



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Tema:

Introducción al concepto de integral mediante un contexto de aproximación de la longitud de una curva asociada a la columna vertebral con apoyo de tecnología digital

TESIS

Que presenta

Victor Manuel Ferreyra Coroy

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

EN LA ESPECIALIDAD DE

Matemática Educativa

Director de tesis

Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo

Ciudad de México

julio,2023

Agradecimiento

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (Conacyt) por haberme brindado el apoyo económico para realizar mis estudios de Maestría.

Victor Manuel Ferreyra Coroy

Becario 848552

Agradecimientos

Agradezco al departamento de Matemática Educativa y a CINVESTA por brindarme la oportunidad de continuar con mis estudios y brindarme un espacio para realizarme como profesionista.

Agradezco a mi hijo Víctor Manuel Ferreyra Antonio y esposa Esmeralda Antonio Rivera por siempre brindarme su apoyo, comprensión y paciencia en los días de ausencia, por estar siempre apoyándome en la superación de mis estudios.

A mis padres Felipe Ferreyra Monjardin y Minerva Coroy Negrete por guiarme, apoyarme y brindarme siempre su amor incondicional.

A mi hermano Alejandro Ferreyra Coroy por apoyarme y mostrarme que la constancia permite cumplir con los objetivos planteados.

Al Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo quien me dio la oportunidad de conocerlo, por ser mi guía durante todo mi proceso de posgrado, por permitirme pertenecer a su equipo de trabajo, por siempre mostrarme el camino correcto y estar al pendiente de mis estudios, así mismo por compartirme e impulsarme a continuar adquiriendo conocimientos en esta hermosa área de matemática educativa.

Al Dr. José del Carmen Orozco Santiago por siempre estar al pendiente de mi trabajo y por su apoyo incondicional, por su amistad, compañerismo y por siempre motivarme a seguir superándome, por mostrarme con el ejemplo de que la constancia, trabajo duro y en equipo es el mejor camino para seguir.

A mis compañeros la Mtra. Sofía, Mtra. Helen, el Mtro. Erasmo y Mtro. Ricardo quienes siempre me apoyaron nutriendo mi trabajo, por brindarme su amistad y cariño en las sesiones de trabajo.

Al Ingeniero Israel Hernández por apoyarme con las cuestiones tecnológicas, por estar siempre en las sesiones de trabajo apoyándonos en la parte tecnológica y brindarme su amistad.

A mis profesores: Dra. Gisela Montiel Espinosa, Dra. Rosa María Farfán Márquez, Dr. Francisco Cordero Osorio, Dra. Claudia Margarita Acuña Soto, quienes me compartieron sus conocimientos y fueron partícipes de mi crecimiento en esta disciplina, motivándome siempre a superarme día con día.

A Adriana Parra Hernández, por el apoyo administrativo que me brindó durante mi proceso de selección y culminación.

Finalmente, en memoria del Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza quien me permitió conocerlo como persona e investigador de este ramo, quien me impulsó al crecimiento, quien con su ejemplo de trabajo constante y dedicado nos motivó a continuar con los estudios.

1 Contenido

<i>Resumen</i>	10
2 Introducción	12
3 Antecedentes Históricos	15
3.1 Historia del Cálculo	15
3.2 Investigaciones de cálculo en matemática educativa	17
3.3 Método de Exhaustión	20
3.4 Columna Vertebral	24
3.5 Análisis de contenido temático	26
4 Marco Teórico-Methodológico	37
4.1 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)	37
4.2 Didáctica Cuevas y Pluvinage (2003)	42
5 Metodología	44
5.1 Trayectoria de Hipotética de Aprendizaje de las actividades	46
5.2 Elaboración de EDVI y HEyAG	49
5.3 Prueba Piloto	50
5.3.1 Prueba Piloto 1	50
5.3.2 Prueba Piloto 2	51
5.3.3 Prueba Piloto 3	54
5.3.4 Prueba Piloto 4	56
6 Análisis de respuestas	58
6.1 Análisis de aplicación de actividades didácticas de aprendizaje de pruebas piloto. . 58	
6.1.1 Respuestas de prueba piloto 1	58
6.1.2 Respuestas de prueba piloto 2.....	67
6.1.3 Respuestas de prueba piloto 3	79
6.2 Análisis de Resultados de aplicación de actividades didácticas	94
6.3 Análisis de actividad 2	113
7 Conclusiones	132
8 ANEXOS	137
9 Anexo 2 (Propuesta de HEyAG)	149
Referencias bibliográficas	164

Contenido de Tablas

<i>Tabla 1 Objetivo general de aprendizaje de instituciones educativas</i>	28
<i>Tabla 2 Temario que contienen las Unidades de aprendizaje de los contenidos temáticos</i>	29
<i>Tabla 3 Unidad de aprendizaje analizada</i>	30
<i>Tabla 4 Contenido temático de Unidad de aprendizaje analizada</i>	31
<i>Tabla 5 Actividades de Aprendizaje y objetivos de aprendizaje</i>	38
<i>Tabla 6 Actividades de Aprendizaje</i>	39
<i>Tabla 7 Procesos Hipotético de Aprendizaje de actividades didácticas</i>	40
<i>Tabla 8 Ruta de Aprendizaje del Estudiante</i>	48
<i>Tabla 9 Valores utilizados por los estudiantes en actividad 1</i>	109

Tabla de figuras

<i>figura 1 Imagen de proceso de aproximación a forma de círculo, elaboración propia</i> ,	20
<i>figura 2 Cuadrado inscrito y circunscrito al círculo</i>	21
<i>figura 3. Longitud de lado de cuadrado</i>	22
<i>figura 4 triángulo formado por cuadrado inscrito y circunscrito</i>	23
<i>figura 5 Cuadrado circunscrito dividido</i>	23
<i>figura 6 Esquema de la medición del ángulo de Cobb en la curvatura torácica y en la lumbar. Tomado de Tachdjian's Pediatric Orthopaedics</i>	26
<i>figura 7 Traducción propia del ciclo de trayectoria hipotética de aprendizaje de Simón (1995, p. 136)</i>	41
<i>figura 8 ruta general de actividades</i>	46
<i>figura 9 Escenario 1 prueba piloto 1</i>	51
<i>figura 10 Estudiantes trabajando en una sola computadora y apoyándose del celular</i>	53
<i>figura 11 Escenario aplicación 2</i>	53
<i>figura 12 Escenario final para aplicación</i>	55
<i>figura 13 Respuestas de estudiante de prueba piloto 1 correspondientes a introducción</i>	58
<i>figura 14 Respuesta de primera pregunta en prueba piloto 1</i>	59
<i>figura 15 Respuesta a la segunda pregunta de prueba piloto 1</i>	59
<i>figura 16 Respuesta a pregunta 3 de prueba piloto 1</i>	60
<i>figura 17 Respuesta a pregunta 4 de prueba piloto</i>	60
<i>figura 18 Respuesta a pregunta 5 de prueba piloto 1</i>	61
<i>figura 19 Respuesta a pregunta 6 de prueba piloto 1</i>	61
<i>figura 20 Respuesta a pregunta 7 actividad 1 de prueba piloto</i>	61
<i>figura 21 Respuesta a pregunta 9 de actividad 1 de prueba piloto 1</i>	62
<i>figura 22 Instrucciones de actividad</i>	62
<i>figura 23 Respuesta 1 de actividad 1 correspondiente a prueba piloto 1</i>	63
<i>figura 24 Respuesta 2 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	63
<i>figura 25 Respuesta 3 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	63
<i>figura 26 Respuesta 4 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	64
<i>figura 27 Respuesta 5 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	64
<i>figura 28 Respuesta 6, 7 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	65
<i>figura 29 Respuesta 8 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	65
<i>figura 30 Respuesta 9 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	65
<i>figura 31 Respuesta 10 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	66
<i>figura 32 Respuesta 10 de actividad 1, prueba piloto 1</i>	66
<i>figura 33 Respuesta 1 de actividad 2, prueba piloto 1</i>	66

<i>figura 34 respuesta 1 a aplicación 2.....</i>	<i>67</i>
<i>figura 35 Respuesta a pregunta 2 de prueba piloto 2.....</i>	<i>68</i>
<i>figura 36 respuesta a tercera pregunta, aplicación 2.....</i>	<i>68</i>
<i>figura 37 respuesta a cuarta pregunta aplicación 2.....</i>	<i>69</i>
<i>figura 38 respuesta 1 a la actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>70</i>
<i>figura 39 Respuesta 3 de actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>71</i>
<i>figura 40 respuesta 4 actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>71</i>
<i>figura 41 Respuesta 5 actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>72</i>
<i>figura 42 Respuesta a la pregunta 6 de actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>72</i>
<i>figura 43 respuesta a pregunta 7, actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>73</i>
<i>figura 44 Respuesta a la pregunta de actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>73</i>
<i>figura 45 respuesta a pregunta de actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>74</i>
<i>figura 46 Respuesta a la pregunta de actividad 2, aplicación 2.....</i>	<i>75</i>
<i>figura 47 respuesta a actividad de aprendizaje 2, aplicación 2.....</i>	<i>76</i>
<i>figura 48 respuestas a actividad de aprendizaje longitud, de aplicación 2.....</i>	<i>77</i>
<i>figura 49 respuestas a actividad de aprendizaje de aplicación 2.....</i>	<i>78</i>
<i>figura 50 imagen de apertura de actividad de aprendizaje, aplicación 3.....</i>	<i>79</i>
<i>figura 51 respuesta a interrogante de actividad 1 aplicación 3.....</i>	<i>80</i>
<i>figura 52 respuesta a la actividad 1 de aplicación 3.....</i>	<i>80</i>
<i>figura 53 respuesta a la forma curva de la columna vertebral, aplicación 3.....</i>	<i>81</i>
<i>figura 54 Respuestas a pregunta de aplicación 3.....</i>	<i>81</i>
<i>figura 55 Valores utilizados por estudiantes.....</i>	<i>82</i>
<i>figura 56 Respuesta a interrogante de aplicación 3}.....</i>	<i>83</i>
<i>figura 57 datos de aplicación 3 actividad 1.....</i>	<i>83</i>
<i>figura 58 Respuestas de actividad aproximación aplicación 3.....</i>	<i>84</i>
<i>figura 59 Respuestas de aproximación, respecto a la aplicación 3.....</i>	<i>85</i>
<i>figura 60 respuestas a interrogante de cambio de variación en aplicación 3.....</i>	<i>85</i>
<i>figura 61 respuesta a si es buena la aproximación a la forma de la columna vertebral en aplicación 3.....</i>	<i>86</i>
<i>figura 62 Respuesta a como se puede mejorar la aproximación a la forma curva de la columna vertebral, aplicación 3.....</i>	<i>86</i>
<i>figura 63 Respuesta ¿Cómo puede mejorar la aproximación?, Aplicación 3.....</i>	<i>87</i>
<i>figura 64 respuestas a la interrogante de como aproximarse a una forma curva, aplicación 3.....</i>	<i>88</i>
<i>figura 65 Respuestas a la interrogante de como conocer la longitud de la columna vertebral.....</i>	<i>89</i>
<i>figura 66 respuesta a la interrogante como puede calcular la longitud de la columna en la aplicación 3.....</i>	<i>90</i>
<i>figura 67 respuesta a la interrogante como medir de manera aproximada la longitud de la columna vertebral en aplicación 3.....</i>	<i>90</i>
<i>figura 68 respuesta a la conclusión de la actividad de longitud en aplicación 3.....</i>	<i>91</i>
<i>figura 69 Respuesta ¿Para mejorar una aproximación? Aplicación 3.....</i>	<i>92</i>
<i>figura 70 Respuesta de proceso de mejorar la aproximación. Aplicación 3.....</i>	<i>92</i>
<i>figura 71 Respuesta ¿Cómo calcular la longitud? Aplicación 3.....</i>	<i>93</i>
<i>figura 72 Respuesta a la suma de todas las longitudes. Aplicación 3.....</i>	<i>93</i>
<i>figura 73 Respuesta a interrogante 1 de actividad 1, aplicación 4.....</i>	<i>95</i>
<i>figura 74 Respuesta a interrogante 2 de actividad 1, aplicación 4.....</i>	<i>95</i>
<i>figura 75 Respuesta a interrogante 3 de actividad 1, aplicación 4.....</i>	<i>96</i>
<i>figura 76 Respuesta de un estudiante a la interrogante de la actividad 1.....</i>	<i>97</i>
<i>figura 77 Respuesta de estudiante dos a la interrogante de la actividad 1.....</i>	<i>97</i>
<i>figura 78 Respuesta de estudiante tres a la interrogante de la actividad 1.....</i>	<i>97</i>
<i>figura 79 aproximación a forma curva de columna vertebral con valor de longitud 0.9cm.....</i>	<i>98</i>
<i>figura 80 aproximación a forma curva de columna vertebral con valor de longitud 0.1.....</i>	<i>99</i>

figura 81 respuestas a pregunta de actividad de aprendizaje 1.....	99
figura 82 Aproximación que obtuvo estudiante con longitud de segmento 1.6.....	100
figura 83 Porcentaje de respuestas a la pregunta ¿existió variación en la aproximación?.....	101
figura 84 Porcentaje de respuestas a segunda pregunta de actividad didáctica de aprendizaje 1.....	101
figura 85 Aproximación de Brian con valor de longitud de segmento 0.5.....	102
figura 86 Aproximación de Brian con valor de longitud 0.7.....	103
figura 87 Aproximación de Brian con valor de longitud de segmento 1.3.....	103
figura 88 Aproximación de Jonathan con valor 1.6.....	104
figura 89 Aproximación de Jonathan con valor de longitud de segmento 1.....	105
figura 90 Aproximación de Jonathan con valor 0.3.....	105
figura 91 Aproximación de Kelin con valor 0.1.....	106
figura 92 Aproximación de Kelin con valor 1.3.....	107
figura 93 Aproximación de Kelin con valor 0.6.....	107
figura 94 Aproximación de Brian con un valor de 0.4 en longitud de segmento.....	108
figura 95 Aproximación de Jonathan con un valor de 0.1 en la longitud de segmento.....	109
figura 96 Aproximación de Kelin con un valor de longitud de segmento de 0.11.....	109
figura 97 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4.....	110
figura 98 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4.....	112
figura 99 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4.....	112
figura 100 Aproximación a la forma curva de la columna vertebral en actividad 2 con valor de 1.6 de longitud de segmento.....	113
figura 101 Aproximación a la forma curva de la columna vertebral con valor 0.1 en actividad 2.....	114
figura 102 Aproximación y número de segmentos generados con el valor 0.1.....	114
figura 103 Aproximación y número de segmentos generados por valor 0.11.....	115
figura 104 Aproximación y número de segmentos generados con valor 0.6.....	115
figura 105 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	115
figura 106 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	116
figura 107 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	116
figura 108 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	117
figura 109 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	118
figura 110 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4.....	119
figura 111 Toldo de cancha deportiva.....	120
figura 112 Toldo de ventana.....	120
figura 113 Marco de toldo de ventana.....	120
figura 114 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4.....	121
figura 115 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4.....	121
figura 116 Trayectoria de automóvil.....	122
figura 117 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4.....	123
figura 118 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4.....	123
figura 119 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	124
figura 120 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	125
figura 121 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	125
figura 122 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	126
figura 123 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	126
figura 124 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	127
figura 125 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	127
figura 126 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	128
figura 127 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	128
figura 128 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4.....	129

<i>figura 129 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4</i>	<i>130</i>
<i>figura 130 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4</i>	<i>130</i>
<i>figura 131 Imagen de columna vertebral</i>	<i>137</i>
<i>figura 132 Toldo de cancha deportiva</i>	<i>145</i>
<i>figura 133 Toldo de ventana.....</i>	<i>145</i>
<i>figura 134 Marco de toldo de ventana</i>	<i>145</i>
<i>figura 135 Trayectoria de automóvil</i>	<i>146</i>
<i>figura 136 Imagen de columna vertebral</i>	<i>149</i>
<i>figura 137 Toldo de cancha deportiva</i>	<i>158</i>
<i>figura 138 Toldo de ventana.....</i>	<i>158</i>
<i>figura 139 Marco de toldo de ventana</i>	<i>158</i>
<i>figura 140 Trayectoria de automóvil</i>	<i>160</i>

Resumen

La siguiente investigación muestra los resultados de una propuesta didáctica de aprendizaje, aplicada a un grupo de estudiantes de nivel superior en una escuela pública en México. Esta propuesta didáctica tiene como objetivo introducir y significar el concepto de integral partiendo del contexto real que suponemos atractivo para los estudiantes. La propuesta didáctica parte de medir aproximadamente la longitud de una columna vertebral por medio de un proceso de acumulación de segmentos de línea recta. Este proceso recibe el nombre de acumulación de segmentos e introduce las sumas infinitas de Riemann para llegar intuitivamente a la definición y conceptualización de integral definida.

Para la organización de las actividades didácticas se propone una trayectoria hipotética de aprendizaje, mediado con escenarios didácticos virtuales interactivos y hojas de exploración guiada mismas que fueron elaboradas bajo un marco didáctico socio constructivista.

Los resultados obtenidos de la aplicación didáctica de aprendizaje muestran que las actividades didácticas permitieron a los estudiantes identificar que, una acumulación de segmentos de línea recta aproxima la longitud de la columna vertebral. Por medio de esta acumulación conceptualizaron y significaron la integral definida.

Concluimos que la tecnología digital mediante la simulación de una columna vertebral permitió a los estudiantes: visualizar conceptos abstractos como sumas parciales y sumas infinitas en un contexto real; experimentar con libertad sus propuestas y visualizarlas dinámicamente en un contexto real con retroalimentación; pudiendo realizar cuantas veces lo requerían el experimento con diferentes datos; además de, fomentar un aprendizaje colaborativo con la discusión grupal de los resultados obtenidos. Con esta propuesta los estudiantes pudieron aprender a su propio ritmo de aprendizaje.

Abstract

The following research shows the results of a didactic learning proposal applied to a group of high school students in a public school in Mexico. This didactic proposal has the objective of introducing and meaning the concept of integral, starting from a real context that we assume is attractive for the students. The didactic proposal is based on measuring approximately the length of a spine by means of a process of accumulation of straight line segments. This process is called segment accumulation and introduces the infinite Riemann sums to intuitively arrive at the definition and conceptualization of the definite integral.

For the organization of the didactic activities, a hypothetical learning trajectory is proposed, mediated with interactive virtual didactic scenarios and guided exploration sheets, which were elaborated under a socio-constructivist didactic framework.

The results obtained from the didactic learning application show that the didactic activities allowed students to identify that an accumulation of straight line segments approximates the length of the spine. Through this accumulation they conceptualized and signified the definite integral.

We concluded that digital technology through the simulation of a spine allowed students to: visualize abstract concepts such as partial sums and infinite sums in a real context; experiment freely with their proposals and visualize them dynamically in a real context with feedback; being able to perform the experiment as many times as required with different data; in addition to fostering collaborative learning with group discussion of the results obtained. With this proposal, students were able to learn at their own pace.

2 Introducción

*“La vida es buena por solo dos cosas,
Descubrir y enseñar las matemáticas”.*

Simeon Poisson

La siguiente investigación surge por el interés de introducir un concepto matemático complejo en educación el cual corresponde a la integral, partiendo desde un contexto real. Para ello iniciamos analizando los contenidos temáticos de la materia de cálculo integral de variable real de algunas instituciones públicas de México de nivel superior, así como dos libros de texto bibliográfico más usuales: Stewart y Swokosky. Teniendo como resultado de este análisis que, el concepto de integral definida se introduce desde el cálculo de área bajo la curva por medio de sumas de Riemann de acuerdo con la referencia antes mencionada.

Para realizar nuestro proyecto nos enfocamos de manera particular en el concepto de la integral definida, siguiendo la idea de instrumentar una secuencia de actividades didácticas de aprendizaje que introduzcan este concepto a estudiantes de nivel superior, mediante un problema de contexto real. El propósito es introducir un concepto matemático abstracto mediante la resolución de un problema frecuente en el medio social de los estudiantes el cual corresponde a problemas con la columna vertebral.

Para realizar el experimento de enseñanza hemos tomado contacto con el Tecnológico Nacional de México plantel Santiago Tianguistenco (TEST). En este sentido nuestra primera tarea consistió en analizar el contenido temático de la materia de cálculo integral de variable real del Tecnológico Nacional de México (TecNM); el cual tiene una carga mayor en aprender: métodos de integración y técnicas de integración, haciendo poco énfasis en el significado de una integral e involucrar la aplicabilidad de esta en las diferentes áreas del conocimiento como sociales, ingenieriles, etc. Así mismo se realizó una comparación con los temarios de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) e Instituto Politécnico Nacional de México (IPN).

De esta manera nuestra propuesta didáctica de aprendizaje tiene como objetivo introducir y dar significado a la integral definida mediante un problema en contexto real, que signifique el concepto de integral y genere en el estudiante un pensamiento deductivo que

permita dar significado mediante una aplicabilidad de la integral definida en otra área de las ciencias o en su vida personal y profesional.

Para lograr el objetivo planteado, elegimos medir aproximadamente la longitud de una columna vertebral de un ser humano, este problema se presenta con frecuencia en las distintas etapas de crecimiento de un ser humano, para resolver el problema planteado desarrollamos cuatro actividades didácticas, que tienen los siguientes objetivos de aprendizaje:

- La primera: aproximar la forma curva de la columna vertebral, mediante pequeños segmentos de línea recta.
- La segunda: aproximar la longitud de una curva continua mediante la suma de pequeños segmentos rectos.
- La tercera: generalizar el proceso de aproximar la longitud de la gráfica de una función continua y suave en un intervalo definido.
- La cuarta llegar a la definición de integral definida, como el límite de la suma de longitudes de pequeños segmentos de línea recta.

Por tal motivo describiremos enseguida el contenido de los cinco capítulos que consta nuestro proyecto de manera breve.

Capítulo 1: Presentamos el método de Exhaustión de Eudoxo, utilizado por Arquímedes para aproximar el área de figuras irregulares y encontrar la cuadratura del círculo. Así mismo, mencionamos algunas investigaciones relacionadas con la integral de variable real en el campo de matemática educativa, siendo estas una base para el desarrollo de nuestro proyecto.

Capítulo 2: Presentamos los marcos teóricos que sustentan el desarrollo del proyecto: Teoría Hipotética de Aprendizaje de (Simon, 1995) que permite organizar nuestras actividades didácticas de aprendizaje, y algunos principios de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003), con los cuales desarrollamos las actividades didácticas de aprendizaje.

Capítulo 3: Describe la metodología utilizada para el desarrollo y diseño de las actividades didácticas de aprendizaje; el desarrollo cronológico del Escenario Didáctico Virtual Interactivo y las Hojas de Exploración y Aprendizaje Guiado (HEAG) que nos permitieron la recolección de los datos.

Capítulo 4: Mostramos e informamos los resultados obtenidos de la aplicación de las actividades didácticas de aprendizaje de los estudiantes, señalando el cumplimiento o no cumplimiento de las hipótesis de aprendizaje establecidas en el capítulo 2, así como los hallazgos encontrados en cada una de las aplicaciones realizadas.

Capítulo 5: Presentamos las conclusiones de la investigación, así como una reflexión acerca de nuestra investigación futura.

Finalmente agregamos un apartado de anexos de las hojas de exploración guía que fueron utilizados en la investigación y una propuesta de mejora de las mismas para futuras aplicaciones.

3 Antecedentes Históricos

"No es posible decir cuál es la mejor forma de enseñar,
pero sí, cuál no es la mejor."

Cuevas C.A.

Resumen

En el presente capítulo damos una breve descripción del desarrollo histórico y conceptual del cálculo, retomando a historiadores como Boyer (1986), Grabiner (1983) por mencionar algunos, quienes brindan a nuestra investigación elementos relevantes respecto al origen del cálculo. Además, damos una breve reseña del método de Exhaustión de Eudoxo, método que fue base para aproximar un segmento de curva de nuestra actividad didáctica. Mencionaremos algunos estudios realizados y hallazgos encontrados de cálculo, centrándonos en cálculo integral de variable real, los cuales tienen relación con las dos ideas principales del cálculo: *acumulación y variación* (Ímaz y Moreno-Armella, 2010)

3.1 Historia del Cálculo

El siglo XX fue el siglo del cálculo diferencial e integral. G. Strang

Los orígenes del cálculo se remontan a civilizaciones como los babilónicos, egipcios y griegos de acuerdo con Grabiner (1983), Boyer (1986), De Faria (2010). Ruiz (2003) comenta que los trabajos realizados por estas civilizaciones aportaron bases sólidas para la invención del cálculo. Algunos de los trabajos que se han encontrado de estas civilizaciones corresponden a tabletas de arcilla, las cuales contienen elementos de algunos métodos utilizados para resolver problemas relacionados con el cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de pirámides.

Dentro de estas civilizaciones existen científicos griegos como: Thales de Mileto y Pitágoras, Euclides y Apolonio quienes desarrollaron trabajos que fueron la base para el desarrollo del cálculo. Mientras Apolonio se le conoce por sus trabajos realizados con *Secciones Cónicas*, Euclides se da a conocer con su libro *Elementos*. En particular, el libro los *Elementos* fue referente para la elaboración del trabajo desarrollado por Eudoxo y Teeteto.

La principal contribución de Eudoxo (408 a. C.) tiene que ver con la teoría de las proposiciones y el método para calcular el área de ciertas figuras geométricas, este recibe el nombre de *Método de Exhaución*, él cual fue utilizado posteriormente por Arquímedes para realizar trabajos relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas, el cómputo del número π , la representación de los números muy grandes en forma verbal, centros de masa, hidrostática y astronomía entre otros. Así mismo Arquímedes escribió tratados, relacionados con las espirales, la esfera y el cilindro, demostrando en este último que la razón de los volúmenes del cilindro a la esfera es la misma razón que la razón de sus áreas de tres a dos.

En 1906 el filólogo e historiador danés Johan Ludwing Heiberg descubrió en Constantinopla uno de los papiros perdidos de Arquímedes, el cual tiene como nombre el código C. El palimpsesto de Arquímedes fue uno de los mayores descubrimientos para el desarrollo de las matemáticas, ya que en este se calculaba el área bajo una parábola y se puede tomar como un precedente para el nacimiento de la integral definida de Riemann.

En el último tercio del siglo XVII Grabiner (1983) nos menciona que Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz (1646-1716) descubrieron el cálculo. Para lograr este descubrimiento realizaron las siguientes acciones:

“Primero, retomaron la gran cantidad de métodos que ya existían para encontrar tangentes, extremos y áreas, y subsumieron todos estos métodos bajo el título de dos conceptos generales, los conceptos que ahora llamamos derivada e integral. En segundo lugar, elaboraron cada uno una notación que facilitó el uso para sus investigaciones. En tercer lugar, dieron cada uno un argumento para demostrar lo que ahora llamamos el Teorema Fundamental del Cálculo: la derivada y la integral son mutuamente inversas. Mientras Newton llamó a la "derivada" un flujo, una tasa de flujo o cambio; Leibniz vio la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó cociente diferencial”. (p.199)

Así mismo Imaz y Moreno (2010) hacen mención que el trabajo que desarrollo Isaac Newton estaba encaminado al movimiento, pero sus contribuciones iban más allá de estos estudios ya que realizó una síntesis de las leyes encontradas por Galileo y las leyes que regían el movimiento de los planetas, encontrado de esta manera una de las claves para lo que se ha llamado el código genético del Cálculo. A su vez mencionan que el alemán Gottfried W.

Leibniz (1646-1716) trabajó con el problema de cálculo de rectas tangentes. Teniendo de esta manera dos ideas que generan la base del cálculo.

De esta manera se generan las dos principales ideas en las cuales se basa el cálculo, que Imaz y Moreno (2009, pg. 1), comentan de la siguiente manera “*el cálculo se desarrolla bajo dos ideas principales que corresponden a la variación y acumulación*”. Teniendo estas dos ideas principales, Grabiner (1983) complementa que las bases para la invención del cálculo se basan en el concepto de función y de la misma manera Stewart (2008, p. 10) menciona que “*el propósito fundamental del cálculo son las funciones, mismas que se pueden representar mediante diferentes modos: una ecuación, una tabla, con una gráfica o con palabras*”, las cuales a su vez modelan procesos físicos, económicos, sociales e ingenieriles.

Por consiguiente, una de las herramientas para interactuar con la sociedad y nuestro entorno es por medio de la función relacionando los conceptos como: derivada, límite, integral, concavidad, máximos y mínimos, entre otros. Temas que son de estudio por nuestro campo disciplinar de matemática educativa.

3.2 Investigaciones de cálculo en matemática educativa

La comprensión de las propiedades que se generan en cálculo genera un campo de las matemáticas que es muy amplio de analizar, es por ello por lo que nos enfocaremos en las investigaciones que se relacionen con el hecho de analizar la comprensión y desarrollo de estrategias que permiten al estudiante mejorar el entendimiento de los conceptos de cálculo integral de variable real y la aplicabilidad de este en las diferentes áreas científicas.

Investigadores como Bezuidenhout, Oliver (2000); Hugo (2015); Bressoud et al. (2016) por mencionar algunos, nos comparten algunos estudios relacionados con el concepto de la integral, ahí se reportan las deficiencias relacionadas con el concepto de integral en el sentido de comprensión del concepto, observar la integral como una función primitiva, entre otros que se generan en los estudiantes. En específico, Bezuidenhout y Oliver (2000) nos comentan que las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow y no se integra el concepto de área con el de la integral.

Las deficiencias en la comprensión del concepto de integral que menciona Hugo (2015) se manifiestan cuando los estudiantes interpretan el área limitada por la gráfica de una función

que pasa de positiva a negativa o viceversa, así como en la comprensión del conocimiento ya que no se logra dar una conexión entre el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y analítico. Este problema se presenta principalmente cuando utilizan la definición de manera algorítmica, mecánica o memorística, teniendo como consecuencia el aislamiento de la integral en otros contextos.

A su vez en Bressoud et al. (2016); Larsen et al. (2017) presentan la relación de los estudiantes con la comprensión de las integrales, dando como resultado una carencia de significado cuantitativo de cambio acumulado y dejando que la integral sea en gran medida una cuestión procedimental.

En investigaciones como Sealey (2008, 2014) se menciona que los estudiantes pueden calcular el área bajo una curva, sin embargo, lo realizan relacionando los cálculos obtenidos con una suma de Riemann como una acumulación.

Por otra parte, Jones (2013), menciona que para tratar la integral se debe identificar el integrando como la derivada de alguna función y “sumar piezas” , esto se relaciona con el concepto de acumulación.

De la misma manera Larsen et al. (2017) hace referencia a Thompson y Silverman (2008) respecto al concepto de acumulación, mencionando que este concepto está relacionado con la vida del estudiante, pero surge el problema de conceptualización del concepto de la integral como un proceso de acumulación. Para solucionar este problema se da una propuesta la cual se basa en esquemas que involucran la acumulación desde una parte multiplicativa.

Como podemos observar en estas investigaciones las principales problemáticas que detectamos están relacionadas con dar a la integral un tratamiento algorítmico, con poco significado y recomiendan tratarla bajo la perspectiva de acumulación.

Para continuar con nuestra revisión, realizaremos un análisis no exhaustivo de los libros de texto Stewart (2008), Swokowsky (1988), que son referencias bibliográficas de la materia de cálculo integral de variable real en los contenidos temáticos del programa de estudios de la carrera de ingeniería industrial de TecNM. Al analizarlos encontramos que para introducir el concepto de integral se realiza usando áreas bajo la curva por medio de Sumas de Riemann (Stewart, 2008). esto hace que la introducción de la integral sea formal y fuera de cualquier

contexto; esto de acuerdo con Cordero (2005), produce una matemática descontextualizada ajena a los intereses de los estudiantes y que con frecuencia sea poco comprensible.

Una propuesta para esta problemática nos la brinda Cordero (2005), quien retoma la segunda idea de la integral y propone con base a ello la noción de acumulación como medio para resignificar la integral, para ello sugiere ciertas situaciones de enseñanza que se enfocan en situaciones específicas de “variación continua y cambio”.

De estos estudios, la investigación que se generó y se reporta en los siguientes capítulos tiene como objetivo mostrar el proyecto de introducir la integral como un proceso de acumulación. Esto es, introducir y significar al concepto de integral a estudiantes de nivel superior, partiendo desde un contexto real de aproximación a la longitud de la columna vertebral con apoyo de tecnología digital, para ello se desarrollaron actividades didácticas de aprendizaje que consiste en aproximar la longitud de la columna vertebral mediante una acumulación de segmentos rectos pequeños, y con apoyo de herramienta tecnológicas digitales debidamente programadas.

Lo anterior nos podrá ayudar a responder a la pregunta:

¿Cómo significa el concepto de integral, a estudiantes de nivel superior, a partir de un problema real de acumulación?

Nuestra propuesta de investigación consiste en desarrollar y aplicar actividades didácticas de aprendizaje que parten de rectificar la longitud de una columna vertebral las cuales están organizadas bajo una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), y algunos principios didácticos (Cuevas & Pluvinae, 2003).

Para el desarrollo del escenario didáctico virtual interactivo (EDVI) y las hojas de exploración y aprendizaje guiado (HEyAG), nos apoyamos del uso de la tecnología digital, con lo cual dotamos a los estudiantes de unos escenarios dinámicos e interactivos con retroalimentación en donde se podía visualizar y experimentar las respuestas de los estudiantes a las actividades didácticas de aprendizaje.

Como la longitud de la curva que representa la columna vertebral se aproxima por medio de la suma de segmentos de línea recta, cada vez más pequeños, creemos necesario dar un acercamiento al método de Exhaustión, del cual hablaremos en la siguiente sección.

3.3 Método de Exhaución

En la antigüedad, calcular la longitud de un arco irregular era imposible. Varios métodos fueron utilizados para realizar la aproximación a una curva, sin embargo, hasta la creación del cálculo fue cuando se dio una aproximación más precisa por medio de fórmulas generales, aunque con ciertas restricciones.

Sin embargo, previo a la aparición del cálculo Arquímedes había descubierto una aproximación regular para calcular el área bajo una curva utilizando el método de Exhaución, pero solo matemáticos de su época creyeron que se podía conocer la longitud de una curva por medio de líneas rectas.

Para conocer la longitud de una curva los matemáticos de la época antigua trazaban segmentos poligonales dentro de la curva, de esta manera sumando la longitud de los segmentos poligonales se daba una medición aproximada a la curva. Mientras más segmentos se utilizaban, mejor aproximación se tenía.

Uno de los ejemplos que podemos mencionar, consiste en calcular el área del círculo, para ello se inscribe un número grande de polígonos regulares, de tal manera al ir aumentando el número de lados, la longitud de sus lados debe ir disminuyendo cada vez más y más, esto se realiza hasta obtener una buena aproximación del área del círculo.

Este proceso de aproximación mediante la disminución de segmentos de línea recta se visualiza en la siguiente imagen.

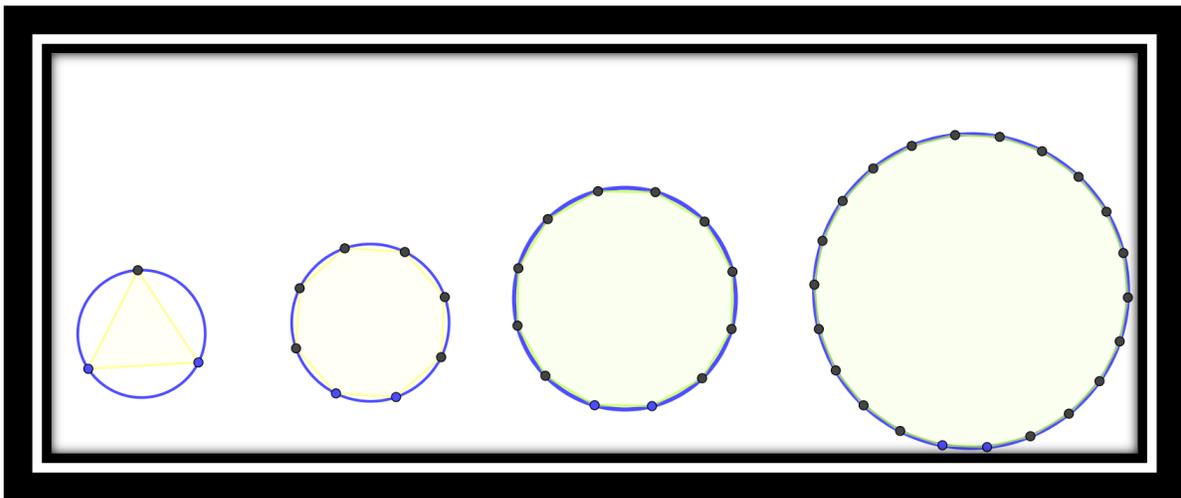


figura 1 Imagen de proceso de aproximación a forma de círculo, elaboración propia,

Siglos después, durante el siglo XVII, se utilizaron métodos geométricos para la rectificación de curvas trascendentes, algunos ejemplos que podemos mencionar son: la espiral logarítmica por Evangelista Torricelli (1608-1647), la cicloide por Christopher Wren (1632-1723), y la catenaria por Gottfried Leibniz (1646-1716).

El método de Exhaución consiste en dar una aproximación a la longitud de una circunferencia mediante polígonos circunscritos e inscritos en la circunferencia. De esta manera el método de exhaución es la base para las Sumas de Riemann, la cual permite definir la integral de una función en un intervalo indicado

En Cantoral y Farfán (2003, p.25), nos dan a conocer “un teorema que es atribuido a Eudoxo, que es la proposición 2 del libro XII de los elementos de Euclides” la proposición que se menciona dice lo siguiente:

“Los círculos son uno al otro como los cuadrados de los diámetros.”

Así mismo se dan 3 pasos a seguir para realizar esta demostración:

1. *“Se demuestra un teorema análogo para polígonos inscritos en circunferencias”.*
2. *“Se demuestra que el área del círculo puede ser exhaustada por medio de las áreas de los polígonos regulares inscritos de 2^n lados”*
3. *“Se utiliza el método de reducción al absurdo para mostrar el resultado buscado.”*

El método de exhaución consistía en aproximar el área de los círculos con polígonos regulares inscritos y circunscritos. A continuación, daremos una breve explicación respecto a cómo se aproximaba el área.

Partiremos con un círculo de radio 1, de esta manera inscribimos y circunscribimos un cuadrado. Como en la siguiente figura.

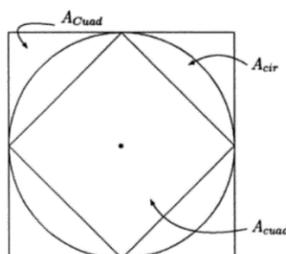


figura 2 Cuadrado inscrito y circunscrito al círculo.

Donde:

A_{cir} : área del círculo

A_{cuad} : área del cuadrado inscrito

A_{Cuad} : área del circunscrito

El cuadrado inscrito tiene como vértices los puntos medios de los segmentos del cuadrado circunscrito. De esta manera ahora calcularemos las áreas de los dos cuadrados, con base a ello como el círculo es de radio 1, y el diámetro del círculo coincide con los lados del cuadrado, como se muestra en la figura 2

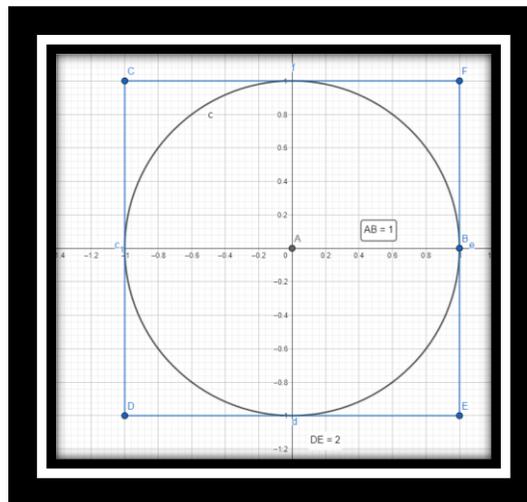


figura 3. Longitud de lado de cuadrado

Obteniendo ya esa longitud del lado, podemos retomar la fórmula para obtener el área de un cuadrado, la cual corresponde a $A_{Cuad} = l^2$, de esta manera el área del cuadrado circunscrito es 4 unidades cuadráticas.

Ahora para conocer el área del cuadrado inscrito, observaremos primero que tiene como vértices los puntos medios del segmento de los lados de cuadrado circunscrito, se puede observar que el lado del cuadrado inscrito es la hipotenusa del triángulo que se forma por el cuadrado inscrito y circunscrito. De esta manera utilizaremos el teorema de Pitágoras para conocer la longitud del lado del cuadrado inscrito.

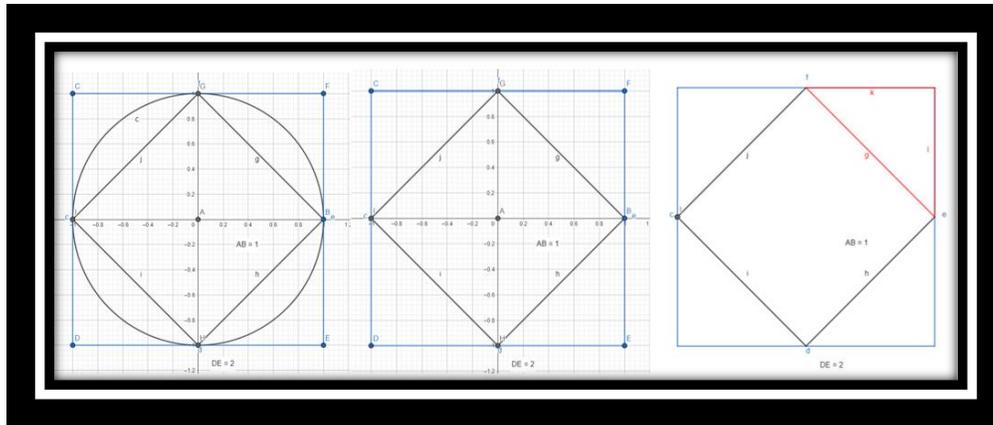


figura 4 triángulo formado por cuadrado inscrito y circunscrito

Como los catetos del triángulo tienen el valor de 1, entonces tenemos que el valor de la hipotenusa corresponde a $\sqrt{2}$. Con base a ello podemos indicar que el área del cuadrado inscrito está dado por:

$$A_{cuad} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

Comparando las áreas de los cuadrados inscritos y circunscritos, podemos observar

$$A_{Cuad} = 2A_{cuad}$$

O equivalentemente

$$\frac{A_{Cuad}}{2} = A_{cuad}$$

Si procedemos ahora a dividir nuestro cuadrado circunscrito en cuatro cuadrados, y en cada uno de ellos lo dividimos por medio de su diagonal de tal manera que formemos el cuadrado inscrito, como se muestra en la figura siguiente.

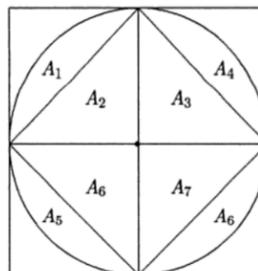


figura 5 Cuadrado circunscrito dividido.

Al calcular sus áreas de cada uno de ellos tenemos lo siguiente

$$A_{cuad} = A_2 + A_3 + A_6 + A_7 = \frac{A_{Cuad}}{2}$$

En Cantoral y Farfán (2003, p. 26) nos mencionan que:

“usando básicamente una consecuencia del principio, de que dadas dos cantidades podemos sumar la pequeña consigo misma un número suficientemente grande de veces hasta exceder la grande, (lo que ahora es conocido como axioma de Arquímedes), Eudoxo afirma que la diferencia del círculo y la del polígono regular de 2^n lados, con n suficientemente grande puede ser hecha menor que cualquier cantidad asignada de antemano”.

Continuando con Cantoral y Farfán (2003, p. 28), hacen referencia que en el *“prefacio de La cuadratura de la parábola, Arquímedes resalta que los matemáticos antiguos habían tenido éxito al calcular el área de segmento de círculos e hipérbolas, pero aparentemente no había intentos anteriores para determinar la cuadratura de la parábola, lo cual se puede hacer mediante el método de exhaustión”.*

Nuestra investigación introducirá la integral definida calculando la longitud de un segmento de curva por medio de segmentos de línea recta, partiendo desde un contexto real, relacionado con la longitud de una columna vertebral.

3.4 Columna Vertebral

La columna vertebral es una parte fundamental del esqueleto humano, la cual está constituida por múltiples piezas articuladas entre sí, mismas que permiten realizar movimientos en el cuerpo humano sin provocar una lesión al sistema nervioso. Dado que la columna vertebral de los seres humanos está en constante movimiento y crecimiento hasta una cierta edad, es importante cuidar de ella ya que los cambios, se dan principalmente en las vértebras y discos lumbrales, los cuales se consideran como los más resistentes de la columna, que permiten que el ser humano pueda realizar sus actividades diarias.

Desde un punto funcional la columna vertebral que está constituida de tal manera que pueda desarrollar diferentes movimientos, no obstante, está limitada para realizar movimientos de contorsión en algunas direcciones.

Ahora bien, uno de los problemas más comunes que presenta un ser humano con su columna vertebral se derivan por las malas posturas que se toma en sus diferentes actividades cotidianas, por ejemplo, al sentarse en posiciones incorrectas, dormir de manera incorrecta o en colchones que no son aptos para la columna, usar calzado inadecuado, etc., estas malas costumbres desprenden problemas que requieren una atención médica para corregir el problema o para tratar de corregirlo.

Por ejemplo, durante el tiempo de pandemia de Covid-19, la sociedad tuvo que resguardarse en su casa y realizar su trabajo profesional con apoyo de una computadora o un teléfono móvil, dados los malos hábitos cotidianos al sentarse o por estar mucho tiempo desarrollando su trabajo frente a la computadora o un dispositivo móvil se elevaron los problemas de columna vertebral. De estas problemáticas, una de las preguntas que se relacionan con la columna vertebral tiene que ver con el grado de deformación que se generó en la columna vertebral y por consecuencia el grado de rectificación que se debe tener para corregir el problema.

Habitualmente las personas que desarrollan problemas de la columna vertebral no se atienden de manera oportuna o dan continuidad a su tratamiento, hasta que el problema impide desarrollar las actividades cotidianas de las personas.

Para dar un tratamiento médico, los especialistas en esta área, en primera cuenta obtienen una radiografía de la columna vertebral del paciente para posteriormente con base a ello calculan el ángulo de Cobb para medir la curvatura que tiene la columna vertebral del paciente y la comparan con la curvatura promedio que debe tener un ser humano a cierta edad, con esta medida, los médicos pueden indicar a su paciente el grado de problema que tiene su columna vertebral y proporcionan la rehabilitación adecuada que le ayude a rectificar la curvatura de su columna vertebral.

En la figura 5 se muestra una imagen de lo que corresponde al ángulo de Cobb.

Ángulo de Cobb

Para calcular el ángulo de Cobb se traza una línea por el platillo vertebral superior de la vértebra proximal, otra línea por el platillo vertebral inferior de la vértebra distal, luego una línea perpendicular a cada una de ellas, y se mide el ángulo de intersección como se muestra en la figura 5.

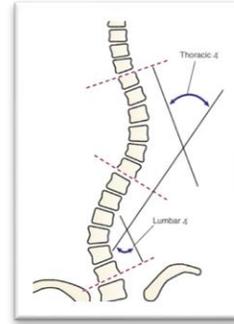


figura 6 Esquema de la medición del ángulo de Cobb en la curvatura torácica y en la lumbar. Tomado de Tachdjian's Pediatric Orthopaedics.

Tomando en cuenta que la columna vertebral tiene una forma curva y que existe una medida promedio en las personas adultas, nuestra intención de retomar este problema de rectificación de la columna vertebral se da porque todos estamos expuestos a sufrir algún problema en ella, por ende, consideramos que es un problema de interés para cualquier persona. Además de poder diagnosticar problemas de salud como la acromegalia trastorno hormonal que se padece cuando la glándula pituitaria produce gran cantidad de hormona de crecimiento durante la edad adulta. En la niñez, esto lleva a una mayor estatura y se denomina gigantismo.

Continuando con nuestro estudio, daremos paso al análisis de los contenidos temáticos para analizar de qué manera se imparte el tema de integral definida, enfocándonos en cómo se introduce este concepto matemático.

3.5 Análisis de contenido temático

Dado que nuestra investigación, va dirigida a profesores en servicio de escuelas de ingeniería; por consiguiente, se analizaron los contenidos temáticos de la materia de cálculo integral de las siguientes escuelas de nivel superior: Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa (UAMI), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y Tecnológico Nacional de México (TecNM). Con la finalidad de conocer cómo es que se introduce la integral en cada una de ellas.

Iniciaremos analizando los objetivos generales de aprendizaje de los contenidos temáticos de las instituciones antes mencionadas, una vez analizado el objetivo general, nos enfocaremos

en las unidades que se plantean para enfocarnos en los temas de la unidad en la cual se introduce la integral.

Nuestra hipótesis refiere a que la impartición de cátedra y desarrollo de actividades de aprendizaje dependen del libro de referente, de la misma manera su cátedra está relacionada con la forma en como él recibió cátedra como estudiante, por consiguiente, sigue la línea de la escuela tradicional.

En primer lugar, en la Tabla 1, mostramos un cuadro comparativo con los objetivos generales de aprendizaje de cada uno de los programas educativos.

UNIVERSIDAD/ OBJETIVO	UNAM	TecNM	UAMI
Objetivo general de la materia.	“El alumno utilizara conceptos de cálculo integral para funciones reales de variable real y las variaciones de funciones escalares de variable vectorial respecto a cada una de sus variables, para resolver problemas físicos y geométricos.”	“Contextualizar el concepto de integral. Discierne cuál método puede ser más adecuado para resolver una integral dada y la resuelve usándolo. Resuelve problemas de cálculo de áreas, centroide, longitud de arco y volúmenes de sólidos de revolución. Reconoce el potencial del Cálculo Integral en la Ingeniería.”	“Que al final del curso el alumno sea capaz de: comprender el concepto de integración indefinida como el proceso inverso de la derivación y su utilización en el cálculo del valor de integrales definidas. Utilizar en forma intuitiva los conceptos básicos del Cálculo Integral en el planteamiento y solución de problemas de matemáticas

UNIVERSIDAD/ OBJETIVO	UNAM	TecNM	UAMI
			relacionadas con química, física e ingeniería.”

Tabla 1 Objetivo general de aprendizaje de instituciones educativas

Como podemos observar los objetivos de aprendizaje, están relacionados con los conceptos del proceso de antiderivada, identificar el método más adecuado para utilizar conceptos y resolver problemas en otras disciplinas del conocimiento. Sin embargo, la parte procedimental en el manejo de las técnicas de integración se tiene como prioridad, dejando en segundo plano el razonamiento y comprensión del concepto, así como la aplicabilidad de este.

En segundo lugar, en la Tabla 2, mostramos un cuadro comparativo que incluye los nombres de las unidades de aprendizaje de los contenidos temáticos.

Análisis de Temario

Universidad	UNAM	TecNM	UAMI
Unidades de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Sucesiones y series • La integral definida e indefinida • Métodos de integración • Derivación y diferenciación de funciones escalares de varias variables. 	<ul style="list-style-type: none"> • Teorema Fundamental del Cálculo • Integral indefinida y métodos de integración • Aplicaciones de la integral • Series 	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas matemáticos y de otras disciplinas que conducen a la integral definida • La integral definida como función de uno de los extremos de integración y el Teorema

Universidad	UNAM	TecNM	UAMI
			Fundamental del Cálculo <ul style="list-style-type: none"> • Funciones Logarítmicas, exponenciales e Hiperbólicas • Métodos de Integración • Integrales Impropias • Aplicaciones de la integral • Teorema de Taylor

Tabla 2 Temario que contienen las Unidades de aprendizaje de los contenidos temáticos.

Aquí podemos observar que el contenido temático de la UAMI es el único temario donde se tiene una unidad que relaciona problemas de otras disciplinas con la integral definida, lo cual se apega, en parte, a uno de los principios de la didáctica de Cuevas & Pluinage (2003), aunque nuestra propuesta consiste en introducir el concepto de integral a partir de un problema en contexto real. Por otra parte, en el contenido de TecNM, se observa una unidad que tiene relación con el hecho de las aplicaciones de la integral en otras áreas, pero el orden de aparición cambia entre el TecNM y UAMI, ya que mientras en UAMI aparece en los primeros temas, en TecNM se pone como final de la unidad, esto hace que el estudiante primero tenga una carga de aprendizaje teórica sin conocer la aplicabilidad de los conceptos que está adquiriendo.

De acuerdo con esas unidades temáticas en la Tabla 3, mostramos las siguientes unidades temáticas consideradas.

UNAM	TecNM	UAMI
<ul style="list-style-type: none"> Las integrales definidas e indefinidas 	<ul style="list-style-type: none"> Teorema Fundamental del Cálculo 	<ul style="list-style-type: none"> Problemas matemáticos y de otras disciplinas que conducen a la integral definida.

Tabla 3 Unidad de aprendizaje analizada

Las cuales por nombre consideramos que son aquellas donde se introduce la integral definida. De aquí vemos que la única institución donde se nombra la unidad relacionando los problemas en otras disciplinas y la integral definida corresponde a la UAMI.

En el siguiente cuadro comparativo mostraremos los temas que contienen las unidades que fueron seleccionadas para su análisis.

Análisis de Contenido temático

UNAM	TecNM	UAMI
<ul style="list-style-type: none"> Concepto de Sumas de Riemann. Concepto de integral definida. Interpretación geométrica y propiedades Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo Integral. Definición de la integral indefinida a partir de la integral definida con el extremo superior 	<ul style="list-style-type: none"> Riemann Medición aproximada de figuras amorfas Notación de sumatoria Sumas de Riemann Integral definida Definición de integral definida Teorema de existencia Función primitiva Propiedades de la integral definida Teorema fundamental del Cálculo 	<ul style="list-style-type: none"> Notación de suma y propiedades básicas. Problemas que conducen a sumas de pequeños efectos. Sumas de Cauchy-Riemann Definición de la integral definida. Propiedades de la integral Aproximaciones de la integral

UNAM	TecNM	UAMI
variable. Enunciado y demostración del teorema del cálculo. <ul style="list-style-type: none"> • Determinación de integrales indefinidas inmediatas. Cambio de variable • Integrales de funciones cuyo resultado involucra a la función logaritmo natural. • Regla de L'Hopital y sus aplicaciones a formas indeterminadas en límites de funciones. • La integral impropia. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de integrales definidas • Integrales impropias 	

Tabla 4 Contenido temático de Unidad de aprendizaje analizada

Observando el tema de UNAM, “*Definición de la integral indefinida a partir de la integral definida con el extremo superior variable*”, primero se introduce la integral definida, lo cual genera la pregunta ¿cómo el docente introduce la integral definida? Por otra parte, en UAMI, se tiene el tema de “*aproximaciones de la integral*”, la cual se ajusta a nuestra propuesta de actividad didáctica de aprendizaje. En TecNM se da una aproximación a nuestra investigación por medio del tema “*Medición aproximada de figuras amorfas*”.

Sin embargo, tenemos que en las tres instituciones coinciden con el tema de Sumas de Riemann y que es el tema con el cual inicia el contenido temático.

De acuerdo con nuestra propuesta de introducir el contenido la integral partiendo desde un contexto real, se incorpora sin ninguna restricción en los contenidos de la UAMI, así mismo se puede considerar como una propuesta para las otras instituciones que se analizaron.

Finalmente analizaremos las referencias bibliográficas que se dan en los contenidos temáticos.

Referencias Bibliográficas.

UNAM	TecNM	UAMI
<p>1) LARSON, Ron, BRUCE, Edwards Cálculo 1 y Cálculo 2, 9a. edición México McGraw-Hill, 2010</p> <p>2) PURCELL, Edwin, VARBERG, Dale, RIGDON, Steven Cálculo, 9a. edición México Pearson Education, 2007</p> <p>3) STEWART, James Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas, 6a. edición México Cengage Learning, 2008</p> <p>4) GARCÍA Y COLOMÉ, Pablo Integrales impropias, México UNAM, Facultad de Ingeniería, 2002</p>	<p>1) Ramos Beltrán, J. A. (2018). Cálculo Integral. México. Alfaomega. Anton H. (2009). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas. (2ª. Ed.). México. Limusa.</p> <p>2) Ayres, F. (2010). Cálculo. (5ª. Ed.). México. McGraw-Hill.</p> <p>3) Larson, R., Edwards, B. H. (2010). Cálculo I de una variable. (9ª. Ed.). México. McGraw Hill.</p> <p>4) Larson, R. (2009). Matemáticas 2 Cálculo Integral. México. McGrawHill.</p> <p>5) Leithold, L. (2009). El Cálculo con</p>	<p>1) F. AYRES, JR. & E. MENDELSON, "Cálculo Diferencial e Integral", 3a. Edición. Colección Schawn. Ed. McGraw Hill, 1991. ISBN 0-07-002662-9 ISBN 84-7615-560-3.</p> <p>2) BENÍTEZ L. R., Cálculo Integral para Ciencia Básicas e Ingeniería, Editorial Trillas S. A. de C. V., México, 2005, ISBN 968-24-5318-6.</p> <p>3) R. COURANT Y F. JOHN, "Introducción al Cálculo y al Análisis. Volumen I", Ed. Limusa, México, 1974.</p>

<p>5) GARCÍA Y COLOMÉ, Pablo Funciones hiperbólicas, México UNAM, Facultad de Ingeniería, 2002</p> <p>6) LARSON, R., HOSTETLER, Robert, BRUCE, Edwards Calculus with Analytic Geometry, 8th. edition Boston Houghton Mifflin Company, 2006</p> <p>7) ROGAWSKY, Jon Cálculo una variable, 2a. edición Barcelona Reverté, 2012</p> <p>8) ROGAWSKY, Jon Cálculo varias variables, 2a. edición Barcelona Reverté, 2012</p> <p>9) SPIEGEL, Murray Cálculo Superior Todos México McGraw-Hill, 2001</p>	<p>Geometría Analítica. (7ª. Ed.). México. Oxford University Press.</p> <p>6) Stewart, J. (2013). Cálculo de una variable: trascendentes tempranas. (7ª. Ed.). México. Cengage Learning.</p> <p>7) Thomas, G. B. (2012). Cálculo de una variable con código de acceso MyMathlab. (12ª. Ed.). México. Pearson.</p> <p>8) Zill, D. Wright, W. (2011). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. (4ª. Ed.). México. Mc Graw Hill.</p> <p>9) Zill, D. Wright, W. (2011). Matemáticas 2 Cálculo integral. (4ª. Ed.). México. Mc Graw Hill.</p>	<p>4) EDWARDS & PENNEY, "Cálculo con Geometría Analítica", 4a. Edición, Ed. Prentice Hall 1996. ISBN 968-880-596-3.</p> <p>5) R. SILVERMAN, "Essential Calculus with Applications", Ed. Dover publications, Inc, New York 1977, 1989. ISBN 0486-66097-4.</p> <p>6) E. SOWOKOWSKI, "Cálculo con Geometría Analítica", 1989 Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, 1989, ISBN 968.7270-43-8.</p> <p>7) J J. STEWART, "Cálculo", Editorial. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1994. ISBN 970-625--028-X. Libros de consulta</p>
--	---	---

<p>10) THOMAS, George, FINNEY, Ross Cálculo una variable, 10a. edición México Pearson Educación, 2005</p> <p>11) THOMAS, George, FINNEY, Ross Cálculo varias variables, 10a. edición México Pearson Educación, 2005</p> <p>12) ZILL G., Dennis, WRIGHT, Warren Cálculo de una variable Trascendentes tempranas, 4a. edición México McGraw-Hill, 2011</p> <p>13) ZILL G., Dennis, WRIGHT, Warren Cálculo de varias variables, 4a. edición México McGraw-Hill, 2011</p>	<p>10) Purcell, Edwin J. (2007) Cálculo, Editorial Pearson.</p> <p>11) Granville, William A. Cálculo Diferencial e Integral, Editorial Limusa, 2009Adams</p> <p>12) Robert A. Cálculo</p> <p>13) Edwards, Charles Henry. Cálculo con Geometría Analítica Smith,</p> <p>14) Robert T. Cálculo</p> <p>15) Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral</p>	<p>8) THOMAS & FINNEY, "Cálculo con Geometría Analítica", Editorial. Addison-Wesley Iberoamericana. S.A. de C.V., México, 1986. ISBN 0-201-51849.</p>
---	---	---

Como se puede observar existe una gran variedad de referencias bibliográficas que son de apoyo tanto para el docente como para el estudiante, sin embargo, de todas las referencias

solo por autor coincide una referencia en las 3 instituciones, el cual corresponde a James Stewart, aunque en cada una institución sugiere diferente edición de su libro. De esta manera nos centraremos en revisar como se introduce la integral definida, en este libro.

En el capítulo 5 llamado *Integrales*, se da una introducción al capítulo en donde se indica “*en este capítulo se empieza con los problemas del área y de la distancia y se utiliza para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral*” dentro de este capítulo se muestran dos ejemplos que corresponden a el cálculo de áreas, para calcular el área aparece un límite de la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*) \Delta x + f(x_2^*) \Delta x + \dots + f(x_n^*) \Delta x]$$

Ilustración 1 límite para calcular un área tomada de Stewart p. 366.

Y para obtener la distancia también aparece un límite de esa forma.

De esta manera (Stewart, p 366) dan la siguiente definición de integral definida.

2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0 (= a)$, $x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f , desde a hasta b , es

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

Ilustración 2 definición de integral obtenida de libro *Cálculo de una variable*, Stewart p. 366

Dado que el libro de referencia se centra más al cálculo de áreas, es por ello que los profesores se quedan con esa idea, la cual corresponde a que la integral es el área bajo la curva y minimizan de esta manera la aplicabilidad de la integral.

4 Marco Teórico-Metodológico

Para enseñar matemáticas,
una condición necesaria es saber matemáticas;
pero no es suficiente.

Cuevas C. A.

En este capítulo trataremos el marco teórico-metodológico que es base para el desarrollo de nuestra investigación. El proyecto de investigación que presentamos consta de:

- Cuatro actividades didácticas.
- Aplicación de algunos principios de la didáctica Cuevas & Pluvinage (C&P) para la elaboración y desarrollo de las actividades.
- Los dos escenarios Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI) desarrollados mediante un programa de geometría dinámica y acompañados de las Hojas de Exploración y Aprendizaje Guiado (HEyAG).
- Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), para organizar, dosificar la complejidad del concepto matemático y clarificar los objetivos de aprendizaje de cada actividad.

Iniciaremos mencionando algunas características de la trayectoria hipotética de aprendizaje de Simon (1995), posteriormente continuaremos dando mención a los principios que se retomaron de la didáctica C& P y como fueron adaptados a investigación.

4.1 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

Para Simon (1995), una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) “*Es una trayectoria que un investigador propone hipotéticamente para el aprendizaje de un cierto concepto matemático complejo*”. De esta manera, la THA en nuestra investigación organiza nuestras actividades didácticas de aprendizaje siguiendo las tres componentes principales que propone Simon (1995), en los siguientes párrafos mencionaremos a que se refieren estas componentes y como fueron adaptadas a nuestra propuesta de investigación.

a) La primera componente refiere a “*Tener claro los objetivos de aprendizaje*”, Para ello mostramos en la Tabla 5, el objetivo general y los objetivos específicos de cada una de las actividades de aprendizaje aplicadas.

Nombre de la Actividad de Aprendizaje	Objetivo específico de la actividad didáctica de Aprendizaje
General	Introducir y significar la integral de variable real partiendo de la acumulación de segmentos, cada vez más pequeños, de línea recta que aproximan la longitud de la columna vertebral.
Aproximación	Aproximar a la forma curva de la columna vertebral mediante segmentos de línea recta, en series sucesivas de segmentos cada vez más pequeños.
Longitud	Medir aproximadamente la longitud de la columna vertebral multiplicando el número de segmentos iguales con un valor de longitud de segmento propuesto por el estudiante.
Aplicación de la integral	Resolver problemas en los cuales se involucre la aproximación de medida de una curva en problemas de otras disciplinas.
Conceptualización de la integral	Identificar que la integral se pueda ver como un proceso de acumulación, el cual se aproxima por medio de sumas de Riemann.

Tabla 5 Actividades de Aprendizaje y objetivos de aprendizaje

b) La segunda componente indica “*Desarrollo de actividades de aprendizaje. las cuales indican, que es lo que realizara el estudiante durante la ruta de aprendizaje*”.

Para esta componente, en la Tabla 6, se muestra la propuesta de 4 actividades didácticas de aprendizaje las cuales tienen un orden cronológico de aplicación.

No. De actividad de aprendizaje	Actividades de Aprendizaje
Actividad 1	<ol style="list-style-type: none"> 1. Leer las instrucciones y texto para relacionarse con el problema en contexto. 2. Ingresar al enlace del EDVI-Col01 que se indica en la actividad. 3. Interactuar con el EDVI-Col01 experimentando con diferentes valores y observando que es lo que pasa al ingresar cada uno de los valores elegido por él. 4. Contestar las preguntas que se indican en HEyAG. Con apoyo de EDVI-Col01.
Actividad 2	<ol style="list-style-type: none"> 1. Interactuar con el EDVI-Col02 2. Contestar las preguntas indicadas en HEyAG 3. Completar la tabla indica en la HEyAG sin apoyo de EDVI.
Actividad 3	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resolver los problemas que se presentan, dando una interpretación a los resultados encontrados, los cuales están relacionados con el rendimiento de combustible y longitud de arco.
Actividad 4	<ol style="list-style-type: none"> 1. Conceptualizar el concepto de integral por medio de expresiones matemáticas.

Tabla 6 Actividades de Aprendizaje

c) La tercera componente corresponde a *“La definición del proceso hipotético de aprendizaje. En esta componente las actividades que se desarrollan tienen una hipótesis de aprendizaje que se genera a partir de la experiencia del profesor.”*

En la Tabla 7, mostramos el proceso hipotético de aprendizaje de cada una de las actividades que proponemos lo representamos en la siguiente tabla:

Actividad de Aprendizaje	Proceso Hipotético de Aprendizaje
Actividad 1	Deducir por medio de la interacción del estudiante con él EDVI-Col01 al ingresar diferentes longitudes de segmento de línea recta, que la mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral se da cuando la longitud de segmento es cada vez más pequeña.
Actividad 2	Desarrollar la intuición y deducción que por medio de la acumulación de segmentos de línea recta se da una aproximación la forma curva de la columna vertebral.
Actividad 3	Para aproximar la longitud de una curva se debe realizar por medio de segmentos de igual longitud pequeña y esta longitud multiplicarla por el número de segmentos que se agregaron, Aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones reales en diferentes contextos: dar solución a problemas de medición de longitud de un arco de ventana, y de cálculo de la medida de una curva de rendimiento de un automóvil.
Actividad 4	Deducir que acumulación de segmento pequeños representado como un límite define a la integral definida.

Tabla 7 Procesos Hipotético de Aprendizaje de actividades didácticas

Para nuestra investigación es de suma importancia mencionar que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje sufren cambios durante, antes o después de la aplicación y esto se debe al grupo de estudio con el que se trabaja, las condiciones donde se aplica la actividad didáctica de aprendizaje, estas modificaciones son necesarias para poder alcanzar el objetivo de aprendizaje, por consiguiente, estas modificaciones que se realizan les nombraremos rutas de aprendizaje.

En este sentido Simón (1995) indica que una trayectoria hipotética de aprendizaje “*no pretende sugerir que el profesor siempre persiga un objetivo a la vez o que solo se considere una trayectoria, sino que destaca la importancia de tener un objetivo y una razón de ser para las decisiones de enseñanza y la naturaleza hipotética de ese pensamiento*”.

De esta manera, el siguiente esquema que se presenta una traducción del ciclo de la trayectoria hipotética de aprendizaje de Simón (1995).

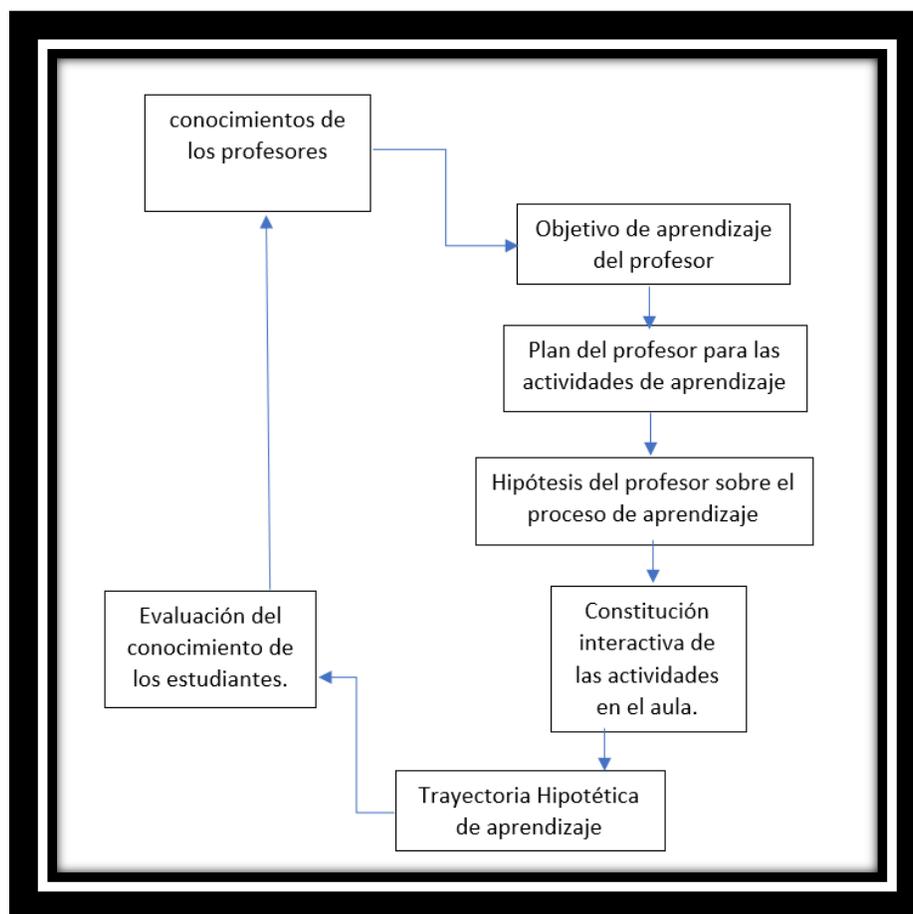


figura 7 Traducción propia del ciclo de trayectoria hipotética de aprendizaje de Simón (1995, p. 136).

Esta trayectoria será una base que adoptaremos para proponer nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje.

Finalmente, como se mencionó anteriormente las actividades didácticas de aprendizaje fueron generadas retomando algunos principios de la didáctica Cuevas y Pluvinaige (2003), por tal motivo comentaremos en el siguiente apartado cuáles son esos principios que se retomaron y como se aplicaron a las actividades didácticas de aprendizaje.

4.2 Didáctica Cuevas y Pluinage (2003)

En el proceso de enseñanza aprendizaje para Cuevas & Pluinage (2003) *“el alumno no puede ser una parte pasiva, por el contrario, debe realizar acciones concretas en cada parte del proceso”*, sin embargo, por acciones refieren a *“las acciones en matemáticas”* las cuales pueden ser *“físicas o mentales”*. De esta manera en nuestras actividades didácticas de aprendizaje guiado, el estudiante está en constante movimiento mental, con la finalidad de desarrollar un pensamiento deductivo e inductivo al interactuar con los EDVIs y las respectivas HEyAG.

Los principios que se retoman de la didáctica C&P se mencionan a continuación:

El primer principio refiere a un estudiante *“activo”*, C&P lo definen de la siguiente manera.

“Es esencial que el estudiante esté siempre desarrollando una acción. En este sentido es importante señalar que sea el propio educando quien, mediante la resolución de problemas específicos, gradualmente dosificados, construya o llegue al concepto deseado. Esto es, el alumno debe estar constantemente resolviendo o intentando resolver problemas” p. 4.

La relación de este principio se da al partir la actividad de aprendizaje desde un contexto real, el cual consiste en aproximar la longitud de la columna vertebral, y que a su vez tiene actividades didácticas de aprendizaje dosificadas.

En el segundo principio se refiere a la parte sensorio-empirista, la cual definen de la siguiente manera:

Cada vez que se introduzca un concepto o noción matemática, hay que intentar partir de un problema en cierto contexto de interés para el educando. Este problema puede generar ejercicios o subproblemas cuya solución, en forma estructurada y coordinada, lleve al estudiante a definir o mostrar el concepto matemático deseado. Esto, desde luego, no es posible de realizar para cada uno de los conceptos intrínsecos a un determinado tema, por lo que toca decidir al docente, cuál o cuáles son los más trascendentes. En todo caso, nunca introducir un concepto mediante su definición formal, p.4.

La relación con este principio se da cuando se solicita obtener la aproximación de longitud de la medida de la columna vertebral, para alcanzar el objetivo nuestras actividades didácticas de aprendizaje se dividen en subactividades de aprendizaje, las cuales consisten en aproximar la forma curva de la columna vertebral, posteriormente a aproximar a la longitud de la columna vertebral y finalmente a generalizar el problema de aproximación de medida de una curva, teniendo de esta manera subproblemas estructurados y ordenados que permiten definir el concepto matemático.

El tercer principio de la didáctica que relacionamos con nuestra investigación corresponde a:

Una vez resuelto el problema presentado, el estudiante debe validar sus resultados, verificando que tengan un sentido lógico, de acuerdo con el problema planteado, p.4.

La aplicación de este principio se da en la interpretación para aproximar la longitud de la forma curva de la columna vertebral con cada una de las medidas de la longitud de segmento de línea recta que se utiliza para aproximarla. Así mismo cuando se resuelven los problemas planteados en la actividad 3.

Estos principios, brindan al estudiante una funcionalidad del concepto, y se da otra perspectiva de introducir un concepto dejando atrás la escuela tradicional donde se inicia presentando el concepto desde la parte formal, posteriormente pasando a la parte procedimental o técnica y dejando al final la aplicación del concepto en la vida del estudiante.

También con esta didáctica se aporta en “favorecer a la elaboración de propuestas de enseñanza que versen sobre lo que se debe enseñar y no sólo, como ha sido habitual, sobre cómo se debe enseñar” Cantoral y Farfán (2003).

5 Metodología

No es posible decir cuál es la mejor forma de enseñar,
pero sí, cuál no es la mejor.

Cuevas C. A.

Este capítulo da a conocer el desarrollo de las actividades didácticas de aprendizaje, la construcción de los escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI), las hojas de exploración guiada y como fue el desarrollo de cada uno de ellos.

Es importante mencionar que para el desarrollo de las actividades didácticas se tuvo la participación de un equipo de trabajo multidisciplinario, que es liderado por el Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo.

Por consiguiente, las fases de nuestra investigación consistieron en lo siguiente:

- Revisión de artículos de investigación en el área de cálculo.
- Selección y limitación de artículos con el tema de integral de línea.
- Análisis del marco teórico.
- Análisis de metodología.
- Organización de actividades didácticas de aprendizaje.
- Desarrollo y diseño de actividades didácticas de aprendizaje.
- Elaboración de escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI).
- Aplicación de actividad didáctica de aprendizaje a grupo de estudio.
- Análisis de resultados, conclusiones y reflexiones de la investigación.

Siguiendo con este ciclo como guía presentamos la propuesta que generamos la organización de nuestras actividades bajo el marco de la THA, es el siguiente.

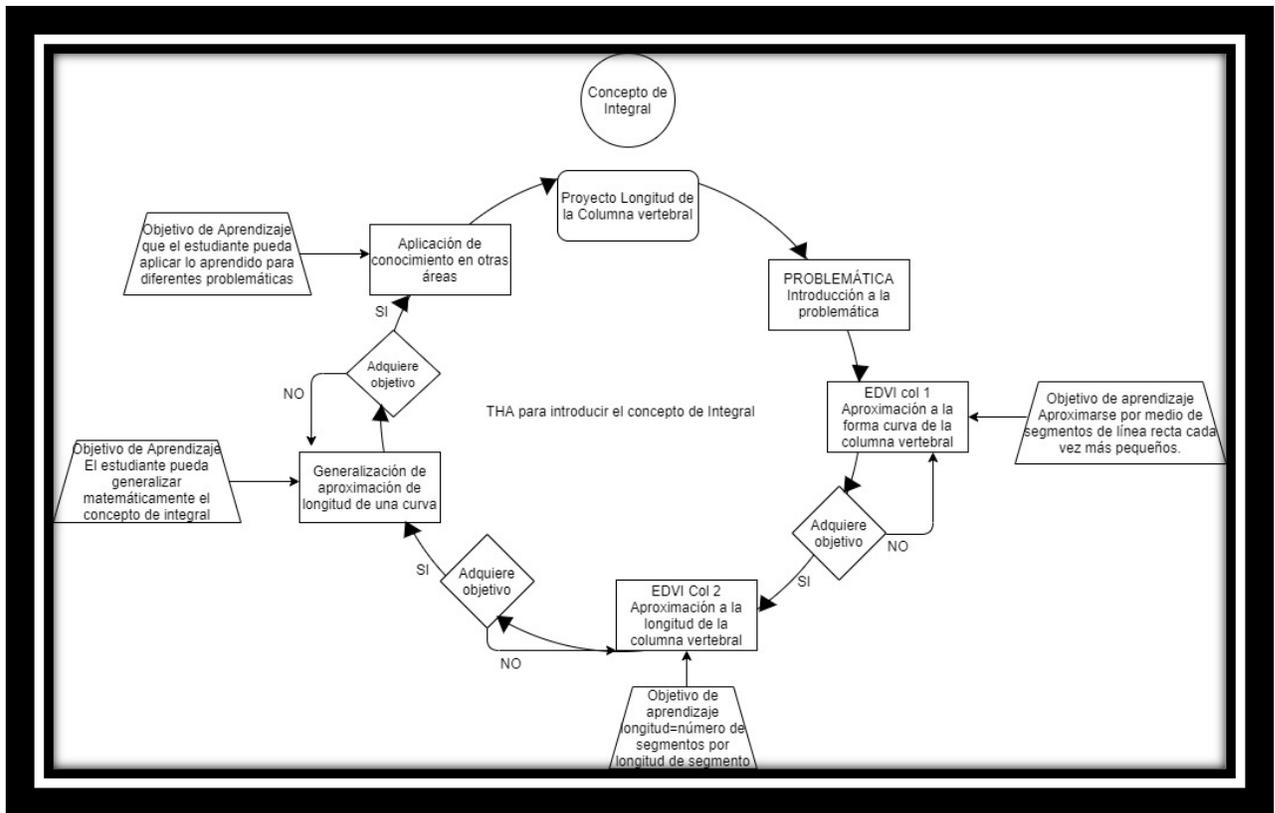


Ilustración 3 THA para introducir el concepto de integral, diseño adoptado de Cuevas et al (2023, p. 4)

Como podemos observar este ciclo, inicia con un problema complejo en la práctica educativa de matemáticas, que para nuestro caso se trata de introducir el concepto de integral. Bajo este ciclo que presentamos, la organización de nuestras actividades didácticas de aprendizaje permite que el estudiante logre el objetivo de aprendizaje y el docente pueda tener una organización en las actividades, así mismo realizar los ajustes que sean necesarios en caso de que el estudiante no vaya obteniendo los objetivos específicos de cada una de las actividades de aprendizaje.

De manera general la ruta para la aplicación de las actividades didácticas de aprendizaje, para aproximar la longitud de la columna vertebral por medio de segmentos de línea recta es la siguiente.

- Aproximar la longitud de la columna vertebral por medio de la acumulación de segmentos pequeños, multiplicando el valor de la longitud de segmento con el número de segmentos que se formaron.

- Aplicar los conocimientos adquiridos en las dos primeras fases para resolver problemas en donde se relaciona el cálculo de la curva.
- Generalizar el concepto de tal manera de matematizar el concepto con la definición de integral por medio de sumas de Riemann.

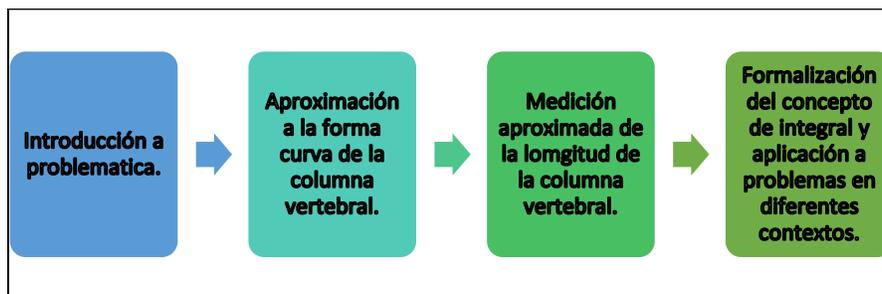


figura 8 ruta general de actividades

en las siguientes secciones daremos a conocer de manera más detallada cada una de las rutas de aprendizaje que seguimos de manera general y en cada una de las actividades didácticas de aprendizaje.

5.1 Trayectoria de Hipotética de Aprendizaje de las actividades

En cada una de las actividades didácticas de aprendizaje al iniciar la actividad el estudiante deberá ingresar al EDVI, y realizar las siguientes acciones:

- I. Interactuar con él, introducir, a elección libre, diferentes valores en la casilla de longitud de segmento y observar los cambios en la imagen de la columna vertebral con los segmentos de línea recta que se generan con el valor propuesto y que se superponen sobre ella.
- II. Dar respuesta a las HEyAG con apoyo del EDIV.

Una vez que se realiza ello en las dos primeras actividades, las siguientes acciones que debe realizar corresponden a:

- III. Resolver Problemas de aplicación utilizando los conocimientos adquiridos.
- IV. Identificar que el proceso de acumulación nos conduce a la integral definida cuando se generaliza el proceso.

En la siguiente tabla se muestra la actividad, la ruta de aprendizaje que tiene que seguir el estudiante y el proceso hipotético de aprendizaje que se tiene de manera general en las actividades didácticas de aprendizaje.

No.	Actividad	Ruta de Aprendizaje	Proceso Hipotético de aprendizaje
1	Aproximación a la forma curva de la columna vertebral.	Interactuar con el EDVI introduciendo a elección libre diferentes valores de longitud de segmento de línea recta.	Deducir que mientras se tengan más segmentos, o de longitud más pequeña, se obtiene una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral.
2	Aproximación a la longitud de la columna vertebral	Interactuar con el EDVI proponiendo e introduciendo valores en él y seleccionado de esos valores 3. Observar el número de segmentos formados con la longitud de segmento utilizada.	Generar un pensamiento inductivo y deductivo en el estudiante que le permita deducir que para conocer la longitud de la columna vertebral se tiene que multiplicar el número de segmentos de línea recta con la longitud de segmento que se utilizó.
3	Problemas de aplicación	Resolver problemas de aplicación	Aplicar el proceso de acumulación de segmento de línea recta en la medición de una curva en un segmento dado para resolver problemas de aplicación.

No.	Actividad	Ruta de Aprendizaje	Proceso Hipotético de aprendizaje
4	Generalización de concepto	Generalización	Que el estudiante pueda identificar que el proceso de acumulación se relaciona con las Sumas de Riemann las cuales introducen a la integral definida.

Tabla 8 Ruta de Aprendizaje del Estudiante

Continuaremos en los siguientes párrafos indicando de manera particular el objetivo de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje de cada una de las actividades didácticas de aprendizaje que se desarrollaron y aplicaron a estudiantes de nivel superior de una escuela pública de México.

Actividad: Aproximación a la forma curva de la columna vertebral.

Objetivo Específico: identificar que mientras más segmentos de línea recta se puedan poner sobre una curva, mejor será la aproximación a la forma curva que presenta.

Proceso hipotético de Aprendizaje: Con el cambio de longitudes de segmento, observando el comportamiento de los segmentos con la forma curva de la columna vertebral, deducir que para aproximar a la forma curva se requiere proponer una longitud de segmento cada vez más pequeña, para que se agreguen más segmentos y se dé una mejor aproximación.

Actividad 2: Aproximación a la longitud de la columna vertebral.

Objetivo Específico: Estimar la longitud de la columna vertebral por medio del producto de longitud de un segmento por el número de segmentos formados que se generan con el valor de longitud que se establece por parte del estudiante.

Proceso hipotético de Aprendizaje: que el estudiante deduzca e intuya que para aproximar la longitud de la columna vertebral tiene que ingresar un valor cada vez más pequeño de longitud de segmento y esta medida se debe multiplicar con el número de segmentos que se formaron con la longitud establecida.

Actividad 3: Solución en problemas de aplicación

Objetivo de específico: *Probar que el proceso de acumulación se puede aplicar a problemas en otro contexto.*

Proceso hipotético de aprendizaje: deducir que para resolver los problemas que se presentan se pueden resolver con lo aprendido de las actividades anteriores.

Mencionaremos para esta actividad, que los problemas que se plantearon corresponden a calcular la longitud de un segmento de un camino curvo que se presenta en el cual se solicita calcular el rendimiento de combustible de un automóvil. El segundo ejercicio corresponde a calcular la longitud de un marco de ventana que tiene forma curva.

Actividad 4: Generalización de la longitud de curva

Objetivo específico: *Conceptualizar y significar la integral definida.*

Proceso hipotético de aprendizaje: *Por medio de los HEyAG el estudiante pueda generalizar el concepto de integral.*

Una vez que hemos definido el objetivo de aprendizaje en cada una de las actividades de aprendizaje y los procesos hipotéticos que se tienen en cada uno de ellos. Continuaremos con una explicación de cómo se dieron las pruebas piloto y las características de los grupos de estudio.

5.2 Elaboración de EDVI y HEyAG

5.2.1.1 Desarrollo de EDVI

Para la elaboración de los EDVI, se realizó un análisis respecto a software accesible para los estudiantes. Se analizaron softwares como GeoGebra, NetLogo, Wolfram Mathematica, R-studio, C, C++, Python, tomando la decisión de trabajar con GeoGebra, por ser un software libre y facilitar la programación de los EDVI. Esta decisión se tomó también ya que de acuerdo con Iranzu et al. (2009) mencionan que GeoGebra “*favorece múltiples representaciones de conceptos geométricos, ayuda a evitar obstáculos algebraicos permitiendo centrarse en los conceptos geométricos, así como resolver los problemas de otra forma*”.

Una vez que se dio la elección del software, la elaboración de los EDVI se basó en desarrollar una interacción entre estudiante y las hojas de exploración guiada, aplicando el principio de estudiante activo de la didáctica Cuevas y Pluinage (2003).

5.2.1.2 Diseño de HEyAG

Para la elaboración de las hojas de exploración guiada que se desarrollaron para nuestra actividad didáctica de aprendizaje se tomó como referencia la experiencia del investigador como docente y como alumno de la materia de cálculo integral.

5.3 Prueba Piloto

Para el desarrollo y mejoras en nuestras actividades didácticas de aprendizaje y los EDVIs se realizaron pruebas piloto, las cuales nos permitieron realizar mejoras las HEyAG y EDVIs. De esta manera, en los siguientes párrafos daremos detalle los grupos de estudio, características de lugar donde se aplicaron las pruebas piloto y las mejoras que se encontraron en las HEyAG, así como los EDVI.

5.3.1 Prueba Piloto 1

5.3.1.1 Grupo de Estudio

La primera aplicación se realizó con un estudiante de 18 años que cursaba el sexto semestre de bachillerato general en una escuela privada de México. Por medio de una entrevista oral que se realizó, comentó que pretendía continuar con sus estudios, cursando la carrera de actuaría o medicina.

Dado que el estudiante solo disponía de una hora treinta minutos para realizar las actividades de aprendizaje, solo realizó dos actividades didácticas de aprendizaje, los resultados los comentaremos en el capítulo de análisis de resultados.

5.3.1.2 Características de lugar de trabajo

Para el desarrollo de esta aplicación, el estudiante utilizó el equipo de cómputo del investigador para ingresar a los EDVI, el lugar donde se realizó la investigación fue en un cuarto de estudio del investigador, el cual tenía acceso a internet, un escritorio de trabajo y materia didáctico que fue proporcionado al estudiante para su uso si fuera necesario.

5.3.1.3 Hallazgos en EDVI y HEyAG

En la primera aplicación que realizamos, encontramos varias mejoras al EDVI y a las HEyAG. Referente a las HEyAG encontramos que existían preguntas que solicitaban la misma información, además las preguntas mezclaban conceptos diferentes como por ejemplo se usaba distancia entre puntos y la longitud del segmento formado entre los puntos, esto generaba problemas de confusión en los estudiantes, otras dificultades correspondían a que existían preguntas que cuestionaban respecto al número de puntos que se generaban, y otras preguntas respecto a la longitud de segmento.

Respecto al EDVI, las principales mejoras que se encontraron se debían a que la longitud de segmento no era la misma para los puntos que agregaba, no se apreciaba con claridad como se aproximaban los segmentos con la columna vertebral, el estudiante no desarrollaba ningún razonamiento con el EDVI, ya que solo se centraba en agregar puntos en el escenario los cuales no respetaban el orden de aparición.

De manera general. en esta primera aplicación se encontraron áreas de oportunidad en los EDVI y HEyAG.

La siguiente imagen representa el primer modelo generado, para la interacción del estudiante.

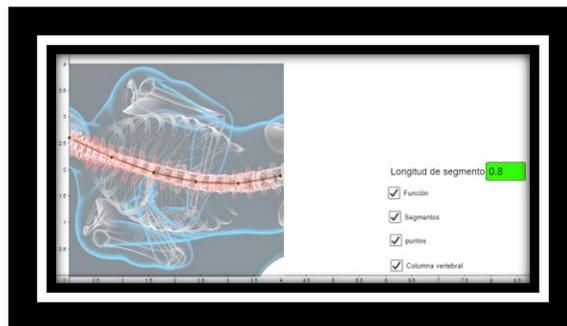


figura 9 Escenario 1 prueba piloto 1

5.3.2 Prueba Piloto 2

5.3.2.1 Grupo de Estudio

La segunda prueba, se aplicó a un grupo de 30 estudiantes de nivel superior de una escuela pública de México. Estos estudiantes cursaban la materia de cálculo integral en segundo semestre de la carrera de ingeniería industrial, al realizar una entrevista oral, en la cual se les pregunto ¿de qué escuela de medio superior provenían? Sus respuestas hacían referencia a

que cursaron sus estudios de nivel medio superior en preparatorias oficiales, preparatorias incorporadas, Conalep, CBta, etc. De esta clasificaremos a los estudiantes en bachillerato general y bachillerato técnico.

Así mismo, algunos de los estudiantes ya habían tenido un primer contacto con el concepto de integral, otros no habían tenido la oportunidad de ver el concepto por factores, que correspondían a que su formación en media superior fue en el periodo de pandemia de Covid-19, así mismo de los estudiantes que ya habían tenido un primer acercamiento con el concepto, mencionaban que ya se les había olvidado o que solo trabajaron con técnicas de integración, pero que no sabían qué significado tiene la integral.

5.3.2.2 Características de lugar de trabajo

El desarrollo de las actividades se dio en un aula de laboratorio del centro de cómputo de una escuela pública de México de nivel superior. El laboratorio cuenta con 36 computadoras equipadas con monitor, ratón, teclado, CPU. Conectadas a una red inalámbrica de la misma institución. Así mismo se cuenta con un pizarrón blanco, un cañón proyector, para el desarrollo de las actividades del docente.

Antes de iniciar con la aplicación de las actividades didácticas de aprendizaje se dio una preparación referente a la revisión de las condiciones en las cuales se encontraba el aula, primero se acordó con el encargado de laboratorio un día para la revisión de las condiciones en las que se encontraban los equipos de cómputo y la conexión de internet de cada uno de ellos. En esta revisión se encontraron algunas computadoras que no tenían acceso a internet, es por ello por lo que se procedió a cargar el EDVI en cada una de ellas para evitar problemas de conexión de internet, el tiempo de instalación de los EDVI en todas las computadoras fue de 30 minutos.

Al momento de aplicar las actividades didácticas de aprendizaje, hubo cambio de encargado de laboratorio y el encargado en turno dio mantenimiento a las computadoras reiniciando el sistema, el cual le llevo alrededor de una hora, esto hizo a que tuviéramos que cambiar de aula para la aplicación, de esto se generó la pérdida de tiempo por el hecho de volver a cargar

los EDIV en las computadoras, además de que varios estudiantes tuvieron que compartir una misma computadora.



figura 10 Estudiantes trabajando en una sola computadora y apoyándose del celular

5.3.2.3 Hallazgos en EDVI y HEyAG

Al conocer las problemáticas en la primera experiencia de aplicación. Los cambios consistieron en agregar dos vistas dentro del escenario las cuales permitían visualizar, la imagen de la columna vertebral con el ajuste que genera con las longitudes de segmentos de línea recta, a la par la vista (vista 2) del escenario muestra una función que aproxima la forma curva de la columna vertebral y que los segmentos de línea recta se van ajustando con los mismos datos que se ingresan en la vista 1. Otra de las mejoras consistió en dejar abierta la casilla de longitud de segmento para que él estudiante agregue un valor deseado para analizar los cambios realizados en cada valor que se agrega. En la siguiente figura se muestra el escenario con el cual se trabajó la prueba piloto 2.



figura 11 Escenario aplicación 2

Estas mejoras brindaron una mejor respuesta por parte de los estudiantes, sin embargo, se encontró una mejora en el apartado de las instrucciones, se observó que, al proponer un dato de longitud como ejemplo, los estudiantes al momento de interactuar con las HEyAG, eligieron un número que se ponía como ejemplo, esto no permitía al estudiante libertad de elección.

Con los cambios realizados, el estudiante generó un pensamiento más analítico que le permitió alcanzar el objetivo de aprendizaje. Sin embargo, las mejoras en el EDVI tenían relación que el estudiante podía mover el EDVI y esto hacía que se distorsionara, además se encontró que en el EDVI no mostraba el número de segmentos que se generaban con la longitud de segmento que se establecía, esto es de suma importancia ya que el número de segmentos es necesario para contestar una de las preguntas de las hojas de exploración guiada que tienen relación con aproximar la longitud de la columna vertebral.

En lo referente a las HEyAG, con las problemáticas encontradas en el primer ciclo, el segundo cuestionario tuvo cambios como omitir preguntas que solicitaran la misma información, no mezclar conceptos en las preguntas para evitar confusión entre los estudiantes, y se agregó instrucciones dando ejemplos de ciertos valores para que el estudiante pudiera experimentar con el escenario. Con estas mejoras se tuvo una mejor comprensión de la actividad didáctica de aprendizaje y los estudiantes ya no confundían los conceptos que se trabajaban, sin embargo, se encontró una mejora en la redacción de las preguntas que se aplicaban, así como las respuestas que se brindaban.

5.3.3 Prueba Piloto 3

5.3.3.1 Grupo de Estudio

La tercer prueba se aplicó a un grupo de 22 estudiantes de la carrera de ingeniería industrial, de una escuela pública de México, los cuales se encuentran estudiando el segundo semestre la materia de cálculo integral, algunas de las características del grupo de estudio corresponden a que se trata de un grupo con una formación multidisciplinaria ya que provenían de preparatorias oficiales, preparatorias incorporadas, carreras técnicas, entre otras, es importante mencionar que para este grupo de estudio, el 20% de ellos querían estudiar la carrera de ingeniería industrial, el resto pretendía continuar con sus estudios en carreras como derecho, química, biomédica, medicina, logística, entre otras. Así mismo,

como en la primera prueba piloto, no todos los estudiantes cursaron la materia de cálculo integral, a pesar de que la materia se encontraba en su plan de estudios no pudieron tomar la materia como se debía ya que se encontraban en el periodo de pandemia.

5.3.3.2 Características de lugar de trabajo

Para la aplicación de esta prueba piloto se realizó en un aula del centro de cómputo de una escuela de nivel superior de México, el aula contaba con equipo de cómputo para 40 estudiantes, todos los equipos contaban con acceso a red de internet por medio de cable ethernet, se contaba con un pizarrón blanco para uso del docente, un cañón proyector, etc.

5.3.3.3 Hallazgos en EDVI y HEyAG

Lo que respecta al EDVI, tenemos que para corregir la problemática presentada de distorsión del escenario que se tuvo en la segunda aplicación, se fijaron los ejes con ayuda de un deslizador, de esta manera se corrigió el problema presentado y ya se podía abrir el EDVI por medio del enlace desde una computadora o celular sin tener el problema de desajuste que se presentaba, por otra parte, como mejora, se agregó una casilla que indicaba el número de segmentos que se forman cuando se introduce el valor de la longitud de segmento de línea recta. La siguiente figura representa el EDVI que se mejoró.

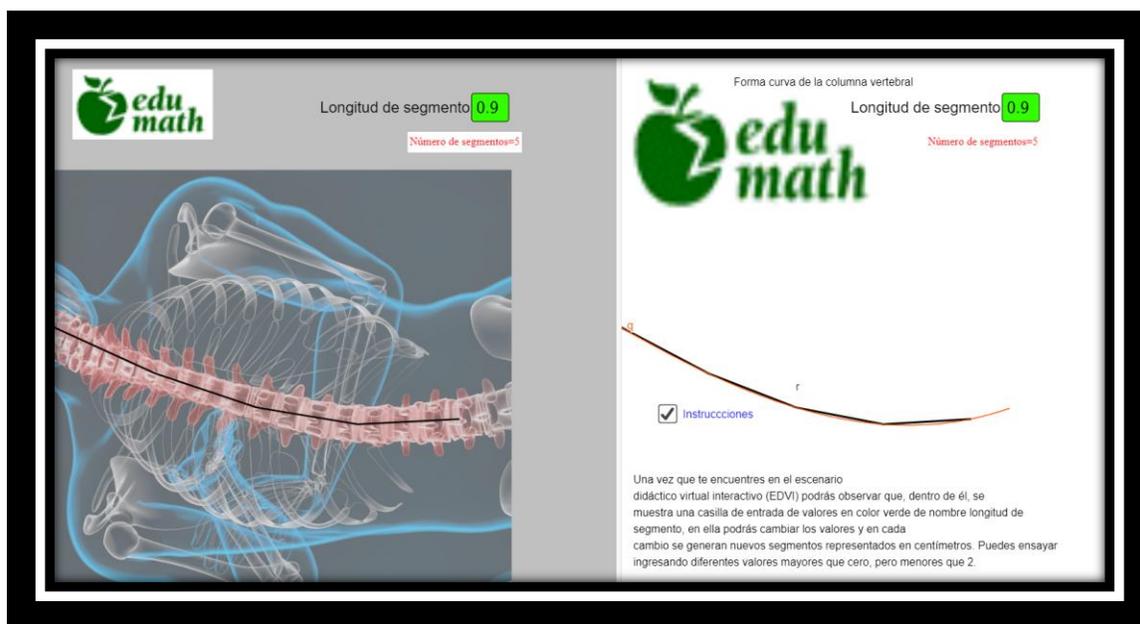


figura 12 Escenario final para aplicación

Ahora tomando en cuenta las mejoras para las HEyAG, para evitar que los estudiantes tuvieran un pensamiento dirigido por el hecho de que los estudiantes tomaban los valores que se daban como ejemplo, se cambió la redacción de las instrucciones, dejando al estudiante libre de elegir los valores con los cuales puede trabajar para el análisis de las actividades didácticas de aprendizaje.

5.3.4 Prueba Piloto 4

5.3.4.1 *Grupo de Estudio*

Esta aplicación se generó a un grupo de estudiantes integrado por 22 estudiantes de la carrera de ingeniería industrial de una escuela pública de México. El grupo de trabajo tenía una edad promedio de 19 años. Las escuelas de procedencia de los estudiantes corresponden a escuelas de nivel medio superior, técnico superior, bachillerato general y telebachillerato. Los planes de estudio de cada una de las escuelas nos refieren a que no todos los estudiantes tomaron la materia de cálculo integral en su formación, sin embargo, las escuelas que en su plan de estudios si se imparte la materia de cálculo integral, por cuestiones de suspensión de labores presenciales por la pandemia de COVID 19 no todos lograron ver el tema de integral a fondo y solo se dedicaron a ver algunos métodos de integración.

5.3.4.2 *Características de lugar de trabajo*

El lugar de aplicación fue en un laboratorio de la institución, la cual cuenta con 40 equipos de cómputo, los cuales tienen acceso a red de internet, y además están protegidos con reguladores de luz eléctrica en caso de descarga se pueda tener un tiempo para guardar la información con la que está trabajando, así mismo se cuenta con un pizarrón para uso de docente.

De es

6ta manera los estudiantes tienen las condiciones para trabajar con las actividades didácticas de aprendizaje.

5.3.4.3 *Hallazgos en EDVI y HEyAG*

Con las mejoras planteadas tanto en el escenario como en las hojas de exploración guiada, se dio una mejor interacción entre el EDVI y las HEyAG lo que permitió tener un mejor cumplimiento del objetivo de aprendizaje por parte del estudiante.

Así mismo se notó que con las mejoras del EDVI, mejoro él estudiante la comprensión de la aproximación, respecto a las modificaciones en las HEyAG permitieron tener un estudiante activo mentalmente y no dirigido en las actividades didácticas de aprendizaje.

De manera general se observó un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes y se cumplió de mejor manera el objetivo planteado en la trayectoria de aprendizaje, sin embargo, aún es necesario realizar mejoras para que aquellos estudiantes que no lograron el objetivo de aprendizaje puedan realizarlo.

6 Análisis de respuestas

6.1 Análisis de aplicación de actividades didácticas de aprendizaje de pruebas piloto.

El análisis de las respuestas obtenidas en cada una de las aplicaciones brindó una gran información que permitió realizar mejoras, las cuales a su vez permitieron al estudiante lograr el objetivo de aprendizaje.

Dado que se realizaron varias aplicaciones, para mostrar nuestros resultados partiremos mostrando algunas de las respuestas de las pruebas piloto, para finalmente enfocarnos en la prueba aplicada que se tomó como base para presentar nuestros resultados obtenidos.

Partiremos indicando cuales es la secuencia de actividades que realizaron los estudiantes y las actividades didácticas de aprendizaje. Se da inicio con la lectura de un texto donde se introduce al estudiante al contexto de la columna vertebral, en el texto se da una pequeña explicación del sobre la columna vertebral y las problemáticas que se tienen en ella por las malas costumbres que se tienen. Después se realizan dos interrogantes que se refieren a si todas las columnas vertebrales son iguales y como podremos medir de forma aproximada a la longitud de una columna vertebral.

6.1.1 Respuestas de prueba piloto 1

En la siguiente imagen se presentan la respuesta del estudiante de la prueba piloto 1, la cual permite conocer cómo puede resolver el problema planteado.

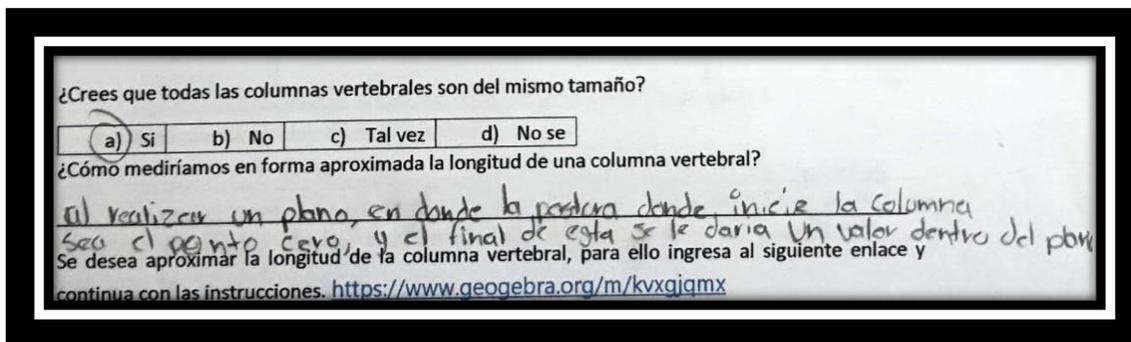
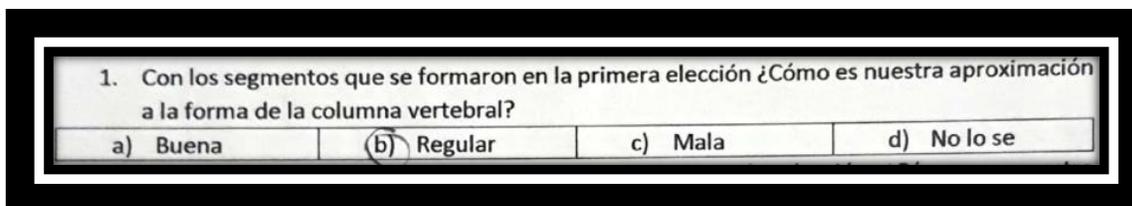


figura 13 Respuestas de estudiante de prueba piloto 1 correspondientes a introducción

Continuando con la primera actividad didáctica de aprendizaje. Una vez que el estudiante interactuó con el EDVI usando valores propuestos como ejemplo y algunos que el estudiante agrega por su propia elección la respuesta a la primera interrogante fue lo siguiente.



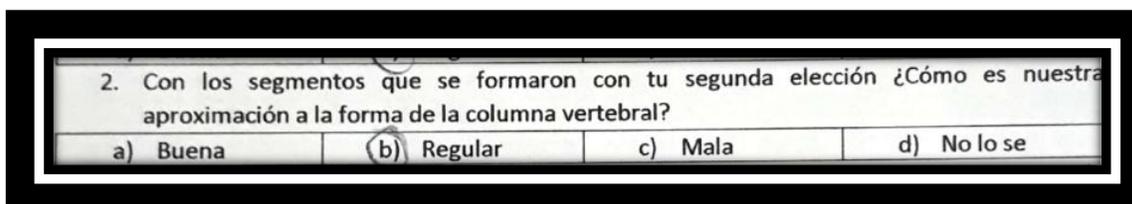
1. Con los segmentos que se formaron en la primera elección ¿Cómo es nuestra aproximación a la forma de la columna vertebral?

a) Buena	<input checked="" type="radio"/> b) Regular	c) Mala	d) No lo se
----------	---	---------	-------------

figura 14 Respuesta de primera pregunta en prueba piloto 1

Como podemos observar con los datos que el estudiante eligió, su aproximación a la forma curva de la columna vertebral la considera regular esto se debió a que, a pesar de utilizar otros valores diferentes a los indicados como ejemplo, al final el estudiante tomo un valor que se presenta como ejemplo, deducimos que tomo ese valor porque creyó que esos valores que se presentan como ejemplo son los correcto y que debió trabajar con ellos.

Para la segunda pregunta se solicitó al estudiante trabajara su segundo valor elegido para que pudiera contestar a la segunda interrogante, teniendo como respuesta lo siguiente. La respuesta a esta pregunta fue la siguiente.



2. Con los segmentos que se formaron con tu segunda elección ¿Cómo es nuestra aproximación a la forma de la columna vertebral?

a) Buena	<input checked="" type="radio"/> b) Regular	c) Mala	d) No lo se
----------	---	---------	-------------

figura 15 Respuesta a la segunda pregunta de prueba piloto 1

En esta respuesta el estudiante nuevamente toma un valor que se presentó como ejemplo de esta manera podemos ver que ya la actividad se ve dirigida ya que el estudiante utilizo nuevamente un valor de los que se muestran como ejemplo pero que solo diferencio del primero en un décimo.

Para la tercera pregunta, la cual se presenta en la siguiente imagen.

3. Al experimentar cambiando los valores de la longitud de segmento ¿Existe una variación de aproximación a la forma de la columna vertebral?			
a) Sí	b) No	c) Poco	d) Mucho

figura 16 Respuesta a pregunta 3 de prueba piloto 1

Como podemos observar su respuesta fue “No”. Esto se da como consecuencia que el estudiante solo modifico en una décima el valor inicial con el segundo.

La cuarta pregunta tiene relación con el hecho que el estudiante pueda identificar y deducir que la medida que debe elegir es la más pequeña para tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral.

Con base a ello y con los ensayos que tu realizaste al inicio elige una longitud de segmento que para ti sea apropiada.

4. Indica ¿Cuál es la longitud de segmentos que elegiste al final?

~~2~~ 2

figura 17 Respuesta a pregunta 4 de prueba piloto

Para esta respuesta el estudiante nuevamente recurrió a un número que corresponde a uno de los que se dieron como ejemplo en las instrucciones.

Aquí comenzamos a generar una hipótesis relacionada con el aprendizaje del estudiante. Nuestra hipótesis indica que el estudiante tiene un aprendizaje tradicional donde debe continuar las reglas e indicaciones que da el profesor y no salirse de esa línea. Además, que probablemente siguen el hecho de tener una enseñanza tradicional que de acuerdo con Herrera et al. (2012) esta se refiera a “*el docente explica y los alumnos en forma pasiva reciben contenidos*”. Es por ello que pensamos que el estudiante cree que los datos que se presentan como ejemplos piensa que son con los que debe trabajar y que si se le pide un cambio este debe ser mínimo a los que se indican.

Continuando con las siguientes dos preguntas

5. Con el número que consideraste ¿Te parece una buena aproximación a la columna vertebral?			
<input checked="" type="radio"/> a) Si	<input type="radio"/> b) No	<input type="radio"/> c) Poco	<input type="radio"/> d) Mucho

figura 18 Respuesta a pregunta 5 de prueba piloto 1

6. ¿Cómo la podrías mejorar?		
<input checked="" type="radio"/> a) Poner más puntos	<input checked="" type="radio"/> b) Poner menos puntos	<input type="radio"/> c) No se

figura 19 Respuesta a pregunta 6 de prueba piloto 1

El estudiante indico dos respuestas sinónimas debido a la confusión de indicar en la respuesta puntos en lugar de longitudes de segmento, debido a ello se tuvo que realizar el cambio de redacción en las HEyAG correspondiente a esta pregunta.

La siguiente pregunta

7. En caso de que te parezca que la aproximación no es buena o quisieras que fuera mejor. ¿Cómo podrías mejor esa aproximación?			
<input type="radio"/> a) Al disminuir la longitud de segmento	<input checked="" type="radio"/> b) Al aumentar la longitud de segmento	<input type="radio"/> c) En ningún momento	<input type="radio"/> d) No se

figura 20 Respuesta a pregunta 7 actividad 1 de prueba piloto

Como podemos observar el estudiante vuelve a presentar una confusión, Tenemos la hipótesis que esto se debe a trabajar con dos conceptos diferentes que los relacionamos a uno solo.

Pasando a la pregunta 9

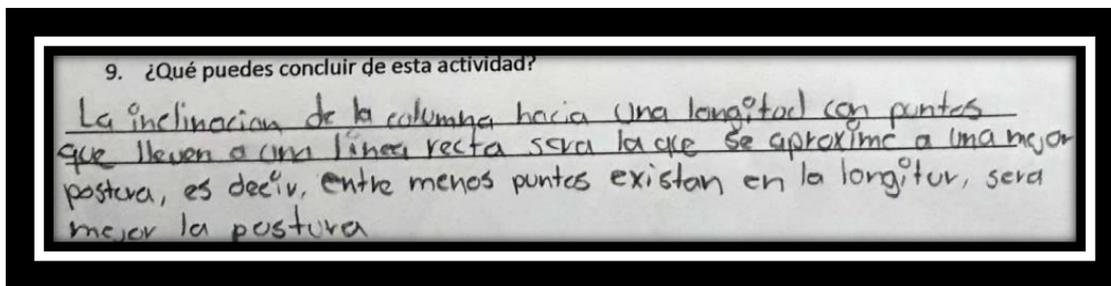


figura 21 Respuesta a pregunta 9 de actividad 1 de prueba piloto 1

Nuestra interpretación e hipótesis respecto a la respuesta a esta pregunta, consiste en que la respuesta del estudiante refiere a indicar que la mejor postura para no tener problemas con la columna vertebral es tener una postura recta al estar sentado esto evitara tener una curva en la columna vertebral y solo toma como punto de referencia el punto donde inicia la columna vertebral y donde termina. Así mismo consideramos no se cumple con el objetivo por el hecho de mezclar conceptos y realizar preguntas respecto a puntos y no solamente sobre la longitud de segmento.

En conclusión, tenemos que para esta actividad se deben realizar cambios en la redacción del cuestionario y generar indicaciones que permitan al estudiante en elegir valores que sean de su agrado sin dirigir a con que puntos debe trabajar.

Actividad 2 Prueba piloto 1

La actividad 2, inicia con las siguientes indicaciones.



figura 22 Instrucciones de actividad

Posteriormente a ello se da la siguiente instrucción

1. En la casilla de longitud de segmento que se encuentra en color verde cambia el valor que se encuentra por el valor elegido. Si

figura 23 Respuesta 1 de actividad 1 correspondiente a prueba piloto 1

a la cual el estudiante da una respuesta a esta instrucción cuando no era pregunta, esto nos hace tener la hipótesis que si captamos la atención del estudiante de tal manera que contesta a la indicación como si se la diera un profesor de manera directa. Sin embargo, es de considerar que el estudiante creyó que se trataba de una pregunta por el hecho de enumerar la indicación y continuar con la numeración en la primera cuestión que se realiza.

La pregunta con la que se inicia tiene relación con la elección de longitud de segmento de línea recta que se indicó, es por ello por lo que se realiza la siguiente pregunta.

2. ¿Cuántos segmentos se formaron?
2

figura 24 Respuesta 2 de actividad 1, prueba piloto 1

Para la respuesta de esta interrogante observamos que el estudiante para dar su respuesta tuvo que contar de manera manual cuantos segmentos se formaron, encontrando de esta manera una mejora en el EDVI,

Para la siguiente interrogante, primero se da una instrucción donde se debe poner un valor de longitud de segmento y posteriormente se debe indicar cuantos segmentos se forman.

3. Nuevamente posicionándonos en la casilla de longitud de segmento que se encuentra en color verde disminuye el valor elegido.
Con base a esta longitud de segmento indica ¿Cuántos segmentos se formaron?
4

figura 25 Respuesta 3 de actividad 1, prueba piloto 1

La respuesta a esta interrogante brinda información relacionada a tres respuestas que da el estudiante, el primer 4 que esta tachado fue el que se indicó cuando el estudiante interactuó con el escenario cambiando el valor de longitud y generó la cantidad de 8 segmentos, sin embargo, se observó al estudiante entrar en duda y esto hizo que el estudiante tuviera que releer nuevamente la pregunta. Corrigiendo de esta manera nuevamente el valor que había indicado.

Para la siguiente pregunta

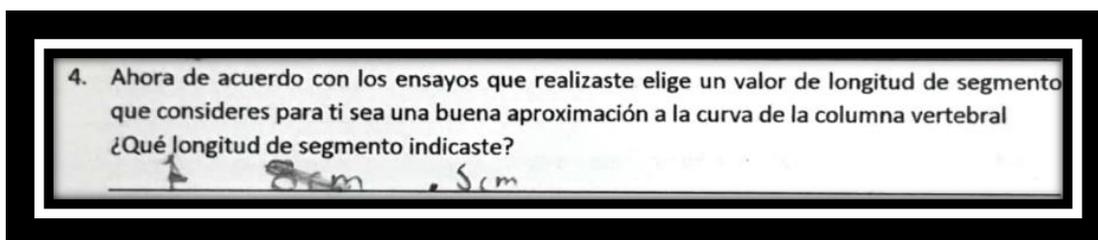


figura 26 Respuesta 4 de actividad 1, prueba piloto 1

Se obtuvieron tres valores como respuesta esto es porque el estudiante interactuó varias veces con el escenario hasta que para su gusto se tuvo una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral. En este caso ya el estudiante comienza a identificar que si la longitud de segmento es menor entonces se tiene una mejor aproximación.

La siguiente pregunta solo se refiere a la cantidad de segmentos que se forman

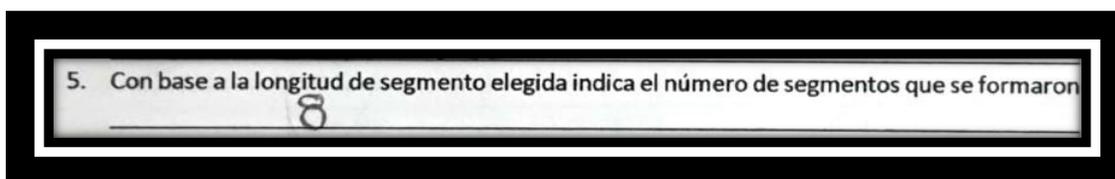


figura 27 Respuesta 5 de actividad 1, prueba piloto 1

La siguiente pregunta esta generada para observar como el estudiante puede calcular la longitud de la columna vertebral.

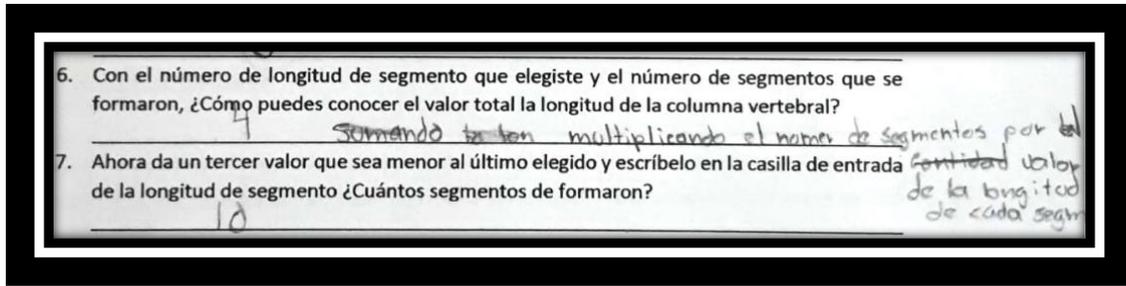


figura 28 Respuesta 6, 7 de actividad 1, prueba piloto 1

El estudiante al inicio indica que, sumando los segmentos, sin embargo, se tiene la hipótesis que, al recordar sus conocimientos previos, corrige e indica que “multiplicando el número de segmentos por el valor de la longitud de cada segmento”. Con esta respuesta el estudiante ya logro el objetivo para esta actividad didáctica de aprendizaje.

Las preguntas 8 y 9, refuerzan lo anteriormente encontrado por el estudiante.

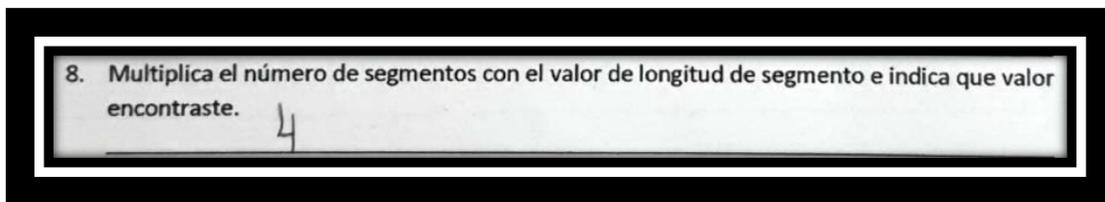


figura 29 Respuesta 8 de actividad 1, prueba piloto 1

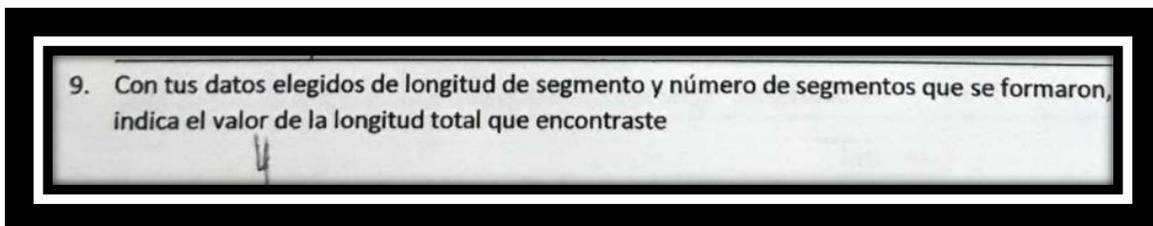


figura 30 Respuesta 9 de actividad 1, prueba piloto 1

Para esta pregunta, la respuesta es para conocer si para el estudiante, la aproximación de longitud de la columna vertebral que se realizó la considera buena o aun con mejoras.

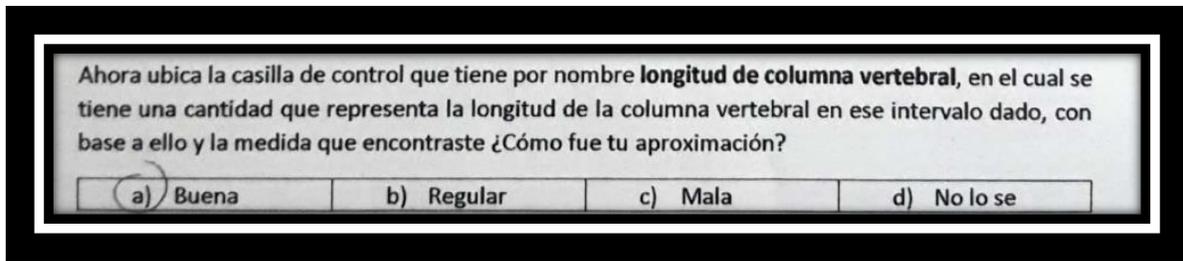


figura 31 Respuesta 10 de actividad 1, prueba piloto 1

Para cerrar esta actividad se le solicita al estudiante pueda indicar como se puede calcular de manera aproximada la longitud de la columna vertebral a lo que el estudiante responde.

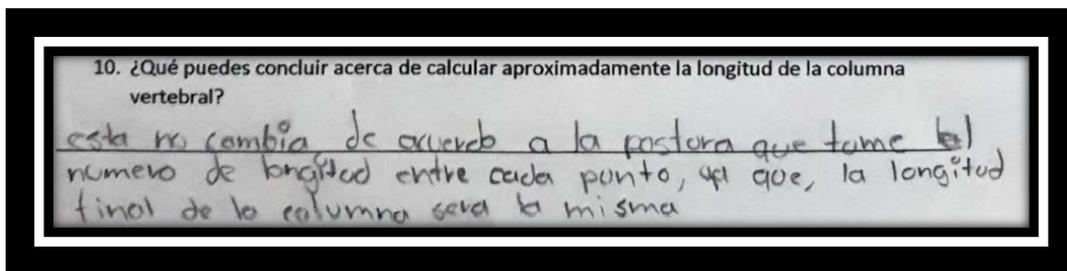


figura 32 Respuesta 10 de actividad 1, prueba piloto 1

La respuesta del estudiante hace nuevamente referencia a la postura de la columna vertebral. Sin embargo, aunque el estudiante ya había generado el conocimiento en preguntas previas, al concluir la actividad, su respuesta aún sigue siendo deficiente. Es necesario con esto tener una mejora en la redacción y preguntas para que el estudiante cumpla con los objetivos.

Respuestas de Actividad Didáctica de Aprendizaje 3

Por cuestiones de actividades con su familia, él estudiante solo pudo contestar a esta pregunta.

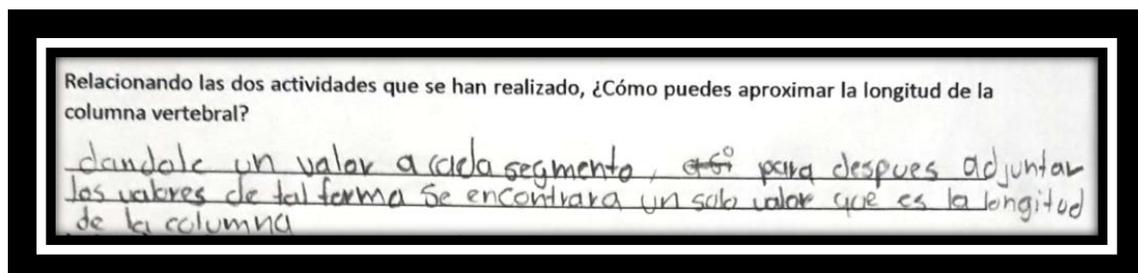


figura 33 Respuesta 1 de actividad 2, prueba piloto 1

En su respuesta podemos observar que se presenta un acercamiento a la palabra acumulación, sin embargo, usa palabras como adjuntar, que corresponden a su vocabulario cotidiano.

Como conclusión de esta experiencia, se deben realizar cambios a nuestras actividades relacionadas con el EDVI y las hojas de exploración guiada., para que el estudiante pueda obtener el objetivo de aprendizaje de una manera más clara.

6.1.2 Respuestas de prueba piloto 2

Una vez que se realizaron las modificaciones correspondientes en los EDVIs y HEyAG, se dio paso a la segunda aplicación que por circunstancias ajenas al investigador no se concluyó, sin embargo, esta ayudo a mejorar las hojas de exploración guiada y los EDVI.

El tiempo de aplicación que se tuvo para esta prueba fue de una hora treinta minutos en un aula del laboratorio de cómputo de una escuela pública de México. Teniendo como modificación para esta aplicación el uso de Google forms para las hojas de exploración guiada.

Para la primera pregunta realizada corresponde a ¿Crees que todas las columnas vertebrales tienen la misma longitud? Se obtuvieron los siguientes porcentajes.

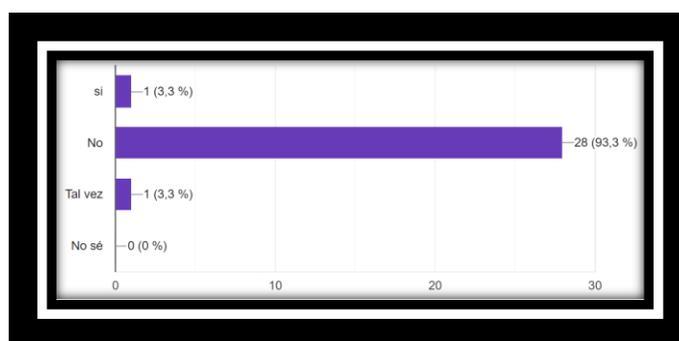


figura 34 respuesta 1 a aplicación 2

El 93% de los estudiantes indican que no, esta respuesta indica que nuestra modificación en la instrucción favoreció a la comprensión de la problemática.

Para la segunda interrogante ¿Crees que la longitud de la columna vertebral de un bebe y un adulto podría tener la misma longitud?

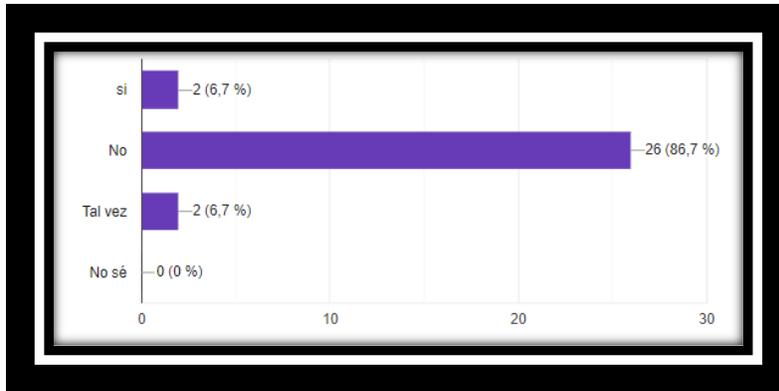


figura 35 Respuesta a pregunta 2 de prueba piloto 2

El 86% de los estudiantes identifican que no existe un cambio de longitud, sin embargo, es importante analizar los dos estudiantes que representan el 6.7% que indican que sí, y los 2 que representan el 6.7% que indican que tal vez, para conocer qué factores son los que sustentan esas respuestas.

La tercera pregunta ¿La forma normal de la columna vertebral es?, teniendo las siguientes respuestas

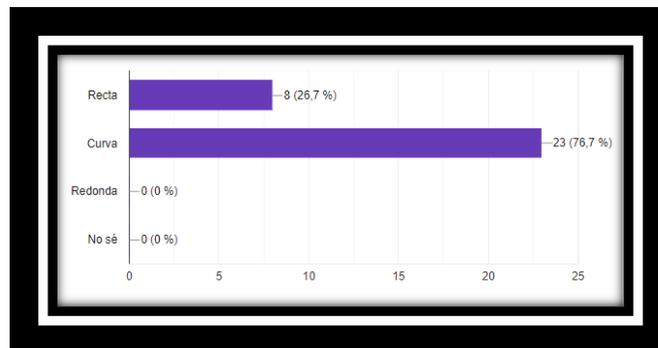


figura 36 respuesta a tercera pregunta, aplicación 2

El 76% de ellos indica que es curva y el resto 26.7% indica que es recto, se tiene la hipótesis que esta respuesta se debe al hecho de visualizar la imagen que se presentó en la introducción a la problemática, en la cual se presentan diferentes posturas que toma una persona al estar frente a un monitor y se indica que la mejor postura que se debe tener es cuando la columna vertebral se encuentra recta.

Las respuestas a la interrogante ¿cómo se puede medir la longitud de la columna vertebral? Se presentan en la siguiente imagen.

Con una cinta métrica
Con un instrumento médico
No sé
Desde su punto inicial hasta su punto final
con una función
Con una función
Atraves del calculo de la curva que tiene mi columna
por la suma de riemann
Pues midiendo de donde inicia la columna hasta el final de la columna para ver la longitud de la misma
Con la formula de la longitud
Podría ser localizando los intervalos dados por el problema
Calcularía la longitud de una onda entre 2 puntos
Nose
Supongo, me mediria normalmente
Pues realizando una fórmula
Mediante los límites
Haciendo una función y rescatando datos anteriores

figura 37 respuesta a cuarta pregunta aplicación 2

Las diferentes respuestas que se presentan generan la hipótesis que los estudiantes pueden relacionar el problema en contexto con conceptos matemáticos. Y con ello podremos llegar a cumplir con el objetivo de aprendizaje. Por otro lado, es importante estudiar qué pasa con los estudiantes que ya comienzan a dar respuestas que pueden indicar que no se cumplirá con el objetivo de aprendizaje.

Continuaremos analizando las respuestas que se obtuvieron en la siguiente actividad de aprendizaje.

Actividad 2 Aproximación

Para esta actividad se inicia con una pequeña introducción a la actividad, dando instrucciones que deben seguir los estudiantes, y posteriormente a ello se continua con la serie de interrogantes.

La pregunta que se generó después de que el estudiante interactuó con el escenario *¿Cómo es la aproximación a la forma de la columna vertebral?* Después de ingresar varios valores y solicitar que fijen uno de ellos.

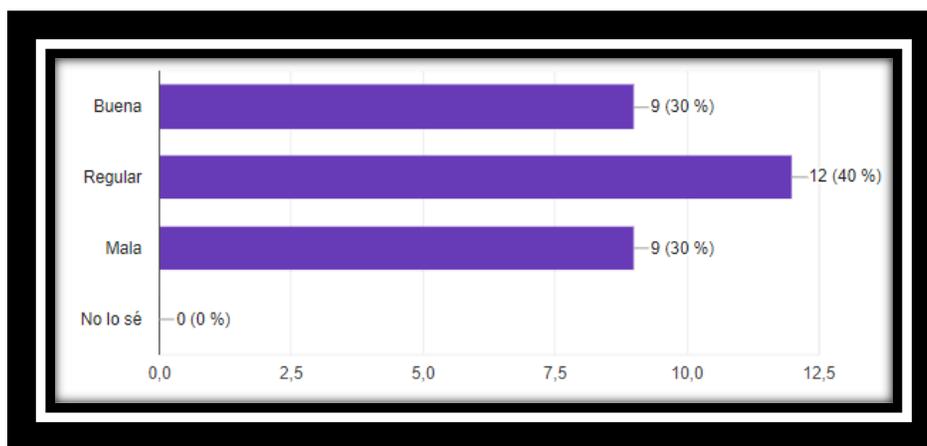


figura 38 respuesta 1 a la actividad 2, aplicación 2

Las respuestas de los estudiantes indican que el 40% uso un valor que permitió tener una regular aproximación, el 30% una buena y el 30% mala, sin embargo, estas respuestas son ambiguas ya que tendríamos que relacionar su respuesta con la parte de conocer que es bueno, regular y mala para cada uno de los estudiantes, ya que cada uno de ellos puede tener su concepto de manera individual.

La segunda pregunta: *Con los segmentos que se formaron en tu segunda elección ¿Cómo es nuestra aproximación a la forma de la columna vertebral? Las respuestas.*

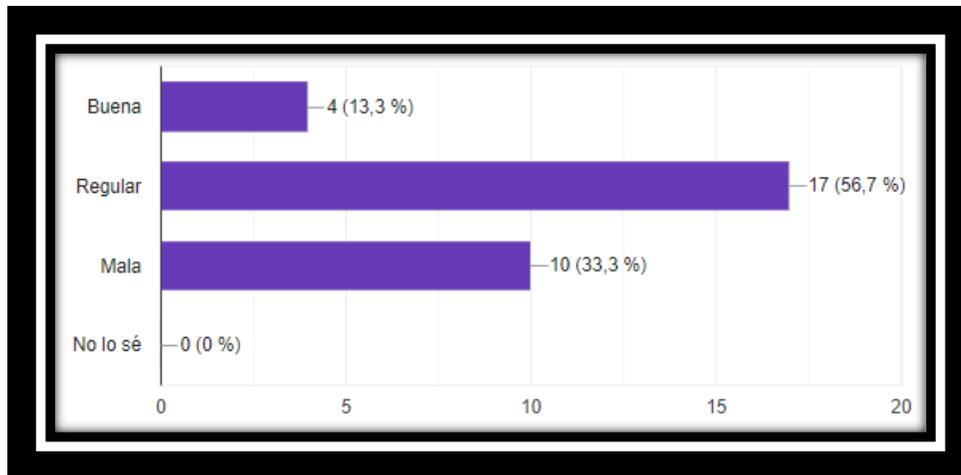


figura 39 Respuesta 3 de actividad 2, aplicación 2

Nuevamente nos permiten conocer que los estudiantes están interactuando con diferentes valores en el EDVI. Es por ello por lo que para algunos de los estudiantes cambian sus resultados y para otros se mantienen.

La tercera pregunta que se aplicó tiene relación con las dos primeras. *Con los segmentos que se formaron con tu tercera elección ¿Cómo es la aproximación a la forma de la columna vertebral?*

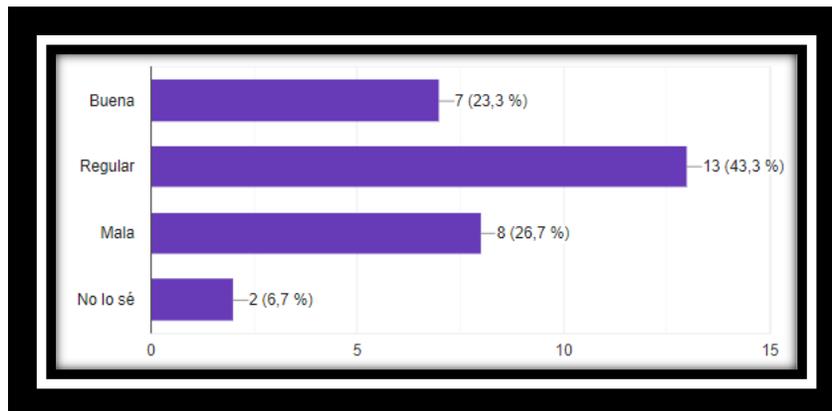


figura 40 respuesta 4 actividad 2, aplicación 2

La cuarta pregunta tiene como objetivo identificar los cambios que se realizaron con las preguntas anteriores. *Al experimentar cambiando los valores de la longitud de segmento en la casilla de entrada ¿Existe una variación de aproximación a la forma de la columna vertebral?*

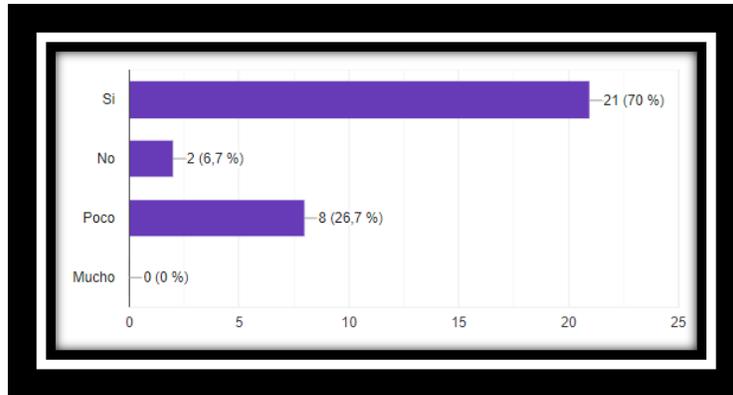


figura 41 Respuesta 5 actividad 2, aplicación 2

Las respuestas a esta interrogante nos muestran que los estudiantes visualizan cambios en las actividades al ir experimentando con diferentes valores.

Posteriormente a ello se le solicita en la siguiente pregunta lo siguiente: *Con base a ello y los ensayos que realizaste elige una longitud de segmento que para ti sea apropiada para aproximar la longitud de la columna vertebral. ¿Cuál es la longitud de los segmentos que elegiste?* Algunas de las respuestas como evidencia de las respuestas.

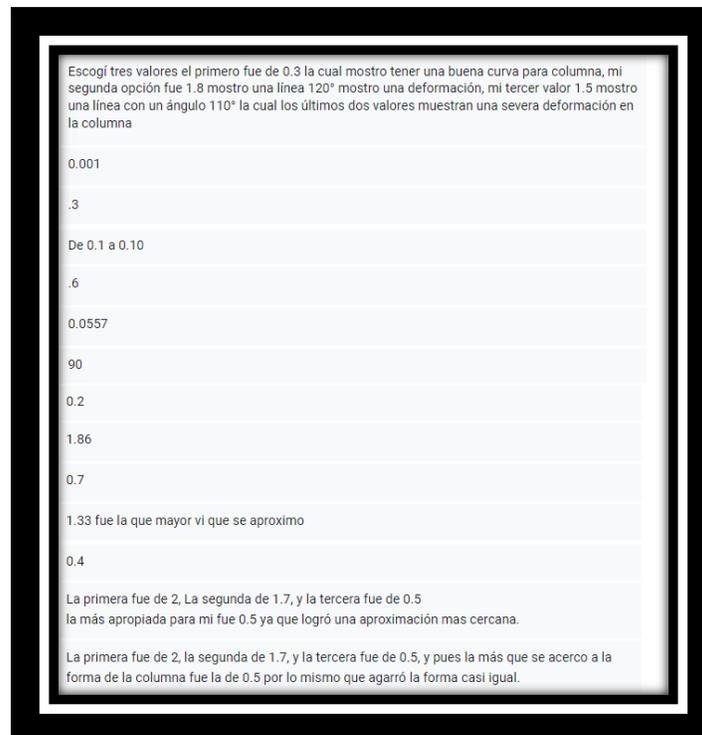


figura 42 Respuesta a la pregunta 6 de actividad 2, aplicación 2

En estas respuestas los estudiantes no solo se limitan a dar el valor que eligieron, sino que algunos de ellos dan una explicación respecto a lo que observaron

La sexta pregunta corresponde a lo siguiente: *Con el número que consideraste ¿Te parece una buena aproximación a la columna vertebral?*

Las respuestas a esas interrogantes fueron las siguientes

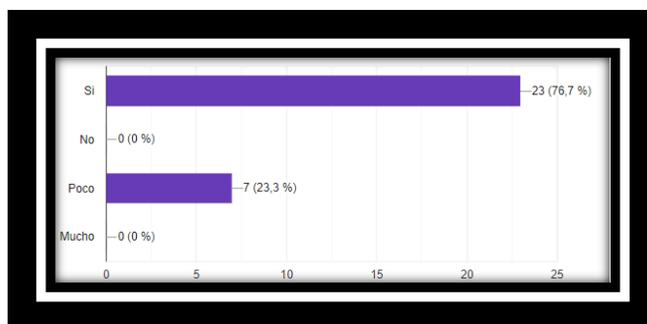


figura 43 respuesta a pregunta 7, actividad 2, aplicación 2

Como se puede observar el 76.7% considera que, si es una buena aproximación a la forma curva de la columna vertebral, sin embargo, el 23.3% que indico que se da poca la aproximación se debe a los valores que eligieron para contestar la interrogante.

La siguiente pregunta *¿Cómo puedes mejorar la aproximación a la longitud de la columna vertebral?* Las respuestas obtenidas son las siguientes

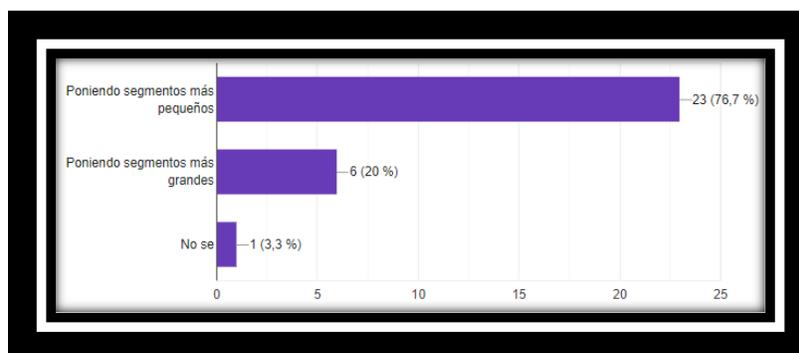


figura 44 Respuesta a la pregunta de actividad 2, aplicación 2

Como podemos observar el 76.7% de los estudiantes lograron cumplir con el objetivo, sin embargo, el 20% restante que indica que, poniendo segmentos más grandes, al tener dar la

retroalimentación de esta actividad, los estudiantes indicaron que se confundieron con el hecho de pensar que se trataba de grandes en cantidad de segmentos.

La pregunta *En caso de que te parezca que la aproximación no es buen o quisieras que fuera mejor. ¿Cómo podrías mejorar esa aproximación?* La respuesta a esta interrogante es

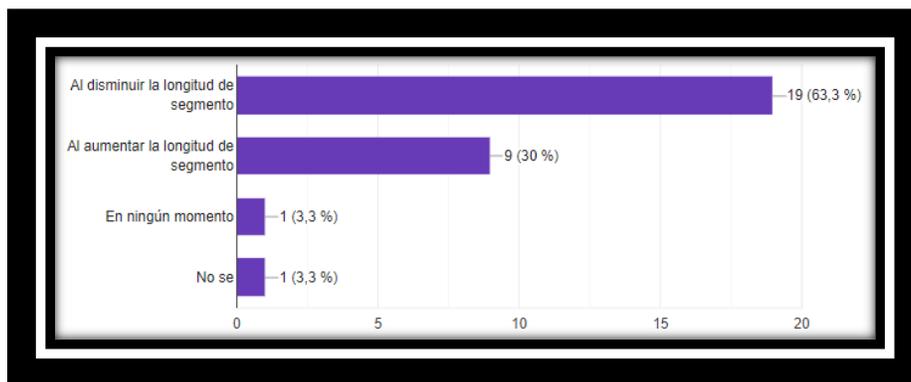


figura 45 respuesta a pregunta de actividad 2, aplicación 2

Dado que 63% de los estudiantes dan como respuesta la elección de disminuir la longitud de segmento, se está cumpliendo el objetivo de aprendizaje, los alumnos que representan el 30% son los mismos que indicaron que se requería una longitud mayor.

La pregunta siguiente tiene como objetivo identificar qué construcción mental han desarrollado los estudiantes para aproximar la forma de una curva hasta este momento. *¿Cómo puedes aproximar la longitud de una curva?*

Siguiendo la medida curva
A un 5.3
Con la suma de las longitudes de la recta
Con puntos y una recta
función área debajo de la curva
Con una función cuadrática
Uniendo los segmentos mas pequeños y sumando la longitud de ellos para obtener una aproximacion
uniendo los puntos seguidos con una recta obtenemos un acercamiento a la curva
Con una cinta métrica
Circunferencia y grados
Con intentando con diferentes intervalos
Se puede aproximar al restar pequeños segmentos
Nose
Por limited(?)
Realizando una función
Sumando los puntos de cada valor tomado y sacar el perímetro
Metiendo fórmulas cúbicas y segmentos más pequeños
AL AUMENTAR O DMINUIR EL SEGMENTO

figura 46 Respuesta a la pregunta de actividad 2, aplicación 2

Como podemos observar algunas respuestas indican el objetivo de aprendizaje, las demás respuestas tratan de realizarlo con funciones matemáticas.

Para finalizar esta actividad se realizó una pregunta relacionada con la actividad, la pregunta realizada fue *¿Qué puedes concluir acerca de cómo se puede aproximar la longitud de la columna vertebral?* Algunas de las respuestas a esta interrogante fueron las siguientes.

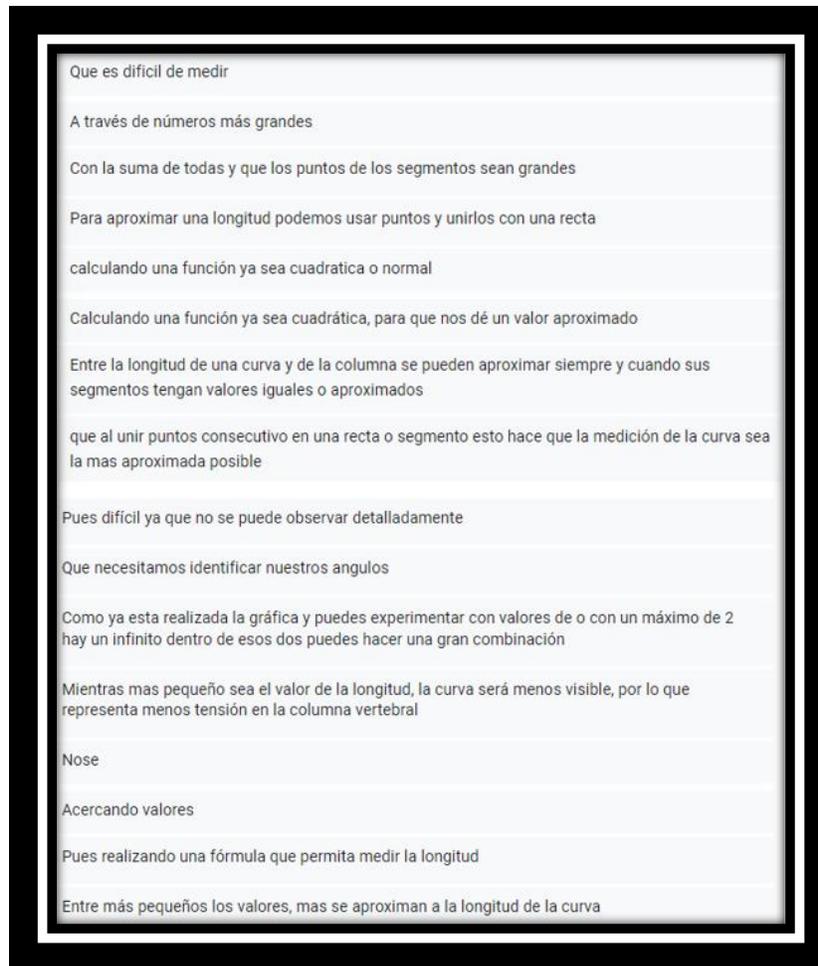


figura 47 respuesta a actividad de aprendizaje 2, aplicación 2

Con las respuestas que indicaron los estudiantes, se cumple el objetivo de aprendizaje en la mayoría de ello, sin embargo, aún es necesario trabajar en las HEyAG para que el estudiante logre el objetivo que se plantea.

Actividad Longitud

Para esta actividad didáctica de aprendizaje nuestro objetivo de aprendizaje consiste en aproximar la longitud de la columna vertebral multiplicando el valor de la longitud de segmento con el número de segmentos formados por esa longitud.

De esta manera se inicia la actividad con la interacción del estudiante con el EDVI ingresando tres valores de manera aleatoria los cuales deben ser menores y mayores al valor inicial dado. Una vez realizado observado que pasa con ello se hace la siguiente cuestión.

Tomando en cuenta el número de longitud de segmento que elegiste y el número de segmentos que se formaron ¿Cómo puedes conocer el valor total de la longitud de la columna vertebral?

A través de tener bien la medición

Sumando sus longitudes

Sumando los puntos definidos

Calculando el valor de cada uno de esos segmentos y haciendo la suma de ellos

mando la longitud del segmento mas pequeña posible

Viendo desde donde esta la desviación

Por sus curvas e círculos lo cual genera angulos

No se

sumando las distancias a lo largo de los ejes

.3

Sumando los dos segmentos

Sumar todos los puntos en dónde empieza el segmento a donde terminan

mediante la forma de la recta que se va tomando

sumando dos puntos

usando números mínimos de la longitud

Multiplicando los dos valores

Sumando el aproximado

Nose

con algun criterio o formula

con la medición del segmento mediante una formula

Al multiplicar la longitud de segmento y número de segmento

reduciendo el valor de longitud de segmentó.

Mediante las coordenadas de sus puntos que los podemos poner en la recta y de esta manera aproximar la medida

figura 48 respuestas a actividad de aprendizaje longitud, de aplicación 2

Con las respuestas a esta pregunta, los estudiantes han desarrollado la intuición y deducido como pueden calcular de manera aproximada la longitud de la columna vertebral.

Para las siguientes preguntas se formalizará y veremos que respuestas obtenemos al respecto.

Una vez que el estudiante interactúo nuevamente con el EDVI, se dio a conocer el valor de la longitud de la columna vertebral de la imagen, con base a ello se le solicito a los estudiantes

¿cómo pueden aproximar la longitud de la columna vertebral? Conociendo el valor de la longitud.

De que es la suma de todos las longitudes
Hay diferentes fórmulas para calcular longitudes
se siguen utilizando funciones de aproximacion
Se multiplica el número de segmentos resultantes por el número de longitud
Concluyo que la columna puede llegar a calcularse de manera aproximada o casi exacta al calcular con segmentos muy pequeños
que entre menor sea la longitud del segmento mas acercada va a hacer
viendo cuantos puntos tienes de referencia
Nada
Se puede aproximar desde intentar con diferentes intervalos
Que dependiendo de la postura y la localización de los puntos en X y Y esta se puede definir como buena, mala o regular
Nose
Menor Valo, mas aproximacion
Realizando una fórmula dónde nos de los datos de la columna
Que es necesario obtener valores mas bajos al cero y sumar esos valores
Pues insisto que es verificar las aproximaciones que se van teniendo entre cada una de ellos
que los cálculos deben ser variados para llegar a el resultado
Que no es nada de lo que uno se imagina
nose
que con segmentos pequeños se genera una curva con menor segmentos
que mediante aproximaciones se puede calcular el valor de un segmento
Puedo concluir con que sería diámetro por pi
la aproximación cambia constantemente de acuerdo a los valores y es mas lejana a valores mayores y cambia o se acerca a valores menores, por lo que de acuerdo al valor podemos encontrar segmentos mas cortos o largos.
Pues que en la fórmula debemos de proponer segmentos pequeños para que se acoplen más a la columna de igual manera debemos conocer las coordenadas de cada punto para después poder calcularla en una recta y saber la medida de dicha curva

figura 49 respuestas a actividad de aprendizaje de aplicación 2

Analizando las respuestas encontramos que algunos de los estudiantes alcanzaron el objetivo de aprendizaje de la actividad didáctica de aprendizaje, sin embargo, existen aún áreas de

oportunidad en los HEyAG, en cuestión de redacción de pregunta, para que se dé un mejor entendimiento.

Por cuestiones de tiempo asignado para laboratorio, la tercera actividad no se pudo llevar a cabo.

En conclusión, los objetivos de aprendizaje de cada una de las actividades se cumplen, pero no en la totalidad, por otra parte, encontramos que los estudiantes que lograron el objetivo de aprendizaje en las actividades didácticas ya encontraron un significado y pueden relacionar lo aprendido hasta este punto con otras áreas del conocimiento, sin embargo, es necesario culminar de aplicar todas las actividades para poder observar si se cumple el objetivo general de la actividad.

6.1.3 Respuestas de prueba piloto 3

Antes de iniciar con la aplicación de esta prueba se realizaron mejoras correspondientes a las observaciones que se tuvieron en la aplicación de prueba piloto 2, se notó que no se indicaba el número de segmentos que se generaban al ingresar el valor de la longitud del segmento en el EDVI, asimismo se fijaron los ejes del EDVI para evitar una deformación cuando interactúa el estudiante con él.

Como se mencionó con anterioridad la actividad didáctica de aprendizaje inicia con una explicación breve para introducir al estudiante al contexto como se muestra en la siguiente figura.



figura 50 imagen de apertura de actividad de aprendizaje, aplicación 3

Una vez realizada esta introducción se solicita al estudiante responda a la interrogante siguiente *¿Crees que todas las columnas vertebrales tienen la misma longitud*

Teniendo las siguientes respuestas

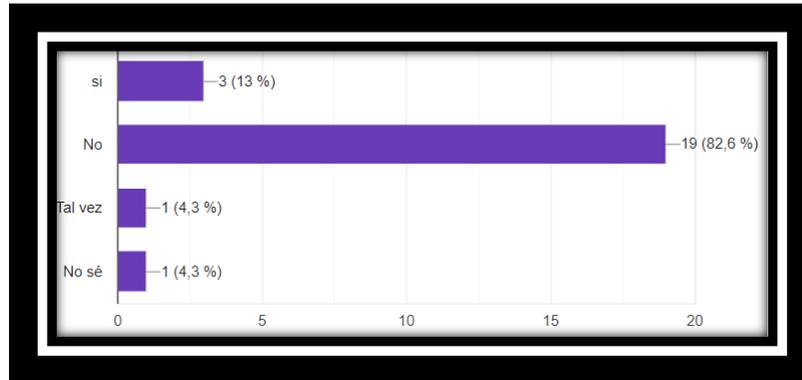


figura 51 respuesta a interrogante de actividad 1 aplicación 3

Como podemos observar solo una persona no sabe si tienen la misma longitud y otro estudiante indica que tal vez puedan tener la misma longitud.

Mientras que para la segunda interrogante *¿Crees que la longitud de la columna vertebral de un bebe y un adulto podría tener la misma longitud?* Las respuestas que se obtuvieron se indican en los siguientes porcentajes.

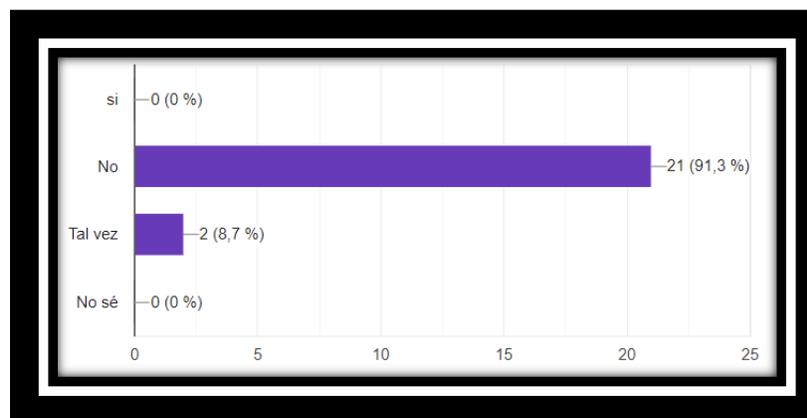


figura 52 respuesta a la actividad 1 de aplicación 3.

De aquí observamos que el 91.3% indica que no se tiene la misma longitud, de esta manera se tiene que los estudiantes que no sabían si tenemos la misma longitud o que habían

considerado que la columna vertebral de las personas tiene la misma longitud cambiaron su respuesta, indicaron que tal vez lo cual coincide con la pregunta anterior.

Como consecuencia a la pregunta anterior se realiza la siguiente pregunta *¿La forma normal de la columna vertebral es?*

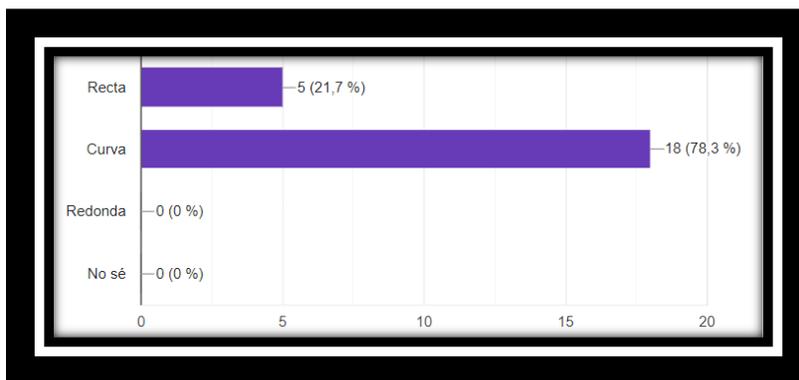


figura 53 respuesta a la forma curva de la columna vertebral, aplicación 3

Los porcentajes de las respuestas obtenidas nos muestran que el 78% de los estudiantes eligen que la forma de la columna vertebral es curva.

Posteriormente se tiene la siguiente pregunta *¿Cómo medirías en forma aproximada la longitud de una columna vertebral?*

En la siguiente figura se muestran algunas de las respuestas que brindaron los estudiantes a esta interrogante.



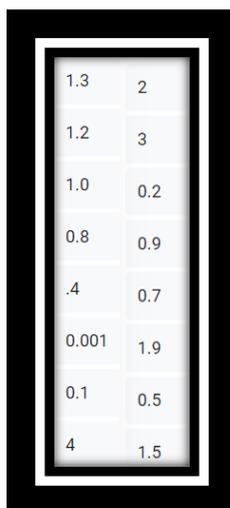
figura 54 Respuestas a pregunta de aplicación 3

Estas respuestas nos permiten conocer que los estudiantes pueden utilizar diferentes conocimientos que han adquirido en la escuela o en su vida diaria para poder resolver el problema.

Continuaremos mostrando las respuestas obtenidas de la siguiente actividad didáctica de aprendizaje aplicada.

Actividad (Aproximación)

Dentro de la actividad didáctica de aprendizaje se agregan instrucciones que debe seguir el estudiante para que interactúe ingresando valores de manera aleatoria en la casilla de longitud de segmento. Algunos de los valores que utilizaron los estudiantes, están dados en la siguiente imagen.



1.3	2
1.2	3
1.0	0.2
0.8	0.9
.4	0.7
0.001	1.9
0.1	0.5
4	1.5

figura 55 Valores utilizados por estudiantes

Una vez realizada la primera acción de exploración del EDVI, se continuo con la siguiente indicación. *Con los segmentos que se forman en tu primera elección ¿Cómo es la aproximación a la forma de la columna vertebral?* Teniendo los siguientes porcentajes como respuesta.

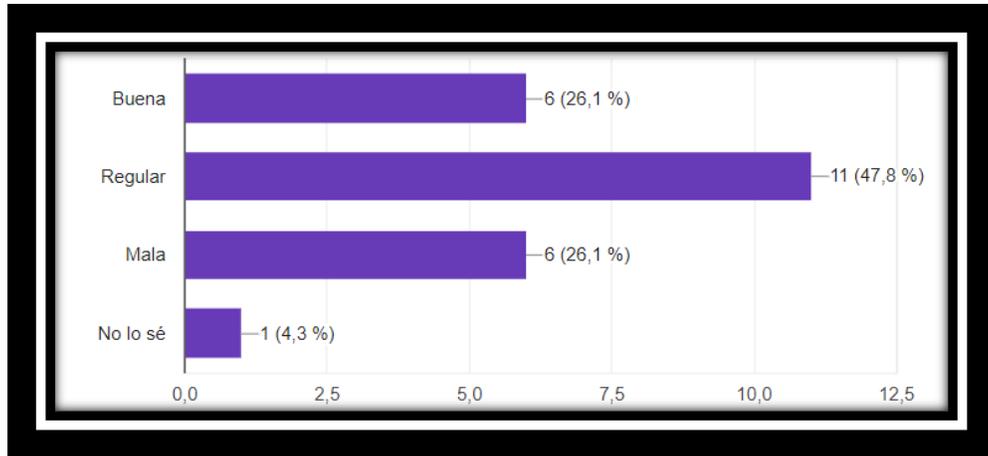


figura 56 Respuesta a interrogante de aplicación 3}

De estas respuestas podemos analizar que los valores que utilizaron los estudiantes fueron valores menores a la unidad, es por ello por lo que tuvieron una buena aproximación, los estudiantes que se encontraron con valores entre 1 y 1.5 fue regular, aquellos que tomaron el valor entre 1.5 y 2 fue mala, el estudiante que indico que no sabía si era buena o mala fue porque tomo un valor de longitud de segmento de 4 cm, es por ello por lo que no pudo observar su aproximación.

Posteriormente se solicitó que se interactuar nuevamente con el EDVI ingresando diferentes valores. En la siguiente figura se muestran los valores que utilizaron los estudiantes.

2	0.8
1.5	0.9
0.5	0.10
0.6	.2
1.3	1
1.7	0.0001
1.1	.5
1.6	3
2.8	.1

figura 57 datos de aplicación 3 actividad 1

Una vez que tenían su medida de longitud de segmento debían seguir la indicación y contestar la siguiente pregunta, *Con los segmentos que se formaron con tu segunda elección ¿Cómo es nuestra aproximación a la forma de la columna vertebral?*

La siguiente figura muestra los resultados de los estudiantes.

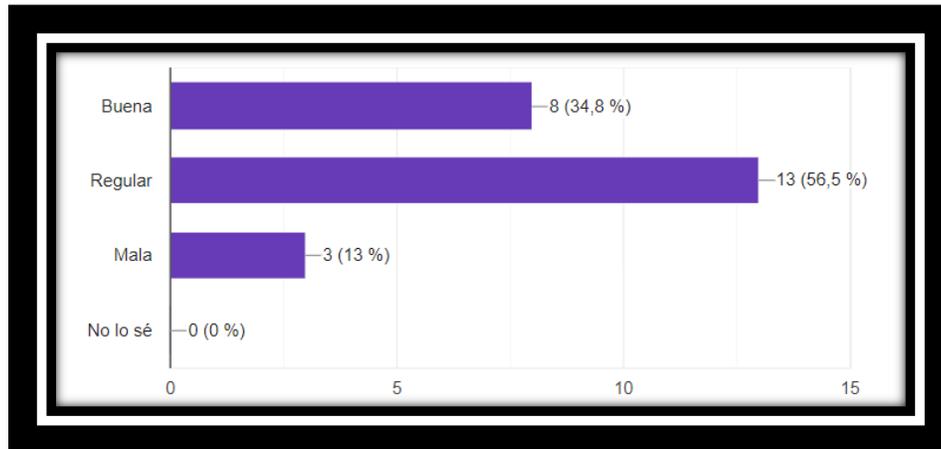


figura 58 Respuestas de actividad aproximación aplicación 3

Como podemos observar se tiene que el 34.8% de los estudiantes indicaron que la aproximación que obtuvieron con su segundo valor es mejor a la primera, esto es debido a porque utilizaron un valor menor a la inicial, respecto a los estudiantes que indican que es regular o mala se da porque utilizaron un valor mayor al que inicialmente habían indicado.

Siguiendo con las instrucciones, se solicita nuevamente la interacción con el EDVI ingresando un valor diferente a los ya ingresados, con base a ello solicita indique ¿cómo se fue su aproximación?

Dado que los valores que puede usar el estudiante son aleatorios y son con base a su decisión, ellos pudieron ingresar valores mayores o menores a los ya ingresados, por tal motivo las respuestas que tuvieron con el valor elegido se muestran en la siguiente figura.

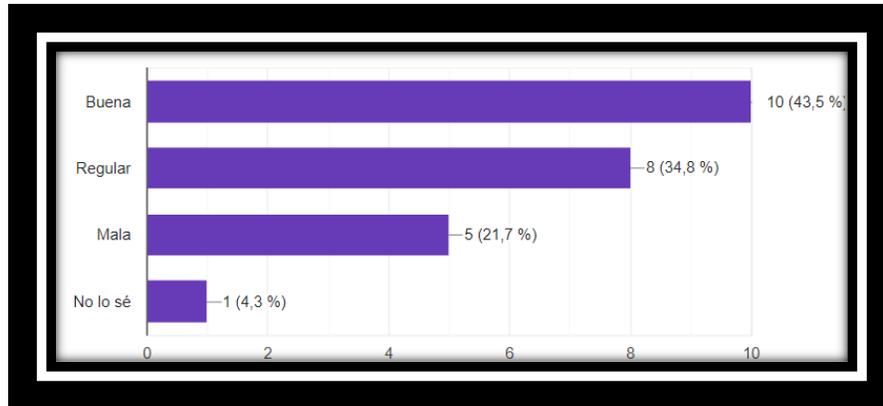


figura 59 Respuestas de aproximación, respecto a la aplicación 3

La razón de generar las preguntas anteriores fue con el propósito de desarrollar en el estudiante la capacidad de razonar y deducir que la mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral se da cuando los segmentos de línea recta son cada vez más pequeños.

Enseguida se da la siguiente indicación. *Al experimentar cambiando los valores de la longitud de segmento en la casilla de entrada, ¿Existe una variación de aproximación a la forma de la columna vertebral?*

Teniendo los siguientes porcentajes como respuesta.

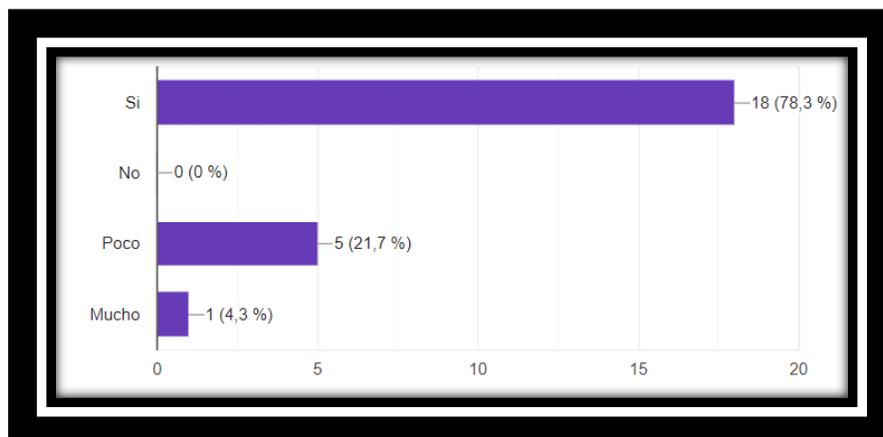


figura 60 respuestas a interrogante de cambio de variación en aplicación 3

Como podemos observar tenemos que el 78.3% de los estudiantes indican que, si existe una variación con los valores que utilizaron, sin embargo, el resto de los estudiantes los cuales representan el 21.7% que indicaron que fue poca la variación, se debe a los valores que utilizaron, ya que el cambio entre los valores que utilizaron fue mínimo.

Posteriormente se solicita al estudiante vuelva a interactuar con el EDVI y elija un valor aleatorio con el cual contestará la siguiente interrogante *Con el número que consideraste ¿Te parece una buena aproximación a la forma de la columna vertebral?*

La respuesta a esa pregunta genero la siguiente información

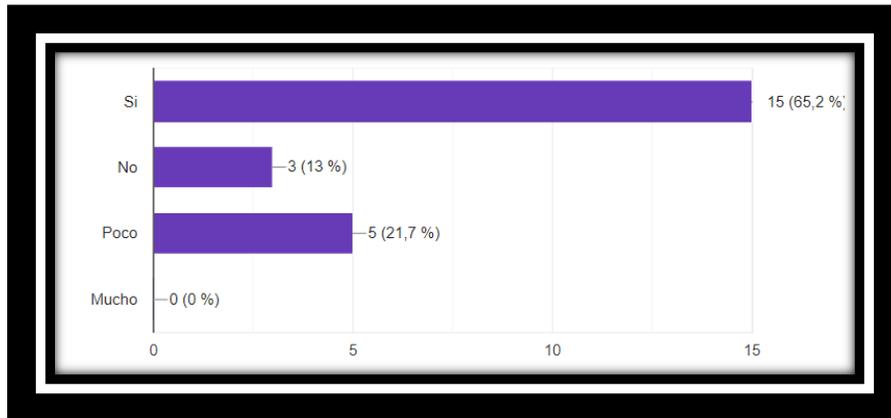


figura 61 respuesta a si es buena la aproximación a la forma de la columna vertebral en aplicación 3

Para esta respuesta vemos que el 65% de los estudiantes indican que para ellos ya es una buena aproximación, y el resto aun requieren realizar un ajuste más. Es por ello por lo que se realiza la siguiente pregunta *¿Cómo puedes mejorar la aproximación a la forma de la columna vertebral?*

Teniendo como resultado los siguientes datos.

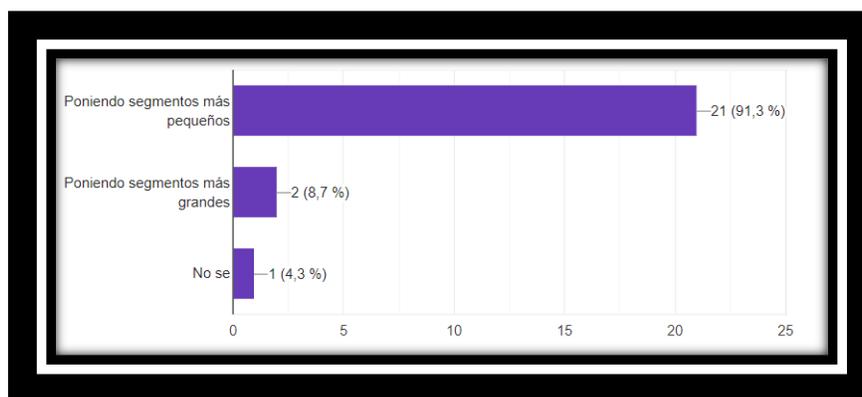


figura 62 Respuesta a como se puede mejorar la aproximación a la forma curva de la columna vertebral, aplicación 3

La respuesta anterior nos indica que el 91% de los estudiantes ya lograron el objetivo de la actividad, sin embargo, las 3 personas que representan el 8.7%, no han alcanzado el objetivo

de aprendizaje, eso se debe a las respuestas que han agregado en las anteriores indicaciones, ya que los valores que agregaron no los conducen al objetivo de aprendizaje. Una de nuestras hipótesis indica que es porque puede ser que no comprendan las preguntas o por no tener una redacción clara por parte del investigador en plantear las interrogantes, lo cual es una mejora al trabajo.

Para tratar que el estudiante por su propia cuenta logre corregir y alcanzar el objetivo de aprendizaje se realiza la siguiente interrogante *En caso de que te parezca que la aproximación no es buena o quisieras que fuera mejor ¿Cómo podrías mejorar esa aproximación?*

Con base a la interrogante las respuestas que logramos obtener fueron las siguientes:

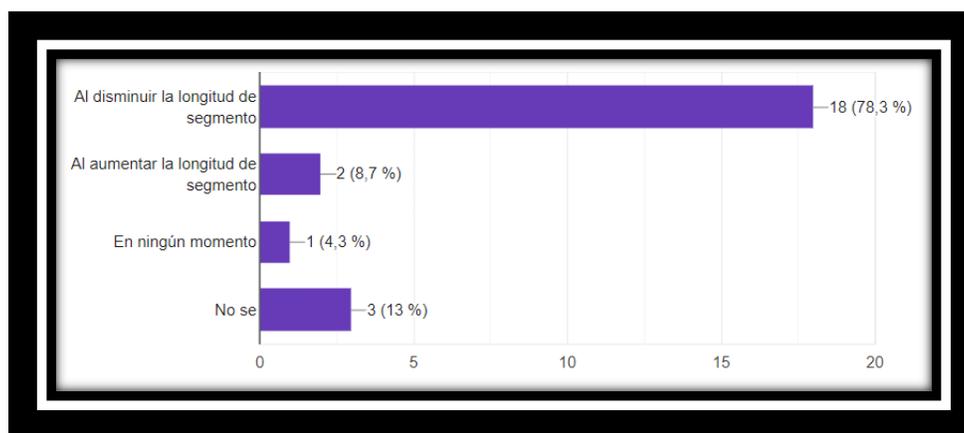


figura 63 Respuesta ¿Cómo puede mejorar la aproximación?, Aplicación 3

Las respuestas nos indican que el 78.3% de los estudiantes continúan cumpliendo con el objetivo de aprendizaje al identificar que al disminuir la longitud de segmento se puede lograr una mejor aproximación, los 2 estudiantes que representan el 8.7% no logran el objetivo por el hecho de utilizar valores que no fueron de apoyo para lograr el objetivo de aprendizaje, así mismo el estudiante que indica que en ningún momento es porque ya para él su aproximación es la que buena, los 3 estudiantes restante que indican que no saben es por el hecho de tener confusión en los datos que han venido manejando y la pregunta.

Para cerrar esta actividad se plantea la siguiente interrogante *¿Cómo puedes aproximar a la forma de una curva en específico?* A lo que los estudiantes contestan de la siguiente manera.

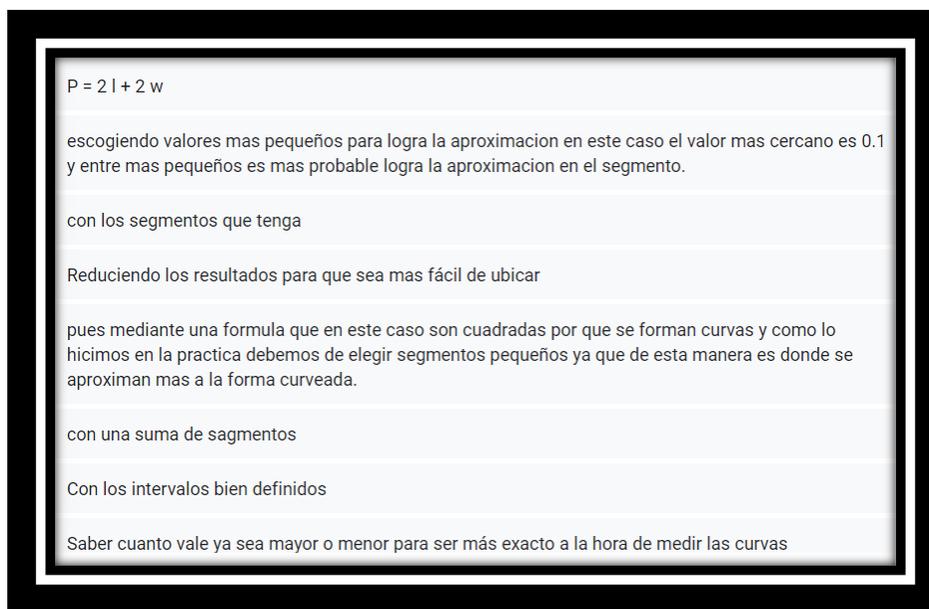


figura 64 respuestas a la interrogante de como aproximarse a una forma curva, aplicación 3

Estas respuestas nos permiten ver que el objetivo de aprendizaje planteado para esta actividad de aprendizaje se cumple para un número determinado de estudiantes sin embargo aún existen áreas de oportunidad que se visualizan en los estudiantes que no han alcanzado el objetivo de aprendizaje y para ello es importante analizar cuál es el principal factor que no permite cumplir el objetivo de aprendizaje.

Actividad aproximación a la longitud de la columna vertebral

Nuestro objetivo de aprendizaje para esta actividad consiste en desarrollar en el estudiante un pensamiento deductivo el cual le permita aproximar la longitud de la columna vertebral por medio de la multiplicación de la longitud de segmento de línea recta y el número de segmentos formados por esa longitud dada.

De esta manera, nuestra actividad de aprendizaje inicia solicitando al estudiante tenga una interacción con el EDVI, el objetivo es que analice los cambios que se generan y explore él mismo. Posteriormente, se le pide que elija una longitud de segmento de línea recta que le brinde una buena aproximación a la columna vertebral. Posterior a ello debe contestar la siguiente interrogante *Tomando en cuenta el número de longitud de segmento que elegiste y el número de segmentos que se formaron. ¿Cómo puedes conocer el valor total de la longitud de la columna vertebral?*

En la siguiente imagen se presentan algunas de las respuestas que se tuvieron a esta interrogante, estas respuestas se tomaron de manera aleatoria para presentarlas.

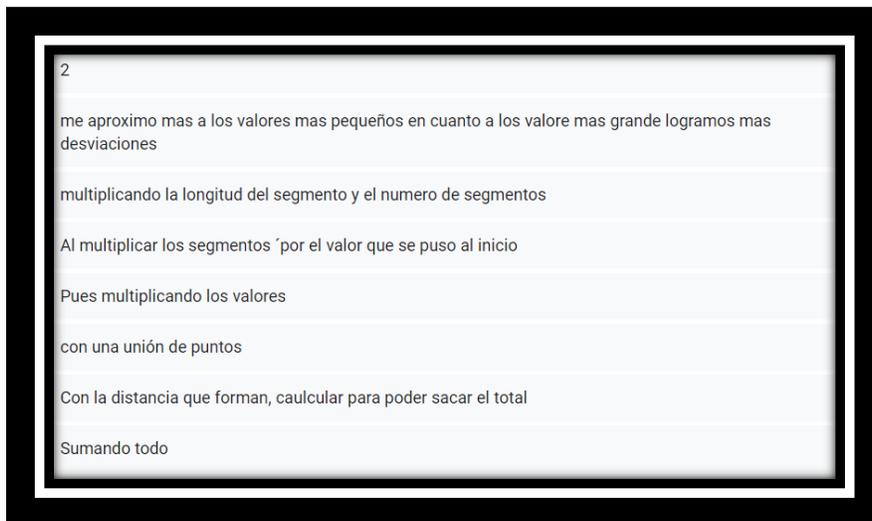


figura 65 Respuestas a la interrogante de como conocer la longitud de la columna vertebral

Como podemos observar los estudiantes ya indican que lo pueden realizar sumando los segmentos o multiplicando la longitud del segmento por la cantidad de segmentos generados, así mismo en algunas de las respuestas ya comienzan a dar valor a la longitud de la columna vertebral.

Posteriormente se le solicita al estudiante nuevamente interactuar con el escenario agregando un nuevo valor que sea menor al elegido en la pregunta anterior, para posteriormente contestar a la siguiente interrogante *¿Cómo puedes conocer la aproximación de la longitud de la columna vertebral?*

En la siguiente figura mostramos una representación de las respuestas que se obtuvieron a esta pregunta.

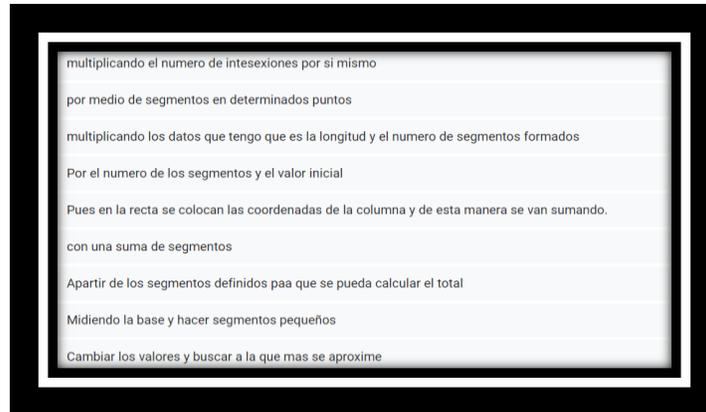


figura 66 respuesta a la interrogante como puede calcular la longitud de la columna en la aplicación 3

de nuevo se manifiestan respuestas acordes al objetivo de aprendizaje.

Posteriormente se indica en la actividad didáctica de aprendizaje el valor de la columna vertebral que se presenta en el EDVI, con base a ello los alumnos deben analizar si el valor que tanta aproximación tuvieron con su valor y respecto al que se presentaba. Finalizamos con la interrogante *¿Qué puedes concluir acerca de cómo calcular de manera aproximada la longitud de la columna vertebral?* La cual nos brindó las siguientes respuestas.



figura 67 respuesta a la interrogante como medir de manera aproximada la longitud de la columna vertebral en aplicación 3

La mayoría de las respuestas como podemos observar se refieren a tener más segmentos, disminuir la longitud de segmento, multiplicar el número de segmentos, lo cual permite lograr el objetivo en las siguientes actividades didácticas de aprendizaje.

Ahora se plantea la siguiente pregunta *¿Qué puedes concluir acerca de cómo calcular de manera aproximada la longitud de una curva?* Con la finalidad de conocer que aprendizaje obtuvieron los estudiantes. Las respuestas que se obtuvieron son las siguientes.

P = 2 l + 2 w puede ser una formula viable

el poder calcular los segmentos de la columna los valores son mas precisos si son menores de 1 por lo que reduce el numero de segmentos.

que es muy sencillo y rapido calcularla

Que viendo varios resultados puedes llegar al resultado

pues que al escoger valores pequeños el numero de segmentos es muy grande y que a la hora de multiplicar estos mismos se logra mas la aproximación a la curva

con líneas rectas y con una sumatoria de segmentos

Es interesante como este tema puede servir para una gran infinidad de temas o actividades de la vida cotidiana

Qué entre más te aproximes o superes la curva estará bien óya que no puede ser más o menos de esos

Seria dividir los segmentos pequeños y aproximar una longitud.

??

que si escogemos longitudes pequeñas es facil acercanos a la medida exacta

entre mas pequeños los segmentos mas nos acercamos y mas disminuen los segmentos

Que al paso que voy avanzando en ves de incrementar una cifra arriba de 0.7, es lo contrario debe el disminuir, para lograr tener una aproximación.

QUE VARIA MUCHO DEPENDIENDO EL NUMERO DE SEGMENTOS ELEGIDOS

Entre mas pequeño sea el segmentos mayor sera la aproximacion

QUE ENTRE MAS SEGMENTOS DE MENOR TAMAÑO HALL MAS CERCA DE ENCONTRAR LA MEDIDA DE ESTA

Que la cantidad de segmentos que nos den es el resultado de la longitud, después de multiplicarlo por la longitud de cada segmento

Con mas segmentos

crear segmentos mas pequeños para aproximar medidas

que tengo que disminuir la longitud

figura 68 respuesta a la conclusión de la actividad de longitud en aplicación 3

Las respuestas a esta interrogante refieren al número de segmentos, indican que mientras más pequeño sea el segmento es mejor la aproximación, algunas respuestas indican que se debe realizar una multiplicación para encontrar el valor aproximado de la longitud de la curva.

Continuaremos presentando las respuestas que se obtuvieron al aplicar la actividad número 3, donde se generaliza el concepto de integral definida y se da un significado a la misma.

Actividad 3 Generalización.

Para esta actividad didáctica de aprendizaje, se plantea es la siguiente.

¿Para tener una mejor aproximación a la longitud de la columna vertebral, se debe?

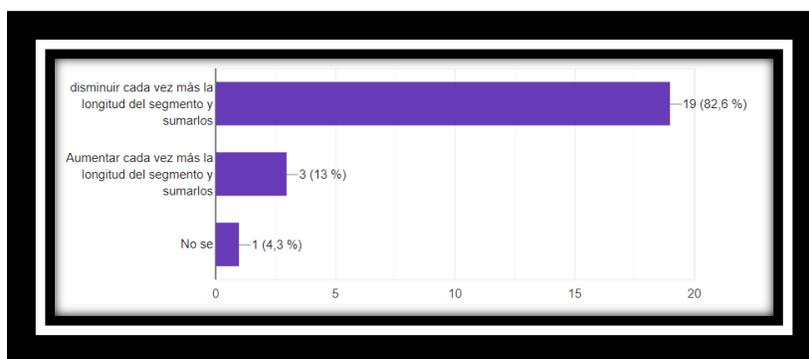


figura 69 Respuesta ¿Para mejorar una aproximación? Aplicación 3

El 82.6% de los estudiantes mantienen el conocimiento adquirido e identifican como obtener la longitud, sin embargo, los estudiantes restantes que no lograron tener una respuesta correcta se debieron a tener confusión en la redacción de la pregunta.

Continuando con la siguiente cuestión, *El proceso de mejorar la aproximación de la longitud de la columna vertebral ¿será?*

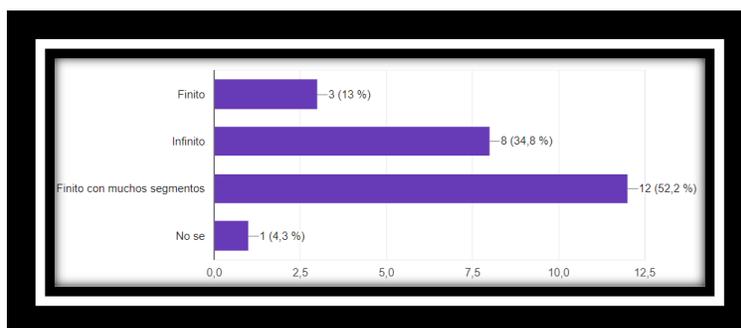


figura 70 Respuesta de proceso de mejorar la aproximación. Aplicación 3

Para esta pregunta al momento de realizar una retroalimentación se notó que el problema surgió en la palabra infinito o finito, esto porque los estudiantes indicaban que debía ser finito porque en algún momento se llegaría a la forma de la columna vertebral, por otra parte, otros estudiantes indicaban que nunca se llegaría a terminar porque siempre habría un hueco para llegar a la forma.

De esta manera se continúa con la actividad con lo siguiente. *Si el proceso de aproximar la longitud de la columna vertebral fuera infinito ¿Cómo podrías calcular la longitud de ella?* A lo que los estudiantes responden.

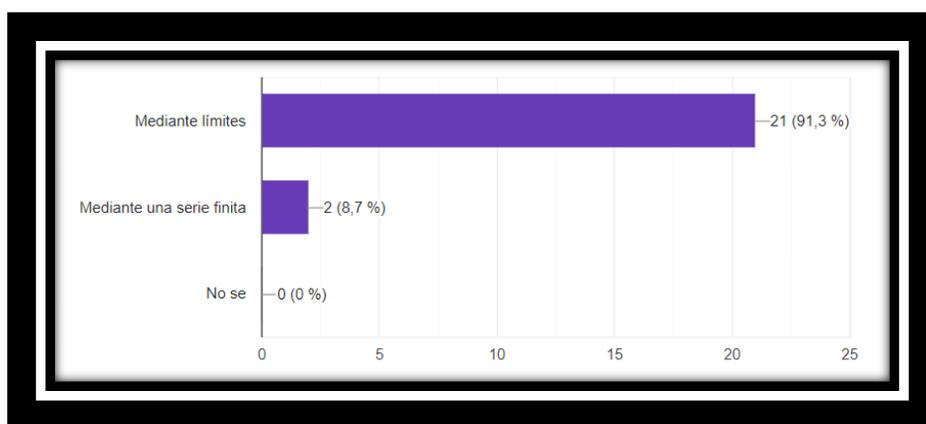


figura 71 Respuesta ¿Cómo calcular la longitud? Aplicación 3

Con estas respuestas se analizó que los estudiantes ya comienzan a identificar el proceso como un límite,

Por último la respuesta a la interrogante *¿La suma de todas las longitudes es?*

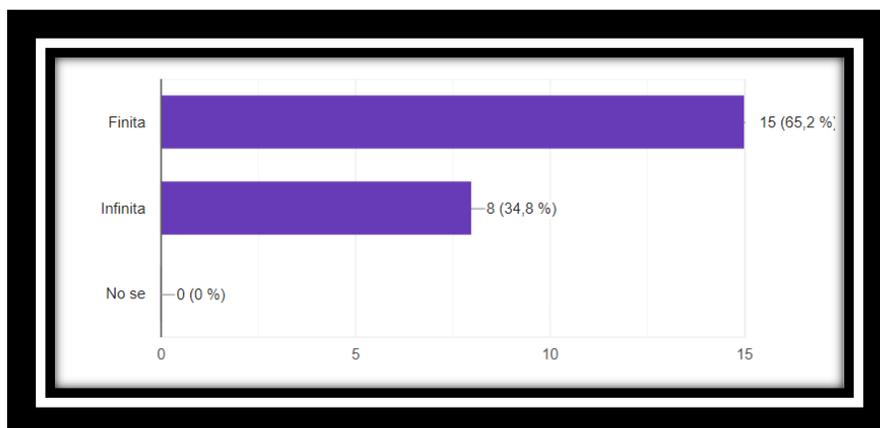


figura 72 Respuesta a la suma de todas las longitudes. Aplicación 3

De acuerdo con la respuesta a la pregunta donde se preguntaba el proceso finito o infinito se tuvo la misma discusión entre los estudiantes.

Dado que los estudiantes tenían otras actividades que desarrollar por parte de su institución, no se permitió culminar con las actividades didácticas de aprendizaje.

En estas pruebas piloto, aunque no se pudieron culminar las actividades en la totalidad, nos permitieron mejorar los EDVI y las HEyAG, en cuestión de redacción e interacción con ellas. Los estudiantes permitieron tener una comprensión del concepto de acumulación y de longitud de una curva, así mismo se dio un acercamiento al proceso de límite.

6.2 Análisis de Resultados de aplicación de actividades didácticas

A continuación, mostramos los resultados obtenidos de aplicación de las actividades didácticas de aprendizaje las cuales fueron aplicadas a un grupo de estudiantes de nivel superior en una escuela pública de México, los cuales se encontraban cursando el segundo semestre de la carrera de Ingeniería Industrial.

Este reporte consta de las respuestas obtenidas de 4 actividades didácticas de aprendizaje, las cuales dan indicaciones al estudiante para explorar los EDVI y contestar las HEyAG respectivas.

Iniciaremos dando el informe correspondiente a la obtención de las respuestas relacionadas a la actividad de aprendizaje que introduce al estudiante a la problemática y posteriormente las respuestas obtenidas a la actividad 1 de aprendizaje.

Análisis de Actividad 1

La actividad introductoria inicia con un texto el cual da una explicación sobre la problemática de la columna vertebral, la finalidad del texto es introducir al estudiante a la problemática de la columna vertebral, así mismo se realizan preguntas para conocer que conocimiento tiene el estudiante con el tema de la columna vertebral y como relaciona sus conocimientos con esta problemática.

Por tal motivo la primera interrogante que se presenta a los estudiantes brinda los siguientes datos cuantitativos.



figura 73 Respuesta a interrogante 1 de actividad 1, aplicación 4

Al finalizar la actividad de aprendizaje se dio una retroalimentación tomando una HEyAG al azar y de manera grupal comentar porque la elección de esas respuestas.

Las respuestas obtenidas con la elección *no* representan el 82%, indican los estudiantes que su respuesta se basó por el hecho que el ser humano tiene diferentes estaturas, es por lo tanto no pueden tener la misma longitud. Los 3 estudiantes que representan el 14% estudiantes que dieron la respuesta *tal vez*, argumentaron que fue porque existen personas con la misma estatura y puede ser que la longitud de la columna vertebral sea la misma, él estudiante que dio como respuesta que no se, indica que desconocen del tema es por ello por lo que eligieron esa respuesta.

Continuando la segunda interrogante.



figura 74 Respuesta a interrogante 2 de actividad 1, aplicación 4

Nos indica que los 21 estudiantes que representan el 95% indica que no puede ser la misma longitud ya que la estatura de los bebés y la de los adultos no es la misma, por tal motivo no puede ser la misma longitud, sin embargo, un estudiante que representa el 5%, su respuesta fue *tal vez*, su argumento se debe a que un bebe tiene una estatura proporcional a la de un adulto, es por ello por lo que la longitud de la columna vertebral puede ser también proporcional y la misma longitud.

La tercera pregunta se muestra en la siguiente figura.

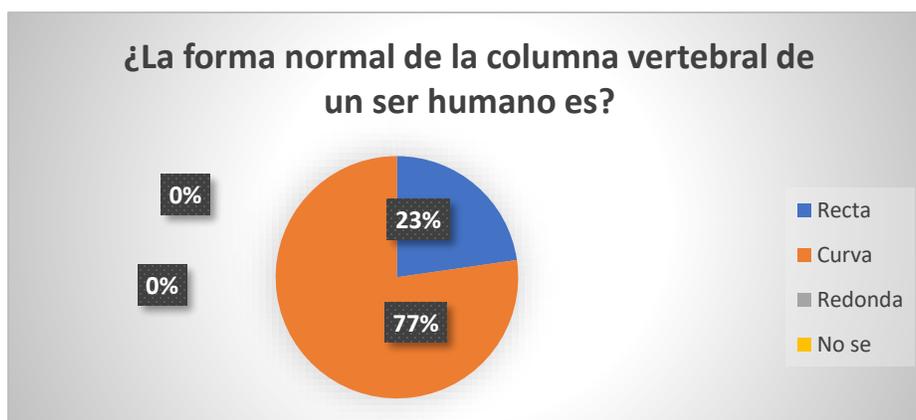


figura 75 Respuesta a interrogante 3 de actividad 1, aplicación 4

El 77% que es representado por 17 estudiantes, basaron su respuesta en el hecho que nuestra columna vertebral es curva, su comentario era “porque por más que te endereces no puedes tener una postura recta y cuando nos sentamos la postura que toma nuestro cuerpo es curva”. Por otra parte, el 23% que es representado por 5 estudiantes, indican que nuestra columna es recta ya que si fuera curva estaríamos con problemas de salud, como podemos observar los argumentos de los estudiantes se basan en lo que observan respecto al cuerpo humano.

Para finalizar esta parte introductoria se realiza la siguiente pregunta *¿Cómo calcularías la longitud de una columna vertebral de un ser humano de estatura promedio?* A la cual se da una serie de respuestas que los alumnos indican de acuerdo con sus conocimientos, en las siguientes imágenes se muestra evidencia de algunas de las respuestas obtenidas.

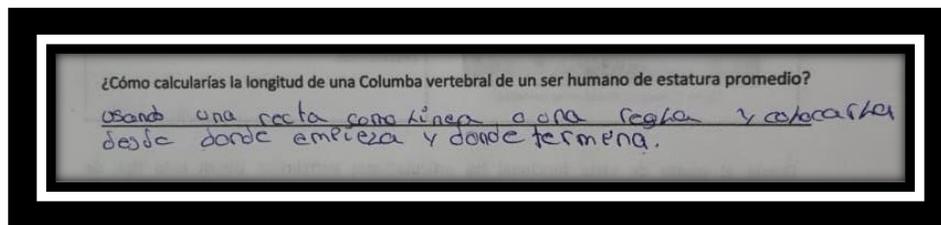


figura 76 Respuesta de un estudiante a la interrogante de la actividad 1

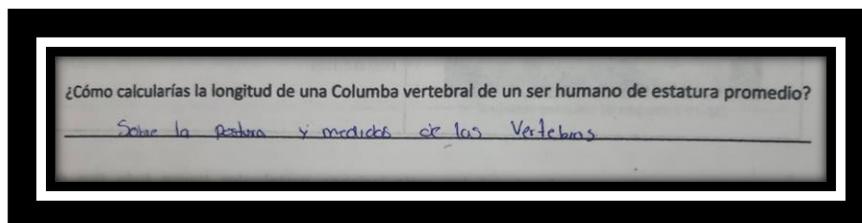


figura 77 Respuesta de estudiante dos a la interrogante de la actividad 1

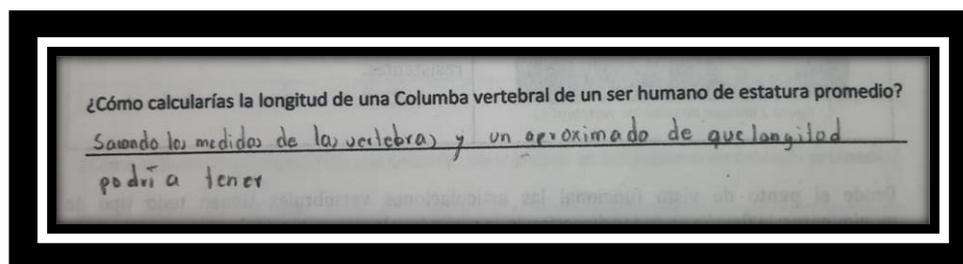


figura 78 Respuesta de estudiante tres a la interrogante de la actividad 1

Estas respuestas nos muestran que los estudiantes tienen una noción de como medir de manera aproximada la longitud de una curva, ya que sus respuestas involucran conceptos como suma, aproximación, líneas rectas sobre la columna vertebral.

Continuando con la actividad didáctica de aprendizaje, una vez que los estudiantes se involucraron con el problema de medir de manera aproximada la longitud de la columna vertebral, se inició con la aplicación de la actividad didáctica de aprendizaje 1, con una instrumentalización del EDVICO1 (<https://www.geogebra.org/m/qqs2z9y6>) y la interacción con la HEyAG correspondiente a esta actividad (ver anexo). El tiempo asignado para esta actividad correspondió a 15 minutos.

La actividad de aprendizaje inicia indicando al estudiante que interactúe con el EDVICO 1 ingresando diferentes valores posteriormente a ello se solicita contesten a la siguiente interrogante.

¿Cuál es el primer valor que elegiste para la longitud de segmento?

Algunos de los valores que utilizaron los estudiantes en su primera exploración correspondieron a: 0.1, 0.7, 0.9, 0.6, 0.5. Dado que estamos apoyándonos de tecnología, los estudiantes pueden visualizar de manera más clara cada uno de los cambios generados en cada uno de los valores que ingresan en la longitud de segmento, esto les permite tener una mejor comprensión de lo que está ocurriendo al ingresar diferentes valores, como las medidas de longitud que se utilizaron fueron menores a la unidad, la aproximación a la forma curva de la columna vertebral es buena, así mismo como beneficio de la tecnología es posible que se pueda reproducir lo que ocurrió con los valores que utilizaron los estudiantes, se muestra en las siguientes figuras la aproximación a la forma curva de la columna vertebral con dos valores utilizados por los estudiantes.

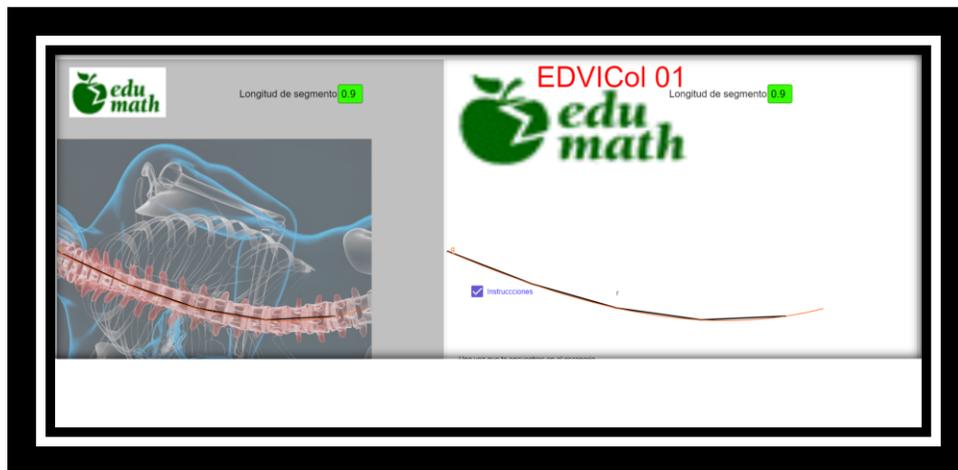


figura 79 aproximación a forma curva de columna vertebral con valor de longitud 0.9cm

Como podemos observar el valor 0.9 cm nos puede dar una aproximación a la forma curva de la columna vertebral, sin embargo, aún se puede tener un ajuste mejor, el apoyo de la tecnología que tenemos nos permite realizar ese ajuste correspondiente y puede ser visualizado por él estudiante, en la siguiente imagen se muestra la aproximación que se obtiene con el valor 0.1cm.

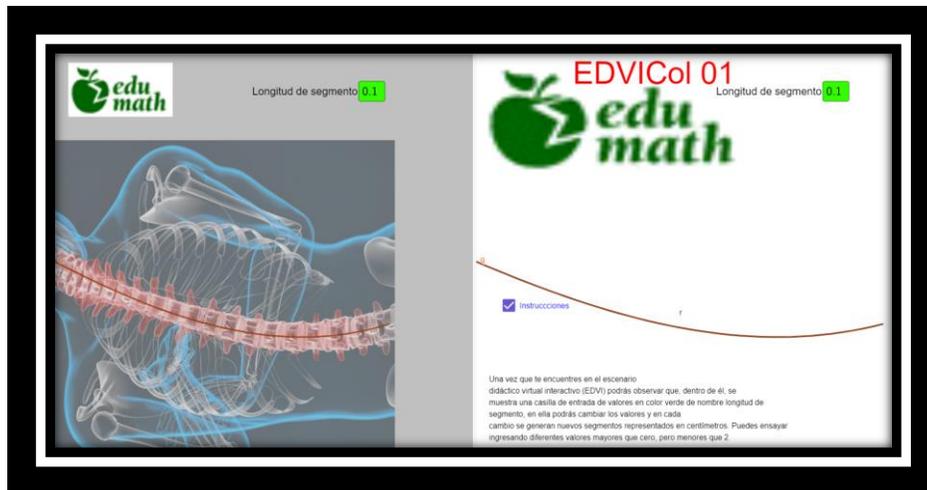


figura 80 aproximación a forma curva de columna vertebral con valor de longitud 0.1

Comparando los valores 0.9 cm y 0.1cm, tenemos una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral con el segundo valor, de esta manera para que el estudiante logre desarrollar esa intuición se solicita que el estudiante ingrese diferentes valores en el EDVICol01.

La siguiente interrogante que se plantea *¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?* Nos brinda los siguientes porcentajes como respuesta.

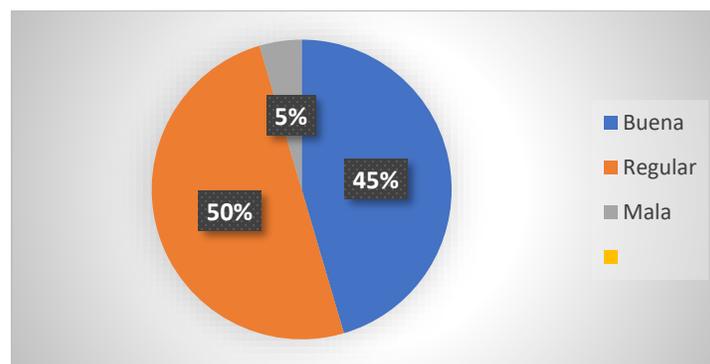


figura 81 respuestas a pregunta de actividad de aprendizaje 1

Los estudiantes que utilizaron valores menores a la unidad los cuales corresponden a 45% su aproximación fue buena, los estudiantes que utilizaron valores entre 1 y 1.5 fue regular su aproximación a la forma curva de la columna vertebral. Para el estudiante que indica su aproximación fue mala se debe utilizar el valor de 1.6, como estamos utilizando tecnología

nos es posible recrear el resultado que obtuvo el estudiante con ese valor ingresado, mostraremos en la siguiente figura cual fue la aproximación que se genera con esa medida.

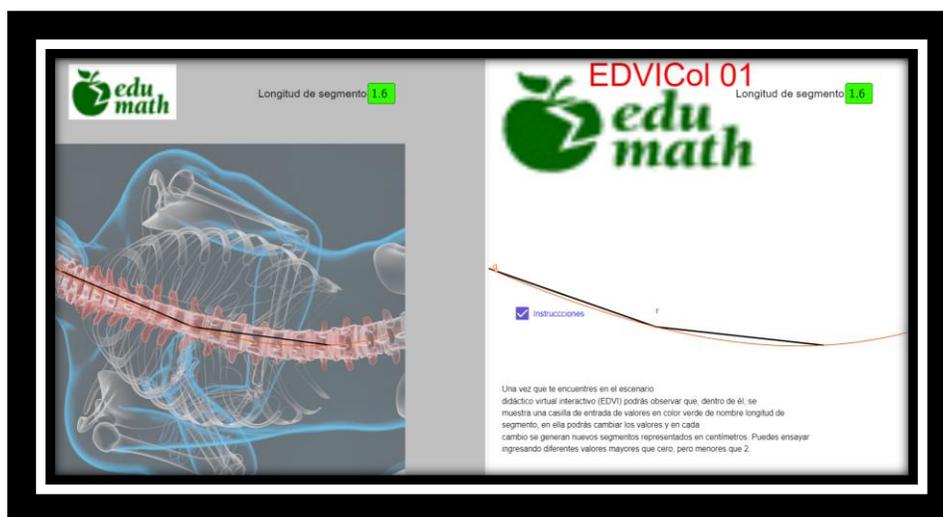


figura 82 Aproximación que obtuvo estudiante con longitud de segmento 1.6

Así mismo el uso de la tecnología nos permite tener una mejor interpretación de la respuesta del estudiante, para este caso la aproximación a la forma curva de la columna vertebral no se da de manera completa ya que un segmento queda fuera del intervalo de la función es por ello por lo que solo se visualizan dos segmentos.

Continuando con la actividad de aprendizaje, para la indicación, *Indica el valor a tu segunda elección*, las respuestas que presentaron los estudiantes corresponden a valores como 0.3, 0.6, 0.1 por mencionar algunos.

Con esos valores las respuestas que se tuvieron a la pregunta *¿Existió una variación en la aproximación con tu segunda elección respecto a la primera aproximación?*

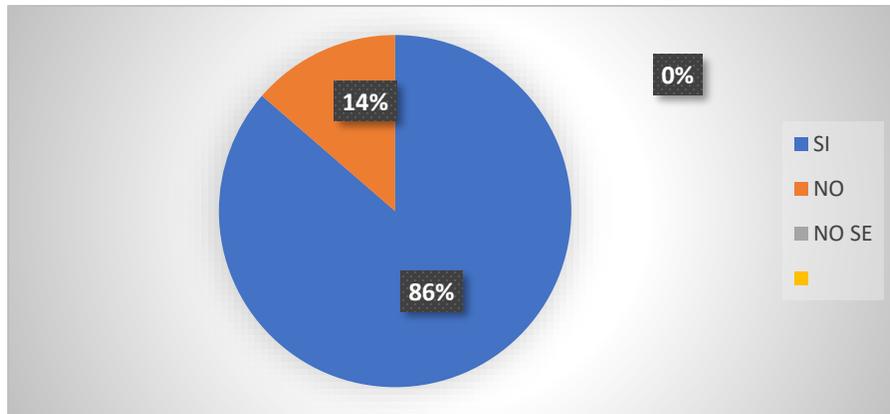


figura 83 Porcentaje de respuestas a la pregunta ¿existió variación en la aproximación?

El 86% de las respuestas corresponden a 19 estudiantes, los cuales tuvieron una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral por utilizar valores menores a 1 cm, por otra parte, el 14% que indicaron que no corresponden a 3 estudiantes, los cuales utilizaron valores mayores a 1 cm.

Posteriormente se realiza la siguiente pregunta *¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?* Para esta pregunta el porcentaje a las preguntas se representan en la siguiente gráfica.



figura 84 Porcentaje de respuestas a segunda pregunta de actividad didáctica de aprendizaje 1

Para el caso del 52% es representado por 11 estudiantes el cambio que observaron de tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral, fue por utilizar un valor menor al que usaron en el primer intento, para el 19% de los estudiantes que indico que corresponde a 4 estudiantes que indica que fue igual, es por el hecho que su cambio que

utilizaron en la longitud de segmento fue mínima, es por ello que no se notó un cambio en la aproximación y para el 29% que es representado por 6 estudiantes su aproximación a la forma curva de la columna vertebral fue peor porque utilizaron valores mayores a los que venían utilizando.

Esto nos permite identificar que hay un cambio en valores de segmento que ingresa el estudiante, lo cual se buscaba que pasara, ya que la finalidad es que el estudiante deduzca cual será la medida que permita generar una mejor aproximación.

Continuando con la actividad didáctica se le solicita al estudiante que ingrese un tercer valor de longitud de segmento para realizar una tercera aproximación a la forma curva de la columna vertebral, algunos de las longitudes de segmento que se dieron fueron medidas como 0.2, 1, 1.4, 0.3.

Con base a estos valores se solicita al estudiante indique si fue mejor su aproximación o peor, esto con el objetivo que él/ella deduzca cual es la mejor aproximación que se tiene.

Mostraremos cuales de los resultados que se obtuvieron en los tres valores que se ingresaron para realizar la aproximación a la forma curva de la columna vertebral.

El estudiante con el nombre de Brian Emmanuel el cual ocupó el número 22, en su primer intento utilizó el valor de 0.5. Dado que estamos utilizando tecnología podemos recrear la aproximación que tuvo.

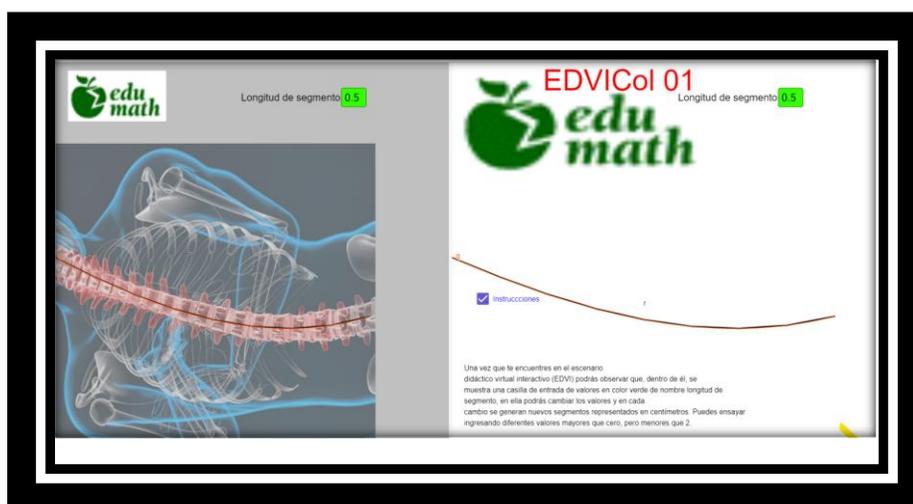


figura 85 Aproximación de Brian con valor de longitud de segmento 0.5

Posteriormente el segundo valor que utilizo para su aproximación fue el valor 0.7

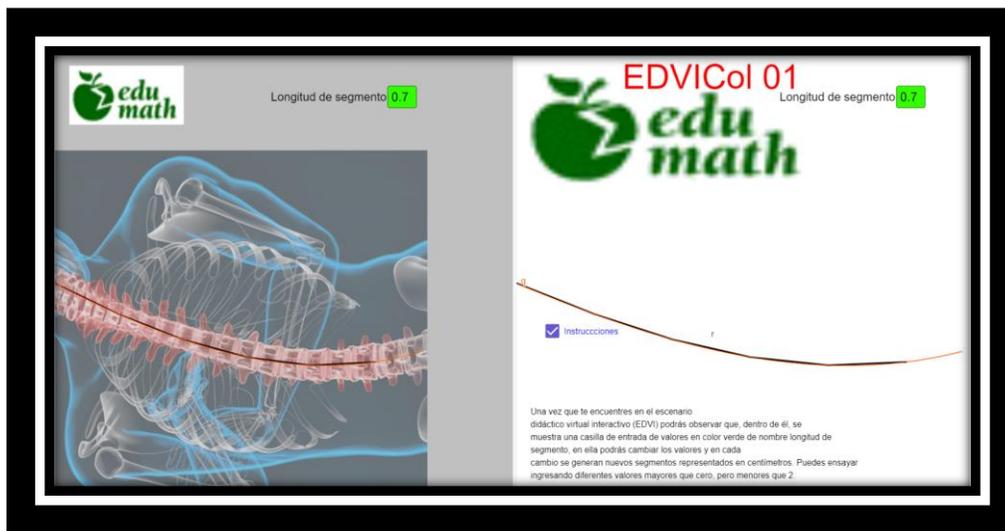


figura 86 Aproximación de Brian con valor de longitud 0.7

Para este caso de tener una buena aproximación se dio un cambio a una aproximación que no mejoró, de aquí que el último valor que utilizo en esta prueba fue el valor 1.3, teniendo como resultado la siguiente aproximación.

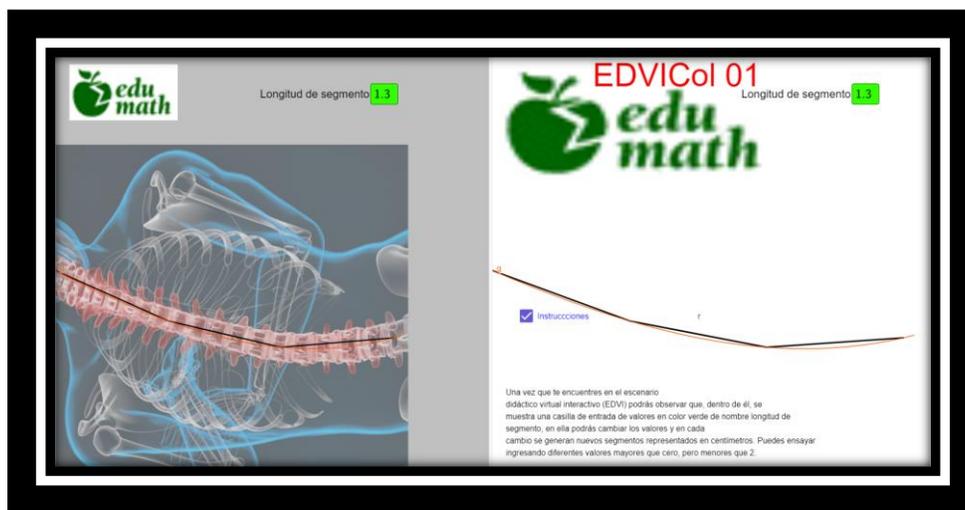


figura 87 Aproximación de Brian con valor de longitud de segmento 1.3

Para este estudiante como podemos ver inicio con un valor mínimo y fue cambiando su longitud por una que fue mayor cada vez.

Por tal motivo el observo que mientras es mayor la longitud de segmento la aproximación a la forma curva de la columna vertebral empeora. Hasta este momento se tiene la hipótesis que el estudiante puede deducir que se da una mejor aproximación a la forma curva de la Columna vertebral con un valor menor a un 1cm.

Ahora seleccionamos aleatoriamente un caso, que denominaremos Jonathan Castro, quien en nuestra orden ocupa el lugar número 12. Los valores que utilizo para realizar la aproximación se mostraran en los siguientes renglones mostrando que aproximación tuvo con cada uno de esos valores. Dado que estamos trabajando con tecnología nos es posible observar que aproximación fue la que tuvo el estudiante como resultado de haber utilizado sus valores.

Para la primera aproximación que se le solicito al estudiante, utilizo un valor de 1.6 cm en la longitud de segmento de línea recta. Teniendo como resultado de aproximación, la siguiente imagen.

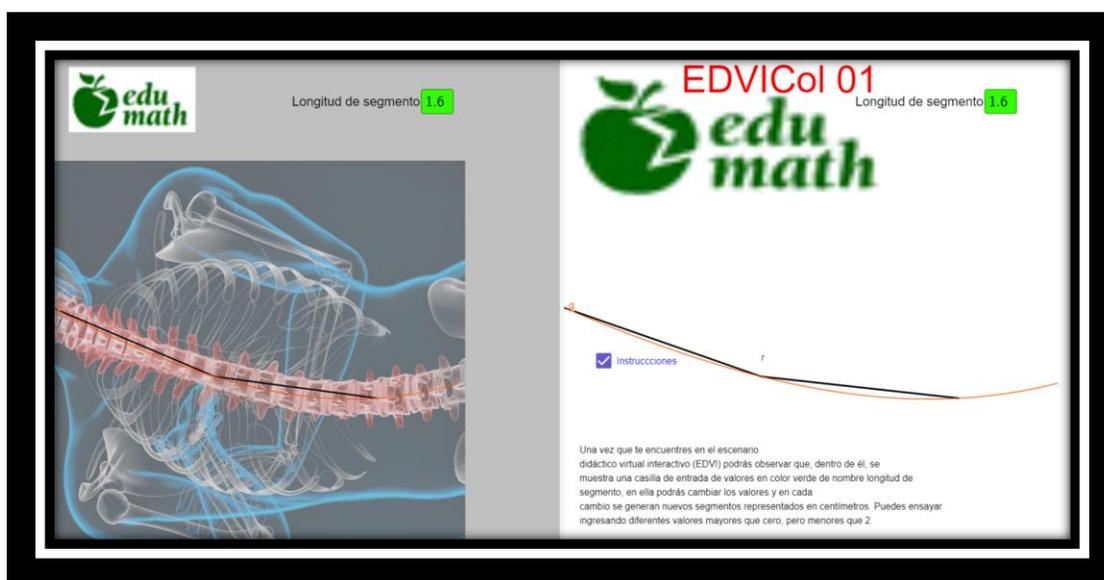


figura 88 Aproximación de Jonathan con valor 1.6

Como podemos observar su aproximación fue mala, la cual coincide con su respuesta a cómo fue su aproximación, aquí indica que su aproximación fue mala.

Para su segundo intento de aproximación a la forma curva de la columna vertebral utilizó el valor 1.0 cm. Teniendo como resultado la siguiente aproximación.

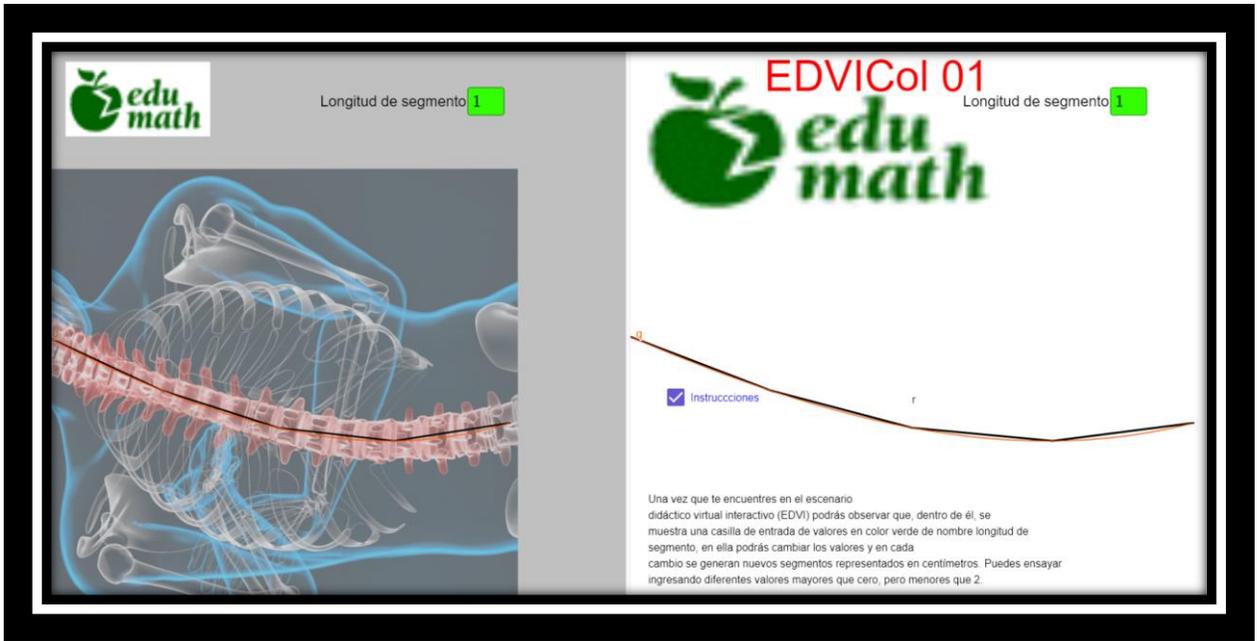


figura 89 Aproximación de Jonathan con valor de longitud de segmento 1

Esta aproximación brinda una mejora en la aproximación, misma que pudo identificar el estudiante, ya que la respuesta que brinda respecto a la aproximación a la forma curva con este valor corresponde a “Mejor”. Finalmente mostraremos el tercer valor que utilizó para realizar su tercera aproximación. En la tercera aproximación que se solicita, Jonathan utiliza el valor 0.3 cm. Teniendo la siguiente aproximación.

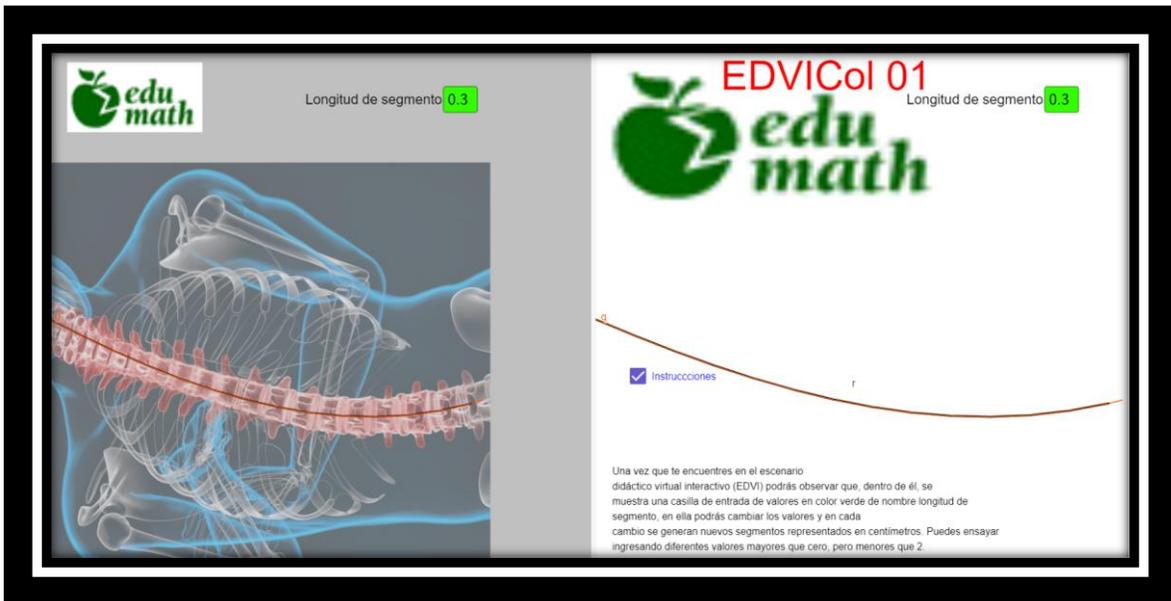


figura 90 Aproximación de Jonathan con valor 0.3

Con esta aproximación se tiene una mejor aproximación, misma que el estudiante identifica. Con estos resultados tenemos la hipótesis que dado que toma valores grandes y en cada aproximación que se solicita va disminuyendo, puede deducir que para tener una buena aproximación la longitud que debe considerar debe ser pequeña.

Mostraremos finalmente otro caso aleatorio, que denominaremos Kelin De Jesus. En la primera iteración, el valor que utilizó para su aproximación fue 0.10 cm teniendo la siguiente aproximación.

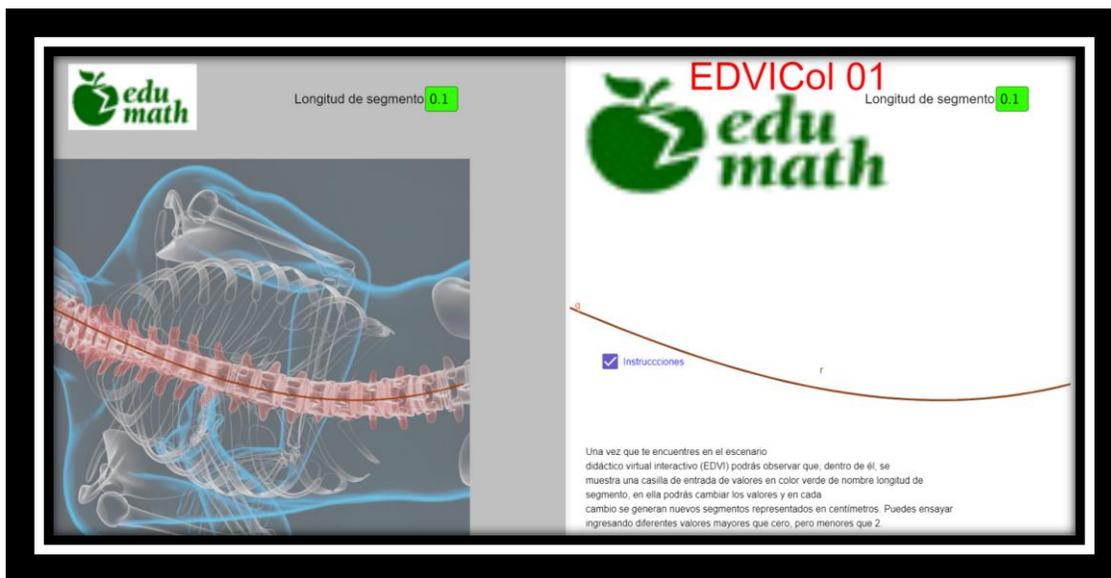


figura 91 Aproximación de Kelin con valor 0.1

Lo cual es una aproximación muy buena. Mismo análisis que él pudo identificar ya que a la pregunta ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral? Su respuesta fue “buena”. En su segunda aproximación utilizó un valor de 1.3 cm, lo cual tuvo como aproximación lo siguiente.

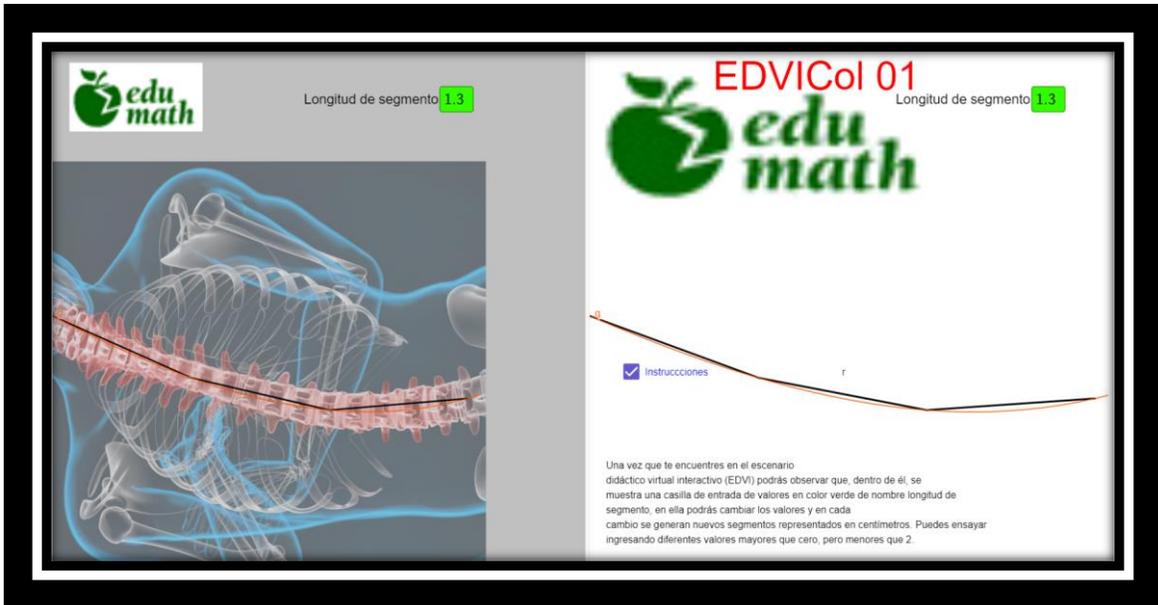


figura 92 Aproximación de Kelin con valor 1.3

Se puede observar que con este valor la aproximación es mala. Respuesta que Kelin a esta aproximación da como “Peor”, Como podemos observar el uso de tecnología permite al estudiante tener una mejor comprensión de lo que sucede y del comportamiento que se da en la aproximación a la forma curva de la columna vertebral con los valores que se utilizan. Por último Kelin utilizó en su tercera aproximación el valor 0.6 cm. Teniendo la siguiente imagen como resultado de la aproximación.

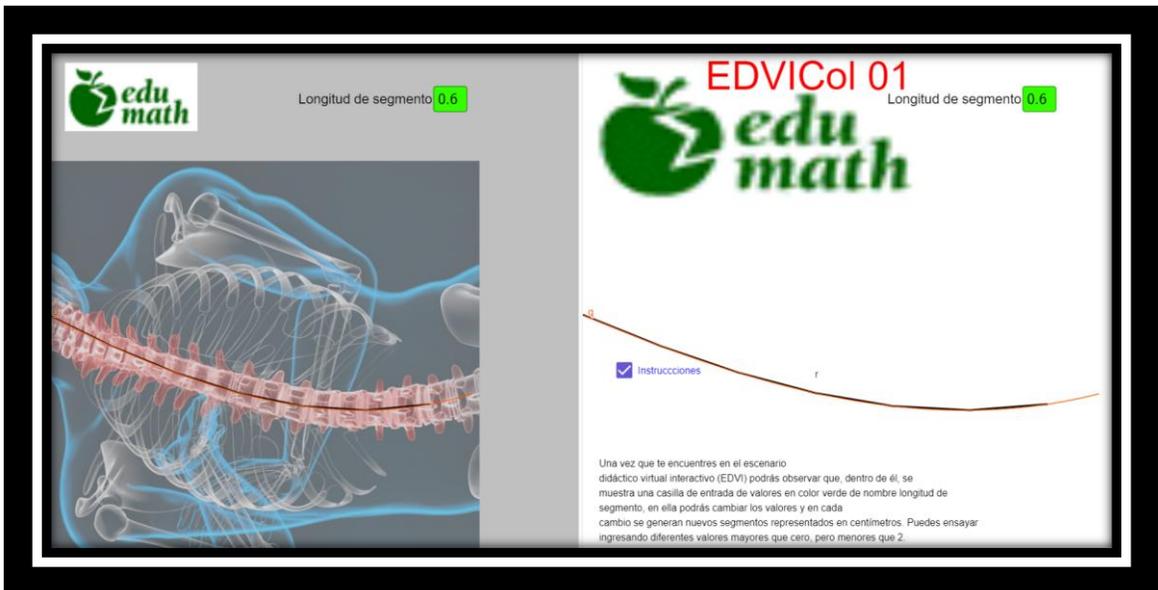


figura 93 Aproximación de Kelin con valor 0.6

Se observa que con este cambio la aproximación cambia y es mejor a la de la segunda prueba, pero no tan buena como la primera, nuestra hipótesis para este estudiante refiere que, con esta experimentación a diferencia de los dos primeros casos, donde el primero iba de menor a mayor en longitudes y el segundo valor era de mayor a menor, Kelin trabajo con un valor mayor y posteriormente un valor menor, por tal motivo puede deducir que la mejor aproximación será con el valor más pequeño.

Posteriormente de las 3 interacciones que se realizaron, en la actividad didáctica de aprendizaje se da la indicación en la actividad didáctica de aprendizaje, que se elija el valor de longitud de segmento que mejor aproxime a la forma curva de la columna vertebral de los tres valores con los cuales se experimentó. Algunos de los valores que se utilizaron por parte de los estudiantes corresponden a 0.11, 0.1, 0.2, 0.01.

Para los estudiantes que mencionamos las medidas que utilizaron fueron Brayan 0.4, Jonathan 0.1 y Kelin 0.11 dadas estas medidas la aproximación a la forma curva de la columna vertebral que se obtuvieron fueron buenas aproximaciones, en las siguientes imágenes mostramos cuales fueron las aproximaciones que se obtuvieron.

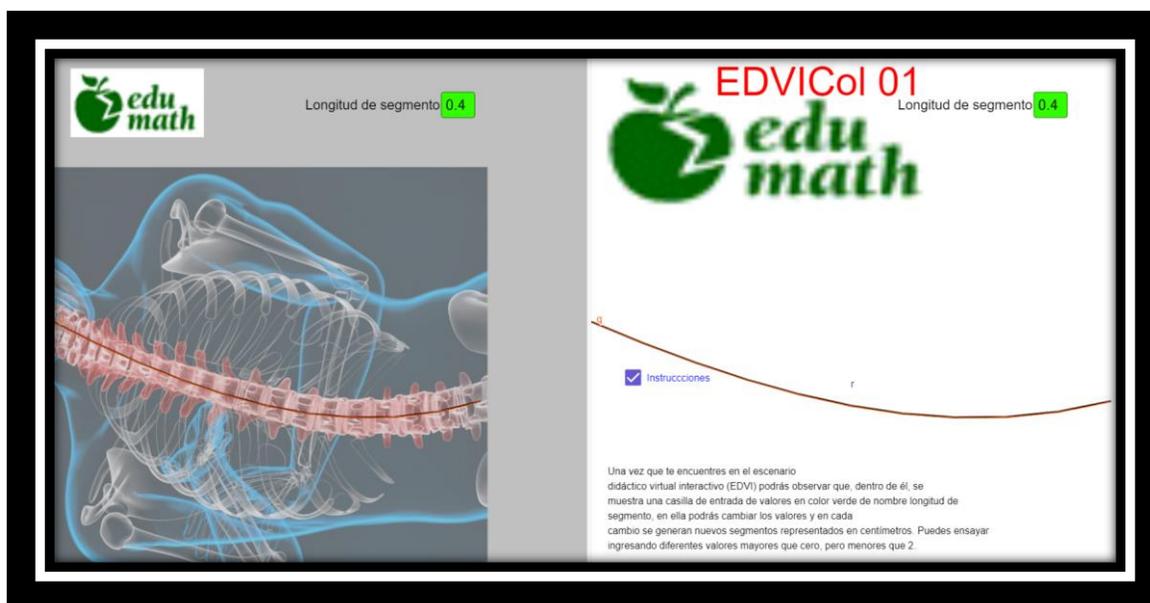


figura 94 Aproximación de Brian con un valor de 0.4 en longitud de segmento

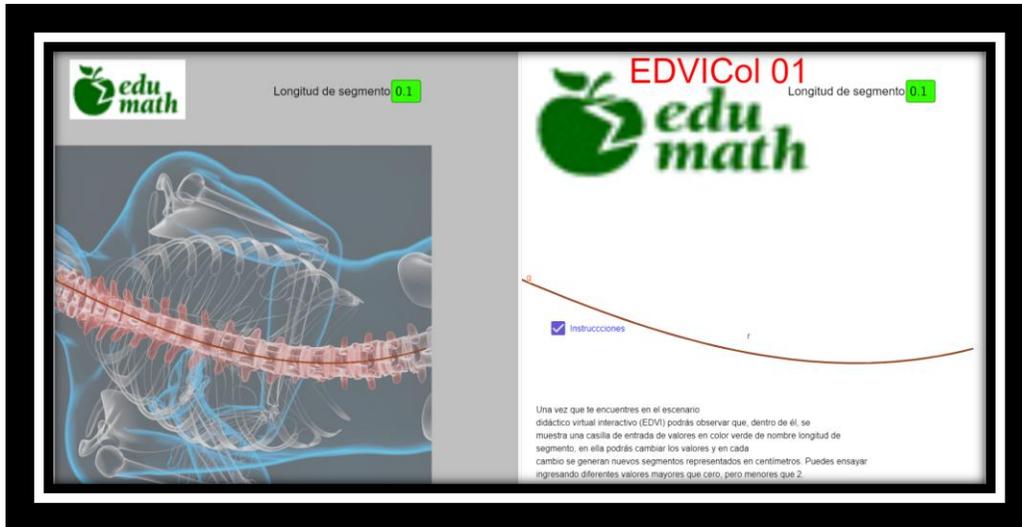


figura 95 Aproximación de Jonathan con un valor de 0.1 en la longitud de segmento.

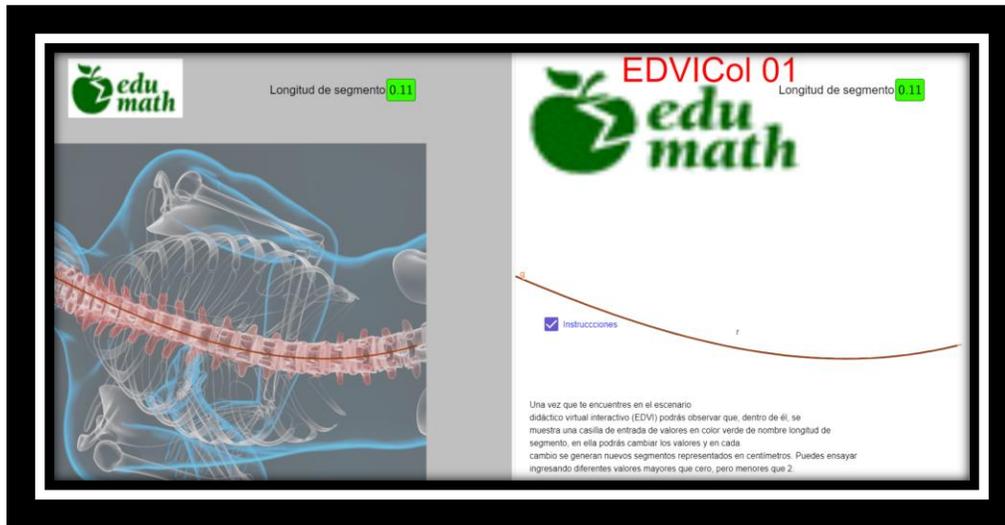


figura 96 Aproximación de Kelin con un valor de longitud de segmento de 0.11

En la siguiente tabla que se muestra se realiza una comparación de las medidas que utilizaron los estudiantes en cada una de las pruebas que se solicitaron.

Tabla 9 Valores utilizados por los estudiantes en actividad 1

Nombre/ Valor	Valor 1	Valor 2	Valor 3	Valor 4
Jonathan	1.6	1.0	0.3	0.1
Brian	0.5	0.7	1.3	0.4
Kelin	0.1	1.3	0.6	0.11

Como se puede observar con estos valores los estudiantes han logrado deducir que para tener una mejor aproximación se tiene que utilizar una medida de longitud pequeña para tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral.

Respecto a la pregunta donde se cuestiona sobre si *¿Se dio un cambio de variación en la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?* 13 estudiantes dijeron que si, 2 dijeron que se dio mucha variación y 6 poca fue la variación, los cambios que se dan en las respuestas están relacionadas a los valores que utilizaron, mientras unos estudiantes realizaron un cambio significativo otros realizaron un cambio mínimo, es por ello que no lograron observar un cambio en sus aproximaciones que realizaron.

Posterior a ello se continuo con la cuestión *¿Cómo se podría tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral?* Las respuestas fueron las siguientes.

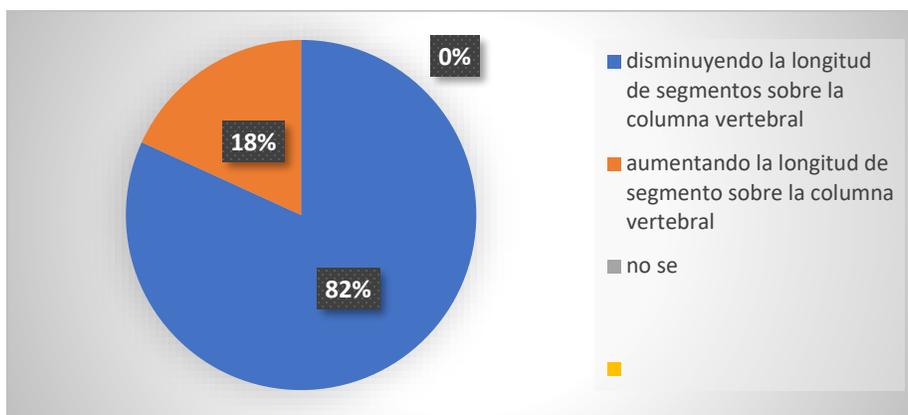


figura 97 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4

con estos datos podemos observar que el 82% de los estudiantes han logrado adquirir el objetivo de aprendizaje de aproximar a la forma curva de la columna vertebral por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños, sin embargo, el 18 % que es representado por 4 estudiantes, no alcanzaron el objetivo fue por los siguientes motivos:

1. Para el primer estudiante, las 3 longitudes que utilizó el estudiante para interactuar con el escenario fueron menores a 0.5, esto le permitió obtener una buena aproximación a la forma curva de la columna vertebral, sin embargo, al preguntar el motivo de su respuesta su explicación indica que interpreto mal las respuestas ya que

el interpretó que decía que aumentando los segmentos se puede tener una mejor aproximación.

- a) Para el segundo estudiante, los valores que utilizó le permitían obtener el objetivo de la actividad ya que fueron valores 2, 0.3, 0.6 y el valor seleccionado para continuar con el análisis fue el valor de 1.3, para este caso no logro identificar que la mejor aproximación se da cuando el valor de la longitud es menor.
- b) Para él tercer estudiante, los valores que utilizó en el desarrollo de sus análisis fueron los siguientes 0.25, 0.1, 100, y con el valor que trabajo para tener una mejor aproximación fue con el valor de 0.1, esto indica que, si desarrollo el objetivo de la actividad, sin embargo, la interpretación de las respuestas impidió que se diera por completo el objetivo de aprendizaje.
- c) Para el cuarto estudiante, los valores utilizados fueron 0.5, 0.4, 0.14 y con el valor que trabajo fue con el valor 0.16. Nuevamente los valores utilizados si le permitieron desarrollar el objetivo de aprendizaje e interpretar que mientras menor sea la longitud mejor será la aproximación, sin embargo, al no tener una variación muy visual en la aproximación no logro tener claro el objetivo de aprendizaje en la totalidad, así mismo se puede dar que la interpretación a la respuesta no sea la correcta, es por ello por lo que no logra alcanzar en la totalidad el objetivo.

De aquí podemos concluir que los estudiantes que no lograron el objetivo de aprendizaje esta más relacionado con el hecho de interpretar las respuestas, esto se debe a que se tiene que realizar un análisis más detallado con la redacción las actividades de aprendizaje.

Continuando con las preguntas de la actividad se plantea una interrogante la cual pretende generalizar el proceso de aproximación. La primera pregunta realizada es *Dada una curva cualquiera ¿Cómo aproximarías la forma curva de ella?*, los resultados obtenidos fueron los siguientes.

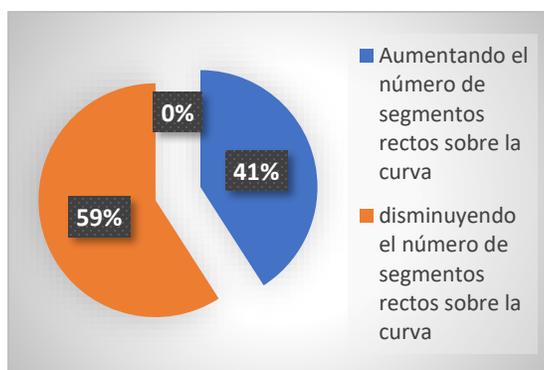


figura 98 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4.

Para esta interrogante el 41% que no lograron el objetivo de aprendizaje de la pregunta se debe al hecho de realizar una interpretación incorrecta de las respuestas, en la revisión que se realizó de manera general los estudiantes indicaron que seleccionaron la opción b, por interpretar que se disminuía la longitud de segmento y no el número de segmentos. Como ejemplo tenemos a Brian quien antes de esta pregunta ya había obtenido el objetivo de aprendizaje indicando que mientras más se disminuía la longitud de segmento mejor será la aproximación a la forma curva de ella. Sin embargo, para esta pregunta el indico que, disminuyendo el número de segmentos rectos sobre la curva es como se debe realizar la aproximación a la curva, el estudiante indica que dada su lectura rápida pensó que disminuyendo los segmentos en longitud no el número de segmentos.

Posteriormente a ello se cuestiona respecta a dado un segmento de curva *general* ¿Cómo te aproximarías a la longitud de la curva?, a esta interrogante tenemos los siguientes resultados 18 estudiantes indican la primera opción, 4 restantes indican la opción b y ninguno la opción c.

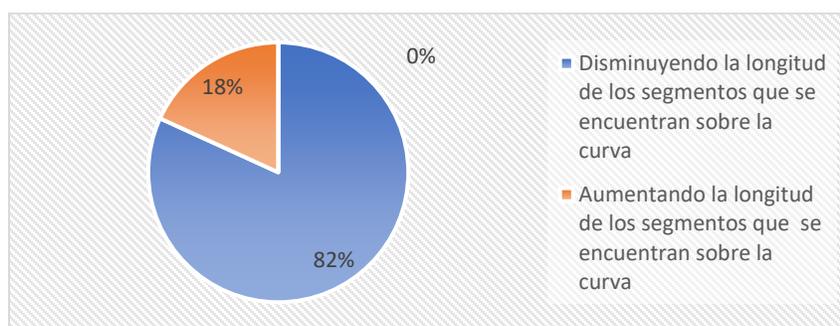


figura 99 Respuesta a interrogante de actividad 1, aplicación 4

De las respuestas podemos observar que el 82% ya tiene la intuición de cómo lograr una aproximación a la longitud de la columna vertebral, utilizando segmentos de línea recta cada vez más pequeños. De esta manera continuaremos con el análisis de las respuestas de la actividad de aprendizaje 2.

6.3 Análisis de actividad 2

Para el desarrollo de esta actividad se planteó un tiempo de 30 minutos para que los estudiantes interactuaran con el EDVICol02 <https://www.geogebra.org/m/ffuvsf3t> y contestar la HEyAG que se generó para esta actividad didáctica de aprendizaje.

Una vez que los estudiantes exploraron el EDVICol02, experimentando con diferentes valores para aproximar a la forma curva de la columna vertebral, posteriormente se le solicita que indiquen el número de segmentos que se forman con la longitud de segmento que ingresa en cada una de las interacciones que tiene.

Continuaremos mostrando las respuestas que se tuvieron de los estudiantes Jonathan, Brian y Kelin, como ejemplo de las respuestas obtenidas.

Como ya se mencionó la actividad didáctica de aprendizaje se inicia con solicitar el estudiante interactúe con el EDVICol02 ingresando diferentes valores e indicando el número de segmentos que se forman con esas longitudes. Algunos de los valores que utilizan corresponden a valores como 0.7, 0.3 y 1.7. Los valores que utilizaron Jonathan, Kelin y Brian fueron 1.6, 0.1 y 0.01 respectivamente. Como trabajamos con tecnología nos es posible reconstruir el escenario que se generó con estos valores.

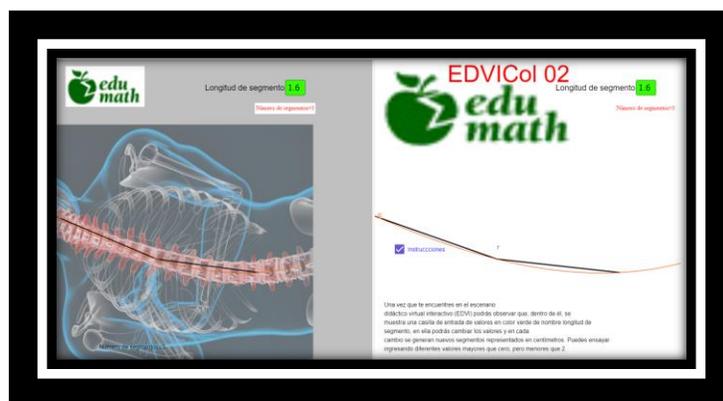


figura 100 Aproximación a la forma curva de la columna vertebral en actividad 2 con valor de 1.6 de longitud de segmento

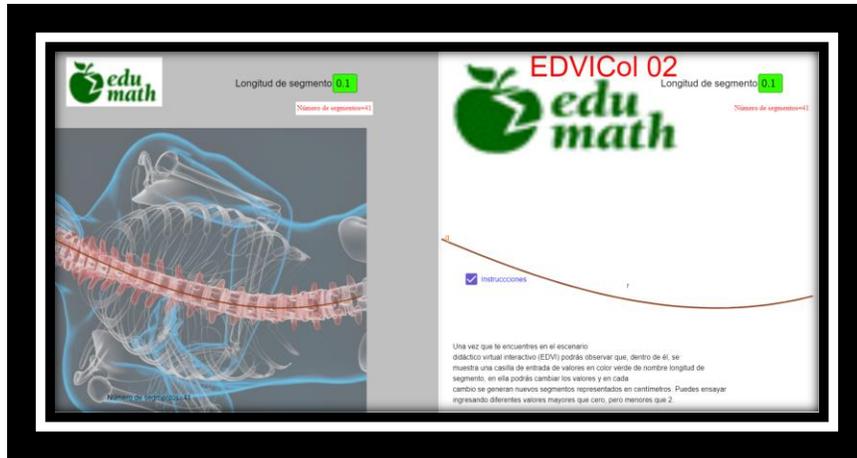


figura 101 Aproximación a la forma curva de la columna vertebral con valor 0.1 en actividad 2

de esta manera el número de segmentos que se generaron con estas medidas fueron 3 para el valor de longitud de 1.6 y de 41 para el valor de 0.1. posterior a ello se solicita a los estudiantes que elijan un valor que aproxime a la forma curva de la columna vertebral, mencionaremos los valores que eligieron los estudiantes que se está mencionando. Jonathan indico que trabajo con el valor 0.1, Kelin 0.11 y Brian 0.6, dado que tenemos el apoyo de la tecnología nos es posible observar la aproximación que tuvieron los estudiantes al elegir este valor y observar cuantos valores fueron los que se generaron.

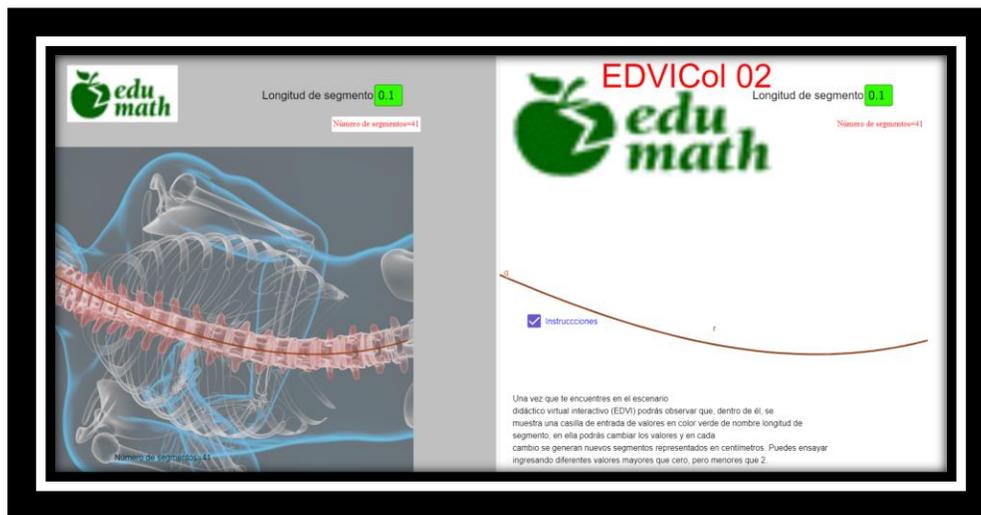


figura 102 Aproximación y número de segmentos generados con el valor 0.1

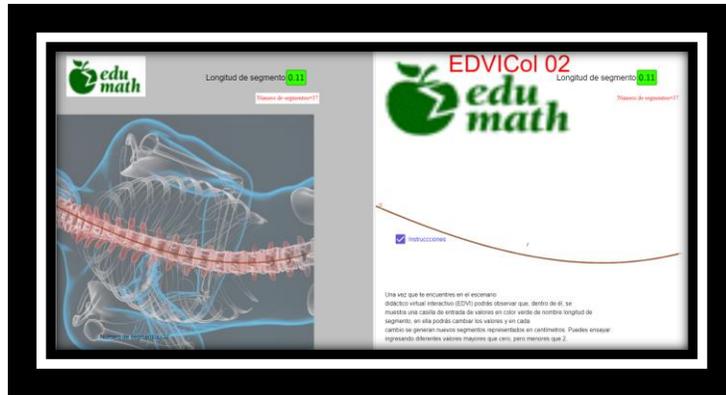


figura 103 Aproximación y número de segmentos generados por valor 0.11

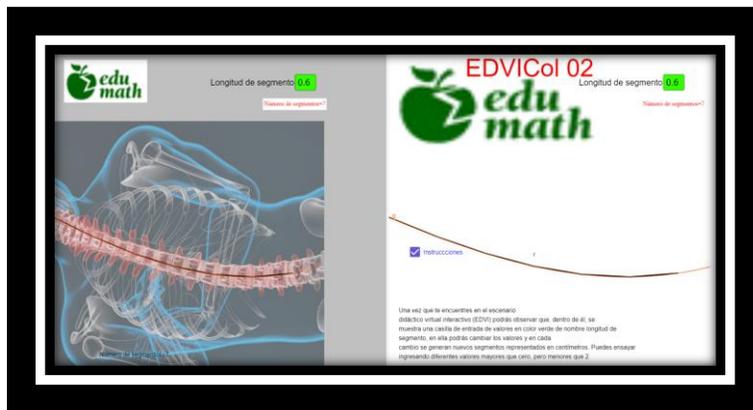


figura 104 Aproximación y número de segmentos generados con valor 0.6

Una vez que los estudiantes tuvieron la aproximación y el número de segmentos que se forman con ese valor de longitud utilizado. Se realiza la siguiente cuestión *¿Cómo puedes calcular el valor aproximado de la longitud de la columna vertebral mediante el valor de longitud de segmento elegido?*, teniendo como respuesta los siguientes valores.

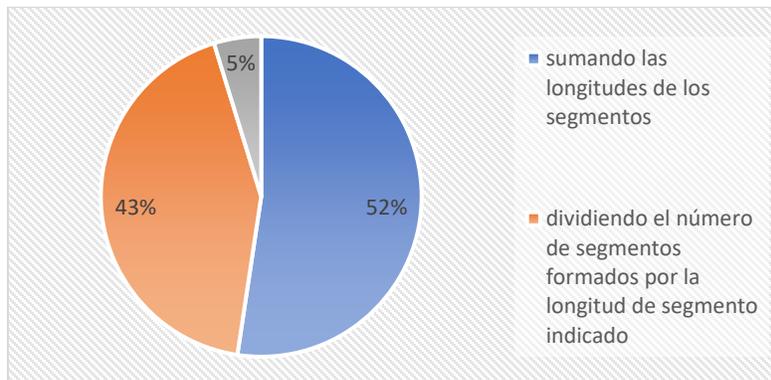


figura 105 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

Para esta pregunta el 52 % ha deducido correctamente como aproximar la longitud de la columna vertebral, sin embargo, el 43% de los estudiantes que no lograron deducir es por el hecho de interpretar de una manera incorrecta la respuesta, en el análisis general de la actividad de aprendizaje los estudiantes indicaron que eligieron esa respuesta porque confundieron el hecho de dividir la curva en muchos segmentos, por ello no eligieron la respuesta de sumar las longitudes.

Para el caso que estamos ejemplificando respecto a Jonathan, Brian y Kelin, tenemos las siguientes respuestas, para él caso de Jonathan y Kelin su respuesta fue *sumando las longitudes de los segmentos formados*, sin embargo, para el caso de Brian su respuesta fue *dividiendo el número de segmentos formados por la longitud de segmento indicado*, en la retroalimentación general Brian comento que la respuesta que puso fue referente a como aproximar la forma curva de la columna vertebral, es por ello que su interpretación a esta respuesta no fue la correcta.

Con la finalidad de conocer si los estudiantes pueden aproximar la longitud de la columna vertebral con los datos de longitud de segmento y número de segmentos formados con esa medida, se solicita que completen una tabla de valores en donde se involucra el valor de longitud de segmento y el valor de la longitud de la columna vertebral encontrada con ese valor de segmento de línea recta. A continuación, mostramos algunas de las respuestas que obtuvimos.

Valor de la longitud de segmento	Longitud aproximada de la curva
1.2	3.6 3.8
1.9	3.8
1.7	3.4

figura 106 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

Valor de la longitud de segmento	Longitud aproximada de la curva
1.9	5.7
0.2	4.2
0.1	4.1

figura 107 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

Se puede observar que los estudiantes lograron el objetivo de aproximar la longitud de la columna vertebral utilizando los valores correspondientes.

Posterior a ello se da información respecto a la longitud aproximada de la columna vertebral del EDVICol02 la cual corresponde a 4.17 cm, y se les cuestiona respecto a que indiquen *¿Cuál fue la longitud de segmento que mejor aproxima la longitud de la curva?*, para el caso de Jonathan, Brian y Kelin indicaron que el valor que mejor aproximó fue el valor 1.4, 0.1 y 0.18 respectivamente, una vez indicado el valor que mejor aproxima se realiza la pregunta *¿Cuál fue el número de segmentos que dio una mejor aproximación a la longitud de la curva?*

Algunas de las respuestas que se obtuvieron fueron las siguientes 401, 41, sin embargo, algunos de los estudiantes interpretaron de una manera incorrecta la pregunta ya que en su respuesta indicaron el valor de la longitud de segmento y no el número de segmentos formados.

Para culminar esta actividad se les solicita a los estudiantes que contesten preguntas en las cuales se generalizara este procedimiento.

¿Cómo calcularías de manera aproximada la longitud de la curva en el intervalo indicado?

a) Aproximarse por segmentos pequeños y multiplicar la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	b) Aproximarse por segmentos pequeños y dividir la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	c) No se
---	---	----------

Para esta pregunta se tuvieron los siguientes porcentajes de respuestas

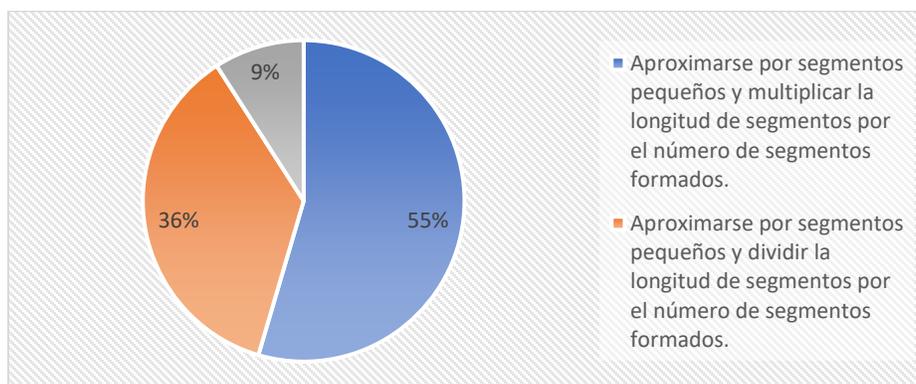


figura 108 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

En esta pregunta se volvió a tener el problema por la confusión de dividir en segmentos la columna vectorial. Para continuar con la generalización del proceso se dio la siguiente pregunta.

Si denotamos por Δx la longitud de segmento y n al número de segmentos que se forman con esa longitud. ¿La longitud del segmento de curva será representado matemáticamente por?

a) $\Delta x \cdot n$	b) $\Delta x/n$	c) Δx^n	d) no se
-----------------------	-----------------	-----------------	----------

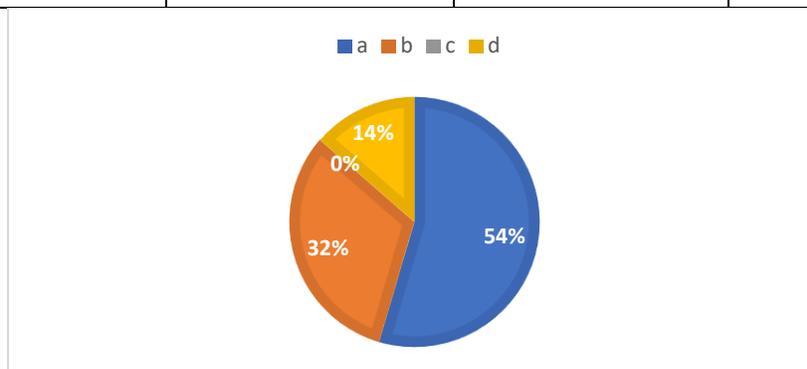


figura 109 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

El porcentaje que es representado por el 32% indicaron que su respuesta se basó en dividir la longitud de la columna vertebral en segmentos y mientras más segmentos sean mejor será la aproximación a la columna vertebral.

Ya para terminar se presentan dos preguntas en las cuales se comienza a generalizar el concepto matemático. La penúltima pregunta que se realiza inicia de la siguiente manera.

Si representamos a la longitud de segmento como Δx y el número de segmentos como n , tomando en cuenta la respuesta de la pregunta anterior ¿Qué expresión matemática representaría de manera más adecuada la aproximación a la longitud del segmento de curva?

a) $\sum_{i=1}^{n=1000} n\Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{n=\infty} n\Delta x$	c) $\sum_{i=1}^{n=1000000} n\Delta x$	d) No se
------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	----------

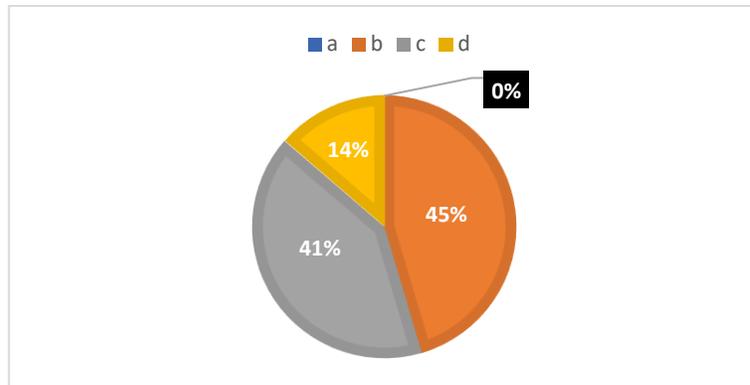


figura 110 Respuesta a interrogante de actividad 2, aplicación 4

Finalizamos con la actividad de aprendizaje con la interrogante:

Usando límites ¿Cómo puede representar la pregunta anterior?

Para ello tenemos que el 82% de los estudiantes lograron el objetivo de aprendizaje y el 14% de ellos no logro el objetivo ya que indicaron que continuaron con la idea de dividir la curva con segmentos.

Al finalizar la actividad didáctica de aprendizaje, se tomó una HEyAG de manera aleatoria y se fueron analizando las respuestas con él grupo, con la finalidad de dar cierre a las actividades.

Algunos de los comentarios que sobre salen respecto a la discusión que se dio entre los estudiantes, corresponden a que se dividía la curva en segmentos, es por ello por lo que se tuvo la confusión a las respuestas que se indicaban, así mismo se comentó que trabajar bajo un tiempo determinado genera presión y esto hace que no se lea de manera detallada y se analice tanto la pregunta como la respuesta que se da. Lo cual es un área de oportunidad que se tiene para las HEyAG.

Posteriormente a esta actividad se dejó la actividad 3.1 y 3.2 para que el estudiante la desarrollara dejando para este mismo un tiempo estimado de 10 minutos, 5 para cada uno de los ejercicios que se plantean.

Los resultados se muestran a continuación.

Actividad 3.1

La actividad inicia con las **Instrucciones:** Relacionando las actividades que se han realizado hasta este momento, contesta las siguientes preguntas.

Usualmente nos encontramos con superficies curvas como toldos o techos, como se muestra en la siguiente figura:



figura 111 Toldo de cancha deportiva

figura 112 Toldo de ventana

figura 113 Marco de toldo de ventana

De acuerdo con la imagen que se muestra en la figura contesta a las siguientes preguntas.

1. Si tuvieras un segmento de curva de acero, por ejemplo, el lado izquierdo de marco del toldo figura 2 y 3, y deseas medir su longitud, con la mayor precisión posible. Tomando en cuenta que para ello cuentas solo con segmentos de madera (regletas Montesori¹), no flexibles,  pero que puedes cortarlos para tener distintas longitudes. Como 0.3; 0.5; 1; 1.5 y 2 mm.

Se presentan como ejemplo algunas de las respuestas obtenidas en la pregunta que se realiza en esta actividad didáctica de aprendizaje.

¹ Las **regletas** son un material manipulativo con el **que** se pueden trabajar varias áreas de las matemáticas y **que** ayudan a desarrollar muchas capacidades del pensamiento lógico-matemático. Las puedes utilizar **para que** los niños aprendan sobre: la cantidad. las equivalencias.

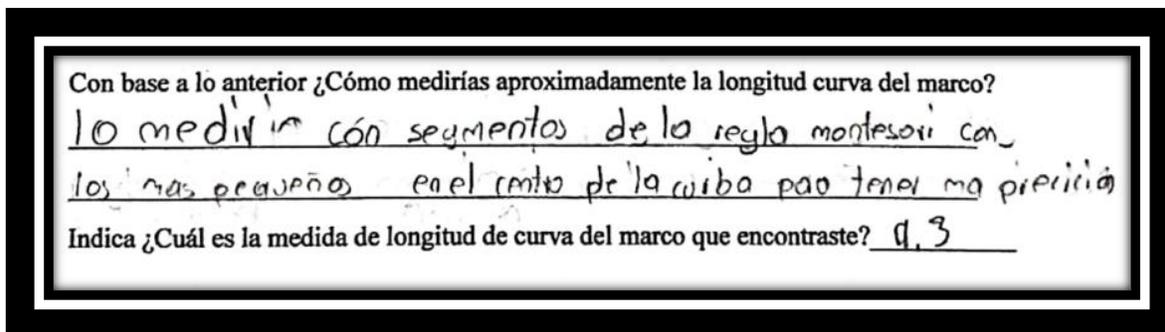


figura 114 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4

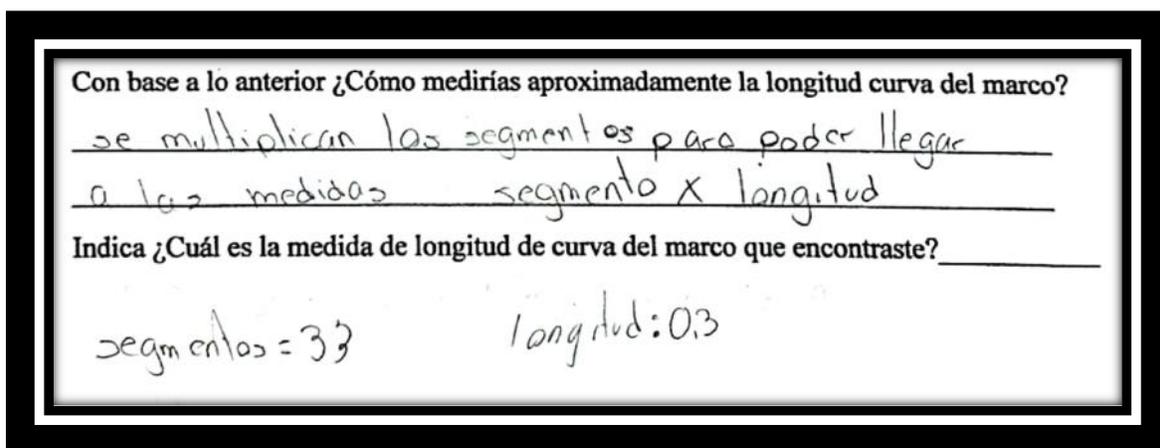


figura 115 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4

Como se puede observar en estas respuestas se puede observar que los conocimientos adquiridos hasta este momento son utilizados para aplicarlos en otras problemáticas que se presenten en la vida cotidiana o profesional de los estudiantes.

Continuando se presenta otra problemática en la cual se aplica el conocimiento construido hasta este momento.

Actividad 3.2

Instrucciones: Analiza el siguiente problema que se presenta y contesta las preguntas que se indican.

Un automóvil realiza el recorrido de la siguiente trayectoria teniendo un consumo de combustible de 40 litros, ¿Qué rendimiento de combustible generó el automóvil al realizar el recorrido de la imagen?



figura 116 Trayectoria de automóvil

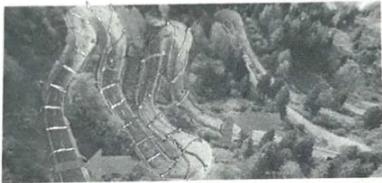
1. ¿Cómo puedes aproximar la longitud del camino?

a) Aproximarse por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	b) Aproximarse por medio de segmentos cada vez más grandes.	c) No se
--	---	----------

Considerando que el rendimiento se calcula dividiendo la cantidad de combustible por los kilómetros recorridos por cien. Teniendo en cuenta que consumió 40 litros de gasolina en ese recorrido. Indica ¿Cuál es su rendimiento?

Se muestran algunas de las respuestas que se obtuvieron a esta actividad didáctica de aprendizaje

Un automóvil realiza el recorrido de la siguiente trayectoria teniendo un consumo de combustible de 40 litros. ¿Qué rendimiento de combustible generó el automóvil al realizar el recorrido de la imagen?



5 = 1
= 23 segmentos

figura 5 Trayectoria de automóvil

1. ¿Cómo puedes aproximar la longitud del camino?

a) Aproximarse por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	b) Aproximarse por medio de segmentos cada vez más grandes.	c) No se
--	---	----------

Considerando que el rendimiento se calcula dividiendo la cantidad de combustible por los kilómetros recorridos por cien. Teniendo en cuenta que consumió 40 litros de gasolina en ese recorrido. Indica ¿Cuál es su rendimiento?

Litro = 8.6

$\frac{4.6 \text{ km}}{40 \text{ litros}}$

23

figura 117 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4



figura 5 Trayectoria de automóvil

1. ¿Cómo puedes aproximar la longitud del camino?

<input checked="" type="checkbox"/> a) Aproximarse por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	b) Aproximarse por medio de segmentos cada vez más grandes.	c) No se
--	---	----------

Considerando que el rendimiento se calcula dividiendo la cantidad de combustible por los kilómetros recorridos por cien. Teniendo en cuenta que consumió 40 litros de gasolina en ese recorrido. Indica ¿Cuál es su rendimiento?

$$x = \frac{40}{?} \times 100 =$$

$$x = \frac{40}{23} \times 100 = 173.91$$

figura 118 Respuesta a interrogante de actividad 3, aplicación 4

Las respuestas que se dan a estas actividades de aprendizaje indican que los estudiantes han adquirido el objetivo de aproximar a la forma de una curva y como aproximar la longitud de una curva, además que pueden aplicar estos conocimientos a otras áreas de del conocimiento, relacionando el conocimiento adquirido con otros contextos reales dando una solución a las problemáticas que se les presentan.

Finalmente culminaremos con revisar las respuestas de los estudiantes en la actividad didáctica de aprendizaje número 4. Para la cual se dio un tiempo estimado de 20 minutos para su aplicación.

Se inicia la actividad con la siguiente pregunta

1. El proceso de mejorar la aproximación a la longitud de una curva ¿Será?

a) Finito	b) Infinito	c) Finito con muchos segmentos	d) No se
-----------	-------------	--------------------------------	----------

En la cual los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes

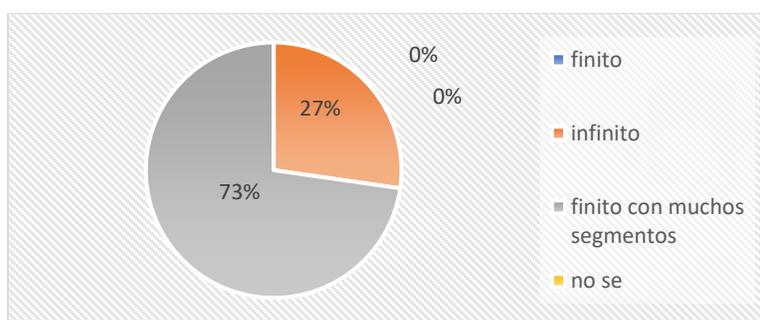


figura 119 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

De aquí vemos que el 73% de los estudiantes indican que será finito este proceso porque se debe tener un fin para poder realizar la aproximación, es por ello que se llama aproximación; sin embargo, 6 los cuales representan el 27% indican que será infinito, comentaron que siempre existirá una mejor aproximación a la que se tiene por ello debe ser un proceso infinito.

Siguiendo con la actividad tenemos la siguiente interrogante.

2. Si el proceso de aproximación a la longitud de una curva fuera infinito ¿Cómo podrías calcular la longitud de ella?

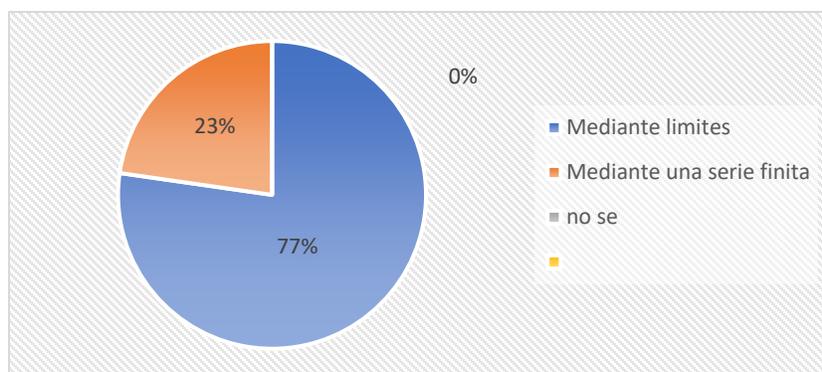


figura 120 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

El 77% que es representado por 17 estudiantes deducen que será por medio de límites, los 5 comentaron que dieron la elección de serie finita porque relacionaron el concepto de serie con los segmentos que se formaron. Continuando con la siguiente pregunta

3. ¿La suma de todas las longitudes de segmento de línea recta es?

a) Finita	b) Infinita	c) No se
-----------	-------------	----------

Los porcentajes se muestran en la siguiente gráfica

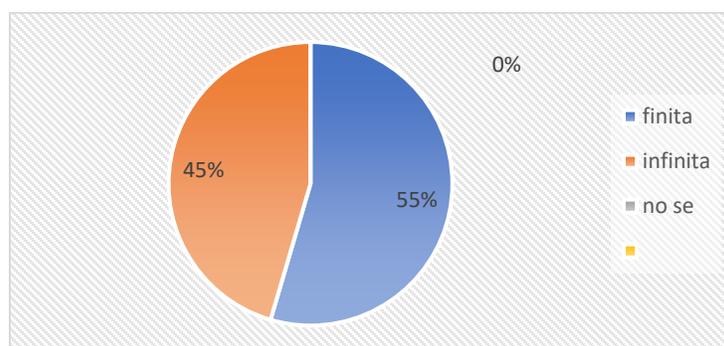


figura 121 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

Donde el 55% pertenece a 12 estudiantes y el 45% a 10 estudiantes, al momento de tener la retroalimentación final, los estudiantes que indicaron que es finita porque como se debe terminar en algún momento debe tener un fin, los que indicaron que era infinita es por el hecho que nunca se termina de sumar los segmentos que se forman,

Adicional a este punto tenemos la siguiente pregunta

4. Teniendo el número de segmentos de línea recta y la medida de longitud de segmento ¿Cómo puedes calcular la longitud de la curva?

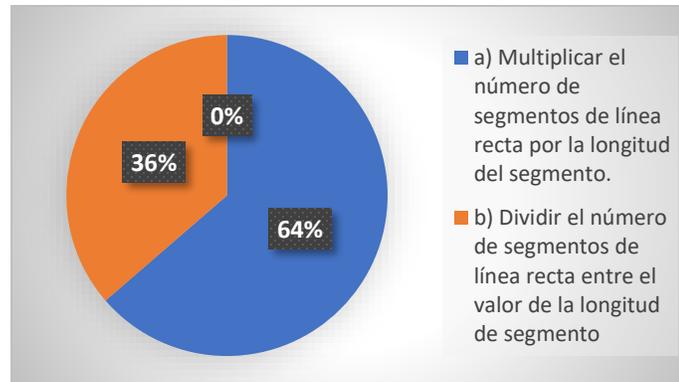


figura 122 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

El 64% de los estudiantes lograron el objetivo de aprendizaje y como se mencionó en la sección de la actividad 2, los estudiantes que no lograron el objetivo de aprendizaje fueron por el hecho de confundir la parte de dividir la curva por medio de segmentos, es decir malinterpretaron la respuesta. La siguiente pregunta

5. Para aproximarse a una curva. ¿Cómo se puede realizar?

Tiene los siguientes resultados

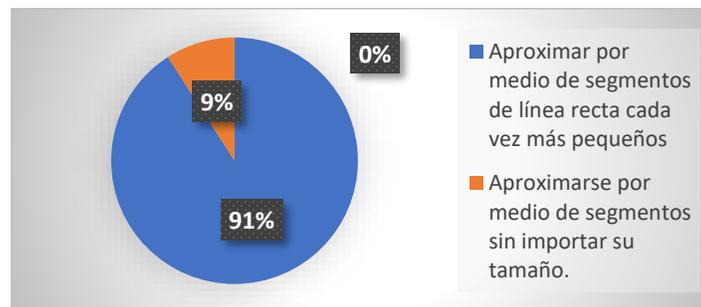


figura 123 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

En esta pregunta los estudiantes han logrado el objetivo de aprendizaje para aproximar la longitud de una curva que es representado por 91% de los alumnos, el 9% que dieron la opción b) los cuales son 2 estudiantes, indicaron al final de la retroalimentación, eligieron esa opción por el hecho que no importa la medida que se ponga, en algún momento ya se tiene una aproximación, lo demás son ajustes que se van dando.

Para la siguiente interrogante

6. ¿En teoría, cuántos segmentos son necesarios para tener una excelente aproximación a la longitud de una curva?

Los porcentajes que tenemos son los siguientes

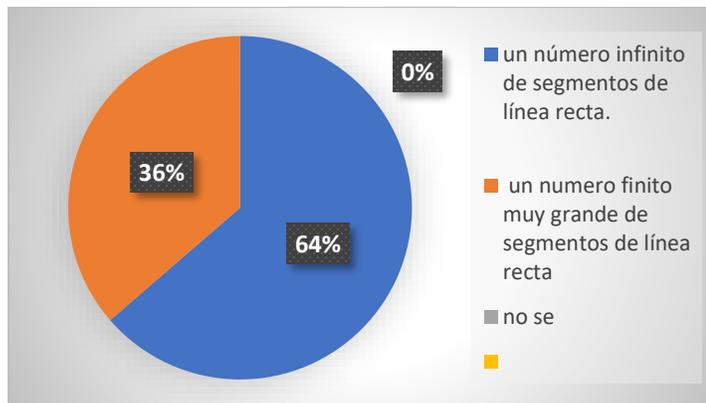


figura 124 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

En esta pregunta la diferencia que se dio fue por el hecho que en la retroalimentación final los estudiantes indicaron que era infinito porque se es mejor la aproximación y los que indicaron finito es por el hecho que en algún momento se tiene que terminar, lo cual coincide con respuestas anteriores.

7. ¿Este método puede funcionar si la curva tiene huecos?

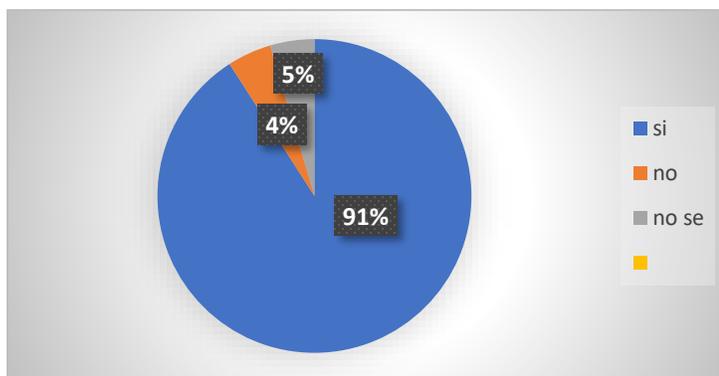


figura 125 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

Los estudiantes indican que si se puede aplicar este método cuando hay huecos, en la retroalimentación el estudiante que indico que no era posible, su respuesta se debió a que se cortaba el conteo, pero indico que pensándolo bien si era posible porque se puede hacer lo mismo en secciones y sumar posteriormente.

8. ¿La suma de todas las longitudes es?

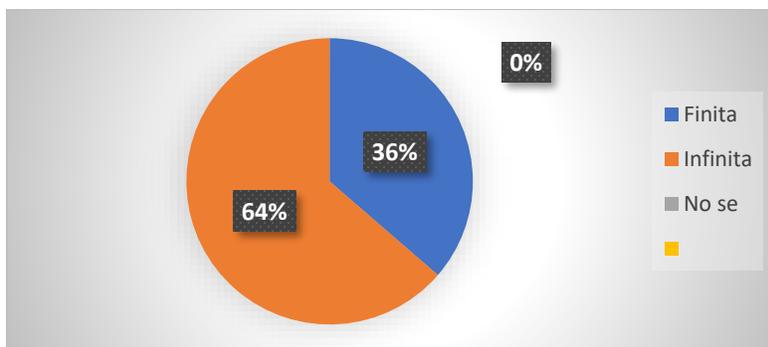


figura 126 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

Esta respuesta coincide con la de la pregunta 6, para este sentido es importante mencionar que se debe revisar que se entiende por infinito y finito en los estudiantes.

Para comenzar a familiarizar al estudiante más a la notación matemática se realizan las siguientes preguntas.

9. La representación matemática de tener un número infinito de segmento de línea recta y multiplicarlos por su longitud de segmento ¿cómo se puede representar matemáticamente?

a) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
---------------------------------------	---	----------

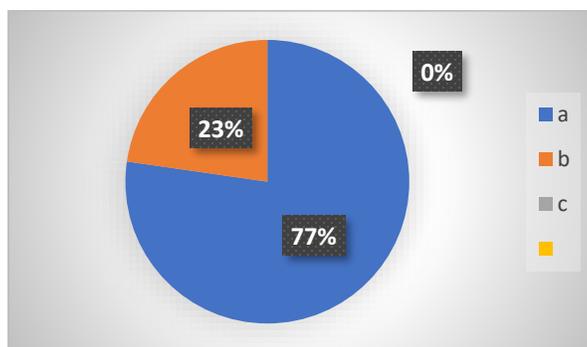


figura 127 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

En esta pregunta nuevamente tuvimos el resultado respecto a la confusión que los estudiantes indicaron respecto a la mal interpretación a la respuesta, pero por lo aprendido su lógica es correcta.

Matematizando el concepto, se genera la siguiente interrogante

10. Usando límites como puede representar la pregunta anterior.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
--	--	----------

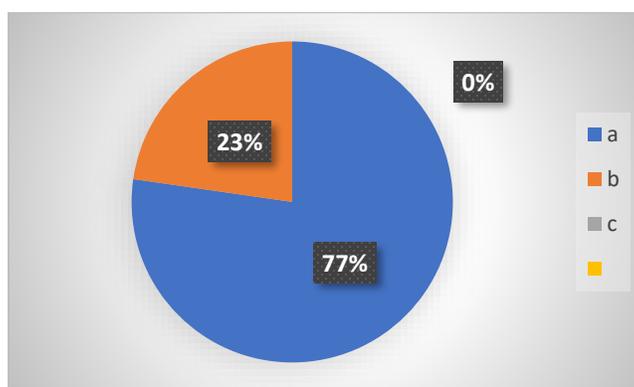


figura 128 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

Como se puede observar los estudiantes ya generan el conocimiento por medio de límites, esto indica que han generalizado el concepto. Finalmente se realiza la siguiente pregunta que genera el concepto de integral.

¿Cómo puedes representar la suma de todos los segmentos de línea recta multiplicado por la longitud de segmento?

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$	$f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i / \Delta x$	No se
---	--	-------

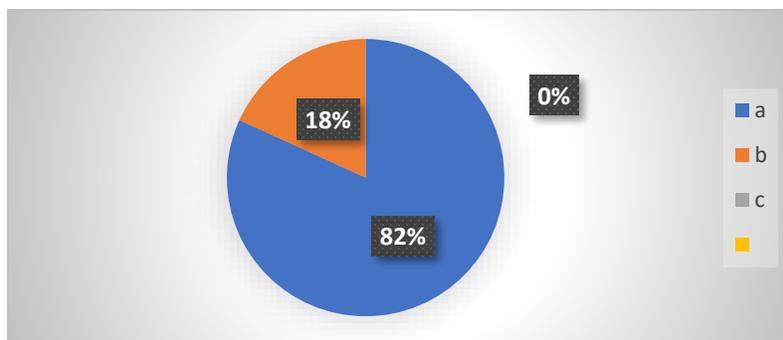


figura 129 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

Los estudiantes identifican ya el concepto por medio de la integral lo cual nos permite indicar que el objetivo de aprendizaje se logró en los estudiantes, aquellos que no lograron identificar el concepto fue por generar desde un principio una confusión en la interpretación de respuestas.

Finalmente se realiza la siguiente pregunta con el fin y objetivo de analizar el significado que genero el estudiante.

¿Para qué nos sirve la integral?

a) Para hacer mediciones de áreas, volúmenes, longitudes	b) Para Aprender fórmulas y métodos de integración	c) No se
--	--	----------

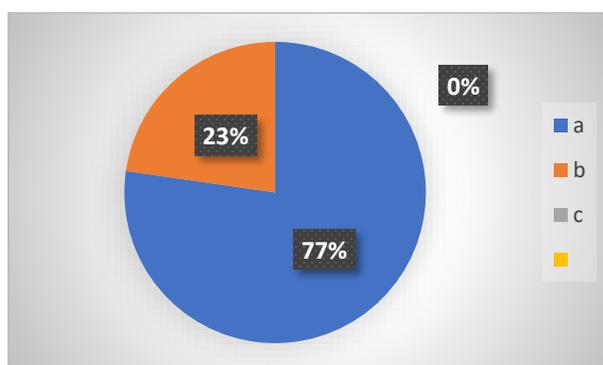


figura 130 Respuesta a interrogante de actividad 4, aplicación 4

El 77% que representa a los 17 alumnos que indican la opción a, han logrado el objetivo de aprendizaje, los 5 alumnos que aún no lo han realizado, indicaron que sus profesores siempre les dijeron que cálculo integral era aprenderse fórmulas y métodos para resolver las integrales, aunque tenían la intención de tomar la primera elección tomaron la decisión de la segunda opción por recordar lo que sus docentes les comentaron, esto hace referencia a la escuela tradicional que los estudiantes han tenido en su formación académica.

Cabe mencionar que al momento de ir realizando la retroalimentación de las actividades de aprendizaje las respuestas que se dieron se trataron de generalizar rescatando lo que se repetía más por el estudiante.

7 Conclusiones

El desarrollo del proyecto nos brindó resultados que favorecen la comprensión, significado y aprendizaje de introducir el concepto de integral, es por ello por lo que en las siguientes líneas daremos a conocer las conclusiones a las que llegamos respecto a el uso de la tecnología para introducir el concepto de la integral, la conclusión respecto a las hojas de exploración guiada, la utilización de algunos principios de la didáctica Cuevas & Pluinage y organizar las actividades bajo la THA. Así mismo se da a conocer cuales fueron las conclusiones respecto a la aplicación de la propuesta didáctica de aprendizaje, finalizando con las futuras investigación que se desprenden de esta experiencia de enseñanza y la aportación que damos al área de matemática educativa.

En primera instancia, tenemos que, introducir el concepto de la integral definida mediante un problema en contexto real, permite tener un estudiante con mayor interés en descubrir el concepto que se está introduciendo o abordando, así mismo genera en el desarrollo de la actividad una mayor participación del estudiante, expresando dentro de la misma dudas y realizando comentarios sobre la problemática del contexto y las soluciones que ellos realizarían para este, esto permite tener una mejor interacción con el docente, dando herramientas al profesor para medir si los objetivos de aprendizaje se están cumpliendo o si es necesario realizar modificaciones dentro de la actividad u organización de ellas para que el objetivo de aprendizaje se cumpla, así mismo permite que se comience a dar una aplicabilidad del concepto en áreas diferentes a matemáticas, ya que el estudiante puede visualizar la relación entre lo matemático y la aplicabilidad de este con otras áreas del conocimiento, generando un pensamiento deductivo e inductivo el cual le permite dar un significado al concepto matemático en cuestión.

Como segunda instancia tenemos que desarrollar hojas de exploración guiada HEyAG aplicando algunos principios de la didáctica Cuevas & Pluinage y organizándolas por medio de una THA, permiten conocer cuáles son los conocimientos previos que tiene el estudiante respecto al problema en contexto, así como, los conceptos matemáticos que tiene previos y base para el concepto que se introduce, así mismo permiten guiar al estudiante dentro de la actividad didáctica de aprendizaje para desarrollar un pensamiento deductivo e inductivo

además de activo mentalmente dejando de lado la escuela tradicional que aún se presenta en las aulas de clase.

Por otra parte, el uso y apoyo de EDVI's dentro de una actividad didáctica de aprendizaje permite que el estudiante desarrolle el sentido de intuición, deducción y genere una conclusión, planteándose hipótesis que puede comprobar al interactuar con el EDVI, pudiendo experimentar y repetir el experimento cuantas veces deseen, poder “equivocarse” y corregir tantas veces sea necesario, principalmente aprender su propio ritmo, además se da una mejor comprensión del comportamiento del fenómeno del problema en contexto, lo que permite dar una mejor comprensión y solución a la problemática. Adicionalmente al investigador le permite tener una mejor comprensión de los resultados que obtuvieron o tienen los estudiantes en la actividad didáctica de aprendizaje, también le permite recrear nuevamente los mismos escenarios que creó el estudiante durante el desarrollo de la actividad didáctica de aprendizaje, teniendo como consecuencia una mejor comprensión de las respuestas obtenidas cuantitativas y cualitativas, mismos que permiten medir el nivel de aprendizaje y comprensión del concepto matemático desarrollado en el estudiante con la actividad didáctica de aprendizaje.

De manera general el uso adecuado de la tecnología digital permite transformar este artefacto o instrumento en una herramienta cognitiva, puesto que no solo realiza grandes cálculos aritméticos, sino que también colabora en la comprensión del concepto matemático.

El uso de la tecnología permite que el estudiante tenga una mejor comprensión de lo realizado, retomando a Márquez (2020) que nos comenta que *“Con la introducción de las tecnologías, el proceso enseñanza aprendizaje ha venido transformándose en pro de facilitar el acceso al conocimiento”*.

Como tercera instancia tenemos que generar una actividad didáctica de aprendizaje bajo una THA, permite tener al docente una organización de las actividades didácticas de aprendizaje, así como una flexibilidad para la aplicación de estas y realizar ajustes necesarios de acuerdo al grupo de estudio o desarrollo de la actividad didáctica de aprendizaje, derivado de las aplicaciones realizadas como pruebas piloto en esta experiencia de enseñanza, se tiene que cada uno de los grupos de estudio tiene características diferentes, por tal motivo es necesario

conocer cuales son los antecedentes matemáticos que se tienen y que son base para lograr el objetivo de aprendizaje planteado.

En cuarta instancia concluimos que utilizar principios de la didáctica Cuevas & Pluinage permite tener estudiantes activos mentalmente y con mucho entusiasmo, así mismo brinda la posibilidad de generar debates entre los mismos discutiendo libremente sus respuestas para buscar y dar posibles soluciones al problema en contexto, lo cual brinda información cualitativa y cuantitativa al investigador o profesor para analizar el avance o cumplimiento del objetivo de aprendizaje, además, permite que aquellos estudiantes que no lograron comprender el problema en contexto o no llegaron a una posible solución puedan lograrlo por medio de las respuestas que dan sus compañeros, lo cual nos lleva a tener estudiantes autodidactas, por ultimo se tiene que los mismos estudiantes dan un significado a sus resultados lo cual nos permite tener la aplicabilidad y significado del concepto matemático.

Como quinta instancia, concluimos que analizar los contenidos temáticos nos permite tener un referente hacia como es que los estudiantes de las diferentes instituciones identifican, relacionan y dan significado al concepto matemático, así mismo nos permite dar propuestas para introducir un concepto matemático apoyándonos de las referencias más citada por los contenidos temáticos.

Como sexta instancia, tenemos que el utilizar la problemática de contexto de la columna vertebral nos permitió tener un interés de los estudiantes por el hecho de tener una relación de la problemática en contexto con su vida diaria, a pesar que se tuvo la hipótesis que la problemática no sería llamativa en algún momento por ser estudiantes de área de ingeniería, el interés de los estudiantes indico que fue lo contrario a la hipótesis, esto permite concluir que los problemas en contexto tiene mucha relación con los estudiantes y que además de apoyar para introducir un concepto matemático brindo opciones de conocer si en ellos se tienen problemas de columna o si sus posturas que toman en sus diferentes actividades son las correctas para desarrollarlas,

Como séptima, concluimos que realizar un análisis de los datos históricos permite tener un mejor entendimiento del concepto matemático y una mejor comprensión de este, permitiendo de esta manera desarrollar actividades didácticas de aprendizaje tomando como referencias los trabajos que se desarrollaron y que dieron origen al concepto matemático, con esto

permite al estudiante construir el conocimiento matemático, resolviendo en primera instancia el problema, posteriormente aplicando lo aprendido para dar posibles soluciones a otras problemáticas, identificando de esta manera conceptos y propiedades para finalmente generalizar el concepto matemático.

Por consiguiente, de acuerdo con nuestra actividad didáctica de aprendizaje propuesta, introducir el concepto matemático de la integral partiendo desde el concepto de acumulación de segmentos de línea recta permite dar un significado diferente al que se tiene sobre la integral lo cual es más común relacionar el concepto con el área bajo la curva, y permite que los estudiantes en primera instancia den una aproximación a la longitud de la columna vertebral, posteriormente se pudo notar en las actividades que aplican lo aprendido para dar solución a otros problemas de longitud de una curva, identifican las propiedades que se desprenden y relacionan con la acumulación de segmentos de línea recta, teniendo una aproximación en primera instancia a sumas de Riemann y posteriormente definiendo como Limite de la suma, finalizando con identificar que esa acumulación de segmentos de línea recta es una integral definida.

Para lograr ello es necesario tener actividades previas a la aplicación didáctica de aprendizaje, las cuales permiten familiarizar al estudiante con términos del lenguaje matemático como: aproximar, acumular, infinito, finito, medir, sumas infinitas y sumas finitas, y también notación como: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x}$.

Finalmente, de acuerdo con nuestro objetivo de aprendizaje concluimos se cumplió en un 77% por el hecho de tener una confusión en comprensión de respuesta por los estudiantes.

Nuestra propuesta didáctica de aprendizaje brinda una contribución al área de matemática educativa con una propuesta para introducir el concepto de integral definida por medio de un problema de contexto real y un ciclo de actividades debidamente organizadas, las cuales pueden ser adaptadas en cualquier área del conocimiento.

Destacamos con esta experiencia de enseñanza que el proceso de acumulación es uno de los conceptos que se puede aplicar y relacionar con diferentes conceptos matemáticos, como variación, covariación, limite, entre otros. Brindando de esta manera una mejora en la comprensión de los conceptos.

Algunas de las recomendaciones que se dan para aplicar esta experiencia de enseñanza son las siguientes:

Revisar que el lugar de aplicación realmente cuente con el funcionamiento de los equipos de cómputo.

Identificar que no se tenga ningún problema de conexión a internet, preferentemente instalar previamente el EDVI a utilizar.

Realizar pruebas del EDVI instalado, ya que las versiones pueden modificar la configuración, en caso de tener ese problema realizar los ajustes necesarios.

Previo a la aplicación dar las indicaciones para evitar perder tiempo en la aplicación.

De esta investigación tenemos que se generan nuevas líneas de investigación, una de ellas esta relacionada con mudar el EDVI a dispositivos móviles, esto dado que en nuestra actualidad el 99% de los estudiantes cuenta con un dispositivo móvil.

Al trabajar con acumulación en nuestra propuesta, se desprende una línea de investigación relacionada con el estudio de la variación al momento de aproximar a la forma curva de la columna vertebral, lo cual es una de las propuestas para futuras investigaciones.

8 ANEXOS

Actividad 1

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las siguientes preguntas eligiendo la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

¿Qué tanto cuidas tu columna vertebral?

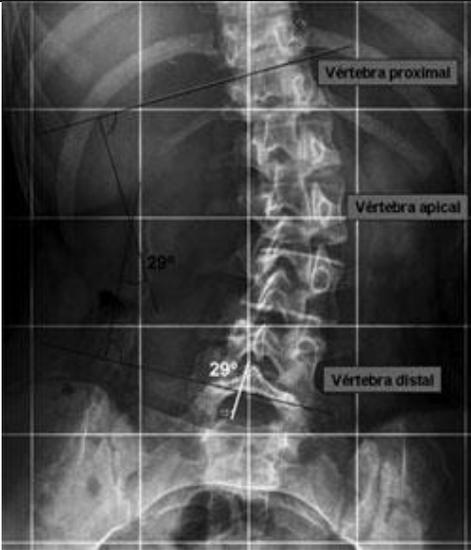
	<p>La columna vertebral es una parte fundamental del esqueleto humano, ya que está constituido por múltiples piezas articuladas entre sí, mismas que permiten toda clase de movimientos sin provocar una lesión a la parte nerviosa. Los movimientos que se realizan en las diferentes actividades tienen una amortiguación en las presiones intervertebrales las cuales están a cargo de los discos fibrosos. La variedad de los elementos sufre cambios desde la infancia hasta llegar a la edad adulta, siendo destacadas las vértebras y discos lumbrales los cuales se consideran como los más resistentes.</p>
--	--

figura 131 Imagen de columna vertebral

Desde el punto de vista funcional las articulaciones vertebrales tienen todo tipo de movimientos: la flexión en todas direcciones, la rotación y la circunducción, si bien está limitada a completar amplios movimientos de contorsión en todas direcciones.

Uno de los problemas más comunes que surgen en la columna vertebral se derivan por las malas posturas que se tienen en las diferentes actividades cotidianas, por ejemplo, al sentarse, dormir, usar calzado inadecuado, etc. Durante el tiempo de pandemia que se generó por Covid-19 se

obligó a la sociedad a resguardarse en su casa y realizar su trabajo tras una computadora o teléfono móvil elevándose los problemas de columna vertebral por las malas posturas que se tomaban al estar sentado más del tiempo recomendado por los especialistas. Las diferentes interrogantes que surgen por parte del sector salud están relacionadas el tema de que tanto se debe tener una rectificación con la columna vertebral en los humanos. Es por ello por lo que analizaremos que tan importante es conocer la longitud de la columna vertebral.

La siguiente imagen indica las diferentes posturas que toman las personas al estar sentado, mismas que generan un problema en su columna vertebral.



Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con lo que consideres que es correcto.

¿Crees que todas las columnas vertebrales tienen la misma longitud?

a) Si	b) No	c) Tal vez	d) No se
-------	-------	------------	----------

¿Crees que la longitud de la columna vertebral de un bebe y un adulto podrían tener la misma longitud?

a) Si	b) No	c) Tal vez	d) No se
-------	-------	------------	----------

¿La forma normal de la columna vertebral de un ser humano es?:

a) Recta	b) Curva	c) Redonda	d) No se
----------	----------	------------	----------

¿Cómo calcularías la longitud de una Columba vertebral de un ser humano de estatura promedio?

Actividad 1

Aproxima a la curva

Para calcular la longitud de un segmento recto, lo puedes realizar midiendo con una regla. Pero cuando el segmento es curvo medirlo no resulta una tarea sencilla, lo que usualmente hacemos es trazar sobre la curva pequeños segmentos rectos de manera que al sumar la longitud de los mismos tengamos una aproximación a la longitud de la curva.

Nuestra tarea en esta primera actividad consiste en aproximarse visualmente a la curva, mediante la superposición de pequeños segmentos rectos.

Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/qqs2z9y6> y sigue las instrucciones que se te indican a continuación.

Instrucciones: En cada uno de los ensayos que vayas realizando observa que es lo que va ocurriendo con la imagen de la columna vertebral y los segmentos que se forman sobre ella. Finalmente, de todos los valores con los que experimentaste elige tres valores y contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el primer valor que elegiste para la longitud de segmento? _____

2. Con base al número de segmentos que se generaron con la elección de longitud de segmento en tu primera elección ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

a) Buena	b) Regular	c) Mala	d) No lo sé
----------	------------	---------	-------------

3. Indica ahora el valor de la longitud del segmento de tu segunda elección. _____

4. ¿Existió una variación en la aproximación con tu segunda elección respecto a la primera aproximación elección?

a) Si	b) No	c) No se
-------	-------	----------

5. Con los segmentos que se formaron con tu segunda elección ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

a) Mejor	b) Igual	c) Peor	d) No lo sé
----------	----------	---------	-------------

6. Indica ahora el valor de la longitud de segmento de tu tercera elección. _____

7. Con el número de segmentos que se formaron con tu tercera elección. ¿Existe una variación en la aproximación a la forma curva de la columna vertebral respecto a las dos elecciones anteriores?

a) Mejor	b) Igual	c) Peor	d) No se
----------	----------	---------	----------

8. Con base a los 3 valores que sustituiste en los ensayos que realizaste, ahora elige una nueva longitud de segmentos de tal manera que te ayude a tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral e indica ¿Cuál es la longitud de los segmentos que elegiste? _____

9. Con el número longitud de segmento que elegiste ¿Se dio un cambio de variación en la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

a) Si	b) No	c) Poco	d) Mucho
-------	-------	---------	----------

10. De lo observado anteriormente ¿Cómo se podría tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

a) Disminuyendo la longitud de segmentos sobre la columna vertebral.	b) Aumentando la longitud de segmento sobre la columna vertebral.	c) No se
--	---	----------

11. Dada una curva cualquiera ¿Cómo aproximarías la forma curva de ella?

a) Aumentando el número de segmentos rectos sobre la.	b) Disminuyendo el número de segmentos rectos sobre la curva.	c) No se
---	---	----------

Visualicemos un segmento de curva en general

12. ¿Cómo te podrías aproximar a la longitud de la curva?

a) Disminuyendo la longitud de los segmentos que se encuentran sobre la curva.	b) Aumentando la longitud de los segmentos que se encuentran sobre la curva.	c) No se
--	--	----------

13. ¿Cuántos segmentos de línea recta son necesarios para tener una buena aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

a) Muchos	b) Pocos	c) No se
-----------	----------	----------

Actividad 2

Longitud de un segmento de curva

Para calcular la longitud de un segmento recto, lo puedes realizar midiendo con una regla. Pero cuando el segmento es curvo medirlo no resulta una tarea sencilla, lo que usualmente hacemos es trazar sobre la curva pequeños segmentos rectos de manera que al sumar la longitud de estos tengamos una aproximación a la longitud de la curva.

Nuestra tarea en esta segunda actividad consiste en aproximarse a la longitud de curva mediante la superposición de pequeños segmentos rectos.

Instrucciones: Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ffuvsf3t> y sigue las instrucciones. En cada uno de los ensayos observa que es lo que va ocurriendo con la imagen de la columna vertebral y los segmentos que se forman sobre ella. Finalmente, de todos los valores con los que experimentaste elige tres valores y contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el primer valor que elegiste para la longitud de segmento? _____
2. ¿Cuántos segmentos se formaron con el valor de la longitud de segmento de tu primera elección? _____
3. Ahora cambia el valor de longitud de segmento de tu primera elección para tener una mejor aproximación a la longitud de la curva ¿Cuántos segmentos se formaron? _____
4. Finalmente elige ahora otro valor para la longitud del segmento que produzca una mejor aproximación a la longitud de la curva. _____
5. ¿Cómo puedes calcular el valor aproximado de la longitud de la columna vertebral mediante el valor de longitud de segmento elegido?

a) Sumando las longitudes de los segmentos formados	b) Dividiendo el número de segmentos formados por la	c) No se
---	--	----------

	longitud de segmento indicado.	
--	-----------------------------------	--

6. Calcula la longitud de manera aproximada de la longitud de la columna con cada uno de los tres valores que elegiste.

Valor de la longitud de segmento	Longitud aproximada de la curva

7. Si el valor aproximado de la longitud de la columna vertebral que se muestra en el EDVI corresponde a 4.17 cm ¿Cuál fue la longitud del segmento que mejor aproxima la longitud de la curva? _____

8. ¿Cuál fue el número de segmentos que dio una mejor aproximación a la longitud de la curva? _____

9. Si todos los segmentos tienen la misma longitud es equivalente para aproximarse a una la longitud de una curva aumentar el número de segmentos que disminuir la longitud de cada uno de los segmentos que cubre la curva

a) Si	b) No	c) No se
-------	-------	----------

10. ¿Cómo calcularías de manera aproximada la longitud de la curva en el intervalo indicado?

c) Aproximarse por segmentos pequeños y multiplicar la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	d) Aproximarse por segmentos pequeños y dividir la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	e) No se
---	---	----------

11. Si denotamos por Δx la longitud de segmento y n al número de segmentos que se forman con esa longitud. ¿La longitud del segmento de curva será representado matemáticamente por?

b) $\Delta x \cdot n$	b) $\Delta x/n$	c) Δx^n	d) no se
-----------------------	-----------------	-----------------	----------

12. Si representamos a la longitud de segmento como Δx y el número de segmentos como n , tomando en cuenta la respuesta de la pregunta anterior ¿Qué expresión matemática representaría de manera más adecuada la aproximación a la longitud del segmento de curva?

a) $\sum_{i=1}^{n=1000} n\Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{n=\infty} n\Delta x$	c) $\sum_{i=1}^{n=1000000} n\Delta x$	d) No se
------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	----------

13. Usando límites como puede representar la pregunta anterior, llenando lo faltante.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n n\Delta x$	b) $\sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\Delta x}$	c) $\sum_{i=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n}{\Delta x}$	c) no se
---	--	--	----------

Actividad 3.1

Instrucciones: Relacionando las actividades que se han realizado hasta este momento, contesta las siguientes preguntas.

Usualmente nos encontramos con superficies curvas como toldos o techos, como se muestra en la siguiente figura:



De acuerdo con la imagen que se muestra en la figura contesta a las siguientes preguntas.

1. Si tuvieras un segmento de curva de acero, por ejemplo, el lado izquierdo de marco del toldo figura 2 y 3, y deseas medir su longitud, con la mayor precisión posible. Tomando en cuenta que para ello cuentas solo con segmentos de madera (regletas Montessori²), no flexibles,  pero que puedes cortarlos para tener distintas longitudes. Como 0.3; 0.5; 1; 1.5 y 2 mm.

Con base a lo anterior ¿Cómo medirías aproximadamente la longitud curva del marco?

Indica ¿Cuál es la medida de longitud de curva del marco que encontraste? _____

² Las **regletas** son un material manipulativo con el **que** se pueden trabajar varias áreas de las matemáticas y **que** ayudan a desarrollar muchas capacidades del pensamiento lógico-matemático. Las puedes utilizar **para que** los niños aprendan sobre: la cantidad, las equivalencias.

Actividad 3.2

Instrucciones: Analiza el siguiente problema que se presenta y contesta las preguntas que se indican.

Un automóvil realiza el recorrido de la siguiente trayectoria teniendo un consumo de combustible de 40 litros, ¿ Qué rendimiento de combustible generó el automóvil al realizar el recorrido de la imagen?



figura 135 Trayectoria de automóvil

2. ¿Cómo puedes aproximar la longitud del camino?

d) Aproximarse por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	e) Aproximarse por medio de segmentos cada vez más grandes.	f) No se
--	---	----------

Considerando que el rendimiento se calcula dividiendo la cantidad de combustible por los kilómetros recorridos por cien. Teniendo en cuenta que consumió 40 litros de gasolina en ese recorrido. Indica ¿Cuál es su rendimiento?

ACTIVIDAD 4

Nombre: _____

Instrucciones: Contesta las siguientes preguntas, marcando con una **x** la respuesta que consideres correcta en cada una de las preguntas.

11. El proceso de mejorar la aproximación a la longitud de una curva ¿Será?

e) Finito	f) Infinito	g) Finito con muchos segmentos	h) No se
-----------	-------------	--------------------------------	----------

12. Si el proceso de aproximación a la longitud de una curva fuera infinito ¿Cómo podrías calcular la longitud de ella?

a) Mediante límites	b) Mediante una serie finita	c) No se
---------------------	------------------------------	----------

13. ¿La suma de todas las longitudes de segmento de línea recta es?

d) Finita	e) Infinita	f) No se
-----------	-------------	----------

14. Teniendo el número de segmentos de línea recta y la medida de longitud de segmento ¿Cómo puedes calcular la longitud de la curva?

a) Multiplicar el número de segmentos de línea recta por la longitud del segmento.	b) Dividir el número de segmentos de línea recta entre el valor de la longitud de segmento	c) no se
--	--	----------

15. Para aproximarse a una curva. ¿Cómo se puede realizar?

g) Aproximar por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	h) Aproximarse por medio de segmentos sin importar su tamaño.	i) No se
--	---	----------

16. ¿En teoría, cuántos segmentos son necesarios para tener una excelente aproximación a la longitud de una curva?

a) un número infinito de segmentos de línea recta.	b) un numero finito muy grande de segmentos de línea recta	c) no se
--	--	----------

17. ¿Este método puede funcionar si la curva tiene huecos?

a) Si	b) No	c) No se
-------	-------	----------

18. ¿La suma de todas las longitudes es?

a) Finita	b) Infinita	c) No se
-----------	-------------	----------

19. La representación matemática de tener un número infinito de segmento de línea recta y multiplicarlos por su longitud de segmento ¿cómo se puede representar matemáticamente?

a) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
---------------------------------------	---	----------

20. Usando límites como puede representar la pregunta anterior.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
--	--	----------

¿Cómo puedes representar la suma de todos los segmentos de línea recta multiplicado por la longitud de segmento?

a) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$	$f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x}$	No se
---	---	-------

¿Para que nos sirve la integral?

d) Para hacer mediciones de áreas, volúmenes, longitudes	e) Para Aprender fórmulas y métodos de integración	f) No se
--	--	----------

Deja un comentario de la actividad

9 Anexo 2 (Propuesta de HEyAG)

Actividad Introducción al problema en contexto

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

¿Qué tanto cuidas tu columna vertebral?

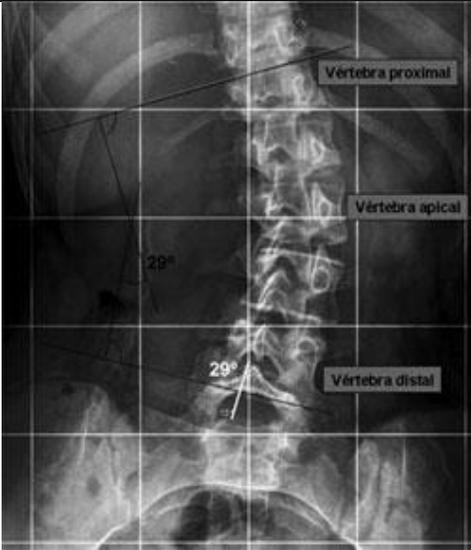
	<p>La columna vertebral es una parte fundamental del esqueleto humano, ya que está constituido por múltiples piezas articuladas entre sí, mismas que permiten toda clase de movimientos sin provocar una lesión a la parte nerviosa. Los movimientos que se realizan en las diferentes actividades tienen una amortiguación en las presiones intervertebrales las cuales están a cargo de los discos fibrosos. La variedad de los elementos sufre cambios desde la infancia hasta llegar a la edad adulta, siendo destacadas las vértebras y discos lumbrales los cuales se consideran como los más resistentes.</p>
--	--

figura 136 Imagen de columna vertebral

Desde el punto de vista funcional las articulaciones vertebrales tienen todo tipo de movimientos: la flexión en todas direcciones, la rotación y la circunducción, si bien está limitada a completar amplios movimientos de contorsión en todas direcciones.

Uno de los problemas más comunes que surgen en la columna vertebral se derivan por las malas posturas que se tienen en las diferentes actividades cotidianas, por ejemplo, al sentarse, dormir, usar calzado inadecuado, etc. Durante el tiempo de pandemia que se generó por Covid-19 se

obligó a la sociedad a resguardarse en su casa y realizar su trabajo tras una computadora o teléfono móvil elevándose los problemas de columna vertebral por las malas posturas que se tomaban al estar sentado más del tiempo recomendado por los especialistas. Las diferentes interrogantes que surgen por parte del sector salud están relacionadas el tema de que tanto se debe tener una rectificación con la columna vertebral en los humanos. Es por ello por lo que analizaremos que tan importante es conocer la longitud de la columna vertebral.

La siguiente imagen indica las diferentes posturas que toman las personas al estar sentado, mismas que generan un problema en su columna vertebral.



Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con lo que consideres que es correcto.

1. ¿Crees que todas las columnas vertebrales tienen la misma longitud?

e) Si	f) No	g) Tal vez	h) No se
-------	-------	------------	----------

2. ¿Crees que la longitud de la columna vertebral de un bebe y un adulto podrían tener la misma longitud?

e) Si	f) No	g) Tal vez	h) No se
-------	-------	------------	----------

3. ¿La forma normal de la columna vertebral de un ser humano es?:

e) Recta	f) Curva	g) Redonda	h) No se
----------	----------	------------	----------

4. ¿Cómo calcularías la longitud de una Columba vertebral de un ser humano de estatura promedio?

Actividad 1

Aproxima a la curva

Nombre: _____ Fecha: _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

Para calcular la longitud de un segmento recto, lo puedes realizar midiendo con una regla. Pero cuando el segmento es curvo medirlo no resulta una tarea sencilla, lo que usualmente hacemos es trazar sobre la curva pequeños segmentos rectos de manera que al sumar la longitud de estos tengamos una aproximación a la longitud de la curva.

Nuestra tarea en esta primera actividad consiste en aproximarse visualmente a la curva, mediante la superposición de pequeños segmentos rectos.

Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/qqs2z9y6> y sigue las instrucciones que se te indican a continuación.

Instrucciones: En cada uno de los ensayos que vayas realizando observa que es lo que va ocurriendo con la imagen de la columna vertebral y los segmentos de línea recta que se forman sobre ella. Finalmente, de todos los valores con los que experimentaste elige tres valores y contesta las siguientes preguntas.

14. ¿Cuál es el primer valor de longitud de segmento que elegiste para aproximar a la forma curva de la columna vertebral? _____

15. Analiza en el EDVICO1 los segmentos de línea recta que se formaron sobre la columna vertebral con tu primera longitud de segmento y contesta la siguiente pregunta ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral con esta medida?

e) Buena	f) Regular	g) Mala	h) No lo sé
----------	------------	---------	-------------

16. ¿Cuál es el segundo valor de longitud de segmento que elegiste para aproximar a la forma curva de la columna vertebral? _____

17. Analiza en el EDVICO1 los segmentos de línea recta que se formaron sobre la columna vertebral con tu segunda longitud de segmento y contesta la siguiente pregunta ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral con esta medida?

i) Buena	j) Regular	k) Mala	l) No lo sé
----------	------------	---------	-------------

18. ¿Existió una variación de aproximación a la forma curva de la columna vertebral con la primera y segunda longitud de segmento que ha utilizado?

d) Si	e) No	f) No lo sé
-------	-------	-------------

19. Comparando la primera y segunda aproximación a la forma curva de la columna vertebral que hasta el momento tuviste ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

e) Mejor	f) Igual	g) Peor	h) No lo sé
----------	----------	---------	-------------

20. ¿Cuál es el tercer valor de longitud de segmento que elegiste para aproximar a la forma curva de la columna vertebral? _____

21. Analiza en el EDVICO101 los segmentos de línea recta que se formaron sobre la columna vertebral con tu tercera longitud de segmento y contesta la siguiente pregunta ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral con esta medida?

m) Buena	n) Regular	o) Mala	p) No lo sé
----------	------------	---------	-------------

22. ¿Existió una variación de aproximación a la forma curva de la columna vertebral respecto a la segunda longitud de segmento que utilizaste?

g) Si	h) No	i) No lo sé
-------	-------	-------------

23. Comparando la segunda y tercera aproximación a la forma curva de la columna vertebral que se ha tenido ¿Cómo es la aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

i) Mejor	j) Igual	k) Peor	l) No lo sé
----------	----------	---------	-------------

Analiza los tres valores de longitud de segmento que utilizaste en el EDVICO101 para aproximar a la forma curva de la columna vertebral y elige un cuarto valor de longitud de segmento que mejor aproxime a la forma curva de la columna vertebral.

24. ¿Cuál es el cuarto valor de longitud de segmento de línea recta que elegiste para aproximar la forma curva de la columna vertebral? ____

Ingresa el valor que elegiste en el EDVICO101 y analiza la aproximación que obtienes con este valor.

25. ¿Cómo es tu aproximación a la forma curva de la columna vertebral con el cuarto valor que elegiste?

e) Buena	f) Mala	g) Peor	h) No lo sé
----------	---------	---------	-------------

Observando el cambio que se ha dado con las diferentes medidas de longitud de segmento utilizadas para aproximar a la forma curva de la columna vertebral.

26. ¿Cómo se podría tener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

d) Disminuyendo la longitud de segmentos de línea recta sobre la columna vertebral.	e) Aumentando la longitud de segmento de línea recta sobre la columna vertebral.	f) No lo sé
---	--	-------------

Visualicemos un segmento de curva de manera general

27. ¿Cómo se puede aproximar a su forma curva?

d) Por medio de segmentos de línea recta pequeños sobre ella.	Por medio de segmentos de línea recta grandes sobre ella.	e) No lo sé
---	---	-------------

28. ¿Cómo debe ser la longitud de segmento de línea recta para obtener una mejor aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

d) Entre más pequeña sea la longitud de segmento de línea recta mejor será la aproximación a la forma curva.	e) Entre más grande sea la longitud de segmento de línea recta mejor será la aproximación a la forma curva.	f) No lo sé
--	---	-------------

29. ¿Cuántos segmentos de línea recta son necesarios para tener una buena aproximación a la forma curva de la columna vertebral?

d) Muchos	e) Pocos	f) No lo sé
-----------	----------	-------------

30. ¿Cómo puedes medir de manera aproximada la longitud de la columna vertebral?

Actividad 2

Aproximación a la longitud de la columna vertebral

Nombre: _____ Fecha _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

Para calcular la longitud de un segmento recto, se puede realizar con apoyo de una regla, metro, etc. Sin embargo, cuando el segmento es curvo medirlo no resulta una tarea sencilla, lo que usualmente hacemos es trazar sobre la curva pequeños segmentos rectos de manera que al sumar la longitud de los mismos aproximamos la longitud de la curva.

Nuestra tarea en esta segunda actividad consiste en aproximarse a la longitud de curva mediante la superposición de pequeños segmentos rectos.

Instrucciones: Ingresa al siguiente enlace <https://www.geogebra.org/m/ffuvsf3t> y sigue las instrucciones. Interactúa con el EDVICOl02 ingresando algunos valores en el apartado de longitud de segmento, observa que es lo que va ocurriendo con la imagen de la columna vertebral y los segmentos de línea recta que se forman sobre ella. Finalmente, de todos los valores con los que experimentaste elige tres valores y contesta las siguientes preguntas.

14. ¿Cuál es el primer valor que elegiste de longitud de segmento de línea recta que aproxima la forma curva de la columna vertebral? _____
15. Con la primera medida de longitud de segmento de línea recta que elegiste ¿Cuántos segmentos de longitud de línea recta se formaron? _____
16. ¿Cuál es el segundo valor de longitud de segmento de línea recta que elegiste que aproxima la forma curva de la columna vertebral? _____

17. Con la segunda medida de longitud de segmento de línea recta que elegiste ¿Cuántos segmentos de longitud de línea recta se formaron? _____

18. ¿Cuál es el tercer valor de longitud de segmento de línea recta que elegiste que aproxima la forma curva de la columna vertebral? _____

19. Con la tercera medida de longitud de segmento de línea recta que elegiste ¿Cuántos segmentos de longitud de línea recta se formaron? _____

20. ¿Cómo puedes calcular el valor aproximado de la longitud de la columna vertebral mediante el valor de longitud de segmento elegido?

d) Sumando las longitudes de los segmentos de línea recta que se formaron	e) Restando las longitudes de los segmentos de línea recta que se formaron	f) No lo sé
---	--	-------------

21. Utilizando los tres valores anteriores que elegiste de longitud de segmento de línea recta y el número de segmento formados con esta medida. Aproxima la longitud de la columna vertebral utilizando esos valores.

Valor de la longitud de segmento	Longitud aproximada de la curva

Si el valor aproximado de la longitud de la columna vertebral corresponde a 4.17 cm.

22. ¿Qué medida de longitud de segmento utilizada en la pregunta anterior se aproxima más a la medida indicada? _____

23. Si se desea tener una aproximación a la medida indicada, ¿Cuál es el valor de la longitud de segmento que se debe utilizar para obtener esa aproximación?

24. ¿Con la medida que indicaste que aproximación a la longitud de la columna vertebral obtuviste? _____

25. Utilizando tus valores en tus tres elecciones ¿Qué operación se tiene que realizar para aproximarse a este valor?

f) Multiplicación: la longitud de segmento de línea recta por el número de segmentos formados.	g) División: la longitud de segmento de línea recta entre el número de segmentos formados.	h) No se
--	--	----------

26. Si todos los segmentos de línea recta tienen la misma longitud, aproximar a la longitud de la curva es equivalente, aumentando la longitud de segmento de línea recta que disminuyendo la longitud de segmento de línea recta

d) Si	e) No	f) No se
-------	-------	----------

27. ¿Cómo calcularías de manera aproximada la longitud de una curva en un intervalo?

i) Multiplicando la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	j) dividiendo la longitud de segmentos por el número de segmentos formados.	k) No se
--	---	----------

28. Si denotamos por Δx la longitud de segmento y n al número de segmentos que se forman con esa longitud. ¿La longitud del segmento de curva será representado matemáticamente por?

c) $\Delta x \cdot n$	b) $\Delta x/n$	c) Δx^n	d) no se
-----------------------	-----------------	-----------------	----------

29. Si representamos a la longitud de segmento como Δx y el número de segmentos como n , tomando en cuenta la respuesta de la pregunta anterior ¿Qué expresión matemática representaría de manera más adecuada la aproximación a la longitud del segmento de curva?

a) $\sum_{i=1}^{n=1000} n\Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{n=\infty} n\Delta x$	c) $\sum_{i=1}^{n=1000000} n\Delta x$	d) No se
------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	----------

30. Usando límites como puede representar la pregunta anterior, llenando lo faltante.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n n \Delta x$	b) $\sum_{i=1}^n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\Delta x}$	c) $\sum_{i=1}^n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n}{\Delta x}$	c) no se
--	--	--	----------

¿Cómo aproximas la longitud de una curva?

Actividad 3.1

Nombre: _____ Fecha _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

Usualmente nos encontramos con superficies curvas como toldos o techos, como se muestra en la siguiente figura:



De acuerdo con la imagen que se muestra en la figura contesta a las siguientes preguntas.

1. Si tuvieras un segmento de curva de acero, por ejemplo, el lado izquierdo de marco del toldo figura 2 y 3, y deseas medir su longitud, con la mayor precisión posible. Tomando en cuenta que para ello cuentas solo con segmentos de madera (regletas Montessori³), no flexibles,  pero que puedes cortarlos para tener distintas longitudes. Como 0.3; 0.5; 1; 1.5 y 2 mm.

Con base a lo anterior ¿Cómo medirías aproximadamente la longitud curva del marco?

³ Las **regletas** son un material manipulativo con el **que** se pueden trabajar varias áreas de las matemáticas y **que** ayudan a desarrollar muchas capacidades del pensamiento lógico-matemático. Las puedes utilizar **para que** los niños aprendan sobre: la cantidad. las equivalencias.

Indica ¿Cuál es la medida de longitud de curva del marco que encontraste? _____

Actividad 3.2

Nombre: _____ Fecha _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

Un automóvil realiza el recorrido de la siguiente trayectoria teniendo un consumo de combustible de 40 litros, ¿Qué rendimiento de combustible generó el automóvil al realizar el recorrido de la imagen?



figura 140 Trayectoria de automóvil

3. ¿Cómo puedes aproximar la longitud del camino?

j) Aproximarse por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	k) Aproximarse por medio de segmentos cada vez más grandes.	l) No se
--	---	----------

Considerando que el rendimiento de un automóvil se calcula dividiendo la cantidad de combustible entre los kilómetros recorridos y multiplicando el resultado por cien, contesta el siguiente problema. Teniendo en cuenta que consumió 40 litros de gasolina en ese recorrido. Indica ¿Cuál es su rendimiento? _____

ACTIVIDAD 4 (Generalización a la longitud de una curva)

Nombre: _____ Fecha _____

Instrucciones: Lee el siguiente párrafo y contesta las preguntas planteadas marcando con una x la respuesta que consideres correcta, en caso de no tener conocimiento de alguna de ellas no hay problema con indicarlo.

21. El proceso de mejorar la aproximación a la longitud de una curva ¿Será?

i) Finito	j) Infinito	k) Finito con muchos segmentos	l) No se
-----------	-------------	--------------------------------	----------

22. Si el proceso de aproximación a la longitud de una curva fuera infinito ¿Cómo podrías calcular la longitud de ella?

d) Mediante límites	e) Mediante una serie finita	f) No se
---------------------	------------------------------	----------

23. ¿La suma de todas las longitudes de segmento de línea recta es?

g) Finita	h) Infinita	i) No se
-----------	-------------	----------

24. Teniendo el número de segmentos de línea recta y la medida de longitud de segmento ¿Cómo puedes calcular la longitud de la curva?

a) Multiplicar el número de segmentos de línea recta por la longitud del segmento.	b) Dividir el número de segmentos de línea recta entre el valor de la longitud de segmento	c) no se
--	--	----------

25. ¿Cómo se aproxima a la forma de una curva?

m) Por medio de segmentos de línea recta cada vez más pequeños	n) Por medio de segmentos sin importar su tamaño.	o) No se
--	---	----------

26. ¿En teoría, cuántos segmentos son necesarios para tener una excelente aproximación a la longitud de una curva?

a) un número infinito de segmentos de línea recta.	b) un numero finito muy grande de segmentos de línea recta	c) no se
--	--	----------

27. ¿La suma de todas las longitudes es?

d) Finita	e) Infinita	f) No se
-----------	-------------	----------

28. ¿Este método puede funcionar si la curva tiene huecos?

d) Si	e) No	f) No se
-------	-------	----------

29. ¿Qué expresión matemática representa la suma de un número infinito de segmento de línea recta multiplicado por la longitud de segmento?

a) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta x$	b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
---------------------------------------	---	----------

30. ¿Cómo se puede expresar mediante límites como la suma de un número infinito de segmento de línea recta multiplicado por la longitud de segmento?

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x$	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\Delta x}$	c) no se
--	--	----------

31. ¿La representación de la suma de todos los segmentos de línea recta multiplicado por la longitud de segmento está dada por la expresión matemática?

b) $\int_a^b f(x) dx$	$\frac{df(x)}{dx}$	No se
-----------------------	--------------------	-------

32. ¿Qué aplicabilidad tiene la integral?

g) Para hacer mediciones de áreas, volúmenes, longitudes	h) Para Aprender fórmulas y métodos de integración	i) No se
--	--	----------

33. Dada la siguiente integral $\int_1^3 (x^2 + 1) dx$, ¿Cómo puedes resolverla?

Da una conclusión de esta actividad

Referencias bibliográficas

- Armando Cuevas-Vallejo, José Orozco-Santiago, Sofía Paz-Rodríguez. (2023) A learning trajectory for university students regarding the concept of vector. *The Journal of Mathematical Behavior*. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101044>.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., et al. (2014). *APOS: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Dordrecht: Springer.
- Barbosa, SM (2009). *Tecnologías da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia*. Tesis de Doctorado, UNESP, Rio Claro, Brasil.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus (I-13 Topical (ed.))*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8_1
- Cantoral, R. ; R. M. F. (2013). *Mathematics Education: a Vision of Its Evolution*1. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (3) (August), 255–270. <file:///D:/Users/Posgrado/Documents/DIDACTICA.pdf>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). *Socioepistemología, Matemáticas y Realidad* Socioepistemology, Mathematics and Reality. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.
- Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). *Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40
- Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 1(1), 56-74
- Cordero, F. (2011). *La modelación y la Graficación en la Matemática Educativa Escolar*. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta & A. R. Hernández-Ulloa (Coords.). *Razonamiento Matemático, Epistemología de la imaginación: (Re) pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). Editorial Gedisa-Barcelona y Cinvestav México.
- Cordero, F. (en prensa). *Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano*.

- Cordero, F., del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 185-212. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2223>.
- Cristina Rocerau, M., & Vilanova, S. L. (2008). El diálogo en el quehacer matemático: su valor como recurso. *Revista Iberoamericana De Educación*, 47(4), 1-10. <https://doi.org/10.35362/rie4742274>.
- Cuevas C-A., Delgado, M., y Martínez, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Logos Ciencia & Tecnología*, 10(2), 20-38.
- Cuevas, C.A. y Pluvinaige, F. (2003). Les projets D'Action pratiqué, éléments D'Une Ingeniere D'ensigment des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 8, Francia ISSN 0987-7576. Pp. 273-292.
- Cuevas, C-A., Villamizar, F-A, y Martínez, A. (2017). Actividades didácticas para el tono como cualidad del sonido, en cursos de física del nivel básico, mediadas por la tecnología digital. *Enseñanza de las Ciencias*. 35(3), 129-150. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2091>
- David Zaldívar Rojas; Claudia Cen Che; Eduardo Briceño Solís; Magali Méndez Guevara; Francisco Cordero Osorio. (2014) *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 17, Iss 4-II (especial), pp. 417-436 (2014); Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2014. Language: Spanish; Castilian, Base de datos: Directory of Open Access Journals
- De faria, E. (2010). Elementos De Historia Del Cálculo Diferencial E Integral. 153–160. <http://funes.uniandes.edu.co/4534/1/DefariaElementosALME2010.pdf>
- Grabiner, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, 56(4), 195. <https://doi.org/10.2307/2689807>
- IMAZ J CARLOS MORENO A LUIS. (n.d.). La Genesis y la enseñanza del cálculo las trampas del rigor (trillas ba).
- Iranzo, Nuria; Fortuny Aymemí, Josep Maria. (2009). La Influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza*

- de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 27, no. 3, pp. 433-46, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/142075>.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*, 295-384. Sevilla: Alfar.
- Kaiser G. (2020) Modelado matemático y aplicaciones en educación. En: Lerman S. (eds) *Enciclopedia de Educación Matemática*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101.
- Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D. M., & Graham, K. (2017). Understanding the Concepts of Calculus: Frameworks and Roadmaps Emerging From Educational Research. In J. Cai (Ed.), *COMPENDIUM for Research in Mathematics Education* (pp. 526–550).
- Marque J. (2020) *Tecnologías emergentes aplicadas en la enseñanza de las matemáticas DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*
- Martín, J. (2013). Diferencias entre imágenes conceptuales de expertos y estudiantes de la estructura matemática de la convergencia de series de Taylor. *Estudios educativos en matemáticas*, 82, 267–283.
- Mateus-Nieves, E. (2022). Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Vol. 35, 1593-1615.
- Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 3(2), 131-170.
- Oh, P.S. y Oh, S.J. (2011). What teachers of science need to know about models: an overview. *Inter-national Journal of Science Education*, 33(8), 1109-1130
- Pluinage, F. y Cuevas, A. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función. En Filloy, E. (ed.). *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. México: Santillana, pp. 141-167.
- Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 507–515. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x>.

- Ruiz, A. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. Euned, 1, 620.
http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia_y_filosofia_de_las_matematicas.pdf
- Salinas, P. (2013). Aproximación al cálculo con SimCalc: vinculación de derivada y antiderivada. En SJ Hegedus & J. Roschelle (Eds.), La visión y contribuciones de SimCalc (pp. 383–399). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Sealey, V. (2014). Un marco para caracterizar la comprensión del estudiante de las sumas de Riemann y las integrales definidas. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 33, pp. 230–245
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective Author (s): Martin A. Simon Source: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, No. 2 (Mar., 1995), pp. Published by: National Council of Teachers of Mathematic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), pp.114–145.
<http://www.jstor.org/stable/749205>.
- Stewart, J. (2008). James Stewart. In *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. CENGAGE Learning.
- Thompson, P., & Silverman, J. (2008). The Concept of Accumulation in Calculus. In *Making the Connection* (pp. 43–52). The Mathematical Association of America.
<https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005>
- Trigueros, M. (2019) The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM Mathematics Education* 51, 1055–1068.
<https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6>.

http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/coordinaciones/TG/213039_Clculo%20Integral-TG%202011-l.pdf

https://www.ingenieria.unam.mx/programas_academicos/licenciatura/Industrial/2016/asignaturas_industrial_2016.pdf