PLATANO

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

LA REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESTA

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro
en Ciencias en la especialidad de
Educación presenta

MYRIAM EDITH NEMIROVSKY

Directora de Tesis
Dra. Emilia Ferreiro

Enero, 1988

JOSE MA. VELASCO 101 MEXICO 19, D. F. APARTADO POSTAL 19-197 TEL. 660-00-91

INDICE

Indice de cuadros.

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

El objeto de análisis de esta investigación es la representación gráfica de la resta en niños de edad pre-escolar. Justificaremos el interés del tema a través de tres aspectos que trataremos en forma sucesiva: la representación gráfica, la adquisición de los signos matemáticos y los signos que representan operaciones matemáticas.

La representación gráfica

Nuestro análisis no está focalizado sobre la resta misma, desde el punto de vista conceptual como operación matemática, sino sobre su representación. Para precisar el objeto de estudio vamos a comenzar explicitando el uso que haremos de ciertos términos. Con el término REPRESENTACION designamos a la actividad humana que crea un objeto material en sustitución de otro, como por ejemplo: la realización de maquetas, planos, mapas, esquemas, etc. En todos estos casos el objeto producido está en lugar de aquéllo que representa, por ello una representación o re-presentación es un objeto sustituto. En este trabajo nos referiremos específicamente a la REPRESENTACION GRAFICA; es decir, a las marcas trazadas sobre papel que constituyen objetos sustitutos.

Las funciones principales que desempeñan las representaciones gráficas en la cultura contemporánea son la mnémica y la comunicativa. Cuando se usa una representación con fines mnémicos el sujeto coloca marcas en el papel para descargar o ampliar su memoria porque si el dato, información o hecho que desea retener está ausente en su memoria, lo puede recuperar a través de su propio registro gráfico; en este caso lo que está ausente en la memoria está presente en el papel. Para usar una representación gráfica con fines mnémicos es preciso que el sujeto sea capaz de recuperar la información registrada, en el momento que lo requiera; es decir, hay una relación de permanencia en el tiempo, la información perdura y está disponible para ser utilizada sin necesidad de que el sujeto o sujetos la conserven en la memoria.

Antes de la creación de los objetos gráficos que utilizamos actualmente (lápiz y papel) el hombre diseñó distintos modos de "hacer marcas" como una manera de conservar información: "los más sencillos y corrientes son los llamados `palos para contar', para llevar la cuenta del ganado; se trata de simples palos con muescas talladas que corresponden al número de cabezas de ganado al cuidado de un pastor" (Gelb, 1976).

Pero la representación gráfica tiene también la función de comunicar, cuando se trata de transmitir algo a otro. Surge entonces un requisito adicional: que la representación utilizada sea CONVENCIONAL; es decir, compartida por un grupo social. De esta manera la información se transmite mediante el conocimiento y uso de las representaciones convencionales. Al respecto, Gelb (1976) afirma: "con el fin de comunicar pensamientos y sentimientos tiene que haber un sistema convencional de signos y símbolos que al ser usados por ciertas personas, sean comprendidos por otras que los reciben. La comunicación en circunstancias normales exige la presencia de dos (o más) personas: la(s) que emite(n) y la(s) que recibe(n) la comunicación". Si estas condiciones son necesarias en la comunicación cara a cara ("exige la presencia de dos..."), lo son más aún en el caso de las representaciones gráficas, dado que éstas se utilizan con fines comunicativos justamente cuando no hay una presencia simultánea de los interlocutores en un espacio común (cumple la función específica de permitir la comunicación entre sujetos distantes en el espacio y/o en el tiempo). Por lo tanto, el requisito de la convencionalidad adquiere mayor importancia, ya que el receptor no puede solicitar información complementaria; lo gráfico por sí mismo debe bastar para lograr comunicar el mensaje.

Al interior de las representaciones gráficas convencionales existen las que guardan similitud con aquéllo que representan; de este tipo son algunos carteles indicadores, señalamientos de carreteras, etc., donde se utilizan dibujos esquematizados. En cambio, hay otras que no mantienen relación de semejanza con lo representado, son ARBITRARIAS. Algunas representaciones gráficas arbitrarias funcionan como convenciones aisladas; otras -las más importantes- constituyen sistemas, entre los cuales podemos citar: la escritura del lenguaje natural, la notación musical y la notación matemática. Tomando un ejemplo de esta última, el concepto de seis se representa en el sistema indoarábigo como [6], pero en el sistema maya es [$\underline{\;\cdot\;}$] y en el romano [VI], y ha adoptado diversas formas tanto en las distintas culturas contemporáneas como en las diferentes civilizaciones a lo largo de la historia.

Utilizaremos la denominación de SIGNO GRAFICO para las grafías que son convencionales y arbitrarias.

Saussure (1945) considera al signo como "la combinación del concepto [significado] y de la imagen acústica [significante]". En el caso de las representaciones gráficas, el significante es lo gráfico en sí mismo (grafía/s). Plantea además que los signos linguísticos constituyen un sistema*.

Para Saussure el signo linguístico tiene dos propiedades fundamentales: la arbitrariedad y la linearidad del significante. Acerca de la arbitrariedad, señala lo siguiente: "todo medio de expresión recibido de una sociedad se apoya en principio en un hábito colectivo, o lo que viene a ser

* Aunque con "signos linguísticos" se refiere a los sonidos de la lengua, considera que también los signos gráficos comparten esta propiedad.

lo mismo, en la convención (...). La palabra arbitrario (...) no debe dar idea de que el significante depende de la libre elección del hablante (ya veremos luego que no está en manos del individuo el cambiar nada en un signo una vez establecido por un grupo linguístico); queremos decir que es **inmotivado**, es decir, arbitrario en relación con el significado, con el cual no guarda en la realidad ningún lazo natural". Y justamente la arbitrariedad es una diferencia básica entre el signo y el símbolo, ya que éste "tiene por carácter no ser nunca totalmente arbitrario; no está vacío: hay un rudimento de vínculo natural entre el significado y el significante", vínculo ausente en el caso del signo.

Por otra parte, el signo linguístico tiene como carácter la linearidad del significante; cuando se refiere a la lengua Saussure afirma: "se desenvuelve en el tiempo únicamente y tiene los caracteres que toma del tiempo: **a) representa una extensión, y b) esa extensión es mensurable en una sola dimensión**; es una línea". "Este carácter se destaca inmediatamente cuando los representamos [a los significantes acústicos] por medio de la escritura, en donde la sucesión en el tiempo es sustituída por la línea espacial de los signos gráficos".

Sobre este último punto queremos destacar que, sin embargo, desde la perspectiva del intérprete del signo, la secuencia temporal de la lengua <u>no</u> es equivalente a la secuencia espacial de la escritura: en este caso es posible tomar en cuenta varios signos gráficos <u>simultáneamente</u> porque están presentes al mismo tiempo, mientras que la cadena sonora de los fonemas de la lengua no permite hacerlo; además, la escritura posibilita adelantarse en el <u>espacio</u> gráfico sin respetar la secuencia de presentación de los signos gráficos (por su presencia simultánea), mientras que la lengua obliga a ajustarse a la secuencia temporal de presentación de los fonemas porque su aparición es sucesiva.

En relación con los dos sistemas (oral y escrito) Saussure plantea: "Lengua y escritura son dos sistemas de signos distintos; la única razón de ser del segundo es la de representar al primero; el objeto lingüístico no queda definido por la combinación de la palabra escrita y la palabra hablada; esta última es la que constituye por sí sola el objeto de la lingüística. Pero la palabra escrita se mezcla tan íntimamente a la palabra hablada de que es imagen, que acaba por usurparle el papel principal y se llega a dar a la representación del signo vocal tanta importancia como a este signo mismo. Es como si se creyera que, para conocer a alguien, es mejor mirar su fotografía que su cara".

Este señalamiento de Saussure apunta a un problema que es pertinente para nuestro objeto de estudio. Pero dado que nos ocuparemos de la escritura matemática debemos establecer algunas precisiones.

Para ello es necesario retomar a Saussure quien plantea la existencia de <u>dos</u> sistemas de escritura: el ideográfico y el fonético (que incluye a los silábicos y alfabéticos). La distinción entre ambos es MUY relevante: en el primero "la palabra está representada por un signo único y ajeno a los sonidos de que se compone" y en un sistema alfabético (como en uno silábico) se "aspira a reproducir la serie de sonidos que se suceden en la palabra"; ésta es LA diferencia determinante entre ambos sistemas de representación gráfica. Y él destaca que la preponderancia de la escritura (señalada en el párrafo citado sobre lengua y escritura) se encuentra enfatizada en los sistemas ideográficos: "Hemos dicho que la palabra escrita tiende a suplantar en nuestro espíritu a la palabra hablada: eso es cierto para los dos sistemas de escritura, pero la tendencia es más fuerte en el primero" (el ideográfico).

Dado que la escritura matemática constituye un sistema ideográfico, surge un interrogante: ¿en este caso cada signo remite a una palabra o directamente a un concepto? Saussure plantea desde distintos ángulos la relación palabra-concepto. Una de sus caracterizaciones más difundidas es la siguiente: "El signo lingüístico es, pues, una entidad psíquica de dos caras, que puede representarse por la siguiente figura:

$$\frac{\text{concepto}}{\text{imagen acústica}}$$

Estos elementos están íntimamente unidos y se reclaman recíprocamente", (ya dijimos que considera al signo como la combinación de ambos).

Es probable que debido a la universalidad del sistema de signos gráficos matemáticos -dado que es utilizado con independencia de la diversidad de lenguas-pueda afirmarse que remite directamente al concepto representado (aun cuando en cada lengua se mediatice a través de la/s palabra/s correspondiente/s). Y si es así, cabe hacer la siguiente traslación del planteamiento saussuriano: los signos matemáticos se mezclan tanto con los conceptos matemáticos que desplazan el papel preponderante que corresponde a estos últimos, cobran tanta importancia como ellos y dejan de cumplir "su única razón de ser": representar los conceptos matemáticos.

Entonces ¿por qué centramos nuestro trabajo en la escritura matemática? Al respecto haremos una precisión: ello <u>no</u> implica de ninguna manera desplazar o relegar la importancia de lo conceptual, sino que <u>ambos</u> aspectos (conceptuales y gráficos) cumplen funciones diferenciables y generan preguntas específicas relevantes, por lo que se justifica delimitar a los significantes matemáticos <u>también</u> como objeto de análisis a fin de estudiarlos en su especificidad.

Para sustentar su divergencia con el hecho de otorgar un papel preponderante a la escritura, Saussure señala: "sería demasiado largo clasificar las inconsistencias de la escritura. Una de las más desdichadas es la multiplicidad de signos para un mismo sonido (...). Y al revés, varios valores se representan con el mismo signo". También hay casos relativamente similares en la escritura matemática: el más destacado es el de los numerales en los sistemas de valor posicional donde el lugar que ocupan en la cifra es lo que determina su valor cuantitativo, y del primer tipo podemos citar el uso del signo "igual" ya que al graficar una operación en forma vertical pasa a ser sustituído por una raya; pero estas características nos llevan justamente a considerar a los signos gráficos matemáticos como objeto particular de análisis.

Ahora bien, nuestro trabajo no se focaliza en el sistema gráfico matemático como tal, sino en los usuarios de representaciones matemáticas; aclaremos: el análisis que aquí presentamos no apunta a revisar los signos matemáticos, sino a responder a la siguiente pregunta: ¿de qué manera el sujeto interpreta y produce representaciones matemáticas, en particular cuando aún no se ha apropiado del sistema convencional? Consideramos pertinente dicha pregunta porque partimos de la suposición que antes de usar el sistema de signos de manera convencional, los sujetos tienen formas propias de hacerlo. Para justificar esta suposición abordaremos el punto siguiente.

La adquisición de los signos gráficos matemáticos

Si bien nos ocuparemos específicamente de la adquisi - ción de signos matemáticos que representan operaciones, primero vamos a contextualizar el tema.

La teoría psicogenética permitió construir una concep - ción del niño y su modo de comprender el mundo en general, que difiere por completo de las concepciones precedentes. Podríamos afirmar que a partir de dicha teoría se asume que el niño tiene maneras propias de entender la realidad y éstas no son deficitarias o erróneas, sino modos parti- culares de organizar los datos que provienen del medio en función de los esquemas asimilatorios propios de un sujeto en desarrollo.

A partir de la década de los 70', desde esta perspectiva teórica surgió un interrogante: ¿cómo conceptualiza el ni- ño los signos gráficos? La pregunta se generó porque és - tos forman parte de la realidad cotidiana, y también en relación con ellos (como respecto a todos los objetos de la realidad) se parte del supuesto de que el niño se cues- tiona, reflexiona y construye esquemas interpretativos. Si bien se espera que dichos esquemas difieran de las for- mas convencionales de conceptualizar los signos, se espera también que los niños presenten modos específicos de pro -

ducir representaciones gráficas y de interpretar las re-presentaciones convencionales. Dada la amplitud y riqueza de este objeto de análisis, se lo aborda desde campos específicos: se comienza con las investigaciones sobre la lengua escrita coordinadas por Emilia Ferreiro; Bamberger* estudia la notación musical y se inicia la investigación sobre la escritura matemática.

En este último campo es preciso señalar la diferencia de enfoque respecto a trabajos anteriores: muchos autores habían estudiado la posibilidad que tienen los niños de identificar y/o denominar los numerales de manera correcta o incorrecta. Lo nuevo consiste en intentar conocer y comprender las formas particulares de utilizar las representaciones matemáticas justamente cuando el niño lo hace de modos que podrían catalogarse como "incorrectos", en el sentido de que difieren de la convencionalidad.

Se cuenta con un número aún muy restringido de investigaciones que adoptan esta última perspectiva. Ellas tienen tienen la virtud de abrir nuevos interrogantes, pero aún está distante la posibilidad de lograr una teoría integrada sobre el tema. Es preciso confrontar resultados y diferentes interpretaciones de los mismos, realizar trabajos comparativos sobre aspectos puntuales, elaborar criterios

* Citado por Hermine Sinclair (1982 y 1984).

consistentes para determinar secuencias evolutivas, efectuar análisis detallados sobre lo que representa cada tipo de signo matemático para los niños, etc. Por ello, nuestro trabajo referido a este ámbito, tiene la intención de reducir algunas carencias y precisar algunas preguntas.

Los estudios pioneros sobre la representación matemática en los niños son los realizados por Sastre y Moreno a quienes cabe el mérito de haber iniciado esta línea de investigación. Los otros autores que se inscriben en ella son: Kamii, Sinclair H.y A., Hughes, Vergnaud. Ubicaremos brevemente las características de los trabajos de cada uno.

Sastre, Moreno, Kamii y Sinclair H. y A. comparten explícitamente la teoría en la cual se sustentan: la psicología genética; las diferencias podrían sintetizarse de la siguiente manera.

Sastre y Moreno realizan investigaciones psicológicas a partir, o desde, una preocupación pedagógica; su interés primordial es elaborar una alternativa educativa congruente con los aportes psicogenéticos (incluídos los propios). Al respecto realizaron experiencias sistemáticas y prolongadas con grupos de niños, cuyo análisis constituye mate - terial de sustentación de sus propias propuestas. Introducen por primera vez situaciones de intercambio entre niños como una forma de indagar la producción de representacio -

nes matemáticas; es probable que ello se deba justamente a su punto de mira, ya que en las modalidades de trabajo didáctico que se sustentan en la teoría psicogenética, el intercambio entre los niños juega un rol determinante. Trabajan sobre la representación de cantidades y de operaciones de adición y sustracción con niños del nivel primario, tanto desde el punto de vista de la producción gráfica como de la interpretación.

Kamii, al igual que Sastre y Moreno, también propone lineamientos pedagógicos a partir de los datos de la psicología genética (incluyendo entre éstos los resultados que ha obtenido); en particular, asume la elaboración de ciertas líneas educativas globales donde enfatiza el rol de la autonomía en el aprendizaje. En cuanto a las representaciones matemáticas, trabaja con niños del inicio del nivel primario y casi exclusivamente sobre la base de situaciones de interpretación (conocemos una sola referencia donde incluye producción) tanto de cantidades como de suma y resta.

Sinclair H. y A. centran sus investigaciones en el interés por conocer las características del proceso de apropiación de la representación de cantidades, pero también está presente la búsqueda de relaciones con otros sistemas representativos: la escritura del lenguaje natural y la notación musical. Trabajan con niños del nivel preescolar sobre las representaciones matemáticas mencionadas, en situaciones de producción y de interpretación.

Hughes, a diferencia de los anteriores, manifiesta ciertas discrepancias con los aportes de la teoría psicogenética. En particular sus críticas se centran en: que dicha teoría realiza una interpretación del desarrollo como sucesión de momentos discretos; que ofrece una visión "negativa" de la etapa preoperatoria; además, cuestiona la pertinencia de los aportes piagetianos para la educación. Desde nuestro punto de vista, sus críticas emanan de una interpretación errónea de la teoría, al menos con respecto a los puntos que rebate.

Esto último lo afirmamos porque los aportes psicológicos de la teoría piagetiana ponen el énfasis en el proceso de construcción del conocimiento, y en particular, en los mecanismos que permiten el pasaje de niveles de menor conocimiento a niveles de mayor conocimiento, los estadios constituyen períodos relativamente estables de organización cognitiva y no meros momentos sucesivos. En cuanto al nivel preoperatorio, si bien su denominación puede propiciar una interpretación "en negativo" de las posibilidades cognitivas del niño, ello sucede porque se marcan las limitaciones que éste presenta respecto a niveles posteriores, pero a su vez se destacan los logros en relación con etapas precedentes. Por último, hay que señalar, que cuando los intentos de aplicación de la psicología genética en el campo educativo no han sido satisfactorios, esto no puede adjudicarse a la teoría misma, sino a la transposición, a veces automática, de sus aportes. Además, en particular, la interpretación de dicha teoría como "la psicología de los estadios" es probablemente la que ha influído de manera más negativa en las aplicaciones mencionadas. Sería paradójico sustentar que una teoría de la construcción del conocimiento no fuera pertinente en el ámbito educativo.

En sus estudios sobre las representaciones matemáticas, Hughes se interesa por conocer la evolución espontánea de las producciones e interpretaciones de los niños y, aunque menciona algunas implicaciones pedagógicas y ciertas críticas a prácticas tradicionales, ello no constituye su objeto de estudio. Trabaja con niños del nivel preescolar y primario sobre representación de cantidades y operaciones de sustracción y adición y presenta tanto situaciones de producción como de interpretación*.

Vergnaud se puede considerar como el único (con respecto a los autores citados) que trata el problema desde otro ángulo: lo matemático; aunque aborda lo psicológico para ubicar cuáles son las "operaciones de pensamiento" que el

* Conocimos los trabajos de este autor en la etapa final de la realización del nuestro. De no ser así, hubiésemos tomado en cuenta sus resultados para nuestro diseño experimental a fin de profundizar sobre aspectos puntuales de interés.

niño requiere realizar a fin de comprender ciertos signos matemáticos. Entre sus aportes está el análisis de las estructuras aditivas y multiplicativas donde plantea las relaciones matemáticas que entran en juego. A diferencia de los autores anteriores, cuyas fuentes de datos son los propios niños, Vergnaud -por estar centrado en otro aspecto- lo requiere excepcionalmente; en esos casos sus referencias se ubican en los últimos niveles de la escuela primaria y en el nivel secundario.

A partir de los aportes realizados por los investigadores mencionados y de interrogantes personales, nos planteamos como punto central de interés el siguiente: el niño puede producir e interpretar* representaciones matemáticas, pero ¿de qué manera asume un tipo de acción y de qué manera la otra? Justificaremos el interés de la pregunta.

En algunos dominios está bien establecido que interpretar y producir gráficamente son actividades que plantean problemas diferentes y en las cuales el sujeto interviene de distinta manera. Nos referimos específicamente al campo de la lengua escrita en el cual hay una clara distinción entre leer y escribir. Si bien ello no

* Cuando decimos "interpretar" nos referimos a interpretar representaciones -convencionales o no- hechas por otros. La interpretación de producciones propias no es equivalente a intentar comprender el significado de significantes graficados por otros.

implica que ya se hayan podido caracterizar de manera exhaustiva las características propias del leer y del escribir y sus interrelaciones, no cabe discusión, al menos, de que se trata de tipos de acciones diferenciables.

En el ámbito de la escritura matemática esta problemática constituye un aspecto sobre el cual no se ha iniciado la investigación. Hemos mencionado, al citar a los autores de este campo, a quienes incluyen ambos tipos de situaciones en sus trabajos y a quienes se centran en uno de ellos, pero aún no encontramos aportes que permitan elucidar en qué se parece (o en qué se diferencia) la actividad de producción gráfica matemática de la de interpretación de las representaciones matemáticas. Es probable que se requiera profundizar específicamente en cada una de ellas para avanzar en el conocimiento de qué pone en juego el niño cuando produce y cuando interpreta dichas graficaciones y simultáneamente buscar las semejanzas y las diferencias.

Respecto al particular sólo podemos decir que, de acuerdo con los trabajos antecedentes, pareciera que los niños dan muestras de "saber más" sobre los signos matemáticos cuando interpretan que cuando producen (Hughes, Sastre y Moreno).

Pero esto debe ponerse en relación con un problema muy significativo en este tipo de investigaciones y que se refiere al modo de recolección de los datos. Comenzaremos por revisar las dificultades que plantea la formulación de la consigna. En los trabajos citados, la consigna empleada fue lo suficientemente abierta como para que el niño realizara el tipo de graficación que él considerara conveniente: "¿Puedes poner algo en el papel que muestre cuántos ladrillos hay sobre la mesa?" (Hughes)*; "Debes hacer, con el papel y el lápiz, lo que te parezca mejor, lo que creas más conveniente para que el niño que ha salido ..." (Sastre y Moreno). Estos autores mencionan la importancia de encontrar una forma verbal amplia para solicitar las producciones al niño, a fin de dar lugar a cualquier recurso gráfico que él considere pertinente. Una dificultad adicional es el hecho de que no existe un término que se refiera específicamente a la graficación de signos matemáticos**.

En el caso de la escritura del lenguaje natural, el término "escribir" remite a ella y tan es así, que en los

* En el original: "Can you put something on the paper to show how many bricks are on the table?" (p.55).

** En nuestro caso, obviamente, enfrentamos esa dificultad y una de las niñas entrevistadas, al preguntarnos "¿Lo apunto?" fue quien nos dio lugar a apropiarnos del término para utilizarlo en las entrevistas siguientes. De todas formas, la acción de "apuntar" no delimita específicamente la acción de graficar signos matemáticos.

datos presentados por Ferreiro y Teberosky (1979), cuando indagan sobre la diferenciación entre las grafías-letras y las grafías-números, los niños presentan claramente el criterio diferenciador a través de la función específica atribuída a cada uno de esos conjuntos: las letras son "para leer" y los números son "para contar". Por otra parte, los niños presentan una distinción precoz (a partir de los 4 ó 5 años, e incluso antes) entre la acción de escribir y dibujar; sus trazos son claramente diferenciables cuando se proponen realizar una u otra acción. Por lo cual puede plantearse que cuando se le dice al niño: "Escribe...", la consigna delimita el tipo de graficación que se está solicitando y ello permite suponer que si el niño no utiliza letras es porque aún no las conoce; lo cual contribuye a precisar el análisis de los resultados obtenidos.

Pero en los casos de consignas como: "Pon algo en la hoja que..." o "Haz de alguna manera como para..." se deja absolutamente abierta la alternativa del dibujo y entonces cabe la pregunta: si el niño no utiliza signos matemáticos ¿puede concluírse que no los conoce, que no se apropió de ellos? Porque las conclusiones: "no conoce, no apropió de los signos matemáticos" o bien "no considera pertinente utilizarlos" difieren totalmente entre sí.

En relación con la recolección de los datos se nos planteó otro problema, pero éste surgió posteriormente, cuando iniciamos el análisis de los mismos. La realización de entrevistas con base en el método clínico se caracteriza por su complejidad, tanto en lo referente al diseño previo de las situaciones como al manejo de la entrevista misma. La segunda dificultad es particularmente ardua de resolver: "El buen experimentador debe, en efecto, reunir dos cualidades con frecuencia incompatibles: saber observar, es decir, dejar hablar al niño, no agotar nada, no desviar nada y, al mismo tiempo, saber buscar algo preciso, tener en todo instante alguna hipótesis de trabajo, alguna teoría, justa o falsa, que comprobar" (Piaget, 1933). Para el caso que nos ocupa nos interesa el primer problema planteado: el diseño de la situación de entrevista.

Para elaborarla, el investigador requiere definir el material que empleará, el tipo de consignas a plantear, la secuencia de presentación. Para cada uno de estos puntos se abren múltiples alternativas; optar por una de ellas constituye el problema, fundamentalmente porque de ello dependen los tipos de respuestas que se pueden obtener.

Al respecto, los autores mencionados optaron por los siguientes modos de resolución:

a) Presentar situaciones sin funcionalidad para el niño y con los signos descontextualizados. En esta opción se solicita al niño la realización de la tarea por sí misma; los signos matemáticos que se le muestran están escritos, por ejemplo, en tarjetas u hojas blancas que omiten toda referencia contextual. Esta opción es evidente en los trabájos de Hughes y Kamii.

b) Presentar situaciones sin funcionalidad para el niño pero con los signos contextualizados. Es decir, la primera condición es igual a la de la opción anterior, pero cuando se muestran al niño los signos, éstos se ubican en objétos, o imágenes de objetos que dan referencias contextuales. Por ejemplo: los numerales en placas de autos, en pasteles de cumpleaños, etc. Esta opción es la de Sinclair H., en investigaciones sobre interpretación de numerales.

c) Presentar situaciones con cierta funcionalidad, pero con los signos descontextualizados. En este caso, la segunda condición es igual a la de la opción a), pero hay diferencia con respecto a la primera. Por ejemplo: las situaciones de intercambio, donde el sentido de la graficación es entregar un mensaje al compañero; aun así, consiste más bien en un tipo de juego, no es una situación "real" que resuelve un problema surgido espontáneamente. Esta opción fue la que eligieron Sastre y Moreno.

No hemos encontrado antecedentes donde se utilicen situaciones funcionales y signos contextualizados.

Para plantear con mayor precisión el problema que nos interesa nos referiremos a uno de los trabajos de los autores citados. Sastre y Moreno (1980) realizaron un estudio sobre las producciones espontáneas de representaciones gráficas de cantidades; se llevó a cabo con 50 niños de 6 a 10 años de edad y las situaciones de experimentación fueron de tres tipos: a) solicitaron al niño, de manera individual, que representara un conjunto de caramelos (menor a diez) que tenía a la vista, para enviar un mensaje a un compañero, quien debía "adivinar", viendo exclusivamente el mensaje, de cuántos caramelos se trataba; b) los dos niños estaban separados por una pantalla y cada uno representaba la cantidad de caramelos que el experimentador colocaba; el intento era hacer la representación más rápida y comprensible que pudieran (si no utilizaban cifras el experimentador les comentaba que había una manera más breve y precisa); c) pidieron a los niños expresamente que emplearan cifras en la representación de la cantidad de caramelos que tenían ante sí.

Las autoras analizaron después la totalidad de los datos obtenidos en relación con la proximidad a la escritura matemática convencional.

En el ejemplo citado se introduce una situación de comunicación para obtener las producciones; en la segunda y tercera se elimina esa variable, además de modificar las consignas, y las autoras dicen: "Los resultados obtenidos en estas tres situaciones varían considerablemente, dándose un porcentaje más alto de respuestas menos evolucionadas [se refieren a las más distantes al signo] en la primera situación -en la que la única condición que se imponía al niño era la de que un grafismo fuera descifrable por el compañero -disminuyendo dicho porcentaje cuando, además de la condición anterior, se pedía un máximo de rapidez en la ejecución y alcanzando los porcentajes más bajos al pedirle explícitamente que usara cifras". De todas maneras analizan globalmente y desde la misma perspectiva los resultados de las tres situaciones: "de las 350 respuestas obtenidas de los 50 sujetos en los 7 ejercicios realizados [anteriormente advierten que en la situación b) se trataba de representar cinco cantidades consecutivas] tan sólo en un 37.14 % de las producciones se emplearon cifras...".

Nuestra duda se refiere justamente al hecho de que es evidente, por los resultados de las tres situaciones, que al variar las condiciones de recolección de datos, éstos también se modificaron. Entonces ¿no habría que analizarlos de acuerdo con ello? Este problema está presente en el análisis de nuestros datos.

Los signos gráficos que representan operaciones matemáticas.

Dentro del conjunto de los signos matemáticos es pre -

ciso hacer una distinción entre los numerales y los signos de las operaciones. Los primeros representan cantidades y por lo tanto se trata de representaciones de situaciones estáticas, de un estado de cosas; mientras que los signos de las operaciones representan una situación dinámica, en la cual un estado de cosas se transforma y pasa a ser un estado diferente. Además, mientras la representación de cantidades requiere graficar una sola variable: la cantidad de que se trata (omitiendo las relativas a las propiedades de los objetos cuantificados), en la representación de operaciones entran en juego, al menos, tres cantidades y un tipo de transformación que las pone en relación.

Como veremos, tanto para el niño como en la historia de los signos, dichas diferencias generaron -y generan- múltiples dificultades. Expondremos datos relativos a ambos casos.

Antecedentes en investigaciones con niños

Kamii (1980) realizó una indagación con niños de primer año de primaria sobre la representación de operaciones de adición y sustracción. Presentó a los niños: a) representaciones convencionales lacunarias que debían completar, b) ecuaciones "completas" para que efectuaran las acciones correspondientes (entregando fichas a una muñeca) y c) situaciones en las que el niño debía realizar una producción gráfica después de observar acciones de agregar y sustraer realizadas por el experimentador (siempre se trató de cantidades menores que diez). De acuerdo con los resultados obtenidos, Kamii concluye que la utilización e interpretación de numerales es precoz en los niños (dos tercios de la muestra lo lograron), mientras que respecto a los signos "más", "menos" e "igual" es tardía y ocurre en ese orden. La interpretación que propone para esa secuencia de adquisición es la siguiente: la utilización de numerales requiere de "(...)la abstracción reflexiva a partir de las propias acciones mentales sobre los objetos. Debido a que los números están en un nivel relativamente bajo de abstracción, en relación cercana a los objetos, parece ser fácil que los niños los representen con numerales sobre el papel". En cambio, para usar los signos "+" y "-" hay que poner en relación dos números. Además, el signo "menos" es posterior al signo "más" porque "(...)la sustracción implica una dirección de pensamiento que va contra la dirección natural manifestada por los niños pequeños, la cual es hacia adelante ("upward"). Inhelder y Piaget (1959) demostraron que el pensamiento de los niños pequeños asciende en la jerarquía, y que parte de hacer muchos grupos pequeños hasta constituir grupos cada vez mayores, inclusivos". Por su parte, el signo "igual" demanda, según Kamii, establecer una relación entre relaciones. Consideramos que la interpretación de Kamii requiere ser revisada.

Hughes (1986) analiza las interpretaciones que realizan niños de 5 a 7 años a quienes presentó numerales (de una sola cifra) y representaciones convencionales de operaciones. Encuentra que el nivel de dificultad aumenta significativamente al incorporar la representación de operaciones.

Tarjeta	Puntaje %
6	95
2	93
0	85
5 - 5 = 0	62
2 + 2 = 0	62
3 - 1 = 2	60
1 + 3 = 4	58
6 - 5 = 1	57
5 + 6 = 11	55
4 = 6 - 2	47
7 = 5 + 2	45
- 5	43
+ 6	35
4 + 0 = 4	30
3 = 3	18

Como puede notarse, el porcentaje de respuestas correctas disminuye de manera notable entre la tercera y la cuarta situación, justamente se introducen signos que representan operaciones.

Hughes trabajó, además, situaciones de producciones gráficas espontáneas donde los niños representaron operaciones matemáticas, de sus resultados señalemos que "once de los 96 niños intentaron diferenciar entre suma y resta en sus representaciones y sólo cuatro lo hicieron de manera que pudiera ser entendido por un observador no informado", dada la ambiguedad de la forma de graficar la transformación.

Sastre y Moreno (1980) realizaron una experiencia con niños entre 7 y 9 años. Colocaron frente a cada uno cierta cantidad de objetos, menor a diez, y realizaron una transformación de agregar o quitar; solicitaron al niño que verbalizara lo ocurrido y, si daba muestras de haber comprendido, que hiciera la graficación correspondiente como mensaje al compañero. De los resultados obtenidos nos interesa destacar que los niños presentaron "indiferenciación a nivel gráfico, de las acciones de adicionar y sustraer".

Por otra parte, Vergnaud (1984), quien como señalamos, analiza los aspectos matemáticos subyacentes a los signos, afirma que "Para el matemático, el signo + es una ley de composición que permite asociar a dos números cualesquiera a y b su suma c (...) Para el niño que aprende la significación del número y de las operaciones de adición y sustracción, la adición expresa la idea de un acrecentamiento de una cantidad inicial, la sustracción de una disminución (...) Del mismo modo, el signo = representa una situación simétrica para el matemático (...) mientras que para el niño implica en la mayoría de los casos la expresión de un resultado".

Sobre el signo "=" Hughes (1986) plantea un interrogante: ¿representa una relación o una operación? En el primer caso representa una relación de equivalencia entre lo que está escrito a su izquierda y a su derecha, y en el segundo tiene un significado asimétrico: como "señal de hacer algo" a la izquierda y poner algo a la derecha.

- El problema del cero

El cero no puede ponerse al mismo nivel que los otros números. Para indagar sobre las conceptualizaciones del niño respecto al cero sería preciso tomar en cuenta varios puntos de vista, entre los que pueden mencionarse, al menos, los siguientes:

-¿Qué hipótesis tienen los niños respecto al cero como grafía aislada? ¿Lo consideran una cantidad, un número, una ausencia o nada? ¿cuál es su función y en qué casos se justifica su uso?

-¿Qué hipótesis tienen los niños respecto al cero en relación al sistema de valor posicional? Y aquí se abren, a la vez, varias alternativas: cuando el cero ocupa el último lugar de una cifra (130) ¿por qué modifica el valor de los precedentes? si solo "no vale nada", ¿cómo es que en este caso hace "valer a otros" de manera diferente? Además, cuando está "repetido" (1300) vuelve a modificar los valores de los otros numerales. Cuando ocupa un lugar intermedio en una cifra (103) modifica el valor del numeral de la izquierda, pero no el de la derecha y también lo hace cuando está "repetido" (1003), determinando nuevamente otro valor, en este ejemplo, el 1, y dejando invariante al 3. Cuando ocupa el lugar inicial de una cifra (013) puede suprimirse porque no cumple ninguna función, aunque esté repetido (0013). Esto concierne a la representación de cantidades, no a la utilización de numerales como identificación.

Sólo hemos mencionado situaciones donde el cero aparece en la representación de cantidades, pero veamos qué sucede en las operaciones.

-¿Qué hipótesis tienen los niños respecto al cero cuando es la cantidad que interviene al inicio de una operación? En este caso dependiendo de qué operación se trate, su función varía: 0 + 2; 0 -2; 0 x 2; 0 ÷ 2 (por citar sólo las cuatro operaciones fundamentales).

-¿Qué hipótesis tienen los niños respecto al cero cuando es la cantidad con la cual se ejerce la transformación misma? La función del cero también difiere en las cuatro operaciones fundamentales: 2 + 0; 2 - 0; 2 x 0; 2 ÷ 0.

-Y por último, ¿cómo se interpreta el cero cuando es el resultado de una operación? Aquí el problema se complejiza aún más porque requiere que se den ciertas condiciones particulares en las otras cantidades que intervienen en la operación y de manera diferenciada para cada una de las operaciones fundamentales. En la suma es preciso que las otras cantidades también sean ceros (si no intervienen los números negativos); en la resta, que las dos cantidades sean la misma (2-2); en la multiplicación, que el multiplicador también sea cero y en la división, que tanto el dividendo como el divisor sean ceros (siempre sin considerar los números negativos).

De los trabajos de investigación antecedentes citaremos un estudio de Hughes (1986) en el cual indagó sobre la representación del cero como única grafía en una muestra de 25 niños de 3 a 5 años. Este autor presentó a cada niño un conjunto de cuatro cajas que contenían: uno, dos y tres objetos respectivamente y una caja vacía, solicitándole que colocara en cada caja una graficación que correspondiera a la cantidad de objetos contenida en cada una. Hughes destaca, entre sus conclusiones, que la graficación del cero no ofreció a los niños dificultades mayores que las presentadas por las otras cantidades (aunque plantea que sí es una dificultad cuando aparece en relación al valor posicional y en las operaciones, donde la dificultad se acentúa cuando interviene como operador (4+0=4) respecto a cuando interviene como resultado (4-4=0)).

Esa conclusión de Hughes ("no hubo dificultades significativas con el cero") deja sin embargo sin responder las preguntas que nos hacíamos en relación al cero como una única grafía: ¿el niño "ve" allí la representación de una cantidad, un número, una ausencia, nada?

Antecedentes históricos

Mencionaremos en primer lugar algunos datos históricos relativos a la representación del cero y después nos ocuparemos de la evolución histórica de los signos correspondientes a operaciones matemáticas.

La necesidad de representar el cero surge sólo a partir de la creación de sistemas de notación de valor posicional, dado que se requiere representar, de alguna manera, el lugar de la cifra donde la cantidad es nula. Según Bourbaki (1969), hay tres antecedentes del cero; el primero es el sistema babilónico que data de los dos últimos siglos a.de C., donde sólo se utilizaba al interior de una cifra*. El sistema de notación maya también introdujo el cero al constituir un sistema posicional en el primer si-

* Aclaremos que colocar una marca exclusivamente entre otros numerales evidencia no otorgarle a su significado categoría de "número" Hughes (1986) plantea que en un inicio los babilonios dejaban el espacio en blanco y posteriormente colocaron una marca en el lugar correspondiente.

glo de nuestra era*.

El tercer antecedente es el de los hindúes (de quienes deviene nuestro sistema de representación de cantidades a través de los árabes); a partir de los primeros siglos de nuestra era utilizaban el sistema de valor posicional e introdujeron el cero. Pero "es necesario destacar, por otra parte, que la concepción de cero como un número (y no como un simple signo de separación) y su introducción al cálculo se cuentan también entre las contribuciones originales de los hindúes".

Señalemos entonces lo siguiente: la utilización de un signo para "cero" <u>no</u> implica que el significado fuera equivalente en las diferentes culturas que lo hicieron. Este hecho es relevante porque pone de manifiesto que el uso de determinados signos no presupone una misma construcción conceptual.

* Harvey y Williams (1980) analizan el sistema de notación de cantidades utilizado por los aztecas-texcocanos. Dicho sistema era de valor posicional con inclusión del cero. Respecto a su origen existe una duda: si fue a partir de la colonización o anterior a ella (en cuyo caso pudo tener influencia del sistema maya) Los autores, por las características de este sistema (posición vertical, base veinte y uso del cero) sostienen la segunda alternativa. Destacan particularmente el uso complejo que los aztecas hacían del sistema para el cálculo de área y pago de impuestos.

Veremos ahora algunos datos sobre la historia de los signos que representan operaciones matemáticas. En primer lugar, es necesario destacar la dificultad de encontrar bibliografía al respecto, en tanto que es relativamente fácil documentarse en relación a la historia de la representación de cantidades. Por lo antedicho, presentaremos algunos datos significativos sobre el tema, aun cuando abarcan un espectro de operaciones matemáticas que exceden a nuestro caso.

Prácticamente la única fuente de información en la cual encontramos referencias sistematizadas sobre el particular ha sido Scott (1958), y algunas mencionadas por Hughes (1986) citando a Cajori.

Comenzaremos por una de estas últimas: las primeras representaciones para suma y resta se encontraron en los antiguos sistemas egipcios; son de particular interés los del papiro Rhind de alrededor de 1650 a.de C. En este documento la suma y la resta están representadas por pares de piernas caminando; tal parece que las piernas en la dirección de izquierda a derecha representan la suma, en tanto que las de derecha a izquierda representan la resta.

Excepto este dato, los antecedentes de los actuales signos que representan operaciones se inician recién a <u>mediados del siglo XV</u>. Presentaremos algunos puntos interesantes de este desarrollo, en forma abreviada, siguiendo a Scott.

•Johannes Muller (1436-1476), conocido como Regiomontanus. Su álgebra era retórica, todas las operaciones se escribían en forma completa*. La palabra res se usaba para denotar la cantidad buscada y su cuadrado mediante census; posteriormente, él abrevió esas palabras con su inicial r' y c'. La suma se denotaba con et.

•Luca Pacioli, fraile franciscano, produjo su gran obra, Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni e Proporziolita, publicada en 1494, que sirvió como tratado estándar de matemática durante muchos años. En ella introdujo ciertos signos: la suma la indicaba con una 'p' (inicial de piu), la resta con una 'm' (inicial de meno). Usaba ocasionalmente el símbolo '-' para la igualdad. La raíz cuadrada la indicaba con 'R' (de Radix), y aunque las cantidades negativas aisladas eran todavía una novedad, Pacioli sabía cómo manejar los signos positivos y

* Las escrituras matemáticas de los hindúes eran también escritas en forma completa. La ecuación, por ejemplo, ax + c = by, la escribían así: "Para determinar una cantidad tal que un número dado siendo multiplicado por ella, y el producto sumado a una cantidad dada, el total (o si el aditivo es negativo, la diferencia), puede ser divisible entre un divisor dado sin sobrante" (Scott, p.76).

negativos.

$$\begin{array}{r} p.\,16 \\ m.\ \ 4 \\ \hline p.\,20 \end{array}$$

$[+16-(-4)= \quad +20]$

- El francés Nicolás Chuquet (fallecido en 1500) compiló un tratado, <u>Triparty en la Science des Nombres</u> en 1484, en el cual empleó los signos de Pacioli.

- Girolamo Cardano (1501-1576) profesor de matemática en Venecia, conocido como Cardan, no utilizó un signo para la incógnita; generalmente la denotaba con la palabra <u>res</u>, a veces con <u>positio</u> y más con <u>quantitas</u> <u>ignota</u>. Las letras 'p' y m' se usaban todavía para <u>piu</u> y <u>meno</u>. Es necesario señalar que ese tipo de signo era una abreviatura de las palabras comunes y, como éstas, requería seguir las reglas sintácticas; así 'p' es seguida no de <u>res</u>, sino de su plural ablativo <u>rebus</u>.

- Raffaello Bombelli, nacido en Bologna, quien publicó un libro de álgebra en Venecia en 1572,"fue el último de los matemáticos italianos que hizo contribuciones notables al desarrollo del álgebra durante ese periodo" (Scott, p.93) Su aportación más importante -según Scott- radica en sus avances en la notación, especialmente en el método para denotar las potencias, que él denominaba <u>dignità</u>. En él encontramos el primer enfoque a la notación de índices.

A la incógnita le llamaba <u>tanto</u> y la representaba con `1', y sus potencias con el método siguiente:

Tanto	1
Potenza	2
Cubo	3
Potenza di potenza	4
Primo relato	5
Cubo di potenza di potenza	12

Indicaba las raíces con el signo `R', seguidas de las letras `q' (<u>quadrata</u>), `c' (<u>cuba</u>), etc. para raíz cuadrada, raíz cúbica. Seguimos encontrando `p' y `m' para denotar suma y resta y aún no hay un signo para la igualdad. Pero aparece un nuevo signo para la <u>radix universalis</u>, o la raíz de una expresión completa. Bombelli utilizó un signo que "debe ser considerado como el precursor del paréntesis moderno" (Scott, p.93).

R.c⌊4.p.R.q.2⌋p.2 para: $\sqrt[3]{(4+\sqrt{2})}+2$.

•Michael Stifel (1486-1567) discípulo de Lutero; en su <u>Arithmetica Integra</u>, que apareció en Nüremberg en 1544, se destacan sus notables avances en notación. Stifel empleaba los símbolos `+' y `-' en lugar de `p' y `m'. Ya habían sido sugeridos en 1489 por Johann Witman, pero se adoptaron muy lentamente. Stifel sugirió el uso de la misma letra repetida para denotar potencias sucesivas, así, `1A', `1AA', `1AAA'.... En 1553 difundió la edición <u>Die Coss</u> (compilada por Christoff Rudolff en 1525), aparecían los signos '$\sqrt{}$' para raíz cuadrada,'$\sqrt{\sqrt{}}$'para la cúbica y $\surd\surd\surd$, para la cuadrática (en este último queda claro que se repite el signo de la raíz cuadrada).

- Christopher Clavius (1537-1612) matemático alemán, jesuita. Escribió un álgebra alrededor de 1580 en la cual se apegó a Stifel en la notación empleada y en el método de exposición.

- Simon Stevin de Brujas (Stevinus), nacido en 1548 y fallecido en 1620, usó los signos '+' y '−' para denotar suma y resta. Los mismos comenzaron a difundirse. Para representar la igualdad Stevin escribía por lo general la palabra completa, aunque ocasionalmente utilizaba el signo ':' entre dos cantidades que tenían que ser igualadas.

- Albert Girard de Holanda (1595-1632) en su obra *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, aparecida por primera vez en 1629, aportó muchas mejoras en la notación de entonces. Usó los signos '+' y '−' para suma y resta, y el '=' lo usaba *no* para denotar igualdad, sino para señalar la *diferencia* entre dos cantidades. También introdujo dos nuevos signos:

  ff *plus que*, para "mayor que"
  § *moins que*, para "menos que"

- Francois Viète (1540-1603) mejor conocido por la forma latinizada de su nombre, Vieta. El trabajo sobre el cual descansa básicamente su reputación es *In Artem Analyticam*

Isagoge, aparecida en 1591. Es la primera obra de álgebra simbólica. Para representar la incógnita utilizó vocales (letras mayúsculas) y consonantes (también mayúsculas) para las cantidades conocidas; en los ejemplos numéricos de una obra posterior (1615) dejó de usar las vocales para denotar la incógnita y en su lugar utilizó la letra N' (*numerus*). Las potencias sucesivas desde la primera, las designaba mediante las palabras *latus*, *quadratus*, *cubus*, *quadrato-quadratus*; éstas, después de la primera, se abreviaban `Q', `C', `QQ', `QC', `CC', hasta `CCC'. No utilizó ningún signo para la igualdad, la cual, al igual que la multiplicación, la escribía con la palabra completa. El signo `=' aparecía, pero en lugar de indicar igualdad, indicaba *diferencia* entre dos cantidades cuando se ignoraba cuál de ellas es la mayor (Scott, p. 100).

- Robert Recorde (1510-1558); su obra *Whetstone of Witte* (1557) es de interés en tanto contiene el signo `=' para denotar igualdad. (Sobre el particular, Hughes señala que Recorde lo justifica diciendo que "no hay dos cosas más iguales que dos líneas paralelas de la misma longitud").

- William Oughtred (1574/5-1660); su obra *Clavis Mathematicae* fue muy difundida en Inglaterra. En sus páginas llevó el uso de los signos al exceso. Empleó no menos de 150 signos diferentes, entre los cuales figuran:

$\times$ para multiplicación
$::$ para proporción
$\overline{::}$ para proporción continua
$\sqsubset$ para mayor que
$\sqsupset$ para menor que

Sólo los dos primeros han perdurado.

- Thomas Harriot (1560-1621), inglés, en su obra <u>Artis Analyticae</u> <u>Praxis</u>, aparecida 10 años después de su muerte, hizo importantes aportaciones. Introdujo algunas mejoras en la notación y en su trabajo se encuentran los signos `<' y `>' para menor que y mayor que.

Con base en los datos expuestos, pareciera que durante los siglos XV y XVI se consolida la escritura de las operaciones matemáticas. Al respecto, haremos dos señalamientos:

a) Desde los inicios de la representación de sistemas de numeración* mediaron ¡casi cinco mil años! hasta el surgimiento de los signos para representar operaciones.

b) Los niveles de conocimiento matemático no guardan relación con las posibilidades de graficación (mientras aún no existían signos para representar la adición y la sustracción, se manejaban los conceptos de fracción, raíz y potencia).

* Todos los autores coinciden en atribuir los primeros sistemas de notación de cantidades a los egipcios, alrededor del año 3000 a.de C.

ENCUADRE DE LA PRESENTE INVESTIGACION

En nuestra investigación optamos por trabajar específicamente sobre la resta; esta decisión se tomó porque en el sondeo previo presentamos situaciones de suma y de resta, obteniendo respuestas de interés respecto a esta última, en particular la dificultad que los niños evidenciaron para representar e interpretar una graficación de la acción de "quitar", lo que nos incitó a centrarnos en la resta.

Además quisimos incluir parte de la problemática específica al cero. El espectro de alternativas a indagar sobre el cero es suficientemente amplio como para dar lugar a varios trabajos de investigación, pero en el nuestro nos planteamos presentarlo exclusivamente como el resultado de la operación y confrontar esa situación con restas cuyo resultado no es cero; a estas últimas denominamos "resta con resto" y a las primeras "resta sin resto" (¿esta denominación no podría expresar nuestro problema con el cero?).

En nuestra investigación, como en otras similares, no se supone que el niño maneja matemáticamente el concepto sobre el cual se está trabajando a nivel de la representación. El niño de edad preescolar aún no ha construído el concepto de número: ni desde el punto de vista de la conservación lo maneja como una cantidad independiente de la configuración espacial, ni como síntesis de clasificación y seriación (Piaget y Szeminska, 1975 y Piaget e Inhelder, 1973); menos aún podríamos decir que conceptualiza matemáticamente la operación de sustracción.

Puede parecer paradójico que propiciemos situaciones de uso de representaciones gráficas cuando el aspecto conceptual no ha sido construído, pero es necesario señalar lo siguiente: partimos de que <u>durante</u> el proceso de construcción de las nociones matemáticas el niño elabora procedimientos que le permiten graficar e interpretar a <u>su manera</u> dichas nociones (las cuales, a la vez, también las concibe a su manera).De ello ya hay datos en los trabajos citados.

Por lo cual podemos decir que el proceso de construcción conceptual de las nociones matemáticas tiene un desarrollo propio con características específicas y, simultáneamente, habría un proceso a través del cual el sujeto construye las representaciones matemáticas. Pero que ambos procesos sean paralelos NO significa que a cada etapa de uno de ellos corresponda un momento particular del otro y, además, es necesario destacar que, si bien aún no se conocen las etapas del proceso de construcción de todas las nociones matemáticas, prácticamente se desconocen las de la representación gráfica. De todas maneras, asumir que ambos son procesos, y que son diferenciables, constituye un punto de partida.

En el desarrollo de esta introducción hemos expuesto los interrogantes que generaron y delimitaron nuestro estudio. Intentaremos ahora sistematizarlos en pocas palabras.

En el punto inicial (la representación gráfica) planteamos la pertinencia de estudiar las representaciones gráficas matemáticas y señalamos nuestro supuesto básico: aunque un sujeto desconozca las representaciones convencionales puede adjudicarles ciertos significados, así como producir graficaciones vinculadas al significado convencional cuando aún no conoce éste (más que a través de su forma de manejarlo). A partir de esto ¿qué características presentan esas acciones del sujeto?

En el segundo punto (la adquisición de los signos gráficos matemáticos) contextualizamos nuestro tema y particularmente delimitamos nuestro interés por aproximarnos a dos problemas: por una parte, a la diferencia y la relación entre interpretar y producir gráficamente signos matemáticos, y por otra, a la relación entre el análisis de los datos y su recolección.

Por último, en el tercer punto (los signos gráficos que representan operaciones matemáticas) expusimos antecedentes relativos a dichas representaciones, tanto en investigaciones con niños como a nivel histórico, y nos referimos "al problema del cero".

Finalmente nuestra pregunta especifica: ¿cómo representa el niño la acción de quitar y cómo interpreta la graficación de ésta, inclusive cuando el resultado es nulo?

Para esta investigación entrevistamos 30 niños de edad preescolar*. Decidimos que fueran de esta edad por el interés de conocer los modos espontáneos de representar la resta y de interpretar su graficación convencional ANTES de que los niños cuenten con un contexto institucional, en el cual se sistematiza la enseñanza de los signos correspondientes.

La lista de los niños entrevistados es la siguiente :

4 años		5 años		6 años	
Vanesa	(4.1)	Ana	(5.0)	Cyntia	(6.0)
Débora	(4.2)	Luis Alfredo	(5.1)	Catalina	(6.0)
Luis Francisco	(4.2)	Héctor	(5.2)	Susi	(6.1)
Gladys	(4.3)	Greta	(5.3)	Marcela	(6.1)
Berna	(4.3)	Alejandra	(5.3)	Riger	(6.2)
Patricio	(4.3)	María José	(5.4)	Yael	(6.3)
Daniel	(4.4)	Juan Pablo	(5.4)	Paola	(6.4)
Fabián	(4.4)	Rita	(5.4)	Luis Gabriel	(6.5)
Ana Paula	(4.5)	Debie	(5.6)	Moi	(6.6)
Addina	(4.6)	Diana	(5.6)	Ilse	(6.6)

Cada entrevista tuvo una duración aproximada de una hora, por lo cual la realizamos en dos sesiones: una dedicada a las situaciones de producción y otra a las de intepretación.

Durante las etapas de diseño y sondeo de la técnica de entrevista, recolección de datos y análisis iniciales, contamos con la asesoría de Grecia Gálvez; su apoyo enriqueció significativamente la realización de este trabajo.

* Realizamos las entrevistas en cuatro jardines de niños privados de la ciudad de México, que atienden población predominante de clase media; las cuatro instituciones facilitaron el acceso y las condiciones mínimas necesarias para la recolección de datos.

CAPITULO I

SITUACIONES DE PRODUCCION

SITUACIONES DE PRODUCCION

OBTENCION DE LOS DATOS

Las entrevistas con los niños, para organizar situaciones de producción de representaciones gráficas de la resta, se estructuraron tomando como antecedente los trabajos de Genoveva Sastre y Montserrat Moreno (1980). Básicamente consisten en situaciones de comunicación gráfica entre dos niños, donde uno de ellos asume el rol de productor y el otro de interpretador.

Estructuramos las entrevistas de la siguiente forma: digamos que trabajamos con los niños A (productor) y B (interpretador); mientras A permanecía con el entrevistador, B esperaba afuera del cuarto. El entrevistador presentaba un conjunto de objetos al niño A, pidiéndole que los identifique y los cuente y luego retiraba algunos o todos los objetos presentes, según se trate de resta con resto o sin resto. Al finalizar esta acción solicitaba al niño que verbalice lo sucedido y si no parecía estar clara la acción, la repetía nuevamente a fin de intentar garantizar que el niño comprendiera.

Cuando el entrevistador consideraba que el niño, a través de su verbalización, ponía en evidencia haber entendido lo sucedido, le solicitaba (entregándole hojas y lápiz) que realice algo en el papel para que el niño B logre interpretar la acción realizada, aclarándole que no había que contarle verbalmente lo sucedido. El entrevistador hacía explícito que sólo le diría al niño B de qué objetos se trataba, pero la representación debía bastar: "para que B pueda darse cuenta cuántas había, qué pasó y cuántas quedaron", enfatizando así la centración en los aspectos cuantitativos de la acción y no en las propiedades de los objetos utilizados.

Una vez que A daba por terminada su producción, el entrevistador pedía al niño B que entrara y le decía que hicieron algo (por ejemplo, con unas corcholatas) y que intente, viendo la hoja que le preparó A, darse cuenta cuántas corcholatas había y qué pasó después. Es decir, se daba la información sobre la clase de objetos usados y se centraba la pregunta en el aspecto cuantitativo de la operación.

Si B lograba interpretar la operación, ahí se cerraba la situación, pero si no era así se preguntaba a ambos participantes si deseaban hacer otro intento. En este caso B salía nuevamente y A realizaba una nueva representación o modificaciones a la anterior según él optara, repitiéndose la secuencia. El número de intentos estaba determinado por la decisión de la pareja, pero si al desear darla por terminada B aún no lograba interpretar la operación, se le relataba verbalmente la misma.

Todos los niños desempeñaron el rol de productor y de interpretador, pero no en la misma pareja. Retomando el ejemplo de los niños A y B, cuando B asumía el rol de productor constituía pareja con C y no justamente con A nuevamente. Esta decisión fue tomada considerando que si la alternancia de roles era recíproca aumentaba la posibilidad de que B utilizara una representación similar a la realizada por A, mientras que al ser el destinatario de su producción otro niño habría más posibilidades de que pusiera en juego sus propias representaciones teniendo menor grado de influencia las utilizadas por A.

Las parejas se constituyeron por proximidad cronológica; los niños producían para e interpretaban a los niños de su misma edad ya que consideramos que una disparidad marcada en este sentido podía incrementar las dificultades en la comunicación.

Además, debido a que todos los niños serían productores e interpretadores diseñamos las situaciones con algunas variantes a fin de que al niño en el rol de productor no le correspondiera representar una operación idéntica a la interpretada, ni a la inversa. Por ese motivo variamos los objetos seleccionados y las cantidades puestas en juego.

La etapa del sondeo de la entrevista nos permitió, además de afinar el modo de manejo del interrogatorio, realizar tres ajustes básicos:

- Seleccionar objetos no redondos para la situación de restas sin resto, evitando así la confusión del interpretador entre la forma gráfica del dibujo de los objetos y el signo cero, en el caso que el productor lo utilizara.

- Diseñar una situación introductoria que facilite a los niños comprender de qué se trataba el "juego". Al inicio del sondeo hubo casos en donde el productor representaba intencionalmente la acción realizada de manera compleja o ajena "para que no entienda" (refiriéndose al niño B). Sobre esa base diseñamos la situación introductoria, que consistió en presentar al productor tres figuras geométricas: cuadrado, círculo y triángulo, diciéndole que eligiera cuál le gustaba más. Una vez que la seleccionaba se le pedía que hiciera algo en una hoja para que el compañero B pudiera saber, mirando la hoja, cuál había sido su elección. Al entrar B se le presentaban las tres figuras y la hoja, pidiéndole que "adivinara" cuál había sido la elegida por A, y B siempre "adivinaba". El entrevistador entonces felicitaba a ambos por el logro alcanzado. Esta situación, que por su simplicidad no ofreció dificultades en la comunicación, permitió propiciar una mejor comprensión de los niños sobre el modo de trabajo que se le proponía.

- Restringir el uso de la lengua escrita. Durante el sondeo algunos niños acudían a la lengua escrita como modo de representar el mensaje al compañero. Dado que nuestro interés estaba centrado en las representaciones vinculadas al lenguaje matemático, optamos por plantear a los niños que intentaban hacerlo a través de la escritura, que probaran de otra manera porque tal vez su pareja tenía dificultades en la lectura.

Codificamos como: situación 1 a las situaciones de producción gráfica correspondiente a operaciones cuyo resultado era diferente a cero (restas con resto) y las situaciones de representación de operaciones cuyo resultado era cero (restas sin resto) como: situación 2.

Analizaremos cada una de ellas en forma sucesiva y luego plantearemos algunas conclusiones.

Para el análisis de las situaciones de producción nos centraremos en los siguientes puntos:

- La representación gráfica utilizada.
- La representación gráfica y los momentos de la operación.
- La representación gráfica y la comunicación.

SITUACION 1

En la mayor parte de los casos la situación fue $\boxed{4-3=1}$ utilizando monedas ó $\boxed{3-2=1}$ utilizando corcholatas. Esas fueron generalmente las dos variantes de esta situación. En muy pocos casos cambiamos el objeto elegido y variamos mínimamente las cantidades que intervinieron por razones circunstanciales.

LA REPRESENTACION GRAFICA UTILIZADA

En este punto el análisis está centrado en el tipo de representación utilizada por los niños desde el punto de vista gráfico. Es decir, gráficamente puede considerarse que la producción es un dibujo o conjunto de dibujos; que son signos gráficos; o por último, que es una combinación de ambos tipos: dibujos con signos.

Para explicitar el uso de términos, aclaramos que el término dibujo lo utilizamos para las representaciones gráficas que mantienen algún nivel de semejanza con el objeto (desde la similitud notable hasta cierto grado de proximidad), así como también las representaciones gráficas que no guardan semejanza con el objeto pero son individuales, es decir, creadas por el niño mismo y que como tales no forman parte de una convención.

El término signo, como lo señalamos en la Introducción, lo reservamos para las representaciones gráficas convencionales.

Obviamente cuando decimos que consideramos un tercer tipo a la combinación de estas representaciones, nos referimos a los casos de niños que utilizaron ambos (dibujos y signos) en una misma producción.

Ya que muchos niños hicieron más de una producción para cada situación, porque quisieron modificarla por iniciativa espontánea o para facilitar la comunicación con el compañero, se crea el problema de decidir cuál de sus producciones tomar en cuenta en este análisis. Es claro que cuando el niño no modificó el tipo de representación utilizada en las sucesivas producciones no hay dificultad, pero en los casos en que sí lo hizo optamos por el criterio de seleccionar aquélla en la cual hubiera utilizado algún signo (si en otras sólo dibujó), así como aquélla en la cual hubiera utilizado sólo signos (si en otras producciones combinó dibujos y signos).

Este criterio tiene como justificación el hecho de que si el niño sólo dibujó y en otra producción utiliza signos, es evidente que <u>también</u> puede utilizar el dibujo. Pareciera que la relación es inclusiva, es decir los niños que utilizan signos pueden hacer también uso del dibujo, pero no necesariamente a la inversa.

De todas manera en el análisis correspondiente a la comunicación se recupera el proceso de modificaciones sucesivas realizado por los niños.

Vamos a tomar ahora cada uno de los tipos de representaciones utilizados por los niños, para su análisis.

-<u>Dibujos</u>

Entre los dibujos distinguimos aquéllos que intentan representar lo más fielmente posible las propiedades de los objetos utilizados, de aquellos dibujos que son más esquemáticos y que incluso llegan a apartarse marcadamente de las características figurales de los objetos.

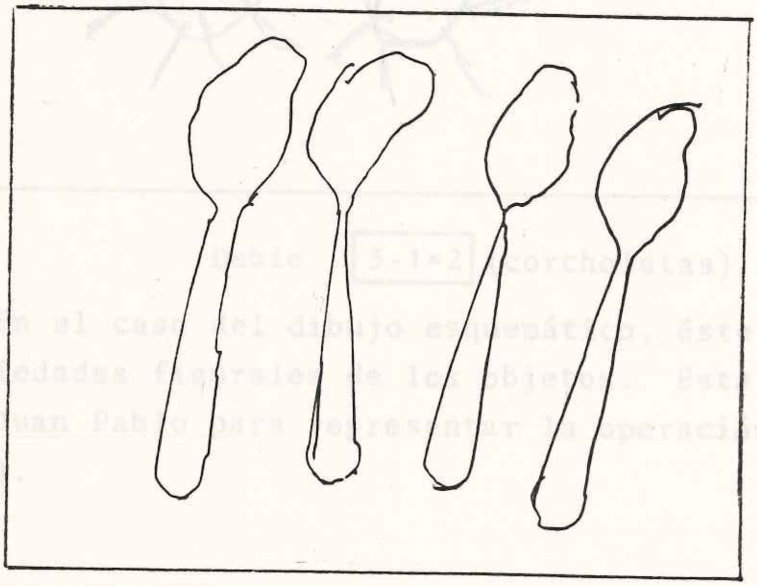
El recurso a través del cual los niños hicieron uso del dibujo como representación fiel o "copia" de los objetos fue el contorneado, complementado con el agregado de detalles. Es decir, colocar el objeto sobre la hoja y pasar el lápiz por su contorno obteniendo así el dibujo del mismo. En varios casos agregaron los detalles de ornamento que el objeto tenía en su superficie, ya que el recurso del contorneado no permite recuperar esos detalles a nivel de la representación.

Fue un recurso utilizado con frecuencia, pero es necesario hacer una distinción, no a nivel del recurso mismo, sino del procedimiento puesto en juego para utilizarlo. Mientras hubo niños que para contornear tomaron uno de los objetos al azar y lo contornearon tantas veces como se requería, hubo otros que para representar los objetos establecieron una relación biunívoca entre objeto y representación, contorneando en forma sucesiva cada uno de los objetos que intervinieron en la operación.

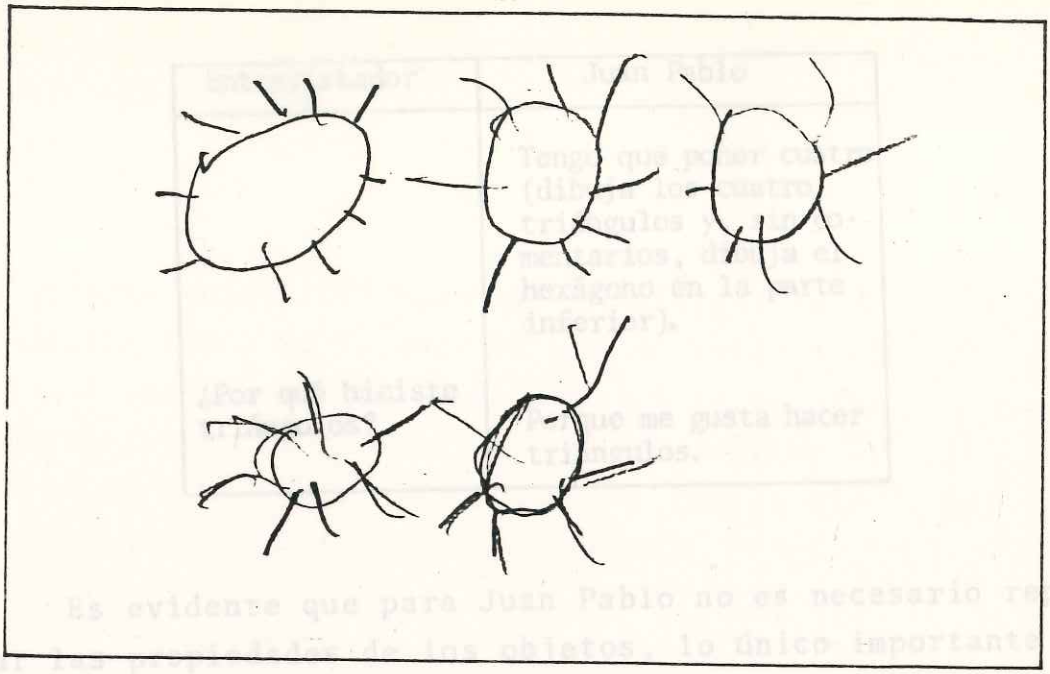
Para ejemplificar este procedimiento que pone en evidencia la relación biunívoca establecida por el niño, relataremos el caso de Susi.

Se utilizaron cuatro cucharitas en la operación $\boxed{4-3=1}$ y Susi tomó una cucharita, la colocó sobre la hoja y con cuidado la contorneó, al finalizar la dejó a un lado, tomó la segunda cucharita y repitió el procedimiento; cuando fue a tomar la tercera se detuvo, observó las cucharitas contorneadas y las que le restaban, nos miró, sonrió y con la misma cucharita que acababa de utilizar (la segunda) realizó dos veces más el contorneado obteniendo la representación de las cuatro cucharitas.

Es interesante el caso de Susi porque parece descubrir en el transcurso de la entrevista la inutilidad de realizar el contorneado a través de la relación biunívoca, tomando conciencia que contornear cuatro veces una cucharita es equivalente a contornear una vez cada una de las cuatro cucharitas. Es decir, desde el punto de vista de la operación, pasó de trabajar sobre la relación uno a uno, a la relación cuatro a cuatro (cuatro cucharitas-cuatro dibujos).

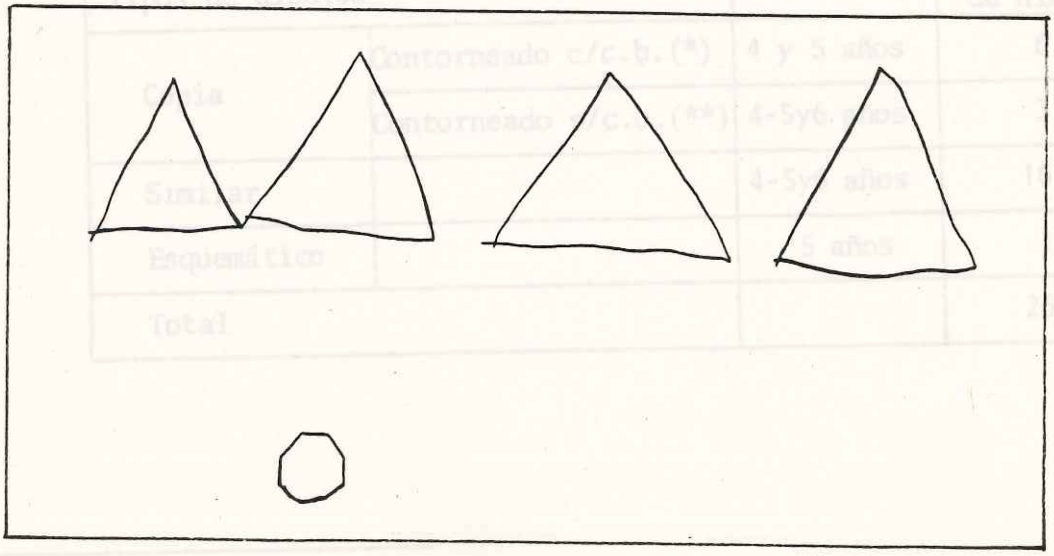


Otros niños intentaron dibujar formas similares a las que caracterizaban a los objetos utilizados pero no realizaron un esfuerzo por representarlos fielmente; si bien observaban al objeto e intentaban conservar en el dibujo alguna de sus propiedades más generales, quedaban satisfechos con mucha menos exigencia de presición.



Debie $\boxed{3-1=2}$ (corcholatas) (*)

En el caso del dibujo esquemático, éste no conserva las propiedades figurales de los objetos. Esta es la producción de Juan Pablo para representar la operación $\boxed{4-3=1}$ (monedas).



(*) La palabra ubicada entre paréntesis se refiere a la clase de objetos utilizados.

Entrevistador	Juan Pablo
	Tengo que poner cuatro (dibuja los cuatro triángulos y, sin comentarios, dibuja el hexágono en la parte inferior).
¿Por qué hiciste triángulos?	Porque me gusta hacer triángulos.

Es evidente que para Juan Pablo no es necesario representar las propiedades de los objetos, lo único importante es representar las cantidades puestas en juego.

Las diferentes modalidades de hacer uso del dibujo que los niños presentaron fue la que presentamos en el siguiente cuadro.

Cuadro 1

Tipos de dibujos		Edades	Cantidad de niños
Copia	Contorneado c/c.b.(*)	4 y 5 años	6
	Contorneado s/c.b.(**)	4-5y6 años	3
Similar		4-5y6 años	16
Esquemático		5 años	1
Total			26

(*) c/c.b. significa con correspondencia biunívoca.
(**) s/c.b. significa sin correspondencia biunívoca.

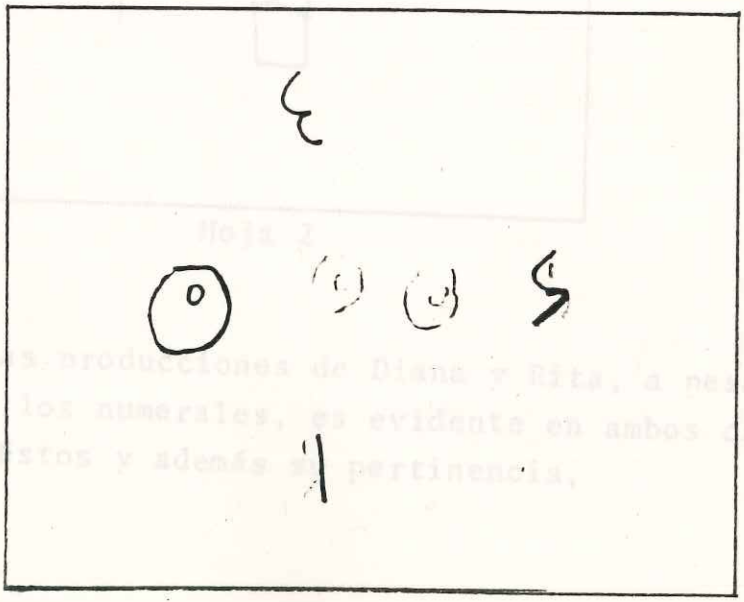
Entre los seis niños que dibujaron tipo "copia" sin correspondencia biunívoca, incluímos a Susi (ya citada) dado que abandonó dicha relación durante su producción.

Los niños que utilizaron dibujos y signos están incluídos en este cuadro con base en el análisis de sus dibujos. Hay cuatro niños de la muestra que no están incluídos: en un caso por considerar que no comprendió la consigna ya que por su actitud parecía no saber de qué se trataba la situación y realizó un dibujo sin ningún vínculo con la misma; los tres niños restantes utilizaron sólo signos.

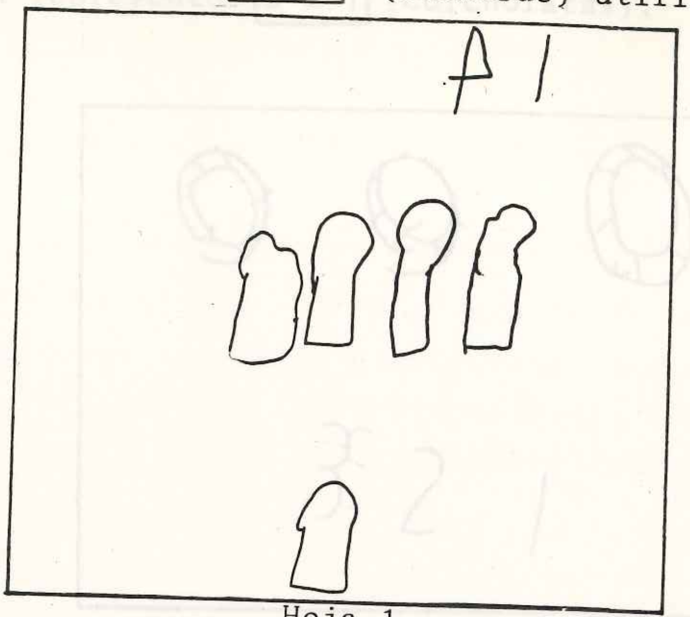
-<u>Dibujos y signos</u>.

Las tres niñas que utilizaron dibujos y signos en sus producciones, comenzaron haciendo uso exclusivo del dibujo para pasar luego a agregar los signos. Los dibujos fueron de tipo "similar" sin buscar una fidelidad marcada respecto a los objetos.

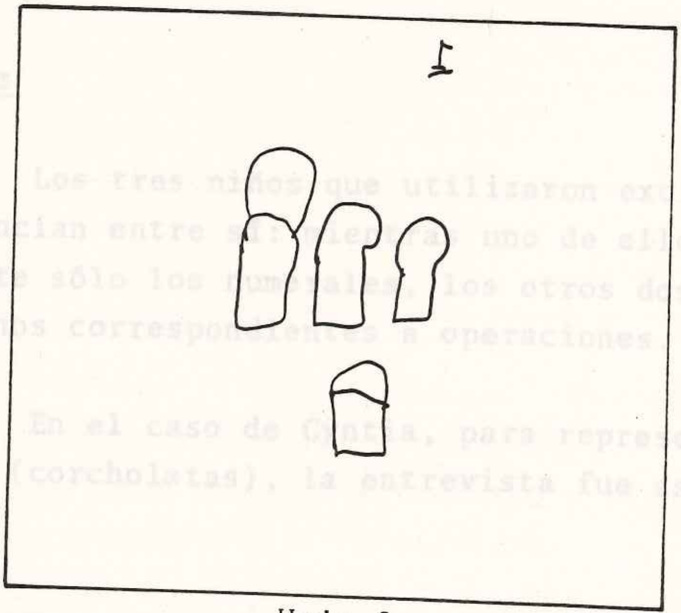
En el caso de Diana la operación fue $\boxed{3-2=1}$ (monedas):



Rita representó $\boxed{4-3=1}$ (cucharas) utilizando dos hojas:



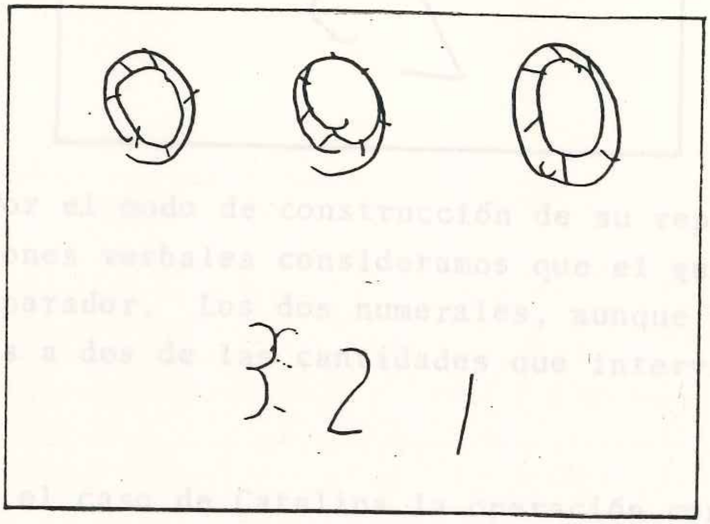
Hoja 1



Hoja 2

En las producciones de Diana y Rita, a pesar de las inversiones de los numerales, es evidente en ambos casos la presencia de éstos y además su pertinencia.

Marcela representó $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas):

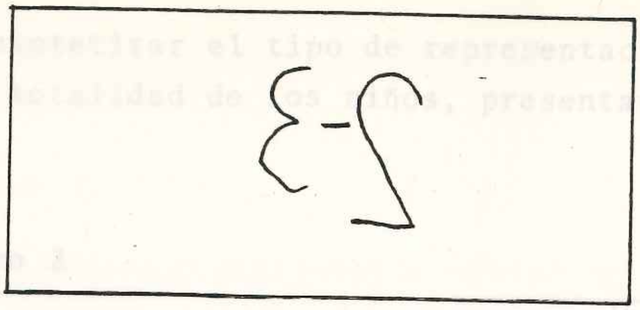


-<u>Signos</u>

Los tres niños que utilizaron exclusivamente signos se diferencian entre sí: mientras uno de ellos utilizó convencionalmente sólo los numerales, los otros dos niños hicieron uso de signos correspondientes a operaciones.

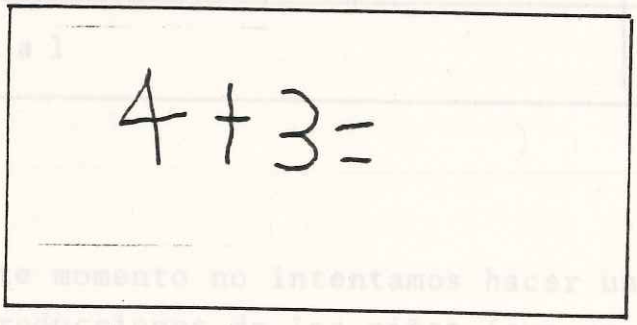
En el caso de Cyntia, para representar la operación $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas), la entrevista fue así:

Entrevistador	Cyntia
¿Ya está?	Había tres (pone el 3) y... quedaron dos (pone el 2). (Agrega un guión entre los numerales). Así.



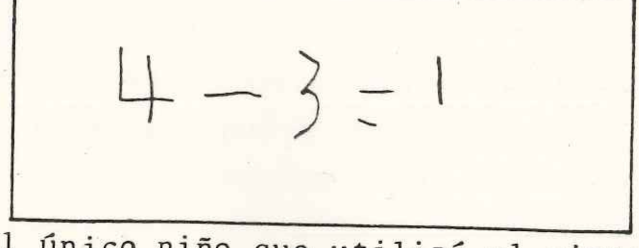
Por el modo de construcción de su representación y sus intervenciones verbales consideramos que el guión cumple la función de separador. Los dos numerales, aunque invertidos, son pertinentes a dos de las cantidades que intervinieron en la operación.

En el caso de Catalina la operación consistió en $\boxed{4-3=1}$ (monedas) y la representó así:



Si bien el signo con que representa el tipo de operación realizada no es el convencional, lo sustituye por otro signo del lenguaje gráfico matemático y utiliza dos de los numerales correspondientes a la operación.

Moi representó la operación $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas) de esta manera:



Es el único niño que utilizó el sistema convencional rigurosamente.

Para sintetizar el tipo de representación gráfica utilizada por la totalidad de los niños, presentaremos el siguiente cuadro.

Cuadro 2

Tipos de representaciones utilizadas	Edades	Cantidad de niños
Dibujos sin relación con la operación	4 años	1
Dibujos exclusivamente	4-5 y 6 años	23
Dibujos y signos	5 y 6 años	3
Signos exclusivamente	6 años	3
T o t a l		30

En este momento no intentamos hacer un análisis evolutivo de las producciones de los niños (aun cuando este cuadro presenta cierto criterio de ordenamiento en ese sentido). Sólo después de analizar las situaciones 1 y 2 por separado abordaremos el problema específico de la evolución en las representaciones gráficas que nos ocupan.

LA REPRESENTACION GRAFICA Y LOS MOMENTOS DE LA OPERACION

Este aspecto del análisis se centra en la manera de caracterizar los momentos de la operación y su relación con la representación gráfica convencional.

Para realizar este análisis tomamos como base a Z.P. Dienes y E. Golding (1971) quienes distinguen momentos sucesivos en las operaciones.

En el tipo de situaciones que hemos presentado a los niños podemos definir tres momentos básicos: el estado inicial (EI) es decir, la cantidad que intervino al inicio de la operación, el operador (Op.), que es la transformación propiamente dicha y que como tal tiene dos propiedades: la clase de transformación realizada (en este trabajo siempre fue QUITAR) y la cantidad que intervino en ella. Por último: el estado final (EF) consistente en la cantidad resultante después de haber realizado una transformación.

Podría decirse que el EF, en el caso de la resta, es la cantidad de objetos respecto a la cual no se realizó transformación alguna. Aunque no es así estrictamente, si EI es $\boxed{5}$ y Op es $\boxed{-3}$ ello no significa que $\boxed{2}$ es la cantidad con la cual no se realizó transformación alguna, es la resultante de una transformación realizada. Pero el señalamiento precedente es necesario para hacer las interpretaciones de las producciones de los niños, ya que el EF puede "verse" como "lo que quedó en la mesa" (en este caso sería la cantidad sobre la que no se hizo nada) o también puede "verse" como "lo que quedó en la mano" (en este caso corresponde a la cantidad con la que se ejerció la transformación). La representación gráfica convencional del EF corresponde al primer caso, es decir: representa la cantidad que "quedó en la mesa".

También es necesario señalar que en la representación gráfica convencional de la operación, encontramos que el signo "igual" juega un rol, si se quiere, ambiguo. Puede otorgársele el papel de representar a través de la cifra contigua a su derecha cuál es el resultado o producto obtenido, después de realizar cierta transformación; pero en otros casos su papel es representar una relación de equipotencia entre las cantidades que figuran a cada uno de sus lados.

Veámoslo a través del siguiente ejemplo: $\boxed{4-3=1}$

Puede significar que:

a) A la cantidad de 4 se le quitaron 3 y se obtuvo 1.

b) Que 4-3 es lo mismo que 1.

En los casos de tipo a) la representación gráfica recupera, a través de la direccionalidad (de izquierda a derecha) el orden sucesivo de eventos, mientras que en los casos de tipo b) es indistinto cuáles son los signos que están a la derecha o izquierda del "igual". Tal vez sea más claro aún en el siguiente ejemplo: $\boxed{1=4-3=2\div 2=1\times 1=5-4}$, donde los signos que figuran entre los de "igual" podrían ocupar indistintamente cualquier lugar: $\boxed{2\div 2=1=5-4=1\times 1=4-3}$.

Por lo anterior encontramos que el signo "igual" varía su función en cada caso: representar cuál ha sido el producto obtenido de una operación realizada, y en este caso la secuencia temporal que se recupera a través de la direccionalidad es relevante, o representar las diferentes formas de composición de una cantidad dada, en cuyo caso no es significativo si un conjunto de signos está a la derecha o izquierda del "igual".

Es importante el señalamiento anterior ya que podría interpretarse el caso, por ejemplo, de $\boxed{4-3=1}$ de distinta forma. Si lo consideramos como un uso del "igual" de tipo a), los signos $\boxed{=1}$ son significativos porque proveen información sobre la cantidad resultante de la transformación, pero si lo consideramos de tipo b), los signos $\boxed{=1}$ podrían ser una información redundante ya que $\boxed{1}$ es lo mismo que $\boxed{4-3}$, pudiendo considerarse innecesaria su escritura, pues son dos formas de escribir lo mismo.

Aún así, vamos a utilizar la representación convencional "completa", por ejemplo: $\boxed{4-3=1}$ porque en este trabajo los signos $\boxed{=1}$ los utilizamos como de tipo a), ya que siempre se refieren al producto obtenido. Pero dado que los niños entrevistados generalmente no hacen uso de ellos, es pertinente tener en cuenta el señalamiento realizado, en función del análisis de sus producciones.

Desde el punto de vista de la representación de los diferentes momentos de la operación ¿qué producciones gráficas hicieron los niños? Tenemos nuevamente la dificultad de elegir, entre las producciones de los niños para cada situación una de ellas para hacer este análisis.

Dado que tomaremos en cuenta la posibilidad que los niños pusieron en evidencia de representar los diferentes momentos de la operación, consideraremos de sus producciones aquélla en la que hayan representado más momentos, porque también habría una relación inclusiva: quienes representan dos o más momentos podrían haber representado menos, no así lo contrario.

De los tres momentos de la operación, Op por su complejidad, se tomará además en forma aislada para su análisis específico. Por ahora se señalará la presencia o ausencia en la representación gráfica del momento de la transformación, sin analizar aún las características de la misma.

Para el análisis consideramos la representación del EI o del EF como presencia de un estado, aunque queda la duda si es indistinto que éste sea el inicial o el final.

Por lo anterior, el análisis estará organizado así:

Presencia de 1E (EI o EF)

Presencia de 2E (EI y EF)

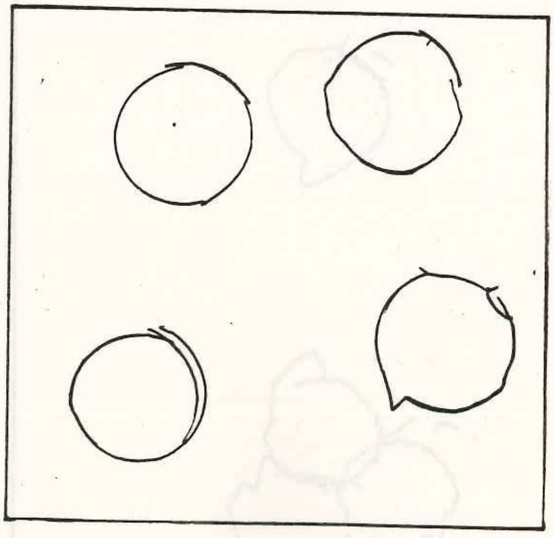
Presencia de 1E y Op (EI o EF y Op)

Presencia de 2E y Op (EI-EF y Op)

No hay casos en donde los niños representen exclusivamente Op.

Presencia de 1E

Sólo Patricio representó 1E y en ese caso fue el EI. Es necesario señalar que al comenzar su producción dibujó un solo círculo, la operación era $\boxed{4-3=1}$ (monedas) y cuando le preguntamos si ya había terminado y creía que así su compañero comprendería cuál fue la operación realizada, dijo: "¿Hago otra?", y sin esperar respuesta, agregó otras tres.
Su resultado fue:



Por su secuencia de producción podríamos decir que Patricio espontánea e inicialmente optó por EF y al escuchar nuestra pregunta cambió su decisión, representando EI.

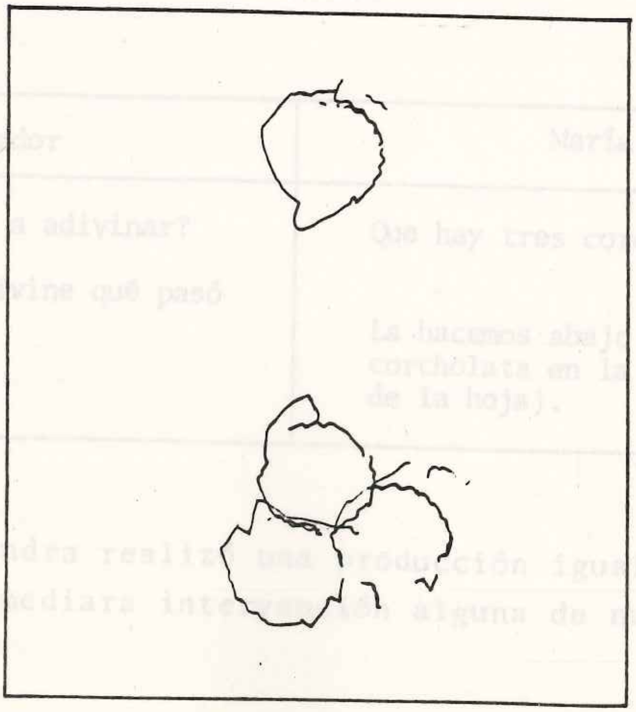
Presencia de 2E

El análisis de estas producciones presenta aspectos de sumo interés. Tienen en común representar las cantidades correspondientes a EI y EF, pero además pueden señalarse ciertas diferencias:

- Las producciones que sobre una misma hoja representan sólo y exclusivamente las dos cantidades que hubo en cada uno de los momentos.
- Las producciones que introducen modos de diferenciación o separación entre los dos momentos mencionados.
- Las producciones que agregan algunos señalamientos indicadores de que algo sucedió entre ambos momentos.

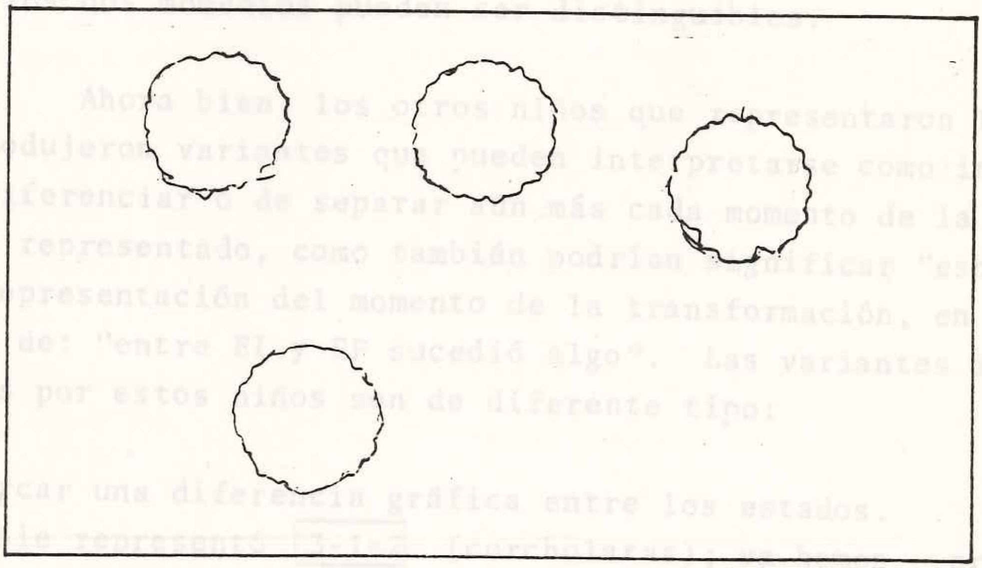
La representación exclusiva de las cantidades correspondientes al EI y EF en una sola hoja la realizaron cuatro niños, quienes dibujaron la cantidad de objetos que hubo en cada uno de esos momentos.

Débora representó $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas).



En primer lugar dibujó las tres corcholatas en la parte inferior de la hoja y luego dibujó una más en la parte superior, representando así el EI y EF de la operación.

María José, para representar $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas) hizo lo siguiente:



Dibujó las tres corcholatas en la parte superior y luego continuó así la entrevista:

Entrevistador	María José
¿Y así qué va a adivinar?	Que hay tres corcholatas.
¿Y para que adivine qué pasó después?	La hacemos abajo (y dibuja otra corcholata en la parte inferior de la hoja).

Alejandra realizó una producción igual a la de María José sin que mediara intervención alguna de nuestra parte.

A Juan Pablo ya lo hemos mencionado, es quien representó el EI mediante cuatro triángulos y el EF a través de un hexágono.

Es de destacar que ningún niño representó EI y EF de manera contínua, es decir, reuniendo los elementos dibujados; por el contrario, utilizaron el espacio gráfico de manera tal que los dos momentos pueden ser distinguibles.

Ahora bien, los otros niños que representaron los 2E introdujeron variantes que pueden interpretarse como intentos de diferenciar o de separar aún más cada momento de la operación representado, como también podrían significar "esbozos" de representación del momento de la transformación, en el sentido de: "entre EI y EF sucedió algo". Las variantes introducidas por estos niños son de diferente tipo:

- Marcar una diferencia gráfica entre los estados.
  Debie representó $\boxed{3-1=2}$ (corcholatas); ya hemos presentado su producción en el punto anterior. Fue quien remarcó el dibujo de la cantidad de objetos correspondientes a EF. De alguna manera Debie intenta crear una diferencia a nivel gráfico que contribuya a no ser interpretada en forma aditiva ("había cinco") como le sucedió en su primer intento cuando aún no había remarcado EF.

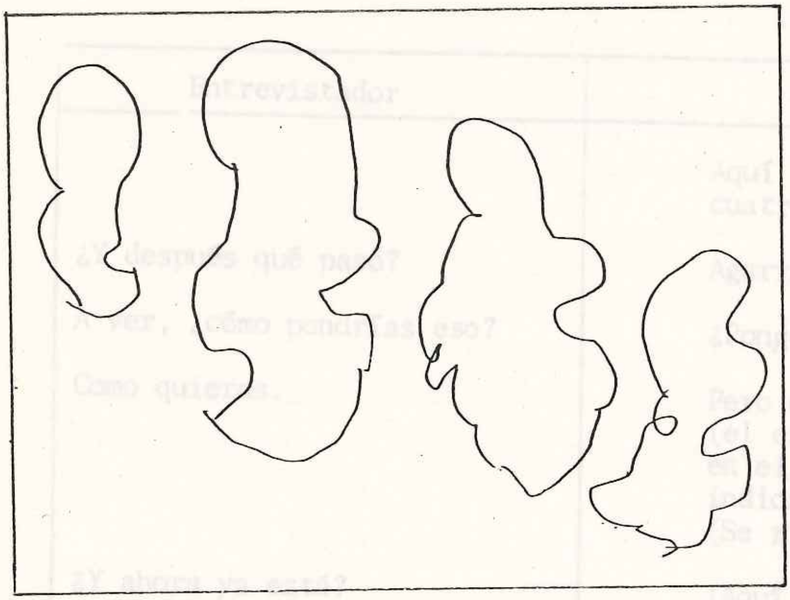
- Separar completamente los 2E, ya sea utilizando ambos lados de la hoja o bien haciendo cada uno de los momentos en hoja diferente.

Vanesa representó $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas).

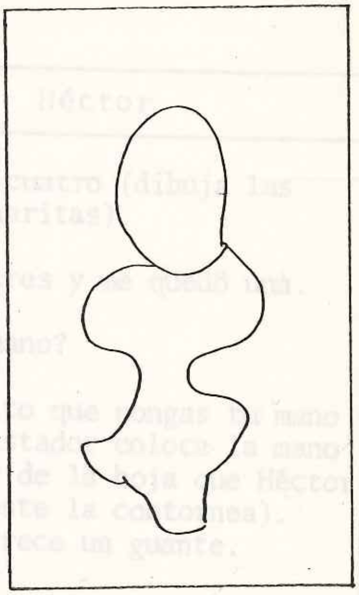
Entrevistador	Vanesa
	(Dibuja 4 cucharitas).
Muy bien ¿cuántas había?	Cuatro.

¿Y después qué pasó?	(Duda).
(Muestra las cucharitas que tiene en su mano).	Una, dos, tres (tocando cada una de las cucharitas que tiene el entrevistador).
¿Y qué quedó?	¡Una!
¿Cómo harías para que Luz María se dé cuenta que sacamos tres y quedó una?	Que quedó una... (duda). (Toma otra hoja y dibuja una cucharita).

La producción de Vanesa fue la siguiente:



Hoja 1



Hoja 2

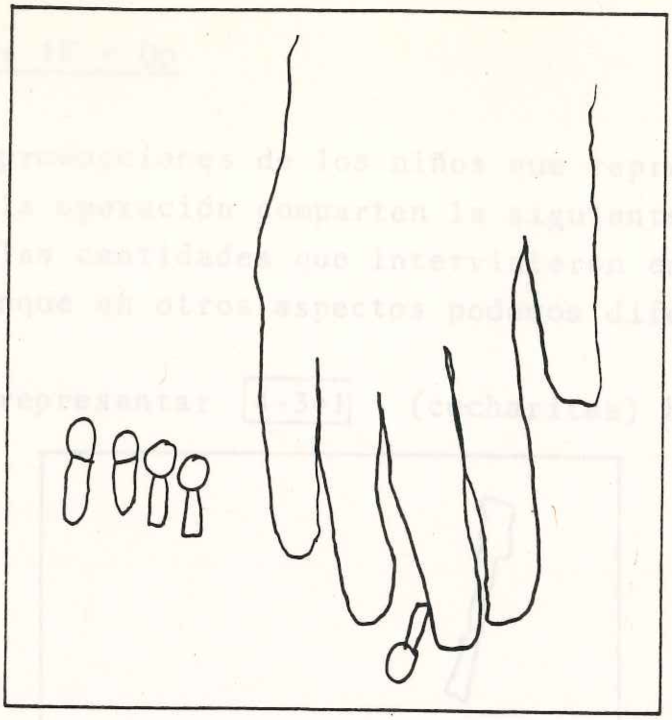
Producciones de este tipo hicieron cuatro niños, entre los que figura Susi, a quien ya citamos cuando durante la entrevista abandonó el contorneado de objetos a través de la correspondencia biunívoca. Ella terminó de dibujar las cuatro cucharitas (EI) e inmediatamente volteó la hoja dibujando allí una cucharita, al mismo tiempo que exclamaba: "¡Quedó una!".

Un caso de separación entre EI y EF, pero de manera convencional, fue la producción de Cyntia que ya hemos presentado, quien representó $\boxed{3-1=2}$ (corcholatas) y colocó un guión entre los numerales.

Consideramos que corresponde al mismo grupo de producciones que estamos analizando porque constituye una forma de separar, sólo que aquí el guión sustituye el volteado de la hoja o la utilización de una segunda hoja.

-"Aquí se metió mano" constituye la última variante y la realizó Héctor al representar $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas):

Entrevistador	Héctor
	Aquí pongo cuatro (dibuja las cuatro cucharitas).
¿Y después qué pasó?	Agarraste tres y me quedó una.
A ver, ¿cómo pondrías eso?	¿Pongo tu mano?
Como quieras.	Pero necesito que pongas tu mano (el entrevistador coloca la mano en el lugar de la hoja que Héctor indica y éste la contornea). (Se ríe) Parece un guante.
¿Y ahora ya está?	¿Aquí (junto a la mano contorneada) pongo una?
Si tú crees que así es mejor...	(Dibuja una cucharita debajo de la mano contorneada).



De alguna manera Héctor intenta representar que algo sucedió entre EI y EF. De esa forma interpretamos el contorneado de la mano del entrevistador, ya que justamente esa mano fue el instrumento que realizó la transformación.

Si bien pueden considerarse intentos por representar Op, no hemos incluído las variantes que hemos citado entre las producciones que representan Op porque reservamos esta categoría para aquellas producciones que logran recuperar el dato cuantitativo, el cualitativo o ambos, propios de Op.

De las producciones que representan 2E hemos realizado la siguiente clasificación:

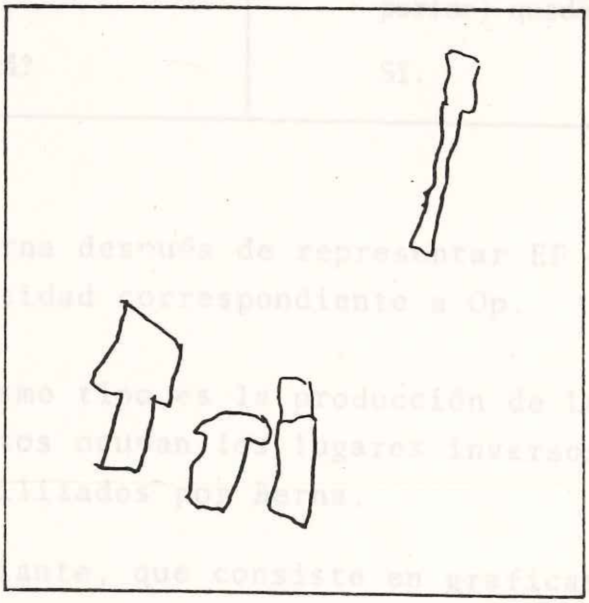
Cuadro 3

Presencia de 2E	Edades	Cantidad de niños
2E exlusivamente	4 y 5 años	4
2E con EF "marcado"	5 años	1
2E separados por espacios diferentes o guión	4-5 y 6 años	5
2E e instrumento de la acción	5 años	1
T o t a l		11

-Presencia de 1E y Op

Las producciones de los niños que representan estos dos momentos de la operación comparten la siguiente característica: representan las cantidades que intervinieron en los respectivos momentos, aunque en otros aspectos podemos diferenciarlos.

Berna, para representar $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas) hizo lo siguiente:



Pero el proceso fue así:

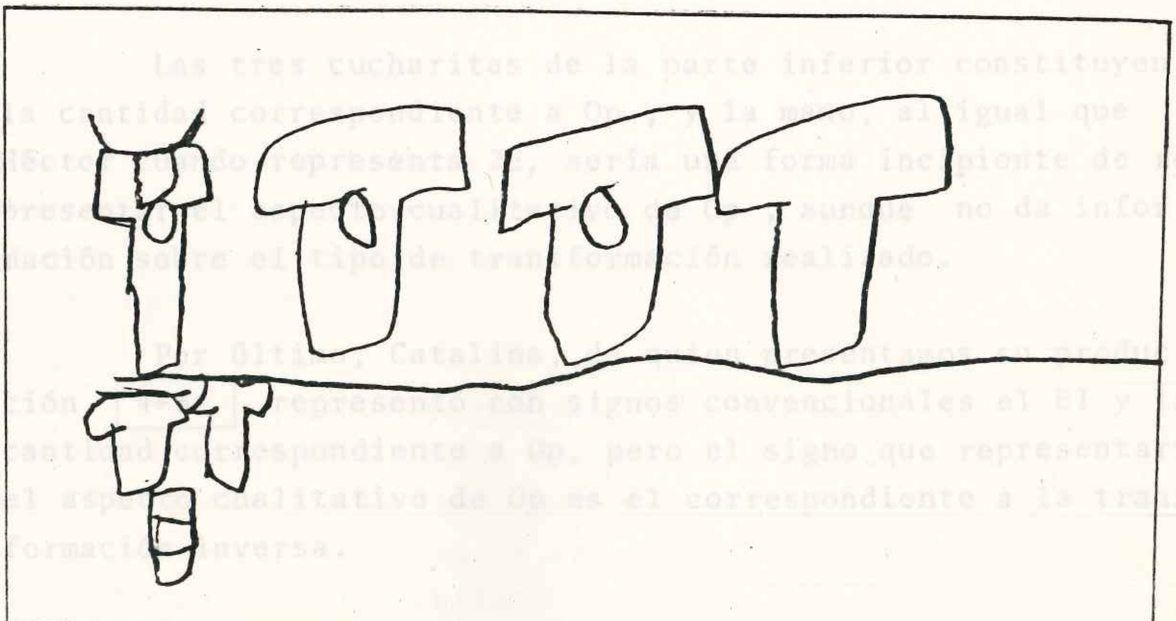
Entrevistador	Berna
	(Dibuja una cucharita en la parte superior).
¿Y mirando esa hoja, Luz María se va a dar cuenta lo que pasó?	No.
¿Qué se va a dar cuenta?	Que había una.
¿Y qué se podría hacer para que sepa que había cuatro cucharitas, sacamos tres y quedó una? (Fue la verbalización que ella había hecho momentos antes).	Estas (señala las tres que el

	entrevistador tiene en la mano).
¿Cómo?	Estas quitaste, van aquí (señala parte inferior de la hoja) y ésta (la cucharita que ya dibujó) no quitaste, se queda aquí.
A ver, ¿cómo?	(Dibuja las tres cucharitas en la parte inferior).
¿Ya está o falta algo?	¡Es así! Estas quitaste (las tres inferiores) y ésta (la superior) quedó una acá.
¿Entonces ya está?	Sí.

Berna después de representar EF decide entonces agregar la cantidad correspondiente a Op.

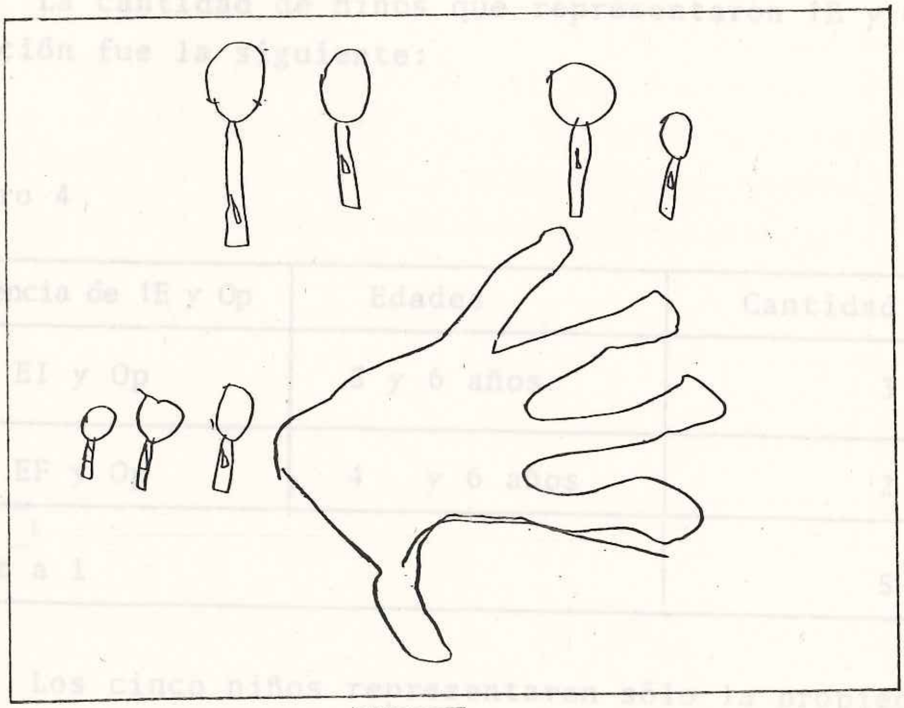
Del mismo tipo es la producción de Luis Gabriel, aunque los conjuntos ocupan los lugares inversos en la hoja respecto a los utilizados por Berna.

La variante, que consiste en graficar la separación entre los dos momentos representados, es utilizada por Luis Alfredo cuando representa $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas):



Coloca expresamente la línea para marcar la separación. Veremos el proceso de esta producción en el siguiente punto, cuando analicemos la utilización de la representación como mensaje al compañero.

Yael es quien utiliza la variante "aquí se metió mano", produciendo lo siguiente:



$\boxed{4-3=1}$ (cucharitas)

Las tres cucharitas de la parte inferior constituyen la cantidad correspondiente a Op , y la mano, al igual que Héctor cuando representa 2E, sería una forma incipiente de representar el aspecto cualitativo de Op , aunque no da información sobre el tipo de transformación realizado.

Por último, Catalina, de quien presentamos su producción $\boxed{4+3=}$ representó con signos convencionales el EI y la cantidad correspondiente a Op, pero el signo que representaría el aspecto cualitativo de Op es el correspondiente a la transformación inversa.

En su verbalización manifiesta claramente haber comprendido la operación realizada: "Es que había cuatro y luego me quitaste tres". Es interesante porque demuestra conocer la existencia de un signo para representar el aspecto cualitativo de Op, a pesar de no usar específicamente el que corresponde a esta operación.

La cantidad de niños que representaron 1E y Op en su producción fue la siguiente:

Cuadro 4

Presencia de 1E y Op	Edades	Cantidad de niños
EI y Op	5 y 6 años	3
EF y Op	4 y 6 años	2
T o t a l		5

Los cinco niños representaron sólo la propiedad numérica de Op.

-<u>Presencia de 2E y Op</u>

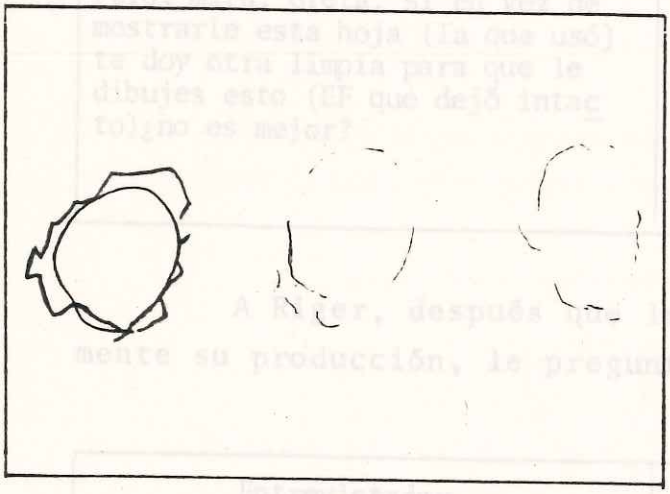
Vamos a presentar ahora un tipo de recurso gráfico que algunos niños utilizaron y consideramos sorprendente, tanto porque no lo esperábamos como también por su alto nivel de funcionalidad y eficacia.

Nos referimos al <u>borrado</u> como forma de representar la acción de <u>quitar</u>. Es decir, el proceso de la producción es el siguiente: dibujar la cantidad de objetos que intervinieron en el EI, borrar la cantidad de dibujos correspondientes a cuántos se quitaron y dejar dibujado el EF.

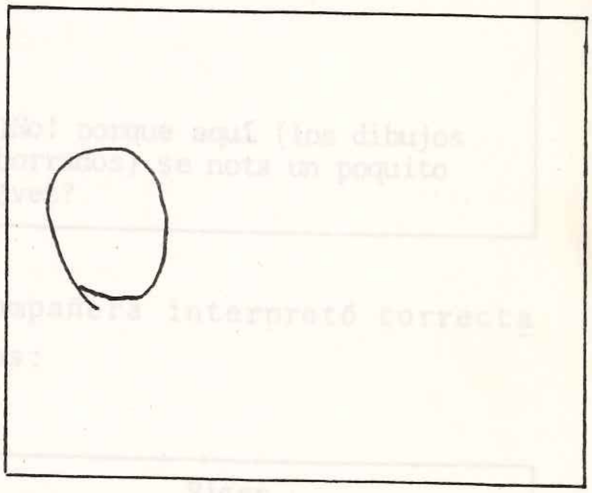
Este tipo de producción nos crea la necesidad de retomar el concepto de representación. Desde el punto de vista gráfico podría no considerarse una representación propiamente dicha, dado que no se trata de <u>trazar</u> para representar.

Pero sería una representación en la medida que constituye un "objeto" sustituto: borrar dibujos sustituye a quitar objetos físicos, y en ese sentido lo representa. Además, el borrado como tal es un recurso que pertenece exclusivamente al mundo de lo gráfico por lo cual, aun cuando en este caso consiste en una acción que reemplaza a otra acción, creemos pertinente considerarlo una forma de representación gráfica.

Algunos ejemplos de este tipo son:



Paola $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas)



Fabián $\boxed{3-2=1}$ (monedas)

¿Y por qué incluímos estas producciones en: presencia de <u>2E y Op</u>, cuando el EI como tal no "queda" en la hoja y Op es borrado? Porque, como dijeron varios niños de este grupo: "un poquito se nota" o "muy bien no lo borré". Estas producciones fueron SIEMPRE exitosas a nivel de la comunicación y entonces nos planteamos si para el niño productor era evidente que el interpretador hacía uso de los "rastros" resultantes del borrado para hacer su interpretación. Ello nos llevó a preguntar al niño productor (después que había borrado) si no era lo mismo dibujar en una nueva hoja el EF, ya que constituía lo que él dejaba intacto de su dibujo. Fue entonces que obtuvimos respuestas como las que hemos citado, lo cual dejaba claro que borrar no era lo mismo que no dibujar ya que algo queda y este "algo" formaba parte de su representación.

Citemos el diálogo con Greta después que concluyó su producción:

Entrevistador	Greta
Pero, mira, Greta, si en vez de mostrarle esta hoja (la que usó) te doy otra limpia para que le dibujes esto (EF que dejó intacto)¿no es mejor?	¡No! porque aquí (los dibujos borrados) se nota un poquito ¿ves?

A Riger, después que la compañera interpretó correctamente su producción, le preguntamos:

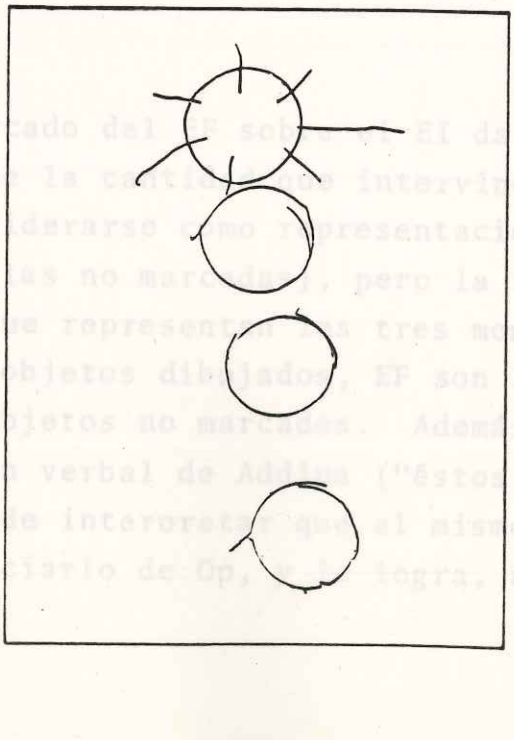
Entrevistador	Riger
¿Por qué se pudo dar cuenta?	Porque yo no borré bien (y señala los rastros de su borrado).

Los niños interpretadores también explicitaron que lo borrado constituye una parte fundamental de la representación, como lo expresa Catalina (en su rol de interpretadora):

Entrevistador	Catalina
	(Concluyó su interpretación correcta).
Ahora dime, Catalina, si Gladys (la productora) te lo hubiera hecho así (se le presenta en otra hoja el dibujo exclusivo de EF) ¿Te hubieras dado cuenta?	No.
¿Por qué?	Porque no tienen las rayitas (señala los trazos que quedaron después del borrado).

Consideramos por lo tanto estas producciones como presencia de 2E y Op porque así lo consideran los niños y es posible dado que lo borrado forma parte de lo representado, y por lo tanto: borrado más no borrado es EI, borrado es cantidad y calidad de Op y no borrado es EF.

Otra forma de representar los tres momentos de la operación fue creada por Addina quien representó $\boxed{4-3=1}$ (monedas):



En un primer momento Addina dibujó las cuatro monedas sin diferenciación:

Entrevistador	Addina
¿Se va a dar cuenta?	(Duda).
¿Qué pasó?	Estos (señala los tres círculos inferiores) los quitaste de a de veras.
¿Entonces?	(Hace un "rayo" al círculo superior).

Es sólo después del intercambio y al notar que su pareja no interpreta, que agregó los otros rayos al primer círculo.

El marcado del EF sobre el EI da por resultado una diferenciación de la cantidad que intervino en Op, por esta razón podía considerarse como representación de EF y Op o de EI (todas) y Op (las no marcadas), pero la incluímos entre las producciones que representan los tres momentos dado que: EI son todos los objetos dibujados, EF son los objetos marcados y Op son los objetos no marcados. Además, tomando en cuenta la intervención verbal de Addina ("éstos los quitaste de a de veras") se puede interpretar que al mismo tiempo que marca EF quiere diferenciarlo de Op, y lo logra, al menos respecto a la propiedad numérica de Op.

Este recurso gráfico comparte con el borrado el hecho de trabajar SOBRE el EI y en este sentido "se parecen más" a la operación realizada: Op y EF son momentos sucesivos pero se refieren a acciones y resultados obtenidos con la cantidad que intervino en EI. Desde ese punto de vista podría considerarse que se superponen.

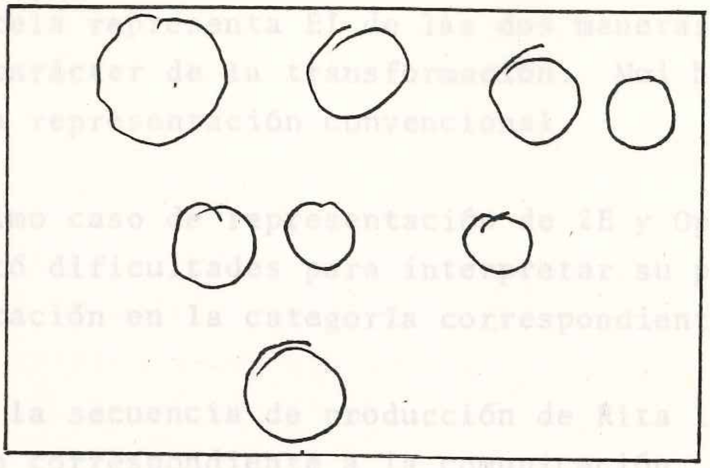
Los recursos utilizados para representar los tres momentos de laoperación fueron los que presentamos en el cuadro.

Cuadro 5

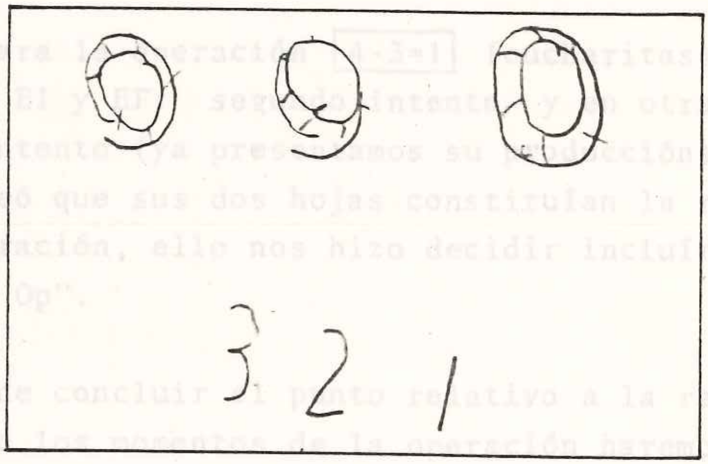
Presencia de 2E y Op	Edades	Cantidad de niños
Borrado	4-5 y 6 años	7
Marcado	4 años	1
Otros	6 años	4
T o t a l		12

Las otras formas de presencia de 2E y Op fueron:

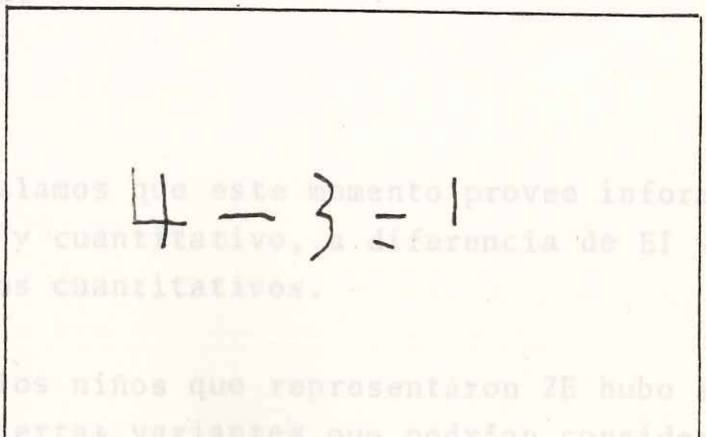
Ilse:
$\boxed{4-3=1}$
(monedas)



Marcela;
$\boxed{3-2=1}$
(corcholatas)



Moi:
$\boxed{4-3=1}$
(cucharitas)



Tanto Ilse como Marcela representan las tres cantidades que estuvieron en juego, ya sea con dibujos o además con numerales (Marcela representa EI de las dos maneras), pero está ausente el carácter de la transformación. Moi hace uso, como vimos, de la representación convencional.

El último caso de representación de 2E y Op es Rita, que nos presentó dificultades para interpretar su producción y decidir su ubicación en la categoría correspondiente.

Aunque la secuencia de producción de Rita la analizaremos en el punto correspondiente a la comunicación, justificaremos ahora la inclusión en este grupo.

Rita para la operación $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas) representó en una hoja EI y EF: segundo intento y en otra hoja Op y EF: tercer intento (ya presentamos su producción), pero dado que ella planteó que sus dos hojas constituían la representación de la operación, ello nos hizo decidir incluírla en "presencia de 2E y Op".

Antes de concluir el punto relativo a la representación gráfica de los momentos de la operación haremos un análisis específico, como ya lo señalamos, del momento de la transformación misma.

El operador

Ya señalamos que este momento provee información de tipo cualitativo y cuantitativo, a diferencia de EI y EF que sólo aportan datos cuantitativos.

Entre los niños que representaron 2E hubo algunos que introdujeron ciertas variantes que podrían considerarse intentos de representar Op, en el sentido de "algo pasó entre" tales como: separar "explícitamente" EI de EF, dibujar una mano, "marcar" EF (como una manera de diferenciar ambos E). Pero esas representaciones, dijimos, no las consideramos parte de las producciones con presencia de Op porque no aportan información sobre las propiedades cuantitativas ni cualitativas de Op.

Ahora bien, de aquellas producciones que consideramos con presencia de Op podrían distinguirse las que sólo recuperan el dato cualitativo, las que lo hacen sólo respecto al cuantitativo y las que representan ambos.

Pero no hemos tenido casos del primer tipo. Es decir, en una representación como $\boxed{4-}$ (donde el guión sea el signo de la resta) se está registrando exclusivamente el aspecto cualitativo de Op, pero este tipo de representaciones, ya sea a través de dibujos o signos, no la realizaron los niños entrevistados.

Tenemos entonces la distinción entre representar sólo el aspecto cuantitativo de Op o representar el cuantitativo y cualitativo.

De las producciones que representan exclusivamente la propiedad numérica de Op hay casos donde los niños lo hicieron a través de dibujos, de signos o de ambos, tal como hemos visto en los sucesivos ejemplos.

Los niños que representaron el aspecto cuantitativo y cualitativo de Op utilizaron el borrado o los signos convencionales. Fueron los recursos a través de los cuales los niños representaron las dos propiedades de Op.

Hasta el momento presentamos cuadros parciales sobre los momentos de la operación; en el cuadro siguiente reunimos los datos analizados.

Cuadro 6

Presencia de los momentos de la operación	Edades	Cantidad de niños
Sin relación	4 años	1
1E	4 años	1
2E	4-5 y 6 años	11
1E y Op	4-5 y 6 años	5
2E y Op	4-5 y 6 años	12
T o t a l		30

Ahora bien, el análisis anterior se hizo tomando a la cantidad que quedó "en la mesa" como EF. Pero si tomamos en cuenta que para el niño la cantidad de objetos quitados puede ser un EF, se modificaría la clasificación realizada de las producciones.

En este último caso habría producciones que ubicamos en presencia de 1E y Op que pasarían a 2E, y serían aquéllas que representaron (de acuerdo al criterio clasificatorio utilizado) EI y Op, ya que Op se podría considerar EF. Pero las que representaron Op y EF no ofrecerían esta alternativa.

Por otra parte, respecto a la ambigüedad del signo "igual": si consideramos que los signos ubicados a la derecha del "igual" aportan información redundante (4-3 es lo mismo que 1) entonces las producciones que representan EI y Op serían "completas" siendo innecesario representar EF, dado que EI y Op es lo mismo que EF. En este último caso las producciones con presencia de EI y Op serían equivalentes a aquéllas que representan EI, Op y EF ya que estas últimas sólo tendrían una reiteración de la información.

Los señalamientos recién planteados permiten destacar que el criterio clasificatorio utlizado en el análisis que presentamos NO es el único posible y que aún manteniendo la centración en las mismas variables (presencia de uno, dos o tres momentos de la operación) habría otras alternativas de organización de los datos.

LA REPRESENTACION GRAFICA Y LA COMUNICACION

Consideramos que una producción nunca es ajena o independiente de las condiciones de producción, por lo tanto es necesario tomar en cuenta éstas en el análisis de las representaciones gráficas obtenidas.

En este trabajo las condiciones de producción fueron básicamente: realizar un mensaje gráfico para un compañero a partir de una acción realizada por el investigador. ¿Cuáles son los determinantes que estas condiciones impusieron a las producciones realizadas por los niños? (*) Para intentar responder a algunos aspectos de esta pregunta vamos a analizar, del conjunto global de producciones, aquéllas que pueden aportarnos ciertos datos al respecto. Y para hacer dicha selección partiremos de lo siguiente:

Cuadro 7

Movilidad y Descentración		Cantidad de niños	Porcentaje
A	Niños que no tuvieron interpretador	3	10%
B	Niños que lograron ser interpretados en el primer intento (**)	9	30%
C	Niños que no lograron ser interpretados en el primer intento pero no encontraron otras formas de representación	7	23%
D	Niños que realizaron más de un intento	11	37%
T o t a l		30	100%

(*) Este problema se retomará después del análisis de la situación 2.

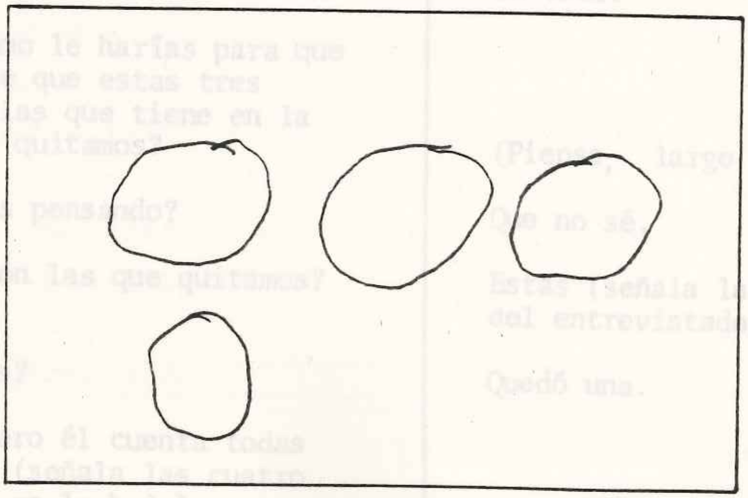
(**) Vamos a designar <u>interpretación</u> a aquélla que corresponde a la operación realizada, con sus tres momentos. No significa que las interpretaciones "erróneas" o parciales no sean interpretaciones, sino que para facilitar la denominación de esta situación restringimos el uso del término al significado que hemos señalado.

Los niños que figuran en el grupo A no tuvieron interpretador por dificultades organizativas ajenas a nuestra voluntad en el momento de la entrevista.

Tanto los niños del grupo A como los del grupo B no nos aportan suficiente información sobre el rol que jugó la comunicación en la representación gráfica que realizaron, dado que por no llevarse a cabo o por ser exitosa al primer intento desconocemos las posibilidades del niño de generar nuevas alternativas en función de las intervenciones del compañero.

Los niños del grupo C evidenciaron imposibilidad de encontrar otras formas de representación, a pesar de ser fallido el intento de comunicación. En ningún caso expresaron simplemente no desear hacer otro intento sino que evidenciaron no saber de qué otra manera podría representarse la operación.

Veremos el ejemplo de Luis Gabriel. Después de representar la operación $\boxed{4-3=1}$ (monedas) dibujando la cantidad correspondiente a Op y EF en la misma página.



Su compañero lo interpreta como : "Había cuatro" y los dos acuerdan hacer otro intento. Riger sale nuevamente del cuarto y con Luis Gabriel se da el siguiente diálogo:

Entrevistador	Luis Gabriel
¿Qué es lo que Riger piensa, que había cuántas monedas?	Cuatro.
¿Qué le falta adivinar?	Quitaste tres.
¿Y cómo lo harías en la hoja para que él adivine que quitamos tres?	Le digo: quitamos tres.
Pero es una adivinanza en el papel, no le podemos decir.	(Duda).
Para que adivine que quitamos tres.	(Piensa, mira la hoja, mira al entrevistador).
Tú puedes usar esta misma hoja, otra, como tú quieras, para que él adivine que quitamos tres.	(Duda).
¿Cómo quieres, en ésta o en otra hoja?	En ésta.
A ver ¿cómo le harías para que él adivine que estas tres (muestra las que tiene en la mano) las quitamos?	(Piensa, largo silencio).
¿Qué estás pensando?	Que no sé.
¿Cuáles son las que quitamos?	Estas (señala las de la mano del entrevistador).
¿Y después?	Quedó una.
Eso es, pero él cuenta todas completas (señala las cuatro dibujadas en la hoja) y entonces ya después no sabe qué pasó.	(Piensa).

¿Qué podrías hacer para que se dé cuenta qué pasó?	No sé.
Bueno ¿ llamamos a Riger y se lo contamos?	Sí (con gesto de resignación).

Cuando entró Riger le contamos cuál había sido la operación y luego le preguntamos:

Entrevistador	Riger
¿Y tú, Riger, cómo hubieras hecho algo en el papel para que se note que quitamos tres?	Quitando círculos.
¿Cómo los hubieras quitado?	Con goma.

Ese fue el recurso que Riger utilizó cuando fue productor, en su tercer intento, obteniendo éxito en la comunicación.

Fue evidente en la entrevista el interés y esfuerzo de Luis Gabriel por encontrar otras alternativas de representación, pero no pudo lograrlo.

Ya citamos a Yael cuando representó $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas) dibujando la cantidad correspondiente a EI y Op y agregando el contorno de una mano. Su compañera Cyntia lo interpreta como "siete":

Entrevistador	Cyntia y Yael
	C: Siete, pusiste tres y luego había siete.
	Y: ¡No!
(Le impone silencio a Yael).	C: Había cuatro y luego siete.

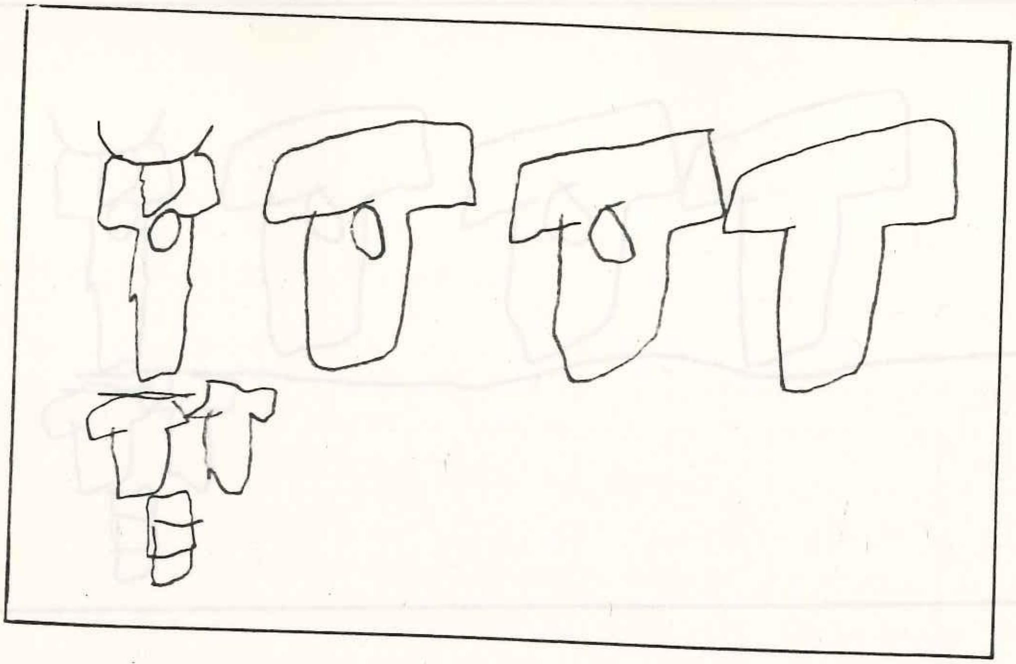
Se propone un segundo intento y Cyntia sale del cuarto	
¿Qué te parece Yael? ¿Cómo harías para que Cyntia entienda lo que pasó?	(Yael toma el lápiz, mira su hoja, otras hojas blancas que hay sobre la mesa y después de un largo silencio, contesta). No sé.

Los niños del grupo C presentan ausencia del movilidad, es decir: una vez que produjeron cierta representación, y aún pudiendo serles evidente cuál era la dificultad del compañero para lograr la interpretación, no encontraron formas alternativas para modificar su producción.

Los niños del grupo D pusieron en evidencia, a través de los sucesivos intentos, diferentes grados de movilidad en sus recursos representativos.

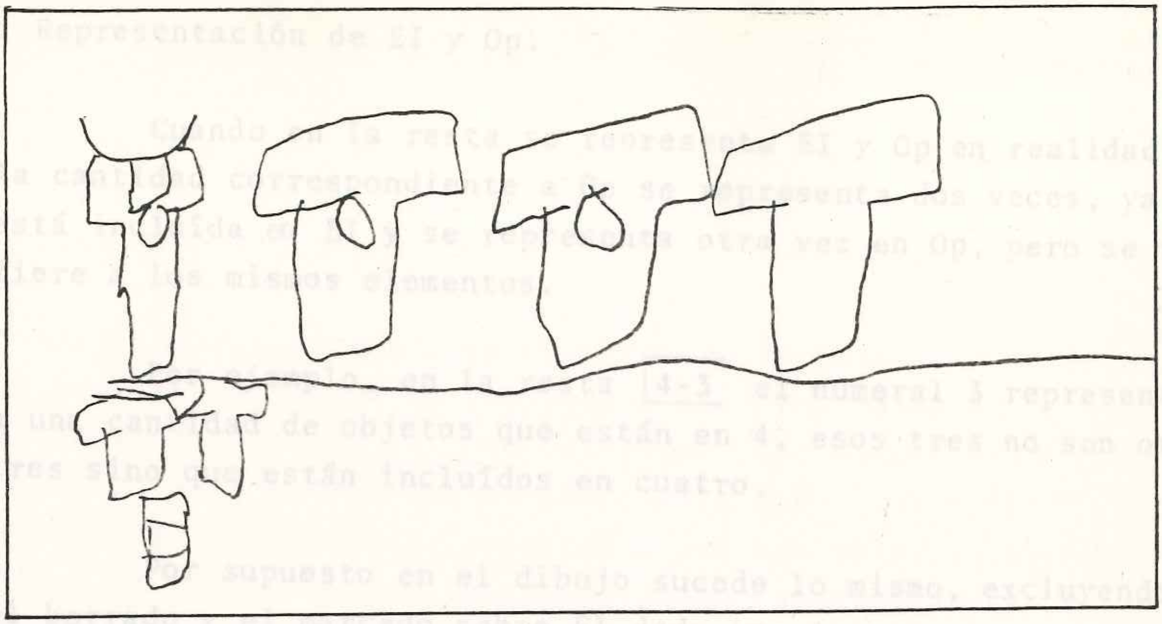
Tomando como ejemplo a Luis Alfredo es posible contrastarlo con Luis Gabriel o Yael, a quienes citamos como ejemplos de no movilidad. Luis Alfredo se enfrentó a la misma situación: su producción fue interpretada como representación de suma, es decir, su pareja (como Riger y Cyntia que ya vimos) interpretó la presencia de las dos cantidades representadas como sumandos.

Luis Alfredo, para $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas) hizo lo siguiente:



Ante esta representación Nazareno interpretó que hubo siete cucharitas y la entrevista continuó así:

Entrevistador	Luis A. y Nazareno
	N: Siete. Eran siete.
	L.A.: ¡No!
Se le propone un segundo intento y sale Nazareno del cuarto	
¿Por qué crees, Luis Alfredo, que él pensó que había siete?	Porque vió todas (señala las cucharitas que dibujó).
¿Se te ocurre otra manera que lo podríamos hacer mejor, que lo entendiera mejor?	(Piensa) ¡Ah, ya sé! Hacer lo mismo, nada más que le ponemos una raya.
A ver, ¿cómo lo harías?	(Toma otra hoja y hace su segundo intento).



Luis Alfredo expresa claramente cuál es la dificultad: su producción puede ser interpretada como presencia de siete porque "se ven todas" pero como diciendo "todas juntas". Se trata entonces de separar para que el interpretador entienda que nunca hubo siete sino que son momentos sucesivos (había cuatro y sacaron tres) acude al uso de la raya como forma de separar los dos momentos: EI y Op.

Pero es necesario hacer un señalamiento. Fue muy frecuente en los "errores" de interpretación que los niños sumaran todos los objetos representados en la hoja.

Veamos qué sucede cuando el productor representa dos momentos de la operación y el interpretador utiliza el procedimiento de suma para interpretar la producción. Dado que no hubo situaciones de suma, siempre fue una interpretación errónea, pero ¿qué sucede a nivel de la representación?

. Representación de EI y Op.

Cuando en la resta se representa EI y Op en realidad la cantidad correspondiente a Op se representa dos veces, ya está incluída en EI y se representa otra vez en Op, pero se refiere a los mismos elementos.

Por ejemplo, en la resta $\boxed{4-3}$ el numeral 3 representa a una cantidad de objetos que están en 4, esos tres no son otros tres sino que están incluídos en cuatro.

Por supuesto en el dibujo sucede lo mismo, excluyendo el borrado y el marcado sobre EI dado que justamente por representar sobre EI no reiteran la representación de una cantidad (la que intervino en Op). Cuando Luis Alfredo dibuja tres cucharitas abajo de las cuatro, esas tres son parte de las cuatro que dibujó arriba, están dibujadas dos veces: primero como parte de EI y luego como Op.

Por lo tanto,cuando el niño interpretador suma EI y Op la respuesta que da deja desconcertado al niño productor ya que, por ejemplo, en $\boxed{4-3}$ ¡en ningún momento hubo siete elementos!

. Representación de EF.

Si el interpretador también suma las cantidades representadas cuando interviene la representación de EF, lo que sucede es diferente si está acompañado de EI o de Op.

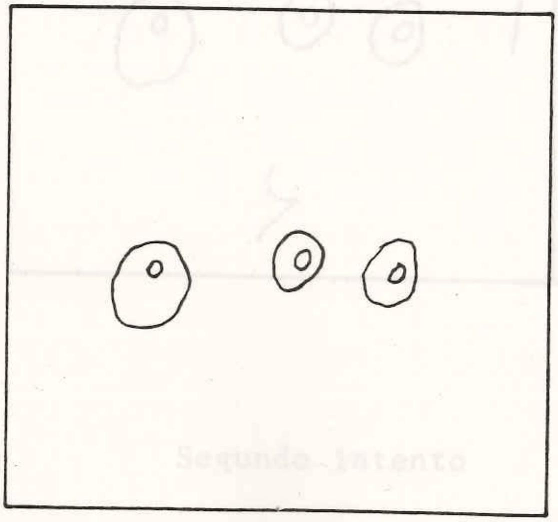
- Si EF está acompañado de EI, con el mismo procedimiento de interpretación, el niño da como respuesta una cifra tan desconcertante como en el caso de EI y Op (donde nunca hubo siete).

Aquí sería, por ejemplo, para $\boxed{4-3=1}$ se representa $\boxed{4\ y\ 1}$, obteniendo como respuesta del interpretador "cinco", pero ¡nunca hubo cinco! Y sucede lo mismo porque también en este caso hay una cantidad representada dos veces: el uno está incluído en el cuatro.

- Si EF está acompañado de Op entonces la respuesta obtenida es pertinente porque corresponde a EI. Por ejemplo, en $\boxed{4-3=1}$ se representaría $\boxed{3\ y\ 1}$, en este caso la interpretación sería "cuatro" y es cierto que en un momento hubo cuatro (EI). En este caso la diferencia respecto a los dos casos anteriores (EI y Op o EF y EI) se justifica porque son cantidades sin relación de inclusión.

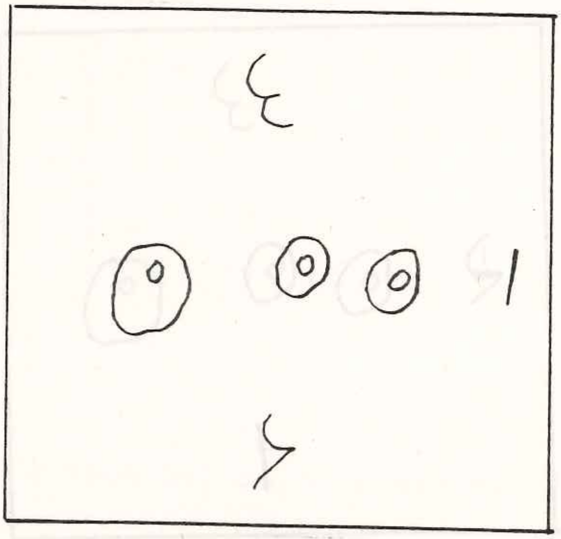
Veremos ahora el caso de Diana, que es el mejor exponente que tenemos de movilidad, quien realizó un esfuerzo evidente de descentración, es decir, de entender el punto de vista de su intérprete.

El proceso de producción de Diana, para la operación $\boxed{3-2=1}$ (monedas) fue el siguiente:



Primer intento

Entrevistador	Diana y Alejandra
	A: Tres había... y luego los quitaste y había cero. D: No, no fue así.
Se le propone un segundo intento y sale Alejandra del cuarto	
¿Qué le podrías hacer para que se dé cuenta cuántas quitamos y qué quedó?	Le pongo ésto aquí (escribe 3 arriba de las monedas, 2 abajo y 1 a la derecha).



Segundo intento

Entra Alejandra

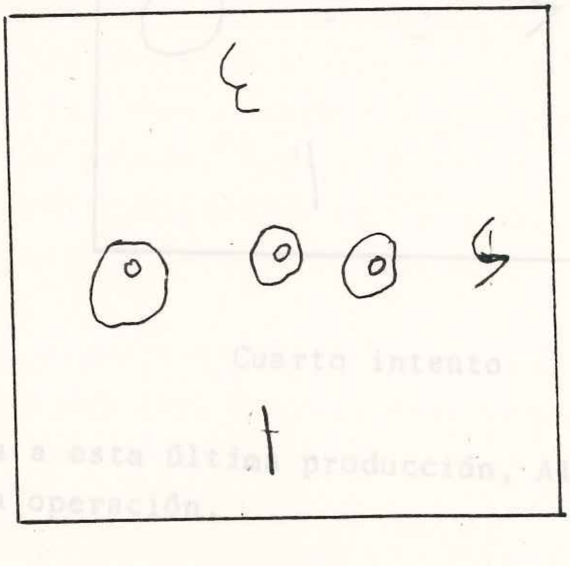
A: Había tres (señala)
y luego uno (señala 1)
y luego dos (señala)

D: No.

Sale Alejandra porque harán un nuevo intento

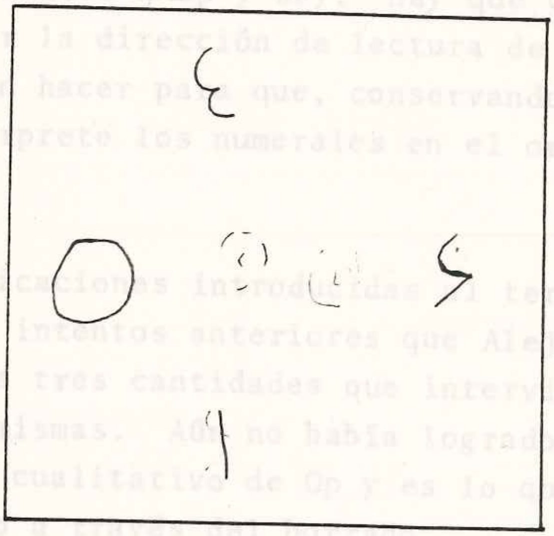
Parece que ella no entendió que esas dos ( ) las quitamos ¿cómo harías para que se dé cuenta?

(Toma una goma y borra el 2 y el 1, invirtiendo los lugares).
Ya está.



Tercer intento

Entra Alejandra	
	A: Había tres... (duda) dos... una (duda).
Dime, Diana ¿se te ocurre alguna otra cosa?	D: Sí.
Sale Alejandra para hacer otro intento	
¿Cómo hacemos para que se dé cuenta que quitamos?	(Toma la goma y borra de su dibujo dos monedas). Así.



Cuarto intento

Frenta a esta última producción, Alejandra interpreta rápidamente la operación.

A través de los sucesivos intentos de Diana notamos su esfuerzo por entender el punto de vista de Alejandra:

a) Modificaciones introducidas al primer intento. Como

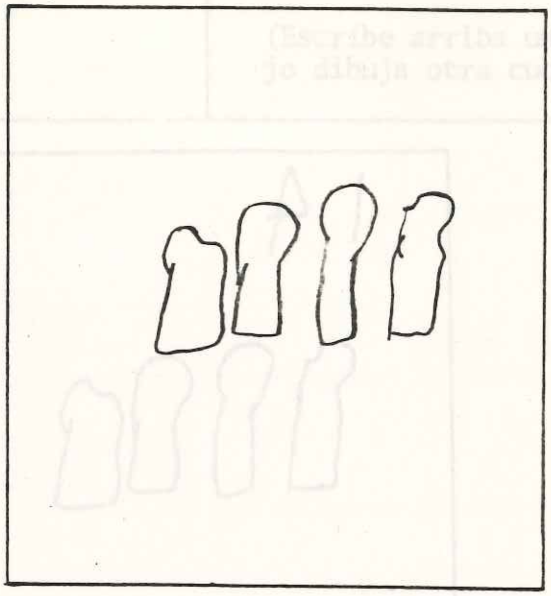
Alejandra interpretó EI pero no pudo interpretar las otras cantidades que intervinieron, Diana agregó la representación de las mismas. El EI queda representado por dibujo y numeral, y Op y EF por los numerales correspondientes.

b) Modificaciones introducidas al segundo intento. La capacidad de descentración que demuestra Diana en este momento es sorprendente. Ella escribió los numerales en la siguiente dirección: arriba (EI), abajo (Op) y derecha (EF). Alejandra los interpretó en el siguiente orden: arriba, derecha y abajo. Diana entonces modificó la direccionalidad de su propia escritura para adecuarse a la utilizada por Alejandra en la lectura, y así intentó ser interpretada (invirtió el lugar de los numerales correspondientes a Op y EF). Hay que destacar que ello implica: entender la dirección de lectura de Alejandra y saber cuál modificación hacer para que, conservando Alejandra su modo de lectura, interprete los numerales en el orden que Diana lo necesita.

c) Modificaciones introducidas al tercer intento. Diana logró con los intentos anteriores que Alejandra interprete cuáles fueron las tres cantidades que intervinieron y el orden sucesivo de las mismas. Aún no había logrado la interpretación del aspecto cualitativo de Op y es lo que representa en el último intento a través del borrado.

Diana tiene 5 años y su posibilidad de ponerse en el punto de vista del otro es poco frecuente (incluso en sujetos que tienen cuatro veces su edad, y más).

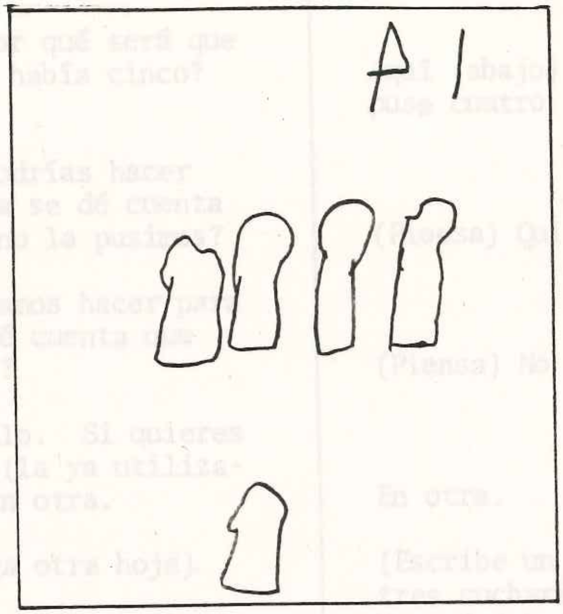
Vamos a analizar ahora el proceso de Rita, a quien ya citamos, para representar $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas). En el primer intento Rita dibujó cuatro cucharitas.



Primer intento

Entrevistador	Rita y Diana
	D: Cuatro cucharitas.
¡Ah! Tienes razón, había cuatro cucharitas y después ¿qué pasó?	D: ¿Quitaron una?
(A Rita): ¿Fue así?	R: No.
Sale Diana porque acordamos hacer otro intento	
Mira, Rita, ella se dió cuenta que había cuatro cucharitas y después ¿qué había pasado?	Quitaste tres.
¿Y qué podías hacer en la hoja para que Diana se dé cuenta de eso?	(Duda).
¿Habrá que ponerle algo?	Sí.
¿Qué le pondrías?	El número y una cucharita aquí

	(abajo del dibujo realizado) para que ella se dé cuenta.
A ver, hazlo.	(Escribe arriba un 1 y un 4 y abajo dibuja otra cucharita).

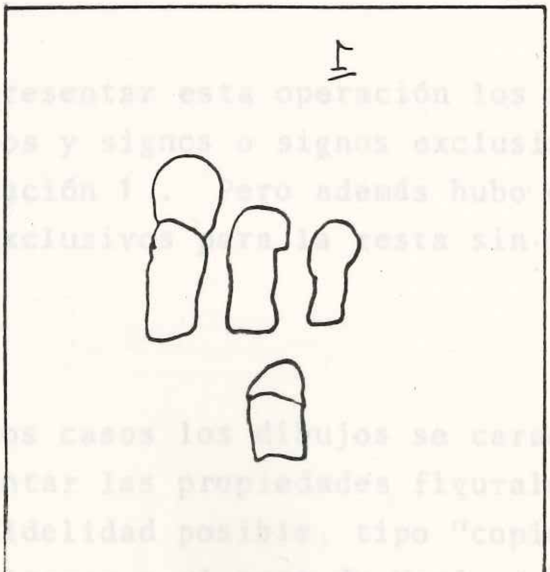


Segundo intento

Entrevistador	Rita y Diana
Ahora Rita te puso algo más para que te des cuenta.	D: Catorce (mirando los numerales de la parte superior).
(Se ríe).	D: ¡Cinco!
(A Rita): ¿Había cinco?	R: No (negando).
A ver, Diana ¿por qué te parece que había cinco?	D: Porque aquí (dibujo de las cuatro cucharitas) hay cuatro y aquí (dibujo inferior de una cucharita) hay una.
¡Ah, claro! Pero, Rita ¿había cinco?	R: No (se queda pensando).
¿Probamos de nuevo?	R y D: (Afirman).

Sale Diana

Mira, Rita ¿por qué será que ella cree que había cinco?	Aquí (abajo) puse una y aquí (arriba) puse cuatro.
Ajá ¿y cómo podrías hacer para que Diana se dé cuenta que esa una no la pusimos?	(Piensa) Quitaron tres.
¿Y cómo podríamos hacer para que ella se dé cuenta que quitamos tres?	(Piensa) No sé.
A ver, piénsalo. Si quieres en esta hoja (la ya utilizada) o si no en otra.	En otra.
Bueno (entrega otra hoja).	(Escribe un 1 arriba y luego dibuja tres cucharitas). Y aquí (abajo) ponemos una (dibuja otra cucharita abajo).



Tercer intento

Y ahora, para darse cuenta¿tiene que mirar las dos hojas o sólo ésta? (segunda hoja)	Las dos, ésta (primera) y ésta (segunda).
Entra Diana	
(Coloca las dos hojas y le dice a Diana que use ambas).	
¿Cuántas había?	D: Cuatro.
¿Y después, qué pasó? (señala la segunda hoja).	D: Pusieron una o sacaron una... (duda).
¿Cómo se hará para darse cuenta si uno la pone o la quita?	D: Primero ponen cuatro y después borran una.
¿Eso harías tú, Diana?	D: Sí.
Continuó un diálogo abierto con ambas niñas	

Señalemos las sucesivas modificaciones que hace Rita a su producción para que Diana lo interprete:

a) Modificaciones introducidas al primer intento. Con el primer intento Rita logró que Diana interprete EI, agregó entonces los datos del EF, tanto con numerales como con dibujos.

b) Modificaciones introducidas al segundo intento. No fue interpretada su modificación anterior, y Rita se centró ahora en Op ya que con la presencia de los dos estados vio que no había sido suficiente. Dibujó la cantidad correspondiente a Op y agregó dibujo y numeral de EF, planteando que se requería utilizar las dos hojas para que Diana interprete la totalidad de la operación.

Aunque su representación no logró la interpretación de Diana (en hoja 2 Diana no se centró en la cantidad de Op y además no había datos sobre el aspecto cualitativo de Op, por lo cual surgió su propuesta del borrado) es evidente la movilidad de Rita para crear nuevos recursos representativos.

Los 11 niños del grupo D presentaron posibilidades de movilidad similares o aproximadas a las presentadas por Luis Alfredo, Diana o Rita.

Respecto a lograr ser interpretado, los resultados fueron los siguientes:

(En este cuadro no figuran los tres niños que no tuvieron interpretador, de manera que corresponde a un total de 27 niños).

Cuadro 8

Lograr ser interpretado	Edades	Cantidad de niños
No logró ser interpretado	4-5 y 6 años	11
Logró ser interpretado con ayuda (*)	4 y 5 años	4
Logró ser interpretado sin ayuda	4-5 y 6 años	12
T o t a l		27

(*) Llamamos "interpretación con ayuda" cuando al niño interpretador se le señaló algún elemento gráfico que no tomaba en cuenta o se le daban ayudas verbales como: "¿Y después cuántas quedaron"?.

En este cuadro los datos están centrados en el productor, es decir, si logró ser interpretado, pero ello depende obviamente también de quién fue el interpretador. Es posible que niños que no fueron interpretados, a pesar de realizar varios intentos, lo hubieran logrado si el interpretador hubiese sido otro compañero y lo mismo a la inversa.

SITUACION 2

En casi todos los casos la situación 2 consistió en representar $\boxed{3-3=0}$ con cucharitas ó $\boxed{2-2=0}$ con broches para cabello. Esta situación se realizó siempre después de realizar la situación 1, por considerar que el hecho de tener como resultado "cero" presentaba mayor nivel de dificultad que la resta con resto; este orden de las situaciones permitía que el niño enfrentara ciertos problemas representativos en la situación 1 y después presentarle una problemática más compleja en la situación 2 .

Si bien el análisis de esta situación se organizó en los tres aspectos que ya presentamos para el análisis de la situación 1 , en este caso está centrado en las particularidades que presentan las producciones por tener como resultado: cero.

LA REPRESENTACION GRAFICA UTILIZADA

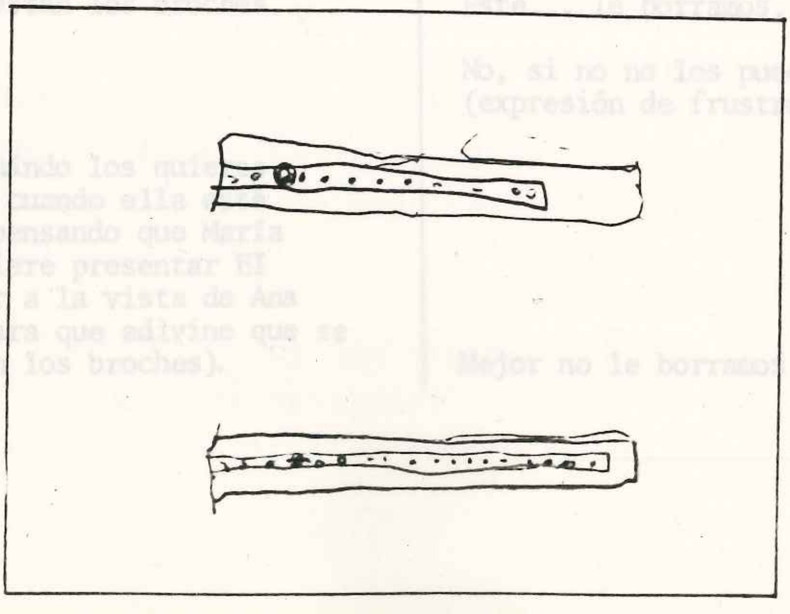
Para representar esta operación los niños utilizaron dibujos, dibujos y signos o signos exclusivamente, como sucedió en la situación 1 . Pero además hubo otros modos de representación exclusivos para la resta sin resto.

- Dibujos

En algunos casos los dibujos se caracterizaron por intentar representar las propiedades figurales de los objetos con la mayor fidelidad posible, tipo "copia". Entre estas producciones citaremos el caso de María José que representó $\boxed{2\ 2=0}$ (broches):

María José tomó un broche, lo colocó sobre la hoja y lo contorneó agregando todos los detalles y dibujando lentamente cada trazo; repitió el proceso (con el mismo modelo) para el segundo broche, e incluso cuando consideraba que un fragmento de su representación no era una buena copia del objeto, borraba y corregía. Los broches eran rectangulares y tenían, como adorno, algunos puntos sobresalientes que conformaban una línea a lo largo de los mismos. María José contó dichos puntos y los fue marcando en su dibujo. Fue sumamente meticulosa. Como demoró aproximadamente veinte minutos en concluir el dibujo de los dos broches, tuvimos que salir del cuarto en un par de oportunidades para avisar a la niña que sería intérprete que debería esperar "otro ratito"; incluso le dimos un libro de cuentos para que se entretuviera mientras esperaba.

La producción de María José fue la siguiente:



Luego tomó la goma con la intención aparente de borrar pero se quedó unos momentos mirando su producción, que tanto esfuerzo le había causado, y así continuó la entrevista:

Entrevistador	María José y Ana Paula
¿Qué pasa?	(María José piensa y juega con el lápiz y la goma).
	A.P.: (Se asoma al cuarto) ¿ya?
No, espera tantito.	(A.P. cierra la puerta).
¿Qué hacemos, María José?	Tiene que adivinar.
Sí, pero tienes que ayudarle a adivinar ¿cómo se puede hacer para que ella adivine que no quedó nada?	Decirle.
Pero es que ella tiene que adivinar solamente viendo la hoja, lo que tú haces en la hoja.	(Duda, piensa, mira su dibujo tan cuidadoso).
¿Se puede hacer algo para que ella adivine que no quedó más nada?	Este... los broches.
Sí, ya están los broches.	Este... le borramos.
Bueno.	No, si no no los puedo hacer otra vez (expresión de frustración).
¡Ah! ¿cuándo los quieres borrar, cuando ella esté aquí? (pensando que María José quiere presentar El y borrar a la vista de Ana Paula para que adivine que se quitaron los broches).	Mejor no le borramos.

Pero si le borramos ¿ella se va a dar cuenta que no quedó nada?	(Afirma con la cabeza, pero desalentada).
¿Tú lo quieres hacer con ella, que vea los broches y después los borras?	Sí, con ella.
Entra Ana Paula	
(Explica)	Ana Paula: Dos.
Ajá, dos, y ahora María José te quiere hacer algo para que tú adivines qué pasó con esos broches.	M.J.: (Toma la goma y va a borrar, piensa, y de pronto se la ve entusiasmada). Fíjate cómo está la hoja, Ana Paula (muestra su dibujo de los dos broches) y detrás de la hoja (la voltea) ¿cómo está? (muestra la página en blanco).

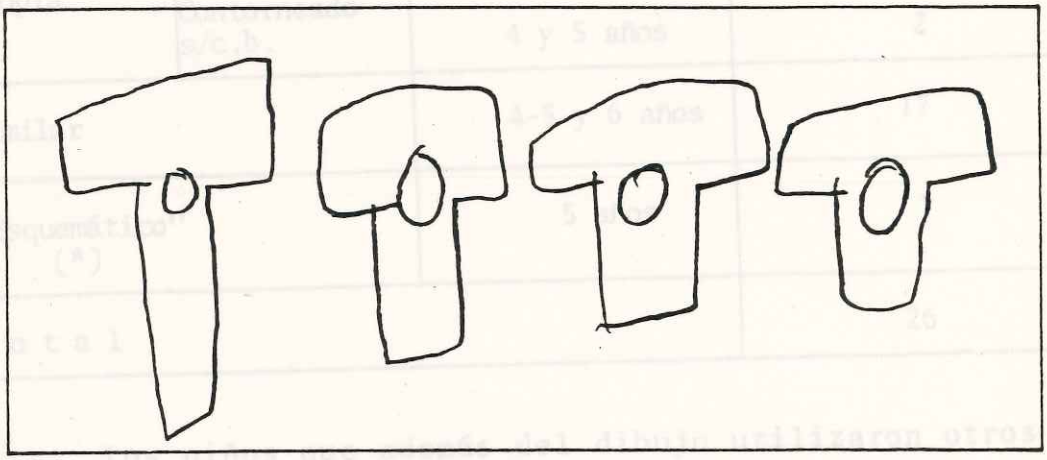
Es evidente que la búsqueda por encontrar un recurso para representar el resultado de la operación, sin necesidad de borrar su "obra maestra", preocupó largo rato a María José pero encontró una alternativa satisfactoria: la nada se puede representar a través de nada.

Frente a este recurso surge nuevamente (como con el recurso del borrado) el problema de redefinir qué es una representación gráfica. En realidad afirmar que una página en blanco es la representación gráfica de "nada" nos parece, en cierto sentido, arbitrario.

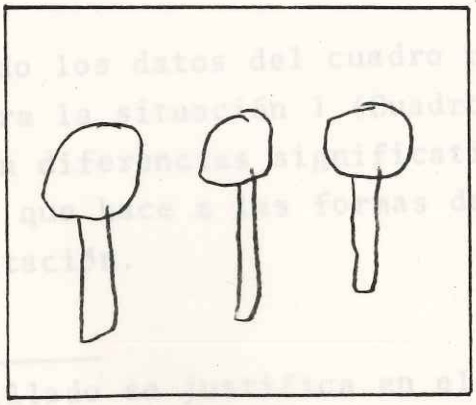
Ahora bien ¿es una representación? Retomando la misma justificación ya señalada: lo es en la medida que constituye un "objeto" sustituto. Siendo además la hoja un elemento perteneciente a lo gráfico podemos considerarla como representación gráfica. Pero nuestra afirmación no es categórica.

También en esta situación, como en la situación 1, los niños que intentaron dibujar tipo copia, utilizaron el recurso del contorneado. Algunos lo hicieron a través de la correspondencia biunívoca, cambiando de objeto modelo para cada dibujo, mientras otros no establecieron la relación uno a uno, contorneando con el mismo modelo las veces que lo requerían.

Dibujos tipo "similar" hubo en varios casos; mientras algunos niños lograban formas muy parecidas a las de los objetos, otros lo hicieron con menor similitud. Por ejemplo:



Luis Alfredo
$\boxed{4-4 = 0}$ (cucharitas)



Luis Gabriel
$\boxed{5-3=0}$ (cucharitas)

Las cucharitas que utilizamos con Luis Alfredo eran cuadradas y con un detalle similar al que él dibujó, pero no lo consideramos dibujo "copia" porque no intentó guardar la relación de tamaño, de proporción, ni puso atención en lograr que los detalles fueran fieles al modelo. Luis Gabriel se limitó a observar la forma general de las cucharitas (que eran ovaladas) y realizó su dibujo. La utilización del dibujo, a través de las diferentes formas, fue la siguiente:

Cuadro 9

Tipos de dibujos		Edades	Cantidad de niños
Copia	Contorneado c/c.b.	4 y 6 años	6
	Contorneado s/c.b.	4 y 5 años	2
Similar		4-5 y 6 años	17
" Esquemático" (*)		5 años	1
T o t a l			26

Los niños que además del dibujo utilizaron otros modos de representación están incluidos en el cuadro, tomando en cuenta la manera específica con la cual hicieron uso del dibujo.

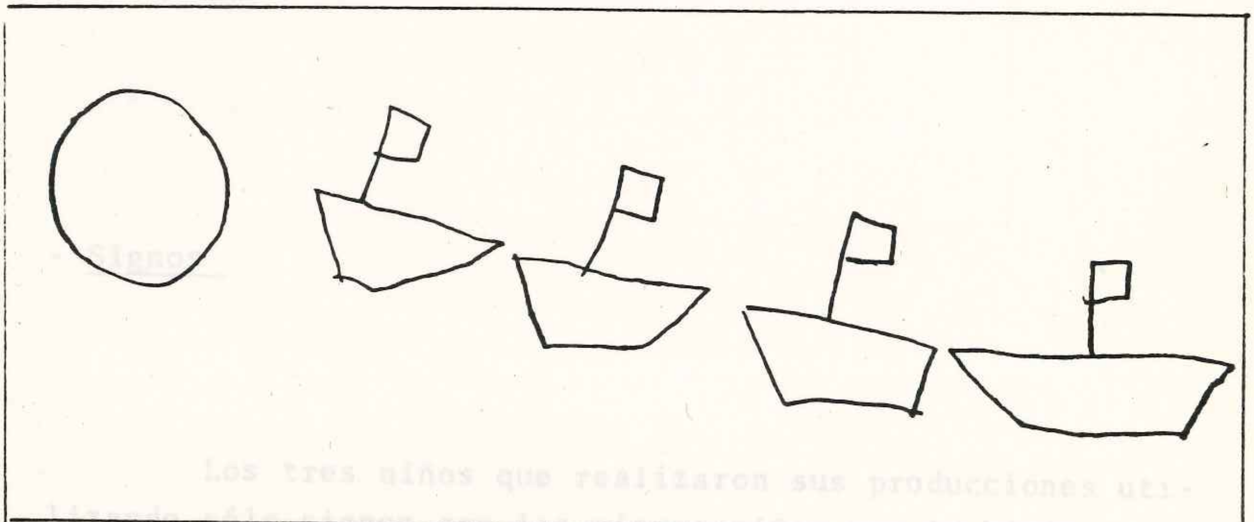
Comparando los datos del cuadro precedente con los correspondientes para la situación 1 (Cuadro 1) podemos notar que no se presentaron diferencias significativas entre ambas situaciones, en lo que hace a las formas de usar el dibujo como modo de representación.

(*) El entrecomillado se justifica en el punto siguiente: dibujos y signos.

- Dibujos y signos

Los niños que utilizaron dibujos y signos hicieron dibujos de tipo "similar"; no hubo casos de dibujos tipo copia complementados con signos (lo mismo sucedió en la situación de resta con resto).

En esta situación no hicieron dibujos propiamente esquemáticos pero hubo una producción que consideramos equivalente. Es la realizada por Héctor, quien para representar $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas) dibujó cuatro barquitos (y a la izquierda el cero).



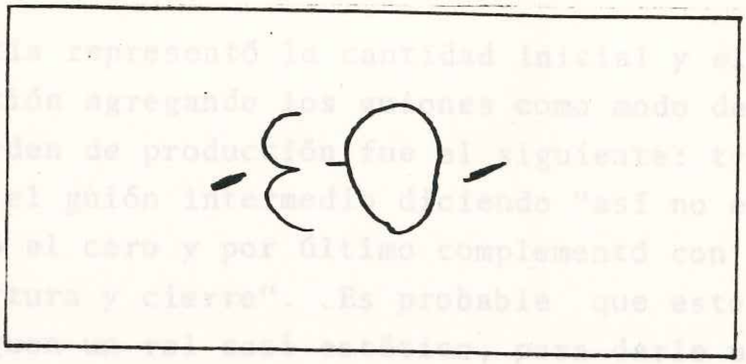
Consideramos esta producción equivalente a dibujos esquemáticos ya que Héctor no intentó hacer una representación de las propiedades físicas de los objetos y se centró en representar aspectos cuantitativos de la operación, dando por hecho que era irrelevante si se trató de cucharitas o barquitos.

En esta situación, como también en la situación 1, todos los niños que utilizaron dibujos y signos usaron sólo numerales. Es decir, no hubo casos de complementar el dibujo con otro tipo de signos matemáticos; los niños que hicieron uso de signos diferentes a los numerales son los que representaron a través de signos exclusivamente.

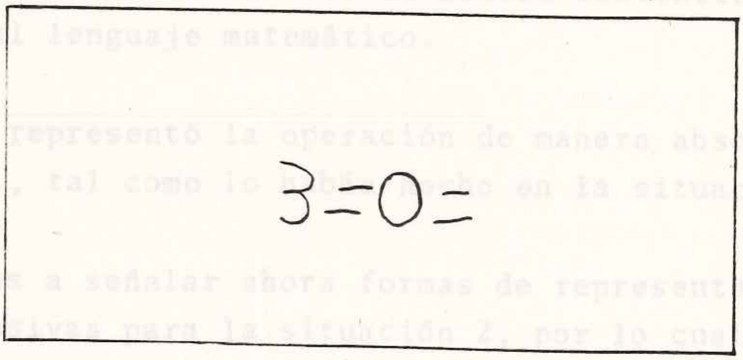
- Signos

Los tres niños que realizaron sus producciones utilizando sólo signos son los mismos niños que lo hicieron en la situación 1:

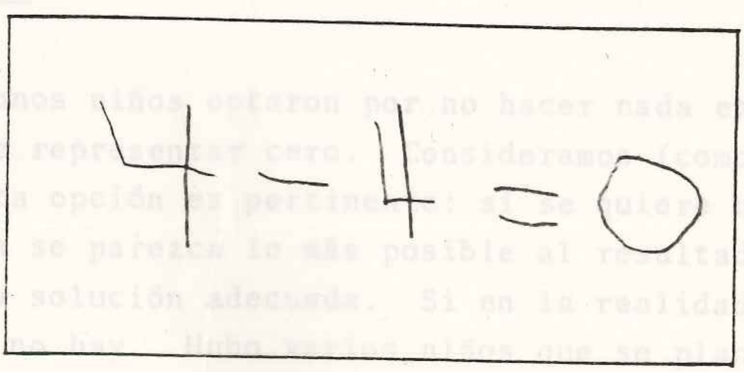
Cyntia
3-3=0
(monedas)



Catalina
3-3=0
(cucharitas)



Moi
4-4=0
(cucharitas)



Las formas particulares de utilización de los signos son consistentes con las utilizadas en la situación 1 por cada uno de estos niños.

Cyntia representó la cantidad inicial y el resultado de la operación agregando los guiones como modo de separación. El orden de producción fue el siguiente: trazó el tres, luego el guión intermedio diciendo "así no están juntos"; agregó el cero y por último complementó con los guiones "de apertura y cierre". Es probable que estos últimos guiones jueguen un rol casi estético, para darle una "buena forma" a su representación.

Catalina usó dos numerales pertinentes a la operación y los otros signos (como en su representación de resta con resto) no están utilizados de manera convencional aunque pertenecen al lenguaje matemático.

Moi representó la operación de manera absolutamente convencional, tal como lo había hecho en la situación 1.

Vamos a señalar ahora formas de representación que fueron exclusivas para la situación 2, por lo cual las consideramos modos específicos de resolver el problema de representar la resta sin resto.

-No graficar

Algunos niños optaron por no hacer nada en la hoja como modo de representar cero. Consideramos (como lo señalamos) que esta opción es pertinente: si se quiere que la representación se parezca lo más posible al resultado de la acción, es una solución adecuada. Si en la realidad no hay, en el papel no hay. Hubo varios niños que se plantearon esta alternativa, pero pocos la concretaron. Cuando se les preguntaba si así (frente a una hoja en blanco) el compañero se daría cuenta de lo sucedido, dudaban y buscaban otras alternativas.

Veamos a Gladys frente a esta situación. Se trató de $\boxed{2-2=0}$ (broches):

Entrevistador	Gladys
¿Cómo harías algo en la hoja para que Catalina se dé cuenta?	
	(Piensa) Ahora no hago nada.
¿Dejas así la hoja (blanca)?	Así (borra en la hoja donde no ha dibujado nada).
¿Qué estás borrando?	La forma de los broches.
¿Cuáles?	(Toma un broche y lo contornea, luego hace lo mismo con el otro y finalmente borra ambos).

En un primer momento la propuesta de Gladys fue no hacer nada y sólo luego, probablemente por la intervención del entrevistador, optó por dibujar los broches y borrarlos.

Luis Alfredo, para representar $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas) propuso lo siguiente:

Entrevistador	Luis Alfredo
¿Cómo podríamos hacer para que Naza se dé cuenta cuántas había y qué pasó?	
	No poner nada... porque... ¿tengo que poner cuatro?
No sé, como tú creas, para que Naza se dé cuenta de lo que pasó.	
	(Duda, piensa) Ponerle cuatro ¿no?
A ver	
	No más que... no.. (duda un momento y sin convicción dibuja las cuatro cucharitas).

En este caso la duda surgió espontáneamente de Luis Alfredo, sin mediar la intervención del entrevistador, pero también en un inicio él consideró que no hacer nada era lo adecuado.

Los niños que dejaron la hoja en blanco como representación de cero fueron Ana Paula y María José (que ya vimos); pero ambas pudieron mantener esa propuesta porque encontraron un recurso que resolvió el conflicto: representar de un lado de la hoja EI (dibujando los objetos) y del otro lado EF (dejando la página en blanco).

Esta forma de resolución les permitió conservar el criterio: nada como producto, nada en el papel; pero algo se dibujó en una de las páginas y así no dejaban al compañero una hoja totalmente en blanco.

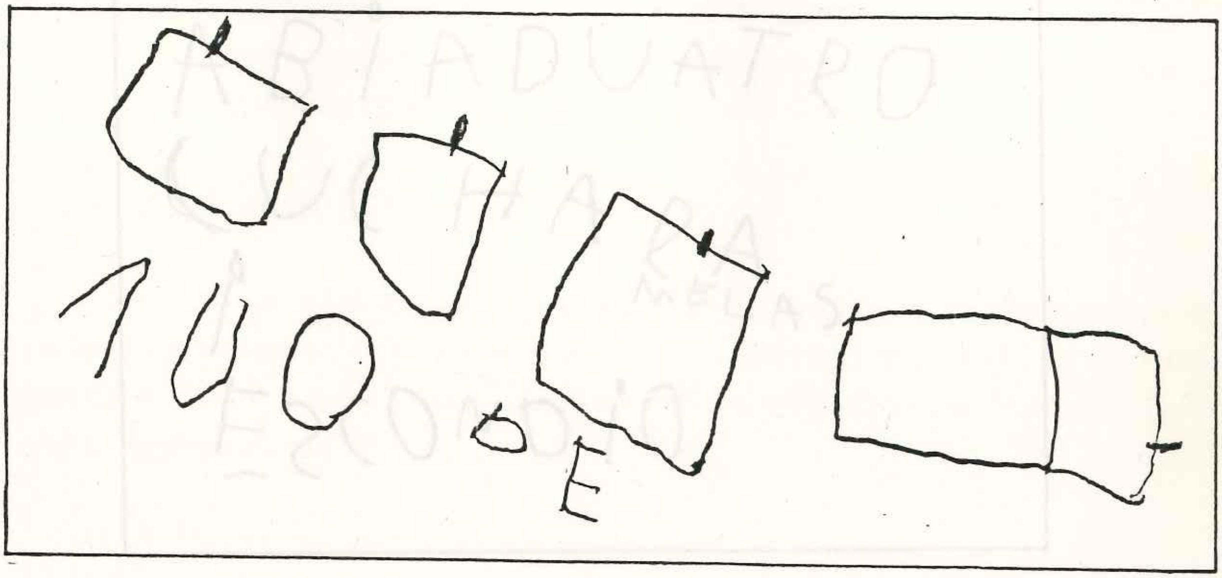
- Usar la escritura

Dos niñas enfrentaron el problema del cero creando una representación gráfica para la nada a través de la escritura.(*) Ya mencionamos que restringimos a los niños el uso de la escritura durante la entrevista a fin de favorecer producciones con representaciones matemáticas, o lo "más matemáticas" que fuera posible. Sin embargo, en estos dos casos posibilitamos que lo hicieran ya que ambas niñas no encontraron otra alternativa.

Berna representó $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas).

Entrevistador	Berna
	(Dibuja cuatro cucharitas).
	Ya está. Una, dos, tres, cuatro (señala cada una de las cucharitas dibujadas).
¿Y yo qué hice?	Ya no hay ninguna.
¿Entonces?	Ya no están.
¿Y cómo harías para que Luz María se dé cuenta?	Ya no hay nada.
Sí, ¿cómo haríamos para que Luz María se dé cuenta que ya no hay nada?	(Piensa, duda) Le anotamos. Le anotamos aquí (abajo de su dibujo).
¿Qué le anotamos?	Que ya no están.
A ver, ¿cómo le anotaríamos?	Así (escribe letras abajo de su dibujo)
¿Qué pusiste?	Que ya no estaban.
¿Eso pusiste?	Sí.

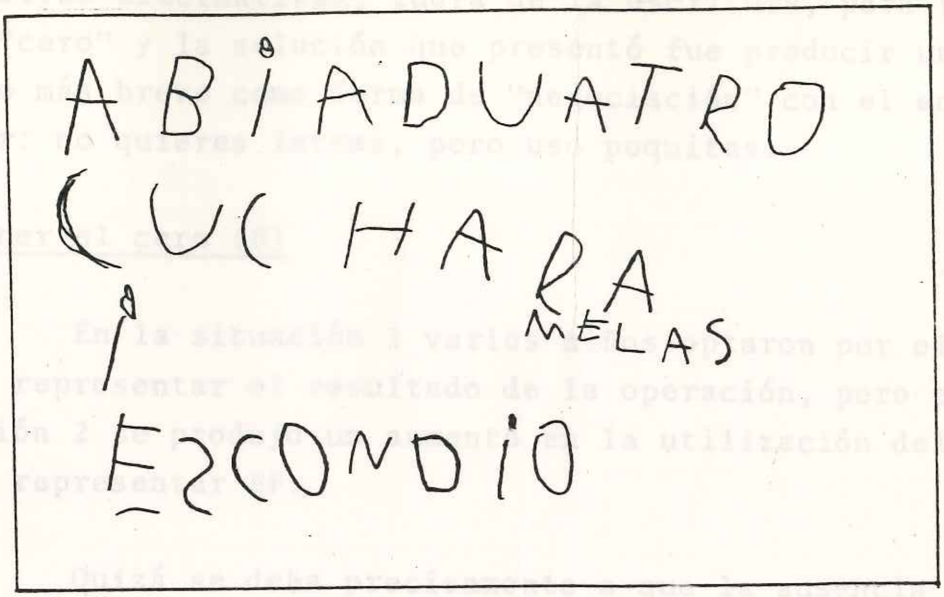
(*) Si bien la escritura es un sistema de signos, como también lo es el lenguaje gráfico matemático, cuando nos referimos a las producciones con signos se trata de signos matemáticos y cuando usamos el término "escritura" es para referirnos a la representación gráfica del lenguaje natural.



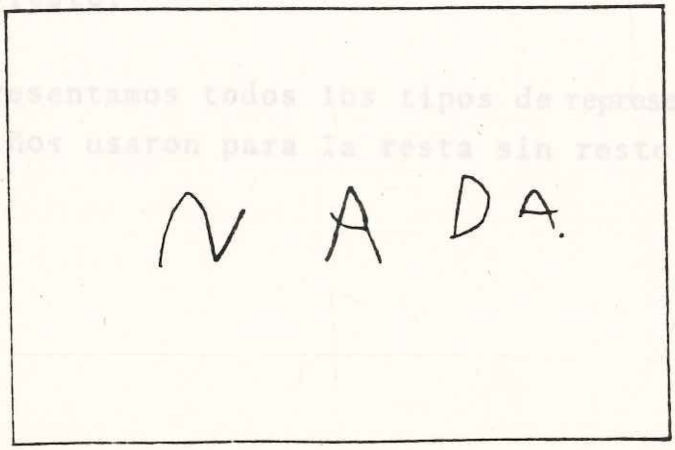
Es probable que si el entrevistador hubiese insistido en la restricción a la escritura, Berna habría encontrado otras alternativas, pero la niña demostró tal entusiasmo al haber encontrado su solución que no se le hicieron objeciones.

Ana representó $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas):

Entrevistador	Ana
	(Después de tomar el lápiz y pensar unos segundos, duda, mira la mesa donde habían estado las cucharitas).
¿Cuántas había?	Cuatro.
¿Y ahora?	Cero.
¿Qué podrías hacer para que Gloria se dé cuenta qué pasó?	(Comienza a escribir produciendo un texto).



Pero, mira, trata de hacerle algo en la hoja sin escribir; algo, que Gloria no tenga que leer las letras, por si no las sabe bien. (Le coloca otra hoja).	(Duda, piensa, toma el lápiz, mira la mesa). No sé.
¿Qué podrías hacer?	No sé.
¿Qué se te ocurre?	(Piensa) Así (y escribe el segundo texto).



En el caso de Ana se pone en evidencia que no encontró otras alternativas, fuera de la escritura, para representar "cero" y la solución que presentó fue producir un texto mucho más breve como forma de "negociación" con el entrevistador: no quieres letras, pero uso poquitas.

- Poner el cero (0)

En la situación 1 varios niños optaron por el numeral para representar el resultado de la operación, pero en la situación 2 se produjo un aumento en la utilización del numeral para representar EF.

Quizá se deba precisamente a que la ausencia de objetos en EF obligó a abandonar el dibujo. Es decir, si el niño elige el dibujo como medio privilegiado para representar las cantidades, se encuentra en esta situación con la imposibilidad de dibujar la cantidad de objetos resultantes y ello lo obliga a buscar otros modos de representación.

Ya vimos que unos optaron por no graficar y otros por la escritura, pero hubo varios niños que eligieron la representación a través del numeral, aun cuando no lo habían hecho en la situación 1. Hubo cinco niños que no utilizaron signos en la situación 1 y sin embargo pusieron el cero en la situación 2. Este dato nos parece indicar el recurso específico a los numerales como forma de resolver la representación de la resta sin resto.

Presentamos todos los tipos de representación gráfica que los niños usaron para la resta sin resto, en el siguiente cuadro.

Cuadro 10

Tipos de representaciones utilizadas	Edades	Cantidad de niños
Dibujos exclusivamente	4 - 5 y 6 años	16
Dibujos y signos	5 y 6 años	7
Signos exclusivamente	6 años	3
Dibujos y página en blanco	4 y 5 años	2
Dibujos y escritura	4 años	1
Escritura exclusivamente	5 años	1
T o t a l		30

Como se pone en evidencia a través de la comparación de este cuadro con el equivalente de la situación 1 (cuadro 2) los niños presentaron nuevos recursos frente al problema del cero.

Veamos, resumiendo los datos y el análisis ya realizado, cuáles fueron las modificaciones más significativas.

- Se reduce el número de producciones con uso exclusivo de dibujos. Ya señalamos nuestra interpretación: no se puede dibujar la nada.

- Aumenta el número de producciones con uso de dibujos y signos. De los siete niños que lo hacen en situación 2, cinco no lo hicieron en situación 1. Este dato se complementa con el anterior (reducción de producciones con uso exclusivo de dibujos).

- El número de producciones con uso de signos exclusivamente se mantiene. Si el niño optó por esa alternativa en situación 1 es esperable que la mantenga en situación 2, donde es aún más funcional.

- Surgen tres nuevas formas de representación: la página en blanco, dibujos y escrituras, sólo escritura. Ya comentamos estos casos, sólo queremos destacar que mientras en la situación 1 fue suficiente hacer un comentario casi casual para restringir el uso de la escritura, las dos niñas que la utilizaron en la situación 2 parecen "no poder evitarlo".

Con base en los datos recogidos podemos contribuir a sustentar una afirmación de larga data: el problema del cero no es banal.

LA REPRESENTACION GRAFICA Y LOS MOMENTOS DE LA OPERACION

Para iniciar el análisis de este aspecto tomamos el mismo criterio utilizado en la situación 1:

Presencia de 1E
Presencia de 2E
Presencia de 1E y Op
Presencia de 2E y Op

Al comenzar a revisar las producciones de los niños desde ese punto de vista y compararlos con las obtenidas en la situación 1 surgieron varios datos interesantes.

Cuadro 11 (comparativo)

Presencia de los momentos de la operación	Situación 1	Situación 2
Sin relación	1 (4a)	--
1E	1 (4a)	10 (4 - 5 y 6 a)
2E	11 (4-5 y 6 a)	12 (4 - 5 y 6a)
1E y Op	5 (4-5 y 6 a)	--
2E y Op	12 (4 - 5 y 6a)	7 (4- 5 y 6a)
T o t a l	30	29 (*)

(*) Una niña la analizaremos individualmente.

Presencia de 1E

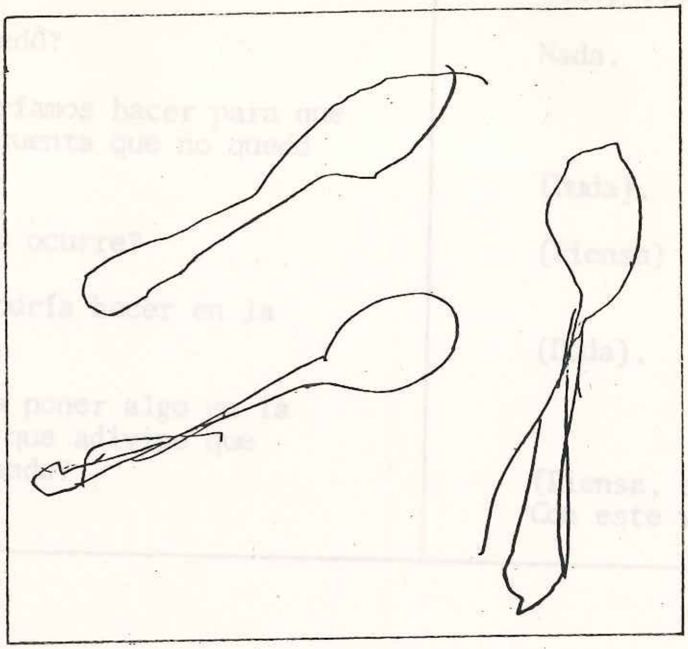
En primer término señalemos que en la situación 1 hubo un solo caso y en la situación 2 lo hicieron 10 niños.

Consideramos que ello sucedió porque para representar la resta con resto hay tres cantidades posibles de ser representadas sin mayor grado de conflicto. En cambio en la resta sin resto, hay dos momentos conflictivos: Op porque en este caso significa representar dos veces una misma cantidad (lo analizaremos luego) y EF porque es cero, de allí que se produzca un aumento notable en la elección de representar 1E y prefieren obviamente EI. La niña que representó sólo EF fue Ana, quien lo hizo a través de la escritura exclusivamente.

Veamos cómo los niños representaron EI.

Hubo cinco niños que sólo dibujaron la cantidad de objetos correspondientes a EI. Algunos de esos niños propusieron inicialmente no hacer nada y vimos ya, como ejemplo, el fragmento de la entrevista con Luis Alfredo correspondiente a esta situación, y su duda sobre si sería necesario hacer efectivamente algo en el papel; optando luego por dibujar las cuatro cucharitas.

Patricio representó $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas) y dibujó inicialmente las tres cucharitas:



Luego continuó el diálogo:

Entrevistador	Patricio y Luis Francisco
¿Ya se va a dar cuenta?	Sí.
Entra Luis Francisco	
(Explica).	LF: ¡Tres!
Muy bien, había tres, ¿y qué habrá pasado luego?	LF: (Piensa largo rato).
¿Qué crees que pasó?	LF: (Gesto de no saber, levantando los hombros).
Sale Luis Francisco porque haremos otro intento	
Mira, Patricio, Luis Francisco entendió muy bien que había tres cucharitas, pero después	

¿qué pasó?	Desaparecieron.
¿Y qué quedó?	Nada.
¿Cómo podríamos hacer para que él se dé cuenta que no quedó nada?	(Duda).
¿Qué se te ocurre?	(Piensa) No sé.
¿Qué se podría hacer en la hoja?	(Duda).
¿Se podría poner algo en la hoja para que adivine que no quedó nada?	(Piensa, se dispersa) Con este vasito...

A partir de ese momento Patricio se dispersa totalmente y propone dibujar objetos que hay en el cuarto, se lo ve inquieto y tratando de concluir la situación. Consideramos que su respuesta es una manera de expresar el conflicto frente a la demanda del entrevistador (representar que no quedó nada) y una manera de decir "déjame en paz".

Cuando Luis Gabriel representó $\boxed{3-3=0}$ (cucharas) dibujó también las tres cucharitas; y el diálogo fue el siguiente:

Entrevistador	Luis Gabriel
Muy bien, ¿y qué pasó?	Quitamos tres.
Ajá. ¿Y cómo le harías para que él pueda adivinar?	(Piensa).
¿Cuántas quedaron?	Cero.
¿Cómo podemos hacer para que él adivine que quitamos las tres y quedó cero?	(Piensa largo rato).

¿Cómo le podrías hacer?	(Duda).
¿Hay alguna manera de poner que quedaron cero?	(Largo silencio).
¿Se puede poner que ya no quedaron?	(Silencio).
Puedes usar el otro lado de la hoja, otra hoja; lo que tú quieras. Para que él se dé cuenta que no quedó nada.	(Duda)..., que ponga otras tres aquí (abajo de las tres que ya dibujó).
¿Y así se va a dar cuenta que quitamos las tres?	No.
Entonces ¿Qué otra cosa se puede hacer para que Riger sí se dé cuenta?	(Piensa).
¿Hay alguna manera de hacer que se note que no quedó nada?	No.

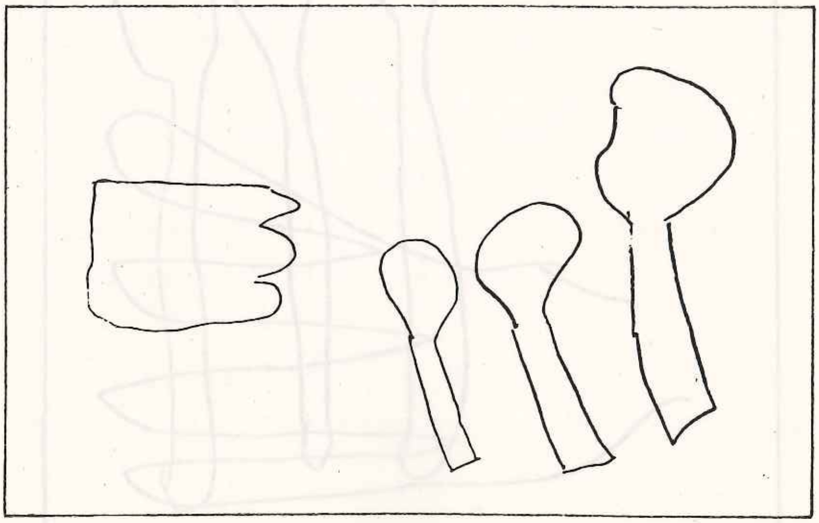
Luis Gabriel pone en evidencia su conflicto para representar cero, aunque no lo hace de la manera que lo expresó Patricio: intenta, se esfuerza, piensa, pero no encuentra alternativa posible.

Con pequeñas variantes esa fue la situación con los niños que representaron EI dibujando exclusivamente la cantidad de objetos correspondientes. Los otros niños que representaron EI, además de la cantidad de objetos que se trataba, agregaron otro elemento: el dibujo de la mano. La mano podía estar al lado, superpuesta al dibujo de los objetos o del otro lado de la hoja.

Veamos un ejemplo de cada caso.

Greta representa $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas):

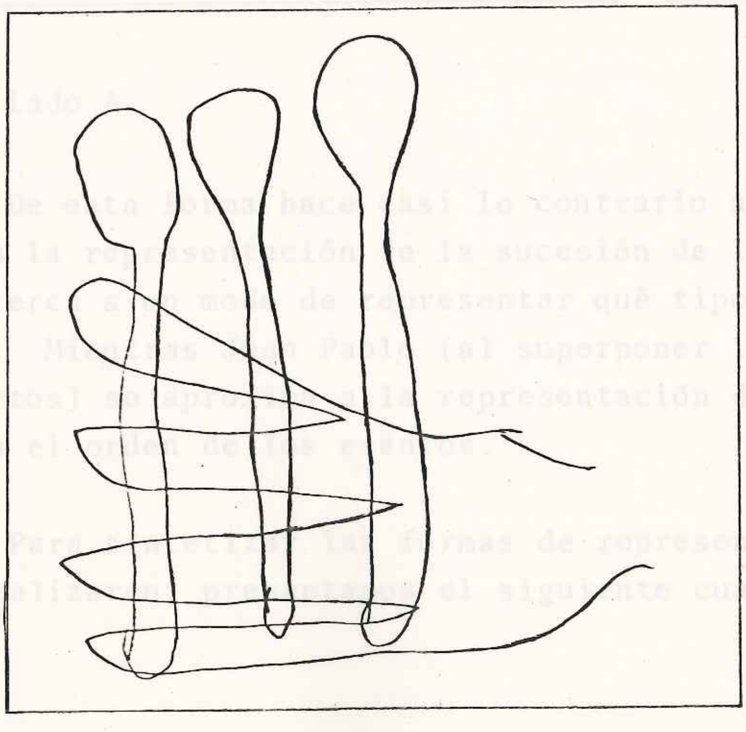
Entrevistador	Greta
Ajá, muy lindas. Y luego ¿qué pasó?	(Dibuja tres cucharitas). Quitaste las tres.
A ver, ¿cómo harías para que ella se dé cuenta?	No sé (se ríe, juega con el lápiz).
A ver, ¿qué se podría hacer para que se dé cuenta que las quitamos?	(Piensa , largo silencio).
¿Qué se te ocurre para que adivine qué pasó después?	...poner una manita.
A ver.	(Dibuja una mano a la izquierda de las cucharas)... Y así se da cuenta y así ya adivina ¡ya!



Pareciera que la presencia de la mano cumple la función de resolver el conflicto. Greta así representa lo que "pasó después", ello puede ser Op (quitamos tres) o EF o ambos. Si retomamos el planteo que hicimos en la situación 1 (referido a la posibilidad de interpretar lo que quedó en la mano como EF) entonces la mano podría ser EF; si la mano representa "sacó tres" entonces es Op.

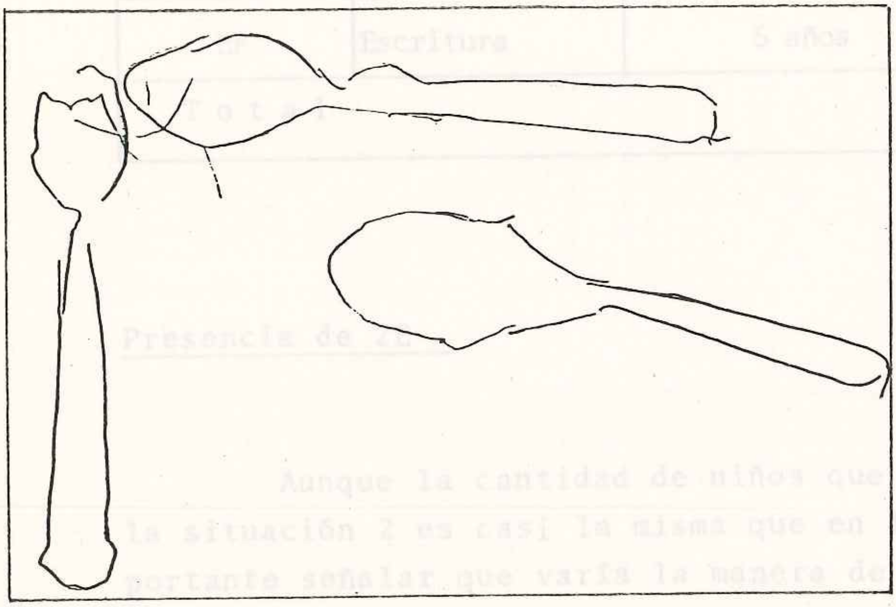
Pero puede ser ambos en el sentido de la ambigüedad del signo "igual". Como también señalamos, el signo "igual" y su cifra contigua a la derecha pueden interpretarse como una información reiterada, en este sentido la mano puede ser a la vez Op y EF ya que si representa "sacó tres" es obvio que no quedó nada, entonces no es necesario representar cero.

Juan Pablo representó $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas) así:

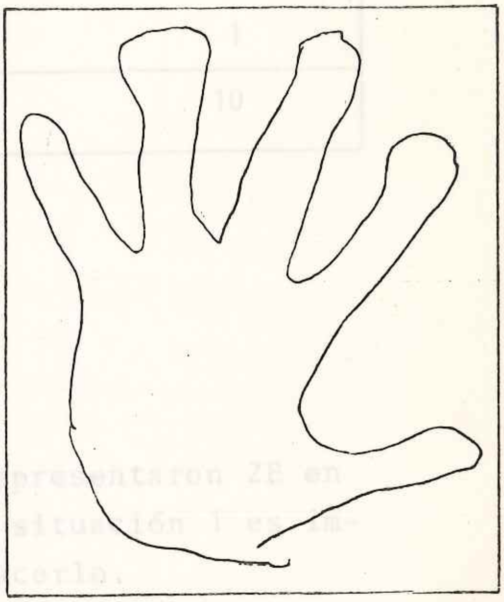


Es un caso de mano superpuesta a EI. Es interesante porque a la vez anula EI "tachándolo" con la mano y de esta manera se aproxima más a representar Op aunque se pierde el orden de los eventos.

Addina para representar $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas) utilizó ambos lados de la hoja:



Lado A



Lado B

De esta forma hace casi lo contrario a Juan Pablo: enfatiza la representación de la sucesión de los hechos pero no se acerca a un modo de representar qué tipo de acción hizo la mano. Mientras Juan Pablo (al superponer la mano sobre los objetos) se aproxima a la representación de Op, pero no recupera el orden de los eventos.

Para sintetizar las formas de representar 1E que los niños realizaron, presentamos el siguiente cuadro:

Cuadro 12

Presencia de 1E		Edades	Cantidad de niños
EI	Sólo cantidad	4-5 y 6 años	5
	Cantidad e instrumento de la acción	4-5 y 6 años	4
EF	Escritura	5 años	1
T o t a l			10

Presencia de 2E

Aunque la cantidad de niños que representaron 2E en la situación 2 es casi la misma que en la situación 1 es importante señalar que varía la manera de hacerlo.

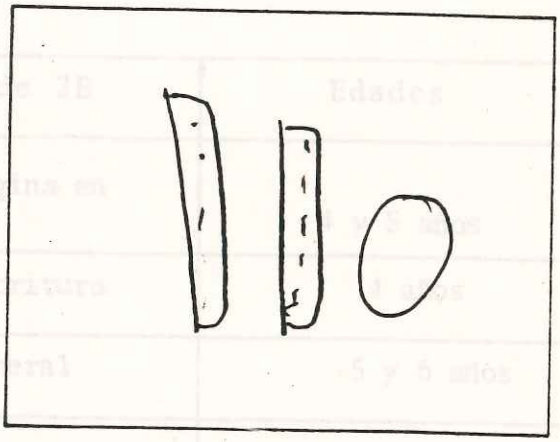
Mientras en la situación 1 casi todos los niños (excepto uno que lo hizo con signos exclusivamente) representaron los dos estados haciendo uso del dibujo, en la situación 2 lo hicieron de otras formas. ¿Por qué? Por lo que ya hemos señalado: en la resta sin resto no se pueden representar ambos estados a través del dibujo.

Veamos entonces las opciones que los niños tomaron, excluyendo a quienes usaron sólo signos.

Ya citamos los casos de Ana Paula y María José que representaron EI a través del dibujo y EF dejando la otra página en blanco. También presentamos la producción de Berna, quien dibujó EI y escribió para representar EF.

Los otros niños de este grupo dibujaron EI y pusieron el numeral para representar EF (0).

$\boxed{2-2=0}$ Así lo hace, por ejemplo, Riger para representar (broches).



Y el proceso fue el siguiente:

Entrevistador	Riger
	Ponemos dos (dibuja los broches), los dos.
Ajá ¿qué pasó después?	Quitamos los dos.
¿Y cómo harías para que ella se dé cuenta?	(Piensa un rato). Poner un cero (traza el cero a la derecha).
¿Así ya se va a dar cuenta?	Sí.

La diferencia entre los niños de este grupo es la siguiente: hubo quienes escribieron el cero espontaneamente, desde el primer intento, y otros lo hicieron después del primer intercambio, al notar que su compañero no podía realizar la interpretación de la operación si representaban sólo EI.

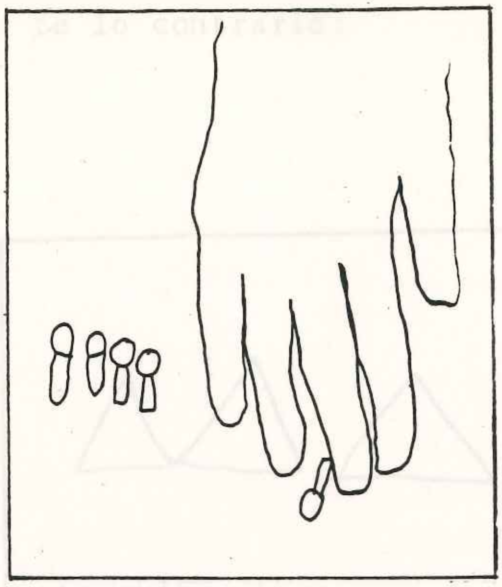
Las variantes a través de las cuales los niños representaron 2E fueron las que presentamos en el cuadro.

Cuadro 13

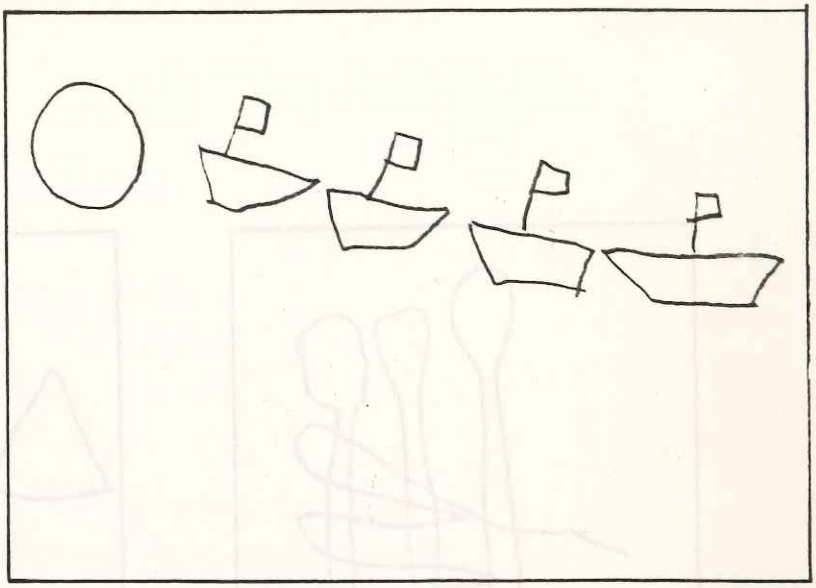
Presencia de 2E	Edades	Cantidad de niños
Dibujo y página en blanco	4 y 5 años	2
Dibujo y escritura	4 años	1
Dibujo y numeral	5 y 6 años	7
Signos exclusivamente	6 años	2
T o t a l		12

Vamos a tomar ahora algunos casos específicos para analizar las diferencias de las producciones relativas a ambas situaciones.

Presentaremos las producciones de Héctor, quien representó 2E en la situación 1 y también en la situación 2.



$\boxed{4 - 3 = 1}$ (cucharitas

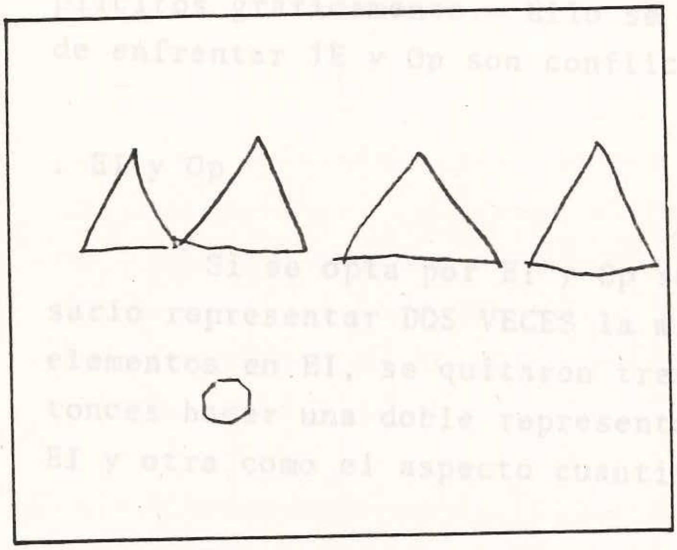


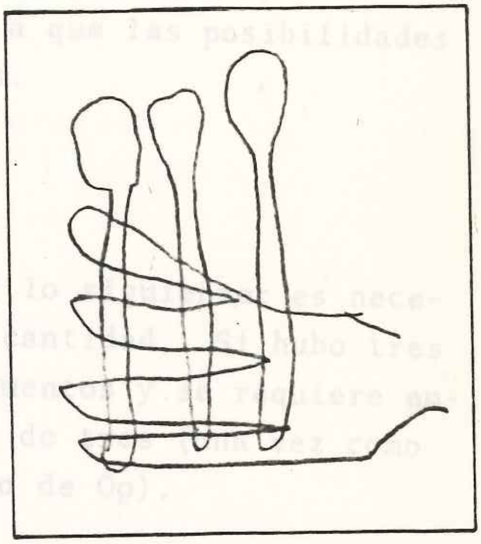
$\boxed{4 - 4 = 0}$ (cucharitas)

Desde el punto de vista del tipo de representación utilizada, pasó del dibujo "similar" al dibujo de tipo "esquemático". Además, en resta con resto dibujó la cantidad correspondiente a EF, pero en resta sin resto pasó a utilizar el signo de EF. Mientras en resta con resto dibujó la mano (que podría ser un indicio de Op) en resta sin resto no hay representación que permita interpretar que algo sucedió entre EI y EF.

De todas maneras, en líneas generales, podríamos afirmar que en resta con resto hubo una búsqueda de lograr semejanza entre lo sucedido y lo gráfico. En la situación 2 se apartó de la similitud y tendió a representar la operación con recursos que se aproximan más al lenguaje matemático: recuperó los datos cuantitativos mediante representaciones arbitrarias (convencionales o no).

En el caso de Juan Pablo lo que sucede es exactamente lo contrario:





$\boxed{4 - 3 = 1}$ (monedas) $\boxed{3 - 3 = 0}$ (cucharitas)

Para representar la resta con resto utilizó recursos arbitrarios, sin buscar una semejanza figural, centrando su representación en los aspectos cuantitativos de EI y EF.

Cuando representó la resta sin resto se apegó marcadamente a los aspectos figurales y su producción "se parece" a lo que sucedió. Aun cuando no representó EF a través de alguna graficación específica, posiblemente la anulación de EI (superponiendo la mano) constituya en cierta medida una representación de EF. También podría interpretarse como representación de Op: sacamos tres. Y si se toma en cuenta el orden en el cual fue dibujando (comenzó por las tres cucharitas) estaría EI, aunque el producto final no permite recuperar ese dato.

Presencia de 1E y Op

Surge aquí un dato interesante: no hubo una sola producción de este tipo, al menos considerando los aspectos explícitos gráficamente. Ello se debe a que las posibilidades de enfrentar 1E y Op son conflictivas.

. EI y Op

Si se opta por EI y Op sucede lo siguiente: es necesario representar DOS VECES la misma cantidad. Si hubo tres elementos en EI, se quitaron tres elementos y se requiere entonces hacer una doble representación de tres (una vez como EI y otra como el aspecto cuantitativo de Op).

Esa situación genera conflicto, tal como también veremos en el capítulo siguiente (cuando los niños tratan de interpretar representaciones convencionales).

. Op y EF

Se se opta por Op y EF surgen dificultades con ambos. Representar Op como ya vimos en el análisis de situación 1, ofrece mayor nivel de complejidad porque requiere abordar lo cuantitativo y lo cualitativo pero además en la situación 2 es la cantidad de EI. Y respecto a EF es necesario representar cero, lo cual es en sí mismo un serio problema.

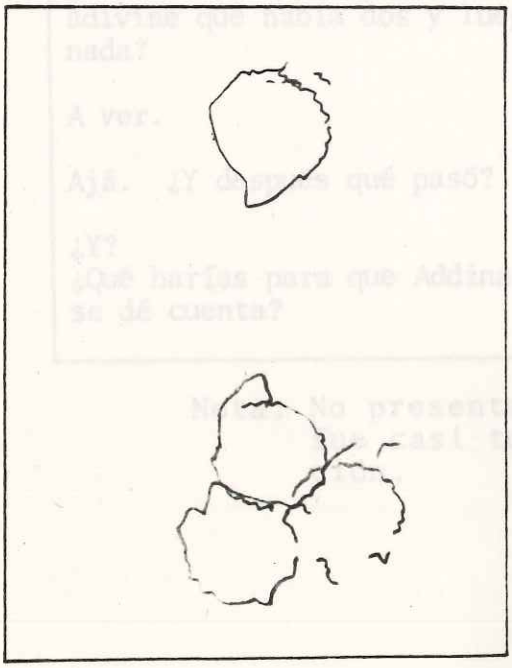
Así se entiende que los niños hayan evitado involucrarse en una forma tan compleja de representar la resta sin resto, como significa hacerlo con presencia de 1E y Op.

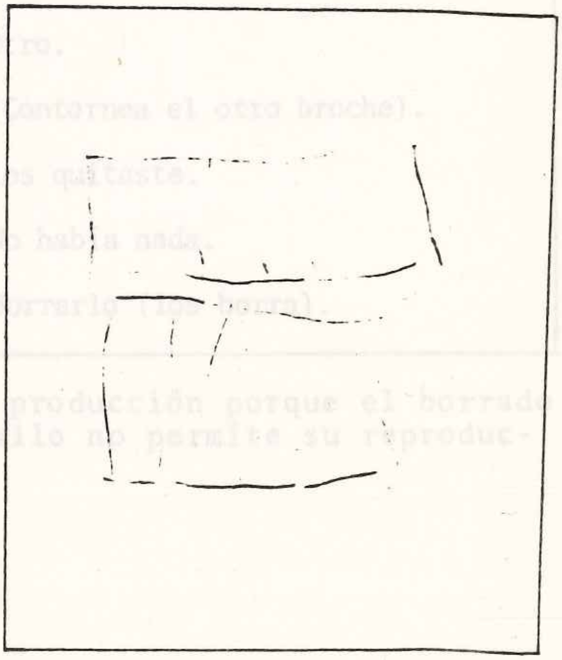
Presencia de 2E y Op

En las producciones de la resta sin resto encomtramos nuevamente el recurso del borrado como opción privilegiiada de representar los tres momentos.

Hubo cuatro niños que lo hicieron en las dos situaciones. Es necesario destacar que en la situación 1, si bien algunos de ellos acudieron al borrado en su 2°, 3° ó 4° intento, lograron éxito a nivel de la comunicación. Cuando enfrentaron la representación de la resta sin resto inmediatamente optaron por el borrado, habían descubierto que ese recurso era infalible.

Pero hubo casos en los cuales, no habiéndolo usado en la representación de la resto con resto, lo hicieron en la situación 2. Por ejemplo, Débora para representar $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas) dibujó 2E y para $\boxed{2-2=0}$ (broches) utilizó el borrado.





En la situación 2, el diálogo fue el siguiente:

Entrevistador	Débora
	(Dibuja los dos broches).
¿Y luego?	Ya no había nada.
¿Entonces cómo harías para que Greta se dé cuenta?	Los borro (los borra) ¡Ya!

Luis Francisco había utilizado ambos lados de la hoja para representar EI y EF en la resta con resto $\boxed{3-2=1}$ (corcholatas) dibujando tres círculos de un lado de la hoja y uno del otro lado. En la situación 2 $\boxed{2-2=0}$ (broches), la entrevista fue así:

Entrevistador	Luis Francisco
	(Contornea uno de los broches).
¿Entonces cuántos había?	Dos.
¿Y cómo le harías para que ella adivine que había dos y luego nada?	Otro.
A ver.	(Contornea el otro broche).
Ajá. ¿Y después qué pasó?	Los quitaste.
¿Y?	No había nada.
¿Qué harías para que Addina se dé cuenta?	Borrarlo (los borra).

Nota: No presentamos su producción porque el borrado fue casi total y ello no permite su reproducción.

Los dos niños citados dibujaron EF en la resta con resto y (siendo imposible mantener el recurso para la resta sin resto) optaron por sustituir ese recurso mediante el borrado para representar la resta sin resto.

Otros niños, habiendo hecho uso del borrado en la situación 1, y a pesar de resultarles exitoso a nivel de la comunicación, optaron por otras alternativas de representación en la situación 2.

Por ejemplo, ya vimos que Ana utilizó la escritura de la palabra NADA para representar la resta sin resto y había borrado en la situación 1 para representar $\boxed{4-3=1}$ (cucharitas).

El borrado implica la necesidad de recuperar los tres momentos de la operación en el orden sucesivo de las acciones; consideramos que en la situación 2 Ana se centró en EF (*), dejando de lado la secuencia de los eventos. Dicha centración posiblemente se produjo por intentar reducir el texto y ello la enfrentaba exclusivamente al problema de representar cero.

A pesar de las modificaciones que presentaron los niños al representar 2E y Op en la situación 1 y en la situación 2, el borrado mantuvo su rango de privilegio.

(*) El fragmento de la entrevista está transcripto en el inciso anterior.

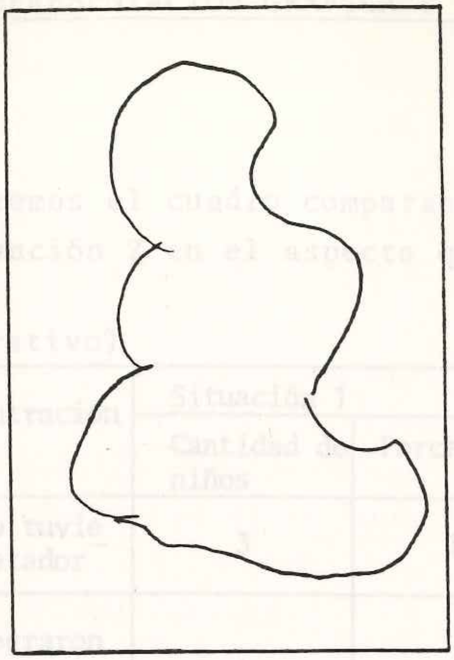
Cuadro 14

Presencia de 2E y Op	Edades	Cantidad de niños
Borrado	4 y 5 años	6
Convencional	6 años	1
T o t a l		7

En el cuadro 11 señalamos que figuraban 29 niños ya que haríamos el análisis individual de la producción de una niña. Se trata de Vanesa.

Vanesa, con su representación de $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas), no se ubica en ninguna de las categorías señaladas.

Entrevistador	Vanesa
(Están las cuatro cucharitas en la mesa).	Una, dos, tres, cuatro (tocando cada una).
(Quita las cuatro).	Nada.
¿Y cómo harías en una hoja para que Luz María sepa que había cuatro, las quitamos y no quedó nada?	(Duda, piensa y dibuja una cucharita).



Entrevistador	Vanesa
¿Quedó una cuchara?	No.
¿Quedaron cucharas?	¡Pues no!
¿Y cómo le harías para que sepa que no quedaron cucharas?	¡Nada!
¿No pones nada?	Pues, no, nada.

Por dificultades organizativas, Vanesa fue de los niños con quienes, lamentablemente, no se pudo concretar el intercambio de mensajes gráficos, a raíz de lo cual desconocemos cómo hubiera realizado el mismo. Podría ser que hubiera presentado su hoja en blanco y no la que hizo en un primer momento. De todas formas consideramos que una vez más, se pone en evidencia el conflicto de representar la resta sin resto.

LA REPRESENTACION GRAFICA Y LA COMUNICACION

Presentaremos el cuadro comparativo entre la situación 1 y la situación 2 en el aspecto que analizaremos.

Cuadro 15 (comparativo)

Movilidad y descentración		Situación 1		Situación 2	
		Cantidad de niños	Porcentaje	Cantidad de niños	Porcentaje
A	Niños que no tuvieron interpretador	3	10%	3	10%
B	Niños que lograron ser interpretados al primer intento	9	30%	18	60%
C	Niños que no lograron ser interpretados al primer intento pero no encontraron otras formas de representación	7	23%	4	13.5%
D	Niños que realizaron más de un intento	11	37%	5	16.5%
T o t a l		30	100%	30	100%

Si comparamos la cantidad de niños que constituyen el grupo B en la situación 1 y la cantidad de niños del grupo B en la situación 2, el aumento es muy significativo. Si además consideramos que la representación de la resta sin resto es más conflictiva, por las razones ya señaladas, entonces este mismo dato cobra mayor relevancia.

Es necesario tomar en cuenta que cuando los niños asumieron la representación en la situación 2 (al igual que cuando la interpretaron) ya lo habían hecho para la situación 1; podría deberse entonces el aumento citado al hecho de que los niños (productor e interpretador) contaron con mayores recursos para resolver el problema en la situación 2.

Tomaremos nuevamente a Diana. Cuando analizamos sus cuatro intentos sucesivos en la situación 1, señalamos que la última modificación realizada (el borrado) resultó absolutamente efectiva para los fines comunicativos. Cuando asumió la representación de la resta sin resto $\boxed{3-3=0}$ (corcholatas) la entrevista fue así:

Entrevistador	Diana
A ver, ¿cómo le harías para que ella se dé cuenta que había tres corcholatas y que después las quitamos?	(Dibuja tres corcholatas e inmediatamente toma la goma y las borra).
¿Ya?	Sí.

Podemos interpretar la acción de Diana y su actitud como si nos hubiera dicho: "Ahora ya sé cómo hacerlo, no necesito probar tanto". La situación 1 le sirvió para encontrar un recurso privilegiado a fin de lograr la comunicación. En la situación 2 sólo lo retoma y la consecuencia fue nuevamente obtener éxito en la comunicación, pero ya no requirió reproducir el proceso de búsquedas y aproximaciones sucesivas.

Ana Paula es un caso similar. En su cuarto y último intento en la situación 1 su producción consistió en represen tar EI en un lado de la hoja y EF en el lado opuesto. Cuando se dispuso a realizar la representación de la resta sin resto repitió el recurso (ya citamos su producción): dibuja tres cucharitas para EI en uno de los lados de la hoja y deja el otro lado en blanco (EF: cero).

Entrevistador	Ana Paula
¿Y cómo podrías hacer algo en una hoja para que Débora pueda adivinar?	Yo no sé hacer cucharitas (toma una cuchara y la contornea a la derecha, y prosigue hasta concluir las tres cucharitas). Ya. No quedó ninguna (y voltea la hoja).
Entonces ella tiene que mirar acá (lado A) para darse cuenta que había tres cucharas y después ¿qué tiene que hacer para adivinar que no quedó ninguna?	Darse cuenta (voltea nuevamente la hoja presentando al entrevistador la página en blanco).

Notamos, a través de los ejemplos citados, que la situación 1 cumplió en estos casos el rol de "situación de aprendizaje". Aun cuando las entrevistas realizadas tuvieron como finalidad obtener información sobre los modos a través de los cuales los niños representan e interpretan representaciones de la resta, es inevitable que en muchos casos dichas situaciones, o aspectos particulares de éstas, constituyan situaciones de aprendizaje.

No es el propósito buscado y a veces dichos aprendizajes contribuyen a complejizar el análisis de los datos, pero cuando el niño tiene la oportunidad de poner en juego sus hipótesis, confrontarlas, modificarlas: aprende.

Pero ¿qué aprendieron estos niños? Como productores fueron encontrando, después de varios intentos realizados en la situación 1, modos de representación más efectivos para fines comunicativos. Como interpretadores, además de haber estado en relación con representaciones diferentes jugando ambos roles (productor e interpretador), podría intervenir el hecho de que siempre se trató de restas y ello permitiría suponer que partían de la hipótesis "también ahora habrá quitado".

Es probable que estas variables incidan en el aumento del logro de la interpretación con el primer intento.

El grupo C disminuyó porque hubo niños que pasaron del grupo C en situación 1 al grupo B o D en situación 2.

Pasar del grupo C al grupo B implicaría "ganar en eficacia", es decir adoptar un recurso representativo que sea más exitoso. Tal es el caso de Luis Francisco, quien en su producción para la resta con resto no logró ser interpretado (hizo de un lado de la hoja EI y EF del lado opuesto). A pesar de estar bien dispuesto no pudo hallar otras formas de representación. En la situación 2 optó por el borrado e inmediatamente fue interpretado, es decir, logró una producción más eficaz (al menos con fines comunicativos).

Pasar del grupo B al grupo D implicaría "ganar en movilidad". Citaremos el caso de Juan Pablo: para la situación 1 $\boxed{4-3=1}$ (monedas) dibujó cuatro triángulos y un hexágono; no logró ser interpretado pero tampoco pudo encontrar otras alternativas para representar la operación. Cuando representó $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas) en su primer intento (ya lo presentamos) dibujó tres cucharitas y al no ser interpretado decidió hacer un nuevo intento; es entonces que agregó la mano superpuesta a las cucharitas ya dibujadas. Juan Pablo pasa, pues, de no movilidad en situación 1 a movilidad en situación 2.

Es necesario volver a enfatizar que en todas las situaciones de producción e interpretación como las que hemos realizado, los dos sujetos juegan un rol determinante. El análisis está centrado en el productor, pero ¿qué hubiese sucedido si el interpretador hubiera sido otro niño? No lo sabemos, tal vez Luis Francisco hubiese sido interpretado con su producción de la situación 1 y en ese caso no lo hubiésemos citado como ejemplo de ganar en eficacia.

Nos interesa presentar ahora el caso de Luis Alfredo, que estando en el grupo D para la situación 1 pasó al grupo C en la situación 2. Luis Alfredo había realizado dos intentos para la situación 1: en el primero dibujó cuatro cucharitas arriba (EI) y tres abajo (cantidad de Op) siendo interpretado aditivamente ("siete"). En un segundo intento repite el dibujo pero colocando una raya que separa EI y Op.

Cuando se trata de representar la resta sin resto $\boxed{4-4=0}$ (cucharitas) dibuja sólo EI, e incluso lo hace con dudas porque su propuesta inicial fue no hacer nada. A pesar de no lograr ser interpretado (el compañero sólo repite: "cuatro, cuatro") no puede encontrar otras alternativas de representación. En este caso el niño pasó de movilidad en situación 1 a no movilidad en situación 2. Pero aparentemente la "nada" como EF fue la responsable de abandonar el intento.

Nuestra hipótesis previa era que la mayoría de los niños presentarían situaciones similares a Luis Alfredo: mayor dificultad para comunicar la operación de la resta sin resto. Si había movilidad en situación 1, que disminuyera; si habían logrado ser interpretados que lo logren en menor proporción en la situación 2, etc. Pero no fue así y consideramos que, en este sentido, el orden de presentación de las situaciones jugó un papel relevante.

Veamos ahora los niños del grupo D. La cantidad de niños disminuyó respecto a la situación 1 y ello se debe al aumento en el grupo B: si fueron interpretados al primer intento no se justificaba hacer otro intento.

Todos los niños del grupo D presentan una constante: el problema de representar la nada.

Debie representó $\boxed{3-3=0}$ (monedas) (*)

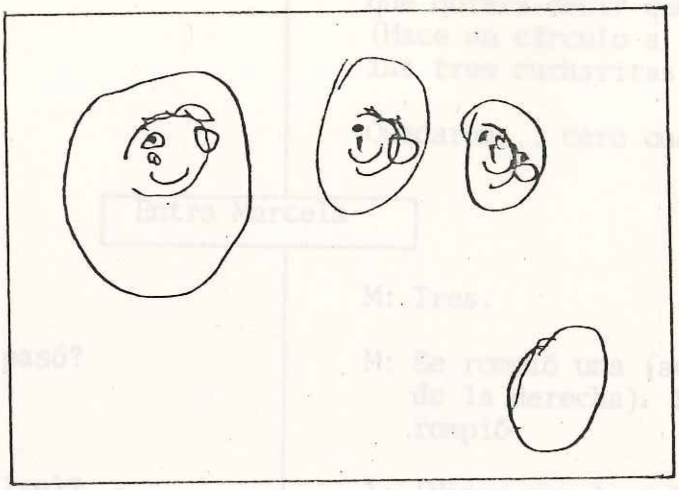
Entrevistador	Debie
	(Dibuja tres monedas). Voy a hacer el señor (dibuja un rostro dentro de cada círculo; así era la marca que había en las monedas). Ya.
¿Y luego qué pasó?	Ya no pongo ninguno.
¿Y cómo Yael se va a dar cuenta que ya no quedó ninguno?	Sí, porque nomás eran tres y si no quedó ninguno pues yo no hago ninguno!
¿Entonces la llamamos?	Sí.
Entra Yael	
(Explica).	Y: Tres.

(*) Si bien dijimos que en la resta sin resto utilizamos objetos no redondos para evitar conflicto con la representación del cero, lo hicimos después de haber entrevistado a algunos de los niños.

¿Y luego?	Y: ¿Qué pasó?
Cuando empezamos había tres pesos ¿y después?	Y: (Duda, piensa. Hace gesto de no saber).

Sale Yael porque haremos otro intento

¿Se podrá hacer algo para que se note que sacamos tres y que no quedó ninguno?	Sólo que lo escriba.
Pero sin escribir ¿cómo se podría dar cuenta?	Diciéndole.
No, diciéndole no, haciendo algo en la hoja para que se dé cuenta que no quedó ninguno ¿qué se podría hacer?	Sólo eso.
¿No se podría hacer otra cosa?	Porque si pongo uno va a decir que son cuatro.
¿Entonces qué se puede hacer para que se dé cuenta que no quedó ninguno?	No sé, sólo que ponga un uno o un cero.
¿Qué será mejor, un uno o un cero?	Un cero.
¿Por qué te parece mejor un cero?	Porque no hay nada ¿ponemos?
Si te parece, ponlo.	

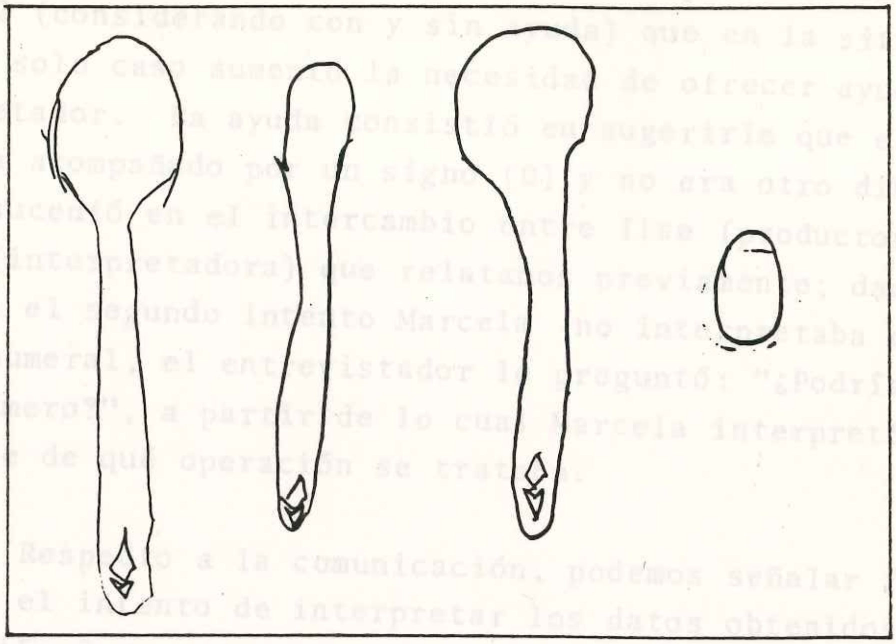


Es evidente la dificultad de Debie para representar "cero"; aunque por último vemos, inesperadamente, que conocía el numeral y su uso.

Ilse representa $\boxed{3-3=0}$ (cucharitas):

Entrevistador	Ilse
¿Cómo le harías?	Tres y luego le ponemos nada, a ver si puede adivinar. (Dibuja las tres cucharitas). Tres cucharas y ¡ya!
¿Qué pasó después?	Tú te llevaste las tres.
Ajá ¿y cómo se va a dar cuenta que yo me llevé las tres?	Pues ¡quién sabe!
¿Cómo le harías?	¿Cómo le haría? (Piensa). Pues poniéndole nada y que ella trate de adivinar.

Si, pero aunque ella trate ¿tú crees que pueda?	No (piensa). Y luego... le pongo una bola... y que quiera decir que es cero. (Hace un círculo a la derecha de las tres cucharitas).
Ajá.	Quedaron... cero cucharitas.
Entra Marcela	
(Explica).	M: Tres.
Y luego ¿qué pasó?	M: Se rompió una (señala el círculo de la derecha). Es la que se rompió.
¿Fue así (a Ilse)?	I: (Niega con la cabeza) Es que las que yo hago son muy difíciles.
Sale Marcela porque haremos otro intento	
¿Qué le podrías hacer?	Pues, le ponemos: "Y se fueron..." (se refiere a escribir) y ahí le dejamos la bola.
Pero estamos tratando de hacer cosas sin letras, por si alguien no sabe leer bien.	Pero yo sé leer regular.
Bueno, por eso vamos a tratar de hacerlo sin letras.	(Piensa).
¿Cómo crees que ella se pueda dar cuenta de que esto (círculo de la derecha) no es una cuchara rota sino un cero?	Pues... lo hacemos de otra forma (borra el círculo) y lo hacemos así (lo vuelve a trazar más ovalado).



Como vemos, Ilse es un caso similar a Debie.

Presentaremos ahora los datos comparativos correspondientes a logros en la interpretación.

Cuadro 16 (comparativo)

Lograr ser interpretado	Situación 1	Situación 2
No logró ser interpretado	11 (4-5 y 6 años)	5 (4 y 5 años)
Logró ser interpretado con ayuda	4 (4 y 5 años)	5 (4-5 y 6 años)
Logró ser interpretado sin ayuda	12 (4-5 y 6 años)	17 (4-5 y 6 años)
T o t a l	27	27

Seis niños más lograron ser interpretados en la situación 2 (considerando con y sin ayuda) que en la situación 1. En un solo caso aumentó la necesidad de ofrecer ayuda al interpretador. La ayuda consistió en sugerirle que el dibujo estaba acompañado por un signo (0) y no era otro dibujo. Ello sucedió en el intercambio entre Ilse (productora) y Marcela (interpretadora) que relatamos previamente; dado que aún en el segundo intento Marcela no interpretaba el óvalo como numeral, el entrevistador le preguntó: "¿Podría ser algún número?", a partir de lo cual Marcela interpretó inmediatamente de qué operación se trataba.

Respecto a la comunicación, podemos señalar finalmente que el intento de interpretar los datos obtenidos en la situación 2 y su relación con la situación 1, nos generaron dudas sistemáticas.

Es probable que realizando otras situaciones de confrontación: comenzar por la resta sin resto, presentar situaciones de suma, realizar diferentes cruces de productores e interpretadores; se pueda dar lugar a sustentar otras interpretaciones más consistentes, además de la importancia del orden de presentación de las situaciones.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Vamos a plantear algunas conclusiones relativas a las situaciones de producción que surgieron con base en el análisis general de las mismas, sin tomar en cuenta si se trató de representar la resta con o sin resto.

a) Un aspecto fundamental es destacar la importancia del proceso mismo de la producción del niño y sus verbalizaciones.

La mayor parte de las interpretaciones que hemos realizado no hubiéramos podido hacerlas si hubiésemos tomado en cuenta exclusivamente el producto final obtenido. Incluso no hemos analizado, por ejemplo, la direccionalidad utilizada por los niños, pero ese dato se puede recuperar a través del orden sucesivo de las graficaciones realizadas.

Como fue evidente a lo largo de nuestro análisis, las verbalizaciones de los niños constituyeron también una fuente permanente de datos e incluso, por momentos, tomó más relevancia que lo gráfico.

b) Al utilizar los niños el recurso del borrado y el de presentar la página en blanco nos obligaron a replantear qué es una representación gráfica y, aún cuando no asumimos definiciones categóricas al respecto, consideramos relevante que dicho concepto haya sido cuestionado. Al mismo tiempo creemos que ambos recursos surgieron porque trabajamos sobre la resta (y además con resultado cero); en situaciones con otras operaciones es probable que ese problema no se hubiera presentado.

c) El punto central que ahora nos interesa desarrollar consiste en el ordenamiento evolutivo de las producciones.

Durante el análisis de las producciones intentamos establecer una secuencia evolutiva a medida que abordamos cada uno de los criterios adoptados:

A) La representación gráfica utilizada.
B) La representación gráfica y los momentos de la operación.
C) La representación gráfica y la comunicación.

Pero entonces surgió un serio problema: ¿con base en qué criterio decidir si una producción es más evolucionada que otra? El problema nos parece sumamente significativo.

Si consideramos la primera línea de análisis (A) podríamos decidir: la mayor aproximación al lenguaje matemático es lo determinante para que una producción sea más evolucionada. Incluso es interesante señalar que fue el único criterio con el cual hallamos relación con el dato cronológico. Es decir, no hubo niños de 4 años que utilizaran signos, hubo algunos niños de 5 años que lo hicieron y con mayor frecuencia los usaron niños de 6 años.

Si hubiésemos optado exclusivamente por esa línea de análisis el problema no habría surgido y se simplificaba el ordenamiento evolutivo en términos absolutos. El solo hecho de agrupar las producciones en: utilización de dibujos, dibujos y signos, signos exclusivamente, ya nos presentaba simultáneamente la secuencia evolutiva; si además nos coincide con los datos cronológicos, la situación está totalmente resuelta.

¿Por qué surge entonces el problema? Porque nos cuestionamos el hecho de analizar las producciones de los niños desde un solo punto de vista.

Al tomar en cuenta la presencia de los momentos de la operación (B) encontramos que si consideramos la presencia de los tres momentos como el mayor nivel evolutivo hay producciones primitivas de acuerdo al criterio A que pasan a estar ubicadas entre las evolucionadas con base en el criterio B.

Un caso sería el recurso del borrado. Son producciones absolutamente apegadas a la búsqueda de la semejanza, los niños se centran en intentar hacer en el papel lo mismo que se realizó en la acción y es difícil imaginar mayor grado de similitud: quitar objetos de la realidad y borrar objetos dibujados. Esas producciones presentan los tres momentos de la operación, tal como lo señalamos durante su análisis, y en ese sentido serían producciones ubicadas en los niveles más evolucionados. Pero desde el punto de vista de la aproximación al lenguaje matemático son las producciones más primitivas, nada dista más del lenguaje matemático que la similitud entre significante y significado y además como recurso individual, no convencional.

Al considerar entonces dos criterios diferentes encontramos a una misma producción ubicada en los extremos opuestos de la secuencia evolutiva.

Incluso el problema se complejiza cuando, tomando un solo criterio, profundizamos su análisis.

Por ejemplo, con base en el criterio B habría diferentes opciones. Una posibilidad es decidir que es más evolucionada una producción si representa los tres momentos, pero surge el hecho de ser Op la representación de un dato cuantitativo y uno cualitativo; entonces ¿es suficiente la representación de uno de esos datos? Porque si mantenemos linealmente el criterio bastaría la representación de Op (sin distinciones internas) para considerar que el momento está representado.

Pero entonces $\boxed{3\ \ 2\ \ 1}$ es más evolucionada que $\boxed{3-2}$ aunque dista de dar mayor información la primera que la segunda representación.

Por lo anterior habría una segunda opción: es más evolucionada la producción que ofrece mayor información sobre la operación realizada y, en este último caso, $\boxed{3-2}$ sería más evolucionada que $\boxed{3\ \ 2\ \ 1}$.

A su vez las producciones se reordenan cuando introducimos el criterio de la comunicación (C).

Desde nuestro punto de vista C determina y define los alcances y limitaciones de todas las producciones. Constituye, de alguna manera, el eje organizador en el análisis de las situaciones. La afirmación anterior se fundamenta en el rol que asignamos a las condiciones de producción, a lo cual ya nos hemos referido durante el análisis de las situaciones. Respecto a NINGUNA producción podríamos decir que sería igual o similar si las condiciones de producción fueran otras.

En este sentido los criterios A y B se cruzan permanentemente con el criterio C. A su vez, si profundizamos el análisis del criterio C, podríamos determinar los niveles evolutivos desde diferentes puntos de vista.

1.- Movilidad. Ya señalamos su importancia y los niños la pusieron en evidencia en los sucesivos intentos. Sin embargo, puede haber diferentes niveles de movilidad, desde la realización de pequeñas modificaciones hasta la decisión de hacer una producción absolutamente diferente.

2.- Descentración. Implica la posibilidad de ponerse en el punto de vista del otro; si bien requiere de la movilidad ésta es una condición necesaria pero no suficiente para lograr una mejor interpretación por parte del compañero. Puede darse además el caso que con bajo nivel de movilidad haya alto nivel de descentración, es decir, sin hacer notables cambios en el intento inicial encontrar exactamente cuál es la modificación requerida para que el compañero se aproxime a la interpretación buscada. También puede suceder lo contrario: gran movilidad pero sin descentración y en este caso el niño haría sucesivos y variados intentos pero sin aproximarse a los modos de interpretación del compañero.

3.- Lograr ser interpretado. Desde este punto de vista, cuando los niños productores lograron que su compañero interprete exactamente la operación representada sería un nivel alto, incluso si lo logró al primer intento podría considerarse el nivel más evolucionado ya que su representación inicial logró, sin ninguna dificultad, cumplir su función.

Retomando las condiciones de producción: a los niños se les pidió que realicen sus producciones PARA QUE SEAN INTERPRETADAS POR OTRO NIÑO DE SU MISMA EDAD, y consideramos que eso básicamente determinó el tipo de producciones obtenidas.

Por ejemplo, si a los niños que utilizaron signos se les hubiera planteado que realizaran su producción para que la interpretara un niño más pequeño, hubiese sido más evolucionado el niño que desechara el uso de los signos.

Incluso tenemos el caso de Diana, quien después de utilizar los signos recurre al borrado: desde el punto de vista del criterio A habría realizado un retroceso, pero tomando en cuenta el criterio C alcanzó uno de los niveles más altos desde dos puntos de vista que se señalaron para este criterio (1 y 2).

Otra posibilidad sería plantear a los niños que produzcan la representación para recordar lo realizado; sería suficiente que el autor lograra recuperar la información para considerarlo en los niveles más evolucionados, independientemente de los recursos gráficos que pusiera en juego.

Tomemos nuevamente el uso del borrado. Como ya dijimos, según el criterio A sería un nivel muy primitivo, desde el criterio B sería de los más evolucionados y respecto al C no podríamos tomar una decisión, excepto desde el punto de vista 3, ya que por la efectividad de este recurso desconocemos generalmente las posibilidades de movilidad y descentración de los niños que lo utilizaron.

Todas las variantes y cruces de criterios que señalamos a lo largo de este capítulo no son los únicos posibles. Es muy probable que se puedan abrir y complejizar aún más.

Lo que hemos planteado no significa que consideremos inadecuada la forma de obtención de los datos, sino que nos interesa enfatizar su peso y rol determinante. Consideramos que no es válido establecer ciertas condiciones de producción y luego evaluar los productos haciendo omisión de las mismas. El problema del ordenamiento evolutivo de las producciones, como todos los aspectos del análisis de los datos, debe tomarlas en cuenta.

Por supuesto, nada sería más sencillo que elegir como criterio evolutivo la aproximación al lenguaje convencional, pero el hecho de plantear a los niños la realización de un mensaje ¿es la forma más idónea para que pongan en juego su conocimiento sobre la convencionalidad?

Y si no lo es, entonces no corresponde optar por ese criterio de análisis. Se requiere cambiar de criterio o diseñar otra forma de obtención de los datos.

Nos planteamos esta pregunta: si un adulto, incluso un matemático, quisiera enviar un mensaje a otra persona para informarle que tenía tres objetos y perdió algunos o todos ellos ¿escribiría $\boxed{3-2=1}$ ó $\boxed{3-3=0}$? Sin embargo, si su mensaje difiere marcadamente de esos modos de representación, ello no nos haría suponer que desconoce los signos matemáticos y su función.

Si es así ¿entonces por qué evaluaríamos las producciones de los niños como menos evolucionadas cuando utilizan otros recursos representativos?

Por lo que hemos planteado es que cuestionamos el criterio: "del símbolo al signo" como forma privilegiada de analizar las producciones de los niños. Ese criterio sería válido sólo y siempre que las condiciones de producción propicien el uso de los signos.

Podemos agregar, si las razones expuestas no fueran suficientes, otros elementos que participan en la obtención de los datos tales como la intervención del entrevistador. Analizando, en los registros de las entrevistas, todas las intervenciones del entrevistador notamos que en algunos casos enfatizamos Op y en otros EF. Por ejemplo: "¿Cómo harías para que se dé cuenta que sacamos tres?" o "¿Cómo harías para que se dé cuenta que no quedó ninguna?". Es probable que esa diferencia haya marcado también diferencias en los modos de representación de los niños. Pero este aspecto escapa a las posibilidades de análisis por la falta de sistematización; ello requeriría un trabajo específico sobre el efecto de variaciones (aparentemente mínimas) en las consignas.

Como síntesis: dejamos de lado el objetivo de ordenar evolutivamente las producciones para centrarnos en el análisis de lo que ello implica y ese es el punto que nos interesó señalar.

CAPITULO II

SITUACIONES DE INTERPRETACION

SITUACIONES DE INTERPRETACION

OBTENCION DE LOS DATOS

Las situaciones de interpretación consistieron en entrevistas individuales, en las que el entrevistador comenzaba presentando al niño una tarjeta donde estaba la representación convencional de una resta. El entrevistador interrogaba al niño respecto a su conocimiento de los signos que figuraban en la tarjeta y, de acuerdo a las respuestas obtenidas, proseguía el interrogatorio en dos sentidos: intentaba que el niño justificara o ampliara sus afirmaciones y, para propiciarlo, le planteaba la posibilidad de agregar o quitar signos. Además, el entrevistador interrogaba sobre los signos que el niño no había tomado en cuenta.

Posteriormente el entrevistador contaba al niño lo que estaba representado en la tarjeta; por ejemplo: "Así apuntó una niña que tenía cinco dulces, se comió dos y le quedaron tres". Esto último se realizaba porque no formaba parte de las expectativas que los niños hicieran una interpretación convencional de la representación presentada, dada su edad y experiencia escolar.

Cuando el entrevistador verificaba a través de la verbalización del niño, que éste había comprendido la explicación ofrecida respecto a la operación representada en la tarjeta, retomaba algunos de los signos indagando nuevamente sobre su significado. De esta forma intentaba detectar si el niño modificaba su interpretación después de recibir la información citada.

Por último el entrevistador solicitaba al niño la realización efectiva de la operación representada, utilizando un conjunto de dulces que le ofrecía con ese fin.

Se puede notar que realizamos las situaciones de interpretación invirtiendo la secuencia y los roles respecto a las situaciones de producción. En las situaciones de producción partíamos de la acción que realizaba el entrevistador, para pasar luego a la representación gráfica que realizaba el niño. En las situaciones de interpretación comenzábamos por la representación gráfica hecha por el entrevistador llegando finalmente a la acción, que realizaba el niño.

Tomamos esta decisión por considerar que para obtener información sobre las interpretaciones espontáneas de las representaciones convencionales debíamos partir de éstas. Podríamos haber comenzado por la acción y después presentar al niño la representación convencional indagando si le parecía una manera adecuada de representar lo sucedido o además presentarle otras representaciones posibles, para que él seleccionara la más pertinente y lo justificara. La objeción que tendría esta opción es que desconoceríamos entonces cómo el niño interpreta la representación convencional sin datos contextuales.

Por otra parte, es obvio, que en las situaciones de producción no era posible partir de la representación, ya que ésta es justamente la representación de algo, entonces era necesario comenzar por la acción para luego representarla.

En cuanto a los roles del entrevistador y el niño, naturalmente no pueden intercambiarse. Si se desean conocer las formas de representación del niño, éste debe producirlas y si se busca su interpretación de la representación convencional es necesario que la realice el entrevistador ya que el niño la desconoce, o al menos eso presuponemos.

Respecto a la secuencia de las situaciones, en general se realizaron primero las situaciones de producción y luego las de interpretación. Ello fue así para intentar no "contaminar" las producciones espontáneas con un trabajo previo sobre las representaciones convencionales. En algunos casos excepcionales fue a la inversa, por dificultades organizativas.

Para el diseño final de las situaciones de interpretación no hicimos prácticamente uso de la etapa de sondeo. Consideramos que ello fue un serio déficit y lo retomaremos en el análisis posterior.

Las situaciones de interpretación fueron dos(*). La primera consistió en la resta con resto, que denominamos Situación I. La segunda situación de interpretación, la resta sin resto, fue denominada Situación II. Como en el caso de las situaciones de producción, analizaremos cada una de ellas sucesivamente para luego plantear algunas conclusiones que involucran a ambas.

Los ejes de análisis para las situaciones I y II son:

- Los signos.
- La posición y la direccionalidad.

(*) También fueron situaciones de interpretación los momentos de intercambio de mensajes producidos por los niños, pero sobre ello haremos algunas consideraciones posteriormente.

SITUACION I

Para la situación I se utilizó una tarjeta con la siguiente representación:

$$\boxed{\begin{array}{r} 5 \\ -\ \ 2 \\ \hline 3 \end{array}}$$

Esta representación está constituída por:

. Cinco signos (tres de ellos numerales).
. Una posición y direccionalidad determinada que establece una relación específica entre los cinco signos, otorgando a la representación un significado.

LOS SIGNOS

En cuanto a los signos haremos una distinción entre los numerales y "las rayas". Esta distinción la consideramos pertinente porque se trata de dos clases de signos: mientras los numerales representan cantidades, los otros signos (en este caso "las rayas") representan operaciones o relaciones entre las cantidades.

En el caso de los numerales utilizados, por ser cifras de un dígito, se simplifica la situación. Los numerales de dos y más dígitos, aun cuando continúan siendo la representación de cantidades, tienen como característica la utilización de cierto modo interno de relación entre ellos dado por el valor posicional. Por ejemplo, en la cifra $\boxed{372}$ hay cierta relación entre los numerales que le asigna un valor determinado a la cifra, por lo cual no es equivalente a $\boxed{723}$; al modificarse la posición de un numeral respecto a otro, el valor de la cifra se modifica.

Por lo anterior podemos afirmar que, en el caso de la representación utilizada en este trabajo, cada numeral representa una cantidad "simple", sin componentes internos.

Los dos signos restantes, a pesar de su semejanza figural, representan significados totalmente diferentes. Uno de ellos representa el aspecto cualitativo de Op (raya corta) y el otro signo (raya larga) representa "lo que sigue abajo es EF"; establece una relación entre los numerales asignando un rol a la cantidad representada abajo respecto a las de arriba.

Además, una diferencia fundamental entre los numerales y los otros signos consiste en la siguiente: los numerales tienen autonomía pudiendo estar escritos en forma aislada. Es posible escribir una lista de cantidades y ello tiene sentido en sí mismo.

Los otros signos mantienen una relación de dependencia con los numerales, pero se distinguen entre sí. El signo "menos" tiene significado propio como representación de un tipo específico de operación, es decir, se utiliza entre numerales para representar con cuáles cantidades se realiza la operación, pero constituye un signo que tiene significado. La raya larga por sí misma no es portadora de significado; su función es establecer un vínculo entre los numerales ubicados sobre ella y los ubicados debajo.

Vamos a analizar ahora cuáles fueron los modos de interpretación que los niños realizaron de cada uno de los signos.

- <u>Los numerales</u>

Sin lugar a dudas son los signos que interpretaron de manera convencional casi todos los niños.

Frente a la pregunta: "¿Conoces algunas de estas cosas?" (señalando los elementos de la representación que figuraban en la tarjeta) la mayor parte de los niños respondió de manera inmediata verbalizando el nombre de los numerales.

Veamos algunos ejemplos:

Entrevistador	Luis Francisco
¿Tú conoces algo de lo que está ahí?	(Afirma).
¿Qué conoces?	Tres, dos, cinco (señalando cada uno).

Entrevistador	Débora
¿Conoces algo de esas cosas?	Sí.
¿Qué conoces?	Es un tres.
¿Cuál es el tres?	(Señala 3).
¿Algo más conoces?	Que está el dos (lo señala).
Muy bien ¿y conoces algo más?	Es un cinco (lo señala).

Entrevistador	Gladys
¿Conoces algo de lo que está ahí?	Un tres, un dos y un cinco (señalando cada uno).
¿Dónde lo aprendiste?	Los aprendí cuando era chiquita (Gladys tiene cuatro años).

Entrevistador	Daniel
¿Conoces algo de lo que está ahí?	¿De números?
A ver ¿qué conoces?	El cinco, el dos, el tres. Todos los números (señalando cada uno).

En el caso de Ana hubo una variante:

Entrevistador	Ana
¿Conoces algo de esto?	(Niega).
En esta tarjeta ¿está escrito el cinco?	(Afirma y señala) Arriba.
¿Y el tres?	(Afirma) Abajo.
¿Y hay un dos?	En el medio.

Probablemente Ana entendió la pregunta como si se le interrogaba sobre el significado total de la representación y no sobre cada uno de sus elementos.

Citaremos ahora los niños que no hicieron una interpretación totalmente convencional de los numerales o de algunos de ellos.

Entrevistador	Vanesa
¿Conoces algo de lo que está ahí?	No.
¿Dirá tres?	Sí (señala 3).
¿Y cinco dirá?	Sí (señala 5).
¿Y dos, dirá dos en algún lado?	No.
(Le cuenta la acción representada en la tarjeta).	(Confirma haber comprendido).
¿Dirá dos en alguna parte?	No.

Vanesa conocía algunos numerales pero no los tres numerales que figuraban en la tarjeta, incluso a pesar de comprender la operación relatada y lograr reconstruirla, mantuvo su negativa respecto a la escritura del dos.

Entrevistador	Fabián
¿Conoces algo de lo que está puesto en la tarjeta?	Sí.
¿Qué es?	Números.
Muy bien ¿qué números?	El dos.
¿Cuál es el dos? Muéstrame con tu dedo.	(Señala 3).
¿Y conoces alguna otra cosa?	Un número.
¿Qué número?	Dos...tres (señala 2).
¿Y éste (señala 5)?	El ocho.

Fabían conoce algunos numerales aunque no ha logrado identificar convencionalmente cada uno, además, siguiendo la entrevista, denomina "letras" a los numerales.

Entrevistador	Berna
¿Conoces algo de lo que está aquí?	No.
¿Nada, nada?	No.
¿Dirá tres?	Sí (señala 2).
¿Y cinco, dirá cinco?	(Señala nuevamente 2).
¿Ahí dirá tres y cinco también?	Sí.

Berna sabía que los números se representan y también reconoció ciertas formas gráficas como numerales (no señaló las rayas), aun cuando desconocía cuál es la cantidad representada con cada numeral que hay en la tarjeta y no consideraba que para representar cantidades diferentes deban marcarse diferencias gráficas.

Entrevistador	Addina
¿Tú conoces algo de lo que está ahí?	Sí.
¿Qué conoces?	Unas letras.
¿Conoces alguna de esas letras? ¿cuáles?	"a" (5), "i" (2), el tres (3).

Addina designa como "letras" a letras y numerales. Por un lado los numerales son para Addina letras y además al leerlos interpreta algunos como letras y el último (3) como la representación de tres.

Para sintetizar los modos en los cuales los niños interpretaron los numerales presentamos el siguiente cuadro.

Cuadro 17

Interpretación de numerales	Edades	Cantidad de niños
No totalmente convencional	4 años	4
Totalmente convencional	4-5 y 6 años	26
T o t a l		30

- La raya larga.

La mayor parte de los niños otorgaron funcionalidad a la raya larga (y también al signo menos) en relación con los numerales. El tipo de funcionalidad atribuido es sumamente variado, pero el hecho de ponerla en relación con los numerales nos permite retomar lo planteado anteriormente: los numerales son autónomos mientras los otros signos mantienen relación de dependencia con éstos. Ningún niño acudió a las rayas para interpretar los numerales, pero casi todos los niños hicieron lo contrario (acudieron a los numerales para interpretar las rayas).

Veamos las diferentes variantes en los modos de interpretación de la raya larga.

Cuadro 18

	Interpretación de la raya larga	Edades	Cantidad de niños
A	Función desconocida	4 y 5 años	6
B	Como número	4 y 5 años	2
C	Para impedir movilidad	4 y 5 años	8
D	Como separador	5 y 6 años	5
E	Función vinculada al lenguaje matemático	5 y 6 años	4
F	Función convencional	5 y 6 años	5
	T O T A L		30

Los niños del grupo A se negaron a realizar cualquier tipo de interpretación, aun cuando insistimos de diversas formas. Sostuvieron "no sé" hasta sus últimas consecuencias.

Entrevistador	Addina
¿Y para qué estará ahí? (señalando la raya larga).	Tú lo escribiste.
¿Y por qué lo habré escrito?	(Gesto de no saber).
Pero ¿para qué será?	No sé.
¿Se puede quitar?	No.
¿Por qué no se puede quitar?	Porque no.
¿Y poner más?	No.
¿Por qué no se podrá?	Porque si no está mal escribido.
¿Y para qué está escrito?	No sé.

Addina no encuentra justificación para la presencia de la raya larga, pero además considera (como muchos de los niños entrevistados) que la representación gráfica es intocable, nada se puede agregar ni quitar, aunque no logre justificarlo. A veces los niños responden: "porque así lo hicieron", como si fuera razón suficiente para sustentar la negativa de hacer modificaciones.

Entre los niños que no hicieron interpretación sobre la raya larga encontramos dos variantes. Una es (como Addina) desconocer su función, pero sostener que su presencia es imprescindible. La otra variante consiste en desconocer también el rol de ese signo, pero proponer quitarlo. Tal es el caso de Vanesa:

Entrevistador	Vanesa
¿Para qué habrán puesto esta raya? (señala la raya larga).	No sé.
A ver ¿por qué crees que está aquí?	Para quitarla.

¿Habrá que quitarla?	Sí.
¿No hace falta esa raya?	No.
¿Se puede sacar?	Sí.

De los seis niños que no hicieron ninguna interpretación sobre la raya larga, cuatro niños sostuvieron que debía estar presente y dos niños plantearon la necesidad de quitarla.

Los únicos casos que consisten en interpretar la raya larga (o ambas) de manera autónoma respecto a los numerales, son justamente los dos niños del grupo B, quienes la interpretaron como numeral.

Entrevistador	Patricio
¿Y acá? (señala R.C*)	El uno.
¿Y ésto? (señala R.L.**)	Y también el uno.
¿Y este uno (R.C) es igual o diferente a éste (R.L)?	Uno y uno.
¿Y por qué este uno (R.C) estará más chiquito y éste (R.L) más grande?	No son iguales.
¿Por qué no son iguales?	Hubieran hacido otro chiquito acá (señala R.L).
¿Y para qué sería?	Este (señala R.L) es más grande.
¿Y para qué pondrías uno así (R.C) acá (R.L)?	Para que sean dos unos chiquitos.

---

* RC: Raya corta.

** RL: Raya larga.

Patricio conocía la forma gráfica del numeral 1, aunque posiblemente desconocía su posición convencional. Tal vez le molestó la raya larga porque rompe la proporción entre los numerales; si todos los signos de la tarjeta fueran numerales realmente ese "uno" sería demasiado grande en relación con los otros signos. Para Patricio las dos rayas son "unos".

Entrevistador	María José
¿Y esto? (señala R.L).	Uno.
Este uno (R.L) ¿está puesto igual que el cinco, el dos y el tres?	No.
¿Por qué será que lo habrán puesto diferente?	Porque está acostado.
¿Y por qué será que lo habrán puesto acostado?	Porque no cabía.

Revisando este fragmento de la entrevista con María José notamos que conocía la posición convencional del numeral 1, y ello lo supimos porque el entrevistador indagó al respecto. A Patricio no lo interrogamos sobre ese punto por lo cual dijimos que "posiblemente" desconocía la posición convencional, pero no podemos afirmarlo. De todas maneras, los dos niños aceptan la posibilidad de poner el 1 en posición horizontal.

Los niños de los grupos C y D otorgaron a la raya el rol de separador, pero los hemos subdividido porque la diferencia que hay entre ellos es significativa.

Los niños del grupo C son probablemente los que han dado las respuestas más interesantes. Parecen atribuir a los elementos gráficos propiedades de ciertos objetos físicos: moverse, aplastarse, revolverse.

Veamos algunos ejemplos:

Entrevistador	Héctor
Y ésto (R.L) ¿para qué estará?	Para separar el tres.
¿Y por qué habrá que separarlo?	Porque si no estaba hasta acá, junto (señala el 2).
¿Y por qué habrá que ponerlo separado?	Para que no esté todo aplastado.

Entrevistador	Rita
	Esta (señala R.L) para que el tres no se revuelva, el tres con el cinco y el dos con el tres.
¿Y acá (entre el 5 y el 2) está revuelto?	No...sí.
¿Habría que poner más rayas?	Sí.
¿Dónde?	Acá (señala entre el 5 y el 2).

Entrevistador	Juan Pablo
	Para que no se confundan.
¿Qué es lo que uno se podría confundir?	Se subieran (señala el 3) y se bajaban (señala el 2).
¿Y se podrían poner más rayas?	Sí, como ésta (señala R.L).
¿Dónde pondrías más rayas como ésta (R.L)?	Acá otra (señala entre el 5 y el 2).

Entrevistador	Daniel
	Para que el tres no moleste al dos y el dos no moleste al tres.
¿Y así está bien?	Sí.
¿Se podrá poner más rayas?	Esta (señala R.C).
¿Cómo?	Hasta acá (la prolonga continuando el señalamiento entre el 5 y el 2).
¿Así sería mejor?	Sí.
¿Por qué?	Para que el cinco no moleste al dos.

Así interpretaron los niños del grupo C la función de la raya; si bien es para separar, dicha separación pareciera cumplir el rol de impedir la movilidad. Movilidad atribuída a los otros signos (en este caso los numerales) y justamente por eso sería necesario agregar otra raya entre el 2 y el 5, para que no haya movimiento entre ellos.

La raya pareciera cumplir el rol de constituir estantes que permiten ubicar a cada numeral en su compartimiento correspondiente. En este sentido podría considerarse que los niños de este grupo no interpretan la raya como una representación propiamente dicha, no sería un objeto sustituto, sino que la interpretan como objeto físico en sí mismo: es el soporte de los numerales gracias al cual éstos conservan el lugar asignado.

Los niños del grupo D también interpretan la raya como separador, pero sólo porque es mejor que todo esté bien separado, sin aludir al movimiento.

Entrevistador	Luis Alfredo
¿Y para qué estará esta raya? (R.L).	No sé bien...para separar.
¿Y para qué hay que separarlo?	Para que esté bien.
¿Habría que poner más rayas?	Acá (señala entre el 5 y el 2).
¿Pero no se podría sacar?	No.
¿Por qué?	Tiene que estar.
¿Para qué?	No se vería bien.

Luis Alfredo no logra justificar la necesidad de la separación más allá de "quedar bien", pero deja claro que es mejor con la raya, y que incluso sería necesario agregar otra entre 2 y 5.

Entrevistador	Ana
Y ésto (R.L) ¿para qué es?	Para seguir abajo.
¿Cómo es eso?	Para que esté abajo otra cosa.

En el caso de Ana quedó explícito el criterio de separación en sí mismo: "para que esté abajo otra cosa". Es decir, si algo se termina y empieza otra cosa es necesario separar, cada cosa debe tener un lugar propio y diferenciable.

Entrevistador	Yael
¿Y ésto? (R.L) ¿esta raya larga?	No sé.
¿Para qué estará ahí?	(Duda).

¿Qué se te ocurre, para que será...?	Para que no estén tan juntos.
Claro ¿y se podrían poner más de esas rayas?	Sí (señala entre el 5 y el 2).

Yael (como lo hizo Ana) sustentó la función de la raya en la separación misma: para que los numerales no estén juntos, o al menos no TAN juntos.

La misma interpretación realizó Cyntia:

Entrevistador	Cyntia
¿Y la raya grande?	Para que el tres esté separado del dos.
¿Y se podrían poner más?	¿De ésta? (señala R.L). Nomás aquí (señala entre el 5 y el 2).

Todos los niños del grupo D realizaron interpretaciones como las citadas y propusieron agregar otra raya larga entre el 5 y el 2, lo cual es congruente: si es mejor que los numerales estén separados con una marca gráfica, entonces habría que separarlos gráficamente a todos y no sólo a algunos.

También desde el punto de vista convencional la raya larga cumple el rol de separador, pero un tipo de separación específica: diferenciar EF de los otros momentos de la operación. Los niños del grupo D, aun cuando otorgan la función de separador a la raya larga, la consideran como separación conveniente entre numerales y al proponer agregarla entre el 5 y el 2 confirman su diferencia con la interpretación convencional.

A partir de los grupos E y F se nos presenta una dificultad: no podemos analizar sus interpretaciones de la raya larga aisladamente de la realizada para el signo menos, porque interpretaron una tomando en cuenta la otra.

Los niños del grupo E hicieron interpretaciones como las siguientes:

Entrevistador	Riger
(Señalando R.L) ¿para qué estará?	Para una suma.
¿Para qué se pone esta raya?	Para sumar.
¿Y sin esta raya no se puede sumar?	No.
¿Se podrá poner más rayas de ésas (R.L)?	No.
¡Ah! ¿hay que poner una sola?	Sí.
Y en vez de una raya ¿se podría poner un punto, una bolita, otra cosa?	No.
¿Por qué?	Porque no se suman.

Riger puso en evidencia su conocimiento respecto a ciertos elementos de la convencionalidad; aunque en la tarjeta no estaba representada una suma, es cierto que también para representar la suma se puede utilizar una raya para diferenciar o separar EF.

Dado que Riger se negó a quitar o agregar rayas le propusimos otras modificaciones: cambiar la marca gráfica de la raya, aunque conserve su función. Riger se negó también a esos cambios (veremos posteriormente la coherencia de Riger cuando tratemos el signo "menos").

Entrevistador	Catalina
Y esa raya (R.L) ¿para qué estará?	No sé (levanta los hombros).
¿Para qué crees?	Para sumar.
¿Y por qué se necesitará poner una raya para sumar?	(Piensa) porque si no no se puede hacer la suma.
¿Se podrían poner más rayas?	¡No!
¿Y quitarlas?	¡No!
¿Por qué?	Porque no se podría hacer la suma.

La interpretación de Catalina es muy similar a la realizada por Riger. Ambos explicitan además que la suma es con raya, lo cual implicaría que posiblemente para ellos sólo se suma con lápiz y papel.

Entrevistador	Greta
¿Y ésto (señala R.L)?	Es una raya.
Ajá ¿y por qué la habrán puesto?	Porque es una suma.
¿Y cuando es una suma hay que ponerle una raya?	(Afirma).
¿Y por qué será que hay que ponerle una raya?	Porque si no no saben que es una suma.
Y dime, de estas rayas (R.L) ¿se podrían poner más?	Sí.
¿Dónde crees que se podría poner más?	Acá (señala a la derecha de la operación representada, en el espacio en blanco).
¿Para qué?	Para hacer más sumas.

Greta nos dice: se suma en el papel, pero además para hacer mucha sumas, una al lado de la otra.

Los niños del grupo E interpretaron la raya larga como elemento constitutivo de la representación de la suma (¿o de la suma y no de su representación?)

Para interpretar las respuestas obtenidas habría al menos, tres posibilidades:

- Los niños consideran la raya como el signo que representa el aspecto cualitativo de Op en la suma (+).
- Le asignan a la raya la función de separar los sumandos del resultado de la suma.
- Los niños designan con el término "suma" al genérico "cuenta".

No tenemos datos suficientes para tomar la decisión. Si la consideran como el signo de la suma (+) la respuesta es errónea desde la perspectiva de lo convencional. Si es la raya que separa los sumandos del resultado (aun cuando en la tarjeta no había sumandos) se aproximan notablemente a la interpretación convencional. Si suma significa cuenta, la interpretación es convencional.

En este momento analizaremos sus interpretaciones sobre el signo menos para ver si de esa forma (obteniendo más información) logramos tomar una decisión respecto a nuestra interpretación de sus respuestas.

Excepto una niña, los demás miembros del grupo E interpretaron el signo menos como "menos" o "para restar".

Entrevistador	Riger
¿Y esto? (señala R.C).	Para que se reste.
Y me dijiste que ésta (R.L) es de la suma ¿para qué está?	Para sumar.
¿Y de ésta (R.C) se puede poner más?	No.
¿Para qué está?	Para restar.
¿Y se podría poner así (señala un movimiento vertical) o así torcida (señala en dirección oblícua)?	No, porque no se resta.
¿Tiene que estar así? (hace un movimiento horizontal).	Sí.

Riger presenta dos datos: uno es su negativa a realizar modificaciones a los signos (como vimos también respecto a la raya larga), el otro dato se refiere a "suma" y "resta" aun cuando no se indagó sobre su concepto de cada uno de ellos, en este caso pareciera que la raya larga es el signo de la suma (+) por contraposición con el signo de la resta (-).

Catalina dijo:

Entrevistador	Catalina
¿Y ésta (señala R.C)?	Menos.
¿Y el menos para qué sirve?	Para quitarle.

Pero cuando se le propone quitar las rayas planteó que no se puede porque "no se podría hacer sumas" (ya citado). En este caso el término suma parece designar al concepto de "cuenta".

Este uso de la palabra suma no es exclusivo de Catalina: con frecuencia encontramos niños que atribuyen al término "sumas" el significado de cuentas u operaciones matemáticas; con "voy a hacer las sumas" o "me dejaron muchas sumas" quieren decir que harán operaciones y éstas pueden ser sumas, restas, multiplicaciones, divisiones. Este hecho no es casual: la suma parece ser, en algunos casos, el modo privilegiado de operar matemáticamente aun cuando el problema esté planteado en términos de otra operación. Pero ello es parte de otro tema: ¿qué procedimientos espontáneos ponen en juego los sujetos para resolver problemas matemáticos?

Con base en los datos recogidos continúa la duda respecto a la intepretación que hicieron los niños del grupo E sobre la raya larga. De todas maneras podríamos afirmar que la presencia de las DOS rayas (además de los numerales) determinó la manera de "ver" a cada una de ellas.

Ahora bien, para categorizar a los niños del grupo E decidimos denominar a la función que le otorgaron a la raya larga como "vinculada al lenguaje matemático" y en este sentido estarían más próximos a la convencionalidad que los niños del grupo D. Pero entonces surge que los niños del grupo D interpretaron la raya como separador (y lo es convencionalmente) mientras los niños del grupo E la interpretaron en relación ambigua con la suma y no lo es convencionalmente (no había representación de suma en la tarjeta).

De todas maneras consideramos al grupo E más próximo a la convencionalidad que al grupo D por lo siguiente: los niños del grupo D asignan a la raya la función de separador, pero a la totalidad de los elementos gráficos presentes en la tarjeta le atribuyen como significado un conjunto de numerales separados por rayas (por lo cual faltan rayas). Los niños del grupo E interpretarían la raya en relación a suma, pero en conjunto, la tarjeta tiene para ellos la representación de algo vinculado a una operación matemática y en este sentido se aproximan a la interpretación convencional.

Los niños del grupo F interpretaron la raya larga de manera convencional.

Entrevistador	Luis Gabriel
¿Y esto (señala R.L) que está aquí, qué será?	Para separar ésto (señala el 2 y el 3).
¿Por qué habrá que separarlo?	Porque es una resta.
¿Y cómo sabes que es una resta?	Porque tiene una rayita (señala el signo menos).
¿Así que esta rayita (R.C) es para que sea una resta?	Sí.
Y dime, si no estuvieran estas rayas (tapa R.C. y R.L) ¿no sería una resta?	No.
¿Qué sería?	Sería una línea de números.
¿Y qué se hace cuando hay una resta?	(Piensa) Poner el número que corresponde abajo.
Ajá, pero ¿cómo sabes cuál es el número que corresponde?	Contar con los dedos.
¿Y cómo cuentas con los dedos?	(Hace la operación con apoyo de los dedos, extiende los cinco dedos) Cinco menos dos (dobla dos dedos) tres.
¿Y se podrían poner más rayas?	No, nada más ésta.
¿Por qué?	Porque es una resta, y así siempre tienen que estar las restas.

Analizando este fragmento de la entrevista nos queda una duda: si Luis Gabriel considera las marcas gráficas que hay en la tarjeta como una representación de la resta o la resta en sí misma. De todas maneras, si para él es la resta, no sería sólo el modo de interpretación de Luis Gabriel. Ya analizamos ese problema (que comparten muchos niños y adultos).

Luis Gabriel deja claramente establecida su interpretación de la representación: los numerales sin rayas continuarían siendo numerales, pero las rayas hacen del conjunto de signos la representación de una operación. A pesar de interrogarlo sobre una de las rayas (larga) Luis Gabriel toma en cuenta la otra (signo menos) y los numerales para hacer su interpretación. Es decir, cada uno de los elementos gráficos tiene un significado en función de la totalidad: el todo le da sentido a las partes y por ello los mismos elementos en otro contexto tendrían un significado diferente.

El modo de interpretación difiere de los niños del grupo E. Estos tomaron en cuenta la presencia de los diferentes signos, pero al interpretar las rayas lo hicieron por "contraposición" (una es "menos", la otra es "más"), pero los niños del grupo F interpretaron la totalidad de la representación y a partir de ello atribuyeron los significados a los elementos.

Continuando con el grupo F, presentaremos a Ilse.

Entrevistador	Ilse
¿De esto (presentando la tarjeta) conoces algo?	Mmm...son sumas. No, son restas, perdón. Este (R.C) es el signo menos y éste (R.L) es el signo más.
¿Qué quiere decir que es una resta?	Que le vas bajando números.

¿Cómo sería esta resta?	Mira: cinco menos dos, quedan ¡tres!
Y esta raya (señala R.L) ¿para qué está?	Para que no dijeras: uno, dos, tres; no, ni cinco, dos, tres. Es para que tú no pongas éste (3) acá (al lado del 2), lo pongas abajo. Esta raya (R.L) sirve para separar los números. Por ejemplo: aquí está el dos (2), y el cinco (5) menos (R.C) dos igual a tres (3) Entonces ¡ya! Así es, lo pones y ya. Y luego la siguiente suma y la siguiente y la siguiente...
Y suma ¿qué quiere decir?	Que pones más; y resta: que pones otra resta y otra resta y así vas sumando y restando.
Y dime ¿se pueden poner más de éstas (R.L)?	Sí.
¿Dónde?	Otra acá (arriba del 5) y otra acá (abajo del 3).
¿Para qué sería otra acá (arriba) y otra acá (abajo)?	Pues para que tú, por ejemplo, aquí (abajo del 3) se acaba la suma y no hagas otra acá abajo. Sería eso.

Ilse no requirió de grandes habilidades del entrevistador para dar su punto de vista, fue explícita espontáneamente y era evidente su satisfacción de tener la oportunidad de opinar y ser tomada en cuenta. Desde el inicio del fragmento que presentamos podemos notar que Ilse interpretó la representación como una totalidad, no comenzó por los elementos sino por definir al conjunto de signos: "...son sumas. No, son restas..." Cuando interpretó el signo menos cambió su interpretación sobre la representación global de manera congruente. Y luego describió los elementos y sus funciones.

En cuanto a la función de la raya larga, después de decir que es el signo más, hizo una interpretación convencional: sirve para separar el numeral que representa EF, pero se podrían poner además otras rayas largas para marcar el inicio y el final de la operación, a fin de no juntarla con otras. Dejó también planteada la equivalencia de la raya larga con el signo "igual".

En cuanto al uso del término suma fue, por momentos, ambiguo, en una oportunidad se refirió específicamente a la suma "que pones más". Pero a pesar de plantear explícitamente que la representación de la tarjeta se trataba de una resta dijo: "y luego la siguente suma y la siguiente..." Y al final: "se acaba la suma y..." En ambas oportunidades podría estar utilizando el término suma con el significado del genérico "cuenta" (como en el caso de Catalina). Con Ilse reaparece el planteo de hacer muchas cuentas: "y luego la siguiente, y la siguiente y la siguiente" o "que pones otra resta y otra resta y así".

Veamos el último ejemplo de interpretación convencional:

Entrevistador	Moi
Y acá (R.L) esta raya ¿qué quiere decir?	Es para saber que acá (3) es lo que quedó.

Evidentemente es el caso más claro de interpretar la raya larga como separador del EF.

- <u>El signo menos</u>

Presentamos en el siguiente cuadro las interpretaciones del signo menos.

Cuadro 19

	Interpretación del signo menos	E d a d e s	Cantidad de niños
A	Función desconocida	4-5 y 6 años	15
B	Como número	4 años	1
C	Función atribuida en relación biunívoca al numeral	4 y 5 años	5
D	Como anotación telefónica	5 años	1
F	Función convencional	5 y 6 años	8
T O T A L			30

Los niños que en interpretación de la raya larga constituyeron los grupos E y F hicieron una interpretación convencional del signo menos, excepto Debie.

Entrevistador	Debie
¿Y esta raya que está más pequeñita? (R.C)	(Duda) Puede ser que estás apuntando un teléfono y pones la rayita.
¡Ah! ¿y para qué será que cuando uno apunta un teléfono pone una rayita?	No sé.
Pero ¿estará para algo?	¡Quién sabe!

Debie conoce la convención establecida para apuntar los números telefónicos, no puede justificarla, pero eso le resuelve el problema de interpretar la raya corta.

Los niños del grupo C generalmente no lograron definir una función para el signo menos, pero consideraron que estaba en relación al 2; por lo cual propusieron agregar otra raya corta junto al 5 y al 3.

. . . .

Entrevistador	Luis Francisco
¿Y ésta (RC)?	(Duda).
¿Para qué se te ocurre que puede estar?	Para el dos.
¡Ah! ¿Y se podría poner más rayas como ésta (R.C)?	(Afirma).
¿Dónde se podría poner? A ver, muéstrame.	(Señala a la izquierda del 5 y del 3).
¿Y para qué sería si pones una acá (junto al 5)?	Para el cinco.
¿Y acá (junto al 3)?	Para el tres.

La función se desconoce, pero si el 2 tiene su raya también los otros numerales debieran tenerla.

. . . .

Entrevistador	Gladys
Y ésta (R.C) ¿para qué será?	Es que acá (señala 3) no le pusieron nada y acá (2) sí le pusieron.
¿Entonces?	Hay que ponerle una acá (junto al 5) y otra acá (junto al 3).

Así fueron las respuestas de los niños del grupo C, sólo que dos de ellos asignan además una función específica para el signo menos y es dicha función la que justifica colocar rayas cortas al lado de los otros numerales.

Entrevistador	Fabián
	Esta (señala R.C) es la que detiene aquí (señala el 2).

¿Y dime, se pueden poner más rayitas?	Aquí (a la derecha, entre el 5 y el 2).
¿Y ya estaría bien?	No, hay que poner otra acá (derecha del 5) y acá (derecha del 3).
¿Para qué sería?	Para que no se muevan de su lugar.

Si la función de la raya es detener los numerales, cada numeral necesita su raya. Fabián propuso hacer todos los agregados a la derecha de los numerales; de acuerdo a su propuesta quedaría así:

```
   5 -
 - 2 -
 -----
   3 -
```

Entrevistador	María José
¿Y esto? (R.C).	Para que no se salgan.
¿Que no se salgan?	De derechito.
Esta rayita (R.C) ¿sirve para que esté todo derechito?	No, para el dos.
¡Ah! ¿y éstos (5 y 3)?	No sé.
¿Habrá que ponerles una rayita?	No sé, es mejor con rayita.

María José otorga a la raya corta la funcionalidad que atribuyó Fabián: mantener los numerales en su lugar y aunque no afirma con convicción la conveniencia de agregar una para cada numeral, opina que sería favorable. Nuevamente surge la propiedad de movilidad atribuída a los elementos gráficos.

El niño que interpretó el signo menos como numeral fue Patricio, ya citamos su respuesta: la raya corta es el 1.

Los demás niños entrevistados (¡quince!) se negaron a interpretar el signo menos y mantuvieron su "no sé" hasta finalizar el trabajo con la situación I. Es probable que ello se deba a que el signo menos "queda afuera" del conjunto constituído por los otros signos y en esa medida constituya una dificultad para los niños al intentar adjudicarle alguna función. Lo "no integrado" de dicho signo a nivel gráfico pudo haber contribuído a obtener un porcentaje tan alto (50%) de negativas a interpretarlo.

LA POSICION Y LA DIRECCIONALIDAD

Cuando iniciamos el análisis de la situación I señalamos que en la representación utilizada hay cinco signos, pero además éstos tienen una posición y direccionalidad determinada. Esas propiedades hacen que constituya la representación específica de una resta.

Cada signo ocupa cierta posición respecto a los otros, lo cual determina tanto su significado propio como el significado de la totalidad. La direccionalidad (de arriba hacia abajo) representa los momentos sucesivos de la operación. Para realizar la interpretación convencional se requiere tomar en cuenta las tres propiedades: los signos utilizados, la posición que éstos ocupan y el orden sucesivo dado por la direccionalidad.

Hemos analizado las interpretaciones realizadas por los niños de los signos utilizados y ahora lo haremos de las dos últimas propiedades citadas y su papel en las interpretaciones de los niños. Como lo señalamos: los niños que interpretaron convencionalmente la representación tomaron en cuenta todas sus propiedades simultáneamente, pero ¿qué sucedió con los niños que no lo hicieron? Vamos a analizar las diferencias que ellos presentaron en sus interpretaciones.

- Elementos yuxtapuestos.

Hubo niños que consideraron a los elementos gráficos que estaban en la tarjeta como cinco grafías aisladas, es decir, en sus interpretaciones la posición y la direccionalidad no jugaron rol alguno; pareciera que los signos podrían haber estado ubicados de cualquier otra forma, ocupando lugares diferentes.

Los niños de este grupo interpretaron sólo los numerales y no le atribuyeron ninguna función a las rayas. Además interpretaron cada numeral por sí mismo, sin establecer relación alguna entre ellos, por lo cual podría haber más o menos numerales, ser los que estaban presentes u otros.

De los ejemplos presentados en el inciso anterior, podemos citar a Luis Francisco, Débora o Gladys quienes interpretaron los numerales comenzando por el 3, luego el 2 y por último el 5 o incluso los niños que siguieron un orden descendente, pero pusieron en evidencia que para ellos era aleatorio, como lo hizo Daniel.

Las variantes en este grupo consisten en que algunos niños plantearon la necesidad de dejar las rayas y otros de quitarlas, pero sin lograr justificar una u otra postura. También incluímos en este grupo a quienes interpretaron las rayas como numerales, dado que respecto a la posición y direccionalidad mantuvieron el criterio de no considerarlas.

- Relaciones fragmentarias.

Ubicamos en este grupo a las respuestas de los niños que implican tomar en cuenta la posición de dos o más signos para determinar la función de alguno de ellos. Es decir, asignan a algunos de los signos funciones específicas en relación con otro signo, pero no implica poner en relación a la totalidad de los mismos.

Por ejemplo, hay casos de relaciones biunívocas: cuando en la interpretación se establecen relaciones entre pares de signos, aunque la función atribuída a los mismos sea variable, todas ellas tienen en común plantear la necesidad de poner una raya (larga o corta) a todos los numerales. La función de la raya está en relación a cada numeral; para separarlo, sostenerlo, pertenecerle (una "para" el 2, otra "para" el 3 y otra "para" el 5).

En algunos casos la relación era estrictamente biunívoca, pero en otros casos hubo variantes como: dos a uno. Si se trata de la raya larga: debiera colocarse una entre cada par de numerales (arriba-abajo), si se trata de la raya corta habría que colocarla a los lados de los numerales (derecha-izquierda). En este sentido, los niños de este grupo tomaron en cuenta la posición.

Ahora bien, las rayas debieran ocupar las posiciones ya señaladas por razones "espaciales" o figurales. "Espaciales" podríamos considerar a las interpretaciones que señalaron como función de las rayas: impedir la movilidad o marcar la separación. Es decir, la posición de la raya estaría determinada por una relación espacial con el numeral, la raya otorga al numeral un espacio propio.

La posición determinada por razones figurales aparece cuando los niños ofrecían argumentos tales como: "éste tiene (el 2) y éste (el 3) no". Pareciera que el lugar indicado para el agregado de rayas se justifica en función de darle una mejor forma a la representación, incluso una simetría que no tiene.

La direccionalidad estaba ausente en la interpretación realizada por los niños de este grupo. Aunque en los casos de justificar la posición de la raya "para que no se aplasten" (los numerales) habría una dirección: de arriba hacia abajo, pero entonces la direccionalidad no marca una sucesión sino que se refiere a un "apilamiento". Si los numerales pueden aplastarse es porque están ubicados unos sobre otros y (como si fueran objetos físicos) pueden caerse los de arriba sobre los de abajo. En este sentido también la posición juega un rol determinante. Podemos notar entonces que los niños de este grupo tomaron en cuenta la posición de los elementos gráficos, aunque respecto a los numerales compartieron el modo de interpretación con los niños del grupo anterior: era irrelevante de qué numerales se trataba y cuántos eran.

Con base en lo anterior podríamos decir: la interpretación estableciendo relaciones fragmentarias entre los elementos gráficos, permite justificaciones parciales pero no, encontrar un significado total a la representación.

- <u>Relaciones totalizadoras</u>

En este grupo consideramos a las interpretaciones que tomaron en cuenta mayor cantidad de información gráfica (respecto al grupo anterior) ya que generalmente "vieron" la totalidad de los signos presentados para hacer la interpretación de cada uno de ellos.

Cuando los niños interpretaron una de las rayas (corta) como el signo "menos" y la otra raya (larga) como el signo "más", consideramos que pusieron en juego su conocimiento sobre el lenguaje matemático, aun cuando no fuera convencional. En estos casos no tenemos datos suficientes que nos permitan afirmar cuál fue el rol de la posición y direccionalidad pero consideramos que ambas propiedades (o al menos la posición) fueron tomadas en cuenta, ya que los niños "vieron" en la tarjeta una representación vinculada a operaciones matemáticas.

Es probable que la presencia de numerales con rayas colocadas en cierta posición haya sugerido a los niños de este grupo las interpretaciones que realizaron y que variando la ubi cación espacial de los signos, no hubieran realizado interpretaciones del mismo tipo.

Por supuesto las interpretaciones convencionales también son totalizadoras en el sentido de que toman en cuenta la totalidad, pero son los casos en los cuales podemos afirmar que consideraron la posición de todos los signos y la direccionalidad (arriba-abajo) de acuerdo con la convencionalidad.

Respecto a la posición y direccionalidad presentamos los datos en el siguiente cuadro:

Cuadro 20

Posición y direccionalidad	Edades	Cantidad de niños
Elementos yuxtapuestos	4 años	5
Relaciones fragmentarias	4-5 y 6 años	16
Relaciones totalizadoras	5 y 6 años	4
Convencional	5 y 6 años	5
T O T A L		30

SITUACION II

Para indagar sobre las interpretaciones de los niños respecto a la representación gráfica convencional de la resta sin resto, se les presentó una tarjeta con la siguiente representación:

$\boxed{6-6=0}$

Presentaremos el análisis de esta situación a través de los mismos ejes que utilizamos para la situación I, centrándonos fundamentalmente en el análisis de las diferencias entre ambas situaciones.

LOS SIGNOS

- Los numerales

Respecto a los cinco signos que están en la tarjeta, señalamos que los numerales fueron interpretados convencionalmente por la mayoría de los niños (como en la situación I). Presentaremos sólo los casos de interpretaciones no totalmente convencionales de los numerales.

Entrevistador	Fabián
¿Conoces qué es (señalando los signos de la tarjeta)?	Es una "o" (señala 6I*).
¿Qué más?	Otra "o" (señala 6D).
¿Conoces algo más?	"A" (señalando el 0).

Fabián interpretó todos los numerales como letras, aunque en la tarjeta correspondiente a la situación I los había interpretado como numerales. Probablemente incida que en este caso los numerales tienen mayor similitud gráfica con ciertas letras (como las nombradas por Fabián) mientras que el 5, el 2 y el 3 tienen menor similitud con formas gráficas de letras.

Entrevistador	Greta
¿Algunas de estas cosas las conoces? (señalando la representación).	Sí, dos nueves (señala 6I y 6D) y un cero (señala el 0).

Greta interpretó los numerales como tales, aunque los "seis" los interpretó como "nueves" este error puede estar determinado por la semejanza gráfica, pero en este caso entre dos numerales (6 y 9).

(*) 6I: Significa el seis colocado a la izquierda.
6D: Significa el seis colocado a la derecha.

Entrevistador	Vanesa
¿Conoces algo de lo que está aquí? (señala los signos).	No.
¿Nada?	No.
¿Dirá seis?	Acá (señala 6I y 6D).
¿Y acá (señala 0)?	No sé.
(Le explica la operación representada en la tarjeta).	(La reconstruye correctamente).
¿Y acá (0) qué dirá?	Que sí quedó.
¿Le quedaron dulces?	No.
Entonces...señala el (0).	Puso que sí quedó.

Consideramos que Vanesa pudo haber expresado el conflicto de representar la nada: si no quedaron dulces tal vez debiera no ponerse nada; no acepta la escritura del 0 y propone que el EF de la representación presentada no corresponde al de la operación relatada; si hay una marca gráfica es que "sí quedó". Vanesa es el único niño que planteó ese problema. Los demás niños interpretaron convencionalmente el 0 y no evidenciaron conflicto al respecto.

Los modos de interpretación de los numerales fueron los siguientes:

Cuadro 21

Interpretación de numerales	Edades	Cantidad de niños
No totalmente convencional	4 y 5 años	5
Totalmente convencional	4-5 y 6 años	25
T o t a l		30

Aun cuando un niño (Fabián) interpretó los numerales como letras, lo incluimos en el primer grupo porque tampoco fue un modo de interpretación absolutamente ajeno. Las letras también son signos, y Fabián mantuvo la interpretación de las marcas gráficas como signos y no como dibujos.

En esta situación los numerales tenían ciertas características específicas que diferían de la representación utilizada en la situación I: uno de los numerales era el cero y el otro numeral estaba escrito dos veces (6I y 6D).

Como ya lo señalamos, la escritura del cero no presentó dificultades (excepto en el caso de Vanesa) a pesar de que habíamos anticipado que sería un desencadenante de conflicto; los niños lo "aceptaron" en sus interpretaciones, sin manifestar obstáculos.

Pero la escritura reiterada del seis fue un elemento sumamente conflictivo y ello no formaba parte de nuestas expectativas. Para indagar sobre las justificaciones que los niños podrían dar a la doble escritura del seis, los interrogamos al respecto <u>después</u> de explicarles cuál era la operación representada en la tarjeta (excepto con los niños que hicieron espontáneamente una interpretación convencional). Tomamos esa decisión porque en los pocos casos en que lo hicimos previamente, sólo respondían: "porque así lo pusieron" o "porque está escrito dos veces".

Presentaremos algunas respuestas:

Entrevistador	Daniel
Tú me dijiste muy bien que acá (6I) está el seis y acá (6D) está otra vez el seis ¿por qué será que el niño lo apuntó dos veces?	No sé.

¿Pero así está bien?	No.
¿Y qué habrá que hacer?	Quitarlo.
¿Qué cosa?	Acá (6D).

Entrevistador	Gladys
¿Por qué será que apuntó dos veces el seis?	Es que se comió seis dulces (6D) y le quedaron cero (0).
¿Y por qué puso dos veces el seis?	Porque se comió seis de éstos (6D)...y le quedó cero.
¿Y se comió dos veces seis o una vez?	¡Una vez!
¿Y por qué lo apuntaría dos veces?	Es que...no sé...pero se comió los seis y le quedaron cero.
Ajá...	Es que él no sabe...(se sonríe con aire de suficiencia y complicidad).

Como podemos notar tanto Daniel como Gladys no lograron justificar la doble escritura del seis. Daniel intentó resolver la dificultad proponiendo quitar uno de esos numerales y Gladys decidió que el autor de la tarjeta no sabía representar la resta.

Todos los niños que no lograron justificar la doble presencia del seis parecían responder: "no sé porqué está dos veces el seis, pero me molesta". En ningún caso optaron simplemente por afirmar su desconocimiento (aun cuando lo aceptaron sin dificultad respecto a otros signos). Incluso hubo casos en los cuales, antes de interrogarlos sobre la reiteración del seis, plantearon dudas o protestas.

Entrevistador	Débora
¿Conoces algo de lo que está aquí (presentando la tarjeta)?	Seis y seis.
¿Y acá (0)?	Cero ¡para no poner otra vez ése!

Parece que para Débora la doble presencia del seis es más que suficiente; ¡tres veces sería el colmo!

Entrevistador	Berna
¿Dirá seis?	Acá (6I).
¿Y aquí (6D)?	No sé.
¿Pero qué crees?	No sé...dice lo mismo.

Berna se mostró desconcertada, si ya está el seis, cómo es que dice "dos veces lo mismo".

De los niños que justificaron esa reiteración hubo quienes sostuvieron que "había otro seis".

Entrevistador	Cyntia
¿Y por qué puso dos veces el seis?	(Duda).
¿Por qué crees?	(Piensa).
A ver ¿tú qué piensas, por qué será que puso dos veces el seis?	¡Porque se compró otros seis!

Cyntia agregó otro momento a la operación, el supuesto autor de la tarjeta ya se comió los seis dulces y después se habrá comprado otra vez seis dulces. De la misma forma lo justificaron Héctor, Luis Alfredo y Juan Pablo.

Entrevistador	Greta
¿Por qué será que apuntó dos veces el seis?	Porque tenía dos bolsas llenas de seis dulces.

Aparentemente para Greta la operación se realizó con una de las bolsas, pero el autor habría tenido otra bolsa. Es como si hubiera dos EI, con uno de ellos se realizó la operación y el otro EI quedó intacto, pero la representación gráfica recupera a ambos EI.

Entrevistador	Riger
¿Por qué será que pusieron dos veces el seis?	Para que quitaran otra vez el seis.

La interpretación de Riger es similar a la de Greta, habría otro EI y se podría entonces reiterar la operación.

Una forma diferente de interpretar la reiteración del seis es la que realizó, por ejemplo, Ana.

Entrevistador	Ana
¿Y por qué está escrito dos veces?	(Duda).
¿Hay que escribirlo dos veces?	Sí...porque son muchos.
¿Cómo?	Porque eran muchos.

¿Y cuando son pocos?	No.
¿Por qué cuando son pocos no hay que ponerlo dos veces?	Porque son pocos y...y hay que poner uno. Cuando son muchos hay que poner dos seis.

Pareciera que a medida que las cantidades aumentan hay que reiterar la escritura de los numerales. Si bien el lenguaje matemático no es exactamente así, comparte en alguna medida esa propiedad: cada vez que hay un nuevo agrupamiento en base diez es necesario agregar un numeral.

Una última variante no convencional de interpretar el doble seis, es la de Alejandra:

Entrevistador	Alejandra
¿Por qué lo apuntó dos veces (señalando 6I y 6D)?	Para que te acuerdes.
¡Ah! por eso será ¿y si lo apuntas una sola vez?	No te acuerdas...

Para Alejandra el doble seis está cumpliendo la función de un "recordatorio" así el usuario de la representación no se olvidará que se trataba de "seis".

Un ejemplo de interpretación convencional es la de Luis Gabriel.

Entrevistador	Luis Gabriel
Como tú me dijiste, está dos veces el seis ¿por qué estará dos veces?	...(piensa) Porque aquí (señala 6I) tenía seis y aquí (señala 6D) le quitas seis.

Para sintetizar los modos de interpretación que los niños utilizaron respecto a la reiteración del seis, presentaremos el siguiente cuadro:

Cuadro 22

Interpretación de dos veces seis	Edades	Cantidad de niños
Sin funcionalidad	4-5 y 6 años	13
Hay otros seis	4-5 y 6 años	8
Son muchos	5 años	2
Para acordarse	5 años	1
Convencional	5 y 6 años	6
T O T A L		30

Como se puede notar la doble escritura del seis desencadenó diversas interpretaciones, o ninguna; pero de todas formas provocó básicamente dudas a los niños.

- <u>Las rayas</u>

En el caso de la representación de la resta sin resto, prácticamente no podemos analizar en forma sucesiva las interpretaciones que los niños realizaron respecto al signo menos y respecto al signo igual; porque casi la totalidad de los niños interpretaron ambos signos simultáneamente, y les otorgaron la misma función o la función convencional. Es decir, al otorgarle la misma función a ambos signos, no se justifica analizar separadamente las interpretaciones que los niños realizaron para cada uno de ellos y cuando lo hicieron convencionalmente tampoco, dado que a ambos signos les adjudicaron los significados que la convención establece.

Analizaremos en primer término las interpretaciones compartidas por los dos signos y luego citaremos a dos niños que otorgaron a cada signo un tipo de interpretación específico.

. Función desconocida.

Dos niñas no justificaron la presencia de las rayas. Una de ellas propuso de todas maneras dejarlas y la otra niña planteó que habría que quitarlas.

. Como numerales.

Los dos niños que interpretaron las rayas como numerales presentaron algunas diferencias.

Entrevistador	Patricio
¿Y acá? (señala el signo igual)?	Dos.
¿Ahí dice dos?	Uno.
¡Ah! ¿uno?	Uno y uno (señala cada guión del signo igual).
¿Y acá? (señala el signo menos).	Uno.

Patricio interpretó cada guión, de ambos signos, como el numeral 1 (también lo hizo así en la situación I respecto a las rayas).

Entrevistador	María José
¿Y esto que está aquí (señala el signo menos) para qué estaría?	Es que es un uno acostado.
¿Y acá? (señala el signo igual).	Once, es que el once es un uno y otro uno...acostado.

¿Eso es lo que está acá? (señala el signo igual).	Sí, un once, pero acostado.
¿Y el niño tenía once dulces?	No, pero puso un once acostado.

María José interpretó las rayas como numerales (así fue su interpretación respecto a la raya larga en la situación I), aunque ello la obligó a negar que en la tarjeta estaba representada solamente la operación relatada.

. Para impedir movilidad.

Los niños que acudieron a la movilidad de lo gráfico para justificar la presencia de las rayas en la situación II, utilizaron argumentaciones similares a las que citamos en la situación I.

Entrevistador	Débora
¿Y esta rayita (señala el signo menos)?	Una rayita.
¿Para qué la habrá puesto?	Para que no se pasen los números.
Para que no se pase ¿y acá? (señala el signo igual).	Para que no se pasen esos dos números (6D y 0), y ésa (el signo menos) para que no se pase ese número (6I).

Entrevistador	Daniel
¿Y ésto? (señala el signo menos).	Para que éste (6I) no moleste a éste (6D).
Claro, dime ¿y acá? (señala el signo igual).	Dos...para que éste (0) no moleste a éste (6D).

¿Y por qué será que acá (señala el signo igual) habrán puesto dos y acá (señala el signo menos) habrán puesto una?	No sé.
¿Cómo crees que es mejor?	(Señala el signo menos).
¿Es mejor con más o con menos rayitas?	Con una rayita.

Si bien Débora y Daniel comparten la interpretación en el sentido de la movilidad ("no se pasen", "no se molesten"), Débora agrega una justificación biunívoca: cada raya sirve para un numeral. Daniel, por su parte, quitaría una raya del signo igual ya que una sola raya es suficiente para evitar las "molestias" entre los numerales.

. Como separadores.

Tal como vimos en la situación I en relación a la raya larga, también las rayas de la representación utilizada en la situación II fueron interpretadas como separadores.

Entrevistador	Cyntia
¿Y las rayitas? (señala el signo igual).	Para separar éste (0) con éste (6D) ¿sí?
Sí, podría ser ¿y esta otra rayita? (señala el signo menos).	Para separar el seis con el otro seis.
¿Y para qué habrá que separarlos?	Porque si no, nos quedan muy juntitos. Sale mal.

. En relación biunívoca con los numerales.

En la representación presentada había una equivalencia numérica entre rayas y numerales: tres rayas-tres numerales, y algunos niños establecieron una relación biunívoca aunque con pequeñas variantes.

. . . .

Entrevistador	Gladys
¿Por qué estará ésta aquí? (señala el signo igual).	Son dos, porque aquí hay dos (6I y 6D).
Y aquí? (señala el signo menos).	Es que hay un cero.
¡Ah! por eso. Y dime, de esas rayitas ¿se pueden poner más?	(Afirma). Dos aquí (señala el signo menos) y una aquí (señala el signo igual).

Gladys estableció la relación biunívoca, pero de un modo particular: dos rayitas iguales y juntas para los dos numerales iguales y la rayita sola para el numeral diferente, por eso sugiere intercambiar los lugares que ocupan los signos, así quedaría la correspondencia biunívoca marcada gráficamente.

Entrevistador	Addina
Y ésto (señala el signo menos) ¿para que estará?	Para que lo pongan acá (señala el signo igual).
¿Y por qué habría que ponerlo allí? (señala el signo igual).	Porque son: uno, dos, tres, palitos (señala cada uno).
¡Ah! y así estaría mejor ¿tres palitos juntos?	Sí (señala 6I, 6D y 0).

Addina también propone hacer un cambio: juntar las tres rayas para que queden en correspondencia gráfica, tres numerales juntos y tres rayas juntas.

Los otros niños que establecieron una correspondencia biunívoca entre rayas y numerales no propusieron cambiar los signos de ubicación, pero todos sostuvieron que había una raya para cada numeral. Por supuesto ninguno aceptó la sugerencia de agregar o quitar rayas, ya que ello hubiera destruído la relación establecida.

Si bien hubo otros niños (como Débora, ya citada) que también acudieron a la relación biunívoca durante sus interpretaciones, no los consideramos pertenecientes a este grupo porque dieron además otras justificaciones a la presencia de las rayas y en ese sentido les otorgaron cierta funcionalidad específica. Los niños que ubicamos en este interpretación son aquéllos que SOLO justificaron las rayas porque debía haber una para cada numeral.

. Función convencional.

Citaremos como un ejemplo de interpretación convencional a Ilse, de quien presentamos su participación en la situación I, y continuó siendo tan explícita como anteriormente.

Entrevistador	Ilse
Mira, yo tengo aquí otra tarjeta (le presenta la tarjeta).	Tienes muchas (se refiere a la tarjeta de la situación I).
Sí ¿verdad? ¿Y tú conoces algo de lo que está aquí (señala la representación)?	Sí.
¿Qué conoces?	Seis menos seis cero...igual a: ¡cero!

¿Y aquí (señala el signo igual) se podría poner más rayitas?	No, porque sólo son dos. Igual a, es el signo del igual.
¿Y acá? (señala el signo menos).	Es el menos.
¿Se podrían poner otras rayitas?	No.
¡¿Tampoco?!	Porque sería menos, menos, menos y tú te quedas pensando cómo le haces. Entonces...te quedas pensando una hora ¡ay! cómo le haces.
Y dime, esta rayita de menos ¿se puede poner paradita o de otra forma?	(Niega).
¿Tampoco?	Un poquitito...pero la tienes que hacer lo más derechita que puedas porque si la pones así (hace con su dedo un movimiento vertical sobre la tarjeta) no quiere decir nada.
Y el signo igual ¿se puede poner así? (hace el mismo movimiento que hizo Ilse).	No, porque así (lo repite) no quiere decir...¡quién sabe! Entonces lo pones así (hace el movimiento en sentido horizontal).

Ilse, además de no requerir un entrevistador habilidoso, tampoco requiere un interpretador para sus respuestas porque ella lo dice todo.

Presentaremos en el siguiente cuadro las diferentes interpretaciones que los niños realizaron de los signos "menos" e "igual".

Cuadro 23

Interpretación de las rayas	Edades	Cantidad de niños
Función desconocida	4 años	2
Como numerales	4 y 5 años	2
Para impedir movilidad	4 y 5 años	3
En relación biunívoca con los numerales	4-5 y 6 años	6
Como separadores	5 y 6 años	8
Función convencional	5 y 6 años	7
T O T A L		28

El total de los niños es 28 porque, ya lo señalamos, hubo dos niños que no hicieron el mismo tipo de interpretación para ambos signos. El análisis de esos dos casos muestra que ambos interpretaron el signo igual "para sumar", pero Debie adjudica al signo menos una relación con las anotaciones de números telefónicos, mientras Riger le otorga la función convencional. Estos dos niños hicieron en esta situación una interpretación consistente con la realizada en la situación I.

Entrevistador	Debie
Y esta rayita (señala el signo menos) ¿por qué estará?	Ya te dije (se refiere a la situación I).
Pero se me olvidó...	Será que están escribiendo algún teléfono, la rayita.
¡Ah! ¿y éste (señala el signo igual)?	A lo mejor es de sumar otra vez...

Debie no sólo hizo una interpretación equivalente a la que planteó en la situación I, sino que ella misma la retoma y explicita su congruencia: si ya dijo una cosa, ahora no va a contradecirse. Aunque en la situación I la raya "de sumar" era la raya larga y en la situación II fue el signo igual, tal vez esta última diferencia entre los signos haya sido la causante del tono ambiguo de su respuesta final.

Entrevistador	Riger
¿Y esto (señala el signo menos) que está aquí?	Menos.
Ahora dime, estas rayitas (señala el signo igual) ¿qué son?	Más.
¿Y se podría poner otras rayitas acá (en el signo menos)?	No, porque sería seis más seis más.
Y quitar ¿se podría quitar de éstas (en el signo igual) así quedarían iguales? (ambos signos)	No, porque tuviera seis menos seis menos...

Riger fue muy consistente: una rayita es siempre el signo menos y dos rayitas es el signo más. También Riger (como Debie) había interpretado la raya larga de la situación I como "para sumar", pero pudo suceder que no recordara su interpretación anterior o que admitiera que en diferentes contextos el signo que se usa para representar la suma sea distinto. En el sistema convencional ello sucede con el signo igual, en la representación horizontal de las operaciones se colocan dos guiones, pero cuando se utiliza la posición vertical se pone una sola raya.

Para comparar las interpretaciones que los niños realizaron respecto a las rayas en la situación I y en la situación II, presentaremos el siguiente cuadro:

Cuadro 24 (comparativo)

Interpretación de las rayas	Situación I		Situación II	
	R.L.	R.C.	Signo igual	Signo menos
Función desconocida	5	15	2	
Como numerales	2	1	2	
Para impedir movilidad	7	-	3	
En relación biunívoca con los numerales	-	6	6	
Como separadores	7	—	8	
Como anotación telefónica	-	1	-	1
Función vinculada al lenguaje matemático	4	-	2	-
Función convencional	5	7	7	8
TOTAL	30	30	30	30

Analizaremos las diferencias en las interpretaciones de las rayas exclusivamente respecto a los datos presentados en el cuadro que marcan disparidades significativas.

- Función desconocida.

Al tomar en cuenta la disminución en este modo de interpretación en la situación II respecto a la situación I, podemos sustentar con mayor consistencia las causas que atribuímos a lo sucedido en la situación I. En la resta sin resto las rayas están incluídas "dentro" de la representación por los numerales, que la limitan, de tal forma que el aspecto gráfico habría contribuído a interpretarlas en relación con los numerales ya que no quedan rayas "sueltas". En la situación I el signo menos quedaba afuera, aislado, y ello pudo generar el alto porcentaje de niños (50%) que no lograron atribuirle funcionalidad; en la situación II esa circunstancia estaba ausente.

Incluso comparando la raya larga de la situación I y las rayas de la situación II: en este último caso hay mayor proporción gráfica entre los signos, las rayas no se destacan por su tamaño respecto a los numerales y ello pudo haber incidido en generar menos dudas sobre su interpretación y propiciar vincularlas con los numerales.

- Para impedir movilidad.

Considerando también el aspecto gráfico en la situación I la raya larga "se deja", con mayor facilidad, ser interpretada como sostenedor por dos razones: una es que está ubicada entre numerales y en ese sentido se justifica que los niños no hayan interpretado así al signo menos, dado que la raya "sostiene" justamente a los numerales.

La otra razón podría ser la ubicación vertical de los signos y ello la pone en relación con la representación utilizada en la situación II. Si la raya "sostiene" a los numerales, cuando éstos se ubican verticalmente podrían "moverse" con más facilidad (ya que en general tienden a "caerse"); en la situación II esta interpretación quedaba excluida, lo cual puede justificar la disminución en este modo de interpretación.

- En relación biunívoca con los numerales.

En la situación I la raya larga no fue interpretada en relación biunívoca con los numerales ya que los niños encontraron formas de otorgarle funcionalidad específica y ello no los puso en la situación de requerir buscar una justificación exclusiva a través de la relación uno a uno. Pero respecto al signo menos fue prácticamente la única forma que encontraron de darle un sentido (exceptuando las interpretaciones convencionales): acompañar al numeral; por lo cual propusieron además agregar los guiones faltantes.

En la situación II, los niños que no lograron justificar la presencia de las rayas también acudieron a la relación biunívoca y además la cantidad de rayas y numerales (tres y tres) pudo haber contribuído a que ello sucediera.

- Como separadores.

Es obvio que en la situación I el signo menos no podía interpretarse como separador de numerales ya que estaba "al margen" de éstos, pero la raya larga era factible que cumpliera esa función, de allí que los niños propusieran agregar otra raya entre el 5 y el 2. Pero en la situación II, con mayor razón se justifica esta interpretación ya que había rayas entre TODOS los numerales, lo cual ni siquiera planteaba la necesidad de proponer el agregado de rayas.

- Función vinculada al lenguaje matemático.

En ambas situaciones los niños que interpretaron el signo menos convencionalmente o como indicador de una anotación telefónica (pero que no hicieron una interpretación totalizadora de la representación) tuvieron que encontrar una manera específica de justificar las otras rayas (en situación I la raya larga y en situación II el signo igual). En estos casos optaron por interpretarlas como la representación de la suma.

LA POSICION Y LA DIRECCIONALIDAD

Las categorías que tomamos en cuenta para agrupar las interpretaciones de los niños en relación a la posición y la direccionalidad de los signos son las presentadas para la situación I.

Es necesario volver a señalar que en el caso de la resta sin resto la posición y direccionalidad variaron totalmente respecto a la representación de la resta con resto.

- Posición.

Los signos pasaron de estar ubicados verticalmente a una posición horizontal y ello determina cambios significativos a nivel de la representación.

Es probable que debido a la frecuencia de la posición horizontal en nuestros sistemas de signos, tanto matemáticos como lingüísticos, tendamos a "ver" una representación horizontal como más integrada, en el sentido de constituir una totalidad, y cuando los signos ocupan posiciones verticales los percibamos más aislados. Para realizar una lista utilizamos la posición vertical y ello pareciera otorgarle mayor autonomía a cada una de las representaciones enlistadas. También sucede algo similar con el "punto aparte", justamente indica: "lo que sigue abajo va separado", es diferente, tiene autonomía.

Con base en lo anterior, para los usuarios de nuestros sistemas de representación, cuando un signo está junto a otro hacia la derecha o izquierda parecieran mantener entre sí mayor vínculo que si están arriba o abajo uno del otro. En relación a ello también puede citarse la temprana apropiación de la linearidad del sistema de escritura por parte de los niños (Ferreiro, Gómez Palacio y Col. p. 68.-1982). Dado que la ubicación de los trazos o grafías en secuencia horizontal es un conocimiento que los niños manejan, en su mayoría antes de la enseñanza escolar, es de suponer que dicho conocimiento también lo utilicen extensivamente a los signos matemáticos.

Respecto al sistema de escritura es excepcional el uso de la posición vertical y en el lenguaje matemático sólo se utiliza cuando el algoritmo gráfico de las operaciones es facilitado por la verticalidad. Tal es el caso de las sumas y restas "de llevar" o "de pedir", donde el valor posicional es tomado en cuenta y la verticalidad de la representación contribuye a ello.

- Direccionalidad.

Por supuesto la direccionalidad de un sistema de signos está vinculada a la posición de éstos; en las dos posiciones a las cuales nos hemos referido la direccionalidad podría ser, en la posición horizontal: de derecha a izquierda o a la inversa; y en la vertical: de arriba hacia abajo o a la inversa.

En los sistemas de signos que utilizamos, la frecuencia de la posición horizontal es marcadamente mayor y en esos casos la direccionalidad es siempre de izquierda a derecha. La única excepción consiste nuevamente en el algoritmo gráfico de ciertas operaciones: para sumar "llevando", para restar "pidiendo" y para multiplicar por cifras de dos dígitos o más, la direccionalidad convencional del algoritmo es de derecha a izquierda, y ello se debe a que de esa forma se evitan "pasos" o momentos durante la realización de la operación, no a la imposibilidad de hacerlo en la dirección opuesta.

Además, respecto a las representaciones utilizadas con los niños, al variar la posición de los signos (vertical-horizontal) uno de ellos se modificó totalmente y es la raya larga utilizada en la posición vertical que desaparece en la horizontal y en esta posición se coloca el signo igual.

Con base en lo anterior podríamos analizar la interpretación de Riger, para quien en la situación I la raya larga fue "suma" y en la situación II el signo igual fue "suma", y ello sucede con otros signos: de acuerdo con el contexto el significante varía pero el significado se mantiene; así como hay casos inversos, se conserva el significante pero el significado se modifica.

Del primer caso podríamos citar la raya larga y el signo igual, sólo que la raya larga siempre se utiliza como el signo igual de tipo a): separa EF de las cantidades que intervienen en EI y Op (respecto al signo igual lo hemos analizado en el capítulo anterior). Del segundo caso, tal vez uno de los ejemplos más notables sea el guión, no sólo se utiliza en la escritura del lenguaje natural y también en el lenguaje matemático, sino que además, en cada uno de estos sistemas varía su función de acuerdo con el contexto de utilización.

Ahora bien, los modos a través de los cuales los niños tomaron en cuenta o no la posición y direccionalidad de los signos en la representación de la resta sin resto fue la siguiente:

Cuadro 25

Posición y direccionalidad	Edades	Cantidad de niños
Elementos yuxtapuestos	4 y 5 años	4
Relaciones fragmentarias	4-5 y 6 años	17
Relaciones totalizadoras	5 y 6 años	2
Convencional	5 y 6 años	7
TOTAL		30

La interpretación de los signos como elementos yuxtapuestos la realizaron Patricio y María José que consideraron los numerales y las rayas como representaciones de números y Berna y Vanesa que interpretaron los numerales, pero a las rayas no les adjudicaron función alguna. Estos modos de interpretación implican no establecer relaciones entre los signos, la posición y la direccionalidad no es tomada en cuenta.

Las interpretaciones que implican relaciones fragmentarias fueron sumamente variadas: pero también (como en la situación I) hubo niños que acudieron a la movilidad, otros a la relación biunívoca o a la necesidad de separación para justificar la presencia de los signos. En todos estos casos tomaron en cuenta la posición de algunos de los signos respecto a otros, incluso se destacan quienes propusieron cambiar de lugar las rayas, ya que evidenciaron estar tomando en cuenta la posición de los signos.

Relaciones totalizadoras establecieron Riger y Debie, a quienes hemos presentado en el inciso anterior.

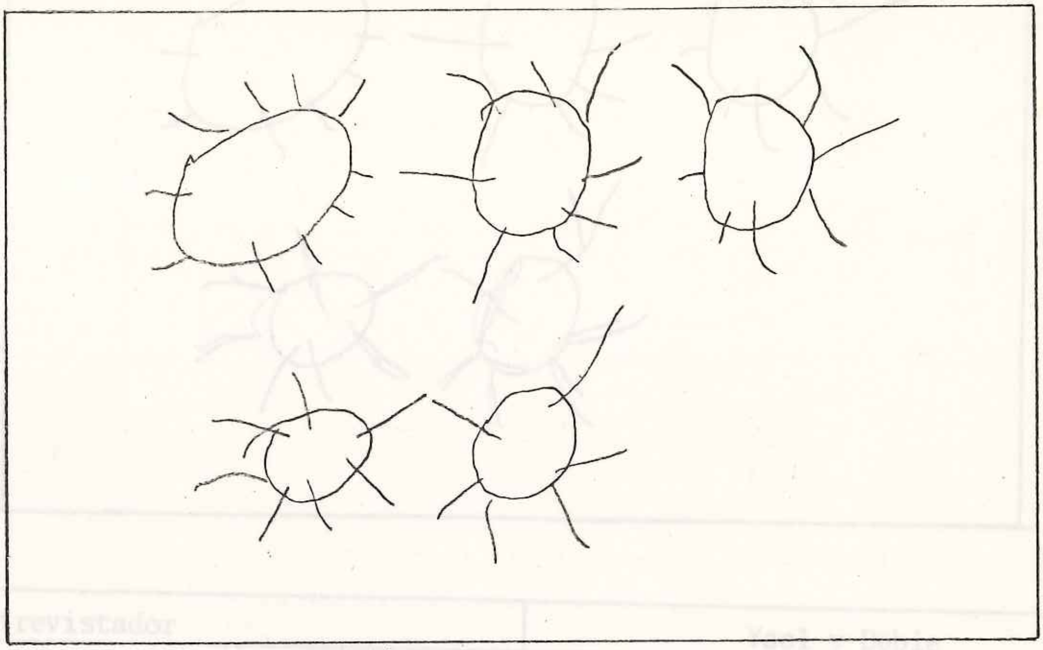
A los cinco niños que hicieron una interpretación convencional en la situación I se agregaron Paola y Catalina; todos ellos tomaron en cuenta, obviamente, la posición y direccionalidad al realizar sus interpretaciones.

EL INTERPRETADOR EN LAS SITUACIONES DE INTERCAMBIO

En el capítulo I presentamos las situaciones de intercambio pero el análisis estuvo centrado en el productor e incluso por ello denominamos al capítulo: "situaciones de producción. Además, durante la realización de las situaciones de intercambio también nos centramos en los niños que asumían el rol de productores; es decir, cuando surgían dificultades o "errores" en la interpretación nos dirigíamos al productor preguntándole si podía hacer algo en su hoja para que su pareja interpretara de manera más aproximada la operación realizada. En ningún caso preguntamos al niños que asumía el rol de interpretador, por ejemplo: "¿Por qué crees que había cuatro y sacamos tres?" o "¿en qué te fijaste para darte cuenta que...?". Sólo en un par de oportunidades, que ya presentamos en el capítulo I, interrogamos al interpretador sobre la forma en la cual él consideraba que sería mejor hacer la representación de la operación que estaba interpretando; pero ello implica, justamente, transformar su rol en productor.

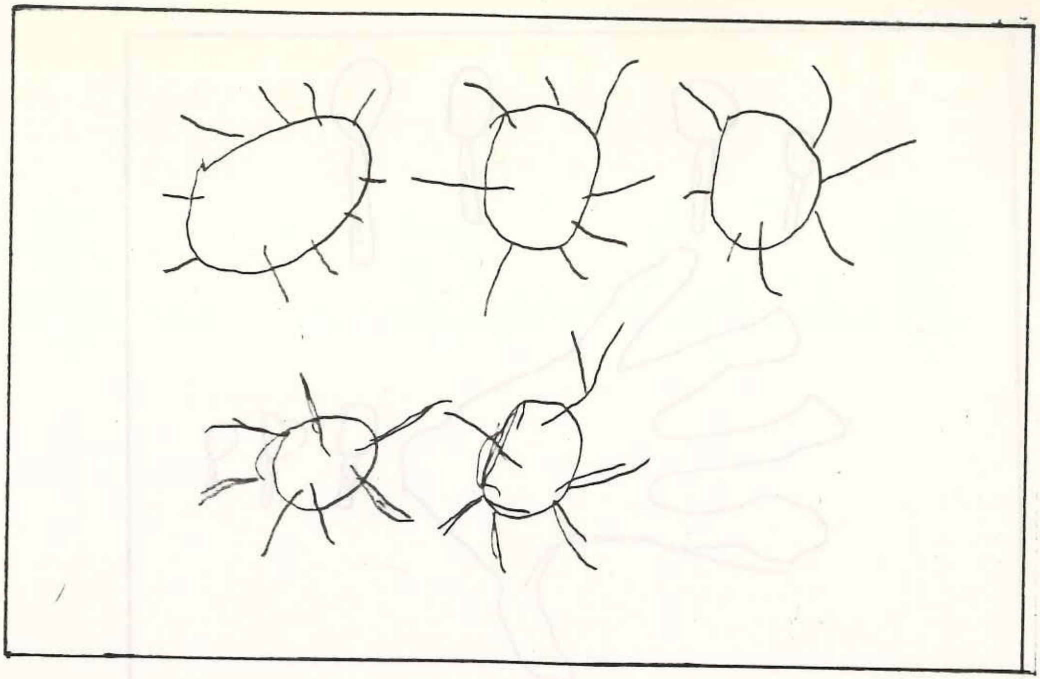
Sin embargo, "a pesar nuestro" (es decir: sin proponérnoslo) hubo niños que realizaron intervenciones interesantes cuando asumieron el rol de interpretadores del compañero y esos son los casos que presentaremos; señalando desde ya que no contamos con ninguna posibilidad de sistematización de estos datos, por las razones recién expuestas.

Hemos visto en el capítulo I algunos casos de interpretaciones aditivas, cuando el niño interpretador sumaba los elementos gráficos. Tal es el caso de Yael interpretando la producción de Debie: $\boxed{3-1=2}$ (corcholatas).



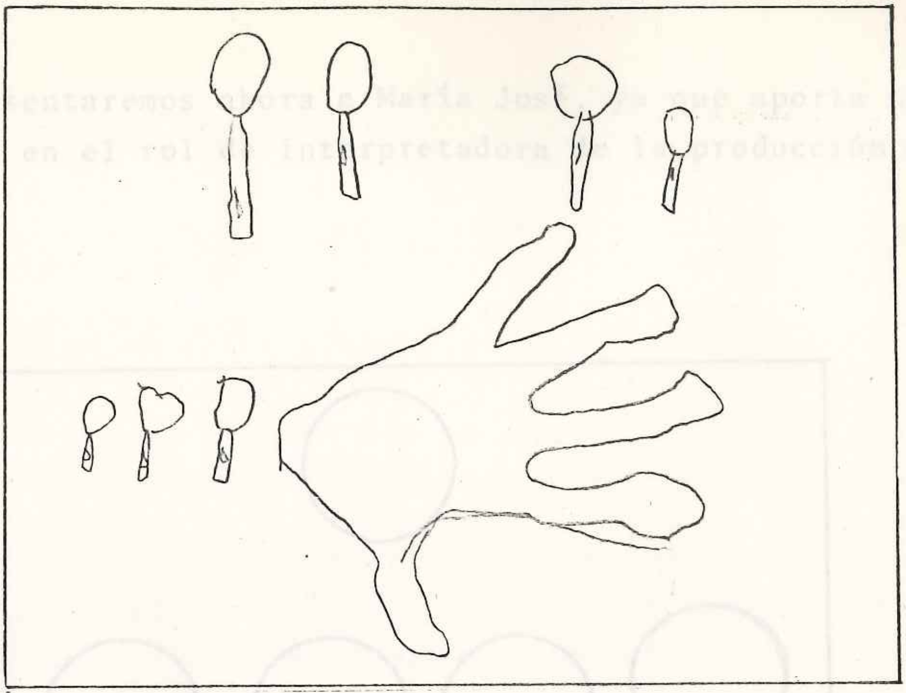
Entrevistador	Yael y Debie
Mira, Yael, acá hicimos con Debie algo con unas corcholatas; a ver si tú te das cuenta cuántas había y qué pasó después. Si quedaron más, menos o igual de corcholatas.	Y: Había cinco.
	D: Cuenta primero éstas (señala las tres de arriba) y luego éstas (señala las dos de abajo).
No se vale que usted hable (riendo, a Debie).	Y: ¡Tres! y pusieron dos más.
¿Pusimos dos más?	Y: Sí.
¿Qué otra cosa podría ser? A ver, que había tres es cierto ¿y después?	Y: (Duda) No sé.

Sale Yael y Debie remarca las dos corcholatas de abajo.



Entrevistador	Yael y Debie
Mira, había tres ¿y luego?	Y: Tú pusiste tres. D: Fíjate bien, Yael. Y: Que pusieron dos.
(Le explica a Yael la operación) ¿Cómo sería que se nota mejor que quitamos una y quedaron dos?	Y: Que ponga una mano que agarre la corcholata y que de esa manera se hubiera notado mejor.

A pesar de plantearle a Yael que buscara otras alternativas, no encuentra forma de "salir" de la suma. Además, cuando fue productora representó las cantidades que intervinieron en EI y Op, es decir, aunque se trató como en todos los casos de quitar, ella dibujó los objetos quitados y la mano (tal como propuso a Debie); sin embargo, también fue interpretada aditivamente por Cyntia.



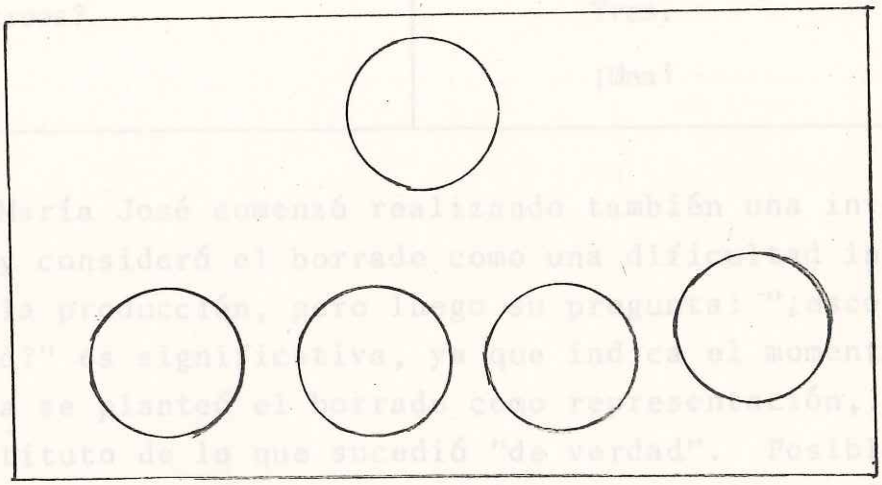
$\boxed{4 - 3 = 1}$ (cucharas)

Entrevistador	Cyntia y Yael
	C: Siete cucharas y una mano. Esta mano (señala) para que agarre las cucharas.
Entonces ¿cuántas había?	C: Cuatro.
¿Y luego?	C: Siete, pusiste tres y luego habia siete.
	Y: No!

Cyntia tampoco logra modificar su interpretación y mantiene la aditividad de los objetos dibujados.

Nos interesó retomar a Yael, quien a pesar de haber enfrentado ese problema desde la perspectiva de productora, lo reproduce cuando asume el rol de interpretadora.

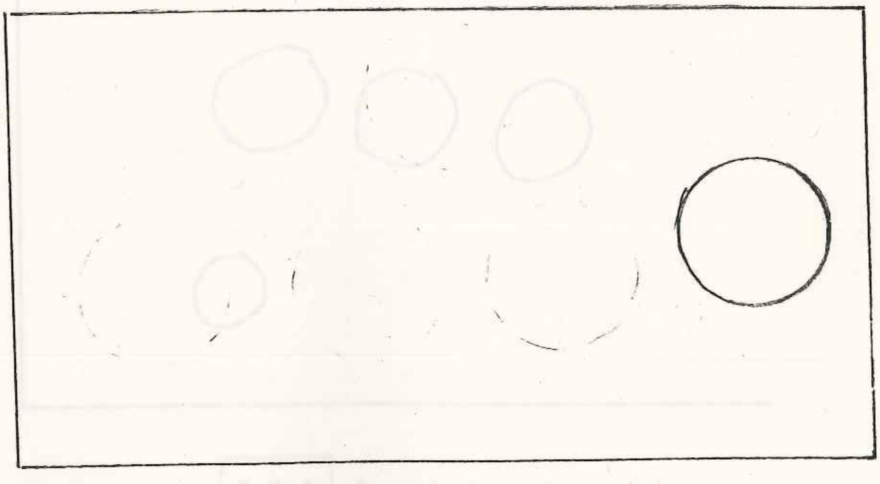
Presentaremos ahora a María José, ya que aporta un dato interesante en el rol de interpretadora de la producción de Greta.



4-3=1 (monedas)

Entrevistador	María José
	Cuatro...había cuatro.
Sí ¿y qué pasó después?	Son cinco.

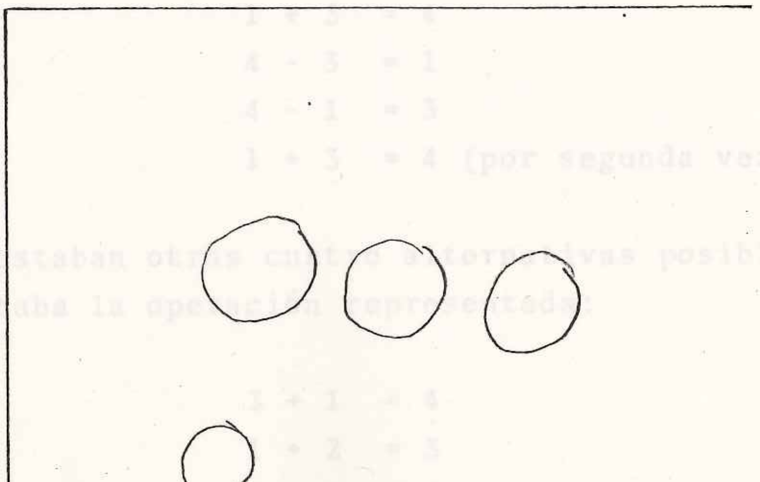
Sale María José y Greta hace el segundo intento



Entrevistador	María José
	Son cinco, las borró porque le salió mal.
¿Qué habremos hecho con las monedas?	¿Escondieron las de verdad?
¿Cuántas crees?	Tres.
¿Y quedó?	¡Una!

María José comenzó realizando también una interpretación aditiva y consideró el borrado como una dificultad inherente al acto de la producción, pero luego su pregunta: "¿escondieron las de verdad?" es significativa, ya que indica el momento en el cual ella se planteó el borrado como representación, justamente como sustituto de lo que sucedió "de verdad". Posiblemente interpretó correctamente la cantidad que intervino en Op (tres) porque ya el entrevistador le había confirmado que EI era cuatro, porque también podría haber planteado que cinco era EI y cuatro la cantidad quitada.

Veremos por último a Ilse interpretando la producción de Riger.



$\boxed{3-2=1}$ (corcholatas)

Entrevistador	Ilse y Riger
	I: Había tres y te llevaste una.
	R: (Niega).
	I: Bueno, estaba una y vinieron tres ¿no?
(Se ríe).	I: Estaban cuatro y se llevaron tres.
(Niega).	I: Estaban cuatro y se llevó una.
No (riendo).	I: Bueno, estaba una y vinieron tres ¿no?
No.	I: Entonces no sé.

Luego siguió otro intento donde Riger recurrió al borrado e Ilse interpretó inmediatamente la operación representada. Pero en este caso nos interesa señalar la búsqueda de alternativas interpretativas que Ilse explicita al intentar establecer las formas combinatorias posibles entre las cantidades representadas, planteando las siguientes:

$$3 - 1 = 2$$
$$1 + 3 = 4$$
$$4 - 3 = 1$$
$$4 - 1 = 3$$
$$1 + 3 = 4 \text{ (por segunda vez)}$$

Restaban otras cuatro alternativas posibles, entre las cuales estaba la operación representada:

$$3 + 1 = 4$$
$$1 + 2 = 3$$
$$2 + 1 = 3$$
$$\boxed{3 - 2 = 1}$$

Como se puede notar a través de los niños presentados, las intervenciones de los interpretadores en las situaciones de intercambio podrían ser una fuente de datos relevante, lo cual deja abierta la alternativa de organizar un trabajo de indagación que sistematice este tipo de información.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Las situaciones de interpretación nos permiten plantear ciertas conclusiones, considerando las situaciones I y II y los niños en el rol de interpretador en las situaciones de intercambio.

a) La frecuencia de las interpretaciones aditivas nos lleva a considerar lo siguiente: la resta es un caso particular en el cual lo que se hace en el papel es lo contrario de lo que se hace en la operación; en la operación se quita y en el papel se pone. Es decir, en las otras operaciones las cantidades que se representan son cantidades "presentes", mientras en la resta se representa gráficamente (agregando signos o dibujos) la cantidad que se quita, que pasa a estar "ausente". Es probablemente esto lo que llevó a los niños a realizar interpretaciones aditivas: "si puso en el papel" será que "se puso en la operación".

Varios niños enfrentaron ese problema cuando fueron productores y su pareja hizo una interpretación aditiva pero, sin embargo, reiteraron la interpretación aditiva desde el rol de interpretadores. Aparentemente la fuerza de la hipótesis según la cual "poner en el papel" equivale a "poner en la operación" es tal, que la experiencia de estar trabajando en todos los casos con operaciones de resta no fue suficiente para contrarrestarla.

Consideramos que esta situación puede estar vinculada con la dificultad que se ha detectado respecto a la escritura de la negación, "la negación debía ser concebida como imposible de ser representada por escrito, ya que solo podrían representarse presencias y no ausencias" (Ferreiro, 1981). En este sentido la representación convencional de la resta equivale a la escritura de la negación, se pone lo que NO está.

Desde este punto de vista habría que analizar la dificultad de los niños frente a la reiteración del numeral 6, que presenta dos aspectos: por una parte es el mismo numeral escrito dos veces, pero además una vez (6I) representa una "presencia" y la segunda vez (6D) representa una "ausencia", lo que ya no está. No podríamos afirmar si la dificultad expresada por los niños proviene de una u otra razón, pero las interpretaciones de "había otros seis" (producida por 8 niños, cf. Cuadro 22) reafirma lo que estamos señalando.

También por lo anterior se podría interpretar el recurso del borrado, es decir, el mismo problema pero visto desde el productor: para evitar hacer en el papel lo contrario de lo sucedido en la operación (poner para representar quitar) se acude a una forma que permite hacer en el papel LO MISMO que se realizó en la operación: quitar para representar quitar.

b) Nos interesa enfatizar un problema que hemos tenido para analizar las situaciones I y II y sus interrelaciones. Las representaciones gráficas que utilizamos tenían entre sí las siguientes diferencias:

. La posición: una era vertical y otra horizontal, con la implicación de direccionalidad correspondiente (de arriba hacia abajo en un caso y de izquierda a derecha en el otro).

. Los numerales: en la primera tarjeta se utilizaron el 5, el 2 y el 3, mientras en la segunda fue el 6 reiterado y el 0.

. Las rayas: ya señalamos que en la primera situación se utilizó la raya larga, pero en la segunda el signo igual.

. Resta con y sin resto: en la situación I se presentó la resta con resto y en la situación II la resta sin resto.

La cantidad de variables que intervinieron simultáneamente en las diferencias entre las dos tarjetas, conlleva serias dificultades para la realización del análisis. Básicamente la confrontación entre ambas situaciones no nos permite realizar afirmaciones consistentes dado que no es posible interpretar cuál de las diferencias presentadas pudo determinar ciertas diferencias en las interpretaciones de los niños.

Tomemos el ejemplo del doble 6: ya planteamos que no podríamos afirmar si la dificultad de los niños se debió justamente a estar dos veces escrito el numeral o al hecho de que en un caso (6D) representa una cantidad que se quita. Es posible que ambas cosas confluyan, pero para confrontar las respuestas obtenidas en la situación II con las respuestas a la situación I, debiéramos haber interrogado sobre el numeral 2, ya que era la representación de la cantidad quitada; de esta forma se podría confrontar si el hecho de PONER lo que se QUITA fue básicamente el problema.

Dada la cantidad de variaciones que introdujimos entre las dos situaciones se complejizó nuestra centración en algunos puntos claves. Consideramos que para el análisis de aspectos puntuales es necesario confrontar respuestas obtenidas en situaciones donde la variación se ubique exclusivamente en el punto sobre el cual se desea indagar.

c) En el análisis no hemos considerado las formas a través de las cuales los niños realizaron la acción efectiva con los dulces, aun cuando ello constituyó parte de la entrevista (ver: Obtención de datos). Tomamos esa decisión porque cuando los niños lo hacían actuaban de acuerdo con nuestra explicitación sobre el significado de la representación; es decir, lo gráfico dejaba de ser tomado en cuenta y el niño se centraba en nuestra verbalización, por lo cual ello ya no estaba vinculado al objeto específico del análisis de este trabajo; la acción del niño y los signos presentes en la tarjeta no estaban en relación, sólo podría decirse que mediatizados por el entrevistador. En ese sentido era un aspecto irrelevante, no aportaba información sobre las posibilidades de los niños de interpretar los signos gráficos.

De todas maneras, podemos señalar que casi la totalidad de los niños realizaron acciones pertinentes con la explicación dada por el entrevistador (tomaban cinco dulces, sacaban dos y dejaban tres -en la situación I- o tomaban seis dulces y los regresaban al montón -en la situación II-).

Respecto a las verbalizaciones del entrevistador, podemos agregar que en NINGUN caso los niños modificaron sus interpretaciones de los signos después que el entrevistador les ofrecía una interpretación convencional. Este dato puede ser relevante si se toma en cuenta en el campo educativo ¿cuál es el rol, en el proceso de aprendizaje, de las explicaciones del adulto ajenas a los esquemas de asimilación de los niños?

CONCLUSIONES GENERALES

CONCLUSIONES GENERALES

En primer término nos interesa destacar que los niños de edad preescolar son capaces de elaborar recursos que les permiten representar operaciones matemáticas. Este hecho ya lo pusieron en evidencia los trabajos antecedentes que hemos citado, pero, en todo caso, es necesario enfatizar las posibilidades de los niños de 4 a 6 años dado que es poco frecuente que se señale lo que estos niños saben, logran, pueden, conocen, y los datos presentados constituyen una buena oportunidad para hacerlo.

Para "ver" al niño "en positivo" se requieren, al menos, dos condiciones: elaborar situaciones en las cuales el niño ponga en juego y exprese sus conocimientos (a través de la acción efectiva, la verbalización, la graficación) y, además, asumir el intento de comprender el significado de esos modos de actuar, partiendo de la suposición que tienen su propia coherencia. Con frecuencia, una explicación de esas acciones no resulta de una lectura directa de las mismas; a lo largo de este trabajo dimos prueba de ello planteando preguntas que quedaron abiertas; pero en esos casos asumimos que el déficit es nuestro, en el sentido de no contar aún con los elementos necesarios para encontrar explicaciones pertinentes; el déficit no está en el niño.

Señalamos ésto porque una conclusión posible de este trabajo sería la siguiente: los niños preescolares generalmente no utilizan los signos matemáticos; es una conclusión verdadera, pero que no corresponde a nuestras hipótesis iniciales porque el punto de partida no fue encontrar qué es lo que los niños no pueden y no saben sino, por el contrario, intentar conocer las formas particulares de cierto "poder hacer", de cierto saber que poseen, y en ese sentido lo pusieron de manifiesto: representaron la resta a su (o sus) manera (s).

Dicho esto, nos interesa plantear tres puntos fundamentales:

a) Ser productor y ser interpretador moviliza recursos diferenciables, Para sustentar dicha afirmación podemos presentar tres ejemplos de los datos recogidos:

a.1) Cuando nos referimos a las situaciones de intercambio encontramos con frecuencia la graficación de la cantidad quitada (mediante dibujos o signos). Este dato permite, al menos, dos interpretaciones: el niño grafica la cantidad quitada aun cuando la considera ausente; o bien, la grafica porque es una cantidad que sigue estando, ahora en otro lugar (la mano del entrevistador). Para dar respuesta a ello tendríamos que haber trabajado sobre la resta en situaciones de desaparición real del objeto (destrucción física) para ver si, de todas maneras, los niños continuaban graficando Op. Limitándonos a los datos disponibles, pareciera que cuando el sujeto asume el rol de productor no encuentra demasiados obstáculos en poner en el papel lo que se quitó a nivel de la operación; es cierto que el recurso del borrado permite al productor evadir esa situación, pero surgieron frecuentemente graficaciones de Op. Sin embargo, cuando esos sujetos asumen el rol de interpretador, encontramos reiteradamente las interpretaciones aditivas (en las situaciones de mensajes) y ello puede evidenciar la dificultad de interpretar como "quitada" una cantidad "puesta". Es decir, como productor se grafica Op (cantidad quitada o desplazada) pero como interpretador se interpreta como cantidad agregada. Ello permite afirmar que el problema se visualiza de manera diferente de acuerdo a la perspectiva desde la cual se ubica el usuario: productor o interpretador.

a.2) En el otro ejemplo que vamos a presentar la situación es inversa. Con respecto a la cantidad nula los niños evitaron graficarla; incluso comentamos casos en donde sólo a último momento y por no lograr "escapar a él" hubo niños que colocaron el cero; pareciera, pues, que escribir el cero no resulta una alternativa fácil. Pero cuando los niños estaban en la situación de interpretadores y se encontraban ante la presencia del cero (en los mensajes o en la tarjeta producida por el adulto) prácticamente todos lo interpretaron sin evidenciar dificultad o inconformidad. En este caso pareciera que la dificultad se presenta en el sujeto cuando se ubica desde la perspectiva de productor pero no de interpretador. Con ello <u>no</u> queremos afirmar que el cero en general no ofrezca dificultades a los interpretadores del lenguaje matemático (además, cuando juega un rol en relación al valor posicional ya se conocen los múltiples problemas que desencadena) sino que nos interesa destacar una actitud diferenciada en los niños, de acuerdo a las situaciones que hemos presentado, cuando fueron productores o interpretadores.

a.3) El tercer ejemplo lo constituye el uso de los numerales. La mayoría de los niños conocían los numerales y lo pusieron de manifiesto cuando interpretaron las representaciones convencionales: 26 niños en Situación I y 25 niños en Situación II (de un total de 30 niños) realizaron una interpretación convencional de los numerales (ver Cuadros 17 y 21) y además, lo hicieron sin presentar dudas al respecto. Sin embargo, cuando asumieron el rol de productores la proporción se invirtió: 3 niños en Situación 1 y 3 niños en Situación 2 (ver Cuadros 2 y 10) utilizaron los numerales para representar las cantidades involucradas en la operación; pareciera que en esta situación no consideraron pertinente hacer uso de un conocimiento que poseían. Si bien es necesario retomar el problema de la forma de obtención de datos, ya que es posible que la situación de mensajes no sea la más idónea para que el niño utilice los signos gráficos que conoce (ver: Algunas Conclusiones, Capítulo I, punto c), de todas formas es de destacar que un conocimiento que la mayoría tenía, no fue utilizado para producir la representación.

Señalemos, por último, que todos los niños de nuestra muestra desempeñaron ambos roles (algunos en la secuencia interpretador/productor y otros en la secuencia inversa) y resulta sorprendente que funcionaran de modos tan diferentes al asumir uno u otro rol. Recordemos el caso de Yael: como productora representó la cantidad quitada pero como interpretadora hizo una interpretación aditiva frente a una producción equivalente a la suya; conocía el cero (al interpretar) pero optó por dibujar EI y una mano para representar la resta sin resto; interpretó convencionalmente todos los numerales de las tarjetas pero nunca los utilizó para representar las operaciones.

Con los ejemplos presentados intentamos poner en evidencia un problema que requiere ser estudiado: ¿cuál es el funcionamiento de un sujeto cuando asume el rol de productor gráfico y cuando asume el rol de interpretador gráfico?

b) El segundo punto que plantearemos se refiere al uso que los niños hicieron del espacio gráfico para representar la resta.

En las producciones que obtuvimos TODOS los niños utilizaron el espacio gráfico de manera que la cantidad quitada y/o el resultado quedaron <u>separados</u> del estado inicial: EI arriba y Op. o EF abajo; EI en un lado de la hoja y Op o EF en el reverso; EI en una hoja y Op o EF en otra hoja; EI a la izquierda y Op o EF a la derecha, pero dejando un espacio en blanco entre ambos; a veces una raya o el dibujo de una mano separando los momentos de la operación.

Consideramos necesario destacar que NO hubo casos en los cuales EI y Op o EF quedaran gráficamente unidos; los productores buscaron formas de representar los momentos sucesivos y los interpretadores hicieron uso de esa información (tomaron en cuenta el recurso gráfico que permite recuperar la sucesión de eventos).

En los trabajos de Hughes, Sastre y Moreno se presentan producciones de niños en las cuales también encontramos la separación para representar los momentos de la resta. Ahora bien, dichos autores <u>no</u> analizan este aspecto de las producciones; ellos seleccionaron los ejemplos que presentan con base en otros criterios, y eso no nos permite hacer afirmaciones que tomen en cuenta la totalidad de las representaciones que obtuvieron. Pero si ello resultara sistemático (que los niños utilizaran el espacio para indicar los momentos sucesivos de la resta) podría significar que ANTES de representar el tipo de transformación realizada, los niños se centran sobre la sucesión de eventos; la secuencia de la operación sería un observable previo a la clase de transformación efectuada.

Para reforzar esta interpretación disponemos de algunos datos complementarios: tanto en nuestro sondeo previo como en los trabajos de los autores citados, aparecen representaciones de <u>sumas</u> en las cuales los niños colocan la graficación de los momentos en contigüidad espacial. Por ejemplo, para representar $\boxed{3+2=5}$:

$$\underbrace{\underbrace{0\ 0\ 0}_{EI}\ \underbrace{0\ 0}_{Op}}_{EF}$$

Es decir, al reunir en la suma EI con Op se obtiene la representación de EF; los tres momentos están graficados aun cuando no se recupera la sucesión de eventos.

En las producciones que obtuvimos para la resta NUNCA hubo representaciones de ese tipo. Ello se puede deber a que EI es el único momento de la resta en el cual todos los elementos que intervienen en la operación están presentes; si el niño graficara Op junto a EI obtendría un conjunto constituído por una cantidad de elementos que nunca intervino en la operación (porque en la resta Op está incluído en EI) y ello justificaría la necesidad se separar los momentos. Si bien el separar las cantidades intervinientes en los momentos de la operación no impide que en la hoja quede graficada una cantidad total de elementos que no intervino en la operación, la separación podría constituir un intento de representar el aspecto secuencial de la operación.

Otra explicación a ese dato podría ser la siguiente: en la resta Op es una cantidad que justamente se separa de EI (no se junta como en la suma) y el niño grafica dicha separación representándola a través del uso del espacio gráfico.

Si, como pareciera ser, en la resta el niño representa los momentos de la operación (al menos con mayor énfasis que en la suma) ésta sería una situación idónea para facilitar en el niño la centración sobre la sucesión. Esto es relevante porque hemos señalado que una diferencia básica entre la representación de cantidades y la representación de operaciones es que la primera constituye una situación estática, mientras que la segunda es dinámica; este aspecto está dado por el hecho de ser una transformación y toda transformación requiere como condición necesaria una sucesión de eventos; entonces; es fundamental que el niño, aunque aún no grafique el tipo de transformación realizada, logre captar la sucesión como aspecto esencial de la operación.

c) El último punto que vamos a señalar se deriva de un problema que ya hemos analizado: las condiciones de obtención de los datos deben tomarse en cuenta en el análisis de los mismos.

Hemos dicho, que si se quiere analizar la evolución hacia la utilización de los signos matemáticos la situación de mensajes ofrece ciertas limitaciones como forma de recolección de datos, porque no es un buen medio para propiciar el uso de dichos signos. Si se realiza como única forma de obtención de información no permite extraer conclusiones acabadas respecto al manejo que los niños tienen de los signos.

Sin embargo, en nuestro caso las situaciones de intercambio permitieron conocer, respecto al rol de <u>productor</u>, ciertas posibilidades de movilidad y descentración que algunos niños pusieron de manifiesto al intentar modificar su producción de acuerdo al modo de interpretación del compañero; ese dato no es posible obtenerlo más que a través de un intercambio entre niños. Respecto al rol de <u>interpretador</u>, encontramos las interpretaciones aditivas, que constituyen un dato significativo porque nos permitieron acceder a una hipótesis que parece estar presente en los niños: "Si está en el papel, está en la realidad"; incluso, como ya lo señalamos (ver: Algunas Conclusiones, Capítulo II, punto a), a pesar de presentar exclusivamente situaciones de resta y de enfrentar las dificultades de las interpretaciones aditivas desde el rol de productores, los niños las reiteraron como interpretadores.

Además, también en el rol de interpretadores hubo niños que pusieron de manifiesto sus intentos de acomodación al tratar de comprender la representación hecha por el compañero, realizando diferentes aproximaciones interpretativas. Recordemos, por ejemplo, el caso de Ilse (que hemos presentado en "El interpretador en las situaciones de intercambio, capítulo II), quien realizó distintas interpretaciones -todas ellas posibles- frente a la producción de Riger.

Por lo que hemos mencionado, no descartamos la utilidad de realizar situaciones de intercambio en trabajos de indagación psicológica; sólo pretendemos marcar sus limitaciones y alcances específicos.

Por otra parte, las situaciones de mensajes han sido propuestas por diversos autores como actividades didácticas. Entre éstos citaremos a Brousseau (1972) quien enfatiza el rol de las mismas como vía para que los niños se aproximen al uso de la convencionalidad. No cabe duda que es una actividad pertinente en una secuencia didáctica; permite orientar al niño hacia la toma de conciencia del punto de vista del otro y al mismo tiempo otorga una de las funciones básicas a la representación gráfica: la comunicación.

Pero lo que justamente queremos destacar es que las mejores situaciones para el quehacer didáctico no necesariamente lo son para la investigación psicológica, ni a la inversa. Con demasiada frecuencia encontramos en la práctica educativa la realización de actividades que han sido ideadas como situaciones específicas para la investigación psicológica y ello no las transforma en "buenas situaciones didácticas"; posiblemente el mejor ejemplo de ello lo constituya la situación clásica de entrevista pia getiana para indagar sobre la noción de conservación de cantidades discontínuas.

Este tipo de "apropiación" que la didáctica (*) realiza de aspectos metodológicos de la investigación psicológica, es similar a la transformación de datos y aportes psicológicos en objetivos y/o contenidos curriculares.

En las últimas décadas, debido a la difusión creciente de la teoría psicogenética, surgieron modalidades curriculares de ese tipo y a partir de la década de los 70 algunos profesionales de la educación comienzan a acusar de "transposición" a esos modos de utilización de los conocimientos psicológicos en el nivel educativo. Brun (1980) cuestiona que tanto los objetivos como los contenidos educativos estén sujetos a esos criterios, ya que se "sitúa el desarrollo operatorio en el terreno de las finalidades de la educación". Dice también: "Si analizamos ahora la lógica del proceso que ha conducido a la psicología a desempeñar este rol normativo, nos vemos confrontados a otra serie de transposiciones a la pedagogía (....) : las relativas a la definición de los contenidos mismos de la enseñanza". Al respecto Coll (1983) plantea: "como alternativa se sugiere una utilización de las primeras (el autor se refiere a la psicología y epistemología genética) como instrumento de análisis de los problemas surgidos en y desde la problemática educativa, en vez de considerarlas como una fuente potencial de soluciones ya hechas para resolver los males que aquejan a la educación".

(*) El término "didáctica" es utilizado por Brousseau con un significado equivalente al que tiene el término "pedagogía" en otros autores, como Brun y Coll.

De todas maneras consideramos que el problema está abierto -y aquí sólo lo mencionamos sin profundizarlo- y probablemente se logren precisar algunas respuestas a medida que la didáctica defina su objeto y método de análisis, así como también en el proceso de establecer las relaciones y "prestaciones" posibles entre psicología y didáctica.

IMPLICACIONES PEDAGOGICAS

Justamente después del último punto planteado no es fácil ubicarse desde la perspectiva pedagógica para intentar definir algunas de las "utilidades" que el trabajo realizado puede tener en el campo educativo; pero creemos que el intento de hacerlo es pertinente y necesario.

La reiterada afirmación de que lo conceptual y lo representativo son aspectos diferenciables dentro de lo matemático genera dos consecuencias básicas: se requiere trabajar sobre lo conceptual en sí mismo y también sobre lo gráfico; el problema es separar pero a la vez encontrar las relaciones o modos de relación posibles entre ambos.

El trabajo sobre lo conceptual implica la necesidad de diseñar situaciones que contribuyan al avance del niño en sus conceptualizaciones matemáticas y para ello se requiere tomar en cuenta que: "la acción aparece como el origen de todo conocimiento (incluyendo el conocimiento lógico-matemático)" por lo cual la situación didáctica debe tenerla como eje organizador, aclarando que "El término acción no refiere únicamente a 'acción material ' (abierta o manifiesta)" y que por lo tanto "puede remitir a interacciones sociales o a acciones internalizadas, tanto como a acciones materiales individuales" (Ferreiro, 1986, comentando la teoría de Piaget).

Los autores que han diseñado y propuesto situaciones didácticas en las cuales subyace el valor de la acción para la conceptualización matemática son, fundamentalmente: Dienes, Kamii, Sastre y Moreno, Brousseau. A pesar de sus semejanzas encontramos también diferencias entre sus propuestas.

Dienes plantea en los años 60 el trabajo con "las máquinas" como una alternativa didáctica, el cual permite, hasta cierto punto, que los niños operen de manera efectiva realizando diversas transformaciones cualitativas como base para el pasaje a las transformaciones cuantitativas; asumiendo ellos mismos los roles de EI, Op y EF. Dienes enfatiza el rol de la "concretización" en las actividades y, por lo tanto, de los materiales a utilizar; de allí sus diseños de materiales, entre otros, los "bloques lógicos" para la realización de actividades clasificatorias.

Kamii (1980) destaca la importancia de los juegos como forma de trabajo matemático, donde los niños interactúan y se constituyen en informantes recíprocos. Propone juegos para propiciar el avance de los niños en la operatoria fundamental; por ejemplo, para la suma, uno de estos juegos se realiza con un objeto que incluye una "resbaladilla" por la cual se hacen deslizar canicas; éstas caen en huecos numerados a partir de lo cual se suman los puntos logrados por cada jugador. Ella analiza esa situación a través del registro de dos niñas que están compitiendo entre sí coordinadas por la maestra y toma en cuenta cada intervención (tanto de las niñas como de la maestra) para señalar los alcances de la actividad y algunas dificultades o errores en las intervenciones de la maestra.

Sastre y Moreno (1980) intentan construir una "pedagogía operatoria" en la cual la totalidad del trabajo escolar se encuentra reformulado. Alrededor de temas o problemas que los niños plantean se organizan las situaciones didácticas, lo cual rompe la división de las actividades por áreas y cada "tema" se convierte en el eje estructurador de las actividades. Uno de los puntos que señalan como prioritarios es el logro de la generalización por parte del niño, por oposición a la restricción que presentan las "nociones escolares". Dentro de esta propuesta las situaciones referidas a contenidos matemáticos se encuentran contextualizadas por el tema en cuestión y la presentación de las mismas está en función de la resolución de problemas efectivos que el grupo enfrenta.

Brousseau (1972) se plantea estructurar un modelo didáctico para "obtener un buen conocimiento de la matemática". Propone la organización de las situaciones didácticas tomando en cuenta cuatro pasos o momentos: la acción, la formulación, la validación y la institucionalización. Los tres últimos pasos los retomaremos luego (donde interviene lo gráfico); en el momento de la acción los niños se enfrentan con un problema a resolver para lo cual deben movilizar los procedimientos o estrategias de que disponen. A través del material y las consignas que se les presentan, se propicia la evolución de dichas estrategias hacia aquéllas concebidas como "más matemáticas".

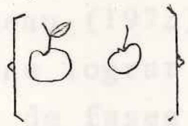
Aunque las propuestas de los autores que hemos citado varían de uno a otro, todos ellos adjudican a la acción individual y grupal un rol determinante para alcanzar el avance conceptual de los niños. Ahora bien ¿cuándo y cómo intervendría lo gráfico en el aprendizaje de la matemática? Hay diferentes posturas al respecto.

La postura que dio (y da) sustento a la enseñanza tradicional, en la mayoría de los contextos escolares, plantea trabajar con los signos matemáticos al inicio de primer grado (o desde preescolar) y sobre ellos centrar las actividades matemáticas. Aprender, por ejemplo, una operación consiste en aprender su algoritmo y graficación convencional; en este caso la acción está ausente. Sobre este punto nos surge una duda: el supuesto sería "de los signos al concepto" (el uso de los signos gráficos es lo que llevará a la conceptualización) o, como dice Sastre (1984): "Los sistemas de enseñanza más extendidos postulan una identidad total entre el aprendizaje de la operación y su notación gráfica", lo cual implicaría que el supuesto es "los signos son los conceptos". En las aulas de los primeros grados donde esta postura continúa vigente se realizan actividades como: repetición y mecanización de signos, planas de algoritmos gráficos, etc. que llevan a considerar que el supuesto subyacente es el segundo; pero en grados medios, y más aún superiores, se exige o se pretende que el niño conozca y maneje conceptos matemáticos, y hay desconcierto frente al fracaso en este sentido, lo cual podría llevar a realizar una distinción: en los inicios de la escolaridad se maneja la graficación convencional prácticamente como si fueran los conceptos mismos pero, por las expectativas que se presentan luego, pareciera que subyace el supuesto de que ésta es una etapa necesaria para que el niño se apropie de los aspectos conceptuales.

De todas maneras, con ambos supuestos posibles disienten totalmente los autores que hemos citado anteriormente y a partir de ello plantean otras modalidades para trabajar sobre lo gráfico.

Dienes propone una secuencia en la cual, manejando siempre los aspectos conceptuales a partir de las acciones efectivas con el material, los niños deben en primer término distinguir el significante del significado, tanto a nivel oral como gráfico: "la palabra 'árbol' no es un árbol. Nos recuerda un árbol, eso es todo. La palabra 'azul' no es el mismo color azul, y no es indispensable coger la tiza azul para escribirla en el encerado. La palabra 'azul' puede ser muy bien blanca. Es por convención que nos recuerda el color azul". Al llegar a los atributos numéricos, dice: "se pasa por las mismas etapas: en primer lugar, utilizamos los objetos mismos, después, cuando los niños han empezado a comprender qué es la propiedad dos, se recurre a la palabra 'dos'. La simbolización se hace antes con la ayuda de dos imágenes entre las llaves, luego con la ayuda de bastoncitos o de puntos que no tienen ya ningún carácter representativo de los objetos del conjunto. A partir de aquí, se puede escribir la palabra 'dos' y después pasar a la cifra '2'". Sobre este último punto hay que señalar que el problema de pasar de una escritura alfabética a una ideográfica involucra múltiples problemas conceptuales; no es admisible plantear dicha traslación "sin más".

Notemos que antes del uso del signo, Dienes propone una simbología específica que, en el caso citado es:

N  = 2 (Donde N designa "el atributo número" del conjunto)

También propone representaciones para "las máquinas" como para las otras nociones sobre las cuales trabaja.

Queremos fundamentalmente señalar que plantear representaciones mediatizadoras o intermedias como requisito previo al uso del signo tiene como consecuencia el introducir otra convención gráfica; ya que la representación la propone el maestro como LA forma de graficar la noción con la cual trabajan. Si bien esas representaciones mediatizadoras no son absolutamente arbitrarias, ya que mentienen cierta relación de semejanza con lo representado, de todas maneras exigen que el niño deba apropiarse de representaciones que pasan a ser convencionales (al menos en el grupo escolar). El comprenderlas y manejarlas puede constituir un esfuerzo equivalente al que requiere la apropiación de los signos, sólo que a través de más "pasos". Que guarden similitud con lo representado no garantiza que facilite al niño su utilización y, además, se continúa graficando en el aula sólo representaciones creadas por otros adultos.

Es similar a esta situación la que se crea con el uso de los libros o cuadernillos de aprestamiento, donde se impone un modo de representar la conrrespondencia biunívoca, los conjuntos, etc. que el niño debe respetar como forma única y privilegiada de representación. En esta línea se ubica Nicole Picard (1970):"cuando haya dos figuras de la misma forma se las une con un trazo". "Se indica que algunos elementos constituyen un conjunto, rodeándolos por una curva cerrada".

Brousseau (1972), con su modelo de situaciones didácticas se propone lograr la apropiación de los signos matemáticos a través de fases o momentos; después de la acción (que ya hemos mencionado) deviene la formulación, durante la cual los niños deben expresar las acciones realizadas, básicamente mediante el uso de mensajes escritos. Estos deben tender a ser: "sin ambigüedad; sin redundancia; sin información supérflua y minimales" por lo cual se aproximan paulatinamente al uso de mensajes "cuasi matemáticos". Durante el momento de la validación se explicitan los criterios sobre los cuales se elaboró el mensaje, y los niños deben justificar sus graficaciones. En el momento de la institucionalización se trabaja sobre la convencionalidad con los signos matemáticos.

Esta propuesta puede ser funcional con niños de grados medios y superiores, pero obteniendo producciones del tipo de las que hemos presentado y considerando las posibilidades restringidas del niño preescolar para reflexionar y analizar sus propias acciones, consideramos que esta secuencia no sería pertinente.

Sastre y Moreno (1980) trabajan sobre lo gráfico también a través del uso de mensajes escritos entre niños, aunque señalan (Sastre, 1984) "la comprensión manipulativa y verbal de una actividad aritmetizable era anterior a la capacidad de representar gráficamente las mismas transformaciones realizadas a nivel de la acción y explicadas también correctamente con lenguaje oral", por lo cual la secuencia sería: acción, verbalización, graficación. Respecto específicamente a lo gráfico enfatizan el uso de las representaciones espontáneas porque: "Se trata de una escritura propia que el niño elabora al organizar mentalmente la realidad empírica que lo rodea", es "un organizador más de la conducta intelectual, con una evolución específica, y sólo en su fase terminal se llega a la incorporación del objeto cultural como modelo a aplicar".

En cuanto al planteo general coincidimos con Sastre y Moreno pero queda en pie la pregunta respecto a cómo propiciar el avance del niño hacia la utilización de los signos.

Otra postura consiste en dejar de lado lo gráfico durante las etapas iniciales de la escolaridad y centrar las actividades exclusivamente en los aspectos conceptuales de la matemática; no introducir los signos hasta que los conceptos sean manejados por los niños. Aquí hay dos implícitos que podrían sintetizarse en: lo conceptual y lo gráfico son dos aspectos diferenciables, y se requiere trabajar sobre el primero para luego pasar al segundo, que es sólo la incorporación de los signos. En cuanto al punto: primero el concepto y luego la graficación, es coincidente con Dienes, aunque él introduce simbologías previas a la utilización del signo. Quien mejor representa esta postura es Kamii: "la re presentación escrita no tiene sentido antes de la construcción (..,) de la idea a representar (...) La representación escrita no es un objetivo válido en primer grado" (1984 a.) "Una vez que el niño ha construído el conocimiento lógico-matemático de 'siete' u 'ocho', tiene la posibilidad de representar esta idea con símbolos o signos" (1984 b.); lo cual se resume en el título de uno de sus trabajos: "La aritmética sin lápiz en el primer nivel" (1984 a.).

Desde nuestra perspectiva esta postura surge, y es explicable, como respuesta "contestataria" a la que hemos citado en primer término, que da sustento a la enseñanza tradicional. Dado que la actividad matemática del aula centra su tarea sobre lo gráfico, al diferir totalmente con ello surge como propuesta: "sacar" los elementos gráficos del salón de clase.

Nuestro punto de vista es otro. ¿Cuál sería la finalidad de indagar sobre los modos de graficar en los niveles iniciales si negáramos a priori la posible utilidad de esas graficaciones? Conocer las graficaciones matemáticas que realizan los niños pequeños puede constituir un punto de apoyo para la modificación de prácticas escolares y quizá contribuir al proceso de construcción de las nociones matemáticas. Por supuesto es imprescindible trabajar sobre los aspectos conceptuales, pero el trabajo sobre lo gráfico NO consiste exclusivamente en la utilización de los signos; que el sujeto requiere manejar y conocer los conceptos que esos significantes representan <u>no</u> significa que debe construírlos de manera acabada (además de compartirlos socialmente de idéntica forma) <u>antes</u> de hacer uso de los signos gráficos; y puede representar dichos conceptos a SU manera previa y/o simultáneamente al uso de los signos gráficos.

Lo que queremos decir es que el trabajo sobre lo gráfico puede consistir en propiciar que el niño represente matemáticamente a su manera y ésta es una línea ausente en las escuelas más vanguardistas. ¿Por qué no vemos en los contextos escolares producciones como las que hemos presentado? Porque las actividades del aula no promueven que ellas surjan.

En este sentido observamos algo muy diferente a lo que está sucediendo respecto a la lengua escrita. Desde hace cerca de una década se comenzaron a conocer cuáles son las formas de conceptualización de los niños con respecto al sistema de escritura (Ferreiro y Teberosky, 1979) y a partir de entonces vemos, cada vez con mayor frecuencia, producciones de niños que distan marcadamente de la escritura convencional y que de ninguna manera constituyen un impedimento para acceder a esta última. Dichas producciones no sólo aparecen en libros de psicolingüística, ponencias, revistas especializadas, etc. sino que paulatinamente están presentes en las aulas, y no sólo del nivel preescolar, sino también en los primeros grados de primaria (*).

Muchas escuelas y maestros en diferentes países comenzaron a desacralizar el uso del cuaderno escolar permitiendo que los niños se apropien del mismo utilizándolo "a su manera", escribiendo como ellos piensan. En algunos casos esas escrituras todavía no se realizan en EL cuaderno, pero el niño tiene acceso a hojas en las cuales puede hacerlo y hasta se colocan dichas hojas en paneles de exposición o se distribuyen a otras instituciones educativas y a los padres.

(*) Este hecho fue evidente en el Encuentro Latinoamericano sobre experiencias alternativas en alfabetización de niños (México, Octubre 1987).

Es decir, al comprender que el niño tiene maneras propias de escribir antes de apropiarse del sistema convencional y que esas maneras son parte necesaria del proceso de aprendizaje de la escritura, se validan dichas escrituras y esas escuelas no sólo las permiten sino que las propician.

Respecto al lenguaje matemático ello no se ha iniciado, ni siquiera en las escuelas de vanguardia. Las únicas representaciones matemáticas que hay en las aulas son los signos; incluso podemos encontrar conjuntamente con las escrituras espontáneas, los numerales y los signos de la operatoria fundamental.

Nuestra propuesta va en el mismo sentido para los dos sistemas de representación que se introducen en los niveles educativos iniciales: promover que en ambos casos los niños utilicen sus propios modos de representación gráfica. Lo cual no significa trabajar exclusivamente con las representaciones espontáneas sino utilizar al mismo tiempo, como material didáctico, los diferentes portadores de signos: libros, carteles, envases, periódicos, etc. de manera que funcionen como facilitadores del proceso de apropiación de la convencionalidad.

A pesar de nuestra propuesta recién mencionada, es necesario realizar algunas distinciones respecto a los dos sistemas representativos: la lengua escrita es la representación de un objeto (la lengua oral) que el niño ya utiliza, y de cuyo conocimiento da pruebas a través de sus actos lingüísticos, mientras que el lenguaje matemático representa conceptos que aún desconoce. Este hecho marca una diferencia fundamental puesto que en el segundo caso es preciso construir simultáneamente ambos aspectos (conceptuales y representativos).

Además, con respecto al lenguaje matemático, en los objetos portadores de signos aparecen casi exclusivamente los numerales mientras que están presentes prácticamente todos los signos correspondientes a la escritura del lenguaje natural. Ello debe contribuir, seguramente, a facilitar la apropiación de unos más que de otros. Los signos del lenguaje matemático que representan relaciones y operaciones están generalmente ausentes de los contextos extra-escolares.

Por otra parte, cuando los niños ya manejan con cierta fluidez el sistema de escritura, lo utilizan espontáneamente en situaciones cotidianas: anotan nombres, escriben cartas, mensajes, listas de compras, leen cuentos, etc. (siempre que el medio en el cual se desarrollan plantee esas posibilidades). También aparecen en situaciones cotidianas los numerales (precios, números de teléfono, direcciones, etc.), pero no encontramos con esa frecuencia situaciones de la vida diaria que den lugar a la utilización de los signos que representan operaciones matemáticas. Incluso se ha observado, con respecto a niños que cursan grados medios o superiores y utilizan dichos signos de manera cotidiana en el salón de clases, que "La escritura aritmética que la escuela transmite no se aplica de inmediato a tareas extraescolares. Los muchachos, en lugar de utilizar los algoritmos, manifiestan una clara preferencia por grafías no aprendidas en un proceso de enseñanza formalizada" (Sastre, 1984), como si hubiera una "renuencia universal para usar los signos de la aritmética escolar" (Hughes, 1986).

Las diferencias que hemos planteado crean una situación de "desventaja" del lenguaje matemático respecto a la escritura del lenguaje natural y ello requiere ser objeto de análisis didáctico tanto como psicológico, dado que genera múltiples preguntas, aún sin respuesta. Una de las preguntas fundamentales es la siguiente: ¿es posible establecer una psicogénesis de la representación de las nociones matemáticas similar a la psicogénesis de la representación escrita del lenguaje natural?

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA

Bourbaki, Nicolas (1974) Eléments d'histoire des mathématiques. París: Hermann (Primera edición 1969).

Brousseau, Guy (1970) Processus de mathématisation en: La mathématique a l'école élementaire. París: APMEP (Número especial).

Brun, Jean (1980) Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones. En: Infancia y Aprendizaje.

Coll, César (1983) Las aportaciones de la psicología a la educación: el caso de la teoría psicogenética y de los aprendizajes escolares. En: Psicología genética y aprendizajes escolares. C. Coll. Compilador. Madrid: Editorial Siglo XXI.

Dienes, Z.P. y Golding, E. (1971) Los primeros pasos en matemática. Vol. 1, 2 y 3. Barcelona: Editorial Teide. (Traducido de la edición francesa, 1966).

Ferreiro, Emilia y Teberosky Ana (1979). Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño. México: Editorial Siglo XXI.

Ferreiro, Emilia (1981) La posibilidad de la escritura de la negación y la falsedad. México: DIE-CINVESTAV-IPN. (Serie Cuadernos de Investigaciones Educativas).

Ferreiro, Emilia, Gómez Palacio y Col. (1982) Análisis de las perturbaciones en el proceso de aprendizaje de la lectoescritura. México: SEP-OEA.

Ferreiro, Emilia (1986) Psicogénesis y educación. México: DIE-CINVESTAV-IPN (Serie Documentos).

Fuenlabrada, Irma y Saiz, Irma Elena (1981) Sistema de numeración, suma y resta en la escuela primaria. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias: CINVESTAV-IPN. México, (mimeo).

Gelb, Ignace (1976). Historia de la escritura. Madrid: Editorial Alianza (original inglés: 1952).

Harvey H.R. y Williams B.J. (1980). Aztec Arithmetic: Positional Notation and Area Calculation. En: Science. Vol. 210, Núm. 4469, p. 499-505.

Hughes, Martin (1986) Children and Number. Oxford: Basil Blackwell.

Kamii, Constance (1980) Addition is not jus a skill: some principles of teaching derived from Piaget's theory. (mimeo).

Kamii, Constance (1980) Equations in First-Grade Arithmetic: A Problem for the "Disadvantaged" or First Graders in General . Ponencia presentada en el Congreso Anual de la Asociación Americana de Investigaciones Educativas. Boston, Abril de 1980 (mimeo).

Kamii, Constance (1984) L'arithmétique en première primaire, sans crayon. En: Noves perspectives sobre la representació escrita en el nen. Barcelona: IME/ICE.

Kamii, Constance (1984) El número en la educación preescolar. Madrid: Editorial Visor Libros (original inglés: 1982).

López Luna, Ma. de los Angeles (1987) ¿Qué saben los niños sobre la escritura de las operaciones aritméticas elementales? México: SEP-OEA (mimeo).

Moreno, Montserrat y Sastre, Genoveva (1980) Aprendizaje y desarrollo intelectual. Barcelona: Editorial Gedisa.

Moreno, Montserrat y Sastre, Genoveva (1980) Descubrimiento y construcción de conocimientos. Barcelona: Editorial Gedisa.

Piaget, Jean (1933) La representación del mundo en el niño. Madrid: Editorial Morata (original francés: 1928).

Piaget, Jean e Inhelder, Bärbel (1973) Génesis de las estructuras lógicas elementales. Buenos Aires: Editorial Guadalupe (original francés: 1959).

Piaget, Jean y Szeminska, Alina (1975) Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Editorial Guadalupe (original francés: 1941).

Picard, Nicole (1970) La matemática moderna en los primeros grados. Buenos Aires: Editorial Estrada.

Sastre, Genoveva (1984) Aprendizaje de los signos aritméticos y su generalización. En: Noves perspectives sobre la representación escrita en el nen. Barcelona: IME/ICE.

Saussure, Ferdinand de (1945) Curso de lingüística general. Buenos Aires: Editorial Losada.

Scott, B. y J.F. (1958) A history of Mathematics. London: Taylor y Francis.

Sinclair, Anne y col. (en prensa) La notation numerique chez l'enfant. En: H. Sinclair (Ed.) La production de notations chez le jeune enfant. París: P.U.F.

Sinclair, Hermine (1982) El desarrollo de la escritura: avances, problemas y perspectivas. En: Nuevas perspectivas sobre los procesos de lectura y escritura, Ferreiro, E. y Gómez Palacio M. Compiladoras. México: Editorial Siglo XXI.

Sinclair, Hermine (1984) Les procedés d'apprentissage de l'enfant face aux systemès représentatifs. En: Noves perspectives sobre la representació escrita en el nen. Barcelona: IME/ICE.

Vergnaud, Gérard y Durand C. (1976) Structures additives et complexité psychogénétique. Revue Française de Pédagogie. Núm. 36, p. 28-43.

Vergnaud, Gérard (1984) Représentations mathématiques: de mauvais rapports signifiés/signifiants. Peut-un les améliorer? En: Noves Perspectives sobre la representació escrita en el nen. Barcelona: IME/ICE.

Vinh-Bang (1970) El método clínico y la investigación en psicología del niño. En: Psicología y Espistemología Genética (Temas piagetianos) Buenos Aires: Editorial Proteo. (original francés: 1968).

El jurado designado por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el día 2 de febrero de 1988.

Doctora
Emilia Beatriz María Ferreiro Schiavi
Directora de Tesis y Profesor Titular del Departamento de Investigaciones Educativas

Maestra en Ciencias
Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Profesor Adjunto del Departamento de Investigaciones Educativas

Maestra en Ciencias
Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Profesor Titular del Departamento de Matemática Educativa

Doctor
Edgar José Becerra Bertram
Profesor Titular de la Academia de Matemáticas del área de docencia de la Universidad Pedagógica Nacional