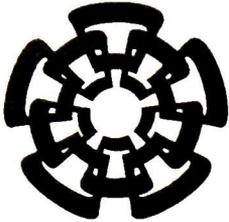


xx (125777.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Controlabilidad de Sistemas Lineales Conmutados

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Federico Armando Arias Zambrano

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León

Dr. Antonio Ramírez Treviño

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

Guadalajara, Jalisco, Septiembre de 2005.

CLASIF.: TK165.58 A75 2005
ADQUIS.: SSF - 378
FECHA: 28-VI-2006
PROCED.: DON-2006
*

I.D 125363-2002

Controlabilidad de Sistemas Lineales Conmutados

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Federico Armando Arias Zambrano
Ingeniero Eléctrico

Instituto Tecnológico de Tepic 1998-2003

Becario de CONACYT, expediente no. 182336

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León
Dr. Antonio Ramírez Treviño

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Septiembre de 2005.

Índice general

Resumen	v
Agradecimientos	vii
1. Introducción	1
1.1. Resultados Existentes .	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura de la tesis	3
2. Preliminares	5
2.1. Modelo Continuo	5
2.2. Modelo Discreto	6
2.2.1. Propiedades de una Red de Petri	7
2.2.2. Análisis estructural de una Red de Petri.	8
2.2.3. Redes de Petri Interpretadas	11
2.3. Controlabilidad de <i>SLI</i>	14
2.3.1. Enfoque Geométrico	17
2.4. Controlabilidad de Sistemas de Eventos Discretos	19
3. Sistema Lineal Conmutado	21
3.1. Modelo de SLC	21
3.2. Trayectoria de estados de SLC	24
3.2.1. Transiciones Manipulables	24
3.2.2. Transiciones No Manipulables	26
3.3. Definición de Controlabilidad	28
4. Controlabilidad de <i>SLC</i> con transiciones manipulables	31
4.1. Espacio alcanzable	31
4.2. Análisis de Controlabilidad .	36
4.3. Ejemplos	39

5. Controlabilidad de SLC con transiciones no manipulables	51
5.1. Conjunto de estados alcanzables	51
5.2. Análisis de Controlabilidad .	53
6. Conclusiones y trabajo futuro	71
A. Manipulación de la parte controlable del <i>SLI</i>	73

Resumen

En este trabajo se estudia la controlabilidad de los Sistemas Lineales Conmutados (*SLC*). El modelo utilizado para representar un *SLC* está formado por una Red de Petri Interpretada (*RPI*) y por una familia de Sistemas Lineales e Invariantes en el tiempo (*SLI*).

Se propone una definición de controlabilidad para los *SLC*, la cual es una extensión de la definición estado controlable utilizada en los *SLI*. Básicamente, se garantiza la existencia de una entrada para el *SLC* que permita trasladar cualquier estado continuo desde cualquier estado inicial hasta algún estado requerido.

El análisis de la controlabilidad se basa en la trayectoria de estados del *SLC*. Se tienen dos casos de estudio: *SLC* con transiciones manipulables y *SLC* con transiciones no manipulables.

La trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones manipulables forma un espacio alcanzable dentro del espacio de estados continuo. Esto permite obtener condiciones necesarias y suficientes para saber cuando un *SLC* es controlable, también se muestra una prueba estructural. Por su parte, la trayectoria de estado de un *SLC* con transiciones no manipulable forma un conjunto de estados. Esta situación restringe el comportamiento de la trayectoria de estados. En general, para determinar si este tipo de *SLC* es controlable es necesaria una búsqueda exhaustiva a lo largo de todas las trayectorias de estados. En este caso se obtuvieron condiciones suficientes para determinar cuando el *SLC* es controlable, las cuales están basadas en la existencia de *SLI* controlables.

Agradecimientos

A mis padres, Federico Arias Robles e Irma Zambrano Galindo, y a mis hermanos Federico Arias Zambrano y Malva Mariva Arias Zambrano, por su apoyo incondicional.

A mis asesores, el Dr. José Javier Rufz León y el Dr. Antonio Ramírez Treviño, por todos sus consejos y enseñanzas.

A la Dra. Ofelia Begovich Mendoza y al Dr. Luis Ernesto López Mellado por sus comentarios relativos al contenido de esta tesis.

A mis compañeros César Martínez, Julio Picos, Héctor Becerra, Yoshio Morales, Alberto Hernández, César Gómez, Alejandro Nava, Héctor Huerta y José Iñiguez.

Al CONACYT y al CINVESTAV por todo el apoyo material y humano brindado para la culminación de este trabajo.

A todos aquellos que contribuyeron directa o indirectamente en la realización de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas híbridos son sistemas dinámicos en los cuales existe una interacción entre una dinámica discreta y una continua [7]. Este tipo de sistemas tienen variables que toman valores de un conjunto continuo, usualmente el conjunto de los números reales \mathbb{R} , y también tiene variables que toman valores de un conjunto discreto, comúnmente un conjunto de símbolos [19].

La dinámica continua es representada mediante una familia de ecuaciones diferenciales, por su parte la dinámica discreta es representada mediante un Sistema de Eventos Discretos. En general, las variables discretas establecen cual es la ecuación diferencial que representa la dinámica continua del sistema híbrido. Este tipo de sistemas puede ser utilizado para la representación de sistemas físicos que modifiquen, en forma brusca, sus condiciones de operación [18], también para el diseño de controladores conmutados, e.g., Gain Scheduling [8], Modos deslizantes [20].

En este trabajo nos concentraremos en los Sistemas Lineales Conmutados (*SLC*). La dinámica continua de este tipo de sistema híbrido está representada por una familia de Sistemas Lineales e Invariantes en el tiempo (*SLI*) [6], [3]. Por su parte, la dinámica discreta de los *SLC* es representada por algún Sistema de Eventos Discretos, como pueden ser autómatas finitos, cadenas de Markov, etc. En este trabajo, la dinámica discreta de un *SLC* está representada mediante una Red de Petri Interpretada (*RPI*). Este modelo discreto es una extensión de las Redes de Petri, las cuales tienen una mayor capacidad de representación que los autómatas finitos [10].

En este trabajo se estudia la controlabilidad de los *SLC*. Esta propiedad cualitativa de los *SLC* permite determinar cuando el estado continuo puede ser trasladado desde algún estado inicial hasta cualquier otro estado final.

1.1. Resultados Existentes

Un *SLC* está compuesto por una familia de *SLI* y un Sistema de Eventos Discretos. La controlabilidad de estos modelos ha sido estudiada por separado. La controlabilidad de los Sistemas de Eventos Discretos está basada en la Teoría del Control Supervisor propuesta por W.M. Wonham [19], básicamente, establece que un Sistema de Eventos Discretos es controlable si y sólo si el comportamiento del sistema puede ser restringido a un comportamiento deseado llamado especificación. Por su parte, la controlabilidad de los *SLI* es presentada en [3] por C. T. Chen. Por su parte W.M. Wonham muestra una caracterización geométrica de la controlabilidad [5]. La controlabilidad de los *SLI* establece la existencia de una entrada capaz de trasladar cualquier estado inicial a alguno estado requerido.

A continuación se describen algunos de los trabajos existentes sobre la controlabilidad de los *SLC*.

Los resultados mostrados por J. Ezzine y A. H. Haddad en [9] son referentes a la estabilidad, la observabilidad y la controlabilidad de los *SLC*. En este trabajo la dinámica discreta del *SLC* es representada por una secuencia determinista de símbolos, cada uno de estos símbolos representa un *SLI*. Primero presenta sus resultados sobre la observabilidad de los *SLC*, después se aborda el problema de controlabilidad basado en el principio de dualidad, aunque no se prueba si la dualidad se mantiene para este tipo de sistemas. Esto permite obtener una condición algebraica para determinar la controlabilidad.

Por su parte, en [13] A.A. Julius, A.J. van der Schaft utilizan un conjunto indexado de *SLI*, la entrada discreta establece cuándo algún *SLI* será activado. Se proponen dos tipos de conmutaciones, también se muestra un algoritmo de punto fijo para construir el máximo conjunto invariante controlado.

En los trabajos de G. Xie, D. Zheng y L. Wang [12], [14], [15], se utilizan *SLI* indexados, la conmutación entre *SLI* se realiza mediante una ley de conmutaciones. Se definen las secuencias de conmutación y el conjunto de estados controlables. La secuencia de conmutación es una secuencia de pares que establece cuál y por cuánto tiempo se activa un *SLI*. Basado en una caracterización geométrica, construye el subespacio invariante del estado continuo. A partir de este subespacio se obtienen condiciones necesarias y suficientes.

Se puede notar que en estos trabajos no se muestra de manera formal un Sistema de Eventos Discretos para modelar la dinámica discreta. De hecho, se tiene la posibilidad de conmutar a cualquier *SLI* en el instante que se requiera.

1.2. Objetivos

Los principales objetivos de este trabajo son:

Estudiar la controlabilidad de los Sistemas Lineales Conmutados.

Analizar la trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones manipulables.

Analizar la trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones no manipulables.

Encontrar una entrada para el *SLC* que permita trasladar el estado continuo.

1.3. Estructura de la tesis

El contenido de esta tesis está distribuido de la siguiente manera.

En el capítulo 2 se muestran las definiciones básicas referentes a los *SLI* [3], [6]. De igual manera se establecen algunas definiciones utilizadas en el estudio de las *RPI* [1] y de las Redes de Petri (*RP*) [10]. Por último se describe la controlabilidad de los *SLI* y la de los Sistemas de Eventos Discretos [19].

En el capítulo 3 se presenta el modelo utilizado en este trabajo para representar un *SLC*. Esta representación utiliza una *RPI* para modelar la dinámica discreta del *SLC*. También se muestra la manera en que evoluciona la trayectoria de estados cuando se tienen transiciones manipulables y cuando tienen transiciones no manipulables. Una vez mostrada la trayectoria de estados del *SLC*, se establece una definición de controlabilidad de *SLC*.

En el capítulo 4 se define y caracteriza el espacio alcanzable de un *SLC*, este espacio se genera a partir de la trayectoria del estado continuo de un *SLC* con transiciones manipulables. Se presenta el análisis de la controlabilidad y las condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un *SLC* es controlable. También se muestran algunos ejemplos de *SLC* controlables, los cuales permiten una mejor comprensión del comportamiento de los *SLC*.

En el capítulo 5 se define y describe como se forma conjunto de estados alcanzables, este conjunto se genera a partir de la trayectoria del estado continuo de un *SLC* con transiciones no manipulables. Se muestran condiciones suficientes para determinar la controlabilidad de los *SLC*.

En el capítulo 6 se muestran las conclusiones y el trabajo futuro.

En el apéndice A se muestra la ley de control utilizada para manipular los estados controlables de un *SLI*.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos que se utilizan en el estudio de los Sistemas Lineales e Invariantes en el tiempo (*SLI*) y de las Redes de Petri Interpretadas (*RPI*). Se hace una breve descripción de los resultados relacionados con la controlabilidad de los *SLI* [3], [6], [5]; también se describe la interpretación de la controlabilidad para los Sistemas de Eventos Discretos [19].

2.1. Modelo Continuo

Un Sistema Lineal e Invariante en el tiempo (*SLI*) está representado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= Ax(\tau) + Bu(\tau), \quad x(\tau_0) = x_0 \\ y(\tau) &= Cx(\tau) + Du(\tau)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $y(\tau) \in \mathbb{R}^q$ es la salida y $u(\tau) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada.

Las matrices A, B, C, D son reales de dimensiones $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ y $q \times p$ respectivamente.

La función matricial $\Psi(\tau)$ con dimensiones $n \times n$, es llamada matriz fundamental de $\dot{x}(\tau) = Ax(\tau)$ si y sólo si las n columnas de $\Psi(\tau)$ están formadas por n soluciones linealmente independientes de $\dot{x}(\tau) = Ax(\tau)$.

La matriz de transición de estados $\Phi(\tau, \tau_0)$ se obtiene de la siguiente manera

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Psi(\tau) \Psi^{-1}(\tau_0), \quad \forall \tau, \tau_0 \in (-\infty, \infty)\tag{2.2}$$

Como $e^{A\tau}$ es una matriz fundamental de $\dot{x}(\tau) = Ax(\tau)$, entonces una matriz de transición de estados del *SLI* es

$$\begin{aligned}\Phi(\tau, \tau_0) &= e^{A\tau} (e^{A\tau_0})^{-1} \\ &= e^{A(\tau - \tau_0)}\end{aligned}\tag{2.3}$$

La solución de la ec. (2.1), es

$$x(\tau) = e^{A(\tau-\tau_0)}x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \geq \tau_0 \quad (2.4)$$

y la salida es

$$y(\tau) = Ce^{A\tau}x_0 + C \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta \quad (2.5)$$

Sea T una matriz de $n \times n$ no singular. Defínase al vector de estados como $\bar{x} = Tx$, entonces la ec. (2.1) es representada por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(\tau) &= \bar{A}\bar{x}(\tau) + \bar{B}u(\tau) \\ y(\tau) &= \bar{C}\bar{x}(\tau) + \bar{D} \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$\bar{A} = TAT^{-1} \quad \bar{B} = TB \quad \bar{C} = CT^{-1} \quad \bar{D} = D$$

La matriz T es llamada transformación de similitud, por su parte la ec. (2.6) se conoce como sistema equivalente del sistema original, ec. (2.1).

2.2. Modelo Discreto

Las Redes de Petri Interpretadas (*RPI*) son una extensión de las Redes de Petri. A continuación se muestran algunas de las definiciones utilizadas en el estudio de las Redes de Petri [10].

Definición 2.1 *La estructura de una Red de Petri G es un dígrafo bipartita representado por la 4-tupla $G = (P, T, I, O)$ donde:*

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es un conjunto finito de elementos llamados lugares.
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ es un conjunto finito de elementos llamados transiciones.
- $I : P \times T \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ es una función que representa arcos ponderados que van de los lugares a las transiciones, donde \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros no negativos.
- $O : P \times T \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ es una función que representa arcos ponderados que van de las transiciones a los lugares.

En toda RP el símbolo $\bullet t_j$ denota el conjunto de todos los lugares p_i tal que $I(p_i, t_j) \neq 0$ y $t_j \bullet$ al conjunto de todos los lugares p_i tal que $O(p_i, t_j) \neq 0$. De forma similar, $\bullet p_i$ representa el conjunto de todas las transiciones t_j tal que $O(p_i, t_j) \neq 0$ y $p_i \bullet$ el conjunto de todas las transiciones t_j , tal que $I(p_i, t_j) \neq 0$.

En la representación gráfica de una RP , los lugares son círculos, las transiciones son rectángulos y los arcos son dibujados como flechas.

La matriz de pre-incidencia de una RP es $C^- = [c_{ij}^-]$, donde $c_{ij}^- = I(p_i, t_j)$; la matriz de post-incidencia de una RP es $C^+ = [c_{ij}^+]$, donde $c_{ij}^+ = O(p_i, t_j)$. La matriz de incidencia de una RP se define como $C = C^+ - C^-$.

La función de marcado $M : P \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es un mapeo de cada lugar a los enteros no negativos representando el número de marcas que hay dentro de cada lugar. Generalmente, el marcado de una RP es expresado como un vector de dimensión n .

Definición 2.2 *Un sistema de Red de Petri o Red de Petri es el par $N = (G, M_0)$, donde G es la estructura de RP y M_0 es su distribución inicial de marcas.*

El cambio de marcado en (G, M_0) se debe al disparo de alguna de sus transiciones habilitadas. Para el marcado M_k la transición t_j se dice habilitada si y sólo si $\forall p_i \in P, M_k(p_i) \geq I(p_i, t_j)$, donde $M_k(p_i)$ es el número de marcas del lugar p_i cuando se tiene el marcado M_k .

$$M_{k+1} = M_k + Cv_k \quad (2.7)$$

donde v_k es vector de disparo; con $v_k(j) = 1$ y $v_k(i) = 0, i \neq j$.

El conjunto de marcados alcanzables $R(G, M_0)$ de la $RP (G, M_0)$ está formado por todos los posibles marcados que se pueden generar desde M_0 disparando solamente transiciones habilitadas.

Definición 2.3 *Sea $\sigma = t_i t_j t_k \dots$ una secuencia de transiciones disparadas. El vector de Parikh $\vec{\sigma}$ de esta secuencia mapea las transiciones que forman parte de σ al número de veces que aparece la transición t en la secuencia σ , i.e., $\vec{\sigma} : T \rightarrow (\mathbb{Z}^+)^m$.*

2.2.1. Propiedades de una Red de Petri

Algunas de las propiedades de las Redes de Petri son la vivacidad, el acotamiento y la reversibilidad; las cuales se describen a continuación.

- *Vivacidad*

La vivacidad está relacionada con la ausencia de bloqueos y de funcionamientos parciales. Un bloqueo se presenta cuando al llegar a un marcado la Red de Petri no puede disparar ninguna de sus transiciones, por su parte un funcionamiento parcial aparece cuando no existe un bloqueo pero algunas las transiciones nunca se pueden disparar.

Definición 2.4 Una transición t es viva en la Red de Petri (G, M_0) si y sólo si $\forall M \in R(G, M_0), \exists M' \in R(G, M)$ tal que M' habilita la transición t .

Definición 2.5 Una Red de Petri es viva con respecto a M_0 si y sólo si $\forall t \in T$, la transición t es viva.

- *Acotamiento*

El acotamiento garantiza que la Red de Petri (G, M_0) mantendrá un número finito de marcas en sus lugares cuando $M_0(p) < \infty$.

Definición 2.6 El lugar p es k -acotado si y sólo si $\exists k < \infty$ tal que $\forall M \in R(G, M_0)$ se cumple que $M(p) \leq k$.

Definición 2.7 Una RP es k -acotada si y sólo si $\forall p \in P$, p es k -acotado.

Reversibilidad

Esta propiedad se relaciona con la existencia de secuencias de transiciones que lleven la secuencia de marcados de la RP hacia el marcado inicial.

Definición 2.8 Una RP es reversible (propia o globalmente cíclica) con respecto a M_0 si y sólo si $\forall M \in R(G, M_0), M_0 \in R(G, M)$.

2.2.2. Análisis estructural de una Red de Petri.

El análisis estructural de una Red de Petri se basa en el estudio de su matriz de incidencia C . Aunque las propiedades estructurales son independientes del marcado M_0 , éstas pueden ser usadas para deducir el comportamiento de la Red de Petri para M_0 .

A continuación se introduce el concepto de los invariantes en una RP .

Definición 2.9 Sea C la matriz de incidencia de (G, M_0) , cualquier vector $X \geq 0$ tal que $CX = 0$ es llamado T -semiflujo, T - invariante o invariante de disparo. De manera similar, cualquier vector $Y \geq 0$ tal que $Y^T C = 0$ es llamado P -semiflujo, P - invariante o invariante de marcado.

A continuación se muestra la interpretación de estos invariantes.

Sea $M_r \in R(G, M_0)$, entonces $\exists v \in (\mathbb{Z}^+)^m$ tal que la ec. (2.7) se cumple, i.e.

$$M_r = M_0 + Cv \tag{2.8}$$

Ahora bien, si Y es un P -semiflujo, y premultiplica a (2.8), entonces

$$Y^T M_r = Y^T M_0 + Y^T C v \quad (2.9)$$

y por tanto

$$Y^T M_r = Y^T M_0 \quad (2.10)$$

i.e. el P -semiflujo Y establece una relación entre los marcados M_r y M_0 . Los P -componentes son los lugares que forman parte de un P -semiflujo.

Si X es un T -semiflujo y $v = X$ en (2.8), entonces

$$M_r = M_0 \quad (2.11)$$

i.e. el T -semiflujo define un vector de disparo $v = X$ que lleva la secuencia de marcados desde M_0 , siempre y cuando M_0 habilite a una secuencia σ tal que $\vec{\sigma} = X$. Note que el T -semiflujo es una característica estructural, este vector no especifica la secuencia en que se deben ejecutar las transiciones.

Los T -componentes son las transiciones que forman parte de un T -semiflujo.

El siguiente ejemplo muestra los P -semiflujos y los T -semiflujos de una RP .

Ejemplo 2.1 Sea la Red de Petri (G, M_0) , su estructura G se muestra en la figura 2.1. Determinar sus P -semiflujos y los T -semiflujos.

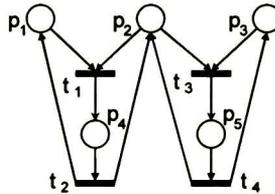


Figura 2.1: Estructura de la Red de Petri (G, M_0) .

Primeramente necesitamos conocer la matriz de incidencia C de (G, M_0) . En este caso tenemos que

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora se obtendrán los P -semiflujos de (G, M_0) .

Resolviendo

$$Y^T C = 0$$

se obtienen los P -semiflujos

$$Y_I = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

$$Y_{II} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$$

$$Y_{III} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$$

sus P -componentes son

$$\langle Y_I \rangle = \{p_1, p_2\}$$

$$\langle Y_{II} \rangle = \{p_2, p_4, p_5\}$$

$$\langle Y_{III} \rangle = \{p_3, p_5\}$$

En la figura 2.2 se muestran los P -componentes de (G, M_0) .

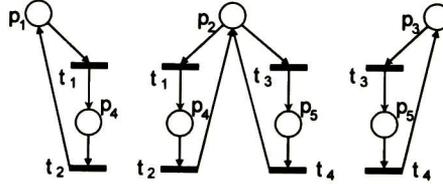


Figura 2.2: P -componentes de (G, M_0) .

Ahora, se calculan los T -semiflujos de (G, M_0) .

Resolviendo

$$CX = 0$$

se obtienen los T -Semiflujos

$$X_I = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

$$X_{II} = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$$

sus T -componentes son

$$\langle X_I \rangle = \{t_1, t_2\}$$

$$\langle X_{II} \rangle = \{t_3, t_4\}$$

En la figura 2.3 se muestran los T -componentes de (G, M_0) .

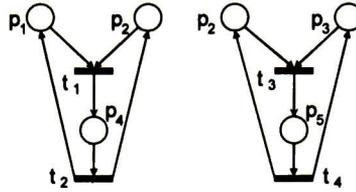


Figura 2.3: T -componentes de (G, M_0) .

La clasificación de las Redes de Petri permite simplificar su análisis, en este trabajo se utilizan Redes de Petri máquinas de estado.

Definición 2.10 Una máquina de estados (ME) es una Red de Petri en la cual todas sus transiciones tienen un sólo lugar de entrada y otro de salida, i.e. $\forall t_j \in T$ se mantiene que $|\bullet t_j| = |t_j^\bullet| = 1$.

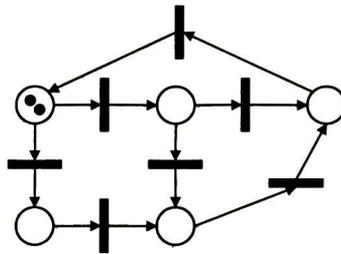


Figura 2.4: Red de Petri Máquina de Estados.

Una ME no tiene ninguna sincronización, sólo puede contener decisiones; y también concurrencia cuando $M(p_i) \geq 1$, ver la figura 2.4.

2.2.3. Redes de Petri Interpretadas

A continuación se define una Red de Petri Interpretada (RPI).

Definición 2.11 Una Red de Petri Interpretada es la 4-tupla $Q = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$, donde:

- $N = (G, M_0)$ es una RP .
- $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ es el alfabeto de entrada de la red, donde α_i es un símbolo de entrada.

- $\lambda : T \longrightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ es una función etiquetadora de transiciones. Esta función tiene la siguiente restricción; si $\exists t_j, t_k \in T, j \neq k$, tal que $I(p_i, t_j) = I(p_i, t_k) \neq 0$ y $\lambda(t_j) \neq \varepsilon, \lambda(t_k) \neq \varepsilon$ entonces $\lambda(t_j) \neq \lambda(t_k), p_i \in P$ y ε representa un evento interno del sistema.
- $\varphi : R(Q, M_0) \longrightarrow (\mathbb{Z}^+)^q$ es una función de salida que asocia a cada marcado en $R(Q, M_0)$ un vector de salida, donde q es el número de salidas.

El uso de señales de entrada y salida en las *RPI* modifica las condiciones del disparo de las transiciones. Si la etiqueta $\lambda(t_j) = \alpha_i \neq \varepsilon$ de la transición habilitada t_j está presente, entonces t_j debe dispararse. Si $\lambda(t_j) = \varepsilon$, entonces t_j puede dispararse.

Cuando la transición t_j se dispara la *RPI* alcanza el marcado M_{k+1} , este hecho es representado como $M_k \xrightarrow{t_j} M_{k+1}$.

La ecuación de estados para una *RPI* es

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + Cv_k \\ y_k &= \varphi(M_k) \end{aligned} \quad (2.12)$$

A continuación de establecen algunas definiciones útiles para el estudio de las *RPI*.

Definición 2.12 Una secuencia de transiciones disparadas de una *RPI* (Q, M_0) es una secuencia de transiciones $\sigma = t_i t_j \dots t_k \dots$ tal que $M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_\omega \xrightarrow{t_k} \dots$

Definición 2.13 El conjunto $\mathcal{L}(Q, M_0)$ de todas las secuencias de transiciones disparadas es llamado el lenguaje de disparo $\mathcal{L}(Q, M_0) = \{\sigma \mid \sigma = t_i t_j \dots t_k \dots \wedge M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_\omega \xrightarrow{t_k} \dots\}$.

La función $\lambda(\cdot)$ permite clasificar las transiciones de una *RPI*.

Definición 2.14 Si $\lambda(t_i) \neq \varepsilon$ la transición t_i se dice que es manipulable. De otra manera es no manipulable.

Se deben de tener en cuenta las siguientes consideraciones.

1. En este trabajo se denotará una *RPI* como (Q, M_0) en lugar de $Q = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$, para enfatizar el hecho de que existe un marcado inicial en la *RPI*.
2. La función $\varphi(\cdot)$ es una matriz $q \times n$, donde q es el número de lugares medibles de la *RPI* y n es el número de lugares en (G, M_0) . Si el lugar p_j está asociado al i -ésimo símbolo de salida, entonces $\varphi(i, j) = 1$, en caso contrario $\varphi(i, j) = 0$.
3. Las transiciones equivalentes no son permitidas, i.e. se supone que $\forall t_i, t_j \in T$ tal que $t_i \neq t_j, \lambda(t_i) = \lambda(t_j)$, se cumple que $C(\cdot, i) \neq C(\cdot, j)$.

4. La definición de $\lambda(\cdot)$ establece que las *RPI* son deterministas respecto a las transiciones etiquetadas, i.e. dos transiciones con el mismo símbolo de entrada asociado (diferente de ε) no puede tener los mismos lugares de entrada. Sin embargo, pueden no ser deterministas con respecto a las transiciones no etiquetadas (aquellas t_j tal que $\lambda(t_j) = \varepsilon$).

2.3. Controlabilidad de *SLI*

La controlabilidad de los *SLI* establece la posibilidad de trasladar cualquier estado inicial del sistema hasta algún estado final mediante una entrada. La definición formal se muestra a continuación.

Definición 2.15 *El Sistema Lineal e invariante en el tiempo representado por la ec. (2.1) es controlable si para cualquier $x(\tau_0)$, $x(\tau_1)$ que pertenecen al espacio de estados \mathbb{R}^n , existe una entrada $u(\tau)$ capaz de trasladar el estado $x(\tau_0)$ hasta el estado $x(\tau_1)$ en un tiempo finito $\tau_1 - \tau_0$.*

Existen dos enfoques utilizados en el estudio la controlabilidad de los *SLI*. En [3], [6], se muestra el enfoque basado en la independencia lineal de los vectores que son solución de la ecuación de estados del *SLI*. En [5] se presenta el enfoque geométrico, este enfoque se basa en el análisis del espacio alcanzable que se forma a partir de la solución de la ecuación de estados del *SLI*.

Antes de mostrar los enfoques existentes, analizaremos la solución de un *SLI*. Esto permitirá entender de resultados existentes sobre la controlabilidad.

Sea el *SLI* representado por

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau)$$

su solución es

$$x(\tau) = e^{A(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta$$

Necesitamos determinar cuales son los estados que forman parte de esta solución.

En general, la solución de un *SLI* está formada por una dinámica autónoma y una forzada.

La dinámica autónoma de la solución es

$$e^{A(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) \tag{2.13}$$

Esta dinámica sólo genera un conjunto de estados, los cuales surgen de la transformación que sufre el estado inicial $x(\tau_0)$ debida a la matriz de transición de estados $e^{A(\tau-\tau_0)}$.

Por su parte, la dinámica forzada de la solución es

$$\int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta \tag{2.14}$$

Al sustituir la matriz de transición de estados por su serie de Taylor, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta &= \int_{\tau_0}^{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (\tau - \zeta)^k B u(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k B \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{k!} (\tau - \zeta)^k u(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.15)$$

es decir

$$\int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B \psi_k(\tau, \tau_0) \quad (2.16)$$

donde

$$\psi_k(\tau, \tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{k!} (\tau - \zeta)^k u(\zeta) d\zeta \quad (2.17)$$

Los estados que forman parte de la dinámica forzada pueden ser representados mediante la combinación lineal de los vectores columna de las matrices $\{A^k B \mid k = 0, 1, \dots, \infty\}$. En general, la dinámica forzada genera un subespacio de estados, el cual está formado por todos los estados que pueden ser alcanzados desde $x(\tau_0) = 0$.

En [3], se muestra que la controlabilidad del *SLI* (A, B) está determinada por la independencia lineal de las n filas de la matriz $e^{A(\tau-\zeta)} B$. Si existen n filas linealmente independientes en $e^{A(\tau-\zeta)} B$, entonces existen también existen n columnas linealmente independientes. De manera que si (A, B) es controlable, entonces existen cuando menos n vectores linealmente independientes en $\{A^k B \mid k = 0, 1, \dots, \infty\}$, es decir, el espacio generado por la dinámica forzada del *SLI* es igual que el espacio de estado. De hecho esta condición también es necesaria.

Lo anterior se puede entender fácilmente a partir de la solución de la ecuación de estados. Supongamos que se desea alcanzar el estado x_f a partir de $x(\tau_0)$.

La solución de (A, B) se puede describir como

$$x(\tau) = e^{A(\tau-\tau_0)} x(\tau_0) + \tilde{x}(\tau) \quad (2.18)$$

donde $\tilde{x}(\tau)$ es un estado que pertenece al espacio de espacio generado por la dinámica forzada.

Si (A, B) es controlable, entonces para cualquier estado $e^{A(\tau_1-\tau_0)} x(\tau_0)$ existe un $\tilde{x}(\tau)$ tal que $x(\tau) = x_f$.

Para probar la controlabilidad de (A, B) se puede utilizar la prueba de rango de la matriz de controlabilidad C , donde

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.19)$$

La ecuación de estados (A, B) es controlable si y sólo si $\text{Rank}(C) = n$, es decir, si y sólo la dinámica forzada de (A, B) puede generar todo el espacio de estados.

Cuando se determina que (A, B) es controlable, entonces existe una entrada capaz de llevar al sistema desde el estado inicial \tilde{x}_0 hasta el estado final \tilde{x}_f en un tiempo $\tau_1 - \tau_0 < \infty$. Esta entrada es

$$u(\tau) = - [e^{A(\tau_0-\tau)} B]^T W_c^{-1}(\tau_0, \tau_1) [\tilde{x}_0 - e^{A(\tau_0-\tau_1)} \tilde{x}_f] \quad (2.20)$$

donde $W_c(\tau_0, \tau_1)$ es el Grammiano de controlabilidad, dado por

$$W_c(\tau_0, \tau_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} [e^{A(\tau_0-\zeta)} B] [e^{A(\tau_0-\zeta)} B]^T d\zeta \quad (2.21)$$

Como se mostrará adelante, si (A, B) es controlable entonces $W_c(\tau_0, \tau_1)$ es no singular $\forall \tau_1 > \tau_0$.

Ahora aplicaremos la entrada $u(\tau)$ en la solución de la ecuación de estados en el instante τ_1 .

$$\begin{aligned} x(\tau_1) &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} \tilde{x}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \\ &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} \left(\tilde{x}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_0-\zeta)} B u(\zeta) d\zeta \right) \\ &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} \left(\tilde{x}_0 - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_0-\zeta)} B [e^{A(\tau_0-\zeta)} B]^T W_c^{-1}(\tau_0, \tau_1) \right. \\ &\quad \left. [\tilde{x}_0 - e^{A(\tau_0-\tau_1)} \tilde{x}_f] d\zeta \right) \\ &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} (\tilde{x}_0 - W_c(\tau_0, \tau_1) W_c^{-1}(\tau_0, \tau_1) [\tilde{x}_0 - e^{A(\tau_0-\tau_1)} \tilde{x}_f]) \\ &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} (\tilde{x}_0 - \tilde{x}_0 - e^{A(\tau_0-\tau_1)} \tilde{x}_f) \\ &= e^{A(\tau_1-\tau_0)} e^{A(\tau_0-\tau_1)} \tilde{x}_f \\ &= \tilde{x}_f \end{aligned}$$

Esto prueba que la ec. (2.20) es una entrada de (A, B) capaz de llevar la trayectoria de estados desde el estado inicial \tilde{x}_0 hasta el estado final \tilde{x}_1 en un tiempo $\tau_1 < \infty$.

La no singularidad de $W_c(t_0, t_1)$ está relacionada con la controlabilidad de (A, B) . En general el Grammiano $W(\tau_1, \tau_2)$ se define como

$$W(\tau_1, \tau_2) := \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\tau) F^*(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

donde

$$F(\tau) = \begin{bmatrix} f_1(\tau) \\ f_2(\tau) \\ \vdots \\ f_n(\tau) \end{bmatrix}$$

En [3] se muestra que las funciones continuas $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, ..., $f_n(\tau)$ son linealmente independientes en $[\tau_1, \tau_2]$ si y sólo si $W(\tau_1, \tau_2)$ es no singular. Entonces, el que $W_c(\tau_0, \tau_1)$ sea no singular significa que las n filas de la matriz $e^{A(\tau_0-\zeta)}B$ son linealmente independientes en $[\tau_0, \tau_1]$, como mencionamos anteriormente significa que (A, B) es controlable.

2.3.1. Enfoque Geométrico

Sea el SLI representado por

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau)$$

con solución

$$x(\tau) = e^{A(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta$$

El espacio alcanzable R_0 de (A, B) es el espacio generado por todos los estados que forman parte de una solución de (A, B) cuando $x(\tau_0) = 0$.

Sea $\tilde{x} \in R_0$, entonces

$$\tilde{x} = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A(\tau-\zeta)}Bu(\zeta) d\zeta, \quad \tau > \tau_0 \quad (2.23)$$

Como se muestra en [5]

$$\begin{aligned} e^{A(\tau-\zeta)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} (zI_n - A)^{-1} e^{(\tau-\zeta)z} dz \\ &= \sum_{r=1}^n \psi_r(\tau - \zeta) A^{r-1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde

$$\psi_r(\tau - \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \frac{\pi^{(r)}(z)}{\pi(z)} e^{(\tau-\zeta)z} dz, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.25)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \sum_{r=1}^n A^{r-1} B \int_{\tau_0}^{\tau} \psi_r(\tau - \zeta) u(\zeta) d\zeta \\
&= \sum_{r=1}^n A^{r-1} B \varphi_r(\tau, \tau_0)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

como $\varphi_r(\tau, \tau_0)$ es un escalar, entonces tenemos que los estados alcanzables pueden ser representados mediante una combinación lineal de los vectores $\{A^{r-1}B \mid r = 1, 2, \dots, n\}$

En general, los estados alcanzables pertenecen a la suma de los siguientes subespacios $\{\text{Im}(B), A \text{Im}(B), \dots, A^{n-1} \text{Im}(B)\}$, es decir,

$$\tilde{x} \in \text{Im}(B) + A \text{Im}(B) + \dots + A^{n-1} \text{Im}(B) \tag{2.27}$$

Sea

$$\langle A \mid \text{Im}(B) \rangle = \text{Im}(B) + A \text{Im}(B) + \dots + A^{n-1} \text{Im}(B) \tag{2.28}$$

El subespacio $\langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$ es el mínimo subespacio A -invariante que contiene la imagen de B , i.e.

$\forall x \in \langle A \mid \text{Im}(B) \rangle, Ax \in \langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$ y $\forall u \in \mathbb{R}^p \quad Bu \in \langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$. De hecho el espacio alcanzable $R_0 = \langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$.

Veamos como está forma el espacio $\langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$, en el siguiente *SLI*.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tenemos que el espacio alcanzable del *SLI* es

$$\langle A \mid \text{Im}(B) \rangle = \text{Im}(B) + A \text{Im}(B)$$

En la figura 2.5 se muestran los espacios $\text{Im}(B)$ y $A \text{Im}(B)$, si realizamos la suma todos los vectores de estos espacios podemos observar que el espacio $\langle A \mid \text{Im}(B) \rangle$ es igual al espacio de estados \mathbb{R}^2 , esto significa que el *SLI* es controlable.

Sea \mathbb{R}^n el espacio de estados, $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathbb{R}^n / R_0$ el espacio cociente debido a espacio alcanzable R_0 , $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}$ su proyección canónica, y \bar{A} el mapeo inducido en $\tilde{\mathfrak{R}}$ por A .

Tenemos que $\bar{x} = Px$, entonces (A, B) representado en el espacio cociente \mathbb{R}^n / R_0 es

$$\dot{\bar{x}}(\tau) = \bar{A} \bar{x}(\tau) \tag{2.29}$$

Podemos notar que la ley de control $u(\tau)$ no tiene influencia sobre los conjuntos $x \text{ mod } R_0$. Por esta razón, si $\tilde{\mathfrak{R}} = 0$, i.e., $R_0 = \mathbb{R}^n$ entonces (A, B) es controlable.

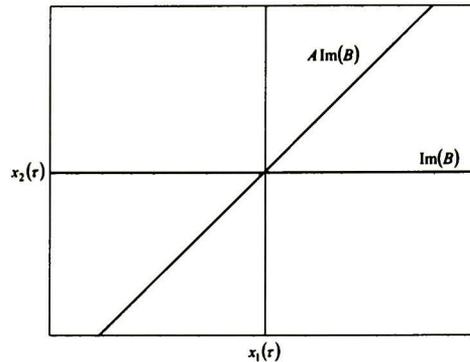


Figura 2.5: Espacio alcanzable $\langle A | \text{Im}(B) \rangle$

2.4. Controlabilidad de Sistemas de Eventos Discretos

La definición de controlabilidad utilizada en los Sistemas de Eventos Discretos es la propuesta por W. M. Wonhan [19], en este trabajo se establece que un Sistema de Eventos Discretos es controlable con respecto a un comportamiento deseado si y sólo si es posible restringir el comportamiento del Sistema al comportamiento deseado.

Esta definición no es útil para el estudio de la controlabilidad de los *SLC*, esto debido a que en nuestro caso nos interesa analizar todo el comportamiento de la dinámica discreta.

Lo que realmente es útil para el estudio de la controlabilidad de los *SLC* es saber cuando es posible restringir el comportamiento de la dinámica discreta para poder activar algún *SLI*, también es importante saber cuando es posible mantener activo un *SLI* el tiempo que sea necesario.

De hecho si utilizamos una *RPI* con transiciones manipulables para modelar la dinámica discreta del *SLC* podemos activar algún *SLI* y mantenerlo activo el tiempo que sea necesario.

Capítulo 3

Sistema Lineal Conmutado

En este capítulo se presenta el modelo utilizado para representar los *SLC*. La dinámica discreta es modelada mediante una *RPI* y la continua mediante una familia de *SLI*; se establecen algunas definiciones necesarias para el estudio de los *SLC*. También se describe la trayectoria de estados del *SLC* cuando tiene todas sus transiciones manipulables y cuando son no manipulables. Una vez mostrada la trayectoria de estados del *SLC*, se propone una definición de controlabilidad aplicable a los *SLC*.

3.1. Modelo de SLC

En este trabajo la dinámica discreta del *SLC* está representada mediante una Red de Petri Interpretada. Por su parte la dinámica continua es modelada mediante una familia de *SLI*. La *RPI* se encarga de activar un *SLI* de la familia para que represente el comportamiento de la dinámica continua.

Un *SLI* se considera activo durante el marcado M_k si y sólo si M_k está presente en la *RPI*. Por notación (A_{M_k}, B_{M_k}) es el *SLI* activado por el marcado M_k .

Para facilitar el análisis de la trayectoria de estado se utilizará una *RPI* máquinas de estado, uno acotada y viva. A continuación se explica la importancia de las propiedades.

Cuando la *RPI* es máquina de estado uno acotada podemos asignar un *SLI* a cada lugar de la *RPI*, de esta forma el *SLI* activo dependerá de cual sea el lugar que tenga la marca. Lo cual permite determinar de manera clara cuales son las transiciones que pueden activar o desactivar un *SLI*. Aunque no es una manera compacta de modelar, si es la clara, es decir, permite entender la interacción entre el comportamiento discreto y el continuo.

La vivacidad de la *RPI* garantiza la posibilidad de modificar su marcado actual, en el *SLC* esto significa que siempre podrá modificar su *SLI* activo. Como veremos adelante, la vivacidad está relacionada con la existencia de trayectorias de estados válidas.

Sea (Q, M_0) una *RPI* máquinas de estado, uno acotada y viva. Sea la familia de *SLI* $\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_p, B_p)\}$, donde p es el número de lugares de (Q, M_0) . La ecuación de estados del *SLC* es

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= A_{M_k}x(\tau) + B_{M_k}u(\tau) \\ M_{k+1} &= M_k + Cv_k\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $M_k \in \mathbb{Z}^+$ es el estado discreto ó marcado actual,
 $v_k \in \mathbb{Z}^+$ es el vector de disparo de la *RPI*,
 $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ es el estado continuo, y
 $u(\tau) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada del *SLI* activo.

El espacio de estado del *SLC* está formado por el espacio del estado continuo \mathbb{R}^n y el conjunto de marcados alcanzables $R(Q, M_0)$ de la *RPI*.

La solución $\gamma(\tau)$ de la ecuación de estados del *SLC* es el vector formado por la solución del *SLI* activo y por el marcado de la *RPI* que activa al *SLI*.

$$\gamma(\tau) = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ M_k \end{bmatrix}\tag{3.2}$$

La entrada $U(\tau)$ del *SLC* es el vector formado por la entrada del *SLI* activo y el vector de disparo de la *RPI*.

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau) \\ v_k \end{bmatrix}$$

A continuación se establecerán algunas definiciones necesarias para el estudio de *SLC*.

La secuencia de tiempos de conmutación establece los instantes en los cuales el *SLC* cambia de marcado, es decir, define el intervalo de tiempo en el cual un *SLI* permanece activo.

Definición 3.1 *La secuencia de tiempos de conmutación es una secuencia de tiempos $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, tal que*

- $\tau_0 = 0, \tau_1 = 0$ si y sólo si $M_0 \neq M_1$,
- $\tau_{k+1} > \tau_k, \forall k = 1, 2, \dots$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$,
- $M_k \neq M_{k+1}$, y

- M_k permanece constante $\forall \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$,
- $\forall \tau_k, \tau_{k+1}$, se cumple que $\tau_{k+1} - \tau_k < \infty$.

Definición 3.2 La trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del SLC se dice válida o bien definida si y sólo si $\Gamma(\tau)$ es solución de la ec. (3.1) $\forall \tau \in [0, \infty)$ y existe una secuencia de tiempos de conmutación $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ asociada a $\Gamma(\tau)$.

Definición 3.3 El estado continuo $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ es un estado de conmutación si y sólo si $\tau \in \{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$.

La definición (3.1) evita la acumulación de tiempos de conmutación en un valor constante, i.e., el tiempo de conmutación τ_k no tiende a un valor constante $\tau < \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$ (condición Zeno). Esta definición incluye la posibilidad de que el SLC conmute en el instante $\tau_0, \tau_1 = \tau_0$. También podemos observar que las secuencias de marcados de las trayectorias de estado válidas son de longitud infinita, como la RPI es viva entonces es posible que el SLC tenga soluciones válidas.

La secuencia de tiempos de conmutación depende del criterio de disparo utilizado en las transiciones que forman parte la RPI.

Si todas las transiciones del SLC son manipulables entonces cualquier secuencia de tiempos de conmutación puede ser formada, es decir, se puede elegir cuando una transición habilitada será disparada, de esta manera el SLC puede tener un SLI activo el tiempo que sea necesario para alcanzar algún estado continuo. En el caso que las transiciones de la RPI sean no manipulables la secuencia de tiempos de conmutación dependerá de cuando se disparen las transiciones no manipulables. En general el SLC no puede tener un SLI activo el tiempo que sea necesario para alcanzar algún estado continuo.

En este trabajo se estudiarán las transición no manipulables que son disparadas mediante hiperplanos de conmutación, los cuales son formados por una combinación lineal de los estados continuos $\alpha^T x = k$, $\alpha, x \in \mathbb{R}^n; k \in \mathbb{R}$. Estos hiperplanos forman parte del espacio de estados continuo, lo cual permite establecer las conmutaciones del SLC basados en la evolución de la trayectoria del estado continuo.

El disparo de las transiciones no manipulables con hiperplanos de conmutación se define a continuación.

La transición no manipulable $t_j \in T$ es disparada en el mercado M_k si y sólo si t_j está habilitada y $x(\tau) \in h_{t_j}$; donde h_{t_j} es el hiperplano de conmutación asociado a la transición t_j .

De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, las transiciones no manipulables son disparadas por hiperplanos de conmutación. Este tipo de transiciones pueden provocar que el SLC no conmute. Consideremos la siguiente situación.

Sea M_k el mercado que activa al SLI no controlable (A_{M_k}, B_{M_k}) , R_0 su espacio alcanzable y t_j la única transición no manipulable habilitada en M_k .

Si $R_0 \neq \{0\}$ y $h_{t_j} \bmod v = R_0$ para algún $v \in \mathbb{R}^n$ entonces existe la posibilidad de que la trayectoria del estado continuo no pueda alcanzar al hiperplano de conmutación h_{t_j} , ver la figura.3.1. Como R_0 es un espacio A_{M_k} -invariante entonces la trayectoria del estado continuo no podría alcanzar el hiperplano de conmutación h_{t_j} . Esta situación debe ser evitada.

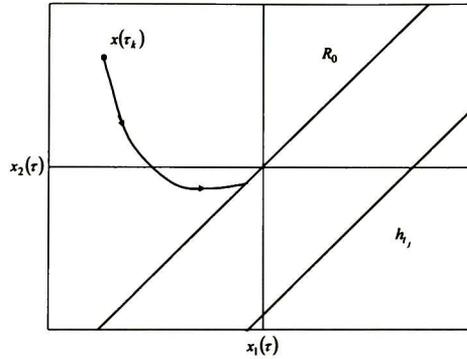


Figura 3.1: La solución del estado continuo $x(\tau)$ no puede llegar al hiperplano de conmutación h_{t_j} , $h_{t_j} \bmod v = R_0$.

Si $R_0 = \{0\}$ entonces la trayectoria del estado continuo podría llegar a 0 lo cual provocaría que el *SLC* no conmute a menos que su hiperplano de conmutación pase por cero. Esta condición puede ser evitada si el *SLI* (A_{M_k}, B_{M_k}) tiene alguna entrada.

En este trabajo consideraremos los *SLC* que tienen únicamente soluciones válidas.

3.2. Trayectoria de estados de *SLC*

A continuación se describe la forma en que evoluciona la trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones manipulables, también se muestra la evolución de una trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones no manipulables.

3.2.1. Transiciones Manipulables

Las transiciones manipulables permiten controlar la dinámica discreta. Cuando un *SLC* tiene todas sus transiciones manipulables es posible forzar sus conmutaciones hasta alcanzar algún *SLI* e incluso permanecer algún *SLI* activo el tiempo que sea necesario.

En este tipo de *SLC* cualquier estado que forme parte de la trayectoria del estado continuo puede ser un estado de conmutación, lo cual permite que la dinámica del estado discreto pueda, en cierta medida, controlar la trayectoria del estado continuo.

Veamos como se forma la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ de un *SLC* cuando todas sus transiciones son manipulables.

Supongamos que la trayectoria discreta de $\Gamma(\tau)$ está formada por la siguiente secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_{k-1}} M_k$, con tiempos de conmutación $\{\tau_i\}_{i=0}^{k+1}$. Esta suposición es posible debido a que las transiciones de la *RPI* son manipulables, en este tipo de transiciones se puede elegir alguna transición habilitada para ser disparada en el instante en que sea necesario.

Para conocer la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ falta construir la trayectoria del estado continuo a partir de la secuencia de marcados. Para este fin debemos utilizar la solución del *SLI* activo en cada intervalo formado por los tiempos de conmutación. En general, el estado inicial del *SLI* activo es el estado final del *SLI* que se encontraba activo.

Sea $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del *SLC*, donde

$$\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

El mercado M_0 permanece constante $\forall \tau \in [\tau_0, \tau_1)$, durante este intervalo el *SLI* activo es (A_{M_0}, B_{M_0}) . Como el estado inicial de la trayectoria continua es $x(\tau_0)$, entonces la trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) = e^{A_{M_0}(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A_{M_0}(\tau-\zeta)}B_{M_0}u(\zeta) d\zeta; \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \quad (3.4)$$

por tanto, la trayectoria de estados del *SLC* durante el mercado M_0 es

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x_0, u) \\ M_0 \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \quad (3.5)$$

En el instante τ_1 se dispara la transición t_1 , lo cual modifica el mercado de la *RPI*, $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$.

Ahora, el mercado M_1 permanece constante $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2)$. El *SLI* activo es (A_{M_1}, B_{M_1}) , su estado inicial es el estado alcanzado por (A_{M_0}, B_{M_0}) en el instante τ_1 , es decir, es el estado de conmutación $x(\tau_1)$ que se eligió. La trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) = e^{A_{M_1}(\tau-\tau_1)}x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{A_{M_1}(\tau-\zeta)}B_{M_1}u(\zeta) d\zeta; \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2) \quad (3.6)$$

De manera que la trayectoria de estados del *SLC* durante el mercado M_1 es

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) \\ M_1 \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2) \quad (3.7)$$

De manera sucesiva podemos conocer la trayectoria continua hasta llegar al marcado M_k .

Ahora, el marcado M_k se mantiene constante $\forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. El *SLI* activo es (A_{M_k}, B_{M_k}) , su estado inicial es el estado alcanzado por el modelo anterior en el instante τ_k , es decir, es el estado de conmutación que se haya elegido $x(\tau_k)$, entonces la trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) = e^{A_{M_k}(\tau - \tau_k)} x(\tau_k) + \int_{\tau_k}^{\tau} e^{A_{M_k}(\tau - \zeta)} B_{M_k} u(\zeta) d\zeta; \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$

tenemos que la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC* para el marcado M_k es

$$\Gamma(\tau) = \left[\begin{array}{c} \phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) \\ M_k \end{array} \right], \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (3.8)$$

La trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ está formada por una trayectoria continua y una discreta. La trayectoria discreta es una secuencia de marcados generada por su *RPI*. Por su parte, la trayectoria del estado continuo es la concatenación de las trayectorias de los *SLI* activados por la secuencia de marcados.

Cuando la *RPI* de un *SLC* habilita únicamente transiciones manipulables, la trayectoria de estado $\Gamma(\tau)$ del *SLC* está gobernada por las secuencia de marcados y de tiempos de conmutación que se escojan.

En este caso para la secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots M_k$ tenemos que la trayectoria de estado $\Gamma(\tau)$ del *SLC* es

$$\Gamma(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) \\ M_0 \end{array} \right] \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \\ \left[\begin{array}{c} \phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) \\ M_1 \end{array} \right] \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2) \\ \vdots \\ \left[\begin{array}{c} \phi^{M_k}(\tau; \tau_i, x(\tau_i), u) \\ M_k \end{array} \right] \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \end{array} \right. \quad (3.9)$$

En el capítulo 4 se mostrará que la secuencia de marcados y la de tiempos de conmutación pueden ayudar a controlar, en cierta medida, la trayectoria del estado continuo.

3.2.2. Transiciones No Manipulables

Sin importar la condición de disparo para las transiciones no manipulables, cuando el *SLC* está formado únicamente por este tipo de transiciones la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$

modifica su comportamiento. En general, no se conoce cuál es estado de conmutación, tampoco se sabe el instante en que se alcanza e incluso cuando se tienen varias transiciones habilitadas no se sabe cual será disparada. En este caso la secuencia de tiempos y la de marcados se forman a partir de los eventos que disparan las transiciones del *SLC*, en general el disparo de las transiciones no puede realizado a voluntad.

En el caso de que las transiciones no manipulables sean disparadas mediante hiperplanos de conmutación, la trayectoria del estado continuo tiene una restricción más, los estados de conmutación deben formar parte de algún hiperplano, sin duda esto limita demasiado la trayectoria del estado continuo, lo cual se refleja en la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC*.

A continuación se describe la manera en la cual se forma la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ de un *SLC* con transiciones no manipulables.

Sea $p_{M_0}^\bullet$ el conjunto de transiciones habilitadas por el marcado M_0 y $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del *SLC*, donde

$$\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ M_0 \end{bmatrix}$$

El marcado M_0 se mantiene constante $\forall \tau \in [\tau_0, \tau_1)$, durante este marcado todas las transiciones que pertenece a $p_{M_0}^\bullet$ están habilitadas, el disparo de alguna transición se presenta cuando el estado continuo $x(\tau)$ alcanza el hiperplano de conmutación h_{t_i} , donde $t_i \in p_{M_0}^\bullet$.

La trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) = e^{A_{M_0}(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A_{M_0}(\tau-\zeta)}B_{M_0}u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1)$$

y por lo tanto la trayectoria de estado $\Gamma(\tau)$ del *SLC* durante el marcado M_0 es

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) \\ M_0 \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \quad (3.10)$$

En el instante τ_1 se dispara la transición t_i , $M_0 \xrightarrow{t_i} M_1$.

El marcado M_1 permanece constante $\forall \tau \in [\tau_1, \tau_2)$, ahora las transiciones habilitadas pertenecen al conjunto $p_{M_1}^\bullet$, el disparo de alguna transición se presenta cuando el estado continuo $x(\tau)$ llega al hiperplano de conmutación h_{t_j} , donde $t_j \in p_{M_1}^\bullet$.

La trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) = e^{A_{M_1}(\tau-\tau_1)}x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{A_{M_1}(\tau-\zeta)}B_{M_1}u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2)$$

entonces, la trayectoria $\Gamma(\tau)$ del *SLC* durante el marcado M_1 es

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) \\ M_1 \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2) \quad (3.11)$$

De manera sucesiva se forma la trayectoria del *SLC* hasta el marcado M_k .

El marcado M_k se mantiene constante $\forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, todas las transiciones que pertenecen a $p_{M_1}^\bullet$ están habilitadas, el disparo de alguna transición se presenta cuando el estado continuo $x(\tau)$ llega al hiperplano de conmutación h_{t_r} , donde $t_r \in p_{M_k}^\bullet$.

La trayectoria del estado continuo es

$$\phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) = e^{A_{M_k}(\tau - \tau_k)} x(\tau_k) + \int_{\tau_k}^{\tau} e^{A_{M_k}(\tau - \zeta)} B_{M_k} u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$

y por lo tanto, la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC* para el marcado M_k es

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} \phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) \\ M_k \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (3.12)$$

Cuando el *SLC* tiene únicamente transiciones no manipulables la secuencia de marcados depende de la trayectoria del estado continuo. De hecho el estado continuo determina cuando alguna de las transiciones habilitadas será disparada, para esto cada una de las transiciones tiene un hiperplano de conmutación asociado, los hiperplanos de conmutación permanecen activos mientras su transición asociada esté habilitada. La existencia de estos hiperplanos de conmutación limita la evolución de la trayectoria del estado continuo con algún modelo activo, es decir, no es posible alcanzar todos los estados continuos con un único *SLI*, incluso cuando es controlable.

3.3. Definición de Controlabilidad

En esta sección se introduce una definición de controlabilidad de los *SLC*, la cual está basada en la controlabilidad de estado de los *SLI* [3]. Esta definición establece la posibilidad de trasladar el estado continuo desde cualquier estado inicial hasta algún estado requerido, para lograrlo el *SLC* puede activar diferentes *SLI*.

Definición 3.4 *El SLC descrito en la ec. (3.1) es controlable si y sólo si $\forall x_0, x_f$ que pertenecen a \mathbb{R}^n , existe una entrada $U(\tau)$ capaz de trasladar el estado inicial x_0 hasta el estado requerido x_f en un tiempo finito, $\tau_f - \tau_0$.*

En la definición anterior, tenemos que la entrada del *SLC* es

$$U(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau) \\ v_k \end{bmatrix}$$

por su parte, el estado inicial y el estado final del *SLC* son, respectivamente

$$\gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ M_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma(\tau_f) = \begin{bmatrix} x_f \\ M_j \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde $M_i \in R(G, M_0)$ y $M_j \in R(G, M_i)$.

En esta definición se pide la existencia de una entrada $U(\tau)$, esta entrada se forma mediante la entrada continua $u(\tau)$ y el vector de disparo de la *RPI*. Como $M_i \in R(G, M_0)$ y $M_j \in R(G, M_i)$ entonces siempre existe el vector de estados v_k capaz de llegar al marcado M_j . De hecho la entrada continua $u(\tau)$ es la que restringe la existencia de la entrada $U(\tau)$ para el *SLC*.

Las propiedades de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC* dependen del tipo de transiciones que son habilitadas en la trayectoria, por esta razón se analizarán por separado los *SLC* con transiciones manipulables y con transiciones no manipulables.

Capítulo 4

Controlabilidad de SLC con transiciones manipulables

En este capítulo se define y caracteriza el espacio alcanzable de un SLC con transiciones manipulables. Se muestra los resultados obtenidos durante el análisis de la controlabilidad, estos resultados son condiciones suficientes y necesarias para determinar la controlabilidad de los SLC . También se muestra una prueba estructural y algunos ejemplos de SLC controlables que muestran la manera en que la dinámica discreta del SLC permite controlar la trayectoria del estado continuo.

4.1. Espacio alcanzable

El espacio alcanzable del SLC es el espacio formado por todos los estados continuos que forman parte de alguna trayectoria del estado continuo, cuando el estado inicial de la trayectoria del SLC es $\Gamma(\tau_0)$, donde

$$\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

Si el espacio alcanzable del SLC es igual al espacio de estados del modelo continuo, entonces el SLC será controlable. En realidad esta condición también es necesaria.

Veamos como evoluciona el espacio alcanzable de un SLC a lo largo de una trayectoria de estados.

Sea $\Gamma(\tau)$ la trayectoria de estados del SLC formada a partir de una secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots M_k$. En la sección 3.2.1 se mostró que la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del SLC es

$$\Gamma(\tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) \\ M_0 \end{bmatrix} & \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \\ \begin{bmatrix} \phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) \\ M_1 \end{bmatrix} & \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2) \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \phi^{M_k}(\tau; \tau_i, x(\tau_i), u) \\ M_k \end{bmatrix} & \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \end{cases} \quad (4.1)$$

con

$$\phi^{M_k}(\tau; \tau_i, x_i, u) = e^{A_{M_k}(\tau-\tau_i)}x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau} e^{A_{M_k}(\tau-\zeta)}B_{M_k}u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (4.2)$$

Para caracterizar el espacio de estados del *SLC* utilizaremos todos los posibles estados de conmutación a lo largo de la trayectoria de estados del *SLC*.

Sea $\Gamma(\tau_0)$, como la transición t_1 es manipulable entonces el estado de conmutación $x(\tau_1)$ puede ser cualquier estado del espacio alcanzable de (A_{M_0}, B_{M_0}) , es decir,

$$x(\tau_1) \in \langle A_{M_0} | B_{M_0} \rangle \quad (4.3)$$

Cuando se presenta el tiempo de conmutación τ_1 , el *SLC* conmuta al marcado M_1 y la trayectoria del estado continuo tiene a $x(\tau_1)$ como estado de conmutación.

En el instante τ_2 se presenta el estado de conmutación $x(\tau_2)$, este estado depende de la evolución autónoma del estado $x(\tau_1)$ y del espacio alcanzable de (A_{M_1}, B_{M_1}) , es decir, $x(\tau_2)$ pertenece al espacio alcanzable de (A_{M_1}, B_{M_1}) trasladado al vector $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}x(\tau_1)$

$$x(\tau_2) \in e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}x(\tau_1) + \langle A_{M_1} | B_{M_1} \rangle \quad (4.4)$$

En general, la traslación de $\langle A_{M_1} | B_{M_1} \rangle$ hacia el estado $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}x(\tau_1)$ hace que aumente el espacio alcanzable del *SLC*, ver la figura 4.1, además el uso de entradas no acotadas permite que de manera instantánea la trayectoria continua pueda alcanzar los estados del conjunto $x \bmod \langle A_{M_1} | B_{M_1} \rangle$.

De manera sucesiva se calcula el espacio alcanzable del *SLC* a lo largo de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ hasta alcanzar el marcado M_k . Durante este marcado el estado de conmutación es $x(\tau_{k+1})$ el cual pertenece al espacio $\langle A_{M_k} | B_{M_k} \rangle$ trasladado a $e^{A_{M_k}(\tau_{k+1}-\tau_k)}x(\tau_k)$, i.e.

$$x(\tau_k) \in e^{A_{M_{k+1}}(\tau_{k+1}-\tau_k)}x(\tau_k) + \langle A_{M_k} | B_{M_k} \rangle \quad (4.5)$$

Una vez identificados los estados de conmutación es posible caracterizar el espacio alcanzable del *SLC*. Para este fin analizaremos la parte autónoma de los estados de

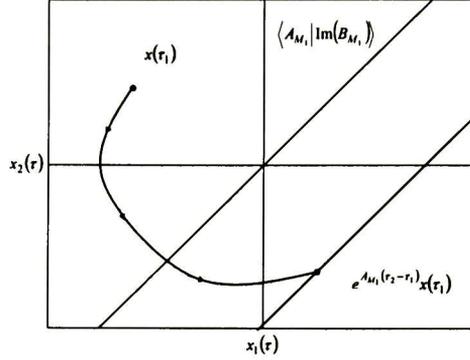


Figura 4.1: Posibles estados de conmutación, $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}x(\tau_1) + \langle A_{M_1}|B_{M_1} \rangle$

conmutación.

El primer estado de conmutación que tiene dinámica autónoma es $x(\tau_2)$, la cual es

$$e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}x(\tau_1)$$

como $x(\tau_1) \in \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle$, entonces analizaremos la transformación que sufre el espacio $\langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle$ debido a la matriz de transición de estado $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}$, i.e.

$$e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)} \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle \quad (4.6)$$

al sustituir la serie de Taylor de $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)} \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A_{M_1}^k (\tau_2 - \tau_1)^k \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{M_1}^k \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{M_1}^k R_{M_0} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $R_{M_0} = \langle A_{M_0}, B_{M_0} \rangle$.

Recordemos que para poder formar el espacio de estados $e^{A_{M_1}(\tau_2-\tau_1)} \langle A_{M_0}|B_{M_0} \rangle$ sólo necesitamos la suma de n espacios, entonces consideremos los primeros n términos de la sumatoria

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} A_{M_1}^k R_{M_0} &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_{M_1}^k R_{M_0} & (4.8) \\
 &= R_{M_0} + A_{M_1} R_{M_0} + \dots + A_{M_1}^{n-1} R_{M_0} \\
 &= \langle A_{M_1} \mid R_{M_0} \rangle
 \end{aligned}$$

i.e.

$$e^{A_{M_1}(\tau_2 - \tau_1)} x(\tau_1) \equiv \langle A_{M_1} \mid R_{M_0} \rangle \quad (4.9)$$

Ahora se caracterizará el espacio alcanzable de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$.

Sea R_0^i el espacio alcanzable del SLC para el intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Para M_0 , el espacio alcanzable del SLC es igual al espacio alcanzable del SLI activo

$$R_0^1 = \langle A_{M_0} \mid \text{Im}(B_{M_0}) \rangle \quad (4.10)$$

Cuando $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$, el espacio alcanzable del SLC es

$$R_0^2 = \langle A_{M_1} \mid R_0^1 \rangle + \langle A_{M_1} \mid \text{Im}(B_{M_1}) \rangle \quad (4.11)$$

El espacio alcanzable del SLC evoluciona hasta alcanzar el marcado M_k . Durante este marcado el espacio alcanzable del SLC es

$$R_0^{k+1} = \langle A_{M_k} \mid R_0^k \rangle + \langle A_{M_k} \mid \text{Im}(B_{M_k}) \rangle \quad (4.12)$$

En general, el espacio alcanzable del SLC se modifica cada vez que hay un nuevo marcado. Para la secuencia de estados estudiada, se tiene la siguiente secuencia de espacios alcanzable

$$\begin{aligned}
 R_0^1 &= \langle A_{M_0} \mid \text{Im}(B_{M_0}) \rangle & (4.13) \\
 R_0^2 &= \langle A_{M_1} \mid R_0^1 \rangle + \langle A_{M_1} \mid \text{Im}(B_{M_1}) \rangle \\
 &\vdots \\
 R_0^{k+1} &= \langle A_{M_k} \mid R_0^{k-1} \rangle + \langle A_{M_k} \mid \text{Im}(B_{M_k}) \rangle
 \end{aligned}$$

donde k es el número de transiciones que el SLC ha realizado en la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$.

El espacio alcanzable del SLC aumenta hasta alcanzar un espacio máximo, si este espacio llega a ser equivalente al espacio de estados continuos \mathbb{R}^n entonces a lo largo de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ el estado continuo del SLC puede alcanzar cualquier estado.

En general, si el espacio alcanzable R_0^{k+1} del SLC es igual a \mathbb{R}^n , entonces el SLC debe ejecutar menos de k transiciones para que el SLC alcance cualquier estado continuo. Si

la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ se repite para formar una solución válida de (3.1) entonces el *SLC* puede alcanzar cualquier estado continuo cada vez que el *SLC* repita $\Gamma(\tau)$.

Para determinar cuando el espacio alcanzable de un *SLI* es igual al espacio de estados se utiliza la prueba de rango de su matriz de controlabilidad [3]. Como se muestra a continuación, la dimensión del espacio alcanzable a lo largo de la trayectoria $\Gamma(\tau)$ puede ser probada de manera semejante.

Sea la matriz C_1

$$C_1 = [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1]$$

El espacio R_0^1 es igual al espacio de estados si y sólo si

$$\text{Rank}(C_1) = n \quad (4.14)$$

Antes de la primera conmutación la prueba de rango es la aplicada a los *SLI*.

Después de la primera conmutación, el *SLC* tiene como espacio alcanzable a R_0^2 ,

$$R_0^2 = \langle A_{M_1} \mid R_0^1 \rangle + \langle A_{M_1} \mid \text{Im}(B_{M_1}) \rangle \quad (4.15)$$

Sea

$$C_2 = [C_1 \quad A_2 C_1 \quad \dots \quad A_2^{n-1} C_1 \quad B_2 \quad A_2 B_2 \quad \dots \quad A_2^{n-1} B_2] \quad (4.16)$$

El espacio R_0^2 es igual al espacio de estados si y sólo si

$$\text{Rank}(C_2) = n \quad (4.17)$$

Para el espacio alcanzable R_0^k , donde

$$R_0^k = \langle A_{M_k} \mid R_0^{k-1} \rangle + \langle A_{M_k} \mid B_{M_k} \rangle \quad (4.18)$$

Sea

$$C_k = [C_{k-1} \quad A_k C_{k-1} \quad \dots \quad A_k^{n-1} C_{k-1} \quad B_k \quad A_k B_k \quad \dots \quad A_k^{n-1} B_k] \quad (4.19)$$

El espacio R_0^k es igual al espacio de estados si y sólo si

$$\text{Rank}(C_k) = n \quad (4.20)$$

Si alguna matriz $C_i, i = 1, 2, \dots, k$ es de rango pleno entonces el espacio alcanzable del *SLC* es igual al espacio de estados, lo cual garantiza que a lo largo de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ el *SLC* puede alcanzar cualquier estado continuo.

4.2. Análisis de Controlabilidad

El análisis de la controlabilidad de los *SLC* con transiciones manipulables está basado en el espacio alcanzable de *SLC* generado a partir de una trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC*.

Anteriormente se determinó como evoluciona el espacio alcanzable de $\Gamma(\tau)$, ahora se determinará el número máximo de conmutaciones que se necesitan para obtener el máximo espacio alcanzable, para esto se utiliza el espacio invariante de un *SLC* [14],[15].

Sea Θ_n el máximo espacio invariante generado por los siguientes *SLI*

$$\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_m, B_m)\} \quad (4.21)$$

donde n es el orden de los *SLI* y m es el número de *SLI*.

El espacio Θ_n se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \langle A_1 | \text{Im}(B_1) \rangle + \langle A_2 | \text{Im}(B_2) \rangle + \dots + \langle A_m | \text{Im}(B_m) \rangle \\ \Theta_2 &= \langle A_1 | \Theta_1 \rangle + \langle A_2 | \Theta_1 \rangle + \dots + \langle A_m | \Theta_1 \rangle \\ &\vdots \\ \Theta_n &= \langle A_1 | \Theta_{n-1} \rangle + \langle A_2 | \Theta_{n-1} \rangle + \dots + \langle A_m | \Theta_{n-1} \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

Note que para $n \geq 2$, Θ_n es el espacio generado por todas las posibles transformaciones de Θ_{n-1} a través de los *SLI*.

Sea Λ_i^j el espacio en Θ_j debido al espacio $\langle A_i | \text{Im}(B_i) \rangle$, observemos como se forma el espacio Λ_i^n .

En Θ_1 tenemos que

$$\Lambda_i^1 = \langle A_i | \text{Im}(B_i) \rangle \quad (4.23)$$

En Θ_2 el espacio Λ_i^1 es transformado por todos los *SLI*, i.e.

$$\Lambda_i^2 = \langle A_1 | \Lambda_i^1 \rangle + \langle A_2 | \Lambda_i^1 \rangle + \dots + \langle A_m | \Lambda_i^1 \rangle \quad (4.24)$$

Entonces, para Θ_n el espacio Λ_i^{n-1} es nuevamente transformado por todos los *SLI*, i.e.

$$\Lambda_i^n = \langle A_1 | \Lambda_i^{n-1} \rangle + \langle A_2 | \Lambda_i^{n-1} \rangle + \dots + \langle A_m | \Lambda_i^{n-1} \rangle \quad (4.25)$$

Para formar el espacio Λ_i^n se necesita $n - 1$ rotaciones del espacio $\langle A_i | \text{Im}(B_i) \rangle$ a través de todos los *SLI*.

Ahora consideremos el espacio alcanzable de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ del *SLC* suponiendo que los m *SLI* forman parte de un *T-semiflujo*.

Durante el primer ciclo dentro tenemos la siguiente secuencia de espacios alcanzables

$$\begin{aligned}
R_0^1 &= \langle A_1 \mid \text{Im}(B_1) \rangle \\
R_0^2 &= \langle A_2 \mid R_0^1 \rangle + \langle A_2 \mid \text{Im}(B_2) \rangle \\
&\vdots \\
R_0^m &= \langle A_m \mid R_0^{m-1} \rangle + \langle A_m \mid \text{Im}(B_m) \rangle
\end{aligned} \tag{4.26}$$

En este ciclo aparecen los espacios alcanzables de todos los SLI , una vez que forman parte del espacio alcanzable del SLC , empiezan a ser transformados por todos los SLI , de hecho en R_0^{m-1} podemos observar que $\Lambda_1^1 \subset R_0^m$.

Como el espacio $\langle A_m \mid \text{Im}(B_m) \rangle$ aparece después de disparar $m - 1$ transiciones, y se requieren $n - 1$ rotaciones por todos los SLI para generar Λ_m^n , entonces se deben de ejecutar $nm - 1$ transiciones para alcanzar el máximo espacio generado por los SLI .

En el n -ésimo ciclo, tenemos que el espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned}
R_0^{(n-1)m+1} &= \langle A_1 \mid R_0^{(n-1)m} \rangle + \langle A_1 \mid \text{Im}(B_1) \rangle \\
R_0^{(n-1)m+2} &= \langle A_2 \mid R_0^{(n-1)m+1} \rangle + \langle A_2 \mid \text{Im}(B_2) \rangle \\
&\vdots \\
R_0^{nm-1} &= \langle A_m \mid R_0^{nm-2} \rangle + \langle A_m \mid \text{Im}(B_m) \rangle
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Recuerde que $nm - 1$ es el número máximo de conmutaciones que se requieren para determinar si el espacio alcanzable del SLC es igual al espacio de estados \mathbb{R}^n .

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un SLC con transiciones manipulables es controlable.

Teorema 4.1 *Sea Σ un SLC descrito por la ec. (3.1), donde $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ son T -semiflujos de la RPI de Σ , todas sus transiciones son manipulables y \hat{R}_0^i es el espacio alcanzable al ejecutar w_i . El SLC Σ es controlable si y sólo si existe w_i tal que \hat{R}_0^i es igual a \mathbb{R}^n , más aún, el número de conmutaciones máximo para calcular \hat{R}_0^i es $m_i n - 1$, donde m_i es el número de transiciones en w_i y n es el orden de los SLI .*

Demostración. (*Suficiencia*)

La RPI de la ec. (3.1) es ME , una acotada, viva y fuertemente conexas; como sus transiciones son manipulables, entonces se puede formar cualquier secuencia de marcados.

Sea la secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots M_k \longrightarrow$ generada por w_i , la evolución del espacio alcanzable en el SLC es $R_0^1, R_0^2, \dots, R_0^{nm-1} = \hat{R}_0^i$. Como $\hat{R}_0^i = \mathbb{R}^n$,

38CAPÍTULO 4. CONTROLABILIDAD DE SLC CON TRANSICIONES MANIPULABLES

entonces a través de la secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots M_k \longrightarrow$ el estado continuo puede alcanzar cualquier estado.

(Necesidad)

La RPI de la ec. (3.1) es ME, uno acotada, viva y fuertemente conexas; como sus transiciones son manipulables, entonces se puede formar cualquier secuencia de marcados.

Se demuestra por contradicción, supongamos que el SLC es no controlable.

Sea la secuencia de marcados $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \dots M_k \longrightarrow$ que genera \hat{R}_0^i al ser el SLC no controlable entonces para todo T-semiflujo de la RPI se tiene que $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \notin \hat{R}_0^i$, i.e. \hat{R}_0^i no es igual al espacio de estados. ■

A continuación se establece una prueba estructural para determinar si un SLC con transiciones manipulables es controlable.

Teorema 4.2 Sea Σ un SLC descrito por la ec. (3.1), donde $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ son T-semiflujos de la RPI de Σ y todas sus transiciones son manipulables. El SLC Σ es controlable si y sólo si existe w_i tal que

$$\text{Rank}(\mathbf{C}_j) = n$$

donde

$$\mathbf{C}_1 = [B_1 \quad A_1 B_1 \quad \dots \quad A_1^{n-1} B_1] \quad (4.28)$$

y

$$\mathbf{C}_j = [C_{j-1} \quad A_k C_{j-1} \quad \dots \quad A_k^{n-1} C_{j-1} \quad B_k \quad A_k B_k \quad \dots \quad A_k^{n-1} B_k] \quad (4.29)$$

$j \in \{2, 3, \dots, nm - 1\}$, donde n es el orden de los SLI y m es el número de SLI que existen en w_i .

Demostración. Se sigue del teorema 4.1. ■

4.3. Ejemplos

En esta sección se mostrarán ejemplos de *SLC* controlables. En este tipo de *SLC* las transiciones manipulables son utilizadas para que el estado continuo del *SLC* pueda alcanzar cualquier estado. Para lograrlo se deben escoger los tiempos de conmutación y la entrada continua que permitan trasladar el estado continuo.

La entrada continua capaz de trasladar la parte controlable del *SLI* se muestra en el apéndice A.

Ejemplo 4.1 Sea el *SLC* mostrado en la figura 4.2

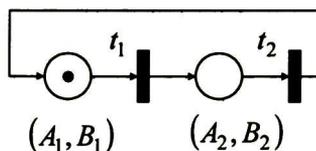


Figura 4.2: *SCL* con transiciones manipulables.

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a determinar si el *SLC* con transiciones manipulables es controlable. Si lo es se obtendrá una entrada para el *SLC* que lleve el estado continuo desde x_0 hasta x_{f_1} y también de x_{f_1} hasta x_{f_2} . Suponga que

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad y \quad x_{f_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En este *SLC* existe un único *T*-semiflujo formado por las transiciones t_1 y t_2 . Como los espacios alcanzables de (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son $\text{span}\{B_1\}$ y $\{0\}$, respectivamente, ninguno de estos *SLI* son controlables, de hecho (A_2, B_2) es autónomo.

Ahora analizaremos el espacio alcanzable del *SLC*.

Sea $\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ M_0 \end{bmatrix}$ donde $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $x(\tau_0) = x_0$.

Tenemos que $n = m = 2$, entonces en este *T*-semiflujo el máximo espacio alcanzable del *SLC* es R_0^3 .

40CAPÍTULO 4. CONTROLABILIDAD DE SLC CON TRANSICIONES MANIPULABLES

Durante el marcado M_0 la trayectoria del estado continuo del SLC está representada por (A_1, B_1) , el espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned} R_0^1 &= \langle A_1 \mid \text{Im}(B_1) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Cuando se dispara la transición t_1 el marcado del SLC se modifica, $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$, donde $M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ahora la trayectoria del estado continuo está representada por el modelo (A_2, B_2) , el espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \langle A_2 \mid R_0^1 \rangle + \langle A_2 \mid \text{Im}(B_2) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Como $R_0^2 = \mathbb{R}^2$, entonces por el teorema 4.1 este SLC es controlable.

Para este marcado inicial no fue necesario calcular el máximo espacio alcanzable. Ahora supongamos que el marcado inicial de este SLC es $M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para este marcado la trayectoria del estado continuo del SLC está representada por el modelo (A_2, B_2) , el espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned} R_0^1 &= \langle A_2 \mid \text{Im}(B_2) \rangle \\ &= \{0\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

En el instante que se dispara la transición t_2 el marcado de la RPI se modifica, i.e. $M_0 \xrightarrow{t_2} M_1$.

Como $M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces la trayectoria del estado continuo se representa por el modelo (A_1, B_1) .

El espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \langle A_1 \mid R_0^1 \rangle + \langle A_1 \mid \text{Im}(B_1) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nuevamente se dispara la transición t_1 , i.e. $M_1 \xrightarrow{t_1} M_2$, donde $M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

El espacio alcanzable del *SLC* es

$$\begin{aligned} R_0^3 &= \langle A_2 \mid R_0^2 \rangle + \langle A_2 \mid \text{Im}(B_2) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Como $R_0^3 = \mathbb{R}^2$, entonces por el teorema 4.1 el *SLC* es controlable. Con marcado inicial $M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es necesario calcular el máximo espacio alcanzable, esto no afecta la controlabilidad del *SLC*.

Para trasladar el estado continuo desde x_0 hasta x_{f_1} debemos de identificar una entrada para el *SLC*, es decir, tenemos que determinar los tiempos de conmutación para que alguna entrada continua $u(\tau)$ que lo logre.

En este caso se utilizará la trayectoria del estado continuo del *SLC*, para poder determinar la entrada del *SLC*.

La matriz de transición de estados de (A_1, B_1) es

$$e^{A_1(\tau-\tau_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

La matriz de transición de estados de (A_2, B_2) es

$$e^{A_2(\tau-\tau_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau - \tau_0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Sea $\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ M_0 \end{bmatrix}$, para $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ el *SLC* necesita disparar una sola transición para alcanzar cualquier estado continuo.

Al dispararse t_1 , la solución del estado continuo es

$$\begin{aligned} x(\tau) &= e^{A_2(\tau-\tau_1)} \left(e^{A_1(\tau_1-\tau_0)} x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_1(\tau_1-\zeta_1)} B_1 u(\zeta_1) d\zeta_1 \right) \\ &\quad + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{A_2(\tau-\zeta_2)} B_2 u(\zeta_2) d\zeta_2, \quad \tau \in (\tau_1, \tau_2] \end{aligned} \quad (4.37)$$

simplificando

$$x(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau - \tau_1 & 1 \end{bmatrix} x(\tau_0) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau - \tau_1 & 1 \end{bmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} u(\zeta_1) d\zeta_1 \quad (4.38)$$

Esta trayectoria puede ser escrita como la siguiente combinación lineal de estados

$$x(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau - \tau_1 \end{bmatrix} x_1(\tau_0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2(\tau_0) + \begin{bmatrix} 1 \\ \tau - \tau_1 \end{bmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} u(\zeta_1) d\zeta_1 \quad (4.39)$$

Cuando $x_2(\tau_0) \neq 0$, la trayectoria del estado continuo tiene dos vectores linealmente independientes, entonces con una entrada $u(\zeta_1)$ y los tiempos de conmutación adecuados, se puede alcanzar cualquier estado continuo.

Supongamos que $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y que $x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Al sustituir estos estados en la ec. (4.38), tenemos que

$$x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tau - \tau_1 \end{bmatrix} \int_{\tau_0}^{\tau_1} u(\zeta) d\zeta \quad (4.40)$$

Para la entrada $u(\zeta) = 1$, los tiempos de conmutación deben ser $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$. Esta entrada al SLC garantiza que en el instante $\tau = 6$ el estado continuo $x(\tau)$ alcanza al estado x_{f_1} . Como el estado continuo x_{f_1} se alcanza en $\tau = 6$, entonces el tiempo de conmutación debe ser $\tau_2 \geq 6$. Esto para garantizar que el estado continuo del SLC alcance el estado x_{f_1} .

La trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 4.3

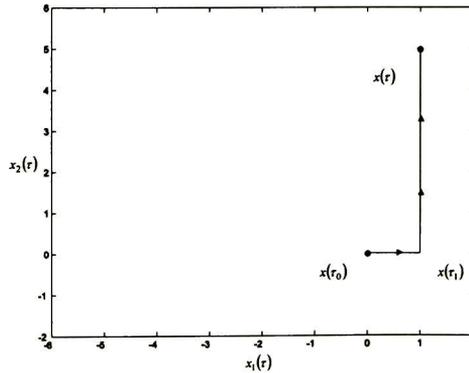


Figura 4.3: Plano de fase del estado continuo, $\tau_1 = 1$ y $\tau = 6$.

Para llevar el estado continuo de x_{f_1} a x_{f_2} se utilizará nuevamente la trayectoria del estado continuo. Supongamos que $x_{f_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Sea $\tau_2 = 6$ el tiempo de conmutación del *SLC*. Sustituyendo en la ec. (4.38), tenemos que

$$x_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ (\tau - \tau_3) + 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \tau - \tau_3 \end{array} \right] \int_{\tau_2}^{\tau_3} u(\zeta) d\zeta$$

Para $u(\zeta) = -1$, los tiempos de conmutación $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$ garantizan que en el instante $\tau = 13.2$ el estado $x(\tau)$ alcanza al estado x_{f_2} , note que el tiempo de conmutación debe ser $\tau_4 \geq 13.2$.

En resumen, con la entrada continua

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \\ k, & \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1) \\ -1, & \forall \tau \in [\tau_2, \tau_3) \\ k, & \forall \tau \in [\tau_3, \tau_4) \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y la secuencia de tiempos de conmutación $\tau_0 = 0, \tau_1 = 1, \tau_2 = 6, \tau_3 = 12$, se logra llevar la trayectoria de estados continua a través de los estados x_0, x_{f_1} y x_{f_2} . La trayectoria del estado continuo con la entrada $u(\tau)$ se muestra en la figura 4.4

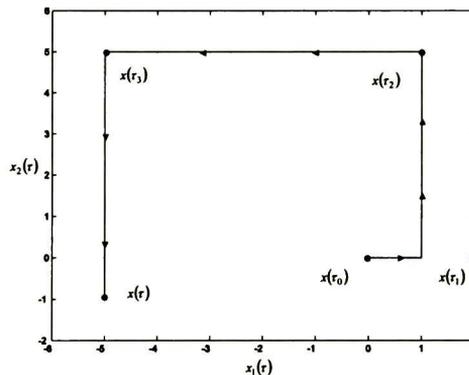


Figura 4.4: Plano de fase del estado continuo, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 6$, $\tau_3 = 12$, y $\tau = 13.2$.

Cuando el *SLC* es controlable, es posible utilizar la parte controlable de cada *SLI* para poder alcanzar cualquier estado, básicamente se debe de llevar la dinámica controlable a un estado \hat{x} , para que cuando el *SLC* conmute, la evolución de la dinámica no controlable del nuevo *SLI* pueda llegar al estado requerido. Lo anterior se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2 Sea el SLC mostrado en la figura 4.5

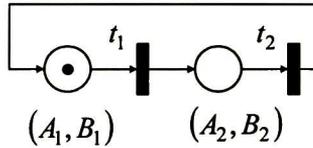


Figura 4.5: SCL con transiciones manipulables.

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a determinar si el SLC con transiciones manipulables es controlable. Si lo es se obtendrá una entrada para el SLC que lleve el estado continuo desde x_0 hasta x_{f_1} y también de x_{f_1} hasta x_{f_2} . Suponga que

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad y \quad x_{f_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como los espacios alcanzables de (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son, respectivamente, $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ y $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ podemos concluir que los dos SLI son no controlables.

En esta ocasión probaremos la controlabilidad del SLC mediante el teorema 4.2.

Sea $\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ M_0 \end{bmatrix}$ donde $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $x(\tau_0) = x_0$.

Para el marcado M_0 , la dinámica continua del SLC está representada por (A_1, B_1) .

Sea

$$\begin{aligned} C_1 &= [B_1 \quad A_1 B_1] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la dimensión del espacio alcanzable del SLC es

$$\text{Rank}(C_1) = 1$$

Como la dimensión del espacio alcanzable es uno, el SLC debe de conmutar.

Para M_1 , la dinámica continua es representada por (A_2, B_2) .
Sea

$$C_2 = [C_1 \quad A_2 C_1 \quad B_2 \quad A_2 B_2] \quad (4.41)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

la dimensión del espacio alcanzable del SLC es

$$Rank(C_2) = 2 \quad (4.43)$$

como $Rank(C_2) = 2$, entonces basado en el teorema 4.2 el SLC es controlable.

Ahora vamos a trasladar el estado continuo del SLC del estado $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hasta $x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En general, para alcanzar cualquier estado continuo se necesita utilizar la dinámica controlable de cada SLI . Básicamente, se debe llevar la dinámica controlable del modelo (A_1, B_1) hasta el estado \hat{x} , de manera que al conmutar la dinámica no controlable de (A_2, B_2) llegue al estado requerido. Para lograrlo se deben elegir los tiempos de conmutación, por su parte la entrada continua se calcula según se muestra en el apéndice A.

La matriz de transición de estados del modelo (A_1, B_1) es

$$e^{A_1(\tau-\tau_0)} = \begin{bmatrix} e^{(\tau-\tau_0)} & e^{(\tau-\tau_0)} - e^{-2(\tau-\tau_0)} \\ 0 & e^{-2(\tau-\tau_0)} \end{bmatrix}$$

por su parte, la matriz de transición de estados del modelo (A_2, B_2) es

$$e^{A_2(\tau-\tau_0)} = \begin{bmatrix} e^{(\tau-\tau_0)} & 0 \\ e^{(\tau-\tau_0)} - e^{-2(\tau-\tau_0)} & e^{-2(\tau-\tau_0)} \end{bmatrix}$$

Sea $\tau_1 = 1$ y $\tau_2 = 2$. En la matriz de transición de estados (A_2, B_2) podemos observar que la evolución de su estado no controlable es

$$x_1(\tau_2) = e^{(\tau_2-\tau_1)} \hat{x}_1$$

i.e.

$$\hat{x}_1 = e^{-(\tau_2-\tau_1)} x_1(\tau_2)$$

Para que el estado no controlable de (A_2, B_2) pueda alcanzar el estado x_{f_1} , el estado controlable del sistema (A_1, B_1) debe de llegar al estado \hat{x}_1 .

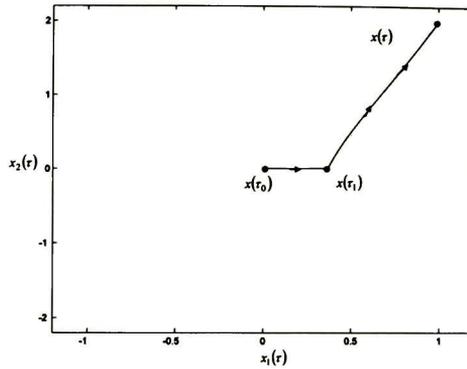


Figura 4.6: Plano de fase de la trayectoria continua, $\tau_1 = 1$.

La trayectoria de estados se muestra en la figura 4.6

Ahora, se desea trasladar el $x_{f_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ hasta $x_{f_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Nuevamente se necesita identificar el estado \hat{x}_1 que le permita al estado no controlable de (A_2, B_2) llegar al estado deseado x_{f_2} .

Sea $\tau_3 = 3$ y $\tau_4 = 4$, entonces

$$\hat{x}_1 = e^{-(\tau_4 - \tau_3)} x_1(\tau_4)$$

Ahora el estado controlable de (A_1, B_1) debe de llegar al estado \hat{x}_1 .

La trayectoria de estados se muestra en la figura 4.7

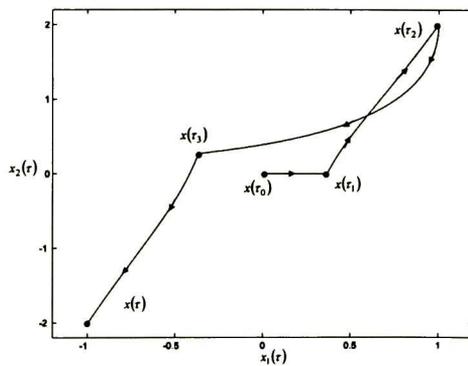


Figura 4.7: Plano de fase de la trayectoria continua, $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2$, y $\tau_3 = 3$.

A continuación se muestra un *SLC* que esta formado por *SLI* no controlables que tienen acoplada la dinámica controlable y la no controlable, para separarlas se utilizará un transformación de similitud.

Ejemplo 4.3 Sea el *SLC* mostrado en la figura 4.8

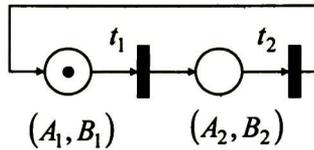


Figura 4.8: *SCL* con transiciones manipulables.

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a determinar si el *SLC* con transiciones manipulables es controlable. Si lo es se obtendrá una entrada para el *SLC* que lleve el estado continuo desde x_0 hasta x_{f_1} y también de x_{f_1} hasta x_{f_2} .

Suponga que

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{f_1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \quad y \quad x_{f_2} = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Probemos la controlabilidad del *SLC*.

Sea $\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} M_0 \\ x(\tau_0) \end{bmatrix}$, donde $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ El espacio alcanzable del *SLC* para M_0 es

$$\begin{aligned} R_0^1 &= \langle A_1 | \text{Im}(B_1) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

48CAPÍTULO 4. CONTROLABILIDAD DE SLC CON TRANSICIONES MANIPULABLES

cuando se dispara la transición t_1 , se presenta el marcado $M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ahora sistema (A_2, B_2) representa de la dinámica continua.
El espacio alcanzable del SLC es

$$\begin{aligned} R_0^2 &= \langle A_2 | \text{Im}(B_1) \rangle + \langle A_2 | \text{Im}(B_2) \rangle \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

como $R_0^2 = \mathbb{R}^3$, entonces basado en el Teorema 4.1 el SLC es controlable.

Para poder utilizar la entrada continua que se muestra en el Apéndice A debemos separar la dinámica controlable y no controlable de los SLI, para esto se utilizarán las siguientes matrices de transformación.

Para el modelo (A_1, B_1)

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, para el modelo (A_2, B_2)

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

los sistemas equivalentes son

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las matrices de transición de estados de (\bar{A}_1, \bar{B}_1) y (\bar{A}_2, \bar{B}_2) son

$$e^{\bar{A}_1 \eta} = \begin{bmatrix} e^\eta & 0 & 0 \\ 0 & e^\eta & 0 \\ 0 & 0 & e^\eta \end{bmatrix}$$

$$e^{\bar{A}_2 \eta} = \begin{bmatrix} e^\eta - \eta e^\eta & -\eta e^\eta & 0 \\ \eta e^\eta & e^\eta + \eta e^\eta & 0 \\ 0 & 0 & e^\eta \end{bmatrix}$$

Para poder alcanzar cualquier en (\bar{A}_2, \bar{B}_2) , la parte controlable del sistema (\bar{A}_1, \bar{B}_1) debe trasladar el estado continuo hasta algún estado \hat{x} que le permita a la dinámica no controlable del sistema (\bar{A}_2, \bar{B}_2) llegar al estado requerido. Para este fin se tiene la ley de control establecida en el apéndice A.

Para llevar el estado continuo de $x_0 = 0$ hasta $x_{f_1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Sean $\tau_1 = 2$ y $\tau_2 = 4$, entonces la evolución de la dinámica no controlable de (\bar{A}_2, \bar{B}_2) es

$$\bar{x}_3(\tau_2) = e^{(\tau_2 - \tau_1)} \hat{x}_3$$

y por tanto

$$\hat{x}_3 = e^{-(\tau_2 - \tau_1)} \bar{x}_3(\tau_2)$$

Se debe notar que la evolución está en términos de los estados del sistema equivalente. La trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 4.9

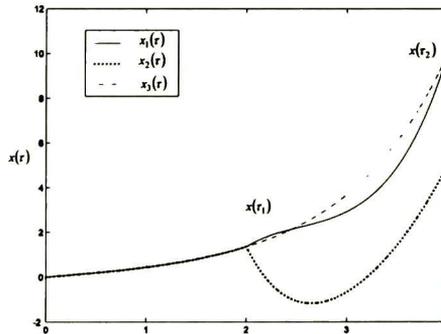


Figura 4.9: Trayectoria del estado continuo, $\tau_1 = 2, \tau_2 = 4$.

Ahora se llevará el estado continuo de $x_{f_1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ hasta $x_{f_2} = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$.

50CAPÍTULO 4. CONTROLABILIDAD DE SLC CON TRANSICIONES MANIPULABLES

Sean $\tau_3 = 6$ y $\tau_4 = 8$, entonces la evolución de la dinámica no controlable de (\bar{A}_2, \bar{B}_2) es

$$\bar{x}_3(\tau_4) = e^{(\tau_4 - \tau_3)} \hat{x}_3$$

y por tanto

$$\hat{x}_3 = e^{-(\tau_4 - \tau_3)} \bar{x}_3(\tau_4)$$

La trayectoria del estado continuo está mostrada en la figura 4.10.

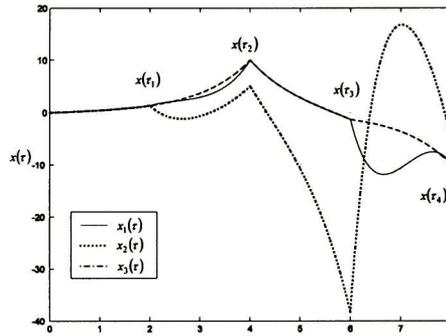


Figura 4.10: Trayectoria del estado continuo, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 4$, $\tau_3 = 6$, $\tau_4 = 8$.

Como se mostró en los ejemplos anteriores, la dinámica discreta ayuda a trasladar el estado continuo del SLC. Para esto se deben seleccionar tiempos de conmutación y las entradas adecuadas.

Capítulo 5

Controlabilidad de SLC con transiciones no manipulables

En este capítulo se define el conjunto de estados alcanzables, este conjunto de estados se forma a partir de la trayectoria de estados del *SLC* con transiciones no manipulables. Se muestran algunas condiciones suficientes para determinar cuando el *SLC* con transiciones no manipulables es controlable.

5.1. Conjunto de estados alcanzables

El conjunto de estados alcanzables del *SLC* está constituido por todos los estados que forman parte de alguna trayectoria del estado continuo que tienen a $\Gamma(\tau_0)$ como estado inicial, donde

$$\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Debemos recordar que la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ depende de la trayectoria del estado continuo. En este caso es el estado continuo quien determina que transición se debe de ejecutar, es decir, la trayectoria del estado continuo establece la secuencia de marcados de la trayectoria del *SLC*.

A continuación se muestra como se forma el conjunto de estados alcanzables Ψ a partir de la trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones no manipulables.

Sea ψ_{M_0} el conjunto de estados alcanzables del *SLC* durante el marcado M_0 , $p_{M_0}^*$ el conjunto de transiciones habilitadas por el marcado M_0 y $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del *SLC*, donde

$$\Gamma(\tau_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix}$$

52CAPÍTULO 5. CONTROLABILIDAD DE SLC CON TRANSICIONES NO MANIPULABLES

El mercado M_0 se mantiene constante en el intervalo $[\tau_0, \tau_1]$. Durante este mercado las transiciones que pertenecen a $p_{M_0}^\bullet$ están habilitadas, cuando $x(\tau) \in h_{t_i}$ se dispara la transición $t_i \in p_{M_0}^\bullet$, i.e. $M_0 \xrightarrow{t_i} M_1$.

El conjunto de estados alcanzables durante M_0 es

$$\psi_{M_0} = \{x(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid x(\tau) = \phi^{M_0}(\tau; \tau_0, 0, u) \text{ y } x(\tau) \notin h_{t_i}\}, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad (5.2)$$

donde

$$\phi^{M_0}(\tau; \tau_0, x(\tau_0), u) = e^{A_{M_0}(\tau-\tau_0)}x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A_{M_0}(\tau-\zeta)}B_{M_0}u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1]$$

El conjunto ψ_{M_0} está formado por los estados continuos que pertenecen a cualquier trayectoria del estado continuo que no ha logrado alcanzar algún hiperplano de conmutación asociado a una de las transiciones habilitadas por el mercado M_0 .

Durante el mercado M_1 se habilitan las transiciones que pertenecen a $p_{M_1}^\bullet$. En el instante que la trayectoria continua $x(\tau)$ alcanza al hiperplano h_{t_j} se dispara la transición $t_j \in p_{M_1}^\bullet$, i.e. $M_1 \xrightarrow{t_j} M_2$.

El nuevo conjunto de estados alcanzables durante el mercado M_1 es

$$\psi_{M_1} = \{x(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid x(\tau) = \phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) \text{ y } x(\tau) \notin h_{t_j}\}, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

donde

$$\phi^{M_1}(\tau; \tau_1, x(\tau_1), u) = e^{A_{M_1}(\tau-\tau_1)}x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} e^{A_{M_1}(\tau-\zeta)}B_{M_1}u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

Ahora, el conjunto de estados alcanzables ψ_{M_1} está formado por los estados continuos que pertenecen a alguna trayectoria de estados $x(\tau)$ antes de que alcance algún hiperplano de conmutación asociado a una de las transiciones habilitadas por el mercado M_1 .

De manera sucesiva se forman los conjuntos de estados alcanzables hasta llegar al mercado M_k .

Durante el mercado M_k , las transiciones que pertenecen al conjunto $p_{M_k}^\bullet$ están habilitadas, en el instante que el estado continuo $x(\tau)$ alcanza al hiperplano h_{t_l} se dispara la transición $t_l \in p_{M_k}^\bullet$.

El conjunto de estados alcanzables durante el mercado M_k es

$$\psi_{M_k} = \{x(\tau) \in \mathbb{R}^n \mid x(\tau) = \phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) \text{ y } x(\tau) \notin h_{t_l}\}, \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$$

donde

$$\phi^{M_k}(\tau; \tau_k, x(\tau_k), u) = e^{A_{M_k}(\tau - \tau_k)} x(\tau_k) + \int_{\tau_k}^{\tau} e^{A_{M_k}(\tau - \zeta)} B_{M_k} u(\zeta) d\zeta, \quad \forall \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1})$$

Nuevamente, el conjunto de estados alcanzables ψ_{M_k} está formado por los estados continuos que pertenecen a alguna trayectoria de estados $x(\tau)$ antes de que alcance algún hiperplano de conmutación asociado a una de las transiciones habilitadas por el marcado M_k .

Entonces, el conjunto de estados alcanzables Ψ formado a partir de la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ se obtiene mediante la unión de los conjuntos ψ_{M_i} , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, es decir,

$$\Psi = \psi_{M_0} \cup \psi_{M_1} \cup \dots \cup \psi_{M_k}$$

En general, no podemos elegir que transiciones disparar entonces si para todas las posibles trayectorias de estados del *SLC* se mantienen que Ψ es igual al espacio de estados, entonces el *SLC* será controlable, esta condición también es necesaria. Desafortunadamente es difícil de probar, incluso cuando todos los modelos continuos son controlables, debido a que se requiere realizar una búsqueda exhaustiva a lo largo de todas las posibles trayectorias de estado del *SLC*.

5.2. Análisis de Controlabilidad

La trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ de los *SLC* con transiciones no manipulables depende del estado continuo, esto se debe a que las transiciones son disparadas por hiperplanos de conmutación, i.e., la secuencia de marcados está determinada por la trayectoria del estado continuo.

La presencia de los hiperplanos afecta las características de la trayectoria del estado continuo. Ahora, los hiperplanos contienen a los estados de conmutación, entonces para que el *SLC* conmute, el estado continuo debe alcanzar alguno de los hiperplanos que tengan su transición activa. Esto impide utilizar la dinámica no controlable del *SLI* para trasladar el estado continuo.

Además, los estados que forman parte de la trayectoria del estado continuo del *SLC* no forman un espacio vectorial, sólo constituyen un conjunto de estados. La construcción del conjunto de estados alcanzables Ψ requiere de la búsqueda a lo largo de todas las posibles trayectorias del *SLC*.

En general, la presencia de los hiperplanos de conmutación parten el espacio alcanzable del *SLI*, esto limita la evolución de la trayectoria del estado continuo a un conjunto del espacio de estados.

Por estas razones se decidió investigar bajo que condiciones es posible alcanzar todos los estados continuos con el disparo de una transición. Se debe de tener en cuenta las restricciones de modelado para los SLC con transiciones no manipulables.

Los SLI utilizados para trasladar cualquier estado continuo deben ser controlables. Esto permite que la trayectoria continua pueda mantenerse evolucionando dentro de alguna región que generaron los hiperplanos activos.

Para esto se utiliza la siguiente entrada

$$u(\tau) = kx - [e^{A(\tau_0-\tau)}B]^T W_c^{-1}(\tau_0, \tau_1) [\tilde{x}_0 - e^{A(\tau_0-\tau_1)}\tilde{x}_f]$$

Esta entrada permite construir la trayectoria del estado continuo a tramos, la retroalimentación de estados permite modificar la velocidad y dirección de la trayectoria del estado continuo de manera que evite llegar al hiperplano antes de alcanzar algún estado deseado.

Como no se conoce la trayectoria del estado discreto, entonces para que el SLC sea controlable se debe cumplir que para todas las posibles trayectorias del SLC, el conjunto de estados alcanzables Ψ debe ser equivalente al espacio de estado.

En la figura 5.1 se muestra el principal problema que tienen los SLC con conmutaciones controladas por hiperplanos. En general, los hiperplanos forman conjuntos de estados que no son alcanzables por la trayectoria de estados después de una transición, para poder alcanzar parte de ese conjunto el SLC debe de realizar otra conmutación lo cual puede repetirse de manera indefinida.

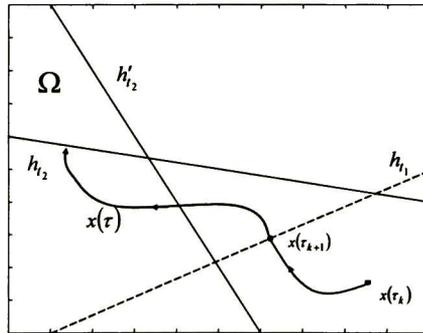


Figura 5.1: Los estados de Ω no pueden ser alcanzados por la trayectoria del estado continuo.

A continuación se muestra algunas condiciones que garantizarán la posibilidad de que el estado continuo de un SLC pueda alcanzar cualquier otro estado. Este resultado está basado en la existencia de dos SLI controlables dentro de cada T-semiflujos de la RPI.

Teorema 5.1 Sea el SLC descrito en la ec. (3.1) con sus transiciones no manipulables. Sea $h_{t_k} \in p_{M_k}^\bullet$, $h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^\bullet$, tal que $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$, donde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $|p_{M_k}^\bullet| = |p_{M_{k+1}}^\bullet| = 1$. El SLC es controlable si en cada T -semiflujo del SLC existen (A_{M_k}, B_{M_k}) y $(A_{M_{k+1}}, B_{M_{k+1}})$ controlables.

Demostración. Supongamos que existen (A_{M_k}, B_{M_k}) y $(A_{M_{k+1}}, B_{M_{k+1}})$ controlables en cada T -semiflujo del SLC.

Sea $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del SLC. Cuando la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ llega al marcado M_k se habilita únicamente la transición t_k , $|p_{M_k}^\bullet| = 1$, entonces existe un hiperplano h_{t_k} activo el cual divide el espacio del estado continuo en los conjuntos Ω_1 y Ω_2 , ver figura 5.2.

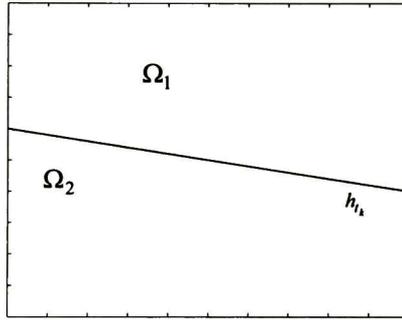


Figura 5.2: Efecto del hiperplano de conmutación h_{t_k} en el espacio del estado continuo.

Si el estado de conmutación $x(\tau_k)$ pertenece al conjunto Ω_1 entonces con el SLI activo, en este caso (A_{M_k}, B_{M_k}) , se pueden alcanzar los estados pertenecientes a Ω_1 . Para alcanzar los estados pertenecientes a Ω_2 , la trayectoria continua del SLC debe pasar por algún estado de h_{t_k} , i.e. el SLC debe disparar t_k , $M_k \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$.

Ahora, el marcado M_k habilita sólo la transición t_{k+1} , entonces el hiperplano $h_{t_{k+1}}$ parte el espacio del estado continuo en dos nuevos conjuntos $\hat{\Omega}_1$ y $\hat{\Omega}_2$.

Como $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$ entonces existen elementos de Ω_i que forman parte de $\hat{\Omega}_1$ y otros de $\hat{\Omega}_2$.

Entonces para poder alcanzar los estados de Ω_2 que pertenecen a $\hat{\Omega}_1$ el SLC debió de conmutar en un estado $x(\tau_{k+1})$ que pertenezca a $\hat{\Omega}_1$. Si se desea alcanzar los estados de Ω_2 que pertenecen a $\hat{\Omega}_2$, entonces el SLC debió de conmutar en un estado $\hat{x}(\tau_{k+1})$ que pertenezca a $\hat{\Omega}_2$, ver figura 5.3

La selección adecuada del estado de conmutación permite alcanzar cualquier elemento de Ω_2 , i.e. es posible que la trayectoria alcance cualquier estado.

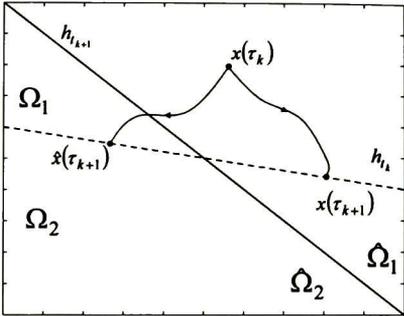


Figura 5.3: Particiones del espacio de estados debidas a h_{t_k} y $h_{t_{k+1}}$.

Cuando $x(\tau_k) \in \Omega_2$ un razonamiento semejante permite concluir que en el mercado M_{k+1} el SLC puede alcanzar cualquier estado de Ω_1 .

Como en cada T -semiflujo tenemos la situación descrita, entonces se puede alcanzar cualquier estado continuo para cualquier trayectoria $\Gamma(\tau)$ del SLC. ■

Las condiciones mostradas en este resultado evitan que las particiones hechas por los hiperplanos de conmutación formen regiones de estados que no puedan ser alcanzadas por la trayectoria del estado continuo.

El siguiente SLC es un ejemplo que cumple con el teorema 5.1

Ejemplo 5.1 Sea el SLC con transiciones no manipulables, mostrado en la figura 5.4 y sus hiperplanos son $h_{t_1} : x_1 - x_2 = -2$ y $h_{t_2} : x_1 + x_2 = 2$.

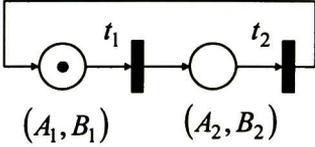


Figura 5.4: SLC con transiciones no manipulables.

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Si el *SLC* con transiciones manipulables es controlable, entonces llevar el estado continuo desde x_0 hasta x_1 , donde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ y } x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La *RPI* del *SLC* tiene un *T*-semiflujo, los modelos (A_1, B_1) y (A_2, B_1) son controlables, sólo existe una transición de salida para cada lugar y se mantiene que $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$, entonces basados en el teorema 5.1 el *SLC* es controlable.

Determinemos una posible trayectoria de estados para llevar el estado continuo de x_0 hasta x_f .

Tenemos que el marcado inicial es $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como el estado final y el estado inicial pertenecen a regiones diferentes $x_0 \in \Omega_1$, $x_f \in \Omega_2$, entonces el *SLC* debe de conmutar para poder alcanzar el estado x_f , ver la figura 5.5

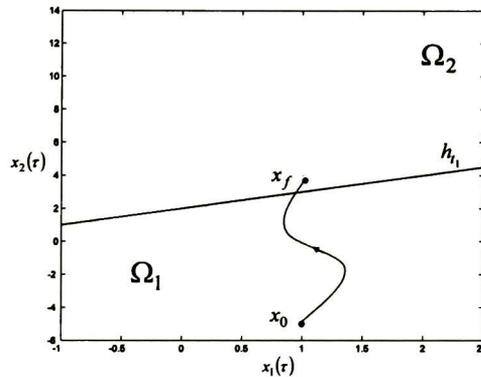


Figura 5.5: Posible trayectoria de (A_1, B_1) para alcanzar el estado continuo x_f .

Para elegir el estado de conmutación debemos de ubicar en que partición del siguiente hiperplano h_{t_2} se encuentra el estado final, como $x_f \in \hat{\Omega}_2$, ver la figura 5.6 entonces el *SLC* debe de conmutar en cualquier estado de h_{t_1} que pertenezca a $\hat{\Omega}_2$.

Sea $\tau_1 = 10$ y $x(\tau_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, la trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 5.7.

Ahora sólo falta alcanzar el estado $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ desde $x(\tau_1)$.

Sea $\tau_2 = 15$, la trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 5.8

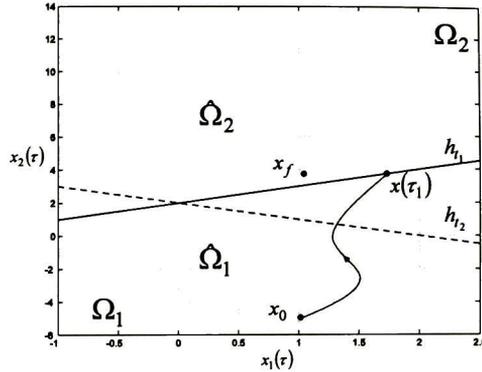


Figura 5.6: Una posible trayectoria continua para alcanzar x_f durante M_0 .

El teorema anterior muestra las condiciones suficientes para determinar cuando un SLC es controlable, estas condiciones son estructurales y permiten que el estado continuo pueda alcanzar cualquier estado con una única transición. En realidad es posible tener decisiones en el segundo SLI controlable para esto los hiperplanos de las transiciones $p_{M_{k+1}}^\bullet$ deben ser variedad lineal del mismo subespacio, esto evita que se formen regiones cerradas que no permitan alcanzar algunos estados.

Teorema 5.2 *Sea el SLC descrito en (3.1) con sus transiciones no manipulables. Sea $h_{t_k} \in p_{M_k}^\bullet, \forall h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^\bullet$, tal que $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$, donde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, con $|p_{M_k}^\bullet| = 1, |p_{M_{k+1}}^\bullet| = r$ y $\forall h_{t_i}, h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^\bullet$ se mantiene que $h_{t_i} \bmod v_1 = h_{t_{k+1}} \bmod v_2$. El SLC es controlable si en cada T -semiflujo del SLC existen (A_{M_k}, B_{M_k}) y $(A_{M_{k+1}}, B_{M_{k+1}})$ controlables.*

Demostración. Supongamos que existen (A_{M_k}, B_{M_k}) y $(A_{M_{k+1}}, B_{M_{k+1}})$ controlables en cada T -semiflujo del SLC.

Sea $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del SLC, cuando la trayectoria de estados $\Gamma(\tau)$ llega al marcado M_k se habilita únicamente la transición t_k entonces existe un hiperplano h_{t_k} activo el cual separa el espacio del estado continuo en los conjuntos Ω_1 y Ω_2 .

Si el estado continuo $x(\tau) \in \Omega_1$, entonces por ser (A_{M_k}, B_{M_k}) controlable se pueden alcanzar los estados pertenecientes a Ω_1 , para alcanzar los estados pertenecientes a Ω_2 , el SLC debe conmutar.

El marcado M_{k+1} habilita r transiciones.

Como $\forall h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^\bullet$ se mantiene que $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$ y también $\forall h_{t_i}, h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^\bullet, h_{t_i} \bmod v_1 = h_{t_{k+1}} \bmod v_2$. entonces los hiperplanos asociado a las transiciones activas parten el espacio del estado continuo en $r+1$ conjuntos $\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2, \dots, \hat{\Omega}_{r+1}$;

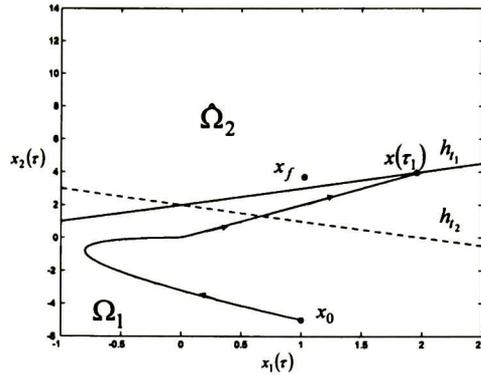


Figura 5.7: Trayectoria de $x(\tau)$ para alcanzar x_1 durante M_0 .

y por tanto existen estados continuos del conjunto Ω_2 que forman parte de $\hat{\Omega}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Para poder alcanzar los estados de Ω_2 que pertenecen a $\hat{\Omega}_i$ el *SLC* debió de conmutar en un estado que pertenezca a $\hat{\Omega}_i$.

Al seleccionar en forma adecuada del estado de conmutación es posible alcanzar cualquier estado del conjunto Ω_2 .

Cuando $x(\tau_k) \in \Omega_2$ un razonamiento semejante permite concluir que en el marcado M_{k+1} el *SLC* puede alcanzar cualquier estado de Ω_1 .

Como en cada T -semiflujo tenemos la situación descrita, entonces se puede alcanzar cualquier estado continuo para cualquier trayectoria $\Gamma(\tau)$ del *SLC*. ■

El teorema 5.1 es un caso particular del teorema 5.2, en este último se pueden tener decisiones.

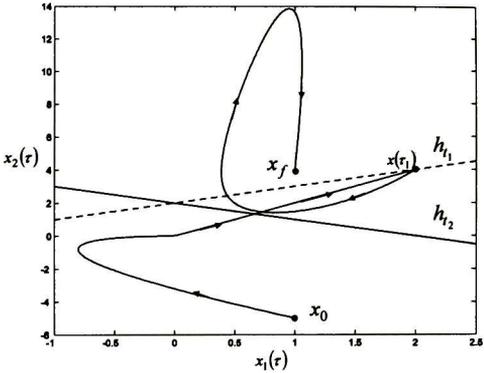


Figura 5.8: Plano de fase del estado continuo, la trayectoria va desde x_0 hasta x_f .

A continuación se muestra un ejemplo del teorema 5.2.

Ejemplo 5.2 Sea el SLC con transiciones no manipulables, mostrado en la figura 5.9, sus hiperplanos son $h_{t_1} : x_1 = 5$, $h_{t_2} : x_1 - x_2 = 0$, $h_{t_3} : x_1 + x_2 = 0$, y $h_{t_4} = x_1 + x_2 = -9.5$.

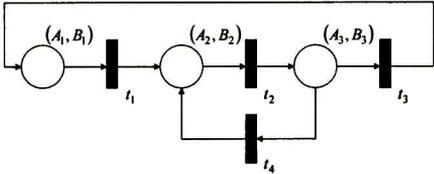


Figura 5.9: SLC con transiciones no manipulables.

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Si el SLC es controlable, entonces llevar el estado continuo desde x_0 hasta x_1 , donde

$$x_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ y } x_f = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

También llevar el estado continuo desde los estados

$$x_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}, y x_f = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La RPI del SLC tiene un T-semiflujo, el sistema (A_1, B_1) es no controlable, por su parte (A_2, B_2) , (A_3, B_3) son controlables. Además sus lugares tienen, respectivamente, una y dos transiciones de salida, también se cumple que $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$ y $\forall h_{t_i}, h_{t_{k+1}} \in p_{M_{k+1}}^*$ se mantiene que $h_{t_i} \bmod v_1 = h_{t_{k+1}} \bmod v_2$, entonces basados en el Teorema 5.2 el SLC es controlable.

Determinaremos una trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ que lleve desde $x_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ hasta $x_f = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el marcado inicial $M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, el modelo (A_1, B_1) representa la dinámica del estado continuo. Con este SLI la trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ no puede alcanzar a x_1 por lo que se forzará a conmutar el SLC.

Para forzar la conmutación se utilizara la ley de control mostrada en el apéndice A

Sea $\tau_1 = 10$ y $x(\tau_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, en este caso podemos elegir el estado $x(\tau_1)$. En general, cuando se utiliza una entrada acotada, no es posible elegir el estado ni el tiempo de conmutación. La trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ se muestra en la figura 5.5

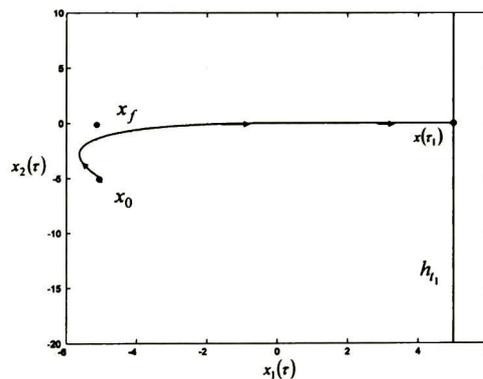


Figura 5.10: Trayectoria del estado continuo durante el marcado M_0 .

El marcado $M_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$ establece a (A_2, B_2) como el SLI activo, este SLI es el primero de los modelos controlables, como no es posible alcanzar el estado final a partir

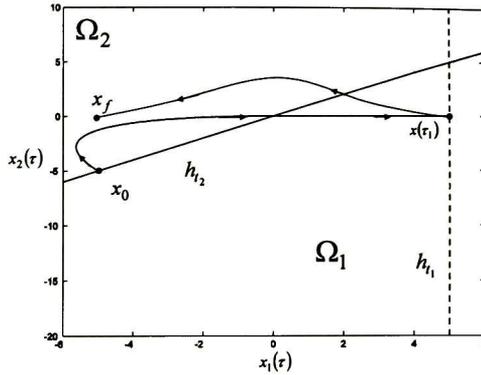


Figura 5.11: Posible trayectoria de (A_1, B_1) para alcanzar el estado x_f .

del estado de conmutación, i.e. $x(\tau_1) \in \Omega_1, x_f \in \Omega_2$, entonces el SLC debe conmutar, ver la figura 5.11.

Cuando se presente el marcado M_1 se habilita t_2 , como $x_f \in \hat{\Omega}_2$, entonces el SLC debe conmutar en algún estado de h_{t_1} que pertenezca a $\hat{\Omega}_2$.

Sea $\tau_2 = 15$ y $x(\tau_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, la trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ se muestra en la figura 5.12

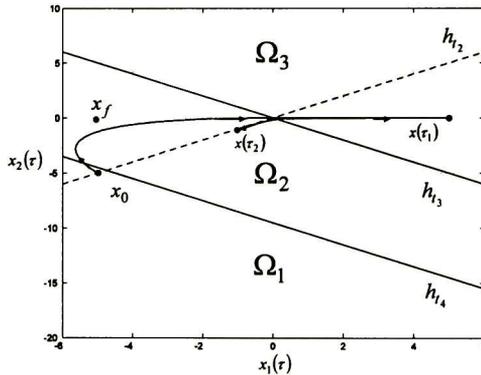


Figura 5.12: Trayectoria del estado continuo formada durante los marcados M_0 y M_1 .

El marcado $M_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ activa al modelo (A_3, B_3) , la trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ puede alcanzar el estado x_f . Como se muestra en la figura 5.13, la trayectoria continua alcanza x_f en $\tau_3 = 20$.

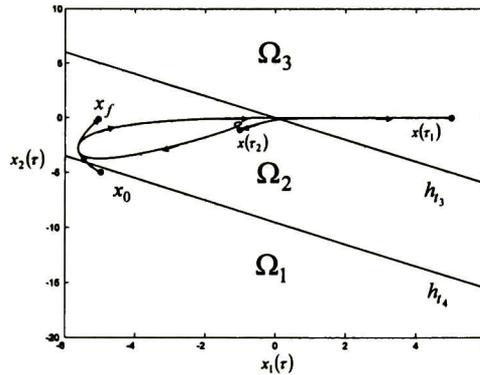


Figura 5.13: Trayectoria del estado continuo formada durante los marcados M_0 , M_1 y M_2 ; $x(\tau)$ va desde x_0 hasta x_f .

Ahora, se llevará la trayectoria del estado continuo desde $x_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ hasta $x_f = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

Tenemos que el marcado inicial es $M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ el modelo (A_1, B_1) no puede alcanzar x_f , por lo que el SLC debe conmutar.

Para forzar la conmutación se utilizará la ley de control mostrada en el apéndice A

Sea $\tau_1 = 10$ y $x(\tau_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, la trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 5.14

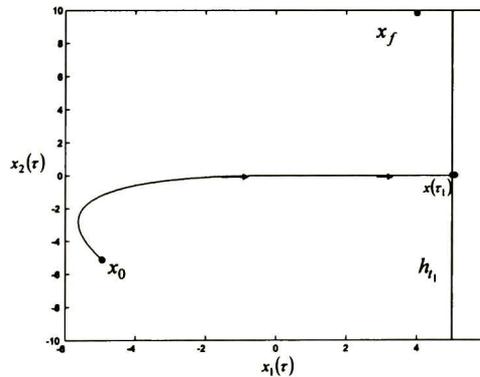


Figura 5.14: Trayectoria del estado continuo formada con el marcado M_0 .

Cuando se presente el marcado $M_1 = [0 \ 1 \ 0]^T$ se habilita t_2 , como $x_1 \in \hat{\Omega}_1$, entonces

el SLC debe conmutar en algún estado de h_{t_1} que pertenezca a $\hat{\Omega}_1$.

Para $\tau_2 = 15$ y $x(\tau_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ la trayectoria se muestra en la figura 5.15.

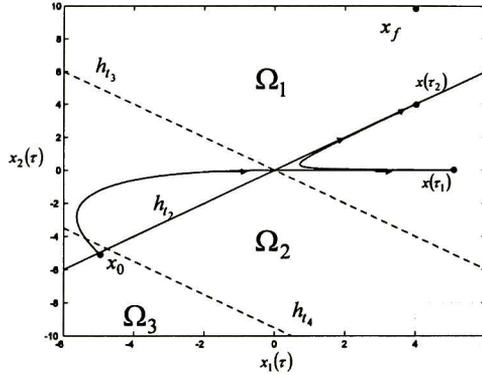


Figura 5.15: Trayectoria del estado continuo formada durante los marcados M_0 y M_1 .

Ahora, con el marcado $M_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ el SLI activo es (A_3, B_3) , a partir de este estado $x(\tau_2)$ el estado continuo puede alcanzar el estado final x_f .

Para $\tau_3 = 16$ la trayectoria del estado se muestra en la figura 5.16

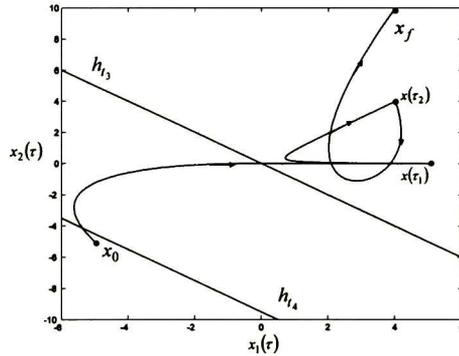


Figura 5.16: Trayectoria del estado continuo formada durante los marcados M_0 , M_1 y M_2 ; $x(\tau)$ va desde x_0 hasta x_f .

Las condiciones propuestas en los teoremas anteriores son sólo suficientes y tienen como objetivo evitar que los hiperplanos de conmutación formen regiones cerradas, esto

permite que el estado continuo pueda alcanzar cualquier estado continuo con el disparo de una transición.

La trayectoria del estado continuo puede provocar que algunas transiciones habilitadas nunca sean ejecutadas, consideremos la existencia de tres transiciones no manipulables habilitadas por algún marcado, en la figura 5.17 se puede apreciar que dependiendo de la región en que se encuentre el estado continuo se podrán ejecutar las transiciones.

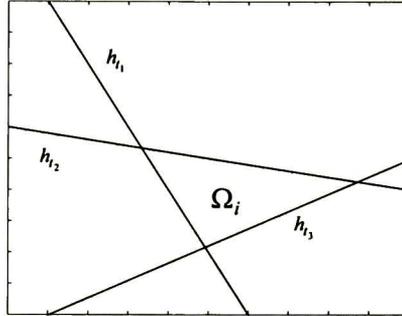


Figura 5.17: Particiones del espacio continuo debidas a los hiperplanos de conmutación.

Si cada vez que el *SLC* llegue a este marcado se encuentra en Ω_i , entonces siempre se podrán ejecutar todas sus transiciones. En general, no existe Ω_i que lo permita.

A continuación se establece una condición suficiente para que la trayectoria del estado continuo pueda generar cualquier secuencia de marcados en la *RPI*.

Teorema 5.3 *Sea el SLC descrito en 3.1, con todas sus transiciones no manipulables. Sea $h_{t_i}, h_{t_j} \in p_{M_k}^\bullet$, $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$, donde v_1, v_2 pertenecen al espacio de estados. Si todos los SLI son controlables y $|p_{M_k}^\bullet| \leq 2$ entonces el SLC puede alcanzar cualquier marcado M_k .*

Demostración. Sea $\Gamma(\tau_0)$ el estado inicial del *SLC*.

Supongamos que el marcado M_0 habilita una sola transición y la dispara, entonces la trayectoria de $\Gamma(\tau)$ evoluciona hasta alcanzar el marcado M_k , con $|p_{M_k}^\bullet| = 2$.

Ahora existen dos transiciones habilitadas, t_k y t_{k+1} , como $(h_{t_k} \bmod v_1) \neq (h_{t_{k+1}} \bmod v_2)$ entonces los hiperplanos de estas transiciones forman cuatro conjuntos de estados Ω_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ver la figura 5.18

En cualquier conjunto Ω_i , la trayectoria del estado continuo $x(\tau)$ puede alcanzar cualquiera de los hiperplanos activos, i.e. la trayectoria $x(\tau)$ puede disparar cualquier transición.

Como para todo marcado M_k del *SLC*, se mantiene que $|p_{M_k}^\bullet| \leq 2$ entonces el *SLC* puede formar cualquier secuencia de marcados. ■

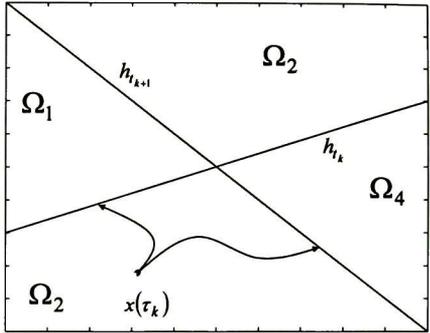


Figura 5.18: Particiones del espacio de continuo debidas a h_{t_k} y $h_{t_{k+1}}$.

Las condiciones mostradas en el teorema anterior garantizan que la trayectoria de estado continuo pueda formar cualquier secuencia de marcados, es decir, el SLC puede alcanzar cualquier marcado.

A continuación se muestra un SLC que es controlable. Este SLC no es caracterizado mediante alguno de los resultados presentados.

Ejemplo 5.3 Sea el SLC con transiciones no manipulables, mostrado en la figura 5.19

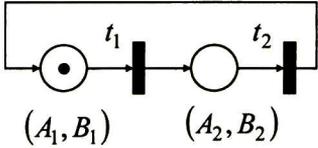


Figura 5.19: SLC con transiciones no manipulables.

sus hiperplanos son $h_{t_1} : x_1 - x_2 = 1$, y $h_{t_2} : x_2 = 1$, donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

Determinar si el SLC con transiciones manipulables es controlable. Si lo es llevar el estado continuo desde x_0 hasta x_f , donde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, y \ x_f = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Como (A_2, B_2) es no controlable, entonces el teorema 5.1 no puede determinar si el *SLC* es controlable. Como la parte controlable de (A_2, B_2) permite que la trayectoria continua del *SLC* cambie entre Ω_1 y Ω_2 , entonces el *SLC* es controlable, ver la figura 5.20.

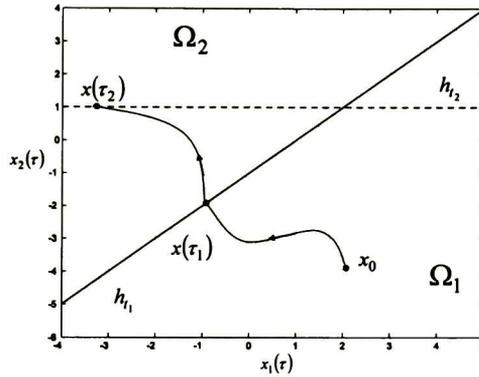


Figura 5.20: La trayectoria del estado continuo puede alcanzar todo el espacio de estados.

Sea $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces el modelo activo es (A_1, B_1) .

Ahora, vamos a llevar la trayectoria de estados $x(\tau)$ de x_0 hasta x_f , como $x_0 \in \Omega_1$ y $x_f \in \Omega_2$, entonces el *SLC* debe de conmutar.

Para $\tau_1 = 5$ y $x(\tau_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ la trayectoria del estado de continuo se muestra en la figura 5.21.

Para el marcado $M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, el *SLI* activo es (A_2, B_2)

Con $u(\tau) = 10$, tenemos que $x(\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\tau_2 = 5,2$, la trayectoria del estado continuo se muestra en la figura 5.22

Para el marcado $M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, el *SLI* activo es (A_2, B_2) .

Como $x(\tau_2), x_f \in \Omega_2$, entonces la trayectoria de estados puede alcanzar a x_f .

Para $\tau_3 = 8$, la trayectoria de estados se muestra en la figura 5.23

Este *SLC* es un ejemplo que no puede ser caracterizado mediante los resultados propuestos.

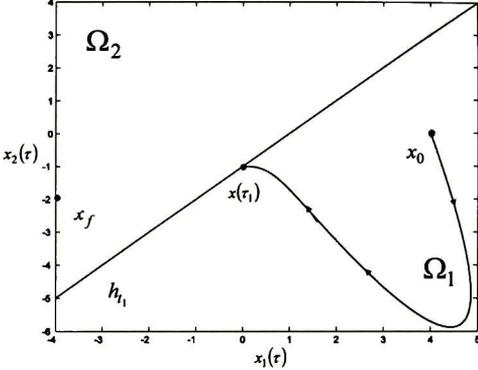


Figura 5.21: Trayectoria del estado continuo cuando el marcado M_0 está presente.

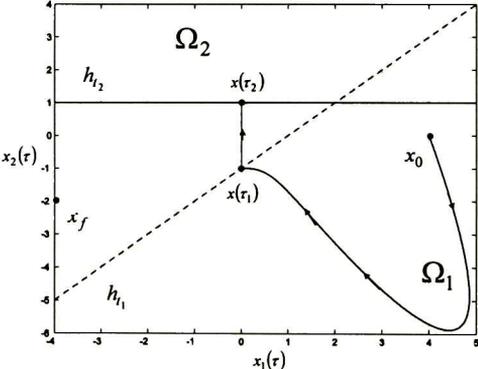


Figura 5.22: Trayectoria del estado continuo durante los marcados M_0 y M_1 .

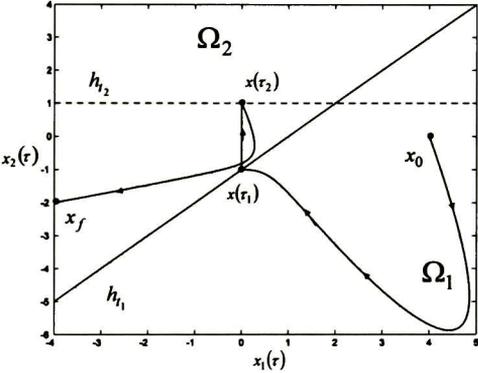


Figura 5.23: Trayectoria del estado continuo formada durante los marcados M_0 , M_1 y M_2 ; $x(\tau)$ va desde x_0 hasta x_f .

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En esta tesis se estudió la controlabilidad de los *SLC*, esta propiedad garantiza la posibilidad de trasladar el estado continuo desde algún estado inicial hasta cualquier estado requerido. El estudio de la controlabilidad de los *SLC* se basa en la solución del estado continuo.

Se utilizaron *RPI* para representar la dinámica discreta del *SLC*. En una *RPI* existen transiciones manipulables y no manipulables, se estudiaron la trayectoria de estados formada a partir de estas transiciones.

La trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones manipulables genera un espacio de estados alcanzables, si este espacio es igual al espacio del estado continuo \mathbb{R}^n , entonces el *SLC* es controlable, esta condición también es suficiente. En este caso, todas las conmutaciones del *SLC* son disparadas cuándo se requieran, esto permite que la dinámica discreta pueda ser utilizada para controlar, en cierta medida, la trayectoria del estado continuo.

Para poder trasladar el estado continuo de un *SLC* con transiciones manipulables se deben de elegir en forma adecuada los tiempos y los estados de conmutación.

La trayectoria de estados de un *SLC* con transiciones no manipulables genera un conjunto de estados alcanzables, incluso cuando los *SLI* son controlables. Cuando las conmutaciones de un *SLC* son ejecutadas mediante hiperplanos de conmutación, la dinámica continua determina la trayectoria de estados de la dinámica discreta. Se obtuvieron condiciones suficientes para determinar cuándo el *SLC* es controlable. En general se requiere de una búsqueda exhaustiva a lo largo de la trayectoria del estado continuo. Para poder trasladar el estado continuo de un *SLC* con transiciones no manipulables se deben de elegir los estados de conmutación y la entrada continua que permitan alcanzar el estado final sin llegar antes a un hiperplano de conmutación.

Trabajo Futuro

A continuación se muestra el trabajo futuro que motiva esta tesis.

- Estudiar la controlabilidad de los SLC restringiendo la trayectoria del estado continuo a una región de su espacio de estados.
- Estudiar la controlabilidad de los SLC que sean representados mediante SLI de diferente dimensión.
- Estudiar la trayectoria de estados de un SLC cuando no se tienen conmutaciones instantáneas.

Utilizar diferentes técnicas para controlar los SLC .

Relajar las condiciones suficientes obtenidas para determinar la controlabilidad de los SLC con transiciones no manipulables.

Diseñar una ley de control que permita controlar la trayectoria del estado continuo.

Apéndice A

Manipulación de la parte controlable del *SLI*

En este apéndice se muestra la entrada que permite manipular los estados controlables de un *SLI*. Esta ley de control es utilizada para controlar la trayectoria del estado continuo en los ejemplos que se presentan en este trabajo

En general, la dinámica del *SLI* tiene una parte controlable y otra no controlable, la separación de éstas se realiza mediante una transformación de similitud [3],[6].

El sistema equivalente es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(\tau) \\ \dot{x}_{\bar{c}}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(\tau) \\ x_{\bar{c}}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau) \quad (\text{A.1})$$

con solución

$$x_c(\tau) = e^{A_{11}(\tau-\tau_0)}x_c(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A_{11}(\tau-\mu)}A_{12}x_{\bar{c}}(\tau_0)d\mu \quad (\text{A.2})$$

$$+ \int_{\tau_0}^{\tau} e^{A_{11}(\tau-\mu)}B_1u(\zeta)d\zeta$$
$$x_{\bar{c}}(\tau) = e^{A_{12}(\tau-\tau_0)}x_{\bar{c}}(\tau_0) \quad (\text{A.3})$$

El subsistema (A_{11}, B_1) es controlable, la entrada $u(\tau)$ puede manipular a los estados controlables $x_c(\tau)$. Por su parte, el subsistema $(A_{12}, 0)$ es no controlable, los estados $x_{\bar{c}}(\tau)$ evolucionan de manera autónoma.

Para encontrar la ley de control $u(\tau)$ que manipula los estados del subsistema (A_{11}, B_1) , se utilizó el Grammiano de controlabilidad que define este subsistema, i.e.

$$W_c(\tau_0, \tau_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} [e^{A_{11}(\tau_0-\zeta)}B_1] [e^{A_{11}(\tau_0-\zeta)}B_1]^T d\zeta \quad (\text{A.4})$$

entonces, la ley de control que garantiza llevar la trayectoria de estado desde $x_c(\tau_0) = \tilde{x}_0$ hasta $x_c(\tau_1) = \tilde{x}_f$ es

$$u(\tau) = -[e^{A_{11}(\tau_0-\tau)}B_1]^T W_c^{-1}(\tau_0, \tau_1) \quad (\text{A.5})$$

$$\left[\tilde{x}_0 - e^{A_{11}(\tau_0-\tau_1)} \left(\tilde{x}_f - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\zeta)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\zeta \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

Si sustituimos esta entrada $u(\tau)$ en la solución del estado controlable $x_c(\tau)$ tenemos que

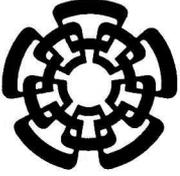
$$\begin{aligned} x_c(\tau) &= e^{A_{11}(\tau_1-\tau_0)} \tilde{x}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\mu)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\mu + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\zeta)} B_1 u(\zeta) d\zeta \quad (\text{A.7}) \\ &= e^{A_{11}(\tau_1-\tau_0)} \left(\tilde{x}_0 - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_0-\zeta)} B_1 [e^{A_{11}(\tau_0-\zeta)} B_1]^T d\zeta W^{-1}(\tau_0, \tau_1) \right. \\ &\quad \left. \left[\tilde{x}_0 - e^{A_{11}(\tau_0-\tau_1)} \left(\tilde{x}_f - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\rho)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\rho \right) \right] \right) \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\mu)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\mu \\ &= e^{A_{11}(\tau_1-\tau_0)} \left(\tilde{x}_0 - \left[\tilde{x}_0 - e^{A_{11}(\tau_0-\tau_1)} \left(\tilde{x}_f - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\rho)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\rho \right) \right] \right) \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\mu)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\mu \\ &= e^{A_{11}(\tau_1-\tau_0)} \left(e^{A_{11}(\tau_0-\tau_1)} \left(\tilde{x}_f - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\rho)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\rho \right) \right) \\ &\quad + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\mu)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\mu \\ &= \left(\tilde{x}_f - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\rho)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\rho \right) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A_{11}(\tau_1-\mu)} A_{12} x_{\bar{c}}(\tau_0) d\mu \\ &= \tilde{x}_f \end{aligned}$$

La manipulación de la parte controlable del *SLI*, es indispensable para poder trasladar los estado continuos del *SLC*.

Bibliografía

- [1] L. Aguirre-Salas, O. Begovich, A. Ramirez-Treviño, “Observability in Interpreted Petri Nets using Sequence Invariants”, *Proc. of the 41th Conference on Decision and Control*, pp. 3602-3607, 2002.
- [2] A. Bemporad, G. Ferrari y M. Morari. “Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10):1864-1876, October 2000.
- [3] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Harcourt Brace Jovanovich Inc. Sanders College Publishing. 1970.
- [4] T. Murata. “Petri Nets: Properties, Analysis and Applications”. *IEEE*, Vol. 77, no 4 pp. 541-580, Apr. 1989.
- [5] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. New York, USA: Springer-Verlag, 1985.
- [6] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [7] A. S. Matveev and A. V. Savkin. *Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems*. USA: Birkhäuser Boston, 2000.
- [8] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Pentice Hall, 1996.
- [9] J. Ezzine and A. H. Haddad. “Controllability and observability of hybrid systems” *Int. J. Control*, vol. 49, No.6, pp. 2045-2055, June, 1989.
- [10] M. Silva, *Las Redes de Petri: en la Automática y la Información*, Editorial AC, Madrid 1985.
- [11] Z. Sun and D. Zheng, “On Reachability and Stabilization of Switched Linear Systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(2):291-295, February 2001.
- [12] G. Xie and L. Wang, “Necessary and Sufficient Conditions for Controllability of Switched Linear Systems”. *Proc. of the American Control Conference*, May 2002

- [13] A.A. Julius, A.J. van der Schaft, "The Maximal Controlled Invariant Set of Switched Linear Systems", *Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada USA, December 2002.
- [14] G. Xie, D. Zheng, L. Wang, "Controllability of Switched Linear Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(8):1401-1405, August 2002.
- [15] G. Xie, L. Wang, "Equivalence of Some Controllability Notions for Linear Switched Systems and Their Geometric Criteria" *Proc. of the American Control Conference*, Denver Colorado, June 2003.
- [16] I. Rivera-Rangel, A. Ramírez-Treviño, L.I. Aguirre-Salas, J. Ruiz-León, "Geometrical Characterization of Observability in Interpreted Petri Nets" For appear in *Kibernetica*.
- [17] A. Ramírez-Treviño, I. Rivera-Rangel, E. López-Mellado, "Observability of Discrete Event Systems Modeled by Interpreted Petri Nets" *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 19, No.4, pp. 557-565, 2000.
- [18] S. Pettersson, *Analysis and Design of Hybrid Systems*, Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1999.
- [19] W. M. Wonham, *Notes on Control of Discrete Event Systems*, Department of Electrical and Computer Engineering University of Toronto, 2003.
- [20] V. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis, 1999.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Controlabilidad de Sistemas Lineales Conmutados

del (la) C.

Federico Armando ARIAS ZAMBRANO

el día 23 de Septiembre de 2005.

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Luis Ernesto López Mellado
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 2A
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008390