CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE DIVISIÓN EN LA ESCUELA PRIMARIA. UN ESTUDIO DIDÁCTICO

TESIS

Que presenta para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas

EVA MORENO SANCHEZ
Lic. en Educación Primaria

Director de Tesis:
M. en C. David Francisco Block Sevilla

Julio, 1996

SAN BORJA No. 938 MÉXICO, D.F. C.P. 03100 APARTADO POSTAL 19-197 Tels. 559-4080 559-4077 559-4232
FAX DIE 575-0320

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1
DIDACTICA DE LAS MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

1. La relación entre técnicas operatorias y resolución de problemas: un cambio fundamental
2. El sentido de un conocimiento y los problemas
3. La situación didáctica

CAPÍTULO 2
LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

1. ¿Qué es la división?
2. Significados de la división
3. Técnicas para dividir. Vínculo con otras operaciones
4. Algunas dificultades de la enseñanza de la división en la escuela

CAPÍTULO 3
OBJETO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA. LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

1. Objeto de estudio
2. Metodología de esta investigación
3. La secuencia de situaciones didácticas
4. Variables didácticas

CAPÍTULO 4
LOS PROCEDIMIENTOS INICIALES

1. Condiciones didácticas
2. Análisis de procedimientos iniciales
A. El reparto uno a uno
B. La estimación del cociente
C. La adición iterada
3. La verificación de resultados: acceso a la relación inversa al reparto

CAPÍTULO 5
DEL REPARTO AL USO DE LA MULTIPLICACIÓN

1. Condiciones didácticas
2. Las situaciones didácticas

A. Sesión 5
a) La búsqueda del multiplicando
b) Otros intentos de buscar el cociente en la tabla de multiplicaciones
c) Reparto uno a uno gráfico y con material
d) El uso de la multiplicación directa (procedimiento erróneo)
B. Sesión 6
a) Retoman uno de los cocientes hipotéticos y lo verifican
b) No retoman el cociente hipotético. Resuelven directamente
c) Procedimientos erróneos

d) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

C. Sesión 7
a) Iteración gráfica de un cociente
b) Iteración gráfica de un cociente y multiplicación para verificar
c) Multiplicación del cociente hipotético para verificar
d) Multiplicación directa
e) Procedimientos erróneos
f) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

D. Sesión 8
a) Repartos con un residuo grande
b) Repartos con un cociente mayor que 10

CAPÍTULO 6
DE LA MULTIPLICACIÓN HACIA UNA "NUEVA OPERACIÓN"

1. Condiciones didácticas
2. Las situaciones didácticas
A. Sesión 10
a) Procedimientos usados por los niños
b) Uso de la calculadora

B. Sesión 11
a) ¿Multiplicación directa de los datos o búsqueda del multiplicando?
b) Usos de la tabla
c) Cocientes parciales
d) Institucionalización de la escritura **a** ÷ **b = c**

C. Sesión 12
a) Uso de la división
b) Uso de la tabla de multiplicaciones
c) Nuevamente los procedimientos de representación gráfica
d) La calculadora

CAPÍTULO 7
DE LA EXPRESIÓN SIMBÓLICA, NUEVAMENTE AL CONTEXTO

1. Condiciones didácticas
2. Los problemas escritos por los niños
A. Relaciones entre los datos de los problemas
a) Con estructura de reparto y relación correcta dividendo-divisor-cociente
b) Dificultades para identificar datos e incógnita
c) Otros casos
3. Significados, propiedades y representaciones atribuidas a la división
a) Los tres elementos de un reparto: "lo que se reparte", "entre cuántos se reparte" y "lo que le toca a cada quien"
b) La expresión "a cada uno"
c) "Vender" y "regalar" también es repartir

d) La equitatividad, y el residuo menor que el divisor
e) La operación que hicimos es...
f) Cómo se representa
g) ¿Cómo se resuelve?
h) Otras propiedades

CONCLUSIONES

1. Síntesis del proceso
2. ¿Qué es la división para los niños? ¿Cuáles son sus propiedades?
3. Las situaciones didácticas
4. Límites de este trabajo
5. Mi experiencia como maestra en las sesiones experimentales

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

Un rasgo característico ya documentado**,** de las prácticas de enseñanza de las operaciones básicas en la educación primaria, es el centramiento en los algoritmos[1]. Los problemas, reconocidos como el lugar en el que los algoritmos se aplican y muestran su utilidad, tienden a ocupar en la escuela un espacio menor y siempre posterior a la enseñanza de las técnicas operatorias.

La separación entre enseñanza de las técnicas y la resolución de problemas ha sido identificada como una de las principales causas tanto de la pérdida de significación de las operaciones matemáticas en la escuela, como de los fracasos en la utilización de dichas operaciones para resolver problemas[2]**.**

Desde hace aproximadamente tres décadas se realizan estudios en didáctica de las matemáticas que exploran vías alternativas para el aprendizaje desde una concepción didáctica constructivista. Bajo esta concepción se plantea la posibilidad de propiciar la construcción por parte de los alumnos, tanto de las técnicas operatorias como de algunos significados, a partir de la resolución de cierto tipo de problemas.

El presente trabajo se ubica en esta corriente y constituye la primera parte de un estudio didáctico sobre el aprendizaje de la división de los números naturales en la escuela primaria[3]. Está organizado en siete capítulos, según se describe a continuación.

En el capítulo 1, *Didáctica de las Matemáticas*. *Un enfoque constructivista*, desarrollaré algunas de las premisas teóricas en didáctica de las matemáticas que orientan este trabajo.

En el capítulo 2, *La división de números naturales*, reportaré algunos de los estudios que se han realizado sobre este tema y que constituyen un antecedente de mi trabajo. Hablaré también de algunas dificultades que subyacen a la enseñanza de la división y sus consecuencias en el uso de la operación por parte de los alumnos.

En el capítulo 3, *Objeto de estudio. Metodología de la investigación. La secuencia de situaciones didácticas*, señalaré el propósito central de mi trabajo, explicaré de manera general el proceso de investigación realizado y las etapas que abarcó el estudio experimental, así como los aspectos relevantes en que se centró el análisis de cada etapa.

En los capítulos 4 a 7 reportaré los resultados de la experimentación en sus distintas etapas, enfatizando los procesos de evolución de las nociones en los niños del grupo de experimentación.

Finalmente presentaré las conclusiones obtenidas a través de la investigación. En ellas incluyo un apartado específico sobre mi rol como maestra en las sesiones experimentales*,* refiriendo algunas vivencias que a lo largo de las sesiones de clase, me permitieron analizar ciertas situaciones a las que el docente se enfrenta cotidianamente, mismas que escapan a sus posibilidades de previsión o control.

---

[1] Ver por ejemplo, Fuenlabrada, I., Grecia Gálvez, Irma Saiz (1978) "Enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria". Proyecto de investigación. Laboratorio de Psicomatemática del Departamento de Investigaciones Educativas. CINVESTAV - IPN. Ver también Block y Dávila (1993), Saiz (1994), así como los actuales Libros para el Maestro editados por la Secretaría de Educación Pública, cuyos autores recuperan parte de su experiencia en investigación. Todos ellos coinciden al señalar que una enseñanza centrada en el algoritmo de las operaciones (como punto de partida) redunda en la pérdida de sentido y significado para los alumnos.

[2] Charnay, como Brousseau, y otros investigadores en didáctica de las matemáticas, afirman que el sentido del conocimiento matemático se construye en el planteamiento y resolución de problemas, y no en la aplicación de técnicas de ejecución de las operaciones, en las que los números no tienen un significado específico.

[3] La segunda parte se encuentra en Martínez, Patricia *Desarrollo de procedimientos para dividir. Estudio didáctico sobre la noción de división en la escuela primaria* (tesis de Maestría en proceso bajo la dirección del M. en C. David Block), México: DIE-CINVESTAV-IPN.

CAPÍTULO 1

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA

Los estudios desarrollados sobre didáctica de las matemáticas en México y en otros países, plantean que el aprendizaje se construye a partir de situaciones en las que los alumnos se enfrentan a la búsqueda creativa de soluciones a problemas propuestos, usando los conocimientos que poseen y enriqueciéndolos a través del intercambio de experiencias con sus compañeros y maestro. En estas situaciones problemáticas[1] , maestro, alumno y conocimiento interactúan de manera constante.

A continuación intentaré caracterizar los aportes teóricos resultantes de estas investigaciones que orientan mi trabajo.

1. LA RELACIÓN ENTRE TÉCNICAS OPERATORIAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN CAMBIO FUNDAMENTAL

La experiencia ha mostrado que un contenido matemático no puede ser aprendido por los niños como algo "acabado" (en la forma institucionalizada en que lo conocemos). Es necesario buscar los medios para favorecer que los niños, a partir de las nociones que han desarrollado, construyan nuevas relaciones vinculadas al nuevo conocimiento en cuestión. Es precisamente en esta tarea donde la didáctica cobra su razón de ser.

Brousseau, en relación a los proceso de transposición didáctica del conocimiento, explica que en dichos procesos "el matemático no comunica sus resultados tal como los ha hallado; los reorganiza, les da la forma más general posible; realiza **una didáctica práctica** que consiste en dar al saber una forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada, atemporal. El docente realiza primero el trabajo inverso al del científico, una recontextualización y repersonalización del saber... El alumno, para transformar sus respuestas y sus conocimientos en saber deberá, con la ayuda del docente, redespersonalizar y redescontextualizar el saber que ha producido, para poder reconocer en lo que ha hecho, algo que tenga carácter universal, un conocimiento cultural reutilizable" (Brousseau, 1988).

En la perspectiva constructivista del aprendizaje, se define un rol de maestro muy distinto a aquél que le asigna la transmisión de saberes que los alumnos reciben para repetirlos y aplicarlos, sólo en circunstancias muy similares a aquéllas en las que les fue enseñado. Se asume una concepción de aprendizaje en la que la resolución de problemas "es la fuente y el criterio del saber;... la fuente porque en estas situaciones se elaboran las nociones y se abstraen las propiedades pertinentes; el criterio porque también en estas situaciones se prueban los conocimientos operativos" (Vergnaud, 1988).

Lo anterior alude a una relación distinta entre el conocimiento y su aplicación: los problemas son útiles para construir el conocimiento a partir de situaciones que le den sentido, y no sólo para aplicar dicho conocimiento. Por lo tanto, para que el alumno construya el sentido de un conocimiento matemático, tendrá que enfrentar los retos que los problemas le ofrecen, produciendo al principio respuestas limitadas y provisorias. Los conocimientos previos serán la base para la búsqueda de relaciones matemáticas más complejas; para la identificación de acciones que llevan al alumno a encontrar soluciones exitosas, o bien para identificar aquellas acciones que lo conducen a cometer errores.

Hay ciertos errores que, lejos de cometerse por falta de capacidad o de comprensión, constituyen un paso inevitable en el proceso de aprendizaje. Para Brousseau (1986), "el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar..., sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadaptado". Sin embargo, para que el alumno logre identificar cuándo comete un error y busque formas de corregirlo, deben plantearse situaciones en las que el error se evidencie (puede tratarse desde una situación diseñada exprofeso para ello, hasta preguntas pertinentes planteadas por el maestro, aprovechando los recursos que la propia situación ofrece).

Cuando se intenta enseñar a los niños la división a partir de su técnica operatoria, sin asociar la operación a un contexto que dé sentido y significado a los números, lo que aprenden finalmente, es una serie de pasos mecánicos, en los que no se explican por qué hay que multiplicar, restar y sumar. Así, es difícil que los niños sean concientes de los errores que cometen. Estos se traducen en un resultado incorrecto, invalidado por el maestro al tachar la operación y pedir que la repitan.

En cambio, si la operación se enseña partiendo del planteamiento de problemas que impliquen dividir, permitiendo primero que los niños busquen libremente las formas de resolverlos, irán probando estrategias de solución implementadas por ellos, con los conocimientos que ya poseen. Conforme vayan estableciendo relaciones entre el contexto del problema y las acciones que realizan para llegar a un resultado, irán distinguiendo entre distintas estrategias, cuáles no funcionan y cuáles sí. Estas evolucionarán de acuerdo a ciertas variables didácticas que el docente incluya en las situaciones.

Para Brousseau, "el alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, 1986).

Ese medio en el que el alumno aprende, implica una intención por parte del maestro, ya que "... un medio sin intenciones didácticas es manifiestamente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera" (Brousseau, 1986).

Las intenciones didácticas que el docente se plantee, serán la directriz para el establecimiento de ciertas condiciones que favorezcan la interacción entre alumnos y conocimiento. Entre estas condiciones, la comunicación maestro-alumno y alumno-alumno cobra un papel relevante porque permite al primero identificar no sólo estrategias de acción que implementan los niños, sino comprender porqué las usan, a través de las explicaciones que ellos mismos ofrecen en la clase.

En este trabajo me propongo estudiar, a partir de estos planteamientos, un proceso didáctico que propicie la construcción de ciertos aspectos del significado de la división, partiendo de la resolución de cierto tipo de problemas, antes de arribar a una técnica operatoria.

2. EL SENTIDO DE UN CONOCIMIENTO Y LOS PROBLEMAS

Los problemas, tal como se conciben en la construcción del saber, implican una diversidad de relaciones entre sus elementos, y no un modelo único en el que el alumno reconoce de inmediato qué operación le ayuda a resolverlo.

La diversidad de problemas que los niños enfrenten para movilizar sus conocimientos y crear otros nuevos, tiene que ver con el contexto de las operaciones, el tipo de magnitudes, el orden de los datos y el tipo de pregunta que se plantee. Hay que considerar que "... diversos problemas pueden funcionalizar un concepto de manera sensiblemente diferente, propiciando interpretaciones también diferentes" (Block, 1987).

En consecuencia, un conocimiento adquiere sentido, en primer lugar, en tanto herramienta que permite resolver cierto tipo de problemas. Así, el alumno recorre el camino a través del cual logrará usar el concepto como herramienta, en el sentido que señala Douady: "Un concepto es una herramienta cuando enfocamos nuestro interés en el uso que se le da para resolver un problema" (Douady, 1984).

Para que un problema funcione como recurso que promueva el aprendizaje matemático y la capacidad de razonamiento en los alumnos, debe en primer término, representar un reto, una dificultad adecuada al nivel de los alumnos. Un problema deja de ser problema para los propios alumnos, cuando de antemano saben cómo se puede resolver. En segundo lugar, debe favorecer el uso de recursos propios en la búsqueda de soluciones, lo que implica una diversidad de procedimientos que pueden darse a conocer en el grupo. Esto enriquece las relaciones matemáticas que los niños logran establecer entre los elementos del problema.

"El sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde ese conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma" (Brousseau, 1983).

En tanto las situaciones tengan sentido para el alumno, podrá construirse el significado de un conocimiento, que según Charnay[2] , se considera en dos niveles:

Un *nivel externo* que permite identificar cuál es el campo de utilización de ese conocimiento y cuáles son los límites de este campo; y un *nivel interno* que nos lleva a saber cómo y por qué funciona tal herramienta, por ejemplo, cómo funciona un algoritmo y por qué conduce al resultado buscado.

A lo largo de este trabajo veremos cómo, a partir del planteamiento y resolución de problemas de reparto, los niños van utilizando distintos procedimientos gráficos y numéricos, y asociando a la división ciertas propiedades que la caracterizan como una operación nueva, distinta a las que ya conocen.

3. LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

El planteamiento y la resolución de problemas se realiza al interior de una situación didáctica, o más precisamente, de una *secuencia de situaciones didácticas*.

Para Brousseau (1982), una situación didáctica es "un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, cierto medio, que eventualmente comprende los instrumentos y los objetos; y un sistema educativo (el profesor) cuya finalidad es que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constituirse"

En este enfoque, algunas características que debe reunir una situación didáctica son las siguientes:

- Estar conformada por problemas significativos para el alumno. Esto es, que pueda comprender de qué se trata, para anticipar por lo menos un procedimiento de solución (cualquiera) que estará basado en sus conocimientos previos; éste se considera como una "estrategia de base" para abordar el problema.

- Es indispensable que la situación didáctica posibilite la evolución de los procedimientos o estrategias, lo que se logrará en la medida en que exista un diálogo entre el niño y la situación de aprendizaje. Es decir, la situación debe devolverle información, a fin de que él mismo pueda verificar sus aciertos y encontrar sus errores para hacer las adaptaciones necesarias en esa misma situación.

- Las variables incluidas en los problemas (en el caso de este proyecto son, por ejemplo, el tamaño de los números, el contexto o las especificaciones para resolver) deben generar obstáculos con la intención de invalidar las estrategias de base usadas por el alumno, y propiciar que éste vaya descubriendo otros procedimientos.
- En la situación didáctica se incluyen también momentos de confrontación colectiva e interacción entre los niños al resolver los problemas, a fin de difundir estrategias y socializar su conocimiento. Por ello, se pretende que la intervención del maestro se dé como un elemento importante que propicie la interacción en la situación de aprendizaje, al plantear nuevos conflictos que provoquen la reflexión a nivel individual y colectivo.

La elección de una situación apropiada puede hacer funcionar un conocimiento en el alumno, pero para que sea una situación de aprendizaje, debe representar para los alumnos una necesidad de movilizar sus conocimientos para adquirir otros.

Si fuera necesario poseer el conocimiento por enseñar para generar la solución a la problemática planteada, evidentemente no se trataría de una situación de aprendizaje. Se requiere pues, que las respuestas de los alumnos frente a los problemas, no sean las que el maestro espera; esas respuestas deben ser a la situación y no a los deseos del maestro.

Para Brousseau, en las situaciones didácticas se generan también situaciones a-didácticas, que define como aquellas "...situaciones de aprendizaje en las que el maestro ha logrado hacer desaparecer su voluntad, sus intervenciones, en tanto informaciones determinantes de lo que el alumno hará; son las que funcionan sin la intervención del maestro en el nivel de los conocimientos"[3] .

Brousseau distingue cuatro tipos de situaciones didácticas frecuentemente presentes en el proceso de matematización:

a) Situaciones de acción

Son los momentos en que se confronta al alumno con la situación que le plantea problemas, y que le lleva a actuar en la búsqueda de un resultado. Es entonces cuando, a partir de su experiencia, crea procedimientos para acercarse a la solución, de acuerdo a sus conocimientos previos y a la información que la propia situación ofrece. Se establece así, un diálogo entre el alumno y la situación. A través de este diálogo el alumno va decidiendo si mantiene, modifica o abandona las acciones iniciales; lo que le permite construir un modelo que funcione para el hallazgo del resultado que busca.

b) Situaciones de formulación

Los modelos usados en la fase de acción, son explicitados por los alumnos mediante un lenguaje que ellos mismos crean y que puede ser verbal, gráfico o simbólico. Las explicitaciones se dan como una exigencia natural de la situación, como parte de la interacción con ella. El sentido es comunicar algo a los demás, de tal manera que comprendan lo que se explica. El propósito último del proceso de formulación, es la construcción de un lenguaje matemático que se constituye en un modelo también matemático.

El proceso de formulación concluye cuando los modelos empleados se convierten en "un medio para realizar anticipaciones sobre la situación; un medio que será preferible en virtud de la economía importante que permite realizar (en tiempo, en esfuerzo...). Este paso de convertir al modelo en medio de anticipar, puede favorecerse, a través de ciertas modificaciones sobre la situación misma que vuelvan excesivamente costoso o incluso imposible el trabajo directo sobre ésta" (Block, 1987).

c) Situaciones de validación

Una vez que los niños han hecho las formulaciones correspondientes a las acciones desplegadas, la situación les demanda "demostrar que funcionan".

Tales demostraciones tienen como propósito convencer a los demás, por ejemplo, de que un procedimiento es viable para obtener un resultado que se busca. Obviamente se trata de demostraciones inherentes a las formas de razonamiento de los niños, apoyadas en el conocimiento previo también validado, y en los recursos que pueden emplear en ese momento. Esto significa que las demostraciones no constituyen forzosamente un modelo de demostración matemático formal; pueden ser demostraciones con procedimientos elementales, por ejemplo, las representaciones gráficas o el uso de objetos para hacer un reparto.

Lo anterior, además de favorecer las posibilidades de uso de estrategias previas en conexión con otras nuevas, puede llevar a la construcción de un modelo más completo, más coherente o más evolucionado, en el que puedan expresarse algunas reglas o relaciones que estaban implícitas en la fase de formulación.

Este primer plano de la validación, en el que se prueba que el conocimiento funciona, constituye lo que Brousseau denomina *validación empírica*[4]. Cuando los niños, en un proceso más avanzado, logran argumentar por qué funciona ese saber, se trata de una validación semántica y sintáctica.

Cuando hablemos de los procedimientos empleados por los alumnos y las confrontaciones respecto a algunos problemas de división, veremos cómo llegan a validar empíricamente, por ejemplo, procedimientos como las estimaciones y los repartos gráficos, o semántica y sintácticamente, procedimientos como la adición iterada o la multiplicación. Tal es el caso del problema consistente en "*empacar 156 chocolates en 12 cajas"* (situación 10), en donde la multiplicación de *13 X 12* es validada como una manera de comprobar que *13* (chocolates en cada caja) es el cociente buscado. En el momento de la confrontación los niños desecharon la opción de multiplicar *156 X 12* (sugerida por Julio) con el argumento de que, si se hace de esa manera "*el resultado se nos duplicara (sic)*", dando a entender que el 156 crecería 12 veces, en lugar de repartirse en 12 porciones iguales.

La afirmación de Julio, además de invalidar un procedimiento que no corresponde al problema planteado, implica que atribuye un significado correcto tanto a la multiplicación de *13 X 12*, como a la división de *156 ÷ 12*. Es decir, está en el plano de la validación semántica, al argumentar por qué funciona una operación y por qué no funciona la otra.

El proceso de validación cobra sentido dentro de la situación, en la medida en que los niños son protagonistas y se permite el intercambio entre iguales, en términos de los saberes que se están construyendo.

Los argumentos y contrargumentos que los niños puedan presentar, ayudarán al maestro a identificar aquellos elementos de los cuales asirse para guiar la validación, pero no para anteponer o imponer sus puntos de vista o invalidar la demostración que pueda darse entre los niños.

d) Situaciones de institucionalización

En ellas, como explica Brousseau (1986) "... se establece convencional y explícitamente el estatus cognoscitivo de un conocimiento o de un saber".

En el marco de la didáctica constructivista, la institucionalización del conocimiento es una meta de alumnos y maestro, y no el punto de partida de éste como proveedor del saber. La institucionalización podría considerarse como el cierre de un ciclo en la secuencia de situaciones didácticas, más a cargo del maestro que de los alumnos, por ser él quien de alguna manera conoce el estatus cultural de los conocimientos que enseña y, llegado el momento, deberá plantearlo como la parte formal del conocimiento matemático.

Sin embargo, en la interacción constante que se establece, las aportaciones de los niños en cada clase, en cada bloque de clases, o a lo largo de la secuencia de situaciones didácticas, obliga a una socialización también constante del conocimiento.

Cuando algún alumno logra demostrar que un procedimiento (implementado por él, propiciado por las variables de la situación) es útil para resolver cierto tipo de problemas; y en la confrontación ese procedimiento es aceptado por los demás y posteriormente adoptado por otros niños para resolver problemas similares, ese saber adquiere cierto estatus cognoscitivo, por lo menos dentro del grupo. Dicho estatus no permanecerá inmóvil a partir de ese momento, por el contrario, existe la posibilidad de que sea desplazado cuando surjan otros procedimientos que incluyan o permitan superar el anterior.

Las cuatro fases que se han descrito no pueden verse como momentos aislados en una situación didáctica. Tampoco tienen por qué darse en un orden estricto: "Las estrategias y los modelos subyacentes que se instituyen en cada etapa vuelven a ser comprometidos en la etapa siguiente, en la que funcionan nuevamente como estrategias y modelos de base" (Block, 1987).

En la secuencia de situaciones didácticas objeto de este estudio (integrada por 18 situaciones de clase), la resolución de problemas abarca las situaciones de acción pero a la vez contiene momentos de formulación, validación e institucionalización. La situación del "centro de cálculo" por ejemplo (situación 11) se centró tanto en la formulación (al pedir a los niños escribir la operación para un problema) como en la institucionalización (al socializar en el grupo la representación numérica de la división.

[1] Una situación es problemática para el alumno cuando éste comprende lo que la situación plantea, tiene recursos para aproximarse a la solución pero no puede encontrarla de manera sistemática.

[2] El autor (1994), en su artículo "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", analiza cómo las situaciones de enseñanza pueden observarse a través de las relaciones que se establecen entre maestro, alumno y saber. A partir de ellas plantea tres modelos: el *modelo normativo*, centrado en el contenido; el *modelo iniciativo*, centrado en el alumno y el *modelo aproximativo*, centrado en la construcción del saber por el alumno. Al mismo tiempo señala que "ningún docente utiliza exclusivamente uno de los modelos; que el acto pedagógico en toda su complejidad utiliza elementos de cada uno de los modelos..., pero que, a pesar de todo, cada uno hace una elección, consciente o no y de manera privilegiada, de uno de ellos".

[3] Brousseau (1994), en su artículo "Los diferentes roles del maestro", documenta el proceso a través del cual el maestro propicia la aparición de un saber por parte del alumno. Mediante un ejemplo expone las distintas etapas por las que atraviesa la devolución de una situación a-didáctica.

[4] Block (1991), en "Validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas, en la primaria", explica este proceso en una situación de aprendizaje a través de los mensajes que elaboran los alumnos, y cómo entre ellos validan d

CAPÍTULO 2

LA DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

En este capítulo me referiré brevemente a la definición formal de la división para posteriormente abordar dos significados básicos de esta operación, a partir de problemas con estructura de *reparto* y con estructura *tasativa o de agrupamiento*. Me referiré también al tipo de magnitudes en juego y al campo conceptual en el que se ubica la división (las estructuras multiplicativas) para destacar los vínculos que guarda con otras nociones. Finalmente describiré algunas de las dificultades que subyacen a la enseñanza de esta operación.

1. ¿QUÉ ES LA DIVISIÓN?

Esta pregunta nos lleva por un lado a su definición formal y por otro, a los significados relativos tanto a las situaciones que con ella se pueden resolver, como a las relaciones que guarda con otras operaciones.

En su definición más amplia (y formal), dividir un número **a** (dividendo) entre un número **b** (divisor), significa determinar el factor **c** (cociente) que multiplicado por **b** da como resultado **a**[1]**.**

En el conjunto de los números naturales, para que la división sea exacta (con residuo cero), el dividendo debe ser múltiplo del divisor. Se trata de la *división euclideana:*

$$\mathbf{a \in N,\ b \in N\ ,\ donde\ a\ es\ múltiplo\ de\ b}$$
$$\mathbf{a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a}$$
$$\mathbf{siempre\ que\ b \neq 0}$$

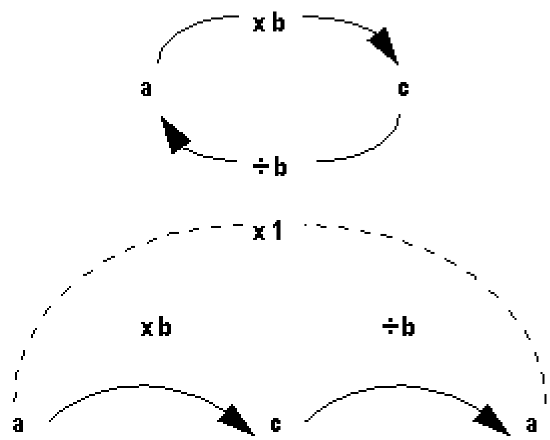
Cuando se dividen dos números naturales (a ÷ b) sin que **a** sea múltiplo de **b** , pero **b** es menor que **a**, se obtiene un cociente y un residuo mayor que cero; ambos son números naturales:

$$\mathbf{a \in N,\ b \in N\ y\ r \in N\ donde\ a > b\ y\ b \neq 0}$$

$$a \div b = c + r \Leftrightarrow c \cdot b + r = a, \text{ con } r < b$$

En el conjunto de los números racionales, el residuo entero puede dividirse para obtener un cociente fraccionario. De hecho, los números racionales se pueden definir como *cocientes* a partir de la multiplicación: **a/b** es el número tal que **b x (a/b) = a** , es decir, **a/b = a ÷ b.**

Por otro lado, vista como una función, la división es la función inversa de la multiplicación



Como puede verse, la división no es definible como una operación en sí misma; es necesario conocer otra a partir de la cual se explica: la multiplicación. Este aspecto de la división (al igual que la resta con respecto a la suma) constituye probablemente la construcción más importante de los niños en el proceso inicial de conocer la operación.

2. SIGNIFICADOS DE LA DIVISIÓN

Una de las principales fuentes del significado de una operación está en el tipo de problemas que se pueden resolver con ella. Por lo tanto, para que los alumnos comprendan qué es la división, necesitan enfrentarse a diversos problemas que la implican.

Al respecto Brousseau señala que "... la constitución del sentido, tal como lo entendemos, implica una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, y finaliza sus acciones) donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas" (Brousseau, 1987).

Los problemas con diversos contextos y diversas relaciones entre sus datos, abren posibilidades en la construcción del significado, que no da el simple aprendizaje de una técnica numérica para resolver una división, como se verá enseguida.

a) La división en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Vergnaud afirma que "... un simple concepto no se refiere solo a un tipo de situaciones, y una simple situación no puede ser analizada con un solo concepto; por lo tanto se hace necesario el estudio de campos conceptuales. Un campo conceptual se define como un conjunto de situaciones, cuyo dominio requiere del manejo de diferentes conceptos de naturaleza distinta".

Así, Vergnaud[2] ubica la división dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, que define como "todas las situaciones que pueden ser analizadas como si fueran problemas de proporción simple y múltiple y para las cuales uno regularmente necesita multiplicar o dividir".

Esta definición ayuda a identificar los contenidos que están íntimamente relacionados con la división, como son la multiplicación, la proporcionalidad, la razón.

Al considerar a la división en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, Vergnaud distingue los problemas de proporción simple (en los que intervienen dos variables) y múltiple (en los que intervienen más de dos variables).

Para los fines de esta investigación, me referiré sólo a los problemas de proporción simple, en cuanto a dos tipos de relaciones: isomorfismo de medidas y producto de medidas:

Problemas de Proporción simple

Implican dos variables y una relación constante entre ellas (se aplica en situaciones de precio constante, repartos iguales, velocidad uniforme, promedio de consumo, densidad, etcétera). Por ejemplo: "*Para una fiesta de cumpleaños se necesitan 28 sillas. Si se tienen 7 mesas, ¿Cuántas sillas se pueden colocar en cada mesa?*"

Isomorfismo de medidas

Vergnaud plantea que "la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación entre cuatro cantidades; dos de ellas son magnitudes de un mismo tipo y las otras dos son magnitudes de otro tipo". En ellos existe también una relación de proporcionalidad entre los datos, como en los siguientes ejemplos :

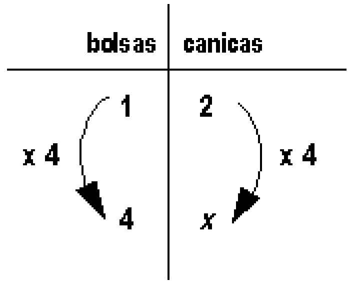
"Se tienen 4 bolsas de canicas. Hay 2 canicas en cada bolsa. ¿Cuántas canicas se tienen por todas?.

bolsas	**canicas**
1	**2**
4	**8**

Dependiendo de dónde se ubique la incógnita, se obtienen los siguientes tipos de problemas:

- **De multiplicación**

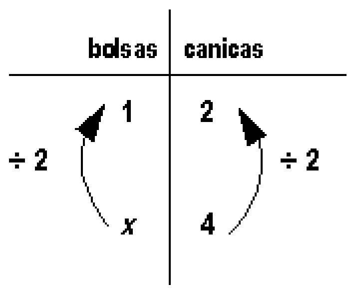
Hay 2 canicas por bolsa, ¿cuántas canicas hay en total si tengo cuatro bolsas?



En este problema la relación que se plantea exige encontrar un operador escalar, sin dimensión, que al tiempo que conserva una proporción entre los datos conocidos, mantiene también las magnitudes en juego. El dato que se busca es *8 canicas.*

- **División tipo agrupamiento o tasativa**

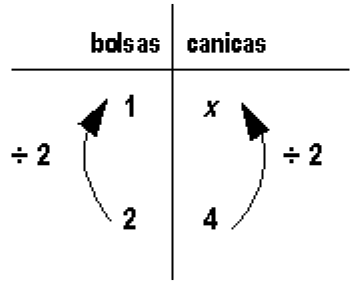
Hay 2 canicas por bolsa ¿cuántas bolsas hay si se tienen 4 canicas?



El problema implica averiguar la relación que hay entre 2 canicas y 4 canicas, es decir, *cuántas veces caben 2 canicas en 4 canicas.* Se trata de la división tipo tasativo o de agrupamiento. Se relacionan dos magnitudes del mismo tipo, *canicas* entre *canicas*.

- **División tipo reparto**

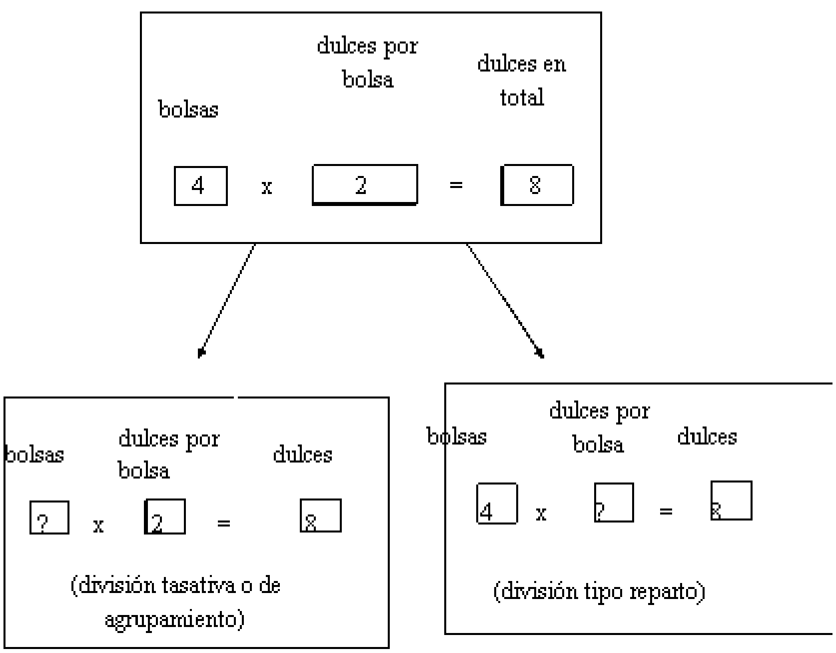
Se tienen 4 canicas que se reparten en 2 bolsas ¿cuántas canicas se ponen en una bolsa?



En este caso se busca el número de canicas que se ponen en una bolsa, conociendo la relación de correspondencia entre magnitudes de distinta naturaleza, *canicas* entre *bolsas*.

En los ejemplos citados existe una relación de isomorfismo ya que, a la suma de los datos de una magnitud, le corresponde la suma de los datos de la otra magnitud: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En el ejemplo anterior, al resultado de *2 bolsas + 1* bolsa, le corresponde el resultado de *4 canicas + 2 canicas*

En resumen, de un problema de multiplicación (dentro de la categoría isomorfismo de medidas) se pueden generar dos problemas de división, uno con estructura de reparto y otro con estructura de agrupamiento o tasativa



Producto de medidas

Esta relación se manifiesta en una terna de cantidades de las cuales una es producto de las otras dos, tanto en lo que a números como a magnitudes se refiere. Ejemplos de este tipo de problemas son aquellos en los que interviene el cálculo de área, volumen, producto cartesiano, etcétera:

Si un terreno rectangular mide 20 metros de largo y 15 metros de ancho, ¿cuál es su área?

En casos como éste, al multiplicar 20 metros por 15 metros, se obtiene como resultado 300 metros cuadrados.

Un jardín rectangular tiene 125 m^2 de superficie, si de ancho mide 5 metros. ¿cuánto mide de largo?

En este caso se conoce el área del terreno y la medida de su ancho. Se busca encontrar otra medida mediante la división de una magnitud expresada en metros cuadrados, entre una magnitud expresada en metros. El resultado es 25 metros.

Los problemas de producto de medidas son más complejos porque dan lugar a la creación de una nueva magnitud. Para resolverlos, es posible reinterpretarlos como problemas de isomorfismo de medidas[3].

Debido a que esta investigación está dedicada a estudiar los primeros acercamientos de los niños a la división en la escuela, analizaré los dos significados básicos de la división en la categoría de isomorfismo de medidas, dentro de los números naturales: *reparto (o partición)* y *tasación (o de agrupamiento),* tomando en cuenta también, el papel que juegan las magnitudes como datos de un problema.

b) Cantidades extensivas y cantidades intensivas

Como se puede observar en los ejemplos citados, de problemas de isomorfismo de medidas, las magnitudes juegan un papel importante en relación con el significado de los problemas de división.

Así, en el problema de reparto (*"Se tienen 4 canicas que se reparten en 2 bolsas ¿cuántas canicas se ponen en una bolsa?*), las magnitudes que se emplean son de naturaleza distinta, *canicas y bolsas*; lo que no sucede en el problema de agrupamiento o tasativo (*"Hay 2 canicas por bolsa ¿cuántas bolsas hay si se tienen 4 canicas?*), en donde la relación se hace entre magnitudes iguales (*canicas y canicas).*

Para Schwartz (1988) "... las cantidades usadas en las matemáticas se derivan de los actos de contar o medir, dependiendo de si lo que se cuantifica tiene propiedades discretas o continuas, es decir, si los números se refieren a magnitudes. Se puede definir una serie básica de operaciones matemáticas binarias con esas cantidades contadas o medidas, que pueden utilizarse para generar nuevas cantidades cuyas magnitudes pueden cambiar o conservarse".

Tomando en cuenta las magnitudes de los números y las relaciones que entre ellas se establecen en un problema, Schwartz distingue dos tipos de cantidades:

- Cantidades extensivas

Pueden ser discretas o continuas (15 niños, 20 metros, 3 bolsas, etcétera). Estas resultan en la adición y la sustracción. Por ejemplo, si se suman o restan 14 canicas y 10 canicas, el resultado dará 24 canicas (en el primer caso) o bien 4 canicas (en el caso de la sustracción). La magnitud *canicas* se conserva a través de la operación, por lo cual la adición y la sustracción son acciones u operaciones que preservan la composición del referente, dando por resultado siempre una cantidad extensiva.

- *Cantidades intensivas*

No pueden ser contadas o medidas de manera directa, sino que resultan de la combinación entre cantidades discretas y/o continuas. Una cantidad intensiva se forma generalmente, de dos cantidades extensivas, cada una de las cuales puede ser discreta (D) o continua (C).

A diferencia de la adición y la sustracción, donde intervienen sólo cantidades extensivas, en la multiplicación y en la división se trata siempre de dos tipos de cantidades, intensiva y extensiva, como se ve en los siguientes ejemplos.

3 cajas con *2 canicas en cada caja* es igual a *6 canicas*
extensiva **intensiva** **extensiva**

6 canicas repartidas en 3 *cajas* es igual a *2 canicas por caja*
extensiva **extensiva** **intensiva**

6 canicas con *2 canicas en cada caja* es igual a *3 cajas*
extensiva **intensiva** **extensiva**

En estos ejemplos, la magnitud *cajas* juega el papel de operador "veces" o "entre", sobre la magnitud "canicas".

Como puede verse, al multiplicar o dividir dos cantidades, se produce una tercera cantidad que en general, no mantiene el mismo referente. El resultado se refiere a una de las dos magnitudes en juego, o bien a una combinación de ambas, como es el caso de las cantidades intensivas (2 canicas por caja).

En los ejemplos presentados hablamos sólo de cantidades discretas, pero también se pueden combinar magnitudes continuas con discretas o continuas con continuas[4].

En el estudio que reporto los alumnos se enfrentaron a las relaciones que se establecen entre magnitudes intensivas y extensivas, siempre empleando cantidades discretas[5].

Como veremos en el desarrollo de la secuencia de situaciones didácticas, los niños de tercer grado no demuestran mayor dificultad para interpretar los problemas con texto, pero sí en cambio para elaborarlos. Es ahí donde se puede observar que la presencia de dos tipos de magnitudes (extensiva e intensiva) representa ciertas dificultades (ver capítulo 6, “De la expresión simbólica, nuevamente al contexto”).

c) El significado del residuo

Hemos revisado algunos problemas de división en los que el cociente es exacto, es decir, con residuo cero. Cuando la división incluye un residuo distinto de cero, éste adquiere también distintos significados, dependiendo del contexto. Veamos algunos ejemplos:

Si se trata de *repartir equitativamente 10 galletas entre 3 niños*, la galleta sobrante puede partirse en 3. En cambio, si lo que se reparte son canicas, habrá que decidir qué hacer con la canica sobrante.

Si se tienen *32 pesos para comprar dulces de 3 pesos*, y se quiere saber cuántos dulces se pueden comprar, el cociente que se obtiene es *10 dulces.* El residuo *2 pesos* es realmente un sobrante. También puede concluirse que hay un “faltante” de un peso para poder comprar 11 dulces.

Un camión puede transportar 10 cajas. Si necesita transportar 25 cajas ¿cuántos viajes debe hacer?. La división arroja como cociente *2 viajes* y como residuo *5.* En realidad habrá que hacer tres viajes, para que las 5 cajas no se queden sin transportar.

Estos y otros aspectos referentes al significado del residuo, generalmente no son considerados al enseñar la división. Sin embargo, como se documentará a lo largo del trabajo, los niños sí centran su atención en ellos.

3. TÉCNICAS PARA DIVIDIR. VÍNCULO CON OTRAS OPERACIONES

La diversidad de problemas de división que puede plantearse propicia también una variedad de procedimientos. Así, los problemas de reparto pueden resolverse a través del reparto uno a uno: Para g*uardar 6 chocolates en 3 cajas*, se puede ir colocando un chocolate en cada caja hasta agotarlos. En cambio, los problemas tasativos favorecen tanto el agrupamiento como el uso de la adición o la sustracción repetida:

Agrupamiento
Para e*mpacar 35 naranjas en bolsas de 6 naranjas*, se puede pensar en formar tantos grupos de 6 como sea posible, hasta agotar el máximo de naranjas.

Adición repetida
Tengo 56 pesos; he ahorrado 8 pesos cada día. ¿Cuántos días ahorré?. Es factible sumar el 8 tantas veces como sea necesario hasta llegar al 56

Sustracción repetida
T*engo 56 pesos; gasto 8 pesos cada día, ¿En cuántos días se termina el dinero?.* El contexto favorece la resta sucesiva del 8, a partir del 56 y hasta llegar a cero.

La estimación de cocientes y la multiplicación son procedimientos que se pueden utilizar tanto en problemas de reparto como tasativos.

Entre los aspectos favorables de la división desde el punto de vista de su aprendizaje, está precisamente el hecho de que los problemas que la involucran, apelan a tres operaciones que los niños ya conocen (adición, sustracción y multiplicación), lo que les permite desarrollar una amplia gama de procedimientos susceptibles de evolucionar (volverse más eficientes, más sistemáticos).

Para terminar, haré una breve mención del algoritmo usual para dividir.

Tomemos como ejemplo la división **325 ÷ 7**. Resolver esta operación con el algoritmo usual implica en primer lugar "segmentar" la cantidad: dividir *32 ÷ 7* primero, para estimar el cociente y hallar el producto parcial, juntarlo con el *5* y nuevamente dividirlo entre *7*; es decir, la cantidad global 325 se pierde de vista.

Lo primero que subyace a este procedimiento es la aplicación de la distributividad de la división con respecto a la adición:

$$\mathbf{325 \div 7 =} \begin{array}{r} \mathbf{300 \div 7} \\ \mathbf{+\ \ 20 \div 7} \\ \mathbf{+\ \ \ 5 \div 7} \end{array}$$

Sin embargo, en el algoritmo usual no se opera con los valores relativos (300, 20, 5) sino con los valores absolutos. Esto lleva a la realización, también implícita, de conversiones de un tipo de agrupamiento a otro; por ejemplo, cuando se toma *32 entre 7* porque el *7 no cabe en el 3*, lo que se hace implícitamente es tomar *32 decenas*, es decir, convertir *3 centenas* y *2 decenas* en *32 decenas*. Es poco probable que ésto sea comprendido por los niños; lo que los lleva a memorizar el procedimiento y por consecuencia, a alterarlo fácilmente.

El procedimiento usual representa la síntesis de varios procesos complejos. Por lo tanto es conveniente que antes de acceder a él, los niños desarrollen otros procedimientos que les permitan expresar sus formas de razonamiento[6].

4. ALGUNAS DIFICULTADES DE LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN EN LA ESCUELA

Diversos estudios realizados acerca de los procesos de aprendizaje de las operaciones matemáticas, y las formas en que los alumnos logran o no aplicarlas en diversas circunstancias dentro o fuera de la escuela, han permitido identificar por lo menos dos tipos de dificultades específicas, unas vinculadas a las formas en que las operaciones son enseñadas en la escuela, y otras que subyacen a la complejidad de sus técnicas de ejecución.

En el caso de la división, algunas de estas dificultades se documentan de manera más amplia en los trabajos de Block y Dávila (1995) y de Saiz (1994)[7]. En ellos se basa el análisis que a continuación presento.

En la escuela, para enseñar la división usualmente se inicia planteando a los alumnos un problema sencillo como apoyo, para ir mostrando paso a paso cómo se usa el algoritmo de la operación. Casi siempre se hace después de que los niños han aprendido la multiplicación. Así, se empieza a trabajar un mismo tipo de problemas que llega a ser identificado por los alumnos como un patrón único en el que encuentran claves que les indican qué operación aplicar.

Debido a esto, los niños tienden a suponer que si en el texto del problema aparece por ejemplo, la palabra "quitar" o la expresión "¿Cuánto queda?", el problema "es de resta". Si en cambio se trata de juntar, o ver cuánto hay en total, emplean una adición. Los problemas de división generalmente los asocian con la palabra "entre".

Sucede con frecuencia que cuando se varía la estructura del modelo de problema a la que los niños se han acostumbrado, se ven en apuros; no saben qué operación usar y a veces usan cualquiera, debido a que los procedimientos no formales suelen estar fuera de lo que es legítimo hacer. Frente a esta dificultad reiterada, muchas veces sólo queda concluir que “los niños no saben razonar”. Sin embargo, es probable que la propia expectativa del maestro, de que los niños apliquen una técnica específica previamente enseñada, está detrás de esa “ausencia de razonamiento” (Block y Dávila, 1993; Saiz, 1994).

Por otra parte, la tendencia también generalizada a pedir a los niños que para resolver un problema, presenten un formato del proceso que siguen, destacando datos, operación y resultado, no garantiza que ayude a identificar la operación pertinente, porque éste es también un procedimiento que ellos aprenden a mecanizar, sin establecer una relación correcta entre los datos (Saiz, 1994). En esta práctica, la intención del maestro de ayudar a los niños a identificar los datos relevantes de un problema y la operación que los vincula, constituye un recurso que poco ayuda a comprender el significado de la operación, y en cambio representa un obstáculo en el desarrollo de procedimientos no sistemáticos que son sustituidos por el algoritmo, y que contribuyen a que los niños encuentren el sentido de la operación y de los problemas que permite resolver (Block y Dávila, 1993).

La elección de la operación frente a un problema, tal vez puede identificarse como uno de esos conocimientos "paramatemáticos" (Chevallard, 1984) que no son objeto de enseñanza pero que los alumnos deben aprender, y llegan a manifestarse cuando hay fracaso, en el momento de resolver ese problema.

Como ya señalé, la división puede tener distintos significados según la estructura del problema que se plantee. Sin embargo, el trabajo escolar suele centrarse más en la idea de reparto, bajo un mismo modelo y con el mismo tipo de magnitudes (generalmente cantidades discretas, independientemente del grado escolar). Esto reduce las posibilidades de los alumnos para manejar las relaciones que pueden darse entre otras magnitudes, como pueden ser la longitud, la capacidad o el tiempo, por ejemplo. De hecho se ha demostrado que a muchos alumnos les es difícil reconocer a la división como una operación que resuelve problemas en los que interviene alguna magnitud de este tipo y cuya estructura es distinta a la clásica de reparto. De esto da cuenta uno de los ejemplos que reporta Saiz[8], y que transcribiré a continuación:

"Juan tiene que trabajar esta semana 29 horas. ¿Cuántas horas tiene que trabajar por día, si quiere ir solamente 4 días y trabajar todos los días la misma cantidad de horas?"

Al resolver este problema, ninguno de los niños obtuvo una respuesta correcta, pese a que varios reconocían en él a la división como operación que lo resuelve. Varios niños, incluso, no lo resolvieron. Según reporta la autora, "... la utilización de magnitudes en el enunciado provoca un aumento considerable en el porcentaje de los alumnos que dejan sin resolver el problema".

En la escuela es frecuente observar que la secuencia para enseñar la división, incluye una marcha progresiva: primero se enseña a dividir un dígito entre otro; después se complejiza el trabajo en función del "tamaño" de las cantidades, dividiendo dos y más dígitos entre un dígito. Posteriormente se enseña a dividir con más de un dígito en el divisor, con números enteros; todo mediante un solo procedimiento, el algoritmo usual. De la misma manera se enseña posteriormente, la división con números decimales.

La memorización de un número considerable de "pasos" a seguir, aunada a la pérdida de vista del tamaño probable del cociente, puede ser una constante en las diversas dificultades de los alumnos, como son las siguientes:

Los niños suelen cometer errores al resolver una división, por ejemplo, cuando el divisor es de dos cifras. Encuentran una cifra en el cociente y no saben por cuál de las dos cifras del divisor empezar a multiplicar, es decir, pierden de vista el divisor global porque según se les ha enseñado, la técnica se reduce a dividir entre una cifra: si se trata de dividir entre 23, se toma sólo el 2 y el cociente se anota dejando un lugar libre hacia la derecha del dividendo:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23\,/\overline{\,5\,3\,0\,} \end{array}$$

Al elegir el 2 como cociente, los niños tienden a confundirse y no saber si multiplicar 2 por 2, o 2 por 3. Tampoco es seguro que sepan en primera instancia, dónde colocar el 2 cociente, si arriba del 5 o del 3.

Cuando hay un cero en el cociente, los niños tienden a no escribirlo y van al siguiente paso, bajar la cifra, sin tomar en cuenta el cero:

```
           2 8
        _______
  1 9 / 3 9 5 9
          1 5 9
            0 7
```

- En el ejemplo anterior[9] el primer paso fue correcto; el segundo, que sería colocar un cero en el cociente, porque "quince entre diecinueve toca a cero" (según reza el procedimiento canónico), se omite y se baja la siguiente cifra del dividendo, obteniendo un resultado erróneo.

Si se trata de dividir entre 10 o sus múltiplos, algunos niños aplican la técnica de eliminación de ceros, pero no pueden explicar por qué, pese a que haya un contexto de por medio. Generalmente la explicación que dan, es en función de que si se divide entre 10, se elimina un cero, si se divide entre 100, se eliminan dos ceros... o se recorre el punto decimal a la izquierda. Esta regla, suelen trasladarla a casos en los que el cero aparece en medio de dos cifras, como explica Saiz en este ejemplo:

```
            1 8 1 8
          _________
  1 0 4 /  1 8 7 2
             0 8
              0 7
               3 2
                 0
```

En este caso el cero es tachado, como si no tuviese importancia, y luego se realiza la división entre 14, alternando la división entre 1 y entre 4. El procedimiento es explicado por el alumno que lo realizó, al decir "1 dividido 1 da 1 y sobra 0, bajo el 8 que dividido entre 1 da 8 y sobra 0; bajo el 7 que dividido por 4 da 1 y sobra 3; bajo el 2, 32 dividido por 4 da 8 y el resto es 0".

La misma autora reporta otro caso, en donde el divisor es de tres cifras, y sólo se toma en cuenta una de ellas:

```
            1 9 4 1
           ________
2 1 5  / 9 7 0 6
           4 7
             2 0
               0 6
                  1
```

Como puede verse, el alumno que realiza esta división, lo hace dividiendo sólo entre 5, y no entre 215.

Hay alumnos que dominan una técnica para comprobar el resultado de una división, que es la misma que para la multiplicación: *la prueba del nueve*, pero no hacen “la prueba del problema, es decir, no verifican si el resultado obtenido es la solución del problema planteado” (Saiz, 1994).

Otra dificultad inherente al algoritmo proviene de la forma de representar la operación con la galera, ya que, a diferencia de las otras operaciones, el primer número que se pronuncia para expresarla (el dividendo), se anota a la derecha del segundo (divisor). Es común escuchar a los niños decir “doce entre cien” en lugar de “cien entre doce”. Al manejar números sin contexto, difícilmente pueden darse cuenta del error (cuando se habla de doce cajas y cien canicas, tienen más posibilidades de identificar el error).

Las dificultades enunciadas no sólo se manifiestan en el proceso inicial de aprender a dividir. Se ha comprobado que prevalecen aún en alumnos de niveles educativos posteriores a la primaria[10]. Dichas dificultades reflejan que los alumnos no atribuyen significado al algoritmo que ponen en juego, porque éste se traduce en un trabajo sobre números aislados de los datos de una situación.

Las consecuencias de una enseñanza centrada en el algoritmo se manifiestan en el escaso significado que los alumnos pueden encontrar en la operación, al no identificarla en diversos problemas, así como en los errores frecuentes que cometen al aplicar la técnica convencional. Al respecto Saiz afirma que "... los algoritmos se convierten en respuestas adquiridas para preguntas "a venir", sobre las cuales no se sabe mucho. Los algoritmos se aprenden sabiendo que servirán para resolver problemas, pero se ignora de qué problemas se trata" (Saiz, 1994).

Estamos entonces frente a un reto en el que está en juego, como apuntan Block y Dávila, la concepción que se tenga de lo que son las matemáticas: un conjunto de contenidos formales que el niño debe aprender tal cual se le presentan, o las posibilidades de actuar frente a diversos problemas que pueden resolverse de distintas maneras.

Las dificultades expuestas ponen de manifiesto la importancia de considerar tanto el significado de la división, como sus técnicas operatorias. Abordarlos de manera aislada obstaculiza los procesos de reflexión por parte de los alumnos, propiciando en cambio la reproducción de formas mecánicas de operación.

Por lo tanto es importante que los alumnos, antes de aprender los pasos a seguir para resolver una división, se enfrenten a diversos problemas que la impliquen. Esto favorecerá la comprensión de las relaciones de ésta, con otras operaciones.

---

[1] Ver por ejemplo la definición que da Baldor: "La división es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente). De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo".

[2] Vergnaud (1991) en "Los problemas de tipo multiplicativo", analiza de manera detallada los distintos tipos de problemas de multiplicación y división, así como la complejidad de relaciones que entre ellos puede existir a partir de los datos, las incógnitas y las magnitudes.

[3] Block, D. (1996) "Las fracciones en problemas multiplicativos", parte 1, manuscrito. México: DIE-CINVESTAV.IPN.

[4] Schwartz distingue las siguientes situaciones: *Cantidades intensivas de la forma D/D:* relaciones entre dos series de cantidades extensivas discretas (niños/canicas; sillas/mesas; canicas/bolsas). *Cantidades intensivas de la forma C/D y D/C:* relaciones entre cantidades extensivas discretas y extensivas continuas (litros de agua/pollos; personas/años. *Cantidades intensivas de la forma C/C*: relaciones entre dos cantidades extensivas continuas (kilómetros/hora; gramos/centímetros cúbicos).

[5] Sólo en la sesión 15, y por iniciativa de una alumna al redactar un problema inventado por ella, apareció una magnitud continua combinada con una discreta (leches, gatos).

[6] El desarrollo de procedimientos para dividir números grandes forma parte de la tesis de Maestría (en proceso, dirigida por el M. en C. David Block) de Martínez, Patricia *Desarrollo de procedimientos para dividir. Estudio didáctico sobre la noción de división en la escuela primaria*. México: DIE-CINVESTAV-IPN.

[7] Ver Block, D. y Martha Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela". Educación Matemática *5* (3), 39-58. México: Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1995; y Saiz, Y. (1994) "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". En *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones,* I. Saiz y C. Parra (comps), Argentina: Paidós.

[8] Estudio exploratorio sobre las dificultades de la división, efectuado con 300 alumnos de 5o. y 6o. grado, en Argentina.

[9] Esta dificultad la he identificado tanto en los grupos que he atendido como docente, como en otros niños a los que he apoyado de manera independiente, fuera de la escuela.

[10] Ver por ejemplo, Martin A. Simon (1990) "Prospective elementary teachers. Knowledge of division". En su estudio, el autor reporta las dificultades conceptuales que tienen los alumnos aspirantes a ser maestros, en cuanto a la división. Sus conocimientos y explicaciones en cuanto a porqué y cómo resolvieron problemas con la operación, están fuertemente vinculadas al algoritmo aprendido, y no a las relaciones entre los datos de los problemas.

CAPÍTULO 3

OBJETO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA. LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

1. OBJETO DE ESTUDIO

El propósito general de este estudio fue propiciar que los niños construyeran el significado de la división a partir de diversos procedimientos; en principio espontáneos, creados por ellos, pero que se hicieron evolucionar en la medida en que se enfrentaban también a diversos problemas.

Para ello me propuse elaborar una secuencia de situaciones didácticas y estudiarla experimentalmente en el aula, en un grupo de tercer grado de educación primaria, tomando en cuenta dos aspectos fundamentales e interrelacionados:

Los significados de la división, que se refieren principalmente a los problemas en los que los alumnos la encuentran pertinente; a las relaciones que implícita o explícitamente establecen entre ésta y otras operaciones, así como a las propiedades que le atribuyen y a las formas en que la nombran.

Los procedimientos para resolver problemas de división, que abarcan diversas estrategias y recursos que los niños pueden emplear antes de llegar a un algoritmo, a veces de manera espontánea y a veces propiciados con una intención didáctica.

Una de las tareas iniciales para el desarrollo de la investigación fue el análisis del concepto matemático de la división, en cuanto a dos significados básicos: *reparto y agrupamiento o tasación*[1] y su inclusión en diversos problemas, para identificar de qué manera se relacionan dichos significados con los contextos en los que se encuentran.

Después de realizar este análisis, se optó por explorar el significado de *reparto*, bajo la premisa de que los niños que inician tercer grado están más familiarizados con éste que con el de tasación; lo cual de ninguna manera implica suponer que no son capaces de resolver problemas tasativos; de hecho se vio que lo pueden hacer sin más o menos dificultades que con un reparto (como veremos al referirnos a la situación 4).

Para diseñar los problemas que integrarían la secuencia de situaciones didácticas, se consideró en primer término el nivel escolar de los niños (inicios de tercer grado de educación primaria), partiendo del supuesto de que aún no conocían la operación a nivel formal (de acuerdo al curriculum del grado).

Se procuró también que los problemas tuvieran sentido para los niños, es decir, que a partir de sus conocimientos previos pudieran crear procedimientos para resolverlos. A lo largo del estudio se introdujeron condiciones didácticas específicas en las situaciones (cuadros 1 a 4) para propiciar la evolución de estos procedimientos.

La secuencia de situaciones abarcó desde las primeras experiencias de reparto con material hasta la resolución de divisiones aisladas (sin contexto) con números pequeños. Con estos antecedentes los alumnos tendrían las bases para emplear las operaciones de adición, sustracción y multiplicación para resolver divisiones con números más grandes, así como para mejorar sus técnicas cuando llegado el momento, accedieran al algoritmo convencional de la división.

2. METODOLOGÍA DE ESTA INVESTIGACIÓN

Las opciones metodológicas para abordar los problemas de la didáctica son variadas y dependen del aspecto que interesa estudiar, así como de los propósitos que el investigador se plantee.

De acuerdo con Vergnaud, la necesidad de recurrir a una diversidad de métodos complementarios entre sí, para estudiar la "enseñanza y adquisición de conocimientos", permite "elaborar con mayor conocimiento de causa, una secuencia didáctica experimental, y en particular definir mejor las hipótesis que guiarán la observación... sólo la experimentación didáctica permite una aproximación a este objeto complejo que es el desarrollo de la clase de una lección, o una serie de lecciones sobre saberes y situaciones determinadas"[2].

Para desarrollar el estudio experimental que aquí se reporta, realicé las siguientes acciones:

- Búsqueda bibliográfica de reportes de investigación referentes al tema, en diversos niveles educativos. Esto fue útil para identificar y explicar algunas dificultades que en cuanto al conocimiento y manejo de la división, enfrentan los estudiantes no sólo de nivel básico, sino medio y hasta superior.

- Redacción de problemas de división con dos tipos de estructura (de reparto y tasativa), para identificar la gama de posibilidades que puede existir para acercar a los niños a contextos de división.

- Experimentación de una clase en un grupo de segundo y otro de tercer grado[3] para explorar en qué grado era más conveniente realizar la investigación.

- Diseño de una secuencia de situaciones didácticas[4] de división con significado de reparto. Se trabajaron 18 sesiones, una por semana, con duración promedio de 60 minutos. El número de sesiones se determinó conforme avanzaba el trabajo experimental, a partir de los resultados observados y de los propósitos de la investigación.

- Análisis previo a la experimentación de cada clase. Se plantearon hipótesis acerca de los procedimientos que los niños usarían, y de probables argumentos que podrían surgir en conexión con alguna de las variables didácticas incluidas, ya que, según explica Brousseau, “un momento fundamental de la investigación en didáctica lo constituye el análisis a priori de la situación”, para poder contrastar las previsiones del investigador con los comportamientos observados.

- Experimentación de la secuencia didáctica en un grupo de tercer grado de educación primaria[5] (septiembre, 1991). Se inició al principio del ciclo escolar, ya que el objetivo está enfocado a la construcción del significado de la división.

- Observación y registro de las sesiones experimentales. Tuve el apoyo de una observadora[6] que recopiló por escrito las intervenciones de los niños y las mías como maestra. Ocasionalmente la observadora intervenía planteando preguntas a los alumnos, con algún propósito específico y a partir del análisis previo.

- Análisis de los registros de clase y de las producciones escritas de los alumnos[7]. Ambos instrumentos fueron útiles para estudiar tanto los procedimientos de solución que fueron creando, como las interacciones que se daban en los distintos momentos de la clase. A partir de este análisis también fue posible hacer los ajustes necesarios a la secuencia experimental, ya que en algunos casos se identificaron aspectos que no habían sido previstos y que fueron considerados para dichos ajustes.

Algunas clases fueron video grabadas para un estudio más detallado de lo que pasaba durante su desarrollo, así como de ciertas actitudes del grupo en momentos importantes del trabajo. Eventualmente entrevisté a algunos niños, sobre todo cuando al analizar sus trabajos, me era difícil comprender lo que habían hecho. Sus explicaciones permitieron interpretar los procedimientos y ubicarlos en su momento, en la categoría correspondiente.

- Una vez concluido el estudio experimental, se analizaron los procedimientos seguidos por los niños a lo largo de las situaciones didácticas trabajadas, con el propósito de establecer las categorías que ayudaran a explicar la evolución de esos procedimientos. Esto permitió finalmente, organizar los resultados de la investigación en cuatro fases: *Los procedimientos iniciales*, *Del reparto a la multiplicación inversa*, *De la multiplicación hacia una "nueva operación"* y *De la expresión simbólica, nuevamente al contexto*. Estas fases corresponden a cada uno de los capítulos (4 a 7) que reporto en este documento.

En el análisis de los procedimientos, los errores de los niños aportan información de distinta índole; en algunos casos se trata de errores previstos desde el diseño de la situación, a los que se asignó un papel en el desarrollo de procedimientos de los niños (por ejemplo, se previeron errores de conteo con el reparto uno cuando el cociente es muy grande; se consideró también la posibilidad de aprovechar los errores que cometían al obtener el resultado de un reparto, para propiciar la necesidad de verificar por parte de los niños). En otros casos los errores manifiestan una dificultad conceptual de los niños (por ejemplo interpretar un problema de división como si fuera de multiplicación) o bien, una deficiencia de la situación planteada. Se intentó pues, dar al error el papel constructivo que tiene en la elaboración del conocimiento.

He de destacar que mi participación como maestra-experimentadora en esta investigación fue altamente significativa y formadora para mí. No es lo mismo acercase al aula como investigador-observador del trabajo de otro, que ser observado en la situación de enseñanza.

3. LA SECUENCIA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

Como ya señalé, el propósito de este trabajo es estudiar una secuencia de situaciones, para propiciar la construcción de la noción de división por los alumnos al resolver problemas de reparto[8]. Se pretende que los niños, a partir de sus conocimientos con respecto a la adición, sustracción y multiplicación, desarrollen diversas técnicas para resolver problemas de división, aun cuando no conozcan la representación formal, ni un procedimiento canónico de la operación.

Hay evidencia empírica de que los niños, dentro o fuera de la escuela aprenden a emplear estrategias de cálculo mental para lo cual los recursos son diversos; el más común es el uso de los dedos para proceder a resolver las operaciones que una situación requiere. Así, pueden resolver un problema de división contando, restando, multiplicando, por ensayo y error, etcétera; y los procedimientos que apliquen o descubran al enfrentar situaciones en las que deban dividir, constituyen el punto de partida de su proceso de aprender esta operación.

Me interesó pues estudiar una secuencia de situaciones que propiciara la evolución de esos procedimientos, antes de que los niños llegaran a conocer el procedimiento convencional.

Para poner en marcha el estudio experimental, se buscó en primer término que los problemas incluidos en las situaciones didácticas fueran significativos para los alumnos, es decir, que considerando lo que se señaló como parte de la problemática en el aprendizaje de la división, pudieran comprender lo que se plantea en los problemas, y movilizar algún procedimiento inicial de solución.

- **Organización de las sesiones de clase**

Como ya mencioné, cada situación didáctica se desarrolló en una sesión de clase, a excepción de la situación "animales a sus jaulas", que abarcó dos sesiones (la 5 y la 6, ver cuadro 2). En términos generales las sesiones abarcaron los siguientes momentos:

Planteamiento del problema

Es el momento inicial de la clase, en el que yo como maestra presentaba la situación al grupo, estableciendo las condiciones bajo las cuales los niños debían trabajar. En este momento se especificaba si los niños iban a resolver como quisieran, si iban a emplear material concreto, si iban a usar la tabla de multiplicaciones, etcétera. Asimismo se daba la indicación de realizar el trabajo individualmente o por equipo, según los propósitos de la situación. Esto implica crear el medio en el cual los alumnos iban a interactuar con la situación de aprendizaje, es decir, establecer la consigna de trabajo.

Resolución del problema

Es el momento en el que los alumnos actúan para resolver la situación, considerando las condiciones antes establecidas. Para el maestro, es la oportunidad de observar lo que los niños pueden hacer solos o en interacción con sus compañeros; para identificar cuándo y cómo puede intervenir, para mantener el diálogo alumno-situación de aprendizaje. Es también el momento en el que el maestro puede identificar aquellos procedimientos que pueden confrontarse en un momento posterior de la clase, para que los niños reconozcan los aciertos y/o errores que permitan retroalimentar sus conocimientos.

Confrontación de resultados

Constituye el momento, tal vez de mayor riqueza para el grupo, porque en él los niños tienen la posibilidad de explicar lo que hicieron para resolver el problema, de argumentar por qué usaron tal o cual procedimiento, y sobre todo, de validarlo o invalidarlo, y así descubrir qué estrategias de solución pueden seguir usando y cuáles desechar porque ya no son útiles para resolver ciertos problemas. El papel del maestro se centra en plantear los cuestionamientos que permitan a los alumnos reflexionar, discutir, proponer, corregir.

El desarrollo de una clase en los tres momentos señalados, conlleva la organización de los alumnos para realizar actividades en forma individual, en equipos o en grupo.

Ello no significa que deba seguirse una dinámica rígida, en la que una forma de trabajo deba preceder a otra. En el estudio experimental se diversificó la dinámica de la clase, según los propósitos planteados.

El trabajo individual se realizó básicamente durante la resolución de problemas. En ocasiones fue anterior al trabajo en equipo o en grupo (para dar a los niños la oportunidad de interpretar la situación, para hacer surgir sus conocimientos previos y crear estrategias propias de solución); en otras ocasiones fue posterior al trabajo en equipo o en grupo (cuando desde el punto de vista de la investigación, interesaba ver cómo los niños ponían en juego, de manera personal, lo que habían conseguido hacer en conjunto).

El trabajo en equipos se desarrolló para favorecer el enriquecimiento de estrategias que los mismos alumnos proponían, mediante el intercambio de experiencias; El trabajo en grupo fue en general, el punto de llegada de la situación. Se usó sobre todo en el momento de confrontación.

- **Fases de la secuencia de situaciones didácticas**

La secuencia de situaciones didácticas que presento, está organizada en cuatro fases que abarcan desde los primeros procedimientos desarrollados por el grupo de experimentación, hasta la institucionalización de la operación división en tanto nueva operación.

A continuación enunciaré de manera general los aspectos que abarca cada fase y que constituyen los capítulos subsecuentes.

a) Los procedimientos iniciales

En este estudio, un procedimiento es un conjunto de acciones que los niños realizan para encontrar una respuesta y que se basan en sus cálculos, en las explicaciones, en las formas en que intentan demostrar lo que hizo. Detrás de los procedimientos están las nociones, las habilidades (no visibles) que les permiten dar una forma visible a sus procedimientos, ya sea a través de lo que escriben o dibujan, o de los argumentos que elaboran.

En esta fase de la investigación se estudian los primeros procedimientos que los niños crearon ante problemas de reparto con y sin material. Se propició la estimación de cocientes y un primer acercamiento a la relación inversa entre dividendo y divisor cuando el cociente es constante; y entre divisor y cociente cuando el dividendo es constante. Se propició también el uso del arreglo rectangular (situación 4), después de que éste apareció por iniciativa de los niños desde la primera situación didáctica, como una forma del reparto uno a uno. *El reparto uno a uno, la idea de que debe tocar lo mismo a cada quien, de repartir hasta que se pueda,* así como saber *dónde hay residuo o no*, forman parte de los conocimientos previos que poseían los alumnos cuando se inició esta investigación.

Dichas nociones no fueron enseñadas, sino manifestadas por los niños durante la resolución de problemas y las confrontaciones en clase. Fueron sí, un apoyo en la búsqueda de diversas estrategias para resolver, algunas de las cuales se volvieron más sistemáticas.

b) Del reparto al uso de la multiplicación

En el desarrollo de nuestro estudio, consideramos que un procedimiento evoluciona cuando se hace más sistemático, cuando se logra explicitar, cuando se pone en juego y se incorporan elementos nuevos.

En esta fase se propició un paso fundamental en el proceso de aprender a dividir: el recurso de la multiplicación. Esta operación apareció al principio, como un medio para *verificar* cocientes obtenidos por estimación o con otros recursos. Se introdujo la tabla de multiplicaciones y se enfrentó a los alumnos a situaciones en las que debían identificar, entre varios resultados posibles de problemas ya resueltos, el cociente que correspondía al problema planteado.

Dado que en esta fase los niños tendieron a "mecanizar" muy pronto un procedimiento para dividir con la tabla de multiplicaciones, se propició el uso de otros procedimientos, introduciendo cantidades que implicaran un cociente mayor que 10 (como 77 entre 4, situación 8).

Asimismo se trabajó con residuos grandes (casi iguales al divisor); lo que propició una serie de comentarios y reflexiones entre los niños, con respecto a qué hacer con ese residuo.

En esta fase los niños conocían a la adición, sustracción y multiplicación, como tres operaciones que sirven para resolver cierto tipo de problemas. Sin embargo desconocían la relación que guardan con la división.

c) De la multiplicación hacia una "nueva operación"

En esta tercera fase, los alumnos reconocieron la relación entre los datos de un reparto como una nueva operación: la división, y los procedimientos que habían desarrollado, como las formas de resolverla.

Se introdujo la calculadora como un recurso más para resolver divisiones y sustituir el uso de la tabla, cuando se propusieron problemas cuyas cantidades no aparecían en ella (156 entre 12; 135 entre 9, situación 10).

Se propició la representación simbólica de la división a través de "mensajes" que los niños escribieron a partir de problemas de multiplicación y división. En la situación 11 se institucionalizó la lectura y escritura de la representación simbólica de la división y se pidió a los alumnos que interpretaran el significado de cada uno de los datos, a partir del contexto de problemas.

Se enfrentó a los alumnos a comparar diversos procedimientos de resolución, hasta concluir que los resultados son los mismos, ya sea usando calculadora, operaciones escritas, o recursos gráficos.

d) De la expresión simbólica, nuevamente al contexto*.*

En esta última fase se enfrentó a los niños a la redacción de problemas, a partir de la representación simbólica de la división. Se analizaron problemas escritos por ellos, para que argumentaran si el planteamiento era correcto. Se plantearon operaciones de adición, multiplicación y división, con el propósito de analizar cómo redactaban los contextos, y si eran congruentes o no con la operación. En la construcción de problemas de división los niños evidenciaron los significados que le atribuyen, así como algunas propiedades y formas de nombrar a la operación. En la situación 18, última del estudio experimental, se propusieron divisiones sin contexto, para que los alumnos las resolvieran.

4. VARIABLES DIDÁCTICAS

Para favorecer la evolución de los procedimientos iniciales se consideraron algunas variables, entre las que se incluyen aquellas que Brousseau define como *variables pertinentes de un concepto*, esto es, "caracteres cuyo valor, presencia o ausencia influyen sobre las posibilidades de reconocimiento o de resolución de un problema de división" (Brousseau, 1994). Entre las variables que se consideraron en este estudio, se encuentran las siguientes:

a) Estructura de los problemas

Únicamente se abordaron problemas con estructura de reparto[9] equitativo, que implicaran o no (indistintamente) un residuo distinto de cero.

b) Los números.

Se trabajó con números naturales. Cuando se llegó a la representación numérica de la división, se usó fundamentalmente la forma a ÷ b = c; la representación con la galera fue aportación de los alumnos, como parte de sus conocimientos previos.

El tamaño de los números (dividendo y divisor) se mantuvo en el rango correspondiente a los productos de 1 a 10 y después se hizo crecer; sobre todo cuando, llegado el momento, se intentó propiciar el abandono de la tabla de multiplicaciones, para que los niños se dieran cuenta de los límites de este recurso, y buscaran otras vías de solución. Excepcionalmente se llegó a trabajar con números hasta de 3 cifras como dividendo (256) y divisor de 2 cifras (12). Asimismo se trabajó de manera indistinta con repartos exactos (residuo cero) e inexactos (residuo mayor que cero).

c) Las magnitudes

Se emplearon sólo magnitudes discretas (*dulces/niños*; *pelotas/cajas*; *animales/jaulas,* etcétera) debido a que los niños de tercer grado tienen mayor experiencia con estas magnitudes, y a que se trabajó sólo con números naturales.

d) Las técnicas de cálculo

A partir de los procedimientos iniciales (como el reparto uno a uno, ensayo y error) se fueron propiciando otras técnicas de cálculo, como la estimación de cocientes y se tomaron en cuenta las que los niños evidenciaron, como la adición y la sustracción. Interesó que llegaran a reconocer a la multiplicación como un medio para resolver y verificar divisiones.

La tabla de multiplicaciones constituyó un recurso básico en este proceso, en donde los alumnos llegaron a crear un algoritmo al ubicar en ella el dividendo y el divisor para hallar el cociente y calcular el residuo.

Posteriormente se incluyó la calculadora como otro recurso para operar y como un medio más que ayuda a identificar a la división como una nueva operación. La experiencia al usarla, llevó a algunos alumnos a concluir que la calculadora no les permite ver cuánto sobra; lo que ellos sí pudieron hacer mediante otros procedimientos.

En momentos posteriores los alumnos enfrentaron el reto de interpretar operaciones aisladas (de adición, sustracción, multiplicación y división) para a partir de ellos, redactar problemas; esto propició argumentos interesantes que reflejan ciertos concepciones que los niños tienen respecto a las operaciones ("quitar es resta") y algunas propiedades que les atribuyen ("multiplicar es hacer más grande"; "al dividir sale menos").

Las características específicas para cada una de las situaciones de esta secuencia didáctica, pueden observarse en los cuadros 1 a 4, que se incluyen en los capítulos siguientes.

---

[1] El significado tasativo de la división nos remite a encontrar la relación de "cuántas veces cabe una cantidad en otra".

[2] Citado por Michele Artigue en *Modelización y reproductibilidad en la enseñanza de las matemáticas*.

[3] Se realizó en junio de 1991, en una escuela primaria pública de experimentación pedagógica anexa a la Benemérita Escuela Nacional de Maestros, por las facilidades de acceso que encontré por parte de las autoridades.

[4] Las características de cada sesión pueden apreciarse en los cuadros correspondientes a cada capítulo del trabajo.

[5] El grupo estaba integrado por 34 alumnos, en el Centro de Educación Preescolar y Primaria del Sindicato de Trabajadores de la UNAM. La edad de los niños fluctuaba entre ocho y nueve años, provenientes de diversos niveles socioeconómicos.

[6] La profesora Ruth Valencia Pulido me apoyó elaborando el registro de observación en cada una de las sesiones, lo que constituyó una de las fuentes principales para el análisis de la información. Eventualmente conté con el apoyo del asesor de tesis como observador de la clase. Sus opiniones fueron de gran valor para realizar un autoanálisis de mi práctica ante el grupo de experimentación.

[7] En cada clase se proporcionó a los niños una hoja, a veces en blanco, otras en forma de ficha para que la llenaran.

[8] La propuesta didáctica sobre la división, que aparece en Block, David, Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena (1992) "Dialogar y descubrir", Manual del instructor comunitario. *Nivel III*, constituye uno de los antecedentes del estudio didáctico que presento. La continuación de éste se aborda en una secuencia de situaciones didácticas que incluye problemas tasativos y se documenta en Martínez, Patricia, *Desarrollo de procedimientos para dividir. Estudio didáctico sobre la noción de división en la escuela primaria* (tesis de Maestría en proceso, bajo la dirección del M. en C. David Block) DIE-CINVESTAV-IPN.

[9] En la sesión 4, como única ocasión, se abordaron problemas de agrupamiento o tasativo, sin que ésta fuera la intención. Esto se debió a un error en el planteamiento de la consigna, como se verá en su oportunidad.

CAPÍTULO 4

LOS PROCEDIMIENTOS INICIALES

El propósito general de las cuatro primeras situaciones fue propiciar que los alumnos crearan sus primeros procedimientos para resolver problemas de reparto equitativo, exacto e inexacto (con residuo cero o mayor que cero).

Estos procedimientos iniciales permitieron precisar las condiciones del reparto (que a todos les toque lo mismo y que sobre lo menos posible) y fueron la base a partir de la cual se propiciaron otros procedimientos. Asimismo, en esta fase se propició el manejo inicial, implícito, de la variación inversa entre divisor y cociente, ante un dividendo constante.

Empezaré por caracterizar las situaciones que constituyeron esta primera fase.

1. CONDICIONES DIDÁCTICAS

Me referiré a las condiciones que intencionalmente se consideraron en el desarrollo de las clases, en cuanto a los problemas planteados y a la dinámica de las mismas.

a) Con respecto a los problemas

- *Contexto y estructura*

Casi todos los problemas que se abordaron tenían un significado de reparto, excepto los de la sesión No. 4, en la que se trabajó con problemas tasativos (por una equivocación mía al plantear la consigna).Se eligieron magnitudes que invitaran a los alumnos a pensar en la acción de repartir (*dulces - niños; pelotas- paquetes; lápices - cajas*), y que facilitaran establecer la relación del dividendo con el divisor, para encontrar el cociente mediante diversos procedimientos. Además, se incluyó en todos los casos el requisito de equitatividad (*para que a todos les toque lo mismo*).

Cabe señalar que los problemas de reparto, muchas veces provocaron que los alumnos se resistieran a dejar un sobrante (por ejemplo cuando se trata de *dulces entre niños*) y buscaran alternativas como "el, o los que sobren, me los como" o "los parto" para que no sobre nada; aunque a veces eso implique en cierta forma alterar la equitatividad. Esto se irá explicando a lo largo del trabajo.

- *Tamaño de los números*

En términos generales, los dividendos incluidos en los problemas de las cuatro primeras situaciones variaron entre 35 y 90; los divisores entre 2 y 10; los cocientes, entre 8 y 17 (ver cuadro 1). La intención al usar estas cantidades fue evitar por una parte, que al usar números muy pequeños, los alumnos pudieran resolver el reparto mentalmente, o casi perceptualmente, o que al ser tan grandes, ya no pudieran hacer estimaciones próximas al rango del resultado, o que la representación gráfica se complicara.

- *Existencia de un residuo*

En los repartos planteados hubo desde el principio, casos que implicaban residuo y otros en los que el resultado era exacto (con residuo cero).

Al saber que *a todos les debe tocar lo mismo*, los niños llegaron a descubrir que al hacer el reparto puede sobrar algo, porque no alcanza para seguir repartiendo *a todos*; o bien, que no existe sobrante, cuando los elementos por repartir se agotan totalmente.

Se pudo comprobar que no se justificaba el hecho de empezar con el caso particular **sin residuo**, al observar que desde la primera vez los alumnos resolvieron con éxito un problema de división con residuo (*repartir 88 dulces entre 7 niños*). El uso de material facilitó el hecho de "ver" que había un sobrante.

- *Relación dividendo-divisor-cociente*

En las sesiones 2 y 3, uno de los propósitos fue que los niños establecieran la relación *a menor divisor mayor cociente*, cuando el dividendo es constante (ver problemas en el cuadro 1). En el caso de la sesión 4 (independientemente de que fue un problema tasativo), se trataba de establecer la relación *a mayor dividendo, mayor cociente*, cuando el divisor es constante (ver problemas en el cuadro 1, p. 47).

Al manejar estas variables se quiso ayudar a los niños a comprender mejor el significado de las cantidades implicadas en un reparto equitativo con y sin residuo, así como de las relaciones que entre ellas se establecen (dividendo-divisor-cociente).

b) Con respecto a la dinámica de la clase

En esta fase predominó el trabajo en equipos para resolver los problemas de las diversas situaciones. En la sesión 3 se inició con actividades en grupo, para analizar procedimientos creados por algunos niños en la sesión anterior, y, en la sesión 4, en un segundo momento de la clase (después de haber propiciado la estimación de cocientes en grupo), se procedió a la resolución individual de un problema, para cerrar con la confrontación de procedimientos y resultados.

Independientemente de que la resolución de problemas se hiciera en equipos, los niños contaron siempre con una hoja en blanco (sesión 1) o en forma de ficha (sesiones 2- 4) para registrar procedimientos y resultados.

Según los propósitos de cada situación, se incluía o no material concreto, se daban algunas indicaciones para resolver, para estimar cocientes, o para verificar resultados.

- *Uso de material*

Se usaron objetos para favorecer la comprensión de las situaciones de reparto, y de las condiciones de equitatividad y de repartir hasta donde es posible, así como para facilitar a los alumnos las acciones de reparto en su primera experiencia con problemas de este tipo.

El material sólo se empleó en la primera sesión (para resolver el reparto de *88 dulces entre 7 niños*). Posteriormente se retiró, pero hubo alumnos que en la segunda sesión trataron de usar lo que tenían a su alcance (por ejemplo lápices y colores). Como no lograban reunir la totalidad de objetos especificados por el dividendo, optaron por abandonarlos como recurso para resolver. Después se les proporcionó nuevamente el material con fines de verificación, cuando ya habían resuelto el problema 2 de la sesión 1 (*repartir 64 dulces entre 9 niños*).

- *Especificaciones para resolver*

Durante las cuatro primeras sesiones, se incluyó en la consigna la aclaración "háganlo como quieran", de tal manera que los niños crearan sus propios procedimientos para realizar repartos.

En cuanto a la redacción de los problemas, generalmente se hizo énfasis en la equitatividad, diciéndoles que recordaran que "a todos les debe tocar lo mismo". La idea de que *hay que repartir hasta que sobre lo menos posible*, muy pronto quedó implícita. De hecho los alumnos no mostraron dificultades para lograr, por sí mismos, repartir hasta agotar el dividendo (en repartos exactos), o bien, hasta que sobrara lo menos posible (cuando el residuo era pequeño).

Más adelante, cuando se enfrentaron a la presencia de un residuo "grande" (casi igual que el divisor), surgieron discusiones interesantes que se verán en su oportunidad.

- *Estimación previa de resultados*

Desde la sesión 2 se solicitó una estimación de los cocientes, con la pregunta inicial (después de plantear el problema y antes de resolverlo) "¿Como cuántos creen que le toquen a cada uno?".

Este recurso se usó constantemente con la finalidad de que los alumnos, al buscar resultados "hipotéticos", establecieran una primera relación (reparto mental aproximado) entre las cantidades de los problemas.

CUADRO 1

SITUACIÓN	**PROPÓSITOS**	**PROBLEMAS**	**OTRAS CONDICIONES DIDÁCTICAS**		**DINÁMICA**
1 La fiesta de cumpleaños	Resolver problemas de reparto con procedimientos propios, con y sin material.	1) La mamá de Carolina tiene 88 dulces para repartirlos entre 7 niños ¿Cuántos dulces le tocan a cada niño para que todos tengan lo mismo? 1) Repartir 64 dulces entre 7 niños	Con material: – Dividendo grande (88) y divisor chico (7). Sin material: – Dividendo grande (64). – Divisor chico (7).	Resuelvan como quieran.	Trabajo individual: - Resolución problema 1. - Confrontación. - Resolución problema 2. - Confrontación.
2 La empacadora de pelotas	– Estimar cocientes. – Establecer la relación “a mayor número de paquetes, menor nú-mero de pelotas en cada paquete” y viceversa, para favorecer comprensión de relación reparto.	Empacar 35 pelotas en: 2) 2 paquetes 3) 5 paquetes 4) 6 paquetes 5) 8 paquetes ¿Cuántas pelotas en cada paquete?	Sin material: – Dividendo constante, divisor variable.	Digan como cuántas creen que quepan en cada paquete. Resuelvan como quieran.	Trabajo en equipos: - Estimación de cociente en cada reparto. - Resolución de los 4 problemas. - Confrontación.
3 Juan guarda lápices	– Analizar algunos pro-cedimientos de reparto creados por los alumnos. – Estimar cocientes en situaciones de reparto.	Guardar 40 lápices en: 1) 2cajas 1) 3 cajas 1) 7 cajas 1) 10 cajas ¿Cuántos lápices en cada caja?	Sin material: – Dividendo constante, divisor variable.	Digan como cuántos creen que queden en cada caja. Resuelvan como quieran.	Trabajo en grupo: - Análisis de procedimientos de reparto, de sesión 2. - Anticipación de cocientes para

	- Establecer la relación "a mayor divisor, menor cociente".				problemas 1, 2, 3 y 4. Trabajo en equipos: - Resolución de 2 problemas cada equipo. - Confrontación.
4 Los regimientos	- Usar arreglo rectangular. - Establecer la relación directa "a mayor dividendo, mayor cociente".	Formar 55 soldados en filas de 5. Hay 4 regimientos de soldados: 1) Verde: 60 soldados 1) Café: 50 soldados 1) Negro: 49 soldados 1) Azul: 45 soldados El general ordena que se formen en filas de 5 ¿Cuántos soldados hay en cada hilera?	Sin material: - Dividendo variable, divisor constante.	Digan como cuántos soldados habrá en cada hilera. Acuérdense que son 5 soldados en cada fila.	Trabajo en grupo: - Anticipación de cocientes con un problema distinto a los propuestos. Trabajo individual: - Resolución de un solo problema. - Confrontación de los 4 problemas.

2. ANÁLISIS DE LOS PROCEDIMIENTOS INICIALES

Al iniciar el estudio, casi la totalidad de los alumnos desconocía tanto las formas numéricas para representar a la división como sus técnicas convencionales de ejecución (principios de tercer grado de educación primaria). Esto, lejos de considerarse como una deficiencia en el conocimiento, fue el punto de partida que favoreció la aparición de lo que hemos denominado **procedimientos iniciales**, es decir, aquellos que los niños pusieron en juego desde la primera clase al resolver problemas de reparto.

Estos procedimientos iniciales son el **reparto uno a uno** y la **estimación del cociente**, que aparecieron de manera simultánea. El primero tendió a ser empleado con mayor frecuencia, mientras que la estimación del cociente resultó un procedimiento complejo y poco exitoso en este periodo, debido a que los niños se apoyaban básicamente en representaciones icónicas del reparto; posteriormente (en la segunda fase) se convirtió en un procedimiento más avanzado.

Aunque no fue propósito de esta secuencia incluir problemas de tipo tasativo, como se verá después, éstos entraron "accidentalmente" y dieron lugar a otro procedimiento: **la iteración del divisor**.

Los dos primeros procedimientos surgieron desde la primera experiencia con apoyo del material.

A. El reparto uno a uno

En la primera clase se integraron equipos de cuatro alumnos. A cada equipo se le proporcionó una bolsa con 88 piezas pequeñas (*dulces*), para trabajar el primer problema (*repartir 88 dulces entre 7 niños*), con la indicación específica "resuélvanlo como quieran".

La acción de repartir uno a uno se generó en el momento en que los alumnos comprendieron la relación involucrada en el contexto de los problemas, y empezaron a resolver.

Desde esta primera clase los niños pusieron en práctica el procedimiento de **reparto uno a uno**, que consiste en dar un objeto a cada quien, en cierto orden y cíclicamente hasta que *no se pueda dar uno más a cada uno*.

Este procedimiento inicial perduró a lo largo de varias sesiones, adquiriendo distintas modalidades, según las variables que se introdujeron en la situación (el uso del material, el tamaño de las cantidades, las especificaciones para resolver, así como el contexto en que se trabajó).

Las formas de reparto uno a uno que se consolidaron (tendieron a usarse cada vez más) por resultar eficaces para los niños son el **arreglo rectangular empleando material, el arreglo rectangular con representación gráfica**, y un procedimiento que se ha denominado **reparto en cajas**. Sin embargo, aparecieron también a manera de intentos, algunos procedimientos de reparto uno a uno que por su dificultad y laboriosidad no lograron afianzarse, por lo que les hemos llamado **intentos fallidos de reparto uno a uno**.

a) El arreglo rectangular

Esta modalidad consiste en ir repartiendo a cada elemento del divisor, uno a uno los elementos del dividendo, formando un arreglo organizado en filas o columnas. El arreglo rectangular es posiblemente el procedimiento gráfico más eficiente para resolver los problemas planteados. Tiene las siguientes características:

- Facilita un control en las acciones de reparto, al ir dando uno por uno, los elementos del dividendo, al divisor.

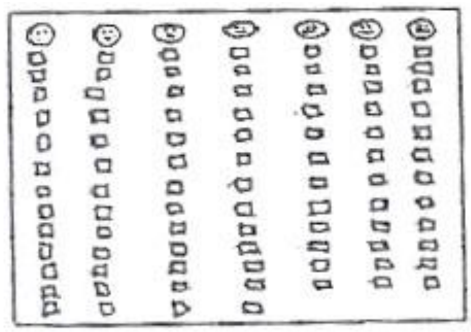
- Los elementos que se reparten (dividendo) quedan distribuidos en un "reparto organizado", evitando que éstos se confundan o amontonen.
- Se aprecia visualmente la igualdad de las partes que le tocan a cada elemento del divisor y esto favorece también la identificación del residuo.

- Permite ver claramente los elementos del reparto: dividendo, divisor, cociente y residuo.

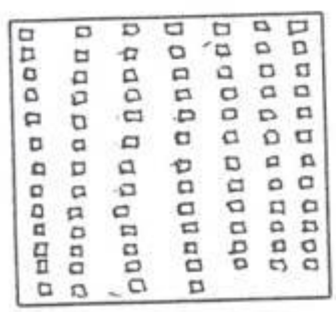
- Facilita la verificación mediante formas rápidas de conteo, como la adición.

En la sesión 1, algunos alumnos resolvieron el primer problema ("*repartir 88 dulces entre 7 niños*") formando un arreglo rectangular con material. El procedimiento resultó fácil y exitoso, apegado a la interpretación de la relación de reparto que involucra el contexto.

Dos equipos empezaron por dibujar a los *7 niños* (divisor) y repartieron uno a uno los *88 dulces* (dividendo), hasta agotarlos:



Los otros dos equipos procedieron igual pero sin dibujar previamente el divisor. Se deduce que lo tenían en mente:



Hay alumnos como Sofía y Nayeli, que después de haber hecho el reparto con material, lo dibujaron sobre su hoja, tal vez para que quedara evidencia de su reparto. Así apareció por primera vez el **arreglo rectangular con representación gráfica**. Posteriormente otros alumnos empezaron a usarlo (aunque no de manera exclusiva), a partir del segundo problema de la primera sesión (*repartir 64 dulces entre 9 niños*).

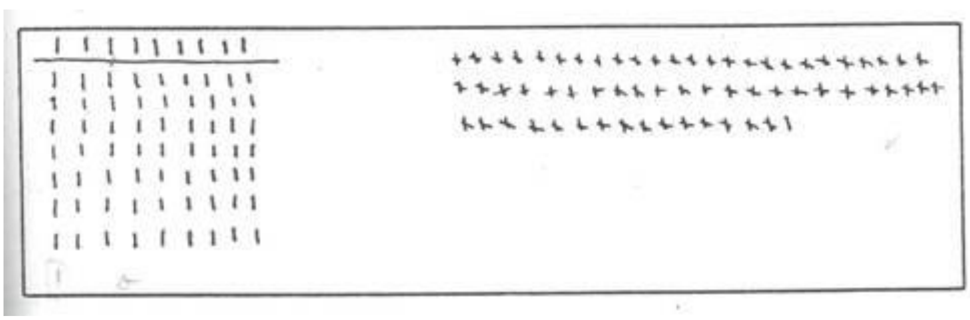
El arreglo rectangular con representación gráfica se usó dentro de las tres primeras sesiones, a veces en combinación con la estimación de cociente, o bien con los intentos por usar multiplicaciones.

Aproximadamente la mitad del grupo usó por lo menos una vez el arreglo rectangular con representación gráfica y pocos niños (cinco) lo usaron sistemáticamente. Es decir, apareció como *un recurso entre otros*, que pese a sus ventajas, no fue adoptado por ellos en forma estable.

Los resultados obtenidos no permiten asociar el uso de este procedimiento ni al tamaño de las cantidades ni al contexto, lo que probablemente implica que los niños estaban explorando procedimientos, y aún no llegaban a identificar uno u otro como "más eficaz".

Mostraré algunos ejemplos de arreglos rectangulares gráficos en las tres primeras sesiones:

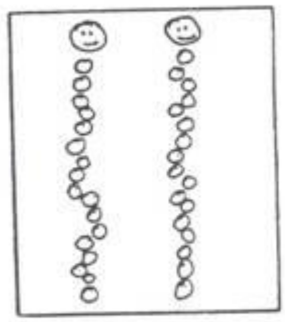
Un caso interesante en el que se ve este procedimiento, muy apegado a las acciones que se realizan con material, es el de Nacxit. Para "*repartir 64 dulces entre 9 niños*" (sesión 1, problema 2), hizo lo siguiente:



Representó primero el dividendo como colección total y posteriormente el divisor, con rayitas que separó con una línea horizontal, para diferenciarlo de los dulces que iba repartiendo; fue tachando en la colección total cada elemento repartido, hasta integrar un arreglo rectangular en el que se distinguen dividendo, divisor y cociente. El residuo se observa en la colección total, como la última rayita (*dulce*) que ya no tachó.

Cuando Nacxit volvió a usar el arreglo rectangular en sesiones posteriores, eliminó la representación previa de la colección total, probablemente porque se dio cuenta que es más rápido ir contando lo que se reparte que dibujarlo previamente para irlo tachando.

Lucina, para *empacar 35 pelotas en 2 paquetes* (problema 1, sesión 2), registró lo siguiente:



Primero dibujó el divisor, que tal vez asoció con *niños* en lugar de *cajas*, y empezó a repartir las *pelotas* una a una mientras iba contando, hasta llegar a obtener 2 grupos de 17 *pelotas*. Aunque su arreglo no se ve tan organizado, sus grupos son iguales; de esto se deduce que al llegar al 34, supo que ya no podía dar otra pelota más a cada caja. Anotó el sobrante (una pelota), en el cuadro de resultados de la ficha[1].

Laura resolvió el problema de *guardar 40 lápices en 3 cajas* (problema 2, sesión 3), con arreglo rectangular:

El divisor está representado por las tres columnas. Hizo el reparto uno a uno en arreglo rectangular, hasta llegar al 39, y especificó que "sobra 1".

Como podemos ver, el arreglo rectangular surgió como un **medio para resolver problemas**. Su uso tendió a difundirse (aunque no se generalizó como procedimiento único) tanto por las interacciones que se dieron en el aula al confrontar, como por la posibilidad de mirar el trabajo de sus compañeros (debido a la disposición del mobiliario[2]), y tal vez por las ventajas que representa al ser un procedimiento *seguro* para llegar al resultado. No obstante, no acabó siendo un procedimiento predominante en las tres primeras sesiones, puesto que los niños seguían explorando alternativas de solución.

En la sesión 4 se tenía el propósito de propiciar el uso del arreglo rectangular, planteando un problema en el que dicha distribución fuera muy natural: "*Un regimiento de 60 soldados debe formarse en 5 filas. ¿cuántos soldados hay en cada fila?*".

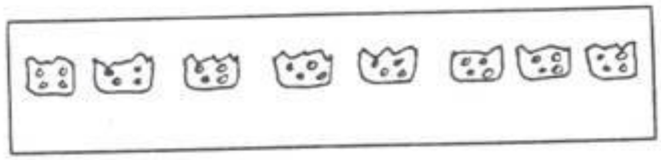
Sin embargo, por una equivocación, se planteó un problema distinto: "*Un regimiento de 60 soldados debe formarse en* ***filas de 5*** *soldados, ¿Cuántos soldados hay en cada hilera?*. Las resoluciones a este problema se analizan en este mismo capítulo, cuando se hable de "la iteración del divisor en un problema tasativo".

b) El reparto en cajas

Es otra modalidad de *reparto uno a uno* que apareció poco después del arreglo rectangular. Consiste en representar el divisor con círculos o rectángulos, para ir repartiendo dentro de ellos, uno a uno los elementos del dividendo.

Esta variedad de reparto uno a uno surgió en el último problema de la segunda sesión, en un contexto en el que se trataba de *empacar* objetos[3]. En comparación con el arreglo rectangular, fueron menos los niños que la usaron. De hecho, esta modalidad, aunque es casi tan sencilla como el arreglo rectangular, no siempre proporciona una organización *física* del resultado, y por lo tanto no permite *controlarlo visualmente*.

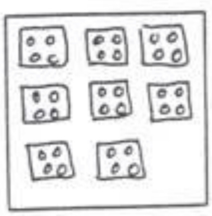
Veamos algunos ejemplos:



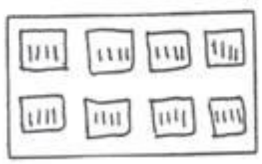
Laura (*empacar 35 pelotas en 8 cajas*, problema 4, sesión 2), dibujó primero el divisor, empleando rectángulos. Después fue dibujando dentro de ellos las pelotas, una por una; al mismo tiempo fue contando las pelotas que metía en las cajas, hasta que ya no pudo repartir "más, por igual", a todas las cajas:

En este caso el dividendo *35* no se puede agotar (porque formando grupos equitativos sólo se llega a *32*). Por eso Laura llegó al *32* y a partir de ahí calculó el sobrante *3*.

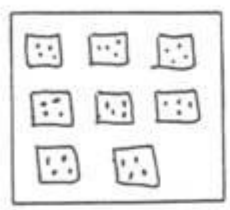
Rodrigo



Jezabel

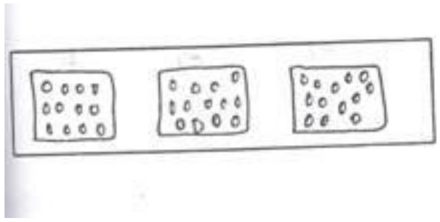


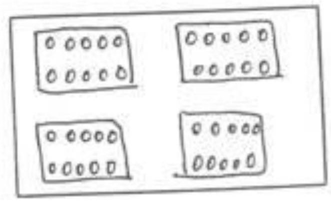
Juan Alfredo



En estos problemas, dado que el dividendo *35* no es muy grande, se facilita el control del conteo de lo que se va repartiendo. La forma en que Laura y tres alumnos más acomodaron las *pelotas* en las *cajas*, permite apreciar la equitatividad del reparto:

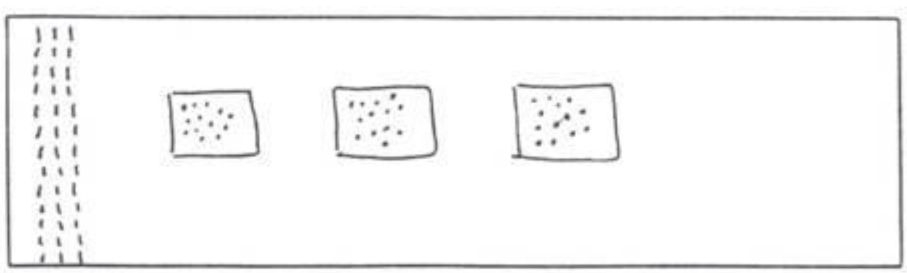
Sin embargo ocurrió que cuando el cociente es más grande *(40 lápices entre 3 cajas*), los alumnos tuvieron dificultad en el conteo e incluso perdieron de vista la equitatividad del reparto. Esto le sucedió a Rodrigo I, que usó el reparto en cajas para resolver los problemas de *40 entre 3* y *40 entre 4* (problemas 2 y 4, sesión 3). En el primero no obtuvo grupos equitativos; en el segundo se aprecia la equitatividad a simple vista:





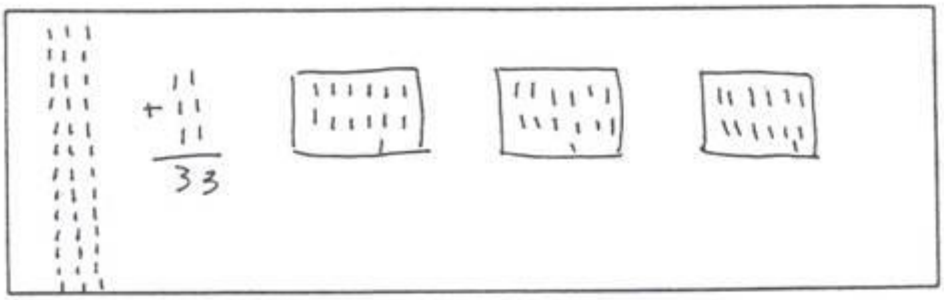
En general los alumnos optaron por resolver los problemas empleando un solo procedimiento (refiriéndonos al reparto uno a uno con representación gráfica), pero hubo casos en los que combinaron el **arreglo rectangular** con el **reparto en cajas,** e incluso con la adición iterada del cociente. Esto significa que los procedimientos iban evolucionando, al incorporar elementos nuevos a lo que ya conocían. Algunos ejemplos al respecto son:

Belem, para encontrar el resultado de "*40 lápices entre 3 cajas",* hizo primero el reparto uno a uno en arreglo rectangular. Después parece que contó la cantidad de lápices que quedó en cada caja; dibujó las 3 cajas y dentro de cada una puso 13 "puntitos" (muy juntos entre sí):



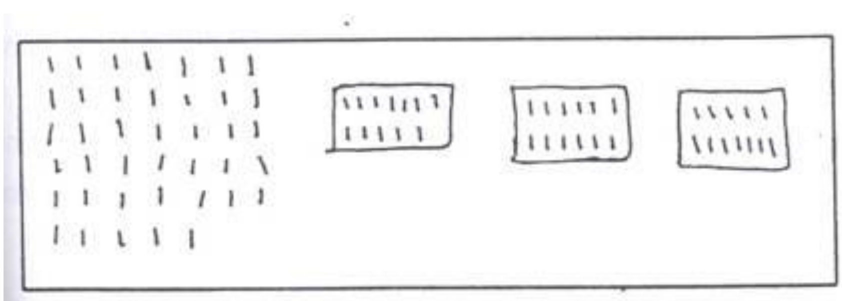
Aquí el reparto en cajas, más que procedimiento de resolución, es una representación más apegada al contexto, de lo que ya se hizo en el arreglo rectangular.

Alba (de otro equipo) también usó las dos representaciones gráficas (para el mismo problema de *40 entre 3*), arreglo rectangular y reparto en cajas; además usó la adición:



En virtud de que no se observó a Alba mientras resolvía el problema, suponemos que primero estimó 11 como cociente; al sumarlo y ver que aún le quedaban lápices por repartir, usó el reparto uno a uno con arreglo rectangular para asegurarse de cuál podía ser el resultado; una vez que obtuvo los 13 lápices en cada fila, los representó, ya empacados, en las tres cajas. El lápiz sobrante posiblemente lo conservó en la memoria.

Nacxit usó el arreglo rectangular para encontrar el resultado de *"40 lápices en 7 cajas*" (problema 3, sesión 3), y el reparto en cajas para "*40 lápices en 3 cajas*":



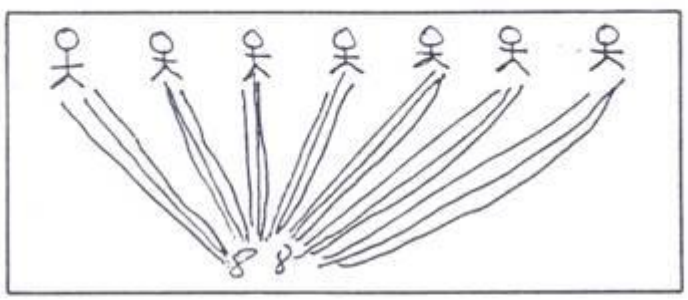
En el caso del arreglo rectangular obtuvo un resultado correcto. Al usar el reparto en cajas llegó a un cociente bastante aproximado de *12;* el sobrante quedó registrado en la ficha, en la columna correspondiente.

El reparto en cajas dejó de ser práctico cuando los cocientes eran relativamente grandes (tal vez mayores que 6); los alumnos se perdían en el conteo de lo que llevaban repartido, ya que las rayitas o circulitos que se reparten "en las cajas", tienden a juntarse y confundirse. Por otra parte, este procedimiento dificulta la verificación mediante el conteo, cuando el cociente es grande.

c) Intentos fallidos de reparto uno a uno

En estas primeras sesiones surgieron otros intentos espontáneos de reparto uno a uno que no llegaron a constituirse como procedimientos de solución, y tendieron a ser abandonados porque quienes lo pusieron en práctica pronto se dieron cuenta de que no fueron útiles, o de que son difíciles y laboriosos. Veamos algunos ejemplos.

Karla y Moira, para *repartir 88 dulces entre 7 niños* (problema 1, sesión 1), hicieron la siguiente representación:

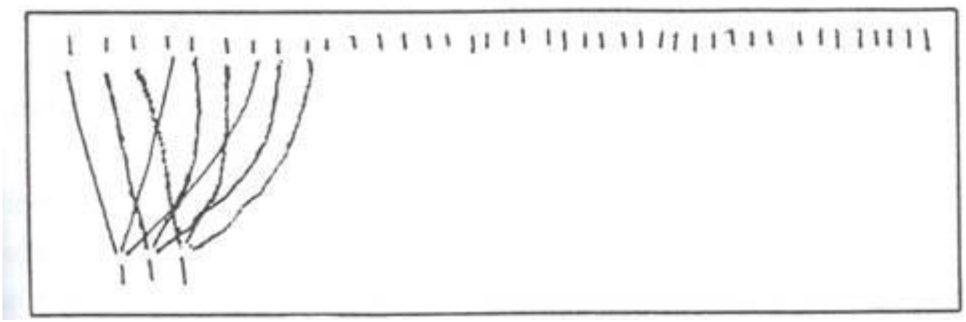


No sabemos a quién de ellas se le ocurrió, pero parece que quisieron ir repartiendo uno por uno los dulces a los niños. El dividendo quedó representado con números.

El recurso de hacer corresponder con líneas cada dulce (de los 88) con un niño (de los 7), indica que fueron contando lo que repartían.

La tarea resultó laboriosa y las llevó a confundirse en el conteo de lo que "llevaban repartido" (las líneas tendieron a juntarse entre sí) y no culminaron el reparto. Entonces buscaron otra alternativa, que en ambos casos fue la multiplicación de *88 X 7*. Esto podría indicar que reinterpretaron el problema, visto como *88 dulces a cada niño*, o bien que llegaron a pensar, sin la suficiente claridad, que está implicado un número que multiplicado por 7 da el 88.

Israel, para *empacar 40 lápices en 3 cajas* (problema 2, sesión 3), hizo lo siguiente[4]:



Primero dibujó la colección total de lápices (dividendo); debajo de ella representó las 3 cajas (divisor). Posteriormente unió cada lápiz con una caja, usando un color distinto, tal vez para no confundirse cuando tuvo que contar.

Los distintos colores usados por Israel, permiten ver claramente (en su hoja de trabajo) cómo inició el reparto. A medida que lo continuaba, las líneas tendieron a entrecruzarse y confundirse. Posiblemente por eso no terminó el procedimiento.

El reparto uno a uno constituyó el procedimiento más natural para resolver los problemas de división, bajo dos formas distintas: con material y con representación gráfica. A diferencia del reparto con material, en el gráfico la colección inicial (dividendo) tendió a no ser representada; los niños la tenían en mente.

A través de los ejemplos se aprecia que en general, los niños no mostraron dificultades para interpretar los problemas planteados ni para realizar los repartos hasta donde el divisor lo permitía y de manera equitativa, en cualquiera de las modalidades, "en cajas", o "arreglo rectangular".

En algunos casos, los niños empezaron a repartir ya no de uno en uno, sino de dos en dos, de tres en tres; cuando estimaron que alcanzaría para *más de uno a cada uno*. Esta es una de las formas en que empezaron a utilizar el procedimiento que consiste en estimar el cociente, y que veremos enseguida.

B. La estimación del cociente

A diferencia del reparto uno a uno, en el que se realiza de hecho la acción de repartir, en este procedimiento la atención se centra en el producto final de esa acción de repartir; en el resultado probable. Este puede obtenerse de diversos modos:

Si se cuenta con los objetos por repartir, se forma el número de grupos que indica el divisor y se ajusta, a simple vista, la igualdad de las partes; si se dibuja la colección, ésta se puede subdividir en el número de grupos aproximadamente iguales que indica el divisor, también a simple vista.

Finalmente puede pensarse en el resultado como el número que multiplicado por el divisor, se aproxime al dividendo; lo que implica replantear el problema, considerando la acción inversa al reparto.

Esta última modalidad implica estrategias particulares de cálculo que cada quien construye; por ejemplo, el uso de los dedos como instrumentos de conteo, el redondeo de cantidades y la multiplicación, entre otras, que difícilmente pueden detectarse y describirse de manera específica.

La estimación del cociente favoreció el uso de procedimientos para verificar y de esta manera, constituyó un paso importante para acceder a la relación entre multiplicación y división.

En esta fase inicial, pese a que en casi todos los problemas se solicitó una estimación previa a la resolución, pocos alumnos reconocieron a este procedimiento (aunque lo usaban), que es evidentemente más complejo que el reparto uno a uno. Quienes lo usaron se apoyaron en el material concreto o en grafías, y tendieron a abandonarlo. No fue sino hasta la segunda fase cuando este procedimiento se vió favorecido por las condiciones didácticas[5].

La estimación del cociente es un procedimiento de cálculo mental, que implica establecer una o varias hipótesis sobre el resultado. Dicho resultado, repetido tantas veces como indica el divisor, debe acercarse o igualar al dividendo.

a) La estimación del cociente previa a la resolución de problemas

Antes de que los alumnos resolvieran cada problema, se les pidió que dijeran "como de cuánto iba a ser el resultado", con el propósito de favorecer la comprensión de la relación de reparto involucrada en los contextos:

- Al interpretar la relación de reparto que existe en el problema, es decir, saber que se trata de "deshacer" la cantidad total de elementos -dividendo-, para repartirlos entre cierto número de sujetos -divisor-.

- Al establecer una primera comparación (de tipo multiplicativo) entre dos magnitudes: "Qué cantidad "x" repetida "n" veces se acerca a "y", antes de resolver el problema con otros procedimientos, que permitieron verificar si la anticipación fue o no correcta.

Cuando se propuso *"empacar 35 pelotas en 2 paquetes"* (problema 1, sesión 2), y se planteó por primera vez una pregunta dirigida a la estimación de cociente ("¿Como cuántas pelotas creen que se puedan meter en cada paquete?"), se observó que no fue sencillo responder.

La tendencia de varios alumnos, fue decir "setenta", interpretando la relación del contexto como si se tratara de multiplicar ambas cantidades (si hay 35 pelotas en un paquete, ¿cuántas pelotas hay en 2 paquetes?).

Esta respuesta tal vez se explica por el hecho de que los problemas de división resultaban "nuevos" para la gran mayoría del grupo, y porque no es fácil percibir la relación inversa (con respecto a la multiplicación) que implica un reparto. De hecho esta fue la evolución que se pretendía favorecer en los niños. Posiblemente por eso, algunos alumnos (8 para ser precisos) registraron en su hoja, multiplicaciones directas para los cuatro problemas:

3 5	3 5	3 5	3 5
X 2	X 5	X 6	X 8

Entender la relación involucrada en el problema, a partir sólo de la presentación oral del problema, es una tarea aún complicada cuando apenas empiezan a familiarizarse con la estructura de problemas de división, que en cierta forma es similar a la de problemas de multiplicación.

Los alumnos se dieron cuenta de que ese procedimiento era erróneo, cuando al obtener los resultados se insistió en preguntarles si, según lo que decía el problema (*empacar las pelotas*), podían obtenerse más pelotas de las que había.

A lo largo de las distintas situaciones los niños fueron logrando estimaciones cada vez más aproximadas al cociente exacto, lo que quiere decir que fueron comprendiendo la relación de reparto en los contextos.

Los intentos por usar la multiplicación directa volvieron a aparecer en la sesión 5, que explicaré en su oportunidad.

La estimación de cocientes favoreció también el establecimiento de la relación entre los elementos de una división

- *Relación entre dividendo, divisor y cociente*

En las sesiones 2 y 3, se plantearon varios problemas similares, con dividendo constante, para propiciar el manejo inicial de la relación inversa entre divisor y cociente.

Se trataba de *empacar 35 pelotas en 2, 5, 6 y 8 paquetes*; y de *guardar 40 lápices en 2, 3, 7 y 10 cajas*, respectivamente.

Al inicio de ambas sesiones, los alumnos compararon los cuatro repartos cuyo dividendo no varió, para estimar en cuál de ellos el cociente sería mayor, y en cuál sería menor. Esto lo hicieron a partir de la pregunta *"¿En cuál de estos problemas creen que haya más... (pelotas o lápices) en cada ... (paquete o caja)?"*

Una respuesta acertada a tal anticipación, requiere que los alumnos hayan percibido:

- Que la relación entre las cantidades de cada uno de los problemas, es de reparto.

- Que la cantidad de pelotas o lápices establecida como dividendo (en los 4 casos) no varía.

- Que al no variar "lo que se va a repartir" (dividendo), y tener "más paquetes" (divisor) la cantidad de pelotas o lápices que se meten en cada paquete (cociente), será menor.

En la sesión 2, la primera tendencia de varios alumnos fue responder anticipadamente, que *"hay más pelotas en los ocho paquetes* (en cada uno de ellos) *que en dos paquetes".*

Cuando los alumnos hicieron tales anticipaciones no se les dijo que estuviesen equivocados. Se les pidió que resolvieran cada uno de los repartos, que dieran a conocer los procedimientos que siguieron, y que registraran los resultados en el cuadro (todo ésto durante la confrontación):

pelotas	paquetes	pelotas en cada paquete	sobrantes
35	2	17	1
35	5	7	0
35	6	5	5
35	8	4	3

El registro de los resultados en el cuadro fue útil para comprobar si las estimaciones que habían hecho (del cociente de cada problema), y la anticipación referente a "en cuál de los cuatro había más pelotas" eran o no correctas.

En la sesión 3 (*lápices en cajas*) las estimaciones por problema resultaron muy aproximadas al cociente, y la anticipación comparativa entre los cuatro problemas se les facilitó más, ya que fue una mayor cantidad de alumnos los que anticiparon que "se meten más lápices en dos cajas y menos en diez".

Posiblemente influyó el hecho de que les resultó sencillo pensar en el reparto de 40 entre 2 y 40 entre 10.

Después de haber resuelto los problemas y hecho las confrontaciones, se volvió a pedir a los alumnos que compararan los distintos repartos, teniendo los resultados a la vista:

lápices	**paquetes**	**lápices en c/pqte**	**sobrantes**
40	2	20	0
40	3	13	1
40	7	5	5
40	10	4	0

Sus respuestas reflejaron que comprendieron la pregunta (a pesar de que ésta no fue muy clara) y que establecieron la relación inversa entre divisor y cociente, con dividendo constante:

Ma:[6] En cuántos paquetes Juan metió menos lápices?
Aos: En diez (era 40 entre 10)
Ma: En cuántos paquetes Juan metió más lápices? (esta pregunta no fue clara)
Aos: En la de tres, en el dos (en los repartos de 40 entre 3 y 40 entre 2)
Ma: Juan mete más lápices cuando tiene 3 paquetes, que cuando tiene 2 paquetes. ¿Es verdad?[7]
Laura: No porque la de tres tiene trece y la de dos, veinte

En la sesión 3, para *repartir 40 lápices en 2, 3, 7 y 10 cajas*, las estimaciones que hacen son:

40 entre 2: "como 10, 20, 20"

40 entre 3: "como 10"

40 entre 7: "como 7"
40 entre 10: "como 3, 4"

El hecho de propiciar la estimación de cocientes favoreció que empezara a manifestarse el teorema implícito de que **al repartir, se debe obtener un resultado menor** (que el dividendo).

c) La estimación del cociente en el momento de resolver problemas

Como ya se dijo, casi en todos los problemas se solicitó al principio la estimación del cociente. En la primera sesión, donde sólo se pidió que resolvieran como quisieran, algunos niños recurrieron de manera espontánea a la estimación, apoyándose en el material concreto o en grafías. Veamos algunos ejemplos:

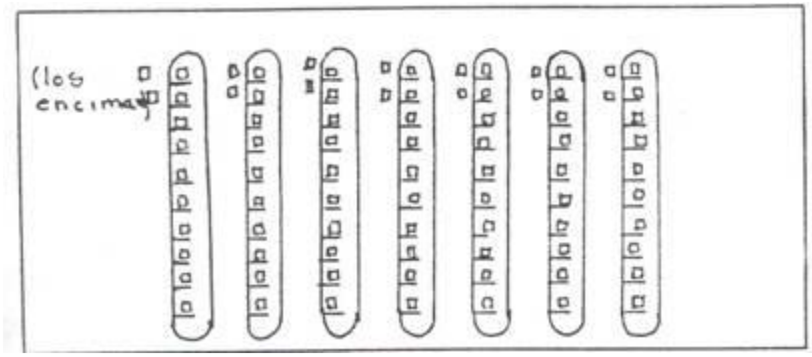
c1) Empleando material

Con los elementos de la colección total (dividendo), los alumnos formaron tantos grupos como indica el divisor, con una cantidad estimada de objetos en cada grupo.

La estimación en este caso puede darse, ya sea a través del cálculo mental para formar subgrupos (según la cantidad estimada), o bien con apoyo en la percepción visual. Esto último sucede si al ver la colección total de objetos, éstos se tomaron directamente para formar subgrupos, como "tanteando" la cantidad de elementos que puede abarcar cada uno.

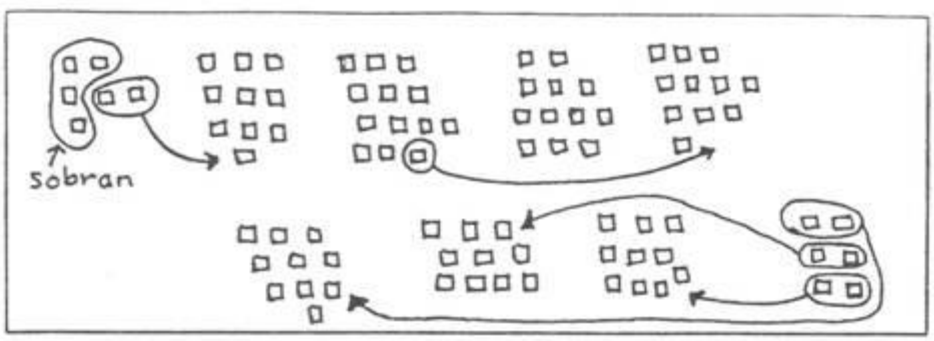
El procedimiento fue usado por dos equipos, al *"repartir 88 dulces entre 7 niños*" (problema 1, sesión 1).

En un equipo los alumnos representaron al divisor *7*, con unos palitos[8]; de entrada, tomaron *5 dulces* de la colección total, y los colocaron sobre cada palito. Al ver que les sobraban dulces, sin quitar los cinco que ya tenían colocados, trataron de dar 15 a cada uno (agregando 10). Vieron que les faltaban dulces, quitaron 5 a cada grupo, y volvieron a intentar dejando 10 para cada grupo. Después pusieron *dos dulces más*, obteniendo el sobrante correcto *(4 dulces*):



Es probable que los alumnos hayan partido de un cálculo mental del cociente *5*, para después hacer los ajustes necesarios y repartir hasta donde se puede.

En otro equipo formaron inicialmente 9 grupos irregulares, con *6, 10, 13, 12, 11, 10, 10, 10 y 6 dulces*:



A continuación fueron ajustando. Cuando se hizo hincapié en que eran *7 niños a los que se les iba a repartir*, deshicieron los 2 montones de 6 para completar *montones iguales de 12*. Intentaron también repartir los 4 dulces que sobraban, pero vieron que "ya no les tocaría a todos", y los dejaron aparte.

Esta forma de estimar el cociente pudo haberse dado, como se mencionó, a partir de una percepción visual de los montones. Como puede observarse, en los grupos formados inicialmente no hay equitatividad, como tampoco correspondencia entre el número de grupos formados (*9*) y el divisor que señala el problema (*7*).

En otro equipo se dio un caso interesante, que podría considerarse como intermedio entre el reparto y la estimación:

Los alumnos dijeron que hicieron "*7 montoncitos*" y que fueron repartiendo primero de uno, luego de dos, y así hasta que terminaron los cubitos y les sobraron cuatro. Estas acciones implican un reparto que empieza de *uno en uno* pero continúa *de muchos en muchos*.

El inicio de la estimación está implicado en el hecho de que, al ver la cantidad de dulces que les va quedando al repartir, los alumnos anticipan que pueden dar *más de uno* cada vez, a cada quien.

La presencia del material facilitó las acciones de ajuste y de reparto *de muchos en muchos* (como también sucede con el reparto uno a uno). Esto se torna complicado cuando se carece de objetos para hacer los repartos.

La estimación de cociente con material apareció cuando éste les fue proporcionado a los alumnos (sesiones 1 y 5), pero eventualmente hubo intentos espontáneos para reunir objetos[9] y hacer los repartos; como los objetos no alcanzaban, el procedimiento de estimación con material no volvió a usarse.

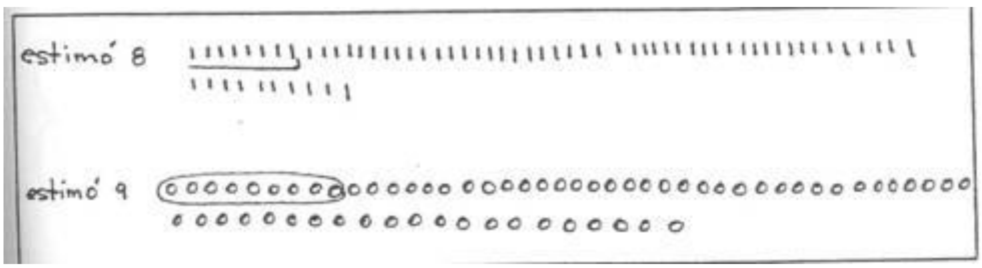
Como vemos, la estimación del cociente con material puede o no, tener como antecedente el cálculo mental, ya que es factible que, teniendo el grupo de objetos, directamente y por percepción visual, los niños opten por hacer subgrupos. La estimación del cociente con material facilita las acciones de ajuste, reubicando objetos para obtener *equitatividad* (grupos con igual cantidad de elementos), y *r*epartir hasta donde sea posible.

c 2) A través de representaciones gráficas

Esta modalidad apareció al quitar el material para repartir. Su primera evidencia se dio al *"repartir 64 dulces entre 9 niños"* (problema 2, sesión 1), en dos variantes: una es similar al procedimiento que usaron con el material, representando la colección total (dividendo) e intentando formar con ella grupos equitativos; la otra no parte de la colección total:

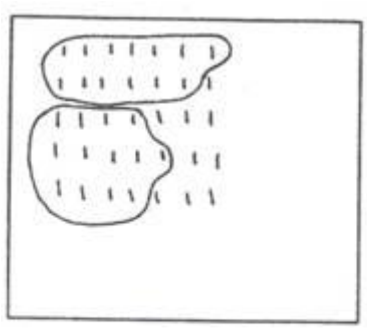
Dibujar primero la colección total; estimar un resultado y con base en él, hacer "subgrupos" sobre esa colección:

Para el reparto de *64 dulces entre 9 niños* (problema 2, sesión 1):



Los cinco casos que se reportaron para esta primera clase, se quedaron inconclusos. Parece que estos alumnos estimaron una cantidad, y no sintieron necesidad de verificar, o incluso perdieron de vista el divisor, es decir, el número de veces que podían repetir su estimación. No se pudo averiguar mediante qué cálculos mentales hicieron esa estimación.

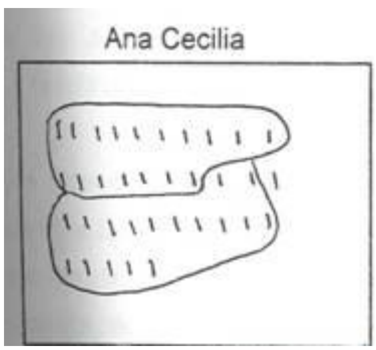
Julio, por ejemplo, para hacer el reparto de *35 pelotas en 2 paquetes* (problema 1, sesión 2) aparentemente estimó *13*:

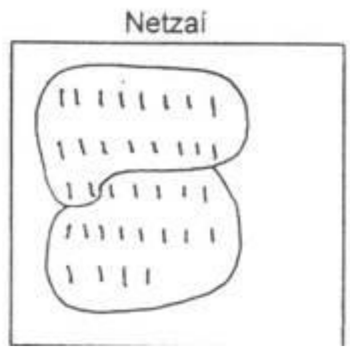


Obtuvo dos subgrupos iguales, atendiendo a la equitatividad del reparto. Dejar un sobrante mayor que el divisor, fue intrascendente para Julio, porque además, no se solicitó que buscaran la manera de que sobrara lo menos posible.

Dentro de la estimación de cocientes, la modalidad de representar gráficamente dicha estimación sobre la colección total, fue la que más usaron los niños en las sesiones 2 y 3, como se puede ver en los siguientes ejemplos.

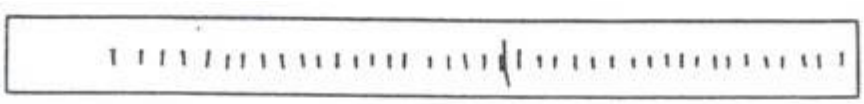
Para "*empacar 35 pelotas en 2 paquetes*" (problema 1, sesión 2), dos alumnos hicieron estas representaciones:





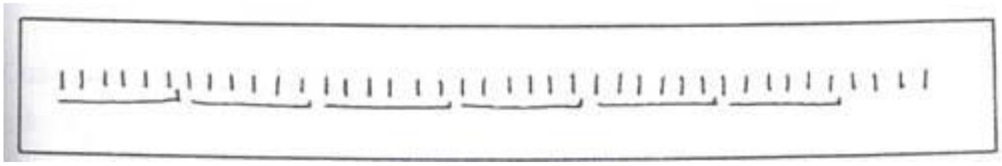
Ana Cecilia logró un reparto equitativo (*17 pelotas en cada paquete*) con un sobrante menor que el divisor, mientras que Netzaí "repartió todas las pelotas", perdiendo de vista la equitatividad, pues en un paquete dejó *18* pelotas, y en el otro *17*. Esto pudo resultarle natural, tal vez porque no quiso dejar una pelota sin repartir, aunque la consigna establecía "repartir de tal modo que quede igual número de pelotas en cada paquete".

Julio Audiel: *"Guardar 40 lápices en 2 cajas"* (problema 1, sesión 3):



En esta variante, *repartir entre 2* pudo haberse hecho con estimación visual del espacio que abarca la representación del dividendo y contanto para verificar, o bien calculando mentalmente el resultado.

Arsenio, para *"guardar 40 lápices en 7 cajas"* (problema 3, sesión 3):

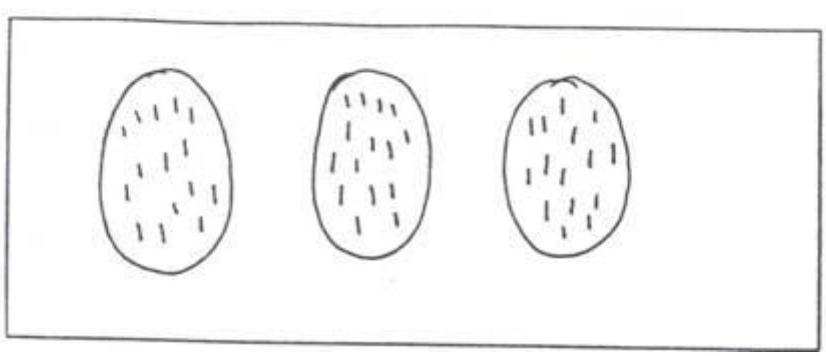


Con su estimación, Arsenio formó *6 cajas*. Para obtener las 7 que señala el problema, tendría que haber ajustado el reparto, poniendo *menos en cada caja*. Este tipo de ajustes se dificultan porque hay que estar borrando y llevar la cuenta de lo que se quita o se agrega.

Sin representar antes la colección total: representan con círculos o rectángulos al divisor, y dentro de ellos "meten la cantidad estimada".

Las representaciones gráficas que corresponden a esta variante, son similares a las del reparto en cajas, pero sabemos que se trata de una estimación, porque se observó que los niños no fueron repartiendo de uno en uno, sino que primero calcularon un cociente para después representarlo.

Un ejemplo de este procedimiento es el siguiente: "Guardar 40 lápices en 3 cajas" (problema 2, sesión 3):



Este niño estimó *15* e hizo *3* grupos de *15*. En el ejemplo se observa con claridad que la estimación quedó representada como *quince lápices en cada caja*. En el momento de la resolución no se hizo hincapié en que buscaran la manera de comprobar su resultado, lo que pudo haber propiciado los ajustes pertinentes.

Como se habrá podido apreciar, esta modalidad de estimación de cocientes tiene cierto grado de complejidad; requiere controlar (mientras se va representando el resultado) el dividendo y el divisor, lo que ocasiona que:

- Cuando se controla el dividendo, dibujándolo previamente, se corre el riesgo de perder el control del divisor.

- Cuando se dibuja previamente el divisor, se corre el riesgo de perder el control del dividendo.

En general, para controlar el dividendo los niños deben contar la cantidad total obtenida, al terminar la representación; quienes lo hacían, lograban ajustar sus resultados; quienes no lo hacían, observaban los resultados durante la confrontación y posiblemente en esos momentos identificaban otras estrategias útiles que podrían utilizar.

Por otra parte, esta representación gráfica del cociente estimado, no permite ver con facilidad "dónde se falló". Las acciones de ajuste se tornan complicadas y laboriosas, a diferencia de cuando se usa material.

La estimación de cocientes se dio en las tres primeras sesiones, al igual que el reparto uno a uno, aunque aquella les resultó más difícil.

En la primera sesión se puede decir que sólo se dio un caso (Rodrigo I.) en el que el procedimiento es completo. Los otros 4 se quedaron en intentos.

En la segunda sesión 10 alumnos usaron este procedimiento para los repartos de *35 entre 2* y *35 entre 5*. Cuatro alumnos lo usaron para encontrar el resultado de *35 entre 6* o *35 entre 8*.

En la tercera sesión, 10 alumnos usaron el procedimiento para el reparto de *40 entre 2*; cinco niños para el de *40 entre 7*, y cuatro para el de 4*0 entre 10*.

Pudo observarse que este procedimiento es más frecuente con divisores que facilitaron el cálculo mental (principalmente el 5).

Es claro que el procedimiento de estimación es mucho más complejo en este momento, que el de reparto uno a uno. Implica, además de hacer la comparación multiplicativa dividendo-divisor para estimar un cociente, verificarlo, controlando al mismo tiempo el dividendo y el divisor.

La estimación del cociente fue un procedimiento que se siguió propiciando a través de varias situaciones. La necesidad de verificar, inherente a este procedimiento, (aunque se ha visto que algunos niños no la sintieron desde el principio), los llevaría al uso de la adición y de la multiplicación.

C. La adición iterada

En el caso de la división se puede hablar de dos tipos de adición iterada:

a) La adición iterada de un cociente estimado, que constituye un procedimiento de **verificación** (veremos este caso en el punto 3 de este capítulo)

b) La adición iterada del divisor, que consiste en sumar éste, tantas veces como indica el cociente, para acercarse o llegar al dividendo. De él nos ocupamos a continuación.

Iterar el divisor implica concebir la relación que existe entre dividendo y divisor, en términos de cuántas veces el primero contiene al segundo. Dicha relación caracteriza a los problemas de división de tipo tasativo (por ejemplo, *cuántos paquetes de 5 dulces se pueden hacer con 20 dulces*) en cuyo caso, efectivamente lo vimos aparecer.

Usar la iteración del divisor en problemas de reparto implica replantear las relaciones entre los datos de la siguiente manera:

Ante un reparto de *40 dulces entre 5 niños*, se procedería así:

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

Cada vez que se da un dulce a cada niño, se dan 5 dulces en total.

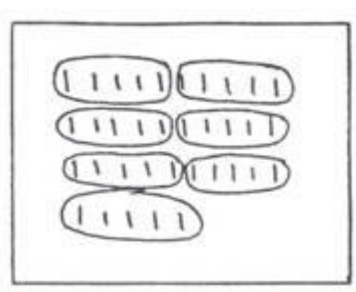
Para saber cuántas veces puede darse un dulce a cada niño, se necesita ver **cuántas veces pueden darse 5 dulces,** es decir, cuántos *5* (dulces) hay en *40*. El resultado indica **el número de veces que se dan 5 dulces**, o sea, el número de veces que se da un dulce a cada niño.

Es difícil que los alumnos de este nivel hagan tal replanteamiento en los problemas de reparto; ya que disponen de otros procedimientos. Así, el uso de este procedimiento en problemas de reparto, respondió a la reinterpretación de uno de los datos del problema.

- ***Iteración del divisor en problemas reinterpretados como tasativos***

Dentro de las tres primeras sesiones surgieron algunos ejemplos que permiten analizar cómo es que los alumnos aparentemente usan la iteración del divisor para resolver problemas de reparto:

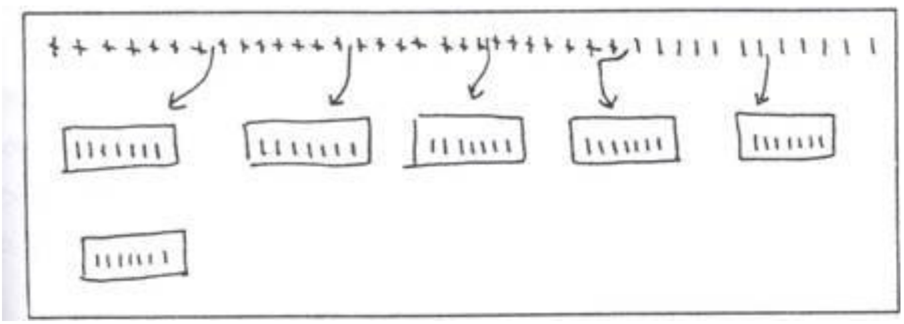
Netzaí, para *empacar 35 pelotas en 5 paquetes* (problema 3, sesión 2), hizo lo siguiente:



Primero dibujó las 35 pelotas. Sobre esta colección fue formando grupos de 5 hasta agotar el total de pelotas dibujadas. Después escribió como resultado **5** (en su ficha, en la casilla correspondiente a número de pelotas en cada paquete).

Si Netzaí hubiera escrito como resultado *7 pelotas en cada paquete*, su representación gráfica correspondería en efecto, a una iteración del divisor para resolver un problema de reparto, pero por el resultado que reportó, puede suponerse que reinterpretó el problema, como **35 pelotas, 5 en cada paquete**, y perdió de vista el **7** como número de paquetes formados; o bien estimó **5 pelotas en cada paquete** y perdió de vista el divisor.

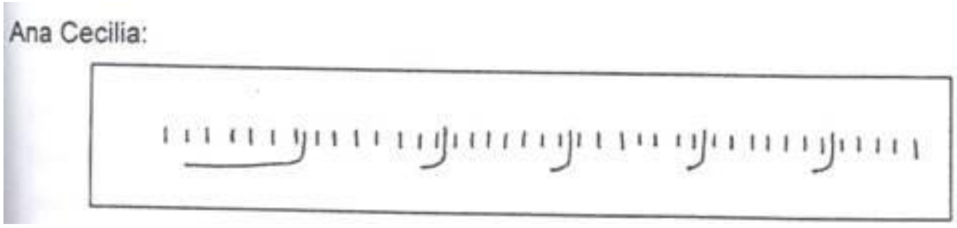
Otro caso similar es el de Jezabel. Para *guardar 40 lápices en 7 cajas* (problema 3, sesión 3):

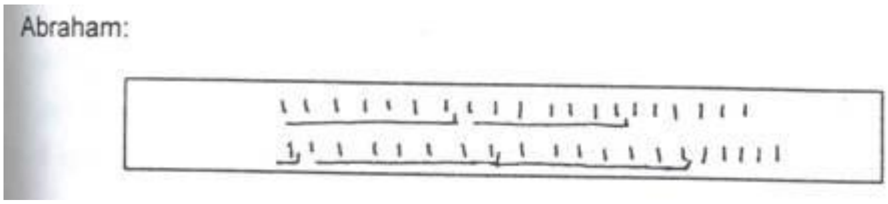


Dibujó inicialmente los *40 lápices*. Parece que después fue tachando *de 7 en 7*, y los fue "metiendo" en las cajas, haciendo corresponder cada grupo de 7 lápices con una caja. El último grupo, aunque sólo tiene 5 elementos, lo pasó también a una caja y colocó 7 lápices, sobrepasando el dividendo de 40, a 42. Estas acciones las realizó individualmente, aunque estaban trabajando en equipo.

En la ficha de su equipo se observa que habían registrado 7 en la casilla correspondiente a número de lápices en cada caja. Después borraron y escribieron *5* como resultado (tal vez en la confrontación).

Ana Cecilia y Abraham (de equipos distintos), para el mismo problema, dibujaron también los 40 lápices y formaron subgrupos de 7 elementos:





Esto confirma la hipótesis de que reinterpretaron el problema como **40 lápices, 7 lápices en cada caja.**

- ***La iteración del divisor en un problema tasativo***

En este caso se trata de una adecuada interpretación de un problema tipo tasativo. En la sesión 4 (los regimientos), como ya se explicó en la primera parte de este capítulo, el propósito fue propiciar el uso del arreglo rectangular para resolver problemas de reparto. Originalmente los problemas debían plantearse así:

Repartir 55 soldados en 5 filas ¿Cuántos soldados hay en cada fila?

Por equivocación mía, el problema se transformó en tasativo:

Repartir 55 soldados en filas de 5 ¿Cuántos soldados hay en cada hilera?.

Una primera dificultad fue la consigna, ya que hubo necesidad de especificar lo que se entendía por "fila" [10](ordenamiento vertical) e "hilera" (ordenamiento horizontal). Esto se hizo gráficamente en el pizarrón, así:

La pregunta del problema fue confusa y tuve que explicar varias veces hasta que finalmente se aclaró que se trataba de ver *cuántas filas podían formarse*. Así quedó planteado claramente un problema de tipo tasativo.

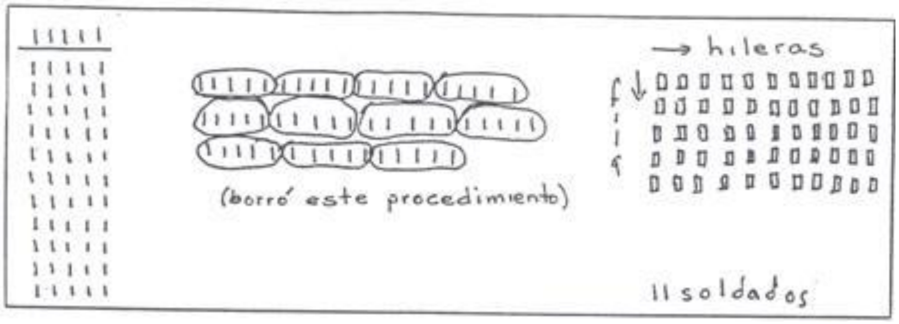
Al enfatizar la consigna de *formar a los soldados en filas de 5,* se propició la iteración del divisor, estableciéndose de manera implícita la relación de **"cuántas veces cabe el 5 en el 55".**

La iteración del divisor, al igual que los procedimientos antes descritos, también presentó ciertas modalidades:

b1) Iteración del divisor a nivel gráfico

Al establecer la consigna de "formar filas de cinco", señalando la distribución en filas e hileras, se propició la representación gráfica. Algunos ejemplos son los siguientes:

Rodrigo: (Problema 1, sesión 4).
Número de soldados: 55
5 soldados en cada fila. ¿Cuántos soldados hay en cada hilera?



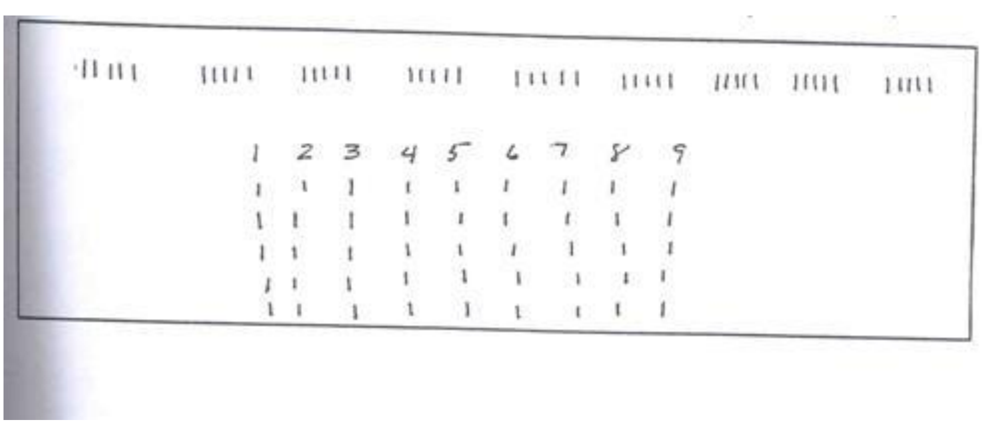
Parece que su procedimiento inicial fue dibujar el dividendo (*55 soldados***)**; sobre él, iteró el divisor haciendo grupos de 5 soldados.

En este momento intervino la maestra titular del grupo y le recordó la consigna, aclarando que eran **5 por fila**. Esto provocó que Rodrigo borrara la representación inicial, y entonces hizo un arreglo rectangular en la forma acostumbrada, representando el divisor arriba, horizontalmente. Obtuvo un arreglo de *11* (vertical) por *5* (horizontal).

Finalmente hizo una nueva representación, reajustando el arreglo anterior a la forma en que se había explicado. Ahora su arreglo quedó de 5 -vertical- por 11 -horizontal-. Ambas representaciones son formas distintas de iteración del divisor.

Otro caso en el que se puede ver con claridad la iteración del divisor es el de Damara:

Número de soldados: 45



5 soldados en cada fila ¿Cuántos soldados hay en cada hilera? (Problema 5, sesión 4)

En principio hizo grupos aislados de 5 elementos. Tal vez contó el número de grupos que formó, y numeró del 1 al 9 para acomodar debajo de estos números, las "filas de 5 soldados".

b2) Iteración del divisor con cálculo mental y apoyo en los dedos

Esta modalidad se favoreció por el divisor *5*, ya que contar de cinco en cinco resultó sencillo y familiar para los niños.

Enrique y Nacxit empezaron a contar: "*cinco, diez*..." cada vez que decían un número, levantaban un dedo, es decir, realizaban un doble conteo: los elementos del dividendo por un lado, y el número de grupos de cinco por otro. Este último lo controlaron con los dedos: un dedo, es igual a una fila de cinco soldados; dos dedos, dos filas de 5 soldados (diez soldados)... hasta concluir que 12 dedos es igual a 60 soldados formados en 12 filas de 5. En este problema la mayoría de los alumnos usó la iteración del divisor como procedimiento para resolver.

La iteración del divisor, como se ha podido ver, se caracteriza por lo siguiente:

- Su uso, ya sea gráfico o numérico, lleva a obtener un resultado en el que el cociente es un escalar (número de veces que se repite el divisor).

- Implica controlar el dividendo como cantidad a la que debe llegarse al repetir la suma del divisor.

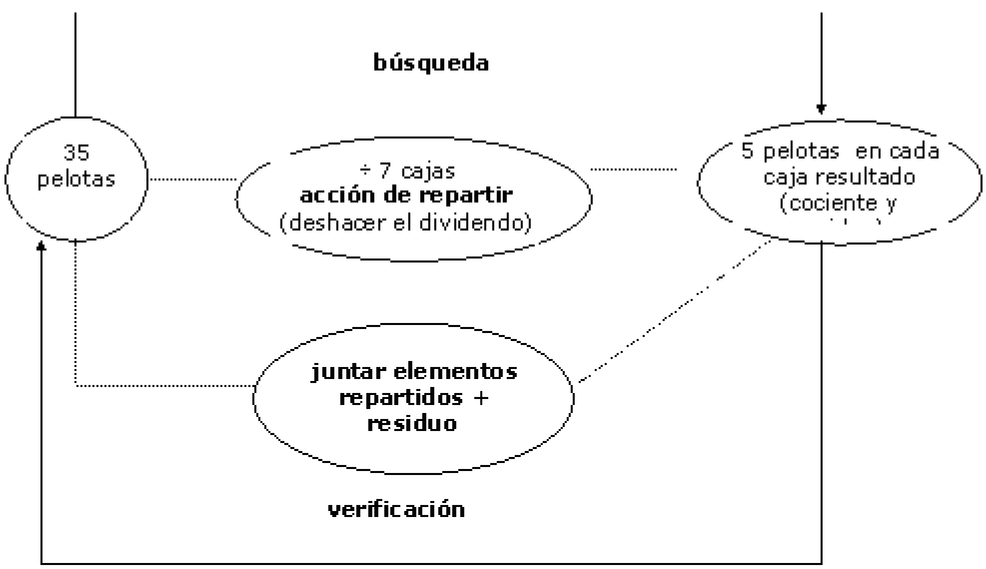
- Es un procedimiento laborioso que requiere ir obteniendo las sumas parciales para ver hasta dónde se deja de sumar (cuando se obtiene el dividendo o se aproxima a él).

- Constituye un paso importante hacia el uso de la multiplicación, vista como "una suma rápida"[11]

3. LA VERIFICACIÓN DE RESULTADOS: ACCESO A LA RELACIÓN INVERSA AL REPARTO.

Cuando los alumnos resuelven un problema de reparto, buscan formas para "deshacer" el dividendo en función del divisor. Posteriormente implementan acciones diversas para comprobar si los resultados que obtienen son correctos, lo que propicia que surjan los procedimientos de verificación.

Una variable que influyó en la aparición de estos procedimientos, fue la pregunta "¿Cómo hacemos para saber si el resultado es correcto?". Sin embargo, por iniciativa propia varios niños buscaron formas para cerciorarse de que los resultados que obtenían eran correctos. Al momento de verificar, los alumnos intentaron **reconstruir** la colección inicial y de esta manera, empezaron a realizar la acción inversa al reparto:



Como veremos posteriormente, los procedimientos numéricos más evolucionados para resolver problemas de reparto, en particular el uso de la multiplicación, se generaron precisamente en las acciones de verificación: los niños tienen un cociente y se enfrentan a un problema que les es familiar: reunir los elementos de varias colecciones (que tienen igual número de elementos) y comparar ese total con el cardinal de la colección inicial. Del conteo, pasan a la adición y finalmente a la multiplicación del cociente encontrado por el divisor.

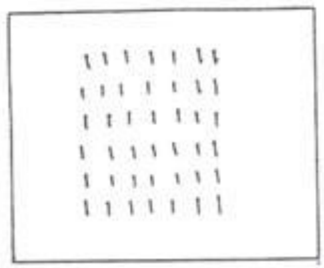
a) El conteo

Puede considerarse como el primer procedimiento de verificación. Una vez hecho el reparto, ya sea a través de arreglo rectangular o de estimación gráfica del cociente, se cuentan uno por uno los elementos repartidos, para ver si se obtiene un número igual al dividendo.

En la primera sesión, en donde los niños, organizados en equipos, resolvieron dos repartos (uno con material y otro sin él), no se tienen datos de que hayan verificado sus resultados por conteo[12]. Tal vez porque el uso del material permitió hacer los repartos directamente.

En las sesiones 3 y 4 (guardar lápices en cajas y formar regimientos, respectivamente), algunos niños usaron el conteo para verificar, en el momento de confrontar resultados ante el grupo:

Para *"meter 40 lápices en 7 cajas"* (sesión 3, problema 3), cuando se pidió a los alumnos que explicaran lo que hicieron, Nacxit pasó al frente y dibujó el resultado que obtuvo su equipo:

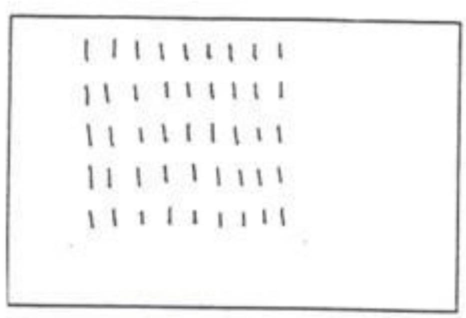


Alguien le dijo a Nacxit "**te pasaste"** (porque en total registró *42 lápices*). Nacxit explicó:

> Nacxit: Puse las cajas y fuí poniendo después los lápices
> Ma: Y te sobraron?
> Nacxit: Sí... (se queda pensando y observa el arreglo rectangular)
> Ma: Qué hiciste con el sobrante? (empieza a contar todas las rayitas hasta terminar)
> Nacxit: Me pasé... (borra las dos últimas rayitas)

En este caso la verificación por medio del conteo se dio a partir de las preguntas que se le hicieron a Nacxit.

En la sesión 4, cuando Laura explicó cómo resolvió el problema de *formar el regimiento de 49 soldados en filas de 5***,** registró lo siguiente en el pizarrón:



Dijo que primero puso *9 hileras* (estimó con multiplicación), y después puso *los 5 soldados por fila* (no registró los 4 sobrantes). Al terminar, contó una por una las rayitas y dijo: "Cuarenta y nueve, nueve por hilera y sobra cuatro". En realidad sólo tenía 45 rayitas para contar, lo que significa que ella sumó al final el sobrante.

En estos casos, la acción de contar se vio propiciada por el hecho de pedir a los alumnos que explicaran lo que hicieron para resolver los problemas, y específicamente cuando apareció un error, que fue aprovechado para verificar un resultado.

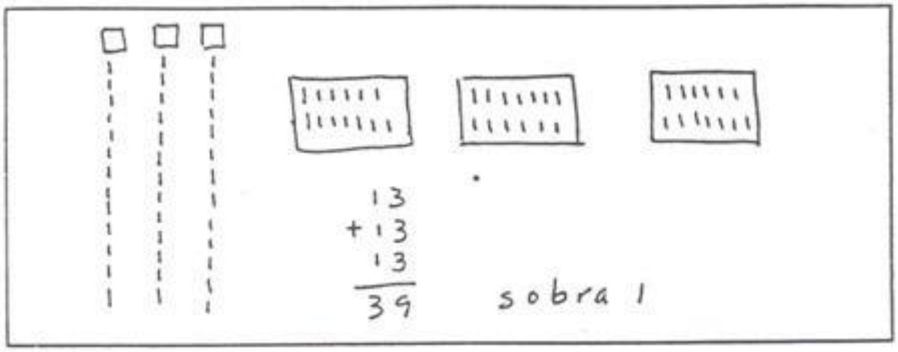
b) La adición iterada del cociente

El uso de la adición para comprobar un resultado surgió también de manera espontánea. Su presencia para verificar un resultado da cuenta de que, además de haber comprendido el problema y hallado una vía de solución, se establece una *forma inversa para volver a juntar lo que se repartió*, y así contrastar este resultado con el dividendo dado en el problema

Para resolver el problema de *guardar 35 lápices entre 2 cajas* (problema 1, sesión 2) Rodrigo I, después de haber hecho su estimación gráfica, escribió la operación

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 17 \\ 17 \\ \hline 34 \end{array}$$

En la sesión 3, tres alumnas (del mismo equipo) usaron el arreglo rectangular y el "reparto en cajas" para resolver los problemas de repartir *40 lápices entre 3 y 10 cajas*, y una vez que lo terminaron, recurrieron a la adición iterada para verificar su resultado:



Estos son los únicos casos que aparecieron dentro de estas cuatro primeras sesiones.

Como vemos, la adición iterada del cociente se empezó a emplear para **verificar** un resultado ya obtenido mediante otro procedimiento. Es pertinente sobre todo, cuando el cociente se obtiene mediante estimación. Aunque para estos momentos los niños empezaban a verificar sus estimaciones, lo fueron haciendo cada vez de manera más sistemática.

Posiblemente el uso de los procedimientos de representación gráfica y en especial el arreglo rectangular, favoreció también la verificación con adición iterada, porque en él se puede "leer con facilidad" lo que se repartió a cada grupo del divisor. Esto propicia el hecho de pensar en sumar cada grupo, el número de veces que se repite (divisor), para comprobar si el reparto fue correcto y completo (si se agota o se acerca al divisor).

La adición iterada del cociente fue el primer procedimiento con representación numérica que apareció y se generó en el momento de verificar. A su vez, constituye un procedimiento más avanzado que posibilitó el acceso al uso de la multiplicación.

---

[1] La ficha contenía un cuadro a cuatro columnas, en las que se registraba el *número de pelotas*, *paquetes*, *pelotas en cada paquete* y *sobrantes.* Los dos primeros datos ya estaban dados. Lucina anotó 17 (pelotas en cada paquete) y 1 (sobrantes).

[2] Los alumnos trabajaban en mesas para 4 personas.

[3] En la sesión 3, en la que se trataba de "guardar lápices en cajas", se incrementó su uso.

[4] Los tres trazos distintos de las líneas representan la diferencia de colores usados por Israel en su hoja original (rojo, azul, amarillo)

[5] Una vez que se planteaba el problema, y antes de que los niños lo resolvieran, se les preguntaba "¿Como cuántos ... creen que le toque a cada...". Esto favoreció que pensaran en un resultado hipotético, que después verificarían.

[6] La abreviatura "**Ma:**" indica las intervenciones que hice durante las sesiones de clase al haber desempeñado el rol de maestra en el grupo.

[7] Estas preguntas fueron preparadas desde el diseño de la situación.

[8] Eran unos "abatelenguas" que usaban los niños en clase, al parecer cuando trabajaban con multiplicación

[9] Reunían los lápices de colores y bolígrafos entre los miembros del equipo, contándolos para ver si la cantidad de objetos igualaba al dividendo.

[10] Dadas las confusiones a las que lleva el uso de estos términos, *fila* e *hilera*, opté por dar la connotación de ordenamiento vertical a la palabra fila, pensando en lo común que resulta en la escuela decir a los niños "fórmense en (x número de) filas", y la tendencia generalizada a formarse uno atrás del otro.

[11] Recordemos que en este estudio no se incluyeron problemas de tipo tasativo, únicamente por motivos de investigación. No obstante, como se ve, estos problemas son accesibles para los niños, y posiblemente favorezcan en mayor medida cierto tipo de procedimientos numéricos como la adición y la multiplicación.

[12] Posiblemente algunos lo hicieron sin que yo me percatara de ello, por estar observando el trabajo de los demás.

CAPÍTULO 5

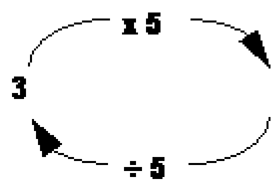
DEL REPARTO AL USO DE LA MULTIPLICACIÓN

Un paso fundamental en el proceso para construir la noción de división, es concebir a la multiplicación como operación inversa de la división; en este caso, como operación inversa del reparto.

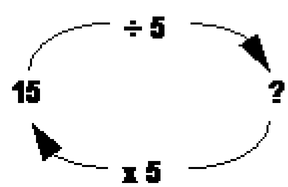
Esto sucede cuando los niños, en vez de repartir directamente, por ejemplo,*15 dulces entre 5 niños* para encontrar el cociente buscan el número (de dulces por niño) que multiplicado por 5 (niños), da 15 (dulces en total).

Veamos las siguientes representaciones:

División como operación inversa de la multiplicación



Multiplicación como operación inversa de la división



Lo anterior implica pensar en la acción inversa al reparto, en la acción de "juntar lo repartido"; implica partir del cociente hipotético y no del dividendo:

cociente hipotético X 5 niños = 15 dulces

Situados en la acción inversa, los niños se enfrentan entonces a una multiplicación en la que desconocen uno de los factores. Esta es finalmente, la definición formal de la división. En este trabajo me referiré a esta acción como **búsqueda del multiplicando,** cuando los alumnos recurren a ella como procedimiento para abordar los problemas.

En el apartado anterior hemos visto que los niños empezaron a utilizar esta relación inversa al reparto, en el momento de la verificación, obtienen un cociente y para saber si es correcto, reconstruyen el dividendo**,** ya sea contando todos los elementos, o sumando.

Hasta ahora, en este proceso de verificación, prácticamente no habían recurrido a la multiplicación. Esto es lo que se intentó propiciar en esta fase, a partir de la estimación y verificación de cocientes.

Así, la multiplicación apareció en un primer momento como recurso de verificación (teniendo un cociente, hay que verificar). Se esperaba que los alumnos la empezaran a usar como recurso de solución al preguntarse, de entrada, *por el número que multiplicado por el divisor, se acerque lo más posible al dividendo*.

Como se verá a lo largo de este apartado, la mayoría de los niños empezó a usar con relativa facilidad *la búsqueda del multiplicando* para verificar, y después para encontrar los resultados de los repartos. Un proceso más largo implicaría que pudieran distinguir esta operación (búsqueda del multiplicando) de la multiplicación directa entre los datos de un problema.

Para ellos, $5 \times 3 = \square$ y $\square \times 3 = 15$ son "multiplicaciones". Esta confusión reapareció una y otra vez, pero poco a poco, sobre todo en la tercera fase, empezaron a identificar a la segunda operación como una división.

Las situaciones 5 a 8 corresponden a una segunda fase de la secuencia de situaciones didácticas, cuyo propósito general fue propiciar que los niños identificaran el resultado de un problema de reparto (el cociente), como el número que multiplicado por el divisor se acerque lo más posible al dividendo.

En este apartado se analizan una a una, las cuatro sesiones que integran esta segunda fase. Empezaré por caracterizarlas (ver cuadro 2, p. 88).

1. CONDICIONES DIDÁCTICAS

a) Con respecto a los problemas

Se continuó trabajando con problemas de reparto, pero también se incluyeron en su momento, problemas de adición, sustracción y multiplicación, con la finalidad de que los niños identificaran la operación correspondiente.

- *Contexto y estructura*

Algunas de las magnitudes que se trabajaron fueron *animales y jaulas*; *canicas y bolsas*; *revistas y puestos*, etcétera. En ocasiones los contextos no fueron los más adecuados, porque desde la lógica de algunos niños, no resulta "congruente" que queden, por ejemplo "animales fuera de las jaulas" (cuando se trata de repartos inexactos).

Dentro de la estructura de los problemas, la idea de repartir no siempre se aclaró literalmente en el texto. Se usaron palabras como *meter, guardar, empacar.*

Lo que sí se incluyó desde el principio, fueron expresiones como *"que a todos les toque lo mismo*" (dependiendo del contexto), con la intención de hacer explícita la equitatividad.

La idea de "repartir hasta donde se pueda" a veces se dejó implícita en aras de aligerar las consignas.

- *Tamaño de los números*

Se procuró emplear cantidades que pudieran encontrarse directamente en la tabla de multiplicaciones (63 y 7; 54 y 6, entre otras), o dividendos que no aparecen en ella (47, 39) y que por lo tanto requerían de la búsqueda del número más próximo y que sí está en la tabla.

En la sesión 8, por ejemplo, con las cantidades usadas para el último problema (*47 entre 4*) se propició la "desalgoritmización" del recurso de la tabla de multiplicaciones y al mismo tiempo el uso de otros procedimientos como aquellos que se apoyan en la representación gráfica.

- *Existencia del residuo*

Se continuó trabajando con repartos exactos e inexactos. En esta ocasión los alumnos se enfrentaron a la tarea de hallar el residuo usando la tabla de multiplicaciones. Como se observará, el tamaño del residuo (en relación al divisor) jugó ahora, con cantidades mayores, un papel más importante.

b) Con respecto a la dinámica de la clase

- *La estimación del cociente*

La condición didáctica más importante en esta parte del estudio fue la estimación previa de cocientes. Para propiciarla, se empleó de manera constante la pregunta anticipatoria *"¿Como cuántos... creen que le toque a cada uno?",* pidiendo enseguida que se verificara una o varias de las estimaciones con sus procedimientos, pero con la intención de que los niños empezaran a usar la multiplicación para verificar. Además de la estimación del cociente, se consideraron las siguientes condiciones:

- *Uso de material*

En esta fase se usaron objetos en la sesión 5 (un cartón de huevo y frijoles por equipo), con la intención de que los alumnos los emplearan para verificar los resultados que según nuestra expectativa, se encontrarían con otros procedimientos. No obstante, hubo varios alumnos que usaron el material para resolver los problemas de esa sesión, con reparto uno a uno, o con estimación de cociente.

Especificaciones para resolver

En esta fase, se insistió en pedir que buscaran una manera "más rápida" de resolver, para observar si daban otro uso a los procedimientos iniciales, si los abandonaban, si recurrían a la multiplicación.

Desde la sesión 5 se pidió explícitamente que resolvieran los problemas usando la tabla. En este sentido, la situación se "cerró", es decir, se procuró que todos los alumnos implementaran un procedimiento de solución determinado.

- *Organización del grupo*

En la sesión 5 (animales a sus jaulas), los niños trabajaron en equipos, con el propósito de que juntos resolvieran los problemas, decidieran qué hacer con el material y con las tablas de multiplicar, etcétera.

Las tres sesiones posteriores (6 a 8) se iniciaron con trabajo individual por parte de los niños. Ello no significa que dejaran de interactuar con sus compañeros. De hecho, aunque se les pidiera que resolvieran solos, de manera natural comentaban, preguntaban, hacían sugerencias a sus compañeros de equipo, e incluso en ocasiones les decían “estás mal”, lo que daba lugar a la revisión de sus procedimientos.

CUADRO 2

SITUACIÓN	**PROPÓSITOS**	**PROBLEMAS**	**OTRAS CONDICIONES DIDÁCTICAS**		**DINÁMICA**
5. Animales a sus jaulas.	- Estimar cocientes. - Propiciar el uso de la tabla de multiplicar como un recurso para el cálculo o verificación del cociente.	Estamos en un rancho cuidando animales. Cuando terminen de comer, los debemos meter a sus	-Estimación previa y verificación. - Material para verificar: cartón para huevo y frijoles	Digan qué hacemos para saber el resultado. (Hay tablas de multiplicar en grande).	Trabajo en equipos: • Estimación para cada reparto. • Resolución libre. • Verificación con material.

		jaulas o corrales: 1) 63 conejos en 7 jaulas. 1) 47 cerdos en 9 corrales. 1) 70 borregos en 8 corrales. ¿Cuántos... en cada...?	(después de resolver). - Reparto exacto (problema 1). - Reparto inexacto. (Problemas 2 y 3)		• Confrontación de cada problema. Trabajo individual: • Resolución de fichas.
6. Animales a sus jaulas	Resolver problemas de reparto con apoyo de la tabla de multiplicar y/o la calculadora.	Estamos en un rancho cuidando animales. Cuando terminen de comer, los debemos meter a sus jaulas : 1) 54 pollitos en 6 jaulas. 1) 73 pollitos en 8 corrales. 1) 84 pollitos en 9 corrales. ¿Cuántos pollitos en cada jaula?	-Estimación y verificación - Cada niño tiene una tabla de multiplicar. - Reparto exacto (problema 1). - Reparto inexacto (Problemas 2 y 3).	- Resuelvan como quieran. - Busquen una forma más rápida para resolver.	Trabajo individual: • Estimación para cada reparto. • Resolución libre. • Confrontación de cada problema.
7A*. Busca el resultado	- Identificar entre varios resultados, el cociente que corresponde al problema planteado. - Propiciar el uso de la tabla	Escoger el resultado correcto: 1) Se tienen 56 canicas para repartirlas en 7 bolsitas. ¿Cuántas	- Cocientes opcionales - Verificación del cociente obtenido	Elijan el resultado correcto. Si quieren, usen su tabla (problemas 1 y 2).	Trabajo individual: • Planteamiento de cada problema. • Resolución de cada problema.

	para resolver problemas de reparto	canicas en cada bolsa? 7, 6, 9 y 8. 2) Mismo contexto: 39 canicas en 4 bolsas: 10, 8, 7, 9			• Confrontación de cada problema.
7B.		47 chocolates en 7 bolsas. ¿Cuántos chocolates en cada bolsa?	- Reparto inexacto, accesible al uso de la tabla.	Busquen el resultado (problema 3).	
8. La fiesta y los dulces	Propiciar el uso de otros procedimientos, al operar con cantidades que implican un cociente mayor que 10	Resolver ficha 7: Total No. Dulces Dulces de de para quedulces niños cada niño sobran 1) 48 6 2) 75 8 3) 44 9 4) 77 4	- Un reparto exacto, se encuentra en la tabla (problema 1). - Reparto que implica residuo chico (problema 2). - Reparto que implica residuo grande (problema 3). - Reparto que no se puede encontrar en la tabla: implica cociente mayor que 10 (problema 4).	Usen sólo la tabla de multiplicar.	Trabajo individual: • Resolución de ficha 7. • Confrontación.

* Esta clase tuvo 2 momentos.

2. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

A continuación describiré de manera específica cada una de las situaciones correspondientes a la segunda fase.

A. SESIÓN 5

El propósito en esta sesión, como se establece en el cuadro 2, fue propiciar la estimación de cocientes y el uso de la tabla de multiplicaciones como un recurso para el cálculo o verificación de resultados.

La situación se planteó así:

"Estamos en un rancho, cuidando a los animales para que coman, y después los tenemos que meter en sus jaulas..."

Los problemas se propusieron de manera verbal y fueron:

1."Si tenemos sesenta y tres conejos y siete jaulas, tenemos que meterlos en las jaulas, cuidando que en cada jaula quede igual número de conejos"... ¿Cuántos conejos metemos en cada jaula?"

2. "Ahora debemos meter a cuarenta y siete cerdos en nueve corrales. Hay que saber cuántos cerdos quedan en cada corral. Encuentren el resultado lo más rápido que puedan".

3. "Tenemos setenta borregos y los vamos a repartir en ocho corrales. ¿Cuántos borregos se tienen que meter en cada corral?"

Para cada problema se planteó la pregunta *"¿Como cuántos... creen que...?"* y enseguida se pidió que dijeran cómo saber cuál de esos resultados podía ser correcto.

Con la finalidad de propiciar el uso de la multiplicación, se elaboró una tabla de Pitágoras (en grande) y las tablas de multiplicar en la forma tradicional (del 1 al 9)[1]. Al respecto se observó que la mayoría del grupo aún no se había familiarizado con el uso de las tablas de multiplicar.

Por ese motivo, al término de esta sesión se suspendió la experimentación durante 3 semanas, pidiéndole a la profesora titular del grupo que reforzara el trabajo con multiplicación, a partir de una sugerencia que le fue proporcionada[2]. Esto constituyó uno de los ajustes que sobre la marcha se hicieron a la secuencia de situaciones didácticas, con la finalidad de propiciar la evolución del aprendizaje en los alumnos.

En la sesión 5 surgió una diversidad de procedimientos, entre los cuales permanecieron algunos de los que ya habían empleado los alumnos en sesiones anteriores, mientras que otros surgieron como "nuevos".

- **Procedimientos usados por los niños**

a) La búsqueda del multiplicando

Al plantear el primer problema, se hizo la pregunta anticipatoria: "¿Como cuántos conejos creen que se tienen que meter en cada jaula?". Las respuestas fueron:

> Edgar: ¡Ocho!
> Laura: ¡Como nueve!
> Christian: ¡Como once!
> Armando: ¡Diez!
> Ma: Si metemos ocho conejos en cada una de las siete jaulas, ¿cuántos conejos logramos meter en total?

Con esta pregunta se retomó una de las estimaciones dadas por los alumnos *(ocho)***,** intentando que buscaran alguna manera de comprobar si la estimación era correcta:

> Ma: ¿Cómo hacemos para saber? (cuántos conejos habrá en total, si se meten 8 en cada jaula)
> Rodrigo: ¡Una multiplicación!
> Ma: ¿Qué multiplicas?

Rodrigo: Siete por nueve...

Esta respuesta indica que tal vez Rodrigo se dio cuenta de que *ocho* no podía ser el resultado. Posiblemente desde el principio encontró que el correcto era 9, a través de la multiplicación de siete por nueve.

De hecho se ignoró la pregunta y de inmediato se dio una respuesta que refleja el uso de la multiplicación para resolver *(siete por nueve).*

Inmediatamente a las respuestas de Rodrigo, surgió otra por demás interesante:

Arsenio: Una división
Ma: A ver, qué haces al dividir?
Arsenio: Viendo el siete, porque ves el siete y luego el resultado y te vas para arriba

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	**9**	*10*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	***63***	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	21	27	36	45	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Arsenio iba señalando con su dedo hacia la tabla de multiplicaciones. Buscó el 7 en el primer renglón vertical; luego buscó el dividendo (63) en sentido horizontal (en el renglón del 7) y subió su dedo sobre ese renglón para hacer corresponder el 7 y el 63, con el 9 (cociente).

La respuesta de Arsenio demuestra que, de alguna manera sabía que la operación en juego es una división; pudo, desde esta primera ocasión, usar la tabla para encontrar directamente el cociente, es decir, para dividir. Buscó el número que multiplicado por 7 da 63. Esto no significa, sin embargo, que la situación haya propiciado tantas cosas al mismo tiempo, y en una sola sesión. Arsenio había mostrado con anterioridad, que identificaba la relación de la división con la adición y la multiplicación.

A Arsenio, la tabla no sólo le permitió verificar un cociente estimado, sino buscar directamente ese cociente (lo que en efecto se esperaba propiciar en esta sesión) sin estimación previa, localizando el número que multiplicado por el divisor es igual o próximo al dividendo.

En su hoja, Arsenio registró la representación convencional de la división para los tres problemas que se trabajaron en la clase:

9	5	8
7 / 6 3	9 / 4 5	8 / 6 4
0	2	6

Para el segundo (*47 ÷ 9*) y tercer problema (*70 ÷ 8*), el procedimiento de Arsenio[3] no cambió. Registró múltiplos encontrados en la tabla, en vez de los dividendos originales, calculó y registró el sobrante. Después simplemente representó de manera convencional las acciones que realizó en la tabla. Dos compañeros del equipo de Arsenio copiaron las mismas representaciones.

Sofía es otra alumna que también empleó la representación convencional de la división con la galera, sólo que ella sí registró los dividendos originales:

9	5	8
7 / 6 3	9 / 4 7	8 / 7 0
0	2	6

Al igual que Arsenio, sabía que en problemas de este tipo hay que buscar el número que multiplicado por el divisor, dé el dividendo o se acerque a él.

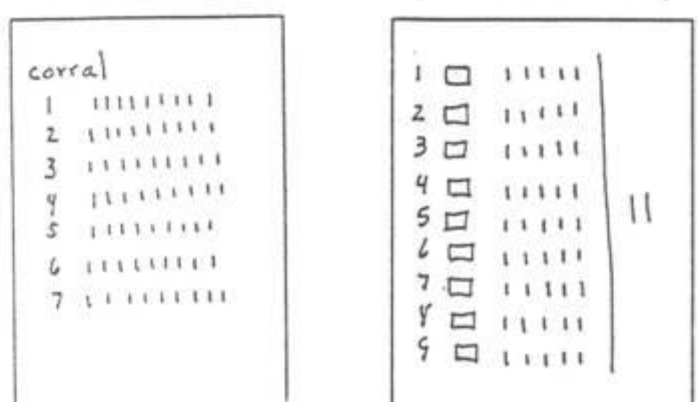
En estos ejemplos se observa cómo los conocimientos previos de algunos alumnos influyeron para que ciertos procedimientos desconocidos para la mayoría, se empezaran a difundir en el grupo. Estos alumnos ya identificaban la división como una operación que resuelve cierto tipo de problemas, además de conocer una forma de representarla. La tabla de multiplicaciones es un recurso que les permitió mostrar cómo se encuentran los resultados.

b) Otros intentos de buscar el cociente en la tabla de multiplicaciones

A lo largo de la sesión aparecieron otros intentos por usar la búsqueda del multiplicando, aunque por ahora no lograron llegar resultado. Las dificultades que enfrentaron son interesantes.

Cuando se planteó el segundo problema *(47 cerdos entre 9 corrales*) y la pregunta anticipatoria *¿Como cuántos cerdos creen que deban meterse en cada corral?,* los alumnos, haciendo caso omiso de la pregunta, se dedicaron a resolver el problema, empleando en general el mismo procedimiento que usaron para el anterior (quienes habían usado representaciones gráficas, lo volvieron a hacer así). Se dio la consigna de "resolverlo más rápido", con la intención de propiciar el uso de la tabla de multiplicaciones (cada alumno tenía una sobre su mesa).

Iván: Problema 1 *(63 conejos, 7 jaulas)* — Problema 2 *(47 cerdos, 9 corrales)*



Iván: (intentó primero usar la tabla de multiplicaciones y explicó): las tablas no me dan ningún resultado... (muestra la hilera del 9)... no hay cuarenta y siete, entonces pensé en cinco... pensé que cuarenta y cinco iba a quedar en la del cuatro

Iván tenía la idea, aunque no muy precisa, de que si el número exacto no aparece en la tabla, debía buscar el que más se aproxime, pero perdió de vista el divisor y trató de buscar el 45 en el renglón del 4 vertical. Al no encontrarlo, optó por el procedimiento que ya conocía (representación gráfica) y le había funcionado para hallar el cociente.

Durante la confrontación, teniendo varios procedimientos expuestos, así como las tablas de multiplicar, se les preguntó a los niños si no había una manera más rápida para encontrar el resultado, y surgió la siguiente explicación:

Laura: Voy buscando el cuarenta y siete... (utiliza la tabla de Pitágoras pegada en el pizarrón).. pero no lo encuentro, y entonces me paso al cuarenta y cinco y luego me salieron cinco en cada jaula y me sobraron dos

Laura no perdió de vista ninguno de los datos del contexto (dividendo 47 y divisor 9). Como el dividendo no aparece en la tabla, buscó el número que más se acercara a él (sin rebasarlo), para calcular el sobrante (2) a partir de ese número.

Este primer razonamiento despertó cierta polémica en el grupo:

Nayeli: Pero es mejor que me pase al cincuenta y cuatro, porque así le sobrarían más...
Arsenio: No, no le puedes decir cincuenta y cuatro, porque sólo tienes cuarenta y siete cerdos...
Nayeli: No, no, entonces le van a faltar...

Mientras para Nayeli no importaba (aparentemente) que sobrara "más", o "menos", y perdió de vista que el dividendo representa una cantidad "límite", Arsenio tenía presente que ese dividendo no debe rebasarse; pero tampoco es forzoso que se agote.

La explicación de Arsenio provocó que Nayeli regresara al contexto y se diera cuenta de que sólo había *47 cerdos*, por lo tanto no podía aumentar el dividendo.

En otro equipo, para el problema 3 (*70 borregos, 8 corrales*) los niños trabajaron con cocientes estimados:

Ana: Diez
Karla: Cinco
Ana: Si fueran diez, nos sobrarían diez borregos (es evidente la multiplicación mental de 10 X 8 = 80)...
Karla contaba los frijoles. Ana y Abraham empezaron a poner frijoles en ocho hoyos del cartón, y a contar. Abraham tomó las tablas (como que se le antojaba utilizarlas, dado lo pesado del conteo) pero las dejó. Pusieron cuatro frijoles en cada hoyo, Abraham pidió la tabla.
Ana: Voy a poner diez en cada jaula... pero sobra una...

Este fue el único caso de la sesión, que mostró el uso de la multiplicación para verificar estimaciones. Es interesante ver cómo interactúan los alumnos empleando distintos procedimientos. Ana hizo una primera estimación y calculó el resultado que obtendría con ella, al multiplicar 10 por 8. Mientras tanto existen otras opciones (los frijoles con el cartón y la tabla), una de las cuales parecía resultar muy laboriosa (contar frijoles) y había inseguridad para usar la otra (la tabla).

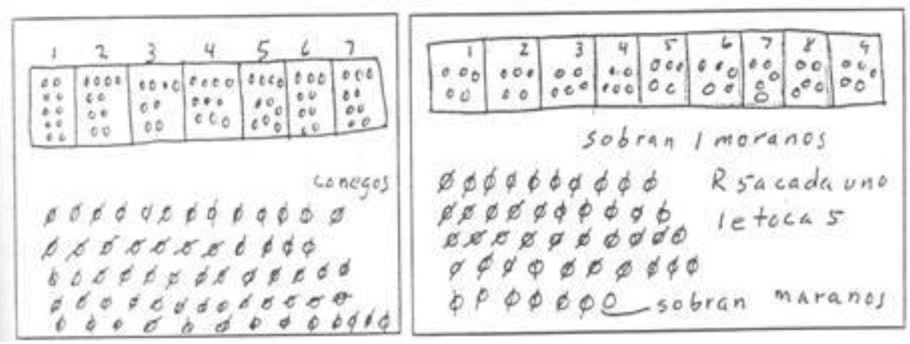
Antes de que decidieran qué hacer para resolver el problema, se dio la confrontación de procedimientos.

c) Reparto uno a uno gráfico y con material

Aunque para el primer problema se encontró un resultado usando la tabla de multiplicar, la mayoría de los alumnos continuó empleando los procedimientos gráficos. Otros, como acabamos de ver, intentaron usar los objetos que tenían a su alcance.

De 34 alumnos, 8 usaron el arreglo rectangular (y resolvieron los tres problemas); 13 usaron reparto en cajas (sólo 3 de ellos resolvieron los tres problemas). Los demás resolvieron los dos primeros problemas. Como ejemplos de estos casos tenemos los siguientes:

Moira: Problema 1 (*63 conejos, 7 jaulas*) — Problema 2 (*47 cerdos, 9 corrales*)



Primero dibujó el número de jaulas. Después el total de animales (abajo de los corrales) y aparentemente repartió uno a uno los animales en las jaulas, tachando cada animalito que repartía de la colección total, hasta agotarlos.

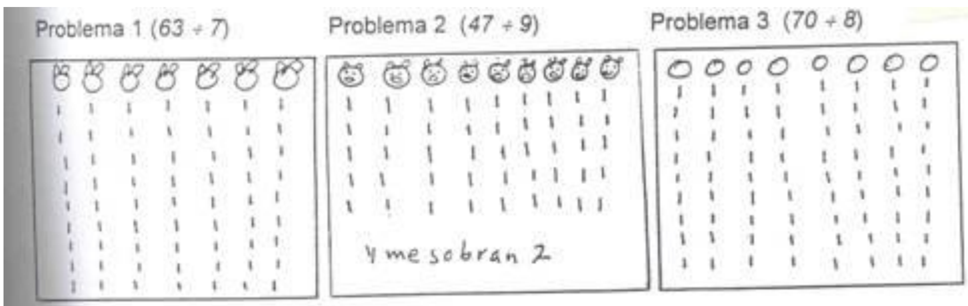
En este problema, parece que Moira perdió la cuenta, ya que a pesar de que la colección total tiene los *63 conejos*, el total de animales repartidos en las jaulas suma 66, obteniendo *4 corrales* con *10 conejos cada uno*, *uno con 8 conejos y los dos últimos con 9 conejos*. Sin embargo anotó como resultado 9, tal vez en el momento de la confrontación.

En el problema 2 (*47 cerdos, nueve corrales*) parece que también perdió la cuenta al tachar. En total acomodó 45 en los corrales y en la colección tachó 46; le sobró 1.

René: Problema 3 (*63 conejos, 7 jaulas*) — Problema 1 (*70 borregos, 8 corrales*)

Para el primer problema no puede asegurarse si hizo reparto uno a uno, o bien estimó una cantidad como resultado y después lo representó gráficamente, con ajustes posteriores.

Para el problema 3 sí es claro que René estimó 10 como coci*ente* (retomó una de las estimaciones hechas al principio); primero dibujó los 70 borregos y sobre esa representación formó 7 grupos de 10 y obtuvo 7 corrales. Tal vez se dio cuenta de que ese no era el resultado; dibujó los 8 corrales, pero metió nuevamente 10 borregos en los dos primeros corrales; borró, dejando los corrales vacíos. Posiblemente estaba decidiendo si debía o no disminuir su estimación. René no resolvió el problema 2.



En el primer caso obtuvo el resultado sin dificultad. En el segundo repartió 45 y advirtió que 2 es el residuo.

Julio usó el arreglo rectangular para resolver los tres problemas:

En el primer caso obtuvo el resultado sin dificultad. En el segundo repartió 45 y advirtió que 2 es el residuo.

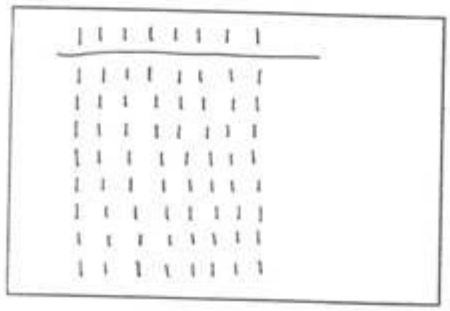
En el tercer problema (70 borregos, 8 corrales) sobrepasó el dividendo hasta 72, posiblemente porque el residuo es "grande" en relación con el divisor (6 contra 8), y por lo tanto es poco lo que falta para formar otro grupo de 8.

En este caso, como en otros, tal vez el contexto y el residuo grande, propiciaron que se pensara en *completar otro corral con 8 borregos*, en lugar de dejar 6 borregos fuera de los corrales.

Se tenía previsto que, una vez hecha la estimación del cociente para el primer problema, y habiendo verificado éste con la multiplicación, se proporcionaría a cada equipo una bolsa con frijoles y un cartón de huevo, de tal manera que pudieran comprobar esos resultados.

En virtud de que hubo dificultades para que la mayoría de los alumnos usara la multiplicación, cuando se les entregó el material, lo usaron para resolver; recurrieron tanto al reparto uno a uno como a la estimación de cocientes con material.

Por ejemplo, Nacxit, para el problema 3 hizo una representación gráfica, después de haber usado material y dijo *"me salieron ocho y me sobran seis":*



Obs: ¿Cómo supiste que eran ocho en cada corral?
Nacxit:: Los fuí poniendo así, de uno en uno (señala cada hoyo del cartón de huevos indicando el reparto)...

Los niños de este equipo resolvieron primero repartiendo de uno en uno, y después representaron el resultado gráficamente.

Como ya se mencionó, otros niños acudieron al material después de intentar encontrar el resultado con la multiplicación.

d) El uso de la multiplicación directa (procedimiento erróneo)

Hubo tres casos, como el de Itzel y sólo para el problema 1 (*63 conejos, 7 jaulas)*, en que al escuchar que se podía hacer una multiplicación, multiplicaron 63 X 7. Ella explicó cómo obtuvo el resultado:

$$\begin{array}{r} 2\ \\ 6\ 3 \\ \times\ 7 \\ \hline 441 \end{array}$$

Itzel: Siete por tres, veintiuno, uno y llevamos dos, ... (continúa explicando toda la multiplicación).
Ma: ¿Qué tenemos que hacer, qué dice el problema?

Itzel: Repartirlos (los conejos)
Ma: ¿Este puede ser el resultado? (señalando 441)
Aos: Nooo! (a coro)
Nayeli: No, porque siempre te va a salir más
Ma: ¿Entonces qué pasó allí?
Nayeli: Se equivocó

Inmediatamente Julio pasó al pizarrón y escribió

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 7 \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Ma: Y aquí, ¿qué es esto? (señalando el número 9 en la multiplicación)
Julio: Lo estuve intentando con el ocho, con el cuatro y hasta que le hice con el nueve

En este fragmento puede observarse que mi intervención al preguntar enfáticamente "¿Este puede ser el resultado?", señalando a la vez el 441, posiblemente provocó la respuesta a coro de los alumnos, invalidando la operación de Itzel, aunque después apareció un argumento válido, de por qué no puede ser esa la operación a usarse: "porque siempre te va a salir más".

A pesar de que la intención explícita al hacer esa pregunta, fue "regresar" a Itzel al contexto para que identificara el error, realmente no se le dio oportunidad. Se propició sin embargo, que surgiera la respuesta de Nayeli a la pregunta planteada, así como otra explicación que muestra otro ejemplo de estimación y verificación con multiplicación: la de Julio.

Tal vez la intervención de Nayeli haya favorecido que los alumnos se percataran de que, usar la multiplicación directa "agranda resultados", y que ésto no es congruente con lo que plantea el contexto de reparto.

La acción de multiplicar dividendo por divisor, puede deberse, ya sea a una interpretación multiplicativa directa de los datos del problema (*63 conejos en cada jaula*), o bien puede ser consecuencia de una idea de que la multiplicación está involucrada, aunque hay una dificultad para concebir la forma en que lo está. No se trata de la multiplicación directa sino inversa, es decir, de buscar un número que multiplicado por otro da un resultado determinado.

Comentarios

Como puede observarse, en el proceso de usar la tabla de multiplicaciones directamente para resolver un problema de reparto, el hecho de que la división no sea exacta representó ciertas dificultades, y tal vez por ello la mayoría de los alumnos volvió a recurrir a los procedimientos ya conocidos.

Al solicitar una estimación del cociente y después una manera de verificarla, algunos alumnos se dieron a la tarea, desde esta primera actividad, de buscar directamente el cociente en la tabla, como el número que multiplicado por el divisor es igual al dividendo.

No se había previsto que esto sucediera tan pronto. Como ya vimos, en los casos en que el dividendo no aparecía en la tabla, esta búsqueda fue más difícil. Sólo Laura mostró poder hacerlo (para la división *47 ÷ 5*, dijo: "... *voy buscando el cuarenta y siete, pero no lo encuentro, me paso al cuarenta y cinco..."*)

Con respecto a la mayoría del grupo vemos aparecer una esperada diversidad de procedimientos, que van desde el reparto uno a uno hasta la multiplicación por cocientes estimados. Así, entre los procedimientos que no recuperan los cocientes hipotéticos, tenemos los dos extremos:

- Reparto uno a uno
- Búsqueda directa del cociente en la tabla

Entre los procedimientos que recuperan los cocientes hipotéticos, están:

- Iteración gráfica del cociente hipotético
- Multiplicación del cociente hipotético

Por otra parte, pocos niños mostraron saber que la operación en juego se llama "división", y conocen una de sus representaciones convencionales.

En esta sesión, 4 alumnos usaron la tabla de multiplicar para encontrar el resultado de los problemas[4]. No obstante, las interacciones durante la confrontación favorecieron que la estrategia para encontrar el resultado en las tablas se fuera conociendo por el resto del grupo, y aunque persistieron las resoluciones gráficas, esta sesión 5 constituyó un momento importante en el acceso al conocimiento de otro recurso (la tabla de multiplicaciones), que a lo largo de las sesiones posteriores se seguiría difundiendo.

B. Sesión 6

En esta sesión se reinició el trabajo con el grupo (después de un intervalo de 3 semanas), a través de una situación similar a la anterior: "Pollitos a sus jaulas". El propósito, como en la sesión anterior, fue propiciar la estimación del cociente en un contexto de reparto y verificar con las tablas de multiplicar.

La situación se planteó así:

"Vamos a imaginarnos que en estas vacaciones fuimos a un rancho, y que teníamos que cuidar a los pollitos. Después de sacarlos al campo, los debíamos meter a sus jaulas, cuidando que en cada jaula quedara la misma cantidad de pollitos..."

Los problemas, presentados de manera verbal, fueron los siguientes:

1. "El primer día teníamos que meter 54 pollitos en 6 jaulas"...

2. "Tres días después los pollitos aumentaron. Ahora tenemos 73 pollitos y 8 jaulas"...

3. "Otros tres días después los pollitos volvieron a aumentar. Ahora hay 84 pollitos y 9 jaulas...

Los alumnos contaban con una tabla de multiplicaciones que habían elaborado con su maestra (a solicitud mía).

Se presentó el primer problema (*54 pollitos, 6 jaulas*), preguntando a continuación "*¿Como cuántos pollitos creen que quedaron en cada jaula?*"

Esta pregunta tenía la finalidad de que los alumnos hicieran estimaciones. Las respuestas que dieron fueron las siguientes:

> Audiel: Como ocho
> Sofía: Nueve
> Nemian: Diez
> Ma: Si metemos diez pollitos en cada jaula y tenemos seis jaulas, ¿Cuántos pollitos metimos?
> Aos: Sesenta

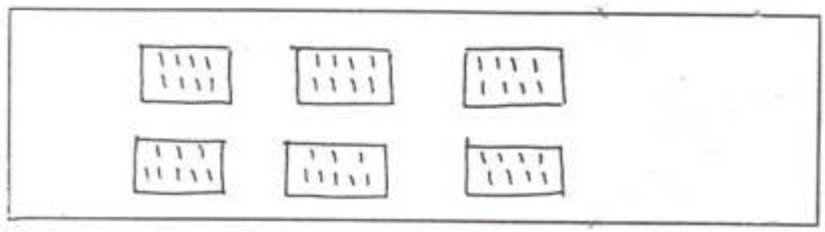
Esta vez, a diferencia de la sesión anterior, se logró que algunos alumnos verificaran los cocientes estimados, en el momento mismo de esta interacción. Es probable que hayan usado la multiplicación (diez por seis)[5]**.**

Nemian, se dio cuenta de que al meter 10 pollitos en cada jaula, metía 60 pollitos en total:

> Ma: Cuántos pollitos tienes, según el problema?
> Nemian: Cincuenta y cuatro
> Ma: Entonces ¿puedes meter diez pollitos en cada jaula?
> Nemian: Sí... (piensa)... no, ocho
> Ma: Si metes ocho en cada jaula, ¿Cuántos metes en total? (Algunos alumnos ven sus tablas y dicen que Nemian está mal)
> Nemian: Los cincuenta y cuatro porque no puede quedar ninguno afuera...

Para contestar la pregunta *"¿Cuántos metes en total?"*, Nemian no retomó su cociente hipotético (*8 en cada jaula*); dió una respuesta lógica, apegándose al contexto: *"No se puede quedar ninguno afuera".*

En ese momento, y para propiciar que todos participaran, se dio la indicación de que *lo hicieran como quisieran***.** Nemian se quedó en el pizarrón, verificando su resultado con un "reparto en cajas" metiendo directamente ocho pollitos en cada jaula:



Al terminar de contar uno por uno los pollitos de las seis jaulas dijo que metió *"cuarenta y ocho".*

> Ma: ¿Podrás meter más?
> Nemian: Como once
> Aos: ¡Nooo!, está mal!
> Ma: (A Nemian) Si metiste cuarenta y ocho, ¿Cuántos te está faltando meter?
> Priscila: Seis
> Nemian: (escuchando lo que dijo Priscila) Si meto otro en cada jaula, ya meto los cincuenta y cuatro. Sofía está bien (se refiere a la estimación inicial de Sofía)

Este es un buen ejemplo de cómo los alumnos se aproximaron al resultado con las estimaciones. Nemian, por las intervenciones de sus compañeros, se dio cuenta de que si "faltan por meter seis pollitos" (según Priscila) y tiene seis jaulas (porque no pierde de vista el divisor), puede meter un pollito más en cada jaula.

Por otra parte, estableció una adecuada relación entre el dividendo *(54)* y el cociente final *(9)*, con lo cual pudo afirmar que el resultado que daba Sofía "estaba bien".

Aunque no se verificó cada una de las estimaciones iniciales con todo el grupo, la interacción arriba citada permitió que algunos niños se dieran cuenta de si el 8 podía o no, ser el resultado.

Frente a la consigna de *hacerlo como quisieran*, probablemente todos los alumnos partieron de la estimación sobre la que parecía haber acuerdo (nueve) y la verificaron de distintas maneras; gráficamente, con adición iterada, con multiplicación.
Para el segundo problema (*73 pollitos, 8 jaulas*), nuevamente se planteó una pregunta anticipatoria:

Ma: A ver díganme como adivinos, ¿Cuántos creen que pueda meter en cada jaula?
Enrique: Doce
Armando: Once
Arsenio: Nueve

Para este momento se notaron intentos de algunos niños por usar las tablas, pero no lo pudieron hacer con precisión, excepto los cuatro que ya las podían manejar.

Nuevamente, después de las anticipaciones, se les pidió que resolvieran los problemas. Como se verá en el desarrollo de los procedimientos, los niños tendieron a retomar las estimaciones hechas en el momento anterior, para verificar con distintos procedimientos.

Cuando se abordó el tercer problema *("Dos días después los pollitos volvieron a aumentar. Ahora son 84 pollitos y 9 jaulas)*, pocos alumnos participaron en el momento de la estimación. La mayoría se dedicó a resolver usando la tabla. Sin permitir que se terminara de plantear el problema, Armando intervino dando una primera estimación:

Armando: Quince
Rodrigo: Nueve y te sobran tres
Julio: ¡Ahh!, ya me fijé en la trampita que estás haciendo... en todos sale nueve
Ma: A ver Armando, si tienes quince en cada jaula, ¿Cuántos pollitos tienes en total?

Armando no registró procedimiento alguno en los tres problemas. Parecía tener dificultades para comprobar su estimación. Netzaí se acercó a ayudarle a contar de quince en quince. Entonces Armando dibujó las 9 jaulas y quince rayitas en cada una. Ante la insistencia de algunos de sus compañeros, que dijeron "*es nueve*", Armando dejó inconcluso el procedimiento y se fue a sentar.

- **Procedimientos usados por los niños**

Los procedimientos que aparecieron en el segundo momento de esta sesión, después de la estimación, se pueden clasificar como sigue:

a) Retoman uno de los cocientes hipotéticos y lo verifican

b) No retoman un cociente hipotético. Resuelven directamente

c) Procedimientos erróneos

d) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Veamos cómo se manifiestan dichos procedimientos:

a) Retoman uno de los cocientes hipotéticos y lo verifican

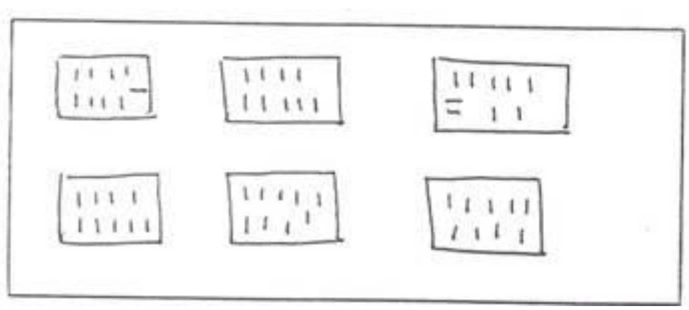
Este procedimiento se presentó en diversas modalidades, entre las que se encuentran las siguientes:

a1) Iteración gráfica del cociente estimado

Dado que hubo una estimación de cocientes hipotéticos al iniciar la clase, los siguientes ejemplos son iteraciones gráficas del cociente estimado, para verificar (con conteo o con adición).

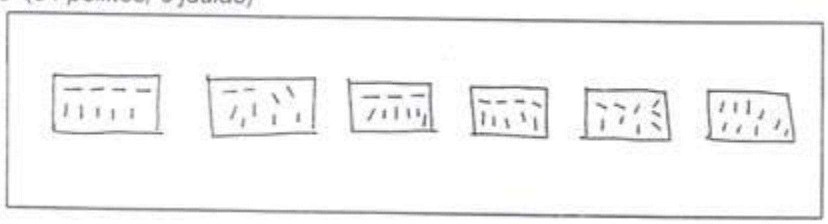
De 29 alumnos, 5 representaron gráficamente el cociente estimado para el problema 1; 6 alumnos para el problema 2, y 2 para el problema 3. Casi todos usaron la misma forma de representación, que parece estar influída por el contexto (jaulas).

Como ejemplos tenemos los siguientes:
Diana: problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*)



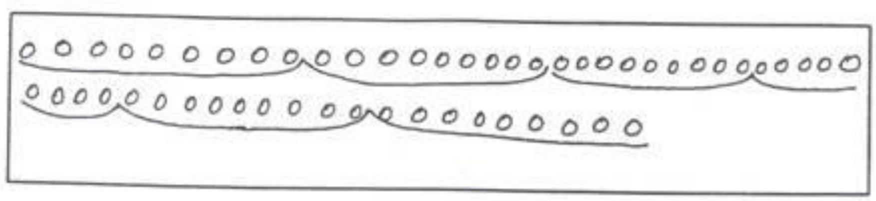
Supongo que Diana tomó el 9 como cociente estimado (tal vez por lo que escuchó de sus compañeros). Hizo el "rep*arto en cajas", y por* último contó uno a uno los "pollitos", para registrar el resultado que aparece a la derecha *(= 54).*

Alejandro (*54 pollitos, 6 jaulas*)



Esta representación resultó útil y eficaz para Alejandro; tal vez por eso mantuvo el procedimiento para los tres problemas.

Abraham (*54 pollitos, 6 jaulas*):



Posiblemente también retomó el cociente estimado 9; representó los 54 pollitos, y sobre ellos hizo grupos de 9 pollitos, obteniendo 6. Mantuvo el procedimiento para el problema 2.

En cuanto al problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*), la estimación que se retomó para propiciar la verificación, fue la de Enrique (12) que pasó al frente y dibujó las ocho jaulas, colocando doce palitos dentro de cada una:

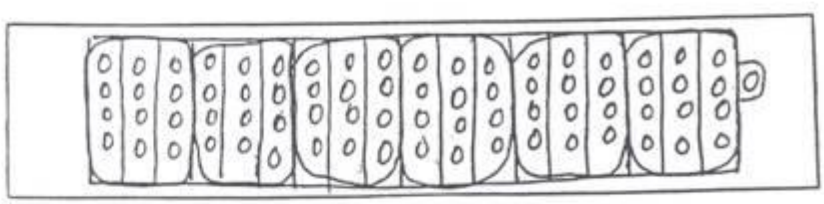
Al terminar, contó de una en una las rayitas dibujadas en las ocho jaulas y dijo:

Enrique: En total fueron noventa y seis
Ma: Entonces ¿Qué pasó?
Enrique: Fueron más pollitos (de los que indica el problema)
Ma: ¿Qué tendrías que hacer?
Enrique: Quitar pollitos... (se queda pensando)
Netzaí: Unos tres... a todas (las jaulas)
Ma: ¿Tienes nueve en cada jaula y ocho jaulas? (se le dio la tabla)
Enrique: Multiplicando nueve por ocho... nos da setenta y dos
Netzaí: Sobra uno
Sofía: Ese (el pollito que sobra) se corta en ocho partes y lo reparten en cada jaula.

Enrique se dio cuenta de que con su estimación de 12 sobrepasaba el dividendo; pero la sugerencia de Netzaí influyó para que encontrara el cociente correcto (9), al quitar tres a cada jaula, y estableciera la relación multiplicativa que permitió verificar si el resultado era correcto.

Por otra parte, el comentario de Sofía, aunque fue una "broma", implica una idea de la exhaustividad del reparto.

Seguramente la estimación de Enrique influyó para que algunos de sus compañeros hicieran lo mismo en su hoja, ya que dos de ellos registraron esa representación. Un caso interesante es el de René, quien para "*meter 73 pollitos en 8 jaulas*", registró el siguiente procedimiento:



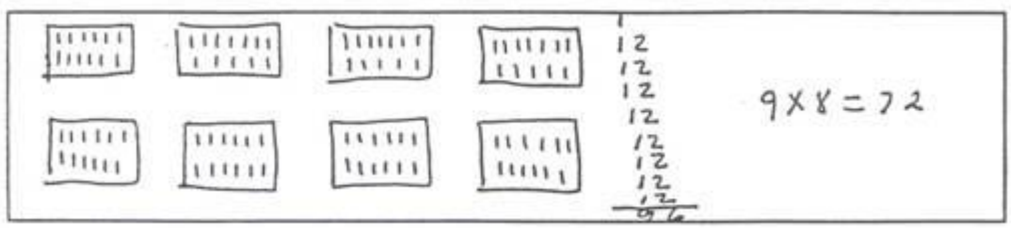
Aparentemente dibujó primero los 73 pollitos, de cuatro en cuatro y separó cada grupo de cuatro con líneas verticales. Después tal vez tomó el 12 como cociente tentativo propuesto por Enrique; hizo grupos de doce separándolos con líneas más gruesas. Esto provocó que se perdiera de vista el divisor, ya que obtuvo 6 grupos de 12 y 1 como residuo. Quizá vio que éste no podía ser el cociente que se buscaba y así lo dejó, sin intentar otro procedimiento.

De los 6 alumnos que resolvieron este problema con representación gráfica, 5 ya la habían usado para el problema 1. Cuatro de ellos, la usaron tomando el *9* como cociente hipotético (que también se expuso en la fase de estimación).

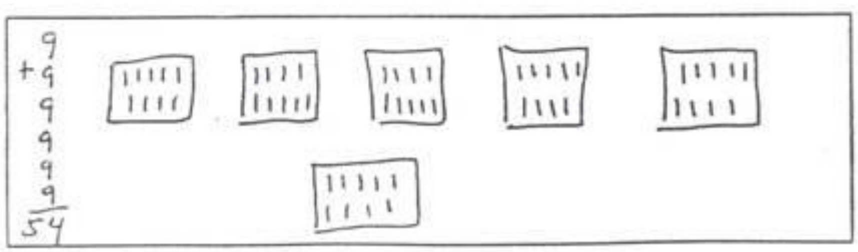
a2) Iteración gráfica del cociente estimado, con adición y/o multiplicación para verificar

Para el problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*) apareció un caso en el que se usó la representación gráfica con adición, y 9 casos en que se usó con multiplicación:

Jezabel hizo lo siguiente:



Para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*) se registraron 2 casos en los que se usó con adición, y 2 con multiplicación. Priscila usó representación gráfica, adición iterada y multiplicación:



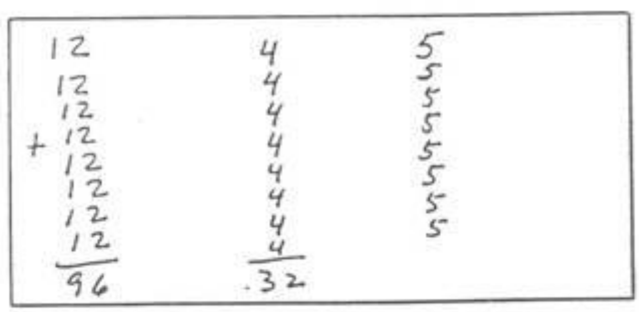
Retomó la estimación inicial de 12 para hacer la representación gráfica, misma que verificó con la adición de 12 + 12... (8 veces). Tal vez al darse cuenta de que sobrepasaba el resultado, y con ayuda de los comentarios de sus compañeros durante la confrontación, multiplicó *9 x 8*.

Para el problema 3 sólo aparecieron 2 casos de representación gráfica con multiplicación. Ninguno con adición.

Debido a que ya se contaba con resultados hipotéticos, es posible que la representación gráfica se usara como un procedimiento más para verificar el cociente encontrado en la primera parte de la clase, y a la vez se usó la adición o la multiplicación para *co*mprobar dicho resultado.

a3) Adición iterada del cociente estimado para verificar la estimación

Para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*), tres alumnos (de quienes antes usaron representación gráfica y multiplicación) tomaron directamente el 12 y lo sumaron ocho veces:



Lucina no sólo verificó con esa estimación, sino que hizo otras por su cuenta (como se ve en el ejemplo). Posiblemente no tenía una idea clara de cómo usar la tabla, pero sí controló el divisor 8 a partir de todas sus estimaciones, y se dió cuenta de que ninguna de ellas la llevaba al resultado correcto.

Como podemos ver, existe cierta dificultad para aproximarse: al ver que el 12 no puede ser el cociente, ella probó con 4 y con 5, que se alejan mucho del cociente buscado.

a4) Duplicación del cociente

Netzaí, para *meter 73 pollitos en ocho jaulas* (problema 2, situación 6), explicó lo que hizo, mostrando su hoja*:*

Netzaí: Hice ocho jaulas; en una jaula puse nueve y sumé... (mientras habla va escribiendo en el pizarrón):

$$\begin{array}{r} 18 \\ +18 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ma: ¿Qué son esos dieciocho? (señalando el primer 18)
Netzaí: Son dos jaulas
Ma: ¿Y estos dieciocho? (señalando el segundo 18)
Netzaí: Otras dos jaulas (continúa su explicación)... entonces aquí (en el 36) ya tengo cuatro jaulas... luego sumé...(escribe en el pizarrón)

$$\begin{array}{r} 36 \\ +36 \\ \hline 72 \end{array}$$

treinta y seis y treinta y seis da setenta y dos... ahí ya van ocho jaulas y me sobra un pollito

Según su explicación, Netzaí usó el procedimiento de **duplicación** (del cociente estimado) para sumar rápido, que en este caso funciona bien por las cantidades involucradas. Puede verse como una forma primitiva de multiplicación, en la que itera su estimación para aproximarse al 73.

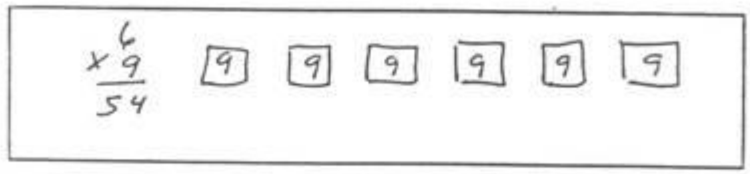
b) No retoman el cociente hipotético. Resuelven directamente

b1) Sólo búsqueda del multiplicando

Un total de 5 alumnos (de 29) usaron el procedimiento para el problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*); 6 para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*) y 4 para el problema 3 (*84 pollitos, 9 jaulas*):

$$\begin{array}{r} \mathbf{6} \\ \mathbf{X\ 9} \\ \hline \mathbf{54} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{9} \\ \mathbf{X\ 8} \\ \hline \mathbf{72} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{9} \\ \mathbf{X\ 9} \\ \hline \mathbf{81} \end{array}$$

Audiel, para el problema 1 (*54 entre 6*) agregó la siguiente representación (no se sabe si hizo otras multiplicaciones y sólo registró una):



Con ella explicitó la multiplicación implicada en el contexto, vista como "seis veces nueve".

b2) Búsqueda del cociente en la tabla de multiplicaciones

Se observó que para el segundo problema (*73 pollitos, 8 jaulas*), por lo menos cuatro alumnos más (de los que lo hicieron en el primer problema), usaron la estrategia de buscar el cociente directamente en la tabla:

Alba: Usé las tablas... (señalando con su lápiz su operación al tiempo que explica)... busqué el setenta y tres y no estaba, pero estaba el setenta y dos. Cuando ví el setenta y dos, multipliqué ocho por nueve
Ma: ¿Qué es el ocho?
Alba: Las jaulas
Ma: ¿Y qué es el nueve?
Alba: Los pollitos que están en las jaulas
Julio: Sí, es nueve y se queda afuera uno... nueve y uno nos lo comemos.

En el tercer problema (*84 pollitos, 9 jaulas*), durante la fase de estimación, en la que se dieron 15 y 9 como cocientes hipotéticos, varios alumnos no esperaron más y buscaron directamente el resultado en la tabla:

Ma: Si usamos la tabla desde el principio, ¿Se puede encontrar rápido el resultado?

(Esta es una variable que se introdujo para propiciar que los alumnos identificaran la tabla como un recurso más económico que los otros procedimientos, y eficaz para estos problemas).

Lucina: Sí... Primero buscar el número más cercano al ochenta y cuatro
Aos: Ochenta y uno
Ma: ¿Y luego?
Lucina: Buscar el número que está arriba
Ma: ¿Y ese número qué es?

Lucina: El número de pollitos (cociente 8) y el otro el número de jaulas (divisor 9)
Aos: Sobran tres

Lucina, sin usar una estimación previa, tomó directamente la tabla para encontrar el resultado, explicita por primera vez (ella) que el producto que se busca, debe ser el más cercano al dividendo.

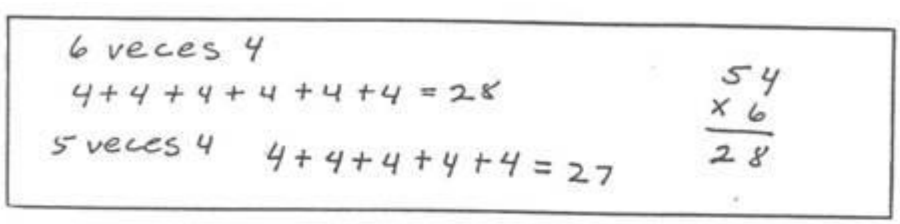
El hecho de que para el problema 3 aumentara la cantidad de alumnos que no registraron procedimientos en su hoja, no quiere decir que no hayan hecho nada; por el contrario, hubo más intentos por usar adecuadamente la tabla de multiplicaciones, y por otra parte, tal vez influyó el hecho de que Julio "descubriera" que el resultado a este problema volvía a ser 9.

El uso de la multiplicación se incrementó, ya sea acompañada de la representación gráfica o de la adición iterada. Sabemos que en algunos casos se usó para verificar estimaciones iniciales, y en otros para resolver directamente sin tomar en cuenta cocientes hipoté*ticos.*

c) Procedimientos erróneos

c1) Multiplicación directa

Pocos niños recurrieron a ella. Moira, para el Problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*) hizo lo siguiente:



Probablemente Moira percibió una relación multiplicativa en juego, pero aún no la comprendía bien. Planteó una multiplicación directa de dividendo por divisor, para multiplicar 54 x 6; hizo por separado la operación de 6 veces 4 y 5 veces 4 (en lugar de 6 veces 5). Esto indica que sabe que hay que operar con los números, pero desconoce el algoritmo de la multiplicación.

Otro caso que refleja la dificultad para distinguir entre dos usos de la multiplicación, es el de Emiliano.

Después de que se hicieron las estimaciones (del primer problema) y se dio tiempo para la resolución, en donde Nemian hizo la representación gráfica, se dio esta interacción:

> Ma: ¿Hay una forma más rápida de encontrar el resultado?
> Emiliano: Una multiplicación
> Ma: ¿Qué multiplicas?
> (Emiliano pasa al pizarrón y escribe):
>
> $$\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$$
>
> Ma: (a Emiliano) Si multiplicas cincuenta y cuatro por nueve, ¿Qué crees que te va dar? ¿Más, o menos que el cincuenta y cuatro?
> Emiliano: Más
> Ma: Y aquí tienes cincuenta y cuatro pollitos, ¿Qué vas a hacer con ellos?
> Emiliano: Los voy a meter en las jaulas... (Se queda viendo su operación, la borra y escribe)
>
> $$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 6 \\ \hline 54 \end{array}$$
>
> Luego mueve su cabeza de arriba a abajo, y parece contar con sus dedos; parece que hace cálculos en función de "6 veces 9".

Emiliano sabía que podía usar la multiplicación, pero al querer expresar lo que se hizo, tuvo dificultad para distinguir entre el uso **directo** de la multiplicación (54 X 6), y el inverso que implica un problema de división, en el que se debe buscar el número que multiplicado por 6, dé 54 (búsqueda del multiplicando).

d) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Cuatro alumnos (dos que ya lo habían hecho en la sesión anterior) representaron la división en su forma convencional para el primer problema; tres de ellos la usaron para el segundo problema, y dos de ellos mismos, para el tercer problema:

9	8	9
6 / 5 4	9 / 7 3	9 / 8 4
0	1	3

Estos alumnos son quienes sabían manejar la tabla de multiplicaciones. Encontraron el resultado en ella y representaron la operación con la galera. Con esto mostraron que ya identificaban a la operación implicada como una división, y que conocían una forma de representación de esta operación.

Comentarios

Nuevamente, como en la sesión cinco, la solicitud de una estimación previa y de su verificación, desencadenó una variedad de procedimientos que comprenden aquellos casos en los que los alumnos retoman un cociente hipotético para verificar, y otros en los que resuelven directamente.

Puede apreciarse que esta vez, el reparto uno a uno tendió a ser abandonado. Fueron más los niños que recurrían a operaciones escritas para verificar el cociente (adición, duplicación y multiplicación), y también fueron más quienes usaron la tabla para buscar directamente en ella, el número que multiplicado por el divisor, se acercara más al dividendo (procedimiento de búsqueda del multiplicando).

Continuaron apareciendo explicitaciones sobre la *cercanía* del producto buscado con respecto al dividendo, y no forzosamente de *igualdad.*

En esta sesión se manifestó una disminución en el uso de las representaciones gráficas como procedimiento único, incrementándose en cambio, los casos en que ésta se combina con la multiplicación (10 casos para el problema 1).

Asimismo aumentó el número de alumnos que empezaron a emplear la tabla de multiplicaciones para resolver y verificar, y se vieron intentos de algunos por usar una representación simbólica convencional de la división (la galera).

En general los alumnos manifestaron de varias maneras, tener presente el significado de los datos. A veces esto se evidenció en su respuesta a preguntas como:

"¿Qué es el nueve?": "Los pollitos que van en cada jaula"
"¿Qué es el seis?": "Las jaulas"
"¿Qué es el cincuenta y cuatro?": "Los pollitos que se tienen"... "que se reparten" (respuestas para el problema 1, 54 pollitos, 6 jaulas).

C. Sesión 7

En esta sesión se continuó con el propósito de favorecer el uso de la tabla de multiplicaciones para verificar cocientes estimados, ahora con una modalidad:

Se propusieron resultados entre los cuales debía elegirse el que se considerara correcto (para los dos primeros problemas). Se esperaba que los alumnos centraran su atención en los resultados y multiplicaran éstos por el divisor. Además, en el tercer problema se trabajó con cantidades que implican un residuo grande.

La situación se planteó así:

En un grupo de tercer año, los alumnos resolvieron este problema:

Se tienen 56 canicas para repartirse en 7 bolsitas, de tal manera que en cada bolsita quede igual número de canicas. ¿Cuántas canicas se deben poner en cada bolsita?. Los niños de ese grupo dieron los siguientes resultados:

7 6 9 8

Mientras estos números se iban escribiendo en el pizarrón, algunos alumnos fueron dando respuestas como *mal, mal, mal, bien.* Estas expresiones reflejan que algunos alumnos hicieron ciertos cálculos mentales, probablemente la multiplicación del divisor 7 por los cocientes hipotéticos. Al terminar de escribir los posibles resultados, se especificó: *"Busquen cuál es el resultado correcto... como quieran, si quieren pueden usar las tablas"*.

El hecho de ofrecer cocientes posibles (7, 6, 9 y 8), favoreció que los niños eligieran uno de ellos para verificar si era correcto o no. Hubo quienes no tomaron en cuenta esos cocientes posibles y se dieron a la tarea de resolver el problema, ya sea con cálculo mental o usando la tabla de multiplicar, afirmando que el resultado era *"ocho".*

Frente a ese primer resultado, se les preguntó:

> Ma: ¿Cómo lo encontraron?
> Nayeli: Yo saqué el ocho y el siete (explica en la tabla) ... buscas el cincuenta y seis y está en el siete y en el ocho (señala en la tabla de Pitágoras los dos casos en que aparece el cincuenta y seis):

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	***8***	*9*	*10*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	***56***	63	70
8	8	16	24	32	40	48	***56***	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

> Ma: ¿Y puede ser cualquiera? (refiriéndose a los dos 56 que aparecen en la tabla)
> Nayeli: (casi enseguida responde) No, no no, ya me di cuenta de que no, porque no son ocho bolsitas, sino en siete bolsitas ...

Esta respuesta de Nayeli da cuenta de que las cantidades que aparecen en la tabla, según su ubicación, tienen un significado específico: el primer renglón vertical de la tabla (del 1 al 10), representa al divisor de la operación, mientras que el cociente será el número que aparezca en el primer renglón horizontal.

Además de este procedimiento, con el cual la mayoría del grupo se empezó a familiarizar, siguieron apareciendo las representaciones gráficas, como veremos después, cuando se hable en general de los procedimientos surgidos en la sesión.

El segundo problema que se planteó fue

"Si tengo treinta y nueve canicas para guardarlas en cuatro bolsitas... de tal manera que en cada bolsita quede igual número de canicas ¿Cuántas hay en cada b*olsita?"*

Los cocientes propuestos para la operación (39 ÷ 4) fueron

10 8 7 9

> Ao: (a Jezabel, en su equipo) Busca el número más cercano (en la tabla)
> Jezabel: No, pero sobraría tres.

La mayoría del grupo encontró el resultado rápidamente en la tabla. Varios niños de los que antes usaron la representación gráfica con la multiplicación, abandonaron la primera y sólo consignaron la multiplicación. No se identificaron dificultades para el cálculo del residuo (ya que el 39 no aparece en la tabla), excepto la duda que expresó Jezabel, lo cual significa un mejor manejo de la tabla.

El problema 3 se planteó especificando antes : *"Todo el mundo con su tabla en la mano"* y no se ofrecieron cocientes posibles como en los casos anteriores:

"Tenemos cuarenta y siete chocolates y los vamos a meter en seis bolsas" ¿Cuántos chocolates ponemos en cada bolsa?". Acuérdense que en todas debe quedar igual cantidad de chocolates".

Los alumnos de inmediato empezaron a buscar el resultado (de *47 ÷ 6*) y surgieron las primeras respuestas:

> Laura: Siete y sobran cinco
> Sofía: Ocho y sobra uno
> Alba: Multipliqué ocho por seis (señala en la tabla el ocho del renglón horizontal, el seis de la renglón vertical, y el cuarenta y ocho en el sitio en que convergen).
> Ma: ¿Te sirve el cuarenta y ocho?
> Belém: Sí (pasa al frente) porque no está el cuarenta y siete...
> Ma: ¿Pero cuántos chocolates tenías?
> Belem: Cuarenta y siete
> Ma: Entonces qué pasa?

Ao: Le tenemos que aumentar uno
Ma: Pero no tengo chocolates...¿Qué hago?...

Tal como se contempló en el análisis previo de esta sesión, surgió la dificultad de elegir entre un cociente que dejara un sobrante grande (**7**), y un cociente que aunque rebasara el dividendo, no permitiera que sobraran chocolates (**8**).

A través de las preguntas anteriores, algunos alumnos se dieron cuenta de por qué no se podía tomar el 8 como resultado:

Alba: Multiplicar por siete y el número más cercano es cuarenta y dos...
Ma: ¿Entonces cuál es el resultado?
Alba: Siete y sobran cinco (varios alumnos responden al mismo tiempo)

Aquí volvió a darse el caso de la dificultad que implica el cálculo de un sobrante casi igual que el divisor. Por un lado el dividendo y tal vez el contexto en especial, invitó más a pensar en aumentar un chocolate, para que no sobrara ninguno, que dejar varios chocolates sin meter en las bolsas.

Por otra parte, el hecho de no haber presentado cocientes posibles (para que eligieran entre ellos), favoreció que se volvieran a confrontar y argumentar los resultados que obtenían al usar la tabla de multiplicaciones.

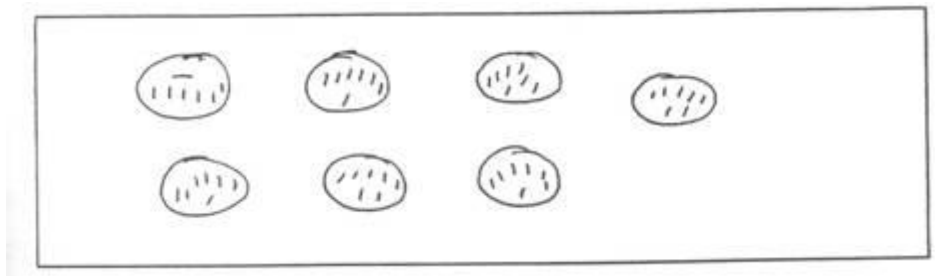
- **Procedimientos usados por los niños**

A partir de lo que sucedió en la clase y lo que apareció registrado en las hojas de los alumnos, se pueden destacar los siguientes procedimientos:

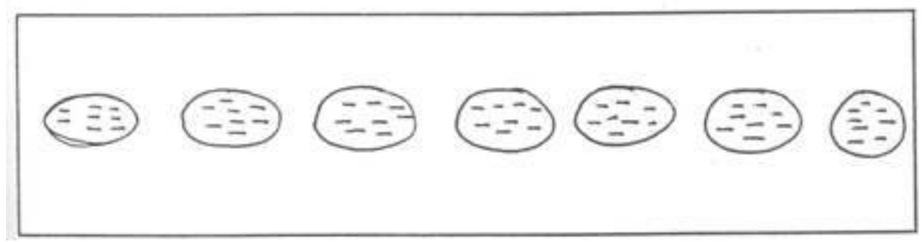
a) Iteración gráfica de un cociente

Tres alumnos (de 31) registraron este procedimiento como único. Hay un caso en el que se nota que se eligió un cociente distinto al que se propuso al inicio de la clase:

Alejandro, para el problema 1 (*56 canicas, 7 bolsitas*) eligió el 7 e hizo lo siguiente:

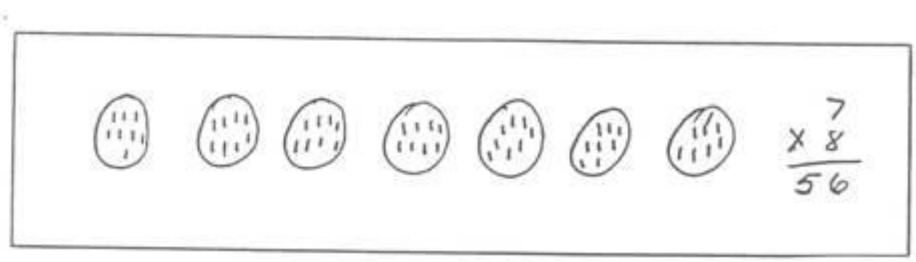


Ana Cecilia optó por el 8, probablemente por la intervención de sus compañeros:



b) Iteración gráfica de un cociente y multiplicación para verificar

Para el primer problema (*56 canicas, 7 bolsitas*), un total de 10/31 alumnos, parecían tener un mejor dominio de las tablas de multiplicar, ya que después de representar las 7 bolsitas con las 8 canicas en cada una, multiplicaron 7 por 8:



De estos 10 alumnos, 6 dejaron la representación gráfica y sólo usaron la multiplicación para los dos siguientes problemas.

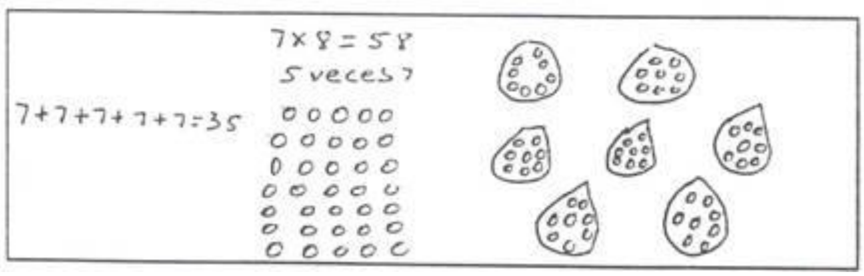
c) Multiplicación del cociente hipotético para verificar

Seis alumnos emplearon directamente la multiplicación para el primer problema:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 8 \\ \hline 56 \end{array}$$

Puede suponerse que están entre quienes al escuchar los resultados posibles iban diciendo *"mal, mal, mal, bien".* Estos alumnos mantuvieron su procedimiento para los dos problemas restantes.

El caso de Priscila llama la atención por las confusiones que evidencia en el problema 1 *(56 canicas, 7 bolsitas*):



Como puede verse, primero hizo la multiplicación de 7 X 8 (posiblemente tomó el 8 como cociente, de lo que sugirieron sus compañeros).

Tal vez al no conocer el resultado y no saber usar la tabla, optó por dibujar las bolsitas con 8, pero se equivocó en el conteo (58 en vez de 56). Esto la llevó a probar con cocientes más pequeños. Priscila mantuvo este intento para el segundo problema (*39 # 4),* aunque incluyó también la galera, seguramente porque vio que algunos de sus compañeros la usaron.

Para el tercer problema abandonó la representación gráfica, para usar la multiplicación de 7 por 6 y la representación con la galera.

d) Multiplicación directa:

Sólo Emiliano la usó en un primer intento, pero después corrigió

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 7 \end{array}$$

$$\overline{}$$
272

8 X 7 =

Como en otros casos ya citados, tal vez Emiliano sabía que de alguna manera se implica la multiplicación, pero no identificó el uso correcto (búsqueda del multiplicando), o bien interpretó el problema como de multiplicación. Esta vez no se detectó el caso específico para confrontarlo, pero las argumentaciones ofrecidas durante la clase, seguramente ayudaron a que Emiliano se diera cuenta del error y corrigiera, empleando la búsqueda del multiplicando.

e) Procedimientos erróneos

Moira volvió a emplear en esta sesión, el procedimiento de la sesión anterior:

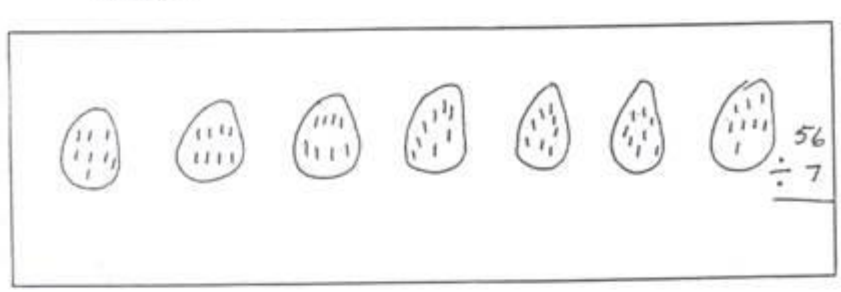
Parece haber interpretado el problema como si fuera de multiplicación, pero aplicó incorrectamente el algoritmo. Se nota que estaba en el proceso de manejar los "pasos", y deshizo el 56 para multiplicarlo como *cinco veces siete* y *seis veces siete*; se equivocó en las sumas parciales. Anotó 49 como resultado de la multiplicación directa.

f) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Además de los cuatro alumnos que en la situación 6 ya se referían a la división, en esta clase surgieron otros casos:

Netzaí dijo que Nayeli estaba bien (cuando explicó cómo usó la tabla), y que él **usó la división**:

Ma: A ver, explícalo (a Netzaí)
Netzaí: Primero dibujé las bolsitas y las canicas ... y luego rectifiqué usando las tablas ...



Netzaí seguramente había visto el signo de los dos puntitos con la rayita en medio, como el símbolo para representar la división, y lo usó a su manera. Esto sólo lo hizo para el primer problema.

Los cuatro alumnos que ya habían representado la división con la galera, lo volvieron a hacer para los tres problemas de la sesión:

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 7 & 56 \\ & 0 \end{array}$$

Ellos hicieron la operación mentalmente sin necesidad de ver la tabla de multiplicaciones, y representaron el resultado con la galera. Esto indica que, aunque llevaban cierta ventaja en conocimientos con respecto a la generalidad del grupo, la situación didáctica también les permitió evolucionar (también a ellos).

Enrique usó por primera vez esta representación para los problemas 2 y 3. Probablemente la vio en la sesión anterior y la retomó.

Comentarios

La situación de elegir el cociente correcto entre algunos posibles, llevó a la mayoría de los niños, efectivamente, a verificar esos cocientes. Quienes no lo hicieron así, buscaron el cociente directamente en la tabla.

En esta sesión 7 aumentó considerablemente el número de niños que recurrían a la multiplicación para probar un cociente hipotético, o para buscar el cociente en la tabla. Asimismo, siguió disminuyendo el número de niños que recurría a la iteración gráfica del divisor como procedimiento único; la mayoría de quienes lo usaron, lo hicieron combinándolo sobre todo con la multiplicación.

En cuanto al procedimiento que consiste en buscar el cociente en la tabla, en esta sesión, algunos niños lograron hacer explícitas condiciones importantes: para el reparto de *56 canicas entre 7 bolsitas*; observaban que en la tabla hay dos 56, pero que son distintos; uno es el que se busca; el que está en el renglón del 7, porque éste representa la cantidad de bolsitas y por lo tanto el 8 (hallado hacia arriba del 56) es el número que multiplicado por 7, iguala al dividendo.

La otra condición interesante que se manifestó es la del residuo: los niños mostraron una tendencia natural a agregar elementos al dividendo cuando el residuo es grande, para poder *repartir uno más*. Sin embargo, el contexto indicaba repartir una cantidad dada, y concluían que no puede rebasarse el dividendo.

Se identificó por lo menos un caso (el de Alejandro), en el que la verificación se hizo con dos de los cocientes propuestos, independientemente del que sugerían sus compañeros como cociente hipotético.

Como se puede observar, en esta sesión no apareció la adición iterada, salvo en los casos de Priscila y Moira, que no lograron llegar al resultado a través de ella. La división con la galera continuó apareciendo para representar el resultado que obtenían al multiplicar.

D. Sesión 8

En esta sesión se continuó propiciando el uso de la tabla de multiplicaciones, esta vez para resolver problemas de reparto exacto e inexacto.

"Vamos a pensar que se está organizando una fiesta, y que se van a repartir dulces a los niños que asistan, pero queremos ver cuántos dulces le vamos a dar a cada niño para que a todos les toque igual".

A continuación se proporcionó a cada alumno una ficha como la siguiente, con la consigna de *resolver los problemas de la ficha usando la tabla de Pitágoras.*

Total de dulces	**Número de niños**	**Dulces que le tocan a cada niño**	**Dulces que sobran**
48	6		

75	8		
44	9		
47	4		

Como se aprecia, el primer problema posibilita encontrar el resultado directamente en la tabla de multiplicaciones. En el segundo, el cociente se debe encontrar a través del número más cercano al dividendo 75 (que no está en la tabla) y a partir de él calcular el residuo.

El tercer problema representa una mayor dificultad, ya que implica elegir entre dos dividendos: uno (*45*) que rebasa el dividendo exacto del problema, y otro (*36*) que obliga a dejar un residuo grande (*8*), casi igual que el divisor (*9*).

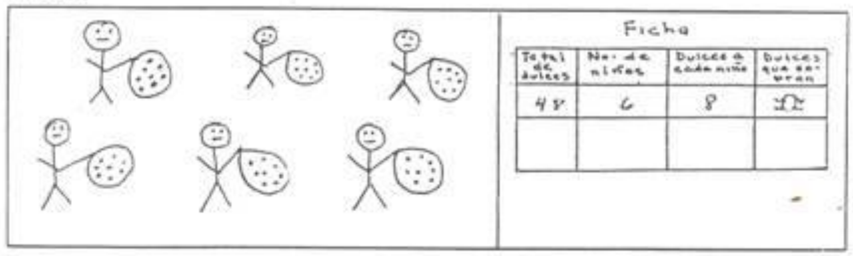
El problema 4 (*47 dulces, 4 niños*) implica un cociente mayor que 10, que tampoco se encuentra directamente en la tabla de multiplicaciones.

Uno de los propósitos de emplear estas variantes fue evitar una algoritmización prematura de la tabla[6], una vez que se habían familiarizado con su uso. Además, se pretendía que los alumnos enfrentaran una vez más, una división con residuo grande, en relación al divisor.

Para el primer problema (*48 dulces, 6 niños*) cuyo resultado es exacto, no hubo dificultades. La gran mayoría de los alumnos manejaba adecuadamente la tabla con la estrategia que se ha venido describiendo, aunque hubo quienes usaron representaciones gráficas:

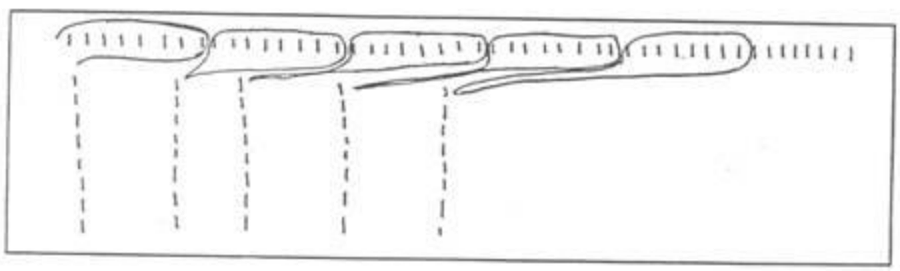
> Edgar: (durante la confrontación) "Lo hice contando... puse los niños y luego los dulces que a cada quien le tocaban..." (aunque en su hoja no aparece dibujo alguno; tal vez lo hizo en otra hoja, o como a veces sucedía, sobre la mesa).

Priscila dibujó:



Puede ser que haya ido poniendo puntitos, de uno en uno y contando al mismo tiempo, o bien que haya encontrado el resultado con la tabla de multiplicaciones, y simplemente después representó el resultado.

Nemian lo hizo de esta manera:



Registró primero los 48 dulces. Estimó el cociente, o bien lo encontró en la tabla, para hacer grupos de ocho sobre la colección total. Finalmente reacomodó esos grupos de ocho, en columnas; no registró la última.

Estos son los únicos casos de representaciones gráficas para el problema 1.

Para el segundo problema (*75 dulces, 8 niños*) tampoco se identificaron dificultades; la mayoría logró reconocer el 72 como número más próximo al 75 dentro de la tabla, y se calculó el residuo (3).

Cuando el residuo es pequeño como en el caso de 75 dulces entre 8 niños, el cálculo del sobrante fue sencillo, a través del conteo o de la complementación entre ambas cantidades (72 y 75).

Los problemas 3 y 4, en cambio, presentaron dificultades que dieron lugar a respuestas y discusiones interesantes.

a) Repartos con un residuo grande

Durante la resolución del problema 3 (*44 dulces, 9 niños*), en la mesa de René comentaron:

René: (con la tabla en sus manos, explica) Hay nueve niños y cuarenta y cuatro dulces, entonces el cuarenta y cuatro no está, tomé el cuarenta y cinco... (se queda pensando)
Ma: ¿Cuántos dulces tienes René?
René: Cuarenta y cuatro
Ma: ¿Y cuántos niños tienes?
René: Nueve
Ma: Entonces, si sólo tienes cuarenta y cuatro dulces ¿puedes tomar el cuarenta y cinco en la tabla?
René: No, porque me pasaría de dulces... (se queda trabajando solo, y en el momento de la confrontación explica ante el grupo)
René: ... Que hay nueve niños y hay cuarenta y cuatro dulces... (observa la tabla)... no hay ningún cuarenta y cuatro, se pasó (cuandove el 45), me paso un poquito, al cuarenta y cinco (en voz baja) ¿puedo tomar el cuarenta y cinco?... (él mismo responde)...no, porque me paso y tengo cuarenta y cuatro dulces...
Ma: ¿Entonces qué puedes hacer?
René: Si no puedo tomar el cuarenta y cinco, busco el más cercano... es el treinta y seis, y entonces voy a repartir treinta y seis
Ma: ¿Entre cuántos niños los vas a repartir?
René: Entre nueve, cuatro y me sobran ocho...

Para este problema, 8 de 29 alumnos registraron inicialmente 5 como "*dulces que le tocan a cada niño*" y 1 como *"dulces que sobran".* Este uno pudo verse como el dulce que les faltaba para que a todos les pudieran tocar cinco. Seguramente después de la confrontación, estos alumnos corrigieron su resultado, y escribieron *4* como cociente y *8* como residuo (este resultado finalmente lo registraron todos).

Como ya se vio en la sesión 6, un residuo cercano al divisor, causa dificultades. O bien se resistían a dejar un residuo de ese tamaño, (esto además se ve reforzado por el contexto, ya que cabe preguntarse ¿cómo dejar 8 dulces sin repartir sólo porque falta uno para que a todos les toque lo mismo?), o bien perdían de vista el contexto y resolvían el problema a nivel del modelo numérico, de encontrar el múltiplo más cercano.

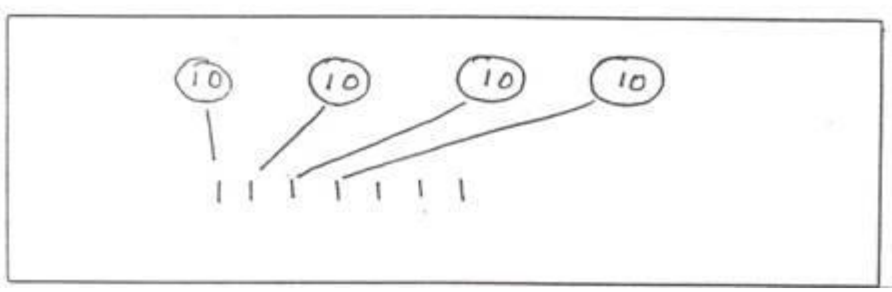
De cualquier forma, los cálculos y argumentos que los alumnos hicieron (aunque en algún momento se haya perdido de vista el dividendo), permitieron rectificar y ajustar sus acciones para encontrar, tanto el cociente como el residuo; aunque éste sea "grande" (casi igual que el divisor).

b) Repartos con un cociente mayor que 10

Para el problema 4 (47 ÷ 4), cuyas cantidades ya no permiten resolver la división directamente en la tabla, sucedió lo siguiente:

Sofía: Buscó el cuatro y luego el cuarenta y siete (mientras habla señala los números en la tabla)... pero no está y veo que es el cuarenta, y sería cuatro por diez...
Cecilia: (interviene después de Sofía) le tocan once a cada niño...
Nayeli: Está mal... porque hay que buscar el número más cercano a cuarenta y siete y es el cuarenta (en la tabla) y le tocan a diez y sobran siete...

Sabiendo que se habían repartido 10 dulces a cada niño, dibujó en el pizarrón cuatro círculos, y dentro de cada uno, el número 10. A continuación Sofía completó la explicación, agregando "los siete dulces sobrantes":



Sofía: Sí, sobran siete y se puede repartir uno más a cada niño... (termina diciendo)... Entonces como le doy uno más a cada niño, alcanzo a repartir otros cuatro y me sobran tres.
Ma: ¿Cuántos dulces doy a cada niño?
Aos: Once
Ma: Y si doy once a cada niño, cuántos dulces hemos repartido en total?
Aos: Cuarenta y cuatro

Como podemos ver, al emplear la tabla y ver que el dividendo no aparece en ella, algunos alumnos tomaron el cociente máximo que sí está escrito (10), porque ya sabían que *si el dividendo no aparece, se busca el número más cercano.*

Algunos como Nayeli, por seguir al pie de la letra el algoritmo de la tabla, no se dieron cuenta de que puede continuarse el reparto porque el residuo (7) todavía es mayor que el divisor (4). Otros en cambio, apoyados en el contexto, lograron repartir hasta donde se puede, combinando procedimientos.

En la discusión algunos niños cambiaron de opinión; aceptaron ambos resultados (*10 y sobran 7; 11 y sobran 3*) como válidos; otros siguieron opinando que el segundo resultado *estaba mal*.

A través de este ejemplo, los alumnos pudieron darse cuenta de que, si usaban la estrategia que hasta ese momento les había funcionado para manejar la tabla, "caían en un error", y que si volvían al contexto, encontraban la solución como un resultado más exacto que el que les daba la tabla. Para este problema, los alumnos registraban en el cuadro los siguientes resultados:

De 29 alumnos, 12 obtuvieron 10 como cociente y 7 como residuo. A pesar de la confrontación, no cambiaron su resultado; 4 escribieron en principio 10 como cociente y 7 como residuo, y lo cambiaron a 11 y 3 respectivamente. Una alumna registró un cociente 9 y residuo 11; 10 niños obtuvieron 11 y 3 como cociente y residuo.

Israel y Diana escribieron resultados erróneos, Israel registró un cociente 4 y residuo 7 (no se sabe lo que hizo para llegar a ellos). Diana escribió 80 como cociente y 55 como residuo; en su ficha de resultados se observan dos adiciones, una de 45 + 35 = 80 y otra de 44 + 11 = 55[7].

Lo interesante en este problema es que algunos alumnos, además de tener ya un mejor dominio de la tabla de multiplicaciones como recurso para resolver, empezaron a darse cuenta de que ésta no siempre les permite encontrar el resultado de inmediato. Por otra parte, la explicación que dio Sofía los obligó a reflexionar cómo podían completar la resolución, hasta lograr un residuo menor que el divisor.

Otros alumnos, por ahora, se aferraban a la regla subordinando el contexto. No obstante, de esta manera se propició también una "desmecanización" del procedimiento para usar la tabla de multiplicaciones.

Comentarios

En la sesión 8, última de esta fase, prácticamente todos los niños utilizaban ya la tabla de multiplicar para encontrar los cocientes. Además de las condiciones que ya se habían manifestado en la sesión 7, hay otras que se hicieron explícitas:

- El producto buscado no puede rebasar al dividendo. Debe ser igual o menor

- Los cocientes que se buscan no siempre se encuentran en la tabla

- Implícitamente los niños sabían que el residuo debe ser menor que el divisor

- Si el cociente que da la tabla deja un residuo mayor que el divisor, "se puede seguir repartiendo".

Se ha visto también que existe un cierto conflicto entre la situación que se plantea y el modelo matemático con el que se puede resolver: en un reparto equitativo de 44 dulces entre 9 niños, lo más sensato sería conseguir un dulce más para lograr repartirlos todos, o en última instancia, no respetar la equitatividad, y no dejar ¡8 dulces sin repartir!.

Probablemente deban buscarse contextos más adecuados (no es fácil), sin embargo, es necesario decir que los niños pudieron aceptar sin problemas, esta particularidad.

Empezó a difundirse, aunque poco, la representación simbólica de la división con la galera, debido a que dos alumnos, por lo menos, ya la conocían.

En cuanto a las dificultades, hay casos concretos, como el de Moira y por lo menos tres alumnos más (hasta donde pudo detectarse), en los que hasta esta sesión no habían logrado comprender la relación multiplicativa en los problemas de división, y tendían a usar la multiplicación directa de dividendo por divisor.

La presencia de residuos grandes provocó conflictos para encontrar el cociente: para algunos alumnos resultó más fácil aumentar en 1 el dividendo, que dejar un residuo casi igual que el divisor.

Puede decirse que la situación de solicitar una estimación del cociente y después su verificación, efectivamente ayudó a los niños a replantear el problema (se trata ahora de ver si *juntando lo que se repartió*, se obtiene el dividendo), y de esta manera, a destacar la relación multiplicativa implicada en un reparto.

---

[1] Los niños hicieron caso omiso de estas tablas. Usaron siempre la tabla de Pitágoras

[2] Fue una sugerencia para que los niños, con ayuda de su maestra, diseñaran una tabla de multiplicaciones a partir de problemas que involucraban la relación entre "chocolates y cajas". En el primer renglón horizontal se registraría el número de cajas (1 a 10); la primera columna izquierda representaba el número de "chocolates por caja". Los niños debían calcular y escribir el número total de chocolates en el interior de la tabla.

[3] La información que tenía Arsenio, externa a la escuela, fue útil para el resto del grupo porque quienes estaban cerca de él, compartían sus experiencias y en la confrontación, sus aportaciones se socializaban en el grupo.

[4] Lo hicieron no sólo por influencia de la situación, sino porque tenían conocimientos que fueron aprovechados didácticamente en el momento de socializar esas experiencias, lo que permitió a los demás enriquecer sus conocimientos.

[5] En la sesión 5 los niños verificaron sus estimaciones, pero no en la interacción verbal que se dio al principio.

[6] Parece que algunos alumnos aprenden a usarla al ver cómo lo hacen sus compañeros, pero sin comprender el porqué de lo que se hace con ella.

[7] Esto demuestra que Diana tenía aún dificultades para interpretar la relación de reparto involucrada en los problemas. Como generalmente sucede en la escuela, no todos los niños avanzan al mismo ritmo. Diana fue una de las alumnas que más dificultades enfrentó a lo largo de las situaciones. Sin embargo se observó que el trabajar en equipo fue útil para ella, al escuchar a sus compañeros y ver lo que hacían; a veces ellos le explicaban cómo resolver los problemas.

CAPÍTULO 5

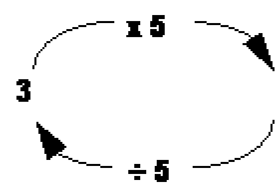
DEL REPARTO AL USO DE LA MULTIPLICACIÓN

Un paso fundamental en el proceso para construir la noción de división, es concebir a la multiplicación como operación inversa de la división; en este caso, como operación inversa del reparto.

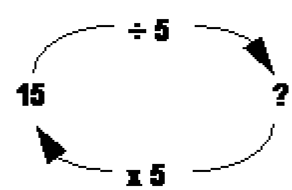
Esto sucede cuando los niños, en vez de repartir directamente, por ejemplo,*15 dulces entre 5 niños* para encontrar el cociente buscan el número (de dulces por niño) que multiplicado por 5 (niños), da 15 (dulces en total).

Veamos las siguientes representaciones:

División como operación inversa de la multiplicación



Multiplicación como operación inversa de la división



Lo anterior implica pensar en la acción inversa al reparto, en la acción de "juntar lo repartido"; implica partir del cociente hipotético y no del dividendo:

cociente hipotético X 5 niños = 15 dulces

Situados en la acción inversa, los niños se enfrentan entonces a una multiplicación en la que desconocen uno de los factores. Esta es finalmente, la definición formal de la división. En este trabajo me referiré a esta acción como **búsqueda del multiplicando,** cuando los alumnos recurren a ella como procedimiento para abordar los problemas.

En el apartado anterior hemos visto que los niños empezaron a utilizar esta relación inversa al reparto, en el momento de la verificación, obtienen un cociente y para saber si es correcto, reconstruyen el dividendo**,** ya sea contando todos los elementos, o sumando.

Hasta ahora, en este proceso de verificación, prácticamente no habían recurrido a la multiplicación. Esto es lo que se intentó propiciar en esta fase, a partir de la estimación y verificación de cocientes.

Así, la multiplicación apareció en un primer momento como recurso de verificación (teniendo un cociente, hay que verificar). Se esperaba que los alumnos la empezaran a usar como recurso de solución al preguntarse, de entrada, *por el número que multiplicado por el divisor, se acerque lo más posible al dividendo*.

Como se verá a lo largo de este apartado, la mayoría de los niños empezó a usar con relativa facilidad *la búsqueda del multiplicando* para verificar, y después para encontrar los resultados de los repartos. Un proceso más largo implicaría que pudieran distinguir esta operación (búsqueda del multiplicando) de la multiplicación directa entre los datos de un problema.

Para ellos, $5 \times 3 = \square$ y $\square \times 3 = 15$ son "multiplicaciones". Esta confusión reapareció una y otra vez, pero poco a poco, sobre todo en la tercera fase, empezaron a identificar a la segunda operación como una división.

Las situaciones 5 a 8 corresponden a una segunda fase de la secuencia de situaciones didácticas, cuyo propósito general fue propiciar que los niños identificaran el resultado de un problema de reparto (el cociente), como el número que multiplicado por el divisor se acerque lo más posible al dividendo.

En este apartado se analizan una a una, las cuatro sesiones que integran esta segunda fase. Empezaré por caracterizarlas (ver cuadro 2, p. 88).

1. CONDICIONES DIDÁCTICAS

a) Con respecto a los problemas

Se continuó trabajando con problemas de reparto, pero también se incluyeron en su momento, problemas de adición, sustracción y multiplicación, con la finalidad de que los niños identificaran la operación correspondiente.

- *Contexto y estructura*

Algunas de las magnitudes que se trabajaron fueron *animales y jaulas*; *canicas y bolsas*; *revistas y puestos*, etcétera. En ocasiones los contextos no fueron los más adecuados, porque desde la lógica de algunos niños, no resulta "congruente" que queden, por ejemplo "animales fuera de las jaulas" (cuando se trata de repartos inexactos).

Dentro de la estructura de los problemas, la idea de repartir no siempre se aclaró literalmente en el texto. Se usaron palabras como *meter, guardar, empacar.*

Lo que sí se incluyó desde el principio, fueron expresiones como *"que a todos les toque lo mismo*" (dependiendo del contexto), con la intención de hacer explícita la equitatividad.

La idea de "repartir hasta donde se pueda" a veces se dejó implícita en aras de aligerar las consignas.

- *Tamaño de los números*

Se procuró emplear cantidades que pudieran encontrarse directamente en la tabla de multiplicaciones (63 y 7; 54 y 6, entre otras), o dividendos que no aparecen en ella (47, 39) y que por lo tanto requerían de la búsqueda del número más próximo y que sí está en la tabla.

En la sesión 8, por ejemplo, con las cantidades usadas para el último problema (*47 entre 4*) se propició la "desalgoritmización" del recurso de la tabla de multiplicaciones y al mismo tiempo el uso de otros procedimientos como aquellos que se apoyan en la representación gráfica.

- *Existencia del residuo*

Se continuó trabajando con repartos exactos e inexactos. En esta ocasión los alumnos se enfrentaron a la tarea de hallar el residuo usando la tabla de multiplicaciones. Como se observará, el tamaño del residuo (en relación al divisor) jugó ahora, con cantidades mayores, un papel más importante.

b) Con respecto a la dinámica de la clase

- *La estimación del cociente*

La condición didáctica más importante en esta parte del estudio fue la estimación previa de cocientes. Para propiciarla, se empleó de manera constante la pregunta anticipatoria *"¿Como cuántos... creen que le toque a cada uno?",* pidiendo enseguida que se verificara una o varias de las estimaciones con sus procedimientos, pero con la intención de que los niños empezaran a usar la multiplicación para verificar. Además de la estimación del cociente, se consideraron las siguientes condiciones:

- *Uso de material*

En esta fase se usaron objetos en la sesión 5 (un cartón de huevo y frijoles por equipo), con la intención de que los alumnos los emplearan para verificar los resultados que según nuestra expectativa, se encontrarían con otros procedimientos. No obstante, hubo varios alumnos que usaron el material para resolver los problemas de esa sesión, con reparto uno a uno, o con estimación de cociente.

Especificaciones para resolver

En esta fase, se insistió en pedir que buscaran una manera "más rápida" de resolver, para observar si daban otro uso a los procedimientos iniciales, si los abandonaban, si recurrían a la multiplicación.

Desde la sesión 5 se pidió explícitamente que resolvieran los problemas usando la tabla. En este sentido, la situación se "cerró", es decir, se procuró que todos los alumnos implementaran un procedimiento de solución determinado.

- *Organización del grupo*

En la sesión 5 (animales a sus jaulas), los niños trabajaron en equipos, con el propósito de que juntos resolvieran los problemas, decidieran qué hacer con el material y con las tablas de multiplicar, etcétera.

Las tres sesiones posteriores (6 a 8) se iniciaron con trabajo individual por parte de los niños. Ello no significa que dejaran de interactuar con sus compañeros. De hecho, aunque se les pidiera que resolvieran solos, de manera natural comentaban, preguntaban, hacían sugerencias a sus compañeros de equipo, e incluso en ocasiones les decían “estás mal”, lo que daba lugar a la revisión de sus procedimientos.

CUADRO 2

SITUACIÓN	**PROPÓSITOS**	**PROBLEMAS**	**OTRAS CONDICIONES DIDÁCTICAS**		**DINÁMICA**
5. Animales a sus jaulas.	- Estimar cocientes. - Propiciar el uso de la tabla de multiplicar como un recurso para el cálculo o verificación del cociente.	Estamos en un rancho cuidando animales. Cuando terminen de comer, los debemos meter a sus	-Estimación previa y verificación. - Material para verificar: cartón para huevo y frijoles	Digan qué hacemos para saber el resultado. (Hay tablas de multiplicar en grande).	Trabajo en equipos: • Estimación para cada reparto. • Resolución libre. • Verificación con material.

		jaulas o corrales: 1) 63 conejos en 7 jaulas. 1) 47 cerdos en 9 corrales. 1) 70 borregos en 8 corrales. ¿Cuántos... en cada...?	(después de resolver). - Reparto exacto (problema 1). - Reparto inexacto. (Problemas 2 y 3)		• Confrontación de cada problema. Trabajo individual: • Resolución de fichas.
6. Animales a sus jaulas	Resolver problemas de reparto con apoyo de la tabla de multiplicar y/o la calculadora.	Estamos en un rancho cuidando animales. Cuando terminen de comer, los debemos meter a sus jaulas : 1) 54 pollitos en 6 jaulas. 1) 73 pollitos en 8 corrales. 1) 84 pollitos en 9 corrales. ¿Cuántos pollitos en cada jaula?	-Estimación y verificación - Cada niño tiene una tabla de multiplicar. - Reparto exacto (problema 1). - Reparto inexacto (Problemas 2 y 3).	- Resuelvan como quieran. - Busquen una forma más rápida para resolver.	Trabajo individual: • Estimación para cada reparto. • Resolución libre. • Confrontación de cada problema.
7A*. Busca el resultado	- Identificar entre varios resultados, el cociente que corresponde al problema planteado. - Propiciar el uso de la tabla	Escoger el resultado correcto: 1) Se tienen 56 canicas para repartirlas en 7 bolsitas. ¿Cuántas	- Cocientes opcionales - Verificación del cociente obtenido	Elijan el resultado correcto. Si quieren, usen su tabla (problemas 1 y 2).	Trabajo individual: • Planteamiento de cada problema. • Resolución de cada problema.

	para resolver problemas de reparto	canicas en cada bolsa? 7, 6, 9 y 8. 2) Mismo contexto: 39 canicas en 4 bolsas: 10, 8, 7, 9			• Confrontación de cada problema.
7B.		47 chocolates en 7 bolsas. ¿Cuántos chocolates en cada bolsa?	- Reparto inexacto, accesible al uso de la tabla.	Busquen el resultado (problema 3).	
8. La fiesta y los dulces	Propiciar el uso de otros procedimientos, al operar con cantidades que implican un cociente mayor que 10	Resolver ficha 7: Total No. Dulces Dulces de de para quedulces niños cada niño sobran 1) 48 6 2) 75 8 3) 44 9 4) 77 4	- Un reparto exacto, se encuentra en la tabla (problema 1). - Reparto que implica residuo chico (problema 2). - Reparto que implica residuo grande (problema 3). - Reparto que no se puede encontrar en la tabla: implica cociente mayor que 10 (problema 4).	Usen sólo la tabla de multiplicar.	Trabajo individual: • Resolución de ficha 7. • Confrontación.

* Esta clase tuvo 2 momentos.

2. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

A continuación describiré de manera específica cada una de las situaciones correspondientes a la segunda fase.

A. SESIÓN 5

El propósito en esta sesión, como se establece en el cuadro 2, fue propiciar la estimación de cocientes y el uso de la tabla de multiplicaciones como un recurso para el cálculo o verificación de resultados.

La situación se planteó así:

"Estamos en un rancho, cuidando a los animales para que coman, y después los tenemos que meter en sus jaulas..."

Los problemas se propusieron de manera verbal y fueron:

1."Si tenemos sesenta y tres conejos y siete jaulas, tenemos que meterlos en las jaulas, cuidando que en cada jaula quede igual número de conejos"... ¿Cuántos conejos metemos en cada jaula?"

2. "Ahora debemos meter a cuarenta y siete cerdos en nueve corrales. Hay que saber cuántos cerdos quedan en cada corral. Encuentren el resultado lo más rápido que puedan".

3. "Tenemos setenta borregos y los vamos a repartir en ocho corrales. ¿Cuántos borregos se tienen que meter en cada corral?"

Para cada problema se planteó la pregunta *"¿Como cuántos... creen que...?"* y enseguida se pidió que dijeran cómo saber cuál de esos resultados podía ser correcto.

Con la finalidad de propiciar el uso de la multiplicación, se elaboró una tabla de Pitágoras (en grande) y las tablas de multiplicar en la forma tradicional (del 1 al 9)[1]. Al respecto se observó que la mayoría del grupo aún no se había familiarizado con el uso de las tablas de multiplicar.

Por ese motivo, al término de esta sesión se suspendió la experimentación durante 3 semanas, pidiéndole a la profesora titular del grupo que reforzara el trabajo con multiplicación, a partir de una sugerencia que le fue proporcionada[2]. Esto constituyó uno de los ajustes que sobre la marcha se hicieron a la secuencia de situaciones didácticas, con la finalidad de propiciar la evolución del aprendizaje en los alumnos.

En la sesión 5 surgió una diversidad de procedimientos, entre los cuales permanecieron algunos de los que ya habían empleado los alumnos en sesiones anteriores, mientras que otros surgieron como "nuevos".

- **Procedimientos usados por los niños**

a) La búsqueda del multiplicando

Al plantear el primer problema, se hizo la pregunta anticipatoria: "¿Como cuántos conejos creen que se tienen que meter en cada jaula?". Las respuestas fueron:

> Edgar: ¡Ocho!
> Laura: ¡Como nueve!
> Christian: ¡Como once!
> Armando: ¡Diez!
> Ma: Si metemos ocho conejos en cada una de las siete jaulas, ¿cuántos conejos logramos meter en total?

Con esta pregunta se retomó una de las estimaciones dadas por los alumnos *(ocho)***,** intentando que buscaran alguna manera de comprobar si la estimación era correcta:

> Ma: ¿Cómo hacemos para saber? (cuántos conejos habrá en total, si se meten 8 en cada jaula)
> Rodrigo: ¡Una multiplicación!
> Ma: ¿Qué multiplicas?

Rodrigo: Siete por nueve...

Esta respuesta indica que tal vez Rodrigo se dio cuenta de que *ocho* no podía ser el resultado. Posiblemente desde el principio encontró que el correcto era 9, a través de la multiplicación de siete por nueve.

De hecho se ignoró la pregunta y de inmediato se dio una respuesta que refleja el uso de la multiplicación para resolver *(siete por nueve).*

Inmediatamente a las respuestas de Rodrigo, surgió otra por demás interesante:

Arsenio: Una división
Ma: A ver, qué haces al dividir?
Arsenio: Viendo el siete, porque ves el siete y luego el resultado y te vas para arriba

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	**9**	*10*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	***63***	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	21	27	36	45	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Arsenio iba señalando con su dedo hacia la tabla de multiplicaciones. Buscó el 7 en el primer renglón vertical; luego buscó el dividendo (63) en sentido horizontal (en el renglón del 7) y subió su dedo sobre ese renglón para hacer corresponder el 7 y el 63, con el 9 (cociente).

La respuesta de Arsenio demuestra que, de alguna manera sabía que la operación en juego es una división; pudo, desde esta primera ocasión, usar la tabla para encontrar directamente el cociente, es decir, para dividir. Buscó el número que multiplicado por 7 da 63. Esto no significa, sin embargo, que la situación haya propiciado tantas cosas al mismo tiempo, y en una sola sesión. Arsenio había mostrado con anterioridad, que identificaba la relación de la división con la adición y la multiplicación.

A Arsenio, la tabla no sólo le permitió verificar un cociente estimado, sino buscar directamente ese cociente (lo que en efecto se esperaba propiciar en esta sesión) sin estimación previa, localizando el número que multiplicado por el divisor es igual o próximo al dividendo.

En su hoja, Arsenio registró la representación convencional de la división para los tres problemas que se trabajaron en la clase:

```
        9            5            8
     ______      _______      ______
 7 /  6  3    9 / 4  5     8 / 6  4
        0            2           6
```

Para el segundo (*47 ÷ 9*) y tercer problema (*70 ÷ 8*), el procedimiento de Arsenio[3] no cambió. Registró múltiplos encontrados en la tabla, en vez de los dividendos originales, calculó y registró el sobrante. Después simplemente representó de manera convencional las acciones que realizó en la tabla. Dos compañeros del equipo de Arsenio copiaron las mismas representaciones.

Sofía es otra alumna que también empleó la representación convencional de la división con la galera, sólo que ella sí registró los dividendos originales:

```
        9            5            8
     _______      _______      ______
 7 /  6  3    9 / 4  7     8 / 7  0
        0            2            6
```

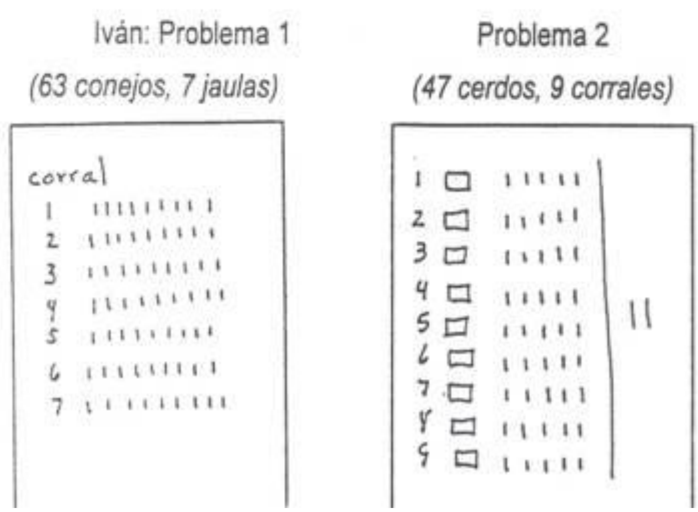
Al igual que Arsenio, sabía que en problemas de este tipo hay que buscar el número que multiplicado por el divisor, dé el dividendo o se acerque a él.

En estos ejemplos se observa cómo los conocimientos previos de algunos alumnos influyeron para que ciertos procedimientos desconocidos para la mayoría, se empezaran a difundir en el grupo. Estos alumnos ya identificaban la división como una operación que resuelve cierto tipo de problemas, además de conocer una forma de representarla. La tabla de multiplicaciones es un recurso que les permitió mostrar cómo se encuentran los resultados.

b) Otros intentos de buscar el cociente en la tabla de multiplicaciones

A lo largo de la sesión aparecieron otros intentos por usar la búsqueda del multiplicando, aunque por ahora no lograron llegar resultado. Las dificultades que enfrentaron son interesantes.

Cuando se planteó el segundo problema *(47 cerdos entre 9 corrales*) y la pregunta anticipatoria *¿Como cuántos cerdos creen que deban meterse en cada corral?,* los alumnos, haciendo caso omiso de la pregunta, se dedicaron a resolver el problema, empleando en general el mismo procedimiento que usaron para el anterior (quienes habían usado representaciones gráficas, lo volvieron a hacer así). Se dio la consigna de "resolverlo más rápido", con la intención de propiciar el uso de la tabla de multiplicaciones (cada alumno tenía una sobre su mesa).



Iván: (intentó primero usar la tabla de multiplicaciones y explicó): las tablas no me dan ningún resultado... (muestra la hilera del 9)... no hay cuarenta y siete, entonces pensé en cinco... pensé que cuarenta y cinco iba a quedar en la del cuatro

Iván tenía la idea, aunque no muy precisa, de que si el número exacto no aparece en la tabla, debía buscar el que más se aproxime, pero perdió de vista el divisor y trató de buscar el 45 en el renglón del 4 vertical. Al no encontrarlo, optó por el procedimiento que ya conocía (representación gráfica) y le había funcionado para hallar el cociente.

Durante la confrontación, teniendo varios procedimientos expuestos, así como las tablas de multiplicar, se les preguntó a los niños si no había una manera más rápida para encontrar el resultado, y surgió la siguiente explicación:

Laura: Voy buscando el cuarenta y siete... (utiliza la tabla de Pitágoras pegada en el pizarrón).. pero no lo encuentro, y entonces me paso al cuarenta y cinco y luego me salieron cinco en cada jaula y me sobraron dos

Laura no perdió de vista ninguno de los datos del contexto (dividendo 47 y divisor 9). Como el dividendo no aparece en la tabla, buscó el número que más se acercara a él (sin rebasarlo), para calcular el sobrante (2) a partir de ese número.

Este primer razonamiento despertó cierta polémica en el grupo:

> Nayeli: Pero es mejor que me pase al cincuenta y cuatro, porque así le sobrarían más...
> Arsenio: No, no le puedes decir cincuenta y cuatro, porque sólo tienes cuarenta y siete cerdos...
> Nayeli: No, no, entonces le van a faltar...

Mientras para Nayeli no importaba (aparentemente) que sobrara "más", o "menos", y perdió de vista que el dividendo representa una cantidad "límite", Arsenio tenía presente que ese dividendo no debe rebasarse; pero tampoco es forzoso que se agote.

La explicación de Arsenio provocó que Nayeli regresara al contexto y se diera cuenta de que sólo había *47 cerdos*, por lo tanto no podía aumentar el dividendo.

En otro equipo, para el problema 3 (*70 borregos, 8 corrales*) los niños trabajaron con cocientes estimados:

Ana: Diez
Karla: Cinco
Ana: Si fueran diez, nos sobrarían diez borregos (es evidente la multiplicación mental de 10 X 8 = 80)...
Karla contaba los frijoles. Ana y Abraham empezaron a poner frijoles en ocho hoyos del cartón, y a contar. Abraham tomó las tablas (como que se le antojaba utilizarlas, dado lo pesado del conteo) pero las dejó. Pusieron cuatro frijoles en cada hoyo, Abraham pidió la tabla.
Ana: Voy a poner diez en cada jaula... pero sobra una...

Este fue el único caso de la sesión, que mostró el uso de la multiplicación para verificar estimaciones. Es interesante ver cómo interactúan los alumnos empleando distintos procedimientos. Ana hizo una primera estimación y calculó el resultado que obtendría con ella, al multiplicar 10 por 8. Mientras tanto existen otras opciones (los frijoles con el cartón y la tabla), una de las cuales parecía resultar muy laboriosa (contar frijoles) y había inseguridad para usar la otra (la tabla).

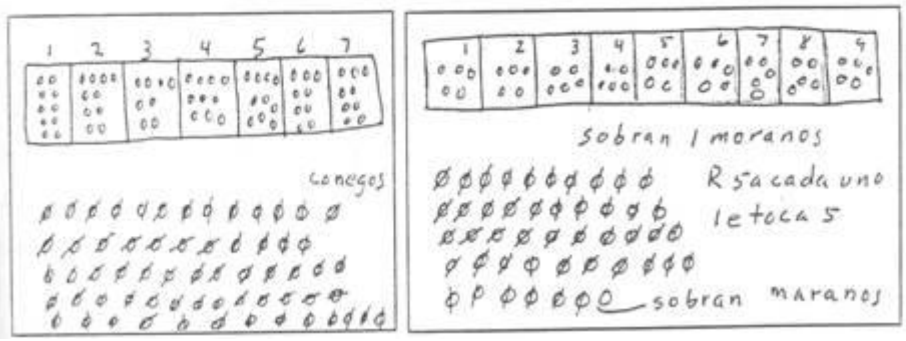
Antes de que decidieran qué hacer para resolver el problema, se dio la confrontación de procedimientos.

c) Reparto uno a uno gráfico y con material

Aunque para el primer problema se encontró un resultado usando la tabla de multiplicar, la mayoría de los alumnos continuó empleando los procedimientos gráficos. Otros, como acabamos de ver, intentaron usar los objetos que tenían a su alcance.

De 34 alumnos, 8 usaron el arreglo rectangular (y resolvieron los tres problemas); 13 usaron reparto en cajas (sólo 3 de ellos resolvieron los tres problemas). Los demás resolvieron los dos primeros problemas. Como ejemplos de estos casos tenemos los siguientes:

Moira: Problema 1 (*63 conejos, 7 jaulas*) Problema 2 (*47 cerdos, 9 corrales*)

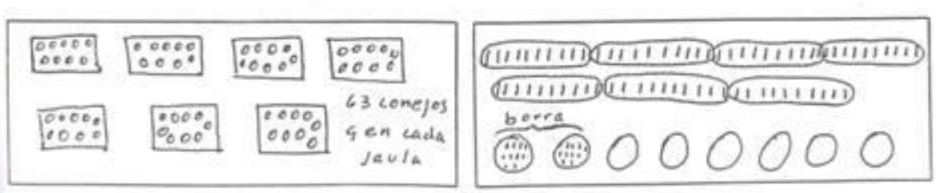


Primero dibujó el número de jaulas. Después el total de animales (abajo de los corrales) y aparentemente repartió uno a uno los animales en las jaulas, tachando cada animalito que repartía de la colección total, hasta agotarlos.

En este problema, parece que Moira perdió la cuenta, ya que a pesar de que la colección total tiene los *63 conejos*, el total de animales repartidos en las jaulas suma 66, obteniendo *4 corrales* con *10 conejos cada uno*, *uno con 8 conejos y los dos últimos con 9 conejos*. Sin embargo anotó como resultado 9, tal vez en el momento de la confrontación.

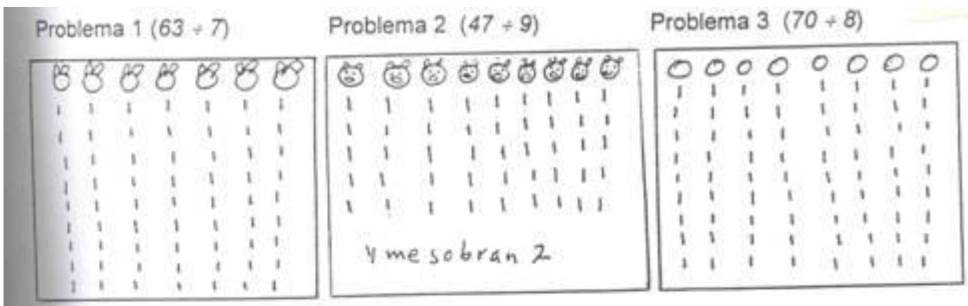
En el problema 2 (*47 cerdos, nueve corrales*) parece que también perdió la cuenta al tachar. En total acomodó 45 en los corrales y en la colección tachó 46; le sobró 1.

René: Problema 3 (*63 conejos, 7 jaulas*) Problema 1 (*70 borregos, 8 corrales*)



Para el primer problema no puede asegurarse si hizo reparto uno a uno, o bien estimó una cantidad como resultado y después lo representó gráficamente, con ajustes posteriores.

Para el problema 3 sí es claro que René estimó 10 como coci*ente* (retomó una de las estimaciones hechas al principio); primero dibujó los 70 borregos y sobre esa representación formó 7 grupos de 10 y obtuvo 7 corrales. Tal vez se dio cuenta de que ese no era el resultado; dibujó los 8 corrales, pero metió nuevamente 10 borregos en los dos primeros corrales; borró, dejando los corrales vacíos. Posiblemente estaba decidiendo si debía o no disminuir su estimación. René no resolvió el problema 2.



En el primer caso obtuvo el resultado sin dificultad. En el segundo repartió 45 y advirtió que 2 es el residuo.

Julio usó el arreglo rectangular para resolver los tres problemas:

En el primer caso obtuvo el resultado sin dificultad. En el segundo repartió 45 y advirtió que 2 es el residuo.

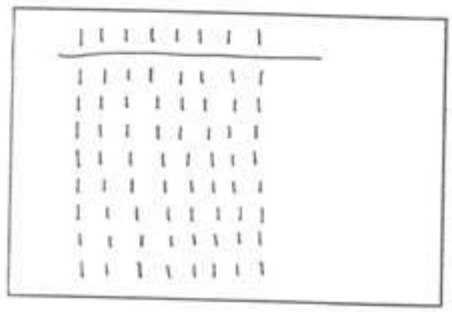
En el tercer problema (70 borregos, 8 corrales) sobrepasó el dividendo hasta 72, posiblemente porque el residuo es "grande" en relación con el divisor (6 contra 8), y por lo tanto es poco lo que falta para formar otro grupo de 8.

En este caso, como en otros, tal vez el contexto y el residuo grande*,* propiciaron que se pensara en *completar otro corral con 8 borregos*, en lugar de dejar 6 borregos fuera de los corrales.

Se tenía previsto que, una vez hecha la estimación del cociente para el primer problema, y habiendo verificado éste con la multiplicación, se proporcionaría a cada equipo una bolsa con frijoles y un cartón de huevo, de tal manera que pudieran comprobar esos resultados.

En virtud de que hubo dificultades para que la mayoría de los alumnos usara la multiplicación, cuando se les entregó el material, lo usaron para resolver; recurrieron tanto al reparto uno a uno como a la estimación de cocientes con material.

Por ejemplo, Nacxit, para el problema 3 hizo una representación gráfica, después de haber usado material y dijo *"me salieron ocho y me sobran seis":*



Obs: ¿Cómo supiste que eran ocho en cada corral?
Nacxit:: Los fuí poniendo así, de uno en uno (señala cada hoyo del cartón de huevos indicando el reparto)...

Los niños de este equipo resolvieron primero repartiendo de uno en uno, y después representaron el resultado gráficamente.

Como ya se mencionó, otros niños acudieron al material después de intentar encontrar el resultado con la multiplicación.

d) El uso de la multiplicación directa (procedimiento erróneo)

Hubo tres casos, como el de Itzel y sólo para el problema 1 (*63 conejos, 7 jaulas)*, en que al escuchar que se podía hacer una multiplicación, multiplicaron 63 X 7. Ella explicó cómo obtuvo el resultado:

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 6\ 3 \\ \times\ 7 \\ \hline 441 \end{array}$$

Itzel: Siete por tres, veintiuno, uno y llevamos dos, ... (continúa explicando toda la multiplicación).
Ma: ¿Qué tenemos que hacer, qué dice el problema?

Itzel: Repartirlos (los conejos)
Ma: ¿Este puede ser el resultado? (señalando 441)
Aos: Nooo! (a coro)
Nayeli: No, porque siempre te va a salir más
Ma: ¿Entonces qué pasó allí?
Nayeli: Se equivocó

Inmediatamente Julio pasó al pizarrón y escribió

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 7 \\ \hline 63 \end{array}$$

Ma: Y aquí, ¿qué es esto? (señalando el número 9 en la multiplicación)
Julio: Lo estuve intentando con el ocho, con el cuatro y hasta que le hice con el nueve

En este fragmento puede observarse que mi intervención al preguntar enfáticamente "¿Este puede ser el resultado?", señalando a la vez el 441, posiblemente provocó la respuesta a coro de los alumnos, invalidando la operación de Itzel, aunque después apareció un argumento válido, de por qué no puede ser esa la operación a usarse: "porque siempre te va a salir más".

A pesar de que la intención explícita al hacer esa pregunta, fue "regresar" a Itzel al contexto para que identificara el error, realmente no se le dio oportunidad. Se propició sin embargo, que surgiera la respuesta de Nayeli a la pregunta planteada, así como otra explicación que muestra otro ejemplo de estimación y verificación con multiplicación: la de Julio.

Tal vez la intervención de Nayeli haya favorecido que los alumnos se percataran de que, usar la multiplicación directa "agranda resultados", y que ésto no es congruente con lo que plantea el contexto de reparto.

La acción de multiplicar dividendo por divisor, puede deberse, ya sea a una interpretación multiplicativa directa de los datos del problema (*63 conejos en cada jaula*), o bien puede ser consecuencia de una idea de que la multiplicación está involucrada, aunque hay una dificultad para concebir la forma en que lo está. No se trata de la multiplicación directa sino inversa, es decir, de buscar un número que multiplicado por otro da un resultado determinado.

Comentarios

Como puede observarse, en el proceso de usar la tabla de multiplicaciones directamente para resolver un problema de reparto, el hecho de que la división no sea exacta representó ciertas dificultades, y tal vez por ello la mayoría de los alumnos volvió a recurrir a los procedimientos ya conocidos.

Al solicitar una estimación del cociente y después una manera de verificarla, algunos alumnos se dieron a la tarea, desde esta primera actividad, de buscar directamente el cociente en la tabla, como el número que multiplicado por el divisor es igual al dividendo.

No se había previsto que esto sucediera tan pronto. Como ya vimos, en los casos en que el dividendo no aparecía en la tabla, esta búsqueda fue más difícil. Sólo Laura mostró poder hacerlo (para la división *47 ÷ 5*, dijo: "... *voy buscando el cuarenta y siete, pero no lo encuentro, me paso al cuarenta y cinco...")*

Con respecto a la mayoría del grupo vemos aparecer una esperada diversidad de procedimientos, que van desde el reparto uno a uno hasta la multiplicación por cocientes estimados. Así, entre los procedimientos que no recuperan los cocientes hipotéticos, tenemos los dos extremos:

- Reparto uno a uno
- Búsqueda directa del cociente en la tabla

Entre los procedimientos que recuperan los cocientes hipotéticos, están:

- Iteración gráfica del cociente hipotético
- Multiplicación del cociente hipotético

Por otra parte, pocos niños mostraron saber que la operación en juego se llama "división", y conocen una de sus representaciones convencionales.

En esta sesión, 4 alumnos usaron la tabla de multiplicar para encontrar el resultado de los problemas[4]. No obstante, las interacciones durante la confrontación favorecieron que la estrategia para encontrar el resultado en las tablas se fuera conociendo por el resto del grupo, y aunque persistieron las resoluciones gráficas, esta sesión 5 constituyó un momento importante en el acceso al conocimiento de otro recurso (la tabla de multiplicaciones), que a lo largo de las sesiones posteriores se seguiría difundiendo.

B. Sesión 6

En esta sesión se reinició el trabajo con el grupo (después de un intervalo de 3 semanas), a través de una situación similar a la anterior: "Pollitos a sus jaulas". El propósito, como en la sesión anterior, fue propiciar la estimación del cociente en un contexto de reparto y verificar con las tablas de multiplicar.

La situación se planteó así:

"Vamos a imaginarnos que en estas vacaciones fuimos a un rancho, y que teníamos que cuidar a los pollitos. Después de sacarlos al campo, los debíamos meter a sus jaulas, cuidando que en cada jaula quedara la misma cantidad de pollitos..."

Los problemas, presentados de manera verbal, fueron los siguientes:

1. "El primer día teníamos que meter 54 pollitos en 6 jaulas"...

2. "Tres días después los pollitos aumentaron. Ahora tenemos 73 pollitos y 8 jaulas"...

3. "Otros tres días después los pollitos volvieron a aumentar. Ahora hay 84 pollitos y 9 jaulas...

Los alumnos contaban con una tabla de multiplicaciones que habían elaborado con su maestra (a solicitud mía).

Se presentó el primer problema (*54 pollitos, 6 jaulas*), preguntando a continuación "*¿Como cuántos pollitos creen que quedaron en cada jaula?*"

Esta pregunta tenía la finalidad de que los alumnos hicieran estimaciones. Las respuestas que dieron fueron las siguientes:

> Audiel: Como ocho
> Sofía: Nueve
> Nemian: Diez
> Ma: Si metemos diez pollitos en cada jaula y tenemos seis jaulas, ¿Cuántos pollitos metimos?
> Aos: Sesenta

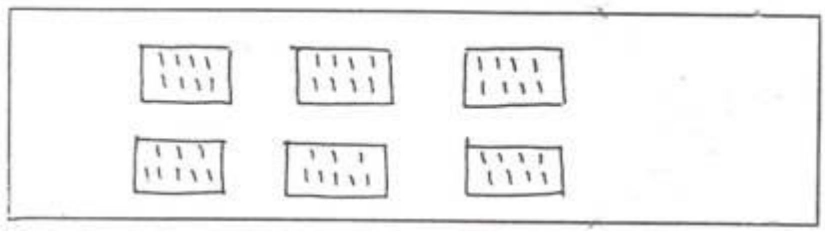
Esta vez, a diferencia de la sesión anterior, se logró que algunos alumnos verificaran los cocientes estimados, en el momento mismo de esta interacción. Es probable que hayan usado la multiplicación (diez por seis)[5]**.**

Nemian, se dio cuenta de que al meter 10 pollitos en cada jaula, metía 60 pollitos en total:

> Ma: Cuántos pollitos tienes, según el problema?
> Nemian: Cincuenta y cuatro
> Ma: Entonces ¿puedes meter diez pollitos en cada jaula?
> Nemian: Sí... (piensa)... no, ocho
> Ma: Si metes ocho en cada jaula, ¿Cuántos metes en total? (Algunos alumnos ven sus tablas y dicen que Nemian está mal)
> Nemian: Los cincuenta y cuatro porque no puede quedar ninguno afuera...

Para contestar la pregunta *"¿Cuántos metes en total?"*, Nemian no retomó su cociente hipotético (*8 en cada jaula*); dió una respuesta lógica, apegándose al contexto: *"No se puede quedar ninguno afuera".*

En ese momento, y para propiciar que todos participaran, se dio la indicación de que *lo hicieran como quisieran***.** Nemian se quedó en el pizarrón, verificando su resultado con un "reparto en cajas" metiendo directamente ocho pollitos en cada jaula:



Al terminar de contar uno por uno los pollitos de las seis jaulas dijo que metió *"cuarenta y ocho".*

Ma: ¿Podrás meter más?
Nemian: Como once
Aos: ¡Nooo!, está mal!
Ma: (A Nemian) Si metiste cuarenta y ocho, ¿Cuántos te está faltando meter?
Priscila: Seis
Nemian: (escuchando lo que dijo Priscila) Si meto otro en cada jaula, ya meto los cincuenta y cuatro. Sofía está bien (se refiere a la estimación inicial de Sofía)

Este es un buen ejemplo de cómo los alumnos se aproximaron al resultado con las estimaciones. Nemian, por las intervenciones de sus compañeros, se dio cuenta de que si "faltan por meter seis pollitos" (según Priscila) y tiene seis jaulas (porque no pierde de vista el divisor), puede meter un pollito más en cada jaula.

Por otra parte, estableció una adecuada relación entre el dividendo *(54)* y el cociente final *(9)***,** con lo cual pudo afirmar que el resultado que daba Sofía "estaba bien".

Aunque no se verificó cada una de las estimaciones iniciales con todo el grupo, la interacción arriba citada permitió que algunos niños se dieran cuenta de si el 8 podía o no, ser el resultado.

Frente a la consigna de *hacerlo como quisieran***,** probablemente todos los alumnos partieron de la estimación sobre la que parecía haber acuerdo (nueve) y la verificaron de distintas maneras; gráficamente, con adición iterada, con multiplicación.
Para el segundo problema (*73 pollitos, 8 jaulas*), nuevamente se planteó una pregunta anticipatoria:

Ma: A ver díganme como adivinos, ¿Cuántos creen que pueda meter en cada jaula?
Enrique: Doce
Armando: Once
Arsenio: Nueve

Para este momento se notaron intentos de algunos niños por usar las tablas, pero no lo pudieron hacer con precisión, excepto los cuatro que ya las podían manejar.

Nuevamente, después de las anticipaciones, se les pidió que resolvieran los problemas. Como se verá en el desarrollo de los procedimientos, los niños tendieron a retomar las estimaciones hechas en el momento anterior, para verificar con distintos procedimientos.

Cuando se abordó el tercer problema *("Dos días después los pollitos volvieron a aumentar. Ahora son 84 pollitos y 9 jaulas)*, pocos alumnos participaron en el momento de la estimación. La mayoría se dedicó a resolver usando la tabla. Sin permitir que se terminara de plantear el problema, Armando intervino dando una primera estimación:

Armando: Quince
Rodrigo: Nueve y te sobran tres
Julio: ¡Ahh!, ya me fijé en la trampita que estás haciendo... en todos sale nueve
Ma: A ver Armando, si tienes quince en cada jaula, ¿Cuántos pollitos tienes en total?

Armando no registró procedimiento alguno en los tres problemas. Parecía tener dificultades para comprobar su estimación. Netzaí se acercó a ayudarle a contar de quince en quince. Entonces Armando dibujó las 9 jaulas y quince rayitas en cada una. Ante la insistencia de algunos de sus compañeros, que dijeron "*es nueve*", Armando dejó inconcluso el procedimiento y se fue a sentar.

- **Procedimientos usados por los niños**

Los procedimientos que aparecieron en el segundo momento de esta sesión, después de la estimación, se pueden clasificar como sigue:

a) Retoman uno de los cocientes hipotéticos y lo verifican

b) No retoman un cociente hipotético. Resuelven directamente

c) Procedimientos erróneos

d) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Veamos cómo se manifiestan dichos procedimientos:

a) Retoman uno de los cocientes hipotéticos y lo verifican

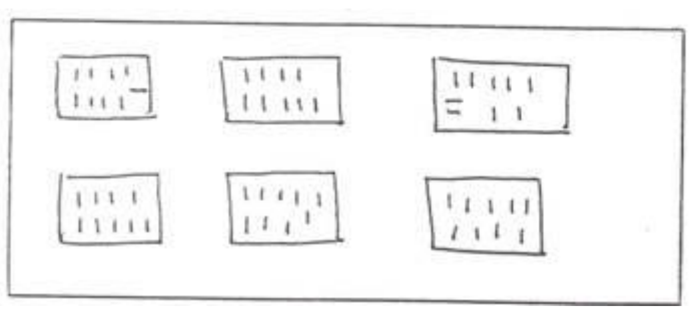
Este procedimiento se presentó en diversas modalidades, entre las que se encuentran las siguientes:

a1) Iteración gráfica del cociente estimado

Dado que hubo una estimación de cocientes hipotéticos al iniciar la clase, los siguientes ejemplos son iteraciones gráficas del cociente estimado, para verificar (con conteo o con adición).

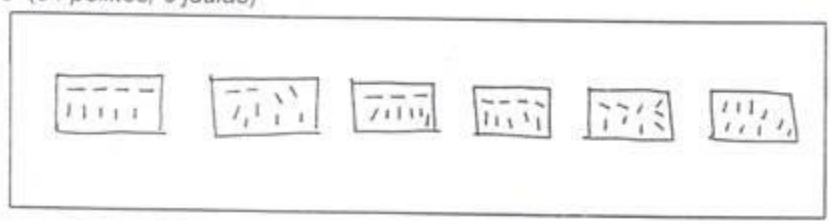
De 29 alumnos, 5 representaron gráficamente el cociente estimado para el problema 1; 6 alumnos para el problema 2, y 2 para el problema 3. Casi todos usaron la misma forma de representación, que parece estar influída por el contexto (jaulas).

Como ejemplos tenemos los siguientes:
Diana: problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*)



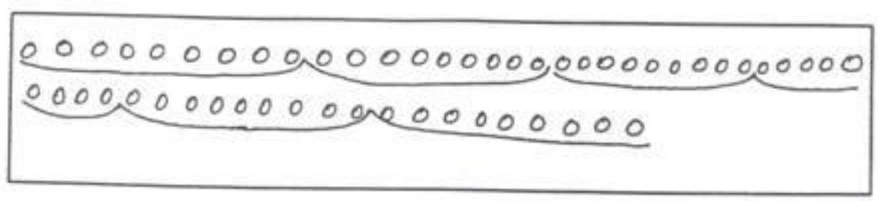
Supongo que Diana tomó el 9 como cociente estimado (tal vez por lo que escuchó de sus compañeros). Hizo el "repa*rto en cajas", y por* último contó uno a uno los "pollitos", para registrar el resultado que aparece a la derecha *(= 54).*

Alejandro (*54 pollitos, 6 jaulas*)



Esta representación resultó útil y eficaz para Alejandro; tal vez por eso mantuvo el procedimiento para los tres problemas.

Abraham (*54 pollitos, 6 jaulas*):



Posiblemente también retomó el cociente estimado 9; representó los 54 pollitos, y sobre ellos hizo grupos de 9 pollitos, obteniendo 6. Mantuvo el procedimiento para el problema 2.

En cuanto al problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*), la estimación que se retomó para propiciar la verificación, fue la de Enrique (12) que pasó al frente y dibujó las ocho jaulas, colocando doce palitos dentro de cada una:

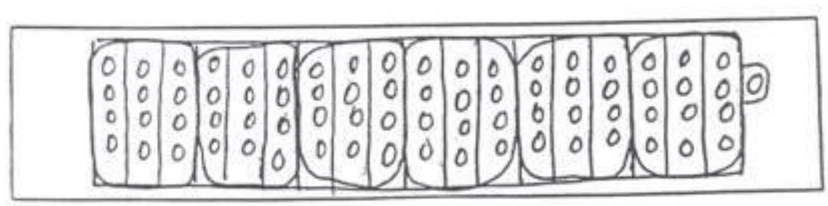
Al terminar, contó de una en una las rayitas dibujadas en las ocho jaulas y dijo:

Enrique: En total fueron noventa y seis
Ma: Entonces ¿Qué pasó?
Enrique: Fueron más pollitos (de los que indica el problema)
Ma: ¿Qué tendrías que hacer?
Enrique: Quitar pollitos... (se queda pensando)
Netzaí: Unos tres... a todas (las jaulas)
Ma: ¿Tienes nueve en cada jaula y ocho jaulas? (se le dio la tabla)
Enrique: Multiplicando nueve por ocho... nos da setenta y dos
Netzaí: Sobra uno
Sofía: Ese (el pollito que sobra) se corta en ocho partes y lo reparten en cada jaula.

Enrique se dio cuenta de que con su estimación de 12 sobrepasaba el dividendo; pero la sugerencia de Netzaí influyó para que encontrara el cociente correcto (9), al quitar tres a cada jaula, y estableciera la relación multiplicativa que permitió verificar si el resultado era correcto.

Por otra parte, el comentario de Sofía, aunque fue una "broma", implica una idea de la exhaustividad del reparto.

Seguramente la estimación de Enrique influyó para que algunos de sus compañeros hicieran lo mismo en su hoja, ya que dos de ellos registraron esa representación. Un caso interesante es el de René, quien para "*meter 73 pollitos en 8 jaulas*", registró el siguiente procedimiento:



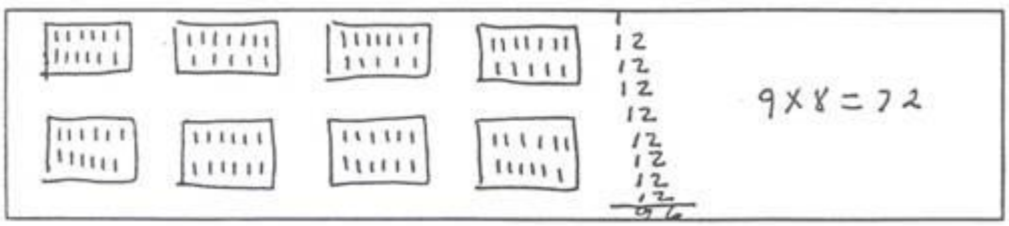
Aparentemente dibujó primero los 73 pollitos, de cuatro en cuatro y separó cada grupo de cuatro con líneas verticales. Después tal vez tomó el 12 como cociente tentativo propuesto por Enrique; hizo grupos de doce separándolos con líneas más gruesas. Esto provocó que se perdiera de vista el divisor, ya que obtuvo 6 grupos de 12 y 1 como residuo. Quizá vio que éste no podía ser el cociente que se buscaba y así lo dejó, sin intentar otro procedimiento.

De los 6 alumnos que resolvieron este problema con representación gráfica, 5 ya la habían usado para el problema 1. Cuatro de ellos, la usaron tomando el *9* como cociente hipotético (que también se expuso en la fase de estimación).

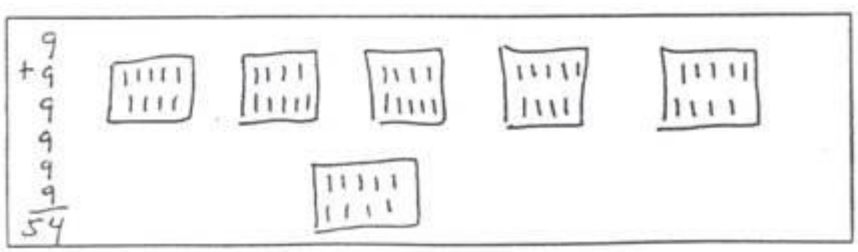
a2) Iteración gráfica del cociente estimado, con adición y/o multiplicación para verificar

Para el problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*) apareció un caso en el que se usó la representación gráfica con adición, y 9 casos en que se usó con multiplicación:

Jezabel hizo lo siguiente:



Para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*) se registraron 2 casos en los que se usó con adición, y 2 con multiplicación. Priscila usó representación gráfica, adición iterada y multiplicación:



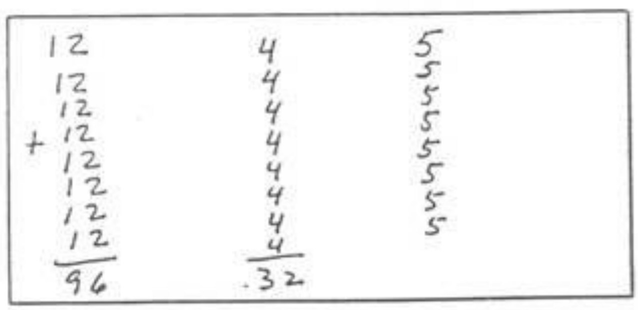
Retomó la estimación inicial de 12 para hacer la representación gráfica, misma que verificó con la adición de 12 + 12... (8 veces). Tal vez al darse cuenta de que sobrepasaba el resultado, y con ayuda de los comentarios de sus compañeros durante la confrontación, multiplicó *9 x 8*.

Para el problema 3 sólo aparecieron 2 casos de representación gráfica con multiplicación. Ninguno con adición.

Debido a que ya se contaba con resultados hipotéticos, es posible que la representación gráfica se usara como un procedimiento más para verificar el cociente encontrado en la primera parte de la clase, y a la vez se usó la adición o la multiplicación para *co*mprobar dicho resultado.

a3) Adición iterada del cociente estimado para verificar la estimación

Para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*), tres alumnos (de quienes antes usaron representación gráfica y multiplicación) tomaron directamente el 12 y lo sumaron ocho veces:



Lucina no sólo verificó con esa estimación, sino que hizo otras por su cuenta (como se ve en el ejemplo). Posiblemente no tenía una idea clara de cómo usar la tabla, pero sí controló el divisor 8 a partir de todas sus estimaciones, y se dió cuenta de que ninguna de ellas la llevaba al resultado correcto.

Como podemos ver, existe cierta dificultad para aproximarse: al ver que el 12 no puede ser el cociente, ella probó con 4 y con 5, que se alejan mucho del cociente buscado.

a4) Duplicación del cociente

Netzaí, para *meter 73 pollitos en ocho jaulas* (problema 2, situación 6), explicó lo que hizo, mostrando su hoja*:*

Netzaí: Hice ocho jaulas; en una jaula puse nueve y sumé... (mientras habla va escribiendo en el pizarrón):

$$\begin{array}{r} 18 \\ +18 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ma: ¿Qué son esos dieciocho? (señalando el primer 18)
Netzaí: Son dos jaulas
Ma: ¿Y estos dieciocho? (señalando el segundo 18)
Netzaí: Otras dos jaulas (continúa su explicación)... entonces aquí (en el 36) ya tengo cuatro jaulas... luego sumé...(escribe en el pizarrón)

$$\begin{array}{r} 36 \\ +36 \\ \hline 72 \end{array}$$

treinta y seis y treinta y seis da setenta y dos... ahí ya van ocho jaulas y me sobra un pollito

Según su explicación, Netzaí usó el procedimiento de **duplicación** (del cociente estimado) para sumar rápido, que en este caso funciona bien por las cantidades involucradas. Puede verse como una forma primitiva de multiplicación, en la que itera su estimación para aproximarse al 73.

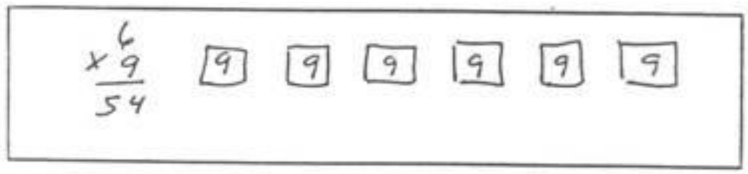
b) No retoman el cociente hipotético. Resuelven directamente

b1) Sólo búsqueda del multiplicando

Un total de 5 alumnos (de 29) usaron el procedimiento para el problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*); 6 para el problema 2 (*73 pollitos, 8 jaulas*) y 4 para el problema 3 (*84 pollitos, 9 jaulas*):

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times\ 8 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ \times\ 9 \\ \hline 81 \end{array}$$

Audiel, para el problema 1 (*54 entre 6*) agregó la siguiente representación (no se sabe si hizo otras multiplicaciones y sólo registró una):



Con ella explicitó la multiplicación implicada en el contexto, vista como "seis veces nueve".

b2) Búsqueda del cociente en la tabla de multiplicaciones

Se observó que para el segundo problema (*73 pollitos, 8 jaulas*), por lo menos cuatro alumnos más (de los que lo hicieron en el primer problema), usaron la estrategia de buscar el cociente directamente en la tabla:

> Alba: Usé las tablas... (señalando con su lápiz su operación al tiempo que explica)... busqué el setenta y tres y no estaba, pero estaba el setenta y dos. Cuando ví el setenta y dos, multipliqué ocho por nueve
> Ma: ¿Qué es el ocho?
> Alba: Las jaulas
> Ma: ¿Y qué es el nueve?
> Alba: Los pollitos que están en las jaulas
> Julio: Sí, es nueve y se queda afuera uno... nueve y uno nos lo comemos.

En el tercer problema (*84 pollitos, 9 jaulas*), durante la fase de estimación, en la que se dieron 15 y 9 como cocientes hipotéticos, varios alumnos no esperaron más y buscaron directamente el resultado en la tabla:

> Ma: Si usamos la tabla desde el principio, ¿Se puede encontrar rápido el resultado?

(Esta es una variable que se introdujo para propiciar que los alumnos identificaran la tabla como un recurso más económico que los otros procedimientos, y eficaz para estos problemas).

> Lucina: Sí... Primero buscar el número más cercano al ochenta y cuatro
> Aos: Ochenta y uno
> Ma: ¿Y luego?
> Lucina: Buscar el número que está arriba
> Ma: ¿Y ese número qué es?

Lucina: El número de pollitos (cociente 8) y el otro el número de jaulas (divisor 9)
Aos: Sobran tres

Lucina, sin usar una estimación previa, tomó directamente la tabla para encontrar el resultado, explicita por primera vez (ella) que el producto que se busca, debe ser el más cercano al dividendo.

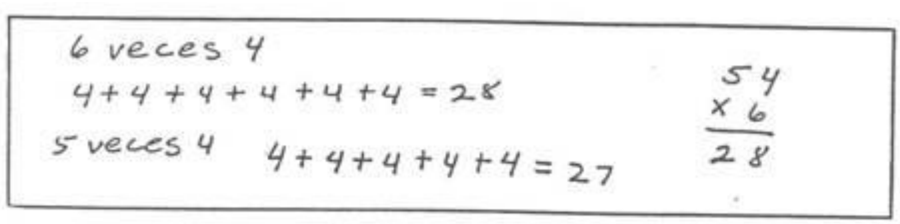
El hecho de que para el problema 3 aumentara la cantidad de alumnos que no registraron procedimientos en su hoja, no quiere decir que no hayan hecho nada; por el contrario, hubo más intentos por usar adecuadamente la tabla de multiplicaciones, y por otra parte, tal vez influyó el hecho de que Julio "descubriera" que el resultado a este problema volvía a ser 9.

El uso de la multiplicación se incrementó, ya sea acompañada de la representación gráfica o de la adición iterada. Sabemos que en algunos casos se usó para verificar estimaciones iniciales, y en otros para resolver directamente sin tomar en cuenta cocientes hipoté*ticos.*

c) Procedimientos erróneos

c1) Multiplicación directa

Pocos niños recurrieron a ella. Moira, para el Problema 1 (*54 pollitos, 6 jaulas*) hizo lo siguiente:



Probablemente Moira percibió una relación multiplicativa en juego, pero aún no la comprendía bien. Planteó una multiplicación directa de dividendo por divisor, para multiplicar 54 x 6; hizo por separado la operación de 6 veces 4 y 5 veces 4 (en lugar de 6 veces 5). Esto indica que sabe que hay que operar con los números, pero desconoce el algoritmo de la multiplicación.

Otro caso que refleja la dificultad para distinguir entre dos usos de la multiplicación, es el de Emiliano.

Después de que se hicieron las estimaciones (del primer problema) y se dio tiempo para la resolución, en donde Nemian hizo la representación gráfica, se dio esta interacción:

> Ma: ¿Hay una forma más rápida de encontrar el resultado?
> Emiliano: Una multiplicación
> Ma: ¿Qué multiplicas?
> (Emiliano pasa al pizarrón y escribe):

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$$

> Ma: (a Emiliano) Si multiplicas cincuenta y cuatro por nueve, ¿Qué crees que te va dar? ¿Más, o menos que el cincuenta y cuatro?
> Emiliano: Más
> Ma: Y aquí tienes cincuenta y cuatro pollitos, ¿Qué vas a hacer con ellos?
> Emiliano: Los voy a meter en las jaulas... (Se queda viendo su operación, la borra y escribe)

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 6 \\ \hline 54 \end{array}$$

> Luego mueve su cabeza de arriba a abajo, y parece contar con sus dedos; parece que hace cálculos en función de "6 veces 9".

Emiliano sabía que podía usar la multiplicación, pero al querer expresar lo que se hizo, tuvo dificultad para distinguir entre el uso **directo** de la multiplicación (54 X 6), y el inverso que implica un problema de división, en el que se debe buscar el número que multiplicado por 6, dé 54 (búsqueda del multiplicando).

d) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Cuatro alumnos (dos que ya lo habían hecho en la sesión anterior) representaron la división en su forma convencional para el primer problema; tres de ellos la usaron para el segundo problema, y dos de ellos mismos, para el tercer problema:

9	8	9
6 / 5 4	9 / 7 3	9 / 8 4
0	1	3

Estos alumnos son quienes sabían manejar la tabla de multiplicaciones. Encontraron el resultado en ella y representaron la operación con la galera. Con esto mostraron que ya identificaban a la operación implicada como una división, y que conocían una forma de representación de esta operación.

Comentarios

Nuevamente, como en la sesión cinco, la solicitud de una estimación previa y de su verificación, desencadenó una variedad de procedimientos que comprenden aquellos casos en los que los alumnos retoman un cociente hipotético para verificar, y otros en los que resuelven directamente.

Puede apreciarse que esta vez, el reparto uno a uno tendió a ser abandonado. Fueron más los niños que recurrían a operaciones escritas para verificar el cociente (adición, duplicación y multiplicación), y también fueron más quienes usaron la tabla para buscar directamente en ella, el número que multiplicado por el divisor, se acercara más al dividendo (procedimiento de búsqueda del multiplicando).

Continuaron apareciendo explicitaciones sobre la *cercanía* del producto buscado con respecto al dividendo, y no forzosamente de *igualdad.*

En esta sesión se manifestó una disminución en el uso de las representaciones gráficas como procedimiento único, incrementándose en cambio, los casos en que ésta se combina con la multiplicación (10 casos para el problema 1).

Asimismo aumentó el número de alumnos que empezaron a emplear la tabla de multiplicaciones para resolver y verificar, y se vieron intentos de algunos por usar una representación simbólica convencional de la división (la galera).

En general los alumnos manifestaron de varias maneras, tener presente el significado de los datos. A veces esto se evidenció en su respuesta a preguntas como:

> "¿Qué es el nueve?": "Los pollitos que van en cada jaula"
> "¿Qué es el seis?": "Las jaulas"
> "¿Qué es el cincuenta y cuatro?": "Los pollitos que se tienen"... "que se reparten" (respuestas para el problema 1, 54 pollitos, 6 jaulas).

C. Sesión 7

En esta sesión se continuó con el propósito de favorecer el uso de la tabla de multiplicaciones para verificar cocientes estimados, ahora con una modalidad:

Se propusieron resultados entre los cuales debía elegirse el que se considerara correcto (para los dos primeros problemas). Se esperaba que los alumnos centraran su atención en los resultados y multiplicaran éstos por el divisor. Además, en el tercer problema se trabajó con cantidades que implican un residuo grande.

La situación se planteó así:

> *En un grupo de tercer año, los alumnos resolvieron este problema:*
>
> *Se tienen 56 canicas para repartirse en 7 bolsitas, de tal manera que en cada bolsita quede igual número de canicas. ¿Cuántas canicas se deben poner en cada bolsita?. Los niños de ese grupo dieron los siguientes resultados:*

7 6 9 8

Mientras estos números se iban escribiendo en el pizarrón, algunos alumnos fueron dando respuestas como *mal, mal, mal, bien.* Estas expresiones reflejan que algunos alumnos hicieron ciertos cálculos mentales, probablemente la multiplicación del divisor 7 por los cocientes hipotéticos. Al terminar de escribir los posibles resultados, se especificó: *"Busquen cuál es el resultado correcto... como quieran, si quieren pueden usar las tablas"*.

El hecho de ofrecer cocientes posibles (7, 6, 9 y 8), favoreció que los niños eligieran uno de ellos para verificar si era correcto o no. Hubo quienes no tomaron en cuenta esos cocientes posibles y se dieron a la tarea de resolver el problema, ya sea con cálculo mental o usando la tabla de multiplicar, afirmando que el resultado era *"ocho".*

Frente a ese primer resultado, se les preguntó:

> Ma: ¿Cómo lo encontraron?
> Nayeli: Yo saqué el ocho y el siete (explica en la tabla) ... buscas el cincuenta y seis y está en el siete y en el ocho (señala en la tabla de Pitágoras los dos casos en que aparece el cincuenta y seis):

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	***8***	*9*	*10*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	***56***	63	70
8	8	16	24	32	40	48	***56***	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

> Ma: ¿Y puede ser cualquiera? (refiriéndose a los dos 56 que aparecen en la tabla)
> Nayeli: (casi enseguida responde) No, no no, ya me di cuenta de que no, porque no son ocho bolsitas, sino en siete bolsitas ...

Esta respuesta de Nayeli da cuenta de que las cantidades que aparecen en la tabla, según su ubicación, tienen un significado específico: el primer renglón vertical de la tabla (del 1 al 10), representa al divisor de la operación, mientras que el cociente será el número que aparezca en el primer renglón horizontal.

Además de este procedimiento, con el cual la mayoría del grupo se empezó a familiarizar, siguieron apareciendo las representaciones gráficas, como veremos después, cuando se hable en general de los procedimientos surgidos en la sesión.

El segundo problema que se planteó fue

"Si tengo treinta y nueve canicas para guardarlas en cuatro bolsitas... de tal manera que en cada bolsita quede igual número de canicas ¿Cuántas hay en cada b*olsita?"*

Los cocientes propuestos para la operación (39 ÷ 4) fueron

10 8 7 9

> Ao: (a Jezabel, en su equipo) Busca el número más cercano (en la tabla)
> Jezabel: No, pero sobraría tres.

La mayoría del grupo encontró el resultado rápidamente en la tabla. Varios niños de los que antes usaron la representación gráfica con la multiplicación, abandonaron la primera y sólo consignaron la multiplicación. No se identificaron dificultades para el cálculo del residuo (ya que el 39 no aparece en la tabla), excepto la duda que expresó Jezabel, lo cual significa un mejor manejo de la tabla.

El problema 3 se planteó especificando antes : *"Todo el mundo con su tabla en la mano"* y no se ofrecieron cocientes posibles como en los casos anteriores:

"Tenemos cuarenta y siete chocolates y los vamos a meter en seis bolsas" ¿Cuántos chocolates ponemos en cada bolsa?". Acuérdense que en todas debe quedar igual cantidad de chocolates".

Los alumnos de inmediato empezaron a buscar el resultado (de *47 ÷ 6*) y surgieron las primeras respuestas:

> Laura: Siete y sobran cinco
> Sofía: Ocho y sobra uno
> Alba: Multipliqué ocho por seis (señala en la tabla el ocho del renglón horizontal, el seis de la renglón vertical, y el cuarenta y ocho en el sitio en que convergen).
> Ma: ¿Te sirve el cuarenta y ocho?
> Belém: Sí (pasa al frente) porque no está el cuarenta y siete...
> Ma: ¿Pero cuántos chocolates tenías?
> Belem: Cuarenta y siete
> Ma: Entonces qué pasa?

Ao: Le tenemos que aumentar uno
Ma: Pero no tengo chocolates...¿Qué hago?...

Tal como se contempló en el análisis previo de esta sesión, surgió la dificultad de elegir entre un cociente que dejara un sobrante grande (**7**), y un cociente que aunque rebasara el dividendo, no permitiera que sobraran chocolates (**8**).

A través de las preguntas anteriores, algunos alumnos se dieron cuenta de por qué no se podía tomar el 8 como resultado:

Alba: Multiplicar por siete y el número más cercano es cuarenta y dos...
Ma: ¿Entonces cuál es el resultado?
Alba: Siete y sobran cinco (varios alumnos responden al mismo tiempo)

Aquí volvió a darse el caso de la dificultad que implica el cálculo de un sobrante casi igual que el divisor. Por un lado el dividendo y tal vez el contexto en especial, invitó más a pensar en aumentar un chocolate, para que no sobrara ninguno, que dejar varios chocolates sin meter en las bolsas.

Por otra parte, el hecho de no haber presentado cocientes posibles (para que eligieran entre ellos), favoreció que se volvieran a confrontar y argumentar los resultados que obtenían al usar la tabla de multiplicaciones.

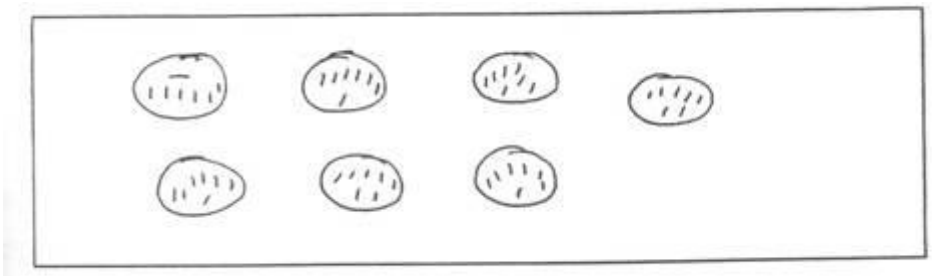
- **Procedimientos usados por los niños**

A partir de lo que sucedió en la clase y lo que apareció registrado en las hojas de los alumnos, se pueden destacar los siguientes procedimientos:

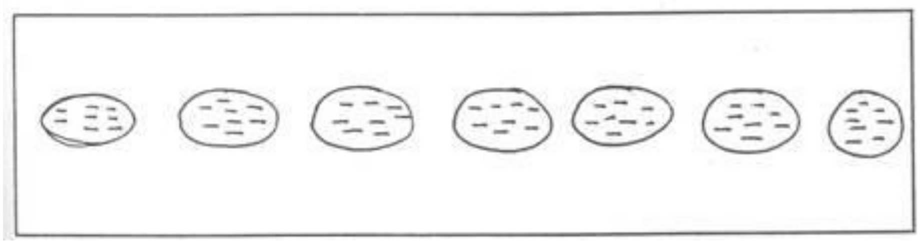
a) Iteración gráfica de un cociente

Tres alumnos (de 31) registraron este procedimiento como único. Hay un caso en el que se nota que se eligió un cociente distinto al que se propuso al inicio de la clase:

Alejandro, para el problema 1 (*56 canicas, 7 bolsitas*) eligió el 7 e hizo lo siguiente:

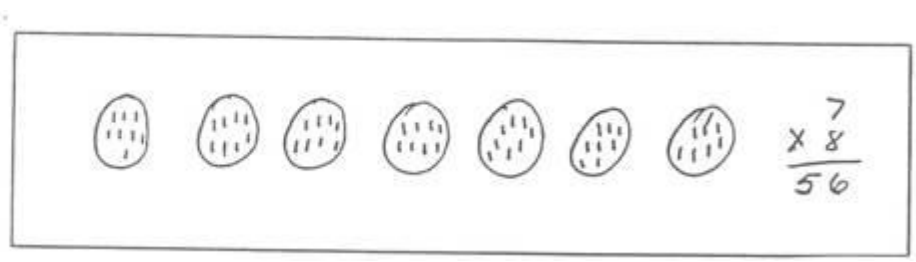


Ana Cecilia optó por el 8, probablemente por la intervención de sus compañeros:



b) Iteración gráfica de un cociente y multiplicación para verificar

Para el primer problema (*56 canicas, 7 bolsitas*), un total de 10/31 alumnos, parecían tener un mejor dominio de las tablas de multiplicar, ya que después de representar las 7 bolsitas con las 8 canicas en cada una, multiplicaron 7 por 8:



De estos 10 alumnos, 6 dejaron la representación gráfica y sólo usaron la multiplicación para los dos siguientes problemas.

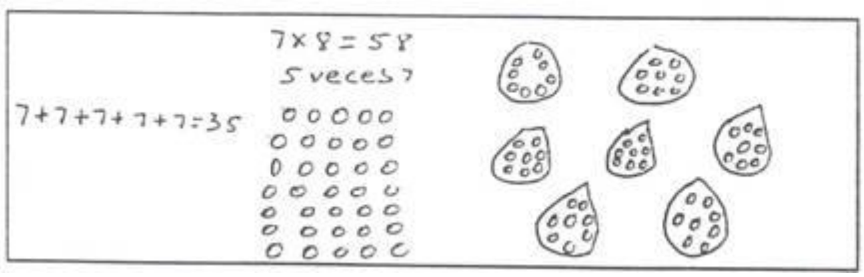
c) Multiplicación del cociente hipotético para verificar

Seis alumnos emplearon directamente la multiplicación para el primer problema:

$$
\begin{array}{r}
7 \\
\times\ 8 \\
\hline
56
\end{array}
$$

Puede suponerse que están entre quienes al escuchar los resultados posibles iban diciendo *"mal, mal, mal, bien".* Estos alumnos mantuvieron su procedimiento para los dos problemas restantes.

El caso de Priscila llama la atención por las confusiones que evidencia en el problema 1 *(56 canicas, 7 bolsitas*):



Como puede verse, primero hizo la multiplicación de 7 X 8 (posiblemente tomó el 8 como cociente, de lo que sugirieron sus compañeros).

Tal vez al no conocer el resultado y no saber usar la tabla, optó por dibujar las bolsitas con 8, pero se equivocó en el conteo (58 en vez de 56). Esto la llevó a probar con cocientes más pequeños. Priscila mantuvo este intento para el segundo problema (*39 # 4),* aunque incluyó también la galera, seguramente porque vio que algunos de sus compañeros la usaron.

Para el tercer problema abandonó la representación gráfica, para usar la multiplicación de 7 por 6 y la representación con la galera.

d) Multiplicación directa:

Sólo Emiliano la usó en un primer intento, pero después corrigió

$$
\begin{array}{r}
56 \\
\times\ 7
\end{array}
$$

8 X 7 =

Como en otros casos ya citados, tal vez Emiliano sabía que de alguna manera se implica la multiplicación, pero no identificó el uso correcto (búsqueda del multiplicando), o bien interpretó el problema como de multiplicación. Esta vez no se detectó el caso específico para confrontarlo, pero las argumentaciones ofrecidas durante la clase, seguramente ayudaron a que Emiliano se diera cuenta del error y corrigiera, empleando la búsqueda del multiplicando.

e) Procedimientos erróneos

Moira volvió a emplear en esta sesión, el procedimiento de la sesión anterior:

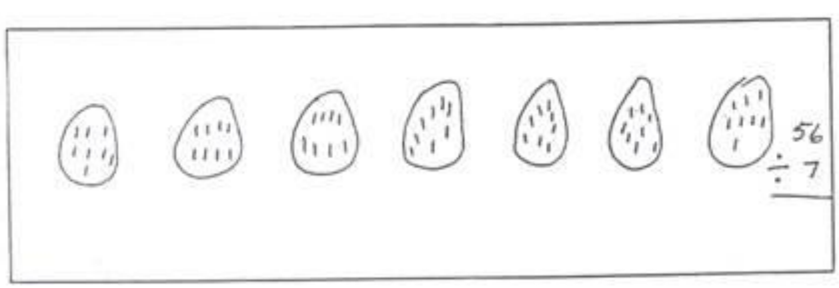
Parece haber interpretado el problema como si fuera de multiplicación, pero aplicó incorrectamente el algoritmo. Se nota que estaba en el proceso de manejar los "pasos", y deshizo el 56 para multiplicarlo como *cinco veces siete* y *seis veces siete*; se equivocó en las sumas parciales. Anotó 49 como resultado de la multiplicación directa.

f) Formulaciones y representaciones de la nueva operación

Además de los cuatro alumnos que en la situación 6 ya se referían a la división, en esta clase surgieron otros casos:

Netzaí dijo que Nayeli estaba bien (cuando explicó cómo usó la tabla), y que él **usó la división**:

Ma: A ver, explícalo (a Netzaí)
Netzaí: Primero dibujé las bolsitas y las canicas ... y luego rectifiqué usando las tablas ...



Netzaí seguramente había visto el signo de los dos puntitos con la rayita en medio, como el símbolo para representar la división, y lo usó a su manera. Esto sólo lo hizo para el primer problema.

Los cuatro alumnos que ya habían representado la división con la galera, lo volvieron a hacer para los tres problemas de la sesión:

$$\begin{array}{r}8\\ 7\,/\,\overline{5\,6}\\ 0\end{array}$$

Ellos hicieron la operación mentalmente sin necesidad de ver la tabla de multiplicaciones, y representaron el resultado con la galera. Esto indica que, aunque llevaban cierta ventaja en conocimientos con respecto a la generalidad del grupo, la situación didáctica también les permitió evolucionar (también a ellos).

Enrique usó por primera vez esta representación para los problemas 2 y 3. Probablemente la vio en la sesión anterior y la retomó.

Comentarios

La situación de elegir el cociente correcto entre algunos posibles, llevó a la mayoría de los niños, efectivamente, a verificar esos cocientes. Quienes no lo hicieron así, buscaron el cociente directamente en la tabla.

En esta sesión 7 aumentó considerablemente el número de niños que recurrían a la multiplicación para probar un cociente hipotético, o para buscar el cociente en la tabla. Asimismo, siguió disminuyendo el número de niños que recurría a la iteración gráfica del divisor como procedimiento único; la mayoría de quienes lo usaron, lo hicieron combinándolo sobre todo con la multiplicación.

En cuanto al procedimiento que consiste en buscar el cociente en la tabla, en esta sesión, algunos niños lograron hacer explícitas condiciones importantes: para el reparto de *56 canicas entre 7 bolsitas*; observaban que en la tabla hay dos 56, pero que son distintos; uno es el que se busca; el que está en el renglón del 7, porque éste representa la cantidad de bolsitas y por lo tanto el 8 (hallado hacia arriba del 56) es el número que multiplicado por 7, iguala al dividendo.

La otra condición interesante que se manifestó es la del residuo: los niños mostraron una tendencia natural a agregar elementos al dividendo cuando el residuo es grande, para poder *repartir uno más*. Sin embargo, el contexto indicaba repartir una cantidad dada, y concluían que no puede rebasarse el dividendo.

Se identificó por lo menos un caso (el de Alejandro), en el que la verificación se hizo con dos de los cocientes propuestos, independientemente del que sugerían sus compañeros como cociente hipotético.

Como se puede observar, en esta sesión no apareció la adición iterada, salvo en los casos de Priscila y Moira, que no lograron llegar al resultado a través de ella. La división con la galera continuó apareciendo para representar el resultado que obtenían al multiplicar.

D. Sesión 8

En esta sesión se continuó propiciando el uso de la tabla de multiplicaciones, esta vez para resolver problemas de reparto exacto e inexacto.

"Vamos a pensar que se está organizando una fiesta, y que se van a repartir dulces a los niños que asistan, pero queremos ver cuántos dulces le vamos a dar a cada niño para que a todos les toque igual".

A continuación se proporcionó a cada alumno una ficha como la siguiente, con la consigna de *resolver los problemas de la ficha usando la tabla de Pitágoras.*

Total de dulces	**Número de niños**	**Dulces que le tocan a cada niño**	**Dulces que sobran**
48	6		

75	8		
44	9		
47	4		

Como se aprecia, el primer problema posibilita encontrar el resultado directamente en la tabla de multiplicaciones. En el segundo, el cociente se debe encontrar a través del número más cercano al dividendo 75 (que no está en la tabla) y a partir de él calcular el residuo.

El tercer problema representa una mayor dificultad, ya que implica elegir entre dos dividendos: uno (*45*) que rebasa el dividendo exacto del problema, y otro (*36*) que obliga a dejar un residuo grande (*8*), casi igual que el divisor (*9*).

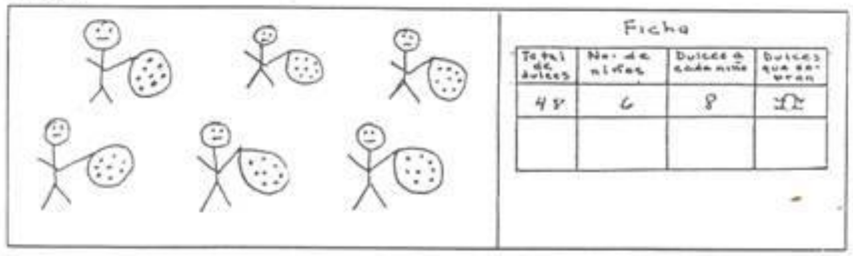
El problema 4 (*47 dulces, 4 niños*) implica un cociente mayor que 10, que tampoco se encuentra directamente en la tabla de multiplicaciones.

Uno de los propósitos de emplear estas variantes fue evitar una algoritmización prematura de la tabla[6], una vez que se habían familiarizado con su uso. Además, se pretendía que los alumnos enfrentaran una vez más, una división con residuo grande, en relación al divisor.

Para el primer problema (*48 dulces, 6 niños*) cuyo resultado es exacto, no hubo dificultades. La gran mayoría de los alumnos manejaba adecuadamente la tabla con la estrategia que se ha venido describiendo, aunque hubo quienes usaron representaciones gráficas:

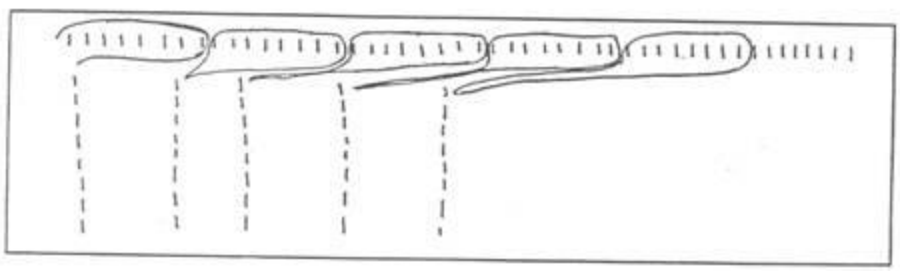
> Edgar: (durante la confrontación) "Lo hice contando... puse los niños y luego los dulces que a cada quien le tocaban..." (aunque en su hoja no aparece dibujo alguno; tal vez lo hizo en otra hoja, o como a veces sucedía, sobre la mesa).

Priscila dibujó:



Puede ser que haya ido poniendo puntitos, de uno en uno y contando al mismo tiempo, o bien que haya encontrado el resultado con la tabla de multiplicaciones, y simplemente después representó el resultado.

Nemian lo hizo de esta manera:



Registró primero los 48 dulces. Estimó el cociente, o bien lo encontró en la tabla, para hacer grupos de ocho sobre la colección total. Finalmente reacomodó esos grupos de ocho, en columnas; no registró la última.

Estos son los únicos casos de representaciones gráficas para el problema 1.

Para el segundo problema (*75 dulces, 8 niños*) tampoco se identificaron dificultades; la mayoría logró reconocer el 72 como número más próximo al 75 dentro de la tabla, y se calculó el residuo (3).

Cuando el residuo es pequeño como en el caso de 75 dulces entre 8 niños, el cálculo del sobrante fue sencillo, a través del conteo o de la complementación entre ambas cantidades (72 y 75).

Los problemas 3 y 4, en cambio, presentaron dificultades que dieron lugar a respuestas y discusiones interesantes.

a) Repartos con un residuo grande

Durante la resolución del problema 3 (*44 dulces, 9 niños*), en la mesa de René comentaron:

> René: (con la tabla en sus manos, explica) Hay nueve niños y cuarenta y cuatro dulces, entonces el cuarenta y cuatro no está, tomé el cuarenta y cinco... (se queda pensando)
> Ma: ¿Cuántos dulces tienes René?
> René: Cuarenta y cuatro
> Ma: ¿Y cuántos niños tienes?
> René: Nueve
> Ma: Entonces, si sólo tienes cuarenta y cuatro dulces ¿puedes tomar el cuarenta y cinco en la tabla?
> René: No, porque me pasaría de dulces... (se queda trabajando solo, y en el momento de la confrontación explica ante el grupo)
> René: ... Que hay nueve niños y hay cuarenta y cuatro dulces... (observa la tabla)... no hay ningún cuarenta y cuatro, se pasó (cuandove el 45), me paso un poquito, al cuarenta y cinco (en voz baja) ¿puedo tomar el cuarenta y cinco?... (él mismo responde)...no, porque me paso y tengo cuarenta y cuatro dulces...
> Ma: ¿Entonces qué puedes hacer?
> René: Si no puedo tomar el cuarenta y cinco, busco el más cercano... es el treinta y seis, y entonces voy a repartir treinta y seis
> Ma: ¿Entre cuántos niños los vas a repartir?
> René: Entre nueve, cuatro y me sobran ocho...

Para este problema, 8 de 29 alumnos registraron inicialmente 5 como "*dulces que le tocan a cada niño*" y 1 como *"dulces que sobran".* Este uno pudo verse como el dulce que les faltaba para que a todos les pudieran tocar cinco. Seguramente después de la confrontación, estos alumnos corrigieron su resultado, y escribieron *4* como cociente y *8* como residuo (este resultado finalmente lo registraron todos).

Como ya se vio en la sesión 6, un residuo cercano al divisor, causa dificultades. O bien se resistían a dejar un residuo de ese tamaño, (esto además se ve reforzado por el contexto, ya que cabe preguntarse ¿cómo dejar 8 dulces sin repartir sólo porque falta uno para que a todos les toque lo mismo?), o bien perdían de vista el contexto y resolvían el problema a nivel del modelo numérico, de encontrar el múltiplo más cercano.

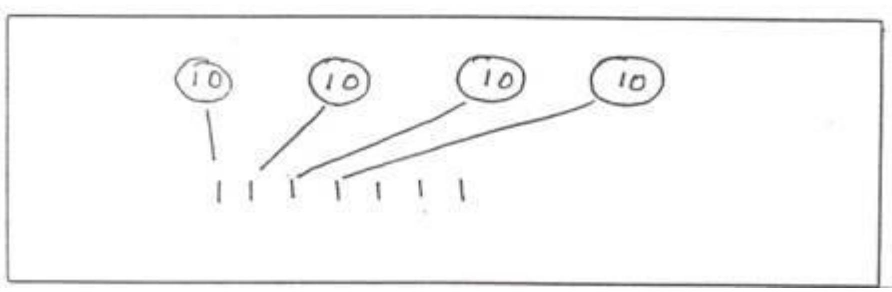
De cualquier forma, los cálculos y argumentos que los alumnos hicieron (aunque en algún momento se haya perdido de vista el dividendo), permitieron rectificar y ajustar sus acciones para encontrar, tanto el cociente como el residuo; aunque éste sea "grande" (casi igual que el divisor).

b) Repartos con un cociente mayor que 10

Para el problema 4 (47 ÷ 4), cuyas cantidades ya no permiten resolver la división directamente en la tabla, sucedió lo siguiente:

Sofía: Buscó el cuatro y luego el cuarenta y siete (mientras habla señala los números en la tabla)... pero no está y veo que es el cuarenta, y sería cuatro por diez...
Cecilia: (interviene después de Sofía) le tocan once a cada niño...
Nayeli: Está mal... porque hay que buscar el número más cercano a cuarenta y siete y es el cuarenta (en la tabla) y le tocan a diez y sobran siete...

Sabiendo que se habían repartido 10 dulces a cada niño, dibujó en el pizarrón cuatro círculos, y dentro de cada uno, el número 10. A continuación Sofía completó la explicación, agregando "los siete dulces sobrantes":



Sofía: Sí, sobran siete y se puede repartir uno más a cada niño... (termina diciendo)... Entonces como le doy uno más a cada niño, alcanzo a repartir otros cuatro y me sobran tres.
Ma: ¿Cuántos dulces doy a cada niño?
Aos: Once
Ma: Y si doy once a cada niño, cuántos dulces hemos repartido en total?
Aos: Cuarenta y cuatro

Como podemos ver, al emplear la tabla y ver que el dividendo no aparece en ella, algunos alumnos tomaron el cociente máximo que sí está escrito (10), porque ya sabían que *si el dividendo no aparece, se busca el número más cercano.*

Algunos como Nayeli, por seguir al pie de la letra el algoritmo de la tabla, no se dieron cuenta de que puede continuarse el reparto porque el residuo (7) todavía es mayor que el divisor (4). Otros en cambio, apoyados en el contexto, lograron repartir hasta donde se puede, combinando procedimientos.

En la discusión algunos niños cambiaron de opinión; aceptaron ambos resultados (*10 y sobran 7; 11 y sobran 3*) como válidos; otros siguieron opinando que el segundo resultado *estaba mal*.

A través de este ejemplo, los alumnos pudieron darse cuenta de que, si usaban la estrategia que hasta ese momento les había funcionado para manejar la tabla, "caían en un error", y que si volvían al contexto, encontraban la solución como un resultado más exacto que el que les daba la tabla. Para este problema, los alumnos registraban en el cuadro los siguientes resultados:

De 29 alumnos, 12 obtuvieron 10 como cociente y 7 como residuo. A pesar de la confrontación, no cambiaron su resultado; 4 escribieron en principio 10 como cociente y 7 como residuo, y lo cambiaron a 11 y 3 respectivamente. Una alumna registró un cociente 9 y residuo 11; 10 niños obtuvieron 11 y 3 como cociente y residuo.

Israel y Diana escribieron resultados erróneos, Israel registró un cociente 4 y residuo 7 (no se sabe lo que hizo para llegar a ellos). Diana escribió 80 como cociente y 55 como residuo; en su ficha de resultados se observan dos adiciones, una de 45 + 35 = 80 y otra de 44 + 11 = 55[7].

Lo interesante en este problema es que algunos alumnos, además de tener ya un mejor dominio de la tabla de multiplicaciones como recurso para resolver, empezaron a darse cuenta de que ésta no siempre les permite encontrar el resultado de inmediato. Por otra parte, la explicación que dio Sofía los obligó a reflexionar cómo podían completar la resolución, hasta lograr un residuo menor que el divisor.

Otros alumnos, por ahora, se aferraban a la regla subordinando el contexto. No obstante, de esta manera se propició también una "desmecanización" del procedimiento para usar la tabla de multiplicaciones.

Comentarios

En la sesión 8, última de esta fase, prácticamente todos los niños utilizaban ya la tabla de multiplicar para encontrar los cocientes. Además de las condiciones que ya se habían manifestado en la sesión 7, hay otras que se hicieron explícitas:

- El producto buscado no puede rebasar al dividendo. Debe ser igual o menor

- Los cocientes que se buscan no siempre se encuentran en la tabla

- Implícitamente los niños sabían que el residuo debe ser menor que el divisor

- Si el cociente que da la tabla deja un residuo mayor que el divisor, "se puede seguir repartiendo".

Se ha visto también que existe un cierto conflicto entre la situación que se plantea y el modelo matemático con el que se puede resolver: en un reparto equitativo de 44 dulces entre 9 niños, lo más sensato sería conseguir un dulce más para lograr repartirlos todos, o en última instancia, no respetar la equitatividad, y no dejar ¡8 dulces sin repartir!.

Probablemente deban buscarse contextos más adecuados (no es fácil), sin embargo, es necesario decir que los niños pudieron aceptar sin problemas, esta particularidad.

Empezó a difundirse, aunque poco, la representación simbólica de la división con la galera, debido a que dos alumnos, por lo menos, ya la conocían.

En cuanto a las dificultades, hay casos concretos, como el de Moira y por lo menos tres alumnos más (hasta donde pudo detectarse), en los que hasta esta sesión no habían logrado comprender la relación multiplicativa en los problemas de división, y tendían a usar la multiplicación directa de dividendo por divisor.

La presencia de residuos grandes provocó conflictos para encontrar el cociente: para algunos alumnos resultó más fácil aumentar en 1 el dividendo, que dejar un residuo casi igual que el divisor.

Puede decirse que la situación de solicitar una estimación del cociente y después su verificación, efectivamente ayudó a los niños a replantear el problema (se trata ahora de ver si *juntando lo que se repartió*, se obtiene el dividendo), y de esta manera, a destacar la relación multiplicativa implicada en un reparto.

---

[1] Los niños hicieron caso omiso de estas tablas. Usaron siempre la tabla de Pitágoras

[2] Fue una sugerencia para que los niños, con ayuda de su maestra, diseñaran una tabla de multiplicaciones a partir de problemas que involucraban la relación entre "chocolates y cajas". En el primer renglón horizontal se registraría el número de cajas (1 a 10); la primera columna izquierda representaba el número de "chocolates por caja". Los niños debían calcular y escribir el número total de chocolates en el interior de la tabla.

[3] La información que tenía Arsenio, externa a la escuela, fue útil para el resto del grupo porque quienes estaban cerca de él, compartían sus experiencias y en la confrontación, sus aportaciones se socializaban en el grupo.

[4] Lo hicieron no sólo por influencia de la situación, sino porque tenían conocimientos que fueron aprovechados didácticamente en el momento de socializar esas experiencias, lo que permitió a los demás enriquecer sus conocimientos.

[5] En la sesión 5 los niños verificaron sus estimaciones, pero no en la interacción verbal que se dio al principio.

[6] Parece que algunos alumnos aprenden a usarla al ver cómo lo hacen sus compañeros, pero sin comprender el porqué de lo que se hace con ella.

[7] Esto demuestra que Diana tenía aún dificultades para interpretar la relación de reparto involucrada en los problemas. Como generalmente sucede en la escuela, no todos los niños avanzan al mismo ritmo. Diana fue una de las alumnas que más dificultades enfrentó a lo largo de las situaciones. Sin embargo se observó que el trabajar en equipo fue útil para ella, al escuchar a sus compañeros y ver lo que hacían; a veces ellos le explicaban cómo resolver los problemas.

CAPÍTULO 6

DE LA MULTIPLICACIÓN HACIA UNA "NUEVA OPERACIÓN"

Para resolver problemas de reparto equitativo (exacto e inexacto), en estos momentos del estudio la mayoría de los alumnos ya pensaba en determinar el factor que multiplicado por el divisor se acercara, por debajo, al dividendo. Cuando ambos factores eran iguales o menores que 10, cada vez más niños utilizaban las tablas de multiplicar para buscar directamente ese factor, sin estimación previa. Es decir, a nivel implícito, la mayoría de los niños resolvían las divisiones involucradas recurriendo a la búsqueda del multiplicando.

Sin embargo, para la mayoría de los niños, lo que ellos hacían no constituía una nueva operación. No eran concientes de lo "nuevo" que había en la forma en que ponían en juego sus "viejos" recursos; resolvían los problemas empleando de una manera especial, una operación que les era conocida, la multiplicación.

Como ya se ha visto, cuando tenían que decir qué fue lo que hicieron al resolver algún problema de reparto, decían "*repartir*" o "*una multiplicación*".

En esta fase de la secuencia se intentó propiciar un proceso de "institucionalización" (Brousseau, 1988), es decir, un proceso en el que se socialice el procedimiento de resolver un problema de reparto utilizando la búsqueda del multiplicando; se identifique la operación implicada como una división y se represente simbólicamente dicha operación ($a\ b = c$ y sobra r)[1].

Para ello se incluyeron dos variantes en los problemas de reparto:

- Utilizar la calculadora (sesiones 10 y 12)

- Escribir un mensaje dirigido a un "centro de cálculo", indicando lo que se tiene que hacer para resolver los problemas (sesión 11).

Ambas variantes tenían la finalidad de propiciar una explicitación de lo que se hace al resolver un problema de reparto y en última instancia, de identificarlo con una "nueva operación", la división.

En la sesión 11 se dio una situación típica de institucionalización, en la que explícitamente se nombró y simbolizó a dicha operación.

Como se verá, el proceso seguido por los niños para identificar a la división como una operación nueva, no fue lineal ni homogéneo. Algunos sabían, de entrada, que la operación en juego era una división. Otros, siguieron mostrando dificultades para distinguir a nivel explícito las dos formas implicadas de la multiplicación directa y de la búsqueda del multiplicando.

Al mismo tiempo, y sobre todo debido a que se incluyeron dos problemas cuyos datos eran relativamente grandes y no estaban en las tablas de multiplicar, se generaron algunos aportes en el acervo de procedimientos del grupo, y algunas reflexiones interesantes sobre el residuo en una división (sesión 10)

A continuación caracterizaré las situaciones didácticas comprendidas en esta fase.

1. CONDICIONES DIDÁCTICAS

De las cuatro sesiones que corresponden a esta fase del estudio, la sesión 9 tuvo un carácter exploratorio en cuanto al uso de la calculadora por parte de los niños. Interesaba saber cómo la usaban en problemas que no fueran de división. Por este motivo la sesión 9 no se analiza de manera específica, aunque sí forma parte importante de la secuencia de situaciones didácticas (ver cuadro 3, p.137).

a) Con respecto a los problemas

En general los problemas eran de división, en algunos casos se incluyeron contextos de adición, sustracción y multiplicación (sobre todo en la sesión 9[2]) con la finalidad de que los alumnos identificaran la operación en juego.

- *Contexto y estructura*

Se continuó trabajando con problemas de reparto, usando los contextos que han resultado familiares para los niños y que habían venido utilizando, como "chocolates en cajas", "paletas entre niños", "revistas en puestos".

- *El tamaño de los números*

En las sesiones 10 y 11 se manejaron cantidades "grandes" (156 12 y 96 8), respectivamente), con la intención de propiciar la búsqueda de la función "dividir" ( ) en la calculadora; así como permitir a los alumnos extender los procedimientos usados para números chicos (adición y multiplicación), a números más grandes.

En la sesión 12 se usaron cantidades con las que los alumnos se habían familiarizado a lo largo de las situaciones anteriores (72 y 8).

- *Existencia del residuo*

Los problemas que se propusieron implicaban repartos exactos (sin residuo), sobre todo con la intención de evitar que en caso de usar la calculadora, aparecieran números decimales. Como caso excepcional se trabajó el problema 1 de la sesión 10 (76 9), cuyo residuo era fácil de calcular a partir del resultado en la tabla de multiplicaciones.

En la sesión 12, como se verá, aunque el reparto era exacto (72 8), durante la confrontación surgió una polémica interesante con respecto a "si sobran revistas o no".

b) Con respecto a la dinámica de la clase

En las sesiones 10 y 12 se mantuvo la dinámica de resolver y confrontar resultados. En cambio, en la sesión 11, los alumnos sólo debían escribir la operación que resuelve un problema.

- *La calculadora*

Con ella los alumnos encontraron otra manera de comprobar que existe una operación (además de las que ya conocían), que produce el resultado de un reparto equitativo y exacto, a partir de los datos "*cantidad a repartir*", "*número entre el que se reparte*".

Mientras descubrían la posibilidad de usar la función "dividir", la calculadora les permitió agilizar sus cálculos y verificar resultados. Se confirmó que la gran mayoría la utilizó adecuadamente. Se consideró, además, que quienes no la usaron, lo harían en las sesiones siguientes al observar cómo lo hacían sus compañeros.

- *Especificaciones para resolver*

Usualmente se había venido pidiendo a los niños que resolvieran problemas propuestos por la maestra. En las situaciones que se revisarán, hay momentos en los que se pidió *escribir la operación, en lugar de resolver.*

De acuerdo a los propósitos de cada sesión, las especificaciones sobre lo que había que hacer se referían al uso de la tabla, al uso de la calculadora, o a la escritura de la operación que se debía usar (mensajes).

En la sesión 11, como se verá, la consigna representó dificultades para la mayoría del grupo. Al respecto se vio que tal vez la situación hubiese funcionado mejor si se hubiera propiciado de manera más natural, la escritura de “los mensajes”.

- *Organización del grupo*

En las sesiones 9 a 11 predominó el trabajo en equipos, con la intención de que los niños, al explorar la calculadora, por un lado manifestaran lo que ya sabían hacer con ella y por otro, intercambiaran opiniones sobre lo que podían hacer con la tabla de multiplicaciones y los procedimientos que ya conocían, según lo que les pidiera la situación didáctica. En la sesión 12 (situación "repartidores de revistas"), la consigna inicial para resolver fue "resuelvan solos, como quieran". Esto, con el propósito de favorecer el uso de los procedimientos que ya conocían, para después usar la calculadora como un recurso para verificar resultados.

CUADRO 3

SITUACIÓN	PROPÓSITOS	PROBLEMAS	OTRAS CONDICIONES DIDÁCTICAS		DINÁMICA
9. ¿Qué hacemos con la calculadora?	- Identificar la operación que resuelve problemas de adición y multiplicación. -Propiciar el uso de la calculadora para resolver y/o verificar.	1) Juan tiene 37 canicas y gana 45. ¿Cuántas canicas tiene en total? 1) Pablo tiene una caja con 87 canicas y su hermano tiene otra con 15 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos? 1)Queremos comprar canicas. Si una cuesta 25 pesos. ¿Cuánto pagaremos al comprar 9 canicas?	Cantidades pequeñas Mismo contexto Operaciones distintas	Encuentren el resultado usando la calculadora.	Trabajo en equipos: - Exploración libre de la calculadora. - Resolución - Confrontación
10. Muchos chocolates y pocas cajas	Resolver problemas de reparto con apoyo de la tabla de multiplicar y/o la calculadora.	2) Empacar 76 chocolates en 9 cajas, cuidando que en cada caja haya igual número de chocolates. ¿Cuántos	- Dividendo y divisor accesible al uso de la tabla (problema 1).	Resuelvan con la tabla de multiplicar.	Trabajo en equipos: - Resolución con tabla (y otros procedimientos). - Uso de calculadora para

		chocolates debe haber en cada caja? 3)Ahora son 156 chocolates para empacarlos en 12 cajas. ¿Cuántos chocolates en cada caja? 4)135 chocolates en 9 cajas.¿Cuántos chocolates en cada caja?	- Dividendo y divisor grande; no aparecen en la tabla (problema 2). - Dividendo grande (no está en la tabla) y divisor chico (problema 3).		acabar de resolver o verificar. - Confrontación
11. El centro de cálculo	- Identificar y escribir la operación que resuelve un problema de multiplicación y uno de división. - Identificar los elementos de una división. - Representar simbólicamente la división	5) En un autobús caben 42 pasajeros ¿Cuántos pasajeros caben en 7 autobuses? 6) En la fiesta de María tienen 96 paletas para dárselas a 8 niños ¿Cuántas paletas le pueden dar a cada niño para que todos tengan igual?	- Cantidades sencillas (problema 1). - Cociente mayor que 10 (problema 2).	Hagan un mensaje, diciendo al centro del cálculo qué se debe hacer para resolver el problema. El mensaje debe ser corto.	Trabajo en equipos: - Elaboración del mensaje - Confrontación. - Verificación de resultados con calculadora.
12. Repartidores de revistas	Comprobar que los resultados obtenidos con procedimientos propios, son iguales a los que se obtienen en la calculadora, aplicando la función "dividir".	7) Se tienen 72 revistas para dejar en 8 puestos. En cada puesto debe haber igual número de revistas ¿Cuántas revistas en cada puesto?	- Reparto exacto, números que están en la tabla.	Resuelvan solos, como quieran	Trabajo en equipos: - Resolución libre - Confrontación. - Verificación con calculadora.

					- Confrontación (con procedimientos libres vs. procedimientos con calculadora).

2. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

A fin de apreciar con claridad las acciones realizadas por los niños y los descubrimientos que fueron haciendo, se verán una a una, las sesiones de esta fase:

A. Sesión 10

En la medida en que los niños habían encontrado procedimientos útiles y eficaces para resolver problemas de reparto, insistían en usarlos hasta que se enfrentaron a situaciones en las que éstos dejaban de f*uncionar.*

En la sesión 10, el propósito específico fue resolver problemas de reparto usando la tabla de multiplicaciones y/o la calculadora, en dos problemas distintos:

1. Necesitamos empacar 76 chocolates en 9 cajas, cuidando que en cada caja haya igual número de chocolates. ¿Cuántos chocolates debe haber en cada caja?

2. Nos han dado 156 chocolates para empacarlos en doce cajas, de tal modo que todas las cajas queden con igual número de chocolates. ¿Cuántos chocolates podemos meter en cada caja?

Al resolver estos problemas se aprecia con mayor claridad el avance que los niños iban logrando en el proceso de distinguir entre la multiplicación directa (76 x 9) y la inversa o búsqueda del multiplicando (□ x 9 = 76)[3].

El problema 1 (*76 9*) fue resuelto sin mayor dificultad, usando sobre todo la tabla de multiplicaciones, o bien la multiplicación con cálculo mental. Hallar el residuo fue fácil para la mayoría del grupo:

> Ma: ¿Cómo sabes cuántos te sobran?
> Emiliano: Busqué el nueve, son ocho, entonces eran setenta y dos, y eran setenta y seis chocolates y nos sobran cuatro.

Todo el grupo aceptó el resultado como correcto. Esto refleja por un lado, un mayor dominio de las tablas de multiplicar para resolver, y por otro, que gran parte de los alumnos se había apropiado de un procedimiento específico para encontrar el resultado de una división, en la tabla de multiplicaciones (ubicar el divisor en la primera columna horizontal, a continuación el dividendo en el interior de la tabla, y por último el cociente hacia arriba).

Hubo seis alumnos que después de resolver, representaron la división en forma convencional:

$$\begin{array}{r|l} & \;\;8 \\ \cline{2-2} 9 & 76 \\ & \;\;4 \end{array}$$

a) Procedimientos usados por los niños

Ya se ha descrito cómo los niños llegaron a usar la tabla de multiplicaciones para resolver problemas de división con cantidades menores que 100. En esta sesión 10, al enfrentarse a un problema que implica un dividendo mayor que 100 y un divisor mayor que 10, surgieron ideas y procedimientos basados en los que hasta ahora conocían, en los intentos por encontrar resultados. Veamos algunos casos:

- La tabla del doce

Para propiciar la búsqueda de otros procedimientos, en el problema 2 (*156 entre 12*), se pidió a los niños que resolvieran usando la tabla de multiplicaciones, antes de usar la calculadora. Después de resolver, se pidió usar la calculadora, ya sea para resolver o verificar.

> Laura: (A Abraham) ¿Qué vas a hacer?... (mientras Abraham está escribiendo en su cuaderno)

$$\begin{array}{r} 156 \\ \text{x}12 \\ \hline \end{array}$$

Abraham: Ay, pues una multiplicación...
Laura: ¿Ciento cincuenta y seis por doce? (sorprendida)

Tanto Abraham como Alfredo (del mismo equipo), hicieron la multiplicación y registraron los siguientes resultados:

$$\begin{array}{cc} \textbf{Abraham} & \textbf{Alfredo} \\ \begin{array}{r} 11 \\ 156 \\ \text{x}12 \\ \hline 2142 \end{array} & \begin{array}{r} 1 \\ 156 \\ \text{x}12 \\ \hline 1162 \end{array} \end{array}$$

Obs: (cuando terminan de escribir las operaciones) ¿Esos son los chocolates en cada caja? refiriéndose a los resultados)
Alfredo: (se queda pensando) ¡Ahh no!... déjame pensarlo bien...
Abraham: Es que necesitamos aprendernos la tabla del doce
Laura: Necesitamos hacer una tablita del doce... doce, doce, doce, doce... (hace el intento de sumar 12 más 12, pero lo deja de hacer, y continúa)...Ya sé, veinte en cada caja... (va diciendo y contando con sus dedos de 20 en20) veinte, cuarenta, sesenta... (Cada vez que dice un número, levanta un dedo).
Abraham: No, no, se pasa...
Laura: Entonces son diez".
Alfredo: (Busca en su tabla el diez, en la columna inicial, luego continúa en forma horizontal, hasta el cien, se queda pensando)... No, es mucho... (se sube sobre esa columna hasta el 50)... mejor cincuenta...

Aunque el primer intento fue fallido (con la multiplicación directa de dividendo por divisor), en sus comentarios posteriores Abraham y Alfredo mostraron una interpretación correcta del problema, tal vez ayudados por la intervención de la observadora, que les hizo fijarse en el resultado obtenido.

La expresión *"necesitamos hacer una tablita del doce",* pone de manifiesto cómo los niños se apoyan en lo que ya saben, para buscar alternativas de solución a un conflicto que están enfrentando. Además saben que esa alternativa que ofrecen es funcional.

En este equipo Laura empezó iterando el 12; no se sabe si porque reinterpretó el problema (como "12 chocolates en cada caja"), o porque estimó 12 como cociente hipotético. Después cambió su estimación a 20 y empezó a iterarlo para llegar al dividendo. Observó que era muy grande, y mejor calculó 10.

Por su parte, Alfredo usó la tabla, estimó 10 como cociente, pero resulta difícil explicar por qué dijo que "*es mucho... mejor cincuenta*".

Ana Cecilia: (de otro equipo también estimó diez) Sumando diez veces el doce... llego al ciento veinte...(hace la cuenta con sus dedos; cada dedo es un "10"; parte de "120" y continúa con los dedos)...ciento treinta... ciento cuarenta...

Aunque Ana Cecilia dijo que sumó diez veces el doce, por el contexto del problema y por lo que hizo enseguida parece claro que lo que estaba haciendo era iterar el 10, 12 veces; al observar que todavía le faltaba para llegar al 156, en vez de volver a estimar una cantidad mayor, perdió de vista el divisor.

En esta interacción se observa cómo, al intentar usar un procedimiento ya conocido (la multiplicación en la tabla) y darse cuenta de que no les funciona, los niños combinan otros como la adición iterada de cocientes estimados, que los lleva a usar el mayor dividendo que aparece en la tabla (10), aunque ello implique dejar un residuo grande, como se verá en el inciso c).

- El caso de Netzaí. Uso de tres procedimientos distintos

Netzaí, que había venido trabajando con la duplicación de cocientes, esta vez intentó dividir con un algoritmo de su creación. Inicialmente escribió

$$\begin{array}{r} 2 \\ 156 \\ 12 \\ \hline 322 \end{array}$$

Netzaí: (Se pregunta a sí mismo, al tiempo que trata de resolver la operación, tomando el doce de abajo y el seis de arriba) ¿Doce entre seis, doce entre seis?... (escribe el 2 de la derecha y continúa preguntándose)... ¿doce entre cinco? (en un intento por explicarse lo que él mismo está haciendo dice)... tengo doce chocolates y se los quiero dar a cinco personas... (parece que trata de organizar sus ideas y dibuja cinco circulitos en los que pone dos rayitas)... dos y sobran dos... (escribe el 2 de la izquierda y el "dos" que lleva, arriba del cinco).(Como resultado final escribe 322 -no se sabe cómo obtuvo el 3- y se pregunta asombrado) ¿Trescientos veintidós a cada unooo?, No, está mal... Al preguntarle qué fue lo que hizo, explicó: Primero le buscamos (en la tabla) el número más cercano a ciento cincuenta y seis (muestra su tabla)... es cien... dije: si diez son cien, diez por diez son cien (aclara) y diez por quince son ciento cincuenta y nos sobran seis...

Netzaí se centró en la búsqueda de un producto cercano a 156. No es muy claro en qué pensó al proponer 10 X 15 = 150. Quizá perdió de vista el divisor (12), o quizá hizo una estimación: 10 chocolates y 15 cajas da 150 chocolates, para de ahí ir ajustando. Después dibujó doce círculos y siete puntitos en cada uno:

Luego se centró en el 7 como cociente hipotético, y en el dividendo 156, perdiendo de vista el divisor:

7 + 7 = 14	28 = 4	56 - 8	112	140	140	147
14 = 2	28 = 4	56 - 8	28	14	7	7
14 = 2	56	112	140	154	147	154

Netzaí se pregunta a sí mismo: ¿Y ya no podríamos repartir los otros? ... nos sobran dos... (después explica a sus compañeros)... creí que era probable que fueran siete, entonces siete y siete igual a catorce, entonces ya llevaba dos cajas llenas... cincuenta y seis y cincuenta y seis igual a ciento doce y ya llevaba dieciséis cajas llenas...

Ao: Pero nada más eran doce (enfático)... (Netzaí sigue pensando)

Pese a que el caso de Netzaí es muy particular, se aprecia con claridad cómo fue combinando los procedimientos ya conocidos, y haciendo reflexiones por sí mismo. Se cuestionó y buscó explicaciones a lo que hacía, hasta que logró obtener un resultado que sí le satisfizo (como se verá en los siguientes párrafos).

b) Uso de la calculadora

Una vez resuelto el problema 2 de esta sesión 10 (156 12), se confrontaron los siguientes resultados:

Arsenio	Abraham	Otro alumno
"10 en cada caja y sobran 36"	*"10 y 6"*	*"13"*

Arsenio: Meto ciento veinte y me sobran treinta y seis...

En este primer resultado, al decir *"meto ciento veinte",* Arsenio dejó un residuo mucho mayor que el divisor, perdiendo de vista que aún podía continuar repartiendo.

En el caso del segundo resultado, pareciera que quienes lo obtuvieron, partieron también de un cociente hipotético. Posiblemente lo iteraron pensando en llegar hasta el 150, perdiendo de vista el divisor. A partir de ahí calcularon el sobrante de 6**.**

El tercer resultado, *13,* fue escrito por un niño que llevaba reloj con calculadora (no se reporta cómo lo encontró).

Cuando el problema había sido resuelto y Arsenio explicaba que el resultado era *"10 y sobran 36",* los demás seguían intentando encontrar cuál de los tres resultados era el correcto. Entonces se les dio una calculadora por equipo para que comprobaran. En este momento se dieron los primeros intentos de utilizarla para resolver problemas de división. Se observaron los siguientes casos:

b1) Alumnos que ya saben que la operación en juego es una división y la usan directamente (después de hacer intentos laboriosos para resolver el problema).

Netzaí seguía intentando con sus procedimientos. Cuando obtuvo la calculadora, oprimió las teclas para hacer la operación: 156 12= 13 y dice:

> Netzaí: ¿Trece, trece?, trece en cada una y no nos sobra nada... uy, yo que pensaba que eran más...
> Obs: ¿Qué es ese trece?
> Netzaí: Serían los trece chocolates, pero no sé si nos sobran o no, esta calculadora sólo lo hace, no nos explica ... si lo hacemos nosotros sí

podemos saber cómo lo hicimos... a ver, vamos a abrir esta cosa para ver cómo le hizo (en broma)

Netzaí dibuja doce círculos y dice: Son doce cajas, metimos trece...(empieza a dibujar trece puntos en cada círculo. Les pide a sus compañeros que vayan haciéndolo también)... ahora necesitamos... trece, trece... trece por doce, !trece por doce! (hace la operación en la calculadora y exclama) ¡Estamos bien, son trece en cada caja!

Netzaí partió de un intento "raro" que pareciera ser un algoritmo muy personal. Obtuvo un resultado que él mismo desechó, después estimó un cociente de 7 y optó por duplicarlo hasta alcanzar el dividendo, pero perdió de vista el divisor. Al disponer de la calculadora, demostró nuevamente que sabía cuál es la operación en juego. Encontró 13 y decidió verificar y buscar el residuo. Después de un intento de adición iterada, se dio cuenta de que la multiplicación de 12 por 13 resolvía su problema.

Veamos el caso de Julio, cuando se estaba confrontando el problema y probando con la adición de 13 veces el doce:

Ma: (refiriéndose a la suma de 12 + 12 +...) Pero acuérdense que ésto debe ser muy rápido, ¿No hay una manera más rápida?

Algunos aos: Multiplicando

Julio: No, porque si multiplicamos, se nos duplicara el 156... Nosotros lo hicimos en la calculadora con este signo (señala el signo)... y nos da este resultado (156) ...pero si lo hacemos con la multiplicación ¿Cómo lo hacemos con la calculadora?

Ma: A ver Julio, tú me dices que cuando aprietas este (teclas 1, 5, 6), luego éste (signo) y luego éste (teclas 1, 2), ¿Cuánto te dio?

Julio: Trece

Ma: Pero ahora yo te digo, si lo haces con multiplicación, ¿Como lo harías?

Julio: Multiplicara (sic) lo mismo, pero el ciento cincuenta y seis se me duplicara (sic) doce veces...

Ma: ¡Claro! y entonces ¿qué haces?

Julio: Se me hacían más dulces

Ma: Pero a ver, ¿qué es el trece?

Julio: Los chocolates que salieron

Ma: ¿Y qué podrías hacer con esos trece?

Julio: Meterlos en las cajas

Ma: ¿Y cómo sabrías que son los ciento cincuenta y seis chocolates?

Julio: Porque los ciento cincuenta y seis chocolates y los puse entre 12 y esos156 ya no fueron los doce, ya se dividieron en doce y se hicieron 13 para cada caja...

Ma: Y si tienes 13 chocolates en cada caja, cómo sabes que tienes por todos ciento cincuenta y seis? (Julio se queda pensando)... ¿Quién

le puede decir a Julio cómo sabemos que si metemos 13 chocolates en cada caja tenemos 156 chocolates? (preguntando al grupo)
Laura: Multiplicando trece por doce...
Julio: Ahhh... (con cierta inseguridad, se va a sentar).
Ma: ¿Entonces cuál es el resultado correcto? (señalando los tres que aparecen en el pizarrón)
Aos: Trece

En este fragmento se aprecian las dificultades que Julio enfrenta para distinguir cómo debe usar la multiplicación.

Cuando escuchó que una manera más rápida de resolver el problema es multiplicando, rechazó la idea, porque la interpretó como la multiplicación directa de dividendo por divisor. No asoció (como algunos de sus compañeros), la expresión *multiplicando*, a la búsqueda del número que multiplicado por 12, dé 156, no obstante que había podido hacerlo en sesiones anteriores, en las que tal vez le fue fácil por manejar cantidades pequeñas a través de la tabla de multiplicaciones.

Por otra parte, las preguntas planteadas no fueron lo suficientemente claras para ayudarle en esta tarea, posiblemente porque no siguieron la lógica de los razonamientos que hizo Julio.

Tal vez si en lugar de haberle hecho la primera pregunta ("Pero ahora... si lo haces con multiplicación, ¿Cómo lo harías?"), se le hubiera preguntado "¿Cómo puedes comprobar tu resultado?", le habría sido más fácil identificar a la búsqueda del multiplicando como medio para verificar.

b 2) Alumnos que sospechan que la calculadora debe hacer esa operación, pero desconocen el signo que la representa. Hacen conjeturas acerca de cuál es la tecla que hay que oprimir.

Laura: (multiplica en la calculadora 156 X 12 = 1772) ¡Ay, no, no, no! (borra, observa la calculadora y no sabe qué tecla oprimir, se decide y marca156, signo de raíz cuadrada, 12).
Alfredo: Pusiste raíz cuadrada, y tenemos que poner multiplicación.
Laura: No, porque te sale más...
Alfredo: ¡Entre, entre!
Obs: ¿Y cuál es "entre"?
Alfredo señala el signo de los dos puntos, hacen la operación y obtienen como resultado 13: Eh, eh, trece, trece!

En este ejemplo se aprecia cómo los niños se encuentran aún en el proceso de distinguir la multiplicación directa de la búsqueda del multiplicando, a la vez que descubren que en la calculadora, hay una tecla que al oprimirse, realiza una operación que arroja el resultado esperado.

Así, en algunos equipos los niños empezaron por multiplicar 12 por 156, pero no se convencieron; eligieron el signo de raíz cuadrada, que se parece a la "casita" o galera. Como tampoco les convenció el resultado (porque de alguna manera ya habían hecho otros intentos que sí los aproximaban al resultado correcto), pensaron y buscaron hasta que, al escuchar a Alfredo, escogieron el signo . Cuando vieron que el resultado era 13, se les pidió que explicaran:

> Armando: El resultado es trece, porque trece por doce da ciento cincuenta y seis
> Ma: Entonces cuántos chocolates van en cada caja?
> Enrique: Trece
> Ma: ¿Cómo supieron que era trece?
> Alfredo: (del equipo de Laura, ve el diagrama de la calculadora que se puso sobre la pared y explica) Lo hicimos manual...
> Laura: Pusimos trece veces el doce, pero también en la calculadora, primero pusimos ciento cincuenta y seis entre doce (señalando en el diagrama de la calculadora) y después sumamos doce veces el trece y nos da ciento cincuenta y seis...

Hace la operación en el pizarrón:

13
13
13
13
(repite el número 12 veces)

Mientras esto sucede, Abraham se acerca a la maestra y le dice que "este no puede ser entre, este es de descuento"...

> Ma: ¿De descuento?
> Abraham: Sí, ¿no te has fijado en las tiendas? Tiene diezo treinta de descuento

Abraham, indagando cuál es el signo de la división, lo confundió con el de porcentaje; después de todo, son muy parecidos. Al respecto, sólo se le dijo a Abraham que ese era otro signo, distinto al que estaban buscando.

Comentarios

Como puede apreciarse, algunos alumnos todavía manifiestan dificultades para distinguir explícitamente la multiplicación directa de la búsqueda del multiplicando. Tal es el caso de Julio, Laura y Alfredo.

En este proceso de evolución de los razonamientos que hacen los niños, juega un papel importante la interacción que se da en el grupo, al poder escuchar los comentarios y sugerencias de los compañeros, (en el caso de Julio, cuando alguien dijo que había que "multiplicar trece por doce", él se quedó pensando).

Las interacciones aquí reportadas constituyeron el eje de discusión dentro del grupo, ya que en la confrontación los alumnos estuvieron atentos a las explicaciones que daban sus compañeros.

Posiblemente ésto se debió a que la mayoría tuvo dificultades en el momento de la resolución, puesto que el segundo problema resultó "diferente" a los que hasta el momento se habían trabajado (dividendo y divisor "grandes").

Por otra parte, pudo constatarse que al trabajar con una división cuyo cociente es mayor que 10 (no puede calcularse directamente en la tabla), los niños combinan y adaptan los procedimientos que ya conocen y crean otros que para ellos son nuevos. Piensan en disponer de una tabla del 12, utilizan el mayor producto que arroja la tabla (10 X 10); estiman e iteran un cociente, o estiman y duplican el cociente.

Esto explica cómo el sentido y significado de la división se construyen en relación con las operaciones que ya dominan.

El hecho de contar con la calculadora favoreció, efectivamente, que los niños reconocieran a la relación de reparto como una nueva operación, cuyos elementos (al igual que las otras operaciones que ya conocen) se relacionan a través de un signo que está en una tecla de la calculadora.

Por lo menos dos de los alumnos se dieron cuenta que "la calculadora no dice cuánto sobra". Esto valida los procedimientos que los alumnos habían venido utilizando, como medios eficaces y "completos" para resolver y verificar.

B. Sesión 11

El propósito de esta clase fue que los alumnos representaran simbólicamente la operación implicada en un problema de multiplicación y en uno de división, para lo cual se les pidió "*escribir un mensaje a un centro de cálculo*".

La situación se planteó así:

"Estamos en un centro de cálculo. Yo les voy a dar un problema a cada equipo. Ustedes se van a poner de acuerdo y van a escribir un mensaje, diciéndome a mí, que manejo el centro de cálculo, qué es lo que tengo que hacer para resolver el problema... el mensaje debe ser lo más corto posible".

Los problemas planteados fueron:

1. "Si en un autobús caben 42 pasajeros ¿Cuántos pasajeros caben en 7 autobuses?"

2. "En la fiesta de María tienen 96 paletas para dárselas a 8 niños. ¿Cuántas paletas le pueden dar a cada niño para que todos tengan igual?"

A diferencia de las sesiones anteriores, en esta ocasión se trataba de decir *qué hacer* para resolver, y no de resolver los problemas. Esto provocó ciertas confusiones. Al principio varios niños no entendían lo que debían hacer, por lo que fue necesario enfatizar más de dos veces la consigna, aclarando que *"sólo escribieran lo que se debía hacer",* y *que "el mensaje debía ser lo más corto posible"* [4]

a) ¿Multiplicación directa de los datos o búsqueda del multiplicando?

El primer problema (42 x 7), aparentemente no tenía por qué representar dificultades para identificar la operación, partiendo del supuesto de que los niños ya la conocían. No obstante surgieron "mensajes" diversos y argumentaciones interesantes que reflejan nuevamente confusiones tal vez vinculadas a la aparición de la "búsqueda del multiplicando”.

Para la mayoría del grupo estaba claro que el primer problema (*42 pasajeros en un autobús, ¿cuántos pasajeros caben en 7 autobuses?*) implicaba una multiplicación, pero no todos lograron distinguir qué multiplicar.

Mientras elaboraban el mensaje los alumnos hacían comentarios con su equipo:

> Israel: Tienes que hacer una multiplicación
> Ulises: ¿Pero qué multiplicamos?
> Erandi: Siete por seis
> Israel: Noo...
> Erandi: Claro que sí,... siete por seis cuarenta y dos
> Israel: No... esos números no (parece que se desespera y no sabe cómo explicar lo que piensa)...
> Obs: Si no son esos números, ¿Cuáles tienen que multiplicar?
> Israel: Es que tienes que ver que son siete camiones...

Israel parecía tener clara la idea de que se necesitaba hacer una multiplicación, pero no la que sugirió Erandi. Ulises tal vez sabía también que hay una multiplicación en juego, pero no sabía cuál.

Erandi resolvió el problema como si la relación entre los datos fuera de división, seguramente porque ésta es la estructura de los problemas que había venido resolviendo.

Los mensajes que escribieron los alumnos, en los ocho equipos que se integraron, son los siguientes:

Equipo 1:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$$

Equipo 2: “7 veces 6 o si no 7 X 6 = 42”

Equipo 3: "Suma 7 veces el 42"

Equipo 4: "Multiplicar"

Equipos 5, 6 7 y 8: $\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$

Como se observa, hubo 4 equipos que escribieron el mismo mensaje, tres de los cuales registraron además, el resultado 294.

Cuando los mensajes se escribieron en el pizarrón, se confrontó uno de ellos:

Moira: (pasa al frente y escribe) $\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 6 \\ \hline 42 \end{array}$

> Ma: Si yo hago ésto (señalando la operación)... ¿Este es el resultado correcto?
> Aos: (a coro) ¡Noooo!
> Israel: (a Erandi) ¿Ya ves? (extendiendo su mano hacia Erandi)...

La intervención de la maestra se redujo a aceptar una respuesta para invalidar la operación propuesta, sin pedir argumentaciones. Posiblemente la forma de preguntar propició también que los alumnos contestaran que "no".

> Ma: Moira, te dije que no resolvieras el problema, sino que me digas cómo resolverlo... (Moira se queda callada)

Moira estaba diciendo con esa operación, cómo resolverlo; después de todo, encontrar el resultado permite darse cuenta de si la operación usada es o no factible para determinado problema.

> Ma: En el equipo siete me dicen que tengo que multiplicar cuarenta y dos por siete (escribe el resultado 294)... "En el equipo cuatro me dicen que tengo que multiplicar, pero no me dicen qué... A ver Emiliano (del equipo 4) ¿Qué voy a multiplicar?
> Emiliano: Siete por seis...
> Ma: A ver Emiliano, si en un autobús caben cuarenta y dos pasajeros y quiero saber cuántos pasajeros caben en siete autobuses, ¿Voy a meter más o menos pasajeros?
> Emiliano: Más

Ma: ¿Cuántas veces más?
(Emiliano parece no entender la pregunta, se queda pensando)
Armando: Seis (veces más)
Ma: ¿Por qué seis?
Armando: En uno tienes cuarenta y dos, y faltan los otros seis para tener siete.

En ese momento, un tanto descontrolada por la respuesta que dio Armando, no encontré inmediatamente una manera de propiciar una explicación que aclarara la idea de Armando frente al grupo, [5] y continué:

Ma: Muy bien... ahora el equipo nueve me dice que tengo que sumar siete veces el cuarenta y dos...
Arsenio: Hay una operación más rápida... multiplicando...
Ma: Voy a sumar 42 más 42 ... (mientras lo hace en la calculadora) ¿Cuánto creen que pueda salir?...
Arsenio: De todos modos sale lo mismo
Ma: ¿Por qué?
Arsenio: Porque es lo mismo, no más que más tardado

En este fragmento anterior está implícita la idea de "veces" asociada a la suma iterada y a la multiplicación.

Emiliano, al igual que Israel, comprendió el contexto y sabía que se iban a meter más de cuarenta y dos pasajeros en los siete autobuses juntos, pero resolvió buscando un factor que multiplicado por 7 diera 42, al igual que en las sesiones anteriores, sin darse cuenta del cambio de relación entre los datos de este problema.

La idea de *veces más* se introdujo de manera inesperada, confundiendo a Emiliano; pero fue retomada por Armando, que logró explicitar esa relación, al decir "*En uno, tienes cuarenta y dos, y faltan los otros seis para tener siete"* (autobuses con cuarenta y dos pasajeros). La idea de suma iterada, fue retomada por Arsenio, al afirmar que ésta y la multiplicación de 42 X 7 *"es lo mismo, no más que más tardado"*. Esto último tembién alude a la multiplicación como operación más rápida que la adición iterada.

Como puede verse, hubo falta de precisión en el planteamiento de la consigna, y por lo tanto fue difícil que los alumnos la entendieran, en el sentido de dar información al centro de cálculo, para decirle cómo resolver el problema.

De los ocho mensajes, el 3 (*"suma 7 veces el 42")* y el último (*42 X 7*) reflejan una comprensión de la consigna. El 2 (*7 X 6*) resuelve con la búsqueda del multiplicando que habían venido trabajando en problemas de división, y el 4 (*"multiplicar"*) es vago, porque no especifica qué hay que multiplicar.

En cuanto a la confrontación, no insistí en la consigna de *escribir el mensaje, lo más corto posible al centro de cálculo*, mismo que se debía limitar a realizar las operaciones. En cambio centré la atención en los procedimientos correctos e incorrectos usados por los alumnos, con la intención de que fundamentaran su uso.

Para el segundo problema de la sesión (*96 paletas, 8 niños*), los mensajes escritos por los niños (en equipos) fueron los siguientes:

1) 96 X 8
2) 8 veces el 10 y te sobran 16
3) "Repartir 96 entre los 8 niños" multiplicar 8 X 10
4) "Debes de repartir las paletas"
5) "Haciendo una división repartiendo96 paletas entre 8 niños
6) "tienes que hacer una división para este problema
7)
$$\begin{array}{r} 11 \\ 8\overline{)96} \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 96 \\ 8 \\ \hline 11 \end{array} \text{ sobra } 8$$
8)
$$8\overline{)96}$$
$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\, 8 \\ \hline \end{array} \text{ (borran) } \begin{array}{r} 6 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array}$$

El hecho de que la consigna no se comprendió del todo, aunado a que la mayoría desconocía la representación simbólica de la división, propició que los alumnos recurrieran a "decir cómo se resuelve el problema", con palabras. Sólo dos equipos escribieron la representación convencional de la división: el de Erandi (6) y el de Netzaí (7). En el caso de Netzaí, resolvieron a partir de una estimación de 11, y después pasaron ese resultado a la representación convencional.
La mayoría identificó la relación de reparto que existe en el problema.

- **Procedimientos usados por los niños**

Entre los procedimientos empleados por los niños para este problema, tenemos los siguientes:

b) Usos de la tabla

Las cantidades implicadas en el problema (96 8) impiden un manejo directo de la tabla de multiplicaciones, lo que, como en la sesión anterior, volvió a provocar reflexiones y polémica entre los niños, como lo muestra este fragmento de la interacción surgida en un equipo:

(Priscila lee el problema en voz alta)
Lucina: (va a la tabla de multiplicaciones que está sobre la pared; busca renglón por renglón, parece que busca el 96. Voltea hacia sus compañeros) ...diez a cada uno y sobran seis (aparentemente piensa en diez por nueve igual a noventa como operación) ...nos equivocamos porque creo que era a ocho, no a nueve... (ve la hilera del ocho) ... diez a cada niño y sobran dieciséis.
Lucina: (se dirige a sus compañeros) Sí, estaba bien como te había dicho, porque con María son más.

Lucina consideró que las paletas se reparten entre ocho niños, mas María, igual a nueve niños.

Obs: ¿Qué le mandarían al centro de cálculo?
Lucina: (reflexiona, viendo el problema y elabora el mensaje) Ocho veces el 10 y te sobran 16... las 16 se le quedan a María
Obs: ¿Y esas dieciséis que sobran, no se las podrías repartir a los niños?
Lucina: Sí, pero tendrían que ser nueve niños.
Alejandro: (del mismo equipo) Se les pueden dar dos a cada niño.
Priscila: (dibujó en su mesa ocho niños, le dio dos a cada uno y los cuenta) Dieciséis

Lucina se apoyó en el recurso de la tabla para hacer una estimación con base en el número mayor que aparece en ella, pero hizo una interpretación por cierto realista del contexto: aunque el problema decía que se va a repartir entre ocho niños, le resultó ilógico que no se cuente entre ellos a María, que es la festejada. Por lo tanto aumentó el divisor a 9 y encontró como resultado 10 y sobran 6. Después, ante la pregunta de la observadora (¿Qué le mandarías al centro de cálculo?), volvió a leer el problema, y cambió su resultado a *10 y sobran 16* (con 8 como divisor).

Algunos niños no saben cómo escribir el mensaje:

> Israel: ¿Es que cómo lo escribo?
> Obs: Sólo pónganse de acuerdo y díganle al centro de cálculo: tienes que hacer ésto, y ésto y ésto...
> Erandi: Una multiplicación ¿no?
> Israel: No, porque en la otra sí tenía que salir más, si usabas otra operación, te quitaba o te salía menos... ya sé, una división (brincando en su lugar).

Erandi dibuja la galera y le pasa la hoja a Israel para que escriba los números.

> Israel: ¿Dónde los escribo?
> Erandi: ¡Ay burro! (ella escribe el 96 dentro y el 8 fuera de la galera).

Israel hizo una buena interpretación del problema, pero en principio no sabía cómo escribir el mensaje. Erandi en cambio, parecía no poder interpretar el problema, pero sí sabía cuál es la representación convencional de la división. Cuando a Israel se le ocurrío que se trataba de una división, Erandi la representó por escrito.

En el razonamiento de Israel está implícita la idea de que la multiplicación agranda las cantidades, y la división las achica. Sabía que hay que repartir.

c) Cocientes parciales

Este procedimiento se presentó en el momento de la confrontación, cuando se eligieron los mensajes de dos equipos (seis alumnos), cuya operación sugerida fue la multiplicación directa de 96 por 8, que se invalidó por mi intervención:

> Ma: Si a ustedes les dicen que tienen ocho niños y noventa y seis paletas para dárselas, puede ser éste el resultado [6] (768)?
> Nayeli: No te alcanzan las paletas
> Aa: Sólo que las partieras
> Ma: Entonces ¿qué se puede hacer?
> Ma: Fíjense bien ¿Estos mensajes son correctos? (refiriéndose a los de las divisiones)... A ver Damara, pasa y explícanos como le harías (ella fue del equipo que escribió "Debes repartir las paletas")

Damara escribe

$$\begin{array}{r} 80 \\ +\ 16 \\ \hline 96 \end{array}$$

Ma: ¿Por qué ochenta, ¿Qué es el ochenta?...
Damara: Primero les dí diez paletas a cada niño, y luego les dí otras dos
Ma: ¿Por qué otras dos?
Damara: Porque faltaban (parece que quiere decir que "faltaban por repartir")
Ma: ¿Cuántas te faltaban de repartir?
Damara: Dieciséis
Ma: En total, ¿Cuántas paletas le tocan a cada niño?
Damara: Doce...

Damara escribió en su mensaje partes del proceso que siguió para resolver: anotó los dos productos que se derivan de los repartos sucesivos que hizo (80 y 16). Apoyada en una estimación de 10, hizo lo siguiente:

- Repartió primero 10 paletas a cada niño (10 por 8 = 80).

- Calculó mentalmente las paletas que faltaban por repartir: 96 - 80 = 16.

- Repartió las 16 paletas sobrantes entre los 8 niños (este reparto es sencillo).

- Sumó los cocientes parciales obtenidos en ambos casos, para obtener un cociente total de 12.

El procedimiento de *cocientes parciales* que ya había aparecido de manera incipiente en la sesión 8, problema 4 (47 4), está vinculado al aumento del tamaño de las cantidades, ya sea cuando los niños hacen una estimación global del cociente y el sobrante resulta mayor que el divisor, o bien cuando proponen cocientes parciales pequeños para repartir.

Este procedimiento puede esquematizarse así:

a) **d = D,** en donde **d** es el divisor y **D** el dividendo.
b) C1 d1 = D1
c) (D- D1 = D2)
d) C2 d2= D2

(C1 + C2)   d = D

C1 es un primer cociente estimado, que al multiplicarlo por el divisor, da un dividendo parcial cuya diferencia con el primero permite encontrar C2 como segundo cociente.

Como puede verse, recurrir a los cocientes parciales implicó para algunos niños la posibilidad de ir realizando el reparto poco a poco, hasta acercarse o agotar el dividendo. Es un paso más en el proceso de construir el algoritmo de la división que en su momento, los alumnos tendrán que usar, y seguramente lo harán de una manera más comprensible.

d) Institucionalización de la escritura de a b = c

Dado que el propósito de esta sesión 11 fue que los alumnos representaran simbólicamente la nueva operación que han estado usando, se consideró pertinente mostrar a todo el grupo que hay una manera convencional distinta a la que ya conocían (la galera), para representar a la división.

Cuando se pidió a los niños que decidieran cuál de los mensajes escritos servía para resolver el problema, surgió otra propuesta:

Ma: ¿Tú qué harías Israel?
Israel: Una división, (señala 8 / 96, pero no sabe cómo hacerla, regresa a su equipo con Erandi)
Erandi: Ay, babas (escribe en la hoja la división 8 / 96
Israel: Y el doce ¿abajo?
Erandi: Ay no, arriba...
En estos momentos va Arsenio al frente y completa la operación:

```
     12
    ____
8  / 96
      0
```

Arsenio: Noventa y seis entre ocho, a doce y sobra cero...
Netzaí: Hicimos una división... primero a cada niño le dimos once paletas... y como nos sobraban ocho, le dimos una más a cada quien...
Ma: Entonces ¿cuántas le tocaron a cada niño?
Netzaí: Doce...

Netzaí usó nuevamente los cocientes parciales. Partió de una estimación de 11, y al ver que tenían un sobrante de ocho, igual al divisor, repartieron uno más a cada uno, acción con la que se agotó el dividendo.

Ma: Bien... Fíjense bien... ¿Estos mensajes son correctos? (refiriéndose a las representaciones numeradas como 6 y 7 en los mensajes)
Aos: (varios): Sííí

Esta respuesta de ninguna manera significa que todos estuvieran de acuerdo, ya que sólo algunos niños conocían la representación de la galera para la operación, sin embargo ya en la sesión 10, se había trabajado con la calculadora para identificar en ella la función "dividir".

La institucionalización de esta operación se hizo así:

Ma: Para escribir un mensaje que me ayude a resolver este problema,... con puros números y símbolos, ¿Cómo le haríamos?... A mí me dicen que tengo que repartir (escribiendo los números) ... noventa y seis paletas (escribió el 96) entre ocho niños (escribió el ocho dejando un espacio), para saber cuántas paletas le tocan a cada niño (escribió el signo"igual")...

96 8 **=**

Así como ustedes tienen sumas y restas y un símbolo para representarlas, también tenemos este símbolo para la división (escribe el signo " ÷ " en medio del 96 y el 8)... Esta operación nos va a servir para resolver problemas cuando hay que repartir... y ahora yo les pregunto.... a ver, ¿cómo lo leemos... Priscila?...

En el pizarrón queda escrito: 96 8 =

Erandi: Noventa y seis entre ocho
Israel: Yo ya lo sabía... entre
Arsenio: Pero hay otro signo... (dibuja la galera en el pizarrón)
Ma: Sí, hay otro signo, pero por lo pronto vamos a usar éste (el signo) ¿Qué es lo que voy a repartir? (señalando el 96)
Aa: Noventa y seis paletas
Ma: Entre qué estoy repartiendo, Nemian?
Nemian: Entre ocho niños
Ma: ¿Y qué es lo que resulta?
Iván: Doce paletas a cada niño

Estas últimas respuestas tal vez no reflejen una verdadera interpretación o lectura de la operación, ya que mientras yo explicaba, iba señalando cada cantidad que mencionaba.

Ma: Yo ya tengo mi operación planteada ahí... noventa y seis entre ocho igual a doce paletas a cada niño... ¿Cómo puedo saber que ese resultado es correcto?

Israel: (desesperado) Una multiplicación ... (pasa contento al frente y escribe)

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Ma: ¿ Están de acuerdo en que si hago esa operación sale el resultado correcto?

Ao: Síi, pero lo hizo con la calculadora (Israel llevaba reloj con calculadora)

Ma: No importa, la operación está bien...

Tal vez hubiera sido mejor para los alumnos que se partiera de uno de los mensajes, (por ejemplo el que indicaba "repartir 96 paletas entre 8 niños"), y de la consigna misma (*hacer un mensaje breve*). De esta manera los alumnos habrían participado más con sus propias aportaciones.

Comentarios

El propósito de esta sesión, y en particular, de solicitar a los niños "mensajes" indicando lo que debía hacer el centro de cálculo, era seguir propiciando que identificaran la operación división, así como dar lugar a formas de representación.

A pesar de que el manejo que se hizo de la situación no favoreció que los niños realmente se dirigieran a un centro de cálculo (la consigna no fue clara, el centro de cálculo de hecho no existió), la mayoría de los alumnos explicitaron la existencia de la operación división, y esto permitió introducir de manera bastante natural la representación simbólica convencional.

El hecho de haber retirado de los equipos a los niños que tenían mayor dominio en el proceso de dividir y ponerlos como mensajeros, favoreció que los demás participaran en mayor medida.

De acuerdo a la forma en que se había venido trabajando, no resultó fácil para los niños distinguir entre *escribir la operación* y *resolver el problema*. Para ellos la segunda implica a la primera acción. Por este motivo tal vez, se dedicaron a buscar formas de resolver, rebasando la consigna de "escribir el mensaje" (operación). Además, no todos conocían su representación simbólica.

En esta sesión, el hecho de haber planteado un problema que se resolvía con multiplicación directa (42 X 7), favoreció que los niños externaran algunas propiedades que ya atribuían a la multiplicación y a la división.

Así, conciben a la multiplicación como una operación que agranda cantidades; como una suma "repetida" y como operación "más rápida" que la adición.

La división en cambio, produce un resultado menor (que el dividendo). La multiplicación es también, ahora, la operación que permite comprobar el resultado de una división.

En esta sesión la tabla de multiplicaciones resultó insuficiente para resolver repartos. Los niños se vieron obligados a buscar otros procedimientos como los tres distintos usados por Netzaí y el de *cocientes parciales*. Este último les permitió ir haciendo el reparto por partes, hasta agotar el residuo grande que tenían inicialmente, como lo muestran los casos de Damara y Netzaí.

C. Sesión 12

El propósito de esta sesión (la última de esta fase) fue permitir a los alumnos una vez más, comprobar que los resultados que obtenían aplicando sus procedimientos son iguales a los que se obtienen aplicando la función "dividir" de la calculadora.

En esta clase surgieron comentarios entre los niños, que reflejaron lo que la división había llegado a significar para ellos, siendo relevante la forma en que varios llegaron a concebir a la multiplicación como operación inversa de la división, así como el debate que se dio para decidir el residuo de un reparto sin dificultades aparentes.

La situación se expuso así: *"Hoy vamos a imaginarnos que todos vamos a ser repartidores de revistas... Tenemos setenta y dos revistas que vamos a dejar en ocho puestos, pero en cada puesto debemos dejar igual cantidad de revistas. ¿Cuántas revistas dejamos en cada puesto? Cada quien, solito... en su hoja, va a resolver este problema"*.

La dinámica de la clase se pensó así:

- Resolución individual del problema, con procedimientos propios
- Confrontación de resultados
- Resolución del mismo problema empleando la calculadora
- Confrontación de procedimientos usados con la calculadora
- Comprobación de que el resultado que se obtiene es el mismo.

Pese a que la intención era trabajar con un solo problema, las participaciones de los niños dieron pie a que surgiera otro (en el mismo contexto), al disminuir en una unidad el dividendo original, de 72 a 71.

- **Procedimientos usados por los niños**

Entre los procedimientos que aparecieron tenemos los siguientes:

a) Uso de la división

Karla (como otros alumnos que parecían haber tenido dificultades anteriores para distinguir entre la multiplicación directa y la búsqueda del multiplicando) parece haber interpretado correctamente el problema y representó la operación de manera convencional:

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \ \ 9 \\ \cline{2-2} 8\,/ & 72 \\ & \ \ 0 \end{array}$$

Ma: ¿Qué es eso Karla?
Karla: Es una miltiplicación
Ma: ¿Hiciste una multiplicación?
Karla: Sí, nueve por ocho
Ma: Esta operación que hiciste (señalando la división) ¿es una multiplicación?
Karla (observando su hoja): Ah no, es una división... (toma su hoja y escribe la multiplicación)

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 8 \\ \hline 72 \end{array}$$

Ma: ¿Por qué haces esa multiplicación?

Karla no pudo explicarlo, se quedó pensando y empezó a dibujar bolitas, como intentando representar el total de revistas. Parecía advertir ya la diferencia entre la multiplicación directa y la inversa (búsqueda del multiplicando); ante lo difícil que es explicar esto con palabras, intentó hacerlo con dibujos (dibujó pequeños círculos, como queriendo representar el total de revistas). Un dato que permite afirmar que realizó esta diferenciación, es el comentario que hizo cuando observó que Edgar escribió 72 X 8 y Karla le dijo: *"Eso está mal".*

En efecto, Karla realizó una división (que además representó correctamente), a través de la multiplicación adecuada. Por supuesto que era difícil para ella explicar por qué lo hizo así, pero encontró un recurso útil en la representación gráfica, para demostrar esa relación.

b) Uso de la tabla de multiplicaciones

Al confrontar resultados, apareció la tabla de multiplicaciones como un recurso para demostrar cómo se obtuvo el resultado:

Ma: ¿Cómo sabemos que es nueve? (al grupo)
Lucina: Es que hay ocho puestos... buscas en la tabla de Pitágoras el ocho, luego buscas el setenta y dos, te subes y está el nueve (apoya su explicación en la tabla).

Como se ha visto en otras ocasiones, cuando se hacía esa pregunta, los niños, para responder, apoyaban su explicación en el procedimiento "algorítmico" con la tabla. Tenían claro que en ella hay que identificar los datos que están en el contexto, y el que falta (el que se busca en la tabla) debe relacionar a los otros dos (exacta o aproximadamente).

c) Nuevamente los procedimientos de representación gráfica

Una pregunta mía con respecto al residuo, provocó polémica entre los niños y condujo al planteamiento y resolución de un nuevo problema:

(Los alumnos ya habían dicho que "no sobra nada")

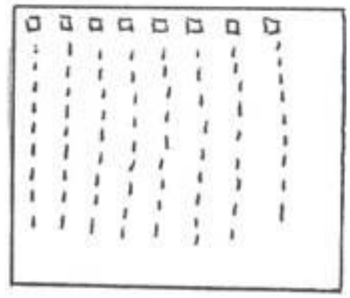
> Ma: ¿Cómo sabemos que no sobra nada?
> René: Es que si está aquí el setenta y dos (señalando la tabla), y allá también(señalando el problema escrito en el pizarrón), no sobra nada... Si estuviera el setenta y uno, sobraría una" (revista)...
> Ao: No es cierto, faltaría una
> Ma: A ver... pongan atención... si está el setenta y uno, sobra una... ¿Es cierto eso?
> Aos: Síii
> Ma: ¿Están seguros?
> Aos: Nooo, faltaría...
> Nayeli: Faltaría una para que estuvieran iguales en los puestos
> Ma: A ver pónganse de acuerdo ¿Sobraría o faltaría?
> René: Faltaría ocho, porque ahí son... (se queda pensando)
> Ma: A ver, si en lugar de tener setenta y dos revistas, tenemos setenta y uno. ¿Qué pasa?... resuélvanlo

El hecho de que los procedimientos de los alumnos para esos momentos ya eran más evolucionados, no implicó que los procedimientos iniciales desaparecieran; por el contrario, formaban parte de sus conocimientos previos, ahora con la ventaja de que sabían para qué les servían.

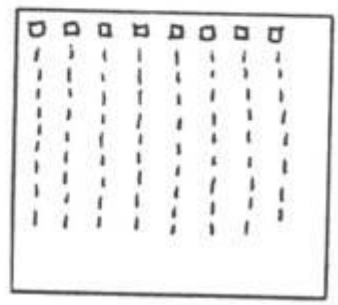
La mayoría de los niños resolvió ese nuevo problema con la tabla; otros con el procedimiento más seguro, que es el arreglo rectangular.

Cuando René rectificó y dijo que *"faltaría ocho*", parecía querer decir que "*sobrarían ocho*", y por lo tanto *"faltarían ocho por repartir*".

Para llegar a un acuerdo, Natalia pasó al pizarrón y dibujó los ocho puestos con las nueve revistas (72 revistas, 8 puestos):



Luego borró la última revista del último puesto, quedando así:



Armando: (Mientras Natalia dibujaba) En todas las hileras van nueve, y en la última ocho. Perdió de vista la equitatividad, lo cual no es extraño, porque el residuo era grande.

Hubo varios alumnos que usaron la tabla correctamente para resolver el segundo problema *(71 8):*

> Ulises: En la tabla yo busqué primero el sesenta y cuatro... ocho puestos(señalando en la tabla)... sesenta y cuatro revistas... (sube su dedo en la columna del 64)... ocho
> Ma: ¿Y ese ocho qué es?
> Aos: Son las revistas
> Ma: ¿Cuáles revistas?
> Ao: Las que le tocan a cada puesto
> Ma: ¿Y el sesenta y cuatro?
> Ulises: Las que tenías para repartir... sobran siete, porque son setenta y uno...

En este caso, como en otros, la representación gráfica ayudó a que estos alumnos se dieran cuenta de cómo, al disminuir en una unidad el dividendo

72, se transforma tanto el cociente como el residuo, (el primero disminuye y el segundo aumenta).

El arreglo rectangular sirvió para demostrar el reparto y al mismo tiempo entender por qué en la tabla se usa el 64, y sobran 7.

d) La calculadora

Se podría pensar que, después de las experiencias anteriores, para todos los niños ya sería evidente que con la calculadora, basta oprimir las teclas correspondientes a 72 8 ó 71 8, pero no fue así.

Del uso de los procesos ya descritos apoyándose ya sea en la adición iterada, en la búsqueda del multiplicando o en dibujos, a la acción de oprimir las teclas de la operación 71 8, hay una buena distancia: concebir que es una división y creer que en la calculadora lo pueden hacer directamente.

Veamos esta interacción:

> Ma: Bueno, ahora quién me puede decir, para resolver estos dos problemas(señalando los procedimientos que quedaron escritos en el pizarrón)... ¿qué fue lo que hicimos?
> (Los alumnos dan diferentes respuestas)
> Ao: Repartir las revistas
> Abraham: Platicar cómo se pueden sacar los resultados
> Karla: Dividir
> Ma: Ahora vamos a imaginarnos que todavía no tienen el resultado. Usando la calculadora, ¿qué tendríamos que hacer?
> Armando: Ocho por diez
> Arsenio: Voy a picar ocho por nueve...
> Ma: Pero ¿cómo sabes el nueve?... (Arsenio se queda pensando)
> Julio: (refiriéndose al problema 2, 71 entre 8) Le podríamos hacer de varias formas, sumando varias veces el ocho o multiplicando ocho por ocho...

(Julio escribe en el pizarrón *8 + 8 +8 +8 + 8 + 8 +8 +8* y también *8 x 8*)

Como Julio ya sabía que 8 era el resultado, en realidad lo que hizo fue verificarlo.

Posteriormente se les proporcionó la calculadora por equipo, especificando que explicaran cómo resolver el problema de 72 entre 8.

Itzel: (empieza a sumar 8 + 8 + ..., hasta que le sale 72, pero no llevó la cuenta de cuántas veces sumó el ocho. Después multiplica 8 X 9) está bien (hace la división de 72 8 = 9) bien, bien... todas son correctas

Tal vez Itzel, al sumar iteradamente el ocho, no lo hizo con la intención de iterar el divisor, sino que, ya teniendo el antecedente de que con 8 x 9 se resolvía el problema, lo mismo le daba iterar el ocho que el nueve (los niños ya sabían que no importa el orden de los factores).

Emiliano: (pasa al pizarrón y escribe la operación 64 8 =)
Ma: ¿Cómo se lee ésto? (señalando la operación)
Emiliano: Sesenta y cuatro entre ocho igual... pero también hicimos setenta y dos entre ocho igual a nueve...

Emiliano y su equipo hicieron la operación para los dos problemas. Lo que llama la atención, es que para el problema 2, cuyo dividendo era 71, tomaron el múltiplo del divisor más próximo a él (64). No se sabe si intentaron con la calculadora primero usando el 71, y al ver que les salía algo "raro" (decimales), optaron por tomar el múltiplo 64; de cualquier forma ellos ya conocían cuál era el residuo.

Ma: ¿Cuál está bien? (en el pizarrón estaba la adición iterada de 8 veces 8 y la multiplicación de 8 x 8, así como las operaciones 72 8 y 64 8)
Laura: La segunda sí (72 8) pero la tercera no (64 8)... porque estoy repartiendo setenta y dos revistas, no sesenta y cuatro...
Emiliano: Pero es de las dos divisiones (de los dos problemas)...
Ma: Bueno, y todo esto que hicieron aquí (los repartos gráficos y numéricos), ¿para qué lo hicieron?
Aos: Para repartir
Ma: En todos estos (procedimientos gráficos, de adición iterada y multiplicación) ¿hicieron lo mismo que aquí? (la división con los dos puntos)
Julio: Sí, no más que diferente
Ma: Entonces esta operación para ustedes ya no es tan nueva, porque la han venido haciendo de diferentes maneras. Esta (señalando 72 8) la van a usar cuando haya que repartir...

La consigna de "imaginar que todavía no tienen los resultados" (claramente establecida pero difícil de respetar después de haber resuelto los problemas con procedimientos propios), y resolver con la calculadora, remitió más que a una resolución, a la verificación de resultados, momento en el que se manifestaron las diversas operaciones que tenían que ver con la división.

Como se ha visto, durante la resolución surgieron casos como el de Karla, en los que se representó la división con la galera; esto implica que reconocía que se trataba de una nueva operación. Frente a la pregunta "¿Qué es eso?", dijo que "una multiplicación" (que por otro lado, distinguía de la multiplicación directa).

Cuando se preguntó al grupo "¿Qué fue lo que hicimos?", después de tener varios procedimientos a la vista, las respuestas que surgieron remitían ya sea a la descripción de la operación en términos del contexto, *repartir*, o al nombre de esa nueva operación, *dividir*.

Al término de esta sesión, la mayor parte de los niños ya identificaba las acciones que hacían al repartir, como una nueva operación "división", y varios de ellos utilizaron la representación convencional de la galera. Todos sabían que la multiplicación es la operación que está implicada, aunque por supuesto no podían formular de manera explícita, la diferencia entre multiplicación directa y búsqueda del multiplicando.

Se seguía difundiendo un término ("división") con el que pueden nombrar "esta multiplicación", que no es *la multiplicación*.

Comentarios

Durante esta tercera fase se manifestaron con cierta solidez, algunas concepciones que los niños iban construyendo en torno a la división. Sabían por ejemplo, que la tabla de multiplicaciones (hasta el 10) no es un recurso útil para todos los casos en que se busca el resultado de una división, y que cuando el dividendo es mayor que 100, debían buscar otros procedimientos que les permitieran realizar el reparto hasta agotar el dividendo.

Esto propició que surgieran ideas como "necesitamos una tabla del doce"; procedimientos combinados como la adición iterada, la duplicación de cocientes estimados, o el procedimiento de cocientes parciales, que aunque se presentó en pocos casos, se dio a conocer en el grupo al momento de la confrontación, y que seguramente contribuyó de alguna manera, a entender con mayor claridad que ante un residuo mayor que el divisor, el reparto puede continuarse.

Se hizo explícita en algún momento (sesión 11) la idea de la multiplicación como adición iterada, vinculada a la expresión "veces" que se repite un número, y al mismo tiempo se vió a la multiplicación como una operación más rápida que la adición.

Los alumnos lograron identificar con mayor claridad la relación que guarda la búsqueda del multiplicando con la división. Conocían y manejaban la calculadora como otro recurso, que aunque también tiene limitaciones porque no da el residuo, les permitía encontrar resultados directamente, o bien verificarlos.

Pese al conocimiento de este nuevo recurso, los niños echaron mano del conocimiento previo de aquellos procedimientos que en su momento les sirvieron para "empezar a visualizar los elementos de un reparto" (representaciones gráficas); ahora los usaban para demostrar otros procedimientos más evolucionados (el uso de la tabla y la búsqueda del multiplicando) y para asegurarse de que los resultados que encontraban eran los correctos.

Se manifestó también la idea de que "si el dividendo aparece en el interior de la tabla, el reparto es exacto, es decir, hay un residuo de "cero", y si el dividendo no aparece en ella, entonces habrá que calcular el residuo.

La mayoría pudo distinguir cuándo un contexto implica el uso de la multiplicación directa, y cuándo se requiere la búsqueda del multiplicando.

La confrontación de resultados abrió la oportunidad de que avanzaran en el proceso de saber que aunque las cantidades sean grandes, el residuo debe ser menor que el divisor.

Un aporte valioso de los niños fue el hecho de que al enfrentar un reparto exacto (72 8), sencillo, al disminuir en uno el dividendo, el resultado se altera tanto en el cociente como en el residuo.
Habría sido interesante plantear una situación contraria, en la que vieran que si se aumenta el dividendo en 1 (73 8), sólo varía el residuo, aumentando también en 1, y se mantiene el cociente.

Con esta tercera fase del estudio concluyó también el trabajo de los niños enfrentándose a problemas para determinar la operación que los resuelve. En la fase siguiente y última de este estudio didáctico, la tarea fue a la inversa: a partir de la operación, había que crear problemas que la involucraran.

---

[1] Se decidió usar esta forma de representar a la división por estar más apegada a la lógica de lectura (de izquierda a derecha) que la de la galera; y porque ésta es más apropiada para aplicar el algoritmo (lo cual no forma parte de esta investigación.

[2] En la sesión se abordaron solamente tres problemas, dos de adición y uno de multiplicación, con el propósito de que los niños identificaran la operación en juego, y usaran la calculadora, mediante su libre exploración.

[3] Recordemos que se está trabajando con números naturales, por lo que, la búsqueda del multiplicando se refiere a buscar el número que más se aproxime al dividendo, en este caso es el 72, más el residuo 4.

[4] Se integraron los equipos de tal manera que quienes habían logrado un mayor avance en el manejo de la multiplicación y la división, participaran como “mensajeros”. Ellos debían recolectar los mensajes de los equipos.

[5] Esto sucede con frecuencia cuando a los niños se les pregunta "¿Cuántas veces más?", por lo que es necesario ser cuidadosos con la manera de plantear las preguntas. Por otra parte, éste es sólo un ejemplo de las múltiples situaciones que surgen en el aula de manera espontánea, y sobre las cuales no se tiene un control absoluto.

[6] La forma en que pregunta la maestra, y tal vez el tono en que se hizo pudo haber influido en el hecho de que los alumnos centraran la atención en ese resultado para descartarlo.

CAPÍTULO 7

DE LA EXPRESIÓN SIMBÓLICA, NUEVAMENTE AL CONTEXTO

Hasta la sesión 8 los niños resolvieron problemas de reparto, logrando al final usar para ello la búsqueda del multiplicando. Poco a poco, y sobre todo en las sesiones 10 a 12, identificaron la operación implicada en estos problemas, con la división. En la sesión 11 se institucionalizó la representación simbólica **a ÷ b = c** de la operación división. Como ya vimos, este hecho no implicó que todos los niños reconocieran lo que hacían al resolver un problema de reparto, con la operación. Hay un camino por recorrer.

En las situaciones de esta última fase (13 a 18), los alumnos se enfrentaron a la representación simbólica **a ÷ b = c** y debían construir una relación entre las magnitudes que le corresponden.

El propósito general fue afirmar el significado de la división, en tanto operación que resuelve problemas de reparto equitativo y exacto o inexacto, al elaborar y/o analizar problemas.

Se verá entonces cómo, al hacerlo, algunos niños enfrentaron ciertas dificultades que tenían que ver tanto con el orden en que se "acomodaran" los datos de la operación dentro del contexto (dividendo primero y divisor después), como con las magnitudes que les asignaban. Estas dificultades llevaron, en algunos casos, a la creación involuntaria ya sea de problemas de tipo tasativo, o de multiplicación.

Se analizarán también los significados, propiedades y representaciones que le atribuyen a la división; éstos han sido interpretados a partir de los argumentos que daban los alumnos para defender o rechazar ciertos problemas revisados durante las confrontaciones en clase; dichos argumentos reflejan las relaciones que ya lograban establecer, por ejemplo, entre la búsqueda del multiplicando, y la multiplicación directa de los datos de un problema de reparto.

A continuación se presentan las características didácticas de las situaciones de esta fase, para después hacer referencia a los aspectos relevantes en el proceso de producción y análisis de los problemas escritos por parte los niños.

1. CONDICIONESDIDÁCTICAS

a) Con respecto a los problemas

Se trabajó con problemas de división en las sesiones 13, 15 y 18. En las sesiones 14, 16 y 17 se abordaron también problemas de adición, sustracción y multiplicación, de acuerdo al propósito de cada situación (ver cuadro 4, p.).

- *Contexto y estructura*

En esta fase del estudio se procedió generalmente al planteamiento de la operación de mi parte, por lo que el contexto y estructura de los problemas estuvo a cargo de los niños, ya que ellos debían escribir los problemas a partir de las interpretaciones que hicieran de las operaciones. Así, los problemas producidos variaron, aunque predominó, como se esperaba, la creación de problemas de reparto en el caso de la división. Por lo que se refiere a las demás operaciones, los niños crearon problemas adecuados, presentando argumentos interesantes que se analizan en los apartados de este capítulo y que permitieron identificar algunas propiedades que atribuyen a las operaciones, así como los significados que dan a la división.

En la sesión 14, intencionalmente se presentaron problemas incompletos, a fin de que los niños los analizaran y dijeran si eran correctos o no. En el primer problema falta el divisor; en el segundo hay dos dividendos y ausencia del divisor; el tercer problema, completo y correcto, es de multiplicación.

- *El tamaño de los números*

En la situación 13 se usaron dos operaciones de división cuyo dividendo y divisor eran grandes (240 ÷ 15 y 360 ÷ 60). En las situaciones restantes varió el tamaño de los números.

En esta ocasión el residuo no fue un aspecto relevante a analizar ni representó dificultades para los niños.

b) Con respecto a la dinámica de la clase

La tarea fundamental de los alumnos en esta serie de situaciones fue la redacción de problemas. La dinámica se invirtió con respecto a las fases anteriores, en las que dado un problema, los niños buscaban cómo resolverlo. Ahora debían interpretar la operación para escribir el problema.

- *Procedimientos e instrumentos para resolver*

En esta fase no se propició el uso de algún procedimiento o instrumento de cálculo en especial, puesto que el propósito estaba centrado en la elaboración de problemas y no en la resolución de divisiones. No obstante, cuando los niños resolvieron las operaciones, echaron mano de los recursos e instrumentos que ya conocían, usándolos ya sea para resolver o para verificar resultados. La calculadora y la tabla de multiplicaciones estuvieron siempre al alcance de los niños.

- *Especificaciones para resolver*

En las sesiones 13 y 15, la situación fue "*crear problemas a partir de una operación*".

En la sesión 14, los niños analizaron e interpretaron problemas redactados por ellos (en la sesión anterior), bajo la consigna de decir *si los problemas planteados podían resolverse o no, y por qué.* En la sesión 16 los alumnos escribieron nuevamente problemas, esta vez para operaciones de adición, multiplicación y división. En la sesión 17, debían identificar y escribir la operación que resuelve problemas dados de adición, multiplicación y división. Por último, en la sesión 18, se enfrentaron a la tarea de resolver divisiones sin contexto, a partir de la consigna *"hagan lo que se indica".*

- *Organización del grupo*

De las seis sesiones que integran esta fase, en las sesiones 13 y 15 se pidió a los niños que escribieran sus problemas en forma individual, así como que en la sesión 18, resolvieran solos las divisiones propuestas. En las sesiones restantes trabajaron en equipos.

CUADRO 4

SITUACIÓN	PROPÓSITOS	PROBLEMAS	OTRAS CONDICIONES DIDÁCTICAS		DINÁMICA
13 y 15. La carta del país de las matemáticas	Interpretar el significado de la representación numérica de la división, bajo la forma *a÷b = c* al elaborar problemas que la impliquen.	1) 240÷15= 1) 360÷60= 1) 57÷8=	- Dada la operación, escribir un problema. - Números que implican cocientes que no están en la tabla de multiplicar. - Números pequeños.	Inventen un problema para este mensaje y escríbanlo.	Para cada operación: - Escritura del problema (por los niños). - Confrontación de los textos escritos por los niños. - Resolución con procedimientos diversos y con calculadora.
14. ¿Se puede resolver?	Analizar algunos problemas (escritos en sesión 13) y argumentar si el planteamiento es correcto o incorrecto	2) Me compraron 125 lápices y para repartirlos tengo que ponerlos en bolsas. ¿Cuántos lápices meteré?	- Divisor ausente (problema 1). - Dos dividendos y divisor ausente (problema 2). - Contexto de multiplicación.	Digan si se pueden resolver o no, y por qué.	Trabajo en equipo: - Cada equipo analizó dos problemas. - Confrontación de argumentos.

		3) Raúl tenía 160 pastillas de dulce y también compró 80 chicles para repartir los chicles entre sus amigos. ¿Cuántos chicles les dio a sus amigos? 4) Un niño tiene 7 paquetes con 12 juguetitos en cada paquete. ¿Cuántos juguetitos tiene por todos?			- Resolución de problemas una vez completos.
16. Inventamos problemas	Elaborar y resolver problemas de adición, multiplicación y división, a partir de la operación correspondiente.	5) 15+7= 6) 7x6= 7) 32÷4=	Operaciones diversas.	Inventen un problema para cada operación.	Trabajo en equipos: - Escritura del problema para cada operación. - Confrontación de los problemas 2 y 3.
17. ¿Qué operación usamos?	Identificar la operación que resuelve un problema en diversos contextos.	8) En la delegación Coyoacán tienen 368 árboles para regalar en 23 escuelas. ¿Cuántos árboles le regalarán a cada escuela? 9) Inés pidió a sus	Contextos diversos.	Escriban en un papelito la operación que se debe hacer.	Trabajo en equipos: - Escritura de la operación para cada problema. - Confrontación de operaciones y resolución de los problemas.

		alumnos corcholatas para trabajo manual. El primer día trajeron 75, el segundo día 120 y el tercer día trajeron 78 corcholatas ¿Cuántas corcholatas juntó Inés en los 3 días? 10) El Señor Pérez fabrica 27 pantalones diarios. ¿Cuántos pantalones fabrica en 17 días?			
18. Busquemos el resultado	Resolver divisiones a partir de su representación simbólica.	11) 60÷7= 12) 46÷4=	Ausencia de contexto.	Hagan lo que se indica.	Trabajo individual: - Resolver la operación. - Confrontación de procedimientos y resultados.

2. LOS PROBLEMAS ESCRITOS POR LOS NIÑOS

A continuación destacaré algunas características de los problemas que los niños produjeron a lo largo de estas situaciones.

A. Relaciones entre los datos de los problemas

La mayor parte del grupo logró establecer una relación directa entre la representación simbólica de la división y los datos de un problema tipo reparto. Para la operación a ÷ b = ?, escribieron problemas del tipo “se reparten *a cosas* entre *b niños*, ¿cuántos le tocan a cada quien?

Los pocos niños que no lograron hacer esta relación, manifestaron las dificultades que encierra crear un problema que implique repartir, con sus datos y su pregunta.

En la sesión 13 se propusieron dos operaciones **(240 ÷ 15** y **360 ÷ 60**). La situación se introdujo con la lectura de una carta que llegó para los niños, “desde el país de las matemáticas”, en la que se les pedía inventar un problema a partir del **mensaje** [1] enviado.

La intención al incluir números relativamente grandes, fue evitar la tendencia a resolver el problema, propiciando en cambio que los alumnos se concentraran en armar el texto. Sin embargo, más adelante veremos que esto no fue del todo adecuado.

En la sesión 15 (*los mensajes del país de las matemáticas*) sólo se usó con la operación **57 ÷ 8**. Se usaron cantidades pequeñas con la finalidad de que, después de inventar problemas, los niños los resolvieran.

En los textos de los niños se aprecia desde la sesión 13, que prácticamente todos reconocían que en un problema se deben dar datos y una pregunta que se pueda contestar con ellos.

A continuación presentaré un análisis de los textos escritos por los niños, clasificados en función de las relaciones que establecieron entre los datos:

a) Con estructura de reparto y relación correcta “dividendo-divisor-cociente”

En esta categoría se incluyen los problemas que pueden considerarse “correctos” y completos, en los cuales se establece la relación *“Se tienen 240 para repartir entre 15, ¿Cuánto le toca a cada uno?”.*

En la situación 13, un total de 30/34 niños escribieron problemas con esta relación, para las dos operaciones (**240 ÷ 15; 360 ÷ 60**). En la situación 15, fueron 28/30 los alumnos que usaron correctamente la relación de reparto. En la sesión 16 (trabajo por equipos) de los 9 equipos, 8 escribieron problemas de reparto con estructura correcta. Dentro de esta categoría se dan las siguientes variantes:

- **Manteniendo el orden de las cantidades, según la operación**

De los 30 niños que armaron el problema con estructura correcta de reparto en la sesión 13, 25 lo hicieron respetando el orden de las cantidades e incluyendo la pregunta específica correspondiente al problema.

En la sesión 15, todos mantuvieron el orden de las cantidades, a excepción de Erandi, cuyo problema ocasionó polémicas interesantes que se describen más adelante, al hablar de "conmutatividad o no conmutatividad". Como ejemplos de problemas creados por los alumnos, se encuentran los siguientes:

Alba: Compré 240 bombones para repartirlos en 15 niños ¿Cuántos bombones le tocaron a cada niño?"

> René: *En un banco hay 240 $ y los quieren repartir entre 15 trabajadores ¿Cuantos pesos sobran y cuanto le toca a cada trabajador?* [2]

A diferencia de los demás, René agregó una pregunta referente al residuo, *¿Cuántos pesos sobran?*, lo que refleja que tenía presente que en un reparto, puede o no existir un sobrante, que será parte del resultado.

Christian: En una disco hay 240 gentes se reparten ÷ 15 gentes ¿Cuántos bailan con cada persona?

Christian fue de los pocos alumnos cuyo texto varía un poco del estereotipo "dulces entre niños". Parece que la idea de Christian fue que las 240 personas (o las 240 menos 15), iban a formar 15 grupos iguales para bailar con 15 bailadores.

Iván escribió el primer problema así:

"En una fabrica ay 240 dulces para repartirlos en quince tiendas que se llaman la reina, el angel, maria, altiendas altas, de todo, ales, panda, real, la superior, continente, cancun, maria, chonita, videos, macrotienda, ¿pero los de la fabrica quieren saber quantos dulces le toca a cada tienda?"

El texto llama la atención por la forma minuciosa en que especificó la cantidad de tiendas en las que se repartían los dulces, nombrando cada una de ellas, pero además, representó el resultado de manera gráfica y numérica.

Nemian: "Me compraron 240 plumines y para repartilo tetengo que poner en otra bolsa ¿cuntos metere?"

En el texto está explícita la idea de reparto, y aparentemente también la identificación del dividendo, como cantidad de plumines a repartir, pero al ir escribiendo el problema, Nemian perdió de vista el divisor (15), e implícitamente propuso un divisor igual a 2.

Otros problemas similares al problema "tipo" (sesión 16), son:

Equipo 1: *En una fabrica isieron 32 periodicos y los quieren repartir en 4 tiendas ¿Cuántos periodicos son en cada fabrica?*

El texto contiene la idea correcta del reparto, con una pequeña equivocación en la pregunta al escribir "en cada fábrica", en lugar de "en cada tienda".

Equipo 7: *"En un zoológico hay 32 tigres y los quiero repartir entre 4 jaulas. ¿Cuántos tigres hay en c/u de las 4 jaulas?"*

Como puede verse, estos problemas tienen un planteamiento correcto tanto del texto como de la pregunta, y la relación es claramente de reparto.

- *Variando el orden de las cantidades (primero el divisor, después el dividendo)*

Cuatro alumnos, de los 30 que plantearon problemas correctos en la sesión 13, tomaron en primer término el divisor 15, pero hicieron una interpretación correcta de la operación, sin perder de vista la relación del reparto entre los datos, por ejemplo:

Ulises: En una fiesta hay 15 niños y quiero repartir 240 chocolates. ¿Cuantos chocolates le toca a cada niño?

Rodrigo: "Tengo 15 amigos y 240 canicas les voy a dar a cada niño ____"

Rodrigo no planteó la pregunta en la forma tradicional, pero el hecho de dibujar la línea, deja implícita la idea de que ahí va el resultado de lo que le toca a cada niño.

- **Usando datos diferentes a los de la operación**

Belem (sesión 13, operaciones **240 ÷ 15 y 360 ÷ 60**) elaboró dos problemas de reparto con cantidades distintas a las que se proponían en la operación:

*"Tengo 15 paleta y hay 3 sobres y los quiero repartir cuantas caben en 3 sobres. a cada sobre le toca 5 paletas***"**.

"Tengo 20 botes y los quiero repartir a 2 niños ¿a cada niño cuantos les toca? Les tocan a 10".

En el primer problema, la pregunta no plantea específicamente "en cada sobre", sino "cuántas caben en tres sobres", pero la idea de un reparto equitativo se manifiesta en el resultado *("a cada sobre le toca 5 paletas").*

No sabemos si Belem tuvo dificultades para crear un problema con números tan grandes. Llama la atención que las cantidades que uso son muy pequeñas.

En la situación 15, para la operación 57 ÷ 8, Juan Alfredo escribió este problema:

”En una fabrica hay 56 gomas y las tuvo que repartir en 8 (fábricas) tiendas ¿Cuántas gomas hay en cada papelería?”

Juan Alfredo cambió el dividendo, (de 57 a 56). Parece que antes de hacer el problema, buscó o calculó el resultado de la operación 57 entre 8, y al ver que sobra uno, tomó la cantidad exacta del reparto (56) y la anotó como dato en el problema.

Por otra parte, retomó el contexto que había empleado en la sesión 13 (gomas y papelerías), pero parece que las magnitudes le causaron cierta dificultad. Primero mencionó 8 fábricas; tal vez se dio cuenta de que en el inicio del texto escribió “en una fabrica”, y ésto lo hizo cambiar la palabra a *tiendas*, encerrando entre paréntesis “fabricas”. Finalmente en su pregunta aparece como magnitud del divisor “papelería”. La relación de reparto está correctamente establecida y la pregunta es congruente con el contexto.

El haber resuelto numerosos problemas de igual estructura, permitió a estos niños destacar y reproducir dicha estructura:

a ÷ b = _____

a repartido entre b, ¿cuánto le toca a cada uno?

Es claro también que las situaciones de reparto que propusieron los niños son un tanto artificiales (32 tigres entre 4 jaulas), lo cual no debe sorprendernos, ya que la variedad de situaciones de reparto equitativo con y sin residuo que se dan en la vida cotidiana de los niños, no es muy amplia.

El tamaño relativamente grande de los números también dificultó la creación de problemas plausibles, quizá por eso Belem usó números pequeños. No obstante, notemos que los problemas poco realistas (incluso fantasiosos) que inventaron los niños, [3] no les crearon dificultades para comprender la relación involucrada, ni para resolverlos. Pueden ser poco realistas para nosotros, pero para ellos son significativos en la medida en que comprenden la relación entre los datos implicados, y pueden resolverlos con los recursos que habían desarrollado hasta ahora para dividir. Así, "realista" y "significativo", no necesariamente son propiedades dependientes una de la otra.

b) Dificultades para identificar datos e incógnita

Para algunos niños no resultó sencillo escribir un texto a partir de la operación. En este proceso, manifestaron algunas dificultades que los llevaron a crear problemas que implican otra operación.

- ***Cambio en el orden de las magnitudes***

Al redactar problemas, algunos niños incluyeron entre los datos conocidos, **"***lo que le toca a cada uno"* (incógnita en los problemas de reparto), construyendo un problema de multiplicación. Estos son algunos ejemplos:

Juan Alfredo escribe el siguiente problema (**240 ÷ 15,** problema 1, situación 13)

"En una fabrica hay 240 gomas y las repartio en cada papeleria y repartieron 15 gomas ¿Cuántas gomas repartieron en total?

La primera parte de este texto invita a pensar en una relación de tipo tasativo, pero tal vez esto no fue lo que pensó el niño, ya que en la segunda parte se pregunta por el total de gomas repartidas, y no por el número de papelerías.

En una estructura de reparto, *el número de gomas para cada papelería*, es el resultado. Juan Alfredo lo ubicó como dato al ir redactando y ésto lo llevó a escribir una pregunta congruente con él ("Cuántas gomas repartieron en total?"), obteniendo algo parecido a un problema de multiplicación.

Otro caso interesante es el de Armando (problema 1, sesión 13):

"Pancho tiene 240 chocolates y le dan a 15 niños 15 chocolates ¿cuantos chocolates hay en total?

En este problema aparece inicialmente una relación de reparto*, "240 chocolates y le dan a 15 niños",* pero al dar el dato "15 chocolates", crea una relación de multiplicación, y en efecto, su pregunta apela a esta operación.

Lo mismo vuelve a suceder en el segundo problema que inventa:

"En una fiesta hay 360 paletas y a cada niño le toco 60 ¿cuantas paletas hay en total?"

Al ir redactando el texto, Armando se enfrentó a la dificultad de saber qué magnitudes están en juego en el reparto, y cuál de ellas es la incógnita.

Otro ejemplo de este tipo, es el problema que escribió Diana (sesión 15, operación 57 ÷ 8):

"rebeca tiene 57 gatos y les repartio 8 leches a cada uno ¿cuantas les repartio en cada uno?"

Debido a las intervenciones de sus compañeros, cambió las magnitudes y el problema quedó así:

Rebeca tiene 8 gatos y les repartió 57 leches a cada uno

Diana: Voy a repartir las cincuenta leches

Julio: No, porque sobrarían siete leches"... si le dan esas sobran muchas, y estarían sumando mas no dividiendo...

Julio se dio cuenta de que el problema así, implicaba una adición iterada y no una división. Después de una larga discusión en el grupo, explicó:

Julio: "Es que si tienes ocho gatos, le puedes dar como seis (a cada uno) y estaba sumando, no dividiendo...

Al escribir este problema, inicialmente Diana, además de dar la magnitud intensiva ("a cada uno") como dato, asignó a las magnitudes *gatos* y *leches* los papeles de dividendo y divisor, respectivamente (en un problema de reparto común sería a la inversa), lo que dificultó aún más que culminara la elaboración de un problema de reparto. Julio se dio cuenta de que un problema como éste, sugiere más una multiplicación, pero le resultó muy difícil explicarlo.

- ***Interpretan la operación "a ÷ b" como a x b"***

Lucina, en la sesión 15 (operación 57 ÷ 8), escribió:

"en una escuela hay 57 salones y en cada salon hay 8 niños ¿Cuantos niños hay en los 57 salones?

Lucina perdió de vista que la relación era de reparto. Formuló un problema que implica multiplicación, correctamente estructurado.

Aquí juega un papel importante el uso de las magnitudes; tal vez si le hubiera asignado la magnitud "niños" al 57, y la magnitud "salones" al 8, le hubiese resultado más fácil crear un problema de división.

- ***Crean problemas con estructura tasativa o de agrupamiento***

Karla escribió el siguiente problema:

En una tienda queria comprar el niño y tenia 15 y un chocolate balia 15 ¿Cuantos le alcansa al niño?

Karla omitió el 240 y usó dos veces el 15. En su problema es claro que hay una relación tasativa. La pregunta **"***¿Para cuántos le alcanza?,* es congruente con los datos.

Cuando se le pidió a Karla que leyera la operación, se *dio la siguiente interacción:*

> *Ma: "A ver Karla, ¿Cuál es el mensaje?..*
> *Karla: Dos mil... (*tratando de leer la operación*)*
> *Ma: ¿Dos mil? (Karla ve el 240 y no contesta, hasta que Lucina dice: "Doscientos cuarenta".*
> *Karla: (*pensando*) "Doscientos cuarenta entre quince niños"...*

Karla tuvo dificultad para leer la primera cantidad (240) y posiblemente por eso no la escribió en su texto. Finalmente parece que Lucina le ayudó al leer el 240, y entonces sí, Karla cambió la relación tasativa de su texto escrito, por una relación de reparto que expresó verbalmente, y que tal vez fue en la que pensó, pero le fue difícil escribir.

Jezabel (sesión 13) escribió dos problemas para la operación **240** ÷ **15**. El primero se refiere a reparto, y el segundo tiene una relación de tipo tasativo:

"Damara quiere comprar una caja de chocolates y la caja de chocolate cuesta 15 se mil peso y ella tiene 240 mil pesos ¿Para cuantas cajas de chocolates le alcanza"

Jezabel hizo una transformación del mensaje, convirtiendo las cantidades a "miles". Al asignar al 15 la magnitud pesos (por caja) y escribir la pregunta, armó un problema con estructura tasativa, de manera correcta.

A diferencia de Juan Alfredo, quien dio los datos de un problema tipo tasativo, pero formuló una pregunta que remite a la multiplicación, el problema de Jezabel contiene una pregunta congruente con los datos.

La forma en que Jezabel elaboró su problema, nos permite ver lo siguiente:

- – Identificó tres datos de una operación
- – Los organizó en *datos - incógnita* de manera congruente
- – No logró relacionarlos para generar un reparto, y generó un problema tasativo

Hasta ese momento, los niños asociaban o identificaban la división con la idea de "reparto". Por lo tanto es poco probable que ya supieran que cuando en los datos aparece *un total a repartir*, y *lo que le toca a cada uno*, el problema también implica división. No obstante, la idea que casi todos manejaban de "cuántas veces cabe...", seguramente le ayudó a Jezabel para obtener un problema de división con estructura distinta.

c) Otros casos

Aparecieron casos en los que no es sencillo explicar o suponer por qué algunos alumnos procedieron de cierta manera. Ellos tendían a elaborar el problema al escribirlo, sin formular un contexto de reparto, como sucedió con Diana (sesión 13, operación 240 ÷ 15), que escribió lo siguiente:

"Nanci fue a una casa que la invilaron y compro 15 bonbones pero compro una bolsa a todos los niños entre 240 con los 15 niños. (Aquí aparece una pregunta, que aunque borrada, se puede leer) ¿Cuántos bonbones les repartio?"

Sobre la marcha, Diana decidió asignar al 15 la magnitud *niños* en vez de *bombones.*

Para el segundo problema (360 ÷ 60), escribió

"Rebeca corto 360 hojas de su cuaderno y tambien corto 60 flores para repartir las 60 flores entre sus masetas. ¿Cuantas flores quedaron en sus masetas?"

Nuevamente parece que Diana no concibió todo el problema antes de escribirlo, sino que fue precisando sus ideas conforme redactaba. Partió de la idea de 360 hojas, quizá como magnitud a repartir, pero optó por cambiar a *flores entre macetas*. Sin embargo, esta vez no retomó el 360; tomó el 60 como dividendo y no propuso un divisor (no dice cuántas macetas), como si los datos de la operación *360 ÷ 60*, tuviesen que incluirse en el problema, pero sin un papel específico.

Los casos que se han revisado, ponen de manifiesto la complejidad de la tarea que realizaron los niños. Al mismo tiempo que redactaban un problema por primera vez, con las características que ésto implica (definir datos e incógnita de manera que la segunda pueda inferirse de los primeros), enfrentaron la dificultad de manipular magnitudes de distinto tipo.

A diferencia de los problemas comunes de adición y sustracción, en los que las tres magnitudes en juego son del mismo tipo (magnitudes extensivas, por ejemplo, *"dulces más dulces igual a dulces"),* en los problemas multiplicativos intervienen dos tipos de magnitud, *intensiva-extensiva* (Schwartz, 1988) y, dependiendo de cuál se elige como incógnita, se genera, ya sea un problema de multiplicación, de división-reparto, o de división-tasativo, como se muestra en el esquema:

Dato 1	**Dato 2**	**Incógnita**	**Relación**
Total de gomas a repartir	cantidad de papalerías	gomas a cada papelería	**División Reparto**
	gomas a cada papelería	cantidad de papelerías	**División Tasativa**
Número de papelerías	gomas a cada papelería	total de gomas	**Multiplicación**

Los niños reconocían explícitamente en los problemas de reparto, la operación división; por lo tanto, para generar un problema de reparto a partir de una operación, debían distinguir los tres datos y asignar a cada uno el papel que corresponde, aunque no estuvieron concientes de las características de cada tipo de magnitud. Esto, como ya vimos, aún no era fácil para algunos niños.

La mayor parte de los casos revisados en el inciso **b**, tendían a dar a la magnitud intensiva ("lo que le toca a cada uno") el papel de *dato conocido* y vinculaban a éste la pregunta que corresponde a una multiplicación. Unos cuantos, hicieron lo mismo pero lograron formular una pregunta congruente con los datos que dieron, obteniendo (suponemos que sin saberlo) un problema de división tipo tasativo. Dos más hicieron problemas de multiplicación.

3. SIGNIFICADOS, PROPIEDADES Y REPRESENTACIONES ATRIBUIDAS A LA DIVISIÓN

El hecho de que la mayoría de los niños lograra reproducir relaciones de reparto y asociarlas a la ecuación $a \div b = c$, no significa que fueron concientes de la necesidad de ubicar cada magnitud en cierto lugar dentro del problema.

Como se verá en este apartado, es al analizar los problemas que no cumplen con la condición pedida, cuando se explicitan algunas condiciones. Por supuesto, el análisis de los distintos tipos de problemas que se pueden obtener al jugar con los datos, implica otro proceso que no forma parte de esta investigación.

A continuación se analizarán algunas propiedades que los niños empezaron a atribuir implícitamente, a la nueva operación.

a) Los tres elementos de un reparto: “lo que se reparte”, “entre cuántos se reparte” y “lo que le toca a cada quien”.

Al redactar, la mayor parte de los alumnos demostró saber que en un problema de división, deben aparecer como datos conocidos, *algo que se reparte* y *algo entre lo que se reparte;* y como dato desconocido o resultado, *lo que le toca a cada quien*. La dificultad para algunos niños era, como ya vimos, saber cómo acomodar esos datos.

En la sesión 14 se presentaron tres problemas [4] con la finalidad de que argumentaran si se podían resolver o no, según la forma en que estaban planteados. Los equipos presentaron argumentos bastante claros. En el primer caso, falta el divisor y la aclaración de la pregunta con la expresión "en cada bolsa":

i) *Me compraron 125 lápices y para repartirlos tengo que ponerlos en bolsas ¿Cuántos lápices meteré?* [5]

En el segundo problema aparecen dos datos, pero ambos juegan el papel de dividendo; falta el divisor y especificar en la pregunta "a cada uno" (de sus amigos):

ii) *Raúl tenía 16 pastillas de dulce y también compró 80 chicles para repartir los chicles entre sus amigos. ¿Cuántos chicles les dio a sus amigos?*

El último problema es de multiplicación, correctamente planteado:

iii) *Un niño tiene 7 paquetes con 12 juguetitos en cada paquete. Cuántos juguetitos tiene por todos?*

Este problema fue identificado por la totalidad del grupo como correcto, al afirmar (todos los equipos), que *"sí se puede resolver, porque tiene los dos números", o "porque no le falta nada*".

Los argumentos que escribieron los niños en sus hojas, corresponden a los dos primeros problemas:

Para el problema i)

Equipo 1: *"No se puede repartir porque no nos dice cuántas bolsas* son".

Equipo 2: "No tiene numero de bolsas"

Equipo 3: "no se puede resolver porque no tienen a que repartir"

Equipo 8: "Falta el numero de bolsas"

"Equipo 9*: "No se puede porque no tiene la cantidad donde tenemos que repartir"*

Para el problema ii)

Equipo 1: “No nos dicen cuántos amigos hay en la casa de Raúl”

Equipo 2: “No tiene la cantidad de sus amigos”

Equipo 4: “Falta el número de amigos ... y de (borraron estas dos palabras).

Equipo 6: “No sabemos cuántos amigos tiene Raúl”

Equipo 7: “No se puede resolver porque falta decir en cuantos amigos tenemos que repartir los dulces”

Según se observa, todos los equipos coincidían en que los problemas están incompletos, precisando además que lo que falta es el divisor (visto como aquello “entre lo que se va a repartir”).

Para el problema i), *125 lápices en bolsas*, los equipos 3 y 6, además del argumento de que no se puede resolver, optaron por incluir un divisor, escribiendo en su ficha un 2 (equipo 3), y un 5 (equipo 6), después de la palabra *bolsas.*

En el equipo 6 (Audiel, David, Damara e Iván), Iván dijo ”Ah, que sean cinco bolsas, para que sean veinticinco lápices en cada bolsa”.

Como se ha podido ver, los niños identificaron la ausencia del divisor en un problema planteado. Algunos tendían a incluir la cantidad faltante para poder resolver el problema; una vez “completo”, trataban de encontrar el resultado.

Quienes incluyeron un divisor tentativo, pensaron en números con los que resulto fácil operar o hacer el reparto (como 2 y 5).

b) La expresión “a cada uno”

Al redactar problemas de reparto, casi todos los niños incluyeron la expresión *"a cada...",* pero no faltaron las excepciones. Por ejemplo, Arsenio escribió el siguiente problema (sesión 15):

"Mis amigos tienen 57 ins*ectos y somos 8 nos lo quieren repartir entre los 8. ¿Cuánto nos toca en total?*

Cuando frente a problemas como éste se les cuestionó, los alumnos rápidamente recuperaron la expresión "a cada uno". Veamos un ejemplo: El problema de "los lápices y las bolsas" (sesión 14), que los niños fueron corrigiendo, quedó así:

"Me compraron 125 lápices y para repartirlos tengo que ponerlos en 2 bolsas ¿Cuántos lápices meteré?

Para los alumnos, el problema ya estaba completo, pero cuando intervine centré la atención en la pregunta del mismo:

> Ma: Ahora sí ya está completo?...
> *Aos: Síii*
> *Ma: A ver, si yo les digo que el resultado es ciento veinticinco...?*
> Nayeli: Estás mal
> *Israel: Porque estás multiplicando...*
> Ma: pero aquí ustedes dicen "cuántos meteré?"... yo tengo que meter los ciento veinticinco... ¿Qué más hay por ahí?
> *Netzaí: Sesenta y dos y sobra uno*
> *Ma: Sí, correcto, pero ... ¿ y la pregunta?*
> Laura: Cuántos lápices meteré en las bolsas
> *Rodrigo: Noo, en cada bolsa...*
> *Nayeli: Sí, sí, en cada bolsa*
> Ma: Sí ¿verdad?, en cada bolsa... entonces ya podría llegar al resultado que dice Netzaí, ¿ahora sí se puede resolver?...

La respuesta de Israel en este sentido ("*porque estás multiplicando*"), expresa que él tenía la idea de que a cada una de las dos bolsas les tocaría *x cantidad de lápices* (menor a los 125, porque se están repartiendo).

En el siguiente problema de esta sesión, ocurrió lo mismo

"Raúl tenía 160 pastillas de dulce y también compró 80 chicles para repartir entre sus 6 amigos. ¿Cuántos chicles y cuántas pastillas les da a sus 6 amigos?"

Ma: ¿Está correcto así? ¿se puede resolver?
Rodrigo: Sí... porque dice el número de pastillas y el número de chicles...
Ma: Y en cuanto a la pregunta? ... yo les podría decir "ochenta chicles"...
Aa: No, porque no dice que en uno, sino en seis
Netzaí:... "Cuántos chicles les dio a cada uno de sus amigos?"_

En la sesión 16, frente a uno de los problemas redactados por los niños, sucedió lo siguiente durante la confrontación:

Equipo 5: *"En una fabrica de calzones hicieron 32 calzones y los vendieron entre 4 personas. ¿Cuántos calzones le tocan a cada persona?*

Después de que Arsenio dijo que *"... porque vendieron es resta..."*Rodrigo respondió:*"La pregunta dice otra cosa... que cuántos calzones le toca a cada uno"...*

Arsenio: "Cuántos calzones le quedan"
Netzaí: Si los vendieron entre cuatro personas, cuántos calzones se quedan en la fábrica...

Rodrigo parecía tratar de explicar que el problema no era de resta, porque la pregunta se refiere a "cada uno" (él sí lo ve como problema de reparto), mientras Arsenio trataba de corregir el problema en su conjunto, para que fuera de resta.

Después de la discusión*, se escribieron dos problemas*

i) "En una tienda hicieron 32 calzones y los vendieron a 4 personas ¿Cuántos calzones vendieron a cada persona?

ii) En una tienda hicieron 32 calzones y vendieron cuatro calzones ¿Cuántos calzones se quedaron en la fábrica?

Al leerlos, los alumnos distinguieron que a uno correspondía la división, y a otro la sustracción.

c) "Vender" y "regalar" también es repartir

Ya se ha visto que la mayor parte de los problemas que los niños escribieron se refieren a la acción de repartir. Sin embargo hubo excepciones, algunas de las cuales provocaron discusión, como es el caso del problema que acabamos de analizar, en donde la polémica se dio para saber si el problema era de resta o de división.

Es probable que el argumento de Arsenio ("Es de resta, porque *vendieron* es resta") se haya visto influido por el tipo de problemas que generalmente se trabajan para usar la sustracción, con la idea de quitar o perder. Llegó a entender que en este caso el problema es de división, después de la discusión que ya se revisó en el apartado **b)**.

En la sesión 17, el problema que se planteó fue

"En la delegación de Coyoacán tienen 368 árboles para regalar en 23 escuelas. Quieren que a cada escuela le toque la misma cantidad de árboles. ¿Cuántos árboles le regalarán a cada escuela?".

Veamos esta interacción:

> Nayeli:"... en ese problema dice que vas a repartir... no... (corrigiendo)... a regalar, y si estás regalando, estás repartiendo...
> *Arsenio: Pero si tienes una escuela no estás repartiendo...*
> *Ma: ¿Le puedo dar la cantidad que yo quiera a cada escuela?*
> *Laura: Tienes que repartir la misma cantidad a cada escuela..."*

En este problema Nayeli dió un significado de reparto a la palabra "regalar", que está respaldado por el contexto. Arsenio por su parte, ofreció un argumento en contra pero finalmente llegó a convencerse de que el problema era de reparto.

Tal vez era necesario incluir en estos momentos una mayor variedad de problemas, que aunque implicaran reparto, no incluyeran esta palabra en el texto, para evitar que los niños asociaran exclusivamente esta expresión, a la división [6]

Algunos ejemplos de problemas escritos por los niños (sesión 15), que no explicitan la expresión “repartir”, son los siguientes:

> Laura: *“Yo tengo 57 chocolates para una fiesta y a mi fiesta ban a venir 8 niños ¿Cuantos chocolates le voi a dar a cada niño?”*
> Rodrigo I*: “Tengo 57 chocolates y 8 amigos ¿Cuantos chocolates le toca a cada uno?”*
> *Sofía:* “En un acuario hay 57 peces y tienen 8 peceras ¿Cuántos peces hay en cada pecera?”
> Enrique: *“En una casa hay 57 perros y los quieren enserrar en 8 jaulas. ¿Cuantos perros metere en cada jaula?”*

La idea del reparto queda implícita al plantear la pregunta “¿Cuántos a cada uno?”. En el problema de Enrique, el reparto también está implícito en la palabra “enserrar”.

d) La equitatividad, y el residuo menor que el divisor

Pese a que en la mayor parte de los problemas que los niños habían resuelto durante la experimentación, aparecen explícitas dentro del texto, expresiones como **“***repartir por igual”, “para que a todos les toque lo mismo***”**, ningún niño al escribir su problema, hizo alusión a ellas.

Como ya se dijo, para los niños la idea de equitatividad está inmersa en los repartos. Esto habla de la creación de ciertos implícitos que a veces es difícil (o innecesario) evitar. Podríamos decir que facilitan la comunicación, al abreviar la extensión de las consignas. No obstante, pueden dar lugar a dificultades tanto para los niños como para el maestro.

Desde el punto de vista del alumno, asumir estos implícitos equivale a dar a un término, una connotación que por definición no tiene (repartir no implica, por definición, ni equitatividad ni exhaustividad).

Desde el punto de vista del maestro, sucede con frecuencia que invalida una respuesta que estrictamente hablando es correcta, pero que para él no lo es, porque no asume condiciones implícitas que da por supuestas. Por ejemplo, frente a la consigna de *repartir 17 canicas entre 3 niños*, puede surgir como respuesta *"6, 6* y *5"* (6 canicas a 2 de los 3 niños y 5 canicas al tercer niño), y es correcta.

Si en cambio, dicen **"***5, 5, 5 y sobran 2"*, están asumiendo la equitatividad como un implícito. Será necesario incluir más adelante, nuevamente, actividades en las que dichos implícitos no estén considerados, de tal manera que los niños puedan distinguir entre *un reparto*, y *un reparto equitativo,* y sepan que sólo el último se puede resolver con una división.[7]

La condición de que al repartir "debe sobrar lo menos posible", también se fue constituyendo en un implícito, ya que sin especificarlo en la consigna, los alumnos lo fueron asumiendo, sobre todo en repartos con cantidades pequeñas. Sin embargo, en los casos en los que esta condición no se cumplió, tendía a hacerse explícita:

Por ejemplo, en la sesión 18, frente a la operación *46 ÷ 4 =___,* se presentó una polémica en el grupo, al tener dos resultados posibles *10 y sobran 6* y *11 y sobran 2:*

Sofía: (*para explicar por qué son 11 y sobran 2*) Busco en la tabla del cuatro y llego al cuarenta, porque no está el cuarenta y cuatro... de ahí subo a diez... y aumento a cuarenta y cuatro, porque es como si fueras sumando cuatro más cuatro más cuatro...

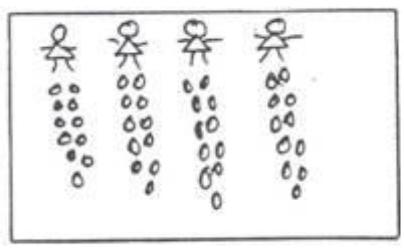
Varios alumnos dijeron que ambos resultados eran correctos. La opción que encontraron para demostrar que se podía seguir repartiendo, fue recurrir a un contexto; Sofía escribió el siguiente problema:

“En una caja hay 46 dulces y los van a vender entre 4 personas ¿Cuántos dulces les van a dar a cada persona?”.

Erandi: 10 y sobran 6
Ma: ¿Esos seis ya no los puedes repartir?
Erandi: Mmmm.... sí (observa su ficha y piensa)
Ma: Repártelos... entre cuántos repartes?

Erandi: Cuatro... (hace cálculos mentales) ... sobran dos
Ma: ¿Y cuántos les toca?
Erandi: Once y sobran dos

Finalmente Damara pasó al pizarrón y representó su resultado gráficamente:



Ma: Cuando metes once dulces en cada caja, cuántos logras meter?
Damara: Once
Ma: Pero en todas las cajas...¿Cuántos lograste meter?
Damara: Cuarenta y cuatro
Ma: ¿Y qué más?
Damara: No puedo repartir los dulces porque faltarían dos...
Ma: Faltarían dos... por qué?
Damara: Faltan dos para tener para todos
Arsenio: Se podrían partir a la mitad ...
Netzaí: Once y medio...

En este ejemplo llegaron incluso a fraccionar el residuo para que no hubiera sobrante, debido a que la situación se prestaba para ello, tanto por la magnitud en juego (*dulces* que se pueden partir) como por los números involucrados (es fácil repartir 2 entre 4).

Los niños llegaron a aceptar ese resultado como el más correcto, aunque algunos no descartaron el primero (10 y sobran 6).

Los pocos casos en que algunos niños no hicieron repartos hasta obtener un residuo menor que el divisor, corresponden a divisiones que no pueden resolverse directamente con la tabla de multiplicar, como el anterior. Rápidamente recuperaron la condición de repartir hasta donde sea posible, frente a un cuestionamiento.

e) La operación que hicimos es...

En las distintas actividades de esta fase, a pesar de que los niños partían de la expresión simbólica de una división (y no de un problema), cuando se les preguntó por la operación que hicieron para resolver, no decían inmediatamente "una división", pero expresaban diversas relaciones que tienen que ver con esta operación.

En la sesión 14, cuando se identificaron los problemas como correctos, y frente a la pregunta *"¿Con qué operación se resuelve?"* (125 lápices en 2 bolsas), las respuestas fueron

Repartiendo, repartir....

> Ma: ¿De qué otra manera se podría resolver, de qué otra manera se le llama a esa operación?
> Damara: Entre
> Erandi: Por... entre, entre...
> Ao: División
> Nayeli: Con la tabla
> Ma: Pero que haces con la tabla?
> Nayeli: Una multiplicación

Los niños tendieron a describir lo que hicieron para resolver. Solo un niño nombró aquellas acciones como "división". Algunos continuaron expresando lo que hicieron, es decir, *la búsqueda del multiplicando*, como "multiplicación. Frente a una pregunta distinta, fueron más los niños que espontáneamente nombraron a la división.

Para el problema 2 de la sesión 14 (*16 pastillas y 80 chicles entre amigos*), cuando se les preguntó*: ¿Se puede resolver o no?*, la respuesta que dieron algunos niños a coro fue **"***Sí, con una división... ochenta chicles entre seis* *amigos¨.* Dado que el problema carecía de divisor, éste fue propuesto por algunos niños.

f) Cómo se representa

En las sesiones 10, 11 y 12 se introdujo la representación convencional de la división, **a ÷ b**, como representación de *a* cosas entre *b* niños. Esto se reforzó antes y después, con el uso de la función división de la calculadora.

En esta última etapa, cada vez más niños interpretaron efectivamente el signo como "entre", aunque en principio hubo quienes no lo identificaron de manera aislada, sino en función de las cantidades que relaciona, como Armando (sesión 13, problema 1):

> Ma: (refiriéndose a la operación 240 15) ¿Cómo saben que tienen que repartir?...
> Armando: Ahí está el signo de repartir"
> Ma: ¿Y cómo se lee?
> Armando: Doscientos cuarenta entre quince

*Como se ha visto, desde sesiones anteriores (antes de conocer el signo de los dos puntos), apareció como aportación de algunos niños la representación de la galera (que es la más conocida por ellos como división), seguramente porque en su casa o en la escuela la habían visto y la sabían nombrar. Ambos símbolos se fueron difundiendo poco a poco, no sin algunas interpretaciones particulares e interesantes, como se aprecia en el siguiente ejemplo, en donde los niños del equipo 1 (sesión 16) crearon un problema (*32 periódicos en 4 tiendas*) y usaron la representación*

8

———

4 / 3 2

> *Ma: ¿Cómo la hiciste?*
> Priscila: "Viendo la tabla del cuatro y luego la del ocho... arriba del... (Arsenio dice*: "de la casita, esta se llama casita*")...arriba del...pusimos el ocho"

Ma: ¿Por qué el ocho?"
Priscila: "Porque es el resultado en el problema o en la división"
Ma: (*señalando las dos representaciones - la de los dos puntos y la de la galera*) "Esto es lo mismo que esto Priscila?"
Priscila: "No, porque este es entre" (se refiere a la representación de los dos puntos), no es división...
Ma: ¿Cuál sí es división?"
Priscila: Este... (*señala la galera*)

Algunos niños, cuando se referían a las maneras de resolver, aludían a la tabla o a dibujos; pero cuando se referían a la galera (que no implica otra manera de resolver, sino únicamente, una manera de representar los términos de la división), decían que era "división":

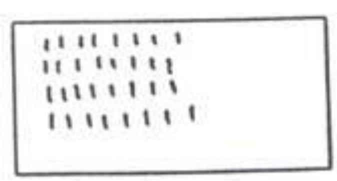
Lucina: "Tabla de Pitágoras... buscas el treinta y dos , luego el cuatro y te da ocho"
Ma: ¿Y de otra manera?
Nayeli: Dividiendo

Ma: ¿Cómo, a ver, pasa... (*Nayeli pasa al pizarrón y escribe 32 ÷ 4*)
Netzaí: Explícalo, explícalo (*Nayeli se siente presionada y no sabe cómo explicarse, y representa la división*)

$$4\;\overline{)\,3\,2}^{\;\;8}$$

Ma: Pero ¿cómo la haces?
Nayeli: Pues como los otros, con la tabla de multiplicar, pero también se puede de otra manera...

Nayeli dibujó en el pizarrón:



Ma: ¿Cuántos tienes de estos? (señalando los grupos verticales)
Nayeli: Ocho

En sus formas de resolver, los niños movilizaron de una nueva manera, recursos que les eran conocidos (reparto uno a uno, multiplicación u otros). Por ello, no veían "lo nuevo" y les era difícil identificar que hay una nueva operación en juego. En cambio, las dos representaciones (los puntos y la galera) son nuevas; con ellas sí identifican a la división.

Por cierto, el símbolo de la galera acarreó ciertas dificultades, debido a que los términos de la división no se escriben en el orden en el que se lee una división, situación que intenté aclarar:

> Julio:(refiriéndose a las dos representaciones)... Es lo mismo, pero con diferente figura
>
> Ma: Yo les voy a decir un truquito... cuando yo tengo la operación así (escribí 32 ÷ 4 = 8)... la leo fácilmente, treinta y dos entre cuatro igual a ocho... pero aquí ... (señalando la representación con la galera)
>
> ***Aa: Cuatro entre treinta y dos***
>
> Ma: No, ahí está el truquito. Treinta y dos entre cuatro igual a ocho (señalando mientras hablaba, primero el dividendo, luego el divisor y por último el cociente).

Esta dificultad volvió a presentarse en la sesión 17 (368 ÷ 23), pero para entonces ya fueron más los alumnos que manifestaron saber cómo se lee convencionalmente la operación cuando se usa la galera.

> Ma: Cuando la hago así... (con la galera)... ¿cómo la represento?
>
> Karla pasa al pizarrón y escribe

2 3 / 3 6 8

> Ma: Y cómo se lee Karla?
>
> Karla: Veintitrés entre... (se queda pensando)
>
> Ma: Entre qué, Karla? (observa la operación y continúa pensando)
>
> Priscila: Veintitrés entre trescientos sesenta y ocho...
>
> Aos: (algunos a coro) Síi, sí... está bien

Es natural que en principio los niños tendieran a leer esa representación siguiendo el sentido habitual de la escritura, de izquierda a derecha.

> Moira: Primero se lee este (368) y luego este (23)... (tal vez Moira recordó "el truquito" que se mencionó en la clase anterior)
>
> Ma: Y por qué primero hay que leer este (368) y luego este (23)?...

Obviamente no hubo respuesta por parte de los niños, ya que se trata de una convención.

g) ¿Cómo se resuelve?

En esta última fase, los niños emplearon sus procedimientos con mayor soltura, los combinaron y en general sabían cuáles usar para resolver o para verificar. Cuando la tabla les permitía encontrar el resultado directamente, la mayoría la usaban como recurso único. Cuando el cociente implicado no aparecía en la tabla, estimaban un cociente y lo iteraban, o usaban la tabla para encontrar un primer cociente parcial y después repartían el resto.

Se registraron también algunos casos de resolución mental. Mostremos un ejemplo interesante por lo que propone, para calcular el reparto, sin perder de vista el dividendo:

En la sesión 14, problema 2 *("Raúl tiene 16 pastillas de dulce y también compró 80 chicles para repartir los chicles entre sus amigos. ¿Cuántos chicles les dio a sus amigos?"):*

> Damara: En el problema dos no dicen cuántos... (es interrumpida por Iván).
> Audiel: ya la regaste Damara... podríamos hacerlo como si tuviera veinte y lo repartía en cuatro, y si tenía diez, lo repartía en ocho... ochenta chicles lo podría repartir en diez amigos..."
> Ma: (a Audiel) ¿Y cuánto le tocaría?
> Audiel: A ocho amigos le doy diez y suma ochenta...

Los cálculos de Audiel eran correctos, pero la forma en que expresó sus ideas fue un tanto confusa; cuando dijo "podríamos hacerlo como si tuviera veinte y lo repartía en cuatro...", tal vez pensó en que si los ochenta chicles los repartía en cuatro, tendría 20 chicles cada amigo.

En resumen, Audiel resolvió estos problemas así:

80÷ _____ _____

4	20	
8	10	
10	...	(no terminó)

El niño propuso varios valores para divisor y cociente, que permiten repartos exactos de un dividendo dado (80). Sus cálculos fueron mentales y están basados en la estimación y la multiplicación.

En la sesión 18 se plantearon divisiones sin contexto (*60 ÷ 8 y 46 ÷ 4*). La gran mayoría los resolvió usando la tabla o calculando mentalmente; sin embargo hubo quienes requirieron de un contexto:

> *Damara e Itzel*: (*se acercan a la maestra*) *¿Podemos escribir un problema?*
> Ma: Claro, pueden hacer lo que quieran para resolver la operación

Al escuchar esto, varios alumnos inventaron problemas con diferentes contextos, por ejemplo:

"En el barco pirata trajeron 46 prisioneros y los quieren repartir en 4 varcos ¿Cuantos prisioneros hay en cada barco?" (46 ÷ 4=).

"Fernando tenía 46 coches y los vendio en 4 jentes ¿Cuantos caros tiene cada una de las 4 jentes?" (46÷ 4=)".

En ambos casos los niños resolvieron usando la tabla hasta el 40 y aproximando a partir de ahí; registraron como resultado *11 y sobran 2*.

Los alumnos habían desarrollado recursos para resolver divisiones a partir de las relaciones entre los datos, en contextos específicos. Estos contextos les permitieron concebir los distintos recursos para resolver.

Ahora, frente a la tarea de resolver una división sin contexto, varios niños manifestaban la necesidad de reconstruirlo para poder implementar sus recursos. Esto indica que, en efecto, los niños demandan tiempo para descontextualizar la operación.

h) Otras propiedades

Cuando los alumnos analizaron problemas y dieron argumentos para decir que estaban "bien o mal", expresaron ideas interesantes de cómo concebían la división, ligada a los contextos. A continuación se verán algunas propiedades más que los niños empezaron a atribuir a la división, a lo largo de estas sesiones.

- **Si se reparte entre uno, no hay reparto", y "si el cociente es igual al dividendo, el divisor es igual a 1"**

El siguiente, es un sencillo ejemplo de desajuste entre la situación real (en donde en efecto, no tiene sentido hablar de reparto entre uno), y el modelo matemático en el que la división entre uno es totalmente natural.

Recordemos el problema de los "árboles" (sesión 17):

"En la delegación de Coyoacán tienen 368 árboles para regalar en 23 escuelas. Quieren que a cada escuela le toque la misma cantidad de árboles. ¿Cuántos árboles le regalarán a cada escuela?"

> Nayeli: En ese problema dice que vas a repartir... no... (*corrigiendo*)... a regalar, y si estás regalando, estás repartiendo...
> Arsenio: Pero si tienes una escuela no estás repartiendo...
> *Ma: ¿Le puedo dar la cantidad que yo quiera a cada escuela?*
> Laura: Tienes que repartir la misma cantidad a cada escuela... son veintitrés escuelas...

Para Arsenio tal vez el reparto entre 1 no implica realmente un reparto, sino "regalar todo", por lo tanto no hay que hacer ningún cálculo. La respuesta de Laura frente a la pregunta que le planteé, pareció aclararle a Arsenio que según el contexto, el reparto no es entre uno.

En cambio, en el problema de "los chicles y las pastillas (sesión 15), una alumna refirió de manera implícita, que si el resultado fuera igual al dividendo, el divisor sería **1**. Veamos el problema

"Raúl tenía 160 pastillas de dulce y también compró 80 chicles para repartir entre sus 6 amigos. ¿Cuántos chicles y cuántas pastillas les da a sus 6 amigos?

Los niños dijeron que el problema sí se podía resolver, pero se propició que reflexionaran:

> *Ma: ¿Y en cuanto a la pregunta?... yo les podría decir "ochenta chicles"...*
> Aa: No, porque no dice que en uno, sino en seis..

En estos dos ejemplos se observa cómo los alumnos iban haciendo deducciones a partir de la forma en que relacionan los datos. En este último caso hay una propiedad válida, atribuida a la división: "Si el divisor es uno, entonces el cociente es igual al dividendo".

- - **Conmutatividad o no conmutatividad**

Los conocimientos previos que los niños tenían a estas alturas sobre la adición y la multiplicación con respecto a la conmutatividad, probablemente influyeron para que inicialmente hicieran extensiva esta propiedad a la división. En la sesión 15, se confrontó un problema (escrito por Erandi).

"En una fábrica de dulces hicierón 8 paquetes de dulces y los tienen que repartilos en 57 tiendas".

La operación era 57 ÷ 8, pero Erandi cambió el orden de las cantidades; posiblemente pensó que podía repartir los 8 paquetes de dulces en las tiendas (todo dependería de cuántos dulces hubiera en cada paquete). Lo primero que saltó a la vista de los niños, es que hacía falta la pregunta, y lo señalaron de inmediato.

*Cuando se le preguntó a Erandi que si el problema que escribió, correspondía a la operación planteada (**57÷ 8**), contestó negativamente y surgieron algunos comentarios.*

Ao: "lo hizo al revés"
Arsenio: Pero es el mismo resultado...
(Mientras se dan esos comentarios, Erandi trabaja su problema, separando los datos: 8 paquetes, 57 tiendas)
Ma: Qué te dice el mensaje?
Erandi: Cincuenta y siete entre ocho
Ma: A ver, ese cincuenta y siete en el problema qué te quiere decir?
Natalia: Los cincuenta y siete son los paquetes que tiene...
Arsenio: Lo dijiste al revés, lo puso al revés pero da el mismo resultado... da lo mismo, sí...
Arsenio: Sí, porque son ocho entre cincuenta... y siete... (*va pensando mientras habla y mueve su mano como calculando*)... Ah, no, no alcanza! (*sorprendido*).

Aunque Erandi no se mostró muy convencida, hizo lo que sus compañeros sugirieron

Itzel: *Cambiando* los resultados (datos)...se tienen cincuenta y siete paquetes y se tienen que repartir en ocho tiendas...

El contexto es útil para "demostrar" que en una situación de reparto no existe tal conmutatividad, y aunque la maestra no lo hizo, Arsenio fue tratando de explicarse a sí mismo, leyendo poco a poco el problema.

La no conmutatividad de la división surgió como un descubrimiento de Arsenio. Aunque no se enfaticé, se propició la reflexión de algunos niños como Itzel, que sugirió cambiar el orden de los números.

- • **El divisor es menor que el dividendo**

Esta es una condición que los niños generalmente habían puesto en práctica al redactar sus propios problemas, aunque con ciertas excepciones, como el caso de Erandi que se revisó en el punto anterior, o el de "los gatos y las leches" (que se verá posteriormente).

Parece ser asunto de sentido común, que para poder repartir algo, el número de elementos entre los que se reparte, debe ser menor que lo que se reparte.

En la sesión 16, cuando se explicó "el truquito" para representar la división con la galera, aparecieron las siguientes expresiones:

8

____

> Ma: ¿Cómo se lee 4 / 3 2
> Aa: Cuatro entre treinta y dos
> *Ma: No, ahí está el truquito... Treinta y dos entre 4 igual a ocho...*
> *Rodrigo: Es que el de afuera vale menos...*

Probablemente Rodrigo trataba de decir que para hacer un reparto, el dividendo siempre debe ser mayor que el divisor. Posiblemente le resultaba ilógico repartir 4 entre 32.

Comentarios

La tarea que los niños desarrollaron en estas sesiones fue más compleja de lo previsto; por un lado, se enfrentaron a una tarea sobre la que tenían poca experiencia previa, crear un problema; lo que implica saber que en éste debe haber datos e incógnita, y que ésta debe poderse derivar de los datos.

Por otra parte, como ya se vió, el trabajo intelectual implicado no es una simple variable de "resolver un problema". Conlleva nuevas dificultades, ya que implica distinguir de manera conciente:

- – Los tres tipos de datos involucrados
- – La ubicación de los mismos en datos e incógnita (tarea aún más difícil que la anterior) de tal manera que resulte un problema de reparto y no uno tasativo o de multiplicación.

- – Pensar en magnitudes adecuadas al tamaño de las cantidades. Tal vez ésta fue una de las razones por las que la gran mayoría pensó en "dulces, chocolates y juguetes entre niños".

Por ahora, el recurso con el que contaron para elaborar y analizar problemas fue explicitar y replicar la estructura de un problema de reparto que habían venido trabajando (*"**a** cosas entre **b** personas")*. El análisis de los problemas les permitió diversificar un poco el tipo de problemas; así, sabían que la división significa repartir, pero también *vender, regalar, encerrar,* según el contexto que se usa; la pregunta "*¿Cuántos... a cada uno*"*?*, ayudó a precisar la relación de reparto.

Pudieron darse cuenta de que en un problema de reparto (**a** cosas entre **b** niños = **x** cosas a cada niño), al incluir la incógnita como dato, la relación deja de ser "reparto". Involuntariamente algunos crearon una relación de tipo tasativo, pero en general, quienes incluyeron la incógnita como dato, crearon contextos de multiplicación.

Por otro lado, los niños mostraron dominar distintos procedimientos para resolver problemas de reparto, desde el reparto gráfico uno a uno, hasta la búsqueda de un multiplicando y el uso ya algorítmico de la tabla de multiplicaciones.

Frente a la interrogante de **"**¿Qué hacemos para resolver?", los niños aludían a acciones como *"repartir"*, *"multiplicar"*, *"buscar en la tabla"*, *"con calculadora"*... *"dividir"*.

Reconocían las dos representaciones simbólicas para la división (los dos puntos con el guión en medio y la galera), aunque algunos niños atribuían un término específico para cada uno ("*entre*" o "*una clave para un problema*" -cuando se trata de los dos puntos- y "*dividir*" -cuando se trata de la galera-). Sin embargo la generalidad del grupo sabía que "es lo mismo pero con diferente figura".

En el proceso de construir significados para la división, partiendo de situaciones muy específicas, los niños atribuyeron propiedades a la operación, algunas que efectivamente son inherentes a ella, por ejemplo, su vínculo con la multiplicación, la no conmutatividad de la división, la idea de que si el divisor es igual a 1, el cociente es igual al dividendo, “el residuo debe ser menor que el divisor” (lo que está vinculado con la acción de “repartir lo más que se pueda”).

Entre otras propiedades no necesariamente inherentes a la operación, están por ejemplo la equivalencia que establecieron entre repartir y dividir y la relación “dividendo mayor que divisor”. La continuación del proceso implica confrontar, superar a su debido tiempo, las propiedades que resultan limitadas o falsas fuera de los contextos particulares.

---

[1] La palabra “mensaje” se usó en lugar del término "operación". Esto ya se había hecho en la sesión 12, cuando los niños debían escribir "mensajes" para el centro de cálculo.

[2] En todos los problemas escritos por los niños, se respetó la escritura original, pese a que tenga faltas ortográficas

[3] Esta característica también la tienen los problemas que se les propusieron.

[4] Estos problemas fueron redactados por algunos niños en la sesión 13; se modificaron para evitar que los identificaran como propios. Decidimos no incluir por el momento, los problemas con una relación tasativa, por considerar que el análisis a que pueden dar lugar resultaría demasiado complejo por ahora.

[5] El problema original, escrito por Nemian tenía como dato *"240 plumines"*. El resto del contexto se respetó.

[6] A lo largo de las doce primeras sesiones los alumnos resolvieron un total de 34 problemas de división propuestos por la maestra, 14 de los cuales contenían explícitamente la palabra "repartir"; los 20 restantes se referían a "empacar, guardar, formar, meter".

[7] De hecho, el reparto no equitativo constituye una buena situación para alumnos de primero y segundo grados.

CONCLUSIONES

El estudio experimental realizado permitió comprobar que cuando los alumnos se enfrentan a situaciones que implican el uso de la división, (operación para ellos desconocida desde el punto de vista formal), ponen en juego sus conocimientos previos para crear procedimientos de solución que pueden hacerse evolucionar complejizando ciertos aspectos de los problemas.

En particular, este estudio muestra que el acceso a la multiplicación a partir de problemas de reparto, no representó para los niños dificultades significativas.

A continuación haré una breve síntesis de algunos momentos del proceso de evolución de los procedimientos de los alumnos. Posteriormente presentaré una revisión crítica de las situaciones empleadas y al final incluiré una reflexión sobre mi papel como maestra en las sesiones experimentales.

1. SÍNTESIS DEL PROCESO

a) Reparto uno a uno y estimación a nivel gráfico

En las situaciones iniciales el reparto uno a uno, en sus distintas modalidades de *arreglo rectangular* y *reparto en cajas* tendió a prevalecer debido a su relativa facilidad. El resultado se va obteniendo conforme se hace el reparto. En esta acción sólo se requiere controlar el dividendo, es decir, se va contando y se detiene el reparto cuando el dividendo se agota; al final se observa la igualdad de las partes; si unas partes quedaron más grandes que otras, se quitan los últimos elementos repartidos, lo que representa el residuo.

En esta fase inicial de desarrollo de procedimientos, aparecieron algunos *intentos fallidos de reparto uno a uno* que por resultar difíciles y laboriosos no lograron afianzarse y fueron abandonados (por ejemplo, asociar mediante líneas los dulces que se reparten, con los niños a los que se reparte, lo que ocasiona que las líneas se confundan y el resultado no se pueda ver).

La facilidad con que la mayoría de los alumnos realizó los repartos uno a uno, confirma que esta actividad puede resultar valiosa desde primer grado, utilizando material concreto, para realizar repartos equitativos y repartir lo más posible Actualmente el currículo oficial incluye actividades de reparto desde primer grado.

En este nivel, la coordinación de la acción de repartir uno a uno cíclicamente, y de controlar la igualdad de las partes, puede constituir una actividad adecuada para el trabajo con la noción de número.

La estimación de cocientes es un procedimiento que surgió también de manera espontánea desde la primera situación, favorecido por el uso de material concreto, que permite agrupar y reagrupar objetos hasta llegar al resultado. Sin embargo, a nivel gráfico el procedimiento de estimación se complicó. Además de la dificultad de borrar constantemente y recordar lo que se hizo antes, se identificaron dificultades de otro orden:

Al estimar un cociente se debe considerar tanto la igualdad de las partes (formar pequeños grupos con la cantidad estimada) como el total a repartir (la unión de los pequeños grupos debe ser igual al todo). Los niños tendieron a centrarse en una de las condiciones, perdiendo de vista la otra: a partir de la colección completa obtenían partes desiguales, o un número de partes iguales distinto al indicado por el divisor; o bien, iterando un cociente estimado, obtenían una cantidad total distinta a la indicada por el dividendo.

Debido a estas dificultades, la estimación fue poco usada en la etapa inicial de la secuencia.

b) Aparición de los procedimientos con representaciones numéricas

La necesidad de verificar el resultado obtenido, motivada por los errores eventuales (en el caso del reparto uno a uno), jugó un papel importante al favorecer la realización de la acción inversa al reparto. Es decir, para verificar si un resultado era correcto, los niños tendían a reagrupar las partes y a compararlas con el todo (dividendo). Para calcular el número de elementos de las partes reagrupadas, empezaron a utilizar la adición iterada del cociente.

Así, la adición iterada del cociente, motivada por la necesidad de verificar, se constituyó en el primer procedimiento con representación numérica [1].

c) El acceso a la multiplicación para resolver problemas de reparto

De la verificación espontánea de resultados obtenidos mediante diversos procedimientos (sobre todo con el reparto uno a uno), se pasó a la verificación sistemática (propiciada) de cocientes estimados como recurso para encontrar el resultado de una división. Esto constituyó la etapa más importante de la secuencia didáctica.

Dividir partiendo de un cociente hipotético, implica desprenderse de la acción inicial de repartir y "empezar por el final", por el resultado del reparto. Ubicados en este punto final, el problema que los niños enfrentan implica ahora multiplicar [2].

repartir

cociente hipotético

verificar

(sumando, multiplicando)

Esta forma de resolver un problema de reparto destaca no sólo su vínculo con la multiplicación, sino también aquello que tiene en común con un problema de división tasativa, cuando éste se resuelve también estimando el cociente.

Este recurso (propiciar la estimación y verificación de cocientes) se reveló efectivamente, como un medio adecuado para favorecer el uso progresivo de la multiplicación. Aunque algunos lo lograron desde las primeras situaciones, la mayoría recurrió al principio a la adición iterada del cociente, debido a que aún no tenían un buen dominio de la multiplicación. Algunos no se sabían las tablas de multiplicar [3]y otros quizá no vinculaban aún la adición iterada con la multiplicación.

Se puede decir entonces, que fue en el momento de la verificación (espontánea o propiciada), de la acción inversa al reparto, cuando se produjeron los primeros procedimientos numéricos formales para resolver divisiones, y cuando se estableció la relación multiplicativa entre los datos de un problema de reparto.

d) Pertinencia de dos instrumentos de cálculo: La tabla de multiplicaciones y la calculadora

La tabla de multiplicaciones constituyó un recurso útil para consolidar el procedimiento de buscar el multiplicando. Al principio los niños la utilizaron para verificar los cocientes estimados; muy pronto establecieron un algoritmo para encontrar directamente el cociente: ubicar en el renglón del divisor (multiplicador), al número más cercano al dividendo (producto) y ver a qué cociente corresponde (multiplicando).

Algunos llegaron a concluir explícitamente que si el dividendo aparece en la tabla, no sobra nada; si el dividendo no aparece en la tabla, hay que buscar el múltiplo del divisor más próximo al dividendo, sin que éste sea rebasado. Hubo, no obstante, dificultades con residuo cercano al divisor: varios alumnos tendieron a seleccionar el múltiplo del divisor más cercano "por exceso".

Las limitaciones para usar la tabla de multiplicaciones como recurso para resolver problemas de división fueron descubiertas por los niños, al enfrentar problemas de reparto con datos que ya no están contenidos en la tabla. Cuando el divisor era menor que 11 y el dividendo mayor que 100, varios niños siguieron usando la tabla para aproximarse a los resultados, combinando procedimientos ya conocidos; primero repartían lo máximo que permite la tabla (100) y enseguida repartían el resto (procedimiento de repartos sucesivos).

Las situaciones con números no contenidos en la tabla permitieron reflexionar nuevamente sobre el significado del uso de la tabla de multiplicaciones, que tendió a "algoritmizarse" muy pronto.

Por su parte, la calculadora fue usada por los niños para extender a números mayores los procedimientos que venían usando, como la adición iterada y la búsqueda del multiplicando. Por ejemplo, habiendo encontrado un cociente de 13 para la división 156 ÷ 12, algunos niños comprobaron multiplicando 13 x 12 y además sumando 12 veces el 13 (o 13 veces el 12), lo que les permitió verificar también que con cualquiera de las tres operaciones, el resultado es el mismo.

2. ¿QUÉ ES LA DIVISIÓN PARA LOS NIÑOS? ¿CUÁLES SON SUS PROPIEDADES?

Los significados que los niños fueron construyendo para esta nueva operación proceden principalmente de dos fuentes: por un lado, de los contextos en los que utilizaron la operación, y por otro, de los procedimientos que desarrollaron para resolver divisiones.

Desde el punto de vista de los contextos, en el conjunto de los números naturales, la división llegó a ser para los niños una operación que se usa en situaciones de reparto y que tiene ciertas propiedades como las siguientes: *a todos les debe tocar lo mismo* (equitatividad); puede o no haber un sobrante distinto de cero (residuo); hay que repartir el dividendo hasta donde sea posible o hasta agotarlo, es decir, el sobrante debe ser menor que el divisor; si se reparte *entre 1,* el cociente es igual al dividendo; el dividendo debe ser mayor que el divisor.

Los conocimientos previos de los niños sobre la adición y la multiplicación como operaciones que son conmutativas, influyeron para que inicialmente hicieran extensiva esta propiedad a la división. La no conmutatividad como una de sus propiedades, surgió como un descubrimiento, cuando un alumno propuso que daba lo mismo cambiar el orden de los datos (*57 ÷ 8 es lo mismo que 8 ÷ 57*) y se generó una discusión en el grupo, que llevó a los alumnos a reflexionar y percatarse de que la conmutatividad, a diferencia de la adición y la multiplicación, no es propiedad de la división.

Cuando los niños redactaron problemas (cuarta etapa), la mayoría se refirió explícitamente a la idea de reparto; no obstante, llegaron a darse cuenta de que hay otras palabras que, según el contexto, también sugieren repartir. Como ejemplo tenemos el problema en el que se incluyó la palabra "vender", que inicialmente algunos niños descartaron bajo el argumento de que "vendieron es resta "(idea seguramente sugerida por el tipo de problemas que generalmente se trabajan para usar la sustracción). La discusión al respecto fue útil para incluir otro tipo de palabras en problemas de división, y para que los niños se fijaran no sólo en palabras "clave", sino en el texto global del problema.

Con respecto al significado de la división, desde el punto de vista de los procedimientos empleados por los niños, llegaron a ver esta nueva operación como aquella que se puede resolver mediante distintos procedimientos, como el reparto uno a uno, la estimación de cocientes o los agrupamientos (estos tres con material o mediante representaciones gráficas); la adición iterada y la búsqueda del multiplicando, que implican recursos como la tabla de multiplicar y la calculadora, o bien las operaciones escritas.

Los niños llegaron a identificar con cierta facilidad los elementos de una división, a partir de las magnitudes especificadas en los problemas. Así, de manera natural pudieron distinguir "lo que se reparte", "entre lo que se reparte", "lo que resulta" y "lo que sobra", no como números, sino como cantidades con referente. Leían por ejemplo el resultado de una división, como una magnitud intensiva (*chocolates en cada caja, pollitos en cada jaula,* etcétera). Sin embargo, cuando se trató de redactar problemas que correspondieran a una división, algunos niños produjeron contextos distintos al reparto (tasativos o de multiplicación entre los datos de un reparto), debido a la dificultad no prevista de tener que determinar dónde ubicar la incógnita y qué magnitudes asignar a cada dato de la operación planteada (relación entre magnitudes extensivas e intensivas).

Al escribir un problema, para varios niños resultó difícil mantener la magnitud que usaron inicialmente, y la fueron cambiando conforme redactaban, lo que nos hace pensar que es difícil controlar tantos elementos a la vez (datos, incógnita, magnitudes congruentes con los datos, y pregunta congruente con las magnitudes).

Elaborar la pregunta de un problema fue una tarea difícil pero importante para los alumnos. Llegaron a darse cuenta de cuándo una pregunta era coherente con el texto, y cuándo ésta se respondía en el texto mismo, por ejemplo "rebeca tiene 57 gatos y les repartió 8 leches a cada uno ¿cuantas les repartió en cada uno?".

El análisis de problemas redactados por algunos niños (situación 14) les permitió ir identificando poco a poco los errores. Fueron capaces de reconocer cuándo un problema está completo (si tiene dos datos y una pregunta); cuándo le falta algún dato y cuál (dividendo o divisor); y cuándo la pregunta es congruente con el texto del problema. Pudieron asimismo, con la participación en grupo, modificar los problemas planteados incorrectamente, hasta transformarlos en problemas de reparto.

Cuando en la fase final los niños se enfrentaron a la resolución de operaciones aisladas, varios sintieron la necesidad de contar con un contexto que diera significado a los números presentados en la operación. Quienes así lo hicieron, recurrieron a magnitudes diversas, como *tigres-jaulas, prisioneros-barcos, refrescos-tiendas*, etcétera. Asimismo fueron expresando de diversas maneras la operación en juego: algunos la identificaban como "repartir", otros como "entre", otros más, como "multiplicación" (de cociente por divisor) o como "sumar varias veces lo mismo"; otros la nombraban como "división".

En el proceso de aprender a identificar y a nombrar la operación, se abrió un periodo, que de hecho no termina con este estudio, en el que los niños nombraban a la operación que resuelve un reparto, como "multiplicación". No eran concientes al principio de que lo que ellos hacían para resolver, era una nueva operación, porque "lo nuevo" radica en las formas de poner en juego los recursos que ya dominaban; resolvían los problemas empleando de una manera especial, una operación ya conocida: la multiplicación.

La representación simbólica bajo la forma "a ÷ b = c", era desconocida para los niños hasta el momento en que se institucionalizó (sólo un niño conocía el signo, pero representaba la operación de manera vertical).

La introducción de la calculadora favoreció que algunos niños supusieran que podía existir una operación que resolviera los "repartos". El hallazgo de algunos al respecto se difundió rápidamente en el grupo y pudieron comprobar -para el caso de divisiones sin residuo- que la operación división arroja el mismo resultado que ellos obtenían mediante otros procedimientos.

Dos o tres niños introdujeron en la clase la representación con la galera. La forma en que resolvieron las divisiones sin embargo, era la misma que usaban sus compañeros, buscar el número que multiplicado por el divisor, igualara o se acercara al dividendo.

Así, los nombres con que se identificó a la nueva operación a lo largo del proceso (*repartir*, *entre*, *multiplicar*), empezaron a ser sustituidos por el nombre de la operación, "división".

3. LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

Si bien la secuencia de situaciones didácticas permitió el logro de los propósitos establecidos y despertó el interés de los alumnos, se identificaron algunas deficiencias o dificultades no previstas.

a) Los contextos, las magnitudes y el residuo

Al inicio del estudio, la influencia del contexto de los problemas no se consideró lo suficiente. Las formas en que éste puede alterar los resultados que se obtienen al dividir, se fueron visualizando sobre la marcha. Ejemplo de ello fue cuando Lucina se resistía a que en *la fiesta de María, su mamá repartiera los dulces entre 8 niños* (según el problema planteado), sin considerar a María. Lucina decidió entonces, que María "no podía quedarse sin dulces puesto que era su fiesta", y cambió el divisor de 8, a 9.

El uso de cantidades discretas en contextos accesibles a los niños, cuando se inician en el aprendizaje de la división, favoreció la comprensión del significado de reparto. De hecho, las magnitudes discretas predominaron incluso cuando los niños redactaron sus propios problemas, a excepción del problema de Diana, en el que manejó *gatos y leches* (y que se analiza en el apartado siguiente), contexto en el que *leches* puede pensarse como una magnitud intensiva discreta (bandejas de leche, o cajas de leche), aunque *leche* es en realidad, una magnitud continua.

La idea generalizada de que los problemas que se planteen a los niños deben ser parte de su realidad, es relativa. Cuando ellos redactaron sus propios problemas, echaron mano de contextos a veces fantásticos (prisioneros y barcos). Lo importante entonces es tener cuidado de que las magnitudes a emplear sean comprensibles para ellos. Falta saber qué pasaría si se hubieran trabajado magnitudes continuas (dimensiones, peso, tiempo), aunque puede preverse una mayor dificultad al respecto.

La presencia o no de residuo (es decir de un residuo distinto de cero) no representó problemas conceptuales para los niños de tercer grado. Ellos llegan a descubrir de manera natural, si en un reparto sobran elementos o no. Incluso llegan a sugerir qué hacer con el residuo, cuando éste es fácilmente divisible entre el divisor. Ejemplo de ello fue la situación 2, en donde sobra una pelota en relación a 2 paquetes, y alguien sugiere partirla por la mitad "aunque se ponche".

La presencia de un residuo grande, casi igual al divisor, provocó en los niños ciertas dificultades no previstas, como las que se dieron al repartir 71 revistas en 8 puestos. Varios niños se resistían a dejar 7 revistas sin repartir, sólo porque faltaba una para que se quedaran 8 revistas en cada puesto. En este caso algunos niños dieron al residuo el significado de “faltante”, en lugar de “sobrante”, es decir, faltaba una revista para completar todos los puestos. En problemas como *meter 47 cerdos en 9 corrales, cuidando que en todos los corrales quedara la misma cantidad de cerdos*, algunos no aceptaban que 2 cerdos tuvieran que quedarse fuera de la jaula; era mejor tener dos jaulas con un cerdo más.

En casos como los anteriores, los niños buscaban la manera de que no sobrara nada, y sugerían qué hacer con el residuo aunque eso implicara alterar el dividendo, o alterar la equitatividad del reparto.

b) El centro de cálculo (situación 11, tercera etapa)

Con esta situación se buscó propiciar que los niños expresaran con palabras o signos las acciones a realizar para resolver una división procedente de un problema de reparto. A partir de sus formulaciones, se esperaba introducir la representación simbólica $a \div b = c$. Sin embargo, esto no se logró del todo. En la situación se identificaron las siguientes causas:

- La consigna “escriban un mensaje para decir al centro de cálculo cómo resolver el problema”, no fue clara; fue necesario precisarla sobre la marcha.

- El centro de cálculo nunca hizo realmente las cuentas solicitadas, de forma que esto tampoco ayudó a aclarar la consigna.

- La tarea de “expresar lo que se debe hacer para resolver” sin resolver, se reveló demasiado compleja para los niños.

En el apartado siguiente retomaré estas limitaciones de la situación, desde el punto de vista de las dificultades que experimenté para conducir la sesión.

c) La continuación del trabajo

La continuación del trabajo aquí iniciado se aborda en otro estudio [4], en el que se amplía la variedad de problemas, enfrentando a los alumnos a situaciones en las que no siempre a un reparto corresponde una división, ni toda división proviene de un reparto (se incluye la relación de tipo tasativo). Se propicia el desarrollo de procedimientos de cálculo más eficientes con números grandes, y se amplían y aplican ciertas propiedades que también son atribuíbles a la división.

4. LÍMITES DE ESTE TRABAJO

En el capítulo 2 se expuso que los problemas de división pueden tener un significado de *reparto* o de *agrupamiento*, y que ambos pueden resolverse buscando el factor que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Sin embargo, esta investigación se centró únicamente en el estudio de los procesos mediante los cuales, desde el *significado de reparto*, los niños accedían al uso de la multiplicación, a través de la secuencia de situaciones didácticas que se reporta en este trabajo.

Deseo precisar que si bien el estudio experimental permite explicar tanto el proceso de evolución de procedimientos seguidos por los niños, como las posibilidades de hacer funcionar las situaciones didácticas con un sentido constructivista, ello no quiere decir que para enseñar la división, el maestro deba trabajar primero el significado de reparto y postergar el taxativo o de agrupamiento; ni mucho menos que deba trasladar puntualmente al aula, la secuencia didáctica aquí planteada.

En el proceso de enseñar la división en la escuela, debe enfrentarse a los alumnos a la resolución de problemas tanto de reparto como taxativos. Esto implica que el docente debe conocer e identificar las características de uno y otro significado de la división, no para propiciar que los alumnos hagan esta diferenciación, sino para que, a lo largo de la educación primaria logran reconocer a la división como operación que resuelve ambos tipos de problemas.

El propósito de averiguar si los alumnos logran identificar las características que hacen distintos a los problemas de reparto de los taxativos, implicaría una investigación específica.

En este estudio, el lector podrán identificar aquellos planteamientos generales que desde el punto de vista de la investigación, le aporten orientaciones para trabajar con un enfoque didáctico distinto al usual, y establecer en su grupo las condiciones adecuadas para que las situaciones funcionen, en aras de lograr los propósitos que él, y el curriculum establezcan.

5. MI EXPERIENCIA COMO MAESTRA EN LAS SESIONES EXPERIMENTALES

Deseo cerrar este trabajo refiriéndome brevemente a la función que como docente-experimentadora desempeñé frente al grupo.

El análisis de ciertas situaciones como las que voy a relatar me permitió por un lado, evaluar mis posibilidades para asumir un rol distinto a aquél con el cual me formé; por otro, reflexionar sobre los retos que el asunto demanda de los profesores frente a grupo, considerando las eventualidades que se generan en el aula.

Cuando en el capítulo inicial aludí a la contextualización y descontextualización del saber como parte del sustento teórico de este estudio, hablé del papel que corresponde al docente en relación con las situaciones didácticas.

Brousseau afirma que "el trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuestas a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro" (Brousseau, 1988).

Una preocupación constante a lo largo de este estudio, fue plantear consignas claras, de tal forma que los niños pudieran interpretar los problemas y se dieran a la tarea de buscar procedimientos de solución, sin que yo los dirigiera paso a paso.

En términos de Brousseau diríamos que me interesaba "devolver el problema" de manera que los alumnos se hicieran cargo de sus procedimientos. No obstante, en la interacción con los niños durante la clase, sobre todo en los momentos de confrontación, sin proponérmelo tendí a retomar la dirección de la clase. En esos momentos las consignas no fueron tan claras como yo suponía, y no encontré la manera de continuar propiciando el diálogo entre los niños y la situación. Sus argumentos rebasaban mis posibilidades para comprender de inmediato lo que querían comunicar, o para seguir la lógica de sus respuestas. Estas circunstancias hicieron que cambiara mi papel de propiciadora de reflexiones, al papel de guía para obtener respuestas esperadas.

Referiré algunos ejemplos que considero ilustrativos de las dificultades que experimenté, lo que no significa que hayan sido únicos. Cada situación representó para mí, un momento significativo en el proceso de aprender a construir estrategias didácticas ante lo inesperado.

El ejemplo que cito a continuación puede analizarse como un caso en el que, a la vez que la consigna fue confusa, la tarea solicitada a los niños fue demasiado difícil:

En la sesión 11 ("el centro de cálculo") se inició la clase planteando la situación de la siguiente manera:

> Ma: ... ¿Se acuerdan que la vez pasada estábamos en un centro de cálculo?... ahora también, solamente que esta vez lo voy a manejar yo... Le voy a dar un problema a cada equipo. Ustedes se van a poner de acuerdo y van a elaborar un mensaje, diciéndome a mí, que soy el centro de cálculo, qué es lo que tengo que hacer para resolver el problema. Sólo me van a indicar a mí (enfatizando) qué hacer para resolver el problema... ¿Está entendido?... una condición es que su mensaje sea lo más corto posible...

El problema era *"Si en un autobús caben 42 pasajeros, ¿cuántos pasajeros caben en 7 autobuses?*

Según las especificaciones que dí a los alumnos, ellos debían escribir la operación que resuelve el problema, ***sin resolverlo*.** Esta instrucción les resultó difícil de entender. Varios niños tomaron la tabla de multiplicar, otros escribieron operaciones y las resolvieron. Al observar ésto, intervine:

Ma: Pongan atención, escuchen, les pedí que no resolvieran el problema; lo que les pedí es un mensaje. Escríbanme un recado a mí, para decirme cómo resolverlo.

La mayoría de los niños insistió en resolver el problema, y hubo necesidad de ir aclarando que únicamente se les pedía que escribieran la operación. Pedir a los niños que digan cómo resolver, sin resolver, es una tarea complicada. Aunque interpreten la consigna, tal vez es necesario que resuelvan el problema para verificar si sus hipótesis son congruentes con lo que se busca, según el contexto. Después de todo, encontrar el resultado permite también darse cuenta de si la operación usada es o no factible para ciertos problemas [5].

Mientras los niños intentaban comprender lo que yo les pedía, se captó lo siguiente:

Israel: Es que no sabemos qué hacer

Obs: Léanlo bien y piensen cómo se puede resolver, solamente tienen que escribir cómo resolverlo

Israel: ¿Es que cómo lo escribo?

Obs: A ver, haz de cuenta que me vas a decir cómo resolverlo. Sólo dime: "para resolver el problema tienes que hacer ésto, y ésto...

Los niños a estas alturas sabían que ante un problema, lo que se busca es un resultado. Ahora se enfrentaban a la dificultad de dejar el camino "a medias". De hecho es más difícil explicar lo que hay que hacer, que hacerlo directamente.

En este caso surgieron dos dificultades: por una parte debían entender lo que yo les pedía con el término "mensaje" (tal vez pude haber usado el término "operación", que les es más familiar) y por otra, saber que comprobarían en un momento posterior, si ese mensaje que ellos sugerían, les permitía encontrar el resultado al problema propuesto.

Como puede verse, los alumnos no comprendieron inicialmente la consigna y buscaron qué hacer. Sobre la marcha, se repitió la consigna hasta dejarla clara, de tal modo que los niños pudieran hacer lo que se esperaba desde la planeación de la clase. Posiblemente si desde un principio se les hubiera pedido "díganme las operaciones que quieren que yo haga en la calculadora...", las confusiones hubiesen sido menores.

El siguiente ejemplo alude a un caso en el que mi intervención conduce a respuestas correctas, descartando rápidamente y de manera implícita, una respuesta errónea, sin acudir a la causa de ese error:

En la sesión 5, al confrontar el problema 1 (*63 conejos en 7 jaulas*), cuando Itzel escuchó que el problema se podía resolver con una multiplicación, multiplicó los datos directamente, 63 X 7 = 441.

Al ver su resultado, le pedí que explicara lo que hizo. Ella explicó la técnica para operar ("Siete por tres veintiuno, uno y llevamos dos, siete por seis cuarenta y dos y dos cuarenta y cuatro".)

> Ma: ¿Qué tenemos que hacer, qué dice el problema?
>
> Itzel: Repartirlos (los conejos)
>
> Ma: ¿Este puede ser el resultado? (señalando 441)
>
> Aos: ¡Nooo! (a coro)
>
> Nayeli: No, porque siempre te va a salir más

Ma: ¿Entonces qué pasó alli?

Nayeli: Se equivocó

Después pasó Julio al pizarrón y escribió la operación 9 X 7 = 63, con lo que se continuó la confrontación, sin aclarar a Itzel cuál había sido su error, o ayudarla a través de otras preguntas, a reflexionar por qué no correspondía la operación (63 X 7) que ella había sugerido, con el problema planteado.

Mi intervención al preguntar enfáticamente "¿Este puede ser el resultado?", señalando el 441, seguramente provocó la respuesta a coro que dieron los alumnos, invalidando la operación de Itzel. Pese a que la intención explícita de la pregunta fue "regresar" a Itzel al contexto para que identificara el error, realmente no le dí la oportunidad.

Por último, hablaré de un caso en el que se manifiesta la dificultad para identificar las causas posibles de una respuesta errónea y devolver a los alumnos una pregunta adecuada, la dificultad para comprender en el momento sus argumentos y, por último, la formulación de una pregunta desafortunada, pero muy representativa de las preguntas que con frecuencia formulamos en el aula.

En la sesión 15, cuyo propósito era que los niños redactaran un problema para la operación 57 ÷ 8 después de analizar distintos problemas creados por ellos, propiciando que identificaran también los elementos de la operación [6] tomé el problema escrito por Diana.

"Rebeca tiene 57 gatos y les repartió 8 leches a cada uno". Cuántos les repartió en cada uno?"

Julio: "Es que si le dan esas sobran muchas, y estarían sumando mas no dividiendo..."

Netzaí: ¿Pero por qué estás sumando?

En el momento no logré entender lo que Julio quería decir, y tampoco le pedí que lo explicara. Mi atención estaba centrada en encontrar la manera de propiciar que Diana se diera cuente de que el problema planteado era de multiplicación y que la pregunta que escribió se respondía en el contexto mismo; además me interesaba que todo el grupo prestara atención [7].

Ma: Fíjense bien, si Diana tiene en su problema cincuenta y siete gatos y ocho leches... (me dirigí a Diana) ¿qué es lo que vas a hacer con los gatos y con las leches, según lo que te dice el mensaje... primero piénsalo...

En estos momentos pensé que sería fácil para Diana pensar en repartir mejor 57 leches entre 8 gatos, lo que implicaba simplemente un intercambio entre magnitudes, pero Diana propuso algo más complicado:

Diana: (espera un poco para contestar) ocho gatos y cincuenta y siete leches

Con esto Diana cambió el orden de los datos: 8 y 57. En este momento tomé su propuesta y el problema quedó así:

"Rebeca tiene 8 gatos y les repartió 57 leches a cada uno". Cuántos les repartió en cada uno?"

Ma: Bueno, ahora fíjate, ¿qué se te ocurre que haríamos con los gatos y las leches según el mensaje? léelo (Diana no responde; lo hace Damara)

Damara: Repartir las cincuenta y siete leches

Julio: "Es que si tienes ocho gatos, le puedes dar como seis y estaba sumando, no dividiendo...

Ma: "¿Por qué?

Julio: "Porque estás sumando un número a cada gato"

Julio hizo una estimación (6 leches) y quería decir que según quedó planteado el problema, se estarían sumando las 57 leches que se dan a cada uno de los ocho gatos, y que el problema pide dividir (esto lo comprendí después, al hacer el análisis de la clase).

Ma: Estás sumando (repito lo que dijo Julio, pero me centro en la otra parte de su propuesta), pero fíjate, ¿Cómo sabes que le das seis a cada gato?

Julio: Es que esto lo puedes resolver con una multiplicación

Ma: ¿Qué multiplicarías?

Julio: Ocho por cincuenta y siete

Ma: Ocho por cincuenta y siete? (esta pregunta confunde a Julio)

Julio: No, no así no... (se queda pensando)... como siete

Ma: Y cuántos repartirías?

Julio: Como cincuenta y siete...

Tal vez Julio deseaba expresar que ese problema de multiplicación debía convertirse en un problema de división para que correspondiera al mensaje, pero como yo no entendía en ese momento, nuevamente dejé al margen la intervención de Julio.

Mi intención era que el problema quedara planteado como un reparto más lógico (de 57 leches entre 8 gatos), pero Diana lo había planteado a la inversa (8 gatos y 57 leches). Además había que transformar el contexto, eliminando en la primera parte, la expresión “a cada uno”, con lo cual el problema correspondería ya a una división. De hecho a esto era a lo que Julio se refería, pero le fue muy difícil explicitarlo.

Finalmente opté por transformar el problema, porque sentí que ya había demasiada confusión, empezando por mí. El problema planteaba ahora "repartir 57 leches entre 8 gatos, ¿cuántas leches le tocan a cada gato?". Llegado el momento de pedir a los niños que identificaran los datos, preguntándoles "¿Qué es el cincuenta y siete?" y ¿Qué es el ocho?", reconocieron fácilmente el **57** como "leches" y el **8** como "gatos":

Ma: ¿Y qué se obtiene como resultado"?

Aos: Siete...

Ma: Pero no me digan el número... díganme, si reparto leches entre gatos, ¿qué me da, no cuánto me da?

Ao: "Gatos satisfechos".

Evidentemente era casi imposible que los niños respondieran a mi pregunta ambigua. Generalmente cuando se pide un resultado, lo que se encuentra es un número. La respuesta **"gatos satisfechos**", aunque chusca, permite ver que los niños hicieron una buena interpretación de la pregunta, misma que estaba lejos de apelar a la respuesta esperada: **"leches para cada gato"**. Los niños encuentran otras alternativas, que de acuerdo a la lógica del contexto, son aceptables.

Aparentemente el problema inicial planteado por Diana podía transformarse en un problema de reparto, sólo eliminando la expresión "a cada uno", y corrigiendo la pregunta a "¿cuántos gatos para cada leche?". Sin embargo la situación se complicó, tal vez más para mí, porque la relación de reparto entre las magnitudes empleadas no me resultaba del todo lógica (no sé si para los niños lo fue). Lo cierto es que no logré identificar en el momento preciso, las estrategias que permitieran a Diana darse cuenta de los puntos específicos que hacían de su problema un problema de multiplicación y no de división.

Los momentos de confrontación son especialmente difíciles, porque exigen del maestro una capacidad para escuchar a los alumnos, para enfrentar los retos que la propia situación va imponiendo; para encontrar la manera de corregir una consigna o "echar marcha atrás" cuando esta no funciona; para ayudar a los niños a aclarar dudas, a identificar errores.

Permitir que los niños se expresen, en efecto les da la oportunidad de aprender a encontrar argumentos; para el maestro éste puede ser el momento más difícil de la clase, cuando hay que comprender e interpretar lo que los niños quieren decir en su propio lenguaje, que no tiene porqué corresponder a las formas de expresión que uno espera de ellos.

La dificultad de comprender un procedimiento seguido por algún alumno, la explicación o el origen del error en el momento mismo, me llevó ocasionalmente a descartarlo (no retomarlo) o a formular insistentemente ciertas preguntas que también lo hacían a un lado, lo invalidaban. En el caso de Diana (gatos y leches) resultó muy difícil entender el origen de su error y muy difícil evidenciárselo.

Hay situaciones en las que basta con dejar a los alumnos seguir su idea. La retroalimentación que proporciona la situación puede ayudar a que los niños solos se den cuenta y corrijan el error, sin embargo, hay otras como la redacción de los problemas, en las que la única forma de validación es social o semántica[8].

La necesidad de "cerrar" la situación ocasionó a veces mi tendencia a destacar lo que desde mi punto de vista y a partir de los propósitos planteados, era lo más importante; esto me llevó a formular preguntas inductoras.

Los roles que el maestro debe asumir para tratar de propiciar procesos de construcción como los que se reportan en este trabajo, observar y comprender los procedimientos que emplean, las discusiones que sostienen; así como devolver las preguntas adecuadas, representan una tarea difícil. Sin embargo, el análisis de las dificultades que van surgiendo ayuda a descubrir estrategias para superarlas. Vencer los temores de "perder el control del grupo", de invertir demasiado tiempo en actividades en las que los niños participen, o saber cómo enfrentar o corregir los errores que como maestro se cometen, es indispensable para lograr un cambio.

Por ello, considero que es el análisis de la experiencia frente al grupo, lo que permite ir identificando qué acciones validar porque favorecen la construcción del aprendizaje en los alumnos y cuáles modificar, porque hacen prevalecer lo que el maestro quiere que se haga, sobre lo que los estudiantes pueden hacer.

Cabe señalar que aquí se abre otra línea de estudio, insuficientemente atendida aún por los estudios en didáctica (que conozco): el análisis de la práctica del maestro que intenta asumir un enfoque didáctico como el que sustenta este trabajo.

---

[1] La adición iterada apareció también en otra modalidad, propiciada por los problemas con estructura tasativa; en este caso se trató de la adición iterada del divisor.

[2] Esta forma de resolver un problema de reparto destaca no sólo su vínculo con la multiplicación, sino también aquello que tiene en común con un problema de división tasativa, cuando éste se resuelve también estimando el cociente.

[3] Ante esta situación fue necesario pedir apoyo a la maestra del grupo para que reforzara el trabajo con la multiplicación, a partir de sugerencias que se le brindaron.

[4] Martínez, P. *Procedimientos para dividir. Estudio didáctico sobre la noción de división en la escuela primaria.* Tesis de Maestría en proceso, DIE-CINVESTAV-IPN.

[5] Esto sólo pude esclarecerlo al analizar los resultados de la sesión y comentar lo sucedido con el asesor de tesis.

[6] Como parte de la dinámica de la clase se insistió en preguntar para cada problema, "qué es el 57" y "qué es el 8", con la intención de que los niños se percataran de la importancia que tienen las magnitudes en un problema (57 paquetes entre 8 tiendas no es lo mismo que 57 canicas entre 8 alumnos; aunque la operación es la misma, los referentes cambian).

[7] Para estos momentos la mayoría de los alumnos se mostraban cansados. El tiempo de la clase se había prolongado a más de los 60 minutos acostumbrados.

[8] Ver Block, D. *La validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas, en la primaria.*

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991) "Modernización y Reproductibilidad en la enseñanza de las matemáticas". Cuaderno de didáctica de las matemáticas 5. Seminario especializado de Didáctica. Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Baldor, Aurelio (1995). *Aritmética,113-127.* México: Publicaciones Cultural.

Beattys, C. Herscovics y Nantais (1990). "Children pre-concept of multiplication: procedural understanding" *International Group for the Psychology of Mathematics Education* 3, 183-189 Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Bell, Alan (1983) "Diagnostic teaching of additive and multiplicative problems". *PME Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 205-208. Rina Hershkowitz (ed): Israel.

Bergeron, J.C. y Herscovics. N. (1983) "Models of multiplication based on the concept of ratio". *PME Procedings of the seventh international conference for the psychology of mathematics education,* 199-204. Rina Hershkowitz (ed): Israel.

Block, D. (1987) *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de maestría. México, D. F.: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Block, D. y Martha Dávila (1993) "La matemática expulsada de la escuela" *Educación Matemática 3*, (5), 39-58 México: Ediciones Iberoamérica.

Block, D. e Irma Fuenlabrada (1989) "Dialogar y descubrir". *Manual del instructor comunitario*. Niveles I y II. Secretaría de Educación Pública, Consejo Nacional de Fomento Educativo, Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Block, D., Irma Fuenlabrada y Hugo Balbuena (1992) "Dialogar y descibrir" *Manual del instructor comunitario*. Nivel III. Secretaría de Educación Pública, Consejo Nacional de Fomento Educativo, Centro de Investigaciones de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Block, D. (1991) "La validación empírica del conocimiento en clase de matemáticas, en la primaria". *Cero en conducta* 6 *(25)* 4-9. México: Educación y Cambio A. C.

Block, Sevila D. (1996) "Las fracciones en problemas multiplicativos". Parte 1, manuscrito. México, D. F.: Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Botello, H., Ana María Alvarez, Hugo Balbuena, David Block, Néstor González, Patricia Jarillo, Zorobabel Martiradoni, José S. Muñoz e Irma Velázquez, (1988) "Problemas y operaciones de multiplicación y división". En *Estrategias pedagógicas para niños de primaria con dificultades en aprendizaje de las matemáticas.* Fascículo 3, Secretaría de Educación Pública. México, Dirección General de Educación Especial.

Brousseau, G. (1975) "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas". Ponencia presentada en la reunión de la C.I.A.E.E.M. en Louvin-la Nueve, Bélgica.

Brousseau, G. (1977) "La observación de las actividades didácticas". Apuntes. Seminario de Didáctica especializada. México, D. F.: Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Brousseau, G. (1994) "Los diferentes roles del maestro". *En Didactica de matemáticas. Aportes y Reflexiones* 65-94. Parra, C. y Saiz. (comps). Argentina. Paidós.

Brousseau, G. (1986) "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas". En *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa* 1-67. Sánchez E. y Zubieta G. (comps.) México, D. F,.: Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Carraher, D. W. (1991) "Understanding the division algorithm from new perspectives". *International gruop for the psycology of mathematics education* 3, 215-223. Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Charnay, R. (1994) "Aprender (por medio de) la resolución de problemas". En Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones 51-63. Parra, C. y Saiz. (comps). Argentina. Paidós.

Chevallard, Ives (s.f.) "La transposición didáctica. Del conocimiento erudito al conocimiento enseñado". La Pensee Sauvage: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de Comahue.

Dias, Schlieman y Pereira (1990) "Proportional reasoning: from shopping to kitchens, laboratories, and nobefully, schools". 65 *International Group of the psychology of mathematics education* 3, 63-67. Proceedings. Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Douady, Regine (1986) "Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto". En *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa* 68-87. Sánchez E. y Zubieta G. (comps.) México, D. F.: Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Douady, Regine (s.f.) "Sobre la didáctica de las matemáticas en el momento actual". En *Cuaderno de la didáctica de las matemáticas* No. 6 I.R.E.M. Universitè Paris.

Fuenlabrada, I., Grecia Gálvez, Irma Saiz (1978) "Enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria". Proyecto de investigación. Laboratorio de Psicomatemática del Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Gálvez, G. (1994) "La didactica de las matemáticas". En Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones 39-50. Parra, C. y Saiz I. (comps). Argentina. Paidós.

Gálvez, G. (1984) "El contrato didáctico", apuntes tomados en una conferencia dictada por G. Brousseau. Escuela de Verano. Seminario especializado de Didáctica. Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Gálvez, G. "Elementos para el análisis del fracaso escolar en matemáticas". Apuntes. Seminario especializado de Didáctica. Departamento de Investigaciones Educativas. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Grows, Douglas y Robert Reys (1975) "División involving zero: an experimental study an its implications". *Arithmetic Teacher* 1 *(22)* 27-30. J. Dan Knifong, University of Maryland.

Martin A. Simon (1990) "Prospective elementary teacher's knowledge of division". *International Group for the psychology of mathematics education* 3, 313-321. Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Nantals, Nicole y N. Herscovics (1990) "Children's pre-concept of multiplication: logico-physical abstraction". *International Group for the psychology of mathematics education* 3, 183-189, Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Nesher, P. (1988) "Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings". En J. Hiebert y M. Behr (comps.) *Number concepts and operations in the Middle Grades*, 2, National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A.

Painchault, Jacques (1977) "Aproximación de la división en el curso elemental de segundo año". En *Revista Grand N.* No. 13. Octubre.

Saiz, I. (1994) "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir". En *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* 185-217. Parra, C. y Saiz I. (comps). Argentina: Paidós.

Schwartz, Judah (1988) "Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations". En *Number concepts and operations in the Middle Grades* 2. National Council of Teachers of Mathematics, U. S. A.

Steffe, Leslie P. (1990) "A child generated multiplying Scheme". *International group for the psychology of mathematics education* 3. Fourteenth PME Conference. Oaxtepec, México.

Teule, S. Pierre y Vinrich, G. (1979) "La resolution des problemes de division au C. E." *Etudes en didactique des mathematiques*. Universidad de Bordeaux, tercer ciclo de enseñanza superior.

Tirosh, Dina, y Graeber, Anna. (1989) "Preservice elementary teachers explicit beliefs about multiplication and division". En *Educational studies in mathematics.* 1 *20*, U.S.A: Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1988) "Multiplicative Structures". En *Number concepts and operations in the Middle Grades* 2. National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A.

Vergnaud, G. (1990) “La teoría de los campos conceptuales”. En *Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa* 88-117. Sánchez E. y Zubieta G. (comps.) México, D. F.: Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Vergnaud, G. (1991) *El niño, las matemáticas y la realidad,* México: Trillas.