

Cinvestav

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**“Análisis de los puntos de bifurcación de un sistema
climático no lineal”**

T E S I S

Que presenta

José Alberto Padilla Chavez

Para obtener el grado de

Maestro en ciencias
en la especialidad de control automático

Directores de la Tesis:
Dr. Fernando Castaños Luna
Dr. Marco Tulio Angulo

.

Agradecimientos.

Le agradezco al CONAHCYT, el Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnologías por el apoyo aportado a través de mi beca académica.

Le agradezco a los Doctores Fernando Castaños y al Dr. Marco Tulio, por la infinita paciencia que presentaron cuando tuvieron que compartir conmigo alguno de sus conocimientos y por el tiempo que dedicaron a ayudarme.

Le agradezco a todos los académicos de Cinvestav que me dieron clase y dedicaron algo de su tiempo en compartir con todos nosotros su conocimiento.

Le agradezco a todos mis compañeros de generación por el aprendizaje que me brindaron, en particular me enseñaron que la competencia y la cooperación no son dos conceptos mutuamente excluyentes.

Le agradezco su tiempo y su apoyo a mi esposa Lorena y a mi familia. Le dedico todos los días a la memoria de mi hermana.

Resumen.

Desde una perspectiva de Teoría de Control, la pregunta de cómo evitar un colapso climático puede reformularse como si es posible “controlar” nuestras emisiones de carbón para evitar cruzar un punto de inflexión (“tipping point”) en el sistema climático del planeta. Se presenta un primer paso en dirección a responder esta pregunta al construir y analizar un modelo matemático simplificado del clima del planeta tierra. En particular, presentamos una descripción detallada de los principios físicos y suposiciones usadas que usa el modelo.

Este modelo es obtenido de otro modelo previamente publicado incorporando el efecto del carbón emitido por humanos. Después, usando un argumento de perturbaciones singulares, se muestra que se puede derivar un modelo de orden reducido de dos variables que solo considera el carbono total y el carbón presente en la vegetación. Usamos este modelo reducido para estudiar el efecto del control por retroalimentación cuando las emisiones son reguladas a ser proporcionales a la desviación en temperatura de una temperatura deseada. Finalmente usamos un análisis de bifurcaciones para estudiar los puntos de inflexión en modelo original, el modelo reducido, y el modelo reducido con control por retroalimentación. Terminamos presentando algunas conclusiones y discutiendo algunas ideas de trabajo futuro.

Abstract.

From a control-theoretic perspective, the question of how to avoid a climatic collapse can be reformulated as if we can control our carbon emissions to prevent crossing a tipping point in Earth's climate system. In this thesis, we take a first step towards answering this question by building and analyzing a simplified mathematical model of Earth's climate. In particular, we present a detailed description of the physical principles and assumptions of the model.

This model was obtained by modifying a previously published model to include human-caused carbon emissions. Then, using a singular-perturbation argument, we derive a reduced-order model consisting of only the total carbon and the carbon stored in the vegetation. We use this reduced order system to study the effect of feedback control regulating carbon emissions proportionally to the deviations in temperature from a desired temperature, comparing its behavior to an ideal scenario in which we stop entirely carbon emissions. Finally, we use a bifurcation analysis to study the tipping points in the original, reduced, and reduced-and-controlled models. We end by presenting some conclusions and discussing ideas for future work.

Índice general

1. Introducción.	1
1.1. Motivación.	1
1.2. Objetivos.	4
1.3. Análisis de la literatura.	7
1.4. Estructura de la tesis.	10
2. Antecedentes.	13
2.1. Modelo de perturbaciones singulares.	13
2.1.1. Puntos de equilibrio.	13
2.1.2. Ceroclinas.	13
2.1.3. Definición de variedad.	14
2.1.4. El modelo estandar de perturbación singular.	14
2.1.5. Teorema de Tikhonov.	15
2.1.6. Variedades invariantes normalmente hiperbólicas en sistemas dinámicos.	16
2.2. Modelo simplificado del ciclo del carbono.	17
2.2.1. Consideraciones generales del sistema.	17
2.2.2. Definiciones.	19
2.2.3. Definición de los bucles de retroalimentación del ciclo del carbono.	21
2.2.4. Ecuaciones diferenciales asociadas al sistema.	25
2.3. Funciones definidas para el modelo climático.	30
2.3.1. Modelo simplificado del carbono en la vegetación.	30
2.3.2. Parámetros asociados a la ecuación del modelo de carbono en la vegetación.	37
2.3.3. Modelo simplificado de intercambio de energía.	40

2.3.4.	Parámetros asociados a la ecuación del modelo simplificado de energía.	49
3.	Análisis de los puntos de equilibrio del modelo.	53
3.1.	Equilibrios del Sistema.	53
3.1.1.	Introducción.	53
3.1.2.	Ceroclinas del sistema $\{A, N, T\}$	54
3.2.	Plano fase $\{N, T\}$	58
3.2.1.	Puntos de equilibrio.	58
3.2.2.	Análisis de estabilidad en los puntos de equilibrio en el plano Fase $\{N, T\}$	63
3.3.	Simulaciones numéricas del sistema en lazo abierto.	66
3.3.1.	Análisis de la escala de tiempo del sistema.	66
3.3.2.	Series de tiempo para el sistema $\{A, N, T\}$	69
4.	Reducción del sistema.	71
4.1.	Motivación.	71
4.1.1.	Introducción.	71
4.1.2.	Sistema reducido $A - N$	72
4.2.	Características del modelo reducido.	76
4.2.1.	Propiedades asociadas a la escala de tiempo.	76
4.2.2.	Ceroclinas para el sistema reducido.	81
5.	Sistema en lazo cerrado.	85
5.1.	Planteamiento.	85
5.1.1.	Introducción.	85
5.2.	Análisis de los puntos de equilibrio.	88
5.2.1.	Equilibrios para el modelo completo en lazo cerrado.	88
5.2.2.	Equilibrios para el modelo reducido en lazo cerrado.	91
5.2.3.	Análisis de Equilibrios para el Sistema en lazo Cerrado.	93
6.	Simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado.	101
6.1.	Planteamiento.	101
6.1.1.	Modelo de Cero Emisiones.	102
6.1.2.	Modelo proporcional de emisiones.	103

6.1.3. Modelo saturado de emisiones.	105
6.2. Planos fase de los modelos propuestos.	106
6.3. Análisis de bifurcaciones.	110
Referencias	122

Índice de figuras

2.1.	Diagrama simplificado de la interacción entre la vegetación y la temperatura.	22
2.2.	Interacción parcial entre el carbono y la vegetación.	23
2.3.	Ciclo del carbono. Imagen obtenida en [52].	24
2.4.	Interacciones para el modelo climático planteado.	25
2.5.	Función $g_T(T)$. $T_2 = 40^\circ\text{C}$ y $T_1 = 5^\circ\text{C}$	33
2.6.	Función $G(A, N)$, para $A \in (0, 4000]$	37
2.7.	Función $\alpha_N(N)$	45
2.8.	Función $\Psi_N(N)$	45
2.9.	Función $\varphi(A, N)$	48
2.10.	Función $\varphi(A, N)$	48
3.1.	Ceroclina de N	56
3.2.	Intersección de las ceroclinas de N y T	57
3.3.	Ceroclinas para el plano fase $\{N, T\}$ para $A_0 = 1360 \text{ Gt}$	58
3.4.	Intersección de las ceroclinas de N y T , para un valor constante $A_0 = 1360$	59
3.5.	Puntos de equilibrio para $A_0 = 2500$	59
3.6.	Plano Fase para distintos valores de A_0	61
3.7.	Ceroclinas de N y T para un A_0 constante.	62
3.8.	Curva $w_1(A_0)$, para los puntos de equilibrio con $N^* = 0$	63
3.9.	Plano Fase para distintos valores de A	66
3.10.	Trayectorias con ϵ variable.	69
3.11.	Series de tiempo.	70
4.1.	Simulación $\dot{A} = 20 \text{ Gt yr}^{-1}$	72
4.2.	Sistema reducido $\{\bar{A}, \bar{N}\}$	75

4.3. Trayectorias para el sistema reducido y el sistema completo.	75
4.4. Solución para las variables del Sistema.	76
4.5. Simulación del sistema para el modelo completo (magenta) y el modelo reducido (negro).	77
4.6. Proyección de los puntos de equilibrio A^* , N^* y T^* sobre el plano $\{\bar{A}, \bar{N}\}$	83
4.7. Ceroclina para el sistema reducido \bar{A}, \bar{N}	83
5.1. Intersección entre las ceroclinas de T y A	90
5.2. Curva $\vartheta(A, T)$ circunscrita sobre la ceroclina de T	90
5.3. Intersección entre la curva $\vartheta(A, T)$ (rojo sólido) y las curvas w_1, w_3 (negro sólido) y w_2 (azul punteado).	91
5.4. Ceroclina para \bar{A} en el sistema Reducido.	92
5.5. ceroclina para T . Intersección de curvas $\vartheta(A, N)$ y $w_i(N, T)$ con $i = 1, 2, 3$	92
5.6. ceroclinas para A y N en el sistema reducido en lazo cerrado.	93
5.7. Variedades Estables e Inestables.	99
6.1. Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).	102
6.2. Serie de tiempo de la temperatura.	103
6.3. Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).	103
6.4. Plano fase del sistema reducido para el modelo proporcional de emisiones.	104
6.5. Simulación del sistema con u_p	104
6.6. Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).	106
6.7. Series de tiempo para el modelo saturado.	106
6.8. Plano fase para $\dot{A} = 0$. Ceroclinas (en azul) y trayectorias solución (en negro).	107
6.9. Plano fase para el modelo proporcional. Ceroclinas (en azul) y trayectorias solución (en negro).	108
6.10. Plano fase para el modelo saturado. Ceroclinas (en azul) y trayectorias solución (en negro).	109
6.11. ceroclinas para $T_{d_1} = 15.5 C$, $T_{d_2} = 19 C$, $T_{d_3} = 22.5 C$ y $T_{d_4} = 24.5 C$	111

6.12. Equilibrios Estables e Inestables.	112
6.13. Solución para las variables del Sistema.	113
6.14. $T_d = 26 C$	114
6.15. Diagrama de Bifurcación para N	116
6.16. Diagrama de bifurcación para A	116
6.17. Diagrama de bifurcación para C	117

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Motivación.

A partir de mediados del siglo XIX y durante todo el siglo XX la sociedad humana a nivel global ha experimentado un rápido e importante crecimiento en las actividades económicas en comparación al crecimiento presentado durante periodos anteriores. Este crecimiento fue generado en gran parte por el desarrollo de herramientas tecnológicas y de producción relacionadas con la utilización de combustibles fósiles que generan emisiones de gases de efecto invernadero. A su vez dichas emisiones han ocasionado un cambio en la dinámica del sistema climático del planeta, generando un rápido incremento en los registros anuales de temperatura promedio para el planeta. Este incremento en la temperatura del planeta es la fuente tanto de preocupación como curiosidad en importantes sectores de la sociedad, debido a que se ha buscado entender a fondo las interacciones entre las variables del modelo para analizar características como la irreversibilidad de los cambios que ocurren en estas variables. En particular en los últimos años la preocupación de que ciertos *Tipping Points* (cuya traducción al español es *puntos de inflexión*) relacionados con el sistema climático se alcancen ha ido en aumento. En este contexto un punto de inflexión se define como un umbral crítico que, cuando se cruza, conduce a cambios grandes y, a menudo, irreversibles en el sistema climático [1]. Hasta septiembre de 2022 se han localizado 9 puntos de inflexión del sistema climático de la tierra [2], entre los que destacan el colapso de la capa de hielo de Groenlandia, el colapso de la capa de hielo del oeste de la Antártica ó la muerte regresiva de la selva amazónica [3] entre otros. Entre todas las soluciones propuestas la más importante es quizá el desarrollo de tecnologías de generación de energía alternas a los combustibles fósiles que permitan disminuir las

emisiones generadas minimizando las consecuencias económicas. Aunque en las últimas décadas el uso de tales energías alternativas propuestas se ha incrementado considerablemente, este desarrollo posiblemente no se ha manifestado con la velocidad esperada por lo que la generación de energía por medio de combustibles fósiles no ha manifestado una disminución considerable.

Además, dada la alta dependencia de estos combustibles en la mayoría de las actividades económicas es factible suponer que su consumo no disminuirá completamente dentro de un periodo de tiempo significativo, por lo que puede resultar conveniente plantear estrategias de emisión enfocadas a mitigar los efectos de estas emisiones en el modelo climático. Aunque constantemente se han desarrollado herramientas de carácter analítico para determinar los efectos de estas emisiones en el sistema climático global, la mayoría de estas técnicas se basan en modelos de carácter estadístico generadas a través de herramientas de análisis de datos. Aunque esta perspectiva es útil y se han presentado importantes planteamientos, también es posible utilizar herramientas de análisis basados en el modelo geométrico generado por la dinámica del sistema climático. El objetivo de esta tesis es plantear un modelo dinámico básico a través de un esquema basado en la retroalimentación, que se encuentre conformado por la biota del planeta, la temperatura promedio anual y donde las emisiones de carbono generadas por el hombre sean modeladas a través de funciones básicas basadas en la retroalimentación, para analizar desde una perspectiva geométrica que pueda resultar intuitiva las trayectorias del sistema. En el desarrollo de varias secciones de esta tesis se presentarán y utilizarán herramientas analíticas y algoritmos relacionados a la teoría de control automático a un nivel básico como soporte para analizar un modelo climático simplificado en donde una de las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema es una ecuación de transferencia de calor entre un sistema y su entorno. Los modelos climáticos basados en intercambio de energía radiante son importantes herramientas para describir la evolución de la temperatura de un planeta con su entorno y su relación con otras variables de interés del sistema, como el nivel de vegetación, la cantidad de agua o de hielo, el nivel de humedad o la presencia y la cantidad de uno o varios componentes en la atmósfera del planeta.

Por la naturaleza de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema, estos modelos se consideran casi en su totalidad como no lineales. Además, para modelar esta evolución y observar sus efectos en un período prolongado de tiempo, generalmente la dinámica de estas variables se estudia en una escala temporal de años, por lo que las lecturas de la temperatura se considera como la obtenida en el promedio anual. esta perspectiva coincide con el planteamiento de los modelos estadísticos generados y por los planteamientos utilizados comúnmente por las principales instituciones enfocadas en el estudio del cambio climático. Un modelo climático que describa con cierta robustez la dinámica de la interacción de la temperatura del sistema con el resto de las variables climáticas de manera conjunta puede resultar complicado y presentaría el inconveniente principal de que el análisis de la información obtenida en el modelo, resultaría también demasiado complejo y difícil de estudiar. Por lo tanto, desarrollar sistemas simplificados que describan la dinámica de la temperatura con un número reducido de variables del sistema es una práctica común en los trabajos de modelado climático, mitigando o incorporando de manera aproximada el efecto de las variables que no se describen de manera explícita. Estos modelos permiten obtener un perspectiva general del comportamiento del sistema, por ejemplo, en [4] se plantea un modelo de dos ecuaciones diferenciales que estudia la interacción entre la temperatura promedio del planeta y el área cubierta por la vegetación en el planeta y en [5] el enfoque que se utiliza es incorporar tres ecuaciones diferenciales para capturar la dinámica entre los cuerpos de hielo continentales, los cuerpos de hielo marítimos y la temperatura promedio del planeta. Además de todas las variables que se plantearon anteriormente, debido a los efectos significativos generados por la sociedad en la evolución de los ecosistemas, en múltiples modelos se incorpora el efecto de las actividades humanas en la evolución del sistema en particular la emisión de gases de efecto invernadero. Como se hizo énfasis en el planteamiento inicial, las actividades humanas principalmente a través de las emisiones de gases de efecto invernadero, han causado inequívocamente un calentamiento global, con una temperatura promedio superficial global que alcanzó 1,1 °C por encima del periodo comprendido entre los años 1850-1900 en el periodo comprendido entre los años 2011-2020 [6]. Las emisiones globales de gases de efecto invernadero han seguido aumentando durante el periodo 2010-2019 [6]. Desde luego tal incremento en la temperatura promedio del planeta presenta efectos adversos en

otras variables del sistema climático, como el nivel del mar, los ciclos reproductivos de múltiples especies de plantas y animales o las condiciones óptimas de sobrevivencia de la biota en un ecosistema. Por lo tanto, para obtener una perspectiva analítica más amplia, resulta conveniente incorporar la emisión humana de gases de efecto invernadero a los modelos climáticos utilizados. En términos relacionados al planteamiento de esta tesis se tiene que incluso aplicando un modelo básico en el que el cambio en las emisiones antropogénicas sea proporcional a la diferencia entre la temperatura actual y una temperatura de referencia, es posible realizar un análisis efectivo basado en encontrar las regiones de atracción de los puntos de equilibrio de un modelo climático dado al definir distintas funciones de emisión y por consiguiente detectar posibles puntos de Inflexión del Sistema Climático. En las siguientes secciones se presentan los objetivos específicos que se esperan alcanzar durante el desarrollo del trabajo.

1.2. Objetivos.

En esta tesis se realiza una modificación a un modelo climático que captura de manera simplificada la dinámica del ciclo del carbono, relacionándolo con la temperatura promedio del planeta y el nivel de la biota (i.e., organismos vivos) representada en el modelo por la vegetación del planeta [7]. Aunque el modelo propuesto solo captura algunos aspectos esenciales del clima del planeta Tierra, su simplicidad permite utilizar un modelo simplificado para realizar un análisis de los puntos de equilibrio y las trayectorias del sistema. Esto nos permite obtener conclusiones relacionadas al desarrollo de estrategias de emisión de carbono que permitan alcanzar un punto de equilibrio estable que presente condiciones adecuadas para el desarrollo de la biota del sistema. Se propone utilizar como base el modelo climático mínimo propuesto por Svirezhev en [7], para describir de una manera simple la relación que existe entre la vegetación, la temperatura y el carbono dentro de un modelo climático planteado con restricciones específicas que permitan mitigar los efectos de omitir algunas variables de estado que también intervienen en la dinámica del ciclo de carbono. Bajo la premisa que las emisiones antropogénicas de carbono son despreciables en comparación al carbono total que existe en el sistema, en el desarrollo del trabajo original se plantea que el carbono total del planeta se considera constante. Por lo tanto el ciclo

del carbono se define como un sistema de dos ecuaciones diferenciales que describen la interacción entre la vegetación y la temperatura del sistema, utilizando al carbono total del sistema como un parámetro fijo. Sin embargo en el desarrollo de este trabajo se opta por desarrollar el sistema que se encuentra compuesto por tres ecuaciones diferenciales, donde la primera representa un modelo de intercambio de energía que modela la temperatura del planeta, la segunda representa la dinámica de la vegetación del planeta por medio del carbono alojado dentro esta y la tercera representa el carbono que existe en la atmósfera.

Debido a que en el sistema de tres ecuaciones diferenciales, la ecuación donde se modela la temperatura presenta propiedades relacionadas con una diferencia en la escala de tiempo de las variables, será posible realizar una reducción de orden del sistema utilizando la teoría de perturbaciones singulares. esta reducción es distinta a la planteada en el trabajo original, debido a que no resulta necesario considerar a ninguna variable como un parámetro fijo y el modelo obtenido describe la interacción entre el carbono alojado en el compartimento de la vegetación y el carbono alojado en el compartimento de la atmósfera, mientras que la temperatura del sistema puede ser obtenida a través de las trayectorias solución de estas dos variables. Aunque en términos computacionales realizar esta reducción no resulta en una disminución considerable en los cálculos realizados, por otro lado facilita considerablemente la interpretación y el análisis del sistema, debido a que las trayectorias solución del sistema en un espacio fase de tres dimensiones se pueden visualizar de manera más directa en un plano fase. El enfoque principal consiste en incorporar el concepto de la retroalimentación en el modelo de emisiones dentro del sistema propuesto para estudiar los efectos ocasionados por los gases de invernadero en la biota del modelo. El planteamiento realizado considera una estrategia basada solo en la disminución de emisiones y por el momento no considera estrategias alternativas como una política de reforestación ambiental. Los objetivos principales del trabajo realizado se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Plantear un modelo que aunque presente restricciones en su alcance genere datos coherentes con el comportamiento del sistema climático. Ya que la humanidad forma parte de la biota del sistema y además representa la fuente principal de emisiones,

el modelo planteado puede considerarse inherentemente de lazo cerrado, sin embargo, en un principio el planteamiento de este modelo puede considerarse de lazo abierto al definir a la vegetación como la única biota y formular a las emisiones de carbono como un función dependiente del tiempo, pero independiente de los otros estados. Este planteamiento resulta válido debido a que hasta hace unas décadas, en el contexto económico global, no se había definido una política de limitación en las emisiones de carbono.

- Desarrollar este modelo en términos intuitivos para presentar resultados accesibles en su formulación y generar conclusiones que faciliten un planteamiento que incorpore otras variables para la formulación de un modelo climático más complejo.
- Determinar las características principales del modelo y utilizarlas como herramientas para el desarrollo de la propuesta de distintas funciones que permitan generar un modelo de emisiones que resulte en un sistema de “lazo cerrado”.
- Analizar desde una perspectiva geométrica la evolución del sistema dinámico climático para determinar el conjunto de condiciones iniciales del espacio fase que permita estabilizar la temperatura y la biota en un punto de equilibrio que no implique que la biota se extinga. Determinar el conjunto de condiciones iniciales para las cuales el sistema climático ya no puede regresar a un equilibrio que permita el desarrollo de la biota.
- Uno de los objetivos principales consiste en encontrar los *Tipping Points* o puntos de inflexión para el sistema climático. Como se estableció anteriormente, debido a que el modelo propuesto es bastante general en su planteamiento, la variable de estado que representa la biota del sistema será la estudiada para definir los puntos de inflexión del sistema.
- Desarrollar un planteamiento que permita estudiar un parámetro de bifurcación que refleje de manera adecuada las condiciones de irreversibilidad del sistema y realizar los diagramas de bifurcación del modelo.
- Obtener conclusiones generales enfocadas al desarrollo de estrategias de modelado de emisiones más robustas.

1.3. Análisis de la literatura.

Resulta conveniente realizar un análisis detallado de las publicaciones y los trabajos realizados anteriormente para realizar una evaluación de la utilidad que puede presentar aplicar conceptos como la retroalimentación en el análisis y el proceso del desarrollo de soluciones en la toma de decisiones para un sistema climático. Los efectos climáticos adversos ocasionados por el calentamiento global representan riesgos en la sustentabilidad de los ecosistemas e incluso en el corto plazo también en el desarrollo económico de los sectores más vulnerables de la población primero, y después, para toda la sociedad en general. Por lo tanto, en los últimos años, el tópico se ha convertido en un tema muy importante para la comunidad y se ha generado una gran cantidad de literatura científica centrada en analizar estos riesgos. En el reporte de síntesis [6] presentado en 2023 por el Panel Intergubernamental para el Cambio Climático de las Naciones Unidas (IPCC, por sus siglas en inglés) se resume el estado del conocimiento del cambio climático, sus impactos y riesgos generalizados, y la mitigación y adaptación al cambio climático, con base en la literatura científica, técnica y socio económica revisada por pares desde la publicación del último reporte presentado en 2014 [8]. En este documento, el comité reporta de manera detallada los efectos adversos ocasionados por el calentamiento global a través de la presentación de evidencia científica. En el documento, la formulación de estos descubrimientos, son denominados como descubrimientos clave. Estos descubrimientos clave son categorizados, ya sea como hechos demostrados o a través de un análisis del nivel de seguridad en su formulación. Para mantener una actualización constante de estos datos, este reporte se publica de manera periódica. Debido a la importancia del tema, además de los reportes del IPCC, se han presentado distintos trabajos o publicaciones relacionados con este. En [3] y en [9] se presenta una definición y un análisis de los *Tipping Points* relacionados con el fenómeno cambio climático ocasionado por la emisión excesiva de gases de invernadero. Estos trabajos están enfocados en describir aquellos elementos en el sistema climático, cuyo cambio puede generar sustanciales e irreversibles alteraciones en todo el sistema. Estos *Tipping Points* o puntos de inflexión son inducidos por una bifurcación en el sistema cuando un parámetro particular, pasa un nivel crítico. En ese momento se produce una bifurcación y lo que era un estado estable en el sistema pierde su estabilidad o simplemente desaparece [10].

En la búsqueda de soluciones sustentables, en distintos trabajos, por ejemplo en [11] se han analizado los efectos económicos relacionados a una reducción de la emisión de gases de efecto invernadero y las implicaciones de no realizar ninguna acción para lograr esa reducción. El objetivo del trabajo presentado consiste en obtener una perspectiva simple basada en el modelo DICE (modelo dinámico integrado económico-climático) [12] para realizar un análisis costo-beneficio de las soluciones enfocadas en mitigar los efectos del cambio climático. Debido a sus fundamentos teóricos el modelo Dice precisamente a servido como base en el análisis de muchas publicaciones entre las que se encuentran [13], [14] en ó en [15]. El modelo DICE adopta una perspectiva económica para analizar el cambio climático desde la perspectiva de la teoría neoclásica del crecimiento económico del modelo Solow [16]. En este enfoque, las economías invierten en capital y tecnologías, reduciendo así el consumo hoy, para aumentar el consumo en el futuro. El modelo DICE amplía este enfoque al incluir como “capital natural” del sistema económico a la sustentabilidad del modelo climático [12]. Para otorgar una solución a la crisis climática es necesario fijar los objetivos y calendarios futuros de des carbonización y proporcionar alguna base científica para conciliar los objetivos climáticos y los objetivos económicos [17]. Precisamente en [17] se presenta un conjunto de trabajos enfocados a abordar el problema del cambio climático desde una perspectiva de la teoría de sistemas, al proponer modelos que acoplen la dinámicas de los modelos climáticos y los modelos económicos. Los artículos incluidos se basan en planteamientos como la aplicación de la teoría de viabilidad, cuyo objetivo es explicar la evolución del estado de un sistema de control gobernado por dinámicas no deterministas y sujetos a restricciones de viabilidad para encontrar las retroalimentaciones ocultas que permiten realizar la regulación de un sistema [18] o la incertidumbre intrínseca relacionada a la no linealidad de los sistemas que describen el impacto del cambio climático [19]. La comunidad de control automático ha mostrado su interés en cooperar para mitigar los efectos adversos del calentamiento global. En el documento *Control for Societal-Scale Challenges: Road-Map 2030* [20] desarrollado por la *Control Systems Society* perteneciente a la *IEEE*, se propone una lista de los temas de interés para la disciplina para el año 2030, donde uno de los tópicos principales es la cooperación de la comunidad en la generación de soluciones para la mitigación de los efectos asociados

al cambio climático y la adaptación de la población a las condiciones generadas a causa de este. Aunque no se encontraron citas que relacionen de manera directa la aplicación de conceptos relacionados con la teoría de control con los modelos climáticos, las herramientas analíticas derivadas de esta teoría han sido aplicadas en múltiples ocasiones en el desarrollo de estrategias orientadas a la conservación de sistemas ecológicos, económicos o bio-económicos. Precisamente, existen numerosas fuentes que muestran las aplicaciones de la teoría de control en el planteamiento de modelos económicos, en particular la aplicación del control óptimo [21], para los cuales se utilizan planteamientos clásicos como [22] hasta planteamientos más avanzados como el encontrado en [23]. Con respecto a los planteamientos enfocados al modelado y control de sistemas ecológicos, desde hace tiempo se han presentado trabajos como en el artículo presentado en [24] donde se utilizaron descripciones dinámicas del comportamiento del sistema para encontrar mecanismos de estabilización para ecosistemas conformados por ostras. Como en muchas aplicaciones resulta de interés maximizar o minimizar un criterio representado por una función de coste, existen muchos trabajos orientados en la aplicación de modelos derivados de la teoría de control óptimo en la ecología como el encontrado en [25]. En este compendio se presentan distintas estrategias derivadas del control óptimo como la programación dinámica o la aplicación de la teoría de juegos diferenciales y que se encuentran enfocadas en la obtención de estrategias de reproducción óptimas para poblaciones de plantas o en el modelado de la coevolución entre dos poblaciones que interactúan como cazador y presa. En [26] se presenta un análisis de algunos planteamientos que se han realizado utilizando conceptos relacionados con la retroalimentación y la teoría de control para el manejo de distintos ecosistemas y en el manejo de los recursos naturales dentro de estos. Además, se realiza una comparativa entre los resultados esperados en la teoría y los resultados obtenidos en los sistemas ecológicos reales en los que estos métodos han sido aplicados. En este trabajo se concluye que los mejores resultados se obtienen cuando se consideran los efectos causados por la incertidumbre y las fluctuaciones estocásticas. En trabajos más recientes se han aplicado algoritmos derivados del control que resultan más complejos en su planteamiento. Por ejemplo en [27] se utiliza el control de sistemas con retardos para estabilizar un ecosistema marino conformado solo por una especie. Aunque ninguna de las aplicaciones de la teoría de control en la ecología citadas anteriormente se relacio-

na directamente con los modelos climáticos, sirven para ilustrar posibles planteamientos de soluciones que resulta razonable tomar en cuenta para la problemática relacionada al cambio climático.

1.4. Estructura de la tesis.

Se comparte la estructura general de la tesis para optimizar su lectura. El documento se compone de 6 capítulos y una sección final donde se exponen las conclusiones obtenidas y algunas propuestas de conceptos para desarrollar en trabajos posteriores.

- Capítulo 1. Se presentan las motivaciones generales para la realización de la tesis, se repasan los objetivos que se buscan cumplir, se presentan conceptos relevantes y se realiza un análisis de la literatura disponible del tema.
- Capítulo 2. Se presentan los antecedentes y las herramientas analíticas utilizadas en el desarrollo de la tesis. En la primera parte se ofrecen definiciones importantes relacionadas con la teoría de control automático que fueron utilizadas en el desarrollo de la tesis como definiciones de conceptos como puntos de equilibrio, ceroquinas y una introducción a la teoría del modelo estandar de perturbaciones singulares y se ofrece la definición del concepto de variedad hiperbólica invariante en sistemas dinámicos. Como se expreso anteriormente, ambos conceptos fueron utilizados ampliamente para simplificar el modelo propuesto y facilitar su análisis. En la segunda parte se presenta el planteamiento del modelo del ciclo mínimo del carbono y se desarrollan a detalle las ecuaciones diferenciales propuestas.
- Capítulo 3. Se presenta un análisis geométrico de las superficies que representan las ceroquinas de las variables de estado que representan la biota y el clima en el plano fase del modelo aumentado de tres variables publicado por [7]. Se presentan los puntos de equilibrio del modelo de cero emisiones definido para $\dot{A} = 0$, definido para la temperatura promedio anual y el carbono alojado en la vegetación del sistema. Se definen las curvas generadas por los puntos de equilibrio estables e inestables en el espacio fase al parametrizar al carbono total del sistema A . Se presentan simulacio-

nes del modelo en lazo abierto del sistema de tres variables, utilizando como criterio de emisión los datos obtenidos en [29].

- Capítulo 4. Utilizando las propiedades relacionadas a las distintas escalas de tiempo de la ecuación de la temperatura se utiliza el modelo estandar de perturbaciones singulares para realizar una reducción de un modelo de tres a dos ecuaciones diferenciales sin proponer que una de las variables sea definida como un parámetro. Se obtiene la curva que representa la ceroclina de la vegetación N en el plano fase del modelo reducido obtenido y se plantea la relación de esta curva con las obtenidas en el modelo completo.
- Capítulo 5. Se plantea un modelo de emisiones de carbono basado en un esquema de retroalimentación en la temperatura, que servirá como base para el análisis de otros esquemas. Se localizan los puntos de equilibrio del modelo climático completo y reducido y se realiza el análisis de estabilidad de estos puntos.
- Capítulo 6. Se realizan las simulaciones numéricas del modelo planteado en el capítulo anterior y se propone otro esquema de modelo de emisiones. Se realiza un análisis de los planos de fase del modelo proporcional, del modelo saturado y de un modelo de cero emisiones. Utilizando como parámetro a la temperatura deseada, se realiza el diagrama de bifurcaciones del modelo proporcional de emisiones que sirve como base para los otros dos modelos.

Capítulo 2

Antecedentes.

2.1. Modelo de perturbaciones singulares.

A modo de introducción se presentan definiciones que se utilizarán durante el desarrollo de la tesis.

2.1.1. Puntos de equilibrio.

El punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio e de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad (2.1.1.1)$$

si $f(\hat{x}) = 0$, para todo t . [28]

2.1.2. Ceroclinas.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.1.2.1)$$

Donde x' representa la derivada de x con respecto a otra variable, como el tiempo t . La j -ésima ceroclina es la forma geométrica para la que $x'_j = 0$. [54]

2.1.3. Definición de variedad.

Una variedad es un espacio topológico que localmente se parece al espacio euclidiano cerca de cada punto. Una variedad n -dimensional, es un espacio topológico con la propiedad de que cada punto tiene una vecindad que es homeomorfa a un subconjunto abierto de un espacio euclidiano n -dimensional [48]. Una variedad hiperbólica es un espacio donde cada punto se ve localmente como un espacio hiperbólico de alguna dimensión. [49]

2.1.4. El modelo estandar de perturbación singular.

El modelo estandar de perturbaciones singulares se define utilizando el formalismo de variable de estado en el que las derivadas de uno o más de los estados se multiplican por un escalar positivo ϵ de magnitud pequeña, [46] es decir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z, \epsilon, t), & \text{con } x(t_0) &= x_0, & x &\in \mathbb{R}^n \\ \epsilon \dot{z} &= g(x, z, \epsilon, t), & \text{con } z(t_0) &= z_0, & z &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.1.4.1)$$

donde las funciones f y g son funciones suficientemente diferenciables. Aunque en la expresión de (2.1.4.1) se considera solo un parámetro ϵ , esto no representa una restricción por que pueden definirse múltiples constantes de tiempo. El objetivo principal de los métodos de perturbaciones singulares aplicados a la teoría de control tienen como objetivo principal reducir el orden del modelo. El orden de la reducción se genera a través de una perturbación de parámetro, denominada singular. Cuando se establece el valor del parámetro $\epsilon = 0$, la dimensión del sistema se reduce de $m + n$ a n debido a que la ecuación diferencial de z se degenera en una ecuación algébrica o trascendental:

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, 0, t), \quad (2.1.4.2)$$

donde el símbolo barra se utiliza para indicar que las variables pertenecen al sistema reducido con $\epsilon = 0$. Se dice que el modelo (2.1.4.1) se encuentra en forma estandar si y solo si se asume que existe una o varias soluciones para (2.1.4.2). Es decir, para un dominio de interés la ecuación (2.1.4.2) tiene $k \geq 1$ distintas raíces aisladas reales:

$$\bar{z} = \bar{\varphi}_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.1.4.3)$$

Si se cumple esta reducción se garantiza que un modelo bien definido de orden n le corresponde a cada raíz de (2.1.4.2). Para obtener los i -ésimos modelos reducidos se sustituye (2.1.4.3) en la ecuación diferencial de x en el sistema (2.1.4.1).

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{\varphi}_i(\bar{x}, t), 0, t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0 \quad (2.1.4.4)$$

Se considera la misma condición inicial para la variable de estado \bar{x} que para la variable de estado x . La ecuación (2.1.4.4) se puede expresar de manera más compacta como:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0 \quad (2.1.4.5)$$

Este modelo en ocasiones se denomina sistema *quasi-estable* por que z , cuya velocidad $\dot{z} = g/\epsilon$ es muy grande cuando ϵ es pequeña y converge rápidamente a una raíz de la ecuación (2.1.4.2), el cual es un estado *casi-estable* de la ecuación diferencial de x para el sistema original (2.1.4.1). La desventaja principal asociada al método, consiste en que utilizar un parámetro para obtener una reducción de orden implica que no siempre resulta claro identificar si existe un parámetro pequeño en una o varias ecuaciones diferenciales del sistema y cual es este [47]. Sin embargo, para el sistema definido en (4.1.1.1) el parámetro ϵ ya se encuentra expresado explícitamente y a través de un procedimiento directo es posible identificar la variable más rápida del sistema. La propiedad de dos escalas de tiempo del modelo estandar (2.1.4.1) se desarrollara más extensamente en secciones posteriores, a través del modelo climático planteado.

2.1.5. Teorema de Tikhonov.

Considerando el problema de perturbaciones singulares dado en (2.1.4.1) y sea $z = \varphi(t, x)$ una raíz aislada de (2.1.4.2), asumiendo que las siguientes propiedades se cumplen para todo:

$$[t, x, z - \varphi(t, x), \epsilon] \in [0, t_1] \times D_x \times D_y \times [0, \epsilon_0], \quad (2.1.5.1)$$

para los dominios $D_x \subset R^n$ y $D_y \subset R^m$, con D_x convexo y D_y contiene al origen:

- Las funciones f y g , sus primeras derivadas parciales con respecto a (x, z, ϵ) y la primera derivada parcial de g con respecto a t son continuas; las funciones $\varphi(t, x)$ y

el jacobiano $[\partial g(t, x, z, 0)/\partial z]$, tiene derivadas parciales continuas con respecto a sus argumentos.

- El problema reducido (2.1.4.5) tiene la solución única $\bar{x}(t) \in S$, para todo $t \in [t_0, t_1]$ donde S es subconjunto compacto de D_x .
- El origen es un equilibrio exponencialmente estable; sea $\mathcal{R} \subset D_y$ la región de atracción del sistema de *capa superficial* y Ω_y sea un subconjunto compacto de \mathcal{R} .

Entonces, existe una constante positiva ϵ tal que $n_0 - \varphi(t_0, \psi(0))$ y $0 < \epsilon < \epsilon^*$, tal que el problema de perturbaciones singulares tiene una solución única $x(t, \epsilon)$ y $z(t, \epsilon)$ en $[t_0, t_1]$, y

$$\begin{aligned} x(t, \epsilon) - x(t) &= O(\epsilon) \\ z(t, \epsilon) - \varphi(t, \epsilon) - \hat{y}(t/\epsilon) &= O(\epsilon), \end{aligned} \tag{2.1.5.2}$$

se mantiene uniformemente para $t \in [t_0, t_1]$, donde $\hat{y}(\tau)$ se denomina el modelo de capa limite. Incluso, dado cualquier $t_b > t_0$, existe un $\epsilon^{**} \leq \epsilon^*$, tal que:

$$z(t, \epsilon) - \varphi(t, \bar{x}(t)) = O(\epsilon), \tag{2.1.5.3}$$

se mantiene uniforme para $t \in [t_0, t_b]$ para $\epsilon < \epsilon^{**}$.

Una demostración del Teorema de Tikhonov se puede encontrar en [51].

2.1.6. Variedades invariantes normalmente hiperbólicas en sistemas dinámicos.

En términos generales, una variedad invariante es una superficie contenida en el espacio de un sistema dinámico que tiene la propiedad de que las órbitas o trayectorias que comienzan en la superficie, permanecen en la superficie durante todo el curso de su evolución dinámica en uno o ambos sentidos del tiempo. Es decir, si la superficie tiene un límite, entonces las trayectorias pueden dejar la superficie cruzando ese límite. Además, bajo ciertas condiciones, el conjunto de órbitas que se acercan o se alejan de una variedad invariante M asintóticamente en el tiempo también son consideradas variedades invariantes que se llaman variedades estables e inestables, respectivamente, de la variedad inva-

riante. Además, las variedades estables y las variedades inestables pueden ser foliadas o fibriladas por estructuras ó subvariedades de menor dimensión, que tienen la propiedad de que las trayectorias que comienzan en estas fibras satisfacen algunas condiciones relacionadas a la tasa de crecimiento asintótico [53].

Considere una visualización geométrica del comportamiento en dos escalas de tiempo de las soluciones de (2.1.4.1) como trayectorias de \mathbb{R}^{n+m} . Para utilizar el concepto de variedad invariante se restringe la discusión a sistemas autónomos, por simplicidad en la notación se toman a f y a g como independientes de ϵ . Entonces se propone la forma más simple de sistema singularmente perturbado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ \epsilon \dot{z} &= g(x, z)\end{aligned}\tag{2.1.6.1}$$

Sea una $z = \varphi(x)$ un raíz aislada de $0 = g(x, z)$ y suponiendo que las proposiciones del **Teorema de Tikhonov** de la subsección 2.1.5 se cumplen para esta raíz. Entonces la ecuación $z = \varphi(x)$ describe una variedad n -dimensional en el espacio fase $(n + m)$ -dimensional del espacio de estados (x, z) , entonces:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z) \\ 0 &= g(x, z),\end{aligned}\tag{2.1.6.2}$$

dado que una trayectoria de (2.1.6.2) que comience en la variedad $z = \varphi(x)$ permanecerá en la variedad para todo el tiempo futuro en que la solución se encuentre definida.

2.2. Modelo simplificado del ciclo del carbono.

2.2.1. Consideraciones generales del sistema.

El modelo climático mínimo propuesto pretende representar las interacciones entre el carbono C , la vegetación v y la temperatura T de un sistema idealizado donde todos los parámetros dentro de las ecuaciones diferenciales que representan esas interacciones se encuentran dados por los valores promedio obtenidos en el transcurso de un año. Para simplificar el modelo climático no se considera las dimensiones espaciales relacionadas

al sistema, debido a que considerar estas variaciones espaciales implica utilizar ecuaciones diferenciales parciales en el modelo, lo que genera un análisis más profundo que va más allá de los alcances de este trabajo. Para aproximar el comportamiento del modelo climático en un período prolongado de tiempo (un período de años) este enfoque no resulta útil, porque generalmente solo se utiliza cuando se busca representar variaciones rápidas en el clima (un período de días). El modelo se define así ya que para los objetivos de este trabajo (el observar la evolución de la temperatura al incrementar el carbono en la atmósfera en un período de años) no resulta necesario considerar la evolución de las variables del sistema en periodos cortos. Estas formulaciones generan modelos que son denominadas como modelos climáticos de intercambio de energía, por que estudian la relación que existe entre la energía radiante absorbida y reflejada por la tierra con las otras variables climáticas. Desde el primer desarrollo de este tipo de modelos [30], estos se han utilizado continuamente. Aunque estos modelos son simples en su formulación, resultan certeros para analizar fenómenos como la irreversibilidad asociada a efectos como el aumento en la emisión de gases de invernadero en la dinámica de un sistema climático. Varios ejemplos de estos modelos se pueden encontrar en [31] y [32]. Se establecen restricciones específicas para obtener un modelo más compacto que represente de una manera simple las interacciones entre el carbono, la temperatura y el desarrollo de la vegetación en el planeta. En principio se formulan estas restricciones por simplicidad.

Las restricciones asociadas a este modelo climático son:

- La vegetación esta distribuida de manera uniforme en el planeta.
- Los cuerpos de agua que se encuentran en el planeta no se encuentran modelados en el ciclo del carbono propuesto.
- Los fenómenos como la precipitación, evaporación u otros relacionados con la presencia de agua no se encuentran modelados en el ciclo del carbono propuesto.
- El único gas de efecto invernadero que se encuentra definido es el carbono. En un modelo más completo pueden considerarse otros gases de invernadero como el vapor de agua o el metano.

- El albedo del modelo solo se encuentra definido por la vegetación del planeta. No se modelan componentes del sistema que presentan un albedo alto, como los cuerpos formados por nieve.
- El carbono total del sistema se encuentra **tan solo** alojado en la vegetación y en la atmósfera del planeta. El carbono que es producto de la descomposición de la vegetación pasa de inmediato a la atmósfera, por lo que en el modelo no se encuentra definido un compartimento del carbono alojado en el producto de la descomposición. Existen otros modelos, donde se considera el carbono alojado en los desechos de la materia orgánica y en el suelo [33].

2.2.2. Definiciones.

Para explicar de manera eficiente las interacciones entre las variables climáticas definidas para el modelo del ciclo mínimo del carbono se propone primero definir los siguientes conceptos básicos [34]:

- **Radiación Térmica:** Se denomina radiación térmica a la radiación emitida por un cuerpo debido a su temperatura. Esta radiación es energía electromagnética que se genera por el movimiento térmico de las partículas cargadas que hay en la materia. Todos los cuerpos (salvo un cuerpo cuya temperatura sea de cero absoluto) emiten energía debido a este efecto de radiación electromagnética, siendo su intensidad dependiente de la temperatura y de la longitud de onda considerada.
- **Cuerpo Negro:** Es un cuerpo físico ideal que absorbe toda la energía radiante incidente, sin importar la frecuencia o el ángulo de incidencia. Esta absorción da como resultado una agitación térmica que provoca la emisión de radiación térmica. El cuerpo negro es un concepto ideal, pero hay objetos que por su comportamiento pueden aproximarse a las características a un cuerpo negro. Al elevar la temperatura no solo aumenta la energía emitida sino que lo hace a longitudes de onda más cortas. Los cuerpos no emiten con igual intensidad a todas las frecuencias o longitudes de onda, sino que lo hacen siguiendo la ley de Planck. [35].
- **Ley de Stefan-Boltzmann:** La ley de Stefan-Boltzmann describe la radiación térmica emitida por un cuerpo negro ideal, donde se establece que «La intensidad de

radiación térmica total irradiada por unidad de área sobre todas las longitudes de onda se incrementa a medida que aumenta la temperatura de un cuerpo negro.» La intensidad de radiación térmica irradiada es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura [36]. La radiación térmica emitida por un cuerpo negro se denota por la variable E_B y se encuentra dada por la expresión:

$$E_B = \sigma T^4 \quad (2.2.2.1)$$

- **Constante de Stefan-Boltzmann:** Es una constante física simbolizada por la letra griega σ , es la constante de proporcionalidad en la ley de Stefan-Boltzmann [36].
- **Emisividad:** La emisividad es la proporción de radiación térmica emitida por una superficie de un objeto debido a su temperatura. La emisividad direccional espectral se define como la razón entre la intensidad emitida por la superficie en una dirección particular y la intensidad que sería emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura y longitud de onda. La emisividad se encuentra definida en un rango entre 0 y 1.
- **Cuerpo Gris:** Para un cuerpo negro, la emisividad espectral es 1. Si la emisividad de un cuerpo es menor que 1, pero se mantiene constante para todas las longitudes de onda y no depende de la temperatura del objeto, este se denomina cuerpo gris. La radiación térmica emitida por un cuerpo gris se encuentra dada por la ecuación:

$$E_G = \sigma \epsilon T^4 \quad (2.2.2.2)$$

- **Albedo:** El albedo es la proporción de radiación que cualquier superficie refleja respecto a la radiación que incide sobre ella. El albedo es una cantidad adimensional que se encuentra entre 0 y 1.
- **Temperatura Promedio:** La temperatura promedio del planeta se obtiene a través de la medición de la temperatura en distintos lugares de la superficie y en diferentes instantes de tiempo durante el periodo en que se estudia la temperatura (en este caso, un año). Para obtener la temperatura promedio global, se recopilan datos de temperaturas de diferentes lugares de la superficie y se realiza una media ponderada de estos valores para obtener una temperatura global promedio. Detalles específicos

sobre la determinación de la temperatura promedio anual de la tierra y la manera en que se determina puede obtenerse en [8].

- **Calor Específico:** El calor específico es la cantidad de calor que hay que aplicar a una unidad de masa, para aumentar su temperatura en un grado. A este término también se le puede llamar capacidad calorífica o capacidad térmica.
- **Efecto Invernadero:** Es un proceso en el que la radiación térmica emitida por la superficie planetaria es absorbida por los gases de efecto invernadero que se encuentran en la atmósfera. esta radiación térmica es irradiada en todas las direcciones, por lo que parte de esta radiación es devuelta hacia la superficie terrestre y la atmósfera inferior. Este efecto resulta en un incremento de la temperatura superficial media respecto a lo que habría en ausencia de estos gases.

2.2.3. Definición de los bucles de retroalimentación del ciclo del carbono.

En el modelo simplificado propuesto se enuncian dos bucles causales que representan las retroalimentaciones dentro del ciclo de carbono entre la biosfera del planeta (solo representada en las ecuaciones por la vegetación) y el clima del planeta (representado por la temperatura y el carbono):

- **1. Vegetación-albedo-temperatura-vegetación:**

Un albedo alto enfría el planeta por que la cantidad de energía que incide sobre la superficie es baja (el efecto contrario se presenta con un albedo bajo, que calienta el planeta). El albedo típico de la vegetación presenta niveles bajos, se encuentra entre 0.25-0.3 al contrario del albedo de la nieve que presenta valores entre 0.8-0.9. Los valores bajos del albedo de la vegetación incrementa la temperatura de la superficie, lo que a su vez afecta la vegetación. De manera más específica un incremento en la temperatura estimula el crecimiento de la vegetación, pero si la temperatura aumenta demasiado esto tiene un efecto contrario al planteado anteriormente, la vegetación ya no puede desarrollarse. En otras palabras, existe un intervalo de temperatura en

el que puede desarrollarse la vegetación. El albedo de los cuerpos de agua es bajo, por lo tanto la presencia de cuerpos de agua presenta un efecto contrario a la temperatura en el proceso de intercambio de energía del planeta. **De acuerdo a lo supuesto anteriormente para simplificar las interacciones entre el sistema dinámico de intercambio de energía y reducir el número de ecuaciones diferenciales usadas, no se modelan los cuerpos de agua y los cuerpos de hielo, ya que ambos afectan el albedo del sistema**, por lo tanto el albedo solo se ve afectado por la vegetación del planeta. En resumen, existen dos bucles de retroalimentación, en el primero se describe como el aumento de la vegetación v en el planeta genera un aumento en la temperatura T del planeta. Por otro lado si el aumento de la temperatura se encuentra en un intervalo ΔT donde puede desarrollarse la vegetación entonces este cambio en la temperatura puede generar un aumento o una disminución en la vegetación del planeta (en un ambiente donde existe una temperatura muy alta es posible que no se desarrolle la vegetación). En la figura 2.1 se muestra un esquema simplificado de esta relación.

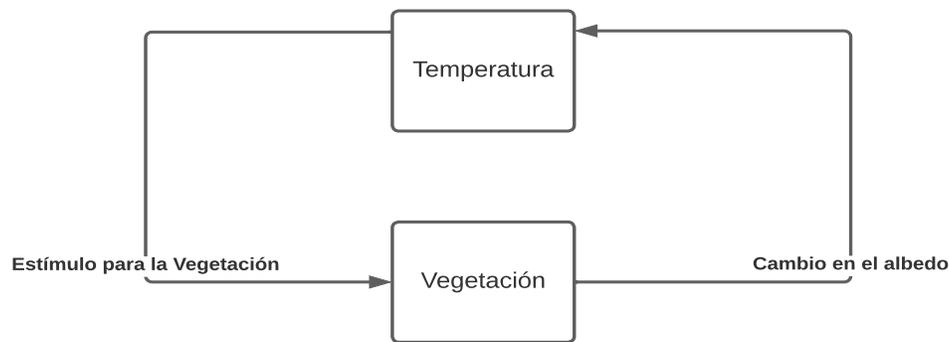


Figura 2.1: Diagrama simplificado de la interacción entre la vegetación y la temperatura.

■ 2. Vegetación \Leftrightarrow Carbono-temperatura-vegetación:

Las hojas verdes de la vegetación utilizan la energía de la luz solar a través de la fotosíntesis para combinar el dióxido de carbono (CO_2) que absorben de la atmósfera con el agua y los nutrientes del suelo y producir azúcares, su principal fuente de alimento. Sin embargo en la respiración celular de las plantas, se utiliza el oxígeno

(O_2) para oxidar compuestos orgánicos y producir energía para las funciones vitales de la planta, y se produce CO_2 como subproducto. Por lo tanto, el gas que se expira durante la respiración de las plantas es principalmente dióxido de carbono (CO_2). Cabe destacar que aunque la cantidad de CO_2 que se emite por la respiración de las plantas puede ser menor que la cantidad de CO_2 que se absorbe por la fotosíntesis, la respiración es un proceso constante en las plantas, mientras que la fotosíntesis solo ocurre durante el día y depende de la disponibilidad de luz solar. En consecuencia, en algunas condiciones, las plantas pueden ser una fuente neta de CO_2 al ambiente. Por otra parte el efecto invernadero es el proceso por el cual la atmósfera retiene parte de la radiación infrarroja emitida por la tierra y así la calienta. Esta radiación infrarroja proviene del calentamiento que se genera en la superficie del planeta a través de la radiación solar (la tierra como superficie opaca absorbe radiación y emite calor). Este calor emitido no se escapa por completo al espacio, más bien es absorbido en parte por la atmósfera, calentando la tierra. El proceso por el cual se produce el efecto invernadero tiene como principales elementos a la tierra, el sol y la atmósfera, ya que esta se encuentra compuesta por gases de efecto invernadero, el metano (CH_4), el dióxido de carbono (CO_2) y el vapor de agua (H_2O). **Para este modelo, el carbono es el único gas de efecto invernadero.** La tierra refleja una parte importante de la radiación solar debido a su albedo. La atmósfera permite que gran parte de la radiación de onda penetre a la tierra y al dejar pasar la radiación solar la tierra se calienta y emite radiación infrarroja al espacio. Sin embargo la atmósfera absorbe parte de ese calor y lo emite en todas direcciones.

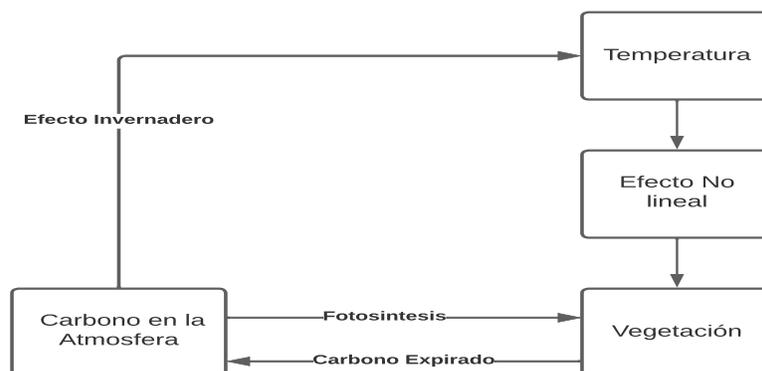


Figura 2.2: Interacción parcial entre el carbono y la vegetación.

Retomando los conceptos anteriores, este efecto de la retención de la radiación infrarroja por medio de la atmósfera es lo que se conoce como efecto invernadero y es un fenómeno fundamental para la existencia de vida en el planeta, ya que la atmósfera actúa como un aislante térmico que retiene el calor en la tierra. Este bucle de retroalimentación se puede resumir brevemente definiendo que el carbono de la atmósfera genera un incremento de temperatura y a su vez la temperatura tiene un efecto de crecimiento sobre la vegetación del planeta, que al crecer consume parte del carbono de la atmósfera para realizar la fotosíntesis y libera carbono por su proceso de respiración. El aumento en la vegetación disminuye el albedo del planeta que como se planteó anteriormente generando un aumento en la emisividad del planeta y en consecuencia alteraciones en la temperatura.

En la figura 2.3 se pretende esquematizar de manera sencilla las principales fuentes y cuencas de carbono en el planeta. De acuerdo a las restricciones planteadas en la sección anterior el modelo solo considera como fuentes de carbono las emisiones antropogénicas, la expiración de la vegetación y los productos de desecho de la vegetación y como cuenca a la vegetación del planeta.

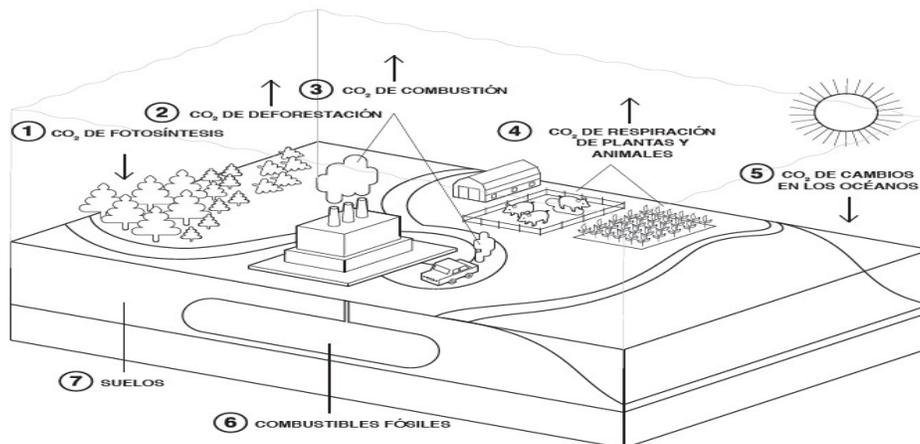


Figura 2.3: Ciclo del carbono. Imagen obtenida en [52].

El diagrama de bloques presentado en la figura 2.4 sintetiza de una manera simplificada las interacciones que existen entre las variables de estado que fueron planteadas para el modelo climático formulado anteriormente. Este diagrama se encuentra parcialmente basado en el diagrama utilizado en [37] para esquematizar las interacciones en un

modelo climático que incorpora el ciclo del agua al modelo de vegetación-temperatura-carbono. Aunque como se mencionó anteriormente, el efecto invernadero es fundamental para mantener la temperatura de la tierra en el rango adecuado para el desarrollo de la vida, desde el surgimiento de la época industrial, de manera continua ha surgido un incremento significativo en la emisión de gases de efecto invernadero. Este aumento en las emisiones altera el equilibrio del efecto invernadero y genera un incremento continuo en la temperatura de la tierra.

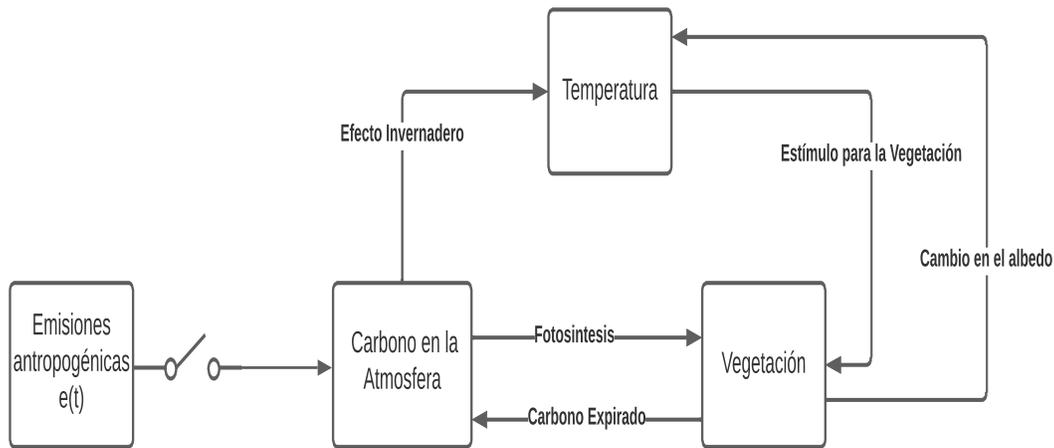


Figura 2.4: Interacciones para el modelo climático planteado.

2.2.4. Ecuaciones diferenciales asociadas al sistema.

Para realizar un análisis de la evolución del sistema climático planteado en la sección anterior, se propone presentar un análisis basado en un modelo de tres ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las variables de interés:

1. La primera ecuación representa el cambio en la biota del planeta. Para este sistema la biota se encuentra representado solo por la vegetación que existe en el planeta. Para reducir el número de ecuaciones diferenciales y mantener un sistema reducido, en el desarrollo del modelo no se contemplan otras especies para modelar la biota. Además, la vegetación afecta de manera directa la temperatura del planeta por medio de la ecuación de intercambio de energía y el carbono por medio de los procesos de respiración y de absorción de alimento. Una ecuación diferencial que describa de

manera adecuada el cambio de la biomasa de la vegetación considerando la interacción que existe entre esta y el carbón atmosférico, implica formular una función que describa la generación de biomasa a causa del proceso de fotosíntesis por unidad de carbono atmosférico. Además una función que describa la cantidad de carbono generado por la biota a través del proceso de respiración en función de su biomasa. Aunque este enfoque es adecuado, es posible definir funciones que describan estas interacciones de manera más sencilla. Para simplificar estas interacciones es posible utilizar una ecuación logística formulada para describir el crecimiento en la biomasa de la vegetación. En [7] se propone utilizar como variable de estado al carbono alojado en la vegetación denotado por N , utilizando como premisa que el carbono compartimental alojado en la vegetación es directamente proporcional a esta, es decir $N \propto v$. Una ecuación que exprese la variación del carbono alojado en la vegetación puede ser planteada de manera sencilla como la diferencia entre la producción del carbono que permanece **alojado** en la vegetación (durante el proceso de la fotosíntesis) y el carbono expirado que la vegetación pierde y que se traspa a la atmósfera. Denote a P a la función que cuantifica la producción de la vegetación expresada en términos del carbono que permanece dentro de la misma vegetación. Del análisis realizado anteriormente se puede realizar la hipótesis que esta función P depende de las siguientes variables:

- **Carbono en la vegetación N .** El crecimiento de la vegetación depende del estado actual de la vegetación, expresada en términos del carbono que se encuentra en la vegetación.
- **Temperatura T .** La vegetación depende también de la temperatura T del planeta. Aunque un incremento en la temperatura genera un aumento en la tasa de producción de la vegetación, si la temperatura se aleja demasiado de la temperatura óptima T_0 para el crecimiento de la vegetación entonces este aumento de temperatura genera una disminución en el crecimiento de la vegetación.
- **Carbono en la atmósfera C .** Para realizar el proceso de fotosíntesis, el crecimiento de la vegetación también depende del carbono que existe en la atmósfera. Además durante el proceso de respiración, la vegetación expira CO_2 que se incorpora el carbono alojado en la atmósfera.

La manera en que estas variables afectan a la producción de la vegetación se aborda en detalle en la próxima sección. Definiendo el término mN , que representa el carbono eliminado, donde m representa la tasa de eliminación del carbono en la vegetación por unidad de tiempo (esta eliminación puede deberse al proceso de respiración o al proceso de descomposición de la vegetación). Entonces se tiene que la diferencia entre estos dos términos se puede expresar por la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{P(C, N, T)}_{\text{Carbono alojado en la vegetación}} - \underbrace{mN}_{\text{Carbono expirado por la vegetación}} \quad (2.2.4.1)$$

2. La segunda ecuación representa de manera compacta la variación de la temperatura promedio del planeta. La variación en la temperatura se puede representar como un modelo simplificado de intercambio de energía. De manera similar a la ecuación diferencial anterior, este modelo describe la diferencia entre el calor absorbido por la superficie del planeta y el calor emitido por esta. Escalando esta diferencia por el recíproco del término k , que representa la capacidad térmica del planeta, se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{Inverso de la capacidad térmica}} \left(\underbrace{S(1 - \alpha(N))}_{\text{Calor absorbido}} - \underbrace{\sigma\varphi(C)T^4}_{\text{Calor irradiado}} \right) \quad (2.2.4.2)$$

Las funciones $\alpha(N)$ y $\varphi(C)$ en la ecuación (2.2.4.2) representan respectivamente el albedo (dependiente de la vegetación) y la emisividad (dependiente del carbono en la atmósfera). Tanto estas funciones como el término k son definidas en detalle en las secciones posteriores.

3. La tercera ecuación diferencial describe el cambio en el carbono presentado en la atmósfera C . Tal como se expresó en la sección anterior, en ausencia de emisiones externas (emisiones antropogénicas) la atmósfera y la vegetación continuamente están intercambiando el carbono que existe en el planeta:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -\frac{dN}{dt} \\ &= -P(C, N, T) + mN \end{aligned} \quad (2.2.4.3)$$

En términos de la ecuación (2.2.4.3) el término mN representa el carbono eliminado por la vegetación (por espiración o descomposición), por lo tanto este carbono se incorpora a la atmósfera y el término es positivo para esta ecuación diferencial. Por otra parte la función $P(C, N, T)$ (función de producción de vegetación) representa el carbono transferido por unidad de tiempo de la atmósfera a la vegetación (por la fotosíntesis) por lo tanto para esta ecuación diferencial el término es negativo. Es decir:

$$\frac{dC}{dt} = \underbrace{mN}_{\text{Carbono expirado hacia la atmósfera}} - \underbrace{P(C, N, T)}_{\text{Carbono absorbido desde la atmósfera}} \quad (2.2.4.4)$$

Considerando las emisiones antropogénicas carbono por unidad de tiempo como la función de emisión $f(t)$ (fuel) se tiene que la ecuación diferencial del carbono es:

$$\frac{dC}{dt} = -P(C, N, T) + mN + \underbrace{f(t)}_{\text{Emisiones externas}} \quad (2.2.4.5)$$

La dinámica del sistema climático se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= P(C, N, T) - mN \\ k \frac{dT}{dt} &= S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(C)T^4 \\ \frac{dC}{dt} &= -P(C, N, T) + mN + f(t) \end{aligned} \quad (2.2.4.6)$$

Para describir el comportamiento de los fenómenos planteados en este sistema climático, las ecuaciones diferenciales asociadas al modelo contienen por **funciones no lineales**. Por lo tanto para simplificar las ecuaciones que definen el carbono atmosférico C , resulta conveniente definir la variable $A(t)$ como el carbono total en el sistema, es decir $A(t) = C(t) + N(t)$, por lo que el carbono atmosférico se puede definir como $C(t) = A(t) - N(t)$. De la primera expresión se tiene que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dC}{dt} + \frac{dN}{dt}, \quad (2.2.4.7)$$

de la ecuación (2.2.4.7) es posible definir (2.2.4.5) como:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dA}{dt} - \frac{dN}{dt} \quad (2.2.4.8)$$

En consecuencia (2.2.4.7) se define como:

$$\frac{dA}{dt} = f(t) \quad (2.2.4.9)$$

De (2.2.4.9), (2.2.4.2) y (2.2.4.1) se concluye que las ecuaciones del sistema (2.2.4.6) se pueden expresar en términos de las variables A , N y T como:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= P(A - N, N, T) - mN \\ k \frac{dT}{dt} &= S(1 - \alpha(N)) - \sigma \varphi(A - N)T^4 \\ \frac{dA}{dt} &= f(t) \end{aligned} \quad (2.2.4.10)$$

Para estudiar el comportamiento de este sistema y proponer un esquema de análisis en las siguientes secciones se definirán las funciones $\varphi(N)$, $\alpha(N)$, la función $P(A, N, T)$ y la función de generación de carbono dependiente del tiempo $f(t)$. Utilizando estos conceptos se puede definir el carbono total del sistema como $A(t)$ de manera explícita como:

$$A(t) = A_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad (2.2.4.11)$$

Donde $A_0 = C(t_0) + N(t_0)$. Dado que las trayectorias solución están definidas en el espacio fase $\{A, N, T\}$ y la variable $A(t)$ solo depende del tiempo, el sistema definido en (2.2.4.10) no tiene puntos de equilibrio, por lo que primero se estudiará el caso casi estacionario, donde se considera que las emisiones antropogénicas de carbono $f(t)$ son muy pequeñas en comparación a $A(t)$, es decir:

$$\frac{dA}{dt} = f(t) \ll A(t), \quad (2.2.4.12)$$

esta suposición se basa en que en comparación al cambio que ocurre en $T(t)$ o en $N(t)$, el cambio presentado por la variable $A(t)$ es muy pequeño. Por lo tanto si el término integral que aparece en (2.2.4.11) es muy pequeño puede aproximarse 0, esto implica que $A(t) = A_0$. Este sistema se basa en un esquema de cero emisiones, donde $\dot{A} \approx 0$, es decir las trayectorias solución se pueden estudiar en el plano fase $\{N, T\}$ y el sistema (2.2.4.10) se reduce a:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= P(N, T; A_0) - mN \\ k\frac{dT}{dt} &= S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(N; A_0)T^4\end{aligned}\quad (2.2.4.13)$$

Considerar que el carbono total en la atmósfera se mantiene constante es el planteamiento del modelo propuesto en [7], artículo que sirve como base en esta tesis y para los artículos [38] y [39]. Sin embargo, esta suposición no es válida en el contexto actual, por lo que en el presente trabajo se analizara el comportamiento del sistema en el espacio fase $\{A, N, T\}$. Durante el desarrollo de la tesis las variables asociadas al carbono del sistema $A(t)$, $N(t)$ y $C(t)$ se expresaran en Gt (*Giga toneladas*), una de las unidades utilizadas más comúnmente en el estudio de los modelos climáticos [6], [32]. Un Gt se define como 1×10^9 toneladas. Como resulta más práctico estudiar la evolución del modelo climático en una escala de años, las derivadas de estas variables se expresaran en $Gt \text{ yr}^{-1}$, donde yr representa un período de tiempo de un año. Una motivación adicional para expresar la ecuación (2.3.2.3) en una escala de años, consiste en que la variación de la temperatura T en los sistemas climáticos generalmente expresan el cambio en temperatura promedio anual del planeta.

2.3. Funciones definidas para el modelo climático.

2.3.1. Modelo simplificado del carbono en la vegetación.

En la primera ecuación diferencial del sistema (2.2.4.10), se define la tasa de cambio en la concentración del carbono en la vegetación con respecto al tiempo como la diferencia entre la función $P(C, N, T)$ y el término mN . Tal como se definió en la sección anterior, la función P es la producción neta de vegetación en el planeta y es una función que depende de la temperatura T , el carbono en la atmósfera C y el mismo carbono N en la vegetación. En [7] se asume que la función de producción P es definida como el producto:

$$P(C, N, T) = P_m g_T(T) g_C(C) g_N(N), \quad (2.3.1.1)$$

donde el parámetro P_m representa la máxima tasa de crecimiento de la vegetación con $P_m \in (0, \infty)$. Esta expresión muestra que la productividad de la vegetación es el producto

de tres funciones que dependen de la temperatura, el carbono en la vegetación y el carbono en la atmósfera. El dominio y la imagen de las funciones $g_T(T)$, $g_N(N)$ y $g_C(C)$ están definidas como:

- $g_T(T) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.
- $g_N(N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$.
- $g_C(C) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$.

Por consecuencia $g_T(T)g_C(C)g_N(N) : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow [0, 1]$ y $P(C, N, T) : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow [0, P_m]$. Esta expresión resalta la importancia del parámetro P_m para la formulación del modelo climático. De acuerdo a [7] la expresión (2.3.1.1) se define un como producto de funciones para modelar la escasez de un recurso en el modelo. Esta formulación es consistente con la llamada ley del mínimo de Liebig [40], también conocida como el paradigma del factor limitante de Liebig. La función $P(C, N, T)$ se define como un producto del parámetro P_m y de tres funciones independientes del tiempo $g_T(T)$, $g_C(C)$ y $g_N(N)$. Cada una de estas funciones describen la dependencia que tiene P con los recursos de los que depende su crecimiento y que se encuentran definidos en el modelo: la temperatura T , el carbono en la atmósfera C y el carbono dentro de la vegetación N . De acuerdo a ley de Liebig el crecimiento de la biota se encuentra limitado por el recurso más escaso. Definir a esta función como un producto permite modelar de manera general la dependencia que tiene P de todos los recursos disponibles.

Retomando el concepto de dependencia de recursos, para un modelo de crecimiento de vegetación como P existen otras variables que afectan considerablemente este crecimiento. Tales recursos pueden modelarse por medio de distintas variables de estado en el sistema, como el agua W o el carbono alojado en la superficie de la tierra S . Aunque por definición estas variables no forman parte del sistema climático propuesto, su efecto se puede intentar compensar modificando el valor de P_m . Por otra parte en [41] se especifica que algunas de las ventajas principales de esta formulación radica fundamentalmente en que el comportamiento del modelo es manejable desde el punto de vista matemático, ya que resulta relativamente sencillo obtener información sobre el comportamiento del sistema climático. Sin embargo al igual que sucede con el modelo de productividad vegetal

de [42] la respiración y la fotosíntesis no son explícitamente modeladas, más bien estos fenómenos se incorporan de manera indirecta en las funciones $g_N(N)$ y $g_C(C)$. Debido a esta importante característica en [41] se denomina a este modelo como *quasi-biogeoquímico*. Una vez que se definió el comportamiento de la función $P(C, N, T)$, resulta pertinente definir las funciones $g_T(T)$, $g_C(C)$ y $g_N(N)$. Para la función de crecimiento $g_T(T)$ que depende de la temperatura T , se tienen las siguientes características:

- $g_T(T) : \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow [0, 1]$.
- La temperatura promedio de la tierra durante el siglo pasado en la tierra fue de 13.9°C [29] y la temperatura óptima para el crecimiento de la vegetación puede variar entre los 18°C y los 28°C (este valor depende del tipo de vegetación). Si se calcula la media aritmética de estos valores se obtiene que 23°C es una aproximación aceptable a la temperatura óptima de crecimiento. Por lo tanto se puede esperar que $g_T(23) \approx 1$.
- Es posible definir un rango de temperaturas $[T_1, T_2]$ en que la vegetación puede realizar el proceso de fotosíntesis. Es decir para $T \notin (T_1, T_2)$, $g_T(T) = 0$. Por lo tanto $g_T(T_1) = g_T(T_2) = 0$.

Se concluye que un polinomio de segundo grado es una aproximación adecuada para $g_T(T)$, la función de crecimiento de la vegetación con respecto a la temperatura:

$$g_T(T) = \begin{cases} \frac{-4}{(\Delta T)^2}(T^2 - (T_1 + T_2)T + T_1T_2) & \text{si } T \in [T_1, T_2] \\ 0 & \text{si } T \notin [T_1, T_2] \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

donde ΔT es $T_2 - T_1$.

De acuerdo a las consideraciones definidas en los puntos anteriores, T_1 y T_2 representan el límite inferior y el límite superior del rango de temperatura donde sucede la fotosíntesis en la vegetación, es decir el rango de temperatura donde puede nacer y desarrollarse la vegetación. Las unidades asociadas a los parámetros T_2 y T_1 se encuentran definidos en la tabla 2.1.

La ecuación (2.3.1.2) también se puede expresar de manera más compacta como:

$$g_T(T) = \max \left\{ 0, \frac{4}{(\Delta T)^2} (T - T_1)(T_2 - T) \right\} \quad (2.3.1.3)$$

El valor de los parámetros T_1 y T_2 se asignan de acuerdo con los valores utilizados en [7], [39] y [38] y son:

$$T_1 = 5^\circ\text{C}, \quad T_2 = 40^\circ\text{C}$$

Al comparar la ecuación (2.3.1.3) con las suposiciones anteriores se pueden obtener distintas conclusiones:

- Las raíces de la ecuación (2.3.1.3) se encuentran en T_1 y T_2 , por lo tanto $g_T(T) \neq 0$ para $T \notin (T_1, T_2)$.
- El valor máximo de la función $g_T(T)$ es 1. Este valor se obtiene cuando T es igual al valor medio del intervalo $[T_1, T_2]$. Al definir la temperatura óptima como $T_{opt} = (T_1 + T_2)/2$, para los valores propuestos $T_1 = 5^\circ\text{C}$ y $T_2 = 40^\circ\text{C}$, se obtiene que $T_{opt} = 22.5^\circ\text{C}$. Este valor se acerca al primer valor propuesto $T_{opt} = 23^\circ\text{C}$.
- El valor asignado a la temperatura promedio de la tierra es $g_T(13.9) \approx 0.76$. El disminuir el intervalo ΔT impactaría de manera significativa los resultados obtenidos.

En la figura 2.5 se muestra la representación gráfica de esta función.

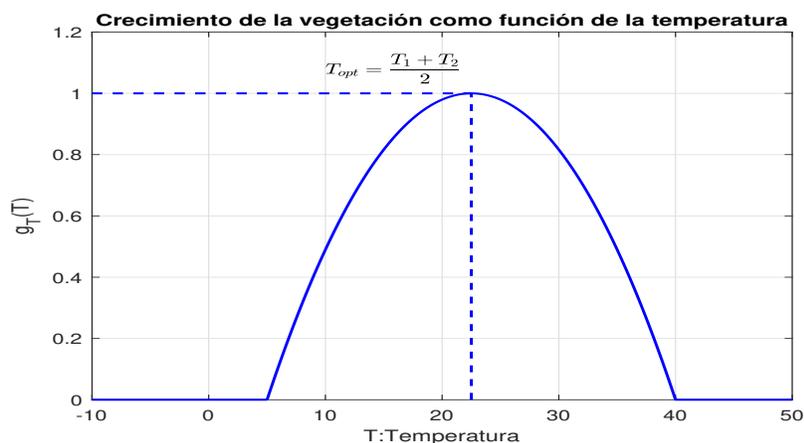


Figura 2.5: Función $g_T(T)$. $T_2 = 40^\circ\text{C}$ y $T_1 = 5^\circ\text{C}$

Aunque existen otras funciones que pueden aproximar el comportamiento que se busca para $g_T(T)$, el polinomio de segundo orden resulta en una aproximación razonable y matemáticamente sencilla.

Para el carbono en la vegetación N y el carbono en la atmósfera C se definen las funciones monótonamente crecientes $g_N(N)$ y $g_C(C)$.

- $g_N(N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ con $g_N(N) \rightarrow 1$, cuando $N \rightarrow \infty$.
- $g_C(C) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ con $g_C(C) \rightarrow K$, cuando $C \rightarrow \infty$, con $K \leq 1$.

La ecuación (2.3.1.4) es una de las múltiples funciones que cumplen con estas características para N , modificando los valores de los parámetros α , β y γ . Variando los parámetros también es posible utilizar (2.3.1.4) para definir la función que nos permita aproximar $g_C(N)$.

$$g_N(N) = \frac{\alpha N}{\beta N + \gamma} \quad (2.3.1.4)$$

Este enfoque resulta adecuado, sin embargo tal como se explicó en la sección anterior utilizar la definición del carbono total del planeta $A = C + N$ puede resultar más sencillo para analizar la interacción del carbono en la vegetación N con la temperatura T . Esto implica definir la función $g_C(A - N)$, para cada N asociada a un valor de A . Por lo tanto resulta más conveniente definir una nueva función $G(A, N)$. Se espera que esta función presente un comportamiento equivalente a obtener el producto $g_N(N)g_C(N)$ en el intervalo $[0, A]$. Para definir esta nueva función se deben de tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Al igual que el producto $g_N(N)g_C(N)$, la función $G(A, N)$ se encuentra definida en el intervalo $G(A, N) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow [0, 1]$.
- El producto $g_N(N)g_C(C)$ es igual a 0 si y solo si $g_N(N) = 0$ ó $g_C(C) = 0$. Por lo tanto como C se define como $A - N$ el producto $g_N(N)g_C(A - N)$ tiene un mínimo igual a 0 para $N = 0$ ó $N = A$.

- El producto $g_N(N)g_C(C)$ es igual a 1 si y solo si $g_N(N) = 1$ y $g_C(C) = 1$. De manera similar a la conclusión que se obtuvo en el punto anterior el producto $g_N(N)g_C(C)$ tiene un máximo igual a 1 para los valores óptimos $N_{opt}, C_{opt} = A - N_{opt}$ tal que:

$$g_N(N_{opt}) = g_C(A - N_{opt}) = 1 \quad (2.3.1.5)$$

- No puede existir más carbono contenido en la vegetación que el carbono total que existe en el planeta. Es decir la variable N solo se encuentra definida para valores menores o iguales a A , por lo que N se encuentra definida en el intervalo $[0, A]$.

Tomando en cuenta estas consideraciones y definiendo a A_0 como un parámetro es razonable **aproximar** la función $G(A, N)$ como una función con un valor máximo que se obtiene para varios elementos (A, N) de su dominio. De los puntos anteriores se sabe que $G(A_0, 0) = G(A_0, A_0) = 0$ para todo $A_0 \in A$

Utilizando el modelo de una ecuación logística, $G(A, N)$ se define como la función de índice de crecimiento de la vegetación expresada en términos del carbono alojado en la vegetación y el carbono total del sistema:

$$G(A, N) = N(A - N) \quad (2.3.1.6)$$

Es necesario multiplicar esta función por el recíproco de $A^2/4$ para cumplir con la condición:

$$\text{máx } G(A, N) = 1 \quad (2.3.1.7)$$

Obteniendo:

$$G(A, N) = \frac{4}{A^2} N(A - N) \quad (2.3.1.8)$$

Se tiene que la función (2.3.1.8) no se encuentra definida para $A = 0$. Además como se definió anteriormente $A \geq N$, por lo que la función $G(A, N)$ no se encuentra definida para $(0, 0)$. Definiendo $G(0, 0) = 0$ se tiene:

$$G(A, N) = \begin{cases} \frac{4}{A^2} N(A - N) & \text{si } (A, N) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (A, N) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.3.1.9)$$

Comparando la expresión obtenida en la ecuación (2.3.1.8) con la condiciones que se utilizaron para esbozar esta función se tiene que:

- La función de crecimiento $G(A, N)$ tiene un valor máximo $G(A, N) = 1$ para todo $N = A/2$.
- Como se definió $A = C + N$, el valor máximo de la función $G(A, N)$ se obtiene cuando el valor del carbono que existe en la atmósfera es igual al valor $C = A/2$. Esto implica que de acuerdo a lo obtenido en el modelo, el crecimiento máximo de la vegetación (expresado solo en términos del carbono del sistema) sucede cuando el carbono en la vegetación es el mismo que el carbono en la atmósfera. Aunque en un modelo biológico no es necesario que se presente esta condición, para los objetivos de este trabajo la función $G(A, N)$ se aproxima de manera adecuada al comportamiento esperado.
- En términos cualitativos la condición $G(A_0, 0) = G(A_0, A_0) = 0$ para todo $A_0 \in A$, se puede interpretar como una condición de no crecimiento para la vegetación N independientemente de la temperatura T del planeta. Es decir no existe crecimiento de vegetación si todo el carbono esta alojado en la vegetación o si no existe carbono en la vegetación (todo se encuentra en la atmósfera).
- La función $G(A, N)$ solo se encuentra definida en el intervalo $A \geq N$, por que no puede existir más carbono en la vegetación que carbono total en el sistema.

La función $G(A, N)$ se puede definir utilizando funciones más completas que capturen el comportamiento planteado para la función de crecimiento. Sin embargo para mantener un modelo compacto la función escogida resulta adecuada. En la figura 2.6 se observa la gráfica de la superficie $G(A, N)$ descrita por la ecuación (2.3.1.9). La ecuación (2.3.1.10) define la curva de crecimiento $G(N)$ para un A_0 que se considera como un parámetro constante. Este planteamiento puede resultar intuitivo para visualizar las características

de la superficie de la figura 2.6. Para cada A_0 se tiene que $G(A_0, N)$ es una parábola que abre hacia abajo y que se encuentra definida en el intervalo $[0, A_0]$. Este es el planteamiento utilizado en [7]. La superficie de la figura 2.6 esta definida para A en el intervalo $[0, 4000]$.

Para todo $A_0 \in [0, A]$ se tiene:

$$G(A_0, N) = \frac{4}{A_0^2} N(A_0 - N), \quad \text{con } A_0 \neq 0 \quad (2.3.1.10)$$

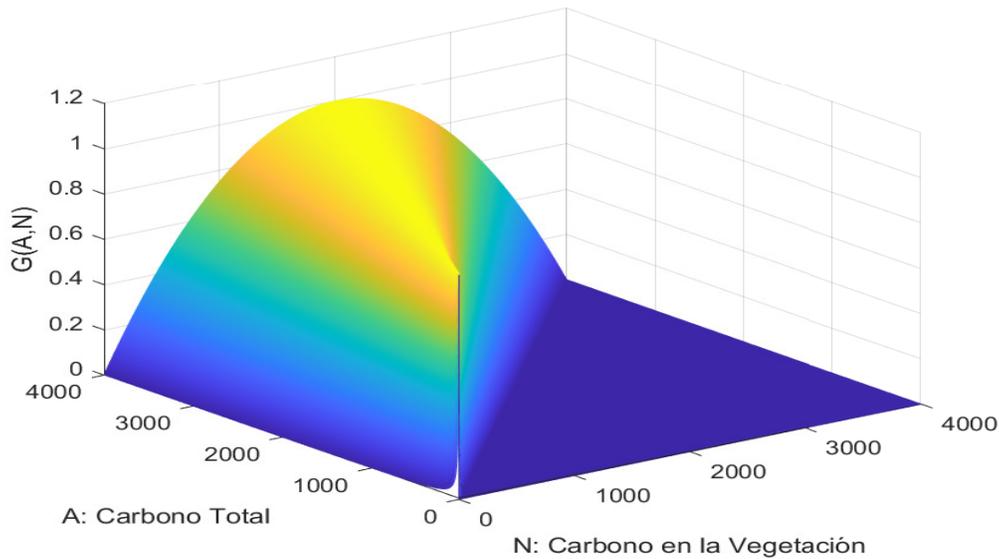


Figura 2.6: Función $G(A, N)$, para $A \in (0, 4000]$

2.3.2. Parámetros asociados a la ecuación del modelo de carbono en la vegetación.

Las funciones expresadas en las ecuaciones (2.3.1.1), (2.3.1.3) y (2.3.1.9) y los parámetros P_m y m , definen el comportamiento de la ecuación diferencial que describe el cambio en el carbono alojado en la vegetación N :

$$\frac{dN}{dt} = P_m g_T(T) G(A, N) - mN \quad (2.3.2.1)$$

Los parámetros m y P_m de la ecuación diferencial del modelo simplificado del ciclo del carbono, definen las características biológicas del sistema:

- m es el inverso del tiempo de residencia del carbón en la vegetación definido como τ_N .
 - El parámetro m se define en el intervalo $(0, \infty)$.
 - Las unidades del parámetro τ son yr (año) por lo que las unidades de m son yr^{-1} .
 - Como se expreso anteriormente, en términos del ciclo del carbono, el parámetro m define la tasa de transferencia de carbono de la vegetación a la atmósfera.
- P_m representa la máxima producción anual de la vegetación en el planeta.
 - El parámetro P_m se define en el intervalo $(0, \infty)$.
 - Las unidades utilizadas para el parámetro P_m son $Gt yr^{-1}$.

Para obtener la ceroclina de la vegetación N y realizar el análisis de estabilidad resulta conveniente expresar de manera explícita la función $G(A, N)$ en la ecuación diferencial (2.3.2.1) para obtener una expresión que se encuentre en términos de N :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4P_m}{A^2}N(A - N)g_T(T) - mN \quad \text{con } A \geq N \quad (2.3.2.2)$$

Resulta conveniente probar los valores extremos en este intervalo para realizar un análisis cualitativo:

- Para la ecuación (2.3.2.2), se puede definir una condición inicial $N_0 = 0$ que corresponde al caso en que no existe carbono en la vegetación, obteniendo:

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

Para toda $A, N = 0$ es un punto de equilibrio de (2.3.2.2) y en términos cualitativos todo el carbono se encuentra en la atmósfera. Para el sistema definido en (2.2.4.13), $N = 0$ es una ceroclina en el sistema definido en (2.2.4.10).

- Considerando a A_0 como un parámetro en la ecuación diferencial (2.3.2.2) y definiendo una condición inicial $N_0 = A_0$ se tiene que todo el carbono esta contenido en

la vegetación y por lo tanto no existe el carbono en la atmósfera. De la relación planteada anteriormente $C = A - N$, se obtiene que $C = 0$ y de acuerdo a la ecuación (2.3.2.2), N decae hasta alcanzar un equilibrio asintótico.

- El carbono que pierde el compartimento N de la vegetación se traspasa al compartimento del carbono C de la atmósfera.

Si se analiza la ecuación (2.3.2.2) en términos de una ecuación logística el parámetro m puede considerarse la tasa de muerte de la vegetación en el sistema N , mientras que en términos del carbono en el sistema C , m describe la tasa en que se elimina el carbono de la vegetación. El valor del producto de las funciones $g_T(T)$ y $G(A, N)$ es adimensional y se encuentra definido en el intervalo $[0, 1]$. Como se puede esperar, debido a las unidades en las que se encuentra expresado el parámetro P_m , la función P se esta dada en $Gt\text{yr}^{-1}$.

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{Gt\text{yr}^{-1}} = \underbrace{P_m}_{Gt\text{yr}^{-1}} \underbrace{G(A, N)g_T(T)}_{\text{Producto Adimensional} \in [0,1]} - \underbrace{m}_{\text{yr}^{-1}} \underbrace{N}_{Gt} \quad (2.3.2.3)$$

En la tabla 2.1 se resumen los parámetros asociados a estas funciones con sus unidades y su definición. Aunque las unidades para los parámetros T_1 y T_2 de la función $g(T)$ fueron definidos en grados celsius, puede resultar conveniente también expresar la temperatura en grados kelvin. La utilidad de expresar estos parámetros en grados kelvin, radica en que el modelo de intercambio de energía que define la ecuación diferencial de la temperatura se encuentra expresado en grados kelvin.

Parámetro	Notación	Unidad
Inverso del tiempo de residencia del carbon en la Biota.	m	yr^{-1}
Tiempo de residencia del carbon en la Biota.	τ_N	yr
Máxima producción de Carbono de la Vegetación.	P_m	Gt/yr
Limite superior de la temperatura para la fotosíntesis	T_2	$^{\circ}\text{C}$
Limite inferior de la temperatura para la fotosíntesis	T_1	$^{\circ}\text{C}$

Cuadro 2.1: parámetros relacionados con la primera ecuación del sistema.

Para encontrar los valores numéricos para los parámetros P_m y m en [7] se propone definir los puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned}
N^* &= 750Gt \\
T^* &= 14^\circ\text{C} \quad \text{ó} \quad 287^\circ\text{K} \\
A^* &= 1360Gt
\end{aligned}
\tag{2.3.2.4}$$

Para estos valores se puede estimar la producción de carbono en la vegetación N como $P^* = 60 Gt yr^{-1}$ para los valores descritos en la ecuación (2.3.2.4). De la ecuación (2.3.2.3) se tiene $m = P^*/N^* \approx 0.08 yr^{-1}$, así que el tiempo de residencia del carbono de la biota en el sistema es aproximadamente 12.5 yr . De la definición $A^* = N^* + C^*$ se deduce que $C^* = 610 Gt$. Anteriormente se definió $T_1 = 5^\circ\text{C}$ y $T_2 = 40^\circ\text{C}$ con $T_{opt} \approx 23^\circ\text{C}$. Con $T^* = 14^\circ\text{C}$ se tiene:

$$g_T(T^*) = \frac{4}{(\Delta T)^2} (T_2 - T^*)(T^* - T_1) \approx 0.764 \tag{2.3.2.5}$$

Además,

$$G(A^*, N^*) = \frac{4}{(A^*)^2} N^*(A^* - N^*) \approx 0.99 \tag{2.3.2.6}$$

El valor del parámetro P_m se obtiene a través de:

$$P_m = \frac{P^*}{g_T(T^*)G(A^*, N^*)} \approx 80Gt \tag{2.3.2.7}$$

Los valores numéricos de los parámetros se definen entonces como $P_m \approx 80Gt$ y $m \approx 0.08 yr^{-1}$. Los parámetros P_m y m resultan importantes para determinar la dinámica del sistema climático.

2.3.3. Modelo simplificado de intercambio de energía.

La segunda ecuación diferencial se encuentra basada en un modelo sencillo pero ampliamente utilizado para el intercambio de energía térmica radiante entre un objeto o sistema con su entorno. Este modelo térmico se utiliza en fuentes como [34], [30], [7] y [32], entre muchos otros. esta ecuación modela el intercambio y la conservación de la energía de una capa de aire (como modelo de la atmósfera) definido aproximadamente como:

$$4\pi R^2 h \rho c \frac{dT}{dt} = \pi R^2 (1 - \alpha) S_0 - 4\pi R^2 \sigma \epsilon T^4 \tag{2.3.3.1}$$

Donde α es el albedo, ϵ la emisividad (ambos adimensionales), σ es la constante de Stephan-Boltzman (W/m^2K^4), S_0 es la constante solar (Wm^{-2}) y R el radio de la tierra, h es la extensión vertical de una pequeña capa de aire, ρ es la densidad del aire y c es el calor específico del aire [34]. Este modelo puede clasificarse como un modelo de balance de energía, donde a grandes rasgos el primer elemento del lado derecho de la ecuación representa la energía térmica que recibe el objeto o sistema y el segundo termino representa la energía térmica que el sistema emite. La energía térmica que la tierra absorbe proviene del sol y se ha estimado que corresponde a una cuarta parte de la constante solar [34] y se representa por la variable S . Este el flujo de energía (radiación de onda corta) alcanza al planeta a través de un disco circular y es reducido por la porción de la radiación que se refleja. La energía térmica que la superficie del planeta emite es radiación de onda larga. En el modelo se asume que la radiación de onda larga puede ser cuantificada por definición clásica de cuerpo gris con el parámetro emisividad [34]. Se busca simplificar la expresión de la ecuación (2.3.3.1), por lo que se eliminan los elementos que aparecen en ambos lados de la ecuación:

$$h\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{S_0}{4}(1 - \alpha) - \sigma\epsilon T^4, \quad (2.3.3.2)$$

el producto $h\rho c$ es equivalente al termino k , la capacidad térmica del sistema, que se define como la energía térmica que puede absorber un objeto antes de aumentar su temperatura en un grado *Kelvin*. Además el término $S_0/4$ se sustituye por S . Al considerar el albedo α como una función $\alpha(N)$ del carbono en la vegetación N y a la emisividad ϵ como una función $\varphi(C)$ del carbono en el atmósfera C , la ecuación (2.3.3.1) se puede expresar como:

$$k \frac{dT}{dt} = S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(C)T^4 \quad (2.3.3.3)$$

Las funciones que aparecen en la ecuación (2.3.3.3) dependen únicamente de las variables del sistema N , T y C . De manera más detallada se puede explicar que esta ecuación expresa que el calor contenido en la atmósfera del planeta puede ser alterada de acuerdo con dos procesos, la absorción y la irradiación de energía. La fracción de la radiación solar incidente que es **reflejada** por la superficie del objeto es $S\alpha(N)$, por lo que la fracción de energía térmica que es **absorbida** es $S(1 - \alpha(N))$. Este producto representa la absorción de energía expresada en términos del albedo en la primera función del lado derecho de la

ecuación (2.3.3.3). Por simplicidad resulta conveniente definir la función:

$$\psi(N) = S(1 - \alpha(N)) \quad (2.3.3.4)$$

Al definir a la función $\psi(N)$, la ecuación (2.3.3.3) puede ser expresada como:

$$k \frac{dT}{dt} = \psi(N) - \sigma \varphi(C) T^4 \quad (2.3.3.5)$$

De acuerdo a lo planteado anteriormente la función $\psi(N)$ representa la absorción de energía y depende directamente del albedo del planeta. Al expresar el carbono en la atmósfera como $C = A - N$, la función $\varphi(C)$ se puede enunciar como una función que depende del carbono alojado en la vegetación N y del carbono total del sistema A :

$$k \frac{dT}{dt} = \psi(N) - \sigma \varphi(A, N) T^4 \quad (2.3.3.6)$$

Debido a que un aumento del carbono N alojado en la vegetación implica un aumento en la biomasa de la vegetación y por lo tanto una disminución del albedo del planeta, en [7] se propone utilizar un función asintóticamente decreciente para expresar la relación entre estas dos variables. La función $\alpha(N)$ seleccionada posee las siguientes propiedades para esbozar el comportamiento del albedo:

- Definiendo dos parámetros $\alpha_1 \in (0, 1]$ y $\alpha_2 \in (0, 1]$ con $\alpha_1 > \alpha_2$. Se propone $\alpha(N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\alpha_2, \alpha_1]$.
- Para el albedo de un sistema sin vegetación se tiene que $\alpha(0) = \alpha_1$. En el modelo propuesto se especificó que toda la superficie del planeta se encuentra cubierta uniformemente de vegetación, por lo tanto es razonable esperar que el valor máximo de la función $\alpha(N) = \alpha_1$ se obtiene cuando no existe vegetación, el estado $N = 0$.
- $N \rightarrow \infty : \alpha(N) = \alpha_2$. Se espera que para valores muy grandes de N el valor de la función se sature, $\alpha(N) = \alpha_2$ para un planeta cubierto de vegetación.

Dependiendo del tipo de vegetación se sabe que el albedo puede variar entre 0.15 a los 0.35 [34], por lo que se propone definir los valores de los parámetros como $\alpha_1 = 0.4$ y $\alpha_2 = 0.1$.

La función $\alpha(N)$ se define como:

$$\alpha(N) = \frac{k_\alpha \alpha_1 + \alpha_2 N}{k_\alpha + N} \quad (2.3.3.7)$$

La ecuación (2.3.3.7) cumple con las características planteadas anteriormente, la función $\alpha(N)$ es una función monóticamente decreciente con $\alpha(0) = 1$. De la ecuación (2.3.3.7) se obtiene que para un planeta saturado de vegetación el albedo es igual a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_\alpha \alpha_1 + \alpha_2 N}{k_\alpha + N} = \alpha_2$$

Conforme la vegetación N crece, la cantidad de energía que refleja el planeta disminuye y la cantidad de energía absorbida aumenta. De la ecuación (2.3.3.4) se deduce que la función de absorción $\psi(N)$ presenta las siguientes características:

- La función $\psi(N)$ se encuentra definida en el intervalo $\psi(N) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\psi_1, \psi_2]$.
- Para el albedo de un sistema sin vegetación se tiene que $\psi(0) = s_1(1 - \alpha_1)$. Por lo tanto se espera que el valor mínimo de la función de absorción se obtiene cuando no existe vegetación es decir cuando $N = 0$.
- $N \rightarrow \infty : \psi(N) = S(1 - \alpha_2)$. Se espera que para valores muy grandes de N el valor de la función se sature, es decir $\psi(N) = S(1 - \alpha_2)$ para un planeta cubierto de vegetación.

Es posible simplificar la expresión que define a la función $\psi(N)$:

$$\begin{aligned} \psi(N) &= S(1 - \alpha(N)) \\ &= S\left(1 - \frac{k_\alpha \alpha_1 + \alpha_2 N}{k_\alpha + N}\right) \\ &= S\left(\frac{k_\alpha + N}{k_\alpha + N} - \frac{k_\alpha \alpha_1 + \alpha_2 N}{k_\alpha + N}\right) \\ &= S\left(\frac{k_\alpha(1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2)N}{k_\alpha + N}\right) \\ &= \frac{k_\alpha S(1 - \alpha_1) + S(1 - \alpha_2)N}{k_\alpha + N} \end{aligned} \quad (2.3.3.8)$$

Definiendo $s_1 = S(1 - \alpha_1)$ y $s_2 = S(1 - \alpha_2)$ se tiene que la función $\psi(N)$ es:

$$\psi(N) = \frac{k_\alpha s_1 + s_2 N}{k_\alpha + N} \quad (2.3.3.9)$$

Expresado en términos cualitativos, la condición de saturación planteada anteriormente implica que el planeta no puede absorber más energía que s_2 . De la ecuación se puede (2.3.3.9) se puede verificar la condición de saturación:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_\alpha s_1 + s_2 N}{k_\alpha + N} = s_2$$

De la ecuación (2.3.3.9) se deduce que $\psi(N_2) > \psi(N_1)$ para cualquier $N_2 > N_1$ por lo que $\psi(N)$ es una función monótonamente creciente, tal como se planteó anteriormente. Para la función de absorción de energía $\psi(N)$ se tiene que conforme aumenta la vegetación del planeta también aumenta la energía absorbida por el sistema. Como el carbono en la vegetación N se definió en el intervalo $N \in [0, A]$, puede resultar útil analizar a la función de absorción de energía $\psi(N)$ para los valores $N = A$ y $N = 0$.

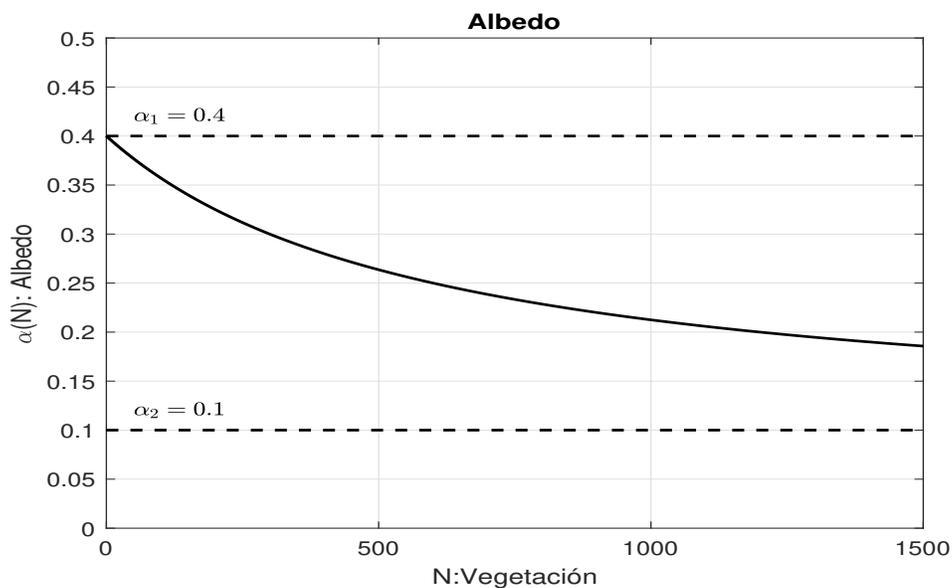
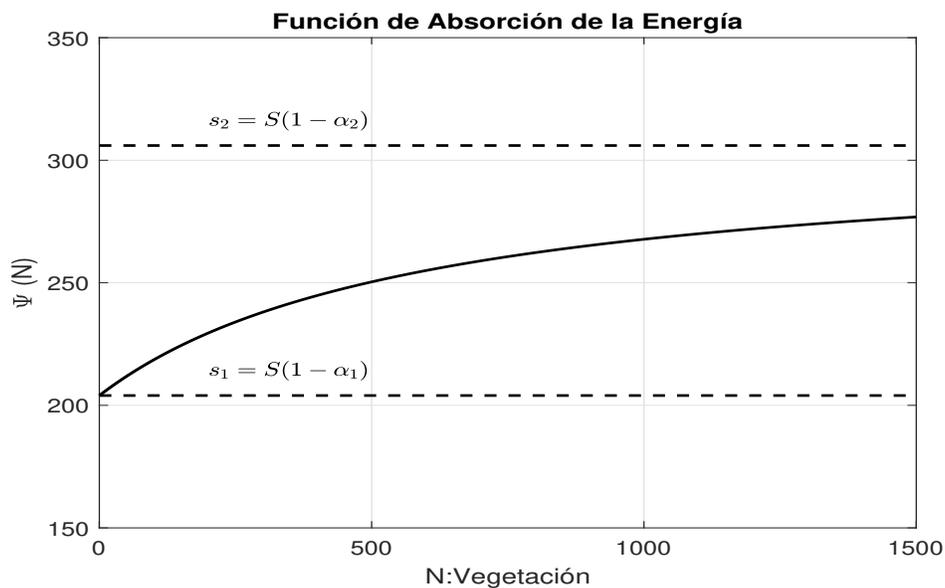
- **Todo el carbono en la atmósfera.** Para $N = 0$ se tiene que $\psi(0) = s_1$. Este caso ya se analizó anteriormente.
- **Todo el carbono en la vegetación.** Para $N = A$ se tiene que:

$$\psi(A) = \frac{k_\alpha s_1 + s_2 A}{k_\alpha + A} \quad (2.3.3.10)$$

Se puede analizar el comportamiento de la función de absorción $\psi(N)$ cuando el carbono total en el sistema se continua acumulando en la vegetación:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \psi(A) = s_2 \quad (2.3.3.11)$$

De (2.3.3.11) se deduce que para cantidades más grandes de carbono en la vegetación la potencia térmica absorbida por la tierra es aproximadamente el 90 % de S . En las figuras 2.7 y 2.8 se muestran la funciones $\alpha(N)$ y $\Psi(N)$ en el intervalo $[0, A_0]$, para $A_0 = 1360 \text{ Gt}$, el valor propuesto para el carbono total en la atmósfera en el artículo [7].

Figura 2.7: Función $\alpha_N(N)$.Figura 2.8: Función $\Psi_N(N)$.

El segundo término del lado derecho de la ecuación representa la función de emisión de energía φ que depende directamente de la emisividad del planeta, como se definió anteriormente en la ecuación (2.2.2.2), es decir la ley de Stefan-Boltzmann aproxima la potencia emisiva de un cuerpo gris. Debido a que la emisividad en la atmósfera disminuye conforme aumenta el carbono (este fenómeno se conoce como el efecto invernadero), es posible aproximar el comportamiento de este fenómeno a través de la función $\varphi(C)$,

definida por la expresión:

$$\begin{aligned}\varphi(C) &= 1 - \frac{(1 - \varphi_\infty)C}{k_C + C} \\ &= \frac{k_C + \varphi_\infty C}{k_C + C}\end{aligned}\tag{2.3.3.12}$$

De la ecuación (2.3.3.12) se obtienen las características de la función $\varphi(C)$:

- El parámetro φ_∞ se encuentra definido en el intervalo $[0, 1]$.
- La función $\varphi(C)$ se encuentra definida en el intervalo $\varphi(C) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [\varphi_\infty, 1]$.
- La función $\varphi(C)$ es una estrictamente monótonamente decreciente.
- La función $\varphi(C)$ llega a un valor de saturación, es decir para $C \rightarrow \infty : \varphi(C) \rightarrow \varphi_\infty$. El parámetro φ_∞ representa el valor mínimo de emisividad del planeta cuando el carbono C crece sin limite [43].
- Cuando $C = 0$, se tiene que no existe carbono en la atmósfera y $\varphi(0) = 1$. De acuerdo al modelo para $C = 0$ se tiene que $\epsilon \approx 1$ y el planeta absorbe la radiación térmica.

Considerando el planteamiento original donde la variable A representa el carbono total del planeta, se puede expresar al carbono de la atmósfera como $C = A - N$. La ecuación (2.3.3.12) se expresa en términos del carbono en la vegetación N y el carbono total A como:

$$\varphi(A, N) = \frac{k_C + \varphi_\infty(A - N)}{k_C + (A - N)}, \quad \text{con } A \geq N\tag{2.3.3.13}$$

Dentro de distintos contextos, en la literatura especializada existen múltiples propuestas para definir la función de emisividad φ en función de la vegetación N [44], como en función del carbono que existe en la atmósfera C [45]. Ambas funciones presentan similitudes en su comportamiento con (2.3.3.13), sin embargo, esta expresión resulta compacta en su planteamiento. Se puede esperar que las observaciones cualitativas obtenidas de $\varphi(C)$ coincidan con las obtenidas de la función de dos variables $\varphi(A, N)$. De la ecuación (2.3.3.13) se deduce que:

- Para un A_0 constante $\varphi(N; A_0)$ es una función monótonamente creciente.

- La función $\varphi(A, N)$ se encuentra definida en el intervalo: $\varphi(A, N) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow [\varphi_A, 1]$ donde φ_A se define como:

$$\varphi_A = \frac{k_C + \varphi_\infty A}{k_C + A} \quad \text{Con } \varphi_\infty < \varphi_A < 1 \quad (2.3.3.14)$$

- $\varphi(0, A) = \varphi_A$. Es el valor obtenido cuando todo el carbono C se encuentra en la atmósfera y no existe carbono dentro de la vegetación. Conforme aumenta la variable A se tiene que $\varphi_A \rightarrow \varphi_\infty$. Es decir:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \varphi_A = \varphi_\infty \quad (2.3.3.15)$$

Este resultado coincide con el obtenido anteriormente para la función $\varphi(C)$, que describe el carbono C en el sistema. $\varphi(C) \rightarrow \varphi_\infty$ cuando $C \rightarrow \infty$.

- $\varphi(A, A) = 1$. Si $N = A$ implica que $C = 0$ y todo el carbono esta alojado en la vegetación. De acuerdo a este modelo para $N = A$ se tiene que $\epsilon = 1$.

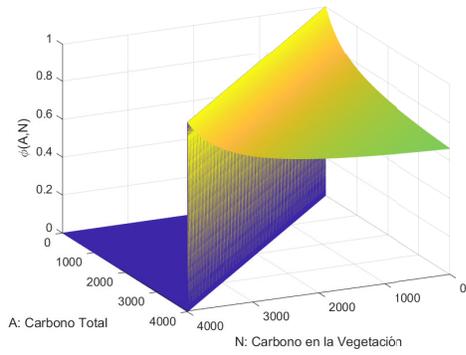
En la subfigura 2.9a se muestra la superficie de la función $\varphi(A, N)$, definida en el dominio $A \geq N$ con $A \geq 0$, precisamente esta superficie presenta una discontinuidad en la recta $A = N$. Puede resultar conveniente visualizar la gráfica de la función $\varphi(N; A_0)$ donde $A_0 \in A$ y A_0 se considera un parámetro, la subfigura 2.9a se encuentra conformada por cada uno de los cortes correspondientes al intervalo $A_0 \in [0, 4000]$.

La subfigura 2.9b corresponde a uno de estos cortes para $A_0 = 1360 \text{ Gt}$, el valor utilizado para definir el parámetro A_0 en el artículo [7]. En la subfiguras 2.9a y 2.9b se observa que para cada $A_0 = N$, $\varphi(A_0, N) = 1$. En la subfigura 2.9c se visualiza la gráfica de la función decreciente $\varphi(C)$ para un valor propuesto de $A_0 = 1360 \text{ Gt}$ y una parámetro de saturación $\varphi_\infty = 0.6$.

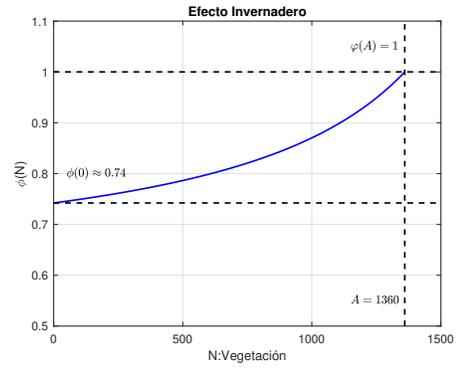
Para facilitar el cálculo de las ceroclinas y los puntos de equilibrio del sistema resulta conveniente definir la función:

$$\Phi(A, N) = \frac{\psi(A, N)}{\varphi(A, N)} \quad (2.3.3.16)$$

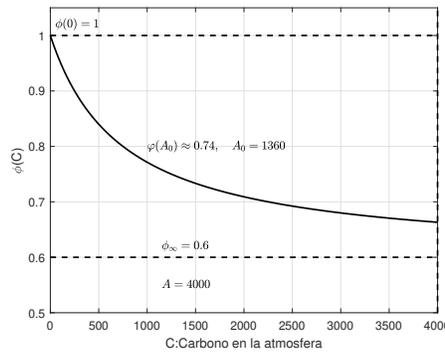
La ecuación explícita de la función $\Phi(N)$ se encuentra dada por la ecuación (2.3.3.17) y su comportamiento se observa en la gráfica de la figura 2.10b.



(a) $\varphi(A, N)$, para $A \in [0, 4000]$.



(b) Función $\varphi(N; A_0)$ con $A_0 = 1360$.

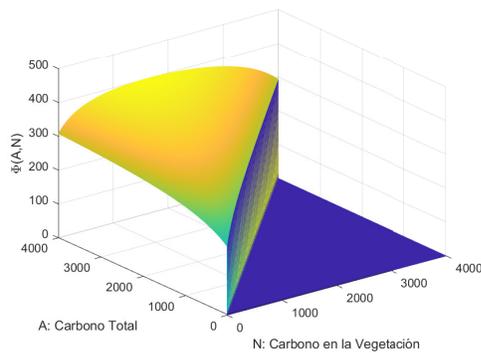


(c) Función $\varphi_C(C)$.

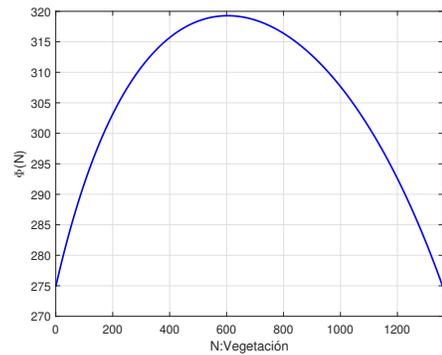
Figura 2.9: Función $\varphi(A, N)$.

$$\Phi(A, N) = \frac{(k_\alpha s_1 + s_2 N)(k_C + A - N)}{(k_\alpha + N)(k_C + \varphi_\infty A - \varphi_\infty N)} \tag{2.3.3.17}$$

En la figura 2.10a se muestra la superficie de la función $\Phi(A, N)$, definida en el dominio $A \geq N$ con $A \geq 0$, definida para cada $A_0 \in A$. Puede resultar conveniente visualizar la gráfica de la función $\Phi(N; A_0)$ donde $A_0 \in A$ y se considera un parámetro. La figura 2.10b corresponde a uno de estos cortes para $A_0 = 1360 \text{ Gt}$.



(a) Función $\varphi(A, N)$.



(b) Función $\Phi(N; A_0)$ con $A_0 = 1360 \text{ Gt}$.

Figura 2.10: Función $\varphi(A, N)$.

2.3.4. Parámetros asociados a la ecuación del modelo simplificado de energía.

Una vez definidas las funciones $\psi(N)$ y $\varphi(A, N)$ la ecuación diferencial que representa el modelo de intercambio de energía se puede expresar como:

$$k \frac{dT}{dt} = \frac{k_\alpha s_1 + s_2 N}{k_\alpha + N} - \frac{\sigma(k_C + \varphi_\infty(A - N))T^4}{k_C + (A - N)} \quad (2.3.4.1)$$

En la sección 2.3.3 se definieron explícitamente las funciones $\alpha(N)$, $\psi(N)$ y $\varphi(C)$. Se sabe que estas funciones mapean valores positivos que representan valores de carbono a valores que pertenecen al intervalo $(0, 1]$. Considerando que representan dos valores físicos adimensionales (el albedo y la emisividad respectivamente) resulta que las funciones $\alpha(N)$ y $\varphi(A, N)$ son adimensionales también. El parámetro k_α representa una medición de carbono y se mide en Gt (1×10^9 toneladas de carbono), mientras que los parámetros α_1 , α_2 y φ_∞ son adimensionales. Con respecto a la función $\Psi(N) = S(1 - \alpha(N))$ que representa la absorción de energía y al producto $\sigma\varphi(N)T^4$ que representa la energía emitida por el planeta se tiene que:

- Se definió la función de absorción de energía como $\Psi(N) = S(1 - \alpha(N))$, además se sabe que $S_0/4 = S \approx 340 \text{ Wm}^{-2}$. Por lo tanto las unidades asociadas a la función $\psi(N)$ son las mismas que las unidades asociadas a S , es decir Wm^{-2} .
- Las unidades asociadas al producto $\sigma\varphi(N)T^4$ son las mismas que las asociadas a $\Psi(N)$, debido a que $\varphi(N)$ es adimensional y el producto σT^4 representa la potencia emisiva de un cuerpo negro expresado en Wm^{-2} .
- La adición de ambos términos es igual a la tasa cambio de intercambio de energía entre el cuerpo y su ambiente es decir \dot{E} por unidad de área A .

Como se menciono anteriormente, la capacidad térmica de un cuerpo es la cantidad de calor que se necesita para elevar la temperatura de un objeto o sistema en una unidad de temperatura. La capacidad térmica se expresa en unidades de energía por unidad de temperatura (*joules/kelvin*). La capacidad térmica por unidad de área se define como k y sus unidades son $\text{Jm}^{-2}/^\circ\text{K}$. En la ecuación (2.3.4.2), la tasa de cambio de la temperatura se representa por la derivada de la temperatura con respecto al tiempo. El producto de \dot{T}

y la capacidad térmica k es igual a la cantidad de energía almacenada en el cuerpo que esta siendo utilizada para cambiar la temperatura por unidad de área.

$$\frac{dE}{dt} = \psi(N) - \sigma\varphi(A - N)T^4 \quad (2.3.4.2)$$

Además la capacidad térmica k se define también como el producto entre la masa del cuerpo y su calor específico c por unidad de área A es decir $k = mc/A$. El calor específico de un cuerpo se define como como la cantidad de calor necesaria para aumentar la temperatura de una unidad de masa de una sustancia en una unidad de temperatura y varia dependiendo del material. Las unidades para c se encuentran dadas en la tabla 2.2. Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= k \frac{dT}{dt} \\ &= \frac{mc}{A} \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (2.3.4.3)$$

El producto entre k y T representa la tasa de cambio de la energía térmica del sistema. La capacidad térmica por área de la atmósfera se puede aproximar como $k = h\rho c$, donde h es la extensión vertical de una pequeña capa de aire, ρ es la densidad del aire y c es el calor específico del aire [34]. En la ecuación (2.3.4.4) se despliegan de manera detallada las unidades asociadas al modelo de intercambio de energía:

$$\underbrace{k}_{Jm^{-2}K^{-1}} \underbrace{\frac{dT}{dt}}_{Ks^{-1}} = \underbrace{\left(\Psi(N) - \sigma\varphi(N)T^4\right)}_{Wm^{-2}} \quad (2.3.4.4)$$

En la tabla 2.2 se enumeran los parámetros asociados a la ecuación diferencial que representa el modelo de intercambio de energía, su significado físico, las unidades en las que se definieron y algunos valores propuestos para las simulaciones. Las magnitudes adimensionales se les asigna la abreviación *au* en el campo correspondiente a la unidad en la tabla 2.2. Algunos valores asociados a los parámetros de la tabla 2.2 corresponden a constantes físicas (σ y S) o a valores ya conocidos para la tierra (h , ρ , S_0 , α_1 , α_2 , φ_∞ y k), mientras que los parámetros restantes corresponden a valores propuestos en la literatura disponible. El valor propuesto para k_c corresponde al asignado en [7]. Se tiene que para

la ecuación (2.3.4.4) que describe el modelo de intercambio de energía las unidades que describen esta razón de cambio son:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{^{\circ}K}{seg}$$

La ecuación diferencial (2.3.4.2) se expresa como el producto de k y \dot{T} , por lo tanto el parámetro k tiene efectos en la escala de tiempo. El parámetro k representa la energía necesaria (en *Joules*) por unidad de área (m^2) para cambiar la temperatura de un objeto o sistema por unidad de temperatura (*grados kelvin*). Por lo tanto el producto entre \dot{T} y k afecta la tasa de cambio de la temperatura del objeto en función del tiempo. Para objetos con una k alta, entonces se requiere más energía para cambiar su temperatura en comparación con un objeto con una k más baja. Esto implica que \dot{T} es más lenta para un mismo sistema para una k alta en comparación con el objeto con una k baja. De los puntos de equilibrio propuestos en 2.3.2.4 se tiene que $C^* = A^* - N^* = 610 Gt$ y utilizando el valor de $\varphi_{\infty} = 0.6$ se obtiene el valor de la función $\varphi(C)$ evaluado en C^* , obteniendo:

$$\begin{aligned} \sigma(T^*)^4 \varphi(C^*) &= \frac{k_{\alpha} s_1 + s_2 N^*}{k_{\alpha} + N^*} \\ k_{\alpha} &= \frac{N^* (\sigma(T^*)^4 \varphi(C^*) - s_2)}{(s_1 - \sigma(T^*)^4 \varphi(C^*))} \end{aligned} \quad (2.3.4.5)$$

El valor obtenido para la constante k_{α} muestra en la tabla 2.2.

Parámetro	Notación	Valor/Intervalo	Unidad
Capacidad térmica.	k	3.1536×10^7	$Jm^{-2}/^{\circ}K$
Altura.	h	8.3×10^3	m
Densidad del aire.	ρ	1.2	kgm^{-3}
Calor específico.	c	1000	$Jkg^{-1}/^{\circ}K$
Albedo de la superficie sin vegetación.	α_1	0.4	au
Albedo de la superficie con vegetación.	α_2	0.1	au
Constante de emisión del sol.	S_0	1362	Wm^{-2}
Radiación incidente en la tierra.	S	342	Wm^{-2}
Valor de Saturación de la función ϕ .	φ_{∞}	0.6	au
Constante de saturación para la función $\varphi(A, N)$.	k_c	750	Gt
Constante de saturación para la función $\psi(N)$.	k_{α}	600	Gt
Constante de Stephan Boltzman.	σ	5.67×10^{-8}	$W/m^2(^{\circ}K)^4$

Cuadro 2.2: Parámetros relacionados con la segunda ecuación del sistema.

En el desarrollo de este capítulo se presentaron algunas herramientas matemáticas que serán utilizadas en los capítulos posteriores. Además se presentó el modelo climático que se utilizara en el desarrollo de la tesis. Este modelo basado en el artículo [7], aunque se encuentra altamente idealizado, resulta de utilidad para plantear un modelo en que la tasa de cambio de las emisiones \dot{A} no tenga que considerarse como un parámetro fijo. Este cambio en el planteamiento del modelo, nos permite definir las funciones que conforman las ecuaciones diferenciales para \dot{N} y \dot{T} como superficies, en lugar de definir las como curvas en el plano.

Capítulo 3

Análisis de los puntos de equilibrio del modelo.

3.1. Equilibrios del Sistema.

3.1.1. Introducción.

Para el sistema de dimensión 3 definido en (2.2.4.10) se tiene que el cambio en el carbono total del sistema es una función del tiempo $f(t)$ que representa las emisiones antropogénicas. Utilizando los datos obtenidos en [50] se puede modelar a las emisiones antropogénicas como una función que dependa solo del tiempo. Para el análisis del sistema en lazo abierto, puede resultar conveniente definir a $f(t)$ como un valor constante, en particular, es posible utilizar el valor promedio de las emisiones, durante los últimos 20 años. Desde un punto de vista práctico, esto se puede justificar, por que el objetivo principal de la tesis es estudiar el sistema en lazo cerrado, no en lazo abierto. Además como las emisiones antropogénicas se han incrementado, utilizar un valor de emisión menor al real, como el valor promedio, permite compensar algunas de las variables que no se encuentran modeladas. Tomando en cuenta este planteamiento el sistema (2.2.4.10) se puede expresar de manera simplificada como:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= f(t) \\ \dot{N} &= g_1(A, N, T) \\ k\dot{T} &= g_2(A, N, T) \end{aligned} \tag{3.1.1.1}$$

Al definir a $f(t)$ como una función que no depende de los otros dos estados del sistema, se tiene que el sistema 3.1.1.1 no tiene puntos de equilibrio. Sin embargo sí es posible definir a las ceroquinas para \dot{N} y para \dot{T} , es decir el conjunto de puntos que conforman las superficies para los cuáles:

$$\begin{aligned} g_1(A, N, T) &= 0 \\ g_2(A, N, T) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.1.2)$$

Por la definición dada anteriormente de ceroquina en la subsección 2.1.2, la expresión (3.1.1.2) contiene a los puntos del espacio fase donde $g_1(A, N, T) = 0$ ó $g_2(A, N, T) = 0$.

3.1.2. Ceroquinas del sistema $\{A, N, T\}$.

Las expresiones $g_1(A, N, T)$ y $g_2(A, N, T)$ se definen utilizando las funciones que se plantearon en las secciones 2.3.1 y 2.3.3. Para \dot{N} se tiene que la función g_1 esta dada por:

$$g_1(A, N, T) = \frac{4P_m}{A^2} N(A - N)g_T(T) - mN \quad (3.1.2.1)$$

De la expresión (3.1.2.1) se sabe que $g_1(A, N, T) = 0$ cuando $N = 0$ o cuando la expresión (3.1.2.2) se iguala a 0:

$$\frac{4P_m}{A^2} (A - N)g_T(T) - m = 0 \quad (3.1.2.2)$$

La expresión definida por (3.1.2.2) permite obtener una ecuación explícita para definir los valores que conforman la ceroquina de N al considerar a A y a T como parámetros variables. De manera explícita la ceroquina definida en (3.1.2.2) es:

$$N = A \left(1 - \frac{mA}{4P_m} \frac{1}{g_T(T)} \right) \quad (3.1.2.3)$$

De acuerdo a las definiciones de las variables de estado del sistema se tiene que $A \geq 0$ y $N \geq 0$ con $A \geq N$. La ecuación (3.1.2.3) define la ceroquina para N , en la región del espacio fase donde se encuentran definidas las variables A , N y T , por lo tanto se puede deducir que esta superficie solo se encuentra definida para para aquellos valores de T y A tales que:

$$1 - \frac{mA}{4P_m} \frac{1}{g_T(T)} \geq 0, \quad \text{ó utilizando la expresión equivalente} \quad \frac{mA}{4P_m} \frac{1}{g_T(T)} \leq 1 \quad (3.1.2.4)$$

De la desigualdad (3.1.2.4), la ceroclina solo esta definida para aquellos valores de T y A para los cuales se cumple la desigualdad:

$$g(T) \geq \frac{mA}{4P_m} \quad (3.1.2.5)$$

Considerando el caso $N = 0$, se tiene que la ceroclina para N se puede expresar de manera compacta como:

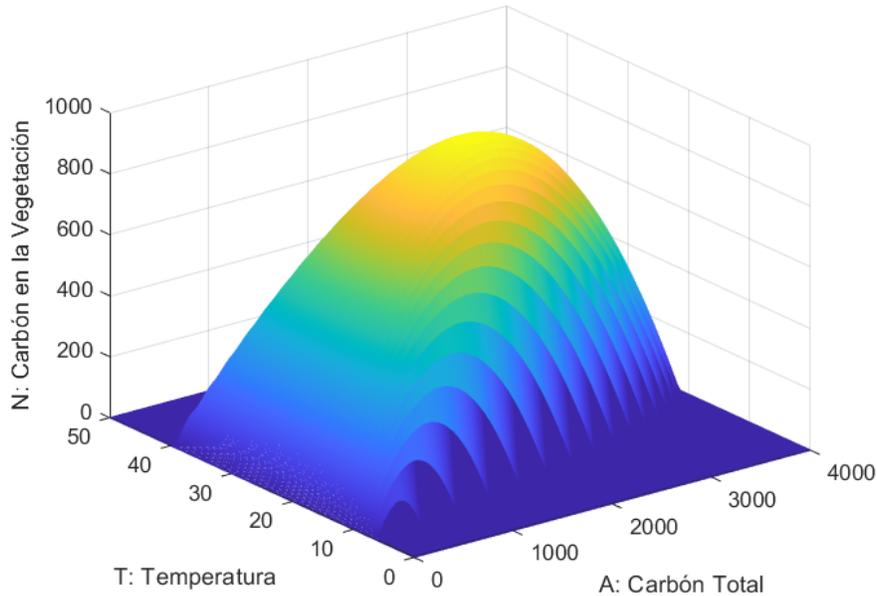
$$N = \text{máx} \left\{ 0, A \left(1 - \frac{mA}{4P_m} \frac{1}{g_T(T)} \right) \right\} \quad (3.1.2.6)$$

La figura 3.1 muestra la ceroclina para el carbono en la vegetación, de la ecuación (3.1.2.6) se tiene que la ceroclina para N también contiene al plano (A, T) . Para la ceroclina de la temperatura se tiene que $g_2(A, N, T)$ se define de manera explícita como:

$$g_2(A, N, T) = \frac{1}{k} \left(\frac{k_\alpha s_1 + s_2 N}{k_\alpha + N} - \frac{\sigma(k_C + \varphi_\infty(A - N))T^4}{k_C + (A - N)} \right) \quad (3.1.2.7)$$

Igualando la expresión que define a $g_2(A, N, T)$ a 0 y despejando T se obtiene:

$$T = \left(\frac{(k_\alpha s_1 + s_2 N)(k_C + A - N)}{\sigma(k_\alpha + N)(k_C + \varphi_\infty A - \varphi_\infty N)} \right)^{1/4} \quad (3.1.2.8)$$

Figura 3.1: Ceroclina de N .

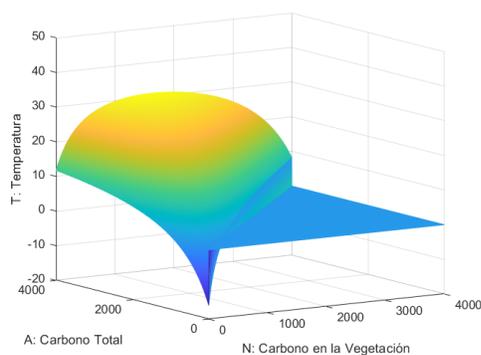
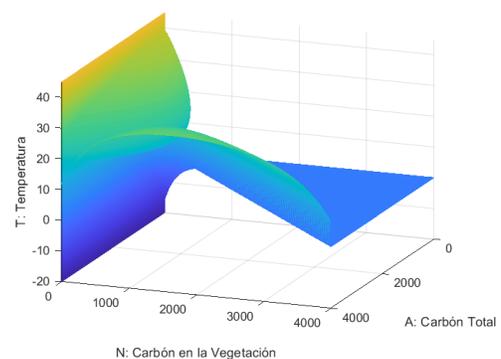
La expresión racional dentro del paréntesis es igual al cociente entre la función $\Phi(N, A)$ definida en la sección 2.3.3 y el parámetro σ que se definió anteriormente como la constante de *Stefan-Boltzmann*. Tomando esto en consideración, la expresión que define la superficie de la ceroclina de la variable T es:

$$T = \left(\frac{\Phi(A, N)}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (3.1.2.9)$$

La superficie que define la ceroclina de T se encuentra definida solo para valores de $T \geq 0$, cuando T se encuentra expresada en grados **kelvin**. Como se estudio en la sección 2.3.4, las unidades que definen a \dot{T} son *kelvin/segundo* por lo que de acuerdo a la ecuación de *Stefan-Boltzmann* la temperatura obtenida en la ecuación (3.1.2.9) esta expresada en grados kelvin. Si se utilizan como unidades los grados celsius para mostrar datos en alguna gráfica, es posible obtener algún valor para la ecuación (3.1.2.9) tal que $T < 0$. Por simplicidad en las figuras presentadas las unidades presentadas serán grados celsius, sin embargo las unidades utilizadas para realizar las simulaciones numéricas serán grados kelvin. La figura 3.2a muestra la superficie que define a la ceroclina para T en el espacio fase $\{A, N, T\}$, al igual que para la función $\Phi(A, N)$, la ceroclina para T solo está definida solo para $A \geq N$. La figura 3.2b muestra la intersección de las superficies definidas por

las expresiones 3.1.2.8 y 3.1.2.6, definiendo la configuración tradicional para los ejes xyz y colocar en el eje x al carbono en la vegetación N , en el eje y al carbono total del sistema A y en el eje z a la temperatura T . Ambas expresiones fueron calculadas utilizando los parámetros definidos en las tablas 2.1 y 2.2, por lo que el realizar variaciones en los valores asignados a estos parámetros implica un cambio en las superficies y por lo tanto en el comportamiento cualitativo del sistema. Como se menciono anteriormente, para un sistema en lazo abierto como el definido en la ecuación (3.1.1.1), no existen puntos de equilibrio.

Uno de los objetivos principales de la tesis consiste en formular un sistema de lazo cerrado, en el que se modele que las emisiones antropogénicas de carbono \dot{A} , como una función que depende de los otros estados del sistema. Por lo tanto, cualquier punto de equilibrio obtenido para este sistema en lazo cerrado, es una intersección entre las superficies de las ceroclinas de A , N y T en el espacio fase $\{A, N, T\}$. Desde un punto de vista práctico, antes de plantear un modelo en lazo cerrado, resulta necesario conocer el comportamiento de las ceroclinas.

(a) Ceroclina de T .(b) Intersección de las ceroclinas de T y de N .Figura 3.2: Intersección de las ceroclinas de N y T .

3.2. Plano fase $\{N, T\}$.

3.2.1. Puntos de equilibrio.

Para realizar objetivos posteriores planteados en este trabajo resulta conveniente utilizar el planteamiento original de [7] y definir $f(t) = 0$, para encontrar los puntos de equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= g_1(N, T; A_0) \\ k\dot{T} &= g_2(N, T; A_0)\end{aligned}\tag{3.2.1.1}$$

Donde A_0 se considera como un parámetro fijo. Los puntos de equilibrio pueden ser encontrados al obtener la intersección entre las ceroclinas de N y T . En la figura 3.3 se muestran las ceroclinas para N y para T para un valor constante de $A_0 = 1360 \text{ Gt}$. La estructura cualitativa del plano de fase de un sistema puede cambiar si los parámetros de este cambian, estos cambios cualitativos son denominados bifurcaciones y los valores del parámetro en el que ocurre este cambio son denominados puntos de bifurcaciones [54]. Al variar al parámetro A_0 en las ecuaciones (3.2.1.1) que definen el plano fase $\{N, T\}$ es posible generar o eliminar puntos de equilibrio. Para distintos valores de A_0 en las figuras 3.4 y 3.5 se observa que existen tres intersecciones entre las ceroclinas que corresponden a tres puntos de equilibrio. Definiendo $\dot{A} = 0$, los planos fase de ambas figuras corresponden al plano $A_0 = 1360 \text{ Gt}$ y $A_0 = 2500 \text{ Gt}$ del espacio fase $\{A, N, T\}$.

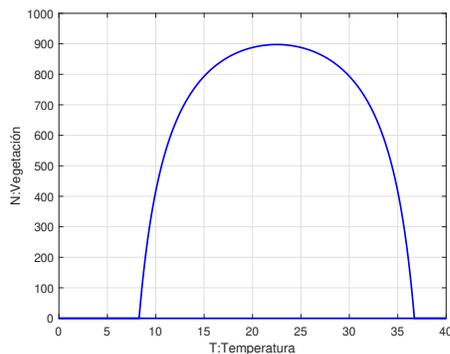
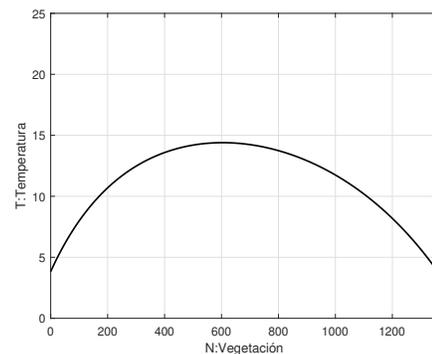
(a) Ceroclina de N .(b) Ceroclina de T .

Figura 3.3: Ceroclinas para el plano fase $\{N, T\}$ para $A_0 = 1360 \text{ Gt}$.

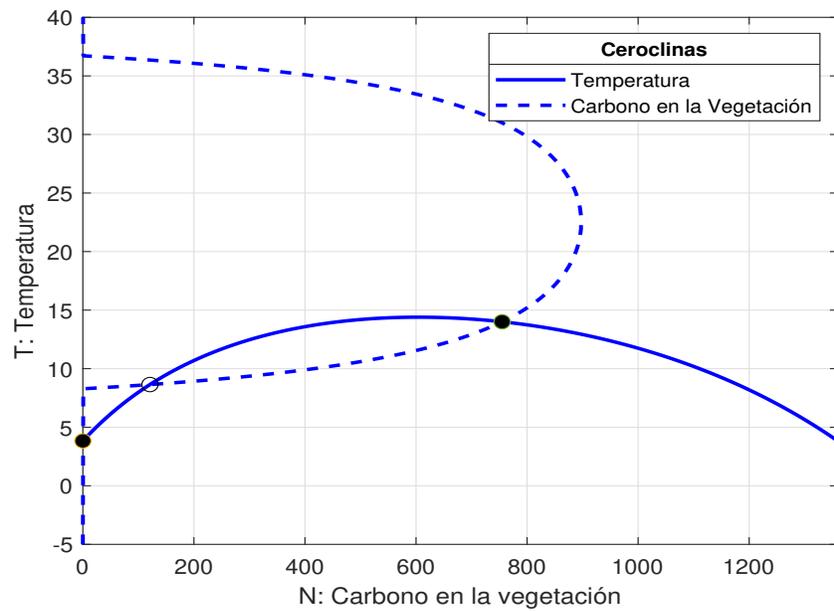


Figura 3.4: Intersección de las ceroclinas de N y T , para un valor constante $A_0 = 1360$.

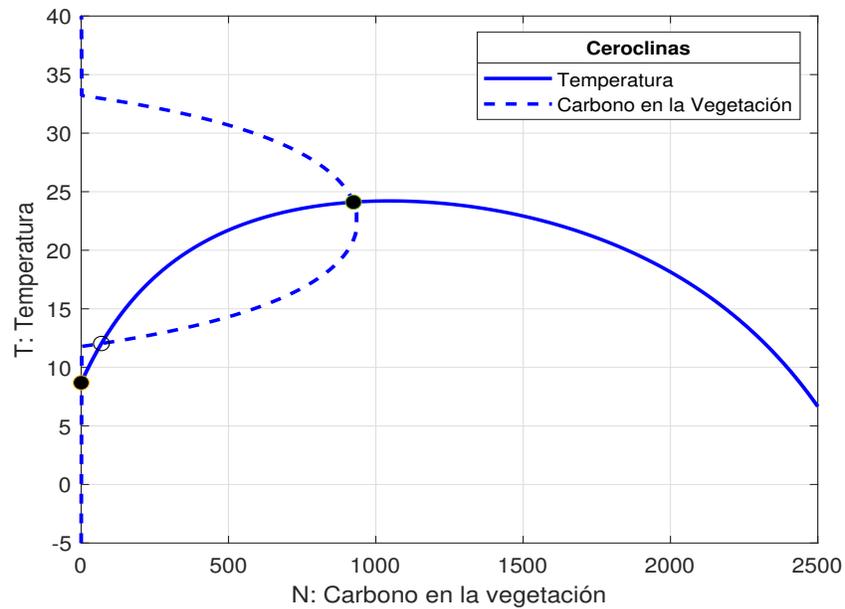


Figura 3.5: Puntos de equilibrio para $A_0 = 2500$.

Es posible resumir el comportamiento de las ceroclinas N y T del plano fase $\{N, T\}$ conforme se varía el valor de A_0 . En cada punto se presentan una o varias de referencias de las figuras en las que se muestra el comportamiento descrito en el sistema:

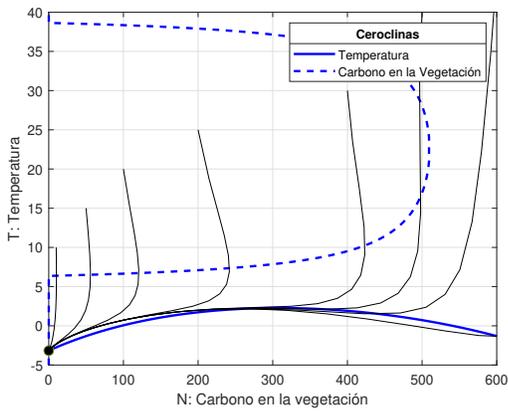
- Subfigura 3.6a. En el intervalo $[0, A_{cr_1})$, las ceroclinas de N y T se intersectan solo en un punto del plano fase $(0, T_0^*)$ ubicado en el eje T .

- Subfigura 3.6b. Para un valor de $A_0 \approx 965$ denominado A_{cr_1} las ceroclinas se intersectan además en otro punto de equilibrio, por lo que existen dos puntos de equilibrio.
- Para valores de $A_0 > A_{cr_1}$ se tiene que el punto de equilibrio generado en A_{cr_1} se divide en otros dos puntos de equilibrio.
- Subfigura 3.6c y subfigura 3.6d. Definiendo A_{cr_2} como $A \approx 3696$, se tiene que en el intervalo $A_{cr_1} < A_0 < A_{cr_2}$ existen tres puntos de equilibrio, el primero ubicado en el punto $(0, T_0^*)$ y los otros dos generados para $A_0 > A_{cr_1}$.
- Subfigura 3.6e. Conforme el valor de A_0 aumenta se tiene que los dos puntos de equilibrio generados en A_{cr_1} se acercan. Para un valor de $A_0 \approx 3696$ denominado A_{cr_2} se tiene que ambos puntos colapsan en un solo punto de equilibrio y solo existen 2 puntos de equilibrio.
- Subfigura 3.6f. Para $A > A_{cr_2}$ se tiene que este punto de equilibrio fue eliminado y solo existe el punto de equilibrio en $(0, T_0^*)$.

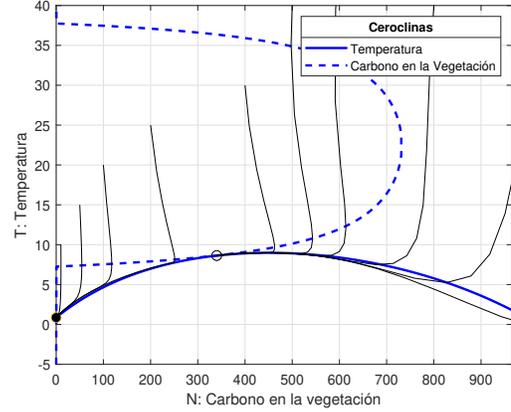
La figura 3.7 ilustra que en términos del sistema completo de 3 variables cada plano fase $\{N, T\}$ definido para una A_0 constante, es una proyección en \mathbb{R}^2 de un espacio fase $\{A, N, T\}$ en \mathbb{R}^3 con $A_0 \in A$. Considerando a A_0 como un parámetro y variando este se parámetro en el plano fase $\{N, T\}$ se tiene que este sistema presenta una bifurcación denominada como *silla-nodo*. Para cada plano fase se encuentran definidos hasta 3 puntos de equilibrio distintos por lo que es posible definir tres curvas que corresponden a los tres puntos de equilibrio definidos anteriormente. Cada conjunto de puntos de equilibrio conforman una curva $w_i(A_0)$ parametrizada por $A_0 \in A$, con $i = 1, 2, 3$. Cada una de las curvas se encuentra definida en los siguientes intervalos:

- La curva w_1 corresponde a la familia de puntos $(A_0, 0, T_0^*)$, parametrizada por $A_0 \in A$ con $w(0) = (0, 0, T_0^*)$.
- La curva w_2 corresponde a la familia de puntos (A_0, N_0^*, T_0^*) , parametrizada por $A_0 \in (A_{cr_1}, A_{cr_2})$ con $w(0) = (A_{cr_1}^+, N^*, T^*)$.
- La curva w_3 corresponde a la familia de puntos (A_0, N_0^*, T_0^*) , parametrizada por $A_0 \in [A_{cr_1}, A_{cr_2}]$ con $w(0) = (A_{cr_1}, N^*, T^*)$.

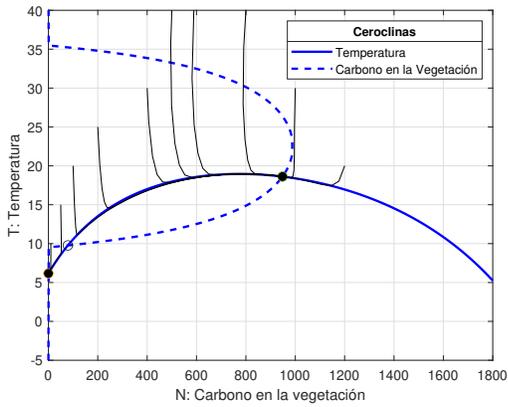
En la figura 3.9 se observan las tres curvas w_i $i = 1, 2, 3$ definidas anteriormente. La estabilidad de los puntos de equilibrio que conforman estas curvas se estudia en la siguiente sección.



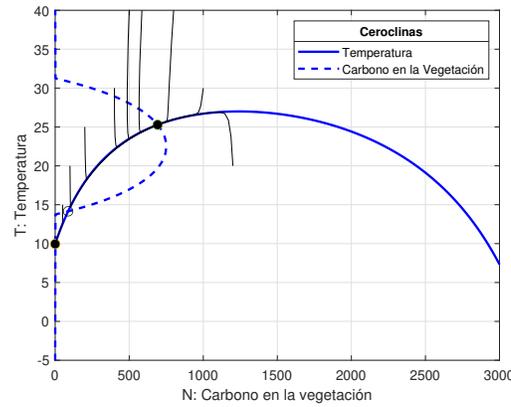
(a) $A_0 = 600$.



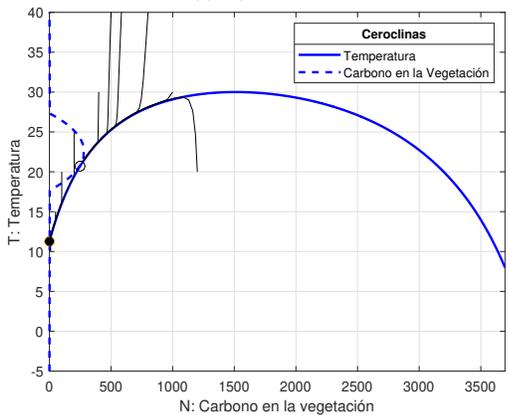
(b) $A_0 = 965$.



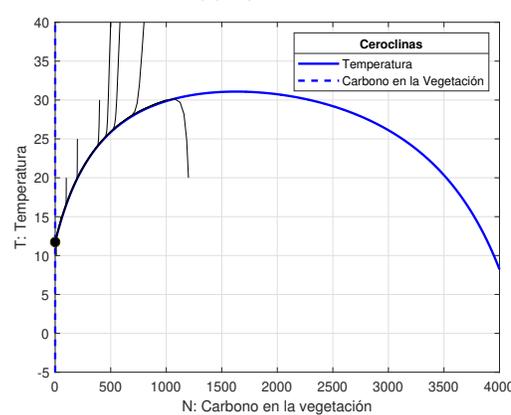
(c) $A_0 = 1800$.



(d) $A_0 = 3000$.



(e) $A_0 = 3696$.



(f) $A_0 = 4000$.

Figura 3.6: Plano Fase para distintos valores de A_0 .

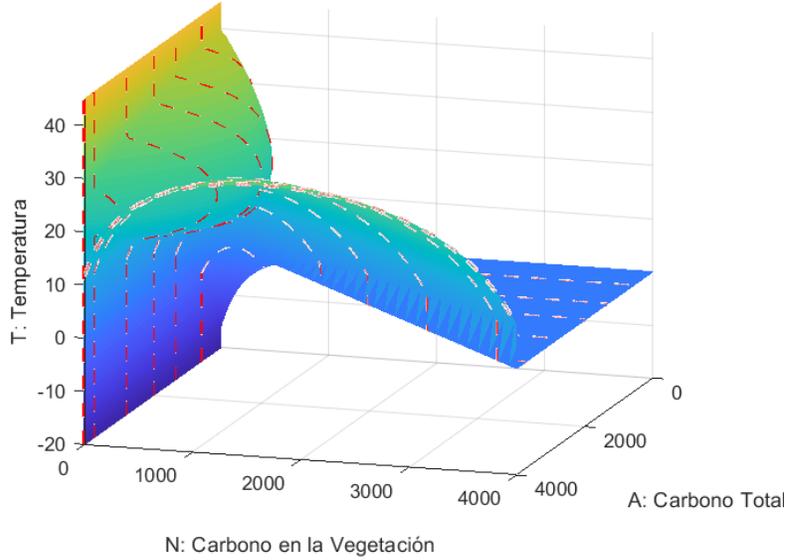


Figura 3.7: Ceroclinas de N y T para un A_0 constante.

Se definen de manera explícita las expresiones que definen las funciones 3.2.1.1 en el plano fase $\{N, T\}$. Las ceroclinas del sistema pueden expresarse como de manera explícita como:

$$\begin{aligned}
 g_1(N, T; A_0) &= \frac{4P_m}{A_0^2} N(A_0 - N)g_T(T) - mN \\
 g_2(N, T; A_0) &= \frac{k_\alpha s_1 + s_2 N}{k_\alpha + N} - \frac{\sigma(k_C + \varphi_\infty(A_0 - N))T^4}{k_C + (A_0 - N)} \quad (3.2.1.2)
 \end{aligned}$$

Claramente la primera ecuación tiene como solución trivial $N^* = 0$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se obtiene:

$$\psi(0) - \sigma\varphi(0)T^4 = 0 \quad (3.2.1.3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 T^* &= \left(\frac{\psi(0)}{\sigma\varphi(0)} \right)^{1/4} \\
 &= \left(\frac{\Phi(0)}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (3.2.1.4)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$T^* = \left(\frac{(k_\alpha s_1)(k_C + A_0)}{\sigma k_\alpha (k_C + \varphi_\infty A_0)} \right)^{1/4} \quad (3.2.1.5)$$

De acuerdo a la ecuación (3.2.1.5), para el primer equilibrio, se tiene que para cada valor de A_0 , corresponde un valor para la temperatura T_0^* definido para $N^* = 0$. Entonces T_0^* puede considerarse como un función del carbono total en la atmósfera A_0 . Para $A_0 = 0$ se tiene $T_0^* = s_1/\sigma$ lo que resulta en una temperatura $T_0^*(0) \approx -16.05$ °C. Dado que $T_0^*(A)$ es una función creciente de A se tiene que el valor de los otros dos equilibrios también se incrementan. En la figura 3.8 se observa la variación del valor de la temperatura T en grados *Celsius* para el primer equilibrio del sistema. Esta gráfica corresponde a la curva parametrizada $w_1(A_0)$ que se compone por el conjunto de puntos de equilibrio contenidos en el plano (A, T) .

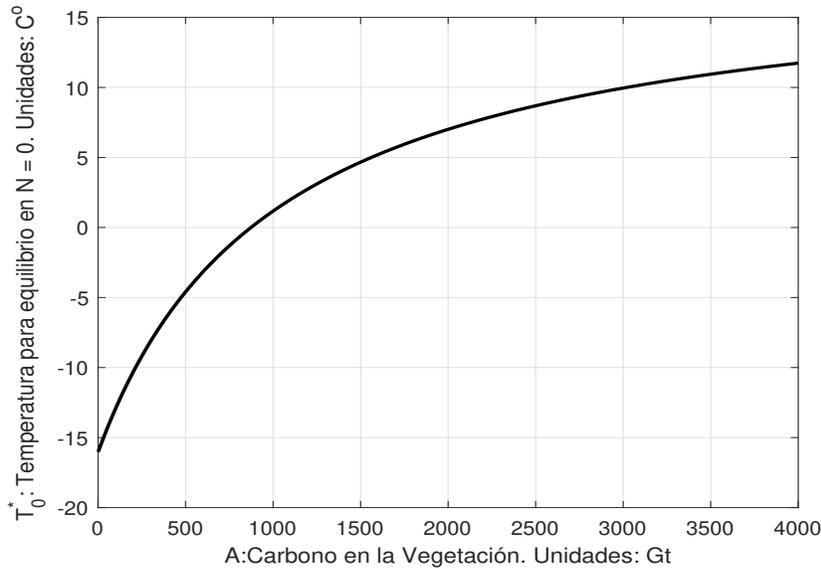


Figura 3.8: Curva $w_1(A_0)$, para los puntos de equilibrio con $N^* = 0$.

3.2.2. Análisis de estabilidad en los puntos de equilibrio en el plano Fase $\{N, T\}$.

De la subsección anterior se sabe que en el intervalo $A_{cr_1} < A < A_{cr_2}$ existen tres puntos de equilibrio para el sistema climático. Para realizar el análisis de estabilidad de cada uno de estos puntos de equilibrio, se obtiene el jacobiano del sistema y se evalúan los puntos de equilibrio obtenidos en la solución del sistema algebraico (3.2.1.2).

$$J(N, T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T} & \frac{\partial f_1}{\partial N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T} & \frac{\partial f_2}{\partial N} \end{pmatrix},$$

donde las derivadas parciales del sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial T} &= \frac{-4\sigma}{k} \varphi(N) T^3, & \frac{\partial f_1}{\partial N} &= \frac{1}{k} \left(\frac{k_\alpha (s_2 - s_1)}{(k_\alpha + N)^2} - \sigma T^4 \frac{k_c (1 - \varphi_\infty)}{(k_c + A_0 - N)^2} \right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial T} &= -\frac{16P_m}{(\Delta T A)^2} N (A - N) (2T - \xi), & \frac{\partial f_2}{\partial N} &= \frac{4P_m}{A^2} (A - 2N) g_T(T) - m, \end{aligned} \quad (3.2.2.1)$$

y la constante ξ se define como:

$$\xi = T_1 + T_2$$

Se evalúa en el punto $(0, T_0)$:

$$J(0, T_0^*) = \begin{pmatrix} \frac{-4\sigma}{k} \varphi(0) T_0^3 & \frac{1}{k} \left(\frac{k_\alpha (s_2 - s_1)}{(k_\alpha + N)^2} - \sigma T^4 \frac{k_c (1 - \varphi_\infty)}{(k_c + A_0 - N)^2} \right) \\ 0 & \frac{4P_m}{A_0} g_T(T_0) - m \end{pmatrix}$$

Obteniendo los siguientes valores propios para la matriz (3.2.2):

$$\lambda_1 = \frac{-4\sigma}{k} \varphi(0) T_0^3, \quad \lambda_2 = \frac{4P_m}{A_0} g_T(T_0^*) - m \quad (3.2.2.2)$$

Dado que el valor obtenido para $\varphi(C)$ siempre es positivo y a los valores asignados a los parámetros de las ecuaciones diferenciales, se tiene que λ_1 siempre es negativo. Para el valor propio λ_2 se tiene que este valor es negativo cuando:

$$\frac{4P_m}{A_0} g_T(T_0^*) - m < 0, \quad \text{ó de manera explícita} \quad g_T(T_0^*) < \frac{mA_0}{4P_m} \quad (3.2.2.3)$$

El punto $(0, T_0^*)$ es un punto de equilibrio, por lo tanto pertenece a la ceroclina de N . De la desigualdad (3.1.2.4) se sabe que el conjunto de puntos de equilibrio para los cuales se cumple:

$$g(T) \geq \frac{mA}{4P_m},$$

pertenecen al conjunto $N > 0$, como se tiene que se estudia el caso para $N = 0$ y que N no está definida para valores menores a 0, entonces la desigualdad (3.2.2.3) se debe cumplir y

se concluye que $\lambda_2 < 0$, por lo tanto este punto de equilibrio siempre es estable. Se analiza el sistema en el plano fase $\{N, T\}$ de manera similar para los otros dos equilibrios. De acuerdo a los criterios propuestos en [54] se obtienen las siguientes conclusiones:

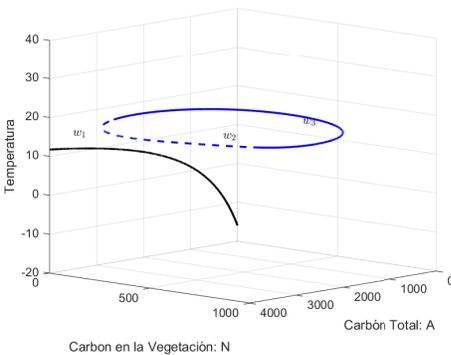
- No existen valores propios para ningún equilibrio con parte real igual a cero e imaginario distinta a cero. Por lo tanto en el sistema no existen ciclos limite en el sistema, solo puntos de equilibrio.
- El primer equilibrio es estable y corresponde al caso de un planeta desierto o sin vida por que $N = 0$.
- El segundo equilibrio es inestable.
- El tercer equilibrio es estable y denomina planeta *cálido*. Como se alcanza un punto de equilibrio (N_0^*, T_0^*) se concluye que este sistema representa condiciones adecuadas para el crecimiento y existencia de la vida.
- Las características del sistema enunciadas anteriormente se muestran en la figura 3.6, que esta conformada por planos fases para distintos valores de A_0 , simulando las trayectorias con múltiples condiciones iniciales para (N_0, T_0) . De los planos fase de la figura es fácil observar que conforme el valor del parámetro A_0 aumenta, los valores para N_0^* y T_0^* del punto de equilibrio se incrementan hasta que la temperatura es demasiado elevada y está presenta efectos adversos para la biota, representada por la variable N .

Retomando la definición que se dio anteriormente de las curvas w_i para $i = 1, 2, 3$ parametrizadas por A_0 y después de definir la estabilidad en cada uno de los puntos de equilibrio en el plano fase $\{N, T\}$ en la figura 3.9 se muestra que estas curvas corresponden a las curvas generadas en la intersección de las dos superficies que representan las ceroclinas para T y para N en el espacio fase $\{A, N, T\}$. Utilizando la definición de los puntos de equilibrio que se obtuvo anteriormente se tiene:

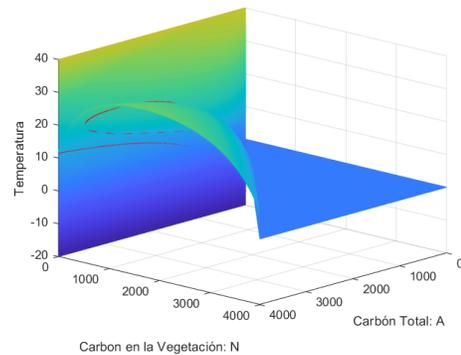
- La curva w_1 se conforma por todos los puntos de equilibrio estables para los cuáles $N = 0$.
- La curva w_2 se conforma por todos los puntos de equilibrio inestables.

- La curva w_3 se conforma por todos los puntos de equilibrio estables para los cuáles $N > 0$.

Por claridad en la figura 3.9 se muestran las curvas w y su intersección en las superficies que definen las ceroclinas de N y de T . Las curvas w_1 (en negro) y w_3 (en azul) conformadas por puntos de equilibrio estables, están representadas con una línea sólida y w_2 la conformada por puntos de equilibrio inestables por una línea punteada (en azul).



(a) Curvas w_i . w_1 en negro (sólido), w_2 en azul (punteado) y w_3 en azul (sólido).



(b) Intersección de las curvas w_i con ambas ceroclinas.

Figura 3.9: Plano Fase para distintos valores de A .

3.3. Simulaciones numéricas del sistema en lazo abierto.

3.3.1. Análisis de la escala de tiempo del sistema.

En las secciones 2.3.2 y 2.3.4 se repasaron y enumeraron los parámetros y las unidades asociadas al modelo simplificado de intercambio de carbono y al modelo simplificado de intercambio de energía y se obtuvo que la tasa de cambio de cada una de las ecuaciones diferenciales se encuentra dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\text{Kelvin}}{\text{segundo}}, \quad \frac{dN}{dt} = \frac{Gt}{yr} \quad (3.3.1.1)$$

Para el análisis de modelos climáticos se trabaja con variables como la temperatura anual promedio de un planeta o la emisiones anuales de carbono. Por lo tanto se busca realizar un análisis de los efectos que existen en un sistema climático en una escala de años. En esta sección se busca expresar ambas ecuaciones diferenciales de (3.3.1.1) en una escala de años. La ecuación que describe \dot{N} ya se encuentra expresada en una escala de

años. Además los datos de emisiones de carbono también consideran emisiones promedio en una escala de años, tomando en cuenta los datos obtenidos en [50], la emisión de carbono promedio de los últimos 10 años es de aproximadamente 30 Gt yr^{-1} , por lo que para la variable A se tiene que:

$$\frac{dA}{dt} = f(t), \quad \text{con} \quad f(t) = \frac{Gt}{yr} \quad (3.3.1.2)$$

Sin embargo como \dot{T} esta expresada en una escala de tiempo de segundos, es necesario modificar su escala de tiempo. Si se define el lado derecho de la ecuación 2.3.4.2 como una función $g(A, N, T)$ se tiene:

$$k \frac{dT}{dt} = g(A, N, T) \quad (3.3.1.3)$$

Al definir una escala de tiempo t en segundos y una escala τ en años, se obtiene un factor de escalamiento $t = \Lambda \tau$ [54]. Como $\tau = t/\Lambda$, se define la derivada de τ con respecto a t :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\Lambda} \quad (3.3.1.4)$$

Utilizando la regla de la cadena se tiene que la derivada de T con respecto a t se puede expresar como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\Lambda} \frac{dT}{d\tau}, \quad (3.3.1.5)$$

por simplicidad se define el factor Ω como $\Omega = \Lambda^{-1}$. Como se sabe que $1 \text{ yr} = 31,536,000 \text{ seg}$, los factores Λ y Ω se definen como:

$$\Lambda = \frac{1}{31536000}, \quad \Omega = 31536000 \quad (3.3.1.6)$$

Entonces la derivada de T con respecto al tiempo τ es:

$$\Omega \frac{dT}{d\tau} = g(A, N, T), \quad (3.3.1.7)$$

la ecuación (3.3.1.3) ya se encuentra escalada por k por lo que se define el factor de escalamiento ϵ :

$$\epsilon k = \Omega \quad (3.3.1.8)$$

Sustituyendo (3.3.1.8) en la ecuación (3.3.1.7), se obtiene una expresión en la escala de tiempo de τ y un factor ϵ de escalamiento de tiempo en años:

$$\epsilon k \frac{dT}{d\tau} = g(A, N, T) \quad (3.3.1.9)$$

De manera explícita la ecuación 2.3.3.6 se expresa en una escala de años como:

$$\epsilon \frac{dT}{dt} = \psi(N) - \sigma\varphi(A - N)T^4 \quad (3.3.1.10)$$

Por simplicidad en el artículo se de [7] se definió $k = 1$. Entonces para un valor de $k_{yr} = 3.1536 \times 10^7$ se tiene $\epsilon = 1$ y la ecuación 3.3.1.10 es:

$$\frac{dT}{dt} = \psi(N) - \sigma\varphi(A - N)T^4 \quad (3.3.1.11)$$

Por ejemplo para k_1 se tiene que $\epsilon_1 \approx 1.05$. Como se menciono anteriormente conforme el parámetro k es más grande el sistema se vuelve más lento. En la tabla 3.1 aparecen distintos valores de k y su correspondiente valor de ϵ para la escala de tiempo en años. En la figura 3.10a se muestran las trayectorias solución en una escala de tiempo de años con las condiciones iniciales $(A_0, N_0, T_0)^T = (1360, 1000, 20)^T$ en el espacio fase $\{A, N, T\}$ para todos los valores definidos para k en la tabla 3.1.

Capacidad térmica k	Valor	ϵ	Valor
k_{yr}	3.1535×10^7	ϵ_{yr}	1
k_1	3×10^7	ϵ_1	1.05
k_2	9.96×10^6	ϵ_2	3.16
k_3	6.3×10^7	ϵ_3	0.5
k_4	7×10^6	ϵ_4	4.5

Cuadro 3.1: Capacidad térmica k .

Todas las trayectorias del sistema parecen converger a una sola trayectoria, las trayectorias que corresponden a aquellos valores más grandes de k son aquellas que toman un tiempo mayor en converger a esta trayectoria. Esta característica del sistema se puede definir también para las trayectorias en el plano fase $\{N, T\}$. Definiendo $\dot{A} = 0$ en la figura 3.10b se observan las trayectorias solución en una escala de tiempo de años con

las mismas condiciones iniciales en el plano fase $\{N, T\}$ para los valores de k propuestos anteriormente.

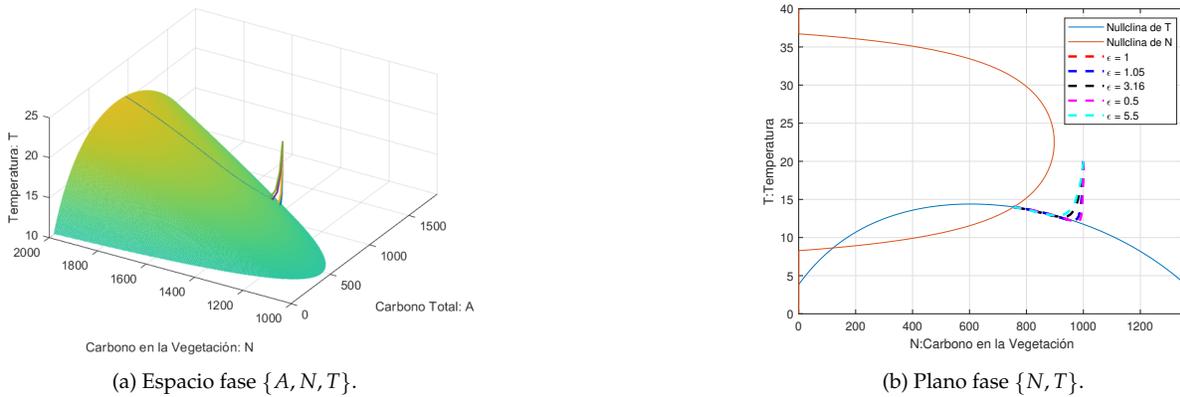


Figura 3.10: Trayectorias con ϵ variable.

Las trayectorias en el plano fase $\{N, T\}$ convergen primero a la ceroclina de T , para después converger a un punto de equilibrio, a diferencia de las trayectorias en el espacio fase $\{A, N, T\}$, que convergen a la superficie que corresponde también a la ceroclina de la variable T . Para definir la nueva escala de tiempo en años para la ecuación 3.3.1.3 se utilizó la variable ϵ , sin embargo en el desarrollo posterior del trabajo se usará la variable k . Además para realizar las simulaciones numéricas posteriores se utilizará el valor de 3.16 para k , ya en una escala de años. Este valor propuesto para k , es igual al producto de los parámetros $h\rho c$, utilizando los valores propuestos en la tabla 2.2 de la sección 2.3.4.

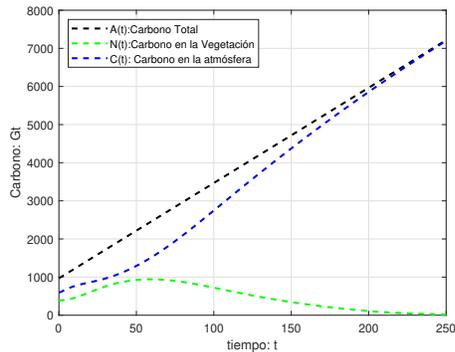
3.3.2. Series de tiempo para el sistema $\{A, N, T\}$.

Considerando las condiciones iniciales $(A_0, N_0, T_0)^T = (1360, 1000, 14)^T$ para el sistema de 3 variables y definiendo como $f(t) = 20 \text{ Gt yr}^{-1}$ se obtienen las series de tiempo para las variables $N(t)$, $C(t)$ y $A(t)$ que se muestran en la figura 3.11a para un tiempo de simulación de 250 unidades de tiempo. Al definir a $\dot{A} = 30$ se tiene que:

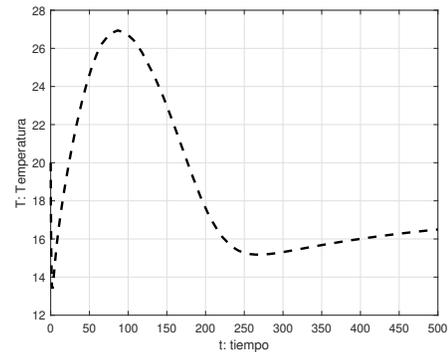
$$A(t) = A_0 + 30t, \quad \text{con } A_0 = 1360 \quad (3.3.2.1)$$

Claramente cuando no existe una restricción sobre las emisiones $f(t)$, conforme $N(t)$ converge a 0, el carbono total $A(t)$ converge al valor del carbono en la atmósfera $C(t)$. La

figura 3.11b muestra la serie de tiempo para la temperatura $T(t)$.



(a) $A(t)$, $N(t)$ y $C(t)$.



(b) $T(t)$ en grados Celsius.

Figura 3.11: Series de tiempo.

En el desarrollo de este capítulo se analizaron las características del modelo en lazo abierto, en particular se estudió la geometría de las ceroclinas y sus intersecciones. En la primera sección ya se planteó la importancia del análisis de las superficies que definen las ceroclinas de la vegetación N y la temperatura T . En particular en las simulaciones numéricas de la subsección 3.3.1 se mostró que las órbitas del sistema parecen converger a la superficie que define la temperatura T , independientemente del valor que se utilice para k . Este comportamiento indica que en el sistema se encuentran definidas distintas escalas de tiempo, por lo que en el siguiente capítulo se estudiarán estas propiedades con detalle.

Capítulo 4

Reducción del sistema.

4.1. Motivación.

4.1.1. Introducción.

En la sección 3.1 se definió un sistema de tres ecuaciones diferenciales con el objetivo de representar de una manera simplificada y compacta las interacciones entre las variables temperatura promedio anual T , el carbono contenido en la vegetación N y carbono contenido en la atmósfera C (a través del cálculo del carbono total del sistema A). Tal sistema se definió de manera explícita como:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= P(A, N, T) - mN \\ k\frac{dT}{dt} &= S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(A, N)T^4 \\ \frac{dA}{dt} &= f(t)\end{aligned}\tag{4.1.1.1}$$

Para realizar un análisis del sistema utilizando herramientas asociadas a la teoría de control, puede resultar más complejo utilizar el sistema no lineal de dimensión tres definido en (4.1.1.1). El objetivo de esta sección consiste en utilizar el método de perturbaciones singulares para obtener un sistema simplificado que capture de manera aproximada el comportamiento de (4.1.1.1). Con este objetivo, note que en la figura 3.10b de la sección 3.3.1 se puede observar que las trayectorias solución del sistema en el plano fase $\{N, T\}$ (cuando se considera el carbono total del sistema como constante) convergen a la cero-clina de la variable de la temperatura promedio anual T antes de converger al punto de equilibrio estable. En el caso del sistema de tres variables (4.1.1.1) se sabe que el sistema

no posee puntos de equilibrio debido a que la tasa de cambio del carbono total con respecto del tiempo \dot{A} se definió como una función que depende solo del tiempo. Sin embargo el sistema de tres dimensiones presenta el mismo comportamiento que el sistema de dos dimensiones cuando se define $\dot{A} = 0$, es decir en la figura 3.10a las trayectorias solución convergen también a lo que parece ser una trayectoria $\zeta(t)$, incluso cuando se varía el término k de la ecuación diferencial que define la temperatura. Utilizando el concepto de perturbaciones singulares en esta sección se mostrará que el conjunto de puntos que conforman esta curva pertenecen a la ceroclina de la temperatura en el espacio fase $\{A, N, T\}$.

En la figura 4.1 se muestra la superficie de la ceroclina para la temperatura T del sistema y la trayectoria generada en la simulación del sistema de 3 variables utilizando múltiples condiciones iniciales con una función de emisión constante $f(t) = 30 \text{ Gt yr}^{-1}$ y $k = 3.16$.

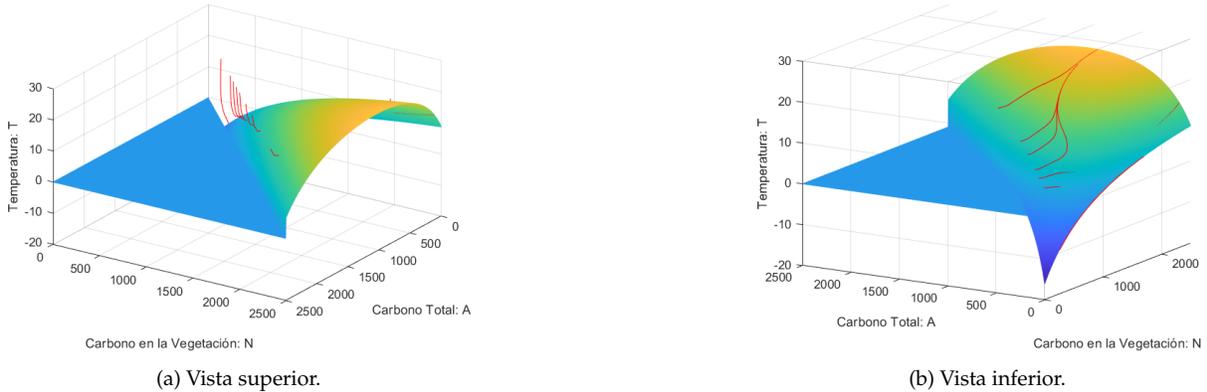


Figura 4.1: Simulación $\dot{A} = 20 \text{ Gt yr}^{-1}$.

4.1.2. Sistema reducido $A - N$.

De acuerdo al enfoque estándar de perturbaciones singulares, en el sistema (4.1.1.1) se tiene que la variable rápida es T , mientras que las otras dos variables A y N poseen una dinámica más lenta. Por lo tanto se define a la variedad invariable como la ceroclina de T , ó expresado en términos del modelo estándar de perturbaciones singulares se tiene:

$$0 = g(\bar{N}, \bar{T}, \bar{A}, 0, t) \quad (4.1.2.1)$$

Utilizando la notación estándar del modelo de perturbaciones singulares, se tiene que:

$$\bar{T} = \bar{\varphi}_i(\bar{N}, \bar{A}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.1.2.2)$$

Dado que el sistema (4.1.1.1) se encuentra definido en el intervalo:

- $T \in \mathbb{R}$
- $A \in [0, \infty]$
- $N \in [0, \infty]$

Se tiene que en este intervalo la expresión (4.1.2.1) solo tiene una raíz definida, por lo tanto $i = 1$ para la ecuación (4.1.2.2) y todo el conjunto de condiciones iniciales $(A(t_0), N(t_0))^T$ convergen al sistema *casi-estable* definido por (4.1.2.2). En la sección 3.1 se estableció que la superficie que define la ceroclina de T se encuentra representada por la ecuación:

$$\bar{T} = \left(\frac{\Phi(A, N)}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (4.1.2.3)$$

Se define $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$, como la superficie que representa la ceroclina de \bar{T} en el espacio fase $\{A, N, T\}$. Para el sistema simplificado se tiene que la derivada con respecto del tiempo de la variable \bar{N} es:

$$\dot{\bar{N}} = P_m g(\bar{T}) G_{\bar{N}}(\bar{N}) - m\bar{N}, \quad (4.1.2.4)$$

donde la función dependiente de la temperatura $g(\bar{T})$ se define como:

$$g(\Psi(A, N)) = \text{máx} \left\{ 0, \frac{4}{(\Delta T)^2} (\Psi(A, N) - T_1)(T_2 - \Psi(A, N)) \right\} \quad (4.1.2.5)$$

En el caso de la variable A se tiene que no presenta dependencia de la variable T por lo que $\dot{\bar{A}} = \dot{A}$. El modelo *casi-estable* asociado al sistema 4.1.1.1 se encuentra definido por la expresión 4.1.2.6.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{N}} &= P_m g(\Psi(\bar{A}, \bar{N})) G_{\bar{N}}(\bar{N}) - m\bar{N} \\ \dot{\bar{A}} &= f(t) \end{aligned} \quad (4.1.2.6)$$

Denotando las soluciones del sistema *casi-estacionario* (4.1.2.6) como $\bar{N}(t)$ y $\bar{A}(t)$. Como la variable T fue excluida del modelo y sustituida por su aproximación de estado casi estacionario $\Psi(A, N)$, se obtiene \bar{T} al resolver (4.1.2.6):

$$\bar{T} := \Psi(\bar{A}, \bar{N}), \quad (4.1.2.7)$$

que describe el comportamiento del estado casi-estacionario de T , cuando $A = \bar{A}$ y $N = \bar{N}$. En contraste de la variable original T , que se encontraba definida por un valor inicial T_0 en el tiempo t_0 , el estado casi estacionario \bar{T} no puede iniciar en cualquier valor, más bien su valor inicial se encuentra determinado por $\bar{T}_0 = \Psi(\bar{A}(t_0), \bar{N}(t_0))$. Puede existir una discrepancia grande entre estos valores iniciales, por lo tanto $\bar{T}(t)$ no puede ser una aproximación uniforme de $T(t, \epsilon)$. La mejor aproximación que se puede esperar es que el valor estimado para:

$$T(t, \epsilon) - \bar{T}(t) = O(\epsilon), \quad (4.1.2.8)$$

se mantenga de manera uniforme en un intervalo donde no se encuentre contenido t_0 , es decir para todo $t \in [t_1, T]$ con $t_1 > t_0$. Sin embargo si se puede restringir que los estados casi-estacionarios \bar{N} y \bar{A} mantengan las mismas condiciones iniciales prescritas A_0 y N_0 . Por lo tanto las aproximaciones de A y N por \bar{N} y \bar{A} son uniformes, es decir:

$$N(t, \epsilon) - \bar{N}(t) = O(\epsilon), \quad A(t, \epsilon) - \bar{A}(t) = O(\epsilon) \quad (4.1.2.9)$$

La aproximación del sistema es válido en un intervalo que contiene a t_0 , es decir en el intervalo $t \in [t_0, T]$, en el que $\bar{A}(t)$ y $\bar{N}(t)$ existen. En la figura 4.2 se muestra la trayectoria solución de una simulación del sistema reducido con condiciones iniciales $\bar{N}(0) = 367 \text{ Gt}$, $\bar{A}(0) = 968 \text{ Gt}$, tiempo de simulación $t_f = 300 \text{ yr}$ y una valor constante de 30 Gt yr^{-1} para \dot{A} .

Así como en el sistema original de tres variables, en el sistema reducido $\{\bar{A}, \bar{N}\}$ se observa que el carbono total crece sin cota y el carbono de la vegetación tiende asintóticamente a cero, lo que implica que en el tiempo final t_f todo el carbono en el sistema se encuentre en la atmósfera.

En la figura 4.3 se muestra la trayectoria (color magenta) de una simulación del sistema completo con condiciones iniciales $N(0) = 367 \text{ Gt}$, $A(0) = 968 \text{ Gt}$ y $T(0) = 18 \text{ }^\circ\text{C}$. En el plano (A, N) se muestra la trayectoria solución del modelo reducido (en color rojo sólido).

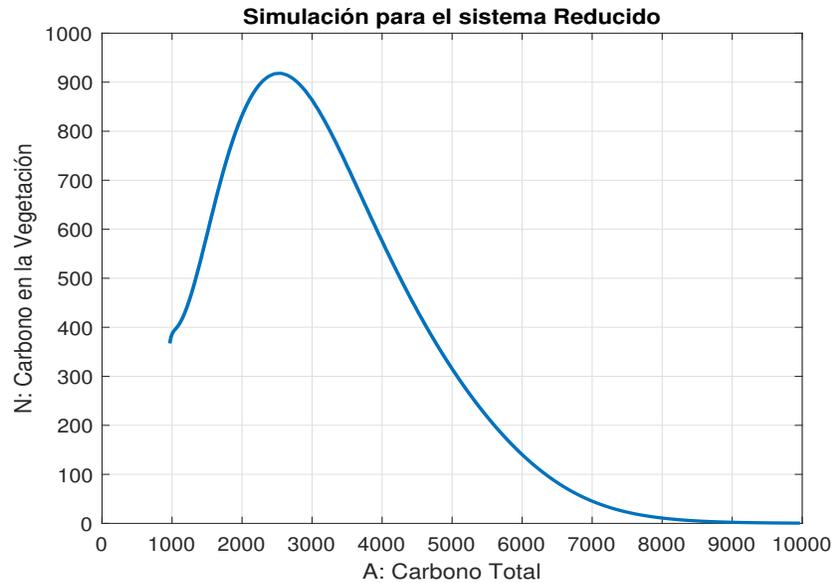


Figura 4.2: Sistema reducido $\{\bar{A}, \bar{N}\}$.

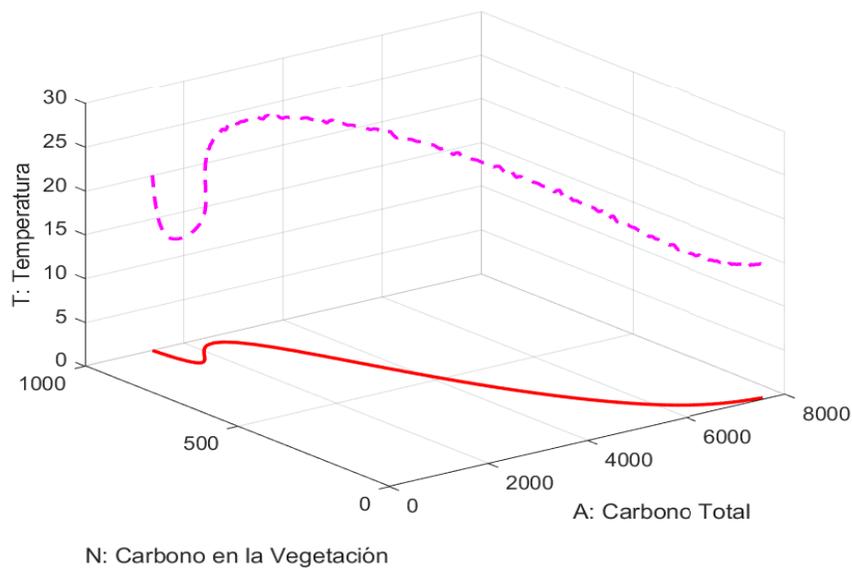


Figura 4.3: Trayectorias para el sistema reducido y el sistema completo.

Para las variables \bar{N} y \bar{A} , el sistema de orden reducido obtenido a través del método de perturbaciones singulares aproxima al comportamiento del sistema original. En la figura 4.4 se muestran las series de tiempo de las variables del sistema. La línea sólida representa la simulación del sistema reducido y la línea punteada representa la simulación del sistema completo. Después del transitorio, la diferencia entre las series es imperceptible. La figura 4.5 muestra la trayectoria generada por simulación del sistema de tres variables y la trayectoria $\bar{T} := \Psi(\bar{A}, \bar{N})$.

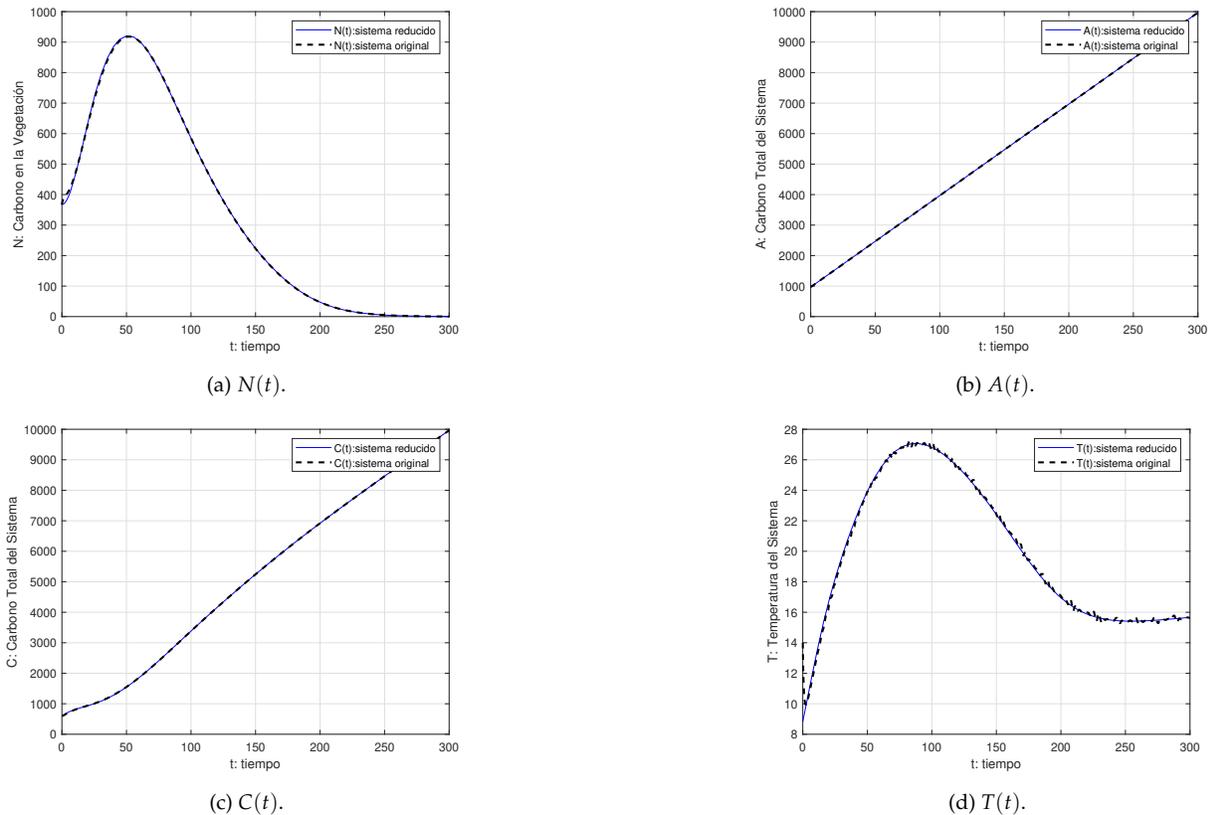


Figura 4.4: Solución para las variables del Sistema.

4.2. Características del modelo reducido.

4.2.1. Propiedades asociadas a la escala de tiempo.

Las perturbaciones singulares provocan un comportamiento de múltiples escalas de tiempo de los sistemas dinámicos caracterizado por la presencia de transitorios lentos y rápidos en el respuesta del sistema. La idea general consiste en que la respuesta lenta del sistema o el estado *semi-estacionario*, es aproximado por el sistema reducido (4.1.2.6) mien-

tras que la discrepancia entre el sistema reducido (4.1.2.6) y el sistema completo 4.1.1.1 es el transitorio rápido. En la simulación mostrada en la figura 4.5, se puede observar la discrepancia entre la trayectoria generada por el sistema completo (en magenta) y el modelo aproximado (en negro), para un tiempo $t > t_1$, es $T(t, \epsilon) - \bar{T}(t) = O(\epsilon)$. Por simplicidad el sistema (4.1.1.1) se reformula utilizando una notación similar al modelo estándar de perturbaciones singulares:

$$\begin{aligned}\dot{N} &= g_1(t, A, N, T, \epsilon) \\ \epsilon \dot{T} &= g_2(t, A, N, T, \epsilon) \\ \dot{A} &= g_3(t, A, N, T, \epsilon)\end{aligned}\tag{4.2.1.1}$$

La aproximación (4.1.2.8) establece que durante un intervalo inicial $[t_0, t_1]$ denominada como capa límite, la variable original T se acerca a la variable \bar{T} y durante el intervalo $[t_1, t_f]$ permanece cercana a \bar{T} . Debido a que la velocidad de cambio de la temperatura $\dot{T} = g_2/\epsilon$ puede ser grande para un ϵ pequeño, al igualar ϵ a 0 en el modelo original el transitorio de T se ha vuelto instantáneo siempre que $g_2 \neq 0$.

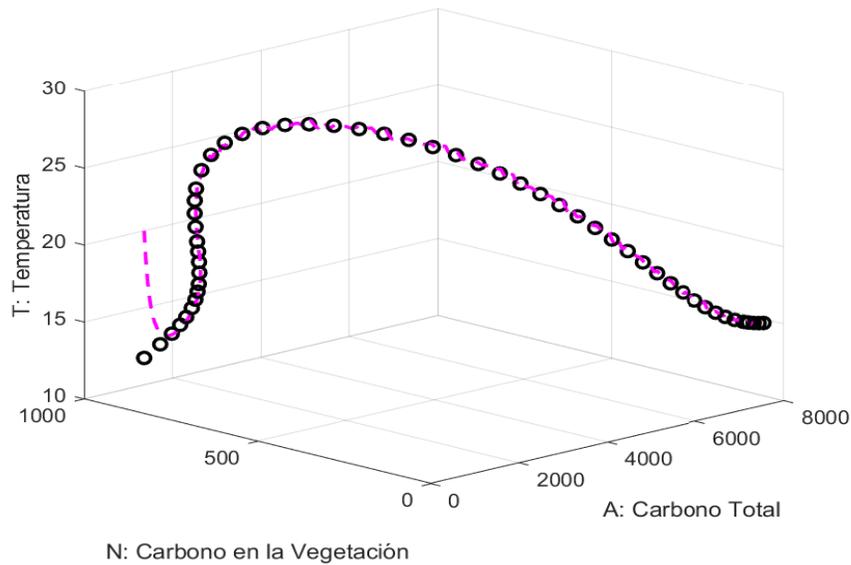


Figura 4.5: Simulación del sistema para el modelo completo (magenta) y el modelo reducido (negro).

Al analizar el comportamiento de $\epsilon \dot{T}$, es posible determinar que la trayectoria solución de la temperatura $T(t)$ puede permanecer finita, incluso cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $\dot{T} \rightarrow \infty$.

Tal como se realizó en la sección 3.3.1 se definen dos escales de tiempo en el sistema:

$$\epsilon \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{d\tau} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (4.2.1.2)$$

Por lo tanto:

$$\epsilon = \frac{dt}{d\tau}, \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{\epsilon} = \frac{d\tau}{dt} \quad (4.2.1.3)$$

Definiendo como valor inicial $\tau = 0$ para $t = t_0$ se tiene que la para la nueva variable de tiempo τ , para $\epsilon \rightarrow 0$ la variable $\tau \rightarrow \infty, \forall t$. Mientras que la ecuación diferencial para T casi cambia de inmediato a causa del cambio repentino ocurrido en τ , las variables A y N permanecen cercanos a su valores iniciales A_0 y N_0 .

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^t dt, \quad \text{con} \quad \tau(0) = t_0 \\ &= \frac{t - t_0}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4.2.1.4)$$

De acuerdo a [47] solo se puede esperar que el estado T converja al estado semi-estable \bar{T} , cuando ciertas condiciones de estabilidad se satisfacen. Para realizar este análisis se define el término de corrección de la *capa límite*:

$$\begin{aligned} y &= T - \bar{T} \\ &= T - \Psi(t, A, N) \end{aligned} \quad (4.2.1.5)$$

Que representa la diferencia entre la trayectoria del sistema completo y la trayectoria del sistema simplificado. Para simplificar la notación se define la variable $x = (A, N)^T$ y la función vectorial h como:

$$h = \begin{pmatrix} g_3 \\ g_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.1.6)$$

Por lo tanto la dinámica de las variables A y N se encuentra dada por:

$$\dot{x} = h(t, x, y + \Psi(t, A, N), \epsilon), \quad \text{con la condición inicial:} \quad x_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.1.7)$$

Con $T = y + \Psi(t, A, N)$. De acuerdo al planteamiento del modelo estandar de perturbaciones singulares se tiene que la aproximación por medio del sistema reducido esta dada por:

$$\dot{\hat{x}} = h(t, \bar{x}, \Psi(t, A, N), 0), \quad \text{con la condición inicial: } \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (4.2.1.8)$$

De manera similar a la ecuación (4.2.1.5) se define el término de corrección para la variable x :

$$\hat{x} = x(t) - \bar{x}(t), \quad (4.2.1.9)$$

que representa la diferencia entre las trayectorias del sistema completo y el sistema reducido. Definiendo $g = g_2$ y utilizando las expresiones (4.2.1.5) y (4.2.1.9) se tiene que el sistema que define la dinámica de las variables de corrección \hat{x} y y es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= h(t, \hat{x} + \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) - h(t, \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), 0) \\ \epsilon \dot{y} &= g(t, \hat{x} + \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) - \left(\epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} h(t, \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) \right) \end{aligned} \quad (4.2.1.10)$$

Representando el sistema (4.2.1.10) en la escala de tiempo τ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{d\tau} &= \epsilon [h(t, \hat{x} + \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) - h(t, \bar{x}, \Psi(t, A, N), 0)] \\ \frac{dy}{d\tau} &= g(t, x, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) - \left(\epsilon \frac{\partial \Psi(t, A, N)}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \Psi(t, A, N)}{\partial \bar{x}} h(t, \bar{x}, y + \Psi(t, A, N), \epsilon) \right) \end{aligned} \quad (4.2.1.11)$$

De la ecuación (4.2.1.4) se puede concluir que la variación de las variables x y t en la escala de tiempo τ se encuentra dada por:

$$t = \epsilon\tau + t_0, \quad x(t) = x(\epsilon\tau + t_0) \quad (4.2.1.12)$$

Se concluye que las variables t y x evolucionan lentamente para un $\epsilon \ll 1$. Se realiza un análisis de la dinámica de las variables de corrección y y \hat{x} para el sistema (4.2.1.10):

- Para la variable de corrección \hat{x} se tiene que $d\hat{x}/d\tau \rightarrow 0$ conforme $\epsilon \rightarrow 0$. Para $\epsilon = 0$ se tiene que el término de corrección es un valor constante C es decir $\hat{x}(\tau) = C$. Como $x_0 = \bar{x}_0$ se tiene que $C = 0$ y en la escala de tiempo rápida τ , se obtiene $\hat{x} = 0$ por lo que $x(t, \epsilon) \rightarrow \bar{x}(t)$.
- Para la variable de corrección y al definir el valor de ϵ como 0, se tiene que $\hat{x}(\tau) = 0$. Además de (4.2.1.12), se sabe que para $\epsilon = 0$, $t = t_0$ y $\bar{x}(t_0) = x_0$ y el sistema 4.2.1.11 se reduce al sistema autónomo:

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t_0, \bar{x}_0, y + \Psi(t_0), 0), \quad y(\tau) = T(0) - \Psi(t_0) \quad (4.2.1.13)$$

El sistema (4.2.1.13) se denomina como "sistema de capa límite." La ecuación de (4.2.1.13) tiene un punto de equilibrio en $y = 0$, si este punto de equilibrio es asintóticamente estable y $y(0)$ pertenece a su región de atracción, entonces la solución $y(\tau)$ alcanza una vecindad $O(\epsilon)$ del origen durante el intervalo de capa límite.

La condición de estabilidad que garantiza que $y(\tau)$ permanece cercano a 0 mientras que los parámetros lentos (x, t) se mueven lejos de sus condiciones iniciales x_0 y t_0 se basa en la estabilidad exponencial del origen para la ecuación diferencial del término de corrección y en la escala de tiempo τ para la ecuación diferencial (4.2.1.13). En [47] se puede encontrar la siguiente definición para la condición de estabilidad:

Asumiendo que la solución \bar{x} del problema reducido esta definido para $t \in [0, t_1]$ y $\bar{x}(t) \in D_x \subset \mathbb{R}^n$ para algún dominio D_x . El punto de equilibrio $y = 0$ para el sistema de capa exterior es exponencialmente estable, de manera uniforme en $(t, x) \in [0, t_1] \times D_x$, si existen constantes positivas k , γ y ρ_0 tal que las soluciones del sistema de capa exterior satisface:

$$\|y(\tau)\| \leq ky(0)\exp(-\gamma\tau), \forall \|y(0)\| < \rho_0, \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x, \forall \tau \geq 0 \quad (4.2.1.14)$$

En [47] se muestra que que si la matriz Jacobiana $[\frac{\partial g}{\partial y}]$ satisface la condición:

$$\operatorname{Re} \left[\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial y}(t, x, \Psi(t, x), 0) \right\} \right] \leq -c < 0, \forall (t, x) \in [0, t_1] \times D_x \quad (4.2.1.15)$$

Entonces existen las constantes k , γ y ρ para las cuales se satisface la condición (4.2.1.14). Este resultado se deriva de lo que se conoce como el teorema de Tikhonov [47]. Para la ecuación de la temperatura para el sistema (4.2.1.1) se tiene que g se encuentra definida como:

$$g(A, N, T) = S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(A - N)T^4. \quad (4.2.1.16)$$

Definiendo $y = T - \Psi(A, N)$ y $x = (A, N)^T$ se tiene:

$$g(A, N, T) = S(1 - \alpha(N)) - \sigma\varphi(A - N)(y + \Psi(A, N))^4, \quad \text{con } T = y + \Psi(A, N) \quad (4.2.1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= -4\sigma(A - N)(y + \Psi(A, N))^3 \\ &= -4\sigma(A - N)(T)^3 \end{aligned} \quad (4.2.1.18)$$

Como $A \geq N$ y $A \in (0, \infty)$ y $N \in (0, \infty)$ se tiene que la expresión

$$\operatorname{Re} \left[\lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial y} \right\} \right] \leq -c < 0, \quad \text{para todos los valores de } A \in \mathbf{R}^+ \quad \text{y} \quad N \in \mathbf{R}^+ \quad (4.2.1.19)$$

Se tiene que la condición (4.2.1.15) se cumple, por lo que el sistema reducido dado por (4.1.2.6) aproxima al comportamiento del sistema completo dado por (4.1.1.1).

4.2.2. Ceroclinas para el sistema reducido.

Para el sistema reducido definido en 4.1.2.6 se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{A}} &= f(t) \\ \dot{\bar{N}} &= h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N})), \end{aligned} \quad (4.2.2.1)$$

donde $h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N}))$ se define utilizando las funciones definidas en el sistema (4.1.2.6) y $f(t)$ es un valor constante. Como f es una función que depende solo del tiempo, para $\dot{\bar{A}}$ no existe una ceroclina y por lo tanto el sistema reducido no tiene puntos de equilibrio.

Para obtener la curva que define la ceroquina de la variable \bar{N} se resuelve la ecuación algebraica:

$$h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N})) = 0 \quad (4.2.2.2)$$

Para \bar{N} se tiene que:

$$h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N})) = P_m g(\Psi(\bar{A}, \bar{N})) G_{\bar{N}}(\bar{N}) - m \bar{N} \quad (4.2.2.3)$$

De (4.2.2.3) se sabe que $h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N})) = 0$ cuando $\bar{N} = 0$ o cuando la expresión 4.2.2.4 se iguala a 0.

$$P_m g(\Psi(\bar{A}, \bar{N})) G_{\bar{N}}(\bar{N}) - m = 0 \quad (4.2.2.4)$$

No es posible obtener una expresión para definir de manera explícita a la variable \bar{N} utilizando la ecuación (4.2.2.4). Sin embargo es posible obtener las raíces de \bar{N} utilizando el método de *Newton Rhapson* para resolver $h(\bar{A}, \bar{N}, \Psi(\bar{A}, \bar{N})) = 0$ al considerar a \bar{A} como un parámetro variable y variar \bar{N} . Como el sistema definido en (4.1.2.6) es una aproximación del sistema completo (4.1.1.1), los puntos de equilibrio (N^*, T^*) obtenidos para cada A_0 en cada plano fase $\{N, T\}$ que pertenece a la intersección entre las ceroquinas de T y N en el espacio fase $\{A, N, T\}$, se aproximan a los valores obtenidos para los puntos (\bar{A}, \bar{N}) en el plano fase $\{\bar{A}, \bar{N}\}$ y a partir de un tiempo t_1 a su aproximación $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$. Expresado de otra manera, las componentes A y N de los puntos que conforman las curvas w_1 , w_2 y w_3 definidas en el capítulo 3 son iguales a los valores de las componentes \bar{A} y \bar{N} de la ceroquina para \bar{N} en el sistema reducido. Dado que las proposiciones del teorema de Tikhonov planteadas en la subsección 2.1.6 se cumplen, entonces la ecuación que describe a la superficie $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$ es una variedad invariante en el espacio fase $\{A, N, T\}$. Es decir, toda órbita del sistema que comience en $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$, permanecerá en $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$. Además, bajo ciertas condiciones, las órbitas que comiencen fuera de $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$ también convergerán a esta variedad. De manera local, la superficie $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$ es equivalente al semi plano $\bar{A} \geq \bar{N}$. En la figura 4.6 se puede observar esta relación, la ceroquina de \bar{N} para el sistema reducido es una proyección de las curvas w_1 , w_2 y w_3 . El equilibrio $\bar{N} = 0$ corresponde a la proyección de la curva w_1 , definida en el plano (A, T) .

El conjunto de puntos \bar{A} y \bar{N} del plano fase que conforman la curva definida por (4.2.2.4) corresponde a la proyección de las curvas w_1 y w_2 . Es importante mencionar que los puntos que conforman la ceroclina de \bar{N} en el plano fase, aun no se pueden clasificar como estables ó inestables, a diferencia de la curva w_2 en el espacio fase.

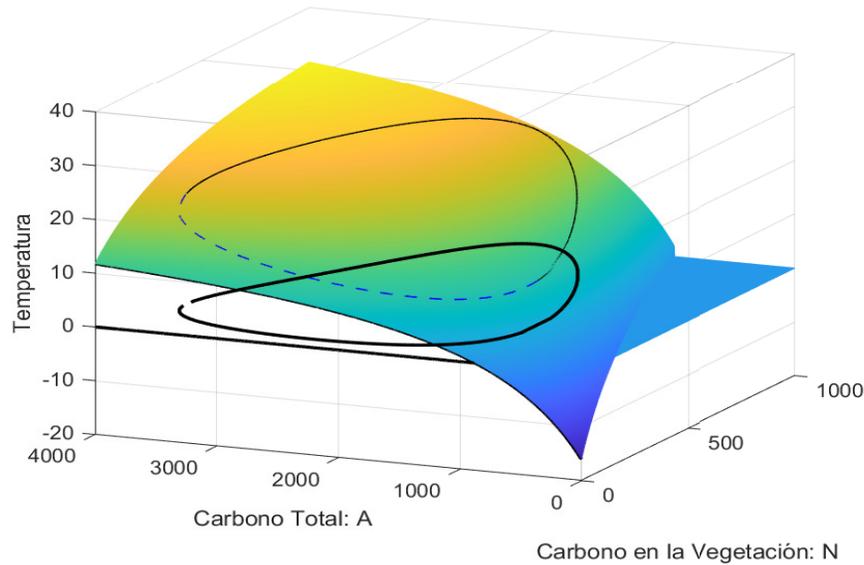


Figura 4.6: Proyección de los puntos de equilibrio A^* , N^* y T^* sobre el plano $\{\bar{A}, \bar{N}\}$.

En la figura 4.7 se observa la curva que define la ceroclina para \bar{N} en el plano (\bar{A}, \bar{N}) . Las ceroclinas para \bar{N} se muestran en negro solido, tanto en la figura 4.6 como en la figura 4.7, con la intención de realizar un distinción visual entre las curvas.

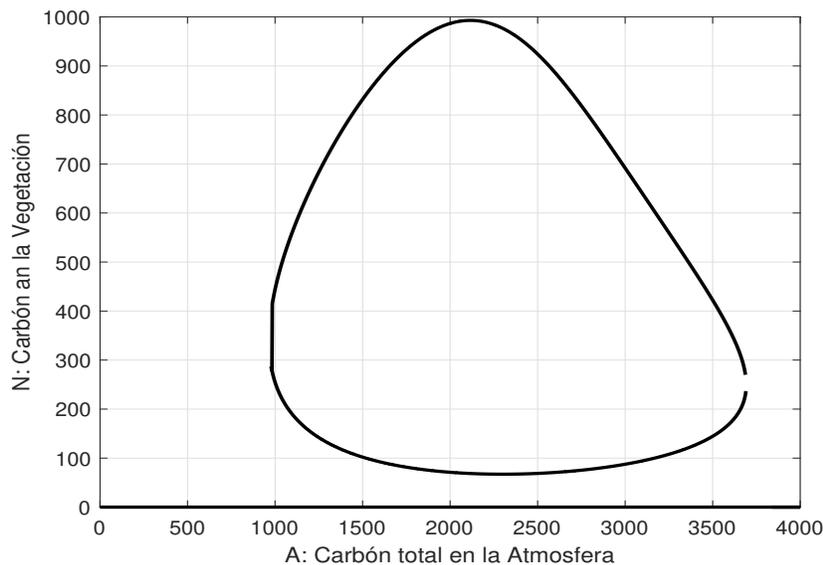


Figura 4.7: Ceroclina para el sistema reducido \bar{A}, \bar{N} .

Al utilizar las herramientas analíticas del método de perturbaciones singulares, es posible obtener información del modelo climático de tres dimensiones, a través de una aproximación realizada en un modelo más sencillo cuya dinámica es más fácil de analizar. Este fue uno de los objetivos planteados inicialmente en la tesis. El análisis de este nuevo modelo se realizara en el plano fase, lo que permitirá que la interpretación de los resultados presentados posteriormente se realice de una manera más sencilla. Este planteamiento permite realizar una simplificación del modelo, sin necesidad de utilizar una premisa similar al planteamiento realizado en el artículo original presentado por [7]. Utilizar esta reducción resultara de gran utilidad para definir las funciones de emisión de carbono y estudiar la respuesta que presentara el modelo climático a funciones que dependen de las otras variables de estado del sistema.

Capítulo 5

Sistema en lazo cerrado.

5.1. Planteamiento.

5.1.1. Introducción.

El objetivo de este capítulo es analizar el sistema $\{A, N, T\}$ descrito en las secciones anteriores, pero planteando que la tasa de cambio del carbono generado por emisiones antropogénicas se encuentra definida a través de una función que depende de los otros estados del modelo en lugar de definirla por medio de un valor constante o una función que dependa solo del tiempo. Plantear la evolución del sistema climático a través de un esquema basado en la retroalimentación, permite modelar las emisiones de carbono generadas por el humano como una función que depende de los otros estados del sistema. Se propone adoptar una perspectiva enfocada en el cumplimiento del acuerdo de París, que se encuentra orientado en reducir las emisiones de carbono para disminuir el crecimiento de la temperatura promedio anual. Este planteamiento corresponde a modelar las emisiones de carbono en la atmósfera como una función u que depende de la temperatura del sistema. Como el objetivo del planteamiento es generar un modelo de emisiones de carbono, la función u debe de cumplir con ciertas restricciones, en particular:

$$u(t) \geq 0 \tag{5.1.1.1}$$

La restricción establecida anteriormente se fundamenta en que no es posible extraer carbono de la atmósfera, por lo tanto cualquier función u que se proponga, se encuentra limitada a un conjunto de funciones admisibles. El modelo climático definido a través de un esquema basado en la retro alimentación implica la generación de puntos de equilibrio

y por lo tanto el posterior análisis de la viabilidad de estos equilibrios para el desarrollo de la biota del modelo propuesto. Es posible utilizar este análisis, (incluso a un nivel básico) para generar criterios de carácter cualitativo para conocer la efectividad de la reducción de las emisiones de carbono y determinar el conjunto de condiciones iniciales para el cual esta reducción implica una reducción de la temperatura del sistema y alcanzar un equilibrio que genere condiciones que se consideran deseables para las otras variables de estado en el modelo. En el modelo planteado para el sistema climático en lazo cerrado se describe que para el ciclo del carbono, la tasa de cambio del carbono \dot{A} se encuentra definida como una función de la temperatura T . En particular, en [6] se plantea que el objetivo principal de la reducción de emisiones consiste en que el incremento de la temperatura promedio de la tierra no sobrepase 1.5 grados celsius de la temperatura presentada por el planeta durante el siglo pasado. Denominando T_d a esta temperatura, se plantea un modelo de emisión basado en un esquema proporcional clásico. Además, el modelo obtenido debe enfocarse en disminuir las emisiones de carbono por lo que se debe prestar atención en el sentido de la retroalimentación. De manera específica, se plantea que las emisiones de carbono por parte del humano deben ser proporcionales a la diferencia que existe entre el parámetro T_d que representa la temperatura deseada y la temperatura del sistema T . Definiendo a esta diferencia como e se tiene:

$$e = T_d - T \quad (5.1.1.2)$$

Por lo tanto la función u propuesta para modelar la tasa de cambio de las emisiones de carbono, se define como:

$$u = K_p e, \quad (5.1.1.3)$$

por lo que el sistema climático en lazo cerrado se expresa como:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= P_m G(A, N) g_T(T) - mN \\ k \frac{dT}{dt} &= \psi(N) - \sigma \varphi(A, N) T^4 \\ \frac{dA}{dt} &= u \end{aligned} \quad (5.1.1.4)$$

En el sistema de ecuaciones diferenciales (5.1.1.4) se plantea que al mantener las emisiones antropógenicas de carbono \dot{A} acotadas, se busca alcanzar un equilibrio estable que permita el desarrollo de la biota N y donde se alcance una temperatura de T_d en el sistema. Por lo tanto, en la ecuación (5.1.1.3) se tiene que el término k_p es una parametrización las acciones realizadas para disminuir las emisiones de carbono, proceso que no se encuentra descrito en el modelo (5.1.1.4). Dado que la función u modela las emisiones antropogénicas de carbono, se tiene que la unidades para u son $Gtyr^{-1}$ y por lo tanto las unidades para el parámetro k_p son $Gt/^\circ Kyr$. Para realizar el análisis del sistema (5.1.1.4), resulta útil usar la reducción del modelo que se obtuvo utilizando la propiedad de múltiples escalas de tiempo asociadas al método de perturbaciones singulares. Como la superficie que define la ceroclina de T en el espacio fase es un variedad invariante del sistema, se tiene que para el sistema reducido la diferencia planteada anteriormente entre la temperatura deseada T_d y la temperatura del sistema \bar{T} es:

$$\bar{e} = T_d - \bar{T}, \quad (5.1.1.5)$$

por lo que el sistema reducido en lazo cerrado de (5.1.1.4) puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}}{dt} &= P_m g(\bar{T}) G_{\bar{N}}(\bar{A}, \bar{N}) - m\bar{N} \\ \frac{d\bar{A}}{dt} &= K_p (T_d - \bar{T}) \end{aligned} \quad (5.1.1.6)$$

Para el modelo reducido la función de emisiones de carbono se define como $\bar{u} = K_p \bar{e}$. De acuerdo a [6] se tiene que el parámetro T_d , la temperatura promedio deseada para el sistema es $288.5^\circ K$ ó $15.5^\circ C$. La variable \bar{T} corresponde a la aproximación obtenida para la temperatura a través de las variables de estado \bar{A} y \bar{N} del sistema reducido definido en (5.1.1.6). La superficie que define a la ceroclina de la temperatura T del sistema (5.1.1.4) se encuentra dada por la función $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$. Por lo tanto la aproximación \bar{T} se define como:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \Psi(\bar{A}, \bar{N}) \\ &= \left(\frac{(k_\alpha s_1 + s_2 \bar{N})(k_C + \bar{A} - \bar{N})}{\sigma(k_\alpha + \bar{N})(k_C + \varphi_\infty \bar{A} - \varphi_\infty \bar{N})} \right)^{1/4} \end{aligned} \quad (5.1.1.7)$$

En términos de las variables de estado \bar{A} y \bar{N} del modelo reducido la función de emisión de carbono \bar{u} se define como:

$$\bar{u} = K_p(T_d - \Psi(\bar{A}, \bar{N})) \quad (5.1.1.8)$$

5.2. Análisis de los puntos de equilibrio.

5.2.1. Equilibrios para el modelo completo en lazo cerrado.

A diferencia del modelo planteado en el sistema en lazo abierto definido en (2.2.4.10), el modelo retro alimentado presenta puntos de equilibrio que pueden ser estudiados. Para el sistema enunciado en (5.1.1.4) la tasa de cambio del carbono total del planeta se define como una función $g_1(A, N, T)$, por lo que todo el sistema se puede expresar de manera simplificada como:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= g_1(A, N, T) \\ \dot{N} &= g_2(A, N, T) \\ k\dot{T} &= g_3(A, N, T) \end{aligned} \quad (5.2.1.1)$$

Al resolver de manera simultanea las ecuaciones no lineales definidas por el sistema (5.2.1.1) se obtienen los puntos de equilibrio de este sistema. Las superficies que definen las ceroquinas de N y de T ya fueron definidas en el capítulo 3.1. La superficie que define la ceroquina para A se encuentra definida por la expresión:

$$T_d - T = 0 \quad (5.2.1.2)$$

En el espacio fase $\{A, N, T\}$ la ecuación (5.2.1.2) corresponde a un plano paralelo al plano (A, N) . Resulta de interés obtener la curva generada por la intersección de las superficies que definen las ceroquinas de T y de A , tal como se realizó anteriormente para las ceroquinas de N y de T . Se define como $\vartheta(A, N)$ a la curva generada por todos los puntos del espacio fase que conforman la intersección entre las ceroquinas de T y de A en el sistema completo. En la figura 5.1 se muestra la intersección entre las superficies generadas por las ceroquinas de A y de T , en particular en la figura 5.2 se muestra la curva $\vartheta(A, T)$

circunscrita sobre la ceroclina de T . En la figura 5.3 se observa la intersección entre las curvas $\vartheta(A, N)$ y las curvas $w_i(N, T)$ con $i = 1, 2, 3$, definidas en el capítulo 3. Estas tres curvas corresponden a la intersección entre las superficies de las ceroclinas de N y T . La intersección de estas tres curvas con la curva $\vartheta(A, T)$ generan los tres puntos de equilibrio que existen en el sistema.

El primer punto de equilibrio esta dado por la intersección de las curvas $\vartheta(A, N)$ y la curva definida por $w_1(N, T)$, definida como la intersección de la ceroclina de T y el subconjunto de la ceroclina de N que se define como el plano (A, T) . Tal subconjunto corresponde a los elementos que se encuentran definidos por los equilibrios para los cuales $N^* = 0$. esta curva se puede obtener analíticamente utilizando la ecuación:

$$T^* = \left(\frac{s_1(k_c + A)}{\sigma(k_c + \varphi_\infty A)} \right)^{1/4} \quad (5.2.1.3)$$

Esta expresión fue definida anteriormente en la ecuación (3.2.1.5), en el capítulo 3. Al realizar la sustitución $T = T_d$ se puede despejar A para obtener la ecuación:

$$A_1^* = \frac{k_c(\sigma T_d^4 - s_1)}{(s_1 - \sigma \varphi_\infty T_d^4)} \quad (5.2.1.4)$$

Utilizando los parámetros definidos en la tabla 2.2 de la sección 2.3.2 del capítulo 2 en la ecuación (5.2.1.4) se obtiene que $A_1^* \approx 9,517.70$, por lo que el primer equilibrio se encuentra en el punto $(A_1^*, N_1^*, T_1^*)^T \approx (9,517.70, 0, 288.5)^T$. Los otros dos equilibrios corresponden a la intersección de las curvas $w_2(N, T)$ y $w_3(N, T)$ con $\vartheta(A, N)$ y se encuentran a través de métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales, en particular de la aplicación de una versión optimizada del método de *Newton-Raphson*.

Los otros dos puntos de equilibrio son $(A_2^*, N_2^*, T_2^*)^T \approx (3,248.60, 107.70, 288.5)^T$ y $(A_3^*, N_3^*, T_3^*)^T \approx (1,496.25, 830.00, 288.5)^T$. Para realizar un análisis de la estabilidad y determinar las regiones de atracción del sistema resulta conveniente utilizar el sistema reducido en el plano fase.

En el análisis del sistema realizado para $\dot{A} = 0$ la curvas $w_i(N, T)$ corresponden al conjunto de puntos de equilibrio estables o inestables al variar A como un parámetro. Aunque los puntos que forman la curva son los mismos, esto no implica que se conserve la propiedad de estabilidad en el sistema de lazo cerrado.

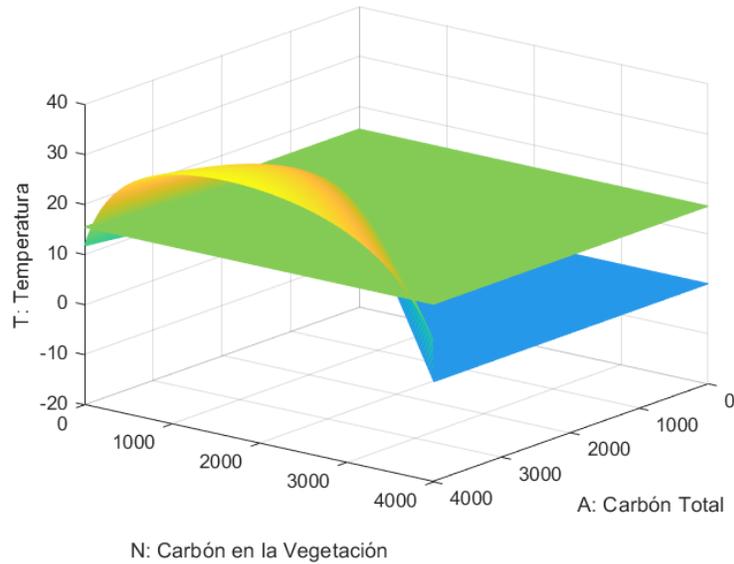


Figura 5.1: Intersección entre las ceroclinas de T y A .

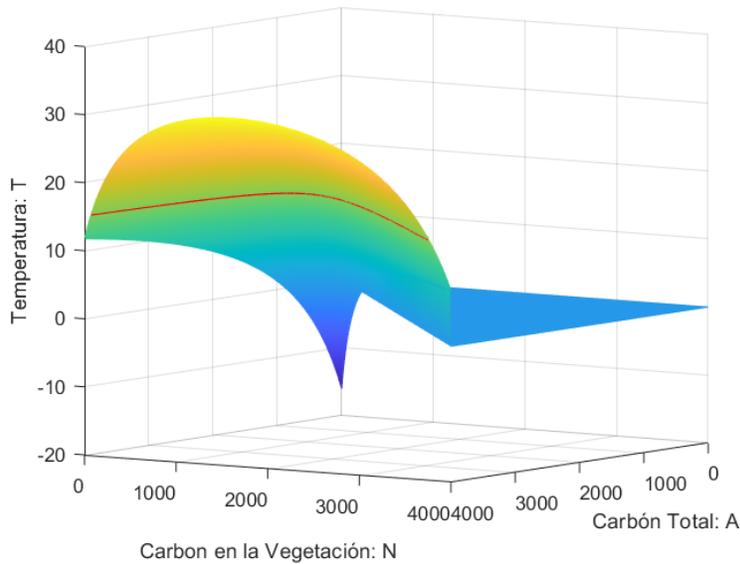


Figura 5.2: Curva $\vartheta(A, T)$ circunscrita sobre la ceroclina de T

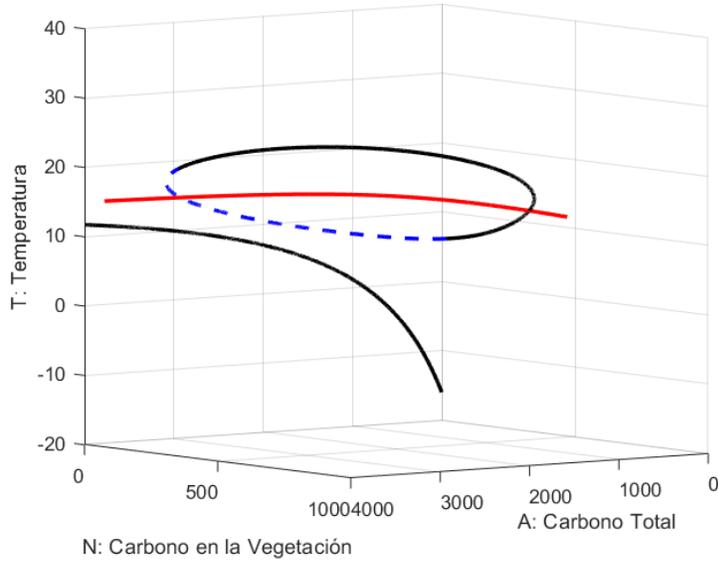


Figura 5.3: Intersección entre la curva $\vartheta(A, T)$ (rojo sólido) y las curvas w_1, w_3 (negro sólido) y w_2 (azul punteado).

5.2.2. Equilibrios para el modelo reducido en lazo cerrado.

Utilizando las propiedades derivadas de la diferencia en las escalas de tiempo del modelo (5.2.1.1), se utilizará el modelo reducido de la ecuación (5.1.1.6) para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio obtenidos anteriormente. Como se mencionó con anterioridad existe una equivalencia topológica entre el semi plano definido por $A \geq N$ en el plano (A, N) y la superficie $\Psi(A, N)$. Este enfoque resulta útil porque permite visualizar en el semi plano los puntos de equilibrio del sistema de tres dimensiones. En el sistema reducido se conservan las propiedades del sistema completo, en particular se conserva la estabilidad de estos puntos de equilibrio. Expresando el sistema reducido como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{A}} &= \bar{g}_1(\bar{A}, \bar{N}) \\ \dot{\bar{N}} &= \bar{g}_2(\bar{A}, \bar{N})\end{aligned}\tag{5.2.2.1}$$

donde las funciones \bar{g}_1 y \bar{g}_2 se definen como en el sistema (5.1.1.6). Se tiene que la ceroclina de \bar{N} se encuentra dada por la curva formada por las raíces de \bar{N} de la función $\bar{g}_2(\bar{A}, \bar{N})$ al variar a \bar{A} como un parámetro. esta ceroclina ya fue obtenida en la sección (4.2.2). Para la función $\bar{g}_1(\bar{A}, \bar{N})$ se tiene la curva que corresponde a la ceroclina de \bar{A} esta formada por las raíces de \bar{A} al variar \bar{N} como un parámetro.

La curva de la figura 5.4 esta dada por las raíces de la ecuación $T_d - \Psi(\bar{A}, \bar{N}) = 0$, para \bar{A} al variar \bar{N} como un parámetro libre. En la figura 5.5 se observan las curvas que corresponden a las ceroquinas del sistema reducido circunscritas sobre la ceroquina de T en el sistema completo. Los tres puntos de equilibrio se encuentran a través de la aplicación del método de *Newton-Raphson*. Los puntos de equilibrio son $(\bar{A}_1^*, \bar{N}_1^*)^T \approx (9, 517.70, 0)^T$, $(\bar{A}_2^*, \bar{N}_2^*)^T \approx (3, 248.60, 107.70)^T$ y $(\bar{A}_3^*, \bar{N}_3^*)^T \approx (1, 496.25, 830.00)^T$, cada equilibrio en el plano corresponde a un equilibrio en el espacio fase.

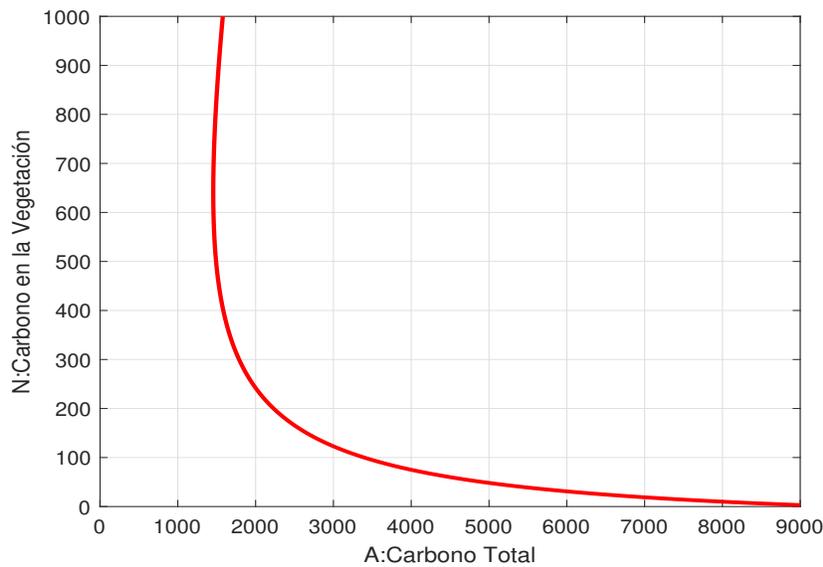


Figura 5.4: Ceroquina para \bar{A} en el sistema Reducido.

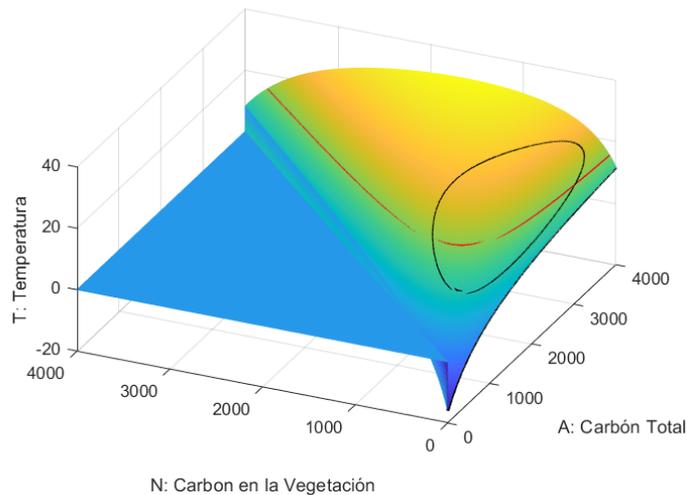


Figura 5.5: ceroquina para T . Intersección de curvas $\vartheta(A, N)$ y $w_i(N, T)$ con $i = 1, 2, 3$.

En la figura 5.6 se observan las ceroclinas del sistema reducido en lazo cerrado. Para conservar la escala solo se muestran 2 puntos de equilibrios.

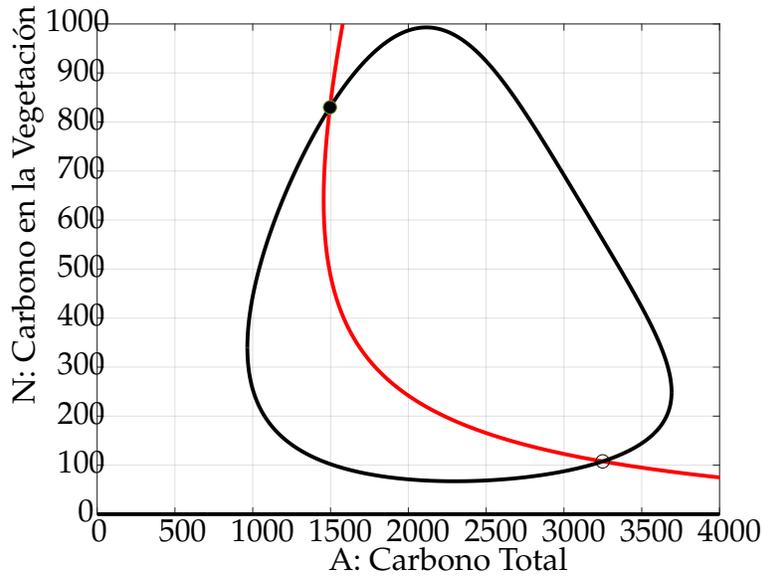


Figura 5.6: ceroclinas para A y N en el sistema reducido en lazo cerrado.

5.2.3. Análisis de Equilibrios para el Sistema en lazo Cerrado.

Definiendo el sistema reducido como:

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(\bar{A}, \bar{N}) &= K_p(T_d - \Psi(\bar{A}, \bar{N})) \\ \bar{g}_2(\bar{A}, \bar{N}) &= P_m g(\Psi(\bar{A}, \bar{N})) G_{\bar{N}}(\bar{A}, \bar{N}) - m\bar{N}\end{aligned}\quad (5.2.3.1)$$

Como herramienta para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio y las cuencas de atracción se utiliza el **Teorema de Hartman–Grobman** [55]:

Considere un sistema que evoluciona en el tiempo con el estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ que satisfice la ecuación diferencial $dx/dt = f(x)$ con $x(0) = x_0$ para un mapa suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Considere que el mapa tiene un punto de equilibrio hiperbólico $x^* \in \mathbb{R}^n$: es decir $f(x^*) = 0$ y la *matriz Jacobiana* $J = [\partial f_i / \partial x_j]$ del equilibrio x^* no tiene valor propio con parte real igual a cero. Entonces existe una vecindad M del equilibrio x^* y un homeomorfismo $h : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h(x^*) = 0$ y tal que en la vecindad M del equilibrio x^* el flujo de $dx/dt = f(x)$ es topológicamente conjugado por el mapa continuo $X = h(x)$ al flujo de su linealización $dX/dt = JX$.

Por lo que para determinar la estabilidad de los tres puntos de equilibrio encontrados en la sección (5.2.2) se obtiene la matriz jacobiana del sistema (5.2.3.1):

$$J(\bar{A}, \bar{N}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \bar{A}} & \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \bar{N}} \\ \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \bar{A}} & \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \bar{N}} \end{pmatrix}$$

Con el objetivo de determinar la estabilidad de los tres puntos de equilibrio (A_i^*, N_i^*) para $i = 1, 2, 3$ se evalúan estos puntos en la matriz Jacobiana J . Para cada punto de equilibrio se realiza esta evaluación y se deben determinar los valores propios de esta matriz para cada equilibrio. Se tiene que si estos equilibrios se pueden clasificar como hiperbólicos es posible determinar su estabilidad. Para expresar la matriz Jacobiana de manera explícita de las funciones del sistema (5.2.3.1), se considera la definición dada anteriormente para la función $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$:

$$\Psi(\bar{A}, \bar{N}) = \left(\frac{\Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\sigma} \right)^{1/4} \quad (5.2.3.2)$$

Para determinar las derivadas parciales de (5.2.3.2) resulta conveniente reescribir la función $\Phi(\bar{A}, \bar{N})$ como:

$$\Phi(\bar{A}, \bar{N}) = b_1 \frac{(a_1 + \bar{N})(k_c + \bar{A} - \bar{N})}{(k_\alpha + \bar{N})(a_2 + \bar{A} - \bar{N})} \quad (5.2.3.3)$$

Donde se definen los parámetros:

$$a_1 = \frac{s_1 k_\alpha}{s_2}, \quad a_2 = \frac{k_c}{\varphi_\infty}, \quad b_1 = \frac{s_2}{\varphi_\infty}$$

Utilizando esta sustitución, se tiene que las derivadas parciales de la función $\Phi(\bar{A}, \bar{N})$ con respecto a \bar{A} y \bar{N} son:

$$\frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{A}} = b_1 \frac{(a_1 + \bar{N})(a_2 - k_c)}{(k_\alpha + \bar{N})(a_2 + \bar{A} - \bar{N})^2} \quad (5.2.3.4)$$

$$\frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{N}} = b_1 \frac{(k_\alpha + \bar{N})(a_2 + \bar{A} - \bar{N})(k_c + \bar{A} - 2\bar{N} - a_1) - (a_1 + \bar{N})(k_c + \bar{A} - \bar{N})(a_2 - k_\alpha + \bar{A} - 2\bar{N})}{(k_\alpha + \bar{N})^2 (a_2 + \bar{A} - \bar{N})^2} \quad (5.2.3.5)$$

Entonces, las derivadas parciales de la función $\Psi(\bar{A}, \bar{N})$ con respecto a \bar{A} y \bar{N} son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{A}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\sigma} \right)^{-3/4} \frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{A}} \\ \frac{\partial \Psi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{N}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\sigma} \right)^{-3/4} \frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{N}}\end{aligned}\quad (5.2.3.6)$$

Utilizando las expresiones enunciadas en (5.2.3.6), se tiene que las derivadas parciales de la función $\bar{g}_1(\bar{A}, \bar{N})$ son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \bar{A}} &= -\frac{K_p}{4} \left(\frac{\Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\sigma} \right)^{-3/4} \frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{A}} \\ \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \bar{N}} &= -\frac{K_p}{4} \left(\frac{\Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\sigma} \right)^{-3/4} \frac{\partial \Phi(\bar{A}, \bar{N})}{\partial \bar{N}}\end{aligned}\quad (5.2.3.7)$$

Las derivadas parciales de la función $\bar{g}_2(\bar{A}, \bar{N})$ se encuentran de manera similar. Una vez que se encontró la matriz Jacobiana $J(\bar{A}, \bar{N})$, se realiza la sustitución en cada uno de los tres puntos de equilibrio:

- Para el punto de equilibrio $(A_1^*, N_1^*) = (9, 517.70, 0)$, se tiene:

$$J(9, 517.70, 0) = \begin{pmatrix} -7.63 \times 10^{-8} & -1.39 \times 10^{-8} \\ 0 & -0.0518 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz $J(A_1^*, N_1^*)$ son $\lambda_1 \approx -7.63 \times 10^{-8}$ y $\lambda_2 \approx -0.0518$. Dado que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ se tiene que (A_1^*, N_1^*) es un punto de equilibrio estable. Además $\Im(\lambda_1) = 0$ y $\Im(\lambda_2) = 0$ y el punto de equilibrio (A_1^*, N_1^*) se clasifica como un nodo estable. Los vectores propios normalizados asociados a los valores propios para este punto de equilibrio son:

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} -2.70 \times 10^{-7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Para el punto de equilibrio $(A_2^*, N_2^*) = (3, 248.60, 107.70)$, se tiene:

$$J(3, 248.60, 107.70) = \begin{pmatrix} -4.93 \times 10^{-10} & -8.9 \times 10^{-8} \\ -0.0026 & -0.0027 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 \approx 7.80 \times 10^{-8}$ y $\lambda_2 \approx -0.0027$. Dado que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, se tiene que (A_2^*, N_2^*) es un punto de equilibrio inestable. Además $\Im(\lambda_1) = 0$ y $\Im(\lambda_2) = 0$ y el punto de equilibrio (A_2^*, N_2^*) se clasifica como un punto silla. Los vectores propios asociados a los valores propios normalizados para este punto de equilibrio son:

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} 0.73 \\ -0.68 \end{pmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} -3.20 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Para el punto de equilibrio $(A_3^*, N_3^*) = (1, 496.25, 830.00)$, se tiene:

$$J(1, 496.25, 830.00) = \begin{pmatrix} -3.10 \times 10^{-8} & 1.19 \times 10^{-8} \\ 0.0109 & -0.0997 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 \approx -2.97 \times 10^{-8}$ y $\lambda_2 \approx -0.099$. Dado que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, se tiene que (A_3^*, N_3^*) es un punto de equilibrio estable. Además $\Im(\lambda_1) = 0$ y $\Im(\lambda_2) = 0$ y el punto de equilibrio (A_3^*, N_3^*) se clasifica como un nodo estable. Los vectores propios asociados a los valores propios normalizados para este punto de equilibrio son:

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0.10 \end{pmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} -1.19 \times 10^{-7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Todos los puntos de equilibrio del sistema se consideran hiperbólicos porque al evaluar los *i-esimos* puntos de equilibrio, la matriz jacobiana $J(A_i^*, N_i^*)$ no posee valores propios en el eje imaginario. Para determinar las cuencas de atracción de los puntos de equilibrio estables (A_1^*, N_1^*) y (A_3^*, N_3^*) se calculan las variedades locales estables e inestables del punto de equilibrio inestable (A_2^*, N_2^*) . Por lo tanto resulta necesario enunciar las siguientes definiciones y características de los sistemas no lineales. Los valores propios asociados a los puntos de equilibrio generan subespacios invariantes:

- El subespacio estable, $E^s = \text{gen} \{v^1, \dots, v^{n_s}\}$
- El subespacio inestable, $E^u = \text{gen} \{u^1, \dots, u^{n_u}\}$

Denotando el flujo generado por (5.1.1.6) como $\gamma_t(\cdot)$; entonces se pueden definir las variedades estables e inestables para un punto de equilibrio hiperbólico (A^*, N^*) utilizando los puntos sobre las variedades locales (estables e inestables) como condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} W^u(A^*, N^*) &= \bigcup_{t \leq 0} \gamma_t(W_{loc}^u(A^*, N^*)), \\ W^s(A^*, N^*) &= \bigcup_{t \geq 0} \gamma_t(W_{loc}^s(A^*, N^*)) \end{aligned} \quad (5.2.3.8)$$

$W^u(A^*, N^*)$ y $W^s(A^*, N^*)$ son denominados las variedades inestables y estables, respectivamente del punto de equilibrio (A^*, N^*) . Suponiendo que la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ tiene un punto de equilibrio hiperbólico \bar{x} , entonces las superficies n - k -dimensionales $W_{loc}^s(\bar{x})$ y $W_{loc}^u(\bar{x})$ son tangentes y son de las mismas dimensiones a los espacios vectoriales E^s y E^u del sistema linealizado en una vecindad cercana al equilibrio localizado en \bar{x} [53].

Para el punto de equilibrio inestable (A_2^*, N_2^*) los subespacios inestables y estables para la linealización del sistema son:

$$E^u \approx \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0.73 \\ -0.68 \end{pmatrix} \right\}, \quad E^s \approx \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -3.20 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se tiene que las órbitas de los puntos $W_{loc}^u(A_2^*, N_2^*)$ se aproximan al punto de equilibrio (A_2^*, N_2^*) asintóticamente en tiempo negativo (es decir cuando $t \rightarrow -\infty$) y las orbitas de los puntos $W_{loc}^s(A_2^*, N_2^*)$ se aproximan al punto de equilibrio (A_2^*, N_2^*) asintóticamente en tiempo positivo (es decir cuando $t \rightarrow +\infty$). Para determinar la variedad estable $W_{loc}^s(A_2^*, N_2^*)$ de (A_2^*, N_2^*) se integra en tiempo negativo ($t \rightarrow -\infty$) tomando como condición inicial $(A_2^*, N_2^*) + \epsilon(0, 1)^T$ donde ϵ es un escalar positivo. La variedad $W_{loc}^s(A_2^*, N_2^*)$ mostrada en la figura 5.7, divide las cuencas de atracción para los puntos de equilibrio estables (A_1^*, N_1^*) y (A_3^*, N_3^*) se encuentra representada por la trayectoria roja que se sobrepone a la ceroclina de N en una región del plano fase. La región del plano fase formada por el conjunto de pares ordenados (A, N) tal que $N > A$ el modelo no se encuentra definido. Por lo que la recta $A = N$, mostrada en rojo sólido de la figura 5.7 divide el plano en las regiones donde el sistema no está definido y donde está definido.

Es posible observar una discontinuidad en la trayectoria solución obtenida para la variedad estable del punto de equilibrio inestable. Tal discontinuidad se presenta cuando la trayectoria generada presenta un escape en tiempo finito, al acercarse a la región del plano fase donde no se encuentra definido el modelo. Es posible realizar un análisis sencillo pero efectivo que genere información acerca del comportamiento cualitativo del sistema definido en (5.1.1.6) a través de los puntos de equilibrio obtenidos en esta sección. El análisis de estos puntos de equilibrio puede ser trasladado a la interpretación física del sistema:

- El punto de equilibrio estable localizado en $(\bar{A}_1^*, \bar{N}_1^*)^T \approx (9517.70, 0)^T$, puede clasificarse como indeseable porque implica la extinción de la biota en el sistema, $\bar{N} = 0$. Al realizar una interpretación física, este equilibrio podría clasificarse como un desierto en el que no existe una componente biológica, es decir $\bar{N} = 0$. De la intersección de las ceroclinas de \bar{N} y \bar{A} y considerando la función de emisiones planteada originalmente en el modelo, se tiene que el estado final para la temperatura T del sistema coincide con el valor propuesto para T_d .
- El punto de equilibrio estable localizado en $(\bar{A}_3^*, \bar{N}_3^*)^T \approx (1496.25, 830)^T$ refleja condiciones de sobre vivencia para la biota en el sistema, $\bar{N} > 0$. Al realizar una interpretación física, este punto de equilibrio puede clasificarse como un ecosistema cálido donde el carbono en la biota y el carbono en la atmósfera se encuentran en equilibrio y la temperatura del sistema se mantiene estable.

Con respecto a las cuencas de atracción para los puntos de equilibrio estable se tiene que, el conjunto de condiciones iniciales (\bar{A}_0, \bar{N}_0) , tal que estos puntos se encuentren dentro de la región donde se encuentra definido el modelo y dentro de la cuenca de atracción generada por las trayectorias de la variedad estable del punto de equilibrio inestable convergerán al equilibrio que se ha clasificado anteriormente como deseable. esta región se encuentra conformada por las condiciones iniciales que se encuentran arriba de esta variedad. Analizando los conceptos presentados durante el desarrollo del capítulo desde una perspectiva práctica, es posible concluir que incluso estudiando un modelo altamente idealizado como el planteado en el sistema (5.1.1.4), los resultados presentados pueden interpretarse principalmente en términos de los dos equilibrios estables obtenidos para el modelo.

El punto de equilibrio $(\bar{A}_1^*, \bar{N}_1^*)^T$, resulta indeseable para la biota en el sistema, por lo que resulta importante conocer las regiones que determinan las cuencas de atracción de ambos puntos de equilibrio definidos para el modelo en lazo cerrado (5.1.1.4). Como se mencionó en las secciones anteriores, cualquier trayectoria que comience en el conjunto de condiciones iniciales $(\bar{A}_0^*, \bar{N}_0^*)$ que pertenezca a la cuenca de atracción del punto de equilibrio estable $(\bar{A}_1^*, 0)$ será atraída hacia este equilibrio. En el próximo capítulo se estudia el cambio que puede presentar una trayectoria, al modificar estructuralmente el sistema cuando se realiza una variación de uno o múltiples parámetros que conforman las ecuaciones diferenciales que definen el modelo. Este planteamiento resulta de particular interés, pues es la base del estudio de las bifurcaciones del sistema climático y por consiguiente de sus puntos de inflexión o *tipping points*.

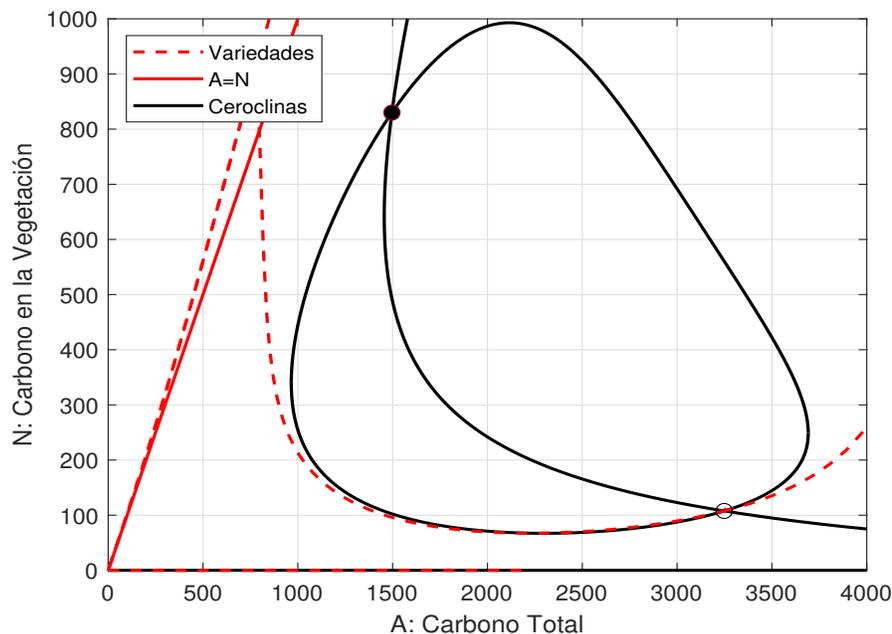


Figura 5.7: Variedades Estables e Inestables.

Capítulo 6

Simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado.

6.1. Planteamiento.

En esta sección se presentan tres alternativas distintas para modelos de emisión de carbono en la atmósfera. El primer modelo consiste en utilizar el concepto de cero emisiones, planteado en el trabajo presentado por [7] y desarrollado en parte en el capítulo 3. El segundo modelo propuesto consiste en la función proporcional de emisiones presentada en la sección 5.1.1, particularmente en la ecuación (5.1.1.3). Finalmente, el tercer modelo de emisión se plantea como una combinación de los dos planteamientos anteriores. Para cada modelo se propone investigar tanto su viabilidad como la posibilidad de alcanzar un equilibrio estable que resulte favorable para el desarrollo de la vegetación N . Para realizar este análisis, en la primera sección se presentan: la trayectoria del sistema en el espacio fase $\{A, N, T\}$ y la trayectoria generada por la aproximación del sistema reducido, la trayectoria en el plano fase $\{A, N\}$, las series de tiempo de la función de emisiones u y de la temperatura del sistema T . Se presentan los resultados utilizando las condiciones iniciales $(A_0, N_0, T_0)^T = (1800, 450, 15)^T$ con un tiempo de simulación de 1000 yr . Debido al modelo propuesto, donde $A = C - N$ se tiene que el valor del carbono en la atmósfera es $C = 1350$. En la segunda sección se presentan los planos fases del modelo reducido para los tres esquemas utilizando múltiples condiciones iniciales, para visualizar las cuencas de atracción de cada uno de los puntos o conjuntos de equilibrio. Finalmente, en la tercera sección se desarrolla un análisis de bifurcaciones para el sistema en lazo cerrado, utilizando el modelo proporcional de emisiones de la ecuación (5.1.1.6). Este análisis se realiza

con el objetivo de localizar posibles puntos de inflexión ó *tipping points* para las variables de estado en el sistema climático.

6.1.1. Modelo de Cero Emisiones.

El planteamiento de cero emisiones se desarrolló con detalle en el capítulo 3. El espacio fase es similar al de la figura 3.10b, la trayectoria solución esta definida en el plano $\{N, T\}$ definido para $A_0 = 1800$ y $\dot{A} = 0$. Se muestra solo el espacio fase y la serie de tiempo para la temperatura, debido a que la trayectoria del sistema reducido y la serie de tiempo de u no presentan información. El sistema alcanza el equilibrio estable $(A_s, N_s, T_s)^T = (1800, 948.12, 18.62)^T$ que corresponde al punto de equilibrio estable del sistema simplificado cuando el carbono total del sistema se conserva, por lo que la trayectoria solución se mantiene en el plano $A = 1800$ del espacio fase. La serie de tiempo para la temperatura solo se muestra hasta $t = 100$ yr, período en el que T alcanza su estado final.

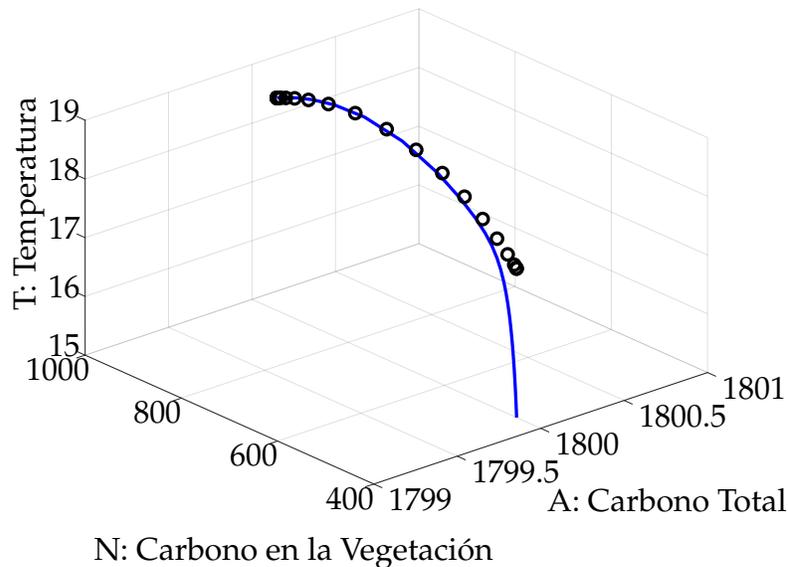


Figura 6.1: Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).

De las figuras 6.1 y 6.2 se observa que existe un transitorio en el que el modelo completo alcanza al modelo aproximado. Como se definió $\dot{A} = 0$, las trayectorias tanto del modelo aproximado, como la del modelo reducido se encuentran contenidas en el plano $A = 1800$.

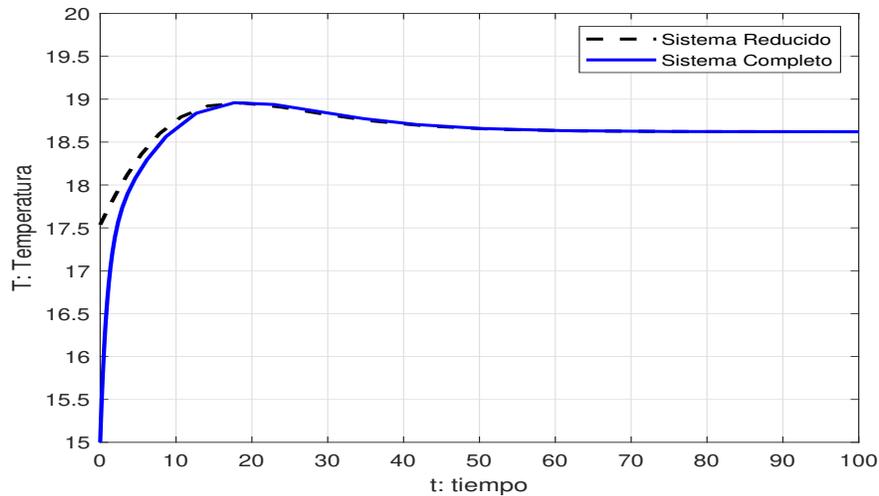


Figura 6.2: Serie de tiempo de la temperatura.

6.1.2. Modelo proporcional de emisiones.

Para realizar las simulaciones numéricas utilizando el modelo proporcional de emisiones se utiliza:

$$u_p = k_p(T_d - T) \quad (6.1.2.1)$$

Se define el valor numérico de los parámetros del sistema con los valores $k_p = 0.5$ y $T_d = 288.5 \text{ }^\circ\text{K}$ ó $15.5 \text{ }^\circ\text{C}$. En las figuras 6.3 y 6.4 se presentan las trayectorias para el sistema completo y para el sistema reducido. En las figuras 6.5a y 6.5b se presenta la serie de tiempo para T y para la función u .

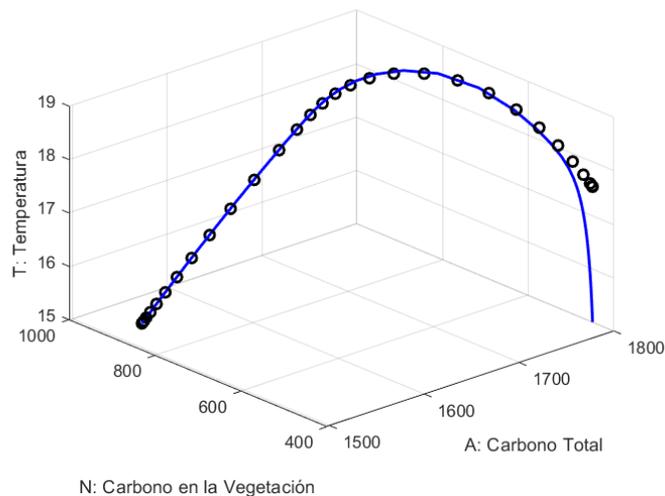


Figura 6.3: Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).

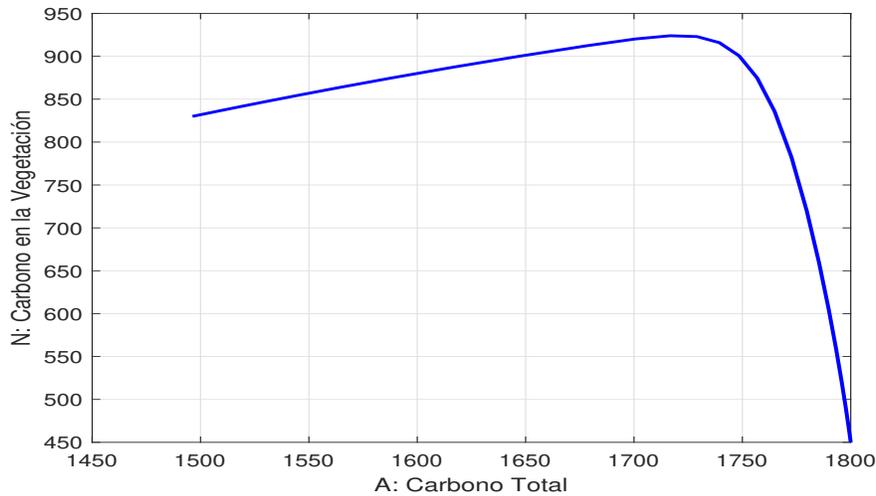
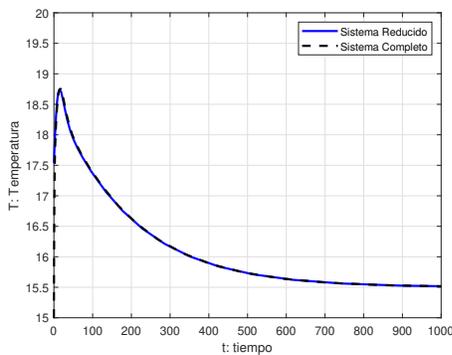
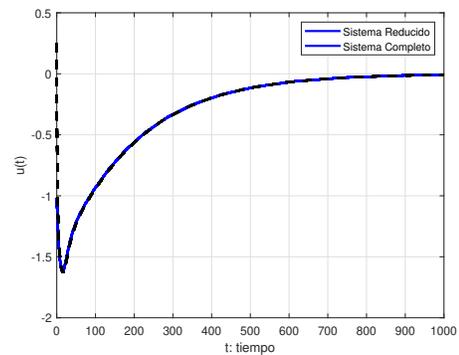


Figura 6.4: Plano fase del sistema reducido para el modelo proporcional de emisiones.

El sistema alcanza el equilibrio estable $(A_s, N_s, T_s)^T \approx (1496.30, 830, 15.5)^T$, que corresponde al mismo punto de equilibrio estable que se definió previamente.



(a) Serie de tiempo para la temperatura.



(b) Función u .

Figura 6.5: Simulación del sistema con u_p .

De la figura 6.5b es posible concluir que la función de emisiones propuesta en la ecuación (6.1.2.1) no se encuentra en el conjunto de funciones admisibles debido a que u alcanza valores menores a 0, lo que contradice el planteamiento inicial del problema, toda función de emisión debe de permanecer positiva para todo t debido a que no es posible extraer carbono de la atmósfera.

6.1.3. Modelo saturado de emisiones.

Tomando en cuenta los resultados obtenidos para los dos primeros modelos propuestos, se propone la siguiente función de saturación para modelar las emisiones de carbono como:

$$u_s = \text{máx} \{0, k_p(T_d - T)\} \quad (6.1.3.1)$$

Este modelo de emisiones simple esta basado en los dos esquemas propuestos con anterioridad. Para plantear la dependencia de las condiciones iniciales en el modelo saturado de emisiones de la ecuación (6.1.3.1) se utilizarán la condiciones iniciales $(A_1, N_1, T_1)^T = (1300, 1000, 15)^T$, además de las condiciones iniciales $(A_0, N_0, T_0)^T = (1800, 450, 15)^T$ propuestas en la introducción del capítulo.

Para las condiciones iniciales $(A_0, N_0, T_0)^T = (1800, 450, 15)^T$, utilizadas en la simulación de los otros dos esquemas de emisión, el sistema alcanza el punto de equilibrio estable en $(A_{s_0}, N_{s_0}, T_{s_0})^T \approx (1800, 948, 18.60)^T$ que corresponde al conjunto de equilibrios formado por la ceroclina de N y no al equilibrio estable alcanzado por el modelo de emisiones u_p . La función de emisiones u es diferente de 0 para un periodo de tiempo muy corto, que corresponde al tiempo en que la trayectoria cruza la ceroclina de A . En cambio para el otro conjunto de condiciones iniciales, $(A_1, N_1, T_1)^T = (1300, 1000, 15)^T$ el sistema alcanza el equilibrio estable $(A_{s_1}, N_{s_1}, T_{s_1})^T \approx (1800, 948, 18.60)^T$, el sistema alcanza el equilibrio estable que fue planteado inicialmente y que es alcanzado por el modelo proporcional de emisiones. Analizando la figura 6.6, se concluye que el equilibrio al que converge el sistema, aplicando el modelo saturado de emisiones depende de las condiciones iniciales propuestas. La función de emisiones u_s se muestra la figura 6.7b. Para esta función se tiene que las emisiones alcanzan el 0 en un periodo aproximado de 700 *yr*. Para observar la dependencia del modelo planteado en (6.1.3.1) resulta más conveniente analizar los planos fase mostrados en la siguiente sección.

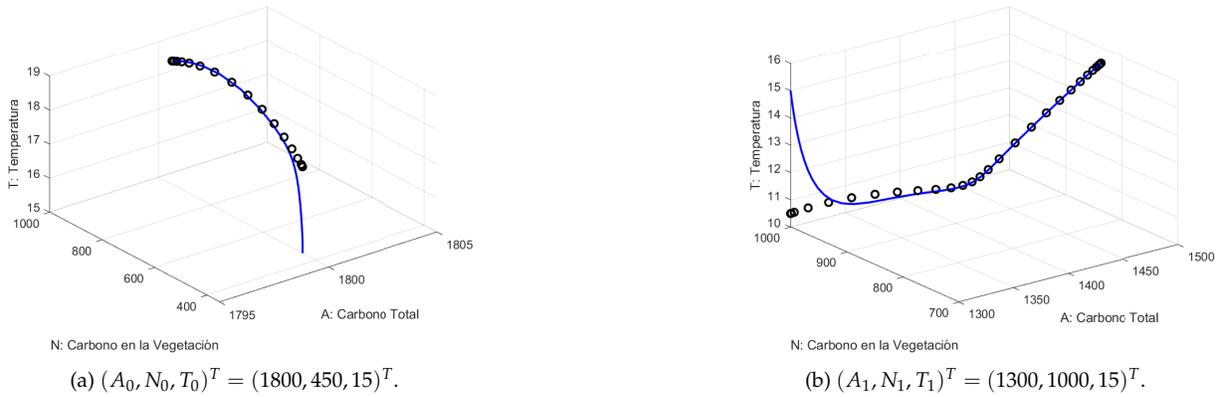


Figura 6.6: Trayectorias solución para el modelo completo (azul) y para el modelo aproximado (negro).

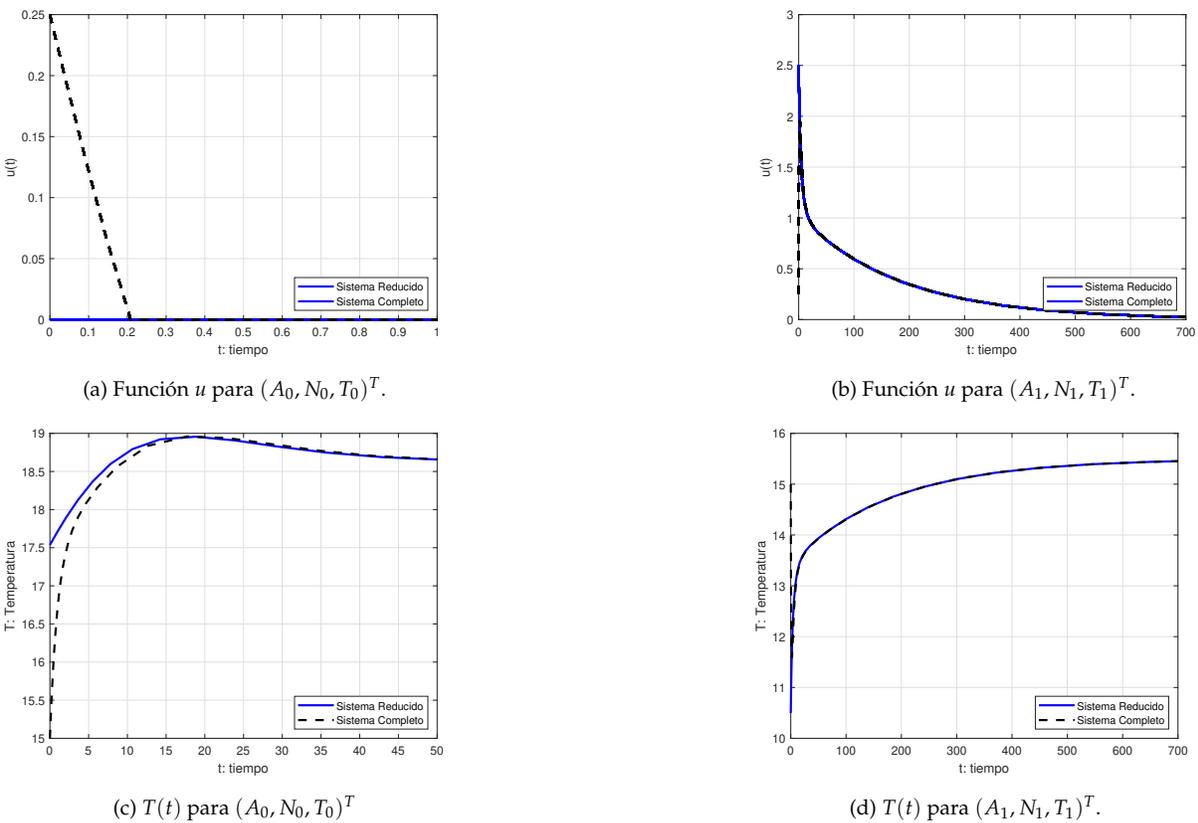


Figura 6.7: Series de tiempo para el modelo saturado.

6.2. Planos fase de los modelos propuestos.

Para explicar el comportamiento presentado por el modelo saturado, en esta sección se propone realizar un análisis de las trayectorias solución de los planos fase de los tres modelos de emisión propuestos, utilizando el mismo conjunto de condiciones iniciales. Como la función de emisiones se encuentra definida para \dot{A} , la restricción impuesta so-

bre u afecta solo a la componente \bar{A} de todos los modelos. En cambio, la componente \bar{N} se puede desplazar libremente en la región donde se encuentra definido el modelo en el plano fase. Esto implica que la posición de la condición inicial con respecto a la ceroclina de \bar{A} afecte el signo de u . En la figura 6.8 se muestra el plano fase del modelo de cero emisiones. Es fácil percatarse que como se definió $\dot{\bar{A}} = 0$ para este modelo de emisiones, las trayectorias generadas, solo cambian para la componente vertical del plano fase es decir \bar{N} y la componente de horizontal de las trayectorias se mantiene como \bar{A}_0 para todo valor de \bar{N} . Dependiendo de la condición inicial (\bar{A}_0, \bar{N}_0) para cualquier trayectoria en este plano fase, el sistema alcanza uno de los dos equilibrios estables planteados anteriormente, el equilibrio definido para $\bar{N} = 0$ y un equilibrio con \bar{N} correspondiente a la rama estable del conjunto de equilibrios definido para la ceroclina de \bar{N} . Los resultados obtenidos para este modelo de emisiones, son los mismos que los obtenidos en el modelo original propuesto el artículo [7], solo visualizando el plano fase $\{\bar{A}, \bar{N}\}$ en lugar del plano fase $\{N, T\}$. Dada cualquier condición inicial A , lo que se observa en el plano fase es que el modelo puede converger a un conjunto de equilibrios en el que la biota del planeta se extingue $\bar{N} = 0$ ó en el que existe la biota en el sistema $\bar{N} = 0$.

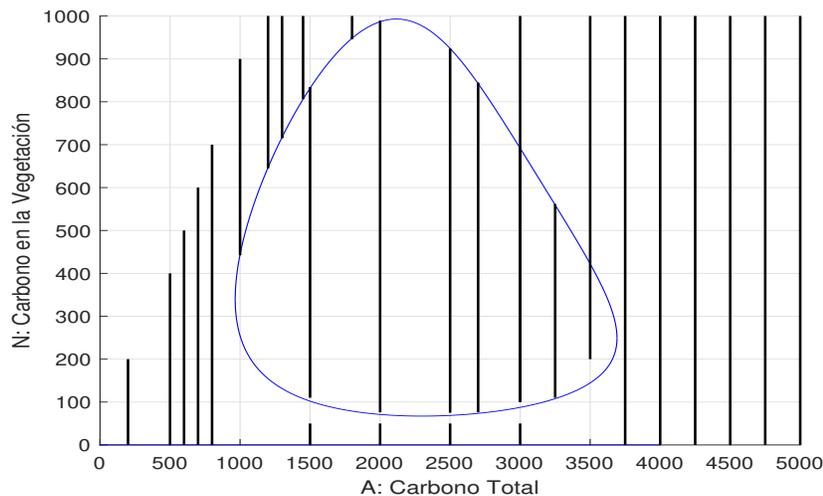


Figura 6.8: Plano fase para $\dot{A} = 0$.
Ceroclinas (en azul) y
trayectorias solución (en negro).

Las cuencas de atracción para el modelo proporcional de emisiones se estudiaron en detalle en el capítulo 5. Sin embargo, es posible obtener información adicional al analizar

el plano del modelo utilizando las ceroclinas de las variables de estado como aparece en la figura 6.9. Debido a la definición de la función de emisiones u , se tiene que la ceroclina de \bar{A} divide al plano fase en dos regiones. De manera más específica, para cualquier condición inicial (\bar{A}_0, \bar{N}_0) que se encuentran por debajo y a la izquierda de la ceroclina de \bar{A} (región *I* en la figura), el valor obtenido para la función u será positivo por que las trayectorias del sistema se mueven hacia un equilibrio estable cuya componente en \bar{A}_s es mayor al valor \bar{A}_0 de la condición inicial. Por otro lado, el conjunto de condiciones iniciales (\bar{A}_0, \bar{N}_0) que se encuentren por arriba y a la derecha de la ceroclina de \bar{A} (región *II*) generaran trayectorias asociadas a funciones de emisión u negativas por que la componente \bar{A}_s del punto de equilibrio estable es menor a la componente \bar{A}_0 de la condición inicial. Esta relación espacial se cumple independientemente de la cuenca de atracción donde se encuentra la condición inicial (\bar{A}_0, \bar{N}_0) . Esto implica que aunque al proponer el modelo proporcional de emisiones, el modelo alcanza el punto de equilibrio propuesto inicialmente, este modelo no se válido debido a que para una región considerable del plano fase sería necesario plantear que es posible retirar carbono de la atmósfera.

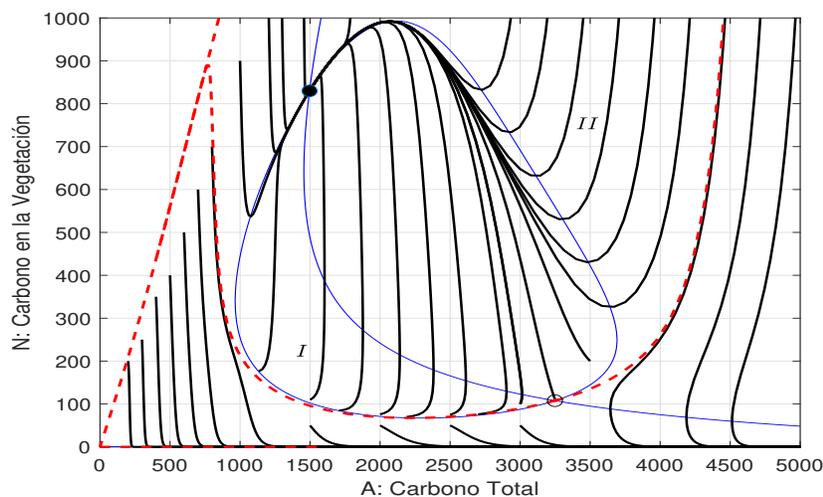


Figura 6.9: Plano fase para el modelo proporcional.
Ceroclinas (en azul) y trayectorias solución (en negro).

Para analizar el plano fase del modelo saturado de la figura 6.10, resulta de utilidad definir las mismas regiones que se definieron para el plano fase del modelo proporcional de emisiones. Debido al planteamiento del modelo saturado en la ecuación (6.1.3.1), se

tiene que dependiendo de la región donde se encuentre la trayectoria, el modelo se puede comportar como el modelo de cero emisiones $\dot{A} = 0$ o como el modelo proporcional de emisiones de la ecuación (5.1.1.8). El cambio en el comportamiento del modelo se manifiesta cuando las trayectorias cruzan la ceroclina de \bar{A} . El conjunto de condiciones iniciales (\bar{A}_0, \bar{N}_0) que se encuentren en la región *I* y no cruce por la ceroclina de \bar{A} , generaran trayectorias iguales a las presentadas por el modelo proporcional de emisiones y convergerán al punto de equilibrio estable (\bar{A}_s, \bar{N}_s) al que converge el modelo proporcional. En cambio, el conjunto de condiciones iniciales que se encuentren en la región *II* y no crucen por la ceroclina de \bar{A} , generaran trayectorias iguales a las presentadas por el modelo de cero emisiones y convergerán a la rama de equilibrios estables de la ceroclina de N . Una trayectoria que cruce la ceroclina se comportará dependiendo de su ubicación como el modelo de cero emisiones o como el modelo proporcional de emisiones. Desde una perspectiva practica esto implica que el comportamiento del modelo saturado de emisiones es dependiente de la condición inicial planteada. Además, utilizando este planteamiento se tiene que el modelo puede alcanzar cualquier punto de equilibrio estable (\bar{A}_s, \bar{N}_s) que pertenezca a la ceroclina de \bar{N} . Además de acuerdo a lo planteado en la simulación, solo definiendo la función de emisión como $u = 0$ es posible alcanzar algún equilibrio estable para $N > 0$.

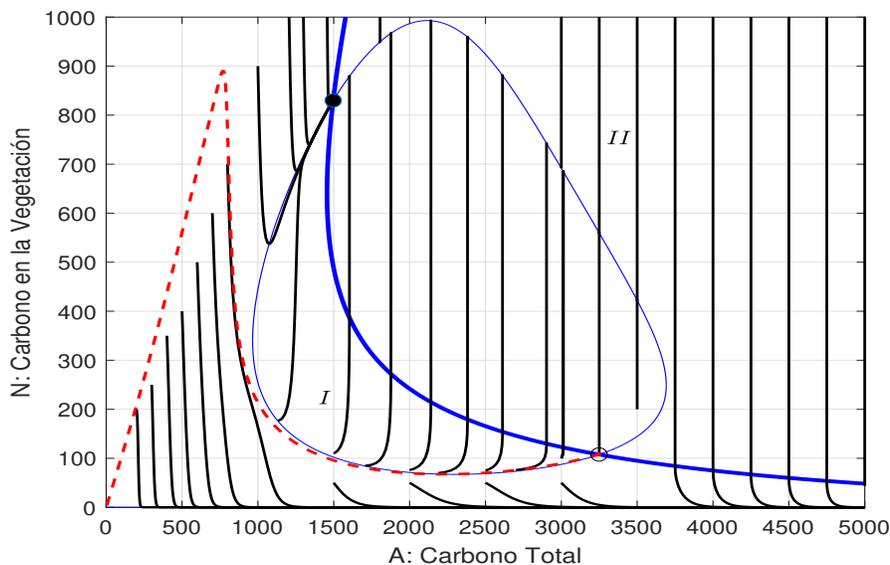


Figura 6.10: Plano fase para el modelo saturado.
Ceroclinas (en azul) y trayectorias solución (en negro).

6.3. Análisis de bifurcaciones.

La ecuación (5.1.1.5) del capítulo 5 se definió como un esquema propuesto para modelar las emisiones antropogénicas. Para definir este esquema proporcional resulta relevante definir y asignar valores numéricos a los parámetros k_p y T_d que representan un factor de escalamiento de emisiones y la temperatura deseada para el sistema, respectivamente. Como se mencionó con anterioridad el valor numérico propuesto para T_d corresponde a una de las metas principales planteadas por el IPCC en [6]. Sin embargo puede resultar relevante variar el valor numérico del parámetro T_d para modelar las emisiones de carbono antropogénicas a través de planteamientos distintos. En la figura 6.11 se muestran las curvas de las ceroclinas de A obtenidas por medio de la ecuación (5.2.1.2) para cuatro valores distintos del parámetro T_d . La ubicación de los puntos de equilibrio cambia para cada valor de T_d , pero el comportamiento del sistema dinámico es el mismo, el sistema presenta tres puntos de equilibrio:

- Un punto de equilibrio estable con $(\bar{A}, \bar{N}) = (\bar{A}_{s_1}, \bar{N}_{s_1})$.
- Un punto de equilibrio inestable $(\bar{A}, \bar{N}) = (\bar{A}_u, \bar{N}_u)$.
- Un punto de equilibrio estable con $(\bar{A}, \bar{N}) = (\bar{A}_{s_3}, \bar{N}_{s_3})$ con $\bar{N}_{s_3} = 0$

Conforme el valor del parámetro T_d se incrementa los puntos de equilibrio se desplazan sobre el plano fase, mostrando el siguiente comportamiento:

- El valor numérico de la componente \bar{A} del punto de equilibrio estable definido para $\bar{N} \neq 0$ se incrementa conforme se incrementa T_d . Para este punto de equilibrio, el valor numérico de la componente \bar{N} presenta un comportamiento creciente para valores de T_d menores a un valor $T_{d_{\bar{N}}}$ y decreciente para valores mayores a $T_{d_{\bar{N}}}$.
- Para el punto de equilibrio inestable se tiene que el valor numérico de la componente \bar{A} presenta un comportamiento creciente para valores de T_d menores a un valor $T_{d_{\bar{A}}}$ y decreciente para valores mayores a $T_{d_{\bar{A}}}$. El valor numérico de la componente \bar{N} del punto de equilibrio inestable se incrementa conforme se incrementa T_d .
- Para el punto de equilibrio estable definido para $\bar{N} = 0$ se tiene que el valor numérico de la componente \bar{A} se incrementa conforme se incrementa T_d y la componente \bar{N} se mantiene constante.

En la figura 6.11 se observa que al incrementar el parámetro T_d se presenta este desplazamiento de los puntos de equilibrio. Para los valores propuestos para T_d en la figura no existe un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema, sin embargo, si el parámetro T_d continúa incrementándose se tiene que los puntos de equilibrio, tanto el estable como el inestable se acercan cada vez más hasta que las ceroclinas de \bar{A} y de \bar{N} se intersecan en un solo punto. Una vez que ambas ceroclinas ya no se intersecan, se tiene que el sistema ya solo presenta un equilibrio estable en $(\bar{A}, \bar{N}) = (\bar{A}_{s3}, 0)$.

Al disminuir el valor del parámetro T_d también se presenta una variación en el comportamiento cualitativo del sistema, para valores de T_d menores a 8.1°C se tiene que no existen puntos de equilibrio. Estos cambios cualitativos en la dinámica del sistema son denominados bifurcaciones y los puntos donde ocurren estos cambios son denominados puntos de bifurcaciones [54].

En la figura 6.12 se muestra una gráfica de la ceroclina de \bar{N} , donde se resaltan todos los puntos de equilibrio estables e inestables que se generan cuando se interseca esta curva con la ceroclina de \bar{A} , al definir a T_d como parámetro de bifurcación y variar este parámetro.

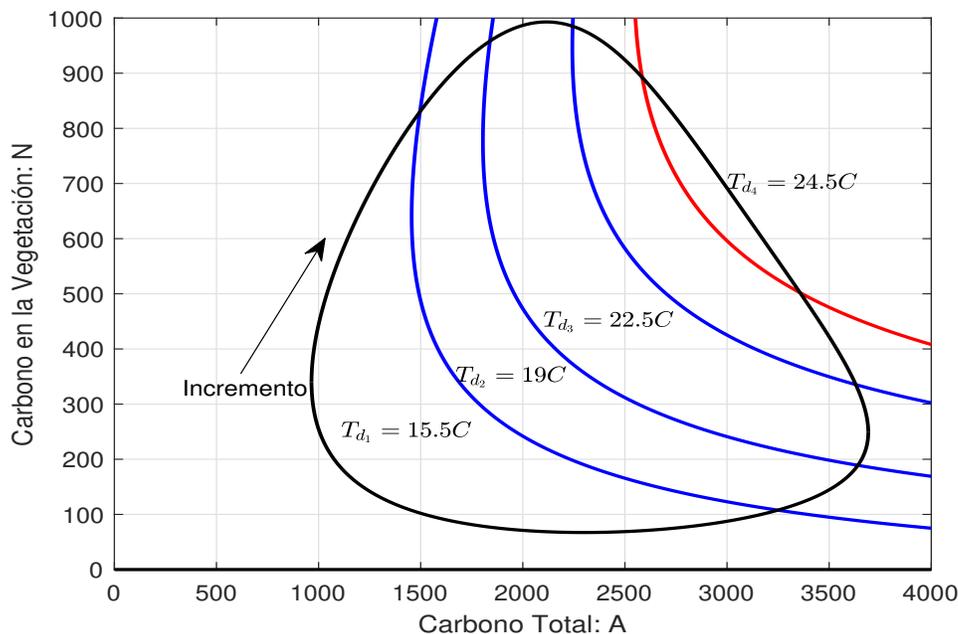


Figura 6.11: ceroclinas para $T_{d_1} = 15.5 C$, $T_{d_2} = 19 C$, $T_{d_3} = 22.5 C$ y $T_{d_4} = 24.5 C$.

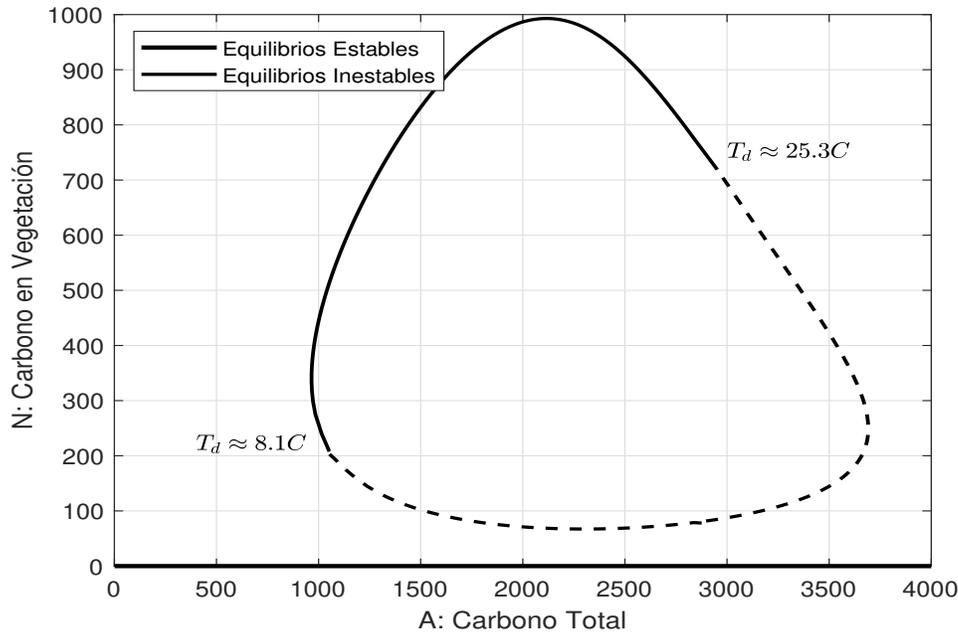


Figura 6.12: Equilibrios Estables e Inestables.

Aproximadamente en el intervalo $8.1^\circ\text{C} < T_d < 25.3^\circ\text{C}$ se tiene que existen tres puntos de equilibrios y el comportamiento cualitativo del sistema es el mismo. Para los valores T_d fuera de este intervalo el único punto de equilibrio es estable y se encuentra definido en $(\bar{A}, \bar{N}) = (\bar{A}_s, 0)$ para un \bar{A}_s definido para cada T_d . En la figura 6.13 se muestran tres planos fase con la simulación de las trayectorias solución del sistema climático reducido partiendo de las condiciones iniciales planteadas en la sección 6 del capítulo 5 para los valores del parámetro T_d mostrados en la figura y definiendo $k_p = 0.5$, debido a que este valor se utilizó en la simulaciones anteriores. Los valores seleccionados para T_d en las simulaciones permiten mostrar visualmente el cambio en el comportamiento cualitativo del sistema. Este tipo de bifurcación se conoce como bifurcación *nodo-silla*, debido a que para valores de T_d menores a 8.1°C se encuentra definido un solo punto de equilibrio. En $T_d \approx 8.1^\circ\text{C}$ se genera un punto de equilibrio, que a su vez se divide en otros dos, un equilibrio estable y un equilibrio inestable. Conforme T_d aumenta estos dos puntos de equilibrio se acercan entre ellos hasta que colisionan y desaparecen en $T_d \approx 25.3^\circ\text{C}$, por lo que para valores de T_d mayores a este valor, el sistema presenta un punto de equilibrio.

Estos dos puntos definidos en $T_d \approx 8.1^\circ\text{C}$ y $T_d \approx 25.3^\circ\text{C}$, donde surgen y desaparecen estos puntos de equilibrio son los puntos de bifurcación del modelo. Para los objetivos planteados en esta tesis es de particular importancia el punto de bifurcación $T_d = 25.3^\circ\text{C}$.

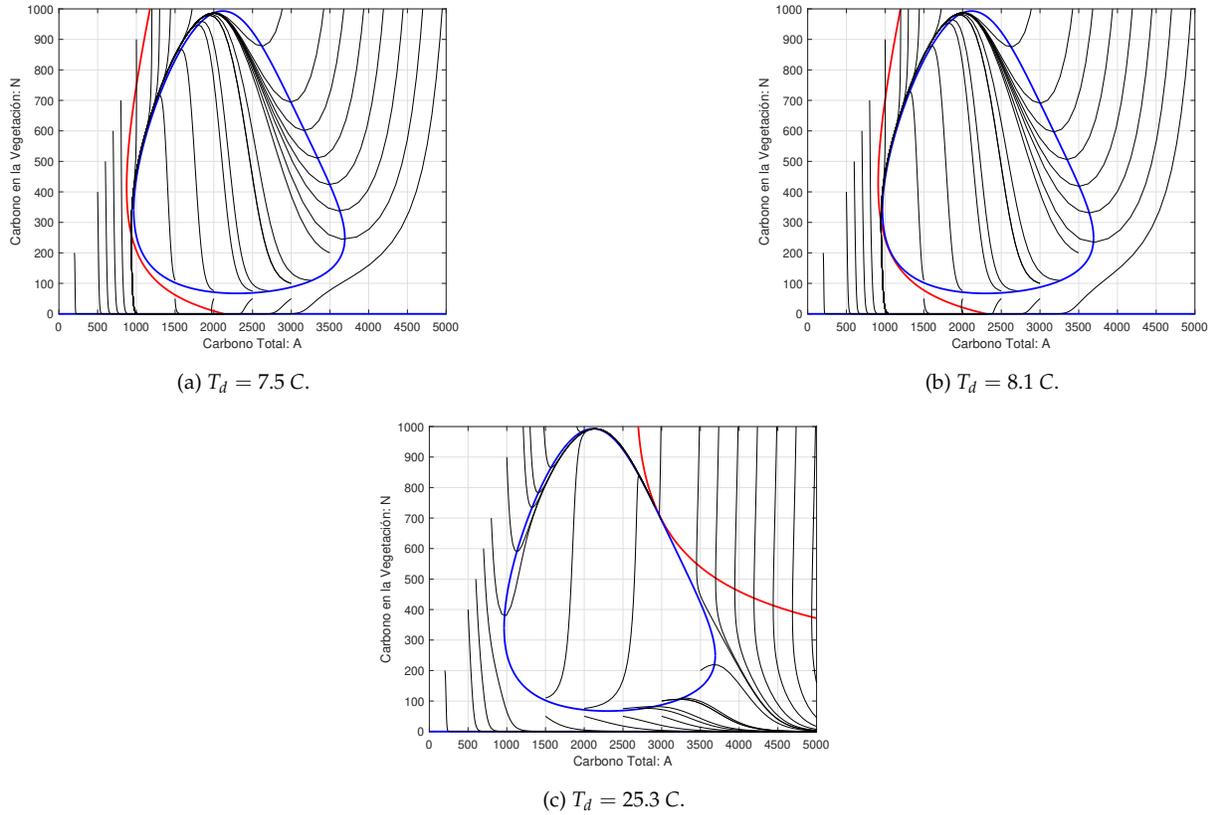


Figura 6.13: Solución para las variables del Sistema.

En la figura 6.14 se muestran las trayectorias solución al fijar el parámetro $T_d = 26^\circ\text{C} > 25.3^\circ\text{C}$, donde es posible apreciar que dos puntos de equilibrio ya fueron aniquilados y solo se conserva en equilibrio estable $(\bar{A}_{s_3}, \bar{N}_{s_3})$ donde $\bar{N}_{s_3} = 0$. Analizando la figura 6.14 es posible apreciar cómo se modifica la dinámica del sistema una vez que el valor del parámetro T_d es mayor al valor del punto de bifurcación. Para el único punto de equilibrio estable que existe en el sistema, su cuenca de atracción corresponde a todo el plano fase, por lo que todas las trayectorias convergen al punto de equilibrio $(\bar{A}_{s_3}, 0)$. Desde luego alcanzar este único punto de equilibrio estable implica la extinción de la biota en el sistema. Desarrollar el diagrama de bifurcaciones utilizando como parámetro a la temperatura deseada T_d tiene como objetivo generar un análisis de la dinámica del sistema debido a que conforme aumenta la temperatura del sistema, resulta más complicado proponer valores de T_d alejados del punto de bifurcación obtenido. Una interpretación consiste en que el va-

lor propuesto como temperatura deseada T_d no debe ser mayor al valor donde sucede la bifurcación del sistema y aunque el valor del punto de bifurcación es casi 10 grados mayor que el valor propuesto originalmente para T_d , posiblemente la utilización de otros valores para los parámetros que definen las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, ocasione que el valor de bifurcación del sistema sea menor.

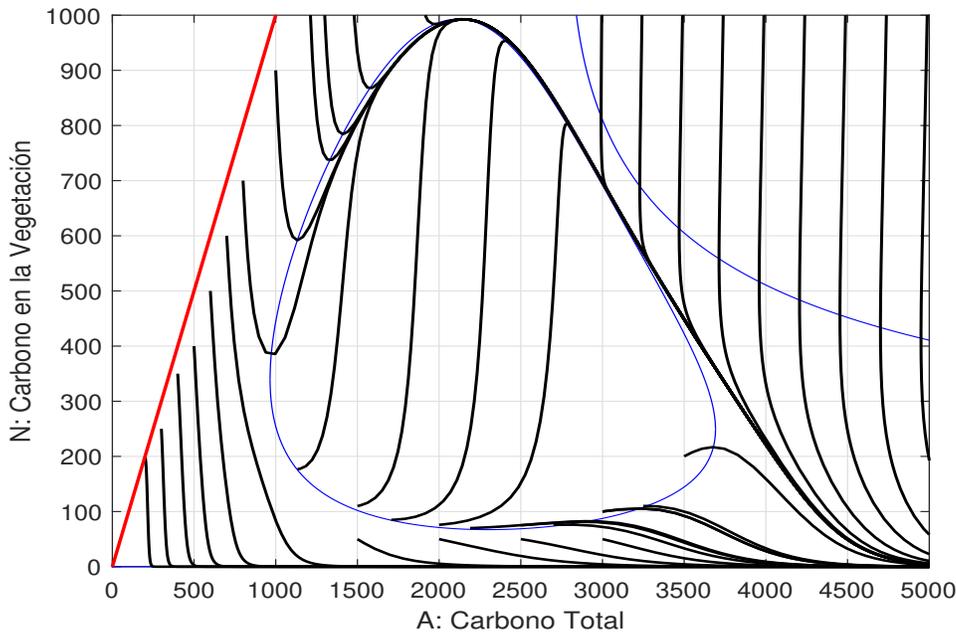


Figura 6.14: $T_d = 26$ C.

En la figura 6.15 se muestra el diagrama de bifurcación de T_d , utilizando al carbono en la vegetación \bar{N} del sistema como variable de bifurcación. En el diagrama de bifurcaciones es posible observar las tres ramas generadas por los tres puntos de equilibrio en el sistema. La primera rama corresponde al equilibrio estable definido para $\bar{N} = 0$ y se observa que este equilibrio se mantiene fijo para cualquier valor del parámetro T_d . Las otras dos ramas corresponden al equilibrio inestable y al equilibrio estable restante. El diagrama de bifurcaciones de la figura 6.15 presenta características del sistema como la histéresis, debido a que una vez que el parámetro T_d crece más allá del valor del punto de bifurcación, cualquier trayectoria solución converge al punto de equilibrio definido para $\bar{N} = 0$. Además, este punto puede considerarse como un punto de inflexión climático de la vegetación para el sistema porque una vez que se alcanza este valor, todas las trayectorias del modelo convergen al punto de equilibrio estable definido para $N = 0$, de manera irreversible de-

bido a que ambas ramas de equilibrios estables se encuentran desconectadas. Por lo tanto desde una perspectiva practica, se define a $T_d = 25.3^\circ\text{C}$ como un punto de inflexión o *tipping point* para la vegetación N del modelo climático no lineal definido en (5.1.1.4), al utilizar el modelo proporcional como función de emisiones. Este punto de inflexión, puede considerarse como alto en comparación de un modelo climático más cercano a valores actuales, sin embargo considerando que en la sección anterior se definió que el modelo de emisiones proporcional se encuentra altamente idealizado, es posible concluir que al utilizar otro esquema que si cumpla con la restricción planteada anteriormente $u > 0$, el punto de inflexión puede presentarse para un valor de T_d menor.

La figura 6.16 muestra el diagrama de bifurcación de la variable \bar{A} del sistema reducido. Los diagramas son consistentes con el comportamiento presentado por el sistema, tal como se presenta también en el diagrama de equilibrios de la figura 6.12. Del diagrama de bifurcaciones de la variable \bar{A} de la figura 6.16 se puede observar que los cambios en el comportamiento cualitativo del sistema (5.1.1.6) son congruentes con los cambios observados para el diagrama de bifurcaciones de la variable \bar{N} .

El diagrama de bifurcaciones para \bar{A} también presenta tres ramas, las dos ramas que se observan en la figura 6.16 corresponden al equilibrio inestable y al equilibrio estable definido para $\bar{N} \neq 0$. La otra rama corresponde al equilibrio estable para el cual $\bar{N} = 0$, que se encuentra definido para todos los valores del parámetro T_d . Esta rama de equilibrios tiene la característica que esta conformada por valores muy grandes de \bar{A} , que pueden ser encontrados utilizando la ecuación (5.2.1.4) definida en el capítulo 5.

Para conservar la escala no se muestra esta rama en el diagrama de la figura 6.16. Este diagrama también presenta características como la histéresis porque de acuerdo a lo mostrado, una vez que el valor del parámetro T_d sea mayor que 25.3 el carbono total en el sistema alcanza un valor muy grande para cualquier cualquier valor de T_d . Utilizando la relación entre los puntos de equilibrio del sistema $\bar{C}^* = \bar{A}^* - \bar{N}^*$ se obtiene el diagrama de bifurcaciones para la variable \bar{C} en el sistema reducido. Se observa que el diagrama de bifurcaciones para \bar{C} es similar al de \bar{A} y se presenta en la figura 6.17.

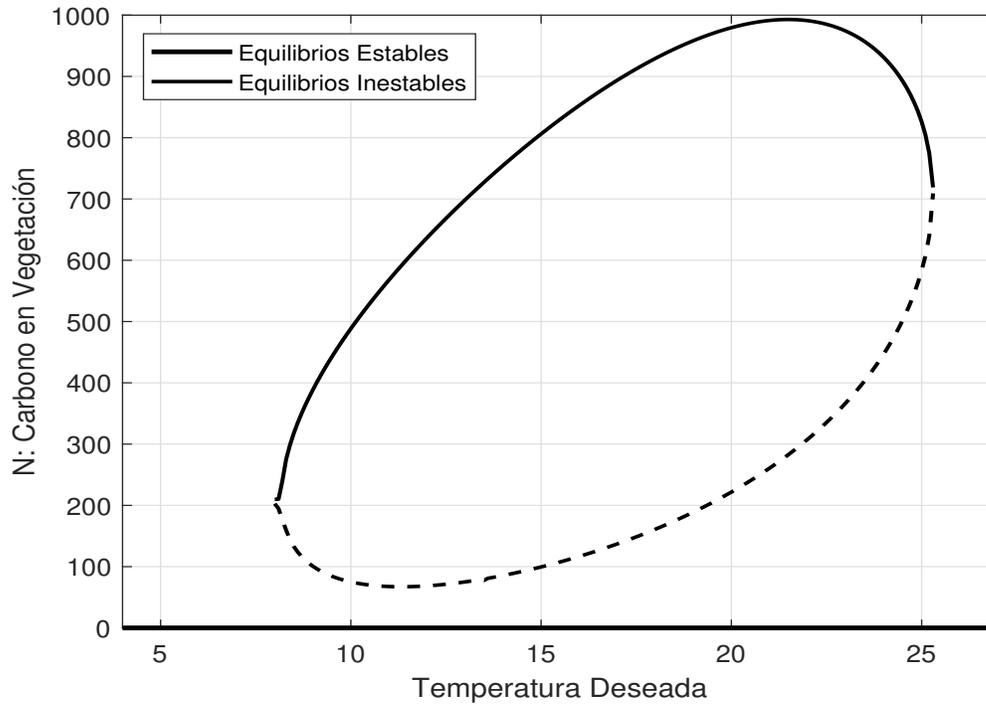


Figura 6.15: Diagrama de Bifurcación para N .

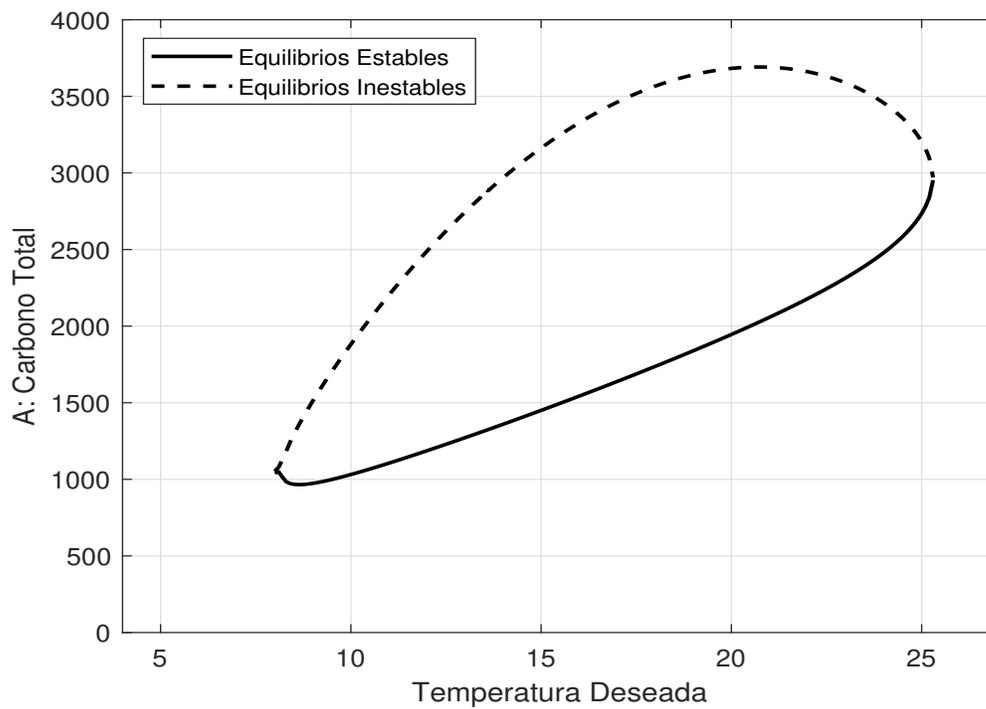


Figura 6.16: Diagrama de bifurcación para A .

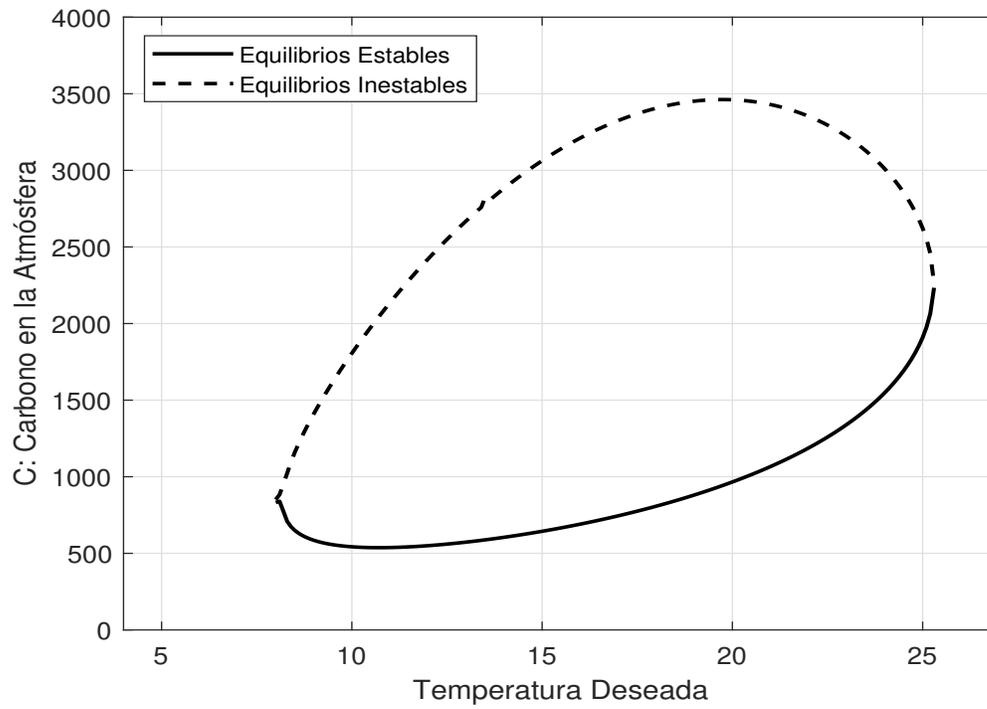


Figura 6.17: Diagrama de bifurcación para C.

Conclusiones Generales.

Desde su desarrollo los modelos climáticos de intercambio de energía han sido utilizados ampliamente en el desarrollo de literatura científica enfocada en la búsqueda de soluciones a la crisis de cambio climático, sin embargo, en la actualidad los modelos estadísticos de análisis de datos cada día se utilizan más para obtener información acerca del comportamiento del modelo planteado. Estos modelos estadísticos han resultado útiles para cumplir con estas funciones, pero pueden resultar poco intuitivos. Al incorporar un planteamiento basado en la modelación de las emisiones de carbono por el hombre por medio de funciones basadas en la retroalimentación de las variables del sistema es posible utilizar modelos dinámicos que resulten intuitivos en su interpretación, pero formales y robustos en su formulación.

Precisamente, estos modelos de emisión de carbono resultan útiles para visualizar la evolución del sistema y demostrar la irreversibilidad ocasionada por las emisiones de gases de efecto invernadero, en las características cualitativas asociadas al sistema por medio de herramientas sencillas como los diagramas de bifurcación. Sin embargo, resulta relevante robustecer el planteamiento de estas funciones de emisión por medio de otras herramientas analíticas para ofrecer una perspectiva más clara acerca de la capacidad del sistema de converger hacia un punto de equilibrio que presente condiciones óptimas para el desarrollo de todas las variables de estado, debido a que planteando como objetivo alcanzar un punto de equilibrio estable, las funciones de emisión que cumplieron la restricción propuesta $u > 0$, alcanzaron a un conjunto de puntos de equilibrios y no al equilibrio planteado. Sin embargo incluso utilizando una función de emisión sencilla en su planteamiento, para la variable que representaba la biota en el modelo planteado, fue posible determinar los puntos de bifurcación para el modelo en lazo cerrado. Esos puntos coinciden desde luego con el valor para el cual el parámetro T_d para el cual el carbono

total en el sistema A alcanza valores muy altos.

Tomando en cuenta las consideraciones generales y las restricciones planteadas al inicio de la tesis, el modelo estudiado presenta dos puntos de equilibrio estables, uno presenta condiciones favorables para el desarrollo de la biota del modelo en una temperatura ambiente agradable que a grandes rasgos puede clasificarse como un ecosistema templado. El segundo punto de equilibrio presenta condiciones que resultan desfavorables para el desarrollo de la biota, al presentar una temperatura también templada, pero con niveles de biota demasiado reducidos para mantener la población, este punto de equilibrio puede clasificarse como un desierto templado. Así como el modelo conserva una estructura cualitativa similar a otros modelos climáticos o ecológicos también presenta tres ramas de equilibrio en su diagrama de bifurcación. La presencia y la forma de estas ramas de bifurcación generan que en la dinámica del sistema se presente una marcada histéresis y en consecuencia la presencia de un punto de inflexión en el modelo climático.

Durante el desarrollo de esta tesis se utilizaron múltiples herramientas relacionadas a la teoría de control, en particular debido a que el modelo de intercambio de energía propuesto presentaba propiedades relacionadas al desarrollo de su dinámica en múltiples escalas de tiempo, el modelo estandar de perturbaciones singulares y la definición de una variedad hiperbólica normalmente invariante resultaron fundamentales para simplificar el modelo y realizar un análisis de equilibrios y de bifurcaciones que si se hubiera realizado en la dimensión original del modelo hubiera resultado demasiado difícil de realizar y cuya interpretación geométrica no hubiera resultado tan intuitiva.

Incluso una vez que se realizó la reducción del sistema es posible suponer que el modelo reducido (\bar{A}, \bar{N}) también presenta la propiedad de múltiples escalas de tiempo, posiblemente a causa del parámetro k_p impuesto en la ecuación diferencial que modela la emisiones generadas por el hombre. A través de una inspección visual rápida de los planos fase del sistema es posible visualizar que las trayectorias solución del sistema avanzan tangencialmente a la ceroclina de \bar{N} en un segmento del plano fase. Además los puntos de equilibrio definidos para $\bar{N} = 0$, presentan valores de \bar{A} muy altos. Esto implica que

formulada esta función de emisión u también es posible realizar otra reducción de orden al sistema.

Trabajo Futuro.

Durante el desarrollo de esta tesis también se desarrollaron propuestas de ideas para ampliar el trabajo ya realizado.

1. **Reformular las ecuaciones que modelan los fenómenos en el modelo de intercambio de energía.** Aunque las funciones que modelan los fenómenos climáticos del modelo planteado resultaron útiles para el desarrollo de este trabajo y para analizar la dinámica del sistema, existen múltiples funciones que presentan un comportamiento similar y pueden ser utilizadas para modelar tales fenómenos. La ventaja principal de utilizar otro tipo de funciones radica la posibilidad de usar parámetros que se encuentren más actualizados que en el momento en que fue publicado el artículo base o que incluso estos parámetros hayan sido estudiados y definidos después de la publicación original.
2. **Utilizar herramientas de determinación de los parámetros para el sistema dinámico estudiado.** Realizar un análisis más preciso de la dinámica del modelo climático propuesto puede implicar lidiar con la incertidumbre implícita que existe en la determinación de los parámetros del sistema. Utilizar herramientas analíticas enfocadas en determinar estos parámetros puede ofrecer más certeza en los resultados obtenidos.
3. **Ampliar las ecuaciones en el modelo utilizado y las variables climáticas del sistema.** Aunque ampliar las ecuaciones diferenciales implica aumentar la dimensión del espacio fase y por lo tanto también dificultar la tarea de realizar un análisis de carácter geométrico de la dinámica del modelo, es posible que al incorporar a la dinámica variables como el agua o los cuerpos de hielo los resultados obtenidos permitan analizar de manera más profunda el sistema climático. Además, debido a la intrínseca característica de múltiples escalas de tiempo en la escala de tiempo relacionada con los modelos climáticos de intercambio de energía es probable que sea posible realizar una reducción del sistema a por lo menos un modelo de orden 3.

4. **Utilizar un enfoque de diseño más avanzado para la función de modelado de emisiones.** A través de las funciones básicas utilizadas durante el desarrollo de la tesis fue posible realizar un análisis y obtener una comprensión amplia del sistema. Por lo tanto, es posible suponer que al utilizar un conjunto de herramientas de diseño como el principio del máximo de Pontryagin, o un planteamiento basado en el control por modos deslizantes o en el control estocástico puede resultar conveniente para obtener trayectorias que permitan cumplir con la restricción planteada en la formulación de la función de emisiones y converger a un punto o conjunto de equilibrio estable y que sea considerado favorable para las variables de estado del sistema.
5. **Incorporar una perspectiva económica en la formulación del modelo.** Tanto el modelo saturado de emisiones, como el modelo de cero emisiones cumplían con la restricción planteada para la función de emisiones u , sin embargo, si se busca realizar una interpretación de las trayectorias generadas por ambos modelos se podría concluir que se encuentran limitadas, por que utilizar estos modelos de emisión implica detener la emisión de gases de efecto invernadero por periodos prolongados de tiempo. Sin embargo, adoptar esa perspectiva resulta imposible por el momento, por lo menos hasta que la generación de energía por medio alternos sea más común. Por lo tanto, puede resultar conveniente integrar una componente económica al modelo para por medio de herramientas analíticas como la teoría de juegos diferenciales, investigar si es posible realizar una política de disminución de emisiones, procurando limitar al máximo las consecuencias que se pueden presentar en el modelo climático.

Bibliografía

- [1] Tim Lenton, , Johan Rockström, Owen Gaffney, Stefan Rahmstorf, Katherine Richardson, Will Steffen, Hans Joachim Schellnhuber. "Climate tipping points – too risky to bet against". *Nature* (2019).
- [2] David Armstrong McKay, Jesse Abrams, Ricarda Winkelmann, Boris Sakschewski, Sina Loriani, Ingo Fetzer, Sarah Cornell, Johan Rockström, Arie Staal, Timothy Lenton, Exceeding 1.5°C global warming could trigger multiple climate tipping points. *Science*. 377 (6611) (September 2022).
- [3] Paul D. L. Ritchie, Joseph J. Clarke, Peter M. Cox¹ and Chris Huntingford. Overshooting tipping point thresholds in a changing climate. *Nature* volume 592.
- [4] J. Rombouts, M. Ghil, Oscillations in a simple climate-vegetation model, *Nonlinear Process. Geophys.* 22 (2015) 275–288.
- [5] B. Saltzman, A. Sutera, A model of the internal feedback system involved in late Quaternary climatic variations, *J. Atmospheric Sci.* 41 (1984), 736–745.
- [6] IPCC AR6 AR6 Synthesis Report 2023.
- [7] Yuri M. Svirezhev, Werner von Bloh. Climate, vegetation, and global carbon cycle: the simplest zero-dimensional model. *Ecological Modelling* 101 (1997) 79-95.
- [8] IPCC, *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.* Cambridge University Press (2013).
- [9] Paul Ritchie, Özkan Karabacak and Jan Sieber. Inverse square law between time and amplitude for crossing tipping thresholds. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* Volume 475, Issue 2222.

- [10] Paul E. O’Keeffe, Sebastian Wieczorek. “Tipping Phenomena and Points of No Return in Ecosystems: Beyond Classical Bifurcations”. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 19 (4): 2371–2402 (2020).
- [11] Brown PT, Saunders H Approximate calculations of the net economic impact of global warming mitigation targets underheightened damage estimates. *PLoS ONE* 15(10): e0239520, (2020).
- [12] William Nordhaus, Paul Sztorc, *DICE 2013R: Introduction and User’s Manual with R*, Second edition, October 2013, William Nordhaus 2013.
- [13] W. Nordhaus. Evolution of modeling of the economics of global warming: changes in the DICE model, 1992–2017. *Climatic Change* 148, 623–640 (2018).
- [14] Michael Grubb, Claudia Wieners, Pu Yang *Modeling myths: On DICE and dynamic realism in integrated assessment models of climate change mitigation*, Wiley, (2021).
- [15] Thomas S. Lontzek, Yongyang Cai, Kenneth L. Judd² and Timothy M. Lenton. Stochastic integrated assessment of climate tipping points indicates the need for strict climate policy. *Nature* (2015).
- [16] Agénor, Pierre-Richard. “Growth and Technological Progress: The Solow–Swan Model”. *The Economics of Adjustment and Growth* (Second ed.). Cambridge: Harvard University Press. pp. 439–462, (2004).
- [17] Alain Haurie, *The Coupling of Climate And Economic Dynamics, Essays on Integrated Assessment*, Springer, 2005.
- [18] Jean-Pierre Aubin, Telma Bernado y Patrick Saint-Pierre. *A Viability Approach to Global Climate Change Issues. The Coupling of Climate and Economic Dynamics*. Springer, pp 113–143, (2005).
- [19] Patrice Dumas, Minh Ha-Duong. *An Abrupt Stochastic Damage Fuction to Analyze Climate Policy Benefits. The Coupling of Climate and Economic Dynamics*. Springer, pp.97-111, (2005).

- [20] Anuradha M. Annaswamy, Karl H. Johansson, George J. Pappas, Control For Societal-Scale Challenges: Road Map 2030, IEEE Control Systems Society, IEEE, 2023.
- [21] Thomas A. Weber con prefacio de A. V. Kryazhimskiy. *Optimal Control Theory with Applications in Economics*. The MIT Press, 2011.
- [22] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, y E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley Interscience (1962).
- [23] Y. C. Sim, S. B. Leng, and V. Subramaniam. A Combined Genetic Algorithms–Shooting Method Approach to Solving Optimal Control Problems. *International Journal of Systems Science* 31 (1): 83–89 (2000).
- [24] Hannon, B. Ecosystem control theory. *Journal of Theoretical Biology*, (1986), 121(4), 417–437.
- [25] Yosef Cohen, Marc Mangel, Robert McKelvey, Joel S. Brown, *Applications of Control Theory in Ecology*, Proceedings of the Symposium on Optimal Control Theory held at the State University of New York, Syracuse, New York, Springer-Verlag, 1986.
- [26] Craig Loehle, Control theory and the management of ecosystems, *Journal of Applied Ecology* 43, 2006, pp. 957–966.
- [27] Zhichao Jiang, Yan Zhao, Xueli Bai, Zexian Zhang, Bifurcation and control of a planktonic ecological system with double delays by delayed feedback control, *Journal of the Franklin Institute*, Volume 358, Issue 7, May 2021, Pages 3609-3632.
- [28] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th ed.). Wiley.
- [29] NOAA National Centers for Environmental Information, *Monthly Global Climate Report for Annual 2017*, publicado en línea Enero 2018, recuperado en Abril 5 del 2023.
- [30] Budyko, M. I. The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth. *Tellus*, 21(5), (1969) 611-619.

- [31] Andrew J. Wood, Graeme J. Ackland, James G. Dyke, Hywel T. P. Williams, Timothy M. Lenton. Daisyworld: A review. *Reviews in Geophysics*, Volume 46 (2008) Issue 1.
- [32] Dmitri V. Alexandrov, Irina A. Bashkirtseva a, Michel Crucifix b, Lev B. Ryashko. Nonlinear climate dynamics: From deterministic behaviour to stochastic excitability and chaos. *Physics Reports* 902 (2021) 1–60.
- [33] Sergey I. Bartsev, Andrey G. Degermendzhi, Dmitry V. Erokhin. Principle of the worst scenario in the modelling past and future of biosphere dynamics. *Ecological modelling* 216 (2008) 160–171.
- [34] Thomas Stocker. *Introduction to climate modelling*. Springer Science and Business Media, 2011.
- [35] Robert Siegel, John R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer* (3 ed.). Taylor and Francis (1992).
- [36] Richard D. Watson, Kirby S. Chapman. *Radiant Heating and Cooling Handbook*. McGraw Hill (2004).
- [37] Yuri M. Svirezhev, *Virtual Biospheres: Complexity versus Simplicity*. Home Fossil and Recent Biofilms Chapter “Active Planetary Cover” Concept and Long-Term Evolution of Planetary Climate Springer (2003) 68-381.
- [38] Yuri M. Svirezhev, Werner Von Bloh. A minimal model of interaction between climate and vegetation: qualitative approach. *Ecological Modelling* 92 (1996) 89-99.
- [39] Yuri M. Svirezhev, Werner von Bloh. A zero-dimensional climate-vegetation model containing global carbon and hydrological cycle. *Ecological Modelling* 106 119–127 (1998).
- [40] Thomas R. Sinclair and Wayne I. Park Inadequacy of the Liebig Limiting-Factor Paradigm for Explaining Varying Crop Yields. *Agronomy Journal*. Wiley, Volume 85, Issue3, (1993) pp.742-746.
- [41] B. Adams a, A. White a, T.M. Lenton b. An analysis of some diverse approaches to modelling terrestrial net primary productivity. *Ecological Modelling* 177 (2004) 353–391.

- [42] Lenton, T.M. Land and ocean carbon cycle feedback effects on global warming in a simple Earth system model. *Tellus*, vol. 52B. (2000) pp. 1159–1188.
- [43] V. Petoukhov. Parametrization of the outgoing longwave radiation flux to be used in zero-dimensional 'climate + biosphere' model. In: *Toys: Materials to Brandenburg Biosphere Model*, PIK Report No. 14, Potsdam (1995).
- [44] AA Van de Griend and Manfred OWE. "On the relationship between thermal emissivity and the normalized difference vegetation index for natural surfaces". In: *International Journal of remote sensing* 14.6 (1993), pp. 1119–1131.
- [45] Raymond W Bliss Jr. "Atmospheric radiation near the surface of the ground: a summary for engineers". In: *Solar Energy* 5.3 (1961), pp. 103–120.
- [46] Petar Kokotović, Hassan K. Khalil, John O'Reilly. *Singular perturbation methods in control analysis and design*. Classics in Applied Mathematics, Series Number 25. Society for Industrial and Applied Mathematics; Reprint edición (1987).
- [47] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems," 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [48] Stephen C. Carlson. *Topology of surfaces, knots and Manifolds: a first Undergraduate course*. Wiley, New York, 2001.
- [49] John G Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 149 (2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, (2006) [1994].
- [50] Pierre Friedlingstein, Michael O'Sullivan, Matthew W. Jones y coautores. Global Carbon Budget 2022 *Earth Syst. Sci. Data*, 14, 4811–4900, 2022. <https://doi.org/10.5194/essd-14-4811-2022>.
- [51] A.N. Tikhonov: Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative (in Russian). *Math. Sb.* 31, 575–586 (1952).
- [52] <https://climate.nasa.gov/system/downloadable>
- [53] Stephen Wiggins, *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, Springer Science and Business Media, Nov 22, 2013.

- [54] Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>.
- [55] Perko, Lawrence. *Differential Equations and Dynamical Systems* (Third ed.). New York: Springer. pp. 119–127 (2001).