



Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico
Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

Observadores no lineales robustos para biorreactores continuos de microorganismos

Tesis que presenta:

Emmanuel Isaí Gamero Ramírez

Para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Control Automático

Directores de Tesis:

Dr. Jorge Antonio Torres Muñoz

Dr. Jesús Norberto Guerrero Tavares

Ciudad de México

Agosto, 2023

Agradecimientos

- *A mis padres -Estela, Filemón- y hermano -Juan Carlos- los cuales siempre me han apoyado para llevar a cabo todas las metas de mi vida.*
- *A los doctores Jorge Antonio Torres Muñoz y Jesús Norberto Guerrero Tavares por sus valiosos conocimientos que me fueron compartidos, sus aportes a mi formación profesional y su paciencia en el desarrollo del presente trabajo.*
- *A la Dra. Martha Belem por sus apreciables comentarios sobre el presente trabajo, así como al Dr. Juan Carlos Martínez García y la Dra. Petra Wiederhold Grauert de Matos por formar parte del comité evaluador.*
- *Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca que me fue otorgada.*

Resumen

Actualmente el problema de la contaminación del agua por metales pesados repercute en la salud de la población debido a su toxicidad, este problema se da por las aguas que proceden de industrias de diversas índoles que la contaminan con metales como aluminio, plata, plomo y zinc que además son tóxicas para la flora y fauna. Un enfoque para tratar este problema es el uso de biorreactores, los cuales mediante el cultivo de microalgas se puede tratar la remoción de metales pesados. El uso de biorreactores igualmente requiere de finas calibraciones en sus sensores para una correcta operación, la mayor parte de las veces estos sensores suelen ser muy costosos, aunado a ello en ocasiones no es una opción viable su uso debido a que suelen ser invasivos al bioproceso, es por ello que se necesita implementar observadores que permitan estimar los estados del proceso, además de poder estimar perturbaciones externas, tales como las que se presentan en el factor de dilución debido a la falta de regulación en la entrada del reactor, las cuales pueden alterar el comportamiento del sistema. En el presente trabajo se proponen algoritmos de observación basados en modos deslizantes con el fin de estimar los parámetros desconocidos como suele ser la tasa de crecimiento o la perturbación aditiva en el factor de dilución, posteriormente se acoplarán ganancias adaptables en uno de los algoritmos propuestos. Finalmente, se evalúa su desempeño y se compara para poder analizar cuales son las ventajas y desventajas de cada uno.

Abstract

Currently the problem of water contamination by heavy metals affects the health of the population due to its toxicity, this problem is caused by the water that comes from industries of various kinds that contaminate it with metals such as aluminum, silver, lead, zinc that are also toxic to flora and fauna. One approach to deal with this problem is the use of bioreactors, which through the cultivation of microalgae can treat the removal of heavy metals. The use of bioreactors also requires fine calibrations in their sensors for correct operation, most of the time these sensors are usually very expensive, coupled with this, their use is sometimes not a viable option because they are usually invasive to bioprocesses, that is why it is necessary to implement observe that allows estimating the states of the process, in addition to being able to estimate external disturbances, such as those that appear in the dilution factor due to the lack of regulation in the input of the reactor, which can alter the behavior of the system. In the present work, observation algorithms based on sliding modes are proposed in order to estimate the unknown parameters, such as the growth rate or the additive perturbation in the dilution factor, later adaptive gains were coupled to the designed algorithms. Finally, their performance is evaluated and compared in order to analyze the advantages and disadvantages of each one.

Índice general

Introducción	1
Planteamiento del Problema	3
Objetivos	7
Estructura de la Tesis	7
1. Preliminares	11
1.1. Definiciones	11
1.1.1. Continuidad Lipschitz	12
1.1.2. Punto de equilibrio	12
1.1.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	13
1.1.4. Estabilidad uniforme	13
1.1.5. Estabilidad asintótica	14
1.1.6. Estabilidad uniforme asintótica	14
1.1.7. Estabilidad asintótica global	14
1.1.8. Estabilidad asintótica uniforme global	15
1.1.9. Estabilidad exponencial	15
1.2. Control por modos deslizantes	15
1.3. Método del control equivalente	17
1.4. Algoritmo de supertorsión	18
1.5. Observadores con ganancia adaptable	19

2. Modelado del proceso de biorremediación	23
2.1. Introducción	23
2.1.1. Clasificación y operación de los biorreactores	24
2.1.2. Proceso de biorremediación de metales pesados	26
2.1.2.1. Microorganismos	26
2.1.2.2. Metales Pesados	27
2.2. Tipos de modelos para bioprocesos	28
2.2.1. Tasa de crecimiento	31
2.3. Modelo general del bioproceso	32
3. Diseño de observadores robustos	37
3.1. Suposiciones para el diseño	37
3.2. Observadores Propuestos	39
3.2.1. Observador STA	40
3.2.2. Primera propuesta de observador basado en modos deslizantes	41
3.2.3. Observador basado en modos deslizantes con inyección de salida	44
3.2.4. Observador STA para θ	45
3.2.5. STA con ganancias adaptables	48
3.2.6. Observador para la concentración de metales pesados M	54
4. Resultados	57
4.1. Simulación del modelo del bioproceso	57
4.2. Modelo de simulación	57
4.3. Escenarios propuestos	58
4.4. Desempeño de los observadores diseñados	61
4.4.1. Escenario 1	61
4.4.2. Escenario 2	63
4.4.3. Escenario 3	65

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
4.4.4. Escenario 4	67
Conclusión general	71
Trabajo futuro	73
A. Demostraciones	75
A.1. Teorema 1:	75
B. Parámetros de Simulaciones	79

Índice de figuras

2.1. Vista de un reactor de tanque agitado	30
4.1. Simulación del proceso de biorremediación: Condiciones nominales, sin perturbaciones y con conocimiento de μ	60
4.2. Simulación del escenario 1: Caso nominal. Se muestran los estimados de los estados X y S (Fig 4.2 (a-b)), la estimación de μ , θ y M (Fig 4.2(c),(e),(g)) y sus errores de estimación (Fig 4.2(d),(f),(h)) respectivamente, para 45 hr.	62
4.3. Simulación del escenario 2: Perturbación externa $\theta = 0.01h^{-1} = 10\% d$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ desconocida.	64
4.4. Simulación del escenario 3: Perturbación externa $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ desconocida.	66
4.5. Simulación del escenario 4: Perturbación externa $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$, $t \in [0, 15]$; $\theta = \text{triangular}$, $t \in [15, 35]$; $\theta = 0.15(\text{saw}(0.1t))$, $t \in [35, 50]$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ tal como (4.2), desconocida.	68
4.6. Ganancias α y β correspondientes al escenario 4	70

Índice de tablas

4.1. Notación de los observadores propuestos.	61
B.1. Tabla de parámetros para el modelo del bioproceso.	79
B.2. Tabla de parámetros con los valores de las entradas al bioproceso.	80
B.3. Tabla de parámetros con los valores de las condiciones iniciales.	81

Introducción

El agua es una de las moléculas más comunes en los seres vivos, ésta desempeña un papel importante para la vida como la conocemos debido a sus múltiples propiedades que permiten las reacciones químicas necesarias en los compuestos orgánicos para realizar las funciones vitales tal como el transporte de sustancias a través de las membranas, las cuales son necesarias para mantener la temperatura constante, producir fluidos digestivos e incluso la disolución de los productos de desecho [23].

Dado lo anterior se puede ver que el agua desempeña un papel de suma importancia en la existencia de todas las formas de vida en nuestro planeta, no solo para la humanidad sino también para la flora y fauna. Por lo tanto, el uso y aprovechamiento adecuado del agua son de una relevancia inigualable. Sin embargo, su amplia gama de aplicaciones también implica el riesgo de agotamiento, dado que se trata de un recurso natural no renovable.

En el caso específico de México, el preocupante aumento de acuíferos sobreexplotados es una clara señal de la creciente presión sobre este recurso vital. En 1975, se identificaban 32 acuíferos en esta situación, una cifra que ha escalado considerablemente para llegar a 105 en el año 2018 [24]. Es evidente, por lo tanto, que la conservación y preservación del agua han adquirido una relevancia crítica para el desarrollo sustentable de cualquier comunidad o ciudad.

Uno de los desafíos más apremiantes asociados al agua es su contaminación. En el año 2019, las enfermedades infecciosas intestinales representaron la sexta causa de mortalidad

infantil con un trágico total de 353 defunciones. Esta alarmante realidad resalta la importancia de abordar el tema de la contaminación del agua con seriedad y urgencia.

Hoy en día la contaminación es un problema que va en aumento, como en todo el mundo al igual que en México. Según [25], del total de agua disponible en México solo el 53.6 % es de calidad excelente, 12.9 % de buena calidad, 23 % es aceptable, 7 % esta contaminada y el 3.5 % restante se encuentra fuertemente contaminada. En mayor parte la contaminación del agua se da en los usos urbanos como los desechos residuales, la actividad agrícola la cual al emplear plaguicidas o herbicidas suelen ser absorbidos por el suelo o llevados por la lluvia a ríos o lagos, además de que el uso de estos pesticidas propicia a la infertilidad de los campos y causan daños al ecosistema. Finalmente, las zonas industriales producen descargas a los acuíferos o suelos debido a la extracción de recursos naturales y su transformación de los mismos a bienes de consumo, por lo general estos desechos contienen metales pesados de muy difícil degradación.

Este es un problema ya que la urbanización y la actividad minera han causado un aumento en la contaminación del agua debido al desarrollo acelerado de las mismas, de modo que al vertir metales pesados como cobre, zinc, plomo, entre otros a ríos se ve seriamente afectado el ecosistema, además de que en algunos casos dichos metales pesados se acumulan en suelos agrícolas en donde la toxicidad afecta los cultivos [9, 27], lo cual es de potencial riesgo para la salud humana [10].

Dado que también la mayor parte de los desechos residuales son vertidos sin ningún tratamiento previo, de igual modo se estima que solo el 5 % del agua en México es tratada esto debido que la mayor parte del consumo en el país es para uso agrícola, del mismo modo con las industrias a pesar de que la ley obliga a los usuarios a tratar el agua empleada, no se aplica. En [26] se menciona que Monterrey es la única ciudad con la capacidad de tratar el 100 % de su agua.

Debido a esta creciente problemática se ve necesario el uso de técnicas para el tratamiento del agua, actualmente existen diversos métodos para este problema.

En [28, 29] se mencionan diversos métodos como la ósmosis inversa, nanofiltración, carbón activado, electrocoagulación, por mencionar algunas, pero estos son los métodos tradicionales que suelen emplear las plantas de tratamiento industriales, también se menciona sobre los métodos más modernos los cuales incluyen la biorremediación, el uso de hidrogeles o ceniza volante.

Como se mencionó, uno de los métodos más eficientes para tratar el problema de la contaminación del agua es el uso de biorreactores empleando el proceso de biorremediación. Ésta técnica se basa en el uso de seres vivos como plantas, microalgas o microorganismos con capacidades metabólicas, además de ser una practica con una mejor capacidad de remoción de metales, suele ser más barato hasta cierto punto comparado con otros métodos [30].

Sin embargo, el uso de microorganismos u otros para la remoción de metales pesados es una técnica relativamente nueva y no convencional por lo cual aún falta más información para la mejora de los bioreactores, además de que se requiere de constante mantenimiento al equipo tal como la correcta calibración de sensores así como los actuadores para finalmente realizar una correcta instalación, puesta en marcha y operación de los equipos, es por ello que una alternativa al estudio de estos sistemas biológicos se puede abordar mediante el uso de simulaciones de cómputo.

Planteamiento del Problema

Como se mencionó previamente, el problema de la contaminación del agua con metales pesados es un problema que se puede abordar mediante el uso de biorreactores, los cuales también suelen ser de difícil implementación, ya que por lo general suele ser muy costosa su instrumentación o puede ser invasivo al proceso, así se puede determinar que

- No se tiene una comprensión absoluta del bioproceso a realizar, debido a sus múltiples parámetros que suelen afectar la dinámica, tales como la tasa de

crecimiento, la absorción de nutrientes, entre otros factores.

- La dificultad para obtener mediciones precisas de los estados de un bioproceso está relacionada en gran medida con los sensores utilizados en dichas mediciones. Los sistemas biológicos son inherentemente complejos y con dinámicas complejas, lo que hace que la selección y el uso adecuado de sensores sean un desafío. Lo anterior en parte por la interferencia con el medio biológico, debido a que los sensores deben operar dentro del bioproceso y a menudo pueden interferir con el propio sistema biológico. Los microorganismos o las células pueden afectar la función de los sensores y, a su vez, los sensores pueden influir en el comportamiento de los microorganismos, lo que puede llevar a mediciones inexactas o perturbaciones en el bioproceso. Además, en entornos biológicos complejos, puede haber interferencias de otras sustancias presentes en el medio, lo que dificulta la selectividad del sensor para medir específicamente el parámetro deseado.
- Algunos problemas adicionales respecto a las mediciones de los estados del bioproceso pueden ser: La relación entre la magnitud que se desea medir y la señal del sensor no es lineal. Esto significa que la interpretación de las mediciones puede requerir calibraciones complejas y el uso de curvas de calibración no lineales. Los sistemas biológicos pueden experimentar cambios rápidos y dinámicos en sus estados, lo que requiere sensores con tiempos de respuesta adecuados para capturar esos cambios en tiempo real. Los tiempos de respuesta lentos pueden llevar a mediciones desactualizadas o inexactas. De igual forma, las mediciones en bioprocesos a menudo requieren una alta sensibilidad y precisión. Pequeñas variaciones pueden tener un impacto significativo en los resultados del proceso. Los sensores deben ser lo suficientemente sensibles y precisos para detectar y cuantificar esas variaciones con exactitud.
- El diseño de un biorreactor suele ser complejo, así como su implementación debido

a dificultades para su escalamiento.

- La construcción de un biorreactor es muy costosa debido a los altos precios de los componentes, los cuales tiene un rango de fiabilidad, además de su operación y mantenimiento.

Los problemas mencionados anteriormente tratan respecto a los biorreactores en general, su diseño, construcción, implementación así como operación y mantenimiento, pero aunado a lo anterior y dado que los procesos biológicos son específicos dependiendo del tipo de microorganismo, sustrato y condiciones de operación, suele ser bastante complejo tener un conocimiento exacto de la dinámica, tal es el caso de la tasa de crecimiento, es por ello que es viable la construcción de modelos que permitan el diseño de algoritmos de observación y así se puedan abordar las principales problemáticas del presente trabajo.

Dado lo anterior, se puede ver que una solución a la problemática es el uso de observadores no lineales dadas las características del modelo biológico, sin embargo, dichos modelos suelen ser muy inciertos, esto debido a que generalmente los modelos tienen dinámicas no modeladas, como es el caso de la tasa de crecimiento, la cual está en función del pH, la intensidad lumínica, la temperatura, etc. Se puede notar que mientras más parámetros se consideren asociados a dicha tasa de crecimiento, cada vez se vuelve más complejo el análisis. Otro problema es que dadas las imperfecciones en la construcción de los prototipos se pueden presentar perturbaciones aditivas en el factor de dilución, esto debido a una mala programación de los equipos encargados de regular el factor de dilución, incluso un valor muy pequeño puede afectar considerablemente el desempeño del proceso.

Finalmente, la problemática recae en mejorar los algoritmos que se encuentran en la literatura, dado que se puede encontrar diseño de observadores dependiendo del enfoque que se tenga disponible para aplicar, como en el caso donde se tiene conocimiento del comportamiento de la tasa de crecimiento del microorganismo, el segundo enfoque se basa

en considerar desconocida la tasa de crecimiento. De modo que analizando los trabajos desarrollados se pueda realizar mejoras tanto en las condiciones restrictivas que permitan una implementación mas sencilla, así como una mejora en los resultados obtenidos.

Objetivos

Objetivo General:

Desarrollar el análisis y diseño de observadores no lineales robustos basados en la teoría de modos deslizantes con el fin de realizar la estimación de dinámicas desconocidas presentes en la tasa de dilución tal como perturbaciones externas, además de la estimación de estados tales como la concentración de microorganismos y de sustancias contaminantes presentes en el medio.

Objetivos Específicos:

- Investigar sobre los procesos de biorremediación de metales pesados, así como los modelos empleados.
- Revisar las deficiencias y oportunidades de las técnicas de observación de la dinámica de bioprocesos y así desarrollar un algoritmo STA¹ robusto ante las dinámicas no modeladas del bioproceso, así como a las perturbaciones externas.
- Desarrollar un algoritmo STA con una ley de ganancias adaptables, que permita estimar de mejor forma la dinámica.
- Verificar el desempeño de los algoritmos propuestos mediante simulaciones de cómputo.

Estructura de la tesis

La tesis consta de cuatro capítulos, una conclusión general e ideas para un trabajo futuro, los capítulos se describen a continuación:

- **Capítulo 1. Preliminares.** En el primer capítulo de la tesis se presentan los preliminares matemáticos empleados, los modelos matemáticos para los procesos

¹Super-Twisting Algorithm

de biorremediación descritos en capítulos posteriores se rigen por ecuaciones diferenciales y, para el diseño de observadores, se deben tener en cuenta los conceptos de estabilidad de los puntos de equilibrio en el sentido de Lyapunov del modelo analizado, así como la técnica de modos deslizantes, así como como un repaso sobre el algoritmo de STA con ganancias adaptables.

- **Capítulo 2. Modelado del proceso de biorremediación.** En el capítulo 2 se tratan los aspectos sobre el proceso biológico tratado, en este caso se ven los biorreactores y su clasificación, sus modos de operación, de igual modo se analizan los tipos de microorganismos que interfieren en los procesos de bioremediación, los cuales son los que actúan en la remoción de los metales pesados, así que también se estudian los metales pesados que frecuentemente suele encontrarse en las aguas contaminadas. Finalmente se tratan los aspectos a considerar para el desarrollo de modelos matemáticos que describan la dinámica de los procesos biológicos, así como las suposiciones que se deben tomar en cuenta posteriormente para el diseño de observadores.
- **Capítulo 3. Diseño de observadores robustos.** El capítulo 3 muestra el desarrollo de los algoritmos propuestos en éste trabajo, los cuales se basan en el modelo general de los modelos para biorreactores continuos, en el primer caso lo que se hace es reescribir la dinámica de modo que se puedan evitar suposiciones de diseño presentadas en trabajos anteriores, éste nuevo observador ya no depende de una función regresor, el segundo algoritmo desarrollado retoma el punto de partida del algoritmo anterior, pero ahora se añade un factor de corrección en el estimado del sustrato, lo cual repercute de mejor forma en el estimado de la perturbación en el factor de dilución, el tercer algoritmo propuesto parte de la idea de los primeros dos anteriores pero ahora se aplica al observador para el sustrato, el cuarto algoritmo desarrollado muestra el algoritmo STA pero se aplican ganancias adaptables al mismo, finalmente se presenta un algoritmo para el estimado de la concentración

del metal en el medio.

- **Capítulo 4. Resultados.** En el capítulo 4 se muestra el desempeño de todos los algoritmos propuestos con el fin de obtener claro cual permite una mejor estimación de los estados, así como de la dinámica de la tasa de crecimiento y la perturbación, posteriormente se realiza el mismo análisis pero esta vez se emplea una perturbación continua y acotada de modo que se pueda ver cual de los observadores presenta mejor estimado del modelo analizado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones

En este trabajo se consideran sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de la forma siguiente,

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$. El sistema (1.1) se le dice autónomo o invariante en el tiempo si la función $f(\cdot)$ no depende de t . El sistema es lineal si $f(x, t) = A(t)x$ para alguna matriz $A(\cdot) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ y en cualquier otro caso sería no lineal [3]. Se considera que el sistema tiene solución única para $x(t_0)$ dado, es decir, $f(x, t)$ satisface lo siguiente:

- Es continua por pedazos respecto a t .
- Satisface la condición Lipschitz respecto de x
- Verifica la condición de Wintner, i.e. $\|f(t, x)\| \leq \alpha(t) + \beta(t)\|x(t)\|$.

Considerando una bola definida como $B_h \triangleq B(0, h)$, la cual es la bola de radio h con centro en 0.

Un cierta propiedad (P) del sistema (1.1) se dirá que se cumple

- *localmente*, si P es verdadera $\forall x_0$ en una bola B_h .
- *globalmente*, si P es verdadera $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- *semi globalmente*, si P es verdadera $\forall x_0 \in B_h$ con radio arbitrario.
- *uniformemente*, si P es verdadera $\forall t_0 \geq 0$.

1.1.1. Continuidad Lipschitz

La función vectorial $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ se dice localmente Lipschitz continua en x si para algún $h > 0$ existe un $l \geq 0$ tal que

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq l\|x_1 - x_2\| \quad (1.2)$$

$\forall x_1, x_2 \in B_h, t \geq 0$, se le suele conocer a l como constante de Lipschitz. La definición de función continua global Lipschitz requiere que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, la definición de semi-globalmente Lipschitz continuo también se cumple al requerir que (1.2) se cumpla con B_h para un radio arbitrario pero con l posiblemente en función de h . Así la propiedad de Lipschitz se asume uniforme en t .

1.1.2. Punto de equilibrio

Sea x^* un punto de equilibrio de (1.1), es decir $f(x^*, t) \equiv 0 \forall t \geq 0$. Si $f(x, t)$ es Lipschitz continuo en x , entonces la solución $x(t) \equiv x^* \forall t$ es llamada solución de equilibrio. Si trasladamos el origen al punto de equilibrio x^* se puede hacer $x^* = 0$ un punto de equilibrio. Por lo anterior, supondremos entonces que el origen es un punto de equilibrio de (1.1). Una consecuencia de la hipótesis de continuidad Lipschitz es que da cotas en la tasa de convergencia o divergencia de soluciones desde el origen.

Proposición 1.1 (Tasa de crecimiento/decaimiento). Si $x = 0$ es un punto de equilibrio de (1.1) y $f(x, t)$ es Lipschitz en x con cota l y continua a pedazos con respecto a t ,

entonces la solución de $x(t)$ satisface

$$\|x_0\|e^{l(t-t_0)} \geq \|x(t)\| \geq \|x_0\|e^{-l(t-t_0)} \quad (1.3)$$

dicha proposición implica que las soluciones que comienzan dentro de B_h permanecerán en B_h por al menos un tiempo finito, además si $f(x, t)$ es globalmente Lipschitz se garantiza que la solución no tiene escapes en tiempo finito. La proposición también establece que las soluciones $x(t)$ no pueden converger a cero más rápido que exponencialmente.

De igual modo, se recuerda el concepto de punto de equilibrio ($x = 0$) estable que es central en el desarrollo de la teoría de control de sistemas dinámicos.

1.1.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

El punto de equilibrio $x = 0$ es llamado punto de equilibrio estable de (1.1) si $\forall t_0 \geq 0$ y $\epsilon > 0$, existe un $\delta(t_0, \epsilon)$ tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.4)$$

donde $x(t)$ es la solución de (1.1) con c.i. x_0 en t_0 . En esta definición se tiene que las trayectorias comienzan en una bola B_δ y no abandonan otra bola B_ϵ , es también conocida como estabilidad en el sentido de Lyapunov en el tiempo t_0 .

1.1.4. Estabilidad uniforme

El punto de equilibrio $x = 0$ es llamado punto de equilibrio uniformemente estable de (1.1) si en la definición anterior δ puede ser elegido independiente de t_0 . Note que en estabilidad uniforme, el punto de equilibrio no se vuelve progresivamente más o menos estable con el tiempo. Ahora, se previene una situación donde $\epsilon > 0$ de la definición (1.4) además debe cumplir que $\epsilon \rightarrow 0$ conforme $t_0 \rightarrow \infty$. En cuyo caso, las trayectorias que inician en la vecindad $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ son acotadas y convergen asintóticamente a una vecindad de radio cero.

1.1.5. Estabilidad asintótica

El punto de equilibrio $x = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (1.1) si

- $x = 0$ es un punto de equilibrio estable de (1.1).
- $x = 0$ es atractivo, esto es $\forall t_0 \geq 0 \exists \delta(t_0)$ tal que

$$\|x_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Se puede ver que en esta definición se requiere dos condiciones separadas, que el punto de equilibrio sea estable y, por otra parte, que las trayectorias tiendan al punto de equilibrio tal que $t \rightarrow \infty$.

1.1.6. Estabilidad uniforme asintótica

El punto de equilibrio $x = 0$ es un punto de equilibrio uniforme asintóticamente estable de (1.1) si:

- $x = 0$ es un punto de equilibrio uniformemente estable de (1.1).
- La trayectoria $x(t)$ converge uniformemente a 0, es decir, existe un $\delta > 0$ y una función $\gamma(\tau, x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0 \forall x_0 \in B_\delta$ y

$$\|x_0\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \geq t_0$$

Estas definiciones son locales, debido a que son vecindades del punto de equilibrio.

1.1.7. Estabilidad asintótica global

El punto de equilibrio $x = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable de (1.1) si es estable y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1.1.8. Estabilidad asintótica uniforme global

El punto de equilibrio $x = 0$ va a ser asintóticamente uniformemente globalmente estable de (1.1) si es globalmente asintóticamente estable y además, la convergencia al origen de las trayectorias es uniforme en el tiempo, i.e. $\exists \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\|x(t)\| \leq \gamma(x_0, t - t_0) \quad \forall t \geq 0.$$

1.1.9. Estabilidad exponencial

El punto de equilibrio $x = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable de (1.1) si $\exists m, \alpha > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq m e^{-\alpha(t-t_0)} \|x_0\|$$

para todo $x_0 \in B_h$, $t \geq t_0 \geq 0$, donde α se le conoce como un estimado de la tasa de convergencia.

La estabilidad exponencial global se define al requerir que la ecuación anterior se cumpla para todos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La estabilidad exponencial semiglobal también se define de manera análoga, excepto que m y α pueden ser funciones de h . Para sistemas lineales (posiblemente variables en el tiempo) la estabilidad asintótica uniforme es equivalente a estabilidad exponencial, pero en general, la estabilidad exponencial es más fuerte que la estabilidad asintótica.

1.2. Control por modos deslizantes

En sistemas no lineales complejos las técnicas convencionales de control tienen limitaciones, es por ello que algunas veces se aborda el diseño del sistema de control estructurado. Hay diversas técnicas tales como el control adaptable, control híbrido, control de estructura variable, entre otros [32]. En este caso, los sistemas con métodos de control por modos deslizantes son un caso particular del control de estructura variable. Los

modos deslizantes son de gran interés debido a su capacidad de ser empleados en sistemas dinámicos no lineales que operan bajo condiciones inciertas. La gran versatilidad de esta técnica proviene del hecho de que los estados del sistema son forzados a evolucionar sobre un subespacio del espacio de estados denominado superficie deslizante (variedad atractiva) [31, 19].

Esta técnica, como ya se mencionó, presenta un muy buen desempeño ante sistemas no lineales y además presentan robustez a perturbaciones e incertidumbres paramétricas del modelo [17].

Sea $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal dada como:

$$\sigma(x) = Sx \quad (1.5)$$

donde $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es de rango completo y representa el hiperplano, dada de la forma:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\} \quad (1.6)$$

y σ es la variable de deslizamiento.

Considérese un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u, d)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y $d \in \mathbb{R}^q$ es una perturbación externa o incertidumbre del sistema que esta acotada.

Definición 1.1. Supóngase que existe un tiempo finito $t_s \in \mathbb{R}^+$ tal que en (1.6) si los estados evolucionan con el tiempo tal que $\sigma(x(t_s)) = 0$, se dice que $\sigma(x)$ es un modo deslizante ideal

Si la acción de control es de la forma $u = u(x)$ es discontinua, la dinámica en lazo cerrado va a ser:

$$\dot{x}(t) = f^c(x) \quad (1.7)$$

tal que la función $f^c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ y es discontinua con respecto al vector de estado. Para este caso se emplea el concepto de solución de Fillipov para ecuaciones diferenciales

con lado derecho discontinuo donde se construye una solución como el promedio de las soluciones obtenidas al acercarse al punto de discontinuidad desde diferentes direcciones [31].

Definición 1.2 Se le conoce como inclusión diferencial de Phillipov a

$$\dot{x} \in F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

si el espacio vectorial $F(x)$ es no vacío, cerrado, convexo localmente acotado y semicontinuo hacia arriba, así sus soluciones son funciones absolutamente continuas que satisfacen la inclusión casi en todas partes. Una función es absolutamente continua si y solo si puede representarse como una integral de Lebesgue de alguna función integrable.

1.3. Método del control equivalente

Suponemos que el vector de estado inicial del sistema está en la intersección de todas las superficies de discontinuidad, es decir que $\sigma(x) = 0$ y el modo deslizante ocurre con las trayectorias de estado confinadas a esta superficie para $t > 0$.

Ahora ya que el modo deslizante ideal implica que $\sigma(x) = 0 \forall t > 0$, podemos suponer que $\dot{\sigma} = 0$, de modo que se pueden caracterizar las trayectorias del estado durante el modo deslizante.

Este es un método conveniente para los modos deslizantes de primer orden, dado que se hace la consideración de que el control cambia a muy alta frecuencia, en teoría infinita, de modo que el vector de velocidad de estado es orientado a lo largo de las intersecciones de superficies discontinuas pero debido a perturbaciones externas el estado oscilará en una vecindad de la intersección, de modo que la frecuencia es finita, dichas oscilaciones tienen alta frecuencia y componentes lentos. Se puede ver que el control equivalente está cerca del componente lento del control real, así que puede filtrarse la componente de alta frecuencia empleando un filtro pasa bajas, para ello se debe de emplear una constante de tiempo pequeña para eliminar las oscilaciones de alta frecuencia [31, 33].

Considerando un control de la forma:

$$u = -M\text{sign}(\sigma)$$

donde M es una constante, en este caso la variable deslizante puede estar definida como el error de estimación del modo $\sigma = x - \hat{x} = \sigma = e(x)$.

1.4. Algoritmo de supertorsión

Este algoritmo se basa en la técnica de modos deslizantes de segundo orden y tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -K_1\sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1) + x_2 + \varrho_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= -K_2\text{sign}(x_1) + \varrho_2(x, t)\end{aligned}\tag{1.9}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ con las ganancias del algoritmo STA, y ϱ_1, ϱ_2 son perturbaciones acotadas. Este algoritmo ofrece convergencia en tiempo finito y robustez ante perturbaciones acotadas.

Dado que la parte derecha del algoritmo es discontinuo, sus soluciones están definidas en el sentido de Filippov, ahora se muestran las propiedades de (1.9), la demostración de dichas propiedades se puede encontrar en [16].

Teorema 1. Sea el algoritmo STA (1.9) con las ganancias $K_1 > 0$ y $K_2 > 1$ y la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \zeta^T P \zeta\tag{1.10}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{|x_1|}\text{sign}(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix}\tag{1.11}$$

con $P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_d \\ p_d & p_2 \end{bmatrix} > 0$ y ζ es un cambio de variable de modo que sea más simple el análisis del sistema.

- Para $\varrho_1(x, t) = 0$ y $|\varrho_2(x, t)| \geq 1$, se puede ver que el punto de equilibrio x^* del STA es robusto y globalmente estable en tiempo finito y para cualquier trayectoria que inicie en $x(0) = x_0$ convergera en un tiempo finito τ menor que $T(x_0)$, asi

$$T(x_0) = \frac{2}{\varsigma} \sqrt{V(x_0)} \quad \varsigma = \frac{\alpha_v \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} \quad (1.12)$$

- Si se tiene $|\varrho_1(x, t)| \leq \delta \in \mathbb{R}_+$ y $|\varrho_2(x, t)| \leq 1$, pero como se mencionó, si $\varrho_1 = 0$ el STA es globalmente estable en tiempo finito y se tiene que el punto de equilibrio es globalmente uniformemente últimamente acotado con cota última en

$$b = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{\delta_\eta}{\alpha_v(1 - \kappa)}} \quad (1.13)$$

Demostración. Esta parte se reporta en el Apéndice A.1. □

1.5. Observadores con ganancia adaptable

En [18] se realiza una modificación al algoritmo STA clásico el cual incorpora ganancias adaptables, las cuales presentan las siguientes ventajas:

- Las ganancias adaptables permiten ajustar automáticamente los parámetros del controlador en tiempo real, lo que hace que el sistema robusto a incertidumbres perimétricas.
- La selección de ganancias fijas adecuadas puede ser un un poco más complejo al requerir más condiciones.
- Las ganancias adaptables pueden ayudar a minimizar los efectos de fenómenos no deseados, como el efecto *chattering* (oscilaciones de alta frecuencia).

En el presente trabajo se realiza un algoritmo de observación basado en el trabajo anteriormente descrito.

Considerando un sistema no lineal con entrada lineal

$$\dot{x} = f(x, t) + h(x, t)u \quad (1.14)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}$ es la función de control, $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial diferenciable, parcialmente conocido.

Asumiendo:

- Se diseña una superficie deslizante $\sigma = \sigma(x, t) \in \mathbb{R}$ para que la dinámica compensada deseable del sistema (1.14) se logre en el modo deslizante $\sigma = 0$.
- La dinámica de entrada-salida ($u \rightarrow \sigma$) del sistema (1.14) es de grado relativo uno, y la dinámica interna es estable.

Por lo tanto, la dinámica de entrada-salida se puede representar como

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} h(x, t)u \rightarrow \\ \dot{\sigma} &= \varphi(x, t) + b(x, t)u \rightarrow \\ \dot{\sigma} &= \varphi(x, t) + \omega, \quad \omega = b(x, t)u \leftrightarrow u = b^{-1}(x, t)\omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde las soluciones del sistema (1.15) están definidas en el sentido de Filippov.

Asumiendo que

- La función $b(x, t) \in \mathbb{R}$ es conocida y diferente de cero, i.e. $\forall x$ y $t \in [0, \infty]$
- La función $\varphi(x, t) \in \mathbb{R}$ está acotada y el límite finito $\delta > 0$ existe pero no se conoce, i.e.

$$|\varphi(x, t)| \leq \delta |\sigma|^{1/2} \quad (1.16)$$

El objetivo es llevar la superficie deslizante y su derivada σ a cero en tiempo finito aun en presencia de perturbaciones con límite desconocido.

Así

$$\begin{aligned} \omega &= -\alpha |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + \nu \\ \dot{\nu} &= -\beta \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde las ganancias adaptables

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha(\sigma, \dot{\sigma}, t) \\ \beta &= \beta(\sigma, \dot{\sigma}, t)\end{aligned}\tag{1.18}$$

se van a definir. El sistema dado por (1.15) y (1.17) es representado en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -\alpha|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + \nu + \varphi(x, t) \\ \dot{\nu} &= -\beta\text{sign}(\sigma)\end{aligned}\tag{1.19}$$

Ahora considere el sistema (1.19) y suponga que $\varphi(x, t)$ cumple la suposición (1.16) para una constante desconocida $\delta > 0$. Con condiciones iniciales $x(0)$, $\sigma(0)$, la superficie deslizante $\sigma = 0$ será alcanzada en tiempo finito dada la estructura (1.17) con las ganancias adaptables

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}, \text{ si } \sigma \neq 0 \\ \beta &= 2\varepsilon\alpha + \lambda + 4\varepsilon^2\end{aligned}$$

donde ε , λ , γ_1 , ω_1 con constantes arbitrarias positivas.

Para mas detalle de la demostración se puede consultar la referencia [18].

Capítulo 2

Modelado del proceso de biorremediación

2.1. Introducción

Un biorreactor es un tanque en el que ocurren varias reacciones biológicas simultáneamente en un medio líquido, dichas reacciones biológicas se pueden clasificar en dos categorías [1, 4]:

- Reacciones de crecimiento microbiano
- Reacciones catalizadas por enzimas

El crecimiento de los microorganismos procede por consumo de nutrientes o sustratos apropiados siempre que las condiciones ambientales sean favorables y dicha masa de microorganismos vivos o células vivas se denomina biomasa.

Por otro lado, asociados con el crecimiento celular, pero a menudo se desarrollan a un ritmo diferente, están las reacciones catalizadas por enzimas en las que algunos reactivos se transforman en productos a través de la acción catalítica de enzimas intracelulares o

extra-celulares.

Posterior al diseño del biorreactor, uno de los principales retos es la implementación de estrategias para el monitoreo en línea y control del proceso.

En los biorreactores de tanque agitado, se supone que el proceso es mixto, lo que implica que la composición del medio es homogénea en el reactor. El comportamiento dinámico del crecimiento de una población de microorganismos en un solo sustrato limitante en un reactor de tanque agitado es obtenido a partir del balance de masas.

2.1.1. Clasificación y operación de los biorreactores

Como se mencionó anteriormente, un biorreactor es un tanque con condiciones controladas que permiten el desarrollo de una reacción mediante organismos vivos, el proceso que desarrolla puede ser aeróbico o anaerobio. Estos biorreactores comúnmente son cilíndricos variando en tamaño y usualmente fabricados en acero inoxidable. En general, el objetivo de los biorreactores es mantener ciertas condiciones propicias tales como la temperatura, el pH, la concentración de oxígeno, entre otras, para que el organismo sea capaz de realizar su función con gran eficiencia bajo condiciones óptimas. Se puede ver que los biorreactores deben ser cuidadosamente monitoreados y controlados, esto último debido a que emplean sensores, actuadores y controladores, además de intercambiadores de calor para mantener la temperatura constante [4].

Los biorreactores se pueden clasificar dependiendo de su tipo de operación, la cual puede ser

- **Discontinuo**, también conocido como *Batch*, en este modo todos los componentes necesarios para la reacción son introducidos al inicio de la reacción, de modo que el tanque tiene volumen constante.

- **Semicontinuo**, también conocido como *Fed-Batch*, este modo de funcionamiento se distingue del modo anterior por un suministro de diversos elementos nutritivos a medida que los microorganismos los necesitan. Principalmente permite eliminar los problemas de inhibición asociados al modo anterior y funcionar a tasas de crecimiento específicas a su valor máximo. A partir de un volumen inicial previamente inoculado se alimenta el reactor mediante un caudal controlado en lazo cerrado. Además, es este último punto el que limita el uso de un biorreactor fed-batch a escala industrial. Por último, este modo de funcionamiento, al igual que el anterior, está más especialmente recomendado cuando la recuperación de los productos se realiza a intervalos (también conocido como biorreactor por lotes) o cuando es peligroso desprender sustancias tóxicas o residuos.
- **Continuo**, dicho modo de operación se caracteriza por tener un flujo de entrada y un flujo de salida iguales, así el volumen del reactor es constante, este es el modo más utilizado en la industria [1], alcanza un estado en el que la extracción del medio de reacción es igual al caudal nutritivo. Los procesos continuos trabajan en estado estacionario para condiciones fijas de suministro, manteniendo el sistema en estado estacionario, impidiendo cualquier fenómeno de inhibición por efecto de dilución debido al suministro. Aunque generalmente trabaja en lazo abierto, es quizás el modo de operación más rico desde el punto de vista dinámico, ya que permite estudiar transitorios.

En estos bioprocesos se llevan en ciertas etapas

- **Pretratamiento**: Aquí los reactivos son tratados para hacerlos susceptibles al proceso.
- **Biorreacción**: Dichos reactivos ya tratados son transformados en algún producto mediante reacciones biológicas debido a enzimas o células.
- **Purificación**: En esta etapa los productos intermedios son purificados a fin de obtener un producto final puro.

2.1.2. Proceso de biorremediación de metales pesados

Para poder desarrollar un modelo matemático que describa la dinámica del bioproceso, se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones

- Para el modelo de biorremediación de metales pesados se considera un microorganismo y un metal en el biorreactor.
- Se da por hecho que otros parámetros como la presión, temperatura, pH, entre otras variables se encuentran reguladas por lazos de control externos.
- Se considera un tanque continuamente agitado, de modo que los reactivos se encuentran perfectamente mezclados y así el proceso es homogéneo.

2.1.2.1. Microorganismos

Los metales pesados, como el mercurio, el plomo, el cadmio y el arsénico, son tóxicos y persistentes en el medio ambiente. Para abordar esta problemática, la biorremediación ha emergido como una tecnología prometedora que utiliza microorganismos para eliminar o reducir la concentración de metales pesados en el agua contaminada [34].

La biorremediación es un proceso en el que se utilizan organismos vivos o sus enzimas para degradar, transformar o eliminar contaminantes del medio ambiente. En el caso de la biorremediación de agua contaminada con metales pesados, los microorganismos juegan un papel fundamental en la extracción y reducción de estos elementos tóxicos.

Los microorganismos empleados en biorreactores para biorremediación de agua contaminada con metales pesados incluyen bacterias, hongos y algas [35]. A continuación, se describen algunos de los grupos microbianos más comunes utilizados en este proceso:

- **Bacterias:** Existen diferentes géneros de bacterias que pueden tolerar y reducir metales pesados. Algunas bacterias, como *Pseudomonas*, *Bacillus*, *Desulfovibrio* y *Stenotrophomonas*, son capaces de bioacumular metales pesados en sus células, lo que ayuda a reducir su concentración en el agua.

- **Hongos:** Algunos hongos como *Aspergillus*, *Penicillium* y *Trichoderma* han demostrado tener capacidad para acumular y precipitar metales pesados en sus estructuras fúngicas. Estos hongos también pueden producir enzimas que contribuyen a la transformación y eliminación de metales tóxicos.
- **Algas:** Las algas también pueden ser empleadas en la biorremediación de metales pesados. Especies de algas como *Chlorella*, *Spirulina* y *Microcystis* pueden absorber y bioacumular metales en sus células, lo que disminuye la concentración de estos contaminantes en el agua.

2.1.2.2. Metales Pesados

Los metales pesados son elementos químicos con un peso atómico comprendido entre 63.55 (Cu) y 200.59 (Hg) o una densidad entre $4g/cm^3$ y $7g/cm^3$. Estos elementos, debido a su incapacidad para degradarse químicamente o biológicamente, presentan una persistencia en el medio ambiente y tienen la capacidad de bioacumularse y biomagnificarse en los organismos vivos, lo que los convierte en potenciales agentes contaminantes y tóxicos. Algunos de los metales pesados más conocidos por su impacto ambiental y en la salud humana incluyen el mercurio (Hg), el plomo (Pb), el cadmio (Cd), el talio (Tl), el cobre (Cu), el zinc (Zn) y el cromo (Cr) [15].

El mercurio, liberado principalmente por actividades industriales y la quema de combustibles fósiles, puede transformarse en su forma orgánica (metilmercurio) y biomagnificarse a lo largo de la cadena alimentaria. El metilmercurio es altamente tóxico para el sistema nervioso central y puede afectar negativamente el desarrollo fetal y la función cognitiva [5].

El plomo ha sido ampliamente utilizado en la industria y en productos de consumo, como pinturas y tuberías. A pesar de la reducción en el uso de plomo, la contaminación persiste en el suelo y el agua, especialmente en áreas urbanas. La exposición al plomo puede afectar el desarrollo cognitivo de los niños y tener efectos adversos en el sistema

nervioso, el riñón y el sistema cardiovascular en adultos.

El cadmio se libera a través de actividades industriales y se bioacumula en ciertos cultivos, como el arroz. La exposición al cadmio puede causar daño renal y es una preocupación significativa para la salud humana.

El talio, aunque menos común, puede encontrarse en fuentes naturales y liberado por ciertas industrias. Se ha asociado con efectos tóxicos en el sistema nervioso central y periférico.

Por otro lado, el cobre, el zinc y el cromo son metales esenciales para el funcionamiento adecuado del organismo humano en pequeñas cantidades. Sin embargo, altas concentraciones de estos elementos pueden tener efectos tóxicos. El cobre en exceso puede causar problemas gastrointestinales y hepáticos, mientras que el zinc y el cromo en grandes cantidades pueden dañar el sistema respiratorio y los riñones, respectivamente.

Además de los metales pesados mencionados, otros elementos tóxicos como el berilio y el aluminio, así como el semimetal arsénico, también pueden considerarse en el contexto de la contaminación por metales pesados.

La presencia de metales pesados en el medio ambiente y su potencial bioacumulación y biomagnificación plantean desafíos significativos para la salud humana y la conservación del ecosistema. Por lo tanto, es fundamental implementar medidas de control y gestión adecuadas para reducir la exposición a estos elementos y mitigar sus efectos adversos en la salud y el medio ambiente.

2.2. Tipos de modelos para bioprocesos

En el caso del desarrollo de un modelo matemático que describa el bioproceso tratado puede ser un tanto complejo, ya sea porque la modelo contiene incertidumbres paramétricas o porque contenga perturbaciones externas, sin embargo existen diferentes enfoques para la construcción del modelo, tales como:

- Enfoque poblacional: Los microorganismos pueden ser vistos como una población que actúa como catalizadores del proceso y puede estudiarse dicho enfoque a partir de la ecología [35].
- Enfoque de materia: Se realiza un balance de materia del sistema cerrado [1].
- Enfoque de reacciones: Aquí los reactivos y/o productos son transformados por reacciones de crecimiento microbianas y las reacciones enzimáticas catalizadoras del cultivo, así como otras reacciones químicas independientes de los seres vivos cultivados [1].

En los modelos con enfoques de tipo poblacional como el modelo de Malthus [35] describe el crecimiento de un microorganismo mediante la tasa de muerte y nacimiento del microorganismo, este tipo de modelo es muy simple debido a que solo se restringe a tres casos, cuando la tasa de nacimientos es mayor que la tasa de muertes la población crece exponencialmente, en caso contrario decrece exponencialmente y cuando ambas son iguales la población se mantiene constante, de este modo se puede ver que en un modelo como este no se describe la interacción con otras poblaciones, se descarta la edad de fertilidad y no se considera una competencia por los nutrientes o alimento.

Existen diferentes modelos de tipo poblacional con dinámicas un poco más realistas tal como el modelo de Lodka-Volterra, modelos de tipo logístico, entre otros.

El enfoque de materia se basa en la ley de conservación de la materia, de modo que la materia de un sistema cerrado permanece constante.

Para reactores de tanque agitado, básicamente el reactor en el que se opera el proceso de tratamiento de aguas residuales es un tanque en el que una o varias reacciones biológicas ocurren simultáneamente.

Sea un tanque como el mostrado en la figura 2.1, el cual se caracteriza por un volumen de medio líquido V , y una tasa de flujo de entrada y salida, F_{in} y F_{out} , respectivamente. Consideremos que una reacción bioquímica tiene lugar en el tanque. El balance de masa

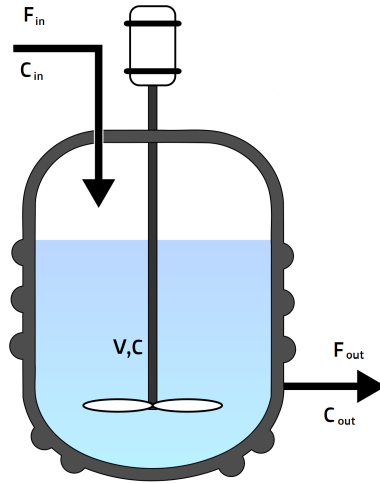


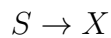
Figura 2.1: Vista de un reactor de tanque agitado

de un componente involucrado en la reacción, y caracterizado por una concentración C en el reactor se puede formalizar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \text{Variación de} \\ \text{tiempo de} \\ \text{la masa del} \\ \text{componente} \\ \text{en el tanque} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Masa del} \\ \text{componente} \\ \text{que entra en} \\ \text{el tanque} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Masa del} \\ \text{componente} \\ \text{que sale} \\ \text{del tanque} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \text{Masa del} \\ \text{componente} \\ \text{producido o} \\ \text{consumido} \\ \text{por la reacción} \end{pmatrix}$$

La suposición de mezclado uniforme implica que la concentración C es homogénea y su valor a la salida del reactor es igual que en cualquier parte del tanque

Ahora supongamos que en el reactor se tiene la siguiente reacción de crecimiento microbiano



donde S es el sustrato limitante y X es la biomasa, donde se puede ver que la biomasa actúa como un auto-catalizador (es tanto producto como un catalizador) de modo que algunas veces se agrega una flecha de reacción para enfatizarlo y aunque generalmente se asume no siempre es correcto.

En este estudio, S_{in} denota la concentración de nutrientes en el flujo de entrada y de acuerdo con una suposición comúnmente aceptada desde que Monod la introdujo en 1942, se considera que la velocidad de reacción ρ del crecimiento microbiano anterior es el producto del autocatalizador X y un coeficiente de proporcionalidad denominado tasa de crecimiento específica (es decir, por unidad de biomasa) μ ($\rho = \mu X$).

Posteriormente, al considerar las ecuaciones de balance de masa para el sustrato y la biomasa se escriben como sigue

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \mu X - DX \\ \frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{\gamma}\mu X - DS + DS_{in}\end{aligned}$$

donde

- $D = \frac{F_{in}}{V}$ es la tasa de dilución, para reactores continuos el flujo de entrada es igual al flujo de salida, así $F_{in} = F_{out}$, $\frac{dV}{dt} = 0$
- μ es la tasa de crecimiento del microorganismo
- γ es el coeficiente de rendimiento (relación de producción de biomasa sobre el consumo de sustrato)

2.2.1. Tasa de crecimiento

La tasa de crecimiento del microorganismo depende de las condiciones iniciales tanto en temperatura, pH, entre otros factores. Uno de los modelos más empleados es el de Monod [1], dada por:

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_s + S} \quad (2.1)$$

En este caso μ_{max} es la tasa máxima de crecimiento específico, y K_s es la constante de semi saturación que permite describir el fenómeno de crecimiento limitado por falta de sustrato, hasta que no exista sustrato en el reactor.

Notando que este parámetro cinético se denomina así porque:

$$\lim_{S \rightarrow K_s} \mu(S) = \frac{1}{2} \mu_{max}$$

El caso (2.1) es solo una forma de describir el comportamiento de la tasa de crecimiento, sin embargo hay mas modelos, como el caso donde además, los fenómenos por exceso de sustrato son modelados por la expresión de Haldane, la cual es introducida en el caso de reacciones enzimáticas, dada por

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{K_s + S + \frac{S^2}{K_i}} \quad (2.2)$$

con constante de inhibición K_i del crecimiento. Se describe el efecto de la saturación e inhibición del crecimiento de X debido al sustrato S [1].

Así como estos modelos que describen la tasa de crecimiento hay mas como el modelo de Contois [1], pero hay algunos modelos donde la tasa de crecimiento se encuentra asociada al pH, la temperatura, la intensidad lumínica, etc.

2.3. Modelo general del bioproceso

En la presente sección se trata de manera breve la descripción matemática de un proceso de biorremediación en donde se involucra la presencia de luz para el crecimiento de los microorganismos dentro del biorreactor, en el presente caso se realizan las siguientes consideraciones:

- Solo hay un microorganismo y un metal pesado por remover.
- El medio dentro del reactor se encuentra perfectamente mezclado, de modo que el cultivo es homogéneo.
- Las variables como temperatura, pH, presión, entre otras, se encuentran reguladas por lazos externos de control.

Así, la representación de estados de un biorreactor es la siguiente [1, 2, 7]:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\varphi(\xi(t), t) - D(t)\xi(t) - G(\xi(t), f_g(t)) + F(D(t), R_i(t)) \\ \dot{V}(t) &= f_i(t) - f_o(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Donde:

- $\xi(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la concentración de los reactivos y/o productos del reactor.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes de rendimiento.
- $\varphi(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es el vector de tasas de reacción.
- $D(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el factor de dilución.
- $G(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la tasa de transferencia gas-líquido.
- $f_g(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el flujo de entrada de un gas.
- $F(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la tasa de transferencia de masa en el líquido.
- $R_i(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ es la concentración de alimentación de reactivo.
- $V(t) \in \mathbb{R}_{> 0}$ es el volumen del reactor.

además $f_i(t), f_o(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el flujo de entrada y salida del reactor que se supone son iguales y por ello $\dot{V}(t) = 0$ y $D(t) = \frac{f_i(t)}{V(t)}$.

En el presente documento los reactivos del biorreactor son la concentración del único microorganismo o biomasa $X(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, el sustrato $S(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n-2}$ y la concentración de

metal libre del medio $M(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Así, definiendo:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \begin{bmatrix} X(t) & S(t) & M(t) \end{bmatrix}^T \\ A &= \text{diag}(1, -Y_1, \dots, -Y_{n-2}, -1) \\ \varphi(\xi(t), t) &= \begin{bmatrix} \mu(\xi(t))X(t) & \cdots & \mu(\xi(t))X(t) & q_m(X(t), t)M(t) \end{bmatrix}^T \\ G(\xi(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & g_1(\xi(t), f_g(t)) & \cdots & g_{n-2}(\xi(t), f_g(t)) & 0 \end{bmatrix}^T \\ F(D(t), R(t)) &= D(t) \begin{bmatrix} 0 & s_1(t) & \cdots & s_{n-2}(t) & m(t) \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

donde:

- $Y_i \in \mathbb{R}_{>0}$ son coeficientes de rendimiento biomasa-sustrato
- $\mu(\xi(t)) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de crecimiento.
- $q_m(X(t), t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la tasa de remoción del metal
- $s_i(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la concentración de alimentación de sustrato
- $m(t) \in \mathbb{R}_{>0}$ es la concentración de alimentación de metal libre

con $i = \{1, \dots, n-2\}$.

Así, sustituyendo los términos anteriores en (2.3)¹, se tiene el modelo general del bioproceso dado por:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mu X - (d + \delta(t))X - r_m(M, t)X \\ \dot{S}_i &= -Y_i \mu X - (d + \delta(t))(S_i - s_i(t)) - g_i \\ \dot{M} &= -qr_x M - (d + \delta(t))(M - m(t)) \\ \dot{q} &= -a_1 q + a_2\end{aligned}\tag{2.4}$$

¹Sin pérdida de generalidad $X(t) = X$, $S_i(t) = S$, $M(t) = M$, $\mu(\xi(t)) = \mu$, $g_i(\xi(t), f_g(t)) = g_i$, $q(t) = q$, $d(t) = d$, $r_x(X) = r_x$.

En el presente documento se supondrá que el factor de dilución es la entrada de control, la cual puede presentar perturbaciones aditivas en su valor nominal; lo cual es importante ya que la evolución dinámica de los estados de (2.4) dependen del factor de dilución $D(t)$, el cual presenta la forma siguiente:

$$D(t) = d(t) + \delta(t) \quad (2.5)$$

donde:

- $d(t), \delta(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es el factor de dilución nominal y una perturbación asociada a $d(t)$, respectivamente.

Cabe mencionar que dada la toxicidad del medio de cultivo causada por el metal pesado, la dinámica de la biomasa X debe contener un factor adicional que representa la tasa de mortalidad del microorganismo la cual depende de M por medio del termino $r_m(M, t)$, sin embargo, dado que la concentración de metal es relativamente baja en el reactor, de modo que dicha tasa de mortalidad se considera constante, y se encuentra expresada de la siguiente manera:

$$r_m(M, t) = \beta_D + \beta_M = \beta$$

donde:

β_D, β_M y $\beta \in \mathbb{R}_+$ son la tasa de mortalidad natural, la tasa de mortalidad causada por el metal y la tasa de mortalidad total respectivamente.

Además, la tasa de remoción de metal depende de la concentración de biomasa en el biorreactor [7], de modo que la tasa de remoción de metal se expresa como sigue:

$$q_m(X, t) = q(t)r_x(X)$$

donde:

- $q(t) \in \mathbb{R}_+$ es la tasa de absorción.
- $r_x(X) \in \mathbb{R}_+$ es una función asociada a la biomasa, dada de la siguiente forma:

$$r_x = \frac{X}{K_{sX} + X}$$

con: $K_{sX} \in \mathbb{R}_+$ es un parámetro cinético asociado a la biomasa.

En [14] se considera una modificación al modelo de Llargren de primer orden, la cual consiste en una dinámica de absorción y desabsorción de metales, de modo que se tiene:

$$\dot{q}(t) = \kappa_{ad}(q_{max} - q(t)) - \kappa_{de}q(t)$$

donde:

- $\kappa_{ad} \in \mathbb{R}_+$ es la capacidad de absorción.
- $\kappa_{de} \in \mathbb{R}_+$ es la capacidad de desabsorción.
- $q_{max} \in \mathbb{R}_+$ es la capacidad máxima de absorción del metal

Ahora, definiendo:

$$a_1 := \kappa_{ad} + \kappa_{de}$$

$$a_2 := \kappa_{ad} q_{max}$$

Finalmente, la dinámica de sustrato S es inherente al término de la tasa de crecimiento μ , sin embargo, dicho termino es desconocido, pero se pueden tomar modelos de crecimiento como los mostrados en la sección 2.2.1.

Se puede revisar una descripción mas detallada del modelo general de los procesos de biorremediación en [1, 2, 7].

Capítulo 3

Diseño de observadores robustos

3.1. Suposiciones para el diseño

Considere el modelo del proceso de biorremediación de metales pesados de la ecuación (2.4), con perturbaciones externas en la entrada $\delta(t)$ descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mu(S, t)X - (d + \delta(t))X - r_m(M, t)X \\ \dot{S}_i &= -Y_i \mu(S, t)X - (d + \delta(t))(S_i - s_i(t)) - g_i \\ \dot{M} &= -qr_x M - (d + \delta(t))(M - m(t)) \\ \dot{q} &= -a_1 q + a_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para poder llevar a cabo el diseño de observadores robustos que permitan la estimación de la concentración de metales M se considera lo siguiente:

- La tasa de reacción $\mu(S, t)$ es desconocida (dinámicas no modeladas o difíciles de modelar, [1]).
- La perturbación externa $\delta(t)$ es desconocida.

Se puede ver que la dinámica que presenta el sistema anterior cuenta con parámetros desconocidos como $\mu(S, t)$ y además el modelo presentado cuenta con perturbaciones

externas como $\delta(t)$, dichos parámetros se pueden emplear para poder estimar la concentración de metal en el medio, de modo que estimando los parámetros mencionados anteriormente es posible diseñar un observador para M . De modo que se hacen las siguientes suposiciones:

Suposición 1. La biomasa X es estrictamente positiva, continua y acotada, es decir, existen constantes $x_{min}, x_{max} \in R_{>0}$, tal que $0 < x_{min} \leq X < x_{max} < \infty$. Además la condición inicial $X(0) > 0$.

Suposición 2. Los sustratos S_i y la concentración de metal M son estrictamente positivas, continuas y acotadas, es decir, existen $s_a, m_a \in R_{>0}$ tales que $0 \leq S_i \leq s_{a_i} \leq \infty$ y $0 \leq M \leq m_a < \infty$ con $i = \{1, \dots, n-2\}$.

Suposición 3. El factor de dilución nominal es una entrada conocida, positiva y acotada, es decir, existe un $d_a \in R_{>0}$, tal que $0 \leq d < d_a < \infty$. Mientras que las demás entradas del sistema son constantes positivas, es decir, $s_i(t) = \bar{s}_i$ y $m(t) = \bar{m}$ con $\bar{s}_i, \bar{m} \in R_{>0}$ y $i = \{1, \dots, n-2\}$.

Suposición 4. La perturbación asociada a la entrada $\delta(t) = \theta \in R_{>0}$ es un parámetro constante o con dinámica lenta y acotada desconocida.

Suposición 5. La tasa de crecimiento μ es una función positiva continua y acotada con derivada continua acotada, es decir existe $\rho, \rho_0 \in R_{>0}$ tal que $0 \leq \mu \leq \rho_0$ y $|\dot{\mu}| \leq \rho$.

Suposición 6. La transferencia de gas-líquido g_i es una función positiva, conocida y acotada, es decir, existe un $g_a \in R_{\geq 0}$ tal que $0 \leq g \leq g_a$.

Suposición 7. La función $r_x \in R_+$ es conocida, continua, dependiente de X y acotada, es decir, existen constantes $q_{min}, q_{max} \in R_{>0}$ tal que $0 < q_{min} \leq r_x \leq q_{max} \leq \infty$.

Suposición 8. El factor de dilución nominal d , la perturbación θ y la tasa de crecimiento μ están definidas en un conjunto U , tal que se cumple la Suposición 1-2.

Suposición 9. Los parámetros $\beta, Y_i, a_1, a_2 \in R_{>0}$ son conocidos.

De modo que el modelo de biorremediación de metales pesados presentado en la ecuación (3.1) que cumple las suposiciones anteriores es:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \mu X - (d + \theta)X - \beta X \\
 \dot{S}_i &= -Y_i \mu X - (d + \theta)(S_i - \bar{s}_i) - g_i \\
 \dot{M} &= -qr_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) \\
 \dot{q} &= -a_1 q + a_2
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

con $i = \{1, \dots, n - 2\}$

3.2. Observadores Propuestos

Basado en lo anterior, es posible notar que el diseño de biorreactores para su uso en procesos de biorremediación de metales pesados es complejo debido a las dinámicas no lineales del mismo, parámetros desconocidos e incluso las perturbaciones externas, es por ello que la principal problemática del presente trabajo es abordar el diseño de técnicas de observación que permitan estimar los parámetros mencionados anteriormente. En [7], [6] se proponen observadores basados en la técnica de modos deslizantes de segundo orden para la estimación de razones de crecimiento específicas del modelo (2.3). Sin embargo, los observadores propuestos en el trabajo anterior presentan las siguientes problemáticas a abordar:

- No es robusto ante perturbaciones externas (θ) en la entrada del sistema (3.2).
- Se requiere del conocimiento de las cotas de la derivada de las tasas de reacción que son las variables que se desean estimar.
- Se requiere el uso de una función regresor y una función acotada que cumpla una condición de excitación persistente.

En [8] se considera una generalización de los conceptos antes citados que consta de la estimación simultánea de las tasas de reacción y de perturbaciones en la entrada por medio

de un observador basado en el algoritmo de super-torsión (STA) que permite preservar las propiedades de robustez y de convergencia en tiempo finito de los algoritmos basados en modos deslizantes.

En el presente trabajo se estudia la extensión del algoritmo presentado en [7] de manera que las ganancias del observador sean determinadas por un algoritmo de adaptación que permita obtener los siguientes resultados:

- Determinar un algoritmo que permita el desconocimiento de las cotas superiores de las tasas de reacción, así como las de las perturbaciones externas en el modelo (3.2).
- Reducir las oscilaciones de alta frecuencia (chattering) que se encuentran inherentes al algoritmo STA.
- El uso de un algoritmo adaptable que permita un ajuste de ganancias automático evitando el sobre-dimensionamiento de las mismas.
- Probar la convergencia o estabilidad del o de los algoritmos propuestos.

3.2.1. Observador STA

En el modelo general del proceso de biorremediación de metales pesados (3.2) se puede apreciar la dependencia algebraica de la perturbación externa $\theta(t)$ y la dinámica de la tasa de crecimiento $\mu(S, t)$ la cual es desconocida. El objetivo del presente trabajo es realizar la observación de la concentración del metal pesado presente en el biorreactor M . Para poder realizar la observación del metal pesado M , resulta conveniente realizar la estimación de forma independiente, en un primer tiempo estimar un parámetro tal como μ o θ y posteriormente estimar algún otro parámetro de forma separada.

Observación conjunta de (μ, θ) :

Para el análisis posterior, se toman como referencia los trabajos siguientes [7, 16].

Lema 1. *Considere el siguiente observador*

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{X}} &= \rho(\xi + K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma))\hat{X} - (d + \beta)\hat{X} \\
 \dot{\xi} &= K_2 \text{sign}(\sigma) \\
 \sigma &= \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{X}{\hat{X}} \right) \\
 \hat{\omega} &= \rho\xi
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\omega = \mu - \theta$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ son las ganancias del observador. Bajo estas condiciones, el punto de equilibrio del STA (3.3) es estable en tiempo finito, tal que $\omega = \hat{\omega}$ en un tiempo $t \geq \tau > 0$.

Demostración: Se puede reescribir la primer ecuación de (3.2) como:

$$\dot{X} = \omega X - (d + \beta)X$$

Derivando σ se tiene:

$$\dot{\sigma} = \frac{\omega}{\rho} - \xi - K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma)$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ y definiendo $\nu = \frac{\omega}{\rho} - \xi$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \nu - K_1\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma) \\
 \dot{\nu} &= -K_2 \text{sign}(\sigma) + \frac{\dot{\omega}}{\rho},
 \end{aligned}$$

dado que $|\dot{\omega}| = |\dot{\mu}| \leq \rho$ se puede asegurar por el Teorema 1 que el observador (3.3) tiene un punto de equilibrio estable de modo que $\exists \tau \in \mathbb{R}_+ | \omega = \hat{\omega}$ cuando $t \geq \tau$.

□

3.2.2. Primera propuesta de observador basado en modos deslizantes

En la presente sección se realiza una propuesta de observador basado en modos deslizantes para la estimación de la perturbación θ a partir de la variable estimada $\hat{\omega}$

con el observador del Lema 1. En [7] se propone un observador adaptable tal que bajo condiciones de excitación persistente se obtiene convergencia exponencial de los valores estimados $(\hat{\mu}, \hat{\theta})$ a sus valores reales (μ, θ) . En lo que sigue se presentará una propuesta alternativa a dicha propuesta la cual elimina dicha función regresor que debe cumplir una condición de excitación persistente y se encuentra inherente al algoritmo de observación de la propuesta mencionada anteriormente.

Además, en [6] se menciona que se debe contar con el mismo número de mediciones y tasas de reacción desconocidas para poder aplicar el algoritmo STA, de modo que se requiere se cumpla la siguiente condición.

Suposición 10. El sustrato S es una función medible.

De modo que si se encuentra disponible la medición de la dinámica del sustrato se puede separar θ y μ de ω , de la manera siguiente:

$$\dot{S} = -Y\mu X - (d + \theta)(S - \bar{s}) - g$$

de modo que reescribiendo la ecuación del sustrato:

$$\dot{S} = -Y\mu X - d(S - \bar{s}) - \theta(S - \bar{s}) - g \pm Y\theta X$$

agrupando términos se obtiene,

$$\dot{S} = -Y\omega X - \theta(YX + S - \bar{s}) - d(S - \bar{s}) - g$$

Sea el observador para el sustrato y la perturbación θ , dado por el Lema 2.

Lema 2. *Sea el observador dado por*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{S}} &= -Y\hat{\omega}X - \hat{\theta}(YX + S - \bar{s}) - d(S - \bar{s}) - g \\ \hat{\theta} &= \gamma \Gamma^{-1} \text{sign}(S - \hat{S}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_+$ es la ganancia del observador y definiendo $\Gamma := (-YX - S + \bar{s})$, $\tilde{S} = S - \hat{S}$ y $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ como los errores de estimación de S y de θ respectivamente. Entonces $\tilde{\theta}$ y \tilde{S} convergen asintóticamente a una vecindad de cero para $t \in [0, \tau]$ y a cero para $t > \tau$.

Recordando que:

$$\dot{\hat{S}} = -YX\hat{\omega} + \hat{\theta}\Gamma + f_s$$

y derivando $\tilde{S} = S - \hat{S}$ con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{S}} &= -YX(\omega - \hat{\omega}) + (\theta - \hat{\theta})\Gamma = -YX\tilde{\omega} + \Gamma\tilde{\theta} \\ \theta &= \gamma\Gamma^{-1}\text{sign}(\tilde{S})\end{aligned}$$

En lo que sigue se considera la función cuadrática,

$$V = \frac{1}{2}\tilde{S}^2$$

cuya derivada esta dada por,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \tilde{S}\dot{\tilde{S}} = \tilde{S}(\tilde{\theta}\Gamma) \\ &= \tilde{S} \left[\theta\Gamma - \gamma\text{sign}(\tilde{S}) \right] \\ &= -\gamma|\tilde{S}| + \tilde{S}\theta\Gamma\end{aligned}$$

de donde se tiene que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\dot{V} \leq -|\tilde{S}|(\gamma - |\theta||\Gamma|)$$

la cual es negativa definida siempre que $\gamma > |\theta||\Gamma|$, es decir que \tilde{S} tiende asintóticamente a cero. Finalmente si $\tilde{S}(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ y suponiendo que $\Gamma \neq 0$, entonces $\tilde{\theta}$ también tiende asintóticamente a cero.

Suponga ahora que, por el Lema 1, $|\tilde{\omega}| < \omega^*$ para $t \in [0, \tau]$:

$$\frac{d}{dt}V = \tilde{S}\dot{\tilde{S}} = -\gamma|\tilde{S}| + \tilde{S}(\theta\Gamma - YX\tilde{\omega})$$

tomando el valor absoluto del segundo termino y acotando dicho termino, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -|\tilde{S}|\gamma + |\tilde{S}||\theta\Gamma - YX\tilde{\omega}| \\ &\leq -|\tilde{S}|\gamma + |\tilde{S}|(|\theta|\Gamma| + |Y||X|\omega^*) \\ &\leq -|\tilde{S}|(\gamma - |\theta|\Gamma| - |Y||X|\omega^*)\end{aligned}$$

por ello, para un valor suficientemente grande de $\gamma > 0$, el error de estimación \tilde{S} tendera asintóticamente a cero. Finalmente si $\tilde{S}(t)_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ y suponiendo que $\Gamma \neq 0$, entonces $\tilde{\theta}$ tendera asintóticamente a una vecindad del cero cuyo tamaño depende de la norma de $\tilde{\omega}$ en el intervalo $t \in [0, \tau]$.

3.2.3. Observador basado en modos deslizantes con inyección de salida

En la presente sección se propone una modificación al resultado obtenido previamente en el Lema 2 el cual presenta un observador basado en modos deslizantes, la presente propuesta es una copia del sistema con una inyección de salida en términos del error, la cual se encuentra presente en el algoritmo (3.4) mediante el término $\text{sign}(S - \hat{S})$, basado en lo anterior se propone realizar una inyección de salida explícita al observador mediante el término $\alpha\tilde{S}$, de modo que se tiene el siguiente SM¹ modificado,

Lema 3. *Sea el observador dado por:*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{S}} &= -Y\hat{\omega}X + \hat{\theta}\Gamma + f_s(S, g) + \alpha\tilde{S} \\ \hat{\theta} &= -\gamma\Gamma^{-1} \text{sign}(\tilde{S})\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_+$ es la ganancia del observador y definiendo $\Gamma := (-YX - S + \bar{s})$, $\tilde{S} = S - \hat{S}$ y $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ como los errores de estimación de S y de θ respectivamente. Entonces $\tilde{\theta}$ y \tilde{S} convergen asintóticamente a una vecindad de cero para $t \in [0, \tau]$ y a cero para $t > \tau$.

¹Sliding Mode

Demostración. Como primer paso se puede ver que la dinámica del error de estimación \tilde{S} esta dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{S}} &= -YX\tilde{\omega} + \tilde{\theta}\Gamma - \alpha\tilde{S} \\ \tilde{\theta} &= \theta - \gamma\Gamma^{-1}\text{sign}(\tilde{S})\end{aligned}$$

Como en el Lema anterior, se considera la función cuadrática siguiente:

$$V = \frac{1}{2}\tilde{S}^2$$

cuya derivada esta dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &= \tilde{S}\dot{\tilde{S}} = \tilde{S}(-YX\tilde{\omega} + \tilde{\theta}\Gamma - \alpha\tilde{S}) \\ &= -\gamma|\tilde{S}| - \alpha\tilde{S}^2 + \tilde{S}(\theta\Gamma - YX\tilde{\omega}),\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al tercer término de la igualdad anterior, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq -\gamma|\tilde{S}| - \alpha\tilde{S}^2 + |\tilde{S}||\theta\Gamma - YX\tilde{\omega}| \\ &\leq -\alpha\tilde{S}^2 - |\tilde{S}|\left[\underbrace{\gamma - (|\theta||\Gamma| + |Y||X||\tilde{\omega}|)}_{c_1}\right],\end{aligned}$$

con ello, se sigue entonces que un valor adecuado de $\gamma > c_1$ permite concluir que $V(\cdot)$ sea definida negativa. Lo anterior implica las propiedades de convergencia establecidas en el Lema. \square

3.2.4. Observador STA para θ

Como se vio anteriormente en los Lemas 2 y 3 se presentaron dos algoritmos de observación basados en modos deslizantes los cuales relajan las condiciones de diseño respecto a las propuestas existentes en la literatura [7, 6], además de ofrecer mejor desempeño en la estimación de la perturbación externa $\theta(t)$ y la dinámica desconocida $\mu(S, t)$ y reducir las oscilaciones de alta frecuencia. Tomando en cuenta lo anterior se

plantea el diseño de un observador STA para la perturbación externa θ , dada la suposición 10 podemos considerar el sustrato como estado medible, de modo que se puede definir la superficie de deslizamiento como el error de estimación del estado medible S , con ello finalmente se puede obtener un estimado de la perturbación externa.

Recordando la dinámica del sustrato, mostrada en la sección (3.2.2):

$$\dot{S} = -Y\omega X - \theta\Gamma + f_s \quad (3.6)$$

donde: $\Gamma := YX + S - \bar{s}$, $f_s := d(S - \bar{s}) - g$.

Con estas notaciones podemos enunciar el siguiente lema.

Lema 4. *Sea el observador propuesto dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{S}} &= -Y\hat{\omega}X - \left(\aleph + \bar{L}_1 |\varphi|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\varphi) \right) \phi + f_s \\ \dot{\aleph} &= \bar{L}_2 \text{sign}(\varphi) \\ \varphi &= \tilde{S} \\ \hat{\theta} &= \gamma \aleph \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde \bar{L}_1 y $\bar{L}_2 \in \mathbb{R}_+$ son las ganancias del observador, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $\phi := (YX + S - \bar{s})$, $\tilde{S} := S - \hat{S}$ es el error de estimación y $f_s = -d(S - \bar{s}) - g$, entonces $\tilde{\theta}$ y $\tilde{\mu}$ se encuentran acotados.

Teniendo en cuenta que $\omega = \mu - \theta$, se tiene la ecuación del sustrato definida como:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -Y\mu X - (d + \theta)(S - \bar{s}) - g \\ &= -Y\mu X - d(S - \bar{s}) - \theta(S - \bar{s}) - g \\ &= -Y\mu X - Y\theta X + Y\theta X - d(S - \bar{s}) - \theta(S - \bar{s}) - g \\ &= -Y\omega X + Y\theta X - d(S - \bar{s}) - \theta(S - \bar{s}) - g \\ &= -Y\omega X - \theta(YX + S - \bar{s}) - d(S - \bar{s}) - g \end{aligned}$$

Demostración. Calculando la derivada de la superficie deslizante dada por,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \dot{S} - \dot{\hat{S}} = -Y\omega X - \theta\Gamma + f_s - (-Y\hat{\omega}X - (\aleph + \bar{L}_1|\varphi|^{1/2}\text{sign}(\varphi))\Gamma) - f_s \\ &= -Y\omega X - \theta\Gamma + Y\hat{\omega}X + (\aleph + \bar{L}_1|\varphi|^{1/2}\text{sign}(\varphi))\Gamma \\ &= -\theta\Gamma + (\aleph + \bar{L}_1|\varphi|^{1/2}\text{sign}(\varphi))\Gamma\end{aligned}$$

definiendo $\nu = -\theta\Gamma - \aleph\Gamma$ y considerando el caso donde θ es constante se tiene:

$$\dot{\varphi} = \nu - L_1|\varphi|^{1/2}\text{sign}(\varphi) \quad (3.8)$$

$$\dot{\nu} = -L_2\text{sign}(\varphi) \quad (3.9)$$

donde $L_1 = \bar{L}_1\Gamma$ y $L_2 = \bar{L}_2\Gamma$.

Se propone el cambio de variable $\zeta_1 = K_1\sqrt{|\varphi|}\text{sign}(\varphi)$ y $\zeta_2 = \nu$. De esta forma, la dinámica de los modos deslizantes puede escribirse como sigue:

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1 & \frac{1}{2} \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.10)$$

con $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix}^T$. Luego, se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \zeta^T P \zeta \quad (3.11)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ y $P = P^T = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_d \end{bmatrix} > 0$.

Con base en la desigualdad de Rayleigh Ritz expresada como sigue,

$$\lambda_{\min}(P)\|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{\max}(P)\|\zeta\|^2 \quad (3.12)$$

Se tiene que $V(\zeta)$ es una función definida positiva global y decreciente. En la referencia [16] se discute que dado $V(\varphi(x_0, t))$ es una función absolutamente continua en el tiempo cuando $\varphi(x_0, t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_0, t) & \varphi_2(x_0, t) \end{bmatrix}^T$, entonces se puede concluir la estabilidad del STA dado por el Teorema de Zubov [21], es decir que de manera equivalente se cumple lo siguiente:

$$A^T P + P A < -Q$$

donde $Q = Q^T > 0$. Mas aún se puede concluir que, dado que $\varphi(x_0, t)$ es una función monótona, $V(\zeta)$ es absolutamente continua. Entonces, la derivada de $V(x)$ con respecto al tiempo en las trayectorias de (3.10) está dada por:

$$\dot{V}(x) = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T (A^T P + P A) \zeta$$

la cual se verifica para casi cualquier $t \geq 0$.

por lo anterior,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq -\frac{1}{|\zeta_1|} \zeta^T Q \zeta \\ &\leq -\frac{1}{|\zeta_1|} \lambda_{\min}(Q) \|\zeta\|^2 \end{aligned}$$

de la desigualdad (3.12) se concluye que,

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q) \lambda_{\min}(P)^{1/2}}{\lambda_{\max}(P)} \sqrt{V(x)} = -\varsigma \sqrt{V(x)}$$

Ahora, integrando la expresión anterior en el intervalo $[0, t]$, se tiene:

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - \varsigma \int_0^t \sqrt{V(x(s))} ds$$

Si $\Psi(V(x(t))) = \int_{V(x_0)}^{V(x(t))} \frac{dt}{\sqrt{y}} = 2(\sqrt{V(x(t))} - \sqrt{V(x_0)})$ con función inversa $\Psi(z)^{-1} = \left(\frac{z}{2} + \sqrt{V(x_0)}\right)^2$, entonces por la desigualdad de Bihari (Lema 19.1 Pp. 507 [21]):

$$V(x(t)) \leq \Psi \left(\int_0^t -\varsigma dt \right)^{-1} = \left(\sqrt{V(x_0)} - \frac{\varsigma}{2} t \right)^2 \quad (3.13)$$

Entonces se puede concluir que x^* es globalmente estable en tiempo y converge a cero en finito τ , donde $\tau \leq T(x_0) = \frac{2\sqrt{V(x_0)}}{\varsigma}$. \square

3.2.5. STA con ganancias adaptables

En [18] se desarrolla un control por modos deslizantes con ganancias adaptables en donde se discute que dicho algoritmo presenta mejor desempeño que el STA clásico

además, una de las ventajas más importantes es que dicho algoritmo reduce el problema de las oscilaciones de alta frecuencia (chattering attenuation) y que las ganancias evolucionan con respecto al tiempo adaptándose a la evolución del sistema incluyendo las dinámicas desconocidas o perturbaciones exógenas. Si se desea consultar mas a detalle el algoritmo se puede consultar el Capítulo 1 del presente trabajo en (1.5) o en [18].

Lema 5. *Se considera una modificación al observador (3.4):*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{X}} &= \rho(\xi + \alpha\sqrt{|\sigma|}\text{sign}(\sigma))\hat{X} - (d + \beta)\hat{X} \\ \dot{\xi} &= \beta \text{sign}(\sigma) \\ \sigma &= \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{X}{\hat{X}}\right) \\ \hat{\omega} &= \rho\xi\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} & \text{si } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0 \end{cases}$$

$$\beta = 2\epsilon\alpha + \lambda + 4\epsilon^2$$

donde α y β son las ganancias adaptables y $\epsilon, \lambda, \gamma_1, \omega_1 \in \mathbb{R}_+$.

Para la demostración primero, derivando a σ con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\omega}}{\rho} - \xi - \alpha|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma)$$

definiendo $\nu = \frac{\dot{\omega}}{\rho} - \xi$, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -\alpha|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma) + \nu \\ \dot{\nu} &= -\beta \text{sign}(\sigma) + \frac{\dot{\omega}}{\rho}\end{aligned}$$

de modo que la forma anterior es útil dado que se puede llevar a una forma conveniente para el análisis de Lyapunov, dada como

$$z = (z_1, z_2)^T = (|\sigma|^{1/2}\text{sign}(\sigma), \nu)^T$$

Así, las primeras dos ecuaciones de (3.14) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{1}{|z_1|} \left(\frac{-\alpha}{2} z_1 + \frac{1}{2} z_2 \right) \\ \dot{z}_2 &= -\frac{\beta}{|z_1|} z_1 + \frac{\dot{\omega}}{\rho}\end{aligned}$$

de modo que se puede reescribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|z_1|} \begin{bmatrix} \frac{-\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\dot{\omega}}{\rho}$$

eso implica que

$$\dot{z} = A(z_1)z + \varphi$$

donde

$$A(z_1) = \frac{1}{|z_1|} \begin{bmatrix} \frac{-\alpha}{2} & \frac{1}{2} \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\dot{\omega}}{\rho}$$

De esta forma si $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ en tiempo finito se puede realizar la observación. Además, $|z_1| = |\sigma|^{1/2}$ y $\sigma(z_1) = \text{sign}(\sigma)$

Posteriormente, se propone una función candidata de Lyapunov

$$V(z_1, z_2, \alpha, \beta) = V_0 + \frac{1}{2\gamma_1} (\alpha - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2\gamma_2} (\beta - \beta^*)^2$$

donde

$$V_0(z) = (\lambda + 4\varepsilon^2)z_1^2 + z_2^2 - 4\varepsilon z_1 z_2 = z^T P z$$

y

$$P = \begin{bmatrix} \lambda + 4\varepsilon^2 & -2\varepsilon \\ -2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

donde

$$\alpha^* > 0, \beta^* > 0 \text{ son constantes}$$

y notando que la matriz P es definida positiva si $\lambda > 0$ y ϵ es cualquier número real. Así, la función candidata de Lyapunov es

$$\dot{V}(z, \alpha, \beta) = \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} + \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta}$$

recordando que

$$\dot{z} = A z + \varphi$$

con ello

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} \\ &= (z^T A^T + \varphi^T) P z + z^T P (A z + \varphi) \\ &= z^T A^T P z + \varphi^T P z + z^T P A z + z^T P \varphi \\ &= z^T (A^T P + P A) z + 2 z^T P \varphi \\ &= -z^T Q z + 2 z^T P \varphi \end{aligned}$$

y \tilde{Q} es calculada tomando en cuenta la desigualdad $|\varphi(x, t)| \leq \delta |\sigma|^{1/2}$, donde $\varphi(x, t) \in R$ esta acotada y $\delta > 0$ existe pero no es conocida, así

$$\tilde{Q} - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\lambda\alpha + 4\epsilon(2\epsilon\alpha - \beta) - 2(\lambda + 4\epsilon^2)\delta & 4\epsilon \\ (\beta - 2\epsilon\alpha - \lambda - 4\epsilon^2) + 2\epsilon\delta & 4\epsilon \end{bmatrix}$$

para garantizar que la matriz \tilde{Q} sea definida positiva, se debe garantizar que

$$\beta = 2\epsilon\alpha + \lambda + 4\epsilon^2$$

así, la matriz \tilde{Q} será definida positiva con un eigenvalor mínimo $\lambda_{\min}(\tilde{Q}) \geq 2\epsilon$ si

$$\alpha > \frac{\epsilon\delta^2 + (\lambda + 4\epsilon)(2\epsilon + \delta) + \epsilon}{\lambda}$$

así

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P) \|z\|^2 &\leq V_0 \leq \lambda_{\max}(P) \|z\|^2 \\ \lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 &\leq z^T Q z \leq \lambda_{\max}(Q) \|z\|^2 \\ -z^T Q z &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|z\|^2 = -\xi \|z\|^2 \end{aligned}$$

y recordando

$$|z_1| \leq \|z\|^2 \leq \frac{V^{1/2}}{\lambda_{\min}(P)^{1/2}}$$

se tiene

$$\dot{V}_0 \leq -\frac{1}{|z_1|} z^T Q z + 2\eta \|z\|$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &\leq -\frac{1}{|z_1|} \xi \|z\|^2 + 2\eta \|z\| \\ &\leq -\frac{1}{|z_1|} \xi \|z\|^2 + k \|z\|^2 - k \|z\|^2 + 2\eta \|z\| \\ &\leq -\frac{1}{|z_1|} \xi \|z\|^2 + k \|z\|^2 - \underbrace{(k \|z\| - 2\eta)}_{>0} \|z\| \\ &\leq -\frac{1}{|z_1|} \xi \|z\|^2 + k \|z\|^2 \leq -\frac{1}{\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}} \xi \frac{V}{\lambda_{\max}(P)} + k \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{\lambda_{\min}(P)^{1/2}}{V^{1/2}} \xi \frac{V}{\lambda_{\max}(P)} + \frac{k}{\lambda_{\min}(P)^{1/2}} V^{1/2} \\ &= -\frac{\varepsilon \lambda_{\min}(P)^{1/2}}{\lambda_{\max}(P)} V^{1/2} + \frac{k}{\lambda_{\min}(P)^{1/2}} V^{1/2} \\ &= -\left(\frac{\varepsilon \lambda_{\min}(P)^{1/2}}{\lambda_{\max}(P)} - \frac{k}{\lambda_{\min}(P)^{1/2}} \right) V^{1/2} \\ &= -\underbrace{\left(\frac{\varepsilon \lambda_{\min}(P) - k \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\max}(P) \lambda_{\min}(P)^{1/2}} \right)}_r V^{1/2} \end{aligned}$$

con ello se tiene

$$\dot{V}_0 \leq -r V_0^{1/2}$$

de modo que $\dot{V}(z, \alpha, \beta)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z, \alpha, \beta) &= \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta} \leq -\frac{1}{|z_1|} z^T \tilde{Q} z + 2\eta \|z\| + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta} \leq -r V_0^{1/2} + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta} \leq -r V_0^{1/2} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} |\alpha - \alpha^*| \\
&- \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} |\beta - \beta^*| + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta} + \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} |\alpha - \alpha^*| + \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} |\beta - \beta^*|
\end{aligned}$$

tomando en cuenta la desigualdad:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \leq |x| + |y| + |z|$$

y dada la función candidata de Lyapunov propuesta

$$V(z_1, z_2, \alpha, \beta) = V_0 + \frac{1}{2\gamma_1} (\alpha - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2\gamma_2} (\beta - \beta^*)^2$$

se tiene

$$-r V_0^{1/2} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} |\alpha - \alpha^*| - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} |\beta - \beta^*| \leq -\eta \sqrt{V(z, \alpha, \beta)}$$

donde: $\eta = \min(r, \omega_1, \omega_2)$

De modo que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2, \alpha, \beta) &\leq -\eta [V(z_1, z_2, \alpha, \beta)]^{1/2} + \frac{1}{\gamma_1} (\alpha - \alpha^*) \dot{\alpha} \\
&+ \frac{1}{\gamma_2} (\beta - \beta^*) \dot{\beta} + \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} |\alpha - \alpha^*| + \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} |\beta - \beta^*|
\end{aligned}$$

Ahora, se consideran las constantes α^*, β^* , tal que $\alpha(t) - \alpha^* < 0$ y $\beta(t) - \beta^* < 0 \quad \forall t \geq 0$.

De modo que se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z_1, z_2, \alpha, \beta) &\leq -\eta [V(z_1, z_2, \alpha, \beta)]^{1/2} \\
&- |\alpha - \alpha^*| \left(\frac{1}{\gamma_1} \dot{\alpha} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right) \\
&- |\beta - \beta^*| \left(\frac{1}{\gamma_2} \dot{\beta} - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} \right)
\end{aligned}$$

con ello

$$\dot{V}(z_1, z_2, \alpha, \beta) \leq -\eta[V(z_1, z_2, \alpha, \beta)]^{1/2} + \xi$$

donde

$$\xi = -|\alpha - \alpha^*| \left(\frac{1}{\gamma_1} \dot{\alpha} - \frac{\omega_1}{\sqrt{2\gamma_1}} \right) - |\beta - \beta^*| \left(\frac{1}{\gamma_2} \dot{\beta} - \frac{\omega_2}{\sqrt{2\gamma_2}} \right)$$

Para poder asegurar convergencia en tiempo finito se debe asegurar que $\xi = 0$, lo cual se logra a través de la adaptación de las ganancias α, β ,

$$\dot{\alpha} = \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}, \quad \dot{\beta} = \omega_2 \sqrt{\frac{\gamma_2}{2}}$$

después de seleccionar $\varepsilon = \frac{\omega_2}{2\omega_1} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$ □

3.2.6. Observador para la concentración de metales pesados M .

A continuación se presenta un observador para poder determinar la concentración del metal pesado M presente en el biorreactor, para ello previamente se diseñaron algoritmos de observación que pudieran determinar la tasa de reacción $\mu(S, t)$ y la perturbación externa $\theta(t)$ cuya convergencia ocurre en tiempo finito gracias al empleo de la técnica de modos deslizantes, dichos estimados se realizaron de forma separada empleando el observador (3.3) para estimar la variable $\omega = \mu - \theta$. Es por ello que empleando los lemas 2, 3 se pudo realizar la estimación $\hat{\theta}$.

Con base en lo anterior se puede ver que el algoritmo tendrá un mejor estimado de la concentración del metal M dependiendo de la estimación de $\hat{\theta}$.

Sea el observador asintótico:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{M}} &= -\hat{q}r_x \hat{M} - (d + \hat{\theta})(\hat{M} - \bar{m}) \\ \dot{\hat{q}} &= -a_1 \hat{q} + a_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $\tilde{q} = q - \hat{q}$ es el error de estimación y converge exponencialmente al origen, además las trayectorias solución de $\tilde{M} = M - \hat{M}$ son uniformemente últimamente acotadas.

Demostración: Debido a que el observador dado por (3.15) es lineal e independiente de los demás estados del modelo del bioproceso se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{M}^2 \quad (3.16)$$

para ello, derivando \tilde{M} con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{M}} &= -qr_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) + \hat{q}r_x \hat{M} + (d + \hat{\theta})(\hat{M} - \bar{m}) \\ &= -qr_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) + (q - \tilde{q})r_x(M - \tilde{M}) + (d + \theta - \tilde{\theta})(M - \tilde{M} - \bar{m}) \\ &= -qr_x M - dM + d\bar{m} - \theta M + \theta\bar{m} + qr_x M - qr_x \tilde{M} - \tilde{q}r_x M + \tilde{q}r_x \tilde{M} + dM - d\tilde{M} \\ &\quad - d\bar{m} + \theta M - \theta\tilde{M} - \theta\bar{m} - \tilde{\theta}M + \tilde{\theta}\tilde{M} + \tilde{\theta}\bar{m} \end{aligned}$$

de modo que se tiene:

$$\dot{\tilde{M}} = -(qr_x + d + \theta)\tilde{M} + (\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M} - \tilde{q}r_x M - \tilde{\theta}(M - \bar{m})$$

de modo que empleando la función candidata dada por la ecuación (3.16) y derivándola con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{V} = -(qr_x + d + \theta)\tilde{M}^2 + (\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M}^2 - \tilde{q}r_x M \tilde{M} - \tilde{\theta}\tilde{M}(M - \bar{m})$$

Considerando que el termino \tilde{q} se encuentra acotado, i.e., $|\tilde{q}| < \varepsilon_q$ $\varepsilon_q \in \mathbb{R}_+$ y por las suposiciones 2 y 7 del Capítulo 3. Así, cada término de la derivada de la función candidata de Lyapunov tiene la forma siguiente:

- $-\underbrace{(qr_x + d + \theta)}_v \tilde{M}^2 = -v |\tilde{M}|^2$
- $|(\tilde{q}r_x + \tilde{\theta})\tilde{M}^2| \leq |\tilde{q}r_x + \tilde{\theta}| |\tilde{M}|^2 \leq (\varepsilon_q r_{max} + \varepsilon_\theta) |\tilde{M}|^2$
- $|-\tilde{q}r_x M \tilde{M}^2| \leq |\tilde{q}r_x M| |\tilde{M}| \leq (\varepsilon_q r_{max} M_a) |\tilde{M}|$
- $|-\tilde{\theta}\tilde{M}(M - \bar{m})| \leq |\tilde{\theta} \tilde{M}| |\tilde{M} - \bar{m}| \leq (\varepsilon_q |M_a - \bar{m}|) |\tilde{M}|$

y reemplazando los términos anteriores en la derivada de la función candidata se tiene:

$$\dot{V} \leq -(v - \epsilon_q r_{max} + \epsilon_\theta) |\tilde{M}| \left(|\tilde{M}| - \frac{\epsilon_q r_{max} M_a + (\epsilon_q |M_a - \bar{m}|)}{v - \epsilon_q r_{max} + \epsilon_\theta} \right) \quad (3.17)$$

Con ello se concluye que $\dot{V} < 0$ cuando $v > (\epsilon_q r_{max} + \epsilon_\theta)$ y $|\tilde{M}| > \frac{\epsilon_q r_{max} M_a + (\epsilon_q |M_a - \bar{m}|)}{v - \epsilon_q r_{max} + \epsilon_\theta}$.

Así, se concluye que las trayectorias solución de (3.15) son uniformemente últimamente acotadas.

□

Capítulo 4

Resultados

4.1. Simulación del modelo del bioproceso

En este Capítulo se analizan los comportamientos obtenidos de los observadores propuestos en el Capítulo 3, para ello se emplea Simulink 2022a.

4.2. Modelo de simulación

Tal como se mostró en el capítulo anterior, el modelo que cumple las suposiciones propuestas para el diseño de observadores está dado por (3.2), es decir:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \mu X - (d + \theta)X - \beta X \\ \dot{S} &= -Y\mu X - (d + \theta)(S - \bar{s}) - g \\ \dot{M} &= -qr_x M - (d + \theta)(M - \bar{m}) \\ \dot{q} &= -a_1 q + a_2,\end{aligned}$$

para dicho modelo de bioremediación se realizan consideraciones adicionales, tales como:

- Aunque desconocida, se considera (Escenarios 1-3) una tasa de crecimiento con estructura de tipo Monod [1].

dada de la siguiente forma:

$$\mu = \mu_{max} u_{NO_3}(S_{NO_3}) \quad (4.1)$$

donde: $u_{NO_3}(S_{NO_3}) = \frac{S_{NO_3}}{K_{S_{NO_3}} + S_{NO_3}}$, $\mu_{max} \in \mathbb{R}_+$ es la tasa de crecimiento máxima, $K_{S_{NO_3}} \in \mathbb{R}_+$ es la constante de saturación media asociada a la concentración de nitrato S_{NO_3} .

- El microorganismo considerado en el presente trabajo es *Arthrospira platensis*, la cual es una cianobacteria que no es capaz de fijar nitrógeno atmosférico.
- No se considera el efecto del CO_2 , así el cultivo es fotoautotrófico.
- El metal a remover es Cadmio (Cd).

Los parámetros del modelo son reportados en la Tabla B y fueron extraídos de la literatura, [7].

4.3. Escenarios propuestos

En la figura 4.1 se puede ver el comportamiento del modelo de biorremediación de metales pesados (3.2), los observadores propuestos en el presente trabajo emplean dicho modelo para realizar la observación de las dinámicas de los estados, dinámicas no conocidas como la tasa de crecimiento μ y la perturbación externa θ , para ello se realizaron cuatro escenarios diferentes para evaluar el desempeño de cada uno, los cuales son:

1. La tasa de crecimiento es de tipo Monod con una estructura como la mostrada en la ecuación (4.1) y la perturbación $\theta = 0$.
2. La tasa de crecimiento es de tipo Monod y se considera una perturbación constante dada por $\theta = 0.01$, como se mencionó previamente dicha perturbación surge debido a errores de calibración del actuador, la cual se propone del 10 % respecto al factor de dilución $d(t)$.

3. La tasa de crecimiento es de tipo Monod y se considera una perturbación acotada y con dinámica lenta dada por $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$
4. La tasa de crecimiento es de tipo Monod con adaptabilidad y se emplea un conjunto de perturbaciones dadas a continuación:
 - Para: $0 \leq t < 15 \rightarrow \theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$.
 - Para: $15 \leq t < 35$ se tiene un función triangular con amplitud de 0.1.
 - Para: $35 \leq t \leq 50$ se usa una función diente de sierra con la forma:

$$\theta = 0.15 \cdot \text{saw}^1(2t)$$

Además, para dicho escenario se emplea la tasa de crecimiento con adaptabilidad, dada por:

$$\dot{\mu} = \varkappa \left[\mu_{max} + \frac{S}{K + S} - \mu \right] \quad (4.2)$$

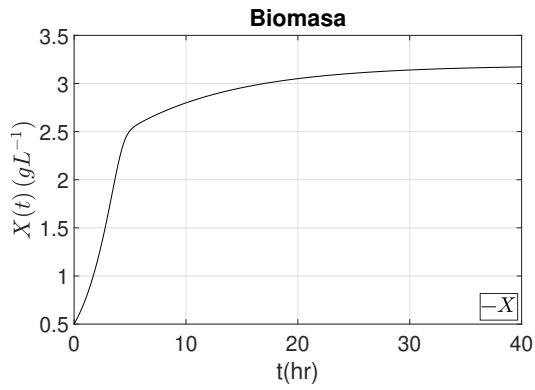
donde $\varkappa, \mu_{max} \in \mathbb{R}_+$ y $\dot{\mu}$ es el parámetro de adaptabilidad [22].

De igual modo para realizar las simulaciones expuestas a continuación se empleo el método de integración Runge-Kutta con tamaño de paso variable con valor de 0.0001.

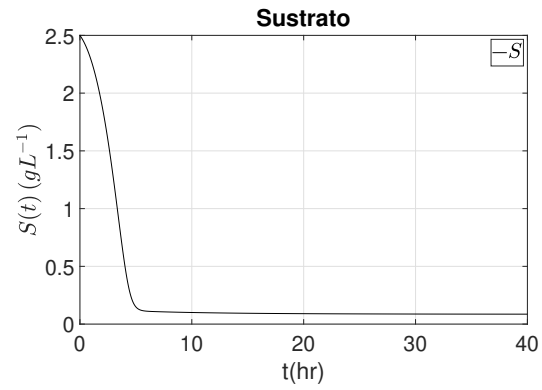
Analizando los resultados del modelo del bioproceso se puede decir lo siguiente

- La biomasa, que se alimenta del sustrato se reproduce para producir el producto deseado que en el presente caso es la concentración de metal que hay en el medio de cultivo
- Se puede ver que la gráfica de la concentración de sustrato es una imagen espejo de la gráfica de la biomasa
- Después de aproximadamente 20 horas del comienzo, el sustrato se ha convertido en biomasa y el crecimiento está cerca de detenerse.

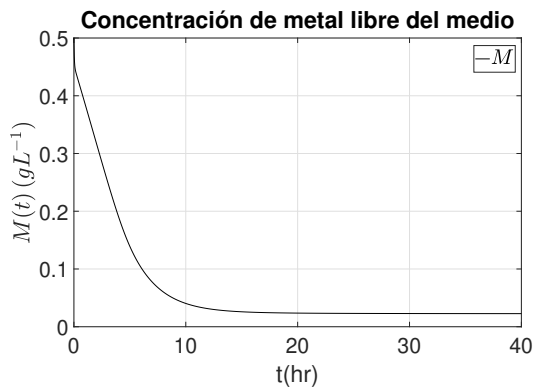
¹saw: función diente de sierra



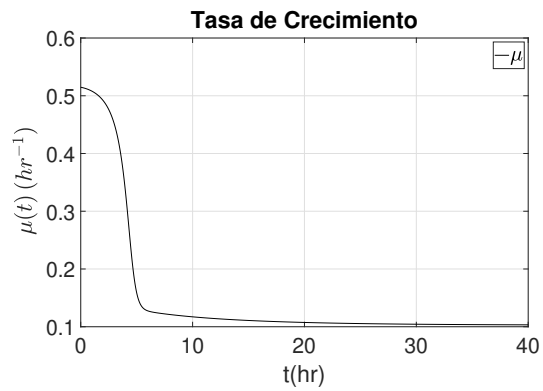
(a) Dinámica de la biomasa



(b) Dinámica del sustrato



(c) Tasa de concentración de metal



(d) Tasa de crecimiento

Figura 4.1: Simulación del proceso de biorremediación: Condiciones nominales, sin perturbaciones y con conocimiento de μ .

En la figura 4.1 se puede ver lo sucedido en el proceso de biorremediación, el cual muestra que el proceso se inicia con una baja concentración de biomasa la cual se convierte en sustrato a medida que avanza el tiempo dentro del medio de cultivo, el sustrato dentro del biorreactor comienza a disminuir, esto sucede a medida que la biomasa aumenta, dicha acción va a implicar que la concentración de metal en el biorreactor disminuya, de igual modo se puede apreciar la tasa de crecimiento en la figura (4.1(d)) la cual va disminuyendo proporcionalmente a medida que también disminuye el sustrato.

4.4. Desempeño de los observadores diseñados

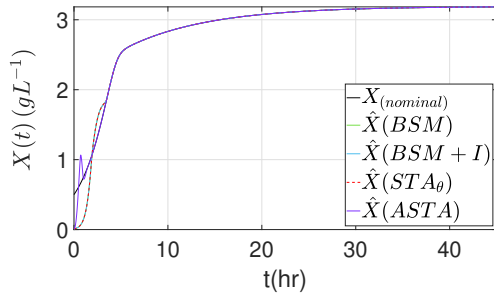
En la presente sección se va a comparar el desempeño de los observadores propuestos ante los escenarios descritos anteriormente. Para ello se realiza la siguiente notación en las figuras posteriores:

Observador	Ecuación	Notación	Color
Observador basado en SM	(3.4)	BSM	Verde
Observador basado en SM con inyección de salida	(3.5)	BSM+I	Azul
Observador STA para sustrato	(3.7)	STA_θ	R rojo
Observador STA con ganancias adaptables	(3.14)	ASTA	Morado

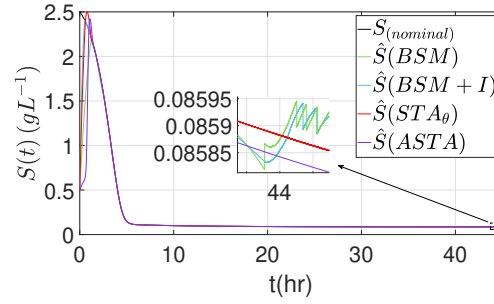
Tabla 4.1: Notación de los observadores propuestos.

4.4.1. Escenario 1

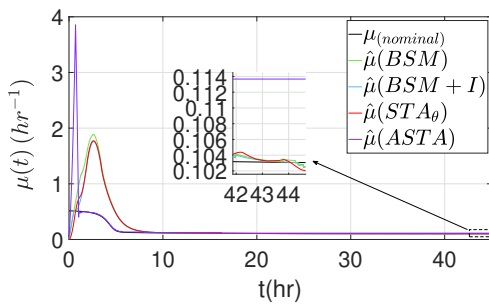
En la figura 4.2 cuando la perturbación $\theta = 0$ permite ver que todos los observadores propuestos convergen de manera asintótica, en el caso de los observadores BSM , $BSM+I$ y STA_θ son los que presentan mayor castaño, el algoritmo STA_θ en particular debido a la estructura de la superficie deslizante propuesta, sin embargo el algoritmo $ASTA$ el cual emplea ganancias adaptables es el que presenta mejor tiempo de convergencia en los



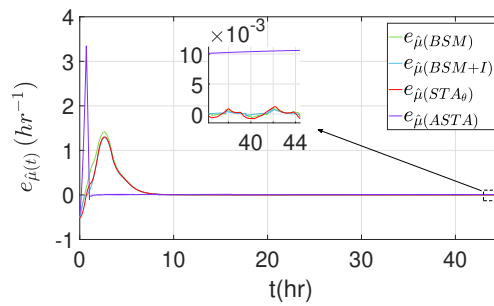
(a) Dinámica de la biomasa



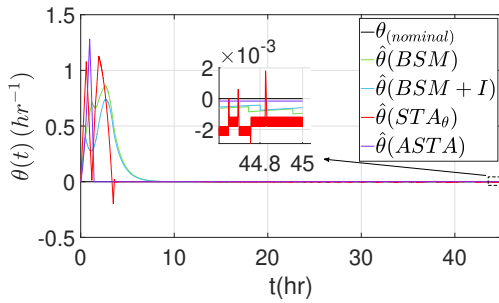
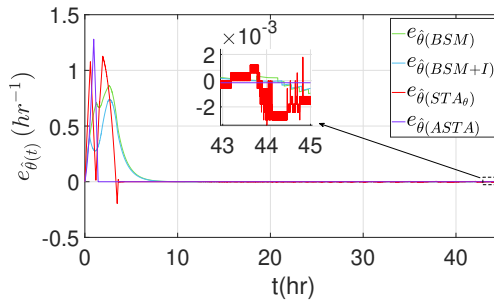
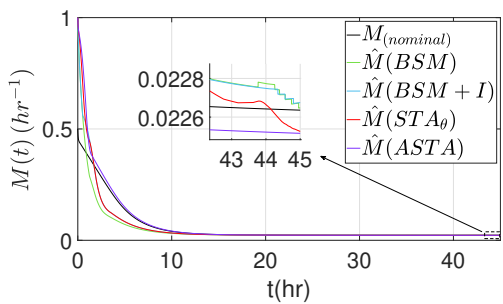
(b) Dinámica del sustrato



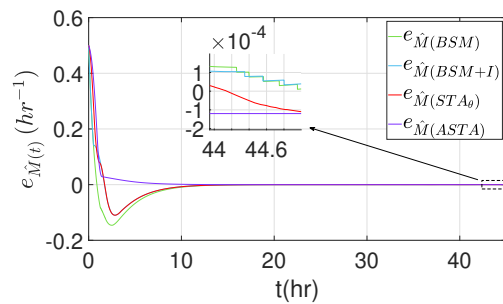
(c) Tasa de crecimiento



(d) Error tasa de crecimiento

(e) Perturbación θ (f) Error perturbación θ 

(g) Dinámica de la concentración de metal



(h) Error de la concentración de metal

Figura 4.2: Simulación del escenario 1: Caso nominal. Se muestran los estimados de los estados X y S (Fig 4.2 (a-b)), la estimación de μ , θ y M (Fig 4.2(c),(e),(g)) y sus errores de estimación (Fig 4.2(d),(f),(h)) respectivamente, para 45 hr.

estimados de los estados, sucede lo mismo para los estimados de la dinámica de la tasa de crecimiento μ y en la perturbación θ sin embargo dicho algoritmo presenta un offset ligeramente mayor a los demás algoritmos expuestos.

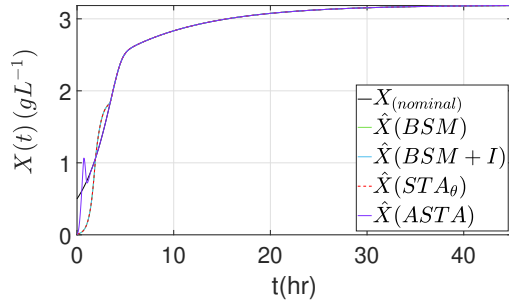
Así, se puede concluir lo siguiente para el escenario nominal:

- Cuando la perturbación es constante todos los algoritmos convergen a los estimados en tiempo finito.
- Los algoritmos BSM , $BSM+I$ y STA_θ son los que presentan menor error en estado estacionario a costa de mayores oscilaciones de alta frecuencia además de presentar mayor tiempo de convergencia al estimado.
- El algoritmo $ASTA$ presenta la menor elongación en el estado transitorio y no presenta el efecto de las oscilaciones de alta frecuencia vistas en los demás algoritmos esto se debe a las ganancias adaptables que cambian en función de la desviación de la superficie deslizante, de modo que varían en el tiempo.

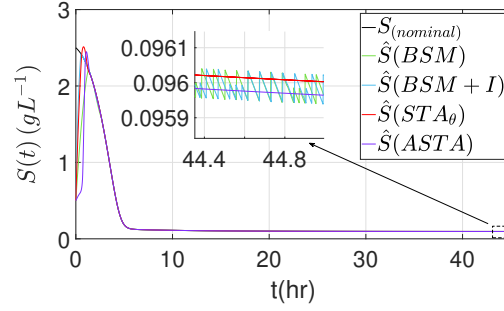
4.4.2. Escenario 2

En la figura 4.3, se puede ver el escenario cuando se añade una perturbación constante, se eligió una perturbación de aproximadamente el 10% del valor del factor de dilución, de modo que se empleó $\theta = 0.01$, en este escenario se puede ver que tanto en los estimados de los estados, así como la estimación de la tasa de crecimiento μ y la perturbación θ se presentan mayores oscilaciones que en el escenario sin perturbación en los observadores BSM , $BSM + I$ y STA_θ , en el caso del estimado de la tasa de crecimiento todos los algoritmos presentan convergencia asintótica al estimado, lo mismo sucede para el caso de la estimación de la perturbación θ y en dicho caso el algoritmo de ganancias adaptables $ASTA$, presenta el menor offset en todos los estimados.

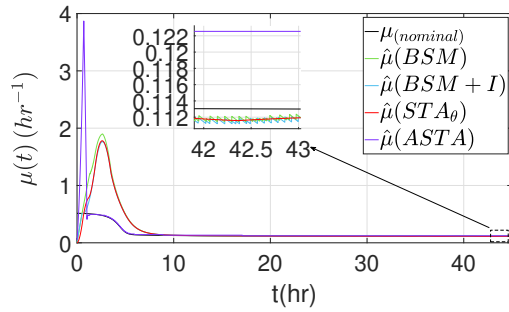
De modo que se puede concluir:



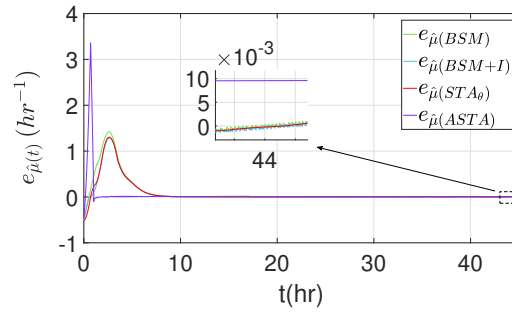
(a) Dinámica de la biomasa



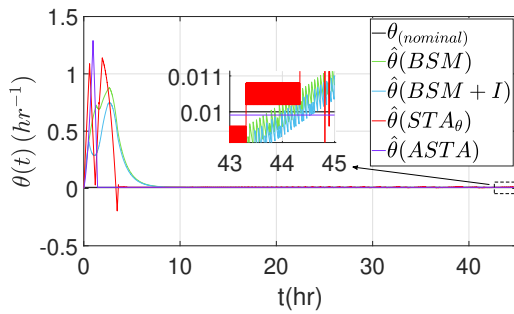
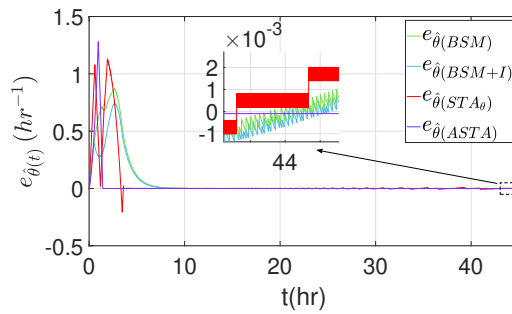
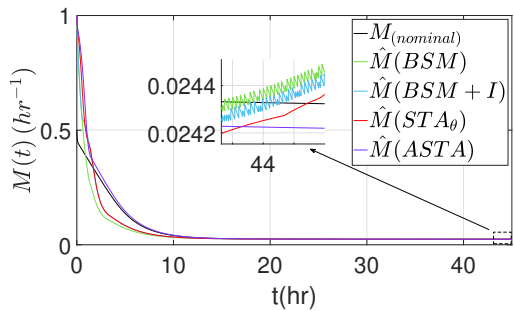
(b) Dinámica del sustrato



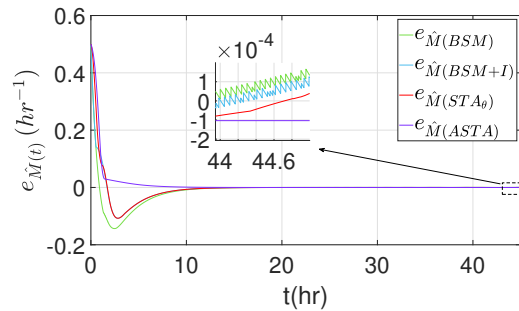
(c) Tasa de crecimiento



(d) Error tasa de crecimiento

(e) Perturbación θ (f) Error de estimación perturbación θ 

(g) Dinámica de la concentración de metal



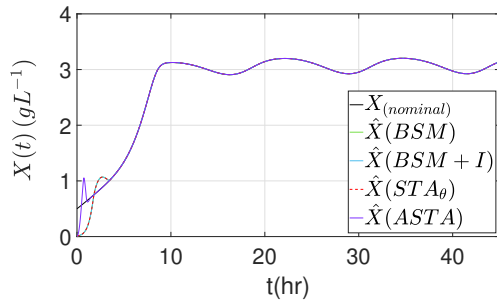
(h) Error de la concentración de metal

Figura 4.3: Simulación del escenario 2: Perturbación externa $\theta = 0.01h^{-1} = 10\% d$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ desconocida.

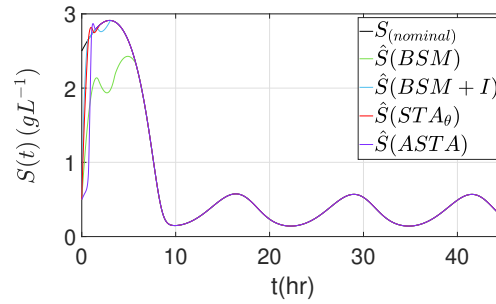
- En el caso de los estimados de los estados que son la biomasa y el sustrato todos los observadores convergen de manera asintótica al estado real.
- Con una perturbación constante los observadores BSM , $BSM+I$ y STA_θ presentan mayor castaño que en el caso sin perturbación pero aun permiten un buen estimado de la dinámica desconocida μ y la perturbación externa θ .
- La convergencia del observador $ASTA$ es en menor tiempo que las demás propuestas, además presenta un menor offset en la estimación de la perturbación θ que los demás algoritmos y con ello se presenta mejor tiempo de convergencia y menor error de estimación en la concentración del metal M .
- El algoritmo $ASTA$ reduce considerablemente las oscilaciones de alta frecuencia presentes en los demás observadores.
- Todos los algoritmos propuestos presentan robustez ante perturbaciones exógenas constantes.

4.4.3. Escenario 3

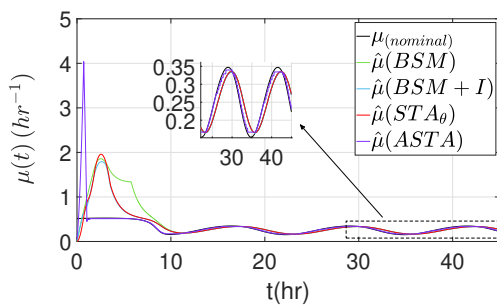
En la figura 4.4 se muestra el escenario 3, el cual emplea una perturbación variable el tiempo, esta función tiene dinámica lenta y se encuentra acotada, de modo que $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$. Dicha perturbación provoca un aumento en las oscilaciones de alta frecuencia y una desviación del estimado de μ y θ en los observadores BSM , $BSM + I$ y STA_θ , tal como se ve en las figuras (4.4(c)) y (4.4(e)) respectivamente. En el caso del algoritmo $ASTA$ tal como en los escenarios anteriores presenta una menor elongación en el estado transitorio que los demás observadores y en este caso se puede ver que también presenta el menor offset en el estimado de la perturbación θ y la tasa de crecimiento μ como se muestra en las figuras (4.4 (d)) y (4.4(f)), ya que no presenta el efecto de castaño, en el caso de los demás algoritmos dicho problema causa desviaciones del estimado. Lo



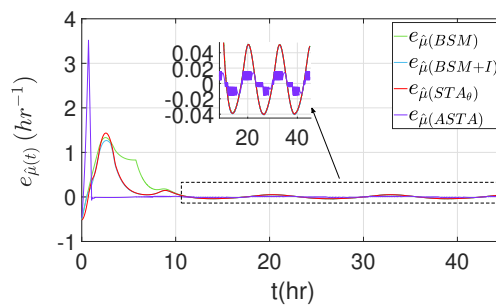
(a) Dinámica de la biomasa



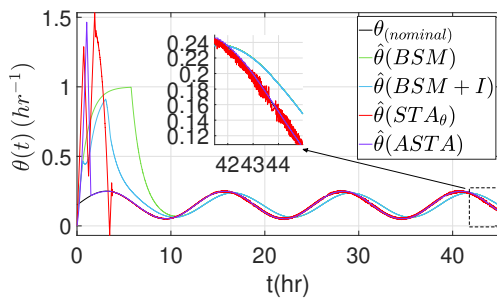
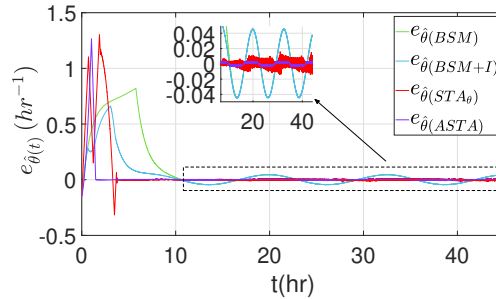
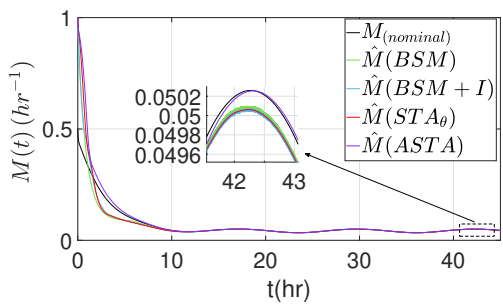
(b) Dinámica del sustrato



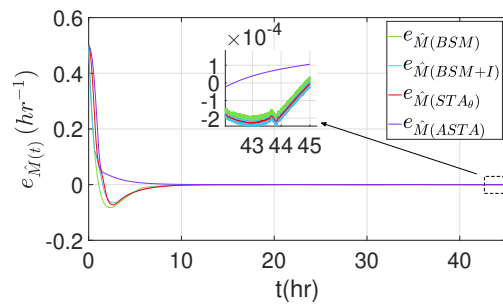
(c) Tasa de crecimiento



(d) Error tasa de crecimiento

(e) Perturbación θ (f) Error de estimación perturbación θ 

(g) Dinámica de la concentración de metal



(h) Error de la concentración de metal

Figura 4.4: Simulación del escenario 3: Perturbación externa $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ desconocida.

anterior repercute directamente sobre la estimación de la concentración de metal M , la cual el algoritmo $ASTA$ presenta los mejores resultados.

Con ello se concluye lo siguiente:

- El uso de una perturbación de tipo sinusoidal con dinámica lenta, degrada la estimación de la tasa de crecimiento μ en los observadores BSM , $BSM+I$ y STA_θ . El observador $ASTA$ realiza una correcta estimación de la tasa de crecimiento μ , así como presentar menor elongación en la parte transitoria.
- En el caso de la perturbación externa θ los observadores BSM y $BSM+I$ presentan un error de estimación, el observador STA_θ realiza de forma correcta la estimación sin embargo presenta mayores oscilaciones de alta frecuencia que los observadores anteriores, finalmente el observador $ASTA$ es el que realiza la mejor estimación además de tener el menor tiempo de convergencia y no presentar oscilaciones de alta frecuencia presentes en las anteriores propuestas.
- Dado que la mejor convergencia en θ la presenta el observador $ASTA$, la estimación de la concentración del metal M presenta mejores resultados en el algoritmo de ganancias adaptables $ASTA$.

4.4.4. Escenario 4

Como se analizó en los casos anteriores, se puede ver que la mayor parte los algoritmos presentan buenos comportamientos para los estimados de la dinámica de la tasa de crecimiento μ y la perturbación θ , en este caso se emplea una versión con adaptabilidad de la tasa de crecimiento μ presentada en la ecuación (4.1), además el sistema es perturbado con una serie de señales. Los resultados del presente escenario se muestran en la figura 4.5. En el caso de los estados X y S , se puede ver que presentan diferentes comportamientos que los expuestos en los escenarios anteriores, esto debido al cambio en la estructura de la tasa de crecimiento desconocida μ presente en el bioproceso, tal como se muestra

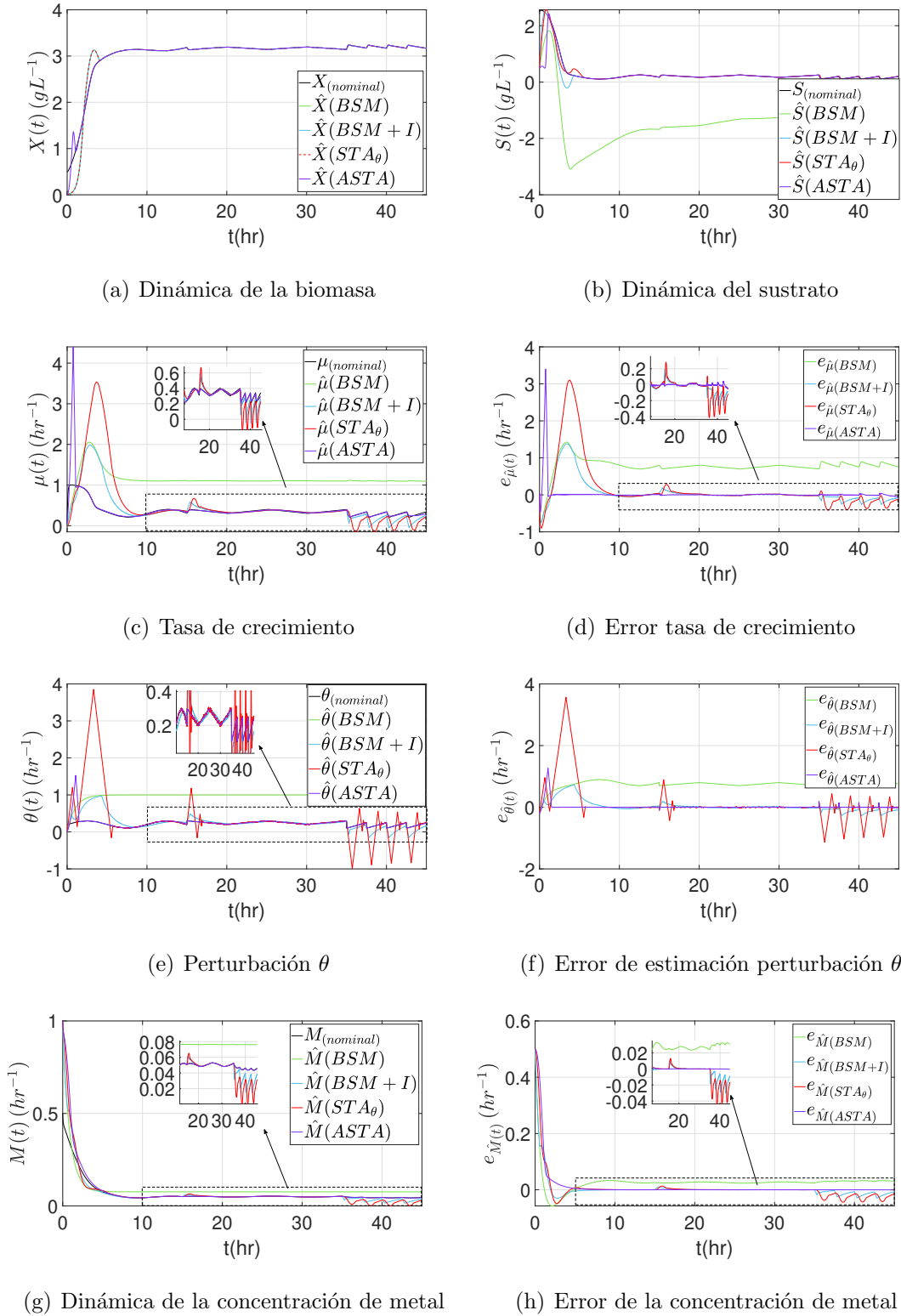
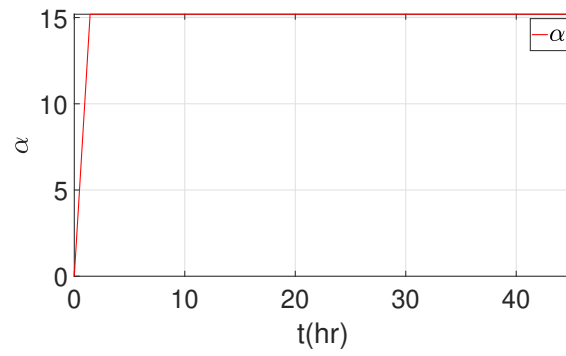
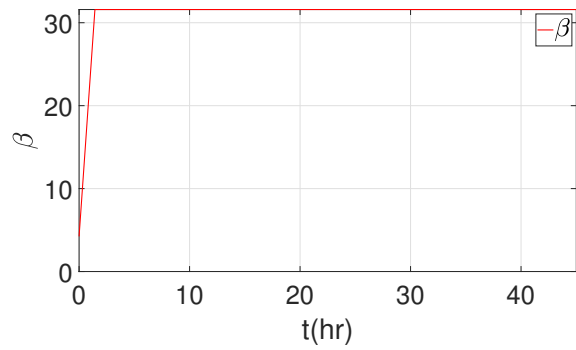


Figura 4.5: Simulación del escenario 4: Perturbación externa $\theta = 0.2(1 + \sin(0.1t))$, $t \in [0, 15]$; $\theta = \text{triangular}$, $t \in [15, 35]$; $\theta = 0.15(\text{saw}(0.1t))$, $t \in [35, 50]$ y tasa de crecimiento $\mu(\cdot)$ tal como (4.2), desconocida.

en las figuras (4.5(a), (b)) respectivamente. También se aprecia que el observador BSM no realiza un correcto estimado de los estados, incluso mostrando valores negativos de sustrato, lo cual es imposible a nivel práctico. Los algoritmos $BSM + I$ y STA_θ presentan mayor error de estimación que en los escenarios pasados, lo cual sucede para los estimados de θ , μ y M , además de presentar sobretiros muy grandes cuando cambia de tipo de señal la perturbación θ . En el caso del observador BSM , los estimados de μ y θ no los realiza de forma correcta y con ello se tiene que tampoco realiza una correcta estimación de la concentración de metal M . El observador $ASTA$ es el único capaz de realizar una correcta estimación, tanto de la tasa de crecimiento adaptable μ , como de la serie de perturbaciones externas θ , lo cual repercute directamente en el estimado del metal M , el cual presenta el mejor desempeño. Con ello se concluye lo siguiente:

- El observador BSM es el que presenta los peores desempeños en el presente escenario, al no poder estimar de forma correcta el estado S , la tasa de crecimiento μ ni la perturbación externa θ .
- El incluir la inyección de salida en el observador $BSM + I$ mejora considerablemente el desempeño de estimación de la tasa de crecimiento μ y la perturbación externa θ .
- El observador STA_θ presenta mejor desempeño que BSM pero mayores oscilaciones de alta frecuencia que $BSM + I$.
- El observador $ASTA$ es quien presenta mayor robustez ante cambios en la tasa de crecimiento desconocida μ , así como una correcta estimación de la perturbación externa θ , además de presentar el menor tiempo de convergencia en todos los escenarios presentados y finalmente eliminar las oscilaciones de alta frecuencia propuestas antes mencionadas, todo lo anterior se logra mediante el uso de las ganancias adaptables del algoritmo, las cuales evolucionan conforme $t \rightarrow \infty$, dichas ganancias α y β se pueden apreciar en las figuras (4.6 (a),(b)) respectivamente.

(a) Ganancia α (b) Ganancia β Figura 4.6: Ganancias α y β correspondientes al escenario 4

Conclusión general

Llegado a este punto del trabajo se puede concluir que los observadores propuestos en el Capítulo 3 permiten realizar una correcta estimación de los estados del bioproceso, además de estimar la tasa de concentración de metal $\mu(S, t)$ así como la perturbación externa asociada al factor de dilución θ . Para poder determinar dichos resultados, en un principio se analizaron los diferentes algoritmos encontrados en la literatura, se pudo determinar las deficiencias y ventajas de los mismos. En una primera instancia, se realizó el desarrollo de dos algoritmos, nombrados previamente BSM y $BSM + I$, los cuales permiten realizar la estimación de la perturbación externa θ y posteriormente complementarlos con el observador 3.3, el cual permite realizar una estimación de $\hat{\omega}$, para así finalmente mediante el uso de ambos se pudiera estimar de forma correcta la concentración de la tasa de metal M presente en el biorreactor. De modo que mediante los observadores BSM y $BSM + I$ se obtienen resultados favorables de la estimación de las dinámicas desconocidas, dichos algoritmos se basan en la técnica de modos deslizantes, analizando dichos resultados en los escenarios realizados se puede determinar que aunque se obtiene un algoritmo menos restrictivo en sus condiciones de diseño y con buen desempeño presenta los siguientes resultados:

- El uso de los algoritmos BSM y $BSM + I$ elimina ciertas restricciones de diseño presentes en trabajos pasados.
- Los observadores BSM y $BSM + I$ presentan buen desempeño de estimación de la perturbación externa θ y μ en los escenarios 1 y 2.

- En los escenarios 3 y 4 se mostró que tanto el algoritmo BSM como $BSM + I$ no realizan una buena estimación de θ y μ , con ello se observa que no son robustos ante tasas de crecimiento modificadas y perturbaciones con dinámicas ricas en el espectro frecuencial.

Posteriormente se realizó una tercer propuesta basada en STA, dicha propuesta parte del conocimiento del mismo número de tasas de reacción así como de dinámicas desconocidas, por ello el algoritmo STA_θ se basa en la propuesta del lema (3.3), de modo que se presenta un STA para la perturbación θ , con una superficie deslizante basada en el error de estimación, dicho algoritmo presenta los siguientes resultados:

- El algoritmo STA_θ presenta mejores tiempos de convergencia que los algoritmos BSM y $BSM + I$.
- El uso de la superficie deslizante basada en el error incrementa las oscilaciones de alta frecuencia.
- El observador STA_θ es robusto a tasas de crecimiento desconocidas y a perturbaciones externas asociadas al factor de dilución que son acotadas y lentas.

Finalmente, se desarrolló un algoritmo $ASTA$ con ganancias adaptables que permite eliminar ciertas condiciones de diseño adicionales presentes en los algoritmos anteriormente propuestos, dicho objetivo se alcanza mediante el uso de ganancias que evolucionan respecto a los cambios en el modelo del bioproceso de remediación de metales pesados, dicho algoritmo presenta los siguientes resultados:

- Su diseño relaja las condiciones del conocimiento de la cota de la perturbación θ y su derivada.
- Se obtienen mejores tiempos de convergencia que los algoritmos BSM , $BSM + I$ y STA_θ .

- Se obtienen mejores estimaciones de la perturbación externa θ y la tasa de crecimiento μ , lo cual repercute directamente en el algoritmo de observación para la tasa de metal M , la cual depende de la estimación de la perturbación externa ($\hat{\theta}$).
- El observador *ASTA* es robusto ante cambios en la tasa de reacción y perturbaciones con mayores componentes en el espectro frecuencial.
- Su uso reduce considerablemente las oscilaciones de alta frecuencia presente en los algoritmos *BSM*, *BSM + I* y *STA θ* .

En conclusión, se realizó el desarrollo de algoritmos basados en modos deslizantes que permitieron realizar una correcta estimación de la dinámica desconocida μ y la perturbación externa θ , además de aminorar las condiciones de diseño de trabajos anteriores. Finalmente dichos algoritmos fueron analizados mediante simulaciones para poder determinar cual de las propuestas cumple de mejor manera el desempeño deseado en la estimación e identificación de los parámetros desconocidos.

Trabajo futuro

Al escribir esta tesis se describen algunas ideas a desarrollar en la presente línea de investigación:

1. Determinar algoritmos donde se permita considerar el caso donde se necesita estimar varias tasas de reacción.
2. Considerar el caso del algoritmo de supertorsión generalizado (Generalized supertwisting algorithm-GSTA), ya que presenta convergencia finita en menor tiempo respecto del STA.
3. Considerar la versión o versiones adaptativas del estimador basado en GSTA. Con esto se evita, en principio, el sobre dimensionamiento de las ganancias de observación

y se relaja la condición sobre el conocimiento de la cota de la perturbación externa y de su derivada.

4. Validación experimental de la teoría propuesta. Realizar experimentos en tiempo real de los observadores propuestos.

Apéndice A

Demostraciones

Demostraciones del Capítulo 1

A.1. Teorema 1:

A continuación, por razones de que el texto sea auto contenido, se presenta de manera integral la prueba del Teorema 1 que es tomado de la referencia [16].

Demostración: Dado que las soluciones del algoritmo se encuentran definidas en el sentido de Filippov se puede ver que $x^* = [0 \ 0]^T$ es el punto de equilibrio del sistema cuando las perturbaciones existentes son nulas, de modo que derivando el cambio de variable ζ , se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \frac{1}{|\zeta_1|} \left(\frac{1}{2}\zeta_2 - \frac{K_1}{2}\zeta_1 + \frac{1}{2}\varrho_1 \right) \\ \dot{\zeta}_2 &= \frac{1}{|z_1|} (-K_2\zeta_1 + |\zeta_1|\varrho_2)\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde $|\zeta_1| = \sqrt{x_1}$, $\frac{d}{dt}(\sqrt{|x|}\text{sign}(x)) = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{|x|}}$ y $x = |x|\text{sign}(x)$.

De modo que A.1 puede ser reescrita como sigue

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{|\zeta_1|}(A\zeta + V_\varrho)$$

donde $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}K_1 & \frac{1}{2} \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz Hurwitz si $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $V_\varrho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\varrho_1 \\ |\zeta_1| \varrho_2 \end{bmatrix}$. Ahora, aplicando la desigualdad de Rayleigh Ritz en la función de Lyapunov $V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ se tiene

$$\lambda_{\min}(P)\|\zeta\|^2 \leq V(\zeta) \leq \lambda_{\max}(P)\|\zeta\|^2 \quad (\text{A.2})$$

de modo que $V(\zeta)$ es una función definida positiva global y decreciente.

Dado que la función $V(\zeta)$ no es una función continua debido a que no es diferenciable en el conjunto $S = \{\zeta \in \mathbb{R}^2 | \zeta = 0_{2 \times 1}\}$ debido a la función signo, es por ello que si $V(\rho(x_0, t))$ es absolutamente continua cuando $\rho(x_0, t) = [\rho_1(x_0, t) \ \rho_2(x_0, t)]$ se puede determinar la estabilidad del STA.

Además, V puede expresarse en función de $\rho(x_0, t)$ y los elementos de P , del modo siguiente:

$$V(\rho(x_0, t)) = p_1|\rho_1| + 2p_d\rho_2\sqrt{|\rho_1|}\text{sign}(\rho_1) + p_2\rho_2^2$$

Así, los elementos de $\rho(\cdot)$ en la inclusión diferencial de Filippov $\dot{\rho}(x_0, t) \in -K_1\sqrt{|\rho_1|}\text{sign}(\rho_1) + \rho_2$ y se deduce lo siguiente:

- ρ_1 es monótonamente creciente o decreciente es un intervalo que contenga a τ si en $t = \tau$, ρ_1 cruza el cero y $\rho_2 \neq 0$.
- $\rho_1 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0$ cuando ρ_1 cruza el cero.

Con ello, se puede ver que $\rho(x_0, t)$ es una función monótona y con ello $V(x)$ es absolutamente continua, de modo que la derivada de la función de Lyapunov estada dada como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \frac{1}{|\zeta_1|}(\zeta^T (A^T P + P A) \zeta + 2V_\varrho^T P \zeta) \end{aligned}$$

donde

- $\zeta R = [0 \quad \zeta_1(\varrho_2 \text{sign}(x_1))]$
- $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varrho_2 \text{sign}(x_1) & 0 \end{bmatrix}$

Así, se tiene:

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{|\zeta_1|} (\zeta^T ((A + R)^T P + P(A + R)) \zeta + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \varrho_2 & 0 \end{bmatrix} P \zeta)$$

y considerando $|\varrho_2| \leq 1$, se tiene:

$$A + R \leq \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2} & \frac{1}{2} \\ -(K_2 + \text{sign}(x)) & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{2} & \frac{1}{2} \\ -(K_2 + v) & 0 \end{bmatrix} = A_R$$

Se puede ver que A_R se encuentra asociada a $\dot{\zeta} = A_R \zeta$, con ello se puede determinar que es cuadrado estable, además $A_R^T P + P A_R < -\alpha_v I$, donde $\alpha_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, con ello:

$$\dot{V}(x) \leq \frac{1}{|\zeta_1|} (-\alpha_v \zeta^T \zeta + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \varrho_1 & 0 \end{bmatrix} P \zeta) \quad (\text{A.3})$$

De modo que $V(x)$ es una función monotamente decreciente y así, el analisis de estabilidad de x^* solo depende de ϱ_1 .

- Ahora, se prueba para $\varrho_1 = 0$:

Dado el algoritmo STA, mostrado en la sección 1.4 se sabe que x^* es globalmente uniformemente asintoticamente estable y robusto a la perturbación $|\varrho_2|$. Sea la desigualdad A.2 se tiene:

$$\lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \leq V(x) \rightarrow \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{|x_1| + x_2^2} \leq \sqrt{\lambda_{\min}(P) (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)} \leq \sqrt{V(x)}$$

\therefore

$$|\zeta_1| = \sqrt{|x_1|} \leq \|\zeta\| \leq \frac{\sqrt{V(x)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \quad (\text{A.4})$$

Con ello, se tiene que la derivada de la función candidata de Lyapunov tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq \frac{1}{|\zeta_1|} (-\alpha_v \|\zeta\|^2) \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\sqrt{V(x)}} \left(-\frac{\alpha_v}{\alpha_{\max}(P)} V(x) \right) \\ &\quad \vdots \\ \dot{V}(x) &\leq -\frac{\alpha_v \sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)} \sqrt{V(x)} = -\varsigma \sqrt{V(x)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente, integrando A.5 en el intervalo $[0, t]$ se tiene:

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - \varsigma \int_0^t \sqrt{V(x(s))} ds$$

Sea $\Psi(V(x(t))) = \int_{V(x_0)}^{V(x(t))} \frac{dt}{\sqrt{y}} = 2(\sqrt{V(x(t))} - \sqrt{V(x_0)})$ con función inversa dada por $\Psi(z)^{-1} = \left(\frac{z}{2} + \sqrt{V(x_0)} \right)$, de modo que por la desigualdad de Bihari (Lema 19.1 Pp. 507 [21]):

$$V(x(t)) \leq \Psi \left(\int_0^t -\varsigma dt \right)^{-1} = \left(\sqrt{V(x_0)} - \frac{\varsigma}{2} t \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

De modo que x^* es globalmente estable en tiempo finito τ , donde:

$$\tau \leq T(x_0) = \frac{2\sqrt{V(x_0)}}{\varsigma}$$

- Ahora, para $|\varrho_1(x, t)| < \delta$ y tomando en cuenta A.3, se tiene:

$$\dot{V} \leq \frac{1}{|\zeta_1|} (-\alpha_v \|\zeta\|^2 + \delta \lambda_{\max}(P) \|\zeta\|) = \frac{\|\zeta\|}{|\zeta_1|} (-\alpha_v \|\zeta\| + \delta \lambda_{\max}(P))$$

Ahora, de A.2 y A.4 se tiene:

$$\dot{V} \leq -\alpha_v (\kappa \|\zeta\| + (1 - \kappa) \|\zeta\|) + \delta \lambda_{\max}(P) \leq -\kappa \varsigma \sqrt{V(x)} \quad (\text{A.7})$$

donde:

- $0 < \kappa < 1$
- $\|\zeta\| \geq \mu \mid \mu = \frac{\delta \eta}{\alpha_v (1 - \kappa)}$

Y definiendo las funciones de clase K_∞ , se tiene: $\omega_1(r) = \lambda_{\min}(P)r^2$, $\omega_2(r) = \lambda_{\max}(P)r^2$ y $\omega_3(r) = -\kappa \varsigma \sqrt{V(r)}$. Con ello se puede concluir que las trayectorias solución de 1.9 son globalmente uniformemente ultimamente acotadas con cota última en $b = \omega_1^{-1}(\omega_2(\mu))$. \square

Apéndice B

Parámetros de Simulaciones

Parámetros del biomodelo

Parámetro	Valor
μ_{max}	0.6
$K_{S_{NO_3}}$	0.414
K_{S_I}	23.391
A	100
Y_{NO_3}	1.5
β_D	0.0027
K_{s_X}	10
a_1	28.020
a_2	39.727

Tabla B.1: Tabla de parámetros para el modelo del bioproceso.

Parámetros de las entradas

Entrada	Valor
d	0.1
\bar{s}_{NO_3}	5.0
\bar{m}	0.1
$I(t)$	30

Tabla B.2: Tabla de parámetros con los valores de las entradas al bioproceso.

Parámetros del las condiciones iniciales

Parámetro	Valor
$X(0)$	0.5
$S_{NO_3}(0)$	2.5
$M(0)$	0.5
$q(0)$	60.0
$\hat{X}(0)$	0.01
$\hat{S}_{NO_3}(0)$	0.5
$\hat{M}(0)$	1.0
$\hat{q}(0)$	30
$\hat{\theta}(0)$	0.01
$\xi(0)(A)$	0.1
$\xi(0)(B)$	$[0.1 \ 0.01]^T$
$p(0)(C)$	1.0

Tabla B.3: Tabla de parámetros con los valores de las condiciones iniciales.

Bibliografía

- [1] Denis Dochain. *Automatic Control of Bioprocesses*. Wiley. 2008
- [2] Denis Dochain & G. Bastin. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier. 1990
- [3] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River. 2002
- [4] Klaas van't Riet, Johannes Tramper. *Basic Bioreactor Design*. Electrical Engineering & Electronics. CRC Press. 1991
- [5] Feng-jie Li, Hong-wei Yang, Ramamoorthy Ayyamperumal, Yang Liu,. *Pollution, sources, and human health risk assessment of heavy metals in urban areas around industrialization and urbanization-Northwest China*. Chemosphere, Volume 308, Part 2, 2022, 136396, ISSN 0045-6535, <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2022.136396>.
- [6] Sebastián Nuñez, Hernán De Battista, Fabricio Garelli, Alejandro Vignoni, Jesús Pico. *Second-order sliding mode observer for multiple kinetic rates estimation in bioprocesses*. Control Engineering Practice 21 (2013) 1259–1265. 2013
- [7] Víctor Alejandro Reza López. *Observadores robustos para un proceso continuo de biorremediación de metales pesados*. Tesis de Maestría, Cinvestav. 2021
- [8] Reza López V.A., Guerrero Tavaréz J N, Torres Muñoz J A. *An Extended Super-Twisting Algortihm for simultaneous estimation of reaction rates and input disturbances in bioporcess*. Journal of Control Process 123 (2023) 131-140. 2013

- [9] Óscar Raúl Mancilla Villa, Héctor Manuel Ortega Escobar, et al. *Metales pesados totales y arsénico en el agua para riego de Puebla y Veracruz*. Revista internacional de contaminación ambiental, 28(1), 39-48. 2012
- [10] Juan José Castellón Gómez, Roberto Bernal Muñoz, María de Lourdes Hernández Rodríguez. *Calidad del agua para riego en la agricultura protegida en Tlaxcala*. Ingeniería, vol. 19, núm. 1, pp. 39-50 Universidad Autónoma de Yucatán. 2015
- [11] Sakawduan Kaewdam, Somkiat Jaturonglumlert, Jaturapatr Varith, Chanawat Nitatwichit, Kanjana Narkprasom. *Kinetic Models for phycocyanin production by fed-batch cultivation of the spirulina platensi*. International Journal of GEOMATE, Sept., 2019 Vol.17, Issue 61, pp. 187 - 194 ISSN: 2186-2982 (P), 2186-2990. 2019
- [12] Froylán M.E. Escalante, Karen Alejandra Reyna-Angeles, Juan Villafaña-Rojas, Efrén Aguilar-Garnica. *Kinetic model selection to describe the growth curve of arthospira (Spirulina) maxima in autotrophic cultures*. Universidad Autónoma de Guadalajara A.C., Departamento de Química. 2002
- [13] Katarzyna Chojnacka Agnieszka Zielinska. *Evaluation of growth yield of Spirulina (Arthrospira) sp. in photoautotrophic, heterotrophic and mixotrophic cultures*. World J Microbiol Biotechnol (2012) 28:437–445. 2011
- [14] Chojnacka, K., Chojnacki, A., Gorecka, H. *Biosorption of Cr³⁺, Cd²⁺ and Cu²⁺ ions by blue-green algae Spirulina sp.: kinetics, equilibrium and the mechanism of the process*. Chemosphere, 59(1), 75-84 2005
- [15] Y. Sudharshan Reddy, V. Sunitha *Assessment of Heavy metal pollution and its health implications in groundwater for drinking purpose around inactive mines, SW region of Cuddapah Basin, South India*. Volume 8, 2023, 100069, ISSN 2772-8099, <https://doi.org/10.1016/j.totert.2023.100069>.

- [16] Jaime A. Moreno & M. Osorio. *Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. IEEE transactions on automatic control.* 57(4), 1035-1040. 2012
- [17] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. & Levant, A. *Sliding mode control and observation.* (Vol. 10). New York: Springer New York. 2014
- [18] Y. B. Shtessel, J. A. Moreno, F. Plestan, L. M. Fridman & A. S. Poznyak *Super-twisting adaptive sliding mode control: A Lyapunov design.*,. 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA, USA, 2010, pp. 5109-5113, doi: 10.1109/CDC.2010.5717908.
- [19] Vadim Utkin, Jurgen Guldner & Jingxin Shi *Sliding mode control in electro-mechanical systems.* CRC Press. 2009
- [20] K.D. Young & U. Ozguner *Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control.* Elsevier, New York. 2014
- [21] Alexander S. Poznyak *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers Volume 1: Deterministic Techniques.* Springer, Hungary. 2008.
- [22] Carlos A. Smith, Armando B. Corripio. *Control automático de procesos: Teoría y Practica.* Limusa Wiley. 201
- [23] Frank Bradley Armstrong, Thomas Peter Bennett. *Bioquímica.* Reverte. 1982
- [24] Comisión Nacional del Agua. *Estadísticas del agua en México.* Comisión Nacional del Agua. 2018
- [25] Comisión Nacional del Agua. *Atlas del Agua en México.* Comisión Nacional del Agua. 2018
- [26] Fondo para la Comunicación y la Educación Ambiental, A.C., Centro Mexicano de Derecho Ambiental, A.C., Presencia Ciudadana Mexicana, A.C. *El agua en México:*

- lo que todas y todos debemos saber*. FEA, CEMDA, Presencia Ciudadana Mexicana. 2006
- [27] Oliver Mendoza Cano. *Metales pesados y el agua de consumo en Colima una cuestión de salud pública*. Universidad de Colima. 2017
- [28] Diego Ivan Caviedes Rubio, Ramiro Adolfo Muñoz Calderón, Alexandra Perdomo Gualtero, et al. *Tratamientos para la Remoción de Metales Pesados Comúnmente Presentes en Aguas Residuales Industriales. Una Revisión*. Revista Ingeniería y Región. 2015;13(1):73-90. 2015
- [29] Eduardo Baeza Gómez *Técnicas y métodos de tratamiento para diferentes tipos de aguas residuales*. Biblioteca del congreso nacional de Chile. 2018.
- [30] Mayra Eleonora Beltrán Pineda, Alida Marcela Gómez Rodríguez *Biorremediación de metales pesados cadmio, cromo y mercurio mecanismos bioquímicos e ingeniería genética: una revisión*. ISSN 1900-4699, Volumen 12, Número 2, Páginas 172-197. 2016.
- [31] Christopher Edwards & Sarah K. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis. 1998.
- [32] Ricardo Julián Mantz *Control por Modos Deslizantes*. Primera edición beta en base del material del Curso de Posgrado: Control por Modos Deslizantes. 2020.
- [33] Vadim I. Utkin *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag 1992.
- [34] Moo-Young, M. & Chisti, Y. *Biochemical engineering in biotechnology (Technical Report)*. *Pure and applied chemistry*. Pure & Appl. Chem., Vol. 66, No. 1, pp. 117-136, 1994.
- [35] J.D. Murray *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 2002.