecho de que la función conorma $\mathbb{A}_K \to \mathbb{A}_L$ es un monomorfismo abierto y continuo, basta con mostrar el teorema para el caso donde $K/\mathbb{Q}$ es de Galois. □

4.4 La conorma es un homeomorfismo de anillos

¿Qué pasaría si pudiera tenerse que la función Conor_K define un homeomorfismo de los adeles $\mathbb{A}_K$ en los adeles continuos $\overline{\mathbb{A}}$? Para ello en primer lugar se debe hablar de definir una topología sobre $\overline{\mathbb{A}}$, esta topología debiera hacer a los adeles continuos un anillo topológico. Si se logran alcanzar estos objetivos, entonces se responde a la interrogante, pues Conor_K define un monomorfismo de anillos, luego podremos identificar a $\mathbb{A}_K$ como un subanillo topológico de $\overline{\mathbb{A}}$.

Procedamos a construir dicha topología. Para cada $v \in V(\overline{\mathbb{Q}})$, sea $U_v \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_v$ un subconjunto abierto y denotemos por

$$U = \prod_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})} U_v.$$

Considere K un campo de números y v una valuación de K. Suponga que g es un diagrama de transición v-ádico y que $r \in V(K, v)$. Recordemos que por la propiedad (ii) en la definicón de un diagrama de transición, se cumple que $g(y, r)(y) = r$, por lo que entonces tenemos inducido un isomorfismo isométrico de $\overline{\mathbb{Q}}_y$ a $\overline{\mathbb{Q}}_r$. Por lo que para los conjuntos de la forma

$$J_{g,r}(U) = \bigcup_{y \in V(K,v)} y \times g(y, r)(U_y)$$

se tiene que $J_{g,r}(U) \subseteq V(K, v) \times \overline{\mathbb{Q}}_r$. Ahora queremos definir una nueva topología sobre $\mathbb{A}$, en la que requerimos que cada $J_{g,r}(U)$ sea un abierto. Pero para esto, debemos garantizar que los elementos a tratar no dependan de K, ni de la elección de g o de r, para cada valuación v de K.

Teorema 4.4.1. [5, Thm. 4.1] *Para cada $v \in V(\overline{\mathbb{Q}})$ sea $U_v \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_v$ un subconjunto arbitrario, y sea $U = \prod_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})} U_v$. Sean K y L dos campos de Galois con los siguientes datos:*

(i) Para cada $v \in V(K)$, g_v es un diagrama de transición v-ádico y $r_v \in V(K, v)$;

(ii) Para cada $w \in V(L)$, h_w es un diagrama de transición w-ádico y $s_w \in V(L, w)$.

Entonces $J_{g_v,r_v}(U)$ es abierto en $V(K, v) \times \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}$ para todo $v \in V(K)$ si y sólo si $J_{h_w,s_w}(U)$ es abierto en $V(L, w) \times \overline{\mathbb{Q}}_{s_w}$ para todo $w \in V(L)$.

Sea ahora K un campo de Galois. Para cada valuación v de K, sea g_v un diagrama de transición v-ádico y $r_v \in V(K, v)$. Sea

$$U = \prod_{v \in V(\overline{\mathbb{Q}})} U_v.$$

Si U cumple las siguientes dos propiedades:

(i) Existe un subconjunto compacto $S_0 \subseteq V(\overline{\mathbb{Q}})$ tal que $U_v = \mathcal{O}_v$ para todo $v \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus S_0$;

(ii) $J_{g_v, r_v}(U)$ es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}$ para todo $v \in V(K)$;

entonces, al tomar como base a los conjuntos U que satisfacen estas condiciones, se define una topología sobre los adeles estándar. Y por el teorema anterior, la propiedad (ii) no depende del campo de Galois que estemos considerando, ni de la valuación v para la elección de g_v y r_v.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de subconjuntos U de la forma anterior que satisfacen las propiedades (i) y (ii). Se verifica que $\mathcal{B}$ forma una base para una topología sobre $\mathbb{A}$, la cual es más gruesa que la topología original de $\mathbb{A}$, i.e. tiene menos abiertos.

De ahora en adelante se supondrá que $\mathbb{A}$ está provisto con la nueva topología $\mathcal{B}$.

Lema 4.4.2. *Sean K un campo de Galois, v una valuación de K, g un diagrama de transición v-ádico y $r \in V(K,v)$. Se cumplen las siguientes condiciones.*

(i) *Para cada $y \in V(K,v)$, suponga que $\Gamma_y \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_y$ y sea $U_v = \prod_{y \in V(K,v)} \Gamma_y$. Si $J_{g,r}(U_v)$ es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_r$, entonces $\mathrm{Conor}_v^{-1}(U_v)$ es abierto en K_v.*

(ii) *Si D es abierto en K_v, entonces existe $\Gamma_y \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_y$ tal que $J_{g,r}\Big(\prod_{y \in V(K,v)} \Gamma_y\Big)$ es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_r$ y*

$$\Big(\prod_{y \in V(K,v)} \Gamma_y\Big) \cap \mathrm{Conor}_v(K_v) = \mathrm{Conor}_v(D).$$

Teorema 4.4.3. *Para un campo de números K, la función $\mathrm{Conor}_K : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}$ es un homeomorfismo de anillos sobre su imagen.*

Proof. Teniendo en cuenta el Lema 3.4.2, es suficiente establecer el enunciado del teorema en el caso en que K es un campo de Galois.

Continuidad: Para cada $v \in V(K)$ sean g_v un diagrama de transición y $r_v \in V(K, v)$. Verifiquemos primero que la función $\text{Conor}_K : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}$ es continua. Para esto, sea $U = \prod_{y \in V(\overline{\mathbb{Q}})} \Gamma_y$ un abierto básico de $\mathbb{A}$, i.e. cada Γ_y es un abierto de $\overline{\mathbb{Q}}_y$ y existe un compacto $Y_0 \subseteq V(\overline{\mathbb{Q}})$ tal que $\Gamma_y = \mathcal{O}_y$ para todo $y \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \backslash Y_0$ y $J_{g_v, r_v}(U)$ es abierto para todo $v \in V(K)$.

Como en el enunciado del Lema 4.4.2, escribimos $U_v = \prod_{y \in V(K,v)} \Gamma_y$. Se tiene que

$$\text{Conor}_K^{-1}(U) = \prod_{v \in V(K)} \text{Conor}_v^{-1}(U_v).$$

De acuerdo al Lema 4.4.2 (i), los conjuntos $\text{Conor}_v^{-1}(U_v)$ son abiertos en K_v para todo v, de modo que para completar la prueba de que Conor_K es una función continua, será suficiente mostrar que $\text{Conor}_v^{-1}(U_v) = \mathcal{O}_v$ para casi todo $v \in V(K)$.

Sabemos que la familia de conjuntos $\{V(K, v) : v \in V(K)\}$ es una cubierta abierta de Y_0, y siendo Y_0 compacto, existe un conjunto finito $J \subseteq V(K)$ tal que $Y_0 \subseteq \bigcup_{v \in J} V(K, v)$. En particular, si y es una valuación de $\overline{\mathbb{Q}}$ que no divide a ninguna valuación en J, entonces $\Gamma_y = \mathcal{O}_y$. Por tanto, si $v \in V(K) \backslash J$, entonces

$$\text{Conor}_v^{-1}(U_v) = \text{Conor}_v^{-1}\Big(\prod_{y \in V(K,v)} \mathcal{O}_y \Big) = \mathcal{O}_v$$

y se sigue por tanto que la función Conor_K es continua.

Homeomorfismo: Para completar la prueba que Conor_K es un homeomorfismo, debemos mostrar que mapea abiertos de $\mathbb{A}_K$ en abiertos de $\text{Conor}_K(\mathbb{A}_K)$ con la topología de subespacio.

Para esto, supongamos que $D = \prod_{v \in V(K)} D_v$ es un abierto básico de $\mathbb{A}_K$. Por tanto, D_v es abierto en K_v para todo $v \in V(K)$ y existe un conjunto finito $J \subseteq V(K)$ tal que $D_v = \mathcal{O}_v$ para todo $v \in V(K) \backslash J$. Se verifica fácilmente que

$$\text{Conor}_K(D) = \prod_{v \in V(K)} \text{Conor}_v(D_v) = \prod_{v \in J} \text{Conor}_v(D_v) \times \prod_{v \in V(K) \backslash J} \text{Conor}_v(D_v). \quad (4.4)$$

Para cada $v \in V(K)$, el Lema 4.4.2 (ii) muestra que existe $U_v \subseteq \mathbb{A}_v$ de la forma $U_v = \prod_{y \in V(K,v)} \Gamma_y$ tal que $J_{g_v, r_v}(U_v)$ es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}$ y

$$U_v \cap \mathrm{Conor}_v(K_v) = \mathrm{Conor}_v(D_v). \tag{4.5}$$

Además, si $v \in V(K) \backslash J$, la ecuación (4.5) se tiene con $U_v = \prod_{y \in V(K,v)} \mathcal{O}_y$. Al combinar estas dos observaciones, con la ecuación (4.4), se concluye que

$$\mathrm{Conor}_K(D) = \prod_{v \in J} \big(U_v \cap \mathrm{Conor}_v(K_v)\big) \times \prod_{v \in V(K) \backslash J} \Big(\big(\prod_{y \in V(K,v)} \mathcal{O}_y\big) \cap \mathrm{Conor}_v(K_v)\Big).$$

Entonces, tomando

$$B = \prod_{v \in J} U_v \times \prod_{v \in V(K) \backslash J} \Big(\prod_{y \in V(K,v)} \mathcal{O}_y\Big) \qquad \text{y} \qquad C = \prod_{v \in V(K)} \mathrm{Conor}_v(K_v)$$

afirmamos que

$$\mathrm{Conor}_K(D) = B \cap C. \tag{4.6}$$

Ciertamente se tiene que $\mathrm{Conor}_K(\mathbb{A}_K) \subseteq C$, asi que

$$B \cap \mathrm{Conor}_K(\mathbb{A}_K) \subseteq \mathrm{Conor}_K(D).$$

Por otro lado, sabemos que $\mathrm{Conor}_K(D) \subseteq \mathrm{Conor}_K(\mathbb{A}_K)$, y además, la ecuación (4.6) implica que $\mathrm{Conor}_K(D) \subseteq B$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Conor}_K(D) \subseteq B \cap \mathrm{Conor}_K(\mathbb{A}_K)$, y hemos mostrado que

$$\mathrm{Conor}_K(D) = B \cap \mathrm{Conor}_K(\mathbb{A}_K).$$

Claramente B es abierto en $\mathbb{A}$, y así el resultado se sigue. $\square$

4.5 Topología del anillo de adeles continuos

Teniendo ya a nuestra disposición el Teorema 4.4.3, y junto con el hecho de que la función conorma es un monomorfismo de anillos, podemos identificar al anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ como un subanillo del anillo de adeles estándar $\mathbb{A}$. Pero además de eso, nos gustaría que $\mathbb{A}_K$ fuera un subanillo topológico de $\mathbb{A}$. De entrada esto no es posible, pues la topología determinada por $\mathcal{B}$ no necesariamente hace de $\mathbb{A}$ un anillo topológico. Lo que haremos es fijarnos en el subanillo de los adeles continuos, el cual, a diferencia del anillo de adeles estándar, sí es un anillo topológico y también contiene al anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ para todo campo de números K.

Lema 4.5.1. (Lema tubular [10, Lemma 26.8]) *Consideremos el espacio $X \times Y$, con X compacto. Si U es un abierto de $X \times Y$ que contiene a la rebanada $X \times y_0$, entonces existe una vecindad W de y_0 en Y tal que U contiene al tubo $X \times W$.*

Lema 4.5.2. *Sean X un espacio compacto y K un campo con valor absoluto $|\cdot|$. Sea $f : X \to K$ una función continua y para cada $x \in X$ sea $Y_x \subseteq K$ tal que $f(x) \in Y_x$. Si $\bigcup_{x\in X} x \times Y_x$ es un abierto en $X \times K$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq Y_x$ para todo $x \in X$.*

Proof. Defina la función $g : X \times K \to X \times K$ por $g(x, y) = (x, y - f(x))$. Claramente g es invertible y $g^{-1}(x, y) = (x, y + f(x))$. Es claro también que g y g^{-1} son continuas, por lo que g es un homeomorfismo. Para cada $x \in X$ sea $\widetilde{Y}_x = \{y \in K : y + f(x) \in Y_x\}$. Note que por hipótesis $0 \in \widetilde{Y}_x$. Entonces

$$X \times 0 \subseteq \bigcup_{x\in X} x \times \widetilde{Y}_x = g\Big(\bigcup_{x\in X} x \times Y_x\Big)$$

el cual es un abierto de $X \times K$ debido a que g es un homeomorfismo.

Dado que X es compacto, por el Lema tubular, Lema 4.5.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$X \times B(0, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{x\in X} x \times \widetilde{Y}_x.$$

Como la unión es disjunta, se sigue que para cada $x \in X$, $B(0, \varepsilon) \subseteq \widetilde{Y}_x$, y así se concluye que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq Y_x$. $\square$

Lema 4.5.3. *Sea K es un campo con valor absoluto $|\cdot|$. Denotemos por $s(x, y) := x + y$ y $m(x, y) := xy$. Si $x, y \in K$ y $r > 0$, entonces*

$$B(x, r/2) \times B(y, r/2) \subseteq s^{-1}(B(x + y, r)), \quad \text{y}$$
$$B\Big(x, \min\{1, \frac{r}{1 + |x| + |y|}\}\Big) \times B\Big(y, \min\{1, \frac{r}{1 + |x| + |y|}\}\Big) \subseteq m^{-1}(B(xy, r)).$$

Proof. Ambas condiciones son inmediatas; en efecto, si $(a, b) \in B(x, r/2) \times B(y, r/2)$, entonces

$$|a + b - (x + y)| \leq |a - x| + |b - y| < r/2 + r/2 = r$$

Y para la segunda condición, suponga que (a, b) pertenece al conjunto en el lado izquierdo. Si $1 \leq r/(1 + |x| + |y|)$, entonces

$$\begin{aligned} |ab - xy| &= |ab - ay + ay - xy| \leq |a||b - y| + |y||a - x| \\ &\leq |a| + |y| \leq |a - x| + |x| + |y| < 1 + |x| + |y| \leq r. \end{aligned}$$

Mientras que si $1 > r/(1 + |x| + |y|)$, entonces se tiene que

$$|ab - xy| \leq |a||b - y| + |y||a - x| \leq \frac{r(|a| + |y|)}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{r(|a - x| + |x| + |y|)}{1 + |x| + |y|} < r. \qquad \square$$

Con estos dos últimos lemas a la mano procedemos a probar el siguente teorema.

Teorema 4.5.4. *El anillo de adeles continuos provisto con la topología de subespacio de los adeles estándar es un anillo topológico Hausdorff.*

Proof. Denotemos por $\mathrm{sum}(x, y) := x + y$ y $\mathrm{mult}(x, y) := xy$ a las operaciones en en anillo de adeles estándar.

Sea $U = \prod_{y \in V(\overline{\mathbb{Q}})} U_y$ un abierto básico en la topología de $\mathbb{A}$, con $U_y \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_y$. Supongamos ahora que K es un campo de números, y para cada valuación v de K, sean g_v un diagrama de transición v-ádico y $r_v \in V(K, v)$.

Por definición de la topología en $\mathbb{A}$, sabemos que

$$J_{g_v, r_v}(U) = \bigcup_{y \in V(K,v)} y \times g_v(y, r_v)(U_y)$$

es un abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_{r_v}$ para todas las valuaciones v de K. Más aún, existe un compacto $Y_0 \subseteq V(\overline{\mathbb{Q}})$ tal que $U_y = \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Y_0$.

Sean $a = (a_y)$ y $b = (b_y)$ dos adeles continuos. Por la definición de adele estándar, existen compactos Y_1 y Y_2 de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ tales que $a_y \in \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Y_1$ y $b_y \in \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Y_2$. El conjunto $Z' = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$ es compacto y las siguientes tres condiciones se cumplen: $U_y = \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Z'$, $a_y \in \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Z'$ y $b_y \in \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Z'$. Por la compacidad de Z', existe un conjunto finito J de valuaciones de K tal que $Z' \subseteq \bigcup_{v \in J} V(K,v)$, y podemos suponer que J contiene a todas las valuaciones arquimedianas. Si hacemos $Z = \bigcup_{v\in J} V(K,v)$, entonces Z es compacto pues es una unión finita de compactos, y $Z' \subseteq Z$. Esto significa que para toda $y \notin Z$, se tiene que

$$(i)\ U_y = \mathcal{O}_y; \quad (ii)\ a_y \in \mathcal{O}_y; \quad (iii)\ b_y \in \mathcal{O}_y.$$

Ahora supongamos que $a + b \in U$. Buscamos subconjuntos $V_y, W_y \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_y$ tales que

$$V := \prod_{y \in V(\overline{\mathbb{Q}})} V_y \quad \text{y} \quad W := \prod_{y \in V(\overline{\mathbb{Q}})} W_y$$

sean abiertos en $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ y $(a,b) \in V \times W \subseteq \mathrm{sum}^{-1}(U)$.

Si $y \notin Z$, entonces simplemente defina $G_y = H_y = \mathcal{O}_y$.

Si $y \in Z$, entonces existe una valuación v de K tal que y divide a v. Por simplicidad, escribiremos $g = g_v$ y $r = r_v$.

Adicionalmente, defina $f, g : V(K,v) \to \overline{\mathbb{Q}}_r$ por $f(y) = g(y,r)(a_y)$ y $g(y) = g(y,r)(b_y)$. Dado que a y b son adeles continuos, f y g son continuas.

No olvidemos que hemos supuesto que

$$\bigcup_{y \in V(K,v)} y \times g(y,r)(U_y)$$

es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_r$. Por tanto, podemos aplicar el Lema 4.5.2 para concluir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(y)+g(y),\varepsilon) \subseteq g(y,r)(U_y)$ para todo $y \in V(K,v)$. Ahora defina $V_y = B(a_y, \varepsilon/2)$ y $W_y = B(b_y, \varepsilon/2)$.

Debemos mostrar que V y W son abiertos en $\mathbb{A}$ y que $(a,b) \in V \times W \subseteq \mathrm{sum}^{-1}(U)$. Claramente tenemos $(a,b) \in V \times W$. Para cada $y \in Z$, puesto que $g(y,r)$ es una isometría, concluímos que $B(a_y + b_y, \varepsilon) \subseteq U_y$, y el Lema 4.5.3 implica que

$$V_y \times W_y \subseteq \mathrm{sum}^{-1}(U_y).$$

Para cada $y \notin Z$ claramente se tiene que $V_y \times W_y = \mathcal{O}_y \times \mathcal{O}_y \subseteq \mathrm{sum}^{-1}(\mathcal{O}_y)$, y así hemos establecido que $V \times W \subseteq \mathrm{sum}^{-1}(U)$.

Para ver que V y W son abiertos, sólo probamos que V es abierto, dado que la prueba para W es análoga.

En general $V_y = \mathcal{O}_y$, excepto para aquellos y en el compacto Z. Adicionalmente, haciendo nuevamente $g = g_v$ y $r = r_v$, tenemos que

$$J_{g,r}(V) = \bigcup_{y \in V(K,v)} y \times g(y,r)(B(a_y, \varepsilon/2)) = \bigcup_{y \in V(K,v)} y \times B(f(y), \varepsilon/2).$$

Dado que f es continua, este conjunto es abierto en $V(K,v) \times \overline{\mathbb{Q}}_r$. Por lo tanto, por la definición de la topología en $\mathbb{A}$, el conjunto V es abierto como se requería.

En el caso donde asumimos $ab \in U$, igualmente hacemos $V_y = W_y = \mathcal{O}_y$ para todo $y \notin Z$. Para $y \in Z$, nuevamente asumimos que v es una valuación de K tal que y divide a v. Como antes, escribimos $g = g_v$, $r = r_v$, $f(y) = g(y,r)(a_y)$ y $g(y) = g(y,r)(b_y)$. Dado que f y g son continuas, podemos definir $m = \max\{1 + |f(y)|_r + |g(y)|_r\} \geq 1$ y hacer

$$V_y = B(a_y, 1) \cap B(a_y, \varepsilon/m) \quad \text{y} \quad W_y = B(b_y, 1) \cap B(b_y, \varepsilon/m).$$

El resultado se sigue ahora de una aplicación similar del Lema 4.5.3. $\square$

Combinando los Teoremas 4.4.3 y 4.5.4, y con la ayuda de la función conorma, es posible identificar a cada anillo de adeles $\mathbb{A}_K$ como un subanillo topológico de $\overline{\mathbb{A}}$.

Así, hemos construido un análogo del anillo de adeles, a saber, el anillo de adeles continuos $\overline{\mathbb{A}}$, el cual contiene como subanillos topológicos a todos los anillos de adeles usuales $\mathbb{A}_K$ de campos de números.

Referencias

[1] D. Allcock, J.D. Vaaler, A Banach space determined by the Weil height, Acta Arith. 136(3)(2009), 279–298.

[2] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press (1967).

[3] K. Conrad, Ostrowski for number fields, Expository notes (2007).

[4] F.Q. Gouvêa. *p-Adic Numbers, an introduction*, 3rd ed., Springer, Universitext, (2020).

[5] J.P. Kelly, Ch.L. Samuels, The continuous adèles on $\overline{\mathbb{Q}}$, `arXiv:1712.08112v2` (2018).

[6] J.P. Kelly, Ch.L. Samuels, Direct limits of adèle rings and their completions, Rocky Mountain Journal of Mathematics 50 (3) (2020), 1021–1043.

[7] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-Functions*, 2nd ed., Springer N.Y. (1984).

[8] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Addison-Wesley, (1993).

[9] P. Morandi, *Fields and Galois Theory*, Springer-Verlag (1996).

[10] J.R. Munkres, *Topology*, 2nd ed. Prentice-Hall Inc., N.J. (2000).

[11] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer (1999).

[12] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, 2nd ed. Springer (2013).