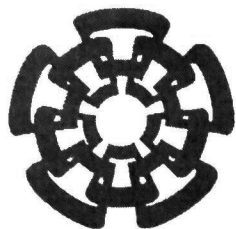


xx (127177.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Seguimiento y monitoreo virtual en neurocirugía

CINVESTAV
IPN
**ADQUISICION
DE LIBROS**

Tesis que presenta:

Héctor Rafael Orozco Aguirre

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CINVESTAV I.P.N.
SECCIÓN DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION

Guadalajara, Jalisco, Enero de 2006.

CLASIF.: TK165.G8 .096 2006
ADQUIS.: 351 398
FECHA: 30-VIII-2006
PROCED.: Don. 2006
#

ID: 126586-2001

Seguimiento y monitoreo virtual en neurocirugía

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Héctor Rafael Orozco Aguirre
Ingeniero en Computación

Universidad de Guadalajara 1999-2003

Becario de Conacyt, expediente no. 182376

Director de Tesis

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme vivir y concederme una familia maravillosa y a la vida por darme la oportunidad de disfrutar de esta experiencia.

A mis padres, Héctor y Josefina gracias por darme la vida, a mis hermanos, Juan, Lilia, Verónica, Teresa, Blanca, Alejandra y en especial a Jorge, por todo el amor, apoyo y motivación ilimitados que me han dado siempre, lo cual me da fuerzas para seguir adelante y no dejarme vencer, superando aquellas barreras que se me han presentado en el camino.

A mis compañeros de generación, cuyas opiniones y sugerencias fueron de gran utilidad para el desarrollo de esta tesis. Sobre todo agradezco sus consejos y que me regalaran su amistad.

A mi asesor de tesis, Prof. Dr. Eduardo José Bayro Corrochano, por confiar en mi y darme la oportunidad de trabajar en el desarrollo del proyecto titulado *Neuronavegador Económico y de uso Múltiple*, un proyecto serio de apoyo a la neurocirugía en México.

Al neurocirujano Dr. Rodrigo Ramos Zuñiga del *Departamento de Neurociencias del Centro Universitario de Ciencias de la Salud (CUCS) de la Universidad de Guadalajara*, por su tiempo, paciencia y atenciones, material proporcionado, asesoría médica, valiosas opiniones y sugerencias.

Un agradecimiento al CONACYT por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios de maestría en el CINVESTAV unidad Guadalajara.

Prefacio

Desde la edad antigua, el hombre trato de mantener y mejorar su salud, con prácticas rudimentarias que se fueron aprendiendo de generación en generación, acumulándose un gran caudal de conocimientos médicos. Es por eso que con el desarrollo social el hombre fue adquiriendo conocimientos sobre el medio que lo rodeaba, el modo de defenderse de todo aquello que le era adverso, destacando, en particular las enfermedades que lo atacaban.

Así la medicina surge prácticamente con el hombre, como forma de lucha contra lo desconocido, de ahí su primer representante en la tribu: el brujo. El surgimiento y desarrollo de la medicina se nos presenta como un proceso dialéctico continuo de acercamiento del pensamiento al objetivo.

Junto a la medicina y otras ciencias, el hombre fue haciendo uso de un elemento vital para el enriquecimiento y desarrollo científico: *la información*. Estos procesos de acumulación y asimilación de la información, desde el punto de vista filosófico, ha contribuido al desarrollo cultural de la humanidad, al desarrollo de las fuerzas productivas, y en general, a alcanzar estadios superiores en el desarrollo económico, social y científico de la civilización humana.

Las nuevas condiciones actuales, el desarrollo científico y tecnológico, la interrelación con otras disciplinas y sus métodos, el modo de vida de una sociedad altamente desarrollada y muchos más factores, han cambiado cualitativamente la problemática de la medicina teórica. Han surgido nuevos fenómenos, nuevos problemas, como la actitud de la medicina ante otras ciencias (la matemática, la robótica y la visión computacional), el proceso de integración del conocimiento médico, la informatización de la humanidad, etc., que posibilitan un análisis más profundo en el desarrollo de la medicina en el mundo actual.

Nuestro tiempo se caracteriza por la diferenciación y la integración de las ciencias exactas, las ciencias naturales y las ciencias sociales. La medicina actual dentro de su desarrollo no ha escapado a este fenómeno y junto a la computación, y como condición necesaria, su vínculo estrecho con el manejo de la información, han dado lugar a la *cirugía asistida por computadora (CAC)*, que agrupa la matemática aplicada y el uso de software y hardware en la práctica médica.

Estructura de la tesis

El presente trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera:

capítulo 1: se da una breve introducción de los antecedentes de la cirugía asistida por computadora (CAC), mostrando la problemática a resolver así como el trabajo desarrollado.

capítulo 2: se explican las álgebras geométricas (*álgebras de Clifford*), mostrando todos aquellos conceptos y principios necesarios para su entendimiento, estableciendo los fundamentos matemáticos útiles para el desarrollo de este trabajo. En especial se centra la atención en la *álgebra geométrica conformal* que será nuestro marco de trabajo debido a su poder de uso, sin embargo; en este trabajo no se explota por completo el uso de esta álgebra, ya que por el momento solo se ha trabajado con puntos y líneas, pero en un futuro será necesario hacer uso de esferas (principal entidad), planos, círculos, etc.

capítulo 3: en este capítulo son mostradas las etapas utilizadas por los sistemas de neuronavegación, las cuales son: etapa preoperativa, etapa intraoperativa y etapa post-operativa.

- **capítulo 4:** se centra la atención al seguimiento en tiempo real de los instrumentos quirúrgicos utilizados por el neurocirujano, así pues, se explican diferentes métodos para estimar la posición de la punta de un instrumento quirúrgico seguido por el Sistema Polaris (Northern Digital Inc.). Por último, se resuelve el problema de alineamiento entre las coordenadas reales del paciente y sus correspondientes coordenadas en el modelo 3D y por consiguiente; la actualización de la ubicación de los instrumentos quirúrgicos en tiempo real.
- **capítulo 5:** como parte importante del monitoreo intraoperativo, se hace uso de técnicas de realidad virtual aumentada aplicadas a la neuroendoscopia virtual, la cual es muy útil para poder definir las mejores vías de acceso durante la intervención quirúrgica del paciente (haciendo una *mínima invasión*), así al hacer uso de la neuroendoscopia real se pueden seguir las rutas establecidas virtualmente y conseguir los objetivos deseados.
- **capítulo 6:** presenta las conclusiones obtenidas de la elaboración de este trabajo y el trabajo futuro a realizar.
- Finalmente se anexan una serie de **apéndices** que incluyen información adicional para el completo entendimiento de los temas presentados a lo largo de este documento.

A continuación se muestran al lector los temas a tratar en cada capítulo, presentando así una descripción general de la problemática a resolver.

Simbología utilizada

Símbolo	Descripción
\mathbb{R}^{2^n}	Espacio vectorial de dimensión 2^n
$\mathcal{G}_{p,q,r} = \mathcal{G}_n$	Álgebra geométrica de dimensión 2^n
\mathcal{G}_n^+	Subálgebra par $\in \mathcal{G}_n$
\mathcal{G}_n^-	Subálgebra impar $\in \mathcal{G}_n$
e_i	Base vectorial ortonormal $\in \mathcal{G}_n$
e_{ij}	Base bivectorial ortonormal $\in \mathcal{G}_n$
e_0	Punto en el origen $\in \mathcal{G}_{4,1}$
e	Punto en el infinito $\in \mathcal{G}_{4,1}$
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	Vectores $\in \mathcal{G}_n$
\mathbf{ab}	Producto geométrico de dos vectores
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Producto interior de dos vectores
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	Producto exterior de dos vectores
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Producto cruz dos de vectores
$I = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$	Pseudoescalar unitario $\in \mathcal{G}_n$
\mathbf{M}^{-1}	Inversión de un multivector $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_n$
\mathbf{M}^*	Dual de un multivector $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_n$
$\widetilde{\mathbf{M}}$	Reversión de un multivector $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_n$
$\overline{\mathbf{M}}$	Involución de grado de un multivector $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_n$
$\exp(\mathbf{M})$	Exponencial de un multivector $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_n$
\mathbf{R}	Matriz de rotación o Rotor
\mathbf{T}	Translador
\mathbf{M}	Motor

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Motivación	3
1.3. Problema a resolver	4
1.4. Trabajo realizado	5
1.5. Material utilizado	6
2. Fundamentos matemáticos	9
2.1. Álgebra geométrica	9
2.1.1. Producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2	10
2.1.2. Definición general del álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$	13
2.1.3. Propiedades de los multivectores .	15
2.2. Álgebra geométrica euclidiana	18
2.2.1. Representación de puntos líneas y planos	18
2.2.2. Rotaciones y translaciones	18
2.3. Álgebra geométrica proyectiva $\mathcal{G}_{3,1}$	20
2.3.1. Representación de puntos, líneas y planos	20
2.4. Álgebra de motores $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$	21
2.4.1. Motores, rotores y transladores en $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$	22
2.4.2. Propiedades de los motores .	25
2.5. Geometría conformal	27

2.5.1.	Proyección estereográfica	28
2.5.2.	Espacio de Minkowski	31
2.5.3.	Definición del álgebra geométrica conformal	31
2.5.4.	Entidades del álgebra geométrica conformal	32
2.5.5.	Transformaciones conformales	36
2.5.6.	Movimiento rígido en el álgebra geométrica conformal	37
3.	Neurocirugía asistida por computadora	41
3.1.	Escenario	41
3.2.	Objetivos	42
3.3.	Etapa preoperatoria	43
3.4.	Etapa intraoperatoria	46
3.5.	Etapa postoperatoria	49
4.	Seguimiento intraoperativo	51
4.1.	Modelo cinemático	51
4.1.1.	Método matricial	52
4.1.2.	Usando un rotor	53
4.1.3.	Usando un motor	54
4.1.4.	Comparación entre los tres métodos	54
4.2.	Calibración	55
4.3.	Análisis experimental	57
5.	Monitoreo virtual intraoperativo	65
5.1.	Neuroendoscopia real	65
5.2.	Realidad virtual y realidad aumentada	67
5.3.	Neuroendoscopia virtual	69
5.4.	Análisis experimental	71
6.	Conclusiones	79
6.1.	Trabajo futuro	80

ÍNDICE GENERAL

VII

A. Entidades y estimación de movimiento en $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$	81
A.1. Representación de puntos, líneas y planos .	81
A.2. Movimiento de puntos, líneas y planos	83
B. Propiedades de algunas entidades en $\mathcal{G}_{4,1}$	87
B.1. Propiedades del punto	87
B.2. Propiedades de la línea	88
B.3. Propiedades de la esfera	88
B.4. Propiedades del par de puntos	89
B.5. Propiedades de los rotores	90
B.6. Propiedades de los motores .	90
Bibliografía	93

Índice de tablas

2.1. Entidades del álgebra geométrica conformal y su representación dual .	36
2.2. Transformaciones conformales y sus versores	37
4.1. Coordenadas reportadas por la cámara para nueve posiciones de un instrumento quirúrgico de prueba	55
4.2. Resultados obtenidos usando el método matricial para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1	55
4.3. Resultados obtenidos usando el rotor para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1	56
4.4. Resultados obtenidos usando el motor para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1	56
4.5. Posición real de los puntos fiduciales en el maniquí	60
4.6. Posición de los puntos fiduciales en el modelo 3D	60
4.7. Correspondencia entre los puntos reales del maniquí y los puntos en el modelo 3D del mismo	61
4.8. Resultados obtenidos al aplicar la transformación obtenida a los puntos fiduciales en la posición real del maniquí	62
4.9. Diferencia entre los valores obtenidos en la tabla 4.8 menos los valores correspondientes en la tabla 4.6	62
4.10. Datos estadísticos del error obtenido entre los valores esperados (puntos fiduciales en el modelo 3D) y los valores obtenidos al aplicar la transformación dada por el algoritmo de movimiento rígido a la posición real de los puntos fiduciales en el paciente	62

Índice de figuras

1.1. Uso de la esterotaxia para guiar instrumentos quirúrgicos	2
1.2. Marco estereotáctico usado en neurocirugía .	2
1.3. Paciente con un marco estereotáctico fijado a su cabeza	3
1.4. Diferentes sistemas de coordenadas: 1) coordenadas en el modelo virtual, 2) coordenadas de la cámara, 3) coordenadas del paciente, 4) coordenadas del instrumento quirúrgico	6
1.5. Sistema polaris: izquierda) unidad de procesamiento, centro) cámara polaris, derecha) instrumentos con marcadores esféricos reflejantes	7
1.6. Maniquí utilizado en el seguimiento de instrumentos quirúrgicos	7
1.7. Cráneo humano con globos (reellenos de líquido) en su interior simulando masa cerebral	8
1.8. Imágenes de tomografía axial computarizada de un paciente con tumor	8
2.1. Producto punto de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b}	11
2.2. Bivector \mathbf{B} e interpretación geométrica del producto cruz	11
2.3. Representación geométrica del trivector \mathbf{T} como volumen dirigido	12
2.4. Movimiento de giro a través del eje de línea \mathbf{l} (\mathbf{t}_s : desplazamiento longitudinal por d y \mathbf{R}_s : ángulo de rotación θ): a) motor relacionando dos ejes de línea, b) motor aplicado a un objeto, c) motor degenerado relacionando dos motores coplanares	24
2.5. Visualización de la proyección estereográfica	28
2.6. Proyección estereográfica para el caso 1D: los puntos sobre el círculo son proyectados sobre la línea. Nótese que el polo norte \mathbf{n} proyecta los puntos al infinito y el polo sur \mathbf{s} los proyecta al origen .	29

2.7. Visualización del modelo homogéneo para proyecciones estereográficas para el caso 1D. Todos los puntos proyectados estereográficamente yacen sobre un cono, el cual es llamado el <i>cono nulo</i> en el espacio de Minkowski	30
2.8. Vectores base y líneas nulas en el plano de Minkowsky E	32
3.1. Esquema general del neuronavegador económico de uso múltiple apoyado por visión computacional y/o robótica	43
3.2. Actividades involucradas en la etapa preoperativa	45
3.3. Planos de corte usados en imágenes médicas. Izquierda) vista axial, centro) vista sagital, derecha) vista coronal	45
3.4. Modelo 3D de un paciente e intersección en 3D de los distintos planos de corte	46
3.5. Reconstrucción 3D del cerebro y tumor de un paciente	46
3.6. Algunos marcos estereotáticos utilizados en neurocirugía	47
3.7. Actividades involucradas en la etapa intraoperativa	48
4.1. Malla dibujada sobre el maniquí y puntos fiduciales colocados sobre el mismo	58
4.2. Captura de la posición real de los puntos fiduciales sobre el maniquí	58
4.3. Calibración usando el algoritmo TPS-RPM. a) Antes de aplicar el algoritmo, las nubes de puntos no están alineadas; b) después de aplicar el algoritmo, las dos nubes de puntos quedan alineadas	59
4.4. Seguimiento en tiempo real del instrumento quirúrgico	63
4.5. Seguimiento del instrumento quirúrgico en un cráneo humano	63
4.6. Sentido del instrumento quirúrgico y sentido esperado para llegar al tumor	64
5.1. Equipo utilizado en técnicas de neuroendoscopia	66
5.2. Imágenes de neuroendoscopia real	67
5.3. Principio de neuroendoscopia virtual	69
5.4. Imágenes de neuroendoscopia virtual de un paciente con tumor	70
5.5. Modelo 3D inicial de un paciente con tumor usado en el procedimiento quirúrgico de neuroendoscopia virtual	71
5.6. Primeras 28 imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo por completo	72

5.7. Sigüientes y últimas 28 imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo por completo	73
5.8. Inicio del procedimiento quirúrgico y avances en la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo. Fila 1: inicio del procedimiento quirúrgico. En las filas sigüientes se muestra la ruta que se va sigüiendo y las imágenes de endoscopia virtual correspondientes. En la columna tres se muestra el tumor magnificado para mejor visibilidad del mismo	74
5.9. Posicionamiento del endoscopio. Fila 1: se localiza el tumor por primera vez, Fila 2: se pierde de vista el tumor, Fila 3: se vuelve a localizar el tumor, Fila 4: se elige la mejor vista del tumor y se deja fijo el endoscopio para empezar el proceso de extracción. El tumor sirve como referencia al neurocirujano para orientar el endoscopio	75
5.10. Proceso de extracción del tumor. Columna 1: ruta seguida hasta el momento durante el proceso de extracción del tumor, Columna 2: imágenes de neuroendoscopia virtual obtenidas durante la extracción del tumor, Columna 3: volumen restante por extraer del tumor	76
5.11. Extracción completa del tumor. Columna 1: ruta seguida hasta el momento durante el proceso de extracción del tumor, Columna 2: imágenes de neuroendoscopia virtual obtenidas durante la extracción del tumor, Columna 3: volumen restante por extraer del tumor. La fila cuatro muestra que se hizo una completa extracción del tumor	77
5.12. Modelo 3D resultante del proceso de neuroendoscopia virtual, en dicho modelo se muestra la ruta completa que sigüió para llegar al tumor y extraerlo por completo	78
5.13. Conjunto 3D de todas las imágenes obtenidas durante el proceso de neuroendoscopia virtual	78
A.1. Representación de a) puntos, b) líneas y c) planos, en el álgebra de motores	83
A.2. Movimiento de giro de una línea	84

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Desde el inicio de su historia, la neurocirugía ha planteado la necesidad de tener acceso quirúrgico a zonas profundas del cerebro, para solucionar problemas que son producto de padecimientos como tumores o malformaciones arteriovenosas, hidrocefalia, etc.

Esta situación ha motivado y guiado el diseño de técnicas y equipos que, con el paso del tiempo y en virtud de los adelantos computacionales, ahora permiten elegir el camino más corto para realizar una cirugía, con elevada precisión y una mínima alteración de las estructuras cerebrales.

La cirugía asistida por computadora (CAC), las imágenes médicas, la robótica y la visión computacional representan importantes recursos tecnológicos de apoyo al neurocirujano que le permiten planear procedimientos quirúrgicos seguros, operar virtualmente antes de intervenir al paciente, observar estructuras delicadas sin recurrir a una disección difícil o imposible, como es el caso de las estructuras cerebrales.

La aplicación de estas nuevas tecnologías genera beneficios directos al paciente y al cirujano, disminuyendo los índices de morbilidad y de mortalidad al ofrecer precisión y seguridad, así como un aumento en la percepción visual del médico proporcionándole una mayor visión en el momento en que se lleva a cabo la cirugía.

La *estereotaxia* (del latín stereo, tridimensional y taxis, posicionamiento), tradicionalmente ha sido una técnica que permite tener un marco de referencia espacial para guiar instrumentos quirúrgicos hacia un punto preciso en el cerebro o médula espinal, basándose en coordenadas cartesianas (x , y , z). El primer aparato de estereotaxia fue desarrollado en 1906 por Henry Clarke y Víctor Horsley, con el fin de realizar estudios en animales pequeños, y en 1947 se adaptó para su empleo en humanos, comenzando así la era de la neuronavegación (ver figura 1.1).

Obtener una mayor precisión y causar el menor daño posible (*cirugía de mínima invasión*) es el objetivo primordial de las técnicas de neuronavegación. Haciendo uso de un sistema guiado por computadora se puede planificar la cirugía cerebral antes de llevarla a cabo, así los neurocirujanos obtienen una orientación precisa dentro del cerebro, que es útil en lesiones de pequeño tamaño que se localizan en zonas profundas.

La esterotaxia funciona mediante la colocación de un marco estereotáctico (anillo de titanio o fibra de carbón) en la cabeza del paciente para tener una orientación de la localización espacial de estructuras intracraneales (ver figuras 1.2 y 1.3), sin embargo; el uso de estos marcos resulta doloroso para el paciente, ya que se le fija a su cabeza por medio de tornillos. Es por esto, que actualmente se prefiere el uso de sistemas que sean mínimamente invasivos, seguros y precisos (sistemas computacionales para neuronavegación), con los cuales, se obtiene un mejor resultado y no se le causa daño adicional al paciente.

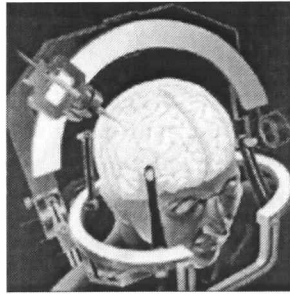


Figura 1.1: Uso de la esterotaxia para guiar instrumentos quirúrgicos

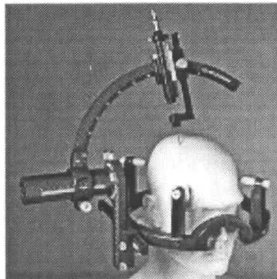


Figura 1.2: Marco estereotáctico usado en neurocirugía

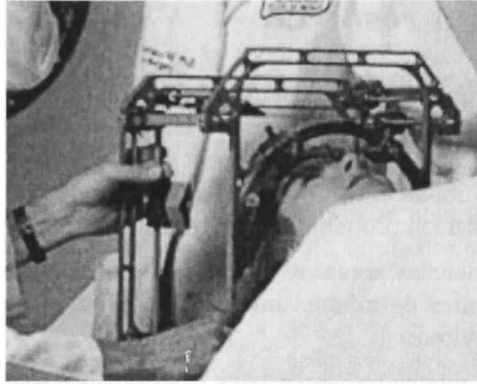


Figura 1.3: Paciente con un marco estereotáctico fijado a su cabeza

1.2. Motivación

Este trabajo de tesis forma parte del proyecto titulado *Neuronavegador económico y de uso múltiple*, el cual es un proyecto serio de apoyo a la neurocirugía en México¹ y tiene como finalidad brindar un sistema de hardware y software para navegación intracraneal, proporcionándole al médico una mayor información que conduzca a la realización de una cirugía segura y de mínima invasión teniendo mayor probabilidad de éxito.

Uno de los objetivos de este proyecto es que se desarrolle un sistema a bajo costo que pueda ser adquirido por hospitales públicos y así las personas de bajos recursos puedan tener acceso al uso y beneficio directo proporcionado por esta tecnología.

Así, al desarrollar tecnología médica que sea útil para la sociedad mexicana, se busca crear una comunidad interdisciplinaria de médicos, científicos e ingenieros interesados en la cirugía asistida por computadora, para la difusión, enseñanza e investigación de las técnicas de neuronavegación; aprovechando los centros de investigación del país.

Por lo tanto, al ser una aportación útil, se establecen las bases de un proyecto serio a gran escala, sabiendo que este trabajo de tesis es una porción del mismo. Este proyecto fue iniciado hace tres años por mi director de trabajo de tesis el Prof. Dr. Eduardo Bayro Corrochano.

¹ Proyecto No. 49, apoyo del fondo sectorial de investigación en salud y seguridad social, SSA-IMSS-ISSSTE-CONACYT

1.3. Problema a resolver

Los sistemas de neuronavegación deben de brindar al neurocirujano en lo posible una visión clara y precisa del problema al que se va a enfrentar, así como ser una herramienta de apoyo durante el proceso de intervención quirúrgica mostrando información precisa y exacta de lo que sucede a cada momento ofreciendo un alto grado de seguridad y comodidad al neurocirujano, elevando así las probabilidades de éxito.

Por lo tanto, las tendencias actuales y futuras de la neurocirugía se encuentran dirigidas hacia los procedimientos de mínima invasión, de máxima precisión y alta preservación funcional del sistema nervioso.

Las diferentes etapas que se requieren para realizar un sistema de neuronavegación son las siguientes:

1. Etapa preoperativa:

- **Adquisición de imágenes médicas:** estas pueden ser tomografías axiales computarizadas (TAC), imágenes de resonancia magnética (IRM) y/o imágenes de resonancia magnética funcional (IRMF), por citar algunas.

Procesamiento de las imágenes: obtención de los distintos planos de corte (axial, sagital y coronal) y reconstrucción 3D del modelo del paciente, a partir de las imágenes obtenidas, aplicando algoritmos de segmentación de imágenes para separar la lesión (tumor), esta puede reconstruirse en 3D.

- **Planeación quirúrgica:** una vez obtenido el modelo del paciente e identificada la lesión, el neurocirujano puede planear la intervención quirúrgica, determinando la mejor trayectoria a seguir durante la cirugía.

2. Etapa intraoperativa:

Neuronavegación: durante el proceso de intervención quirúrgica se deben monitorear los diferentes instrumentos quirúrgicos utilizados por el neurocirujano, dando información en tiempo real de la ubicación espacial de los mismos, mostrando así el progreso de la intervención quirúrgica.

3. Etapa postoperativa: Esta etapa no se considera en éste trabajo de tesis.

Por lo tanto, la neuronavegación permite principalmente:

1. realizar cirugías menos invasivas y con una mayor precisión.
2. disminuir la posibilidad de daño en áreas cerebrales adyacentes a la lesión.

3. mejor planeación de la cirugía.
4. como consecuencia directa, la reincorporación del paciente a sus actividades cotidianas en un plazo menor (rápida recuperación), reduciendo los costos de hospitalización, lo cual representa un ahorro económico para el paciente o para la entidad reguladora.

En este trabajo de tesis se presenta la realización de un algoritmo para neuroendoscopia virtual, siendo de gran utilidad al neurocirujano para la planeación de una cirugía segura y de mínima invasión.

1.4. Trabajo realizado

Este trabajo de tesis se cubren las etapas de *procesamiento de las imágenes y neuronavegación*, sin cubrir totalmente esta última etapa. La adquisición de las imágenes se dejó a cargo de los neurocirujanos del Departamento de Neurociencias del Centro Universitario de Ciencias de la Salud (CUCS) de la Universidad de Guadalajara.

La primer tarea realizada fue el procesamiento de las imágenes de tomografía axial computarizada y/o imágenes de resonancia magnética para obtener los restantes planos de corte (axial, sagital y coronal) a partir de cualquiera de ellos y así obtener el modelo tridimensional del paciente a partir de cualquier plano de corte usando la librería gráfica VTK. Con los distintos planos de corte y la reconstrucción 3D se puede analizar el área de la lesión a tratar con mayor claridad y hacer una buena planeación de la cirugía, sin embargo; el mayor problema que surge es mostrar en el modelo virtual lo que pasa en el momento de la cirugía (ver figura 1.4).

En la figura 1.4 se aprecian los diferentes sistemas de coordenadas que intervienen durante la cirugía, en la imagen 1.4.2 se observa que la cámara tiene un propio sistema de coordenadas, las imágenes 1.4.3 y 1.4.4 muestran las coordenadas del paciente y del instrumento quirúrgico con respecto a la cámara y en la imagen 1.4.1 son mostradas las coordenadas correspondientes en el modelo virtual. Por lo tanto, surge la necesidad de realizar el alineamiento (*registro*) de dichos sistemas de coordenadas y así la información obtenida pueda ser procesada adecuadamente.

Mediante el uso del sistema estereoscópico híbrido de seguimiento visual (*Sistema Polaris*) y del álgebra geométrica conformal, fue posible realizar la segunda tarea, que es el seguimiento en tiempo real de los instrumentos quirúrgicos, así, fue resuelto el problema de alineamiento entre las coordenadas del paciente y las coordenadas del modelo virtual del mismo. Por lo que fue necesario desarrollar un sistema de neuronavegación para mostrar la reconstrucción tridimensional a partir de las imágenes médicas y la ubicación del instrumento quirúrgico en tiempo real durante la etapa intraoperativa.

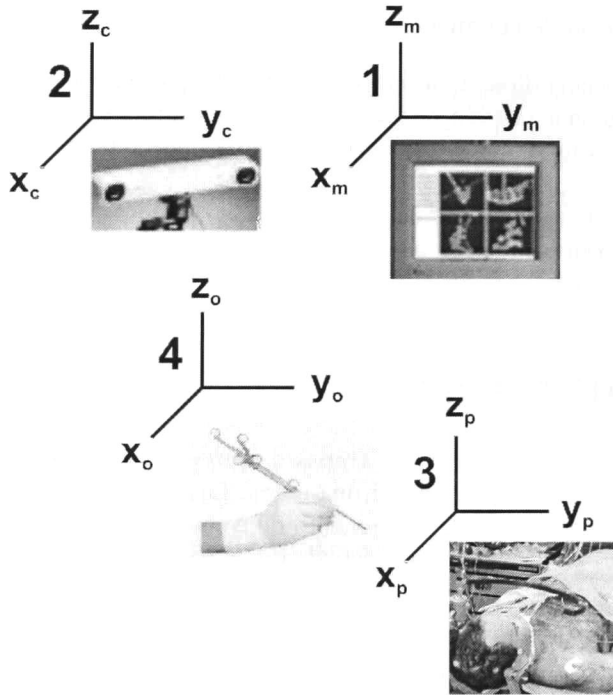


Figura 1.4: Diferentes sistemas de coordenadas: 1) coordenadas en el modelo virtual, 2) coordenadas de la cámara, 3) coordenadas del paciente, 4) coordenadas del instrumento quirúrgico

La tercera y última tarea consistió en simular una trayectoria óptima de operación mediante el uso de la neuroendoscopia virtual y el álgebra geométrica conformal, mostrando la completa extracción del tumor. Para realizar esta tarea fue necesario desarrollar un algoritmo propio para neuroendoscopia virtual en tiempo real, siendo de gran utilidad al neurocirujano para la planeación de una cirugía segura y de mínima invasión.

1.5. Material utilizado

Para la realización de este proyecto de tesis se utilizó el sistema estereoscópico híbrido de seguimiento visual [8, 9, 10, 11], el cual reporta un alto grado de precisión de ± 0.2 mm. de la ubicación espacial de los instrumentos quirúrgicos (ver figura 1.5). Es por eso, que cuenta con la resolución requerida por los sistemas de neuronavegación.

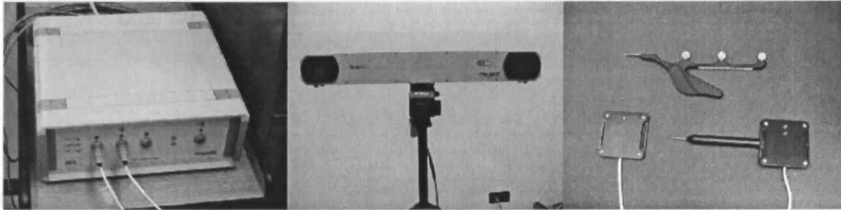


Figura 1.5: Sistema polaris: izquierda) unidad de procesamiento, centro) cámara polaris, derecha) instrumentos con marcadores esféricos reflejantes

Las pruebas del seguimiento de instrumentos quirúrgicos se realizaron en un maniquí (ver figura 1.6), al cual le fueron colocados marcadores de referencia (*puntos fiduciales*) para poder hacer el alineamiento.

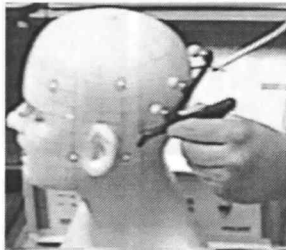


Figura 1.6: Maniquí utilizado en el seguimiento de instrumentos quirúrgicos

Con la finalidad de tener un modelo del paciente, fue proporcionado un cráneo (ver figura 1.7) por la contraparte de neurocirujanos del *Departamento de Neurociencias del Centro Universitario de Ciencias de la Salud (CUCS) de la Universidad de Guadalajara* que apoyan este proyecto. Con la finalidad de simular tejido cerebral, fueron colocados globos rellenos de líquido en el interior del cráneo. Se utilizaron imágenes de tomografía axial computarizada del cráneo (ver figura 1.8) para poder realizar la reconstrucción tridimensional del mismo.

Todo el software desarrollado se implemento en Microsoft Visual C++ 6.0 usando la librería gráfica VTK [19, 20] y las pruebas fueron realizadas en un computadora de escritorio con procesador Intel Pentium IV a 1.6 GHz, 128 MB de RAM y sistema operativo Windows XP Professional.

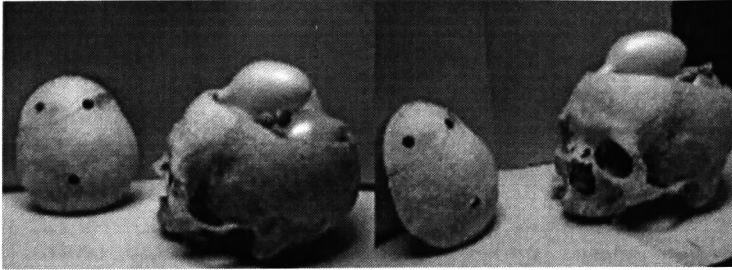


Figura 1.7: Cráneo humano con globos (reellenos de líquido) en su interior simulando masa cerebral

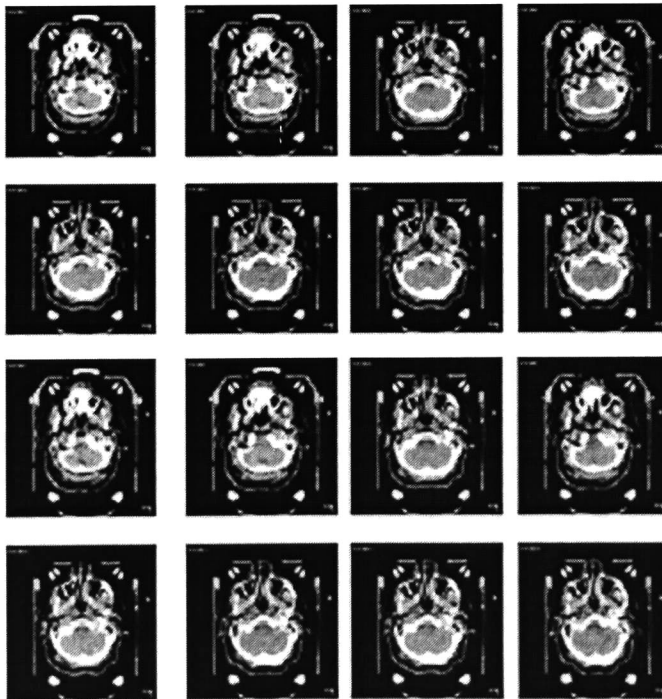


Figura 1.8: Imágenes de tomografía axial computarizada de un paciente con tumor

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

2.1. Álgebra geométrica

Se puede definir la *álgebra geométrica* como la interpretación geométrica de los elementos que pertenecen a dicha álgebra. También es conocida como *álgebra de Clifford*¹ en donde una serie de propiedades y operadores son añadidas al álgebra, para extender el sistema de números reales al cálculo vectorial. El álgebra geométrica es introducida por David Hestenes en la década de 1960.

Definiendo un espacio vectorial \mathbf{V} , se tienen las siguientes propiedades:

- $a + b = b + a$ (conmutativa)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativa)
- $a + 0 = a$ (elemento neutro: 0)
- $a + (-a) = 0$ (elemento opuesto: -a)
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (distribución del producto de un escalar con la suma de vectores)
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (distribución de la suma de escalares con un vector)
- $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (asociatividad del producto con escalares)

La información presentada en este capítulo (notaciones y definiciones), está basada en los textos y trabajos siguientes [5, 3, 4, 7, 14, 16, 1].

¹ William K. Clifford 1845-1879

2.1.1. Producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2

Sería útil tener una multiplicación de vectores que satisfagan los mismos axiomas de multiplicación de los números reales - *distributivo, asociativo y conmutativo* -. Tomando dos vectores ortogonales e_1 y e_2 en el espacio vectorial \mathbb{R}^2 . La magnitud de el vector $\mathbf{r} = xe_1 + ye_2$ es $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si el vector \mathbf{r} es multiplicado por si mismo $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, da como resultado el cuadrado de su magnitud.

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 \quad (2.1)$$

En forma de coordenadas, se introduce el producto de vectores de tal forma que:

$$(xe_1 + ye_2)^2 = x^2 + y^2 \quad (2.2)$$

Usando la regla distributiva sin asumir la conmutatividad se obtiene:

$$x^2e_1^2 + y^2e_2^2 + xy(e_1e_2 + e_2e_1) = x^2 + y^2 \quad (2.3)$$

Esto se satisface si los vectores ortogonales e_1 y e_2 obedecen las siguientes reglas

$$\begin{aligned} |e_1| &= |e_2| = 1 \\ e_1 &\perp e_2 \\ e_1^2 &= e_2^2 = 1 \\ e_1e_2 &= -e_2e_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Usando la asociatividad para calcular el cuadrado de $(e_1e_2)^2 = -e_1^2e_2^2 = -1$. Como el cuadrado del producto e_1e_2 es negativo, se sigue que e_1e_2 no es un escalar ni un vector. El producto es una nueva clase de unidad llamado *bivector*, representando el área del plano orientado (ver figura 2.2) del cuadrado con lados e_1 y e_2 . El producto e_1e_2 es denotado como e_{12} .

Producto interior

El producto interior² de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es por definición un *escalar* con magnitud $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$, donde $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$ son las longitudes de \mathbf{a} y \mathbf{b} , y θ es el ángulo entre estos vectores.

La interpretación geométrica de este producto es el cálculo de la proyección de un vector sobre otro, es decir, se obtiene la componente de un vector en la dirección del otro. Este

² El producto interior es conocido como *producto punto* o *producto escalar*

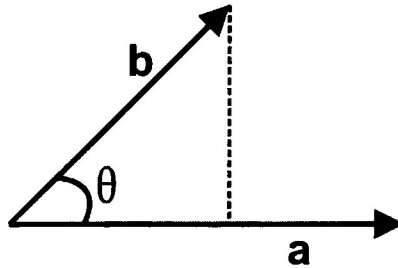


Figura 2.1: Producto punto de dos vectores a y b

producto nos da una idea de la dirección de cada vector, si se obtiene como resultado el valor 0, los dos vectores son perpendiculares (ver figura 2.1).

El producto interior $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \tag{2.5}$$

Producto exterior

El producto exterior³ de dos vectores a y b con magnitud igual a $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\theta)$ es un *bivector* o segmento de plano orientado.

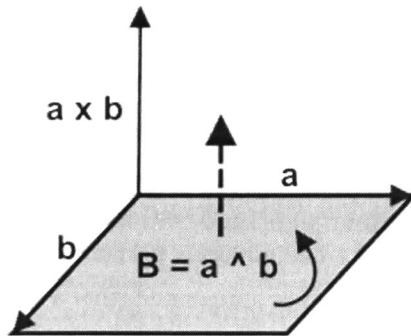


Figura 2.2: Bivector B e interpretación geométrica del producto cruz

El producto exterior esta definido por:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \tag{2.6}$$

³ El producto exterior, también es conocido como producto wedge

Se puede pensar en el producto exterior como un área dirigida o segmento de plano resultante del deslizamiento de un vector a lo largo del otro.

Este producto es anticonmutativo, es decir, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ tiene una orientación opuesta a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, o lo que es lo mismo; $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.

Se puede generalizar el producto exterior a dimensiones mayores, por ejemplo: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ (el bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es deslizado a lo largo del vector \mathbf{c}) da como resultado un *trivector* o volumen orientado (ver figura 2.3)

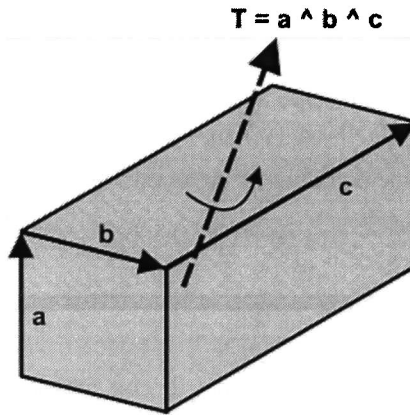


Figura 2.3: Representación geométrica del trivector \mathbf{T} como volumen dirigido

Producto cruz

Otro producto utilizado es el producto cruz ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), definido como el vector perpendicular a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con magnitud $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\theta)$. Su interpretación geométrica está ligada al espacio 3D ya que en 2D no existe una dirección perpendicular a dos vectores en el plano.

Al igual que el producto exterior, es anticonmutativo $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ y tiene la misma orientación (ver figura 2.2).

Definición del producto Clifford

El producto Clifford o *producto geométrico* de dos vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ escrito como \mathbf{ab} , puede ser expresado como la suma de sus partes simétrica y antisimétrica

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.7)$$

Puesto que el producto punto es un escalar y el producto wedge es un bivector, estos contraen (*disminuyen*) o aumentan (*expanden*) el grado de un vector.

Nótese que el producto Clifford de dos vectores en \mathbb{R}^2 , se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{ab} = (a_1e_1 + a_2e_2)(b_1e_1 + b_2e_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)e_{12} \quad (2.8)$$

el cual, es la suma de un escalar $(a_1b_1 + a_2b_2)$ y un bivector $(a_1b_2 + a_2b_1)e_{12}$.

Por lo tanto, se puede redefinir el producto interior y exterior para \mathbb{R}^2 , de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 + a_2b_1)e_{12} \quad (2.10)$$

Parece extraño sumar un escalar y un bivector, sin embargo; en los *números complejos*, se hace algo muy parecido al representarlos como la suma de una parte real y una imaginaria. Así, en este caso se hace exactamente lo mismo y se le llama al resultado obtenido, *multivector*.

2.1.2. Definición general del álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$

Un espacio vectorial *n-dimensional*, puede ser expandido usando las bases ortogonales de sus vectores e_i , $i = 1, \dots, n$, tal que $e_i e_j = e_{ij}$. Así, a una base que expande un espacio vectorial lineal, corresponde al álgebra geométrica \mathcal{G}_n :

$$1, e_i \quad e_i \wedge e_j \quad e_i \wedge e_j \wedge e_k \dots, I = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \quad (2.11)$$

En general, el álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$ es un espacio lineal de dimensión 2^n , donde $n = p + q + r$, con elementos llamados *blades*, donde los elementos de grado mayor representan multivectores. Los subíndices p, q y r indican la cantidad de elementos de grado 1 de la base vectorial que elevados al cuadrado dan como resultado 1, -1 y 0. El álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$, se construye a partir del espacio vectorial $\mathbb{R}^{p,q,r}$, mediante la aplicación del producto Clifford, de forma que el producto geométrico de dos vectores e_i y e_j , está definido como:

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \in \{1, \dots, p\} \\ -1 & \text{para } i = j \in \{p+1, \dots, p+q\} \\ 0 & \text{para } i = j \in \{p+q+1, \dots, n\} \\ e_{ij} = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.12)$$

Un espacio vectorial, donde $q \neq 0$ y $r \neq 0$, se llama pseudoeuclidiano, si $r \neq 0$ su métrica es degenerada y el álgebra geométrica correspondiente se llama degenerada, pero debido a

que en la práctica no existen elementos que elevados al cuadrado den como resultado 0, se prefiere el uso de álgebras no degeneradas $\mathcal{G}_{p,q}$ y combinando elementos de p y q se forman vectores que elevados al cuadrado resulten en 0.

El álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q}$ es expandida por:

- elementos de grado 0 (*escalares*), 1

elementos de grado 1 (*vectores*), e_i

- elementos de grado 2 (*bivectores*), $e_{ij} = e_i \wedge e_j$

elementos de grado 3 (*trivectores*), $e_{ijk} = e_i \wedge e_j \wedge e_k$

y así sucesivamente hasta llegar al elemento de grado n (*hipervolumen*), el cual es llamado *pseudoescalar* y se denota mediante la letra I .

El n -blade unitario es llamado pseudoescalar unitario y como en cada álgebra es un pseudoescalar diferente, se utiliza un subíndice para indicar el álgebra geométrica a la que pertenece, por ejemplo: I_E pseudoescalar de $\mathcal{G}_{3,0,0}$, I_C pseudoescalar de $\mathcal{G}_{4,1,0}$.

El producto geométrico de dos vectores en cualquier álgebra se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.13)$$

La propiedad conmutativa de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ y anticonmutativa de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ da la relación que hay entre \mathbf{ab} y \mathbf{ba} . Por consiguiente:

$$\mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.14)$$

sumando y restando las ecuaciones 2.13 y 2.14, el producto punto y el producto wedge se definen como:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (2.16)$$

El producto exterior puede definirse como la parte antisimétrica del producto geométrico. Este es llamado r -blade o *blade de grado r* . Una combinación lineal de los r -blades es llamado r -vector. El conjunto de todos los r -vectores es un subespacio $\binom{n}{r}$ -dimensional de \mathcal{G}_n , denotado por \mathcal{G}_n^r . Todo el espacio \mathcal{G}_n esta dado por la suma de sus subespacios como sigue:

$$\mathcal{G}_n = \sum_{i=0}^n \mathcal{G}_n^i \quad (2.17)$$

esta suma también se puede representar como una suma de los elementos de grado par e impar del álgebra $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^+ \oplus \mathcal{G}_n^-$

donde

$$\mathcal{G}_n^+ = \mathcal{G}_n^0 \oplus \mathcal{G}_n^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_n^e \quad \text{elementos pares} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{G}_n^- = \mathcal{G}_n^1 \oplus \mathcal{G}_n^3 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}_n^o \quad \text{elementos impares} \quad (2.19)$$

y $e \leq n$ es par y $o \leq n$ es impar.

Un elemento genérico de \mathcal{G}_n es llamado *multivector*. De acuerdo con la ecuación 2.17, cada multivector M puede ser escrito en su forma expandida como

$$M = \sum_{i=0}^n \langle M \rangle_i \quad (2.20)$$

donde $\langle M \rangle_i$ denota un *i-vector*.

2.1.3. Propiedades de los multivectores

Un elemento M de \mathcal{G}_n es *invertible* si existe otro elemento N de \mathcal{G}_n tal que $MN = NM = 1$. El elemento N , si existe, es único. Esté es llamado el *inverso* de M y es denotado por M^{-1} . Por ejemplo: un vector nulo⁴ de \mathcal{G}_n no es invertible, pero cualquier vector no nulo \mathbf{a} es invertible, con

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \quad (2.21)$$

Esta capacidad del álgebra geométrica para la división de vectores facilita mucho varios calculos.

Por la asociatividad y multilinealidad, el producto exterior se extiende a cualquier número finito de multivectores y escalares, con la siguiente cláusula especial:

$$\lambda \wedge M = M \wedge \lambda = \lambda M, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n \quad (2.22)$$

El producto interior de un *r-blade* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ con un *s-blade* $b_1 \wedge \cdots \wedge b_s$ puede ser definido recursivamente por:

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = \begin{cases} ((a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot b_1) \cdot (b_2 \wedge \cdots \wedge b_s) & \text{si } r \geq s \\ (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \cdot (a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) & \text{si } r < s \end{cases} \quad (2.23)$$

⁴ Un vector \mathbf{a} es nulo si $\mathbf{a}^2 = 0$

y

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot b_1 = \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge (a_i \cdot b_1) \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_r \quad (2.24)$$

$$a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} b_1 \wedge \cdots \wedge b_{i-1} \wedge (a_r \cdot b_i) \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_s \quad (2.25)$$

Un ejemplo del uso de la ecuación 2.23 con la ecuación 2.25 es: sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{G}_n$ 1-vectores y $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ un 2-vector. Entonces el producto interior de \mathbf{a} con \mathbf{B} está definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (2.26)$$

Como los productos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ son escalares, el producto interior de un vector con un bivector da como resultado un vector.

Se puede generalizar para $s \geq 1$, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_{(s)} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - \dots \\ &= \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i) [\mathbf{B}_{(s)} \setminus \mathbf{b}_i] \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $[\mathbf{B}_{(s)} \setminus \mathbf{b}_i]$ denota el blade $\mathbf{B}_{(s)}$ sin el vector \mathbf{b}_i . Aquí el producto interior de un vector con un s -blade da como resultado un $(s-1)$ -blade. Otro ejemplo de esta importante regla es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{(s)} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{B}_{(s)} = \mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{B}_{(s)}) \quad (2.28)$$

donde \mathbf{A} es un 2-blade y $s \geq 2$. Si se aumenta el valor de r de tal forma que $r < s < n$ se llega a:

$$\mathbf{a}_1 \left(\mathbf{a}_2 \cdot \left(\cdots \cdot (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{B}_{(s)}) \right) \right) \quad (2.29)$$

lo cual es una representación del segundo caso de la ecuación 2.23.

Por bilinealidad, el producto interior es extendido hacia cualesquier dos multivectores, si se cumple que:

$$\lambda \cdot M = M \cdot \lambda = 0, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n \quad (2.30)$$

Para cualquier blade A y B con grados r y s distintos de cero, se tiene lo siguiente:

$$A \cdot B = \langle AB \rangle_{|r-s|} \quad (2.31)$$

$$A \wedge B = \langle AB \rangle_{r+s} \quad (2.32)$$

El blade de más alto grado es el n -blade y es llamado *pseudoescalar* ($I = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$). Un álgebra geométrica se llama *no degenerada* si la magnitud del pseudoescalar unitario es diferente de cero. Los pseudoescalares son indexados de acuerdo al álgebra a la que pertenecen, por ejemplo: $I_E \in \mathcal{G}_3$, $I_C \in \mathcal{G}_{4,1}$ ⁵

El *dual* de un multivector M en \mathcal{G}_n es denotado por:

$$M^* = MI_n^{-1} \quad (2.33)$$

donde I_n^{-1} difiere de I_n por lo menos en el signo. El *dual* de un r -blade es un $(n-r)$ -blade.

La *reversión* de un s -blade $A = a_1 \wedge \cdots \wedge a_s$ se define como:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{s-1} \wedge a_s)^\sim \\ &= a_s \wedge a_{s-1} \wedge \cdots \wedge a_2 \wedge a_1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

y generalizando, la *reversión* para un multivector

$$\langle \tilde{M} \rangle_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n. \quad (2.35)$$

Dado un producto geométrico de varios multivectores $D = ABC$, donde $A, B, C, D \in \mathcal{G}_n$, la *reversión* de estos está dada por:

$$\tilde{D} = \widetilde{ABC} = \tilde{C}\tilde{B}\tilde{A} \quad (2.36)$$

La *involución principal* de \mathcal{G}_n , también llamada *involución de grado* se define de la siguiente manera:

$$\langle \widehat{M} \rangle_i = (-1)^i \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n. \quad (2.37)$$

El producto $A \times B$ es definido para cualquier multivector A y B como sigue:

$$A \times B \equiv \frac{1}{2}(AB - BA) = -B \times A. \quad (2.38)$$

La función exponencial de un multivector M puede ser expresada en series de expansión por:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (2.39)$$

⁵ Para abreviar la notación $\mathcal{G}_{3,0,0} \simeq \mathcal{G}_3$ y $\mathcal{G}_{4,1,0} \simeq \mathcal{G}_{4,1}$

2.2. Álgebra geométrica euclidiana

El álgebra \mathcal{G}_3 , la cual se deriva de \mathbb{R}^3 ($n = p = 3$) es ideal para representar entidades y operaciones en un espacio euclidiano 3D. Por lo tanto es llamada *álgebra geométrica euclidiana*.

Sean e_1, e_2 y e_3 tres bases vectoriales ortonormales de un espacio euclidiano 3D, entonces el álgebra geométrica del espacio euclidiano 3D consiste de $2^3 = 8$ elementos dados por:

$$\underbrace{1}_{\text{escalar}}, \underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{vectores}}, \underbrace{e_{12}, e_{23}, e_{31}}_{\text{bivectores}}, \underbrace{e_{123} \equiv I}_{\text{pseudoescalar}} \quad (2.40)$$

El pseudoescalar unitario I cuadrea a -1 y commuta con escalares, vectores y bivectores. La multiplicación de las tres bases bivectoriales e_1, e_2 y e_3 por I da como resultado las tres bases bivectoriales $e_{12} = Ie_3, e_{23} = Ie_1$ y $e_{31} = Ie_2$.

2.2.1. Representación de puntos líneas y planos

Un punto representa una posición en el espacio 3D y puede ser expresado por una combinación lineal de las tres bases vectoriales de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \quad (2.41)$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una línea puede ser representada como un multivector no homogéneo usando un vector \mathbf{r} para la dirección y un bivector \mathbf{m} que representa el momento, como el producto exterior de un punto \mathbf{x} sobre la línea y la dirección \mathbf{r} de la línea como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{r} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{r} \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{m} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Un plano se expresa por una entidad de grado mayor que la línea. En términos de la distancia de Hesse d desde el origen a el plano y el bivector unitario de dirección \mathbf{n} desde el origen a el plano, por lo tanto es denotado por:

$$\mathbf{h} = n + \mathbf{I}d \quad (2.43)$$

2.2.2. Rotaciones y translaciones

Como la multiplicación de las tres bases vectoriales e_i con I da como resultado las tres bases bivectoriales Ie_i , estos bivectores rotan vectores en su propio plano por 90 grados, por

ejemplo:

$$(Ie_3)e_2 = e_1 \quad (2.44)$$

o

$$(Ie_1)e_2 = -e_1 \quad (2.45)$$

El cuadrado de las bases bivectoriales es igual a -1 y pueden ser identificadas con los vectores unitarios i, j y k del álgebra de cuaterniones \mathbb{H} con las famosas relaciones de Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2.46)$$

Los bivectores de esta álgebra pueden ser usados para representar rotaciones de puntos en el espacio 3D. Un *rotor* \mathbf{R} (nombre corto de rotador) es un elemento de grado par de esta álgebra que satisface $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$. Si se tiene un cuaternión unitario $\mathbf{q} = q_0 + q_1x + q_2y + q_3z$ un rotor \mathbf{R} y su reverso $\tilde{\mathbf{R}}$ son obtenidos por:

$$\mathbf{R} = q_0 + q_1e_{23} + q_2e_{31} + q_3e_{12} \quad (2.47)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = q_0 - q_1e_{23} - q_2e_{31} - q_3e_{12} \quad (2.48)$$

Usando la representación de Euler del rotor tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{n}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde \mathbf{n} es un bivector unitario que representa el plano de rotación (su dual corresponde a el eje de rotación) y θ representa el ángulo de rotación.

La rotación de un punto \mathbf{x} , puede ser obtenida por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}\tilde{\mathbf{R}} \quad (2.50)$$

La rotación de dos rotores $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1$ da un nuevo rotor, de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{R}}_1)(\tilde{\mathbf{R}}_2) \quad (2.51)$$

La translación de un punto con respecto a un vector \mathbf{t} es obtenida por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{t} \quad (2.52)$$

Una rotación es una operación lineal, ya que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{y} \quad (2.53)$$

Sin embargo; la translación no tiene esa propiedad de linealidad, ya que:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \neq \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y} \quad (2.54)$$

Estas diferencias causan problemas en la representación del movimiento rígido de un objeto como una operación lineal en esta álgebra. En general el movimiento de un cuerpo rígido es llamado desplazamiento rígido.

Se pueden incluir rotación y translación de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{t} \quad (2.55)$$

2.3. Álgebra geométrica proyectiva $\mathcal{G}_{3,1}$

Usando una coordenada homogénea la dimensión del espacio vectorial se incrementa en uno y el álgebra geométrica correspondiente es de dimensión $2^4 = 16$. El álgebra geométrica $\mathcal{G}_{3,1}$ se usa para representar el espacio proyectivo. La base vectorial e_- denota la componente homogénea, ya que $e_-^2 = -1$, esta base vectorial induce una métrica de Minkowski. El álgebra $\mathcal{G}_{3,1}$ contiene los siguientes elementos:

$$\underbrace{1}_{\text{escalar}}, \underbrace{e_-, e_1, e_2, e_3}_{\text{vectores}}, \underbrace{e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_-, e_-, e_-, e_-}_{\text{bivectores}}, \underbrace{e_{123}, e_{-23}, e_{-31}, e_{-12}}_{\text{trivectores}}, \underbrace{e_{-123} \equiv I}_{\text{pseudoescalar}} \quad (2.56)$$

Nótese que $e_{-123}^2 = -1$.

2.3.1. Representación de puntos, líneas y planos

En el álgebra geométrica proyectiva los puntos, líneas y planos pueden ser representados como r -blades, por ejemplo: multivectores homeogeneos de grado r .

Un punto \mathbf{X} se representa por un 1-blade de la siguiente manera:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + e_- \quad (2.57)$$

Como $\mathbf{X} \wedge \mathbf{X} = 0$, es fácil ver que:

$$\mathbf{X} \wedge \lambda \mathbf{X} = 0 \quad (2.58)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$

Todos los vectores \mathbf{X} representan a un punto \mathbf{A} si $\mathbf{A} \wedge \mathbf{X} = 0$. El término $\mathbf{A} \wedge$ es un operador lineal llamado *producto exterior del espacio nulo* que define la incidencia de dos entidades.

Una línea puede ser representada por el producto exterior de dos puntos, dando como resultado un 2-blade

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \\ &= (x_1 + e_-) \wedge (x_2 + e_-) \\ &= x_1 \wedge x_2 + (x_1 - x_2)e_- \\ &= \mathbf{m} - \mathbf{r}e_- \end{aligned} \tag{2.59}$$

La línea \mathbf{L} contiene el momento \mathbf{m} y la dirección (negativa) \mathbf{r} .

Un plano se expresa mediante el producto exterior de tres puntos, resultando un 3-blade

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{X}_3 \\ &= (x_1 + e_-) \wedge (x_2 + e_-) \wedge (x_3 + e_-) \\ &= x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 + (x_1 - x_2) \wedge (x_1 - x_3)e_- \\ &= dI + \mathbf{n}e_- \end{aligned} \tag{2.60}$$

Esta representación corresponde a la descripción de Hesse de planos (hasta un factor escalar), formalizando un plano por la normal \mathbf{n} (como bivector) del plano y la distancia de Hesse d del origen al plano.

Se observa que la generación de entidades de grado mayor es más natural que el álgebra geométrica euclidiana.

2.4. Álgebra de motores $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$

La palabra *motor* es una abreviación de “momento y vector” Clifford introduce los motores con el nombre de biquaterniones. Los motores son isomorfos a los cuaterniones duales, con la condición necesaria de que $I^2 = 0$. Esta subálgebra par de $\mathcal{G}_{3,0,1}$ es nombrada como $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$ y solo es expandida via bases bivectoriales como sigue:

$$\underbrace{1}_{\text{escalar}}, \underbrace{e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{41}, e_{42}, e_{43}}_{\text{bivectores}}, \underbrace{I}_{\text{pseudoescalar}} \tag{2.61}$$

Los motores representan un tipo especial de rotores e incluyen rotación y translación. Note que el dual de un escalar es el pseudoescalar I y los duales de las primeras tres bases bivectoriales son las siguientes tres bases bivectoriales, esto es, $e_{23}^* = Ie_{23} = e_{41}$.

Un rotor relaciona dos vectores en un espacio 3D, un motor convierte el eje de rotación de un rotor en el eje de rotación de un segundo rotor. Cada rotor puede ser geoméricamente representado como un plano de rotación con eje de rotación normal a ese plano.

2.4.1. Motores, rotores y transladores en $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$

Como un movimiento rígido consiste de una rotación y una translación, es posible encontrar un motor en términos de estas dos transformaciones, las cuales son llamadas *rotor* y *translador*. Primeramente se considera un rotor simple en su *representación de Euler* como una rotación con un ángulo θ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{31} + a_3 e_{12} \\
 &= a_0 + \mathbf{a} \\
 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{n} \\
 &= a_c + a_s \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde \mathbf{n} es el bivector unitario 3D del eje de rotación expandido por las bases bivectoriales e_{23} , e_{31} , e_{12} y a_c , $a_s \in \mathbb{R}$. Una translación 3D en álgebra de motores es representada por \mathbf{T}_c y se le llama *translador*.

Si aplicamos un translador por la izquierda a un rotor \mathbf{R} y por la derecha el conjugado del translador, se obtiene un rotor modificado

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_s &= \mathbf{T}_c \mathbf{R} \widetilde{\mathbf{T}_c} \\
 &= (1 + I \frac{\mathbf{t}_c}{2})(a_0 + \mathbf{a})(1 - I \frac{\mathbf{t}_c}{2}) \\
 &= a_0 + \mathbf{a} + I\left(\frac{\mathbf{t}_c}{2}\mathbf{a} - \mathbf{a}\frac{\mathbf{t}_c}{2}\right) \\
 &= a_0 + \mathbf{a} + I(\mathbf{a} \wedge \mathbf{t}_c)
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Aquí, \mathbf{t}_c es el vector de translación 3D expandido por las bases bivectoriales e_{23} , e_{31} y e_{12} . Entonces expresando la última ecuación en terminos de Euler, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_s &= a_0 + a_s \mathbf{n} + I a_s \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_c \\
 &= a_c + a_s (\mathbf{n} + I \mathbf{m}) \\
 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\mathbf{n} + I \mathbf{m}) \\
 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Este resultado indica que el nuevo rotor \mathbf{R}_s puede ser aplicado con respecto a un eje de línea \mathbf{l} expresada en términos duales de la dirección \mathbf{n} y el momento $\mathbf{m} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_c$. El motor se define, desplazando una distancia $\mathbf{t}_s = d\mathbf{n}$ a lo largo de la línea \mathbf{l} del eje de rotación. Como un motor es aplicado por la izquierda y su conjugado por la derecha, se debe usar un medio de \mathbf{t}_s en la expresión de \mathbf{T}_s cuando se defina el motor:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{T}_s \mathbf{R}_s \\
 &= (1 + I \frac{\mathbf{t}_s}{2})(a_0 + \mathbf{a} + I \mathbf{a} \wedge \mathbf{t}_c) \\
 &= (1 + I \frac{d\mathbf{n}}{2})(a_c + a_s \mathbf{n} + I a_s \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_c) \\
 &= a_c + a_s \mathbf{n} + I a_s \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_c + I \frac{d}{2} a_c \mathbf{n} - I \frac{d}{2} a_s \mathbf{n} \mathbf{n} \\
 &= (a_c + I \frac{d}{2} a_s) + (a_s + I a_c \frac{d}{2})(\mathbf{n} + I \mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_c) \\
 &= (a_c - I a_s \frac{d}{2}) + (a_s + I a_c \frac{d}{2}) \mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Esta expresión de un motor hace explícita la línea del bivector unitario del eje de rotación de la línea \mathbf{l} .

Expresando un motor usando una representación de Euler, por sustitución de las constantes $a_c = \cos(\frac{\theta}{2})$ y $a_s = \sin(\frac{\theta}{2})$ en la ecuación 2.65, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= (\cos(\frac{\theta}{2}) - I \sin(\frac{\theta}{2}) \frac{d}{2}) + (\sin(\frac{\theta}{2}) + I \cos(\frac{\theta}{2}) \frac{d}{2}) \mathbf{l} \\
 &= \cos(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}) \mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

lo cual es una representación dual de un girador. Ahora analizando las expresiones resultantes

$$\mathbf{R} = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{n} \tag{2.67}$$

$$\mathbf{R}_s = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{l} \tag{2.68}$$

$$\mathbf{M} = \cos(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2} + I \frac{d}{2}) \mathbf{l} \tag{2.69}$$

Se puede ver que el eje de rotación \mathbf{n} de un rotor simple \mathbf{R} es cambiado a un eje de línea de rotación, así, \mathbf{R}_s ahora rota a través de un eje de línea.

Si se expande la función exponencial de un bivector dual usando series de Taylor, el resultado será la expresión general $e^{\alpha + I\beta} = e^\alpha + Ie^\alpha \beta = e^\alpha(1 + I\beta)$. Así, se obtiene la

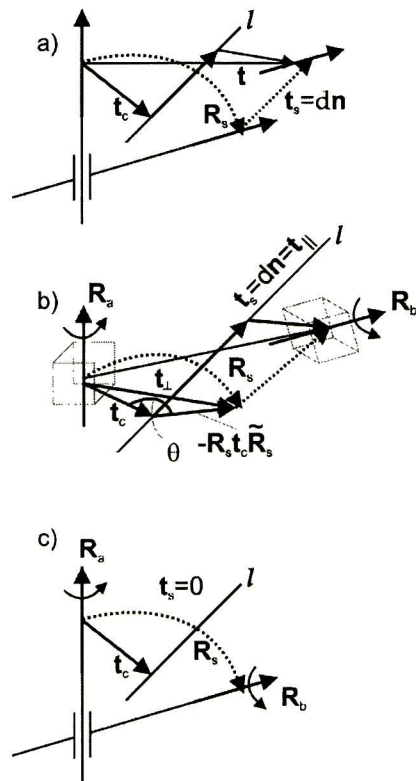


Figura 2.4: Movimiento de giro a través del eje de línea l (t_s : desplazamiento longitudinal por d y R_s : ángulo de rotación θ): a) motor relacionando dos ejes de línea, b) motor aplicado a un objeto, c) motor degenerado relacionando dos motores coplanares

expresión del motor como un girador

$$e^{1\frac{\theta}{2}+I\frac{t_s}{2}} = (1 + I\frac{t_s}{2})e^{1\frac{\theta}{2}} = \mathbf{T}_s\mathbf{R}_s \quad (2.70)$$

donde $I\frac{t_s}{2} = I\frac{1}{2}(t_1e_{23} + t_2e_{31} + t_3e_{12}) = \frac{1}{2}(t_1e_{41} + t_2e_{42} + t_3e_{43})$.

Si se desea expresar el motor usando solo rotores en una representación dual, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{T}_s\mathbf{R}_s = (1 + I\frac{t_s}{2})\mathbf{R}_s \\ &= \mathbf{R}_s + I\frac{t_s}{2}\mathbf{R}_s \end{aligned} \quad (2.71)$$

Se observa que la parte dual del motor de la ecuación anterior es el producto geométrico del bivector \mathbf{t}_s y el rotor \mathbf{R}_s , como ambos son expresados en términos de las mismas bases bivectoriales, sus productos geométricos pueden ser también expresados en estas bases, con lo cual se obtiene un nuevo rotor \mathbf{R}'_s . Así, se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_s + I\frac{t_s}{2}\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s + I\mathbf{R}'_s \quad (2.72)$$

En esta ecuación los ejes de línea de los rotores son antisimétricos (ver figura: 2.4.a). Esto significa que representan el caso general de rotores *nocoplanares*. Si la distancia \mathbf{t}_s es igual a cero, entonces el motor degenerará a un rotor

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_s\mathbf{R}_s = (1 + I\frac{t_s}{2})\mathbf{R}_s = (1 + I\frac{0}{2})\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s \quad (2.73)$$

En este caso, cuando las dos líneas de generación del eje del motor son coplanares, se obtiene el llamado *motor degenerado* (ver figura: 2.4.c).

Finalmente, el bivector \mathbf{t}_s puede ser expresado en términos de los rotores usando los resultados anteriores

$$\mathbf{R}'_s\tilde{\mathbf{R}}_s = (\frac{t_s}{2}\mathbf{R}_s)\tilde{\mathbf{R}}_s = \frac{t_s}{2} \quad (2.74)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{t}_s = 2\mathbf{R}'_s\tilde{\mathbf{R}}_s \quad (2.75)$$

2.4.2. Propiedades de los motores

Un motor general puede ser expresado como:

$$\mathbf{M}\alpha = \alpha\mathbf{M} \quad (2.76)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y \mathbf{M} es un motor unitario. La norma de un motor \mathbf{M} es definida como sigue:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{M}| &= \mathbf{M}\widetilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{T}_s \mathbf{R}_s \widetilde{\mathbf{R}}_s \widetilde{\mathbf{T}}_s \\
 &= (1 + I \frac{\mathbf{t}_s}{2}) \mathbf{R}_s \widetilde{\mathbf{R}}_s (1 - I \frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= 1 + I \frac{\mathbf{t}_s}{2} - I \frac{\mathbf{t}_s}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

donde $\widetilde{\mathbf{M}}$ es el motor conjugado y 1 es la identidad de la multiplicación del motor.

Usando la ecuación 2.72 y considerando la magnitud del motor unitario, se obtienen dos propiedades útiles, expresadas por:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{M}| &= \mathbf{M}\widetilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{R}_s + I\mathbf{R}'_s)(\widetilde{\mathbf{R}}_s + I\widetilde{\mathbf{R}}'_s) \\
 &= \mathbf{R}_s \widetilde{\mathbf{R}}_s + I(\widetilde{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}'_s + \widetilde{\mathbf{R}}'_s \mathbf{R}_s) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Estas ecuaciones requieren las siguientes restricciones:

$$\mathbf{R}_s \widetilde{\mathbf{R}}_s = 1 \tag{2.79}$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_s \mathbf{R}'_s + \widetilde{\mathbf{R}}'_s \mathbf{R}_s = 0 \tag{2.80}$$

La combinación de estos dos movimientos rígidos puede ser expresada usando dos motores consecutivos. El motor resultante describe el desplazamiento total

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_c &= \mathbf{M}_a \mathbf{M}_b \\
 &= (\mathbf{R}_{s_a} + I\mathbf{R}'_{s_a})(\mathbf{R}_{s_b} + I\mathbf{R}'_{s_b}) \\
 &= \mathbf{R}_{s_a} \mathbf{R}_{s_b} + I(\mathbf{R}_{s_a} \mathbf{R}'_{s_b} + \mathbf{R}'_{s_a} \mathbf{R}_{s_b}) \\
 &= \mathbf{R}_{s_c} + I\mathbf{R}'_{s_c}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Nótese que, por un lado, las rotaciones puras están combinadas multiplicativamente, y por el otro lado, las partes duales contienen la translación combinada aditivamente.

Usando la ecuación 2.72, se puede expresar un motor en términos de un girador dual:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{T}_s \mathbf{R}_s \\
 &= \mathbf{R}_s + I\mathbf{R}'_s \\
 &= (a_0 + a_1 e_{23} + a_2 e_{32} + a_3 e_{21}) + I(b_0 + b_1 e_{23} + b_2 e_{32} + a_3 e_{21}) \\
 &= (a_0 + \mathbf{a}) + I(b_0 + \mathbf{b})
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Usando esta notación, se pueden realzar los componentes de la parte real y la parte dual del motor, como sigue:

$$\mathbf{M} = (a_0, \mathbf{a}) + I(b_0, \mathbf{b}) \quad (2.83)$$

donde cada término dentro de los paréntesis consiste de una parte escalar y un bivector 3D.

Un motor expresado en términos de un traductor y un rotor es manipulado similarmente como en el caso de un rotor, por la izquierda y su conjugado por la derecha, estas operaciones, llamadas reflexiones del motor, son usadas para construir un automorfismo equivalente a un giro.

Cambiando el signo del escalar y el bivector en la parte real y la parte dual del motor, se obtienen las siguientes variaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (a_0 + \mathbf{a}) + I(b_0 + \mathbf{b}) = \mathbf{T}_s \mathbf{R}_s \\ \widetilde{\mathbf{M}} &= (a_0 - \mathbf{a}) + I(b_0 - \mathbf{b}) = \widetilde{\mathbf{R}}_s \widetilde{\mathbf{T}}_s \\ \bar{\mathbf{M}} &= (a_0 + \mathbf{a}) + I(b_0 + \mathbf{b}) = \mathbf{R}_s \bar{\mathbf{T}}_s \\ \widetilde{\bar{\mathbf{M}}} &= (a_0 - \mathbf{a}) + I(b_0 - \mathbf{b}) = \widetilde{\mathbf{R}}_s \mathbf{T}_s \end{aligned} \quad (2.84)$$

La primera, segunda y cuarta expresiones pueden ser usadas para modelar el movimiento de puntos, líneas y planos, respectivamente (puede consultar el apéndice A, para más información).

Usando la ecuación 2.84, directamente se pueden computar las expresiones para los componentes individuales:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}(\mathbf{M} + \widetilde{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{M}} + \widetilde{\bar{\mathbf{M}}}) \\ Ib_0 &= \frac{1}{4}(\mathbf{M} + \widetilde{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{M}} - \widetilde{\bar{\mathbf{M}}}) \\ \mathbf{a} &= \frac{1}{4}(\mathbf{M} - \widetilde{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{M}} - \widetilde{\bar{\mathbf{M}}}) \\ Ib &= \frac{1}{4}(\mathbf{M} - \widetilde{\mathbf{M}} - \bar{\mathbf{M}} + \widetilde{\bar{\mathbf{M}}}) \end{aligned} \quad (2.85)$$

2.5. Geometría conformal

En el álgebra geométrica conformal se pueden expresar transformaciones proyectivas, pero la restricción de las transformaciones euclidianas trae algunos problemas. Por lo tanto es necesario introducir el uso de otra álgebra. El uso de la geometría conformal esta motivada por la introducción de proyecciones estereográficas.

2.5.1. Proyección estereográfica

Una proyección estereográfica es el medio para generar mapas planos de la tierra. En este caso, imaginemos a la tierra como una esfera transparente, intersectada en el ecuador por un plano ecuatorial. Ahora imaginemos que en el polo norte \mathbf{n} (ver figura 2.5) hay un foco que ilumina a través de la esfera. Cada punto de la esfera proyectará un punto en el papel y ahí es donde se dibuja el mapa.

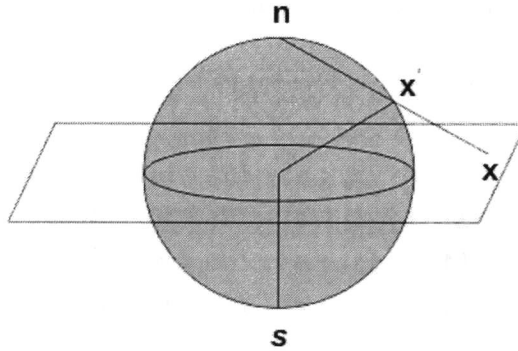


Figura 2.5: Visualización de la proyección estereográfica

La regla para la proyección estereográfica tiene una clara descripción geométrica y es visualizada para el caso 1D, como se muestra en la figura 2.6, en este caso de 1D (\mathcal{G}_1), se trabajará en \mathcal{G}_2 .

Teniendo dos bases vectoriales ortonormales e_1 y e_+ y un círculo de radio $\rho = 1$. Donde e_+ ⁶ es un vector adicional al espacio unidimensional del vector e_1 con $e_+^2 = e_1^2 = 1$. Un punto \mathbf{x}' sobre el círculo está dado por su ángulo α :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= ae_1 + be_+ \\ &= \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_+ \end{aligned} \quad (2.86)$$

Para proyectar el punto \mathbf{x}' sobre el círculo a un punto sobre eje e_1 se puede aplicar el teorema de intersección como sigue:

$$x = \frac{a}{1-b} = \left(\frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) \quad (2.87)$$

El punto sobre la línea tiene las coordenadas

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\cos(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)} \right) e_1 + 0e_+ \quad (2.88)$$

⁶ Se le llama e_+ a esta base, ya que $e_+^2 = 1$

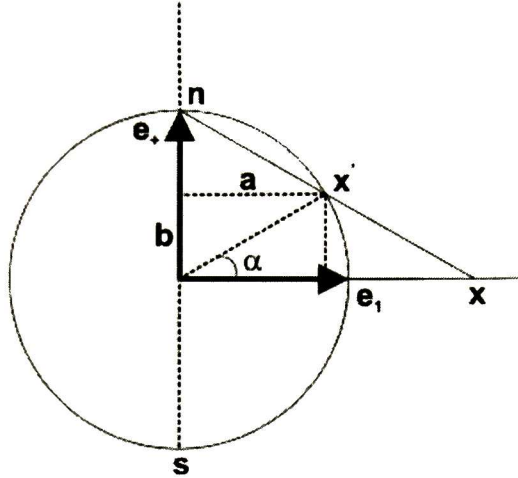


Figura 2.6: Proyección estereográfica para el caso 1D: los puntos sobre el círculo son proyectados sobre la línea. Nótese que el polo norte n proyecta los puntos al infinito y el polo sur s los proyecta al origen

Para proyectar un punto xe_1 ($x \in \mathbb{R}$) sobre el círculo, se calculan los factores apropiados $a, b \in [0, \dots, 1]$. Por lo tanto se aplican las siguientes igualdades:

$$x = \frac{a}{1-b} \quad (2.89)$$

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (2.90)$$

Por lo que es posible calcular lo siguiente:

$$a = x(1-b) \quad (2.91)$$

$$a^2 = (1+b)(1-b) \quad (2.92)$$

Esto conduce a:

$$x^2(1-b)^2 = (1+b)(1-b)$$

$$x^2(1-b) = (1+b)$$

$$b = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (2.93)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.91, se obtiene:

$$a = x(1-b) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (2.94)$$

Por lo tanto, la proyección sobre el círculo puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= ae_1 + be_+ \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1}e_1 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ \end{aligned} \quad (2.95)$$

Usando coordenadas homogéneas se agrega una tercera base e_-^7 , obtenemos la representación del punto sobre el círculo como:

$$\mathbf{x}' = xe_1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_+ + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e_- \quad (2.96)$$

El vector \mathbf{x} es mapeado de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = ae_1 + be_+ + e_- \quad (2.97)$$

con

$$(\mathbf{x}') = a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (2.98)$$

donde las coordenadas a y b son las coordenadas de un punto sobre el círculo unitario.

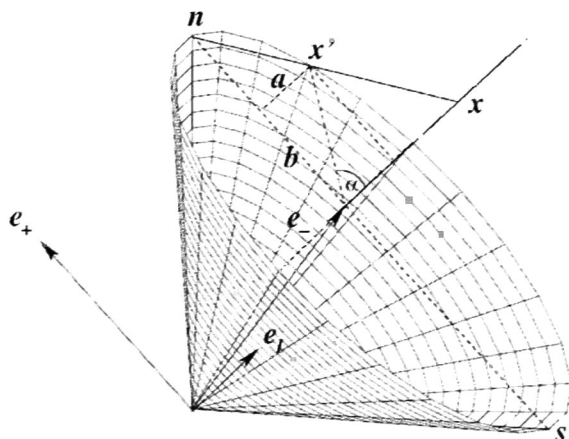


Figura 2.7: Visualización del modelo homogéneo para proyecciones estereográficas para el caso 1D. Todos los puntos proyectados estereográficamente yacen sobre un cono, el cual es llamado el *cono nulo* en el espacio de Minkowski

⁷ Se llama a esta base e_- , ya que $e_-^2 = -1$

La figura 2.7 muestra el modelo homogéneo para las proyecciones estereográficas para el caso 1D. La representación homogénea de un punto es usada como *punto* en el álgebra geométrica conformal. Esta representación es muy conveniente en el álgebra conformal. En la figura 2.7 se muestra como queda este punto en este espacio.

2.5.2. Espacio de Minkowski

El plano de *Minkowski* $\mathbb{R}^{1,1}$ tiene las bases ortonormales e_+ y e_- , cuyas propiedades son:

$$e_+^2 = 1, \quad e_-^2 = -1, \quad e_+ \cdot e_- = 0 \quad (2.99)$$

Una base *nula* puede ser introducida por los vectores siguientes:

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad \text{y} \quad e = e_- + e_+ \quad (2.100)$$

Estos vectores pueden interpretarse como el origen e_0 del sistema de coordenadas y un punto en el infinito e . Alternativamente, la base nula puede ser definida directamente en términos de las siguientes propiedades

$$e_0^2 = e^2 = 0, \quad e \cdot e_0 = -1, \quad E = e_+ e_- \quad (2.101)$$

Un pseudoescalar unitario E para $\mathbb{R}^{1,1}$ es definido por

$$E = e \wedge e_0 = e_+ \wedge e_- \quad (2.102)$$

donde se tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} E^2 = 1, \quad \tilde{E} = -E, \quad Ee = -e, \quad Ee_0 = e_0 \\ e_+ E = e_-, \quad e_- E = e_+, \quad e_+ e = 1 + E \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$e_- e = -(1 + E), \quad e \wedge e_- = E, \quad e_+ \cdot e = 1 \quad (2.104)$$

La base vectorial y líneas nulas de $\mathbb{R}^{1,1}$ son mostradas en la figura 2.8, donde el área sombreada representa el pseudoescalar unitario E .

2.5.3. Definición del álgebra geométrica conformal

El rol que juega el plano de Minkowski de generar *vectores nulos*, y expandir el espacio vectorial Euclidiano \mathbb{R}^n a $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$ resulta en la álgebra geométrica conformal

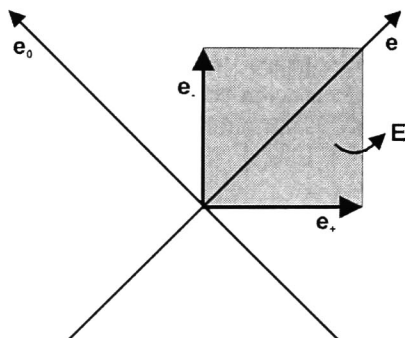


Figura 2.8: Vectores base y líneas nulas en el plano de Minkowsky E

$\mathcal{G}_{n+1,1}$. El conjunto \mathbb{N}^{n+1} de todos los vectores nulos en \mathbb{R}^n es llamado *cono nulo*, y los puntos generalizados homogéneos de grado superior es llamado *horosfera*.

Un vector en este espacio puede ser representado como una *descomposición ortogonal* como sigue:

$$\underline{\mathbf{a}} = P_E(\underline{\mathbf{a}}) + P_E^\perp(\underline{\mathbf{a}}) \quad (2.105)$$

donde los operadores de proyección P_E y reyección P_E^\perp estan dados por:

$$P_E(\underline{\mathbf{a}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} = \alpha e_0 + \beta e \in \mathbb{R}^{1,1} \quad (2.106)$$

$$P_E^\perp(\underline{\mathbf{a}}) = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{E}^*)\tilde{\mathbf{E}}^* = (\underline{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (2.107)$$

El espacio vectorial conformal derivado de \mathbb{R}^3 es denotado como $\mathbb{R}^{4,1}$. Una base esta dada por $\{e_1, e_2, e_3, e_+, e_-\}$. El álgebra correspondiente $\mathcal{G}_{4,1}$ contiene $2^5 = 32$ elementos. El pseudoescalar unitario está denotado como:

$$I_c = e_{+123} = \mathbf{E}I_E \quad (2.108)$$

2.5.4. Entidades del álgebra geométrica conformal

Puntos

En esta álgebra los *puntos* son considerados como elementos del llamado cono nulo, que obedecen las siguientes propiedades:

$$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}_{4,1} | \underline{\mathbf{x}}^2 = 0, \underline{\mathbf{x}} \cdot e = -1\} \quad (2.109)$$

Los puntos del cono nulo se relacionan con los puntos euclidianos de \mathbb{R}^3 por medio de:

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e + e_0 \quad (2.110)$$

donde $\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}_{n+1,1}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Sustituyendo los valores de la ecuación 2.100 en la ecuación 2.110 se tiene que:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e + e_0 \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2(e_+ + e_-) + \frac{1}{2}(e_- - e_+) \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2})e_+ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + \frac{1}{2})e_-\end{aligned}\quad (2.111)$$

Esta es la representación homogénea de un punto proyectado estereográficamente sobre el círculo. Un punto es más compacto si es escrito usando $\{e, e_0\}$ en vez de $\{e_+, e_-\}$.

Esferas

Las entidades básicas del espacio conformal 3D son las esferas $\underline{\mathbf{s}}$. Una esfera con centro \mathbf{p} y radio ρ se representa por:

$$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)e + e_0 \quad (2.112)$$

La ecuación para un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_3$ sobre una esfera con centro $\mathbf{p} \in \mathcal{G}_3$ y radio $\rho \in \mathbb{R}$, donde $\rho \geq 0$, se representa por:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = \rho^2 \quad (2.113)$$

En $\mathcal{G}_{4,1}$ la ecuación anterior puede ser representada más compactamente como:

$$\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}} = 0 \quad (2.114)$$

Es fácil verificar que:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}} &= (\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e + e_0) \cdot (\mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)e + e_0) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + \mathbf{p}^2 - \rho^2) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \\ &= -\frac{1}{2}((\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 - \rho^2)\end{aligned}\quad (2.115)$$

El dual de una esfera representa una ventaja, ya que se puede calcular directamente desde puntos sobre la esfera, tomando cuatro puntos sobre la esfera, se puede calcular su dual de la siguiente manera:

$$\underline{\mathbf{s}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}} \wedge \underline{\mathbf{d}} \quad (2.116)$$

y un punto \underline{x} está sobre la esfera \underline{s} si:

$$\underline{x} \wedge \underline{s} = 0 \quad (2.117)$$

La incidencia de un punto con una entidad puede ser expresada por el *producto interior del espacio nulo* o por el *producto exterior del espacio nulo*, dependiendo de la representación general o representación dual de la entidad. Esto se puede ver en las ecuaciones 2.114 y 2.117.

Plano

El dual de un plano puede ser definido por el producto exterior de tres puntos sobre el plano y el punto en el infinito, un plano es una esfera degenerada que contiene el punto en el infinito. Evaluando la forma dual de un plano, se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{P}^* &= e \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} \\ &= (e \wedge \underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} \\ &= e \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} + \mathbf{E}(\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a}) \\ &= eI_E d + \mathbf{E}\mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Geoméricamente esto se interpreta como una esfera en su forma dual, ya que es un wedge de 4 puntos, pero uno de los puntos es el infinito, por lo que se obtiene una esfera con radio infinito que equivale a un *plano*. En la ecuación 2.118, se representa la ecuación del plano pasando por los puntos \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} . Se puede reconocer a $dI_E = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}$ como el momento del plano con tangente $\mathbf{n} = (\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a})$, que es la representación de Hesse del plano con normal \mathbf{n} y distancia d .

Círculo

Geoméricamente un círculo puede ser descrito por la intersección de dos esferas como:

$$\underline{z} = \underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2 \quad (2.119)$$

lo cual, geoméricamente indica que un círculo puede ser expresado como el producto exterior de dos esferas \underline{s}_1 y \underline{s}_2 que se asume son linealmente independientes.

Un punto \underline{x} esta sobre círculo \underline{z} si se cumple que:

$$\underline{x} \in \underline{z} \iff \underline{x} \in \underline{s}_1 \quad \text{y} \quad \underline{y}\underline{x} \in \underline{s}_2 \quad (2.120)$$

Por lo cual, es posible escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{z}} \\
 \Leftrightarrow & (\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_1) \underline{\mathbf{s}}_2 - (\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_2) \underline{\mathbf{s}}_1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \underline{\mathbf{x}} (\underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{z}} = 0
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

La forma dual de un círculo se define geoméricamente por tomando tres puntos sobre el de la siguiente manera:

$$\underline{\mathbf{z}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}} \tag{2.122}$$

Un *círculo* $\underline{\mathbf{z}}$ puede ser representado como la intersección de dos esferas $\underline{\mathbf{s}}_1$ y $\underline{\mathbf{s}}_2$. Esto significa que para cada punto $\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{z}}$ se tiene

$$\underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{z}} \iff \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{s}}_1 \text{ y } \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{s}}_2 \tag{2.123}$$

Asumiendo que $\underline{\mathbf{s}}_1$ y $\underline{\mathbf{s}}_2$ son linealmente independientes, se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{x}} \in \underline{\mathbf{z}} & \iff (\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_1) \underline{\mathbf{s}}_2 - (\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{s}}_2) \underline{\mathbf{s}}_1 = 0 \\
 & \iff \underline{\mathbf{x}} \cdot (\underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2) = 0 \\
 & \iff \underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{z}} = 0
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

donde $\underline{\mathbf{z}}(\underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2)$ es la intersección de las esferas. La intersección con una tercera esfera regresa la entidad par de puntos.

La forma dual del círculo (en 3D) puede ser expresado por tres puntos viviendo sobre el, como

$$\underline{\mathbf{z}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}} \in \underline{\mathbf{s}}_2 \tag{2.125}$$

Par de puntos

La intersección de dos esferas (círculo) con una tercera esfera da como resultado a la entidad llamada par de puntos. Por lo tanto, el par de puntos puede ser expresado como el producto exterior de tres esferas, lo cual da un 3-blade expresado por:

$$\underline{\mathbf{PP}}^* = \underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2 \wedge \underline{\mathbf{s}}_3 \tag{2.126}$$

La forma dual el par de puntos guarda la localización de 2 puntos pertenecientes al álgebra y esta definida como:

$$\underline{\mathbf{PP}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \tag{2.127}$$

Entidad	Representación	Grado	Representación Dual	Grado
Esfera	$\underline{\mathbf{s}} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)e + e_0$	1	$\underline{\mathbf{s}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}} \wedge \underline{\mathbf{d}}$	4
Punto	$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2e + e_0$	1	$\underline{\mathbf{x}}^* = (-E\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2e + e_0)I_E$	4
Plano	$\underline{\mathbf{P}} = \mathbf{n}I_E - de$	1	$\underline{\mathbf{P}}^* = e \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}}$	4
Línea	$\mathbf{n} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ $d = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})I_E$ $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{P}}_1 \wedge \underline{\mathbf{P}}_2$ $= \mathbf{r}I_E + e\mathbf{M}I_E$ $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	2	$\underline{\mathbf{L}}^* = e \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}}$	3
Círculo	$\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_1$ $\underline{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{z}} \cdot e, \underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{z}} \wedge e$ $\underline{\mathbf{p}}_{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{P}}_{\mathbf{z}} \vee \underline{\mathbf{L}}_{\mathbf{z}}, \rho = \frac{\mathbf{z}^2}{(e \wedge \underline{\mathbf{z}})^2}$	2	$\underline{\mathbf{z}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{c}}$	3
Par de Puntos	$\underline{\mathbf{PP}} = \underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2 \wedge \underline{\mathbf{s}}_3$	3	$\underline{\mathbf{PP}}^* = \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{X}}^* = e \wedge \underline{\mathbf{x}}$	2

Tabla 2.1: Entidades del álgebra geométrica conformal y su representación dual

Línea

Las *líneas*, así como el caso de los planos, se pueden definir como un círculo que pasa por el punto en el infinito haciendo un círculo de radio infinito y su forma dual se define como

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{L}}^* &= e \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}} \\
&= (e \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{E}) \wedge \underline{\mathbf{b}} \\
&= e \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{E} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{E} \\
&= e \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{E} \\
&= e\mathbf{M} + \mathbf{r}\mathbf{E}
\end{aligned} \tag{2.128}$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es un bivector representando el momento y $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ representa la dirección de la línea en coordenadas de Plücker. Por lo tanto, la línea pasa por los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Usando el punto en el infinito se puede obtener la representación de un punto puro $\underline{\mathbf{X}}^* = e \wedge \underline{\mathbf{x}}$ en el espacio dual y es conocido como la representación afina de un punto.

Las entidades mostradas en la tabla 2.1 tienen los siguientes grados: puntos esferas y planos son 1-blades, líneas y círculos son 2-blades y el par de puntos es un 3-blade.

2.5.5. Transformaciones conformales

Una transformación se dice que es *conformal* si preserva su *forma*. Cualquier transformación conformal en \mathbb{R}^n puede ser expresada como una composición de *inversiones* en esferas

y reflexiones en hiperplanos. En general, una transformación conformal tiene la forma:

$$G(\underline{x}) = G\underline{x}G^{-1} = \sigma\underline{x}' \tag{2.129}$$

donde $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1}$, G es un versor y σ es un escalar. Como el cono nulo es invariante bajo G , (i.e. $(\underline{x}')^2 = \underline{x}^2 = 0$), es conveniente aplicar un factor escalar σ para asegurar que $\underline{x}' \cdot e = \underline{x} \cdot e = -1$.

Un *versor* es cualquier multivector que puede expresarse como el producto geométrico de vectores invertibles. Los versores en \mathcal{G}_n forman un grupo bajo el producto geométrico, llamado *grupo de versores*. Los versores de magnitud unitaria forman un subgrupo, llamado *grupo afiler o perno* (pin group).

Un *versor par* es aquel que $\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{V}}$ y es llamado de giro *spinor* o *rotor* si

$$\mathbf{V}\widetilde{\mathbf{V}} = |\mathbf{V}|^2 \tag{2.130}$$

y un *versor impar* es aquel que $\mathbf{V} = -\widehat{\mathbf{V}}$

Tipo	$G(x)$ en \mathbb{R}^n	Versor en $\mathcal{G}_{n+1,1}$	σ
Reflexión	$-\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n} + 2\mathbf{x}\delta$	$\mathbf{V} = \mathbf{n} + e\delta$	1
Traslación	$\mathbf{x} - \mathbf{t}$	$\mathbf{T}_t = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}e$	1
Rotación	$\mathbf{R}\mathbf{x}\mathbf{R}^{-1}$	$\mathbf{R} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\right)$	1
Involución	$\mathbf{x}^* = -\mathbf{x}$	\mathbf{E}	1
Dilatación	$\lambda\mathbf{x}$	$\mathbf{D}_\lambda = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{E}(\ln \lambda)\right)$	λ^{-1}
Inversión	$\frac{\rho^2}{\mathbf{x}-\mathbf{c}} + \mathbf{c}$	$\mathbf{V} = \mathbf{c} - \frac{1}{2}\rho^2e$	$\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{c}}{\rho}\right)^2$
Transversión	$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^2\mathbf{t}}{\sigma(\mathbf{x})}$	$\mathbf{K}_t = 1 + \mathbf{t}e_0$	$1 - 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^2\mathbf{t}^2$

Tabla 2.2: Transformaciones conformales y sus versores

2.5.6. Movimiento rígido en el álgebra geométrica conformal

Se menciono anteriormente sobre las transformaciones conformales y su representación. Ahora se muestra otra forma de representar algunos de esos versores. Como las transformaciones conformales contienen las transformaciones euclidianas, es posible expresar el movimiento rígido de cuerpos.

Los bivectores del algebra geométrica pueden ser usados para representar rotaciones de entidades en el espacio 3D. Un *rotor* \mathbf{R} es un elemento par del álgebra \mathcal{G}_3 que satisface $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$. En $\mathcal{G}_{4,1}$ una rotación puede ser expresada por un rotor de la forma:

$$\mathbf{R} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{l}\right) \quad (2.131)$$

donde los componentes de este rotor $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ son similares al rotor de \mathcal{G}_3 , el bivector unitario $\mathbf{l} \in \langle \mathcal{G}_3 \rangle_2 \subseteq \mathcal{G}_{4,1}$ representa un plano de rotación y el ángulo θ representa el ángulo de rotación. La rotación de una entidad en $\mathcal{G}_{4,1}$ se expresa de la misma manera que en \mathcal{G}_3 , por ejemplo, la rotación de un punto es escrita como:

$$\underline{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}\underline{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{R}} \quad (2.132)$$

Para trasladar una entidad con respecto a un vector de translación \mathbf{t} , se usa el traductor $\mathbf{T} \in \mathcal{G}_{4,1}$, expresado por:

$$\mathbf{T} = \left(1 + \frac{e\mathbf{t}}{2}\right) = \exp\left(\frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \quad (2.133)$$

Un traductor es un rotor especial actuando en el infinito usando el vector nulo e . Similarmemente a una rotación, una entidad puede ser trasladada multiplicandola por la izquierda con un traductor y su reverso por la derecha, por ejemplo, la translación de un punto se expresa por:

$$\underline{\mathbf{x}}' = \mathbf{T}\underline{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{T}} \quad (2.134)$$

Para expresar un movimiento rígido, la aplicación consecutiva de un rotor y un traductor puede ser escrita como el producto de ellos. Tal operador es expresado como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\mathbf{R} \quad (2.135)$$

este es un multivector de grado par llamado *motor*. El movimiento rígido de un punto $\underline{\mathbf{x}}$ puede ser escrito como:

$$\underline{\mathbf{x}}' = \mathbf{M}\underline{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}\mathbf{R}\underline{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}} \quad (2.136)$$

Esta formalización del desplazamiento rígido puede ser utilizada para cualquier entidad en el álgebra geométrica conformal (mostradas en la tabla 2.1).

Transformaciones de giro y de tornillo

Siguiendo con la definición del motor en el álgebra conformal, todo movimiento rígido puede ser expresado como un giro o movimiento de tornillo, el cual es una rotación sobre una

línea en el espacio (en general, que no pase por el origen)⁸ combinada con una translación a lo largo de esta línea. En el álgebra geométrica conformal es posible usar los rotores y transladores para expresar movimientos de tornillo en el espacio.

Para modelar la rotación de un punto \underline{x} alrededor de una línea \underline{L} arbitraria en el espacio, la idea general es trasladar el punto \underline{x} con el vector de distancia entre la línea \underline{L} y el origen, para realizar la rotación en el origen y trasladar de regreso el punto transformado. Entonces el motor $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ describe una rotación general que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}} \quad (2.137)$$

donde se puede ver la translación inversa, la rotación y la translación de regreso. Usando la forma exponencial del translador y el rotor se obtiene⁹:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}} \\ &= \exp\left(\frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{1}\right) \exp\left(-\frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{1}\right) \left(1 - \frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \\ &= \exp\left(\left(1 + \frac{e\mathbf{t}}{2}\right) \left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{1}\right) \left(1 - \frac{e\mathbf{t}}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\mathbf{1} + e(\mathbf{1} \cdot \mathbf{t}))\right) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Esta es la fórmula correspondiente a la rotación general. La representación exponencial de los motores, rotores y transladores es usada para un manejo sencillo de ellos y sus derivaciones.

Dado el dual de una línea \underline{L}^* (con dirección unitaria) en el espacio, el motor correspondiente que describe una rotación general a través de esta línea está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{L}^* \mathbf{I}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{L}\right) \end{aligned} \quad (2.139)$$

Esto muestra que una línea es un generador de una rotación general. Para modelar un movimiento de tornillo, la entidad tiene que ser trasladada durante una rotación general con

⁸ Tal operación también es llamada *rotación general*

⁹ Se hace uso de la propiedad $g \exp(\xi) \tilde{g} = \exp(g\xi\tilde{g})$ para $g\tilde{g} = 1$

respecto a el eje de rotación. El motor resultante puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{T}_{dn} \mathbf{TR} \tilde{\mathbf{T}} \\
 &= \exp\left(\frac{ed\mathbf{n}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\mathbf{l} + e(\mathbf{t} \cdot \mathbf{l}))\right) \\
 &= \exp\left(\frac{ed\mathbf{n}}{2} - \frac{\theta}{2}(\mathbf{l} + e(\mathbf{t} \cdot \mathbf{l}))\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\theta}{2} \left(\mathbf{l} + \underbrace{e(\mathbf{t} \cdot \mathbf{l} - \frac{d}{\theta}\mathbf{n})}_{\mathbf{m}}\right)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\mathbf{l} + e\mathbf{m})\right)
 \end{aligned} \tag{2.140}$$

El bivector en la parte exponencial es un girador. El vector $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ puede ser descompuesto en sus partes ortogonal y paralela con respecto a $\mathbf{n} = \mathbf{l}^*$. Si $\mathbf{m} = 0$, el motor \mathbf{M} da una rotación pura y si $\mathbf{l} = 0$, el motor da una translación pura. Para $\mathbf{m} \perp \mathbf{l}^*$, el motor da una rotación general y para $\mathbf{m} \not\perp \mathbf{l}^*$, el motor da un movimiento de tornillo.

Capítulo 3

Neurocirugía asistida por computadora

En los países en desarrollo como México, existe desde hace años un gran rezago tecnológico que afecta a varias áreas, particularmente a la tecnología médica. Es de suma importancia comenzar a desarrollar tecnología médica de apoyo a la cirugía especialmente sistemas de neurocirugía asistida por computadora. Los sistemas actuales de neuronavegación se favorecen por la velocidad y bajo costo de los equipos de computo más los avances dados principalmente en modelado 3D, seguimiento estereoscópico, ecografía (sonografía o ultrasonido) y neuroendoscopia.

Los países industrializados desde hace poco más de veinte años tomaron la iniciativa de desarrollar sistemas de apoyo a la neurocirugía. Por fortuna se ha acumulado experiencia y los resultados obtenidos se han publicado en internet, en libros y en revistas.

Es necesario para los países en desarrollo como el nuestro involucrarse en el desarrollo de la tecnología médica haciendo que los hospitales de pocos recursos económicos puedan acceder al uso y beneficio directo de dicha tecnología ya que los costos actuales en el mercado son elevados. En este capítulo se propone el desarrollo de un neuronavegador económico de uso múltiple para atender aquellas enfermedades que afectan el cerebro. Cabe mencionar que el neuronavegador propuesto es sin necesidad de usar un marco estereotáctico.

3.1. Escenario

Para desarrollar un sistema de neurocirugía asistida por computadora¹ deben considerarse los siguientes aspectos:

¹ Neuronavegador económico de uso múltiple

1. Adquisición de imágenes de la anatomía craneal del paciente, ya sea mediante TAC (tomografía axial computarizada) o IRM (imágenes de resonancia magnética), por citar algunas.
2. Procesamiento de las imágenes adquiridas y reconstrucción del modelo 3D del paciente.
3. Segmentación 2D y 3D de estructuras anatómicas.
4. Clasificación estadística y registro no lineal o alineamiento de estructuras cerebrales con un atlas anatómico cerebral.
5. Análisis funcional del paciente.
6. Registro de datos quirúrgicos del modelo 3D del paciente con datos actuales del mismo al momento de la operación quirúrgica haciendo uso de un sistema estereoscópico híbrido de seguimiento visual.
7. Monitoreo y seguimiento de instrumentos quirúrgicos en tiempo real.
8. Seguimiento ecográfico 3D de corrimientos del tumor y uso de la neuroendoscopia real y virtual para la orientación y planeación inteligente en tiempo real.

En la figura 3.1 se muestra un esquema general del neuronavegador a desarrollar. La idea subyacente en la neurocirugía asistida por computadora no es la sustitución del cirujano en tareas quirúrgicas, sino el desarrollar técnicas y sistemas que sirvan de ayuda al neurocirujano en los procedimientos quirúrgicos, esto es, diagnóstico, planificación y ejecución.

3.2. Objetivos

Con el desarrollo del neuronavegador económico y de uso múltiple se busca obtener los siguientes objetivos:

1. Crear una comunidad interdisciplinaria de médicos, científicos e ingenieros interesados en CAC (*cirugía asistida por computadora*) para la difusión, enseñanza e investigación.
2. Aprovechar nuestros centros de investigación para desarrollar tecnología útil al país, particularmente al desarrollar tecnología médica.
3. Desarrollar y poner en marcha el primer proyecto serio en México de apoyo a la neurocirugía.
4. Brindar equipo a bajo costo a los hospitales públicos, a fin de que lo puedan adquirir y mejoren su nivel de atención.

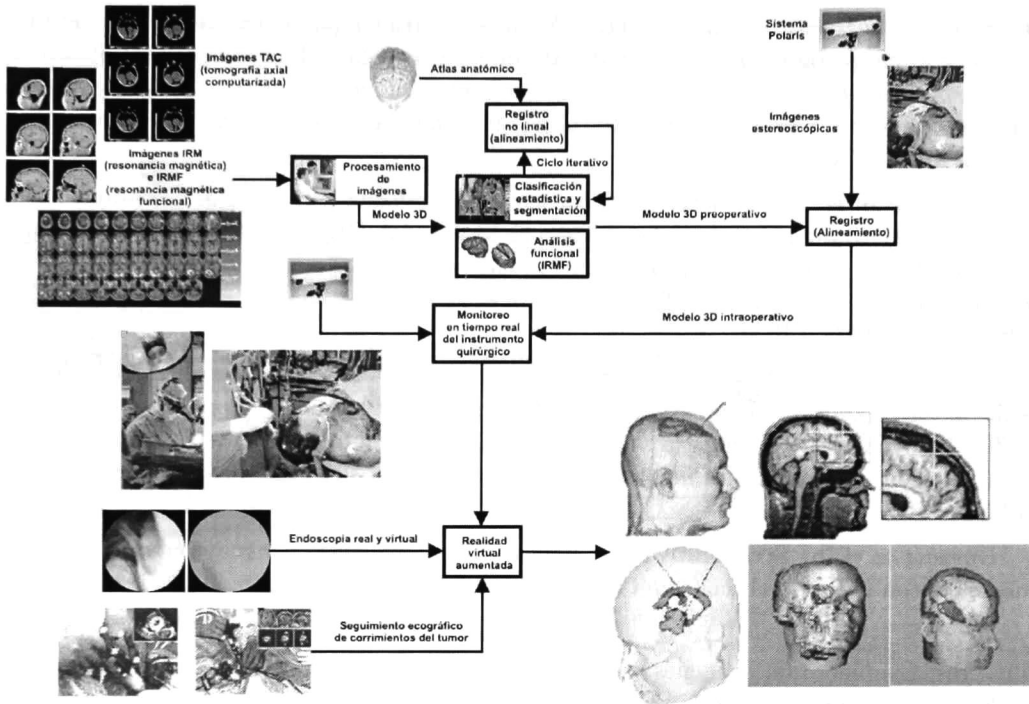


Figura 3.1: Esquema general del neuronavegador económico de uso múltiple apoyado por visión computacional y/o robótica

5. Proporcionar a los neurocirujanos sistemas para procedimientos quirúrgicos.
6. Entrenamiento de neurocirujanos (quirófano virtual).
7. Disminuir la estancia postoperatoria del paciente y los costos de hospitalización.

3.3. Etapa preoperativa

La neurocirugía es una de las especialidades quirúrgicas más exigentes en cuanto a precisión en un procedimiento quirúrgico. A la hora de intervenir el cerebro del paciente, si una estructura anatómica cerebral es dañada por equivocación debido a un mínimo error de posicionamiento, las consecuencias para el paciente pueden suponer graves daños funcionales irreparables y en algunos casos la muerte. Sin embargo; por una parte, el cerebro presenta una

posición relativamente estable respecto al cráneo, y por otra parte, en las últimas décadas se han desarrollado complejas modalidades de imagen médica bidimensional y tridimensional muy avanzadas. Estos dos hechos, han originado que la neurocirugía sea una firme candidata a la hora de mejorar los procedimientos quirúrgicos mediante técnicas de cirugía asistida por computadora (CAC).

Cualquier intervención actual de neurocirugía comienza con una fase de adquisición de datos con objeto de definir las lesiones patológicas a tratar (las cuales deben ser eliminadas y/o tratadas) y su relación espacial con la anatomía normal del paciente (la cual debe ser preservada). Dicha fase de adquisición incluye estudios de la anatomía craneal del paciente, tales como la TAC o IRM.

Basandose en dichos estudios, técnicas exploratorias y otras pruebas clínicas, los médicos realizan un diagnóstico de la lesión a tratar, para pasar a la fase de planificación quirúrgica. El fin de dicha fase es definir la vía de abordaje más segura de una lesión intracraneal, es decir, aquella que inflija el mínimo daño posible a las estructuras anatómicas adyacentes a la lesión.

Durante la etapa preoperativa (ver figura 3.2) se encuentran involucradas las siguientes funciones con el fin de obtener una buena planificación de la cirugía:

1. Procesamiento de imágenes médicas: se debe contar con la posibilidad de visualización de varias modalidades a la vez, visión de planos de corte en el espacio en cualquier orientación, es decir, vista axial, vista sagital y vista coronal (ver figura 3.3), filtros de mejora de imagen, etc. Por lo que a partir de las imágenes se debe obtener el modelo 3D del paciente.
2. Segmentación de imágenes médicas: es necesario poder reconocer y marcar en cada imagen los distintos tejidos y estructuras anatómicas relevantes, como lo son, piel, hueso, tumor, vasos sanguíneos, etc. Resulta imprescindible el desarrollo de técnicas de segmentación automática y/o semiautomática.
3. Alineamiento de estructuras cerebrales con un atlas anatómico cerebral: además del fusionamiento de la información proporcionada por las distintas modalidades de imagen médica utilizadas. Resulta útil poder contar con la posibilidad de llevar a cabo el alineamiento de estructuras anatómicas del paciente con información proveniente de un atlas anatómico digital para poder obtener una clasificación estadística.
4. Análisis funcional del paciente: Opcionalmente se puede llevar a cabo un exhaustivo análisis funcional del paciente, lo cual resulta útil aplicarlo en pacientes que presenten trastornos de la función motora de su cerebro como lo pueden ser el mal de Parkinson y el Alzheimer.

5. Uso de la neuroendoscopia virtual: Se puede simular una intervención quirúrgica por medio de neuroendoscopia intraventricular usando una cámara virtual para navegar en el modelo 3D del paciente.

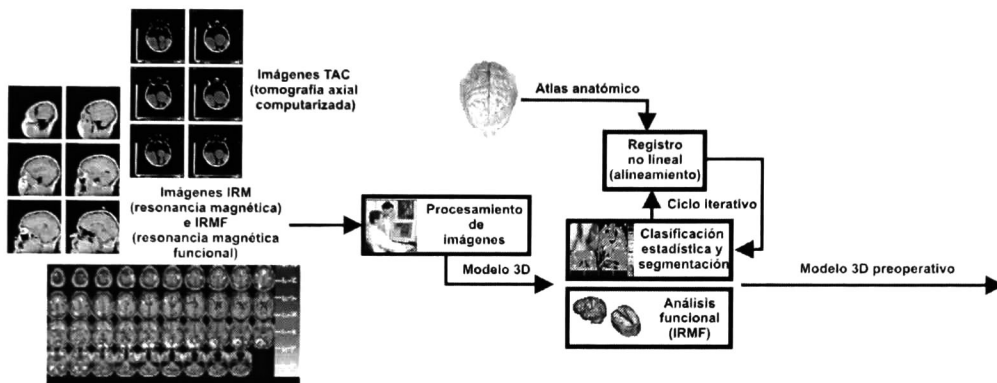


Figura 3.2: Actividades involucradas en la etapa preoperatoria

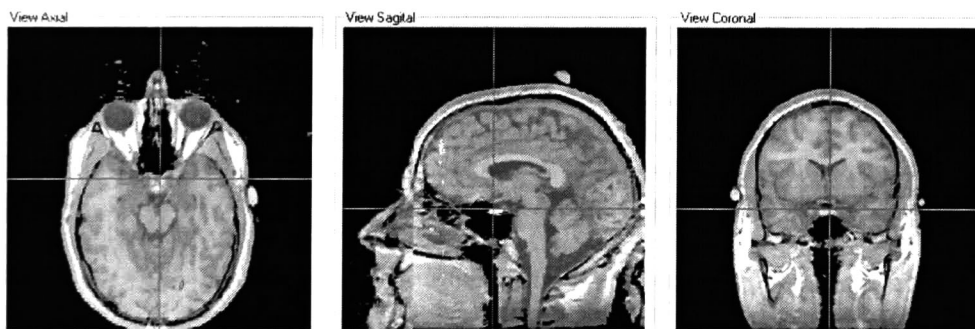


Figura 3.3: Planos de corte usados en imágenes médicas. Izquierda) vista axial, centro) vista sagital, derecha) vista coronal

Una vez segmentadas las distintas estructuras resulta conveniente el poder visualizar de forma tridimensional toda la anatomía del paciente para de esta forma poder definir las mejores vías de abordaje a la hora de realizar la intervención quirúrgica. Conviene disponer de herramientas de visualización 3D mediante reconstrucción de superficies y representación volumétrica (ver figuras 3.4 y 3.5).

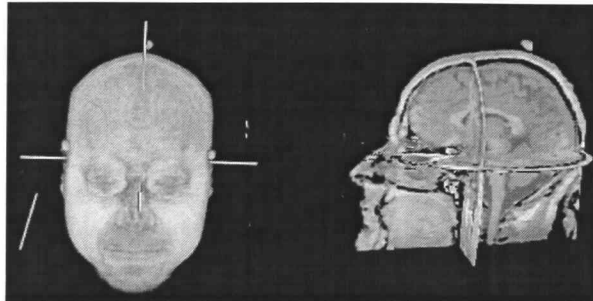


Figura 3.4: Modelo 3D de un paciente e intersección en 3D de los distintos planos de corte

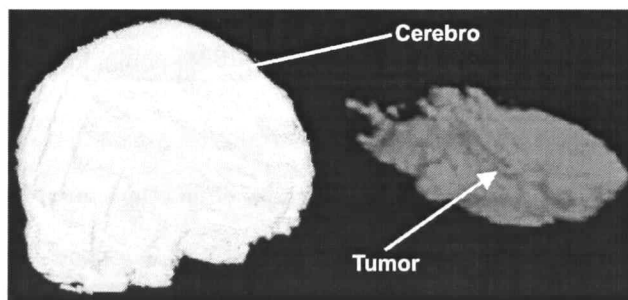


Figura 3.5: Reconstrucción 3D del cerebro y tumor de un paciente

3.4. Etapa intraoperativa

Una vez concluida la fase de planificación quirúrgica, se pasa a la fase de cirugía propiamente dicha, la cual se lleva a cabo en el quirófano. Durante la cirugía el neurocirujano debe de reproducir y llevar a cabo todas las intervenciones y vías de abordaje previamente planificadas. La etapa intraoperativa es la más crítica, ya que si el médico no dispone de un sistema que permita trasladar las coordenadas físicas reales del paciente al sistema de coordenadas del modelo 3D del paciente, el acto quirúrgico se vuelve un ejercicio de intervención manual cuya precisión puede ser en todo momento validada de forma solamente cualitativa, lo cual representa una importante pérdida de la información cuantitativa que las modalidades de imagen han suministrado previamente.

Con el fin de minimizar dicha pérdida, muchos sistemas actuales de neurocirugía utilizan cirugía estereotáxica. Dicha técnica permite trasladar las coordenadas físicas del paciente en el quirófano a las coordenadas del modelo 3D del mismo. Para ello se fija al cráneo del

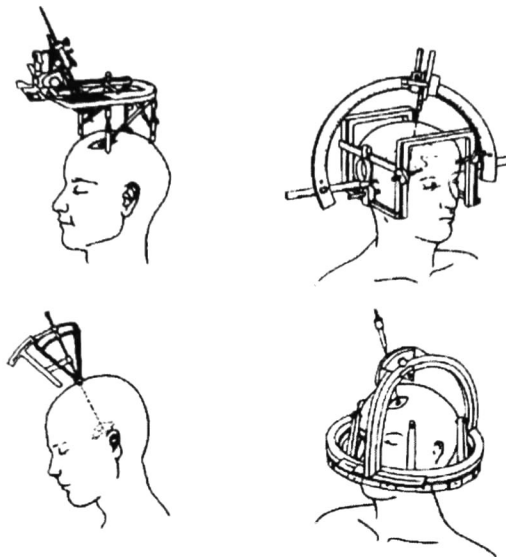


Figura 3.6: Algunos marcos estereotácticos utilizados en neurocirugía

paciente un marco o casco estereotáctico tal y como se muestra en la figura 3.6. Dicho casco permite llevar a cabo la planificación de la intervención, además de servir de guía en el quirófano para llevar a cabo la cirugía previamente planificada. Todo ello se lleva a cabo a través de un pequeño orificio o *trepano*, permitiendo llegar a estructuras cerebrales profundas lesionando al mínimo estructuras adyacentes.

Sin embargo, la utilización de guías estereotácticas plantea varios problemas. Los marcos estereotácticos limitan notablemente la libertad de acción al neurocirujano, necesidad por otra parte crucial en múltiples intervenciones quirúrgicas. Muchos cirujanos se intimidan ante la mecánica y los cálculos matemáticos que conllevan las guías, lo cual explica que muchos neurocirujanos no utilicen dicha modalidad quirúrgica.

La utilización de guías resulta incómoda y los cálculos de coordenadas del marco es un procedimiento que consume bastante tiempo. Además la utilización de marcos estereotácticos obliga a repetir los estudios radiológicos con el paciente llevando el casco puesto, lo que implica un alto costo de los servicios clínicos. Cabe mencionar que dicho marco resulta sumamente incómodo para el paciente, el cual mediante anestesia local debe llevarlo fijado a su cabeza por medio de tornillos, en ocasiones por varios días, hecho que eleva notablemente los costos de hospitalización del paciente.

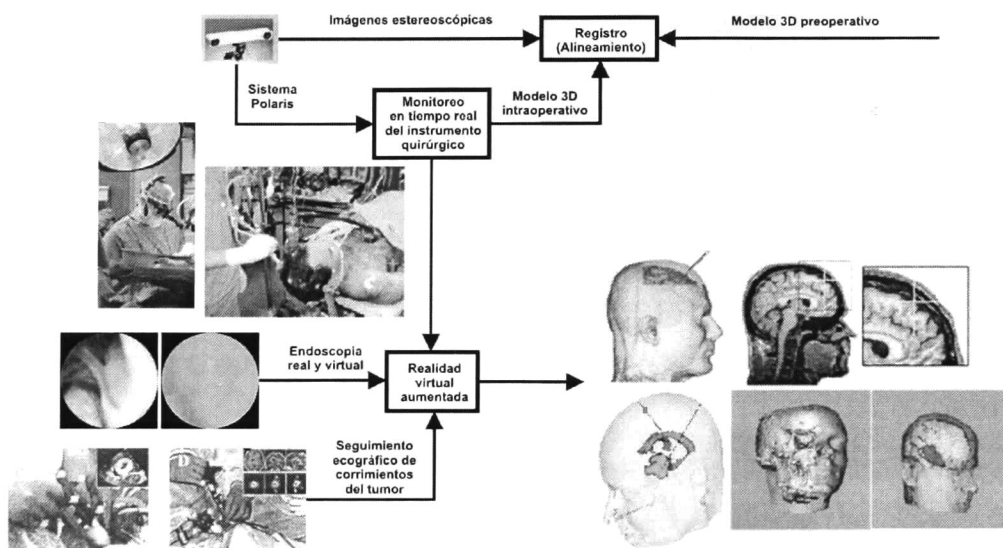


Figura 3.7: Actividades involucradas en la etapa intraoperatoria

Por lo tanto, se propone el uso de un neuronavegador cuyas principales ventajas son ofrecer la posibilidad de planear la intervención quirúrgica y dar una gran libertad de acción al neurocirujano al momento de la cirugía. Para el neurocirujano es de vital importancia el poder determinar por dónde es más fácil llegar a una lesión, sin provocar daño a las estructuras funcionalmente importantes. La capacidad de poder obtener información en tiempo real y contar con una visualización tridimensional es una gran ayuda, la morbilidad se puede reducir, y a la vez se pueden realizar intervenciones que prácticamente son imposibles de otra manera.

La parte más importante de un sistema de neurocirugía asistida por computadora es el navegador quirúrgico también llamado neuronavegador (ver figura 3.7). Uno de los objetivos del neuronavegador es permitir al cirujano llevar a cabo las intervenciones que han sido previamente planificadas conociendo en todo momento (en tiempo real) y de forma precisa la posición del instrumental quirúrgico con respecto a la anatomía cerebral del paciente.

El neuronavegador debe proporcionar en tiempo real las coordenadas tridimensionales del instrumental quirúrgico utilizado. Dichas coordenadas deben ser visualizadas (en una pantalla o monitor de una computadora) en el modelo 3D del paciente. De esta manera el cirujano ve en todo momento la posición espacial del instrumental quirúrgico utilizado, disponiendo de esta forma de un sistema de navegación anatómica que le va guiando durante la intervención quirúrgica, de ahí el nombre de neuronavegador quirúrgico.

Para poder obtener la posición del instrumental quirúrgico en tiempo real se hace uso del sistema estereoscópico híbrido de seguimiento visual (Sistema Polaris) que consiste en una fuente emisora de luz infrarroja y de pequeñas esferas reflejantes que son adheridas a los instrumentos quirúrgicos, así la luz que reflejan las esferas es captada por la cámara y se puede estimar la posición del instrumental quirúrgico. En el capítulo siguiente se detalla el proceso de calibración que permite pasar del sistema de coordenadas obtenidas del instrumental quirúrgico y de la posición del paciente al sistema de coordenadas del modelo 3D, así se puede visualizar en tiempo real la posición exacta del instrumental quirúrgico.

Un problema serio que surge durante la operación es que una vez abierto el cráneo cambia la conformación de la masa cerebral ya que se drena el líquido cefalo-raquídeo. Así, la representación tridimensional del cerebro cambia y solo permanece invariante la posición y las dimensiones del cráneo. Al cambiar el volumen de la masa cerebral cambian en algo sus coordenadas y forma, por lo que es necesario hacer una corrección en tiempo real de estos cambios geométricos, particularmente de la posición y forma del tumor. Una de las técnicas usadas para atacar este problema y darle solución es el uso de la ecografía tridimensional (*ultrasonografía 3D*), en la cual con ayuda de un sensor ecográfico se puede corregir en tiempo real la representación del modelo 3D del paciente (ver figura 3.7).

Por último la neuroendoscopia juega un papel muy importante, ya que mediante el uso de una cámara microscópica colocada a un endoscopio rígido, se puede obtener información en tiempo real de la trayectoria que va siguiendo el mismo dentro de la cabeza del paciente para llegar a la lesión, además esta técnica es mínimamente invasiva. En el capítulo 5 se da una explicación del uso de técnicas de realidad virtual aumentada aplicadas a la neuroendoscopia virtual, la cual es muy útil para poder definir las mejores vías de acceso durante la intervención quirúrgica del paciente.

3.5. Etapa postoperatoria

Después de que fue realizada la intervención quirúrgica, el paciente inicia su recuperación. En ocasiones es necesario aplicar de nuevo estudios radiológicos al paciente para confirmar que la operación quirúrgica se realizó satisfactoriamente.

Para los cuidados del paciente después de la cirugía, un especialista debe darle seguimiento al paciente de tal manera que tenga los cuidados propios de la herida y el apoyo de una rehabilitación adecuada, ya que los pacientes tienen un déficit motor en alguna parte de su cuerpo y necesitan de terapia física complementaria, dando un seguimiento periódico del grado de recesión tumoral para evitar recidivas (recrecimiento). En relación al tiempo de recuperación del paciente, en ocasiones al día posterior de la cirugía el paciente sale despierto y platicando así que puede darse de alta del hospital en un plazo de seis a siete días después de su intervención.

En pacientes que requieren de una cirugía mayor y necesitan ser ingresados a terapia intensiva para prolongar su estancia y continuar con su recuperación, es necesario suministrarles medicamentos que prevengan la inflamación cerebral y brindarles más cuidados para prevenir posibles complicaciones que sean consideradas de gravedad, por lo que es necesario que permanezcan de dos a tres semanas en promedio en hospitalización. La localización del tumor va a condicionar en muchos casos el pronóstico funcional y de supervivencia del paciente, por la posibilidad o no de resección tumoral completa y por el territorio cerebral funcional resecado. Debido al importante número de complicaciones postoperatorias que se pueden presentar, existe una necesidad evidente de un manejo postoperatorio en una unidad de cuidados intensivos, donde se disponga de los recursos materiales y humanos que conozcan este riesgo potencial, y tengan experiencia en la detección precoz de las posibles complicaciones y en el tratamiento indicado de cada caso. Se destaca la necesidad de una estrecha vigilancia respiratoria y del nivel de conciencia en las primeras horas del postoperatorio.

El diagnóstico debe realizarse tempranamente para evitar secuelas importantes. La piedra angular de este diagnóstico es el estrecho control neurológico postoperatorio inmediato en terapia intensiva, agregando a ello el neuromonitoreo en los casos que tiene indicación, sobre todo el monitoreo de la presión intracraneal. Si aparece un deterioro progresivo del nivel de conciencia y/o focalidad neurológica (pupilas, motora, convulsiones, etc), o un aumento súbito de la presión intracraneal evidenciado en el monitor, debe de realizarse un estudio radiológico cerebral, seguido de una actitud terapéutica inmediata.

Con las ventajas del uso de un neuronavegador, para planear una buena intervención quirúrgica, se disminuirán notablemente los riesgos de que la cirugía fracase y se obtengan complicaciones durante la misma y/o durante la recuperación del paciente y se elevan notablemente las posibilidades de obtener una cirugía exitosa disminuyendo considerablemente la morbilidad del paciente. En realidad bajo procedimientos de mínima invasión como el propuesto, las ventajas son aún mayores: El paciente despierta inmediatamente después de la cirugía, incluso puede realizarse la cirugía en algunos casos con el paciente despierto y solo con anestesia local. Esto conlleva a la corta estancia hospitalaria en promedio entre 3 días y 1 semana. Excepcionalmente se requieren ya de estancias prolongadas, considerando desde luego la patología primaria y no solo la morbilidad por el procedimiento quirúrgico.

El modelo 3D final obtenido durante la etapa intraoperatoria puede ser usado, ya que se pueden aplicar nuevos estudios de TAC o IRM y usarlos para actualizar el modelo 3D y así realizar un mejor monitoreo postoperatorio del paciente. Por lo tanto, el paciente disminuirá su estancia postoperatoria en el hospital y su recuperación será más rápida, lo cual representa un notable ahorro económico para el paciente y/o la institución de salud, ya que se disminuyen los costos de hospitalización. Una aportación relevante es la mejora en la calidad de la estrategia y planeación operatoria, con lo cual se obtienen mejores resultados sobre el paciente y se tienen variables adicionales de beneficio en la economía y la infraestructura sanitaria.

Capítulo 4

Seguimiento intraoperativo

El sistema estereoscópico híbrido de seguimiento visual (*Sistema Polaris*) mostrado en la figura 1.5, es usado para poder estimar la posición espacial del instrumental quirúrgico, mediante el uso de un algoritmo matemático llamado *algoritmo de cuerpo rígido*.

Para determinar la ubicación de un instrumento quirúrgico es necesario colocar tres o más marcas esféricas sobre el mismo. El número de marcas usadas y su ubicación sobre el instrumento afecta el poder estimar con exactitud la ubicación del instrumento.

La cámara reporta como resultado del uso del algoritmo de cuerpo rígido la posición espacial de la marca que se toma como origen del instrumento quirúrgico por medio de un vector de translación y la rotación (orientación) del mismo como un cuaternión unitario con respecto al origen del sistema de coordenadas que maneja la cámara.

Cabe mencionar que el grado de error con el que la cámara reporta la posición en 3D del instrumento quirúrgico es de ± 0.2 mm, lo que significa que el grado de exactitud es aceptable y el error es mínimo y puede ser despreciado ya que en la etapa intraoperativa los errores serán corregidos empleando ecografía y endoscopia.

4.1. Modelo cinemático

A partir de las coordenadas que reporta la cámara para la esfera que se toma como origen del instrumento quirúrgico, es posible calcular la posición de la punta del instrumento quirúrgico mediante el uso de los siguientes tres métodos:

4.1.1. Método matricial

Dada una matriz de rotación $\mathbf{R} = \exp^{\widehat{\mathbf{W}}\alpha}$ con $\|\mathbf{W}\| = 1$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, esta se puede asociar con su cuaternión unitario como sigue:

$$\mathbf{q}(\mathbf{R}) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\mathbf{W}_1i + \mathbf{W}_2j + \mathbf{W}_3ij) \in \mathbb{S}^3 \quad (4.1)$$

donde:

$$\widehat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una *matriz antisimétrica*.

Esta asociación preserva la estructura de grupo entre $\mathbf{SO}(3)$ and \mathbb{S}^3 , mediante:

$$\mathbf{q}(\mathbf{R}^{-1}) = \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{q}^{-1}(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \mathbf{q}(\mathbf{R}_1)\mathbf{q}(\mathbf{R}_2), \quad \forall \mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in \mathbf{SO}^3 \quad (4.2)$$

En dirección opuesta, dado un cuaternión unitario $\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3ij \in \mathbf{SO}(3)$, se puede usar la siguiente fórmula para encontrar la matriz de rotación correspondiente $\mathbf{R} = \exp^{\widehat{\mathbf{W}}\alpha}$:

$$\alpha = 2 \arccos(q_0), \quad w_i = \begin{cases} \frac{q_i}{\sin(\frac{\alpha}{2})} & \alpha \neq 0 \\ 0 & \alpha = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Sin embargo; acorde a la fórmula anterior hay dos cuaterniones unitarios que corresponden a la misma matriz de rotación: $\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(-\mathbf{q})$.

Definiendo el vector de translación del instrumento quirúrgico a partir de las coordenadas t_x , t_y y t_z dadas por la cámara:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El vector de desplazamiento \mathbf{d} se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $l \in \mathbb{R}$, es la distancia desde el punto tomado como origen del instrumento quirúrgico hasta la punta del mismo instrumento.

Una vez obtenida la matriz de rotación \mathbf{R} , se obtiene la posición en 3D de la punta del instrumento quirúrgico de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{d} + \mathbf{t} \quad (4.6)$$

4.1.2. Usando un rotor

Dado un cuaternión unitario $\mathbf{q} \in \mathcal{G}_{3,0,0}$, definido como:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 = q_0 + \mathbf{v} \quad (4.7)$$

entonces el rotor \mathbf{R} que representa la misma rotación es obtenido por:

$$\mathbf{R} = r_0 + r_1(Ie_1) + r_2(Ie_2) + r_3(Ie_3) = r_0 + r_1 e_{23} + r_2 e_{31} + r_3 e_{12} \quad (4.8)$$

donde:

$$r_0 = \cos(\theta), \quad r_1 = \sin(\theta) \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \quad r_2 = \sin(\theta) \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad r_3 = \sin(\theta) \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

y

$$\theta = -\arccos(q_0), \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Por lo tanto \mathbf{R} puede ser reescrita como sigue:

$$\mathbf{R} = \cos(\theta) + \sin(\theta) \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} e_{23} + \sin(\theta) \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} e_{31} + \sin(\theta) \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} e_{12} \quad (4.9)$$

Se define el vector de translación a partir de las coordenadas t_x , t_y y t_z del instrumento quirúrgico dadas por la cámara:

$$\mathbf{t} = t_x e_1 + t_y e_2 + t_z e_3 \quad (4.10)$$

El vector de desplazamiento $\mathbf{d} \in \mathcal{G}_{3,0,0}$ está definido por:

$$\mathbf{d} = 0e_1 + 0e_2 - l e_3 \quad (4.11)$$

donde $l \in \mathbb{R}$, es la distancia desde el punto tomado como origen del instrumento quirúrgico hasta la punta del mismo instrumento.

Debido a que se usa el álgebra geométrica funcional, es necesario mapear el vector de desplazamiento \mathbf{d} al espacio conformal usando la ecuación 2.110 para obtener el punto $\underline{\mathbf{d}}$.

Una vez obtenido el rotor, el vector de translación y el vector de desplazamiento expresado en el espacio conformal, se puede obtener la posición de la punta del instrumento quirúrgico como sigue:

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \underline{\mathbf{d}} \tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{t} \quad (4.12)$$

4.1.3. Usando un motor

Como un movimiento rígido consiste de una rotación y una translación, es posible separar un motor multiplicativamente en términos de estas dos transformaciones, las cuales son llamadas rotor y translador, respectivamente.

Dado un cuaternión unitario \mathbf{q} , es posible encontrar el rotor \mathbf{R} (ver ecuación 4.8) que representa la misma rotación.

El translador \mathbf{T} se define a partir de las coordenadas t_x , t_y y t_z del instrumento quirúrgico dadas por la cámara.

$$\mathbf{T} = 1 + \frac{1}{2}e(t_x e_1 + t_y e_2 + t_z e_3) \quad (4.13)$$

Por lo tanto, el motor \mathbf{M} se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{TR} \quad (4.14)$$

El vector de desplazamiento $\mathbf{d} \in \mathcal{G}_{3,0,0}$ está definido por:

$$\mathbf{d} = 0e_1 + 0e_2 - le_3 \quad (4.15)$$

donde $l \in \mathbb{R}$, es la distancia desde el punto tomado como origen del instrumento quirúrgico hasta la punta del mismo instrumento.

Debido a que se usa el álgebra geométrica funcional, es necesario mapear el vector de desplazamiento \mathbf{d} al espacio conformal usando la ecuación 2.110 para obtener el punto $\underline{\mathbf{d}}$.

Una vez obtenido el motor y el vector de desplazamiento expresado en el espacio conformal, se puede obtener la posición de la punta del instrumento quirúrgico mediante:

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\underline{\mathbf{d}}\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{TR}\underline{\mathbf{d}}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}} \quad (4.16)$$

4.1.4. Comparación entre los tres métodos

A continuación se hace un análisis de los tres métodos explicados anteriormente, a fin de determinar cual de ellos es el que menos tiempo consume y/o entrega mejores resultados.

Tomando como entrada el conjunto de datos dado en la tabla 4.1 para nueve coordenadas reportadas por la cámara para nueve distintas posiciones de un instrumento de prueba y aplicando los tres algoritmos descritos anteriormente, se obtienen los resultados mostrados en las tablas 4.2, 4.3 y 4.4.

Nótese que al ser isomorfos los tres métodos, se deberían obtener los mismos resultados, pero el método matricial es notablemente más lento al tener que calcular el exponencial de

una matriz, descomponiéndolo en una serie de Taylor (serie infinita), lo cual obliga a truncar la serie a los primeros valores para obtener un resultado, por lo que se pierde precisión. Por lo tanto, los métodos del rotor y del motor son más precisos, económicos y rápidos de calcular que el método matricial, con lo cual se prefiere su uso.

t_x	t_y	t_z	q_0	q_1	q_2	q_3
-107.66	-143.83	-1938.16	0.1045	-0.3311	-0.6704	0.6556
-100.78	-23.16	-1959.50	0.0423	0.7295	0.1058	-0.6743
-6.97	16.41	-1989.67	0.2084	-0.7580	0.0394	0.6167
1.27	20.92	-1926.16	0.3747	-0.7030	-0.1512	0.5851
-72.37	10.12	-1901.47	0.1120	-0.7536	0.1227	0.6358
-81.81	-193.49	-1980.72	0.6649	0.5146	-0.5412	0.0000
27.75	-188.01	-2006.84	0.6537	0.6468	-0.3927	0.0000
39.40	-207.81	-1953.20	0.6446	0.6387	-0.4201	0.0000
-28.03	-214.46	-1934.03	0.0000	-0.3887	-0.7036	0.5947

Tabla 4.1: Coordenadas reportadas por la cámara para nueve posiciones de un instrumento quirúrgico de prueba

x	y	z
-57.100231	-72.560898	-1927.747681
-14.981857	-5.154303	-1951.853027
73.865082	-15.682953	-1976.263428
83.646416	-9.886370	-1923.145264
9.553215	-18.493565	-1886.846191
-18.464073	-133.257523	-1970.554321
72.936188	-113.585716	-1994.063721
87.063843	-135.344162	-1938.338501
12.680525	-140.812347	-1908.287476

Tabla 4.2: Resultados obtenidos usando el método matricial para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1

4.2. Calibración

Una importante tarea en los procedimientos quirúrgicos es el seguimiento en tiempo real de los instrumentos quirúrgicos usados durante la cirugía. Para poder realizar esta tarea es

x	y	z
-57.116638	-72.549683	-1927.744507
-14.978570	-5.170467	-1951.852051
73.869026	-15.671222	-1976.259277
83.651344	-9.872331	-1923.135742
9.560499	-18.470467	-1886.842041
-18.466269	-133.259628	-1970.528198
72.935059	-113.587547	-1994.048950
87.062996	-135.345459	-1938.329590
12.661923	-140.802078	-1908.287476

Tabla 4.3: Resultados obtenidos usando el rotor para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1

x	y	z
-57.116638	-72.549683	-1927.744507
-14.978570	-5.170467	-1951.852051
73.869026	-15.671222	-1976.259277
83.651344	-9.872331	-1923.135742
9.560499	-18.470467	-1886.842041
-18.466269	-133.259628	-1970.528198
72.935059	-113.587547	-1994.048950
87.062996	-135.345459	-1938.329590
12.661923	-140.802078	-1908.287476

Tabla 4.4: Resultados obtenidos usando el motor para obtener la posición de la punta del instrumento a partir de las nueve coordenadas dadas en la tabla 4.1

necesario colocar tres o más marcadores esféricos sobre los instrumentos quirúrgicos.

Para poder encontrar la transformación que relaciona la posición de los instrumentos quirúrgicos a seguir con el modelo 3D del paciente, primero se debe alinear la posición real del paciente (es necesario que se le coloquen en la cabeza marcadores fiduciales o marcadores de referencia antes de tomarle las imágenes de TAC ó IRM) con las coordenadas del modelo 3D del mismo, con lo cual se puede encontrar la correspondencia entre un punto en el modelo 3D y su correspondiente punto (punto fiducial) colocado sobre la cabeza del paciente, para lograr esto se usa el algoritmo mejorado de correspondencia robusta de puntos *TPS-RPM* descrito en [12].

Ya que se identificaron los n puntos correspondientes en el modelo 3D del paciente y en el paciente mismo, se debe estimar el movimiento rígido que lleve de las coordenadas de los puntos en el paciente a las coordenadas en el modelo 3D del mismo $\underline{x}'_i = \mathbf{R}\underline{x}_i\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{t}$, donde \mathbf{R} y \mathbf{t} se obtienen según [13].

Una vez concluido lo anterior ya se pueden seguir los instrumentos quirúrgicos en tiempo real. Para ello es necesario aplicar la transformación obtenida (usando el algoritmo de movimiento rígido) al punto que representa la posición en 3D de la punta del instrumento y con esto es posible mostrar en el modelo virtual el seguimiento del instrumento en todo momento.

Cabe mencionar que se usa el álgebra geométrica conformal y no el álgebra geométrica euclidiana 3D, debido al poder de uso de la geometría conformal, aunque en este trabajo de tesis y para los cálculos matemáticos necesarios no se explota por completo el uso de esta álgebra, sin embargo; en un futuro será necesario trabajar con esferas, planos, círculos, etc. y entonces se verá todo el potencial de uso y aplicación que brinda la geometría conformal.

4.3. Análisis experimental

Para demostrar que los procedimientos descritos anteriormente funcionan y se obtienen buenos resultados, se realizaron experimentos usando un maniquí como paciente, sin necesidad de obtener imágenes de TAC o IRM del mismo.

Primeramente se dibujo una malla sobre el maniquí y con el instrumento quirúrgico se recorrió toda la malla y se almacenó en un archivo, además se colocaron puntos fiduciales especiales para TAC sobre el maniquí y también con ayuda del instrumento quirúrgico se tomo la posición de los puntos y se almacenaron en otro archivo (ver figuras 4.1 y 4.2).

Para poder seguir el instrumento quirúrgico se tuvo que hacer un proceso de calibración. Para ello se cargaron los archivos que representan la malla del maniquí y los puntos fiduciales del mismo y se representaron en el modelo 3D, posteriormente, colocando el maniquí en

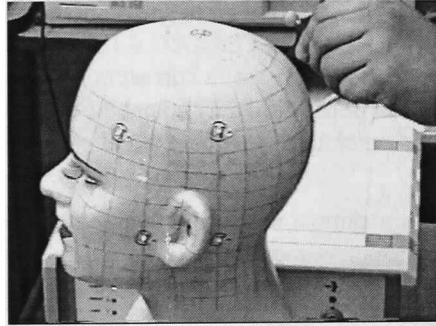


Figura 4.1: Malla dibujada sobre el maniquí y puntos fiduciales colocados sobre el mismo

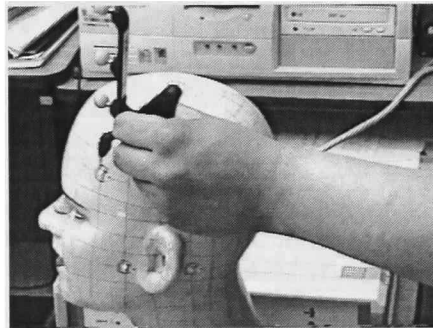


Figura 4.2: Captura de la posición real de los puntos fiduciales sobre el maniquí

cualquier parte de manera que sea visible en el ángulo de vista de la cámara se obtuvo la posición real de los puntos fiduciales colocados sobre el maniquí y aplicando el algoritmo TPS-RPM se obtuvo la correspondencia entre los puntos reales y los puntos del modelo virtual (ver figura 4.3).

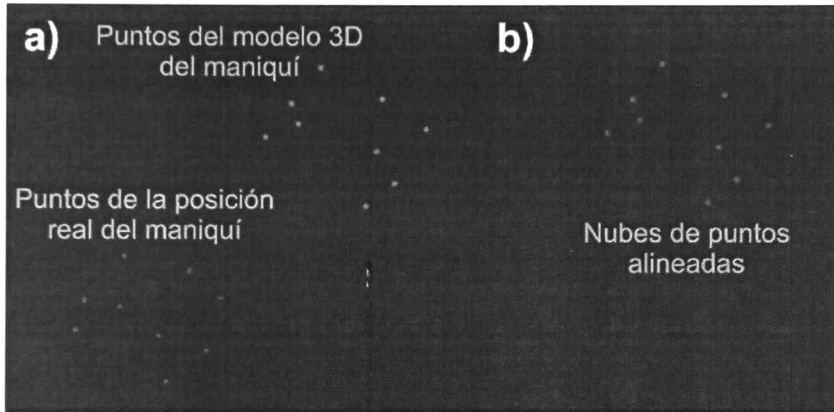


Figura 4.3: Calibración usando el algoritmo TPS-RPM. a) Antes de aplicar el algoritmo, las nubes de puntos no están alineadas; b) después de aplicar el algoritmo, las dos nubes de puntos quedan alineadas

A continuación se muestra un caso de prueba en donde se aplicó el algoritmo TPS-RPM para encontrar la correspondencia entre los puntos fiduciales de la posición real del maniquí (ver tabla 4.5) y los puntos del modelo 3D del mismo (ver tabla 4.6). En la tabla 4.7 se muestra la correspondencia obtenida. Nótese que la correspondencia no es uno a uno pero podría serlo si se toman los puntos en un determinado orden.

Ya que se conoce la correspondencia entre los puntos se puede aplicar el algoritmo de movimiento rígido para encontrar la transformación (rotación y translación) que lleve de la posición real de los puntos fiduciales en el maniquí a la posición de los puntos en el modelo 3D. Usando los valores dados en las tablas 4.5 y 4.6, la correspondencia dada en la tabla 4.7 y aplicando el algoritmo de movimiento rígido se obtienen los siguientes valores para la rotación y la translación:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.0035 & -0.0458 & 0.0505 \\ 0.0345 & 0.9837 & 0.2066 \\ -0.0589 & -0.2044 & 0.9830 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -71.6062 \\ 245.1494 \\ -240.7435 \end{bmatrix}$$

Usando los valores obtenidos de la rotación y translación y aplicando esa transformación a los puntos en la posición real del maniquí (ver tabla 4.5) se obtienen los valores mostrados

Punto	x	y	z
1	-175.0588	148.6123	-1540.4596
2	220.3855	214.4684	-1549.5251
3	238.7816	188.9502	-1487.4998
4	311.0526	205.0450	-1568.9147
5	315.5211	200.6421	-1515.2283
6	216.3026	91.9338	-1593.3589
7	308.5935	112.1141	-1601.9089
8	241.1569	72.1840	-1531.5000
9	317.8322	80.3748	-1552.1680

Tabla 4.5: Posición real de los puntos fiduciales en el maniquí

Punto	x	y	z
1	18.4763	77.2596	-1795.9303
2	63.4837	14.4705	-1839.3246
3	151.0369	35.0285	-1858.9335
4	164.0714	14.0711	-1800.9211
5	89.0543	9.2322	-1773.6272
6	84.7111	132.9370	-1755.5702
7	159.4920	140.1467	-1789.5173
8	61.6609	144.1045	-1820.3661
9	151.4189	133.1505	-1843.0776

Tabla 4.6: Posición de los puntos fiduciales en el modelo 3D

en la tabla 4.8. Con lo cual se observa que dicha transformación lleva de los puntos de la posición real del maniquí a los puntos en el modelo 3D del mismo con un mínimo error de aproximación (ver tablas 4.6, 4.7 y 4.8).

Tomando los valores mostrados en la tabla 4.9 y calculando el error entre los valores esperados (puntos fiduciales en el modelo 3D) y los valores obtenidos al aplicar la transformación dada por el algoritmo de movimiento rígido a la posición real de los puntos fiduciales en el paciente, se obtienen los datos estadísticos mostrados en la tabla 4.10, los cuales quedan dentro del rango permitido para aplicaciones médicas en neurocirugía.

Una vez conocida la correspondencia y los valores de la transformación rígida se puede hacer el seguimiento del instrumento quirúrgico en tiempo real, como se muestra en la figura 4.4. De igual manera se realizaron las pruebas de seguimiento del instrumento quirúrgico en un cráneo humano como se muestra en la figura 4.5. Además de mostrar en el modelo 3D

Punto en la posición real	Punto en el modelo 3D
1	1
2	8
3	6
4	9
5	7
6	2
7	3
8	5
9	4

Tabla 4.7: Correspondencia entre los puntos reales del maniquí y los puntos en el modelo 3D del mismo

la posición del instrumento en todo momento, se muestra su sentido, es decir, la orientación que lleva el mismo y el sentido que debería seguir para llegar a la lesión. En la figura 4.6 se muestra el sentido real que lleva el instrumento quirúrgico (línea verde) y el sentido que se espera debería llevar para llegar en línea recta hasta el tumor (línea amarilla), cuando el ángulo formado entre ambas líneas sea igual a cero o casi cero, se dice que el instrumento está orientado en línea recta hacia el tumor.

Punto	x	y	z
1	19.3771	79.1603	-1795.7342
2	61.3837	143.6365	-1820.7725
3	84.1483	131.9819	-1755.6673
4	151.8158	133.4913	-1843.2433
5	159.2153	140.4048	-1789.8312
6	60.6870	13.9004	-1838.5799
7	151.9396	35.1723	-1856.5408
8	89.6593	8.1089	-1775.1974
9	165.1793	14.5441	-1801.7013

Tabla 4.8: Resultados obtenidos al aplicar la transformación obtenida a los puntos fiduciales en la posición real del maniquí

x	y	z
0.9008	1.9007	0.1961
-0.2772	-0.468	-0.4064
-0.5628	-0.9551	-0.0971
0.3969	0.3408	-0.1657
-0.2767	0.2581	-0.3139
-2.7967	-0.5701	0.7447
0.9027	0.1438	2.3927
0.6050	-1.1233	-1.5702
1.1079	0.4730	-0.7802

Tabla 4.9: Diferencia entre los valores obtenidos en la tabla 4.8 menos los valores correspondientes en la tabla 4.6

Valor	x	y	z
Mediana	0.3969	0.1438	-0.1657
Promedio	-000011113	-0000110865	0
Varianza	1.29655	0.750876	1.07699
Desviación estándar	1.13866	0.866531	1.03778

Tabla 4.10: Datos estadísticos del error obtenido entre los valores esperados (puntos fiduciales en el modelo 3D) y los valores obtenidos al aplicar la transformación dada por el algoritmo de movimiento rígido a la posición real de los puntos fiduciales en el paciente

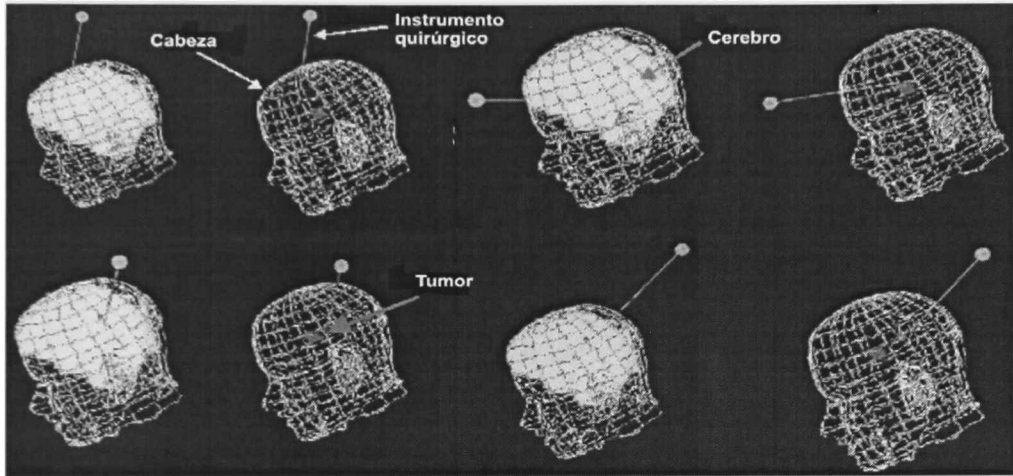


Figura 4.4: Seguimiento en tiempo real del instrumento quirúrgico

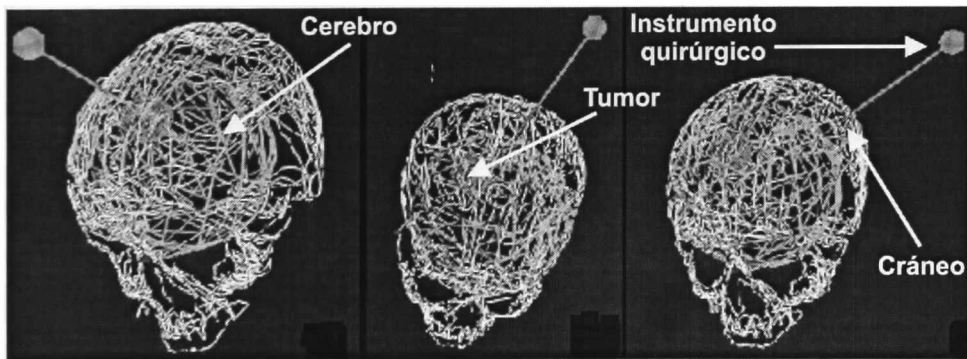


Figura 4.5: Seguimiento del instrumento quirúrgico en un cráneo humano

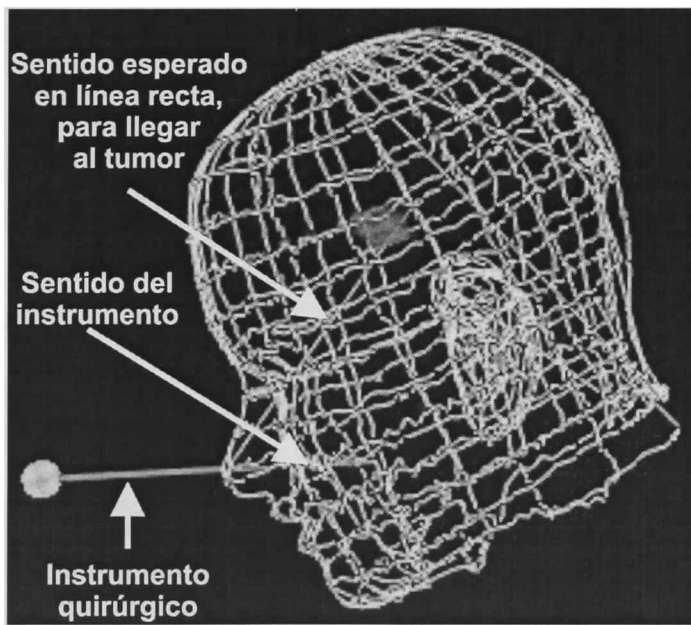


Figura 4.6: Sentido del instrumento quirúrgico y sentido esperado para llegar al tumor

Capítulo 5

Monitoreo virtual intraoperativo

El abordaje quirúrgico del sistema nervioso siempre ha constituido un gran reto en la medicina, debido a las características anatómicas del continente y contenido (encéfalo y médula). El desarrollo científico y tecnológico ha permitido avances tanto en el diagnóstico como en el tratamiento quirúrgico. Las pruebas diagnósticas se han hecho más precisas y por ende se ha acortado el tiempo quirúrgico y mejorado su eficiencia con la incorporación de la neuronavegación.

A estos avances se incorporó la endoscopia, con nueva tecnología óptica, cámaras de alta resolución, e instrumentos especiales, que comenzaron en otras especialidades médicas y quirúrgicas y posteriormente, fueron adaptados a la neurocirugía. Las nuevas tecnologías han permitido reducir significativamente el tiempo quirúrgico, la morbi-mortalidad, y el tiempo de anestesia tradicionalmente largos y complejos en neurocirugía. Además, se ha acelerado la recuperación del paciente y reducido los costos del tratamiento y recuperación.

La tendencia actual está orientada hacia la mayor utilización de métodos mínimamente invasivos utilizando uno o varios agujeros (*trépanos*) en lugar de craneotomías extensas. A través de esos trépanos se accede a las lesiones para realizar los procedimientos diagnósticos o terapéuticos, según el caso. El tiempo de hospitalización es reducido, o incluso ambulatorio, lo cual abre una nueva frontera en beneficio del paciente.

5.1. Neuroendoscopia real

En las últimas dos décadas a nivel mundial y en la última década en Latinoamérica, especialmente en México, la endoscopia cerebral como parte de la cirugía neurológica de mínima invasión ha sido de vital importancia en el tratamiento de enfermedades neurológicas como hidrocefalia congénita o adquirida, neurocisticercosis, enfermedad vascular cerebral, tumores o quistes ventriculares y paraventriculares, quistes aracnoideos e hidrocefalias secundarias

a disfunciones valvulares. Entre las regiones más inaccesibles al sistema nervioso central se encuentran los ventrículos laterales, el tercer ventrículo, el acueducto cerebral, el cuarto ventrículo y el espacio subaracnoideo de la base del cráneo [17, 18, 15].

El instrumental requerido para la aplicación neuroquirúrgica de las técnicas de neuroendoscopia incluye principalmente (ver figura 5.1):

1. El endoscopio, que puede ser flexible, rígido y semi-rígido.
2. La cámara, la cual debe proveer una buena calidad de imagen con buena resolución. El tamaño de la cámara debe ser apropiado para adaptarla a endoscopios muy delgados (0,5 a 1,5 mm).
3. La fuente de luz debe ser sumamente intensa, por lo general es de xenón a 300 vatios.
4. Para la obtención de biopsia o remoción de lesiones se utilizan micropinzas especialmente diseñadas y sistemas de aspiración.

Cuando se trabaja con un endoscopio rígido se usa una camisa de diámetro variable con lentes en diferentes grados de visión. El endoscopio flexible es fibra óptica con su porción más distal flexible en ángulos que varían de 90° a 120° y con maniobras de rotación se extiende el ángulo de visión para dar un movimiento de 360° . Es necesario aplicar un fijador rígido en la mesa de operaciones para impedir movimientos no requeridos al realizar un procedimiento quirúrgico.

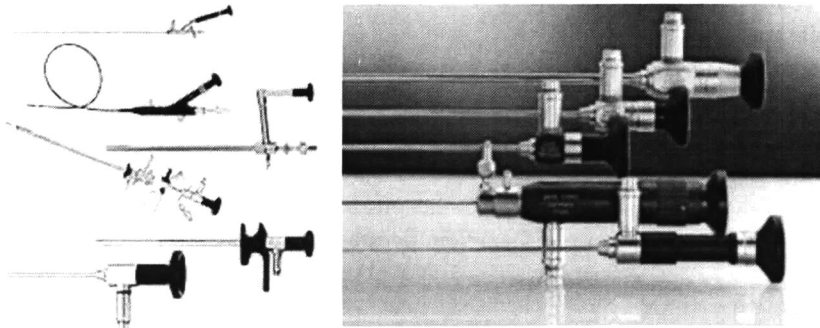


Figura 5.1: Equipo utilizado en técnicas de neuroendoscopia

Los factores que inciden en la neuroendoscopia incluyen el entrenamiento y preparación del cirujano, el tipo de endoscopio y la patología a tratar. El análisis de estos tres aspectos permite obtener mejores resultados.

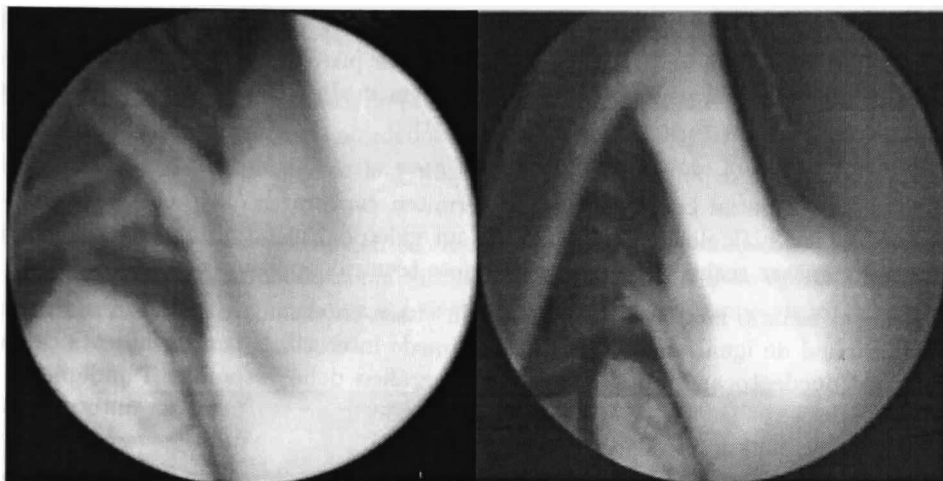


Figura 5.2: Imágenes de neuroendoscopia real

El objetivo del uso de la neuroendoscopia es permitir al neurocirujano navegar a través del cerebro, es decir, visualizar donde está el endoscopio en el cerebro en cualquier momento durante el procedimiento quirúrgico y mostrar en una imagen circular (ver figura 5.2) lo que hay enfrente del mismo.

En neurocirugía, por las particularidades anatómicas del sistema nervioso se requiere que el trayecto que debe seguir el endoscopio sea a través de espacios por donde pueda desplazarse y deben utilizarse fuentes de luz muy potentes. Se utilizan cámaras pequeñas de alta resolución además de instrumental diseñado para ese uso. A través de un trépano se introduce el endoscopio y los instrumentos, permitiendo realizar un procedimiento mínimamente invasivo con menor trauma para el cerebro y médula espinal, reduciendo la morbi-mortalidad, consiguiendo un postoperatorio más benigno y una reducción del tiempo quirúrgico y estadía hospitalaria del paciente.

5.2. Realidad virtual y realidad aumentada

Cuando se habla de realidad virtual se dice que el usuario está inmerso en un mundo 3D sintético y se siente dentro de él. Por el contrario cuando se habla de realidad aumentada, el usuario ve la realidad de forma aumentada o enriquecida con objetos 3D sintéticos. Por lo tanto, la realidad virtual es más virtual que real y la realidad aumentada es más real que virtual.

En la *realidad virtual* existe un mundo 3D sintético y un usuario real que debe creer que forma parte del mundo virtual. Las imágenes se proyectan en una simple pantalla o en pantallas gigantes y el usuario visualiza la escena mediante unas gafas especiales que le permiten la visión estereoscópica del mundo sintético.

En todo momento debe capturarse la posición y el movimiento del usuario. El usuario viste algún traje especial con sensores que permiten capturar no sólo el movimiento de su cabeza sino de sus articulaciones. Se captura un video del usuario en el ambiente real con una o varias cámaras reales y se analiza mediante técnicas de visión computacional.

Mientras el usuario modifica su dirección de visión en el mundo sintético se debe mover la cámara virtual de igual manera. El usuario puede interactuar con los objetos del mundo sintético, los puede tocar y mover. El sistema gráfico debe responder rápidamente a los movimientos del usuario, si el cerebro no ve el mundo sintético desde el punto de vista que espera se produce una gran confusión y el usuario podría sufrir fatiga y presentar mareos.

La realidad virtual puede ser de dos tipos: *immersiva* y *no immersiva*. Los métodos immersivos de realidad virtual con frecuencia se ligan a un ambiente tridimensional creado por una computadora, el cual se manipula a través de cascos, guantes u otros dispositivos que capturan la posición y rotación de diferentes partes del cuerpo humano. La realidad virtual no immersiva utiliza medios con los cuales se puede interactuar en tiempo real con diferentes personas en espacios y ambientes que en realidad no existen sin la necesidad de dispositivos adicionales a la computadora.

La realidad virtual no immersiva tiene varias ventajas sobre el enfoque immersivo como: bajo costo y fácil y rápida aceptación de los usuarios. Los dispositivos immersivos son de alto costo y generalmente el usuario prefiere manipular el ambiente virtual por medio de dispositivos familiares como son el teclado y el ratón que por medio de cascos pesados o guantes.

En la *realidad aumentada* existe un mundo 3D y un usuario reales. Al mundo real se le agregan objetos sintéticos y el usuario ve un mundo real con dichos objetos que le ayudarán a interactuar con la realidad.

Las imágenes sintéticas pueden proyectarse sobre los objetos reales y el usuario visualiza la escena normalmente sin ningún dispositivo especial. La combinación de imágenes sintéticas y reales puede proyectarse sobre una pantalla o gafas especiales que le permitirán al usuario tener una visión estereoscópica del mundo real-sintético.

El usuario puede interactuar con los objetos reales y sintéticos agregados, la interacción con el mundo real es natural y la interacción con el mundo sintético se lleva a cabo como en la realidad virtual.

Por lo tanto, se puede decir que la realidad virtual aísla del mundo real, mientras que la realidad aumentada añade información extra a éste.

5.3. Neuroendoscopia virtual

Una de las principales limitantes en la neuroendoscopia es la carencia del contexto relativo que hay entre el endoscopio y sus alrededores, es aquí donde la neuroendoscopia virtual tiene un alto potencial ya que puede usarse para fines educativos, como lo es el entrenamiento de neurocirujanos.

Partes del cerebro que no pueden ser accedidas usando un endoscopio real pueden ser exploradas usando la neuroendoscopia virtual. Un campo especial de aplicación de la neuroendoscopia virtual es la planeación quirúrgica. Sin embargo, el campo visual del endoscopio es pequeño lo cual es una limitante.

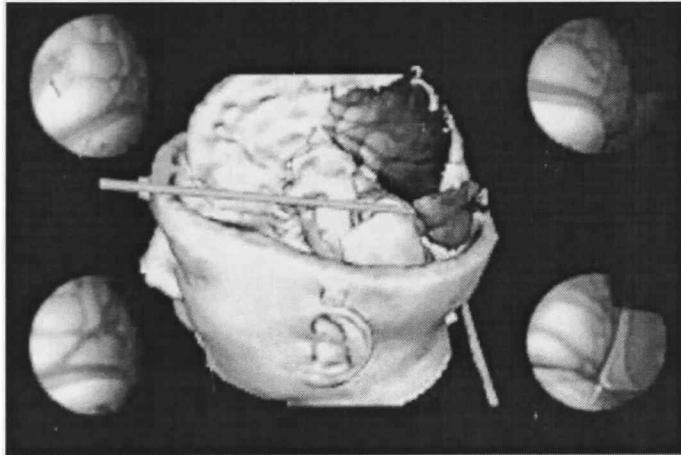


Figura 5.3: Principio de neuroendoscopia virtual

En años recientes, la endoscopia virtual [2, 6] ha emergido como un medio de examinación del modelo 3D de un paciente. Una cámara fotográfica virtual se coloca dentro del Modelo 3D de manera que se puede explorar el modelo virtual de una manera similar a una endoscopia verdadera o por lo menos para obtener información similar a partir de las imágenes que se forman de acuerdo al campo de visión del endoscopio y su orientación (ver figuras 5.3 y 5.4).

Para poder hacer una simulación de una intervención quirúrgica a un paciente con tumor usando neuroendoscopia virtual, es necesario realizar lo siguiente:

1. Adquisición de imágenes de la anatomía craneal del paciente, ya sea mediante TAC (tomografía axial computarizada) o IRM (resonancia magnética).

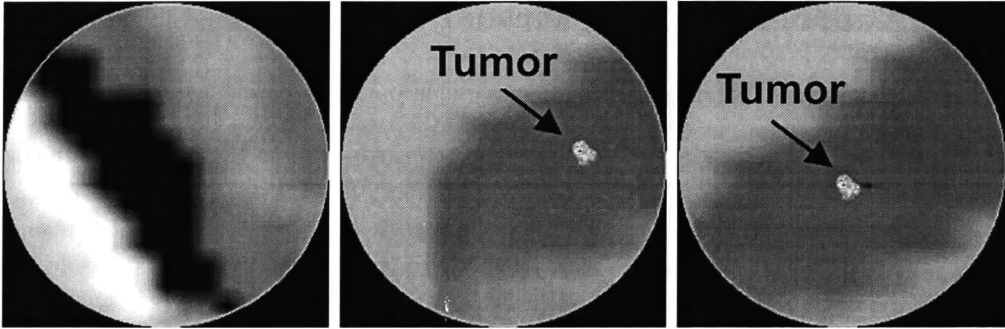


Figura 5.4: Imágenes de neuroendoscopia virtual de un paciente con tumor

2. Procesamiento de las imágenes médicas adquiridas para adquirir todos los distintos planos de corte (axial, coronal y sagital).
3. Segmentación 2D y 3D de estructuras anatómicas, en especial del cerebro y del tumor.
4. Reconstrucción del modelo 3D del paciente y/o reconstrucción 3D de las estructuras anatómicas segmentadas, en especial del cerebro y del tumor.
5. Elección de un orificio de entrada (trépano) del endoscopio y previa planeación de la ruta que seguirá el endoscopio para llegar al tumor (lesión a tratar).
6. Conforme el endoscopio siga la ruta planeada se deben obtener las imágenes correspondientes de acuerdo al ángulo de inclinación del endoscopio (previamente definido) y al campo de vista del mismo. Las imágenes obtenidas virtualmente asemejan las imágenes reales que se obtendrían usando un endoscopio real. Estas imágenes deben mostrarse en pantalla.
7. Mostrar en el modelo 3D del paciente o en el volumen 3D de las estructuras segmentadas según sea el caso la posición del endoscopio en todo momento y la ruta seguida hasta el momento.
8. Cuando se llegue al tumor, se debe mostrar la extracción de éste paso a paso, tanto en el volumen 3D que queda por extraer del mismo como en las imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes.
9. Mostrar toda la secuencia de imágenes de neuroendoscopia virtual obtenidas.

5.4. Análisis experimental

Para ejemplificar las ventajas y beneficios del uso de la neuroendoscopia virtual, a partir de un conjunto de 224 imágenes de IRM de un paciente con tumor se obtuvo su correspondiente modelo 3D (ver figura 5.5).

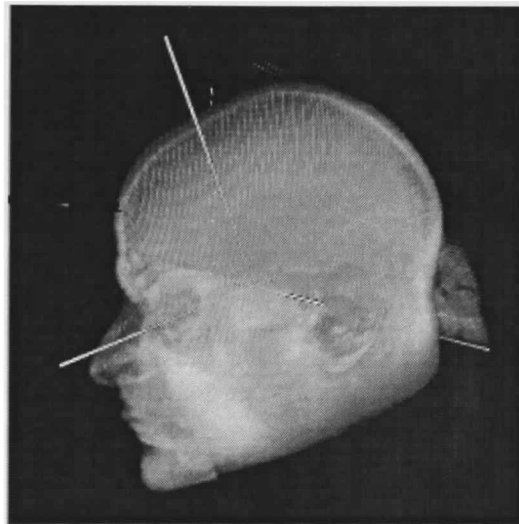


Figura 5.5: Modelo 3D inicial de un paciente con tumor usado en el procedimiento quirúrgico de neuroendoscopia virtual

Posteriormente, con ayuda de las imágenes de IRM del paciente y de su modelo 3D se definió una ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo por completo, obteniendo un conjunto de 56 imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a dicha ruta (ver figuras 5.6 y 5.7).

Una vez obtenidas las imágenes de neuroendoscopia virtual se simuló una intervención quirúrgica mostrando la ubicación del endoscopio y la ruta seguida en todo momento en el modelo 3D del paciente y el volumen restante por extraer del tumor (ver figuras 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11, nótese que el volumen por extraer del tumor fue magnificado para mejor visibilidad del mismo).

Por último, se mostró en el modelo 3D resultante la trayectoria completa que se siguió para poder llegar al tumor y extraerlo por completo y el conjunto 3D de imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a dicha ruta durante la simulación de la intervención quirúrgica (ver figuras 5.12 y 5.13).

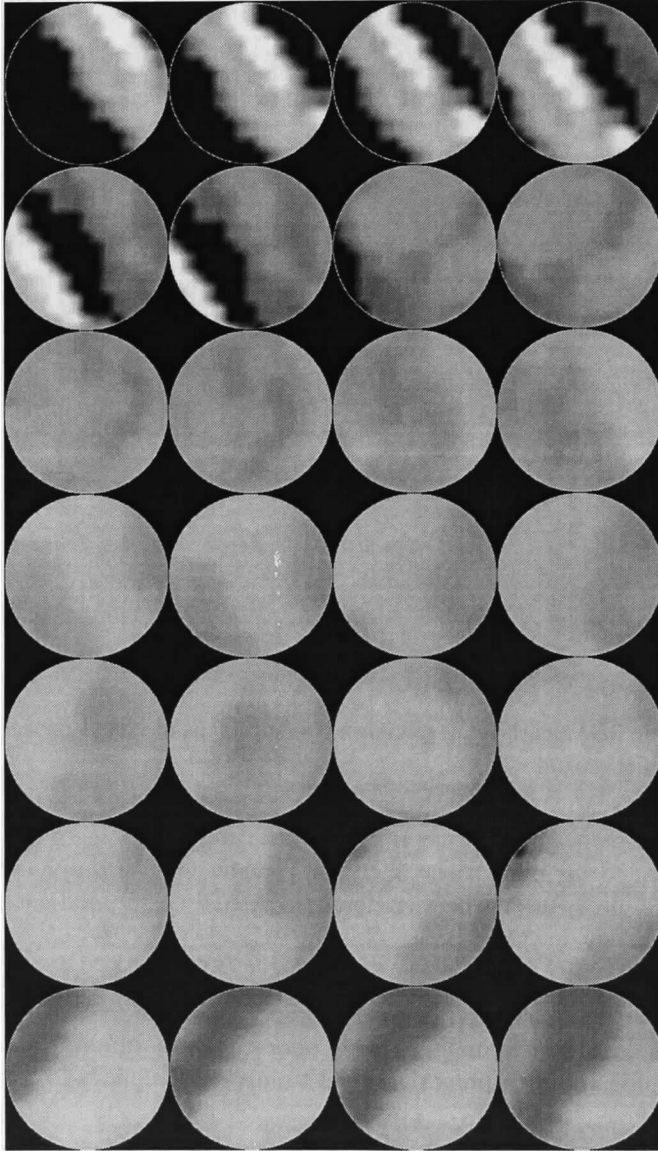


Figura 5.6: Primeras 28 imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo por completo

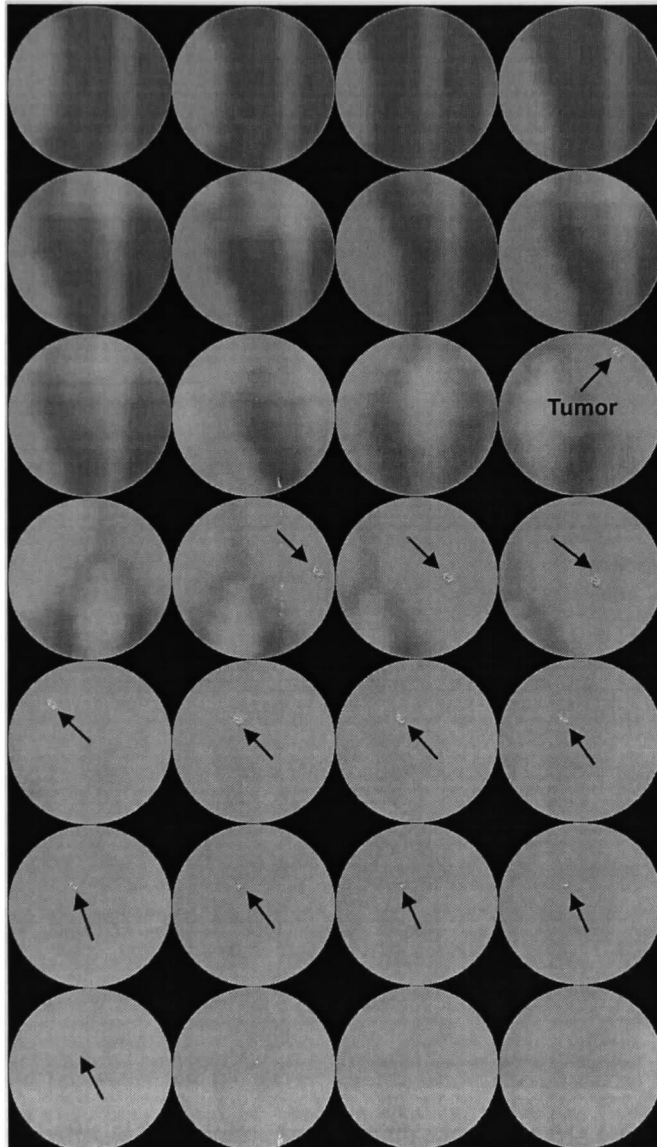


Figura 5.7: Sigüientes y últimas 28 imágenes de neuroendoscopia virtual correspondientes a la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo por completo

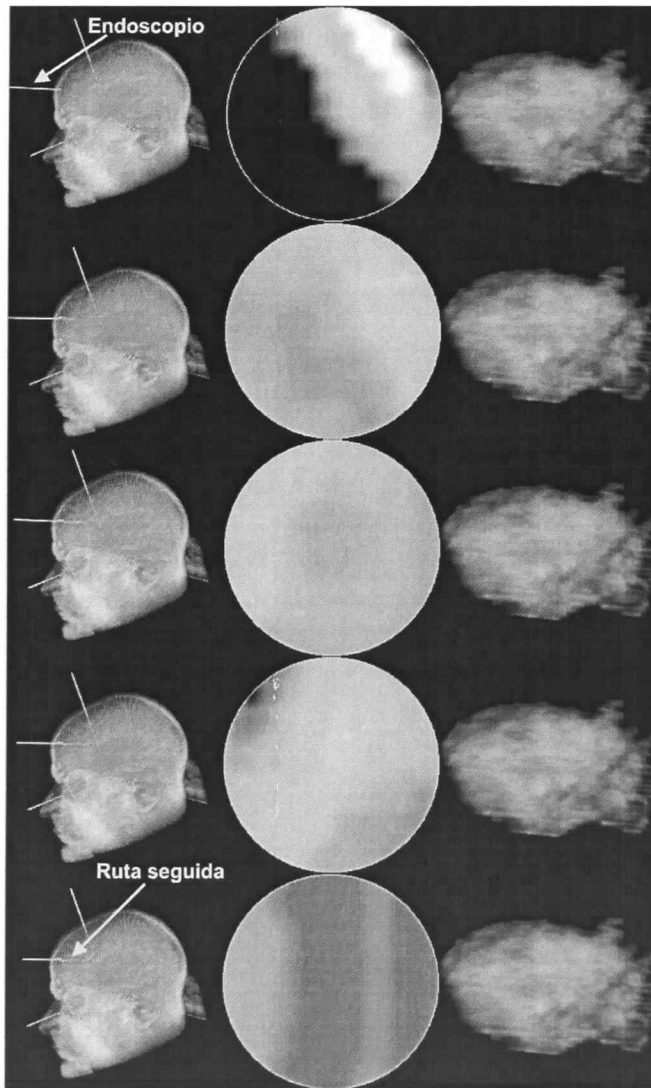


Figura 5.8: Inicio del procedimiento quirúrgico y avances en la ruta a seguir para llegar al tumor y poder extraerlo. Fila 1: inicio del procedimiento quirúrgico. En las filas siguientes se muestra la ruta que se va siguiendo y las imágenes de endoscopia virtual correspondientes. En la columna tres se muestra el tumor magnificado para mejor visibilidad del mismo

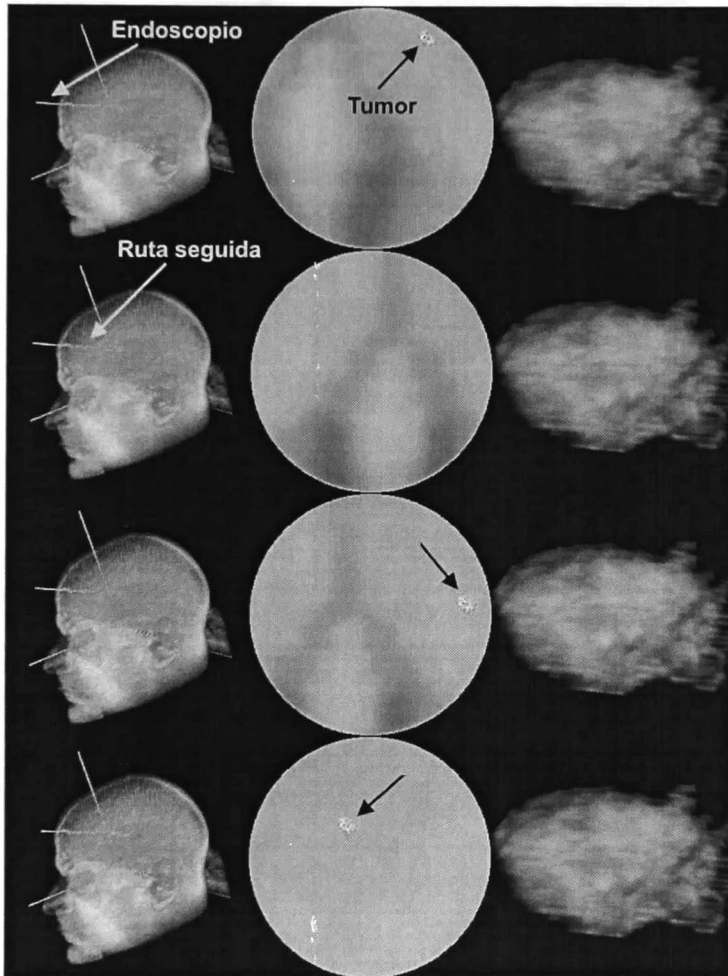


Figura 5.9: Posicionamiento del endoscopio. Fila 1: se localiza el tumor por primera vez, Fila 2: se pierde de vista el tumor, Fila 3: se vuelve a localizar el tumor, Fila 4: se elige la mejor vista del tumor y se deja fijo el endoscopio para empezar el proceso de extracción. El tumor sirve como referencia al neurocirujano para orientar el endoscopio

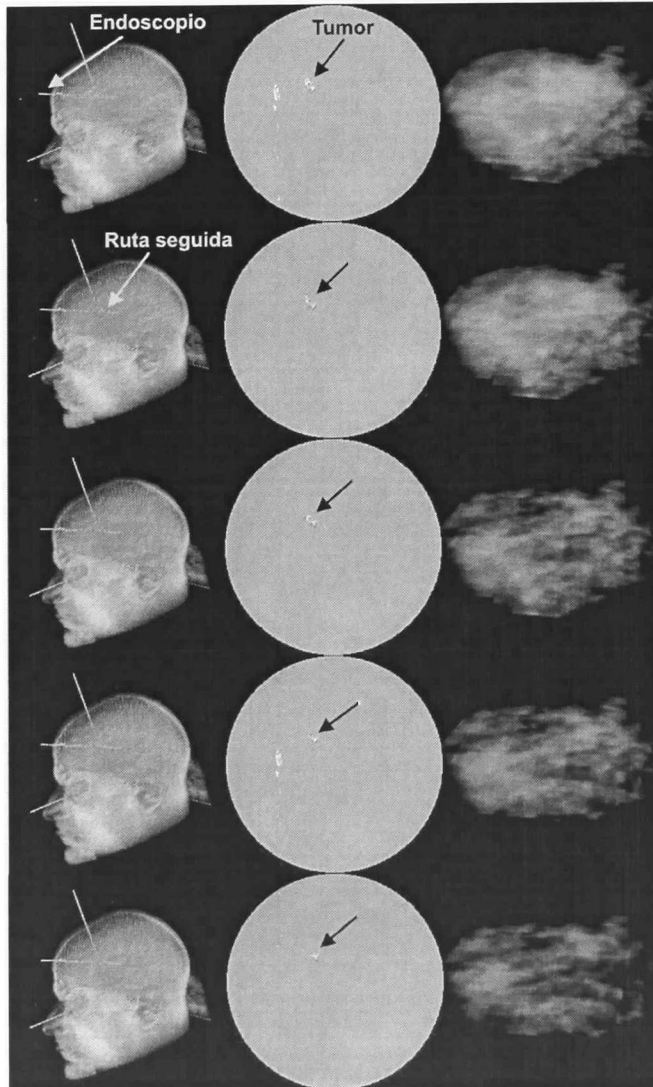


Figura 5.10: Proceso de extracción del tumor. Columna 1: ruta seguida hasta el momento durante el proceso de extracción del tumor, Columna 2: imágenes de neuroendoscopia virtual obtenidas durante la extracción del tumor, Columna 3: volumen restante por extraer del tumor

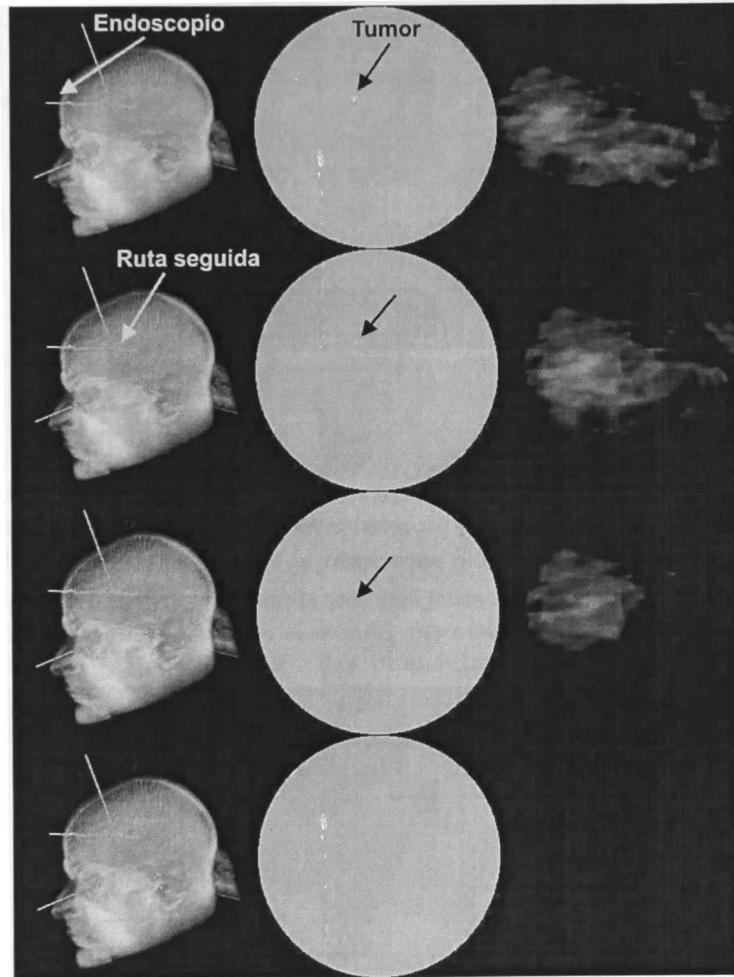


Figura 5.11: Extracción completa del tumor. Columna 1: ruta seguida hasta el momento durante el proceso de extracción del tumor, Columna 2: imágenes de neuroendoscopia virtual obtenidas durante la extracción del tumor, Columna 3: volumen restante por extraer del tumor. La fila cuatro muestra que se hizo una completa extracción del tumor

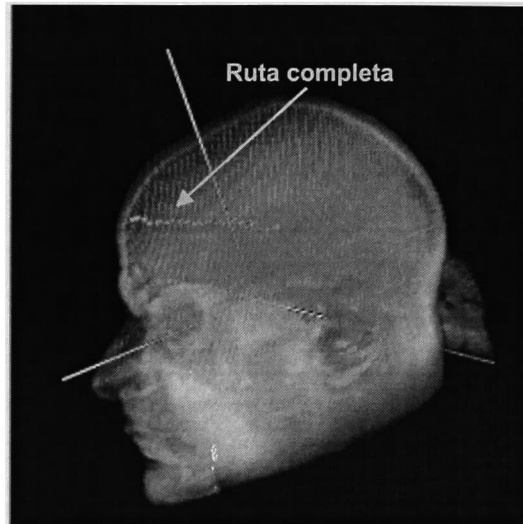


Figura 5.12: Modelo 3D resultante del proceso de neuroendoscopia virtual, en dicho modelo se muestra la ruta completa que siguió para llegar al tumor y extraerlo por completo

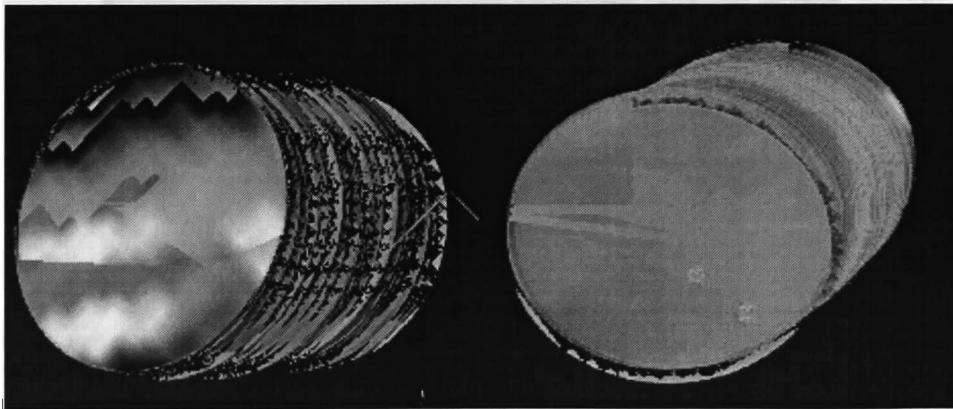


Figura 5.13: Conjunto 3D de todas las imágenes obtenidas durante el proceso de neuroendoscopia virtual

Capítulo 6

Conclusiones

Con el uso de la neurocirugía asistida por computadora, las imágenes médicas, la robótica y la visión computacional el neurocirujano puede planear procedimientos quirúrgicos más seguros, operar virtualmente antes de intervenir al paciente, observar estructuras delicadas sin recurrir a una disección difícil o imposible, como es el caso de las estructuras cerebrales; con lo cual se logra una cirugía de mínima invasión, máxima precisión y alta preservación funcional del sistema nervioso, teniendo mayor probabilidad de éxito y disminuyendo considerablemente la morbi-mortalidad del paciente.

Los sistemas de neurocirugía guiada por imágenes han sido utilizados ampliamente en varios procedimientos quirúrgicos en el mundo, pero sus costos son elevados. Se espera que las técnicas de navegación neuroquirúrgica propuestas en este trabajo de tesis reducirán significativamente la estancia postoperatoria del paciente y los costos de hospitalización.

Un beneficio relevante es la posibilidad de tener información en tiempo real para la toma de decisiones, la cual permite obtener las ventajas señaladas, además del bajo costo de operación por el sistema aquí propuesto, sin depender de tecnologías que por su proyección económica encarecen los costos de un procedimiento quirúrgico y queda al margen el beneficio real.

Por otra parte, la neuroendoscopia no es realmente ni nueva, ni mágica; ya tiene una historia bastante antigua de aplicación dentro del cuerpo humano y es reciente su incorporación a la neurocirugía. La neuroendoscopia es un recurso más que hay que desarrollar, es un procedimiento menos invasivo que reduce el tiempo quirúrgico, la anestesia, tiene menores complicaciones e implica reducción de los costos de hospitalización del paciente.

En el futuro la neuroendoscopia virtual se ira mejorando constantemente, introduciendo nuevos elementos y todos con un objetivo fundamental, el de planear una mejor intervención quirúrgica y reducir la morbi-mortalidad del paciente; acortando los tiempos quirúrgicos y disminuyendo los costos en beneficio de los pacientes. Con esta técnica se abren nuevas fronteras y nuevos retos para una especialidad tan compleja como es la neurocirugía y cuyos

resultados iniciales constituyen nuevas esperanzas para los pacientes.

La aplicación de estas nuevas tecnologías genera beneficios directos al paciente y al cirujano, disminuyendo los índices de morbilidad y de mortalidad al ofrecer precisión y seguridad, así como un aumento en la percepción visual del médico proporcionándole una mayor visión en el momento en que se lleva a cabo la cirugía. Con esto se logra uno de los objetivos primordiales que es la rápida reincorporación del paciente a sus actividades cotidianas en un plazo menor (rápida recuperación), reduciendo los costos de hospitalización, lo cual representa un ahorro económico para el paciente y para la entidad reguladora.

En este proyecto de tesis se realizaron satisfactoriamente las siguientes actividades:

Procesamiento de las imágenes médicas 2D adquiridas y reconstrucción del modelo 3D del paciente.

Monitoreo y seguimiento de instrumentos quirúrgicos en tiempo real.

- Simulación de una trayectoria óptima de operación neuroquirúrgica mediante el uso de la neuroendoscopia virtual, mostrando la extracción completa del tumor.

Los aportes de este trabajo de tesis son los siguientes:

1. Uso del álgebra geométrica conformal para resolver el problema de alineamiento entre el modelo virtual del paciente y las coordenadas de la posición real del mismo.
2. Implementación de un algoritmo propio para neuroendoscopia virtual usando álgebra geométrica conformal.
3. Desarrollo del software necesario de neuronavegación asistida por computadora usando el álgebra geométrica conformal, para llevar a cabo las actividades anteriores.

6.1. Trabajo futuro

Como continuación del trabajo de tesis mostrado, se realizarán las siguientes actividades:

1. Uso de neuroendoscopia real y reconstrucción tridimensional del tumor y tejidos cercanos y sanos a partir de las imágenes obtenidas.
2. Uso de ecografía 2D y 3D (ultrasonografía) para estimar la posición del corrimiento del tumor en tiempo real, durante la etapa intraoperativa.
3. Fusión de imágenes TAC o IRM con imágenes de ultrasonido 2D y las imágenes adquiridas mediante neuroendoscopia real para obtener información adicional.

Apéndice A

Entidades y estimación de movimiento en $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$

Se pueden modelar puntos, líneas y planos en un espacio 4D usando el álgebra de motores $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$, la cual expande en 4D el espacio lineal usando bases bivectoriales.

A.1. Representación de puntos, líneas y planos

Para representar un punto, se embebe un punto 3D en el hiperplano $\mathbf{X}_4 = 1$, así la ecuación del punto $\mathbf{X} \in \mathcal{G}_{3,0,1}^+$ es:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= 1 + x_1e_{41} + x_2e_{42} + x_3e_{43} \\ &= 1 + I(x_1e_{23} + x_2e_{31} + x_3e_{12}) \\ &= 1 + I\mathbf{x}\end{aligned}\tag{A.1}$$

o bien:

$$\mathbf{X} = (1, 0) + I(0, \mathbf{x})\tag{A.2}$$

En esta ecuación la parte real consiste de un escalar igual a 1 y la parte dual de un bivector 3D.

Como el producto del pseudoescalar unitario $I = e_{1234}$ y cualquier bivector dual construido desde las bases e_{41} , e_{42} y e_{43} es cero, se seleccionan las bases e_{23} , e_{31} y e_{12} para representar la línea de la siguiente manera:

$$\mathbf{L} = \mathbf{n} + I\mathbf{m}\tag{A.3}$$

En este caso, los bivectores para la dirección de la línea y el momento son computados

usando dos puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , que yacen sobre la línea, como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= (x_{21} - x_{11})e_{23} + (x_{22} - x_{12})e_{31} + (x_{23} - x_{13})e_{12} \\ &= L_{n1}e_{23} + L_{n2}e_{31} + L_{n3}e_{12}\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \\ &= (x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22})e_{23} + (x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23})e_{31} + \dots + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})e_{12} \\ &= L_{m1}e_{23} + L_{m2}e_{31} + L_{m3}e_{12}\end{aligned}\tag{A.5}$$

Esta representación de la línea usando números duales es fácil de entender y manipular algebraicamente. La ecuación de la línea puede ser reescrita como sigue:

$$\mathbf{L} = (0, \mathbf{n}) + I(0, \mathbf{m})\tag{A.6}$$

donde \mathbf{n} y \mathbf{m} son expandidos con una base bivectorial 3D.

Para obtener la ecuación del plano, se representa la orientación del plano via el bivector \mathbf{n} y el producto exterior entre un bivector tocando el plano y su orientación \mathbf{n} . Este producto exterior resulta en un cuatrivector, el cual puede ser expresado como la distancia de Hesse $d = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})$ multiplicada por el pseudoescalar unitario

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{n} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{n} \\ &= \mathbf{n} + I(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{n} + Id\end{aligned}\tag{A.7}$$

o bien:

$$\mathbf{H} = (0, \mathbf{n}) + I(d, 0)\tag{A.8}$$

Nótese que la ecuación del plano es el dual de la ecuación del punto

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= (d + I\mathbf{n})^* \\ &= (I\mathbf{n})^* + (d)^* \\ &=: \mathbf{n} + Id\end{aligned}\tag{A.9}$$

donde la orientación del plano es obtenida por el bivector unitario \mathbf{n} y la distancia de Hesse por el escalar 1.

En la figura A.1 se muestra la representación gráfica de puntos, líneas y planos en el álgebra de motores.

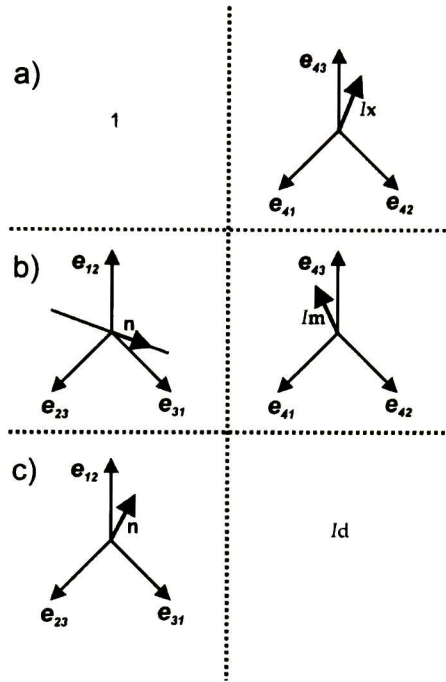


Figura A.1: Representación de a) puntos, b) líneas y c) planos, en el álgebra de motores

A.2. Movimiento de puntos, líneas y planos

El modelado del movimiento 3D de primitivas geométricas usando álgebra de motores ocurre en un espacio 4D donde la rotación y translación son aplicados como operadores multiplicativos, y es por eso que el movimiento 3D se hace lineal. Habiendo creado un modelo lineal, entonces se pueden computar simultáneamente la rotación y la translación.

Para el modelado del movimiento de un punto, se usa la representación de la ecuación

A.1 y las relaciones del motor dadas en la ecuación 2.84, con $I^2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}' &= 1 + I\mathbf{x}' \\
 &= \mathbf{M} \times \tilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{M}(1 + I\mathbf{x})\tilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{T}_s \mathbf{R}_s (1 + I\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{R}}_s \mathbf{T}_s \\
 &= (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \mathbf{R}_s (1 + I\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{R}}_s (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) (1 + I\mathbf{R}_s \mathbf{x} \tilde{\mathbf{R}}_s) (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= 1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2} + I\mathbf{R}_s \mathbf{x} \tilde{\mathbf{R}}_s + I\frac{\mathbf{t}_s}{2} \\
 &= 1 + I(\mathbf{R}_s \mathbf{x} \tilde{\mathbf{R}}_s + \mathbf{t}_s)
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

El movimiento de una línea 3D o movimiento de giro puede ser como la rotación de la línea a través del eje de línea \mathbf{L}_s y su translación a lo largo de este eje de línea, como se ve en la figura A.2, la línea \mathbf{L}_s es desplazada una distancia \mathbf{t}_c desde el origen.

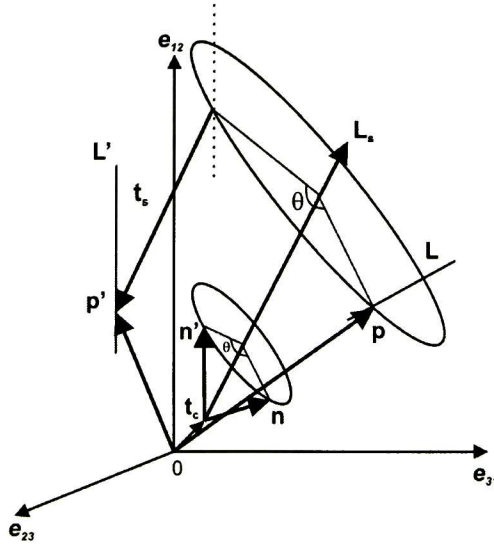


Figura A.2: Movimiento de giro de una línea

Ahora usando la ecuación de la línea A.3 se puede expresar el movimiento de una línea

3D con sigue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}' &= \mathbf{n}' + I\mathbf{m}' \\
 &= \mathbf{M}(\mathbf{L})\tilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{T}_s\mathbf{R}_s(\mathbf{n} + I\mathbf{m})\tilde{\mathbf{R}}_s\tilde{\mathbf{T}}_s
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Esta ecuación puede ser expresada puramente en términos de rotores por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}' &= (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2})\mathbf{R}_s(\mathbf{n} + I\mathbf{m})\tilde{\mathbf{R}}_s(1 - I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2})(\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + I\mathbf{R}_s\mathbf{m}\tilde{\mathbf{R}}_s - I\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= \mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + I(-\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s\frac{\mathbf{t}_s}{2} + \frac{\mathbf{t}_s}{2}\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + \mathbf{R}_s\mathbf{m}\tilde{\mathbf{R}}_s) \\
 &= \mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + I(\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s' + \mathbf{R}'_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + \mathbf{R}_s\mathbf{m}\tilde{\mathbf{R}}_s)
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

La transformación de un plano bajo un movimiento rígido puede verse como el movimiento del dual de un punto. Así, la ecuación A.7 puede utilizarse para expresar la ecuación de movimiento del plano como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}' &= \mathbf{n}' + Id' \\
 &= \mathbf{M}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{M}(\mathbf{n} + Id)\tilde{\mathbf{M}} \\
 &= \mathbf{T}_s\mathbf{R}_s(\mathbf{n} + Id)\tilde{\mathbf{R}}_s\tilde{\mathbf{T}}_s \\
 &= (1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2})(\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + Id)(1 + I\frac{\mathbf{t}_s}{2}) \\
 &= \mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + I(\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s\frac{\mathbf{t}_s}{2} + \frac{\mathbf{t}_s}{2}\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + d) \\
 &= \mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s + I(\mathbf{t}_s \cdot (\mathbf{R}_s\mathbf{n}\tilde{\mathbf{R}}_s) + d)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Apéndice B

Propiedades de algunas entidades en $\mathcal{G}_{4,1}$

A continuación se presentan algunas de las propiedades de las entidades más usadas en el álgebra geométrica conformal.

B.1. Propiedades del punto

Gracias a que en $\mathcal{G}_{4,1}$ y más específicamente en el álgebra geométrica conformal usamos coordenadas homogéneas, podemos tener representaciones únicas de los puntos o hasta un factor escalar. Para quitar ese factor escalar se normalizan estos puntos de la manera siguiente:

$$\underline{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{-e \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{B.1})$$

La representación proyectiva para el punto de la forma 2.110 es:

$$e \wedge \underline{\mathbf{x}} = \frac{e \wedge \mathbf{x}}{-e \cdot \mathbf{x}} = e \underline{\mathbf{x}} + e \wedge e_0 \quad (\text{B.2})$$

Nótese que $e \wedge \mathbf{x} = e \mathbf{x} = -\mathbf{x} e$ porque $e \cdot \mathbf{x} = 0$. Utilizando la expresión 2.103 se tiene que:

$$(e \wedge \underline{\mathbf{x}})E = 1 + e \mathbf{x} \quad (\text{B.3})$$

esta es la representación de un punto en el modelo afino.

Utilizando la fórmula 2.107 sobre un punto $\underline{\mathbf{x}} \in \mathcal{G}_{4,1}$ normalizado, se puede recuperar el punto \mathbf{x}

$$P_E^\perp(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{x} \in \mathcal{G}_3 \quad (\text{B.4})$$

B.2. Propiedades de la línea

El cuadrado de una línea de la forma 2.128 esta dado por:

$$\begin{aligned}
 (e \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}})^2 &= -(\underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge e) \cdot (e \wedge \underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}}) \\
 &= [(\underline{\mathbf{b}} \wedge \underline{\mathbf{a}}) \cdot e] \cdot [e \cdot (\underline{\mathbf{a}} \wedge \underline{\mathbf{b}})] \\
 &= [\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}] \cdot [\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}}] \\
 &= (\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}})^2
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

el cual es igual a la distancia Euclidiana al cuadrado del segmento que se forma entre los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Una línea se puede normalizar de la siguiente manera:

$$\underline{\mathbf{L}}^* = \frac{\underline{\mathbf{L}}^*}{\sqrt{\underline{\mathbf{L}}^* \cdot \underline{\mathbf{L}}^*}} \tag{B.6}$$

al normalizar, el segmento que forman los dos puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} tiene una distancia unitaria.

Para recuperar los vectores correspondientes al momento y la dirección de una línea se aplican las siguientes formulas:

$$\mathbf{r} = \underline{\mathbf{L}}^* \cdot \mathbf{E} \tag{B.7}$$

$$\mathbf{m} = e_+ \cdot \underline{\mathbf{L}} \tag{B.8}$$

en donde $\mathbf{r}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$

Para encontrar el punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ que corresponde al punto más cercano al origen que pertenece a la línea, se aplican las fórmulas B.7 y B.8 normalizando previamente la línea con la ecuación B.6

$$\mathbf{p} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \tag{B.9}$$

en donde $\mathbf{M} = \mathbf{m}I_E$ es un bivector.

B.3. Propiedades de la esfera

Teorema B.1. *Dos esferas o hiperplanos $\underline{\mathbf{s}}_1^*$, $\underline{\mathbf{s}}_2^*$ se intersectan, son tangentes o paralelas, o no se intersectan si y solo si $(\underline{\mathbf{s}}_1 \wedge \underline{\mathbf{s}}_2)^2$ es $<, =, > 0$, respectivamente.*

Examinando el caso en que $\underline{\mathbf{s}}_1^*$, $\underline{\mathbf{s}}_2^*$ son ambas esferas que es el caso que se usará posteriormente.

- *si se intersectan*, la intersección $(\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2)^*$ es una esfera, como $e \wedge (\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2)^* \neq 0$. El centro y radio de la intersección son el mismo con ellos de la esfera $(P_{\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2}(e))^*$. La intersección yase en un hiperplano $(e \cdot (\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2))^*$
- *si son tangentes*, el punto de tangencia es proporcional al vector nulo $P_{\underline{s}_2}^\perp = (\underline{s}_2 \wedge \underline{s}_1) \underline{s}_1^{-1}$
- *si no se intersectan*, hay dos puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, llamados *puntos Poncelet*, los cuales son inversos del otro con respecto a las dos esferas \underline{s}_1 y \underline{s}_2^*

Al igual que el punto expresado en la ecuación B.1 la esfera puede estar hasta un factor escalar, para normalizar se emplea lo siguiente:

$$\underline{s} = \frac{\underline{s}}{-e \cdot \underline{s}} \quad (\text{B.10})$$

Para obtener el centro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ de una esfera ya normalizada se aplica la expresión 2.107 a \underline{s}

$$\mathbf{p} = (\underline{s} \wedge E)E \quad (\text{B.11})$$

y para recuperar $\underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{G}_{4,1}$

$$\underline{\mathbf{p}} = \underline{s} + \frac{1}{2} \underline{s}^2 e \quad (\text{B.12})$$

B.4. Propiedades del par de puntos

Sea $\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} = \underline{\mathbf{p}}_1 \wedge \underline{\mathbf{p}}_2$, entonces para poder recuperar los dos puntos que estan en la entidad *par de puntos* se aplica la siguiente fórmula:

$$\underline{\mathbf{p}}_{1,2} = \frac{\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \pm \sqrt{\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \cdot \underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*}}}{\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \cdot e} \quad (\text{B.13})$$

donde

$$\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} - \sqrt{\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \cdot \underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*}} = \underline{\mathbf{p}}_1 \underline{\mathbf{p}}_2 = \underline{\mathbf{p}}_1 \cdot \underline{\mathbf{p}}_2 + \underline{\mathbf{p}}_1 \wedge \underline{\mathbf{p}}_2 \quad (\text{B.14})$$

$$\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} + \sqrt{\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \cdot \underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*}} = -\underline{\mathbf{p}}_2 \underline{\mathbf{p}}_1 = -\underline{\mathbf{p}}_1 \cdot \underline{\mathbf{p}}_2 + \underline{\mathbf{p}}_1 \wedge \underline{\mathbf{p}}_2 \quad (\text{B.15})$$

y $\underline{\mathbf{P}\mathbf{P}^*} \cdot e = \underline{\mathbf{P}}$ es el plano tangente a la línea que forman estos dos punto ubicado entre el par de puntos a una distancia equidistante de cada punto. El punto $\underline{\mathbf{p}}_1$ se recupera teniendo como numerador a B.14 y $\underline{\mathbf{p}}_2$ teniendo como numerador a B.15.

B.5. Propiedades de los rotores

Dado un rotor $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$, se puede extraer el ángulo de rotación θ hasta una diferencia de signo y su eje de rotación $\underline{\mathbf{l}}$ de la siguiente manera:

$$c = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\mathbf{R} + \widetilde{\mathbf{R}}}{2} \quad (\text{B.16})$$

despejando θ de B.16

$$\theta = 2 \cos^{-1}(c) \quad (\text{B.17})$$

para obtener el eje de rotación, se subtrae la parte escalar del rotor, al hacer esto queda solo la parte bivectorial, aquí al rotor se trata como si fuera una línea en conformal

$$\underline{\mathbf{L}} = \mathbf{R} - c = \frac{\mathbf{R} - \widetilde{\mathbf{R}}}{2} \quad (\text{B.18})$$

y se normaliza sacando su dual $\underline{\mathbf{L}}^*$ y utilizando la ecuación B.6. Así se obtiene el eje de rotación unitario, en su forma dual. Por último se regresa la línea a su forma estandar.

Nótese que si $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}} = \mathbf{T}\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{T}}$ es una rotación general, los casos mostrados en las ecuaciones B.16 y B.18 son validos, ya que la única diferencia es el bivector $e(\mathbf{t} \ \underline{\mathbf{l}})$ que representa el momento de la línea.

Para obtener el rotor que tenga su eje que pase por el origen (sin momento) se utiliza la ecuación 2.107, obteniendo:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} \quad (\text{B.19})$$

Ya sea que un rotor este en el origen o no lo este, una de las propiedades que conserva es que su magnitud sea unitaria, esto es que $\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{R}} = 1$, considerando el caso para $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}}\widetilde{\mathbf{R}}_{\underline{\mathbf{L}}} &= \mathbf{T}\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}} \\ &= \mathbf{T}\mathbf{R}(1)\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}} \\ &= \mathbf{T}(1)\widetilde{\mathbf{T}} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.6. Propiedades de los motores

Dado un motor $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ de la forma 2.135 se puede extraer su vector de translación y por consecuencia su parte traductor, y su parte de rotación en el origen.

De 2.135 se puede observar que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{TR} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}et\right)\mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R} + \frac{1}{2}et\mathbf{R}
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Al igual que en B.19 aplicando la expresión 2.107 al motor B.21

$$\mathbf{R} = (\mathbf{M} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} \tag{B.22}$$

y extrayendo la parte de rotación, la cual tiene su eje de rotación pasando por el origen (una línea sin momento).

Se ve que el segundo sumando de B.21 es un rotor multiplicado por $\frac{1}{2}et$, entonces haciendo un poco de álgebra se obtiene:

$$\mathbf{R}' = (e_- \mathbf{M})I_E \tag{B.23}$$

el cual tiene una característica especial. Si se toman las entradas del rotor resultante de B.22 y se le asignan a un vector \mathbf{v}_1 y haciendo lo mismo para B.23 en \mathbf{v}_2 , se ve que $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, ya que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Teniendo los rotores B.22 y B.23 se expresa la ecuación B.21 como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} + e\mathbf{R}'I_E \tag{B.24}$$

Finalmente, el vector de translación \mathbf{t} puede ser recuperado igualando la ecuación B.21 con la ecuación B.24, de donde se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} + \frac{1}{2}et\mathbf{R} &= \mathbf{R} + e\mathbf{R}'I_E \\
 \frac{1}{2}et\mathbf{R} &= e\mathbf{R}'I_E \\
 \frac{1}{2}et\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} &= e\mathbf{R}'I_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 et &= 2e\mathbf{R}'I_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 -e_0 \cdot et &= -e_0 \cdot 2e\mathbf{R}'I_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 \mathbf{t} &= 2\mathbf{R}'I_E\tilde{\mathbf{R}}
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Una vez obtenido el vector de translación, se crea el translador \mathbf{T} con la ecuación 2.133. Así se puede calcular el motor utilizando B.22 y B.25 quedando de la siguiente manera: $\mathbf{M} = \left(1 + \frac{1}{2}et\right)\mathbf{R}$.

Nótese que estos casos son válidos para un rotor que tenga su eje de rotación en el origen. En el caso de que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}} = \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}}$ el rotor B.22 devolverá el rotor que tenga el mismo eje, pero este estará en el origen, y conservará su ángulo de rotación θ , y B.25 devolverá un vector de translación diferente al del translador original debido a que se empleó un rotor en el origen en vez de un rotor trasladado fuera del origen. El motor resultante conservará el mismo comportamiento, esto es, sea $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ y que tenga la forma $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1\mathbf{R}_{\underline{\mathbf{L}}} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}_2$, se puede encontrar $\mathbf{M}_2 = \mathbf{T}_3\mathbf{R}_2$ utilizando B.22 y B.25 donde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2$.

Dado que $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ es el resultado del producto geométrico de multivectores invertibles ($\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$ y $\mathbf{T}\tilde{\mathbf{T}} = 1$), \mathbf{M} es considerado un versor, con la siguiente propiedad $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}} = 1$ ya que:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}} \\ &= \mathbf{T}(1)\tilde{\mathbf{T}} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{B.26}$$

y como versor pertenece al grupo de versores y como también tiene magnitud unitaria pertenece al grupo pin de versores.

Bibliografía

- [1] Rosenhanhn B. and Sommer G. Pose estimation in conformal geometric algebra. *Journal of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, 22, 2005.
- [2] Damini Dey, David G. Gobbi, Piotr J. Slomka, Kathleen J. M. Surry, and Terence M. Peters. Automatic fusion of freehand endoscopic brain images to three-dimensional surfaces: Creating stereoscopic panoramas. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. 21, No. 1, pages 23–30, January 2002.
- [3] Bayro C. Eduardo. *Geometric Computing for Perception Action Systems, Concepts, Algorithms and Scientific Applications*. New York: Springer, 2002.
- [4] Bayro C. Eduardo. *Handbook of Geometric Computing: Applications in Pattern Recognition, Computer Vision, Neurocomputing and Robotics*. Springer-Verlag, Heidelberg, June 2005.
- [5] Bayro C. Eduardo and Garret Subczyk. *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*. Boston: Birkhäuser, 2001.
- [6] Aly A. Farag, Charles B. Sites, and Moumen T. Ahmed. Virtual endoscopy: Modeling the navigation in 3d brain volumes. *TR-CVIP*, 2001.
- [7] Sommer G. *Geometric Computing with Clifford Algebra: Theoretical foundations and applications in computer vision and robotics*. Berlin; New York: Springer, 2001.
- [8] Northen Digital Inc. *NDI Polaris and Aurora Combined Application Programmers Interface Guide*, 2002.
- [9] Northen Digital Inc. *System Guide Enhanced Hybrid System*, 2003.
- [10] Northen Digital Inc. *NDI 6D Architect User Guide*, 2004.
- [11] Northen Digital Inc. *Polaris Tool Design Guide*, 2004.

- [12] Rivera Roveló Jorge. Alineamiento y seguimiento en neurocirugía asistida por computadora. Master's thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, México, 2003.
- [13] J. Lasenby, A.N. Lasenby, C. Doran, and W.J. Fitzgerald. New geometric methods for computer vision - an application to structure and motion estimation. *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, pages 191–213, 1998.
- [14] Pertti Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 1997.
- [15] Abdou M. and Cohen A. Endoscopic surgery of the third ventricle: the subfrontal translamina terminalis approach. *Minim Invasive Neurosurgery*, December 2000.
- [16] C. Perwass and D. Hildenbrand. Aspects of geometric algebra in euclidean, projective and conformal space. Technical Report Number 0310, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Institut für Informatik und Praktische Mathematik, September 2003.
- [17] Ramos-Zúniga R. The trans-supraorbital approach. *Minim Invasive Neurosurgery*, September 1999.
- [18] Ramos-Zúniga R. and Velázquez H. Trans-supraorbital approach to supratentorial aneurysms. *Neurosurgery*, July 2002.
- [19] Will Schroeder, Ken Martin, Will Hoftman, and Lisa Avila. *The VTK User's Guide*, 2004.
- [20] Will Schroeder, Ken Martin, and Bill Lorensen. *The Visualization Toolkit: An Object-Oriented Approach to 3D Graphics*, 2004.



Cinvestav

Unidad Guadalajara

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la Tesis:

“Seguimiento y Monitoreo Virtual en Neurocirugía”

del (la) C.

Héctor Rafael OROZCO AGUIRRE

El día 20 de Enero de 2006.

**Dr. Eduardo Bayro Corrochano
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara**

**Dr. Amner Israel Ramírez Vázquez
Investigador CINVESTAV 2C
CINVESTAV Unidad Guadalajara**

**Dr. Rodrigo Ramos Zúñiga
Investigador**

**Universidad de Guadalajara
Laboratorio de Neurocirugía
Facultad de Medicina**



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000008447