



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

Garabatos de Cactus.

TESIS

Que presenta

Andrea Paola Rincón Prat

Para obtener el grado de

Doctora en Ciencias

En la especialidad de

Matemáticas

Director de Tesis

Dr. Iakov Mostovoi

.....

Agradecimientos

Agradezco mucho a las personas con las que he compartido este proceso. En particular, me gustaría agradecerle al Dr. Jacob Mostovoy por guiarme, introducirme en esta área de las matemáticas y darme la oportunidad de trabajar en este tema, a los Doctores y personal del departamento de matemáticas del Cinvestav por su ayuda y siempre haber estado pendientes de mi, al CONACYT por financiar mi proyecto, y finalmente me gustaría agradecerle a mis amigos y familiares por haber estado conmigo durante el recorrido de este camino.

Andrea Rincón.

Abstract

In this work we introduce *cactus doodles* and study some of their properties. The cactus doodles are equivalence classes of collections of curves on the sphere that we consider up to some transformations that we call fundamental moves, which mimic the relations that define the cactus groups and the first Reidemeister move. The cactus doodles on the sphere are a generalization of the *doodles* which are equivalence classes of collections of curves with double intersection points.

The first main result of this thesis is a version of the Alexander Theorem: we show that each cactus doodle can be seen as the closure of a plane braid that represents an element of a cactus group. A consequence of this result is that each cactus doodle on the sphere is equivalent to its mirror image.

The second main result is about the one-component cactus doodles with the minimal number of intersection points. For this result, we will consider the cactus doodles without the plane version of the first Reidemeister move. We will show that if two cactus doodles are equivalent and have the minimal number of intersection points, then we can connect them via fundamental moves that do not change the number of intersection points and, possibly, the mirror image transformation.

Resumen

En este trabajo se introducen los garabatos de cactus (o *cactus doodles*) y se estudian algunas de sus propiedades. Los *cactus doodles* son clases de equivalencia de colecciones de curvas en la esfera que se consideran bajo ciertas transformaciones, las cuales imitan las relaciones con las que se definen los grupo de cactus, y el primer movimiento de Reidemeister de la teoría de nudos. Además, los *Cactus Doodles* son una generalización de los garabatos (*doodles*) los cuales son clases de equivalencia de colecciones de curvas en la esfera que solo tienen intersecciones dobles y además algunas de las propiedades de los *cactus doodles* son análogas a las propiedades de los *doodles*.

El primer resultado importante de esta tesis es una versión del Teorema de Alexander: demostramos que cada *cactus doodle* en la esfera es la cerradura de un elemento de un grupo de cactus. Como corolario de este resultado podemos ver que toda colección de curvas en la esfera es equivalente como *cactus doodle* a su imagen espejo.

El segundo resultado importante se trata de los *cactus doodles* de una componente, con el mínimo número de puntos de intersección. Demostramos que si dos curvas en la esfera representan el mismo *cactus doodle* y tienen el número mínimo de puntos de intersección, entonces se puede ir de una a la otra por medio de movimientos fundamentales que no cambian el número de puntos de intersección y, posiblemente, por la operación que envía una de estas curvas a su imagen espejo.

Índice General

1. Introducción	VII
2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes	1
2.1. Twins, Garabatos y Cerraduras	1
2.2. Invariantes	4
3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)	18
3.1. El grupo de cactus y trenzas de cactus	18
3.2. Cactus Doodles	21
3.3. Cerraduras de las Trenzas de Cactus	22
3.3.1. Garabatos como cerraduras de elementos en el grupo de <i>twins</i>	22
3.3.2. <i>Cactus doodles</i> como cerraduras de Trenzas de Cactus	26
3.4. Invariantes	30
4. Diagramas de Gauss y Flips	33
4.1. Diagramas de Gauss	33
4.1.1. Diagramas Base	33
4.1.2. Diagrama base para un diagrama de cactus doodle orientado	34
4.1.3. Código de un diagrama Base	36
4.1.4. Movimientos fundamentales en diagramas base	36
4.2. Diagramas base de una componente	39
4.2.1. Orden cíclico orientado	44
4.2.2. <i>Cactus doodles</i> de una componente que tienen el mismo diagrama base.	44
4.2.3. Orden cíclico Orientado	45
4.2.4. Algunas operaciones y propiedades de los ordenes cíclicos orientados	46
4.2.5. Ordenes cíclicos orientados para <i>cactus doodles</i>	49
4.2.6. Diagramas de Gauss	50
4.2.7. Diagrama de Gauss de un <i>cactus doodle</i>	50
4.2.8. Movimientos fundamentales en diagramas de Gauss	52
4.3. <i>Flips</i>	55
4.3.1. El <i>flip</i> de un <i>cactus doodle</i>	55
4.3.2. El <i>flip</i> de un diagrama de Gauss	56
5. Cactus Doodles Minimales	57
5.1. <i>Cactus doodles</i> minimales	57
5.2. Lema de reducción	58
5.2.1. El enunciado del lema y los tres casos	58

Índice General

5.2.2. Caso 1	59
5.2.3. Caso 2	67
5.2.4. Caso 3	71
5.3. Demostración del Teorema 5.1	77
A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base	80
Bibliografía	85

1. Introducción

En este trabajo vamos a introducir los garabatos de cactus o *cactus doodles* en la esfera. Estos se pueden ver como una generalización de los garabatos o *doodles*, los cuales se estudian desde hace más de 30 años como análogos planos de los nudos. Los garabatos en la esfera se pueden considerar como las cerraduras de trenzas planas con intersecciones dobles, también conocidas como *twins*; se puede extender esta afirmación para los *cactus doodles*, puesto que como se verá a continuación, son cerraduras de trenzas planas más generales, introducidas en [5], que representan los elementos del llamado grupo de cactus.

Garabatos

Recordemos que los garabatos son colecciones de curvas cerradas inmersas en la esfera tales que:

- el número de puntos de intersección (ya sean autointersecciones o intersecciones entre dos componentes) es finito;
- sus intersecciones son transversales.

Los garabatos se consideran módulo isotopías de la esfera y ciertas versiones planas del primero y del segundo movimiento de Reidemeister. Además, los garabatos han sido estudiados como una versión plana de la teoría de nudos. En la teoría de los garabatos existe la versión plana del grupo de trenzas, el llamado grupo de *twins*. Asimismo, la construcción usual de la cerradura de una trenza, se puede extender a los *twins*; y así, cerrando un *twins*, obtenemos un garabato.

En [7] Khovanov demuestra los siguientes resultados sobre los garabatos:

Teorema 1.1. *Todo garabato en la esfera se puede ver como la cerradura de un elemento de un grupo de twins.*

Teorema 1.2. *Módulo isotopías de la esfera, en cada clase de equivalencia de garabatos existe un único garabato con el mínimo número de puntos de intersección.*

Además, Khovanov construye el análogo del grupo del nudo para garabatos de la siguiente manera. Consideremos un garabato que es conexo como grafo planar y etiquetamos cada punto de intersección del garabato con un símbolo diferente. El grupo del garabato está generado por estas etiquetas y hay una relación por cada región en las cuales el garabato divide a la esfera; la cual, es la palabra que se obtiene al leer en dirección contraria a las manecillas del reloj las etiquetas de todas las intersecciones en la frontera de la región correspondiente. Tenemos que:

Teorema 1.3. *El grupo del garabato es una invariante para los garabatos.*

Grupos de cactus y *cactus doodles*

El grupo de cactus \mathbf{J}_n , con $n > 0$, es un grupo que contiene al grupo de twins \mathbf{TW}_n como subgrupo (ver [15]), sus elementos se pueden representar por medio de trenzas planas y esta definido por los siguientes generadores y las siguientes relaciones (ver [5]):

- **Generadores**

$$\{\mathbf{S}_{p,q} \mid 1 \leq p < q \leq n\}$$

- **Relaciones**

1. $\mathbf{S}_{p,q}^2 = 1$.
2. $\mathbf{S}_{p,q}\mathbf{S}_{m,r} = \mathbf{S}_{m,r}\mathbf{S}_{p,q}$ si $[p, q] \cap [m, r] = \emptyset$.
3. $\mathbf{S}_{p,q}\mathbf{S}_{m,r} = \mathbf{S}_{p+q-r, p+q-m}\mathbf{S}_{p,q}$ si $[m, r] \subset [p, q]$.

A diferencia de los *Twins*, las trenzas con las que representamos los elementos de los grupos de cactus tienen puntos de intersección en los cuales permitimos que pasen dos o más hilos, es decir que estas trenzas tienen puntos de intersección con dos o más ramas, por ejemplo en la Figura 1.1 tenemos la trenza plana que representa al generador $\mathbf{S}_{2,4}$ de \mathbf{J}_6 .

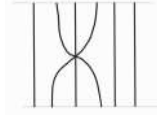


Figura 1.1.

Más generalmente, un generador $\mathbf{S}_{p,q} \in \mathbf{J}_n$ se puede dibujar como una “trenza plana” en $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{S}^2$ con n hilos monótonos descendentes, que tienen sus puntos iniciales en $(i, 1)$, donde $i = 1, \dots, n$, y sus puntos finales están en $(i, 0)$; de tal suerte, que para $p \leq i \leq q$ tenemos que el punto $(i, 1)$ se conecta con $(q - p - i, 0)$ y para los demás valores de i el punto $(i, 1)$ se conecta con $(i, 0)$ por medio de un hilo vertical, además esta solo tiene un punto de intersección. El producto de varios generadores se dibuja como una concatenación de las trenzas que los representan y a las trenzas planas que obtenemos de esta forma las llamamos *Trenzas de Cactus*. Tal como es la costumbre en la teoría de nudos y trenzas, con frecuencia no vamos a distinguir entre las trenzas de cactus y los elementos del grupo de cactus que ellas representan.

Para una trenza de cactus $b \in \mathbf{J}_n$ definimos la cerradura de tipo *Alexander* al identificar en orden y sin intersecciones los puntos iniciales con los puntos finales de b como en la Figura 1.2.

1. Introducción



Figura 1.2.: Cerradura de tipo Alexander de $\mathbf{S}_{2,4}$

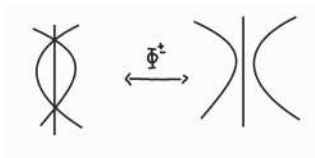
Esta construcción es análoga a la cerradura que produce nudos a partir de trenzas (ver [2]) o garabatos a partir de los *twins* (ver [7], [9] o [8]).

Por otro lado, un *cactus doodle* es una colección de curvas cerradas inmersas en la esfera \mathbb{S}^2 tales que:

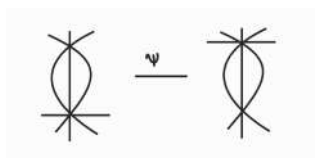
- (1.) tienen un número finito de puntos de intersección, donde cada punto de intersección corresponde a una intersección de una de las curvas de la colección, o una intersección entre dos o más curvas de la colección,
- (2.) todo punto de intersección tiene un número finito de preimágenes,
- (3.) las rectas tangentes, a cada rama de la unión de las curvas en un punto de intersección, son todas diferentes.

Los *cactus doodles* se consideran módulo transformaciones que imitan las relaciones con las que se definen los grupos de cactus y la versión plana del primer movimiento de Reidemeister (para definiciones básicas de nudos y movimientos de Reidemeister ver [3], [1]; y [7], [8], [9] para las versiones planas). Estas transformaciones las vamos a llamar “movimientos fundamentales” y consisten de:

1. isotopias de la esfera;
2. movimientos de tipo Φ^\pm : estos crean o eliminan dos puntos de intersección con m ramas y conectados por m arcos paralelos (un *arco* lo vemos como un segmento de curva que conecta dos puntos de intersección, es decir un arco usual al considerar a un *cactus doodle* como un grafo planar).

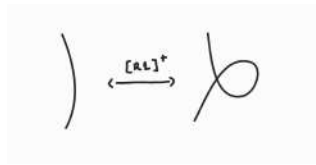


3. movimientos de tipo Ψ : estos movimientos mueven n ramas de un punto de intersección \mathbf{B} con $n + m$ ramas a un punto de intersección \mathbf{A} con m ramas, que está conectado a \mathbf{B} por medio de m arcos paralelos.



1. Introducción

4. la versión plana de primer movimiento de Reidemeister $[\mathbf{R1}]^\pm$: crea o elimina un lazo en alguna de las curvas de la colección.



Resultados principales

Nuestro propósito es estudiar análogos de algunos resultados de la teoría de los nudos y de los garabatos, tales como:

- (a) El Teorema de Alexander y su versión plana (ver [2], [7]).
- (b) La unicidad de un garabato con el mínimo número de puntos de intersección. ([7]).

Además, daremos una generalización del grupo de Khovanov para doodles orientados con varias componentes. Esta invariante se discute en el Capítulo 2.

En cuanto al Teorema de Alexander, usamos una variación del algoritmo dado por Khovanov en [7], para ver que todo *cactus doodle* se puede representar como la cerradura de Alexander de una trenza de cactus. En nuestro caso, existe una nueva dificultad causada por el hecho de que no cualquier tipo de punto de intersección puede venir de la cerradura de una trenza. Este problema se resuelve utilizando los movimientos fundamentales. Los detalles de la demostración se dan en el Capítulo 3.

En cuanto a la unicidad del garabato con el mínimo número de puntos de intersección, la propiedad análoga para *cactus doodles* es un poco más compleja. Por un lado, en cuanto a los movimientos fundamentales aparte de las isotopías de la esfera, los movimientos de tipo Ψ no cambian el número de puntos de intersección de un *cactus doodle*; con lo cual, este tipo de movimientos no afectan la minimalidad con respecto al número de puntos de intersección. Por el otro lado, un *cactus doodle* y su *flip* (o su imagen espejo) están en la misma clase de equivalencia, y aunque estos tienen el mismo número de puntos de intersección, para ir del uno al otro, además de movimientos de tipo Ψ , es posible que tengamos que usar movimientos de tipo Φ^\pm ; aun así, es claro que el movimiento que nos lleva de un *cactus doodle* a su 'flip' también mantiene la propiedad de ser minimal con respecto al número de puntos de intersección. El resultado principal del Capítulo 5 es que todos los *cactus doodles* minimales de una componente están relacionados por estos tres tipos de movimientos. Para demostrarlo, utilizaremos una variación de los diagramas de Gauss (ver [3], [17], [10] y [11]) para *cactus doodles*; el cual, es un objeto combinatorio bastante complicado pero útil en la demostración.

Existen otras preguntas naturales que no intentamos contestar. En [8] Gotin nos da una versión del Teorema de Markov para los garabatos y aunque los

1. Introducción

movimientos dados por Gotin se pueden extender a movimientos mas generales para los *cactus doodles*, dejamos abierta la pregunta sobre la existencia de un teorema de tipo Markov para los *Cactus Doodles*. Otra tarea natural sería la construcción de invariantes para los *cactus doodles*. Sin embargo, es un tema muy amplio y no lo tocamos en esta tesis.

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

Nuestro objeto de estudio son los *cactus doodles* (garabatos de cactus). Estos generalizan a los llamados garabatos (*doodles*) en la esfera, los cuales se pueden ver como un análogo plano de nudos y enlaces. A saber, son clases de equivalencia de colecciones de curvas suaves cerradas en la esfera, en las cuales solo permitimos intersecciones transversales. Los garabatos se consideran módulo isotopías de la esfera y transformaciones que podemos ver como versiones planas del primer y segundo movimiento de Reidemeister. Los garabatos están relacionados con los llamados *twins* de la misma manera que los nudos se relacionan con las trenzas. Basándonos principalmente en algunos de los resultados en [7], estudiaremos algunas invariantes para estos análogos de nudos.

2.1. Twins, Garabatos y Cerraduras

Definición 2.1 (El grupo de Twins \mathbf{TW}_n). Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ el grupo de *twins* \mathbf{TW}_n en n hilos, es el grupo definido por los siguientes generadores y relaciones (ver [7], [8], [9])

- **Generadores:**

$$\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{n-1}$$

- **Relaciones:**

1. $\mathbf{S}_i^2 = 1$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$.
2. $\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i$ para todo $|i - j| > 2$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ los elementos del grupo \mathbf{TW}_n , o *twins*, los vamos a representar por medio de trenzas planas cuyos hilos son monótonos descendientes y cuyas intersecciones son transversales. Para todo $i = 1, \dots, n - 1$, la trenza que representan al generador \mathbf{S}_i se muestran en la Figura 2.1; si un elemento $\mathbf{w} \in \mathbf{TW}_n$ está expresado como una palabra en los generadores \mathbf{S}_i , entonces \mathbf{w} se representa como la concatenación de las trenzas que representan los \mathbf{S}_i con los que \mathbf{w} se escribe, como en el ejemplo de la Figura 2.2.

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

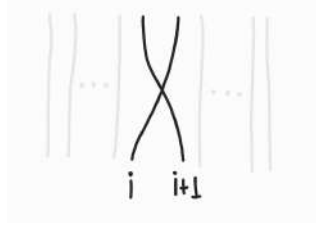


Figura 2.1.: Generador S_i en TW_n



Figura 2.2.: $S_2 S_3$ en TW_5

Podemos considerar que estas trenzas se encuentran en \mathbb{R}^2 y que dos trenzas son la misma, si existe una isotopía del plano que preserve los puntos extremos de los hilos y que transforma una trenza en la otra por medio de una familia de trenzas. En términos de estas trenzas, la primera relación en TW_n se ve como en la Figura 2.3 y la segunda relación es inducida por una isotopía de \mathbb{R}^2 .



Figura 2.3.: Relación en Trenzas

De esta manera, un *twin* es una clase de equivalencia de las trenzas planas módulo los movimientos en la Figura 2.3 y las isotopías de \mathbb{R}^2 .

Definición 2.2 (Doodle o Garabato). Un *garabato* es una colección finita de curvas cerradas en la esfera S^2 tales que:

1. las curvas de la colección tienen un número finito de puntos de intersección, ya sean puntos de auto-intersección de una de las curvas o puntos de intersección entre dos curvas diferentes;
2. todas las intersecciones son transversales.

Las curvas que forman el garabato se llaman sus *componentes*.

Definición 2.3. Dos garabatos son equivalentes, si se pueden transformar uno en el otro por medio de una sucesión de movimientos de los siguientes tipos:

1. una isotopia diferenciable de la esfera;
2. la versión plana **[R1]** del primer movimiento de Reidemeister, dada en la Figura 2.4a;
3. la versión plana **[R2]** del segundo movimiento de Reidemeister, en la Figura 2.4b.

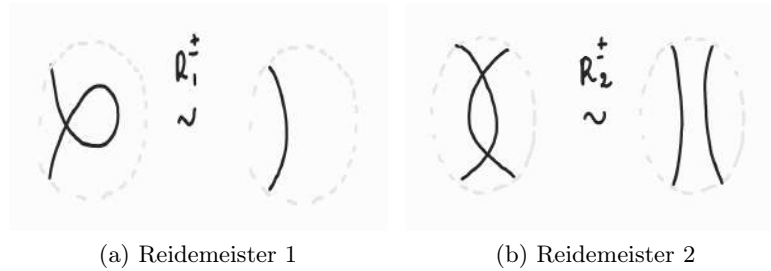


Figura 2.4.: Versiones planas de los Movimientos de Reidemeister

En lo que sigue, si una transformación \mathbf{m} lleva el garabato \mathbf{c} al garabato $\tilde{\mathbf{c}}$ vamos a denotar esta transformación como $\mathbf{m} : \mathbf{c} \rightarrow \tilde{\mathbf{c}}$. Además, denotaremos como $[\mathbf{R1}]^+$, $[\mathbf{R2}]^+$ a los movimientos planos de Reidemeister que crean puntos de intersección y $[\mathbf{R1}]^-$, $[\mathbf{R2}]^-$ a los movimientos planos de Reidemeister que eliminan puntos de intersección. También, vamos a usar el término “garabato” tanto para los garabatos como para sus clases de equivalencia; y, en el caso que sea necesario diferenciar el garabato de su clase de equivalencia, vamos a usar el término “garabato geométrico” para el garabato como tal, esto tal y como se acostumbra en la teoría de nudos.

Definición 2.4 (Cerradura de Alexander). Dada una trenza plana en \mathbb{R}^2 , su *cerradura de Alexander* es el garabato en la esfera $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ que se obtiene al identificar en orden y sin intersecciones los puntos finales con los puntos iniciales de la trenza.



Figura 2.5.: Cerradura del elemento $\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3$ en \mathbf{TW}_5

Dos trenzas planas que definen el mismo elemento de \mathbf{TW}_n producen garabatos equivalentes. En [7], Khovanov demuestra la siguiente versión plana del Teorema de Alexander (ver [2]):

Teorema 2.1. *Todo garabato se puede ver como la cerradura de un twin.*

Discutiremos la demostración de este teorema en la Sección 3.3 del Capítulo 3, en el contexto de su generalización a las trenzas de cactus y los *cactus doodles*.

2.2. Invariantes

Si \mathcal{C} es el conjunto de garabatos en la esfera \mathbb{S}^2 , y \sim denota la equivalencia de garabatos, una función

$$\mathbf{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{E}$$

con valores en algún conjunto \mathbf{E} se llama *invariante* si

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = \mathbf{f}(\mathbf{c}_2)$$

siempre y cuando $\mathbf{c}_1 \sim \mathbf{c}_2$.

Vamos a discutir tres invariantes distintas:

1. El *grupo de garabato* definido por Khovanov en [7].
2. El *garabato mínimo* definido modulo las isotopias de la esfera [7].
3. El *grupo de garabato orientado*, el cual es una modificación del grupo de garabato que proponemos para garabatos orientados.

Las invariantes [1.] y [2.] tienen aplicaciones y generalizaciones a los *cactus doodles* que vamos a tratar en este trabajo. En la Sección 3.4 del Capítulo 3 veremos que podemos usar el grupo del garabato para calcular el número de componentes de un *cactus doodle*. El concepto del garabato mínimo tiene un análogo no trivial en el caso de los *cactus doodles*, el cual estudiaremos en los Capítulos 4 y 5.

Observación 2.1. Usando el hecho de que se tiene un análogo para los garabatos del Teorema de Markov (ver [8]) Cisneros, Flores y Juyumaya demostraron la existencia de una invariante polinomial similar al polinomio de Alexander (ver [9]). Dado que no tenemos ninguna generalización del Teorema de Markov para *cactus doodles*, no conocemos ningún análogo de esa construcción para los *cactus doodles*.

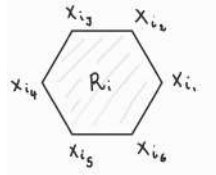
El Grupo del Garabato

Un garabato es *conexo* si lo es como grafo planar en la esfera. Todo garabato es equivalente a uno conexo, ya que podemos usar un movimiento de tipo $[\mathbf{R}2]^+$ para unir dos componentes diferentes.

Definición 2.5 (El grupo del garabato). Sea \mathbf{c} un garabato conexo con $k \geq 0$ puntos de intersección $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ y sean $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_r$ las regiones disyuntas en las que \mathbf{c} divide la esfera. El grupo del garabato $\mathbf{G}_{\mathbf{c}}$ tiene como generadores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ y una relación \mathbf{r}_i para cada región \mathbf{R}_i . Las relaciones \mathbf{r}_i se definen

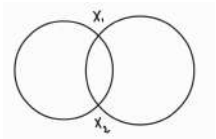
2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

de la siguiente manera. La frontera de la región \mathbf{R}_i es un l -ágono cuyos vértices, en el orden cíclico contrario a las manecillas del reloj, son los puntos de intersección $\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_l}$. La palabra \mathbf{r}_i es el producto $r_i = \mathbf{x}_{i_1} \cdots \mathbf{x}_{i_l}$.



$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_{i_1} \cdots \mathbf{x}_{i_6}$$

Ejemplo 2.1. Para el garabato \mathbf{c} en la siguiente figura



el grupo de este garabato es:

$$\mathbf{G}_c = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \rangle \cong \langle \mathbf{x}_1 \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Proposición 2.1. *El grupo del Garabato es una invariante para los garabatos.*

En [7] la construcción de este grupo se propone como un análogo del grupo de un nudo. Para cada garabato conexo \mathbf{c} , Khovanov construye un CW-complejo y el grupo del garabato conexo \mathbf{c} es el grupo fundamental de este complejo. A continuación, vamos a dar una demostración para la Proposición 2.1; sin embargo, esta demostración no utiliza el CW-complejo de Khovanov.

Demostración de la Proposición 2.1

Ya que la combinatoria de un garabato es invariante bajo las isotopias de la esfera, con el fin de demostrar la Proposición 2.1 es suficiente ver que el grupo del garabato \mathbf{G}_c es invariante bajo las versiones planas de los movimientos de Reidemeister $[\mathbf{R}_1]^\pm$ y $[\mathbf{R}_2]^\pm$.

Primero supongamos que el movimiento $[\mathbf{R}_1]^+$ transforma el garabato geométrico \mathbf{c} al garabato geométrico $\hat{\mathbf{c}}$. Ya que el garabato \mathbf{c} está en la esfera, se puede suponer que este está proyectado en el plano, de tal forma que el arco en el que aplica el movimiento está hacia la izquierda del plano, es adyacente a la región no acotada definida por \mathbf{c} y el resto del garabato está hacia la derecha como en la Figura 2.6.

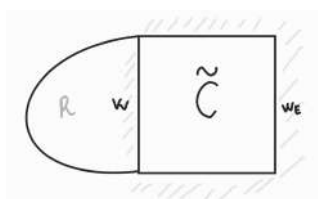


Figura 2.6.: Garabato conexo \mathbf{c} dibujado en el plano

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

Llamamos \mathcal{A} al conjunto de puntos de intersección de \mathbf{c} y suponemos que $\tilde{\mathbf{c}}$ es el subgrafo de \mathbf{c} que se encuentra hacia la derecha del plano. El arco en el que se aplica el movimiento $[\mathbf{R}1]^+$ es adyacente a exactamente dos de las regiones definidas por \mathbf{c} : la región no acotada y una región acotada a la que llamamos \mathbf{R} . Si \mathbf{w} es la relación en \mathcal{A} dada por \mathbf{R} , \mathbf{w}_E es la relación en \mathcal{A} dada por la región no acotada y $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}$ es el conjunto de relaciones en \mathcal{A} dadas por las regiones no acotadas definidas por $\tilde{\mathbf{c}}$. Entonces, el grupo del garabato \mathbf{c} está dado por:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{c}} = \langle \mathcal{A} \mid \{\mathbf{w}, \mathbf{w}_E\} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.1)$$

Una vez se aplica el movimiento $[\mathbf{R}1]^+$, el garabato $\hat{\mathbf{c}}$ que se obtiene tiene un nuevo punto de intersección \mathbf{a} . Además, en vez de la región acotada \mathbf{R} , se tienen dos nuevas regiones acotadas \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 . Estas dos regiones y la región no acotada definida por el garabato $\hat{\mathbf{c}}$ tiene al punto \mathbf{a} como un punto de intersección en su frontera (ver Figura 2.7).

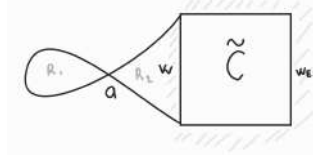


Figura 2.7.: El garabato $\hat{\mathbf{c}}$

El conjunto de generadores del grupo $\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}}$ del garabato $\hat{\mathbf{c}}$ es $\mathcal{A} \cup \{\mathbf{a}\}$, la región \mathbf{R}_1 nos da la relación \mathbf{a} , la región \mathbf{R}_2 nos da la relación \mathbf{aw} , la región no acotada nos da la relación \mathbf{aw}_E y el resto de relaciones que definen al grupo $\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}}$ están dadas por $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}$. Esto nos dice que el grupo del garabato $\hat{\mathbf{c}}$ está dado por:

$$\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}} = \langle \mathcal{A} \cup \{\mathbf{a}\} \mid \{\mathbf{a}, \mathbf{aw}, \mathbf{aw}_E\} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.2)$$

Ya que $\mathbf{a} = 1$ en $\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}}$, la presentación (2.1) es equivalente a la presentación (2.2) y así tenemos que

$$\mathbf{G}_{\mathbf{c}} \cong \mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}}.$$

Ahora supongamos que el garabato \mathbf{c} se transforma a $\hat{\mathbf{c}}$ por medio de un movimiento $[\mathbf{R}2]^+$. Tal como en el anterior caso, se puede asumir que el garabato \mathbf{c} se ubica en el plano de tal forma que los arcos en los que se aplica el movimiento $[\mathbf{R}2]^+$ están hacia la izquierda del plano y el resto del garabato $\tilde{\mathbf{c}}$ está hacia la derecha. Supongamos primero que $\tilde{\mathbf{c}}$ es conexo como grafo, entonces \mathbf{c} está proyectado en el plano como en la Figura 2.8.

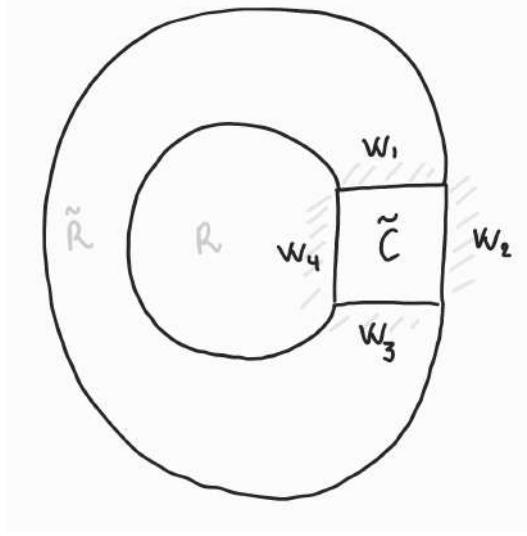


Figura 2.8.: Garabato geométrico \mathbf{c} proyectado en el plano

En este caso, uno de los arcos que están hacia la izquierda del plano es adyacente a la región no acotada definida por \mathbf{c} y una segunda región $\tilde{\mathbf{R}}$. El segundo arco que participa en el movimiento es adyacente a $\tilde{\mathbf{R}}$ y una tercera región acotada \mathbf{R} . Nuevamente, denotamos con \mathcal{A} a el conjunto de vértices de \mathbf{c} y con $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}$ a el conjunto de relaciones dadas por las regiones acotadas definidas por $\tilde{\mathbf{c}}$ en la esfera. Con las notaciones de la Figura 2.8 tenemos que:

- \mathbf{w}_4 es la relación dada por la región \mathbf{R} ,
- $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3$ es la relación dada por la región $\tilde{\mathbf{R}}$,
- \mathbf{w}_2 es la relación dada por la región no acotada definida por \mathbf{c} .

El grupo de \mathbf{c} está dado por:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{c}} = \langle \mathcal{A} \mid \{\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2\} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}\rangle. \quad (2.3)$$

Una vez se aplica el movimiento $[\mathbf{R}2]^+$, aparecen dos puntos de intersección nuevos \mathbf{a}, \mathbf{b} . Además, las regiones \mathbf{R} y $\tilde{\mathbf{R}}$ se dividen en cuatro regiones nuevas $\mathbf{R}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2, \tilde{\mathbf{R}}_3, \mathbf{R}_4$ como se ve en la Figura 2.9. El grupo del garabato $\hat{\mathbf{c}}$ tiene la presentación

$$\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}} = \langle \mathcal{A} \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mid \{\mathbf{w}_4\mathbf{b}\mathbf{a}, \mathbf{w}_2\mathbf{a}\mathbf{b}, \mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{b}\mathbf{w}_3, \mathbf{a}\mathbf{b}\} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}\rangle, \quad (2.4)$$

Ya que $\mathbf{a}\mathbf{b} = 1$ en $\mathbf{G}_{\hat{\mathbf{c}}}$ y, además tenemos que, $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3$ es una consecuencia de las relaciones $\mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{b}\mathbf{w}_3$ y $\mathbf{a}\mathbf{b}$, tenemos que la presentación (2.4) es equivalente a la presentación (2.3) con lo cual los dos grupos son isomorfos.

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

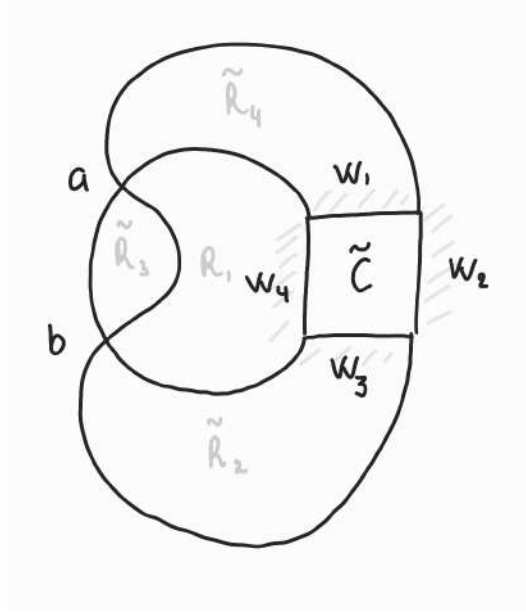
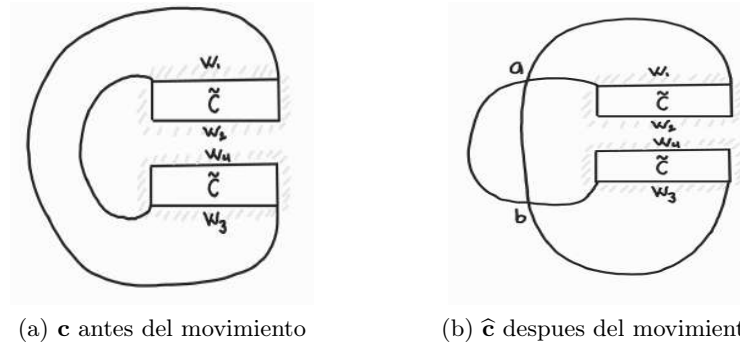


Figura 2.9.: El garabato \hat{c}

En el caso que \tilde{c} consiste de dos componentes, los arcos (puede ser solo uno) en los que se aplica el movimiento son adyacente a dos regiones como en la Figura 2.10a.



(a) \mathbf{c} antes del movimiento

(b) \hat{c} despues del movimiento

Figura 2.10.

Con las notaciones de la Figura 2.10a tenemos que w_1w_3 es la relación dada por la región acotada definida por \tilde{c} y que w_2w_4 es la relación dada por la segunda región adyacente a los arcos en los que se aplica el movimiento. Como ya lo hicimos, suponemos que \mathcal{A} es el conjunto de puntos de intersección de \mathbf{c} y que $\mathcal{R}_{\tilde{c}}$ es el conjunto de relaciones dadas por las regiones acotadas que define \tilde{c} en la esfera. Teniendo en cuenta esto, tenemos que $\mathbf{G}_{\mathbf{c}}$, el grupo del garabato geometrico \mathbf{c} , tiene la presentación

$$\mathbf{G}_{\mathbf{c}} = \langle \mathcal{A} \mid \{w_1w_3, w_2w_4\} \cup \mathcal{R}_{\tilde{c}} \rangle . \quad (2.5)$$

Tras el movimiento se crean los puntos de intersección \mathbf{a}, \mathbf{b} , la región acotada que es adyacente a los arcos en los que se aplica el movimiento se divide en tres; y además, los puntos de intersección \mathbf{a}, \mathbf{b} están en la frontera de la región

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

no acotada definida por el garabato \hat{c} y las nuevas regiones acotadas como en la Figura 2.10b. Usando la notación de la Figura 2.10b, las tres regiones no acotadas nos dan las relaciones $\mathbf{w}_1\mathbf{a}$, \mathbf{ab} y $\mathbf{w}_3\mathbf{b}$; y, la región no acotada, nos da la relación $\mathbf{w}_2\mathbf{abw}_4$; esto nos dice que $\mathbf{G}_{\hat{c}}$, el grupo del garabato geométrico \hat{c} tiene la presentación

$$\mathbf{G}_{\hat{c}} = \langle \mathcal{A} \cup \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mid \{\mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}, \mathbf{w}_2\mathbf{abw}_4\} \cup \mathcal{R}_{\hat{c}} \rangle. \quad (2.6)$$

Un argumento parecido al del anterior caso nos dice que las dos presentaciones son equivalentes y en consecuencia los dos grupos son isomorfos. \square

Garabato Minimal

Una segunda invariante que nos da Khovanov en [7] es (salvo isotopías de la esfera) la existencia de un único *garabato* con un mínimo número de puntos de intersección en cada clase de equivalencia de garabatos. Khovanov también explica cómo encontrar este *garabato minimal* partiendo de un garabato geométrico cualquiera. Así, ya que las isotopías de la esfera no cambian la combinatoria de los garabatos, el problema de decidir si dos garabatos son equivalentes se reduce a decidir si los garabatos minimales que encontramos a partir de estos son isomorfos como grafos planares.

Teorema 2.2 (Khovanov, [7]). *Un garabato \mathbf{c} es equivalente a un único (salvo isotopías de la esfera) garabato geométrico, que tiene el mínimo número de puntos de intersección con respecto a todos los garabatos en su clase de equivalencia. Este garabato minimal se puede obtener de \mathbf{c} aplicando solamente movimientos de tipo $[R1]^-$, $[R2]^-$; es decir, movimientos que eliminen puntos de intersección.*

La idea de la demostración del Teorema 2.2 es la siguiente.

Dado un garabato \mathbf{c} , vamos a denotar por $|\mathbf{c}|$ a el número de puntos de intersección en \mathbf{c} ; además, vamos a suponer que dos garabatos isotópicos son el mismo. Tomemos dos garabatos equivalentes \mathbf{c} y $\tilde{\mathbf{c}}$. Debe existir una sucesión de garabatos $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ tales que para todo $i = 0, \dots, n-1$ tenemos que $\mathbf{m}_i : \mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{c}_{i+1}$ es un movimiento plano de Reidemeister ya sea $[\mathbf{R1}]^\pm$ o $[\mathbf{R2}]^\pm$, y además, se tiene que $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ y $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_n$. De esta sucesión se quiere derivar una segunda sucesión de garabatos $\tilde{\mathbf{c}}_0, \tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_m$ tales que $\tilde{\mathbf{c}}_i, \tilde{\mathbf{c}}_{i+1}$ se diferencian por un movimiento plano de Reidemeister, $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}_0, \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{c}}_m$ y para algún \mathbf{k} , tal que $0 \leq \mathbf{k} \leq m$, se tiene que

$$|\tilde{\mathbf{c}}_0| > |\tilde{\mathbf{c}}_1| > \dots > |\tilde{\mathbf{c}}_k| < |\tilde{\mathbf{c}}_{k+1}| < \dots < |\tilde{\mathbf{c}}_m| \quad (2.7)$$

es decir un movimiento que aumenta el número de puntos de intersección no precede a un movimiento que elimina puntos de intersección.

Una vez demostrada la existencia de una sucesión con la propiedad (2.7), el Teorema 2.2 queda demostrado ya que:

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

- si \mathbf{c} es un garabato cualquiera y $\tilde{\mathbf{c}}$ es una garabato minimal, (2.7) nos dice que la nueva sucesión $\{\tilde{\mathbf{c}}_i\}_{i=1}^m$, que lleva \mathbf{c} a $\tilde{\mathbf{c}}$, es una sucesión en la que solo se usan movimientos planos de Reidemeister que eliminan puntos de intersección;
- si \mathbf{c} , $\tilde{\mathbf{c}}$ son garabatos minimales, (2.7) nos dice que $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$, ya que de lo contrario se tiene una contradicción con respecto a la minimalidad de estos garabatos.

Para demostrar la existencia de la sucesión $\tilde{\mathbf{c}}_0, \tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_m$ inductivamente se van cambiando, ó eliminando, de la sucesión original parejas de movimientos sucesivos en las cuales el primer movimiento aumenta el número de puntos de intersección y el segundo lo disminuye. Se consideran cinco casos básicos:

- Si el movimiento $\mathbf{m}_i : \mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{c}_{i+1}$ crea puntos de intersección, $\mathbf{m}_{i+1} : \mathbf{c}_{i+1} \rightarrow \mathbf{c}_{i+2}$ elimina puntos de intersección y los puntos de intersección que se crean son diferentes a los puntos que se eliminan, entonces se intercambia el orden de los movimientos en la sucesión original.
- Si el movimiento \mathbf{m}_i crea un punto de intersección y \mathbf{m}_{i+1} elimina el punto de intersección que se creó con \mathbf{m}_i como en la Figura 2.11, entonces se eliminan estos dos movimientos de la sucesión original.



Figura 2.11.

- Si el movimiento \mathbf{m}_i crea un punto de intersección y \mathbf{m}_{i+1} elimina dos puntos de intersección incluyendo al que se creó con \mathbf{m}_i , entonces se tiene una situación como en la Figura 2.12 y estos dos movimientos se reemplazan por un único movimiento que elimine un punto de intersección (Figura 2.13).

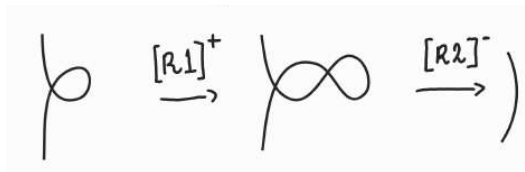


Figura 2.12.

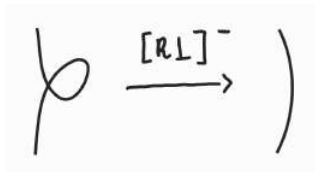


Figura 2.13.

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

- Si el movimiento \mathbf{m}_i crea dos puntos de intersección y \mathbf{m}_{i+1} elimina uno de estos puntos, entonces se tiene una situación como en la Figura 2.14 y estos dos movimientos se reemplazan por un único movimiento que crea un punto de intersección (Figura 2.15)



Figura 2.14.

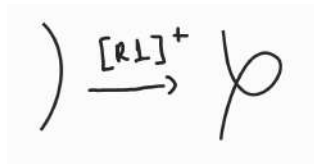


Figura 2.15.

- Si el movimiento \mathbf{m}_i crea dos puntos de intersección y \mathbf{m}_{i+1} elimina dos puntos de intersección de los cuales al menos uno se creó con \mathbf{m}_i (ver Figura 2.16), entonces en las dos posibles situaciones la curva \mathbf{c}_{i+2} es isotópica a la curva \mathbf{c}_i y en este caso se eliminan estos dos movimientos de la sucesión original.

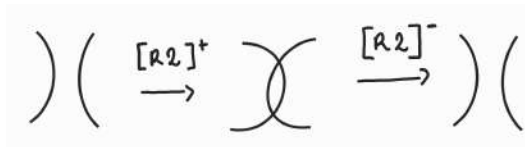


Figura 2.16.: Etiquetado

Ejemplo 2.2. En la siguiente Figura vemos que la curva inicial de la sucesión es equivalente al garabato trivial (el garabato de una sola componente sin ningún punto de intersección), la sucesión solo tiene movimientos que quitan puntos de intersección y en este caso el garabato trivial debe ser la única curva minimal.

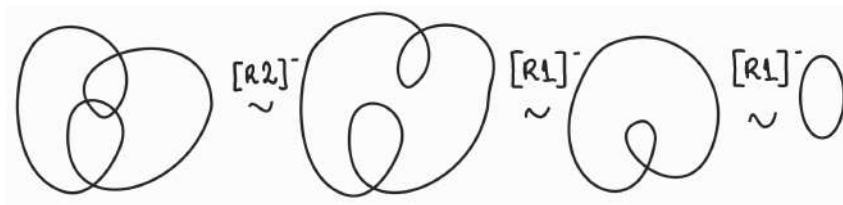


Figura 2.17.

Un grupo para garabatos orientados

Finalmente, vamos a considerar una invariante para garabatos orientados (ver Figura 2.18); es decir, garabatos con una orientación escogida en cada una de sus componentes. Los garabatos orientados, igual que los garabatos, se consideran módulo isotopías de la esfera y las versiones planas de los movimientos de Reidemeister.

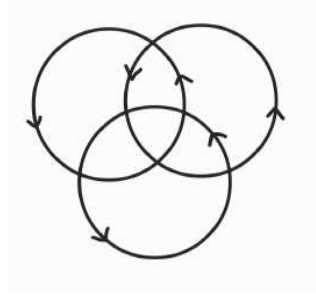


Figura 2.18.: Garabato Orientado con 3 componentes

Para definir el *grupo del garabato orientado*, se va a usar la misma idea con la que se definió el grupo de un garabato, con una modificación.

Para un garabato orientado conexo c , primero se escoge un conjunto de diferentes etiquetas para los puntos de intersección del garabato. Después, para cada punto de intersección de c , si el punto está etiquetado con x , etiquetamos las esquinas adyacentes al punto como en la Figura 2.19:

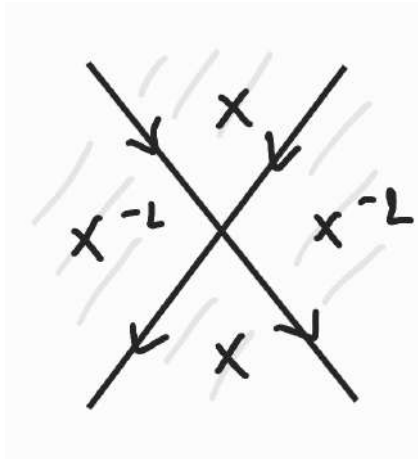


Figura 2.19.

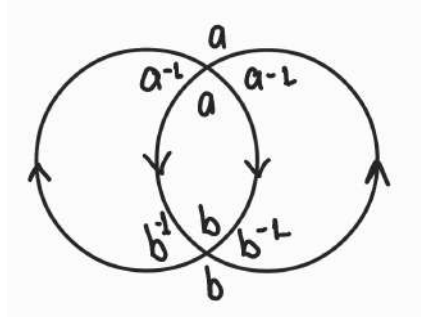
Definición 2.6 (El grupo del garabato orientado). Dado un garabato orientado conexo c con $k > 0$ puntos de intersección y que define r regiones en la esfera, el *grupo del garabato orientado* G_c^{or} de c está definido por los siguientes generadores y las siguientes relaciones:

- **Generadores:** las etiquetas de los puntos de intersección de c ;
- **Relaciones:** por cada región R_i definida por el garabato orientado, la relación r_i está dada por la palabra que se lee en dirección contraria a las

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

manecillas del reloj usando las etiquetas en las esquinas de \mathbf{R}_i , como en la Figura 2.19.

Ejemplo 2.3. Para el garabato orientado \mathbf{c} dado en la siguiente Figura:



el grupo \mathbf{G}_c^{or} está definido por:

- Los generadores \mathbf{a}, \mathbf{b} correspondientes a los puntos de intersección del garabato.
- las relaciones $\mathbf{ab}, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}$ dadas por las cuatro regiones definidas por el garabato en la esfera.

ya que $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1} = 1$ es una consecuencia de la relación $\mathbf{ab} = 1$ y además de esta misma relación se puede deducir que $\mathbf{a} = \mathbf{b}^{-1}$, se tiene que $\mathbf{G}_c^{or} \cong \mathbb{Z}$.

Teorema 2.3. *El grupo del garabato orientado es una invariante para los garabatos orientados.*

Demostración del Teorema 2.3:

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 2.2. Ya que las isotopias de la esfera preservan la orientación y combinatoria de un garabato orientado conexo, es suficiente ver que el grupo se preserva bajo los movimientos $[\mathbf{R1}]^\pm$ y $[\mathbf{R2}]^\pm$.

En el caso que dos garabatos orientados conexos se diferencien por el primer movimiento de Reidemeister $[\mathbf{R1}]^\pm$, en el garabato orientado que tiene el lazo que se crea (o se elimina) con el movimiento, localmente se tendría una situación como la de la Figura 2.20, donde \mathbf{x} es la etiqueta correspondiente al punto de intersección que se crea (o se elimina). De la región cuya frontera es este lazo, podemos deducir que $\mathbf{x} = 1$. Esto nos dice que los grupos de los dos garabatos orientados deben ser isomorfos. (Notesé que para la orientación contraria se tiene la misma situación).

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

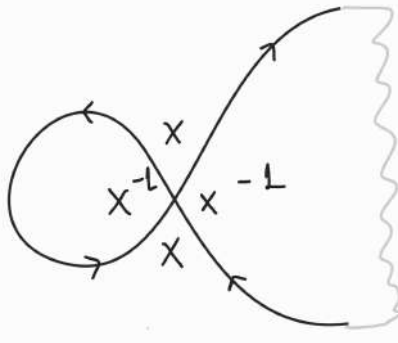


Figura 2.20.

Si dos garabatos conexos orientados \mathbf{c} y $\hat{\mathbf{c}}$ se diferencian por un movimiento de tipo $[\mathbf{R2}]^\pm$, vamos a suponer que estos garabatos están ubicados en el plano de tal forma que los arcos en los cuales aplicamos el movimiento están hacia la izquierda y, el resto del garabato, al que llamamos $\tilde{\mathbf{c}}$, esta hacia la derecha del plano. Primero vamos a suponer que $\tilde{\mathbf{c}}$ es conexo. Se tiene dos posibles casos:

- En el primer caso, los dos arcos en los que se aplica el movimiento van en la misma dirección, como en la siguiente figura:

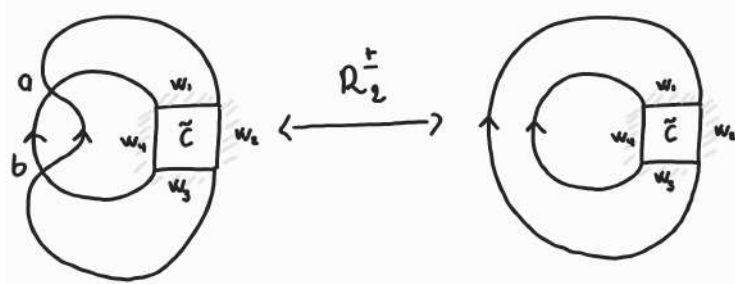


Figura 2.21.: Misma orientación

- En el segundo caso, los dos arcos en los que se aplica el movimiento van en direcciones opuestas, como en la siguiente figura:

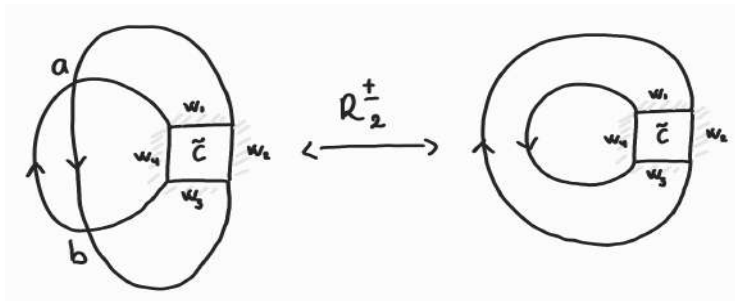


Figura 2.22.: Orientación opuesta

Siguiendo las Figuras 2.21 y 2.22 vamos a suponer que en ambos casos \mathbf{c} es el garabato de la derecha; es decir, el garabato que se tiene antes de crear

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

(o después de eliminar) los puntos de intersección. Supongamos además que \mathcal{A} es el conjunto de etiquetas que le damos a los puntos de intersección de \mathbf{c} y que $\mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}}$ son las relaciones en \mathcal{A} definidas por las regiones acotadas en $\tilde{\mathbf{c}}$. Con la notación de las Figuras 2.21 y 2.22 tenemos que $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4$ son las relaciones dadas por las regiones que son adyacentes a los arcos en los cuales aplicamos el movimiento, en los dos casos el grupo $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}}^{or}$ del garabato orientado $\tilde{\mathbf{c}}$ esta dado por la presentación:

$$\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}}^{or} = \langle \mathcal{A} | \{ \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_3 \} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.8)$$

Por otro lado, si $\hat{\mathbf{c}}$ es el garabato de la izquierda de las Figuras 2.21 y 2.22, es decir el diagrama conexo que se tiene después de crear (o antes de eliminar) los puntos de intersección, a los cuales etiquetamos con \mathbf{a}, \mathbf{b} , el etiquetado de las esquinas adyacentes a estos puntos de intersección se ven como en la Figura 2.23a para el primer caso y como en la Figura 2.23b para el segundo caso.

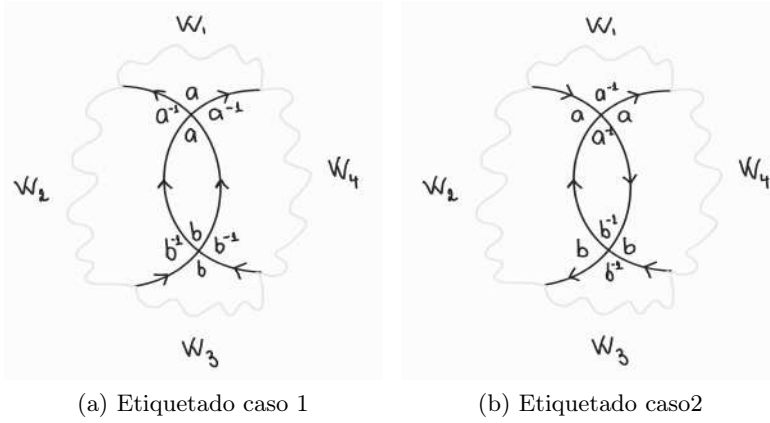


Figura 2.23.

Teniendo en cuenta lo anterior:

- [1.] Para el primer caso el grupo tiene la presentación:

$$\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}}^{or} = \langle \mathcal{A} \cup \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} | \{ \mathbf{w}_4\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}, \mathbf{w}_2\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1}, \mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}, \mathbf{ab} \} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.9)$$

- [2.] Para el segundo caso el grupo tiene la presentación:

$$\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}}^{or} = \langle \mathcal{A} \cup \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} | \{ \mathbf{w}_4\mathbf{ab}, \mathbf{w}_2\mathbf{ba}, \mathbf{w}_1\mathbf{a}^{-1}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}^{-1}, \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1} \} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.10)$$

En el caso [1.] ya que $\mathbf{ab} = 1$ en $\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}}^{or}$, se tiene que este grupo es isomorfo al grupo con la presentación

$$\langle \mathcal{A} \cup \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} | \{ \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}, \mathbf{ab} \} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.11)$$

además, ya que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{a}^{-1}$ y que $\mathbf{w}_3 = \mathbf{b}^{-1}$, la relación $\mathbf{ab} = 1$ se puede reemplazar por $\mathbf{w}_1^{-1}\mathbf{w}_3^{-1} = 1$, la cual es a su vez equivalente a $\mathbf{w}_3\mathbf{w}_1 = 1$ o $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_3 = 1$; así, la presentación (2.11) es equivalente a la presentación

$$\langle \mathcal{A} \cup \{ \mathbf{a}, \mathbf{b} \} | \{ \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_3 \} \cup \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{c}}} \rangle . \quad (2.12)$$

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

Por otro lado, ya que que ni las relaciones en $\mathcal{R}_{\tilde{c}}$, ni las palabras $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_1\mathbf{w}_3$ contienen a los generadores \mathbf{a}, \mathbf{b} , se pueden eliminar las relaciones $\mathbf{w}_1\mathbf{a}, \mathbf{w}_3\mathbf{b}$ de la presentación (2.12). Esto nos dice que la presentación (2.12) es equivalente a la presentación (2.8), es decir $\mathbf{G}_{\tilde{c}}^{or} \cong \mathbf{G}_{\tilde{c}}^{or}$. Un análisis similar nos lleva a la misma conclusión en el caso [2].

En el caso que \tilde{c} consta de dos componentes conexas, tenemos una situación parecida a la de la Figura 2.10 de la demostración del Teorema 2.1, pero con los arcos orientados. Un análisis parecido al del caso en que \tilde{c} es conexo, nos dice que los grupos de los garabatos orientados que estamos considerando son isomorfos. \square

Es claro que si un garabato tiene una sola componente, el grupo del garabato orientado es el mismo al usar las dos posibles orientaciones de este. Sin embargo, el Ejemplo 2.4 nos muestra que esta invariante es diferente al grupo dado por Khovanov con lo cual de hecho se tiene una nueva invariante algebraica para garabatos orientados.

Ejemplo 2.4. Considere el garabato orientado conexo \mathbf{c} con el etiquetado en los vértices dado en la siguiente Figura:

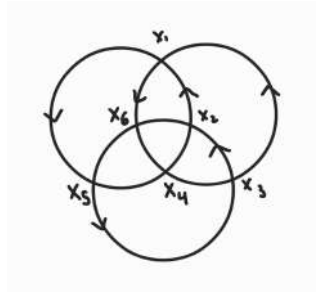


Figura 2.24.

Con la orientación en las componentes y el etiquetado dado, el grupo $\mathbf{G}_{\mathbf{c}}^{or}$ esta definido por:

- Los generadores: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$.
- Las relaciones:

$$\begin{array}{ll}
 [r1 :] & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3 = 1 \\
 [r3 :] & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_4^{-1}\mathbf{x}_5 = 1 \\
 [r5 :] & \mathbf{x}_5\mathbf{x}_6^{-1}\mathbf{x}_1 = 1 \\
 [r7 :] & \mathbf{x}_6^{-1}\mathbf{x}_4^{-1}\mathbf{x}_2^{-1} = 1 \\
 [r2 :] & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_4\mathbf{x}_3^{-1} = 1 \\
 [r4 :] & \mathbf{x}_4\mathbf{x}_6\mathbf{x}_5^{-1} = 1 \\
 [r6 :] & \mathbf{x}_6\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^{-1} = 1 \\
 [r8 :] & \mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3^{-1}\mathbf{x}_5^{-1} = 1
 \end{array}$$

Las relaciones que definen el grupo son equivalentes a las relaciones

$$\begin{array}{ll}
 [r1 :] & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \\
 [r3 :] & \mathbf{x}_5\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_4 \\
 [r5 :] & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_6 \\
 [r7 :] & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_4\mathbf{x}_6 = 1 \\
 [r2 :] & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3 \\
 [r4 :] & \mathbf{x}_4\mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_5 \\
 [r6 :] & \mathbf{x}_6\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \\
 [r8 :] & \mathbf{x}_5\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = 1
 \end{array}$$

2. El Grupo de Twins, Garabatos y Algunas Invariantes

De las relaciones [r1 :] y [r2 :] se puede deducir que

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1\mathbf{x}_4 = 1,$$

de las relaciones [r3 :] y [r4 :] se puede deducir que

$$\mathbf{x}_5\mathbf{x}_3\mathbf{x}_6 = \mathbf{x}_5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_3\mathbf{x}_6 = 1$$

y de las relaciones [r5 :] y [r6 :] se puede deducir que

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_5\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_5\mathbf{x}_2 = 1.$$

Con lo cual los generadores del grupo se pueden reducir a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y las relaciones que definen al grupo se reducen a las relaciones

$$\begin{array}{ll} [\tilde{r}1 :] & \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 & [\tilde{r}2 :] & \mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1^{-1} \\ [\tilde{r}3 :] & \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2^{-1} = \mathbf{x}_3^{-1} & [\tilde{r}4 :] & \mathbf{x}_2^{-1}\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = 1 \\ [\tilde{r}5 :] & \mathbf{x}_2\mathbf{x}_1^{-1}\mathbf{x}_3^{-1} = 1 & & \end{array}$$

las cuales, todas, son equivalentes a la relación $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, así, se tiene que:

$$\mathbf{G}_c^{or} = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \mid \mathbf{x}_3\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \rangle \cong \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \mid \emptyset \rangle .$$

De [7] (pagina 2307, Ejemplo 2) el grupo de este *garabato* es

$$\mathbf{G}_c = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \mid \mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^2, \mathbf{a}\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^2\mathbf{a}, \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a} \rangle$$

cuyo centro esta generado por $\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^{-2}\mathbf{a}^{-2}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{b}$ y es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$; ademas, es claro que este es diferente al grupo trivial, el cual es el centro del grupo \mathbf{G}_c^{or} . Así, podemos concluir que $\mathbf{G}_c \not\cong \mathbf{G}_c^{or}$.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

En este Capítulo se introducen los *cactus doodles*. Son colecciones de curvas cerradas inmersas en la esfera en las cuales permitimos puntos de intersección con más de dos ramas, tales que las rectas tangentes a cada rama en un punto de intersección son todas diferentes. Los *cactus doodles* se consideran módulo isotopías de la esfera y transformaciones locales que imitan las relaciones en los grupos de cactus \mathbf{J}_n (ver [5]). El principal resultado de este capítulo es que todo *cactus doodle* se puede ver como la cerradura de un elemento de algún grupo \mathbf{J}_n . Para demostrarlo, de la misma manera como lo hicimos para los garabatos, primero vamos a introducir los grupos de cactus y su representación como trenzas. Al final de este capítulo brevemente mencionamos algunas invariantes que se podrían usar para identificar los *cactus doodles* y estudiar algunas de sus propiedades.

3.1. El grupo de cactus y trenzas de cactus

Definición 3.1. Para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ el grupo de cactus \mathbf{J}_n está definido por los siguientes generadores y relaciones (ver [5]):

- **Generadores**

$$\mathbf{S}_{p,q} \quad \text{donde} \quad 1 \leq p < q \leq n$$

- **Relaciones**

1. $\mathbf{S}_{p,q}^2 = 1$.
2. $\mathbf{S}_{p,q}\mathbf{S}_{m,r} = \mathbf{S}_{m,r}\mathbf{S}_{p,q}$ si $[p, q] \cap [m, r] = \emptyset$.
3. $\mathbf{S}_{p,q}\mathbf{S}_{m,r} = \mathbf{S}_{p+q-r, p+q-m}\mathbf{S}_{p,q}$ si $[m, r] \subset [p, q]$.

Los generadores del grupo de cactus pueden ser representados por medio de trenzas planas como las de la figura 3.1.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

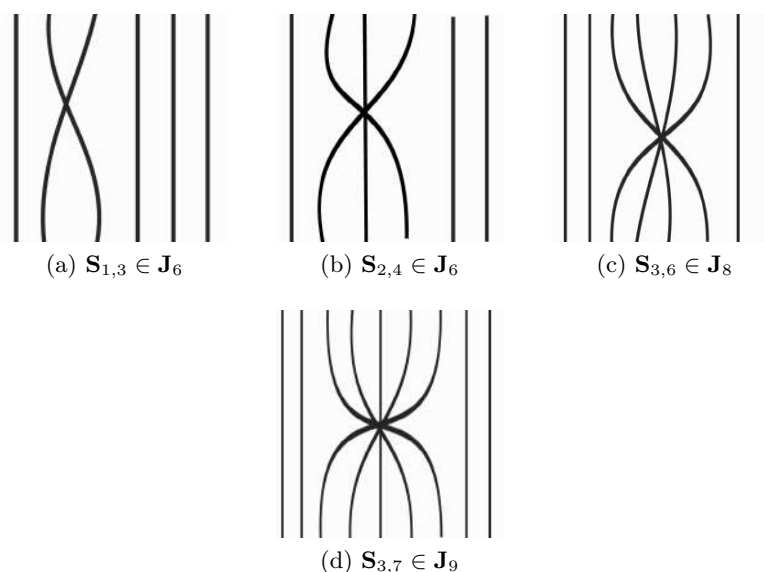


Figura 3.1.

En general, el generador $\mathbf{S}_{p,q} \in \mathbf{J}_n$ se representa con una trenza plana en $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{S}^2$, la cual tiene n hilos monótonos descendientes que tienen sus puntos iniciales en $(i, 1)$, donde $i = 1, \dots, n$; y, sus puntos finales están en $(i, 0)$; de tal suerte que para $p \leq i \leq q$ tenemos que el punto $(i, 1)$ se conecta con $(q - p - i, 0)$ y, para los demás valores de i el punto $(i, 1)$ se conecta con $(i, 0)$ por un hilo vertical, además la trenza solo tiene un punto de intersección. Una palabra en los generadores $\mathbf{S}_{p,q}$ se representa por una concatenación de las trenzas correspondientes, como en la Figura 3.2. A este tipo de trenzas planas las vamos a llamar *trenzas de cactus*.

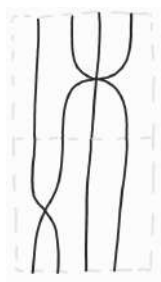


Figura 3.2.: $\mathbf{S}_{2,4}\mathbf{S}_{1,2} \in \mathbf{J}_6$

Análogo a como lo hicimos para los Twins, vamos a decir que dos trenzas de cactus son *equivalentes* si representan al mismo elemento de un grupo de cactus \mathbf{J}_n . En términos de trenzas planas las relaciones en los grupos de cactus se ven como en la Figura 3.3 ó en el caso de la tercera relación como en el Ejemplo 3.1.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

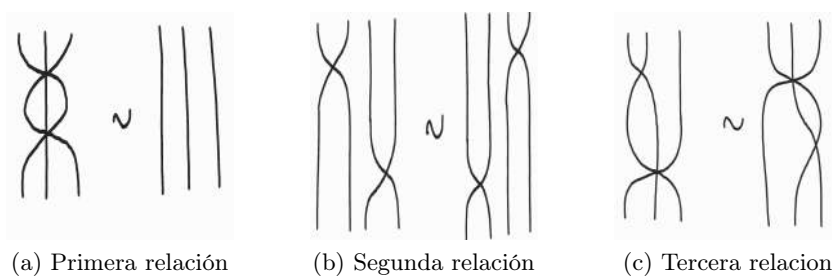


Figura 3.3.: Relaciones en tres hilos

Ejemplo 3.1. En términos de los generadores, para el grupo \mathbf{J}_4 el tercer tipo de relaciones y sus respectivas representaciones como trenza están dadas a continuación:

- $\mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{1,2} = \mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{2,3}$ (ver Figura 3.1a), $\mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{2,3} = \mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{1,2}$.
- $\mathbf{S}_{2,4}\mathbf{S}_{2,3} = \mathbf{S}_{3,4}\mathbf{S}_{2,4}$, $\mathbf{S}_{2,4}\mathbf{S}_{3,4} = \mathbf{S}_{2,3}\mathbf{S}_{2,4}$.
- $\mathbf{S}_{1,4}\mathbf{S}_{3,4} = \mathbf{S}_{1,2}\mathbf{S}_{1,4}$, $\mathbf{S}_{1,4}\mathbf{S}_{1,2} = \mathbf{S}_{3,4}\mathbf{S}_{1,4}$ (ver Figura 3.4b).
- $\mathbf{S}_{1,4}\mathbf{S}_{2,3} = \mathbf{S}_{2,3}\mathbf{S}_{1,4}$ (ver Figura 3.4c).
- $\mathbf{S}_{1,4}\mathbf{S}_{2,4} = \mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{1,4}$ (ver Figura 3.4d), $\mathbf{S}_{1,4}\mathbf{S}_{1,3} = \mathbf{S}_{2,4}\mathbf{S}_{1,4}$.

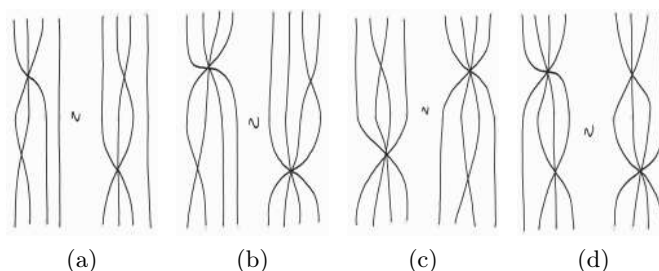


Figura 3.4.

La primera relación crea ó elimina dos puntos de intersección en la trenza (cada uno correspondiente un generador $\mathbf{S}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}$) conectados por $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ hilos, la segunda relación viene de una isotopía de la esfera, y la tercera relación actúa de la siguiente manera: si un punto de intersección de la trenza \mathbf{p}_1 se conecta a otro punto de intersección \mathbf{p}_2 por medio de $\mathbf{r} - \mathbf{m}$ hilos, hay mas hilos que pasan por \mathbf{p}_1 y no hay otros hilos que pasen por \mathbf{p}_2 , entonces se mueven los hilos restantes que solo pasan por \mathbf{p}_1 de este punto de intersección al punto de intersección \mathbf{p}_2 .

Observación 3.1. El grupo de twin \mathbf{TW}_n es el subgrupo del grupo de cactus \mathbf{J}_n generado por el subconjunto de los generadores $\{\mathbf{S}_{i,i+1} \mid i = 1, \dots, n-1\}$ (ver [15]).

3.2. Cactus Doodles

Definición 3.2. Un *cactus doodle* es un colección finita de curvas cerradas inmersas en la esfera \mathbb{S}^2 con un número finito de puntos de intersección (ya sean autointersecciones de una de las curvas o, intersecciones entre una o mas curvas en la colección), tales que:

1. todo punto de intersección tiene un número finito de ramas;
2. las rectas tangentes, a cada rama de la unión de las curvas en un punto de intersección, son todas diferentes.

Un *arco* de un *cactus doodle* (o un garabato) es un segmento de curva que conecta dos puntos de intersección (incluyendo los dos puntos de intersección); es decir, un arco usual, al considerar al *cactus doodle* como un grafo planar en la esfera. También, vamos a decir que dos arcos son *paralelos*, si estos son paralelos al considerar al *cactus doodle* como un grafo planar.

Definición 3.3. Un *movimiento fundamental para cactus doodles* es una de las siguiente transformaciones:

- isotopías diferenciables de la esfera;
- movimientos de tipo Φ^\pm : son movimientos que imitan la primera relación; es decir, movimientos que crean (Φ^+) o eliminan (Φ^-) dos puntos de intersección con $m > 1$ ramas y conectados por m arcos paralelos;
- movimientos de tipo Ψ : son movimientos que imitan la tercera relación; es decir, movimientos que mueven $n > 1$ ramas de un puntos de intersección \mathbf{B} con $m + n$ ramas a un punto de intersección \mathbf{A} , el cual tiene m ramas y esta conectado a \mathbf{B} por medio de m arcos paralelos.
- la versión plana del primer movimiento de Reidemeister $[\mathbf{R1}]^\pm$.

Dos *cactus doodles* se consideran *equivalentes* si uno se puede transformar en otro por medio de una sucesión finita de movimientos fundamentales.

Podemos notar que un movimiento de tipo Φ^\pm con $m = 2$ es la versión plana del segundo movimiento de Reidemeister $[\mathbf{R2}]^\pm$. Por otro lado, tal como lo hicimos con los garabatos, a veces denotaremos un movimiento fundamental \mathbf{m} entre dos *cactus doodles* $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ como $\mathbf{m} : \mathbf{c} \rightarrow \tilde{\mathbf{c}}$. En lo que sigue, usaremos el término “*cactus doodle*” tanto para los *cactus doodles* mismos como para sus clases de equivalencia. Además, cuando sea necesario subrayar que hablamos de un *cactus doodle* y no de su clase de equivalencia, emplearemos el término *cactus doodle geométrico*.

De la misma manera como lo hicimos para los garabatos podemos hablar de las componentes de un *cactus doodle* y, también, podemos hablar de *cactus doodles orientados*.

Ejemplo 3.2.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

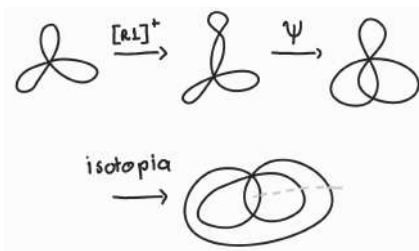


Figura 3.5.: Cactus Doodle de Una Componente

3.3. Cerraduras de las Trenzas de Cactus

Si tomamos la cerradura de Alexander de una trenza de cactus, como se describe en la Definición 2.4, es claro que obtenemos un *cactus doodle*. Teniendo en cuenta esto, podemos hablar de la cerradura de un elemento del grupo de cactus \mathbf{J}_n , para cualquier $n > 0$, o una trenza de cactus.

En esta sección, siguiendo un argumento similar al dado por Khovanov en [7] veremos que todo *cactus doodle* se puede ver como la cerradura de una trenza de cactus. Para esto, primero vamos a demostrar el Teorema 2.1, es decir, el caso en el que sólo se tienen puntos de intersección dobles. Después, discutiremos las modificaciones necesarias para el caso general.

3.3.1. Garabatos como cerraduras de elementos en el grupo de *twins*

Comenzaremos demostrando el Teorema 2.1, es decir, el caso de los garabatos y los *twins*.

La idea de la demostración es ver que cualquier garabato es isotópico a un garabato tal que sus componentes se pueden orientar de la siguiente forma: existe un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ de tal que todos los arcos del garabato están dirigidos en dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto a \mathbf{a} , como en la Figura 3.6. (Aquí la esfera se piensa como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$).

Esto quiere decir que para todo rayo que comienza en \mathbf{a} , todas las intersecciones del rayo con el garabato son transversales y el número de puntos de intersección del rayo con el garabato (esto contando multiplicidades) siempre es el mismo. Si este es el caso, tenemos que n es el número de puntos de intersección de un rayo que parte de \mathbf{a} con el garabato y, cortamos el garabato con un rayo que parta de \mathbf{a} y que no toque sus puntos de intersección, se obtiene un *twins* en el grupo \mathbf{TW}_n .

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

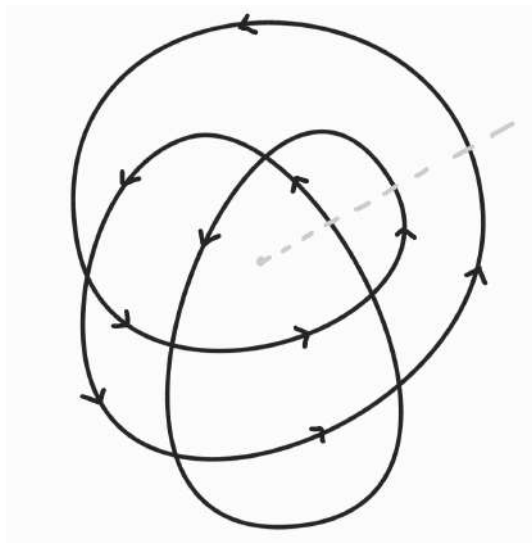


Figura 3.6.

Sea c un garabato. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que c sólo tiene una componente y está proyectado en el plano \mathbb{R}^2 de tal forma que el origen, $0 \in \mathbb{R}^2$, se encuentra en una de las regiones acotadas del complemento de c en el plano. Además, supongamos que c está parametrizado de tal forma que existe algún punto p en c donde c está dirigido en dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto al origen y, que solamente hay un número finito de puntos donde c es tangente a algún rayo que empieza en $0 \in \mathbb{R}^2$. Usando pequeñas perturbaciones podemos suponer que ninguno de estos puntos de tangencia es un punto de intersección de c . Los puntos de tangencia dividen c en un número finito de segmentos de curva donde cada punto tiene la misma dirección angular con respecto al 0 .

Khovanov en [7] describe un algoritmo para cambiar la dirección de los segmentos que están en dirección de las manecillas del reloj con respecto al origen, que está dado de la siguiente manera:

- a. Tomamos una aproximación lineal a trozos del garabato c tal que:
 - (1a) El origen no es un punto en la aproximación.
 - (2a) Los puntos de tangencia, donde cambia la dirección de c con respecto al origen, coinciden con algunos de los vértices de la aproximación.
 - (3a) Los puntos de intersección no coinciden con los vértices de la aproximación.
 - (4a) Ninguno de los vértices de la aproximación es colineal con el origen $0 \in \mathbb{R}^2$ y alguno de los puntos de intersección; ni el origen es colineal con dos puntos de intersección.

La condición (3a) implica que las intersecciones en la aproximación lineal siguen siendo transversales. De hecho esta es la propiedad que se quiere mantener en las curvas cerradas lineales a trozos que se obtienen durante todo el algoritmo; ya que, definiendo los movimientos $[R2]^\pm, [R1]^\pm$ en

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

este tipo de curvas se obtiene una teoría de curvas equivalente a los garabatos de la Definición 2.2. Además, en esta demostración con vértices y arcos nos referimos a los vértices y arcos de la aproximación lineal al considerarla como un polígono.

- b. En orden de aparición después de \mathbf{p} sean c_1, \dots, c_m los arcos de la aproximación lineal que están en dirección de las manecillas del reloj con respecto al origen; siguiendo este orden, para cada c_i se aplica el siguiente procedimiento:

Vamos a considerar los puntos de intersección de la aproximación lineal que se encuentran en el interior del cono \mathbf{C} generado por el origen y el arco c_i (ver la Figura 3.7). Si k_1 es el número de puntos de intersección en el interior del triángulo \mathbf{T} con base c_i y un vértice en el origen; k_2 es el número de puntos de intersección que se encuentran sobre c_i ; k_3 es el número de puntos de intersección que se encuentran en el interior del cono \mathbf{C} pero no están en el interior del triángulo \mathbf{T} ni sobre el arco c_i ; vamos a tomar un número natural \mathbf{k} mayor o igual que el máximo de k_1, k_2 y k_3 , y una subdivisión de c_i en $2\mathbf{k}$ segmentos que tomamos de forma ordenada

$$\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_{2\mathbf{k}-1}.$$

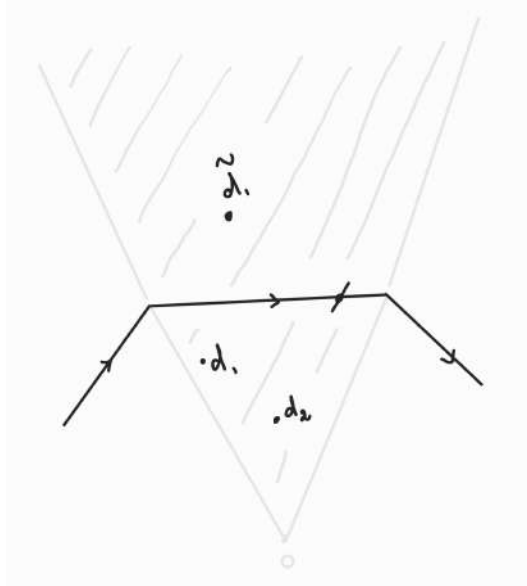


Figura 3.7.

Para todo $j = 0, \dots, 2\mathbf{k} - 1$, vamos a llamar \mathbf{T}_j al triángulo con base el segmento \mathbf{I}_j y con un vértice en el origen; y, \mathbf{C}_j al cono generado por el segmento \mathbf{I}_j y el origen. Podemos suponer que:

- (1b) El interior de cada cono \mathbf{C}_j tiene a lo más un punto de intersección.
(2b) Si un punto de intersección está sobre el arco c_i , entonces, este es uno de los puntos finales de algún intervalo \mathbf{I}_j .

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

(3b) Si un punto de intersección está en el interior del triángulo \mathbf{T} , entonces este está en el interior de un triángulo \mathbf{T}_j donde j es par.

(4b) Si un punto de intersección no está en el arco c_i , y tampoco está en el interior del triángulo \mathbf{T} , entonces este está en el interior de un cono \mathbf{C}_j donde j es impar.

(ver Figura 3.8). Si estas condiciones no se cumplen, se puede corregir tomando una subdivisión lineal más fina, es decir un \mathbf{k} más grande;

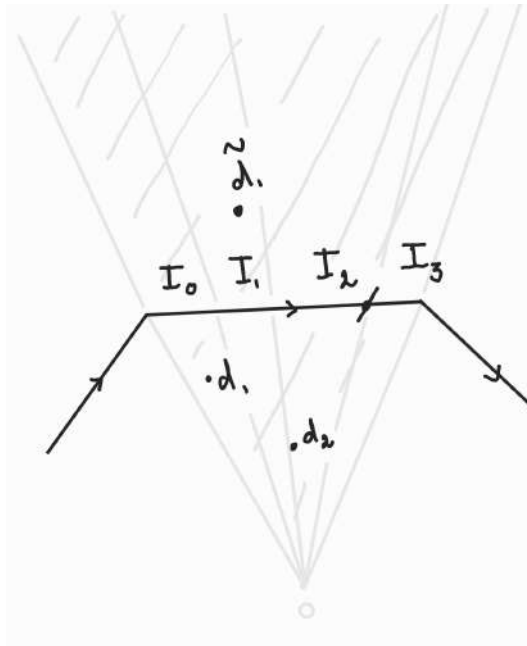


Figura 3.8.: Subdivisión.

Podemos suponer que $\mathbf{K} \geq 1$. Aplicamos los siguientes movimientos a los segmentos $\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_{2\mathbf{k}-1}$:

- i. Si i es par, se envía el segmento \mathbf{I}_j a la región no acotada, definida por la curva lineal en el plano, pasando por infinito; como en la Figura 3.9a.
- ii. Si i es impar, se envía el segmento \mathbf{I}_j hacia el origen $0 \in \mathbb{R}^2$; como en la Figura 3.9b.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

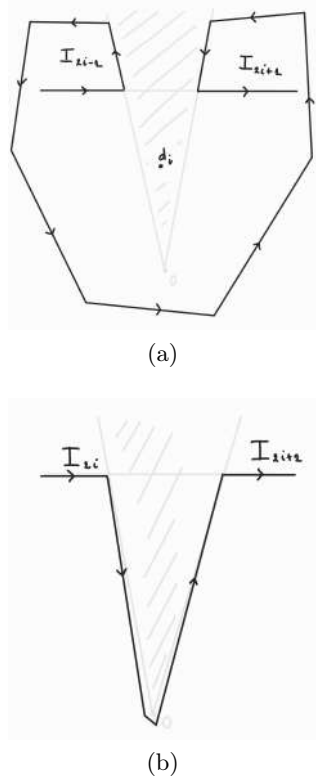


Figura 3.9.

- iii. Si es necesario, tras aplicar los movimientos se aplican pequeñas perturbaciones para que la curva cumpla con las nuevamente con las condiciones (1a)-(4a).
- c. Suavizamos la curva lineal a trozos que obtenemos y, así tenemos un garabato con la propiedad que queremos y que es equivalente al garabato original.

La parte *b.* del algoritmo cambia la dirección de los segmentos \mathbf{I}_j con respecto al origen y, además, crea nuevos puntos de intersección y arcos que está dirigidos en dirección contraria de las manecillas del reloj con respecto a $0 \in \mathbb{R}^2$. Después de aplicarlo en un arco c_i de la subdivisión, el número de arcos en la dirección de las manecillas del reloj con respecto al origen se reduce en uno, ya que el arco c_i se reemplaza por un número finito de arcos que están en dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto al origen.

□

3.3.2. Cactus doodles como cerraduras de Trenzas de Cactus

Definición 3.4. Dado un cactus doodle orientado \mathbf{c} y un punto de intersección $\mathbf{p} \in \mathbf{c}$, decimos que \mathbf{p} es *coherente* si existe un vector cuyo producto escalar con el vector tangente a cualquier rama de \mathbf{c} en \mathbf{p} es positivo.

La Figura 3.10 muestra ejemplos de puntos de intersección coherentes y no coherentes.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

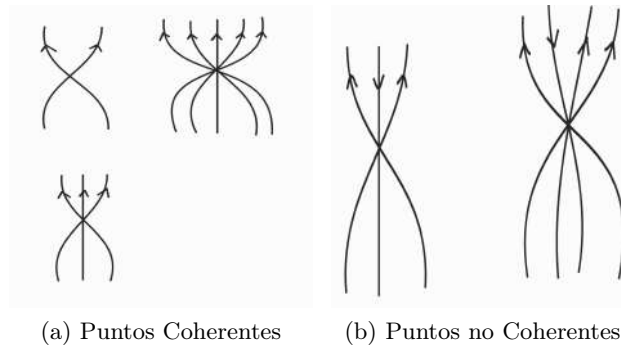


Figura 3.10.

Notemos que todo punto de intersección doble de un *cactus doodle* es coherente.

Lema 3.1. *Todo cactus doodle orientado es equivalente a uno cuyos puntos de intersección son coherentes.*

Demostración. Sea \mathbf{c} un *cactus doodle* orientado. Supongamos que \mathbf{c} tiene un punto de intersección \mathbf{p} que no es coherente. Primero podemos suponer que solo una de las ramas que pasan por el punto \mathbf{p} no permite que este sea coherente. Entonces, usando una deformación en una vecindad del punto \mathbf{p} , podemos hacer que en esta vecindad las ramas que pasan por \mathbf{p} junto con sus orientaciones se vean como en la Figura 3.11. Es decir, una de las ramas está orientada en dirección contraria a las otras y esta no se encuentra en el extremo derecho o izquierdo con respecto a \mathbf{p} .

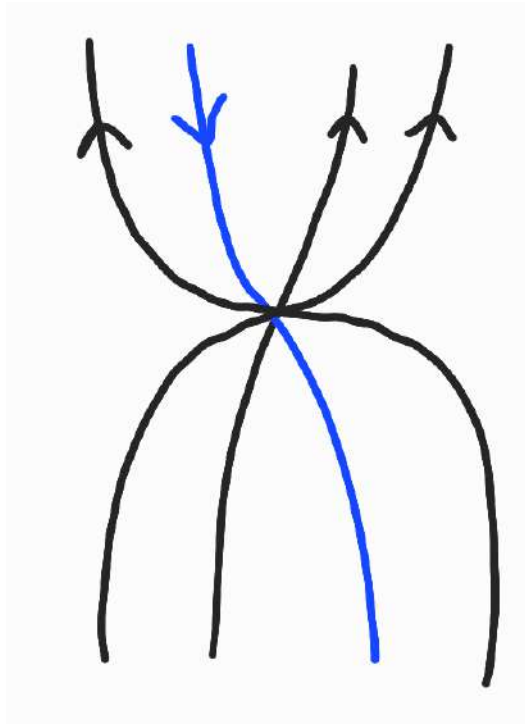


Figura 3.11.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

Si creamos dos puntos de intersección dobles nuevos por medio de un movimiento de tipo Φ^+ , con la rama problemática y una de las ramas que están junto a esta; y después, se usa un movimiento de tipo Ψ que mueva las ramas restantes hacia uno de los puntos de intersección que se crearon con el anterior movimiento, en la vecindad del punto de intersección \mathbf{p} se tiene una situación como la de la Figura 3.12; es decir:

- El punto de intersección original, es decir \mathbf{p} , se convierte en un punto de intersección doble, es decir un punto intersección coherente.
- El punto de intersección hacia el que se movieron las ramas ahora es un punto de intersección con el mismo número de ramas que originalmente tenía el punto de intersección \mathbf{p} y:
 - a. este es coherente si la rama problemática ahora está en uno de los extremos laterales (derecho o izquierdo) con respecto a este punto.
 - b. ó, este no es coherente, pero la rama problemática está más cerca de uno de los extremos laterales (derecho o izquierdo) con respecto a este punto en comparación a lo que estaba con respecto al punto \mathbf{p} .
- El segundo punto que se creó con el movimiento Φ^+ sigue siendo un punto de intersección doble.

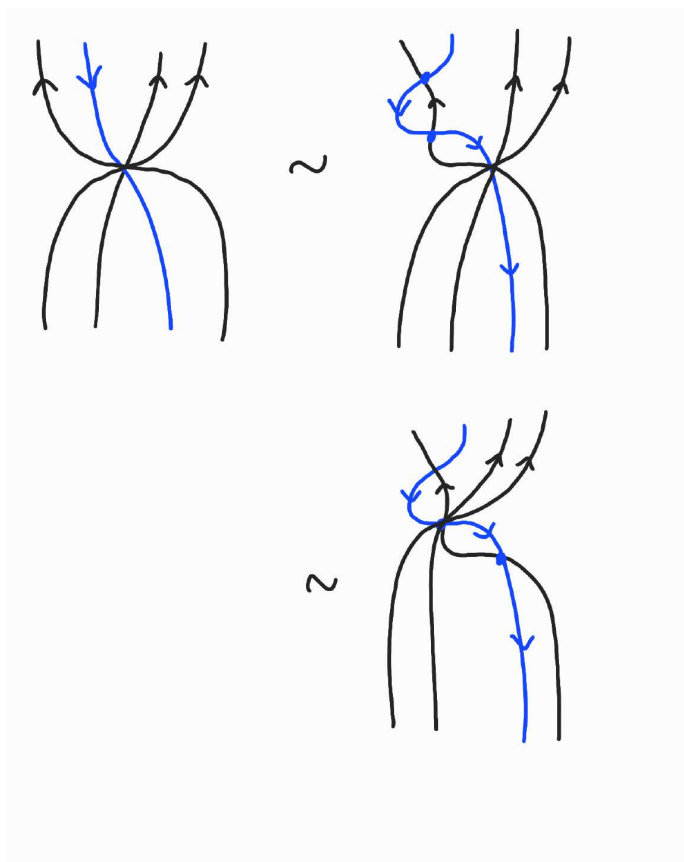


Figura 3.12.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

Si el punto de intersección hacia el que se movieron las ramas no es coherente, se puede aplicar la anterior secuencia de movimientos (crear puntos de intersección dobles y después mover ramas) de forma recursiva para ir moviendo la rama problemática hacia el extremo lateral mas cercano; y así, obtener un nuevo *cactus doodle* en el que se reemplaza al punto de intersección no coherente por un número par de puntos de intersección dobles (uno de ellos el punto de intersección no coherente original \mathbf{p}) y un punto de intersección coherente nuevo con el mismo número de ramas que originalmente tenía el punto de intersección \mathbf{p} .

Podemos usar el anterior procedimiento de forma recursiva para “invertir la dirección” de un número arbitrario de ramas problemáticas que pasan por un punto de intersección \mathbf{p} que no es coherente, al finalizar el punto \mathbf{p} se convierte en un punto de intersección doble, es decir coherente, y se crean otros puntos de intersección coherentes. Si \mathbf{c} tiene más de un punto de intersección que no es coherente, se aplica el anterior procedimiento en cada uno de estos puntos de intersección. \square

Teorema 3.1. *Todo cactus doodle se puede ver como la cerradura de una trenza de cactus..*

Demostración. Sea \mathbf{c} un *cactus doodle*. Podemos tomar una orientación para \mathbf{c} y usando el Lema 3.1 podemos suponer que todos sus puntos de intersección de \mathbf{c} son coherentes. Vamos a decir que un punto de \mathbf{c} es *especial* si este es un punto de intersección o un punto de tangencia de \mathbf{c} con un rayo que empieza en el origen $0 \in \mathbb{R}^2$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que:

- (1) El origen no está en \mathbf{c} .
- (2) \mathbf{c} sólo tiene un numero finito de puntos especiales.
- (3) Existe a lo más un punto especial en cada rayo que emana del origen $0 \in \mathbb{R}^2$.
- (4) Todo vector tangente de un punto de intersección de \mathbf{c} está dirigido en dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto a al origen $0 \in \mathbb{R}^2$.

De (1) a (3) se puede obtener en \mathbf{c} por medio de una pequeña isotopía y para (4) se puede obtener por medio de una isotopía que rote los hilos alrededor del punto como en la Figura 3.13.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

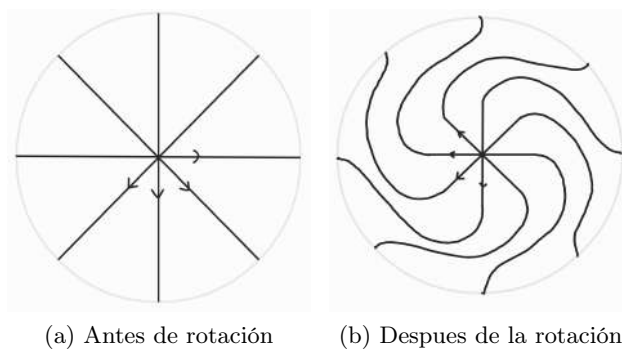


Figura 3.13.

Una vez el *cactus doodle* \mathbf{c} esta en posición, usamos el algoritmo de Khovanov descrito en la demostración del Teorema 2.1 para cambiar la dirección de los segmentos de curva en \mathbf{c} que están en dirección de las manecillas del reloj con respecto a $0 \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$; notamos que al aplicar el algoritmo se crean puntos de intersección dobles usando movimientos $[\mathbf{R}2]^+$, nuevos arcos (arcos en el sentido usual) en el cactus doodle \mathbf{c} y todos los arcos de \mathbf{c} están dirigidos en dirección contraria a las manecillas del reloj con respecto al origen (si no es así, se esto se puede corregir por medio de algunas deformaciones o perturbaciones).

□

3.4. Invariantes

Igual que en el caso de los nudos, podemos esperar que los invariantes de *cactus doodles* podrían sean una herramienta útil para su clasificación.

Lo primero que podemos notar es que ningún movimiento fundamental cambia el número de componentes de un *cactus doodle*, así que la invariante mas básica que se tiene es el número de componentes. Dado un *cactus doodle* \mathbf{c} , una forma de medir su número de componentes es asociarle un garabato $\tilde{\mathbf{c}}$ al desenredar como en la Figura 3.14 los puntos de intersección con más de dos ramas y después calcular la abelianización $(\mathbf{G}_{\tilde{\mathbf{c}}})_{ab}$ del grupo del garabato de $\tilde{\mathbf{c}}$. En [7] Khovanov demostró que la abelianización del grupo de un garabato es isomorfa a \mathbb{Z}^{k-1} donde k es el numero de componentes del garabato.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

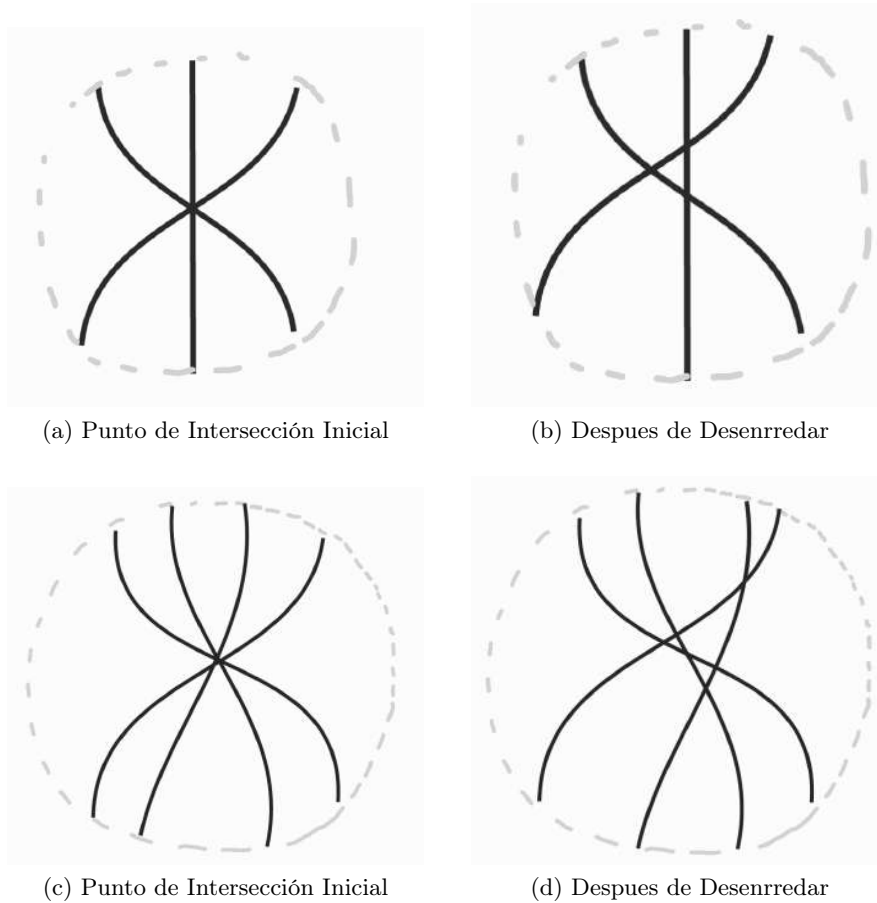


Figura 3.14.

Se puede notar que el garabato que se obtiene desenredando los puntos de intersección con más de dos ramas no es una invariante de la clase de equivalencia del *cactus doodle*.

Una segunda invariante para los *cactus doodles* se puede deducir de la siguiente manera. Dado un *cactus doodle* \mathbf{c} , la única forma de quitar o añadir puntos de intersección con más de dos ramas a \mathbf{c} es por medio de un movimiento de tipo Φ^\pm (ver Figura 3.15). Ya que un movimiento de tipo Φ^\pm crea o elimina exactamente dos puntos de intersección con el mismo número de ramas, tenemos que para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{>2}$ el número de puntos de intersección con \mathbf{k} ramas modulo 2 es una invariante.

3. Cactus Doodles (Garabatos de Cactus)

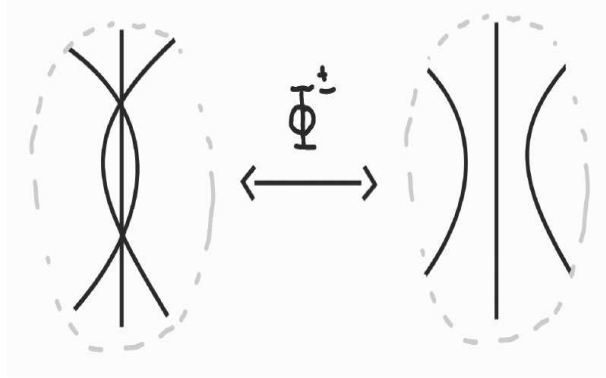


Figura 3.15.

Ejemplo 3.3. Ya que la rosa con tres pétalos (ver 3.16a) tiene un punto de intersección triple y el garabato trivial (ver 3.16b) no tiene puntos de intersección, el anterior párrafo nos dice que estos dos *cactus doodles* no son el mismo.

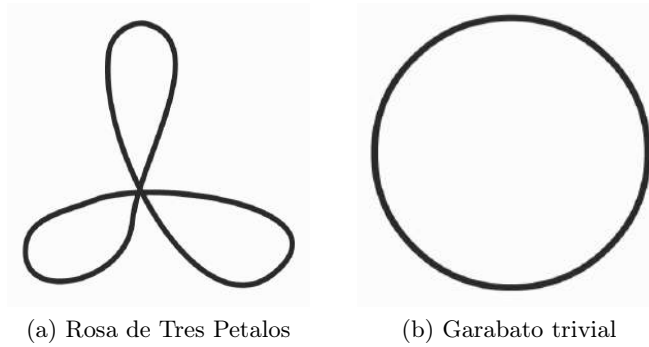


Figura 3.16.: Cactus Doodles no equivalentes

4. Diagramas de Gauss y Flips

En este capítulo definimos los diagramas de Gauss para los *cactus doodles*, los cuales son una versión de los diagramas de Gauss para nudos (ver [11]) adaptada para nuestro contexto. Estos van a ser la herramienta primordial que vamos a usar para demostrar el resultado principal del Capítulo 5. En nuestro contexto, un diagrama de Gauss va estar compuesto de lo que vamos a llamar un diagrama base y un conjunto de ordenes cíclicos orientados. Primero introducimos los diagramas base para los *cactus doodles* en general, traducimos los movimientos tipo Ψ^\pm y Φ^\pm en términos de estos diagramas y después nos vamos a centra en los diagramas base de una componente. Después de esto definimos los diagramas de Gauss, vemos su relación con los *cactus doodles* de una componente y extendemos la definición de los movimientos de tipo Φ^\pm y Ψ para estos diagramas. Finalmente, definimos los movimientos *flip* que transforman un *cactus doodle* a su imagen especular.

4.1. Diagramas de Gauss

4.1.1. Diagramas Base

Definición 4.1 (Diagrama base de k componentes). Un *diagrama base* \mathbf{D} de k *componentes* es un conjunto de k círculos \mathbb{S}^1 en el plano \mathbb{R}^2 , orientados en el sentido contrario a las manecillas del reloj, con un conjunto finito distinguido de puntos etiquetados con los elementos de un conjunto \mathbf{P} (conjunto de *etiquetas*). Cada elemento $\mathbf{A} \in \mathbf{P}$ etiqueta al menos dos puntos distinguidos del diagrama.

Los diagramas base se consideran módulo homeomorfismos de los \mathbb{S}^1 que preserven la orientación y módulo isomorfismos de conjuntos de etiquetas. Denotamos el cambio de una de las etiquetas, digamos de \mathbf{A} a \mathbf{B} , como $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

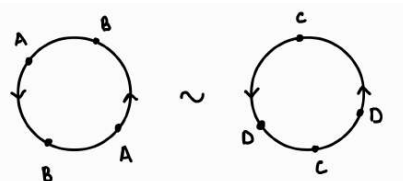


Figura 4.1.: Diagramas base equivalentes con cambios de nombre $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$ y $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$.

Los círculos de \mathbf{D} se llaman *componentes* de \mathbf{D} . La *multiplicidad* de una etiqueta $\mathbf{A} \in \mathbf{P}$ (denotada como $|\mathbf{A}|$) es el número de puntos marcados con la etiqueta \mathbf{A} . Finalmente, el *orden* de \mathbf{D} (denotado como $\text{Orden}(\mathbf{D})$) es el número de etiquetas en \mathbf{P} .

4. Diagramas de Gauss y Flips

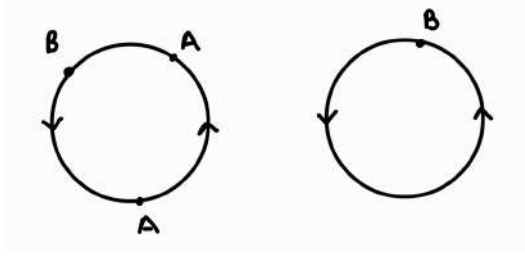


Figura 4.2.: Diagrama base de orden 2 con 2 componentes.

4.1.2. Diagrama base para un diagrama de cactus doodle orientado

A todo *cactus doodle* orientado \mathbf{c} con \mathbf{k} componentes le podemos asociar un diagrama base \mathbf{D} con \mathbf{k} componentes. Si $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \cup \dots \cup \mathbf{c}_k$ cada componente \mathbf{c}_i de \mathbf{c} es la imagen de una inmersión

$$\tilde{\mathbf{c}}_i : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \quad (4.1)$$

donde a \mathbb{S}^1 lo podemos ver como un círculo de radio uno en el plano \mathbb{R}^2 , el cual tomamos orientado en dirección contraria a las manecillas del reloj. Obtenemos el diagrama base \mathbf{D} de la siguiente manera:

1. Le damos diferentes etiquetas a los puntos de intersección de \mathbf{c} , de tal forma que dos puntos de intersección diferentes tienen etiquetas diferentes.
2. Para todo $i = 1, \dots, k$ etiquetamos las preimágenes bajo $\tilde{\mathbf{c}}_i$ de un punto de intersección \mathbf{p} en la componente \mathbf{c}_i (ya sea un punto de autointersección o un punto de intersección con otras componentes), con la etiqueta que se le dio a \mathbf{p} .

Decimos que \mathbf{D} es *un diagrama base para \mathbf{c}* . Para unos ejemplos ver Figuras 4.3 y 4.4.

Definición 4.2. Un diagrama base \mathbf{D} es *realizable* si existe un *cactus doodle* orientado \mathbf{c} tal que \mathbf{D} es un diagrama base para \mathbf{c} .

4. Diagramas de Gauss y Flips

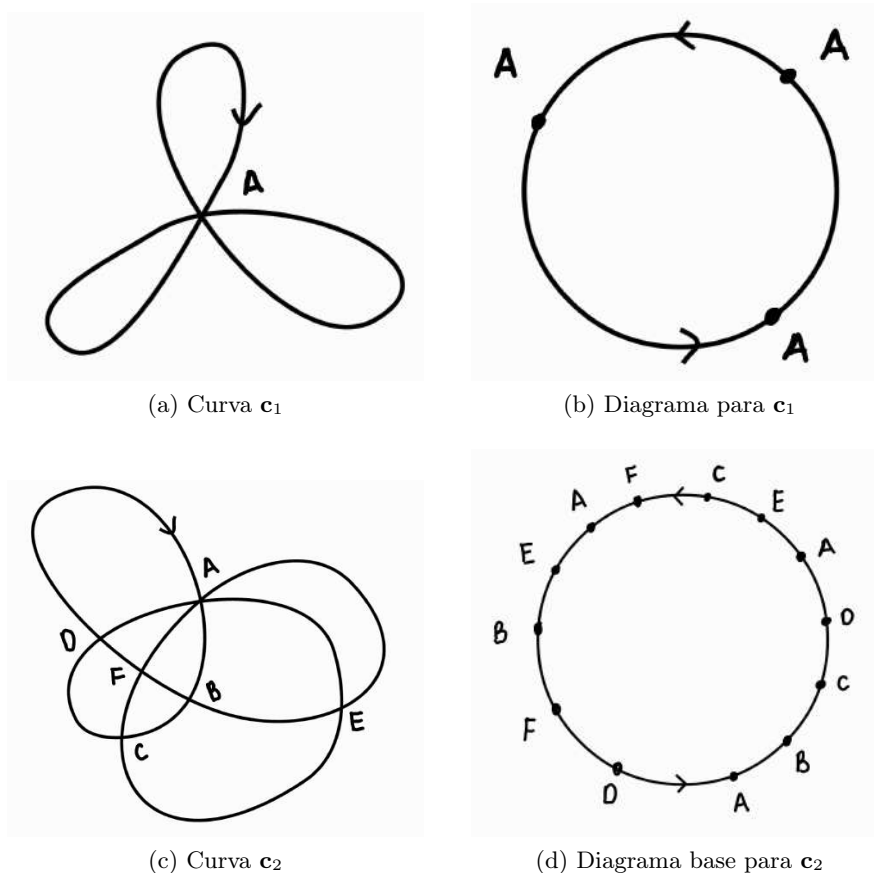


Figura 4.3.: *Cactus doodles* de una componente y sus diagramas base

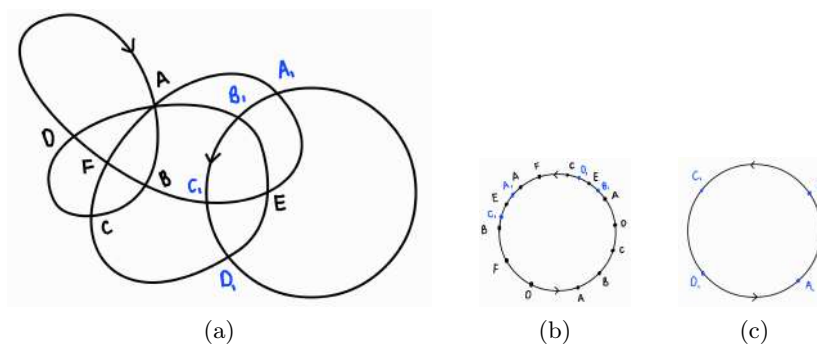


Figura 4.4.: *Cactus doodle* de dos componentes y su diagrama base

Observación 4.1. Es claro que:

- Los diagramas base para *cactus doodles* orientados isotópicos deben ser equivalentes, ya que bajo una isotopía de la esfera no cambia la combinatoria de un *cactus doodle*, ni su orientación.
- Si \mathbf{D} es un diagrama base para un *cactus doodle* orientado \mathbf{c} y \mathbf{P} es el conjunto de etiquetas de \mathbf{D} ; entonces, $\text{Orden}(\mathbf{D})$ es el número de puntos de intersección de \mathbf{c} y la multiplicidad de una etiqueta $\mathbf{A} \in \mathbf{P}$ es el

número de ramas que pasan por el punto de intersección $\mathbf{q}_A \in \mathbf{c}$ que esta etiquetado con \mathbf{A} .

4.1.3. Código de un diagrama Base

Un diagrama base se puede especificar por medio de su *código*.

Definición 4.3 (Código para un diagrama base). Sea \mathbf{D} un diagrama base con k componentes $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_k$ cuyas etiquetas pertenecen al conjunto \mathbf{P} . Fijemos en cada componente \mathbf{D}_i un punto p^i . Sea $\mathbf{W}_{\mathbf{D}_i}$ la palabra en \mathbf{P} que se obtiene al leer las etiquetas de \mathbf{D}_i recorriendo esta componente una vez en el sentido contrario a las manecillas del reloj, partiendo de p^i . El conjunto de palabras $\{\mathbf{W}_{\mathbf{D}_1}, \dots, \mathbf{W}_{\mathbf{D}_k}\}$ es un *código* para el diagrama base \mathbf{D} .

Ejemplo 4.1. El conjunto formado por las palabras $\mathbf{w}_1 = \mathbf{BAA}$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{B}$ es un código para el diagrama base de la Figura 4.2.

El código para un conjunto base \mathbf{D} depende de los puntos iniciales p^i que escogimos: tomando otros puntos iniciales obtenemos un código que difiere del código original por una permutación cíclica de las letras en cada palabra.

Proposición 4.1. *Un diagrama base \mathbf{D} se puede reconstruir a partir de su código. Dos códigos producen el mismo diagrama si y sólo si se pueden obtener uno del otro por medio de permutaciones cíclicas de letras.*

La Proposición 4.2 nos dice que es equivalente dar y demostrar propiedades para el código de un diagrama base que para el propio diagrama base.

4.1.4. Movimientos fundamentales en diagramas base

Veamos como los movimientos fundamentales de los *cactus doodles* se reflejan en sus diagramas base.

Definición 4.4 (Etiquetas adyacentes). Sea \mathbf{D} un diagrama base con conjunto de etiquetas \mathbf{P} y $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{P}$, tales que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$. Decimos que las etiquetas \mathbf{A} y \mathbf{B} son *adyacentes* en \mathbf{D} si cada punto con etiqueta \mathbf{A} puede ser conectado a un punto con etiqueta \mathbf{B} por medio de un intervalo en \mathbf{D} que no contiene puntos etiquetados en su interior.

En otras palabras, \mathbf{A} y \mathbf{B} son adyacentes en \mathbf{D} si existe un código para \mathbf{D} tal que para cada letra \mathbf{A} en este código se puede encontrar una letra \mathbf{B} al lado de ella, la cual es distinta para cada copia de \mathbf{A} .

Definición 4.5 (Movimientos fundamentales para diagramas base). Sea $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cup \dots \cup \mathbf{D}_k$ un diagrama base con $k \geq 1$ componentes, entonces:

- Un movimiento de tipo Φ^- añade, y un movimiento de tipo Φ^+ elimina dos etiquetas adyacentes de \mathbf{D} .
- Sean \mathbf{A}, \mathbf{B} dos etiquetas de \mathbf{D} con multiplicidades $|\mathbf{A}| = m, |\mathbf{B}| = m+n \geq 3$ y tales que las m copias de \mathbf{A} están junto a m copias distintas de \mathbf{B} . Un movimiento de tipo Ψ intercambia en el código de \mathbf{D} los pares de copias adyacentes de las letras \mathbf{A} y \mathbf{B} : \mathbf{AB} se cambia por \mathbf{BA} y viceversa.

4. Diagramas de Gauss y Flips

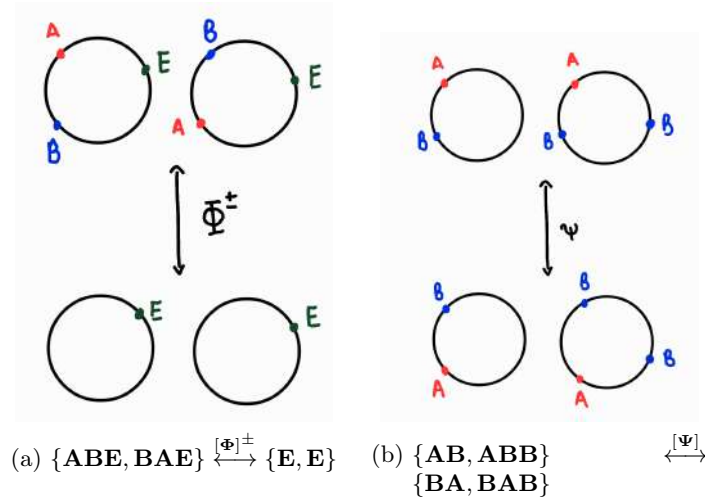


Figura 4.5.

Un movimiento de tipo Φ^+ es el inverso a un movimiento de tipo Φ^- en las mismas etiquetas, y viceversa, y un movimiento de tipo Ψ es inverso a un movimiento de tipo Ψ . Un movimiento fundamental que transforma D_1 en D_2 se va a denotar como $D_1 \rightarrow D_2$.

Observación 4.2. En un diagrama base D no necesariamente hay una única forma de aplicar un movimiento de tipo Ψ (o de tipo Φ^\pm) en dos etiquetas A, B a D . Por ejemplo, un movimiento de tipo Ψ se puede aplicar al diagrama base con código

$$BABAA = ABABA$$

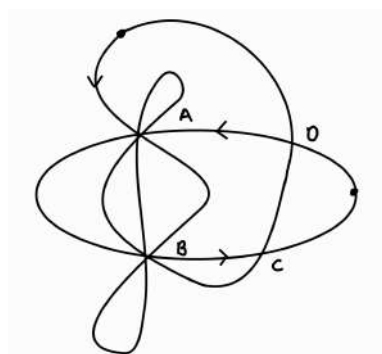
de las siguientes maneras distintas:

1. $BABAA \xrightarrow{\Psi} ABABA$,
2. $ABABA \xrightarrow{\Psi} BABAA$

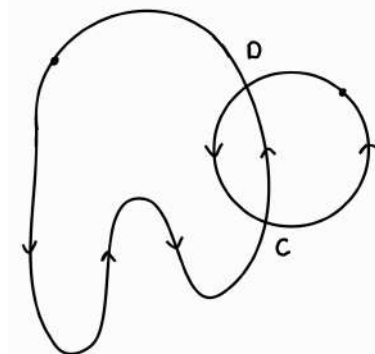
Algunos ejemplos de movimientos fundamentales en diagramas base realizables de dos componentes y sus correspondientes *cactus doodles* se muestran en las Figura 4.5, 4.6 y 4.7. Notamos que si un diagrama base D es realizable, es claro que dos puntos etiquetados en D , que están conectados por un intervalo en el que no hay otros puntos etiquetados, indican un arco orientado entre los correspondientes puntos de intersección en el *cactus doodle* c que realiza a D . Además, al aplicar un movimiento de tipo Ψ en c , también se intercambian las etiquetas de los puntos de intersección de c en los cuales se aplica el movimiento. La siguiente (obvia) afirmación justifica nuestra notación:

Proposición 4.2. Si un *cactus doodle* orientado c realiza a un diagrama base D , entonces un movimiento de tipo Φ^\pm en c corresponde a un movimiento de tipo Φ^\pm , y un movimiento de tipo Ψ en c corresponde a un movimiento de tipo Ψ en D .

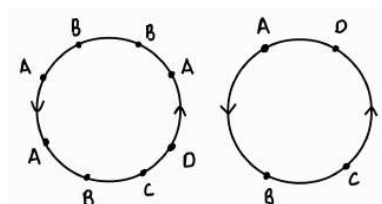
4. Diagramas de Gauss y Flips



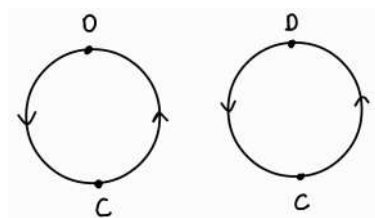
(a) Cactus Doodle c



(b) Cactus Doodle c tras aplicar un movimiento Φ^-

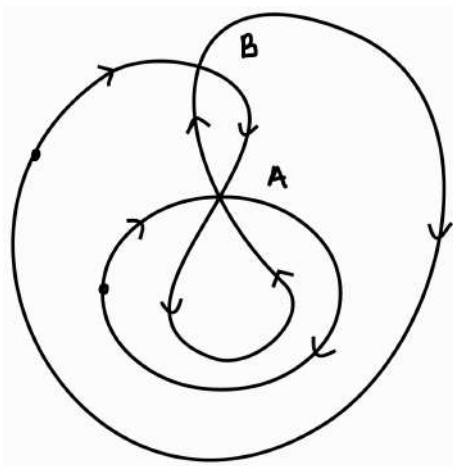


(c) Diagrama base de c

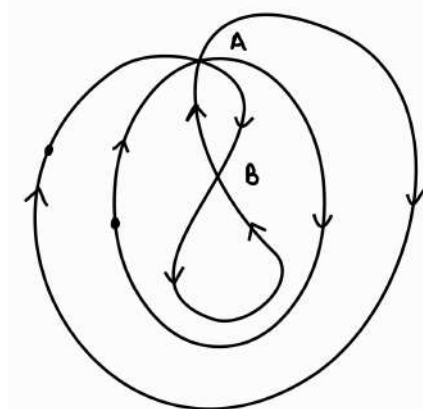


(d) Diagrama base tras aplicar el movimiento Φ^-

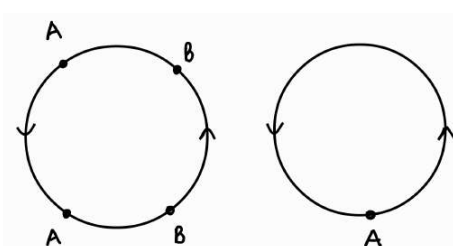
Figura 4.6.: Movimiento de tipo Φ^\pm en dos componentes



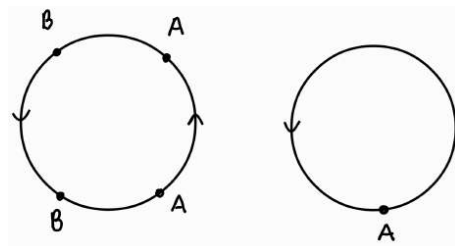
(a) Cactus Doodle c



(b) Cactus Doodle c tras aplicar un movimiento Ψ



(c) Diagrama base de c



(d) Diagrama base diagrama base tras aplicar el movimiento Ψ

Figura 4.7.: Movimiento de tipo Ψ en dos componentes

4.2. Diagramas base de una componente

A continuación vamos a dar una representación para los diagramas base de una sola componente, la cual llamaremos *diagramas de segmentos y polígonos*.

Definición 4.6 (Diagrama de segmentos y polígonos). Un diagrama de segmentos y polígonos es un círculo S^1 en el plano, orientado en dirección contraria a las manecillas del reloj, el cual tiene un conjunto de segmentos y (ó) polígonos convexos inscritos, de tal forma que los vértices de estos no coinciden. Dos diagramas son equivalentes si existe un homeomorfismo entre los círculos que preserve la orientación y envía polígonos a polígonos.

De ahora en adelante, vamos a considerar los segmentos como 2-ágonos, y hablaremos simplemente de *diagramas de polígonos*. Si un polígono convexo \triangle está inscrito en un diagrama de polígonos $\tilde{\mathbf{D}}$ vamos a decir que $\triangle \in \tilde{\mathbf{D}}$.

Podemos construir un diagrama de polígonos $\tilde{\mathbf{D}}$ a partir de un diagrama base \mathbf{D} de una componente reemplazando cada conjunto de puntos etiquetados con la misma etiqueta por un polígono convexo con vértices en este conjunto (ver Figura 4.8). Por otro lado, si se tiene un diagrama de polígonos, al darle una misma etiqueta a todos los vértices de un n -ágono en el diagrama, obtenemos un diagrama base de una componente. De esta manera, los diagramas de polígonos son lo mismo que diagramas base de una componente. En particular, cada *cactus doodle* orientado de una componente produce un diagrama de polígonos; cada polígono corresponde a un punto de intersección del *cactus doodle*.

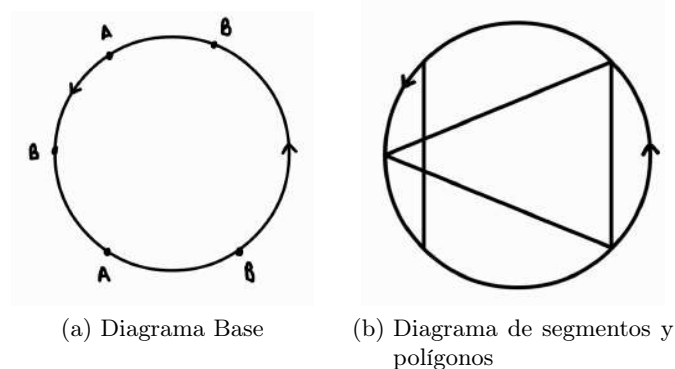


Figura 4.8.

4. Diagramas de Gauss y Flips

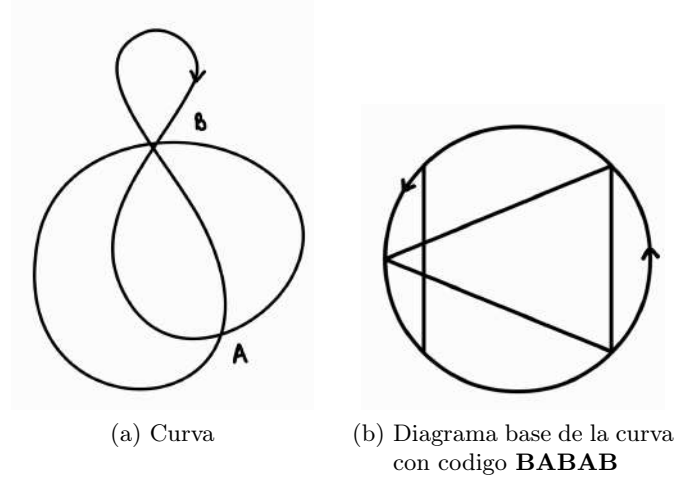


Figura 4.9.

Vamos a decir que dos m -ágonos Δ_1, Δ_2 en un diagrama de polígonos son *adyacentes* si las etiquetas que les corresponden en el diagrama base correspondiente son adyacentes. Es decir si en el diagrama de polígonos todo vértice de Δ_1 esta conectado a un vértice diferente de Δ_2 por medio de un intervalo que no contiene vértices de otros polígonos. Además, para dos polígonos cualquiera (pueden ser el mismo) podemos decir que dos vértices de estos polígonos son *adyacentes* si estos están conectados por medio de un intervalo que no contiene vértices de otros polígonos. Dado un diagrama de segmentos y polígonos $\tilde{\mathbf{D}}$ un movimiento de tipo:

- Φ^+ crea dos m -ágonos adyacentes en $\tilde{\mathbf{D}}$.
- Φ^- elimina dos m -ágonos adyacentes en $\tilde{\mathbf{D}}$.
- Ψ para un m -ágono \mathbf{A} y un $(m+n)$ -ágono \mathbf{B} , con $n > 0$, de $\tilde{\mathbf{D}}$, tales que los m vértices de \mathbf{A} son adyacentes a m vertices diferentes de \mathbf{B} ; intercambia las posiciones de estos vértices adyacentes.

(ver Figura 4.10)

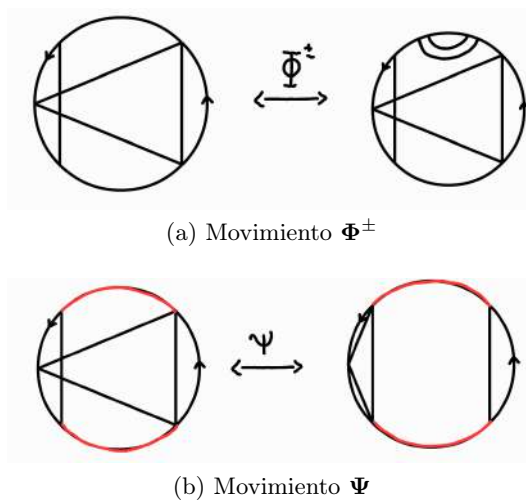


Figura 4.10.

4. Diagramas de Gauss y Flips

Observación 4.3. Como ya lo vimos en la Observación 4.2, podemos aplicar dos movimientos de tipo Ψ en un diagrama de polígonos $\tilde{\mathbf{D}}$, en los mismos polígonos pero en los que intercambiamos pares de vértices adyacentes diferentes, como en la Figura 4.11. De forma similar, los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica un movimiento de tipo Φ^\pm pueden ser diferentes. Por esta razón, si Δ_1, Δ_2 son los polígonos en los que se aplica un movimiento fundamental para diagramas base, tiene sentido guardar la información de los pares de vértices adyacentes que se intercambian con el movimiento (en el caso de un movimiento de tipo Ψ) o con respecto a los cuales se aplica el movimiento (en el caso de un movimiento de tipo Φ^\pm) en un mapeo inyectivo (para un movimiento de tipo Ψ) o biyectivo (para un movimiento de tipo Φ^\pm) entre los vértices de Δ_1 y Δ_2 .

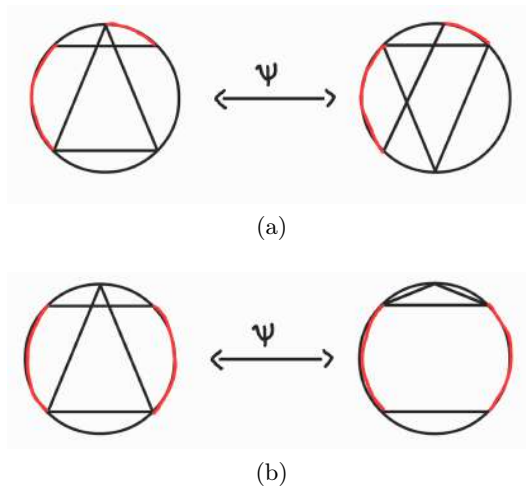


Figura 4.11.: Movimientos diferentes de tipo Ψ .

Diagramas de orden 1 y orden 2 con segmentos, triángulos y cuadrados.

Diagramas de Orden 1



Figura 4.12.

Diagramas de Orden 2

4. Diagramas de Gauss y Flips

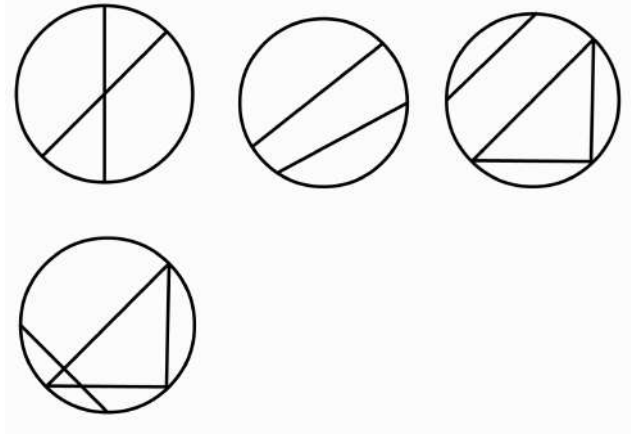


Figura 4.13.

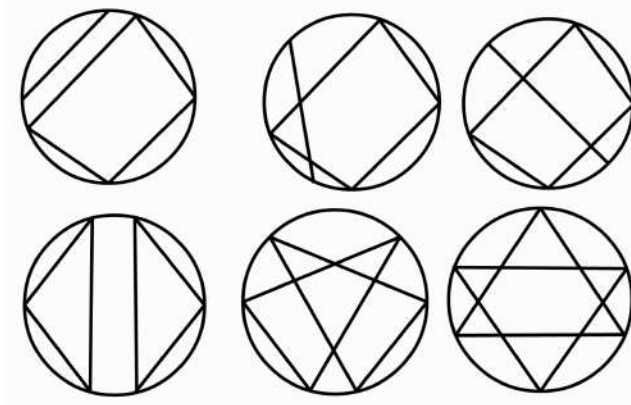


Figura 4.14.

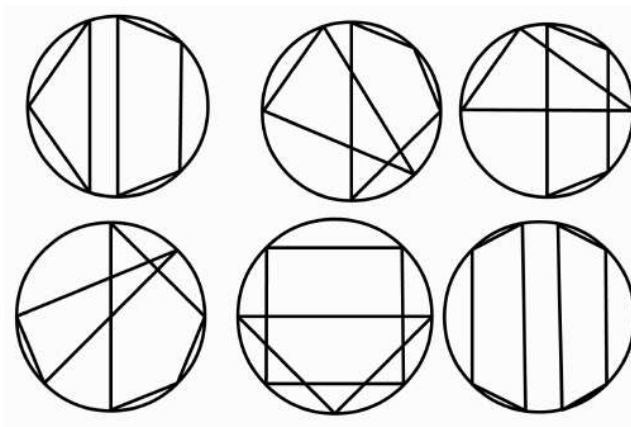


Figura 4.15.

4. Diagramas de Gauss y Flips

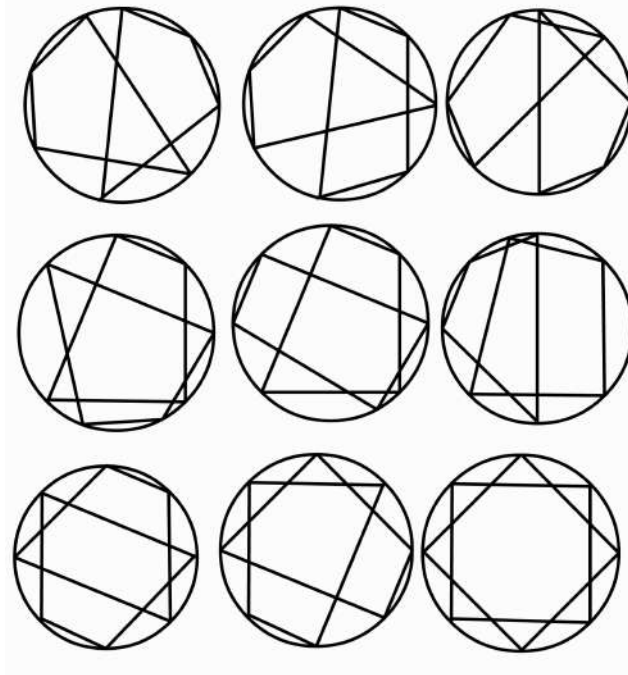


Figura 4.16.

Operador ∂_L

Vamos a introducir ciertos operadores sobre diagramas base que nos van a ser de utilidad en la demostración del Lema 5.1 más adelante.

Definición 4.7. Dada una etiqueta L , el operador ∂_L elimina esta etiqueta en el diagrama. Usamos la notación $\partial_{L_1, \dots, L_k}^k$ para la composición de los operadores $\partial_{L_1}, \dots, \partial_{L_k}$.

Ejemplo 4.2. Para $D = CCBCB$ tenemos

$$\partial_A(D) = CCBCB$$

$$\partial_B(D) = CCC$$

$$\partial_{CB}^2(D) = \emptyset$$

Proposición 4.3. Si $D \rightarrow D'$ es un movimiento de tipo Ψ en las etiquetas A, B , entonces $\partial_L(D) = \partial_L(D')$ si $L = A$ ó B , de lo contrario $\partial_L(D) \rightarrow \partial_L(D')$ es un movimiento de tipo Ψ .

Demostración: Supongamos que A, B son las etiquetas de D, D' en las que se aplica el movimiento, entonces los códigos de estos diagramas solo se diferencian por los pares AB o BA que se intercambian tras aplicar el movimiento de tipo Ψ . Teniendo en cuenta esto:

- Si $L \neq A, B$ es claro que los diagramas $\partial_L(D), \partial_L(D')$ se diferencian por un movimiento de tipo Ψ en las etiquetas A, B .

4. Diagramas de Gauss y Flips

- Si $L = A$, por cada par AB o BA en el código del diagrama base D se tiene una copia de la etiqueta B en el diagrama $\partial_A(D)$. La misma situación se tiene para los diagramas base D' y $\partial_A(D')$; y, ya que los códigos D, D' solo se diferencian por los pares AB o BA , entonces se tiene que $\partial_A(D) = \partial_A(D')$. De forma análoga, se tiene que $\partial_B(D) = \partial_B(D')$. \square

Observación 4.4. Si se tiene un diagrama de base D de una componente en su representación de diagrama de polígonos y, tomamos un polígono o segmento Δ , podemos aplicar el operador ∂_Δ a D eliminando el polígono Δ de este. Por construcción es claro que descrito de esta manera el resultado del Lema 4.3 sigue siendo válido.

Proposición 4.4. Sea D un diagrama base y A, B etiquetas adyacentes, entonces $\partial_A(D)$ y $\partial_B(D)$ son diagramas equivalentes.

Demostración: Se puede ir del diagrama $\partial_A(D)$ al diagrama $\partial_B(D)$ por medio de un cambio de etiqueta $B \rightarrow A$. \square

Observación 4.5. Si en la Proposición 4.4 consideramos un diagrama base D de una componente y los polígonos adyacentes Δ_A, Δ_B , podemos notar que Δ_A, Δ_B son básicamente el mismo polígono en el diagrama base $\partial_{\Delta_A}(D) = \partial_{\Delta_B}(D)$. (como en la Figura 4.17).

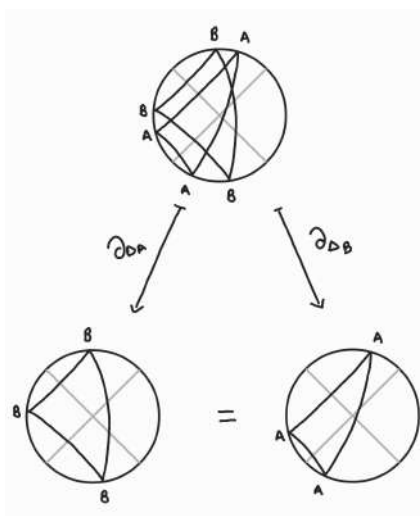


Figura 4.17.: Operador ∂

4.2.1. Orden cíclico orientado

4.2.2. *Cactus doodles* de una componente que tienen el mismo diagrama base.

Es posible encontrar dos *cactus doodles* de una componente no isotópicos que tengan el mismo diagrama base. Por ejemplo, los *cactus doodles* orientados de las Figuras 4.18a, 4.18b no pueden ser isotópicos ya que en el *cactus doodle* de

4. Diagramas de Gauss y Flips

la Figura 4.18b una de las regiones definidas por este en la esfera es adyacente a dos lazos y en el *cactus doodle* de la Figura 4.18a esto no pasa. Sin embargo, los dos *cactus doodles* tienen el diagrama base de la Figura 4.18c con el código

$$W = AAABABB.$$

Podemos aplicarle un movimiento de tipo Ψ a este diagrama base:

$$AAABABB = ABBA AAB \sim^{\Psi} BAABABA = BABABAA.$$

El diagrama base que se obtiene del código de Gauss **BABABAA** (ver Figura 4.19b) es realizable por medio del *cactus doodle* orientado de la Figura 4.19a. Este *cactus doodle* se obtiene al aplicarle el correspondiente movimiento de tipo Ψ al *cactus doodle* de la Figura 4.18b; sin embargo, un movimiento de este tipo no se le pudo aplicar al *cactus doodle* de la Figura 4.18a.

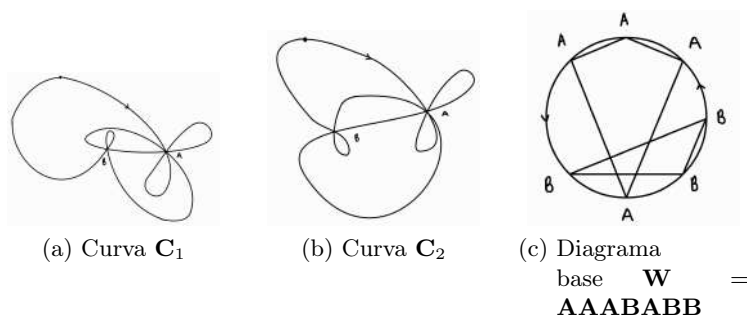


Figura 4.18.

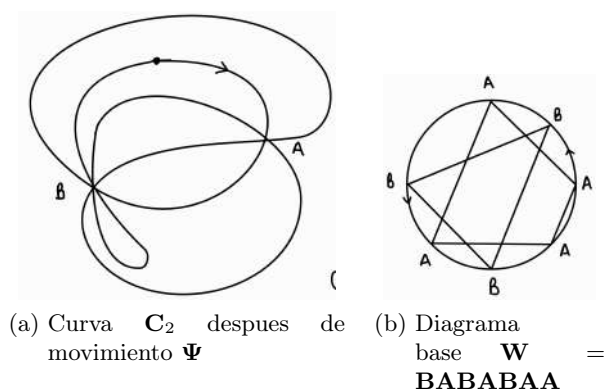


Figura 4.19.

4.2.3. Orden cíclico Orientado

La información que falta en un diagrama base para poder reconstruir un *cactus doodle* geométrico es el *orden cíclico orientado* sobre los puntos del diagrama base con la misma etiqueta.

Definición 4.8 (Orden cíclico orientado). Un *orden cíclico orientado* O en un conjunto X es un orden cíclico en el conjunto $X \times \{\pm\}$ en el cual si (b, ϵ_b) sigue

4. Diagramas de Gauss y Flips

a (\mathbf{a}, ϵ_a) en el orden, entonces se tiene que $(\mathbf{b}, -\epsilon_b)$ sigue a $(\mathbf{a}, -\epsilon_a)$. En otras palabras, un orden cíclico orientado en \mathbf{X} es un levantamiento de un orden cíclico en \mathbf{X} a un orden cíclico en el conjunto $\mathbf{X} \times \{\pm\}$.

Para nuestro propósito solo vamos a considerar ordenes cíclicos orientados en conjuntos finitos y ademas vamos a considerar las siguientes tres representaciones de un orden cíclico orientado \mathbf{O} en un conjunto \mathbf{X} .

1. El orden cíclico como tal en un círculo \mathbb{S}^1 orientado en dirección contraria a las manecillas del reloj.
2. Como una palabra en los elementos de $\mathbf{X} \times \{\pm\}$ módulo permutaciones cíclicas actuando en esta.
3. Como diagrama de flechas inscritas en un círculo \mathbb{S}^1 en el plano y el cual esta orientado en el sentido contrario a las manecillas del reloj; en este, cada flecha representa a un elemento de $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, la cola de las flecha que representa a \mathbf{x} corresponde a $(\mathbf{x}, -1)$ y la cabeza de la flecha corresponde a $(\mathbf{x}, +1)$. Notemos que si sólo se considera el círculo \mathbb{S}^1 con los puntos finales de cada flecha etiquetados con el correspondiente elemento de $\mathbf{X} \times \{\pm\}$, y olvidándonos de las flechas, se tiene la representación de \mathbf{O} que esta dada en el primer numeral.

Las tres representaciones son equivalentes. Además, por facilidad de la notación vamos a denotar el elemento $(\mathbf{x}, \epsilon) \in \mathbf{X} \times \{\pm\}$ como \mathbf{x}^ϵ .

Ejemplo 4.3. El orden cíclico orientado $\mathbf{O} = \mathbf{a}^- \mathbf{b}^+ \mathbf{c}^- \mathbf{a}^+ \mathbf{b}^- \mathbf{c}^+$ se puede ver como orden cíclico como en la Figura 4.20a y como diagrama de flechas como en la Figura 4.20b.

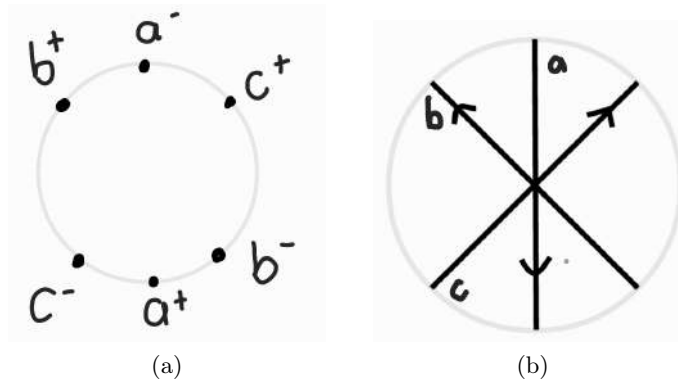


Figura 4.20.

4.2.4. Algunas operaciones y propiedades de los ordenes cíclicos orientados

A continuación daremos alguna propiedades y operaciones en los ordenes cíclicos orientados que vamos a usar para nuestro objetivo principal.

Orden Inducido: Dado un orden cíclico orientado \mathbf{O} en un conjunto \mathbf{X} y un subconjunto $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$, vamos a denotar con $\mathbf{O}^{\mathbf{A}}$ el orden cíclico orientado que

4. Diagramas de Gauss y Flips

induce \mathbf{O} en \mathbf{X} , es decir, el orden cíclico orientado que se obtiene al eliminar los elementos en $\mathbf{X} \times \{\pm\} - (\mathbf{A} \times \{\pm\})$ de \mathbf{O} . Además, representamos el orden cíclico orientado en el conjunto vacío como un círculo \mathbb{S}^1 sin puntos etiquetados.

Representación estándar como palabra:

Un orden cíclico orientado \mathbf{O} en un conjunto \mathbf{X} tiene una representación en forma de palabra de la forma:

$$\mathbf{O} = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} x_1^{-\epsilon_1} \cdots x_n^{-\epsilon_n}, \quad (4.2)$$

donde $\epsilon_i \in \{\pm\}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Esta es la representación estándar que vamos a considerar siempre que hablemos de un orden cíclico orientado en su representación como palabra.

Ordenes isomorfos: Si tenemos dos conjuntos $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$, un orden cíclico \mathbf{O} en \mathbf{X}_1 y una biyección $\varphi : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$, vamos a denotar como $\varphi(\mathbf{O})$ al orden cíclico que induce \mathbf{O} en \mathbf{X}_2 . Notamos que si $\mathbf{X}_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$ y tomamos a \mathbf{O} en su representación estándar como palabra, entonces se tiene que:

$$\varphi(\mathbf{O}) = \varphi(x_1)^{\epsilon_1} \cdots \varphi(x_n)^{\epsilon_n} \varphi(x_1)^{-\epsilon_1} \cdots \varphi(x_n)^{-\epsilon_n}.$$

Además, vamos a decir que dos ordenes cíclicos orientados $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2$, respectivamente, en los conjuntos $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ son *isomorfos* si existe una biyección tal que $\mathbf{O}_2 = \varphi(\mathbf{O}_1)$.

Observación 4.6. En el caso que dos ordenes cíclicos orientados sean isomorfos, los diagrama de flechas que definen (o dibujan) estos dos en el plano son básicamente el mismo (o isotópicos); sin embargo, si dos ordenes cíclicos orientados son isomorfos, estos no son necesariamente iguales; por ejemplo, si consideramos el conjunto con dos elementos $\mathbf{X} = \{a, b\}$, este tiene los ordenes cíclicos orientados $\mathbf{O}_1 = a^+b^+a^-b^-$ y $\mathbf{O}_2 = a^+b^-a^-b^+$, los cuales son diferentes, pero isomorfos al considerar la permutación que intercambia a por b .

Orden inverso: Dado un orden cíclico orientado \mathbf{O} en un conjunto \mathbf{X} , el *orden cíclico orientado inverso* $\mathbf{O}^{\mathcal{R}}$ de \mathbf{O} es el orden cíclico orientado en \mathbf{X} que se obtiene al invertir el orden de cada subconjunto maximal de elementos consecutivos de $\mathbf{X} \times \{\pm\}$. Si $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y \mathbf{O} este dado en representación estándar como palabra, entonces $\mathbf{O}^{\mathcal{R}}$ esta dado por:

$$\mathbf{O}^{\mathcal{R}} = x_n^{\epsilon_n} \cdots x_1^{\epsilon_1} x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_1^{-\epsilon_1}$$

Otra forma de entender el orden inverso es tomar la representación del orden cíclico orientado \mathbf{O} sobre un círculo \mathbb{S}^1 , pero considerar que el círculo esta orientado en dirección de las manecillas del reloj. Además, usando la representación estándar como palabra de \mathbf{O} podemos ver que:

- $[\mathbf{O}^{\mathcal{R}}]^{\mathcal{R}} = \mathbf{O}$.
- Si se tiene una función biyectiva $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_2$, entonces tenemos que $\varphi(\mathbf{O}^{\mathcal{R}}) = \varphi(\mathbf{O})^{\mathcal{R}}$
- Para un subconjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, entonces tenemos que $[\mathbf{O}^{\mathbf{A}}]^{\mathcal{R}} = [\mathbf{O}^{\mathcal{R}}]^{\mathbf{A}}$

4. Diagramas de Gauss y Flips

Ademas, si tenemos un conjunto \mathbf{X}_1 con un orden ciclico orientado \mathbf{O}_1 , un conjunto \mathbf{X}_2 con un orden ciclico orientado \mathbf{O}_2 y una biyección $\varphi : (\mathbf{X}_1) \rightarrow \mathbf{X}_2$ tal que $\mathbf{O}_2 = \varphi(\mathbf{O}_1^{\mathcal{R}})$, entonces decimos que \mathbf{O}_2 es *el orden ciclico orientado inverso* a \mathbf{O}_1 con respecto a φ .

Suma de ordenes: Si se tiene un conjunto \mathbf{X} , dos subconjunto $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{X}$ y un orden cilcico orientado \mathbf{O} en \mathbf{X} :

1. Se puede definir la suma de los ordenes inducidos como

$$\mathbf{O}^{\mathbf{A}} + \mathbf{O}^{\mathbf{B}} = \mathbf{O}^{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$$

en especial se tiene que

$$\mathbf{O}^{\mathbf{A}} + \mathbf{O}^{\mathbf{X} - \mathbf{A}} = \mathbf{O}.$$

2. Si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ definimos una suma mixta

$$[\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}^{\mathbf{A}}$$

como el orden cíclico orientado en $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ que se obtiene al tomar el orden cíclico orientado $\mathbf{O}^{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$; partiendo de este orden se mantiene los elementos de $\mathbf{A} \times \{\pm\}$ en su posición, y los elementos de $\mathbf{B} \times \{\pm\}$ se ponen en las posiciones que estos estaban originalmente pero siguiendo el orden inverso de $\mathbf{O}^{\mathbf{B}}$ (es decir $[\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}}$).

3. Si tenemos dos subconjuntos disjuntos \mathbf{A}, \mathbf{B} de un conjunto \mathbf{X} , un orden cíclico orientado \mathbf{O} en \mathbf{X} y usamos la representación estándar como palabra de \mathbf{O} , podemos notar que:

$$[\mathbf{O}^{\mathbf{A}} + \mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}} = [\mathbf{O}^{\mathbf{A}}]^{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}}$$

y en especial de esto podemos deducir que

$$[[\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}^{\mathbf{A}}]^{\mathcal{R}} = \mathbf{O}^{\mathbf{B}} + [\mathbf{O}^{\mathbf{A}}]^{\mathcal{R}}$$

Ejemplo 4.4. si $\mathbf{X} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$, $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ y $\mathbf{O} = \mathbf{a}^+\mathbf{b}^-\mathbf{c}^-\mathbf{d}^+\mathbf{a}^-\mathbf{b}^+\mathbf{c}^+\mathbf{d}^-$ se tiene que

$$\mathbf{O}^{\mathcal{R}} = \mathbf{d}^+\mathbf{c}^-\mathbf{b}^-\mathbf{a}^+\mathbf{d}^-\mathbf{c}^+\mathbf{d}^+\mathbf{a}^-$$

$$\mathbf{O}^{\mathbf{A}} = \mathbf{a}^+\mathbf{c}^-\mathbf{a}^-\mathbf{c}^+$$

$$\mathbf{O}^{\mathbf{B}} = \mathbf{b}^-\mathbf{d}^+\mathbf{b}^+\mathbf{d}^-$$

$$[\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}} = \mathbf{d}^+\mathbf{b}^-\mathbf{d}^-\mathbf{b}^+$$

$$[\mathbf{O}^{\mathbf{B}}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}^{\mathbf{A}} = \mathbf{a}^+\mathbf{d}^+\mathbf{c}^-\mathbf{b}^-\mathbf{a}^-\mathbf{d}^-\mathbf{c}^+\mathbf{b}^+$$

(ver Figura 4.21)

4. Diagramas de Gauss y Flips

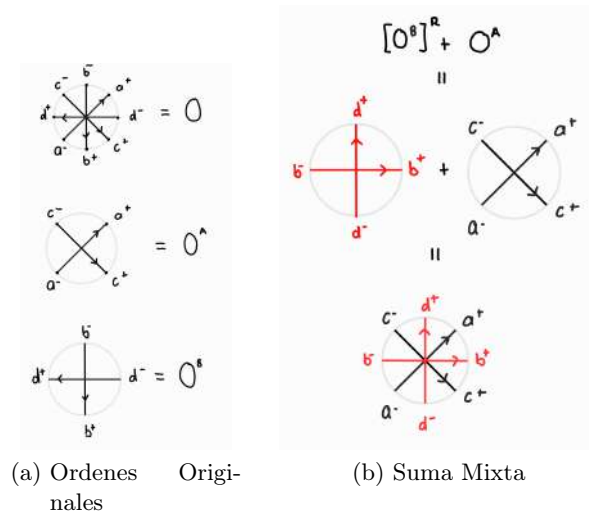


Figura 4.21.: Ordenen Mixto

4.2.5. Ordenes cíclicos orientados para *cactus doodles*

De ahora en adelante siempre consideraremos *cactus doodles* de una sola componente.

El conjunto de las ramas de un *cactus doodle* orientado en la vecindad de un punto de intersección tiene un orden cíclico orientado natural.

A saber, sea \mathbf{c} un *cactus doodle* orientado y \mathbf{A} un punto de intersección de \mathbf{c} . Existe un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que la intersección $\mathbf{c} \cap B_\epsilon$ con una bola B_ϵ de radio ϵ y con el centro en \mathbf{A} consiste de un número finito de ramas que solamente se intersecan en \mathbf{A} y que son transversales a la frontera ∂B_ϵ .

En la frontera $\partial B_\epsilon \cong \mathbb{S}^1$ marcamos con \mathbf{a}^- el punto inicial de la rama \mathbf{a} y con \mathbf{a}^+ el punto final de esta rama (ver la Figura 4.22).

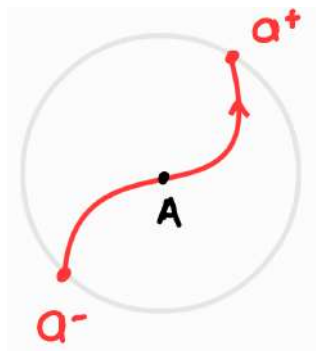


Figura 4.22.

Al marcar los puntos iniciales y finales de cada rama \mathbf{a} del *cactus doodle* \mathbf{c} en ∂B_ϵ , se obtiene el orden cíclico orientado $\mathbf{O}_\mathbf{A}$ en el conjunto de todas las ramas (para un ejemplo ver la Figura 4.23). En particular, si \mathbf{D} es el diagrama base

4. Diagramas de Gauss y Flips

de \mathbf{c} , la biyección natural entre el conjunto de ramas que pasan por \mathbf{A} y los vértices del polígono Δ (o las instancias de la etiqueta) que corresponde a \mathbf{A} en \mathbf{D} induce un orden cíclico orientado en los vértices de Δ .

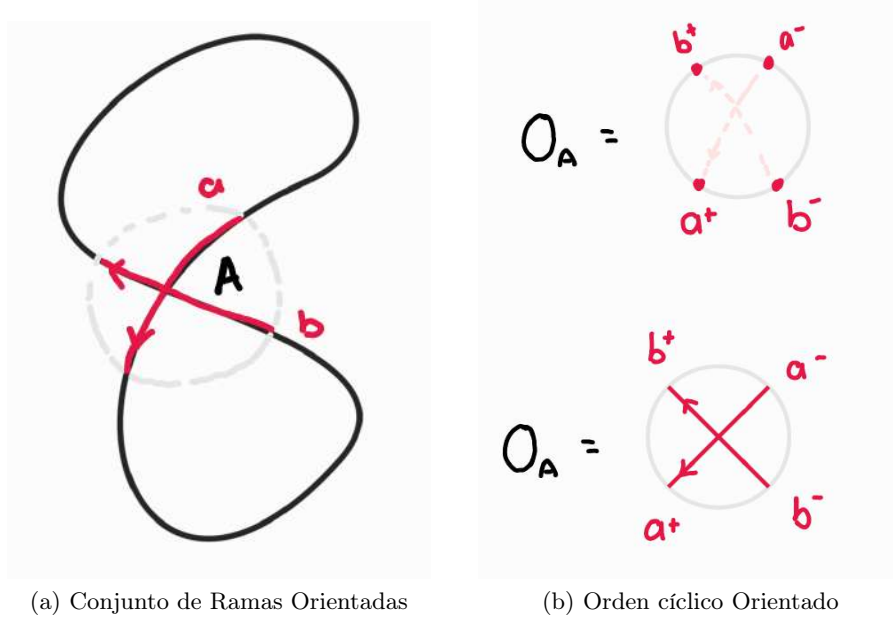


Figura 4.23.

Observación 4.7. Si tomamos un $\epsilon > 0$ muy pequeño, la intersección $B_\epsilon \cap \mathbf{c}$ junto con ∂B_ϵ es básicamente la representación de \mathbf{O}_A como diagrama de flechas. En este caso cada flecha corresponde al vector tangente al punto \mathbf{A} en la rama correspondiente.

4.2.6. Diagramas de Gauss

Definición 4.9 (Diagrama de Gauss). Un *Diagrama de Gauss* $\bar{\mathbf{D}}$ es un diagrama base \mathbf{D} de una componente junto con un orden cíclico orientado \mathbf{O}_A en el conjunto de instancias de la etiqueta \mathbf{A} , para cada posible etiqueta \mathbf{A} en \mathbf{D} . En otras palabras, es un diagrama de polígonos \mathbf{D} junto con un orden cíclico orientado en el conjunto de vértices de cada polígono en \mathbf{D} .

4.2.7. Diagrama de Gauss de un *cactus doodle*

El diagrama de Gauss de un *cactus doodle* orientado \mathbf{c} consiste del diagrama base \mathbf{D}_c de \mathbf{c} junto con el orden cíclico orientado \mathbf{O}_A para cada polígono (o etiqueta) en \mathbf{D}_c , definido en la sección anterior.

Ejemplo 4.5. El diagrama de Gauss del *cactus doodle* orientado de la Figura 4.23a tiene como diagrama base al diagrama con un segmento, al que le podemos dar el código $\mathbf{W} = \mathbf{AA}$, y los extremos del segmento del diagrama a los que llamamos \mathbf{a}, \mathbf{b} (como las ramas en el punto) tienen el orden cíclico orientado dado en la Figura 4.23b.

Proposición 4.5. *Cactus doodles orientados isotópicos tienen el mismo diagrama de Gauss.*

Observación 4.8. Sea \mathbf{c} un *cactus doodle* orientado, \mathbf{c}' es el mismo cactus doodle pero con la orientación contraria, y sean $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{c}'}$ sus respectivos diagramas de Gauss. Consideremos un código $\mathbf{W}_{\mathbf{c}}$ para el diagrama base $\mathbf{D}_{\mathbf{c}}$; entonces, la palabra inversa $\mathbf{W}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{R}}$ es un código para el diagrama base $\mathbf{D}_{\mathbf{c}'}$ (es decir $\mathbf{D}_{\mathbf{c}'}$ es el diagrama $\mathbf{D}_{\mathbf{c}}$ pero reflejado) y además $\overline{\mathbf{D}}_{\mathbf{c}'}$ tiene los mismos ordenes cíclicos orientados para todo polígono en el diagrama base $\mathbf{D}_{\mathbf{c}'}$.

Definición 4.10. Un diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ es *realizable*, si existe un *cactus doodle* tal que $\overline{\mathbf{D}}$ es su diagrama de Gauss.

Teorema 4.1. *Un diagrama de Gauss realizable determina un cactus doodle orientado salvo isotopía.*

Demostración. Dado un *cactus doodle orientado* \mathbf{c} de una componente y con al menos un punto de intersección, podemos ver a la esfera como un **complejo celular** con celdas de dimensiones 0, 1 y 2; donde el cactus doodle \mathbf{c} es el 1-esqueleto de esta subdivisión celular y las regiones que define \mathbf{c} en la esfera junto con sus fronteras son las 2-celdas. Las celdas de dimensión 1 y 2 son orientadas: las 1-celdas (o arcos de \mathbf{c}) por medio de la parametrización de \mathbf{c} y las 2-celdas por la orientación de la esfera. El *cactus doodle* \mathbf{c} se puede reconstruir de una lista de este tipo de celdas si sabemos:

- (a) las 0-celdas (o puntos de intersección) iniciales y finales de cada 1-celda;
- (b) el orden cíclico de las 1-celdas en la frontera de cada 2-celda.

Para demostrar el Teorema 4.1, veremos cómo se puede extraer este tipo de información de un diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$. Le vamos a asociar un **complejo celular** a $\overline{\mathbf{D}}$ de la siguiente manera:

- (1) Las 0-celdas son simplemente las etiquetas (o poligonos) de $\overline{\mathbf{D}}$ y las 1-celdas son los intervalos de $\overline{\mathbf{D}}$ que conectan dos puntos etiquetados, siguiendo la correspondiente orientación.
- (2) Cada 2-celda está determinada por su frontera la cual se puede describir como una sucesión de 1-celdas, definida salvo una permutación cíclica. Estas sucesiones se construyen a partir del diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ de la siguiente manera. Notemos que el orden cíclico orientado en el conjunto de puntos con etiqueta \mathbf{A} en $\overline{\mathbf{D}}$ da un orden cíclico usual sobre las 1-celdas que tienen un extremo etiquetado con \mathbf{A} . Escojamos una 1-celda l_1 y una 0-celda \mathbf{A}_1 en su frontera. En el orden cíclico $\mathbf{O}_{\mathbf{A}_1}$, sea l_2 la celda que precede a l_1 , y sea \mathbf{A}_2 su segundo extremo. A su vez, sea l_3 la celda que precede a l_2 en el orden cíclico $\mathbf{O}_{\mathbf{A}_2}$ y sea \mathbf{A}_3 el otro extremo de l_3 y así sucesivamente. En algún momento, llegaremos a la situación $l_{k+1} = l_1$ y la sucesión l_1, \dots, l_k , definida salvo una permutación cíclica, es la frontera de una 2-celda.

4. Diagramas de Gauss y Flips

Si $\overline{\mathbf{D}}$ es el diagrama de Gauss de \mathbf{c} , del complejo asociado a $\overline{\mathbf{D}}$ podemos extraer la información para los incisos (a) y (b) que nos van a ayudar a reconstruir \mathbf{c} . La información de (a) la tenemos de (1), de hecho podemos notar que $\overline{\mathbf{D}}$ nos dice cuando podemos conectar dos puntos de intersección de \mathbf{c} por medio de un arco orientado y por medio de que ramas esta conectado este arco. La información de (b) la tenemos de (2), si \mathbf{c}_2 es un segundo cactus doodle que realiza a $\overline{\mathbf{D}}$, notamos que con cualquiera de las subdivisiones celulares que definen \mathbf{c} y \mathbf{c}_2 en la esfera es homeomorfa (como complejo celular) al complejo celular asociado a $\overline{\mathbf{D}}$, así tenemos que existe una correspondencia uno-a-uno entre las regiones que definen \mathbf{c} y \mathbf{c}_2 en la esfera junto con sus fronteras, y con esta información podemos construir una isotopía de la esfera que lleve \mathbf{c} a \mathbf{c}_2 .

□

4.2.8. Movimientos fundamentales en diagramas de Gauss

Los movimientos fundamentales para diagramas de Gauss coinciden con los movimientos fundamentales sobre los diagramas base, con la especificación adicional de lo que sucede con los ordenes cíclicos orientados sobre los vértices de los polígonos (sobre los conjuntos de puntos con la misma etiqueta). Recordemos que en un movimiento fundamental tipo Φ sobre un diagrama base participan dos polígonos, digamos \mathbf{A} y \mathbf{B} , cuyos vértices están en correspondencia uno a uno. Por lo tanto, sus conjuntos de vértices se pueden identificar y tiene sentido comparar los ordenes cíclicos orientados en los vértices de \mathbf{A} y de \mathbf{B} . De la misma manera, un movimiento fundamental tipo Ψ involucra dos polígonos, digamos \mathbf{A} y \mathbf{B} , tales que los vértices de \mathbf{A} están en correspondencia uno a uno con un subconjunto de los vértices del \mathbf{B} . En esta situación, podemos considerar los vértices de \mathbf{A} como un subconjunto de los vértices del \mathbf{B} .

Definición 4.11 (Movimientos fundamentales para diagramas de Gauss). Los movimientos fundamentales en un diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ son los siguientes:

- Movimientos de tipo Φ^+ : Crea con un movimiento de tipo Φ^+ para diagramas base dos m -ágonos adyacentes en el diagrama base \mathbf{D} y a los vértices de estos les damos ordenes cíclicos orientados inversos.
- Movimientos de tipo Φ^- : El movimiento de tipo Φ^- elimina dos m -ágonos adyacentes con ordenes cíclicos orientados inversos.
- Movimientos de tipo Ψ : Si un movimiento de tipo Ψ se puede aplicar en $\overline{\mathbf{D}}$ en un m -ágono \mathbf{A} y un n -ágono \mathbf{B} con $n > m$ y

$$\mathbf{O}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{V}(\mathbf{A})} = \mathbf{O}_{\mathbf{A}}^{\mathcal{R}},$$

donde $\mathbf{V}(\mathbf{A})$ es el conjunto de los vértices de \mathbf{A} , entonces el movimiento de tipo Ψ en el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ consiste en

- aplicar Ψ en \mathbf{D} ;
- cambiar el orden cíclico orientado en $\mathbf{V}(\mathbf{A})$ por $\mathbf{O}_{\mathbf{A}}^{\mathcal{R}}$;

4. Diagramas de Gauss y Flips

- cambiar el orden cíclico orientado en el conjunto $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ de los vértices de \mathbf{B} por

$$[\mathbf{O}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{V}(\mathbf{A})}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{V}(\mathbf{B})-\mathbf{V}(\mathbf{A})}$$

- mantener los ordenes cíclicos orientados de los demás polígonos.

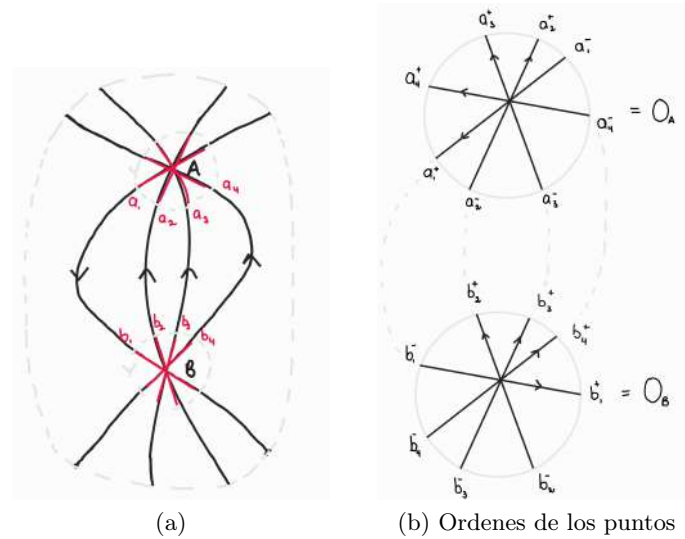


Figura 4.24.

Esta definición se justifica con los siguientes resultados:

Proposición 4.6. Si $\overline{\mathbf{D}}$ es el diagrama de Gauss de un cactus doodle orientado \mathbf{c} , entonces:

1. Un movimiento de tipo Φ^{\pm} en \mathbf{c} corresponde a un movimiento de tipo Φ^{\pm} en $\overline{\mathbf{D}}$.
2. Si se puede aplicar un movimiento de tipo Φ^{-} en $\overline{\mathbf{D}}$ entonces el diagrama de Gauss que se obtiene tras aplicarle el movimiento es realizable.

Demostración: 1. Por la Proposición 4.2 un movimiento de tipo Φ^{+} (Φ^{-}) en \mathbf{c} corresponde a crear o eliminar dos m -ángulos adyacentes \mathbf{A} , \mathbf{B} en el diagrama base \mathbf{D} . El hecho de que los órdenes cíclicos de los vértices de \mathbf{A} y de \mathbf{B} son inversos uno del otro es claro ya que localmente se tiene una situación como la de la Figura 4.24.

2. Si un movimiento de tipo Φ^{-} se puede aplicar en $\overline{\mathbf{D}}$, esto significa que un movimiento de tipo Φ^{-} se puede aplicar en \mathbf{c} de tal forma que los puntos de intersección que se eliminan en \mathbf{c} corresponden a los polígonos que se eliminan en $\overline{\mathbf{D}}$. Sea $\overline{\mathbf{D}'}$ el resultado de aplicar Φ^{-} en $\overline{\mathbf{D}}$ y \mathbf{c}' el resultado de aplicar Φ^{-} en \mathbf{c} . Entonces, $\overline{\mathbf{D}'}$ es el diagrama de Gauss de \mathbf{c}' . \square

4. Diagramas de Gauss y Flips

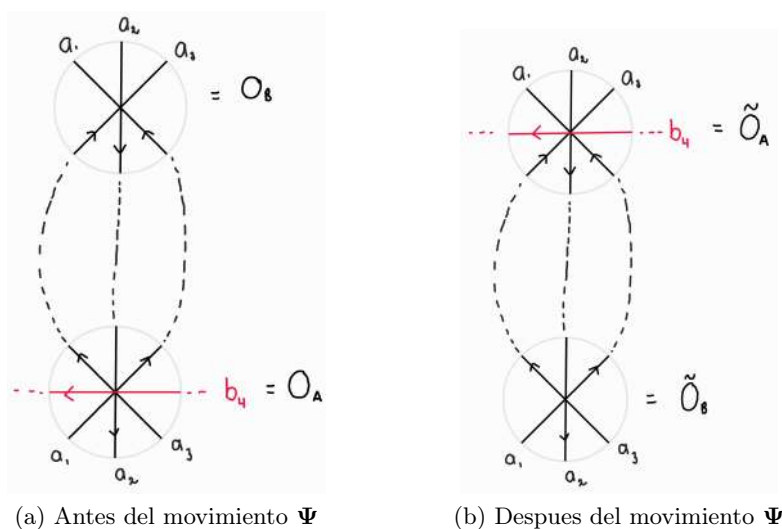


Figura 4.25.

Proposición 4.7. *Si $\overline{\mathbf{D}}$ es el diagrama de Gauss de un cactus doodle orientado \mathbf{c} , entonces:*

1. *Un movimiento de tipo Ψ en \mathbf{c} corresponde a un movimiento de tipo Ψ en $\overline{\mathbf{D}}$.*
2. *Si se puede aplicar un movimiento de tipo Ψ en $\overline{\mathbf{D}}$, entonces el diagrama de Gauss que se obtiene tras realizar el movimiento es realizable.*

Demostración: 1. De la Proposición 4.2 sabemos que un movimiento de tipo Ψ en el *cactus doodle* corresponde a un movimiento de tipo Ψ en el diagrama base correspondiente, así que solamente tenemos que verificar cómo se cambian los órdenes cíclicos orientados de los polígonos en los que se aplica el movimiento. En el *cactus doodle*, localmente tenemos una situación como la de la Figura 4.25, de la cual podemos leer los cambios en los órdenes cíclicos orientados.

2. La demostración es análoga a la demostración de la parte 2 de la Proposición 4.6. \square

Observación 4.9. En la demostración del Lema 5.1 vamos a usar explícitamente el mapeo inyectivo o biyectivo $\varphi : V(\mathbf{A}) \rightarrow V(\mathbf{B})$ entre los conjuntos de vértices de los polígono \mathbf{A} y \mathbf{B} , que conecta los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica un movimiento fundamental. Notamos que al hacer esto, en la Definición 4.11 la condición de ser órdenes cíclicos orientados inversos se convierte en ser órdenes cíclicos orientados inversos con respecto a φ .

Finalmente, podemos notar que como sucede con los *cactus doodles* y con los diagramas base, un movimiento de tipo Φ^+ para diagramas de Gauss es el inverso de un movimiento de tipo Φ^- para diagramas de Gauss y viceversa. Además, un movimiento de tipo Ψ en diagramas de Gauss es el inverso de un movimiento de tipo Ψ .

4.3. Flips

4.3.1. El flip de un cactus doodle

Para un *cactus doodle* orientado \mathbf{c} , un *flip* de \mathbf{c} es el *cactus doodle* \mathbf{c}^* que obtenemos al reflejar \mathbf{c} por alguna recta. La clase de isotopía de \mathbf{c}^* no depende de la recta y solamente depende de la clase de isotopía de \mathbf{c} ; por esto, vamos a referir a \mathbf{c}^* como *el flip* del *cactus doodle* \mathbf{c} .

Teorema 4.2. *El flip \mathbf{c}^* de un cactus doodle orientado \mathbf{c} , es equivalente a \mathbf{c} .*

Demostración. Si tomamos el generador $\mathbf{S}_{1,n}$ del grupo de cactus \mathbf{J}_n , las relaciones con las que definimos los grupos de cactus nos dicen que para todo $1 \leq p \leq q \leq n$ se cumple que:

$$\mathbf{S}_{1,n}\mathbf{S}_{p,q} = \mathbf{S}_{n+1-q,n+1-p}\mathbf{S}_{1,n}. \quad (4.3)$$

(Ver Figura 4.26)

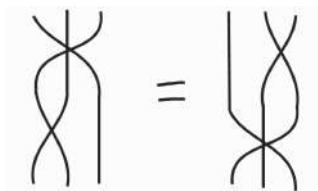


Figura 4.26.: $\mathbf{S}_{1,3}\mathbf{S}_{1,2} = \mathbf{S}_{2,3}\mathbf{S}_{1,3}$ en \mathbf{J}_3

Notamos que como una trenza de cactus el generador $\mathbf{S}_{n+1-q,n+1-p}$ se obtiene del generador $\mathbf{S}_{p,q}$ por medio de una reflexión por una recta vertical. Teniendo en cuenta esta propiedad y la propiedad en 4.3, tenemos que para cualquier trenza de cactus $\mathbf{b} \in \mathbf{J}_n$ se cumple que

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{S}_{1,n}^2 = \mathbf{S}_{1,n}\mathbf{b}^*\mathbf{S}_{1,n}$$

donde \mathbf{b}^* se obtiene de \mathbf{b} por medio una reflexión por una recta vertical (ver Figura 4.27). Análogo a como nos lo dice el teorema de Markov de la teoría de nudos (ver [2] y para una versión de este teorema para los garabatos [8]) tenemos que $\widehat{\mathbf{b}}$ y $\widehat{\mathbf{b}^*}$, las cerraduras de Alexander de \mathbf{b} y \mathbf{b}^* respectivamente, son cactus doodles equivalentes y, además es claro que $\widehat{\mathbf{b}^*}$ es el *flip* de $\widehat{\mathbf{b}}$.

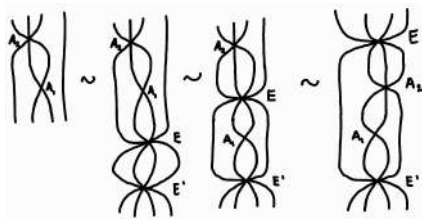


Figura 4.27.

Si tenemos un cactus doodle cualquiera $\mathbf{c} \subset \mathbb{S}^2$, usamos el algoritmo dado en el Teorema 3.1 para ver a \mathbf{c} como la cerradura de una trenza de cactus; usando

4. Diagramas de Gauss y Flips

el procedimiento descrito en los anteriores párrafos y los movimientos inversos, pero reflejados, de los movimientos que usamos para ver a \mathbf{c} como la cerradura de una trenza de cactus, podemos ver que \mathbf{c}^* (el flip de \mathbf{c}) es equivalente a \mathbf{c} . \square .

Definición 4.12. La sucesión de movimientos que nos lleva de un cactus doodle \mathbf{c} a su flip \mathbf{c}^* la vamos a llamar un movimiento *flip*.

Observación 4.10. Podemos notar que un movimiento *flip* entre un cactus doodle y su *flip* involucra movimientos de tipo Ψ y si es necesario, la creación y posterior aniquilación de puntos de intersección con movimientos Φ^\pm . De hecho se puede ver que para algunos cactus doodles es imposible ir de \mathbf{c} a \mathbf{c}^* sin crear y eliminar puntos de intersección; si esto fuera cierto, cualquier garabato sería equivalente a su flip (esto en el sentido de garabatos). Sin embargo, si consideramos un garabato minimal \mathbf{c} que contenga un pentágono como 2-celda en la subdivisión celular que define este en la esfera, este no es necesariamente isotópico a su *flip* (para ver esto consideramos el orden cíclico en dirección positiva de las 2-celdas que son adyacentes al pentágono), con lo cual el Teorema 2.2 nos dice que los dos garabatos pertenecen a diferentes clases de equivalencia de garabatos.

4.3.2. El *flip* de un diagrama de Gauss

Jugando un poco con las etiquetas en a los puntos de intersección de una cactus doodle orientado \mathbf{c} (como en la Figura 4.27), podemos ver que el diagrama de Gauss de su flip \mathbf{c}^* es el diagrama de Gauss de \mathbf{c} , pero con los ordenes cíclicos orientados inversos en los conjuntos de vértices de los poligonos del correspondiente diagrama base. Teniendo en cuenta esto es lógico hacer la siguiente definición.

Definición 4.13. Sea $\overline{\mathbf{D}}$ un diagrama de Gauss, entonces:

1. El *flip* de $\overline{\mathbf{D}}$ es el diagrama de Gauss con diagrama base \mathbf{D} y con el orden cíclico ordenado inverso para todo polígono $\mathbf{A} \in \mathbf{D}$.
2. un movimiento *flip* en diagramas de Gauss es el movimiento que transforma un diagrama en su flip.

5. Cactus Doodles Minimales

En esta capítulo estudiamos los *cactus doodles* orientados de una componente, minimales con respecto al número de puntos de intersección. Se demuestra que, módulo isotopías de la esfera, movimientos de tipo Ψ y movimientos *flip* tal *cactus doodle* minimal es único.

5.1. Cactus doodles minimales

La definición de equivalencia para los *cactus doodles* que usamos en este capítulo es un más estricta que en el resto de esta tesis. Consideramos que dos *cactus doodles* son equivalentes si uno se puede transformar al otro por medio de isotopías de la esfera, movimientos de tipo Φ^\pm y movimientos de tipo Ψ . En otras palabras, excluimos de la consideración los movimientos de tipo $[\mathbf{R1}]^\pm$. Todos los *cactus doodles* que consideramos en este capítulo son orientados a menos que se especifique lo contrario. Como ya lo señalamos, consideramos que un *cactus doodle* es *minimal* si este tiene el mínimo numero de puntos de intersección con respecto a todos los *cactus doodles* en su clase de equivalencia.

Teorema 5.1. *Sean $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ dos cactus doodles minimales equivalentes. Existe una sucesión $\{\tilde{\mathbf{c}}_i\}_{i=0}^m$ de cactus doodles que comienza con \mathbf{c} y termina con $\tilde{\mathbf{c}}$, tal que cada dos términos consecutivos se diferencian por una isotopía de la esfera, un movimiento de tipo Ψ o por un movimiento flip.*

La idea de la demostración de este teorema es ir cambiando partes de la sucesión original por sucesiones de *cactus doodles* en las cuales sus términos tienen menos puntos de intersección, para esto vamos a dar el *Lema de reducción* que vamos a demostrar en la Sección 5.2 de este capítulo. Antes de continuar vamos a dar un par de definiciones necesarias para la demostración del lema y el teorema.

Definición 5.1. Dado un *cactus doodle* \mathbf{c} vamos a denotar con $|\mathbf{c}|$ al número de puntos de intersección de este.

Definición 5.2 (Orden de Diagramas de Gauss). Si $\overline{\mathbf{D}}$ es un diagrama de Gauss, entonces el *orden* de $\overline{\mathbf{D}}$ es el número de polígonos (o etiquetas) en su diagrama base, es decir

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}) = \text{Orden}(\mathbf{D})$$

Podemos notar que si se tiene un *cactus doodle* \mathbf{c} y $\overline{\mathbf{D}}$ es su diagrama de Gauss, entonces se tiene que

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}) = |\mathbf{c}|.$$

5.2. Lema de reducción

5.2.1. El enunciado del lema y los tres casos

Si en una sucesión de *cactus doodles* dos términos consecutivos de la sucesión son iguales vamos a decir que estos se diferencian por un *movimiento trivial*. Lo mismo vamos a decir para el caso análogo en los diagramas base y los diagramas de Gauss.

La demostración del Teorema 5.1 se basa en el siguiente resultado:

Lema 5.1. *Si se tiene una sucesión de cactus doodles $\{\mathbf{c}_i\}_{i=0}^n$ tales que*

- $\mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_1$ es un movimiento de tipo Φ^+ .
- $\mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{c}_{i+1}$ es un movimiento de tipo Ψ para todo $i = 1, \dots, n-2$.
- $\mathbf{c}_{n-1} \rightarrow \mathbf{c}_n$ es un movimiento de tipo Φ^- .

entonces existe una sucesión de cactus doodles $\{\widehat{\mathbf{c}}_j\}_{j=0}^m$ tales que

- dos cactus doodles sucesivos se diferencian por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Φ^\pm , movimientos de tipo Ψ o flips.
- $\widehat{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{c}_0$.
- $\widehat{\mathbf{c}}_m = \mathbf{c}_n$.
- $|\widehat{\mathbf{c}}_j| \leq |\mathbf{c}_0| = |\mathbf{c}_n|$ para todo $j = 0, \dots, m$.

Demostración: Para cada *cactus doodle* \mathbf{c}_i en la sucesión vamos a tomar su diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i$. Por las proposiciones 4.6 y 4.7 tenemos que la sucesión de diagramas de Gauss $\{\overline{\mathbf{D}}_i\}_{i=0}^n$ es tal que $\overline{\mathbf{D}}_0 \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_1$ es un movimiento de tipo Φ^+ , para todo $i = 1, \dots, n-2$ se tiene que $\overline{\mathbf{D}}_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_{i+1}$ es un movimiento de tipo Ψ y $\overline{\mathbf{D}}_{n-1} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_n$ es un movimiento de tipo Φ^- , con lo cual podemos concluir que

- El movimiento inicial $\overline{\mathbf{D}}_0 \xrightarrow{\Phi^+} \overline{\mathbf{D}}_1$ crea dos polígonos adyacentes \mathbf{A}, \mathbf{A}' .
- El movimiento final $\overline{\mathbf{D}}_{n-1} \xrightarrow{\Phi^-} \overline{\mathbf{D}}_n$ elimina dos polígonos adyacentes \mathbf{B}, \mathbf{B}' .

Ya que para todo $i = 1, \dots, n-1$ los diagramas de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i$ tienen los mismos polígonos pero en diferentes posiciones y con diferentes órdenes cíclicos orientados en sus conjuntos de vértices, vamos a denotar con \mathbf{P} a el conjunto de elementos en estos diagramas; y, para un polígono $\mathbf{A} \in \mathbf{P}$ vamos a denotar con $\mathbf{V}(\mathbf{A})$ a su conjunto de vértices. Podemos notar que con respecto a los polígonos que se crean o se eliminan tenemos tres casos:

1. Las polígonos que se crean son iguales a las que se eliminan, es decir,

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\} = \{\mathbf{B}, \mathbf{B}'\}.$$

2. Uno de los polígonos que se crea es igual a uno de los polígonos que se eliminan, es decir, $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\} \cap \{\mathbf{B}, \mathbf{B}'\}$ es exactamente un elemento.

3. Las polígonos que se crean son diferentes a los que se eliminan, es decir que

$$\{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\} \cap \{\mathbf{B}, \mathbf{B}'\} = \emptyset.$$

Para cada uno de estos casos vamos a derivar una nueva sucesión de diagramas de Gauss entre $\overline{\mathbf{D}_0}$ y $\overline{\mathbf{D}_n}$, o su *flip*, en la cual cada dos términos consecutivos se diferencian por movimientos fundamentales para diagramas este tipo y cuyos órdenes son menores o iguales que $\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}_0}) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}_n})$. Los diagramas de estas sucesiones son realizables de tal forma que, si añadimos algunas isotopías de la esfera o movimientos *flip* para *cactus doodles*, tenemos una sucesión de *cactus doodles* entre \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_n que cumplen con las condiciones que queremos.

5.2.2. Caso 1

Supongamos que $|\mathbf{V}(\mathbf{A})| = |\mathbf{V}(\mathbf{A}')| = m$, $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\mathbf{V}(\mathbf{A}') = \{a'_1, \dots, a'_m\}$ y que

$$\varphi_1 : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$$

$$a_j \mapsto a'_j.$$

es el mapeo biyectivo entre los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica el movimiento inicial.

Podemos notar que en el diagrama base \mathbf{D}_1 tenemos m intervalos disjuntos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ tales que para todo $j = 1, \dots, m$:

- a_j, a'_j están en los puntos extremos de \mathbf{I}_j .
- En el interior de \mathbf{I}_j no hay otros vértices de los m -ágonos \mathbf{A}, \mathbf{A}' .

(ver Figura 5.1).

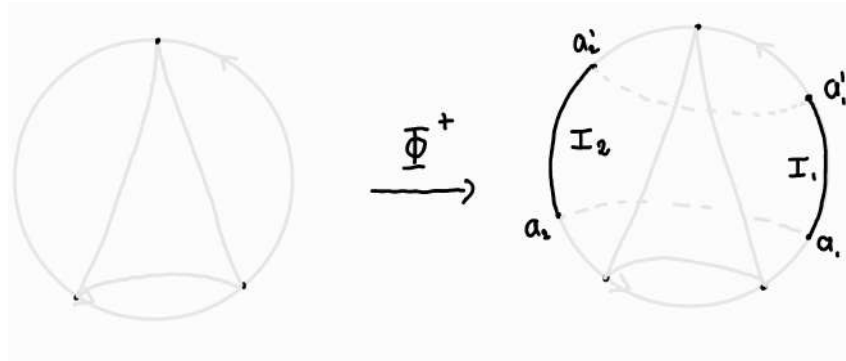


Figura 5.1.

En general, para todo $i = 1, \dots, n - 1$ en el diagrama base \mathbf{D}_i vamos a considerar los intervalos disjuntos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ tales que para todo $j = 1, \dots, m$:

- Los vértices a_j, a'_j están en los puntos extremos de \mathbf{I}_j .

5. Cactus Doodles Minimales

- En su interior no hay otros vértices de $\mathbf{V}(\mathbf{A})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{A}')$.

Estos intervalos siempre se pueden encontrar ya que tanto \mathbf{A} como \mathbf{A}' son m -ángonos y por esta razón no se puede aplicar un movimiento de tipo Ψ en estos dos polígonos. Además, podemos notar que el intervalo \mathbf{I}_j de \mathbf{D}_{i+1} se obtiene del intervalo \mathbf{I}_j de \mathbf{D}_i al aplicar el movimiento de tipo Ψ en el diagrama base \mathbf{D}_i como en la Figura 5.2; y, como ya se vio, en el diagrama inicial de esta iteración, que es \mathbf{D}_1 , estos intervalos son disjuntos.

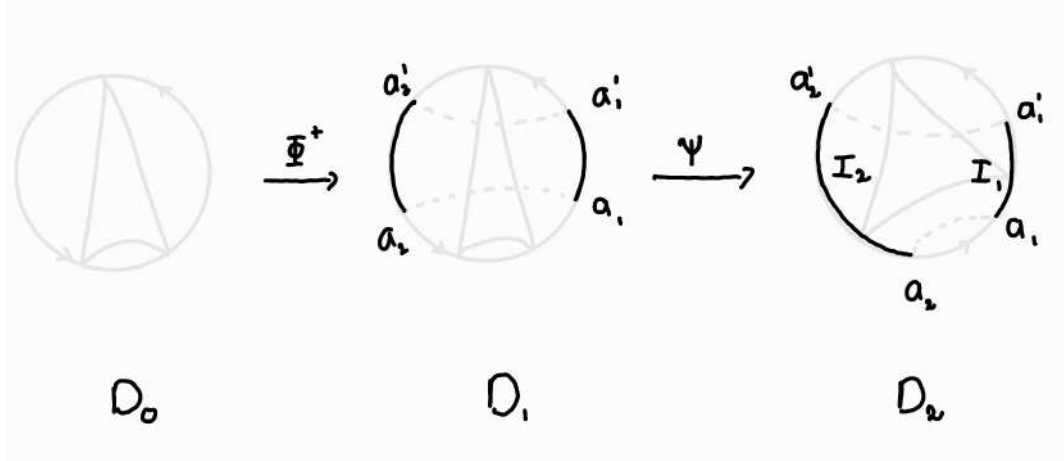


Figura 5.2.

Para todo $i = 1, \dots, n - 1$ vamos a tomar el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'_i$ que se obtiene a partir de $\overline{\mathbf{D}}_i$ al aplicarle las siguientes modificaciones:

- Eliminamos los m -ángonos \mathbf{A}, \mathbf{A}' y sus órdenes cíclicos orientados del diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i$.
- Para todo polígono $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$, si $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{X}}$ es el subconjunto de vértices de \mathbf{X} que se encuentra en algunos de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ de \mathbf{D}_i , entonces el nuevo orden cíclico orientado para $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ se obtiene de tomar el orden cíclico inducido inverso en $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{X}}$ y mantener el orden cíclico inducido en su complemento.

La modificación del numeral *ii*. la podemos interpretar de la siguiente manera, si ${}^i\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$ es el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ en $\overline{\mathbf{D}}_i$, entonces en $\overline{\mathbf{D}}'_i$ el conjunto de vértices $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ tiene el orden cíclico orientado:

$${}^i\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}} = [{}^i\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}}^{\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{X}}}]^{\mathcal{R}} + {}^i\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{V}(\mathbf{X}) - \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{X}}}. \quad (5.1)$$

Vamos a considerar la sucesión de diagramas de Gauss $\{\overline{\mathbf{D}}'_i\}_{i=1}^{n-1}$. Podemos notar que para todo $i = 1, \dots, n - 1$ tenemos que $\mathbf{D}'_i = \partial_{\mathbf{A}\mathbf{A}'}^2(\mathbf{D}_i)$; y así, por la Observación 4.4, sabemos que a nivel de diagramas base los diagramas sucesivos de esta nueva sucesión se diferencian por movimientos de tipo Ψ o movimientos triviales. Por otro lado, podemos notar que $\mathbf{D}'_1 = \mathbf{D}_0$ y ya que en el diagrama base \mathbf{D}_1 no hay vértices en el interior de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$, podemos concluir que para todo $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ los ordenes cíclicos orientados ${}^1\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$ y ${}^1\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}}$ son iguales, con lo cual tenemos que $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$. También,

5. Cactus Doodles Minimales

podemos ver que $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$ es igual a $\overline{\mathbf{D}_n}$ o el *flip* de este diagrama, primero podemos notar que $\mathbf{D}'_{n-1} = \mathbf{D}_n$ y además, tenemos dos posibles situaciones en el diagrama base \mathbf{D}_{n-1} :

- (1) Los vértices de todo polígono en $\mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ se encuentran en el interior de algunos de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ (ver Figuras 5.3a), con lo cual para todo $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ podemos concluir que

$${}^{n-1}\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}} = {}^{n-1}\mathbf{O}_{\mathbf{X}}^{\mathcal{R}}$$

y así tenemos que $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$ es el flip de $\overline{\mathbf{D}_n}$.

- (2) No hay vértices de algún elemento de $\mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ en el interior de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ (ver Figuras 5.3b), con lo cual para todo $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ podemos concluir que

$${}^{n-1}\tilde{\mathbf{O}}_{\mathbf{X}} = {}^{n-1}\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$$

y así tenemos que $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}} = \overline{\mathbf{D}_n}$.

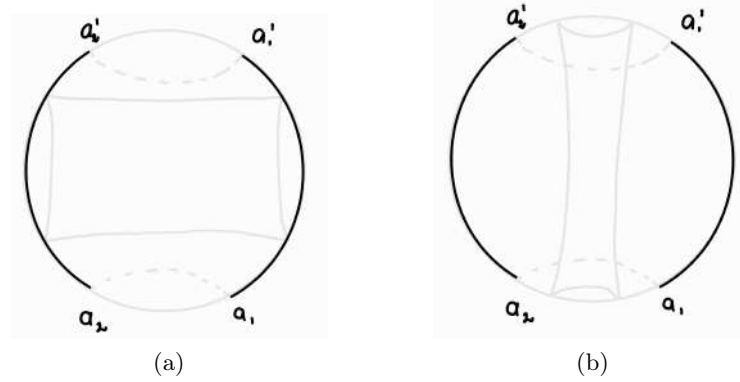


Figura 5.3.

Por otro lado, queremos ver que para todo $i = 1, \dots, n - 2$, el movimiento $\overline{\mathbf{D}'_i} \rightarrow \overline{\mathbf{D}'_{i+1}}$ es de hecho un movimiento de tipo Ψ o un movimiento trivial para diagramas de Gauss. Ya que $\overline{\mathbf{D}_i} \rightarrow \overline{\mathbf{D}_{i+1}}$ es un movimiento de tipo Ψ en dos polígonos $\mathbf{1}, \mathbf{2} \in \mathbf{P}$ tenemos dos posibles casos:

- (1.) Alguno de estos dos polígonos es igual a \mathbf{A} o \mathbf{A}' .
- (2.) Las dos polígonos son diferentes a \mathbf{A} y \mathbf{A}' .

Para el *caso* (1.) podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mathbf{2} = \mathbf{A}$, que $|\mathbf{V}(\mathbf{A})| < |\mathbf{V}(\mathbf{1})|$ y que el mapeo inyectivo $\varphi : \mathbf{V}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1})$ entre los vértices adyacentes de \mathbf{A} y $\mathbf{1}$ con respecto a los cuales se aplica el movimiento esta dado por $a_j \mapsto c_j$. Es decir en el diagrama base \mathbf{D}_i se tiene una de las situaciones de la Figura 5.4.

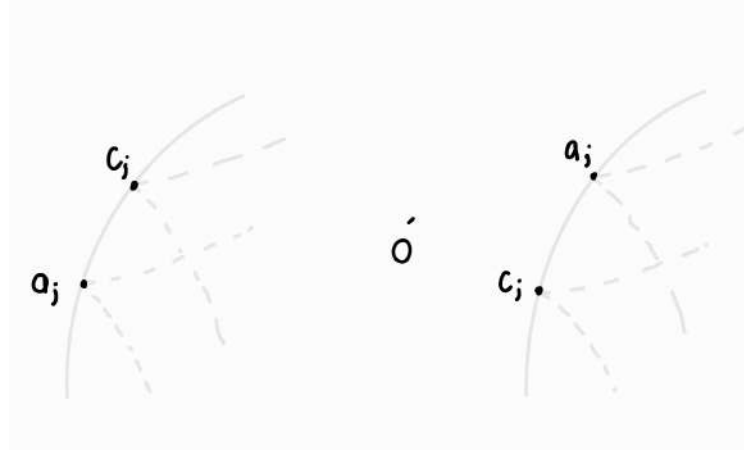


Figura 5.4.

Por la Observación 4.4 sabemos que $\mathbf{D}'_i \rightarrow \mathbf{D}'_{i+1}$ es un movimiento trivial de diagramas base, por lo cual queremos ver que los órdenes cíclicos orientados de los conjuntos de vértices de todos los polígonos en $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$ son iguales en \mathbf{D}'_i y \mathbf{D}'_{i+1} . Primero podemos notar que los vértices de los polígonos en $\mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{1}\}$ no cambian su posición tras el movimiento, con lo cual sus órdenes cíclicos orientados deben ser iguales en los dos diagramas de Gauss. Por otro lado, ya que los vértices de \mathbf{A} y \mathbf{A}' están en los extremos de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$, para cada vértice $c_j \in \mathbf{V}(\mathbf{1})$ tenemos dos posibles situaciones antes de aplicar el movimiento:

- a. El vértice c_i se encuentra en el interior del intervalo \mathbf{I}_j del diagrama base \mathbf{D}_i .
- b. El vértice c_j no se encuentra en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ del diagrama base \mathbf{D}_i .

Tras el movimiento $\overline{\mathbf{D}}_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_{i+1}$:

- En la situación *a.* el vértice c_j sale del intervalo \mathbf{I}_j y en especial no se encuentra en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ del diagrama base \mathbf{D}_{i+1} .
- En la situación *b.* el vértice c_j se encuentra en el interior del intervalos \mathbf{I}_j .

ver la Figura 5.5.

5. Cactus Doodles Minimales

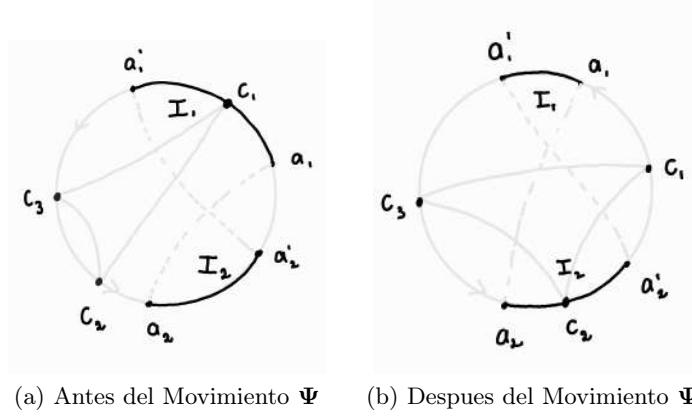


Figura 5.5.

Ahora supongamos que:

- \tilde{V}_1 es el subconjunto de vértices de $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A})) \subset \mathbf{V}(\mathbf{1})$ que en el diagrama base \mathbf{D}_i se encuentra en alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- \tilde{V}_2 es el subconjunto de vértices de $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A})) \subset \mathbf{V}(\mathbf{1})$ que en el diagrama base \mathbf{D}_i no se encuentra en ninguno de intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- \tilde{V}_3 es el subconjunto de vértices de $V(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A}))$ que en el diagrama base \mathbf{D}_i se encuentran en algunos de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- \tilde{V}_4 es el subconjunto de vértices de $V(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A}))$ que en el diagrama base \mathbf{D}_i no se encuentra en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.

Estos conjuntos son disjuntos, además tenemos que

$$\mathbf{V}(\mathbf{1}) = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \tilde{V}_3 \cup \tilde{V}_4$$

y

$$\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A})) = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2.$$

Por otro lado, $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_3$ es el subconjunto de vértices del polígono $\mathbf{1}$ cuyo orden cíclico orientado inducido se invierte en el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'_i$ y $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A}))$ es el subconjunto de vértices del polígono $\mathbf{1}$ cuyo orden cíclico orientado inducido se invierte tras el movimiento $\overline{\mathbf{D}}_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_{i+1}$. Si el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ en $\overline{\mathbf{D}}_i$ esta dado por:

$${}^i \mathbf{O}_1 := \mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_4}, \quad (5.2)$$

entonces en $\overline{\mathbf{D}}_{i+1}$ este conjunto tiene el orden ciclico orientado

$$\begin{aligned} {}^{i+1} \mathbf{O}_1 &:= [\mathbf{O}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A}))}]_{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{A}))} \\ &= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2}]_{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3 \cup \tilde{V}_4} \\ &= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1}]_{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2}]_{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_4}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

5. Cactus Doodles Minimales

Y en el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'_i$ el conjunto $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ tiene el orden cíclico orientado

$$\begin{aligned}
 {}^i\tilde{\mathbf{O}}_1 &:= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1})-\tilde{V}} \\
 &= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_3}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2 \cup \tilde{V}_4} \\
 &= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2} + [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_4}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Por nuestro análisis de las situaciones *a.* y *b.* los roles de los vértices en los conjuntos \tilde{V}_1 y \tilde{V}_2 se intercambian en \mathbf{D}_{i+1} y, ya que el resto de vértices del polígono $\mathbf{1}$ permanecen la misma posición tras el movimiento, los roles de vértices en los conjuntos \tilde{V}_3 y \tilde{V}_4 siguen siendo los mismos en \mathbf{D}_{i+1} ; con lo cual $\widehat{V} = \tilde{V}_2 \cup \tilde{V}_3$ es el subconjunto de vértices de $\mathbf{1}$ cuyo orden cíclico orientado inducido se invierte en $\overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$, esto y la ecuación 5.3, nos dice que en $\overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$ el conjunto de vértices de $\mathbf{1}$ tiene el orden cíclico orientado

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_1 &= [{}^{i+1}\mathbf{O}_1^{\widehat{V}}]\mathcal{R} + {}^{i+1}\mathbf{O}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1})-\widehat{V}} \\
 &= [[\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3}]\mathcal{R} + [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_4} \\
 &= [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_1}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_2} + [\mathbf{O}_1^{\tilde{V}_3}]\mathcal{R} + \mathbf{O}_1^{\tilde{V}_4}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Las ecuaciones 5.4 y 5.5 nos dicen que ${}^i\tilde{\mathbf{O}}_1 = {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_1$. Para el caso que $|\mathbf{V}(\mathbf{1})| < |\mathbf{V}(\mathbf{A})|$ básicamente podemos hacer el mismo análisis con la diferencia que $\mathbf{V}(\mathbf{1}) = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2$.

Para el Caso (2.) vamos a suponer que $|\mathbf{V}(\mathbf{2})| < |\mathbf{V}(\mathbf{1})|$ y que $\varphi : \mathbf{V}(\mathbf{2}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{1})$ es la función inyectiva entre los vértices adyacentes de $\mathbf{2}$ y $\mathbf{1}$ con respecto a los cuales se aplica el movimiento. Por la observación 4.4 sabemos que $\mathbf{D}'_i \rightarrow \mathbf{D}'_{i+1}$ es un movimiento de tipo Ψ , así que queremos ver que los ordenes cíclicos orientados de $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ cumplen con las condiciones para que $\overline{\mathbf{D}}'_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$ sea un movimiento de tipo Ψ en los polígonos $\mathbf{1}, \mathbf{2}$.

Ninguno de los vértices de los polígonos en \mathbf{P} entra o sale de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ tras el movimiento $\overline{\mathbf{D}}'_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$; de hecho si $g \in \mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $c \in \mathbf{V}(\mathbf{1})$ son dos vértices adyacentes en \mathbf{D}'_i que intercambian su posición tras este movimiento, tanto en \mathbf{D}'_i como en \mathbf{D}'_{i+1} tenemos que:

- Los vértices g, c están en el interior de uno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$; ó,
- Los vértices g, c no se encuentran en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.

(ver Figura 5.6)

5. Cactus Doodles Minimales

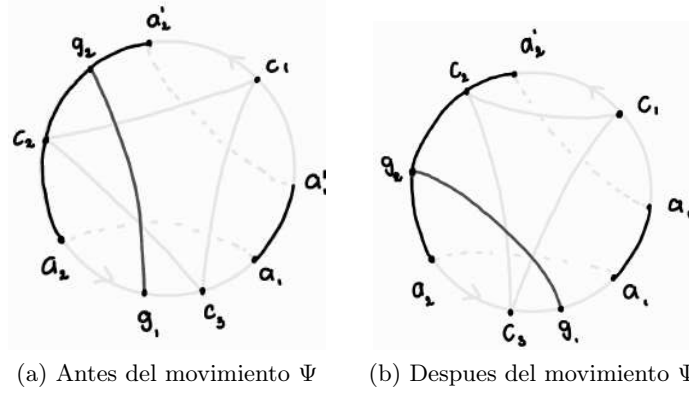


Figura 5.6.

Tanto en \mathbf{D}_i como en \mathbf{D}_{i+1} , supongamos que:

- G_1 es el subconjunto de vértices de $\mathbf{2}$ que están en alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- G_2 es el subconjunto de vértices de $\mathbf{2}$ que no se encuentran en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- C_1 es el subconjunto de vértices de $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2})) \subset \mathbf{V}(\mathbf{1})$ que están en el interior de alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- C_2 es el subconjunto de vértices de $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2})) \subset \mathbf{V}(\mathbf{1})$ que no se encuentran en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- C_3 es el subconjunto de vértices de $\mathbf{V}(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))$ que están en el interior de alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.
- C_4 es el subconjunto de vértices de $\mathbf{V}(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))$ que no se encuentran en ninguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$.

Todos estos subconjuntos son disjuntos, además se cumple que $\mathbf{V}(\mathbf{1}) = G_1 \cup G_2$, $\mathbf{V}(\mathbf{2}) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, $\varphi(G_1) = C_1$, $\varphi(G_2) = C_2$ y que $\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{1})) = C_1 \cup C_2$. Así, si en el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i$ los conjuntos de vértices $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ tienen respectivamente los ordenes cíclicos orientados

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{O}_2 &:= \mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_2^{G_1} + \mathbf{O}_2^{G_2}, \quad y \quad , \\
 {}^i\mathbf{O}_1 &:= \mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} + \mathbf{O}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} \\
 &= \mathbf{O}_1^{C_1} + \mathbf{O}_1^{C_2} + \mathbf{O}_1^{C_3} + \mathbf{O}_1^{C_4},
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

entonces, ya que aplicamos un movimiento de tipo Ψ en $\overline{\mathbf{D}}_i$ en los polígonos $\mathbf{1}$ y $\mathbf{2}$, tenemos que:

$$\varphi(\mathbf{O}_2^{\mathcal{R}}) = \mathbf{O}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))}.$$

Y así, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{O}_2) &= [\mathbf{O}_1^{\varphi(G_1)}]_{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_1^{\varphi(G_2)}]_{\mathcal{R}} \\
 &= [\mathbf{O}_1^{C_1}]_{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_1^{C_2}]_{\mathcal{R}}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

5. Cactus Doodles Minimales

Por otro lado ya que G_1 y $\tilde{C} = C_1 \cup C_3$ son los subconjuntos de $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{1})$, respectivamente, cuyo orden cíclico orientado inducido se invierte en $\overline{\mathbf{D}}'_i$ y $\overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$, en $\overline{\mathbf{D}}'_i$ los conjuntos de vértices $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ tienen, respectivamente, los órdenes cíclicos orientados dados por:

$$\begin{aligned} {}^i\tilde{\mathbf{O}}_2 &:= [\mathbf{O}_2^{G_1}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_2^{G_2} \quad , y, \\ {}^i\tilde{\mathbf{O}}_1 &:= [\mathbf{O}_1^{C_1}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_2} + [\mathbf{O}_1^{C_3}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_4} \\ &= {}^i\tilde{\mathbf{O}}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} + {}^i\tilde{\mathbf{O}}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1})-\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Y así, de las ecuaciones 5.7 y 5.8 tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi({}^i\tilde{\mathbf{O}}_2^{\mathcal{R}}) &= \varphi(\mathbf{O}_2^{G_1}) + \varphi(\mathbf{O}_2^{G_1})^{\mathcal{R}} \\ &= [\mathbf{O}_1^{C_1}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_2} \\ &= {}^i\tilde{\mathbf{O}}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} \end{aligned} \quad (5.9)$$

La ecuación 5.9 nos dice que en $\overline{\mathbf{D}}'_i$ podemos aplicar un movimiento de tipo Ψ en los polígonos $\mathbf{2}, \mathbf{1}$ con respecto a los vértices adyacente dados por la función inyectiva φ . Por otro lado, tenemos que en $\overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$ los conjuntos $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ tienen los órdenes cíclicos orientados, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\mathbf{O}_2 &= \mathbf{O}_2^{\mathcal{R}} = [\mathbf{O}_2^{G_1}]^{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_2^{G_2}]^{\mathcal{R}} \quad y \\ {}^{i+1}\mathbf{O}_1 &= [\mathbf{O}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{\mathbf{V}(\mathbf{1})-\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))} \\ &= [\mathbf{O}_1^{C_1}]^{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_1^{C_2}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_3} + \mathbf{O}_1^{C_4}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La ecuación 5.10 nos dice que los órdenes cíclicos orientados de $\mathbf{V}(\mathbf{2})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{1})$ en $\overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$ están dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_2 &= \mathbf{O}_2^{G_1} + [\mathbf{O}_2^{G_2}]^{\mathcal{R}} \quad y \\ {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_1 &= \mathbf{O}_1^{C_1} + [\mathbf{O}_1^{C_2}]^{\mathcal{R}} + [\mathbf{O}_1^{C_3}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_4} \end{aligned}$$

Y así, la anterior ecuación y la ecuación 5.8 nos dicen que

$$\begin{aligned} {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_2 &= {}^i\tilde{\mathbf{O}}_2^{\mathcal{R}} \quad y \text{ que} \\ {}^{i+1}\tilde{\mathbf{O}}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{1}))} &= \mathbf{O}_1^{C_1} + [\mathbf{O}_1^{C_2}]^{\mathcal{R}} \\ &= [[\mathbf{O}_1^{C_1}]^{\mathcal{R}} + \mathbf{O}_1^{C_2}]^{\mathcal{R}} \\ &= [{}^i\tilde{\mathbf{O}}_1^{\varphi(\mathbf{V}(\mathbf{2}))}]^{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

con lo cual podemos concluir que $\overline{\mathbf{D}}'_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$ es un movimiento de tipo Ψ .

5. Cactus Doodles Minimales

Finalmente, ya que la sucesión $\{\overline{\mathbf{D}}'_i\}_{i=1}^{n-1}$ es una sucesión de diagramas de Gauss entre $\overline{\mathbf{D}}_0$ y $\overline{\mathbf{D}}_n$, ó, el flip de este diagrama, en la que sus términos sucesivos se diferencian por movimientos de tipo Ψ o movimientos triviales, tenemos que para todo $i = 1, \dots, n-1$ se cumple que

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}'_i) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_0) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_n). \quad (5.11)$$

Además, por el Teorema 4.1 y la Proposición 4.7, ya que $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$ es un diagrama de Gauss que es realizable por medio del *cactus doodle* \mathbf{c}_0 , podemos concluir que:

- para todo $i = 1, \dots, n-1$ el diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'_i$ es realizable por medio de un *cactus doodle* c'_i . (Es claro que $c'_0 = \mathbf{c}_0$),
- el *cactus doodle* c'_n es isotópico a \mathbf{c}_n o a su flip,
- para todo $i = 1, \dots, n-2$ tenemos que $c'_i \rightarrow c'_{i+1}$ es el mismo movimiento fundamental (en su versión de *cactus doodles*) que el movimiento $\overline{\mathbf{D}}'_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}'_{i+1}$;

Ya que la ecuación 5.11 nos dice que todo *cactus doodle* en la sucesión $\{c'_i\}_{i=0}^n$ es tal que

$$|c'_i| = |\mathbf{c}_0| = |\mathbf{c}_n|,$$

añadiendo un movimiento *flip* en *cactus doodles* ó (y) una isotopia de la esfera, si es necesario, el anterior párrafo nos dice que esta es una sucesión de *cactus doodles* entre \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_n que cumple con las condiciones que queremos.

5.2.3. Caso 2

Supongamos que $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$, que $|\mathbf{V}(\mathbf{A})| = |\mathbf{V}(\mathbf{A}')| = |\mathbf{V}(\mathbf{B})| = m$, $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\mathbf{V}(\mathbf{A}') = \{a'_1, \dots, a'_m\}$ y que $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = \{b_1, \dots, b_m\}$, donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbf{V}(\mathbf{A}) &\rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{A}') \\ a_j &\mapsto a'_j \end{aligned} \quad (5.12)$$

es el mapeo biyectivo que conecta los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica el movimiento inicial $\overline{\mathbf{D}}_0 \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_1$, y,

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbf{V}(\mathbf{A}') &\rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{B}) \\ a'_j &\mapsto b_j \end{aligned} \quad (5.13)$$

es el mapeo biyectivo que conecta a los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica el movimiento final $\overline{\mathbf{D}}_{n-1} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_n$.

Para todo $i = 1, \dots, n$ vamos a considerar en el diagrama base \mathbf{D}_i los m intervalos disjuntos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ tales que:

- Los vértices a_j, b_j están en los extremos del intervalos \mathbf{I}_j .
- a'_j esta en el interior de \mathbf{I}_j .

(Ver Figuras 5.7a, 5.7b)

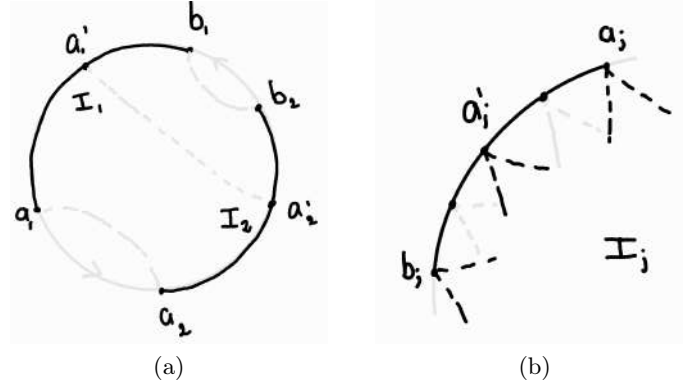


Figura 5.7.: Intervalos I_j

Ya que los polígonos $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}$ tienen el mismo número de vértices, no es posible aplicar un movimiento de tipo Ψ en ningún par de estos; así, de forma análoga a como lo hicimos para el **Caso 1** tenemos que estos intervalos siempre existen y son disjuntos.

Para todo $i = 1, \dots, n-1$ vamos a tomar los diagramas de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i', \overline{\mathbf{D}}_i'', \overline{\mathbf{D}}_i'''$ que se obtienen a partir del diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}_i$ al aplicarle las siguientes modificaciones:

- a. $\overline{\mathbf{D}}_i'$:=
 - i. Eliminamos los m -ágonos \mathbf{A}, \mathbf{A}' y sus órdenes cíclicos orientados.
 - ii. Para todo polígono de $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}'\}$, si $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ es el subconjunto de vértices de \mathbf{X} que se encuentran entre los vértices de \mathbf{A}, \mathbf{A}' de alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ de \mathbf{D}_i ; entonces, el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ en $\overline{\mathbf{D}}_i'$ se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso en $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.
- b. $\overline{\mathbf{D}}_i''$:=
 - i. Eliminamos los m -ágonos \mathbf{A}, \mathbf{B} y sus órdenes cíclicos orientados.
 - ii. Para todo polígono de $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}'\}$, si $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ es el subconjunto de vértices de \mathbf{X} que se encuentran en el interior de alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$; entonces, el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ en $\overline{\mathbf{D}}_i''$ se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso en $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.
 - iii. En $\overline{\mathbf{D}}_i''$ tomamos el orden cíclico ordenado inversos de $\mathbf{V}(\mathbf{A}')$.
- c. $\overline{\mathbf{D}}_i'''$:=
 - i. Eliminamos los m -ágonos \mathbf{B}, \mathbf{A}' y sus órdenes cíclicos orientados.

5. Cactus Doodles Minimales

- ii. Para todo polígono de $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{B}, \mathbf{A}'\}$, si $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ es el subconjunto de vértices de \mathbf{X} que se encuentran entre los verices de \mathbf{A}' , \mathbf{B} de alguno de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$; entonces, el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ en $\overline{\mathbf{D}}'_i$ se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso en $\tilde{V}_{\mathbf{X}}$ y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.

De forma parecida a como lo hicimos para el **Caso 1** y, teniendo en cuenta que el inverso de un movimiento de tipo Ψ es nuevamente un movimiento de tipo Ψ , podemos ver que las sucesiones

$$\begin{aligned} & \underbrace{\overline{\mathbf{D}}'_1, \dots, \overline{\mathbf{D}}'_{n-1}}_I \\ & \underbrace{\overline{\mathbf{D}}''_{n-1}, \dots, \overline{\mathbf{D}}''_1}_{II} \\ & \underbrace{\overline{\mathbf{D}}'''_1, \dots, \overline{\mathbf{D}}'''_{n-1}}_{III} \end{aligned} \tag{5.14}$$

son sucesiones de diagramas de Gauss en las cuales sus términos sucesivos se diferencian por movimientos de tipo Ψ o movimientos triviales. Además, tenemos que $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$ y que $\overline{\mathbf{D}}'''_{n-1} = \overline{\mathbf{D}}_n$; para esto último, simplemente debemos tener en cuenta que en todo intervalo \mathbf{I}_j del diagrama base \mathbf{D}_{n-1} no hay vértices entre a'_j y b_j como en la Figura 5.8, y que $\partial_{\mathbf{A}'\mathbf{B}}^2(\mathbf{D}_{n-1}) = \mathbf{D}_n$.

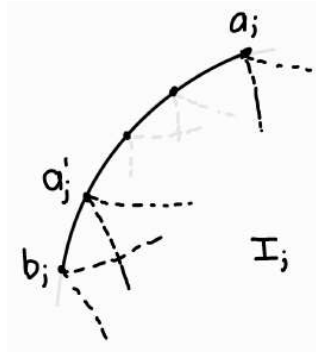


Figura 5.8.: \mathbf{I}_j en \mathbf{D}_{n-1}

En general podemos notar que para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que

1. $\partial_{\mathbf{A},\mathbf{A}'}^2(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}'_i$,
2. $\partial_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^2(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}''_i$,
3. $\partial_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^2(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}'''_i$

Ya que los polígonos \mathbf{A}' , \mathbf{B} son adyacentes en el diagrama base \mathbf{D}_{n-1} , por la Proposición 4.4 tenemos que los diagramas base \mathbf{D}'_{n-1} y \mathbf{D}''_{n-1} son iguales. De forma análoga podemos ver que los diagramas base \mathbf{D}''_1 y \mathbf{D}'''_1 son iguales. Además, podemos notar que al ver a \mathbf{D}'_{n-1} y \mathbf{D}''_{n-1} como representantes del

5. Cactus Doodles Minimales

mismo diagrama base \mathbf{D} , por la Observación 4.5 el m -ágono \mathbf{B} y el m -ágono \mathbf{A}' corresponden al mismo m -ágono en \mathbf{D} . Además, si \mathbf{O}_B es el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ en $\overline{\mathbf{D}_{n-1}}$ y $\mathbf{O}_{A'}$ es el orden cíclico ordenado de $\mathbf{V}(\mathbf{A}')$ en $\overline{\mathbf{D}_{n-1}}$ tenemos que:

- \mathbf{O}_B es el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ en $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$.
- $\mathbf{O}_{A'}^{\mathcal{R}}$ es el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{A}')$ en $\overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$.

Y ya que el mapeo biyectivo φ_2 que conecta los vértices adyacentes de estos dos polígonos es tal que $\varphi_2(\mathbf{O}_{A'}^{\mathcal{R}}) = \mathbf{O}_B$, tenemos que los vertices del m -ágono que representan \mathbf{A}' y \mathbf{B} en \mathbf{D} tienen el mismo orden cíclico orientado en $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$ y $\overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$. Por otro lado, los ordenes cíclicos orientados de los demás polígonos en \mathbf{P} no cambian al tomar $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$ y $\overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$, con lo cual debemos tener que $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}} = \overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$. De forma análoga tenemos que $\overline{\mathbf{D}'_1} = \overline{\mathbf{D}''_1}$.

Si conectamos las sucesiones **I**, **II**, **II** de la ecuación 5.14 por los movimientos triviales $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}} \rightarrow \overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$ y $\overline{\mathbf{D}'_1} \rightarrow \overline{\mathbf{D}''_1}$, tenemos una sucesión de diagramas de Gauss entre $\overline{\mathbf{D}_0}$ y $\overline{\mathbf{D}_n}$, en la cual sus términos sucesivos se diferencian por movimiento de tipo Ψ o movimientos triviales; para todo diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ de esta sucesión tenemos que:

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}_0}) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}_n}). \quad (5.15)$$

Así, ya que el *cactus doodle* \mathbf{c}_0 realiza a $\overline{\mathbf{D}_0} = \overline{\mathbf{D}'_1}$ por la Proposición 4.7 y el Teorema 4.1, tenemos que para todo $j = 1, \dots, n-1$ existen *cactus doodles*:

- c'_i que realiza a $\overline{\mathbf{D}'_i}$,
- c''_i que realiza a $\overline{\mathbf{D}''_i}$,
- c'''_i que realiza a $\overline{\mathbf{D}'''_i}$,

tales que la sucesión de *cactus doodles*

$$\{c'_i\}_{i=1}^{n-1} \cup \{c''_i\}_{i=n-1}^1 \cup \{c'''_i\}_{i=1}^{n-1} \quad (5.16)$$

es tal que $c'_0 = \mathbf{c}_0$, c'_{n-1} es isotópica (igual) a c''_{n-1} , c'_1 es isotópica (igual) a c'''_1 , los *cactus doodles* sucesivos se diferencian por los correspondientes movimientos fundamentales en cactus doodles que sus diagramas de Gauss (isotopías de la esfera en caso de tener un movimiento trivial) y c'''_{n-1} es isotópica a \mathbf{c}_n .

Lo anterior nos dice que la sucesión de la ecuación (5.16) es una sucesión de *cactus doodles* entre \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_n (si es necesario se añade una isotopía de la esfera), y la ecuación (5.15) nos dice que todo *cactus doodle* \mathbf{c} en esta sucesión es tal que:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{c}_0| = |\mathbf{c}_n|.$$

5.2.4. Caso 3

Supongamos que $|\mathbf{V}(\mathbf{A})| = |\mathbf{V}(\mathbf{A}')| = m$ y que $|\mathbf{V}(\mathbf{B})| = |\mathbf{V}(\mathbf{B}')| = m'$ donde $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\mathbf{V}(\mathbf{A}') = \{a'_1, \dots, a'_m\}$, $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\mathbf{V}(\mathbf{B}') = \{b'_1, \dots, b'_m\}$; donde,

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbf{V}(\mathbf{A}) &\rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{A}') \\ a_j &\mapsto a'_j \end{aligned} \quad (5.17)$$

es el mapeo biyectivo que conecta los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica el movimiento inicial $\overline{\mathbf{D}}_0 \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_1$, y,

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbf{V}(\mathbf{B}) &\rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{B}') \\ b_j &\mapsto b'_j \end{aligned} \quad (5.18)$$

es el mapeo biyectivo que conecta los pares de vértices con respecto a los cuales se aplica el movimiento final $\overline{\mathbf{D}}_{n-1} \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_n$.

Para todo $i = 1, \dots, n-1$ vamos a considerar en el diagrama base \mathbf{D}_i los m intervalos disjuntos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$ tales que para todo $j = 1, \dots, m$:

- Los vértices a_j, a'_j están en los extremos del intervalos \mathbf{I}_j

y los m' -intervalos disjuntos $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{m'}$ tales que para todo $l = 1, \dots, m'$:

- Los vértices b_l, b'_l están en los extremos del intervalos \mathbf{J}_l

A diferencia de los intervalos $\mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_m$, para ver que en todo diagrama base \mathbf{D}_i los intervalos $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{m'}$ existen, partimos del diagrama base \mathbf{D}_{n-1} y usamos los movimientos inversos de la sucesión.

Ya que podemos tener que $m \neq m'$ es posible que para algún $i \in \{1, \dots, n-2\}$ el movimiento $\overline{\mathbf{D}}_i \rightarrow \overline{\mathbf{D}}_{i+1}$ sea un movimiento de tipo Ψ , ya sea en los poligonos \mathbf{A}, \mathbf{B} ó \mathbf{A}, \mathbf{B}' ó \mathbf{A}', \mathbf{B}' ó \mathbf{A}', \mathbf{B} (para un ejemplo ver Figura 5.9); Así que es posible que en algún diagrama base de la sucesión, los intervalos $\mathbf{I}_1 \dots, \mathbf{I}_m$ no sean disjuntos de los intervalos $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{m'}$; por lo cual, para todo diagrama base \mathbf{D}_i con $i = 1, \dots, n-1$ también vamos a tomar las diferencias simétricas:

$$\tilde{\mathbf{I}}_j = \mathbf{I}_j - \mathbf{I}_j \cap [\mathbf{J}_1 \cup \dots \cup \mathbf{J}_{m'}]$$

y

$$\tilde{\mathbf{J}}_l = \mathbf{J}_l - \mathbf{J}_l \cap [\mathbf{I}_1 \cup \dots \cup \mathbf{I}_m]$$

donde $j = 1, \dots, m$ y $l = 1, \dots, m'$.

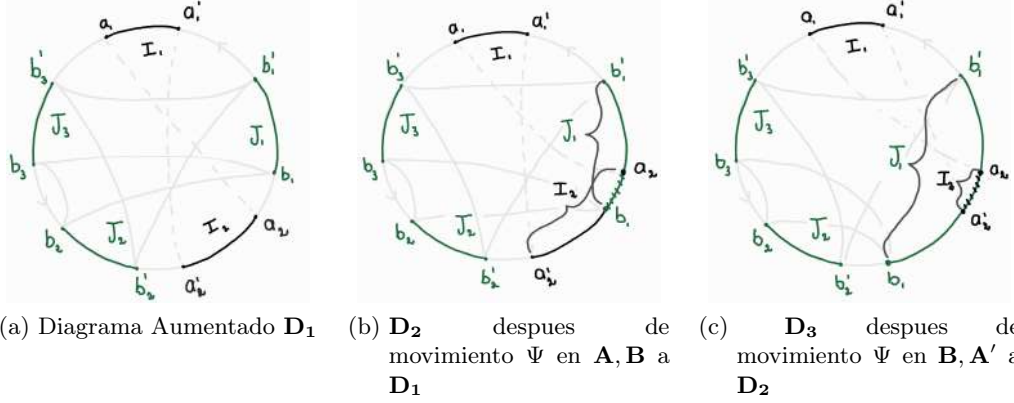


Figura 5.9.

Para todo $i = 1, \dots, n - 1$ vamos a tomar los diagramas de Gauss \overline{D}'_i , \overline{D}''_i y \overline{D}'''_i que se obtienen del diagrama de Gauss \overline{D}_i al aplicarle las siguientes modificaciones:

- a. $\overline{D}'_i :=$
 - i. Eliminamos los m -ágonos A, A' y sus ordenes cíclicos orientados.
 - ii. Para todo polígono $X \in \mathbf{P} - \{A, A'\}$ si \widetilde{V}_X es el subconjunto de vértices de X que se encuentran en el interior de alguno de los intervalos I_1, \dots, I_m de D_i ; entonces, el orden cíclico orientado de $V(X)$ en \overline{D}'_i se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso de \widetilde{V}_X y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.
- b. $\overline{D}''_i :=$
 - i. Eliminamos los polígonos A, A', B, B' y sus ordenes cíclicos orientados
 - ii. Para todo polígono $X \in \mathbf{P} - \{A, A'\}$ si \widetilde{V}_X es el subconjunto de vértices de X que se encuentran en el interior de alguno de los conjuntos $\widetilde{I}_1, \dots, \widetilde{I}_m$ o $\widetilde{J}_1, \dots, \widetilde{J}_{m'}$ de D_i ; entonces, el orden cíclico orientado de $V(X)$ en \overline{D}''_i se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso de \widetilde{V}_X y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.
- c. $\overline{D}'''_i :=$
 - i. Eliminamos los m' -ágonos B, B' y sus ordenes cíclicos orientados.
 - ii. Para todo polígono $X \in \mathbf{P} - \{B, B'\}$ si \widetilde{V}_X es el subconjunto de vértices de X que se encuentran en el interior de alguno de los intervalos $J_1, \dots, J_{m'}$ de D_i ; entonces, el orden cíclico orientado de $V(X)$ en \overline{D}'''_i se obtiene de tomar el orden cíclico orientado inducido inverso de \widetilde{V}_X y mantener el orden cíclico orientado inducido en su complemento.

5. Cactus Doodles Minimales

Tomamos las sucesiones de diagramas de Gauss

$$\underbrace{\overline{\mathbf{D}}'_1, \dots, \overline{\mathbf{D}}'_{n-1}}_I,$$

$$\underbrace{\overline{\mathbf{D}}''_{n-1}, \dots, \overline{\mathbf{D}}''_1}_{II},$$

$$\underbrace{\overline{\mathbf{D}}'''_1, \dots, \overline{\mathbf{D}}'''_{n-1}}_{III}.$$

Análogo como lo hicimos para el **Caso 1** y **Caso 2** tenemos que $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$ y que $\overline{\mathbf{D}}'''_{n-1} = \overline{\mathbf{D}}_n$. Asimismo, tenemos que los diagramas de las sucesiones **I** y **III** se diferencian uno tras otro por movimientos de tipo Ψ y movimientos triviales. Por otro lado, para todo diagrama base en la sucesión original, todo $j = 1, \dots, m$ y todo $l = 1, \dots, m'$ tenemos que:

- \tilde{I}_j es el conjunto vacío o un conjunto de intervalos disjuntos en el correspondiente diagrama base en cuyos extremos se encuentran los vértices:

$$\begin{array}{ll} - a_j, a'_j & \text{esto en el caso que } \tilde{I}_j = I_j, & -b_{l_1}, b_{l_2} & \text{con } l_1 \neq l_2 \\ & & -b'_{l_1}, b_{l_2} & \text{con } l_1 \neq l_2 \\ & & -b'_{l_1}, a_j & \\ & & -b_{l_1}, a'_j & \\ & & -b'_{l_1}, a'_j & \\ & & -b_{l_1}, a_j & \end{array}$$

esto para $l_1, l_2 \in \{1, \dots, m\}$ (ver Figura 5.10)

- \tilde{J}_l es el conjunto vacío o un conjunto de intervalos disjuntos en el correspondiente diagrama base, en cuyos extremos se encuentran los vértices:

$$\begin{array}{ll} - b_l, b'_l & \text{esto en el caso que } \tilde{J}_l = J_l, & -a_{j_1}, a_{j_2} & \text{con } j_1 \neq j_2 \\ & & -a'_{j_1}, a_{j_2} & \text{con } j_1 \neq j_2 \\ & & -a'_{j_1}, b_l & \\ & & -a_{j_1}, b_l & \\ & & -a'_{j_1}, b'_l & \\ & & -a_{j_1}, b_l & \end{array}$$

estos para $j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$.

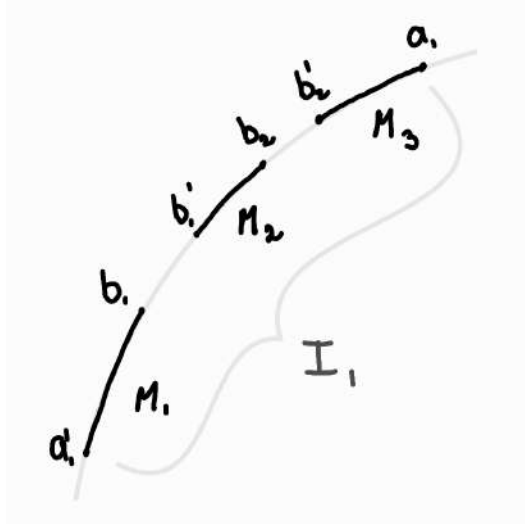


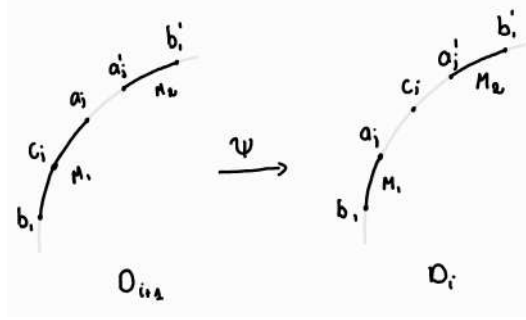
Figura 5.10.: $I_1 = M_1 \cup M_2 \cup M_3$

Por otro lado, podemos ver que todo movimiento $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ de la sucesión **II** es un movimiento de tipo Ψ o un movimiento trivial, tenemos tres posibles situaciones :

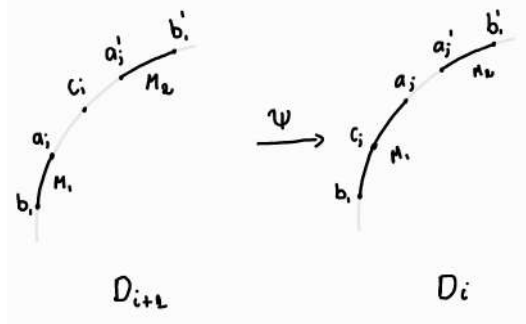
- 1) $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ es un movimiento de tipo Ψ en los polígonos \mathbf{A}, \mathbf{B} ó \mathbf{A}', \mathbf{B} ó \mathbf{A}', \mathbf{B}' ó \mathbf{A}, \mathbf{B}' ; en este caso $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ es un movimiento trivial.
- 2) Que $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ es un movimiento de tipo Ψ en dos polígonos \mathbf{C}, \mathbf{G} donde $\mathbf{G} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'\}$ y $\mathbf{C} \notin \{\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'\}$; en este caso $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ es un movimiento trivial.
- 3) $\overline{D''_i} \rightarrow \overline{D''_{i+1}}$ es un movimiento de tipo Ψ en los polígonos \mathbf{C}, \mathbf{G} donde $\mathbf{G}, \mathbf{C} \notin \{\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'\}$; en este caso $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$ es un movimiento de tipo Ψ .

En cada uno de las tres situaciones podemos usar una estrategia similar a las que usamos en el **Caso 1** y en el **Caso 2** para comprobar el resultado. En especial, para la situación 3) supongamos que $a_j \in \mathbf{A}$ y $c_j \in \mathbf{C}$ son dos vértices adyacentes que se intercambian con el movimiento $\overline{D''_{i+1}} \rightarrow \overline{D''_i}$; si antes del movimiento c_j esta en uno de los conjuntos \tilde{I}_j o \tilde{I}_l , tras el movimiento, este vértice sale de este conjunto y, además, ya no se encuentra en ninguna de las diferencias simétricas; por el contrario, si antes del movimiento c_j no se encuentra en ninguno de los conjuntos \tilde{I}_j o \tilde{I}_l , tras el movimiento este vértice entra a uno de estos conjuntos (ver Figura 5.11). Teniendo en cuenta esto podemos proceder de forma similar a como lo hicimos para la situación análoga del **Caso1**.

5. Cactus Doodles Minimales



(a) Caso a



(b) Caso b

Figura 5.11.

A nivel de diagramas base tenemos que para todo $i = 1, \dots, n - 1$

1. $\partial_{\mathbf{A}\mathbf{A}'}^2(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}'_i$,
2. $\partial_{\mathbf{A}\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{B}'}^4(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}''_i$,
3. $\partial_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}^2(\mathbf{D}_i) = \mathbf{D}'''_i$,

con lo cual es claro que los diagramas base $\mathbf{D}'_{n-1}, \mathbf{D}''_{n-1}$ se diferencian por un movimiento de tipo Φ^- en los polígonos \mathbf{B}, \mathbf{B}' . También podemos notar que en el diagrama base \mathbf{D}_{n-1} para todo $j = 1, \dots, m$ y $l = 1, \dots, m'$ se tiene que $\tilde{I}_i = \mathbf{I}_i$ y que $\tilde{J}_l = \mathbf{J}_l$, además, los vértices b_l de $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ y b'_l de $\mathbf{V}(\mathbf{B}')$ deben ser adyacentes y, están en los extremos de \mathbf{J}_l . Así, si un vértice de un polígono $\mathbf{X} \in \mathbf{P} - \{\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}'\}$ se encuentra en el interior de un conjunto $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_m$ o $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_{m'}$ este debe estar en un intervalo $\mathbf{I}_j = \tilde{I}_j$; esto nos dice que el orden cíclico orientado de $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ en $\overline{\mathbf{D}'_1}$ y $\overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$ debe ser el mismo (ver Figura 5.12). Además, ya que con respecto a la biyección de la ecuación 5.18, los ordenes cíclicos orientados de $\mathbf{V}(\mathbf{B})$ y $\mathbf{V}(\mathbf{B}')$ son inversos en $\overline{\mathbf{D}_{n-1}}$ y, estos no cambian en $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}$ y $\overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$, tenemos que los diagramas de Gauss $\overline{\mathbf{D}'_{n-1}}, \overline{\mathbf{D}''_{n-1}}$ se diferencian por un movimiento de tipo Φ^- en los polígonos \mathbf{B}, \mathbf{B}' . De forma análoga, podemos ver que los diagramas de Gauss $\overline{\mathbf{D}'_1}$ y $\overline{\mathbf{D}''_1}$ se diferencian por un movimiento de tipo Φ^+ en los polígonos \mathbf{A} y \mathbf{A}' .

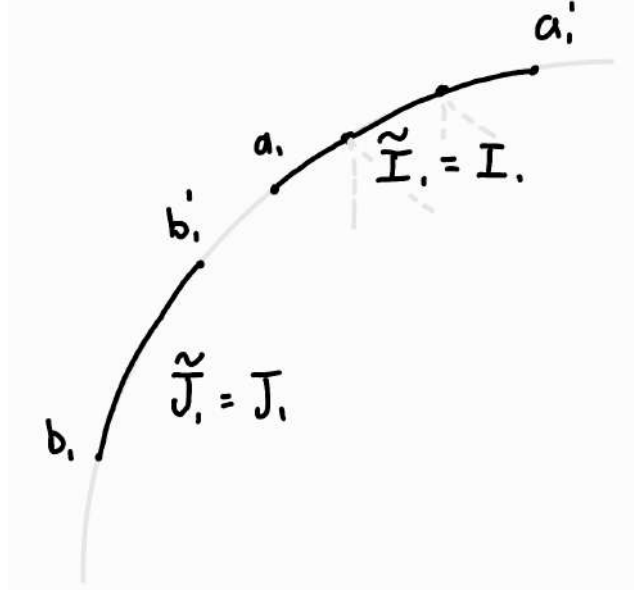


Figura 5.12.

Conectamos las sucesiones de diagramas de Gauss **I**, **II**, **III** por medio de los diagramas $\overline{\mathbf{D}}'_{n-1}, \overline{\mathbf{D}}''_{n-1}$ y $\overline{\mathbf{D}}''_1, \overline{\mathbf{D}}'''_1$ y así tenemos una sucesión de diagramas entre $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$ y $\overline{\mathbf{D}}'''_{n-1} = \overline{\mathbf{D}}_n$ en la cual:

- Los diagramas de la subsecuencia **I** tienen el mismo orden que $\overline{\mathbf{D}}_0$ y $\overline{\mathbf{D}}_n$.
- Los diagramas de la subsecuencia **II** son tales que para todo $i = n-1, \dots, 1$ se tiene que

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}''_i) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_0) - 2 = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_n) - 2$$

- Los diagramas de la subsecuencia **III** tienen el mismo orden que $\overline{\mathbf{D}}_0$ y $\overline{\mathbf{D}}_n$.

Lo que nos dice que todo diagramas de Gauss $\overline{\mathbf{D}}$ en esta sucesión es tal que

$$\text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}) \leq \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_1) = \text{Orden}(\overline{\mathbf{D}}_n) \quad (5.19)$$

Ya que el *cactus doodle* c_0 realiza al diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'_1 = \overline{\mathbf{D}}_0$ y que el *cactus doodle* c_n realiza al diagrama de Gauss $\overline{\mathbf{D}}'''_{n-1} = \overline{\mathbf{D}}_n$ las proposiciones 4.6 y 4.7 nos dicen que para todo $i = 1, \dots, n-1$ existen *cactus doodles* c'_i, c''_i y c'''_i tales que:

- c'_i realiza a $\overline{\mathbf{D}}'_i$ (es claro que $c'_1 = c_0$),
- c''_i realiza a $\overline{\mathbf{D}}''_i$.
- c'''_i realiza a $\overline{\mathbf{D}}'''_i$ (es claro que $c'''_{n-1} = c_n$).
- Los *cactus doodles* en la sucesión $\{c'_i\}_{i=1}^{n-1} \cup \{c''_i\}_{i=n-1}^1$ se diferencian por los movimientos fundamentales en *cactus doodles* correspondientes a los movimientos en diagramas de las sucesiones **I** y **II**. (notamos que $c'_{n-1} \rightarrow c''_{n-1}$ es un movimiento de tipo Φ^-).

- Los *cactus doodles* en la sucesión $\{c_i'''\}$ se diferencian uno del otro por los movimientos fundamentales en *cactus doodles* correspondientes a los movimientos en diagramas de la sucesión **III**.

Además podemos notar que si le aplicamos un movimiento de tipo Φ^- al *cactus doodle* c_1''' en los puntos de intersección que corresponden a los polígonos \mathbf{A}, \mathbf{A}' , tenemos un *cactus doodle* \tilde{c} cuyo diagrama de Gauss es $\overline{\mathbf{D}}_1'''$, el cual por el Teorema 4.1 es isotópico a c_1''' . Así, usando una isotopía de la esfera si es necesario tenemos una sucesión de *cactus doodles* entre \mathbf{c}_0 y \mathbf{c}_n los cuales se diferencian unos tras otros por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Ψ ó movimientos de tipo Φ^\pm , y por la Ecuación 5.19 un *cactus doodle* \mathbf{c} en esta sucesión es tal que

$$|\mathbf{c}| \leq |\mathbf{c}_0| = |\mathbf{c}_n|$$

□

5.3. Demostración del Teorema 5.1

En nuestra demostración siempre que se hable de un movimiento *flip* solamente vamos a considerar el *cactus doodle* al que le aplicamos el movimiento y su *flip*; por la Observación 4.10, los *cactus doodles* intermedios de este tipo de movimiento tienen el mismo número de puntos de intersección o más que el *cactus doodle* inicial y su *flip*, con lo cual no tenderemos una contradicción a la minimalidad de los *cactus doodles*. Por otro lado, en los movimientos intermedios de la sucesión original del *Lema de Reducción* también podemos considerar movimientos *flip*, ya que al tomar los diagramas de Gauss primados, de un movimiento *flip* en diagramas de Gauss obtenemos un movimiento *flip*.

Ya que los *cactus doodles* $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ son equivalentes, existe una sucesión de *cactus doodles*

$$\{\mathbf{c}_i\}_{i=0}^n \tag{5.20}$$

tales que $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}_n = \tilde{\mathbf{c}}$ y para todo $i = 0, \dots, n-1$ los *cactus doodles* $\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_{i+1}$ se diferencian por un movimiento de tipo Φ^\pm o un movimiento de tipo Ψ (en el caso que tengamos una isotopía de la esfera podemos suponer sin pérdida de generalidad que los dos *cactus doodles* son iguales y podemos ignorar esta situación). Además, ya que $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ son *cactus doodles* minimales equivalentes, tenemos que $|\mathbf{c}| = |\tilde{\mathbf{c}}|$ y para todo *cactus doodle* en la sucesión se cumple que:

$$|\mathbf{c}_i| \geq |\mathbf{c}| = |\tilde{\mathbf{c}}| = g.$$

Si todos los *cactus doodles* de la sucesión tienen el mismo número de puntos de intersección ya se tiene el resultado, de lo contrario debe existir una curva \mathbf{c}_k con $0 < k < n$ en la sucesión tal que:

$$|\mathbf{c}_k| = \max\{|\mathbf{c}_i| \mid i = 0, \dots, n\} > g,$$

y ya que el número de puntos de intersección de \mathbf{c}_k es máximo con respecto a todos los *cactus doodles* en la sucesión, deben existir números enteros tales

5. Cactus Doodles Minimales

que $0 \leq k_0 < k < k_1 \leq n$ y que la subsucesión $\{c_i\}_{i=k_1}^{k_2}$ cumple con las condiciones del Lema 5.1. Se reemplaza la subsucesión $\{c_i\}_{i=k_1}^{k_2}$ por la sucesión que se obtiene del Lema 5.1 en la sucesión de *cactus doodles*, y se puede notar que el número de puntos de intersección de los *cactus doodles* en esta parte de la sucesión ahora es estrictamente menor a $|c_k|$. Modificamos un poco el Lema 5.1 como lo explicamos al principio de esta demostración y aplicamos recursivamente el anterior procedimiento en la sucesión de *cactus doodles*, hasta que se tiene una sucesión de *cactus doodles*:

$$\{\tilde{c}_i\}_{i=0}^m \tag{5.21}$$

para las que tenemos $\tilde{c}_0 = c$, $\tilde{c}_m = \tilde{c}$, los *cactus doodles* en esta sucesión se diferencian uno tras otro por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Φ^\pm , movimiento de tipo Ψ o movimientos *flip*, y son tales que para todo $j = 0, \dots, m$

$$|c_i| \leq |c| = |\tilde{c}|. \tag{5.22}$$

Es claro que todos los *cactus doodles* en la sucesión de la ecuación 5.21 son equivalentes y ya que c, \tilde{c} son minimales, la ecuación 5.22 nos dice que para todo $j = 0, \dots, m$ se tiene que:

$$|\tilde{c}_i| = |c| = |\tilde{c}|$$

y por lo tanto los *cactus doodles* en la sucesión 5.21 se deben diferenciar uno tras otro por isotopías de la esfera, movimiento de tipo Ψ o movimientos *flip*. \square

Del Teorema 5.1 podemos deducir el resultado análogo para los *cactus doodles* no orientados.

Corolario 5.1. *Dados dos cactus doodles c, \tilde{c} no orientados minimales equivalentes, entonces existe una sucesión $\{c_i\}_{i=0}^n$ de cactus doodles no orientados que comienza en c , termina en \tilde{c} y en la que dos términos sucesivos se diferencian por un movimiento de tipo Ψ , una isotopía de la esfera o un movimiento *flip*.*

Demostración: Ya que c, \tilde{c} son *cactus doodles* minimales equivalentes existe una sucesión de *cactus doodles*

$$\{c_i\}_{i=0}^n \tag{5.23}$$

tales que $c_0 = c$, $c_n = \tilde{c}$ y que se diferencian unos tras otro por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Ψ ó movimientos de tipo Φ^\pm . Podemos notar que si tomamos una orientación para c y usando los movimientos en la sucesión 5.23 se tiene una sucesión de *cactus doodles* orientados

$$\{\tilde{c}_i\}_{i=0}^n \tag{5.24}$$

que se diferencian uno tras otro por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Ψ o movimientos de tipo Φ^\pm ; y además, se tiene que $\tilde{c}_0 = c$ con la orientación que le dimos y $\tilde{c}_n = \tilde{c}$ con una de sus dos posibles orientaciones. Así, con estas orientaciones se tiene que c, \tilde{c} son *cactus doodles* orientados minimales equivalentes (de lo contrario tenemos una contradicción a la minimalidad),

5. Cactus Doodles Minimales

por el Teorema 5.1 esto nos dice que existe una sucesión de *cactus doodles* orientados

$$\{\widehat{\mathbf{c}}_i\}_{i=0}^k \tag{5.25}$$

tales que $\widehat{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{c}$, $\widehat{\mathbf{c}}_k = \widetilde{\mathbf{c}}$ con sus correspondientes orientaciones y los *cactus doodles* orientados en la sucesión se diferencian unos tras otros por isotopías de la esfera, movimientos de tipo Ψ ó movimientos *flip*; si consideramos los *cactus doodles* y los movimientos en la sucesión 5.25 sin tener en cuenta las orientaciones, tenemos una sucesión con la propiedad que queremos. \square

A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base

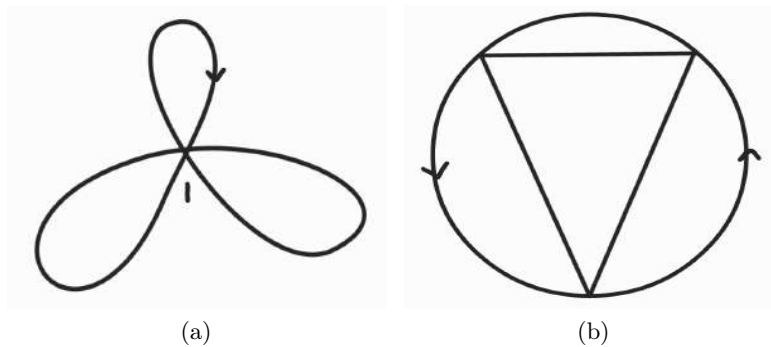


Figura A.1.:Codigo: 111

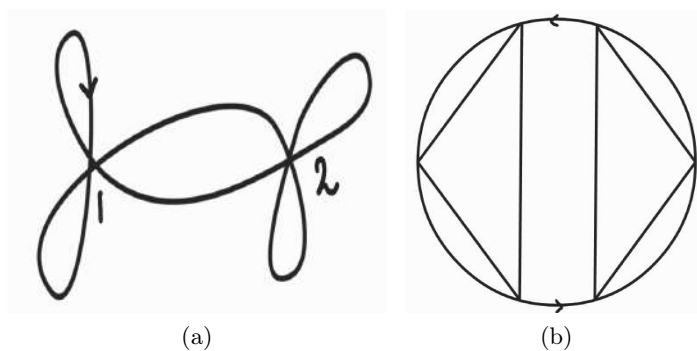


Figura A.2.:Codigo: 111222

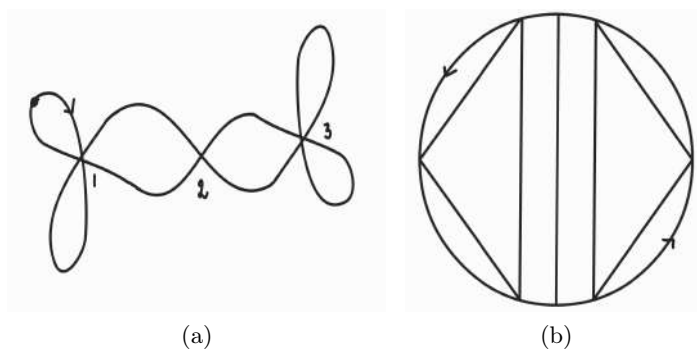


Figura A.3.:Codigo: 11123332

A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base

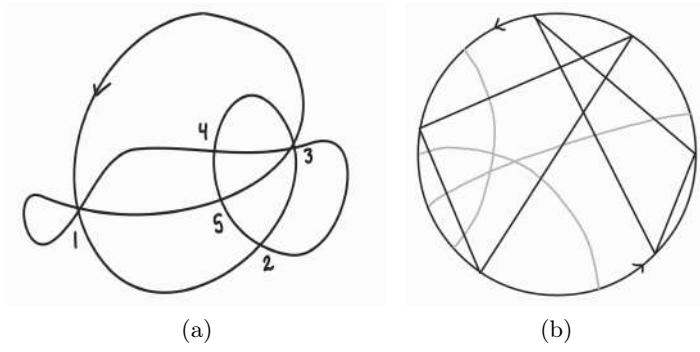


Figura A.4.: Código: 123452341153

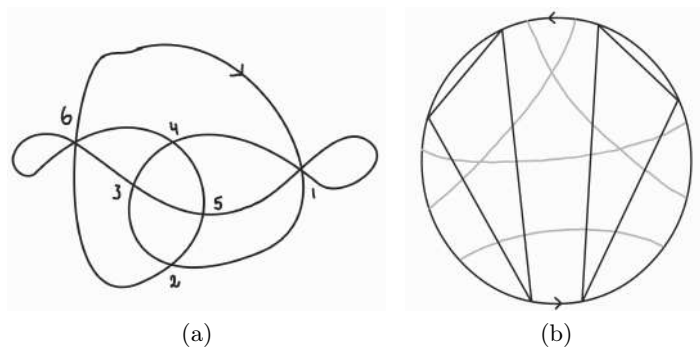


Figura A.5.: Código: 12341153664526

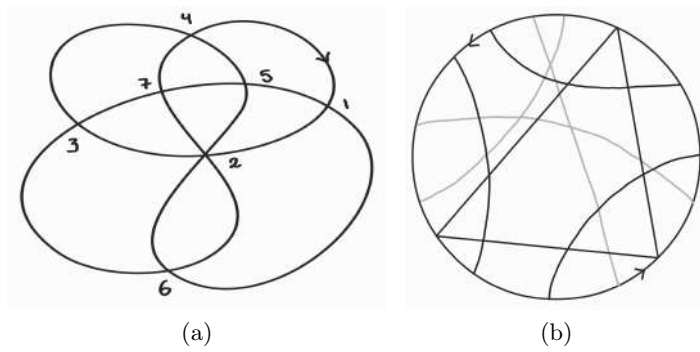


Figura A.6.: Código: 123452615736274

A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base

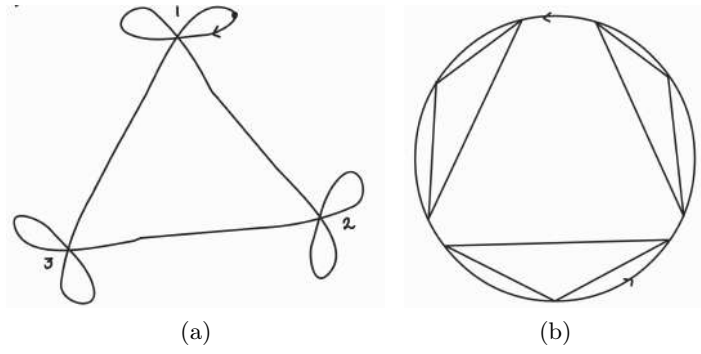


Figura A.7.:Codigo: 111222333

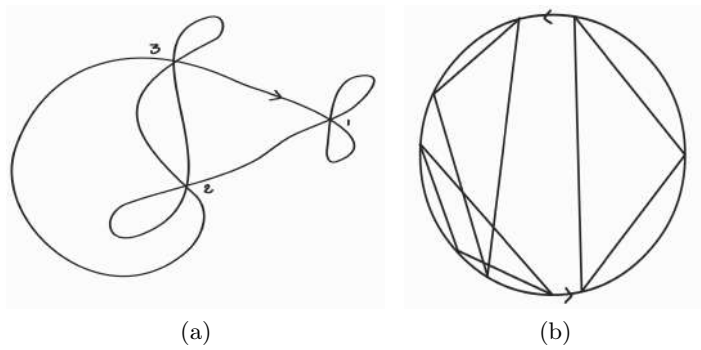


Figura A.8.:Codigo: 111223323

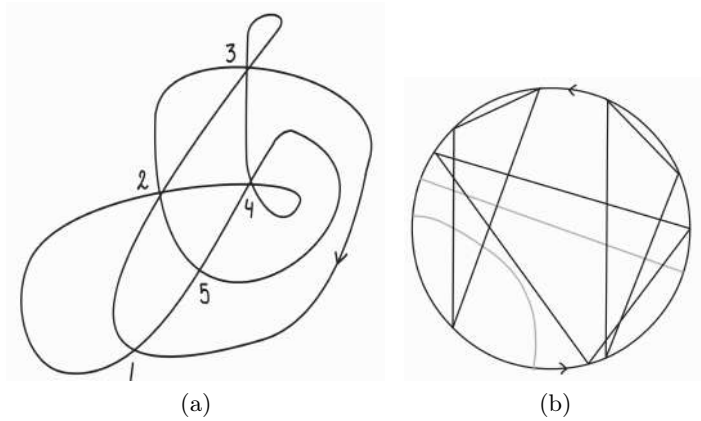


Figura A.9.:Codigo: 1233442154523

A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base

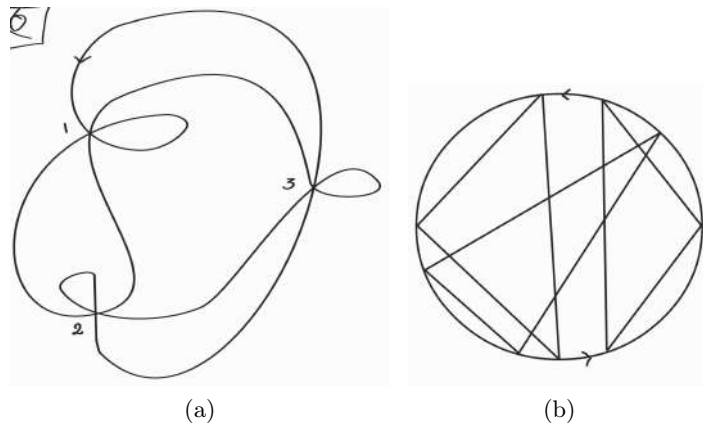


Figura A.10.:Codigo: 112133223

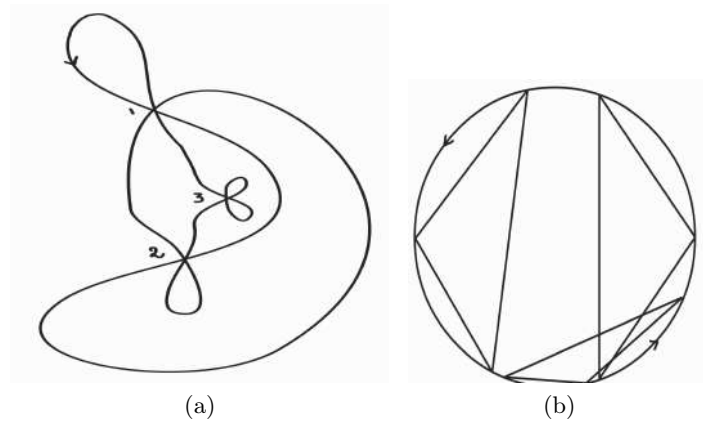


Figura A.11.:Codigo: 121223331

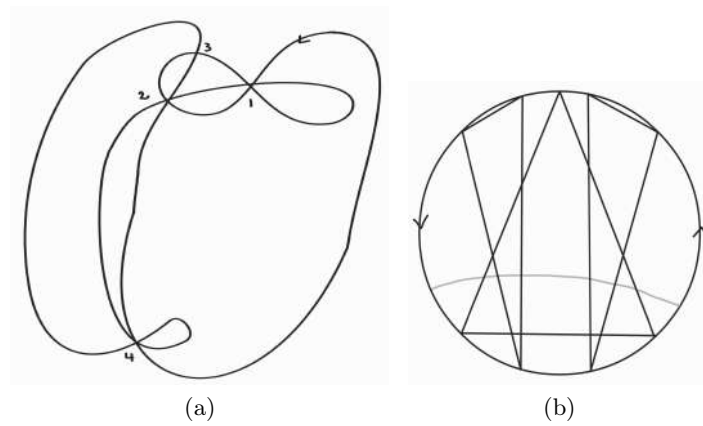


Figura A.12.:Codigo: 121223331

A. Algunas Curvas y sus Diagramas Base

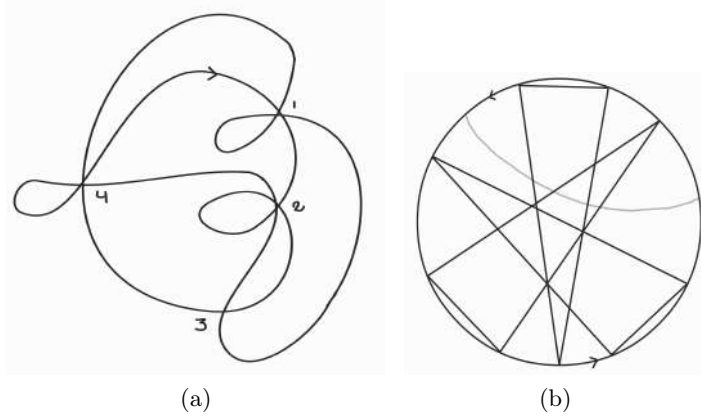


Figura A.13.: Código: 12234113244

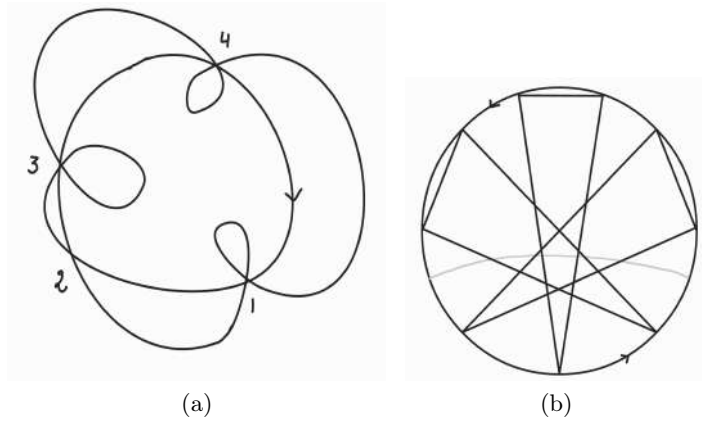


Figura A.14.: Código: 12334411234

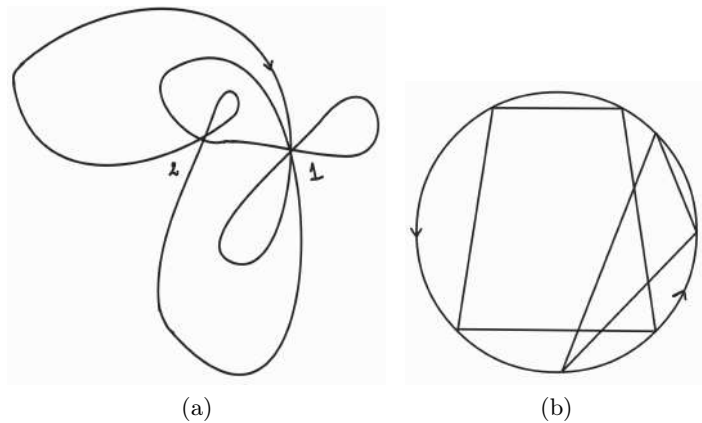


Figura A.15.: Código: 1112122

Bibliografía

- [1] N.D. Gilbert y T.Porter. *Knots and Surfaces*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [2] Christian Kassel y Vladimir Turaev. *Braid Groups*. Springer, New York, 2008.
- [3] Inga Johnson y Allison K. Henrich. *An Interactive Introduction to Knot Theory*. Dover Publications, INC, 2017.
- [4] Roger C. Lyndon y Paul E. Schupp. *Combinatorial Groups Theory*, Springer, 1977.
- [5] Jacob Mostovoy. *The pure cactus groups is residually nilpotent*. Arc.Math. 113(2019), 229-235, Springer Nature Switzerland AG, 2019
- [6] Jacob Mostovoy y Theodore Stanford. *On a map from pure braids to knots*. arXiv e-prints, page arXiv: math/9907088v1, 13 Jul 1999.
- [7] M. Khovanov. *Doodle Groups*. Trans. Amer. Math. Soc., 349(6):2297-2315, 1997.
- [8] K.Gotin. *Markov theorem for doodles on the two-sphere*. arXiv e-prints, page arXiv:1807.05337, Jul 2018.
- [9] B. Cisneros, M.Flores, J.Juyumaya and C.Roque-Márquez. *An Alexander type invariant for Doodles*. arXiv e-prints, page arXiv:2005.06290v2, Sep 2020.
- [10] Michael Polyak and Oleg Viro. *Gauss Diagram Formulas for Vassiliev Invariants*. **IMRN** International Mathematics Research Notices , **11** (1994), 251-260
- [11] Michael Polyak and Oleg Viro. *Finite Type Invariants on Classical and Virtual Knots*. arXiv e-prints, page arXiv:math/9810073v2, 6 Apr 1999..
- [12] Andrey Grinblat and Viktor Lopatkin. *On Realizability of Gauss Diagrams and Constructions of Meanders* <https://www.reserachgate.net/publication/327260003>, August 2018
- [13] Joan S. Birman. *On The Stable Equivalence of Plat Representations of Knots and Links* Can. J. Math, Vol.XXVIII, No.2, 1976, pp. 264-290
- [14] Daniel S. Farley. *Actions of Picture Groups on $CAT(0)$ Cubical Complexes* Geometriae Dedicata (2005) 110:221-242, Springer 2005
- [15] P. Bellingeri, H. Chemin, V. Lebed, *Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups*, arXiv e-prints, page arXiv:2209.08813.

Bibliografía

- [16] Huntington Edward V. *A Set of Independent Postulates for Cyclic Order* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2 (11): 630–63, 1 Nov 1916
- [17] S.Chmutov, S.Duzhin and J.Mostovoy.. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants* Cambridge University Press, May 2012
- [18] Louis H. Kauffman *Formal Knot Theory* Dover Publications, Inc., Mienola, New York, 2006