

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

UNIDAD ZACATENCO  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**“Análisis de las fluctuaciones del tipo de  
cambio USD/MXN utilizando analogías con  
sistemas físicos”**

**Tesis que presenta**

**Jaime Vidal Hernández Hernández**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Luis Fernando Rojas Ochoa**

Ciudad de México

Agosto, 2023



*El presente trabajo fue llevado a cabo en el Laboratorio T18 del Cinvestav, ubicado en Av Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Ciudad de México.*

**Análisis de las fluctuaciones del tipo de cambio  
USD/MXN utilizando analogías con sistemas físicos**

TESIS LLEVADA A CABO POR:

**JAIME VIDAL HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ**

CDMX, Mexico, Agosto 2023.







Actualmente, diversos análisis financieros y económicos de las divisas utilizan métodos tradicionales como medias móviles, bandas Bollinger, entre otros. Aunque estos métodos son ampliamente utilizados, se basan en algunas suposiciones que no siempre se cumplen en el mercado financiero. En este trabajo, se propone una alternativa a las propuestas tradicionales, donde se busca establecer una conexión entre diversos sistemas físicos simples y conocidos y la evolución temporal de un fenómeno aparentemente distante, como son las fluctuaciones de las divisas. Para lograr esto, se han tomado como base herramientas de la física estadística del área de materia condensada blanda, Ecuación de Langevin Generalizada y procesos de Ornstein-Uhlenbeck. En este trabajo, se propone modificar el esquema teórico para introducir de forma fenomenológica la “fuerza” del mercado. Esta modificación nos permite determinar el comportamiento del primer y segundo momento estadístico de los retornos logarítmicos del tipo de cambio USD/MXN durante los años 2011, 2012, 2016, 2017, 2020 y 2021. Estos periodos corresponden a tres periodos de gobierno mexicano distintos, y se han elegido los años más caóticos de cada sexenio para poner a prueba la eficacia y la robustez del modelo ante valores extremos.

### **Palabras Clave**

Difusión Anómala, Langevin, MSD, Ornstein-Uhlenbeck.





Various financial and economic analyses of currencies use traditional methods such as moving averages and Bollinger bands, among others. Although these methods are widely used, they are based on assumptions that are not always fulfilled in the financial market. This work proposes an alternative to traditional approaches, where an attempt is made to establish a connection between different simple and well-known physical systems and the temporal evolution of an apparently distant phenomenon, such as currency fluctuations.

Tools from the statistical physics of soft condensed matter have been employed to achieve this, such as the Generalized Langevin Equation and Ornstein-Uhlenbeck processes. In this work, the theoretical framework is modified to introduce the ‘trend’ of the market phenomenologically. This modification allows us to determine the behavior of the first and second statistical moments of the logarithmic returns of the USD/MXN exchange rate for the years 2011, 2012, 2016, 2017, 2020, and 2021. These periods correspond to three different Mexican government administrations, and the most chaotic years of each six-year term have been chosen to test the effectiveness and robustness of the model against extreme values.

### **Keywords**

Anomalous Diffusion, Langevin, MSD, Ornstein-Uhlenbeck.



## Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento de manera enunciativa pero no limitativa a las siguientes personas:

A mi familia, en especial a mi madre Guadalupe Hernández Mancilla por su amor, apoyo y motivación en todo momento.

A mis amigos y compañeros, quienes me han brindado un apoyo incondicional a lo largo de mis estudios de maestría, especialmente a Jair, Celestino, Abraham, Rojas, etc.

A mis profesores y sinodales, quienes me han guiado por el camino del conocimiento y han contribuido de manera significativa para llevar a cabo la presente tesis.

A mi camarada Jair Bocanegra por proporcionar un equipo de cómputo, con procesador Intel Core i9 9900K, GPU Nvidia RTX 2060 Super y 16 GB de memoria RAM a 3200 MHz, en el que se llevaron a cabo los cálculos necesarios para la determinación de los parámetros del modelo teórico.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) y al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV) por su apoyo.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a todas las personas que han estado conmigo a lo largo de mi vida y a aquellas que he tenido la valiosa oportunidad de conocer. La pandemia nos ha recordado que a veces estamos cerca de las personas que amamos y otras veces sólo formamos parte de las estadísticas.

*Jaime Vidal Hernández Hernández*



<b>Resumen</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>11</b>
<b>I Planteamiento del problema de investigación</b>	<b>23</b>
<b>1. Planteamiento del problema de investigación</b>	<b>25</b>
1.1. Introducción . . . . .	25
1.2. Objetivos . . . . .	26
1.2.1. Objetivo general . . . . .	26
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	26
1.3. Justificación . . . . .	26
<b>II Marco teórico</b>	<b>27</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>29</b>
2.1. Conceptos básicos . . . . .	29
2.1.1. Probabilidad . . . . .	29
2.1.2. Promedio en el ensamble . . . . .	29
2.1.3. Promedio temporal . . . . .	30
2.1.4. Ergodicidad . . . . .	30
2.1.5. Caminata aleatoria . . . . .	30
2.1.6. Desplazamiento cuadrático medio . . . . .	31
2.1.7. Movimiento Browniano . . . . .	31
2.2. Ecuación de Langevin . . . . .	32
2.2.1. Difusión normal - Solución a la ecuación de Langevin . . . . .	32
2.2.2. Difusión anómala . . . . .	38
2.3. Proceso de Ornstein - Uhlenbeck . . . . .	40
<b>III Metodología</b>	<b>43</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>45</b>
3.1. Modelo . . . . .	45
3.1.1. Nuevo modelo . . . . .	50
<b>IV Resultados</b>	<b>55</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>57</b>
4.1. Resultados . . . . .	57

4.1.1. USDMXN 2011 y 2012 . . . . .	57
4.1.2. USDMXN 2016 y 2017 . . . . .	61
4.1.3. USDMXN 2020 y 2021 . . . . .	64
4.1.4. Perspectivas . . . . .	67
<b>V Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	71
<b>VI Apéndice</b>	<b>73</b>
<b>6. Apéndice</b>	<b>75</b>
6.1. R . . . . .	75
6.1.1. Introducción a R . . . . .	75
6.1.2. Características de R . . . . .	75
6.1.3. Uso de R en la estadística computacional . . . . .	75
6.2. C++ . . . . .	75
6.3. Caminata aleatoria 1D . . . . .	76
6.4. Caminata aleatoria 2D y 3D . . . . .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

3.1.	Evolución temporal de los datos de cierre de la divisa USD/MXN durante el año 2016 con una frecuencia de adquisición de un minuto. . . . .	46
3.2.	PDF versus retornos logarímicos del tipo de cambio USD/MXN correspondientes al año 2016 con tiempos de retraso de 5 min (cuadros negros), 250 min (círculos rojos) y 1067 min (triángulos azules). . . . .	47
3.3.	Momentos estadísticos absolutos empíricos de orden 0.1 (cuadros rojos), uno (círculos azules), dos (triángulos negros), tres (triángulos verdes) y cuatro (rombos violetas) y momentos estadísticos absolutos teóricos de orden 0.1 (línea roja), uno (línea azul), dos (línea negra), tres (línea verde) y cuatro (línea violeta) para el tipo de cambio AUD/CAD correspondiente al año 2010. . . . .	52
3.4.	Comparación entre el primer momento estadístico empírico y el obtenido a partir del modelo teórico para desfases temporales, con valores dados en minutos, de: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097, para el tipo de cambio EUR/USD en el año 2015. . . . .	54
4.1.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2011 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	58
4.2.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2012 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	58
4.3.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2011. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	60
4.4.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2012. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	61
4.5.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2016 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	62

4.6.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/XN durante el año 2017 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	62
4.7.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2016. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	63
4.8.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2017. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	63
4.9.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2020 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	65
4.10.	Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2021 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul). . . . .	65
4.11.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2020. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	66
4.12.	a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2021. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097. . . . .	66
6.1.	Posiciones posibles respecto al número de pasos consecutivos. . . . .	76
6.2.	Probabilidad asociada a la posición para una caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos. . . . .	78
6.3.	Gráfico Q-Q de los datos obtenidos a partir de la simulación de la caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos, los puntos representan los datos de la simulación y la línea azul el valor teórico de una distribución gaussiana. . . . .	79



---

6.6.	Trayectoria de una caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos. . . . .	79
6.4.	Comparación entre las funciones de distribución de probabilidad de los resultados obtenidos a partir de la simulación (azul) y la distribución gaussiana propuesta (rojo). . . . .	80
6.5.	Comparación entre los resultados obtenidos a partir de la simulación (gráfica de barras) y los generados por la distribución gaussiana propuesta (línea azul). . . . .	81
6.7.	Trayectoria de una caminata aleatoria de 10,000 pasos consecutivos en 2D.	81
6.8.	Trayectoria de una caminata aleatoria de 5,000 pasos consecutivos en 3D.	82
6.9.	Trayectoria de una caminata aleatoria de 10,000 pasos consecutivos en 2D donde los saltos provienen de una distribución gaussiana con media cero y desviación estándar uno. . . . .	83
6.10.	Desplazamiento cuadrático medio numérico de la trayectoria de la caminata aleatoria mostrada en la Fig. 6.9. . . . .	83



## Lista de Códigos

6.1. Caminata aleatoria de N pasos. . . . .	77
6.2. 100000 simulaciones de una caminata aleatoria de 1000 pasos consecutivos.	77
6.3. Caminata aleatoria de N pasos modificada. . . . .	80



4.1.	Valor del parámetro C calculado para los años 2011, 2012, 2016, 2017, 2020 y 2021 para el tipo de cambio USD/MXN. . . . .	67
6.1.	Posiciones posibles y su respectiva probabilidad, después de tres lanzamientos seguidos. . . . .	77
6.2.	Posiciones posibles y su respectiva probabilidad, después de cuatro lanzamientos seguidos. . . . .	77



I

**Planteamiento del problema de investigación**





## 1.1. Introducción

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones más utilizadas y conocidas en el área de estadística y probabilidad. Desafortunadamente, existen muchos fenómenos interesantes en diversas áreas como física, finanzas, economía, ingeniería, electrónica, biología, entre otras, que no siguen este tipo de distribución debido a la presencia de colas pesadas. Para poner esto en contexto, consideremos el siguiente ejemplo: en un conjunto de eventos aleatorios que siguen una distribución normal, es muy poco común encontrar eventos más allá de seis desviaciones estándar. Sin embargo, en un conjunto de eventos aleatorios que siguen distribuciones con colas pesadas, como la distribución de Pareto, es frecuente encontrar datos incluso a ocho desviaciones estándar.

Para abordar eventos aleatorios que siguen distribuciones de probabilidad con colas pesadas, la comunidad científica ha propuesto enfoques basados en analogías con diversos fenómenos físicos, como la transición vítrea, sistemas de 'spin-glass', átomos súper fríos, coloides densos, entre otros. Estas analogías permiten utilizar el conocimiento y la experiencia adquirida en dichos sistemas para comprender y analizar mejor los eventos aleatorios mencionados de manera previa.

La relación entre la moneda de curso legal en nuestro país, el peso mexicano, y la moneda de curso legal en los Estados Unidos de América, el dólar estadounidense, es un excelente ejemplo de una variable aleatoria que presenta una distribución de probabilidad con colas pesadas. El tipo de cambio entre estas dos monedas tiene un impacto significativo en la economía de nuestro país y, por lo tanto, contar con un modelo que describa esta relación y permita interpretar sus parámetros resulta de gran interés. Dicho modelo nos proporcionaría una herramienta para comprender las principales características de la relación USD/MXN y su influencia en la economía.

Actualmente, a pesar de la existencia de distribuciones de colas pesadas como Pareto, Levy, Cauchy, entre otras, una de las desventajas que presentan es que sus parámetros no pueden ser interpretados de manera física. Sería deseable contar con una distribución que permita obtener información sobre lo que está ocurriendo dentro del sistema estudiado a partir de sus parámetros. Como alternativa, proponemos un análisis de las fluctuaciones de la relación USD/MXN utilizando una analogía con sistemas físicos conocidos como se propone en las Refs. [1-3]. Todo lo anterior, con la finalidad de describir y estudiar el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN con base en el expertise de algunos fenómenos físicos conocidos.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo general**

Determinar el comportamiento de la distribución de probabilidad del tipo de cambio USD/MXN en diferentes intervalos de tiempo y encontrar parámetros fenomenológicos que describan la evolución temporal del sistema físico análogo a la relación de las divisas.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

Utilizar los parámetros calculados a través del análisis técnico realizado en esta tesis para llevar a cabo un estudio tanto cuantitativo como cualitativo de la relación USD/MXN en diferentes periodos de gobierno en México, abarcando desde 2006 hasta 2022. Realizar simulaciones computacionales que permitan reproducir las principales características estadísticas del tipo de cambio USD/MXN y, además, realizar predicciones sobre su comportamiento en intervalos cortos de tiempo, considerando una incertidumbre razonable para el tipo de evento analizado.

## **1.3. Justificación**

El resultado de este trabajo proporciona a los investigadores en finanzas una alternativa para el estudio de las divisas, gracias a la contribución de parámetros que permiten y facilitan el análisis tanto cuantitativo como cualitativo del tipo de cambio de divisas mediante la interpretación de dichos elementos. Además, nuestro propósito es establecer un precedente para el estudio de distribuciones no normales, no solo en el ámbito de las divisas sino también en precios de acciones que se negocian en la bolsa de valores e incluso elementos más volátiles como criptomonedas, utilizando el método propuesto en esta tesis.



**Marco teórico**



## 2.1. Conceptos básicos

### 2.1.1. Probabilidad

Una colección  $\mathcal{X}$  de subconjuntos de un conjunto  $X$  se dice que es una  $\sigma$ -álgebra si cumple con lo siguiente:

- $X \in \mathcal{X}$
- Si  $A \in \mathcal{X}$  entonces  $A^c \in \mathcal{X}$
- Si  $\{A\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión numerable de elementos en  $\mathcal{X}$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$

Un espacio de probabilidad es una terna  $(\Omega, F, P)$ , en donde  $\Omega$  es el conjunto que contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio también se le denomina espacio muestral,  $F$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  y  $P$  es una medida o función de probabilidad sobre  $F$ .

Una variable aleatoria real es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ , tal que  $F$  es medible.

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  definidas en un mismo espacio de probabilidad, parametrizadas por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto  $S$  llamado espacio de estados.

No es el propósito de la presente tesis abordar de manera profunda los conceptos mencionados anteriormente. Sin embargo, si el lector está interesado en conocer la definición formal de algunos de estos conceptos, sugerimos que revise las Refs. [4, 5].

### 2.1.2. Promedio en el ensamble

Desde el punto de vista de la termodinámica, se entiende por ensamble a un conjunto hipotético de sistemas termodinámicos con características similares, que permite llevar a cabo un análisis estadístico del conjunto. A los ensambles estadísticos, se les suele denominar colectividad estadística. Para una variable aleatoria  $X$ , diremos que su promedio en un ensamble (en el caso discreto) de tamaño  $N$  es:

$$\langle X(t) \rangle_N = \langle [X(t + t_0) - X(t_0)] \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i(t + t_0) - X_i(t_0)] \quad 2.1$$

donde  $t_0$  es el tiempo que usamos como referencia. Si conocemos la función de densidad de probabilidad de la variable  $X$ , es decir, conocemos  $P(X, t) \forall t > 0$  podemos calcular el promedio en el ensamble (caso continuo) como:

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(X, t) X dX \quad 2.2$$

### 2.1.3. Promedio temporal

El promedio temporal de una variable aleatoria  $X$  es:

$$\overline{X(\tau, \Delta)} = \frac{1}{T - \Delta} \int_{t_0}^{t_0 + T - \Delta} [X(\tau + \Delta) - X(\tau)] d\tau \quad 2.3$$

donde  $T$  es el tiempo total de medición o periodo, al término  $\Delta$  se le denomina 'lagtime', desfase temporal o ventana de tiempo y  $t_0$  es el tiempo que usamos como referencia o también conocido como tiempo inicial.

### 2.1.4. Ergodicidad

La ergodicidad es una propiedad de algunos sistemas físicos que permite justificar ciertos resultados de la mecánica estadística.

Para fines prácticos, diremos que un sistema es ergódico en una variable aleatoria  $X$  si el promedio del ensamble (cuando el tamaño  $N$  del ensamble es muy grande) de la variable coincide con el promedio temporal (cuando analizamos periodos  $T$  muy largos). Es decir, con  $N \rightarrow \infty$  y  $T \rightarrow \infty$ , respectivamente. Lo anterior es equivalente a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X_i(t_0 + \Delta) - X_i(t_0)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \Delta} \int_{t_0}^{t_0 + T - \Delta} [X(\tau + \Delta) - X(\tau)] d\tau \quad 2.4$$

o sea,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle X(\Delta) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{X(\tau, \Delta)} \quad 2.5$$

### 2.1.5. Caminata aleatoria

Si  $X(t)$  es una trayectoria que comienza en la posición  $X(t_0)$ , donde  $t_0$  es el tiempo inicial o de referencia. Una caminata aleatoria se podrá expresar como:

$$X(t + \tau) = X(t) + \Phi(\tau) \quad 2.6$$

donde  $\Phi$  es una variable aleatoria y  $\tau$  es el intervalo de tiempo entre pasos subsecuentes. Si el valor del nuevo paso de la caminata no depende de los valores anteriores, se dice que el proceso 'no tiene efecto de memoria'. Por otra parte, si la probabilidad de que ocurra un nuevo evento depende solamente del evento inmediatamente anterior, entonces al proceso se le conoce como 'cadena de Márkov'.

### 2.1.6. Desplazamiento cuadrático medio

El Desplazamiento Cuadrático Medio (MSD, sigla en inglés de Mean Square Displacement) matemáticamente se define, utilizando el promedio en el ensamble, como:

$$MSD \equiv \langle |X(t_0 + \Delta) - X(t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i(t_0 + \Delta) - X_i(t_0)|^2 \quad 2.7$$

Por otra parte, utilizando el promedio temporal su definición es:

$$MSD \equiv \overline{\delta^2(\Delta)} = \frac{1}{T - \Delta} \int_{t_0}^{t_0 + T - \Delta} [X(\tau + \Delta) - X(\tau)]^2 d\tau \quad 2.8$$

ambos promedios coinciden si el sistema analizado es ergódico.

El significado físico del MSD (Mean Squared Displacement) cuando se analizan las trayectorias de partículas sometidas a una fuerza aleatoria se puede interpretar como la región espacial del sistema que ha sido explorada por dichas partículas, medida desde una posición de referencia  $x(t_0)$  en el tiempo  $t_0$ . El MSD es útil para caracterizar el comportamiento de fenómenos físicos. Un ejemplo es cuando resolvemos la ecuación de Langevin, en la que emerge una relación lineal entre el MSD y la variable temporal, lo que permite describir la evolución temporal del sistema.

### 2.1.7. Movimiento Browniano

Se puede representar por la trayectoria aleatoria que traza una partícula de masa despreciable, como el polen, inmersa en un fluido, como el agua. La trayectoria estocástica que describe el movimiento Browniano está estrechamente relacionada con dos fenómenos físicos. El primero, se caracteriza por la agitación térmica del fluido, que causa colisiones aleatorias con las partículas suspendidas. Estas colisiones impulsan a las partículas en diferentes direcciones y con diferentes magnitudes de momento lineal, ya que a través de los choques microscópicos se produce un intercambio de energía y momento lineal entre el polen y las moléculas de agua, lo que resulta en su movimiento errático y desordenado. El segundo fenómeno se debe a la fricción que experimenta la molécula al desplazarse a través del medio.

Este fenómeno se puede describir como un proceso estocástico, donde la posición de una partícula en un momento dado no se puede predecir con certeza. En cambio, se utiliza la estadística para describir la distribución de las posiciones de la partícula a lo largo del tiempo.

Tiene varias aplicaciones en la física, la química y la biología. Por ejemplo, se utiliza esta descripción para estudiar la difusión de moléculas en soluciones, el comportamiento de partículas en sistemas coloidales y la dinámica de partículas en materiales porosos. Además, el movimiento Browniano ha sido fundamental en el desarrollo de la teoría cinética de los gases.

## 2.2. Ecuación de Langevin

La Ec. (2.9) representa la ecuación de movimiento de una partícula Browniana con masa  $m$  que realiza una caminata aleatoria (más adelante en otras subsecciones definiremos los conceptos de caminata aleatoria, movimiento Browniano y otros conceptos útiles). Básicamente, una partícula Browniana es aquella que se encuentra inmersa en un fluido y su dinámica de movimiento es el resultado del bombardeo molecular aleatorio del fluido ( $\mathcal{F}(t)$ ) y la fricción del medio ( $\gamma$ ) que la rodea. La ecuación de Langevin es aplicable tanto en situaciones de equilibrio termodinámico como fuera de él. Sin embargo, es fundamental destacar que, en nuestro contexto, estamos asumiendo como hipótesis que el sistema que empleamos como ejemplo se halla en equilibrio termodinámico. Esta suposición se realiza con el propósito de abordar de manera simplificada la solución de la ecuación de Langevin en un caso particular.

A continuación, analicemos la Ecuación de Langevin:

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v + \mathcal{F}(t) \quad 2.9$$

Es importante entender esta ecuación porque tanto históricamente como conceptualmente introduce una ecuación diferencial estocástica y la asocia a un fenómeno físico.

Antes de resolver la Ec. (2.9), es conveniente repasar los conceptos expuestos en la sección previa. Es importante conocer la diferencia entre el promedio temporal y el promedio del ensamble, ya que para resolver la ecuación de Langevin, es necesario calcular diversos promedios de variables aleatorias. Estos promedios (temporal y del ensamble) no son iguales, a menos que estemos analizando un proceso ergódico.

### 2.2.1. Difusión normal - Solución a la ecuación de Langevin

Si tomamos el promedio en el ensamble de la Ec. (2.9), se obtiene:

$$m \frac{d}{dt} \langle v \rangle = -\gamma \langle v \rangle + \langle \mathcal{F}(t) \rangle \quad 2.10$$

Si suponemos que  $\mathcal{F}(t)$  es un proceso estocástico en el que el valor de  $\mathcal{F}(t)$  en un instante de tiempo  $t$  no depende del resultado obtenido en otro instante de tiempo  $t'$ , es decir, que su función de correlación está dada por:

$$\langle \mathcal{F}_j(t) \mathcal{F}_k(t') \rangle = cte \delta(t - t') \delta_{j,k} \quad 2.11$$

donde los índices  $j$  y  $k$  son el  $j$ -ésimo y el  $k$ -ésimo elemento de  $\mathcal{F}(t)$ . Además, como hipótesis  $\mathcal{F}(t)$  tiene distribución gaussiana con media cero, entonces el promedio  $\langle \mathcal{F}(t) \rangle = 0$  porque el proceso estocástico  $\mathcal{F}(t)$  no presenta sesgo. El lector debe ser capaz de notar que las anteriores condiciones impuestas son restricciones muy fuertes que no necesariamente se cumplen para todos los sistemas físicos. Sin embargo, permite llevar a cabo una serie de procedimientos que facilitan la solución a la ecuación de Langevin.



Así, el promedio en el ensamble de la ecuación de Langevin se transforma en:

$$m \frac{d}{dt} \langle v \rangle = -\gamma \langle v \rangle \quad 2.12$$

cuya solución es:

$$\langle v(t) \rangle = v_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad 2.13$$

donde  $v(t \rightarrow 0) = v_0$ . Sea  $\tau = \frac{m}{\gamma}$ , notemos que las unidades de  $\tau$  son de tiempo,  $[\tau] = s$ , usualmente a  $\tau$  se le conoce como tiempo de relajación del sistema. Por otra parte, la solución para la posición de una partícula cuya ecuación de movimiento es la ecuación de Langevin se puede calcular de la siguiente manera: si dividimos entre  $m$  y multiplicamos por  $x$  la Ec. (2.9) obtenemos,

$$x \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} xv + \frac{x}{m} \mathcal{F}(t) \quad 2.14$$

Luego, usamos las dos relaciones siguientes:

$$xv = \frac{d}{dt} \left( \frac{x^2}{2} \right) \quad 2.15$$

y

$$x \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (xv) - v^2 = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{x^2}{2} \right) - v^2 \quad 2.16$$

Así, podemos reescribir la Ec. (2.14) como:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - v^2 = -\frac{1}{2\tau} \frac{d}{dt} (x^2) + \frac{x}{m} \mathcal{F}(t) \quad 2.17$$

Si calculamos el promedio en el ensamble de la ecuación anterior,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle v^2 \rangle = -\frac{1}{2\tau} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{m} \langle x \mathcal{F}(t) \rangle \quad 2.18$$

como  $x$  y  $\mathcal{F}(t)$  son variables independientes, entonces se cumple:  $\langle x \mathcal{F}(t) \rangle = 0$ . Luego,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle - \langle v^2 \rangle = -\frac{1}{2\tau} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle \quad 2.19$$

reordenando términos y simplificando,

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle \quad 2.20$$

si la partícula descrita por la ecuación de Langevin se encuentra en equilibrio termodinámico con el medio, podemos usar el principio de equipartición de la energía (el cual relaciona la función de energía hamiltoniana  $H$ , los grados de libertad  $x_n$  de un sistema físico y su temperatura  $T$ ) para calcular  $\langle v^2 \rangle$ .

El principio de equipartición de la energía establece, bajo suposiciones adecuadas, que algunos sistemas físicos cumplen la siguiente relación:

$$\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \rangle = \delta_{ij} K_B T \quad 2.21$$

donde  $x_{i,j}$  son los grados de libertad,  $H$  es el Hamiltoniano,  $T$  es la temperatura,  $K_B$  es la constante de Boltzmann y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Los grados de libertad  $x_i$  son coordenadas generalizadas y las podemos dividir en coordenadas generalizadas de posición  $q_i$  y coordenadas de momento generalizadas  $p_i$ , donde  $p_i$  es el momento conjugado de  $q_i$ . Equivalentemente,

$$\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle = \delta_{ii} K_B T = K_B T \quad 2.22$$

Si la energía cinética de un sistema unidimensional es  $K(v) = \frac{1}{2}mv^2$ , entonces la energía cinética en términos del momento será:  $K(p) = \frac{p^2}{2m}$ . Por lo tanto, el término del Hamiltoniano asociado a la energía cinética se podrá escribir como:

$$H_{\text{cinético}}(p) = \frac{p^2}{2m} \quad 2.23$$

Si suponemos, como ocurre frecuentemente en diversos fenómenos físicos para casos particulares, que la energía potencial no depende del momento  $p$  y solo es función de la posición  $x$ , es decir,  $H_{\text{potencial}} = H_{\text{potencial}}(x)$ , podemos expresar el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H = H_{\text{cinético}}(p) + H_{\text{potencial}}(x) \quad 2.24$$

sustituyendo en la relación dada por el principio de equipartición de la energía, tenemos:

$$\langle p \frac{\partial H}{\partial p} \rangle = \langle p \frac{\partial}{\partial p} H_{\text{cinético}}(p) \rangle = \langle p \frac{d}{dp} \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle p^2/m \rangle = K_B T \quad 2.25$$

si la masa permanece constante, entonces:  $p = mv$ . Así,

$$\langle mv^2 \rangle = K_B T \quad 2.26$$

Luego,

$$\langle v^2 \rangle = K_B T/m \quad 2.27$$

sustituyendo la Ec. (2.27) en la Ec. (2.20), tenemos:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{\tau} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2K_B T/m \quad 2.28$$

Sea  $\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = y$ , ahora podemos reescribir la ecuación anterior de forma más compacta como:

$$\frac{d}{dt}y + \frac{1}{\tau}y = 2K_B T/m \quad 2.29$$

La solución general para la variable  $y$  estará conformada por la solución particular más la solución homogénea de la ecuación diferencial.

La solución particular es:

$$y_p = \frac{2K_B \tau T}{m} \quad 2.30$$

La solución homogénea es:

$$y_h = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 2.31$$

Imponiendo la condición inicial  $y(t \rightarrow 0) = 0$ , la solución homogénea se escribe como:

$$y_h = -\frac{2K_B \tau T}{m} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad 2.32$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = \frac{2K_B \tau T}{m} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad 2.33$$

recordando que  $y = \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle$ , tenemos:

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2K_B \tau T}{m} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad 2.34$$

integrando respecto al tiempo la ecuación anterior,

$$\langle x^2 \rangle - \langle x(0)^2 \rangle = \frac{2K_B \tau T}{m} \left(t + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau\right) \quad 2.35$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x(0)^2 \rangle = \frac{2K_B \tau^2 T}{m} \left(\frac{t}{\tau} + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) \quad 2.36$$

Luego, tenemos que calcular el promedio en el ensamble de la posición con un tiempo de retraso de cero  $\langle x(0)^2 \rangle$  :

$$\langle x(0)^2 \rangle = \langle [x(0 + t_0) - x(t_0)]^2 \rangle = 0 \quad 2.37$$

sustituyendo el resultado anterior, se tiene:

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{2K_B \tau^2 T}{m} \left(\frac{t}{\tau} + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) \quad 2.38$$

si elegimos  $t_0 = 0$  y  $x(0) = 0$ , obtenemos la misma relación, entre el *MSD* y la variable temporal, a la que llegó Langevin, es decir,

$$MSD = \frac{2K_B \tau^2 T}{m} \left(\frac{t}{\tau} + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right) \quad 2.39$$

Conocer el comportamiento de los sistemas estocásticos en periodos cortos y largos de tiempo es importante ya que permite modelar la evolución del sistema analizado en distintas escalas temporales.

Si  $t \ll \tau$ , es decir, el tiempo de respuesta del sistema es muy pequeño comparado con la escala temporal de relajación del mismo sistema, podemos hacer la aproximación:

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} \quad 2.40$$

así,

$$\langle x(t)^2 \rangle \approx \frac{2K_B\tau^2 T}{m} \left( \frac{t}{\tau} + 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} - 1 \right) \quad 2.41$$

por tal razón,

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{K_B T}{m} t^2 \quad 2.42$$

en este régimen al fenómeno se le conoce como difusión balística, el nombre proviene de la relación que se encuentra al reescribir la ecuación anterior como:

$$\langle x(t)^2 \rangle = \langle v^2 \rangle t^2 \quad 2.43$$

ya que por el principio de equipartición  $\langle v^2 \rangle = \frac{K_B T}{m}$ .

Por otra parte, cuando  $t \gg \tau$ , es decir, el tiempo analizado es muy grande comparado con la escala de tiempo de relajación del sistema, se tiene:

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \approx 0 \quad 2.44$$

Luego,

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{2K_B\tau T}{m} t \quad 2.45$$

reescribiendo en términos de  $\gamma$ ,

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{2K_B T}{\gamma} t \quad 2.46$$

en este fenómeno se le llama difusión normal. A la cantidad  $\frac{K_B T}{\gamma}$  se le denomina coeficiente de difusión ( $D = \frac{K_B T}{\gamma}$ ). El nombre proviene a partir de lo siguiente: la cantidad  $\frac{K_B T}{\gamma}$  está relacionada con la solución a la ecuación de difusión a través del coeficiente de difusión  $D$ . La ecuación de difusión unidimensional está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad 2.47$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión y  $\gamma$  es el mismo que hemos hallado a partir de resolver la ecuación de Langevin.

Podemos interpretar todo lo mencionado anteriormente de la siguiente manera: a lo largo de períodos extensos, una partícula browniana muestra un comportamiento definido por la Ec. (2.46), es decir,  $MSD \propto t$ . En contraste, en intervalos breves de tiempo, el comportamiento se rige por la Ec. (2.43), resultando en:  $MSD \propto t^2$ . Como dato adicional, la Ec. (2.47), también conocida como la ecuación de difusión, es idéntica a la ecuación del calor. Por lo tanto, podríamos afirmar que tanto el movimiento browniano como la difusión del calor son diferentes manifestaciones del mismo fenómeno.

Finalmente, hemos encontrado una relación entre el MSD, en una dimensión, de una partícula cuya ecuación de movimiento está representada por la ecuación de Langevin y la variable temporal  $t$  (para escalas de tiempo grandes comparadas con  $\tau$ ). Si el lector desea profundizar acerca del proceso de difusión recomendamos las Refs. [6-8].

$$MSD = 2Dt$$

**2.48**

### 2.2.2. Difusión anómala

Cuando resolvimos la Ecuación de Langevin, Ec. (2.9), hicimos fuertes suposiciones relacionadas a la fuerza aleatoria  $\mathcal{F}(t)$ . Mediante el MSD es posible estudiar sistemas que no presentan una difusión normal, es decir, tienen difusión anómala. Lo anterior, se debe a que  $\mathcal{F}(t)$  no necesariamente cumple las hipótesis que impusimos en el desarrollo que llevamos a cabo para resolver la ecuación de Langevin. Podríamos estar ante fenómenos físicos que no se pueden modelar con procesos de Markov, caminatas aleatorias o movimiento Browniano, es decir, algunos elementos de la serie temporal están correlacionados entre sí y dan lugar a ‘efectos de memoria a largo plazo’. Supongamos que la relación entre el MSD y la variable temporal es la siguiente:

$$MSD \propto t^a \quad \text{2.49}$$

Cuando  $0 < a < 1$  decimos que estamos analizando fenómenos subdifusivos, es decir, procesos que presentan una difusión más lenta de lo que se esperaría en una difusión normal. Por otra parte, si  $1 < a < 2$  nos enfrentamos a fenómenos superdifusivos, es decir, procesos que presentan una difusión más rápida de lo que se esperaría en una difusión normal. De manera más amplia, podemos presentar algunos casos de difusión tanto anómala como normal, ordenados desde los procesos más lentos hasta los más rápidos [9].

$$MSD \propto t(\ln t)^a$$

$$1 < a < 4$$

*difusión ultralenta*

$$MSD \propto t^a$$

$$0 < a < 1$$

*subdifusión*

$$MSD \propto t^a$$

$$a = 1$$

*difusión normal*

$$MSD \propto t^a$$

$$1 < a < 2$$

*superdifusión*

$$MSD \propto t^a$$

$$a = 2$$

*difusión balística*

$$MSD \propto t^a$$

$$a = 3$$

*difusión de Richardson*

### 2.3. Proceso de Ornstein - Uhlenbeck

En subsecciones previas vimos cómo se relaciona el desplazamiento cuadrático medio y el coeficiente de difusión a partir de la ecuación de Langevin. Por otra parte, Einstein también derivó la solución a la ecuación de difusión Ec. (2.47), donde encontró que:

$$\rho(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{x^2}{4Dt} \quad 2.50$$

para resolver este problema él asume que  $N$  partículas parten del origen  $x = 0$  en un tiempo  $t = 0$ . Notemos que la solución presentada por Einstein es una distribución gaussiana con media  $\mu = 0$  y desviación estándar  $\sigma = \sqrt{2Dt}$ , o sea, se comporta como un movimiento Browniano. Si nosotros calculamos el primer momento estadístico notaremos que es cero, es decir,

$$\langle x \rangle = 0 \quad 2.51$$

mientras que el segundo momento estadístico es:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad 2.52$$

que es consistente con la solución a la Ecuación de Langevin para escalas de tiempo donde  $t \gg \tau$ , es precisamente esta consideración de intervalos de tiempo grandes lo que orilló a Ornstein a extender la función de distribución, con base en resultados de Uhlenbeck, para incluir también intervalos de tiempo pequeños, para más detalles ver Ref. [10].

Si dividimos la Ec. (2.9) entre la masa podemos escribirla como:

$$\frac{dv}{dt} = -av + \mathcal{A}(t) \quad 2.53$$

donde  $a = \gamma/m$  y  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{F}(t)/m$ . El resultado encontrado por Ornstein es la distribución de la función de densidad de probabilidad (PDF, por sus siglas en inglés) de velocidades. Cabe destacar que la PDF, calculada por Ornstein, se refiere a la variable velocidad, no a la posición, y está definida por:

$$\rho(v, v_0, t)dv = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi KT}{m} (1 - \exp(-2at))}} \exp \left[ -\frac{(v - v_0 \exp(-at))^2}{\frac{2KT}{m} (1 - \exp(-2at))} \right] dv \quad 2.54$$

que representa la probabilidad que la velocidad de una partícula esté comprendida en el intervalo  $[v, v + dv]$  transcurrido un tiempo  $t$ , si tenía una velocidad inicial  $v_0$  en el tiempo  $t_0$ .



Es sencillo extender el resultado a una fuerza, constante en el tiempo, adicional en la ecuación diferencial estocástica. Para más detalles, consulte la Ref. [10]. En esta ocasión, la ecuación de Langevin se presenta como sigue:

$$\frac{dv}{dt} = -av + C + \mathcal{A}(t) \quad 2.55$$

y la distribución de la función de densidad de probabilidad de velocidades es:

$$\rho(v, v_0, t)dv = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi kT}{m} (1 - \exp(-2at))}} \exp \left[ -\frac{\left( v - v_0 \exp(-at) - \frac{C}{a} [1 - \exp(-at)] \right)^2}{\frac{2kT}{m} (1 - \exp(-2at))} \right] dv \quad 2.56$$

Lo anterior es importante porque permite extender los resultados de Einstein, ahora para distintas escalas de tiempo y bajo la presencia de una fuerza constante  $C$  adicional en la ecuación de Langevin, donde el valor se mantiene constante respecto al tiempo no a la posición, lo que resulta útil para la propuesta del modelo teórico que usamos en la presente tesis. En Ref. [10] se puede encontrar la expresión para el caso cuando la fuerza externa es una función arbitraria dependiente del tiempo.



III

**Metodología**



### 3.1. Modelo

Algo tan simple como una caminata aleatoria es capaz de capturar características de fenómenos más complejos. Por ejemplo, en la Fig. 3.1 se muestra la evolución temporal del cambio de divisa USD/MXN a través del año 2016, debido al comportamiento de los datos se podría utilizar la caminata aleatoria como una aproximación burda para representar el tipo de cambio de divisa USD/MXN durante ese año. Esto no implica que podamos modelar de manera precisa el comportamiento de las divisas como una caminata aleatoria, un movimiento Browniano o incluso un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Sin embargo, podríamos considerar que la caminata aleatoria, el movimiento Browniano, los procesos de Wiener, las cadenas de Markov, entre otros, son modelos que permiten comprender y abordar este tipo de fenómenos económicos de manera simple. Además, es de interés que el modelo utilizado para describir el comportamiento de las divisas tenga una interpretación de parámetros con base en sistemas dinámicos estudiados en el área de la física.

Pondremos en contexto el reto al que nos enfrentamos, en la Fig. 3.2 se muestra la función de densidad de probabilidad (PDF, por sus siglas en inglés) de los retornos logarítmicos del tipo de cambio USD/MXN correspondientes al año 2016 con tiempos de retraso de 5 min, 250 min y 1067 min. Es evidente que aproximar la PDF a una distribución gaussiana da como resultado un pésimo ajuste a los datos empíricos.

Los retornos logarítmicos se definen a partir de la variable de precio y cumplen la siguiente relación:

$$r(\tau) = \log\left(\frac{p(t_0)}{p(t_0 - \tau)}\right) \quad 3.1$$

donde  $p(t_0)$  es el valor del precio en el instante de tiempo  $t_0$  y  $p(t_0 - \tau)$  es el valor del precio en el instante de tiempo  $t_0 - \tau$ , por esta razón a  $\tau$  se le conoce como tiempo de retraso o 'lagtime'. Note que el precio es una variable económica que guarda analogía con la variable de posición en el ámbito de la física. De manera similar, los retornos logarítmicos representan la tasa de cambio del precio, al igual que la velocidad representa la tasa de cambio de la posición.

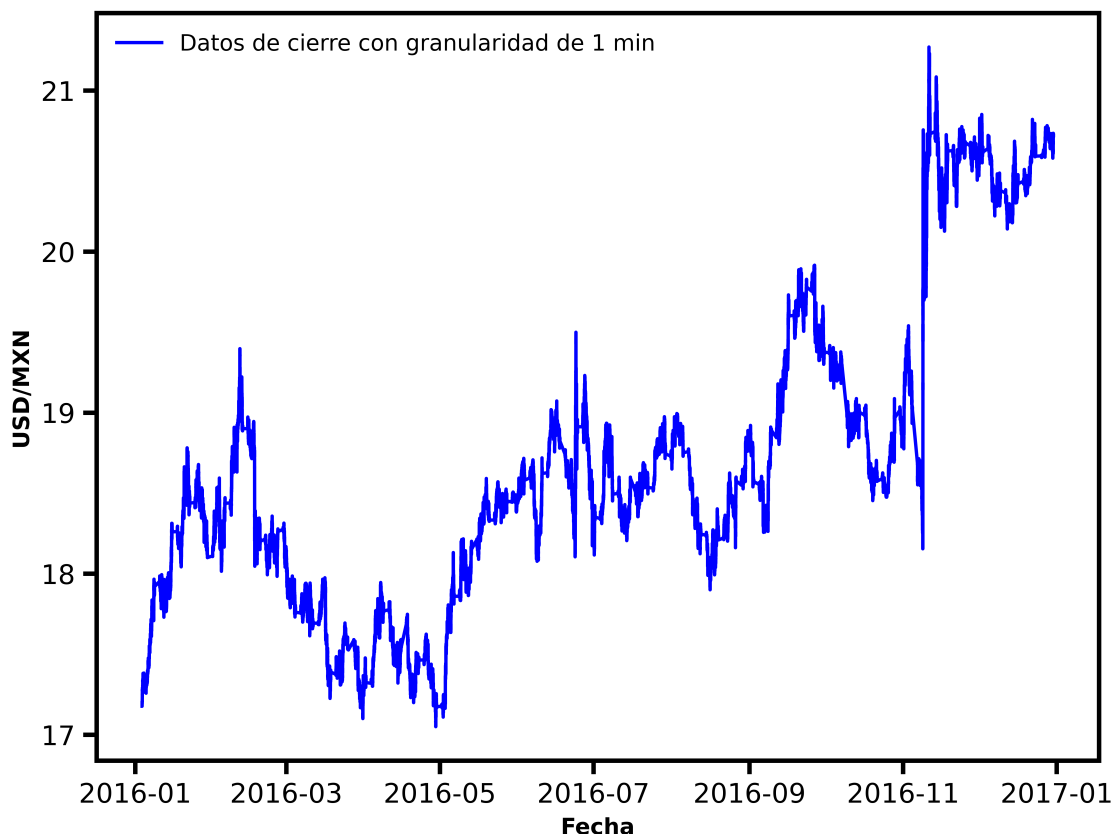


Figura 3.1: Evolución temporal de los datos de cierre de la divisa USD/MXN durante el año 2016 con una frecuencia de adquisición de un minuto.

Como se mencionó en el planteamiento del problema, vamos a recurrir al modelo teórico planteado en las Refs. [1-3], ya que dicho modelo no sólo proporciona una descripción de la función de densidad de probabilidad, sino que también aporta parámetros que pueden ser interpretados mediante analogías con diversos fenómenos físicos conocidos en el área de materia condensada blanda. La distribución de la función de densidad de probabilidad (PDF) de los retornos logarítmicos del tipo de cambio entre divisas, propuesta en las referencias previamente mencionadas, está dada por:

$$G(r, \tau) = \tau_1 f_{vib}(r) \phi_1(\tau) + FT^{-1} \left[ \tilde{f}_{vib}(q) \tilde{f}(q) \tau_2 \times \frac{\exp\left(\left(\tilde{f}(q) - 1\right) \frac{\tau}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\tau_2 - \tau_1 + \tilde{f}(q) \tau_1} \right] \quad 3.2$$

donde  $\tilde{f}(q) = \tilde{f}_{vib}(q) \tilde{f}_{jump}(q)$ , a su vez  $\tilde{f}_{vib}(q)$  y  $\tilde{f}_{jump}(q)$  son las transformadas de Fourier de las funciones  $f_{vib}(r)$  y  $f_{jump}(r)$ , respectivamente. La variable  $q$  es la variable conjugada de  $r$ .

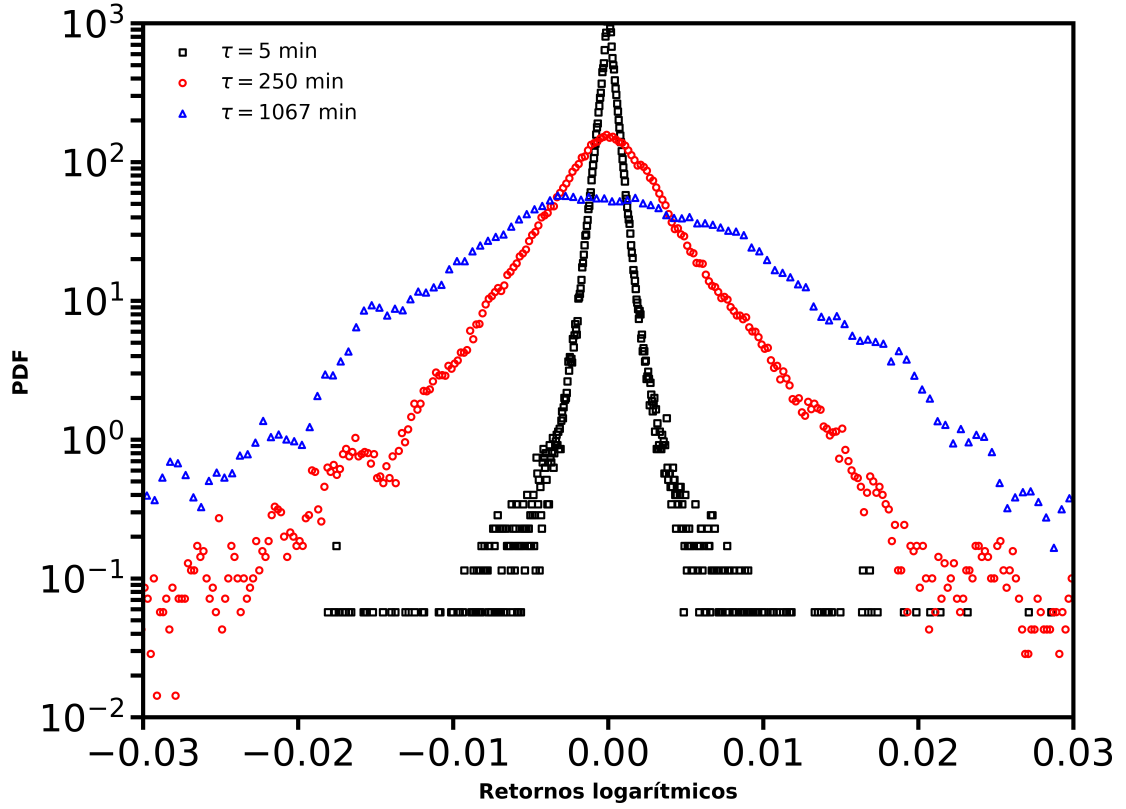


Figura 3.2: PDF versus retornos logarítmicos del tipo de cambio USD/MXN correspondientes al año 2016 con tiempos de retraso de 5 min (cuadros negros), 250 min (círculos rojos) y 1067 min (triángulos azules).

Mientras que la función  $f_{vib}(r)$  está dada por:

$$f_{vib}(r, \tau) = \sqrt{\frac{a}{2\pi D(1 - \exp(-2a\tau))}} \exp\left[-\frac{ar^2}{2D(1 - \exp(-2a\tau))}\right] \quad 3.3$$

y se describe como un proceso de Ornstein-Uhlenbeck para las oscilaciones en los mínimos locales de un 'energy landscape'. Esta representación es frecuentemente usada en la predicción de la estructura, el muestreo de las propiedades termodinámicas y la descripción de la dinámica global del sistema que se desea analizar, Ref. [11]. Por otra parte, la función  $f_{jump}(r)$  que describe los saltos entre mínimos locales, está dada por la función gaussiana:

$$f_{jump}(r, \tau) = \sqrt{\frac{1}{2\pi d^2}} \exp\left[-\frac{r^2}{2d^2}\right] \quad 3.4$$

El tiempo de saltos entre los mínimos locales de un ‘energy landscape’ está dado por las funciones  $\phi_1(\tau)$  y  $\phi_2(\tau)$  con tiempos característicos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , respectivamente, donde  $\tau_1 > \tau_2$  y dichas funciones adquieren la forma:

$$\phi_1(\tau) = \frac{1}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \quad 3.5$$

y

$$\phi_2(\tau) = \frac{1}{\tau_2} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right) \quad 3.6$$

donde  $\tau_2 < \tau_1$ .

Lo anterior se entiende como que existe un tiempo  $\tau_1$  en el cual se espera que el sistema permanezca en un pozo de potencial de tamaño  $l$  antes de saltar a otros mínimos locales. Para escalas de tiempo muy grandes, es decir,  $\tau \gg \tau_1$ , el tipo de cambio entre divisas presenta numerosos saltos con tiempos característicos dados por  $\tau_2$ , lo que provoca que la distribución de la función de densidad de probabilidad se asemeje a una distribución gaussiana. Ambos parámetros,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , son del orden de minutos. Los valores de los parámetros  $l$  y  $d$  indican, en el área de materia condensada blanda, si estamos tratando con coloides (valores pequeños), materiales granulares (valores intermedios) o un fluido de Lennard-Jones (valores grandes), Ref. [2]. Cuando  $\tau_1 \approx \tau_2$  y  $l \approx d$ , el sistema se comporta como un fluido de alta temperatura, mientras que si  $\tau_1 \gg \tau_2$  y  $d \gg l$ , estamos tratando con algo similar a un fluido de baja temperatura o súper enfriado. Esto se debe a que si los parámetros son muy similares, no existen mínimos locales independientes; en cambio, cuando los parámetros difieren significativamente, hay muchas restricciones en el movimiento. Con todo lo expuesto hasta este punto, nos damos cuenta del increíble aporte que tiene la interpretación de los parámetros.

Aunque el modelo teórico, descrito por la Ec. (3.2), es ampliamente usado para describir sistemas físicos del área de materia condensada blanda, este también describe de manera excelente el comportamiento de los retornos logarítmicos del tipo de cambio entre divisas, ver Ref. [2]. Sin embargo, este modelo teórico presenta un inconveniente; como el lector habrá notado, las funciones propuestas son pares con respecto a las variables  $r$  y  $q$ . Por lo tanto, si calculamos el primer momento estadístico a partir de  $G(r, \tau)$ , nos percataremos que su valor es exactamente cero, al igual que ocurre con otros momentos de orden impar. Es cierto que, en general, los retornos logarítmicos del tipo de cambio entre divisas oscilan alrededor de cero y su media, momento estadístico de orden uno, es muy cercana a cero. Sin embargo, es importante destacar que, salvo en circunstancias extraordinarias, el promedio de los retornos logarítmicos no puede ser exactamente igual a cero.

Lo mencionado en el párrafo previo es conceptualmente importante, especialmente si nos referimos a comportamientos que ocurren en los mercados financieros. Por ejemplo, no es lo mismo que la media de los retornos se acerque a cero desde la izquierda,  $\langle r \rangle \approx 0^-$ , a tener un retorno promedio cercano a cero desde la derecha,  $\langle r \rangle \approx 0^+$ . Aunque ambas expresiones pueden parecer muy similares, en el primer caso se pueden experimentar pérdidas económicas, mientras que en el segundo caso se pueden obtener ganancias.



Continuando con los casos en donde es importante conocer el promedio de los retornos, podemos mencionar el coeficiente de Sharpe. Pongamos en contexto este indicador técnico; el coeficiente de Sharpe fue desarrollado por el premio Nobel de economía William F. Sharpe de la Universidad de Stanford con la finalidad de determinar si la rentabilidad de una inversión se debe a una decisión inteligente o, si por el contrario, es resultado de haber asumido más riesgo. El coeficiente de Sharpe mide numéricamente la relación entre la rentabilidad y la volatilidad histórica. Se calcula como el cociente entre el valor esperado y la desviación estándar del rendimiento del activo que estamos analizando. Matemáticamente, podemos expresarlo como:

$$S = \frac{\langle r \rangle}{\sigma} \quad 3.7$$

donde  $\langle r \rangle$  es la media o valor esperado de los retornos y  $\sigma$  es la desviación estándar de los mismos. Si el primer momento estadístico teórico siempre se anula, entonces nuestro coeficiente de Sharpe teórico será idénticamente igual a cero,  $S=0$ , lo que desde el punto de vista de manejo de riesgo indicaría que todos los tipos de cambio entre divisas tienen el mismo nivel de riesgo, lo cual no es cierto. Existen otros indicadores técnicos que pueden presentar problemas cuando el valor esperado de los retornos se anula, por ejemplo, el coeficiente de variación de Pearson (CV), es una medida estadística que nos informa acerca de la dispersión relativa de un conjunto de datos, cuya expresión está dada por:

$$CV = \frac{\sigma}{|\langle r \rangle|} \quad 3.8$$

en este caso, cuando  $\langle r \rangle \rightarrow 0$  se tiene que  $CV \rightarrow \infty$ . Lo anterior implica que todas las divisas están extremadamente dispersas respecto a su valor esperado o media, lo cual nuevamente es falso.

### 3.1.1. Nuevo modelo

Para abordar la cuestión planteada en la subsección anterior, referente a la anulación de los momentos estadísticos teóricos de orden impar debido a la paridad de las funciones involucradas en la Ec. (3.2), llevamos a cabo la siguiente propuesta: dado que  $f_{vib}$  proviene de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, vamos a suponer que hay una fuerza constante  $C$  en la ecuación de Langevin asociada. De esta manera, usando la Ec. (2.56) podemos expresar ahora la función  $f_{vib}(r, \tau)$  como:

$$f_{vib}(r, \tau) = \sqrt{\frac{a}{2\pi D(1 - \exp(-2a\tau))}} \exp\left[-\frac{a\left[r - \frac{C}{a}(1 - \exp(-a\tau))\right]^2}{2D(1 - \exp(-2a\tau))}\right] \quad 3.9$$

donde se debe cumplir que  $|C| \ll 1$  para evitar que las integrales involucradas en la Ec. (3.2) diverjan. Si  $C=0$ , se recupera el modelo teórico propuesto en las Refs. [1-3].

Con la modificación hecha en la función  $f_{vib}(r, \tau)$ , logramos que las funciones sean asimétricas respecto a la variable  $r$ , lo cual evita que los momentos estadísticos de orden impar se anulen. Además, proporcionamos una explicación al origen de los momentos estadísticos de orden impar con base en una analogía a un sistema físico descrito por la ecuación de Langevin. Así, la fuerza constante  $C$  que hemos agregado en la Ec. (2.55) es la responsable de la aparición de tendencias alcistas o bajistas en el tipo de cambio entre divisas, ya que dichas tendencias están fuertemente relacionadas con el primer momento estadístico.

La forma en que se determinan los parámetros del modelo, es la siguiente: primero, elegimos el valor de  $C=0$ , con lo cual podemos utilizar la propuesta realizada en la Ref. [2] para hallar los valores de  $d, D, l, \tau_1$  y  $\tau_2$  mediante la minimización de la función de coste propuesta. Dicha función de coste se expresa como:

$$f(d, D, l, \tau_1, \tau_2) = \sum_{n \in O} f_m(n) \quad 3.10$$

donde  $O$  es el conjunto con el orden del momento estadístico seleccionado, en nuestro caso se tiene que:  $O = \{1/10, 1, 2, 3, 4\}$ . Note que se usa  $\frac{1}{10}$ , en lugar del momento estadístico de orden cero ya que todo número elevado a la potencia de cero es la unidad.

Mientras que  $f_m(n)$  es la diferencia en valor absoluto de orden  $n$  entre el logaritmo natural del momento estadístico empírico y el logaritmo natural del momento estadístico teórico correspondiente a los parámetros dados, para una amplia gama de tiempos de retraso o ‘lagtimes’, es decir,

$$f_m(n) = \sum_{\tau \in T} \frac{|\log(mom_e(\tau)) - \log(mom_t(\tau))|}{n} \quad 3.11$$

donde  $mom_e(\tau)$  es el momento estadístico absoluto empírico que se calcula a partir de los datos y se expresa como:

$$mom_e(\tau) = \langle |r_i(\tau)|^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_i(\tau)|^n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \log \left( \frac{p_i(t_0)}{p_i(t_0 - \tau)} \right) \right|^n \quad 3.12$$

con  $r_i(\tau)$  el retorno logarítmico empírico con tiempo de retraso  $\tau$ .

Por otra parte,  $mom_t(\tau)$  es el momento estadístico absoluto teórico asociado a la función de distribución del modelo y se calcula de la siguiente manera:

$$mom_t(\tau) = E(|r(t)|^n) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, \tau) |r|^n dr \quad 3.13$$

con  $r(t)$  el retorno logarítmico teórico con tiempo de retraso  $t$ , para los parámetros dados. Luego,  $T$  es el conjunto de tiempos de retraso o desfases temporales, con escala temporal de minutos, en nuestro caso se tiene:  $T = \{[e^z] : z = 0.0, 0.5, 1.0, \dots, 6.5, 7.0\}$ .

Como nota, es importante mencionar que en las optimizaciones de la función de coste llevadas a cabo en la Ref. [2], se descartan los ‘outliers’ o valores extremos, ya que estos afectan de manera significativa el cálculo de los momentos empíricos. Nosotros incluimos los valores atípicos para mostrar que es posible describir con certeza los momentos estadísticos con el modelo propuesto.

Básicamente, la función de coste que deseamos minimizar  $f(d, D, l, \tau_1, \tau_2)$ , busca parámetros que reduzcan la distancia entre los valores del momento estadístico absoluto teórico y el momento estadístico absoluto empírico. Podemos ver un ejemplo en la Fig. 3.3, donde se pueden apreciar los momentos estadísticos absolutos tanto teóricos como empíricos para la divisa AUD/CAD (año 2010).

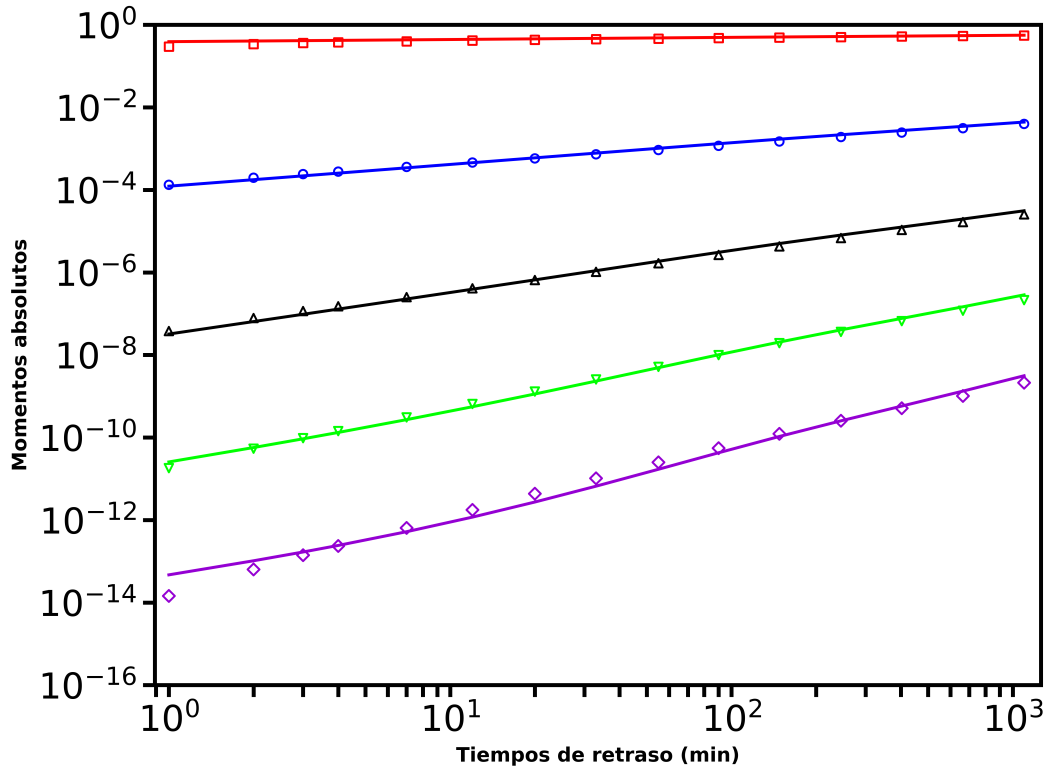


Figura 3.3: Momentos estadísticos absolutos empíricos de orden 0.1 (cuadros rojos), uno (círculos azules), dos (triángulos negros), tres (triángulos verdes) y cuatro (rombos violetas) y momentos estadísticos absolutos teóricos de orden 0.1 (línea roja), uno (línea azul), dos (línea negra), tres (línea verde) y cuatro (línea violeta) para el tipo de cambio AUD/CAD correspondiente al año 2010.

Con el procedimiento anterior, se logra encontrar el valor de los hiper-parámetros  $d, D, l, \tau_1, \tau_2$ . Ahora, sólo debemos hallar el valor de  $C$ .

Para determinar el valor de  $C$ , se lleva a cabo la siguiente consideración: si  $a \ll 1$  y  $\tau = 1$ , podemos hacer la aproximación:

$$\frac{C}{a} (1 - \exp(-a\tau)) \approx \frac{C}{a} (1 - 1 + a) = C \tag{3.14}$$

sustituyendo la relación anterior en  $f_{vib}$  tenemos que,

$$f_{vib}(r, 1) \approx \sqrt{\frac{a}{2\pi D(1 - \exp(-2a))}} \exp\left[-\frac{a[r - C]^2}{2D(1 - \exp(-2a))}\right] \tag{3.15}$$

La ecuación anterior representa una gaussiana centrada en  $C$ . Dado que, para desfases temporales pequeños, la función de distribución  $G(r, \tau)$  se ve afectada en mayor medida por  $f_{vib}$ , el primer momento estadístico,  $n = 1$ , con un tiempo de retraso  $\tau = 1$  es una excelente aproximación al valor que buscamos para el hiper-parámetro  $C$ . Es decir, podemos aproximar el valor de  $C$  como:

$$C \approx \text{mom}_{\text{empírico}}(n = 1, \tau = 1) \tag{3.16}$$

donde  $n$  representa el orden del momento estadístico y  $\tau$  el tiempo de retraso.

Veamos como ejemplo otra divisa, en este caso utilizamos los parámetros propuestos en la Ref. [2] para el tipo de cambio EUR/USD. En el año 2015 para EUR/USD, se reportan los siguientes valores:  $d = 0.001394$ ,  $D = 0.80 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.000853$ ,  $\tau_1 = 93.25 \text{ (min)}$  y  $\tau_2 = 85.68 \text{ (min)}$ .

Luego, procedemos a determinar un valor aproximado de  $C$  a partir del primer momento estadístico empírico, obteniendo lo siguiente:

$$C_{EURUSD} \approx mom_{EURUSD} (n = 1, \tau = 1) = -2.912195 \times 10^{-7} \quad \mathbf{3.17}$$

En la Fig. 3.4 se muestra la comparación del nuevo modelo teórico propuesto, que hace uso de los parámetros de la Ref. [2] y del parámetro adicional  $C$  propuesto por nosotros. Observamos que, en general, el comportamiento del nuevo modelo teórico describe de manera acertada los datos de la divisa EUR/USD durante el año analizado. Note que en ningún momento hemos optimizado el valor del parámetro  $C$ , es decir, estamos usando una aproximación a su valor real. En la Ref. [2], los autores comentan que al determinar los parámetros:  $d, D, l, \tau_1$  y  $\tau_2$ , utilizando la función de coste, realizan una limpieza previa de los datos para que los valores atípicos no afecten demasiado a los diferentes momentos estadísticos empíricos. Más adelante, vamos a determinar los parámetros del tipo de cambio USD/MXN utilizando el método propuesto, junto con nuestra propuesta del nuevo parámetro  $C$ , pero sin la limpieza de datos, ya que esperamos que el nuevo modelo también capture las características o propiedades de los ‘outliers’. Otras propuestas son: usar la mediana en lugar de la media, ya que la mediana es robusta ante valores atípicos, quitar datos que estén fuera del intervalo definido por seis desviaciones estándar o remover los datos que estén en las colas de la distribución de probabilidad y representen el uno por ciento de los datos.

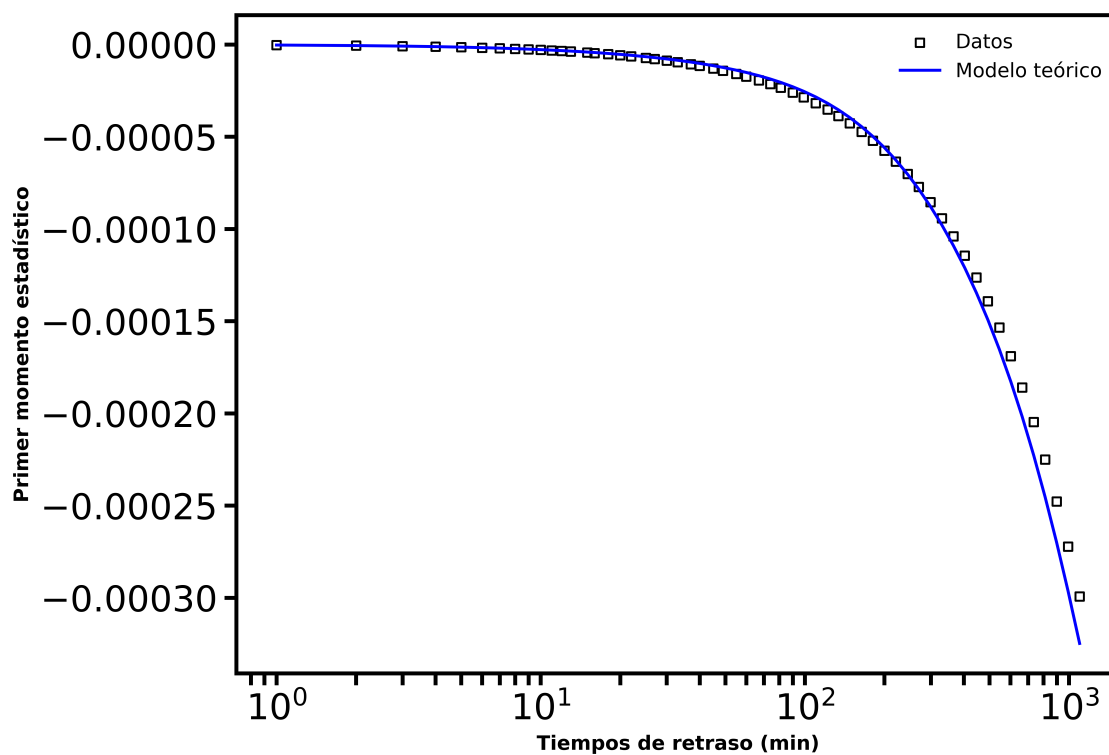


Figura 3.4: Comparación entre el primer momento estadístico empírico y el obtenido a partir del modelo teórico para desfases temporales, con valores dados en minutos, de: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097, para el tipo de cambio EUR/USD en el año 2015.

IV

**Resultados**





## 4.1. Resultados

Cuando se abordan problemas que involucran series temporales con cierto ruido estocástico, no basta únicamente con tener un modelo teórico que se ajuste a los datos. También, es importante tener acotados los posibles valores empíricos que podrían tener las variables analizadas, lo cual se conoce comúnmente como la tolerancia del modelo. Además, el modelo planteado debe funcionar para datos que no se han visto antes, es decir, si funciona con datos pasados, debe tener cierta precisión al predecir valores futuros. Esto último está relacionado con la predictibilidad del modelo, es decir, necesitamos saber si el modelo es útil para predecir valores futuros y con qué certeza lo hace.

A través del modelo teórico aquí planteado se encontraron parámetros que describen el comportamiento del tipo de cambio de divisas USD/MXN durante tres diferentes gobiernos mexicanos. Para ello, se analizaron los años 2011 y 2012, correspondientes al gobierno de Felipe Calderón Hinojosa; los años 2016 y 2017, correspondientes al gobierno de Enrique Peña Nieto; y finalmente, los años 2020 y 2021, correspondientes al gobierno de Andrés Manuel López Obrador. También se proporciona una interpretación de los mismos, tanto económica como desde el punto de vista del área de la física. La elección de esos años se hace con base en que presentan una alta volatilidad.

Nota: la expresión ‘ $\log(r)$ ’ hace referencia a los retornos logarítmicos descritos por la Ec. (3.1), también es común que se le denominen como ‘ret-log’. En el modelo teórico son representados simplemente por la letra  $r$ .

### 4.1.1. USDMXN 2011 y 2012

Para el año 2011, se encontraron los siguientes parámetros para nuestro modelo teórico, el cual describe el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN:  $d = 0.003004$ ,  $D = 0.920346 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.001245$ ,  $\tau_1 = 163.314 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 161.843 \text{ (min)}$ , y  $C = 4.715541 \times 10^{-7}$ . Podemos observar que  $d \approx 2l$  y que  $\tau_1 \approx \tau_2$ , lo que podría indicar que no existen múltiples mínimos locales independientes, es decir, la dinámica es rápida.

En el caso del año 2012, se encontraron los siguientes parámetros que describen el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN:  $d = 0.001344$ ,  $D = 0.893370 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.000725$ ,  $\tau_1 = 64.409 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 64.360 \text{ (min)}$ , y  $C = -2.567034 \times 10^{-7}$ . Al igual que en el año 2011, se encontró que  $\tau_1 \approx \tau_2$ , lo que indica que no existen mínimos independientes y la dinámica es rápida, es decir, se comporta como un sistema de alta temperatura. Sin embargo, en ambos casos se observa una relación donde  $d \approx 2l$ , por lo cual no se puede afirmar que los mínimos sean completamente independientes.

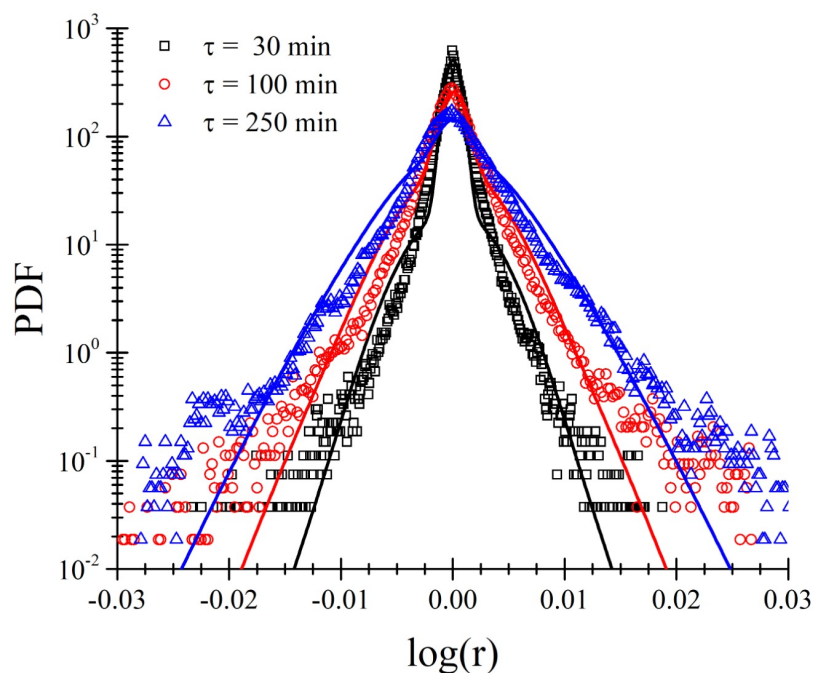


Figura 4.1: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2011 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

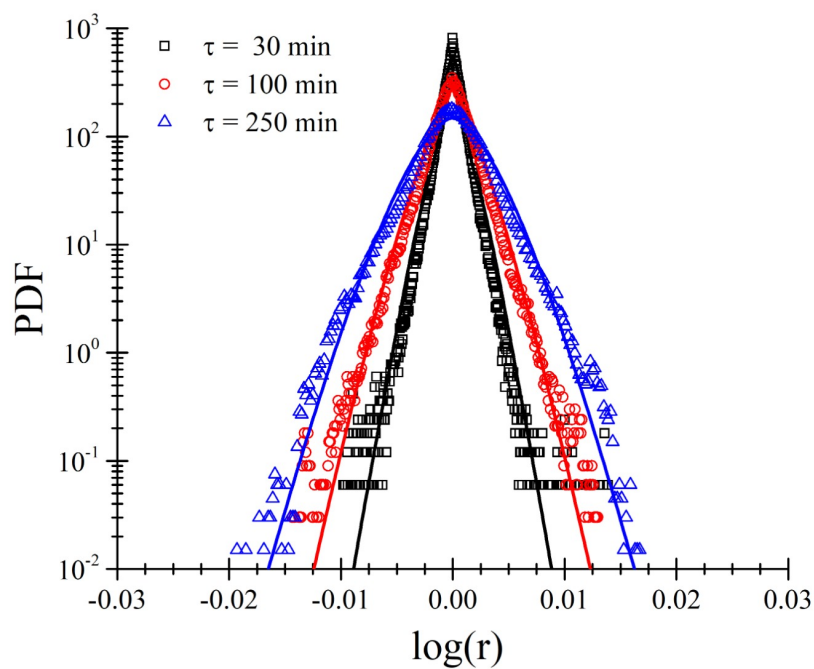


Figura 4.2: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2012 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

Por otra parte, aunque el coeficiente de difusión  $D$  es muy similar en ambos años, el valor de  $a = \frac{D}{\tau^2}$  difiere, donde  $a_{2011} = 0.00593762$  y  $a_{2012} = 0.01699634$ . El parámetro  $a$  representa la fuerza asociada a la viscosidad o fricción del medio por unidad de masa en la ecuación de Langevin. Es decir, en el año 2012 hay una mayor contribución del medio si consideramos el comportamiento de los retornos logarítmicos como un análogo a un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Debemos recalcar que en el presente trabajo cuando se determinan los parámetros  $d$ ,  $D$ ,  $l$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $C$  se consideran los valores extremos y no se hace como tal una limpieza de datos previa al calcular los momentos empíricos de los retornos logarítmicos con la finalidad de capturar, en la medida de lo posible el aporte de los valores atípicos a las características de las distribuciones, ya que son distribuciones de colas pesadas. Una distribución de cola pesada se refiere a un tipo de distribución de probabilidad en la que las colas, es decir, las regiones extremas de la distribución, decaen más lentamente que en una distribución normal o gaussiana. En una distribución normal estándar, las colas de la distribución decaen rápidamente a medida que nos alejamos del centro. Sin embargo, en una distribución de cola pesada, las colas de la distribución decaen de manera más gradual, lo que significa que es más probable que ocurran valores extremos en comparación con una distribución normal. La razón de incluir los valores atípicos, durante la búsqueda de parámetros, es porque tratamos de evitar el sobre ajuste en la función de densidad de probabilidad de los retornos logarítmicos, es decir, preferimos una distribución que describa con certeza los momentos estadísticos, incluyendo los valores extremos, aunque no necesariamente ajuste de manera perfecta a la función de densidad de probabilidad. En las Figs. 4.1 y 4.2 se observa el modelo teórico y la función de densidad de probabilidad de los retornos logarítmicos para los años 2011 y 2012 con desfases temporales evaluados en minutos cuyos valores abarcaron: 30, 100 y 250. Además, en las Figs. 4.3 y 4.4 podemos apreciar una comparación entre los momentos estadísticos empíricos y los calculados a partir del modelo teórico, es fácil notar que nuestra propuesta permite un excelente ajuste a los datos tanto para escalas pequeñas como grandes de los 'lagtimes'.

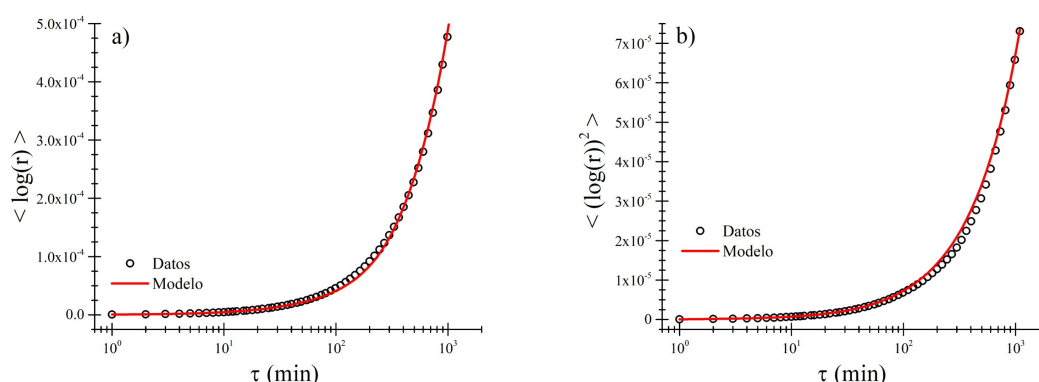


Figura 4.3: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2011. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

Por otra parte, gracias a nuestra propuesta de agregar el hiperparámetro  $C$  en el modelo teórico, es posible detectar las tendencias que prevalecen sobre las series temporales, tanto para el año 2011 como para el año 2012. Así, en el año 2011, es natural esperar un aumento en el precio del peso mexicano expresado en dólares americanos, si comparamos el valor al inicio de ese año con el valor al final del mismo. En contraste, sucede el fenómeno contrario en el año 2012, donde se espera que el precio disminuya.

Si vemos el hiperparámetro  $C$  como la magnitud del campo externo en la ecuación de Langevin, diremos que ha ocurrido un cambio de signo, es decir, el campo ahora apunta en dirección contraria. Sin embargo, podríamos proponer como hipótesis que el valor de la magnitud del campo es una variable continua a través del tiempo, basada en la experiencia que tenemos del comportamiento de los campos a nivel macroscópico. Por lo tanto, entre 2011 y 2012 debe existir una ventana adecuada (de un año) en la serie temporal, de tal manera que el valor del hiperparámetro  $C$ , calculado sobre esa ventana, sea muy cercano a cero, lo que nos proporcionaría información acerca de un cambio de tendencia en la divisa USD/MXN. Es decir, las tendencias alcistas y bajistas no son otra cosa más que una consecuencia de los cambios de signo del campo externo en la ecuación de Langevin. Esto significa que nuestra suposición de que el campo externo tiene una magnitud constante solo es válida sobre la ventana temporal analizada, pero si vamos recorriendo la ventana, su valor varía de manera lenta. Así, nos encontramos ante un campo que parece constante localmente, pero es oscilante de manera global.

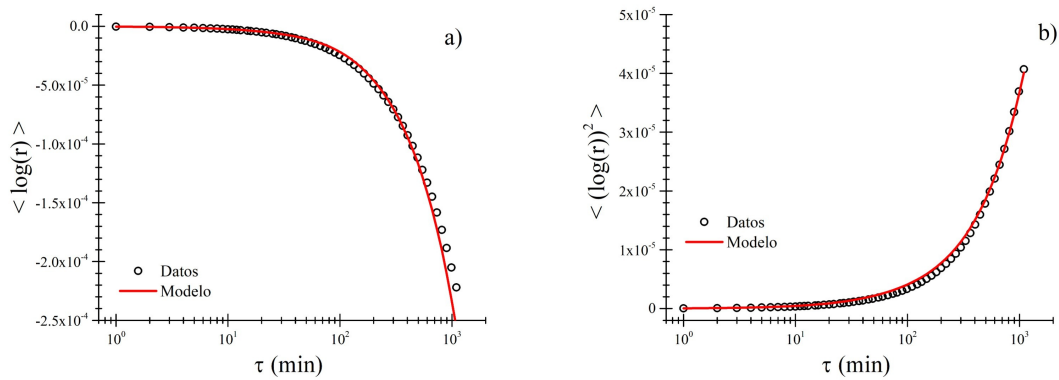


Figura 4.4: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2012. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

#### 4.1.2. USDMXN 2016 y 2017

Para el análisis del comportamiento del tipo de cambio USD/MXN durante el año 2016, se encontraron los siguientes parámetros que describen el sistema físico equivalente:  $d = 0.003394$ ,  $D = 1.568378 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.001457$ ,  $\tau_1 = 162.045 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 162.032 \text{ (min)}$ , y  $C = 6.153610 \times 10^{-7}$ . Al analizar el año 2017, se encontraron los siguientes parámetros:  $d = 0.002180$ ,  $D = 0.624045 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.000846$ ,  $\tau_1 = 145.462 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 128.149 \text{ (min)}$ , y  $C = -1.817873 \times 10^{-7}$ . Podemos observar nuevamente que  $d \approx 2l$  y que  $\tau_1 \approx \tau_2$  en el análisis del año 2016.

El valor del coeficiente de difusión  $D$  difiere considerablemente entre ambos años, siendo casi el doble en el año 2016. Sin embargo, el valor del parámetro  $a$  es bastante similar, con  $a_{2016} = 0.007388081$  y  $a_{2017} = 0.008719171$ . Esto indica que, aunque el coeficiente de difusión varía considerablemente entre esos dos años, la contribución del medio es similar.

Con la información obtenida, se determina que el comportamiento durante el año 2016 es análogo a un fluido de alta temperatura, mientras que el año 2017 se comporta como un fluido de baja temperatura. Como tema abierto, dejamos el análisis de la relación entre el comportamiento del sistema a alta y baja temperatura con el aumento o disminución de la variable precio.

Entre ambos años, el valor del hiperparámetro  $C$  cambia de positivo a negativo. Así, podemos afirmar que ocurrió un cambio de dirección en el campo externo de la ecuación de Langevin y, por lo tanto, un cambio de tendencia alcista a una tendencia bajista en esos años.

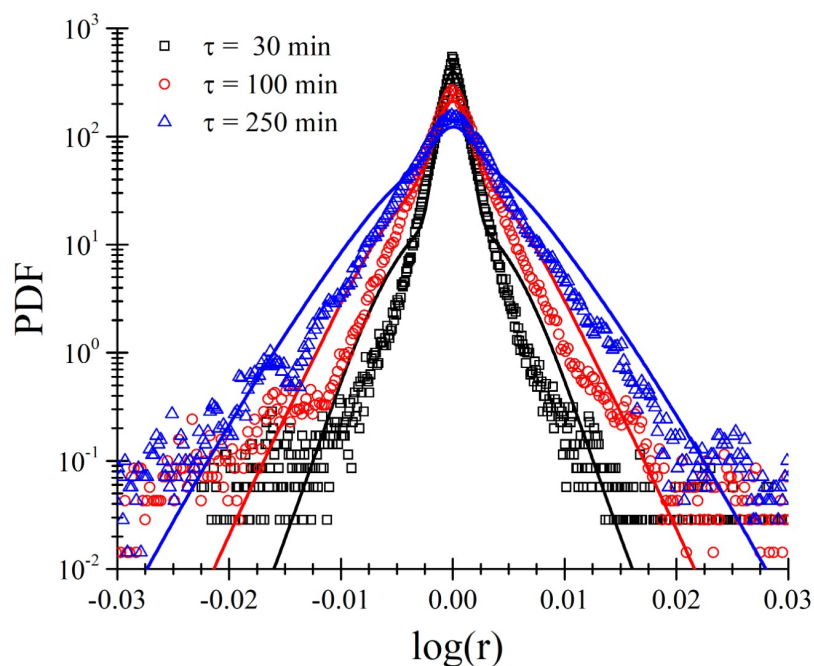


Figura 4.5: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2016 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

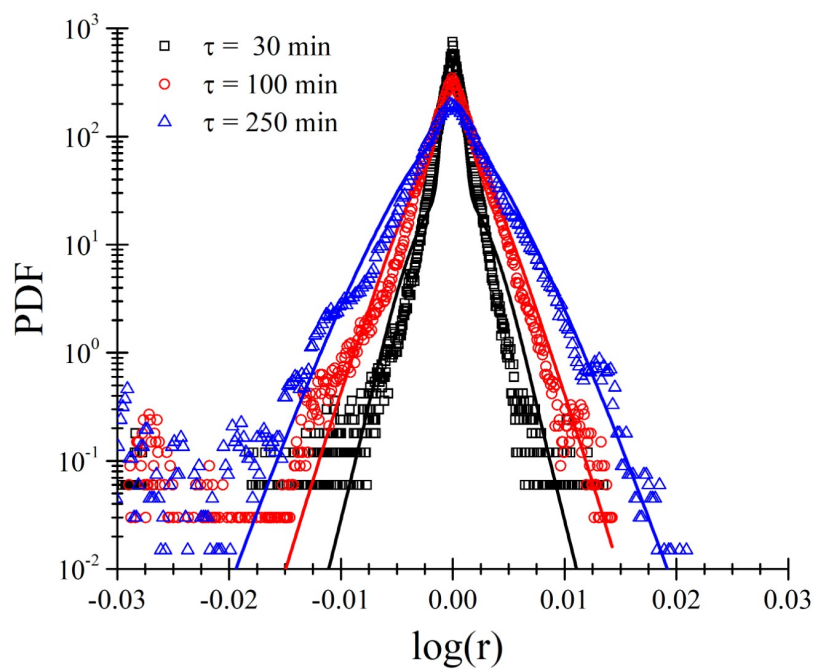


Figura 4.6: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/XN durante el año 2017 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

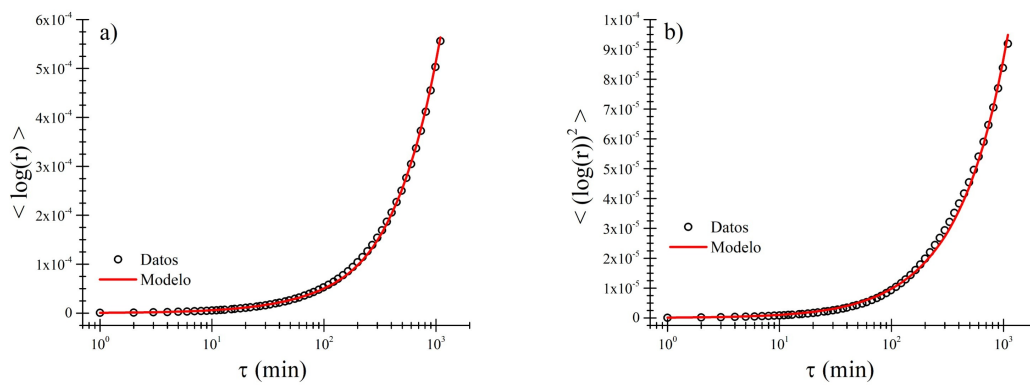


Figura 4.7: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2016. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

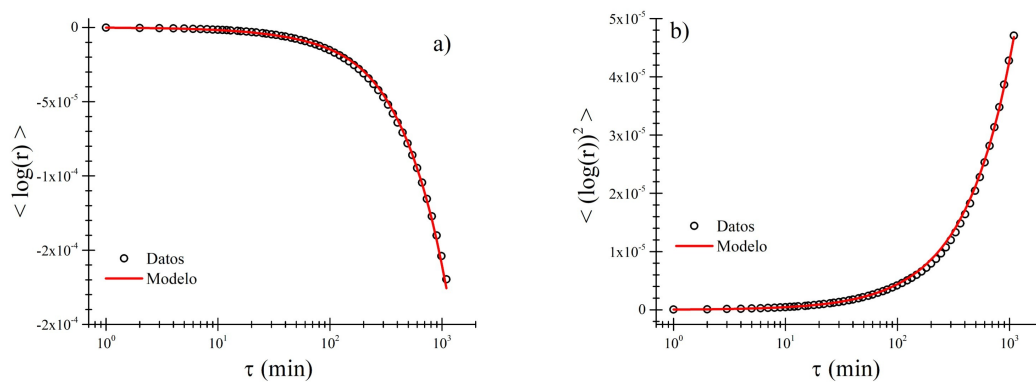


Figura 4.8: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2017. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

### 4.1.3. USDMXN 2020 y 2021

Cuando se analizaron los datos del año 2020, se encontraron los siguientes parámetros que describen el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN:  $d = 0.004269$ ,  $D = 1.538531 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.001674$ ,  $\tau_1 = 201.759 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 193.404 \text{ (min)}$ , y  $C = 1.546402 \times 10^{-7}$ . Para este año, se observa que  $d \gg l$  y  $\tau_1 > \tau_2$ , lo que indica la presencia de múltiples mínimos locales independientes y una dinámica lenta. En este caso,  $\tau_1$  y  $\tau_2$  no son semejantes, pero tampoco difieren demasiado.

En el caso del año 2021, se encontraron los siguientes parámetros que describen el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN:  $d = 0.001577$ ,  $D = 0.582548 \times 10^{-8} \text{ (min}^{-1}\text{)}$ ,  $l = 0.000811$ ,  $\tau_1 = 90.861 \text{ (min)}$ ,  $\tau_2 = 90.768 \text{ (min)}$ , y  $C = 0.752160 \times 10^{-7}$ . Al igual que en años anteriores, se cumple que  $\tau_1 \approx \tau_2$ , lo que indica una dinámica rápida y que el tipo de cambio USD/MXN se comporta como un sistema de alta temperatura. Tanto el coeficiente de difusión como el parámetro  $a$  difieren entre ambos años, donde  $a_{2020} = 0.005490291$  y  $a_{2021} = 0.008857069$ .

Aunque desde 2020 hasta 2021 hay una transición de una dinámica lenta a una rápida, el valor del hiperparámetro  $C$  se mantiene positivo durante esos dos años. Sin embargo, es posible notar una disminución significativa en su valor, es decir, cada vez se acerca más a cero, lo que podría indicar un próximo cambio de signo.



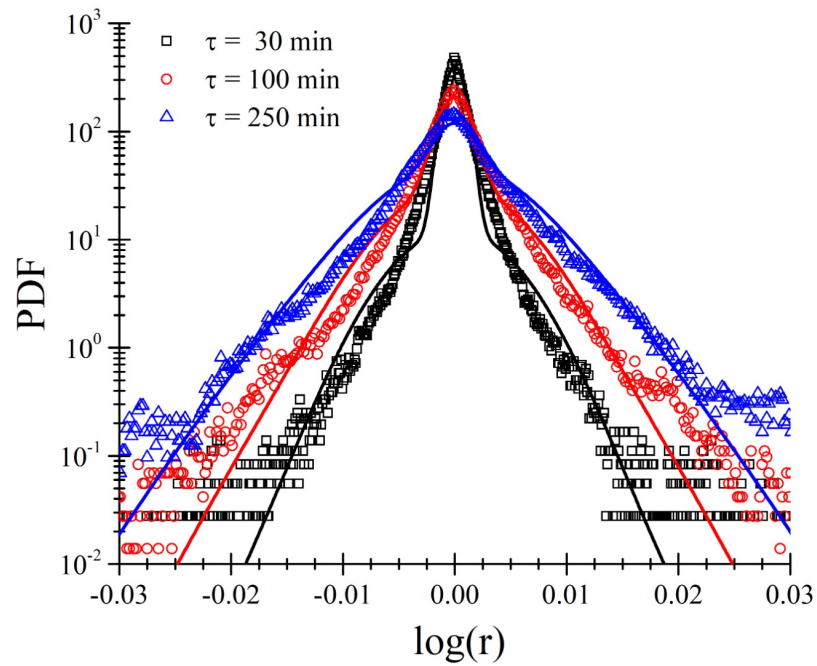


Figura 4.9: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2020 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

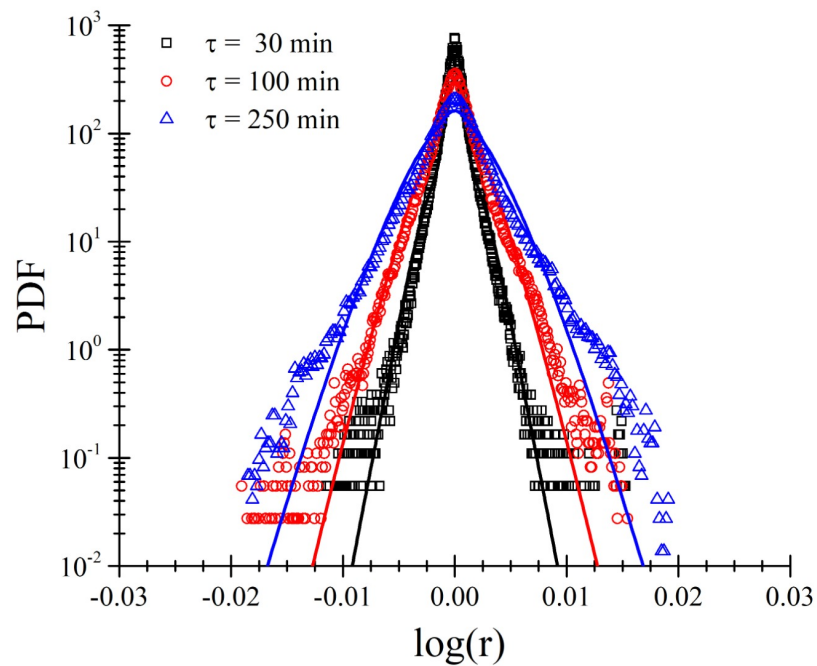


Figura 4.10: Comparación entre la PDF empírica (cuadrado, círculo y triángulo) y la PDF teórica (línea continua) versus el retorno logarítmico para el tipo de cambio USD/MXN durante el año 2021 con tiempos de retraso de 30 min (negro), 100 min (rojo) y 250 min (azul).

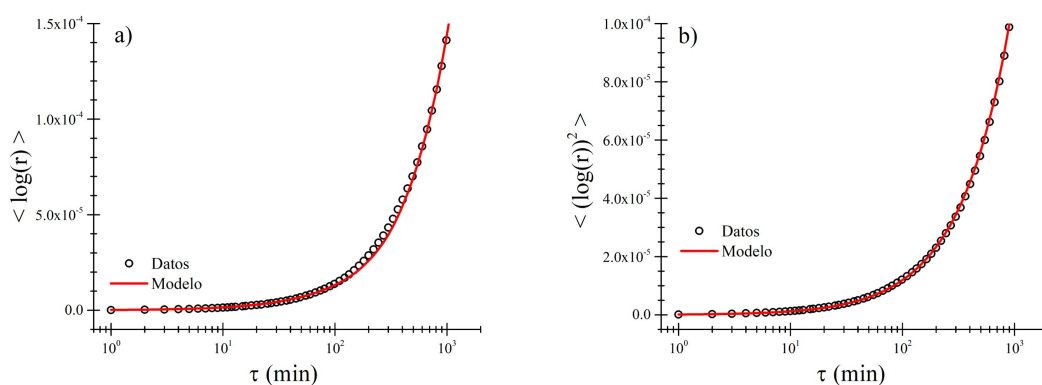


Figura 4.11: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2020. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

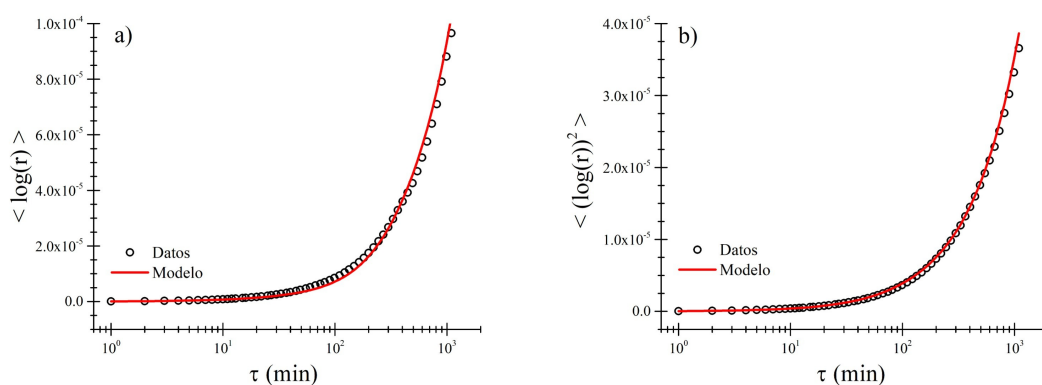


Figura 4.12: a) Comparación del primer momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. b) Comparación del segundo momento estadístico empírico con el obtenido a partir del modelo teórico. Ambos casos son para el tipo de cambio USD/MXN en el año 2021. Los desfases temporales se evaluaron en minutos y abarcaron los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 7, 12, 20, 33, 55, 90, 148, 245, 403, 665 y 1097.

#### 4.1.4. Perspectivas

En cuanto al campo externo de la ecuación de Langevin modelado por el hiperparámetro  $C$  propuesto en nuestro modelo teórico, parece describir de manera adecuada la evolución temporal del primer y segundo momento estadístico a diferentes valores de desfase temporal en los años analizados. Es interesante la transición de valores positivos a negativos en los años contiguos, excepto para el caso de 2020 y 2021. Sin embargo, es evidente que el valor de  $C$  ha disminuido desde 2020 hasta 2021, si la tendencia continúa esperaríamos que en el año 2022 el valor de  $C$  sea cercano a cero o incluso negativo. Podríamos inferir que el campo externo en la ecuación de Langevin varía de manera lenta en escala de meses o años dando origen a los fenómenos alcistas o bajistas en el mercado de divisas o Forex (Foreing Exchange).

Año	$C$ (adimensional)
2011	4.715541E-07
2012	-2.567034E-07
2016	6.153610E-07
2017	-1.817873E-07
2020	1.546402E-07
2021	0.752160E-07

Tabla 4.1: Valor del parámetro  $C$  calculado para los años 2011, 2012, 2016, 2017, 2020 y 2021 para el tipo de cambio USD/MXN.

Como se mencionó en el párrafo anterior, el comportamiento observado en los años 2020 y 2021 sugiere que la magnitud de la fuerza constante  $C$  en la ecuación de Langevin está disminuyendo y se acerca a un cambio de signo. Esto se verifica con los datos asociados al año 2022, donde el primer momento estadístico empírico con un desfase temporal de un minuto tiene un valor negativo  $C_{2022} \approx MOM(1, 1) = -1.377214 \times 10^{-7}$ , es decir, tiene un signo negativo como se especulaba anteriormente. Este tipo de análisis puede ser aprovechado para detectar cambios de tendencia en las divisas.

Por otra parte, los tercer y cuarto momentos estadísticos no pueden explicarse completamente con el modelo teórico actual, lo cual sugiere que debemos investigar detalladamente su comportamiento para poder relacionarlos con la fuerza externa de la ecuación de Langevin y, de esta manera, extender y enriquecer el análisis de los datos, considerando los momentos estadísticos de orden alto (tercero y cuarto). Contamos con evidencia empírica que estos momentos contienen información complementaria sobre las tendencias del mercado.



V

**Conclusiones**



## 5.1. Conclusiones

En este trabajo hemos presentado un modelo fenomenológico para describir las propiedades estadísticas de las fluctuaciones temporales del tipo de cambio entre las divisas USD/MXN durante los años 2011, 2012, 2016, 2017, 2020 y 2021. En la construcción de nuestro modelo hemos considerado ideas existentes en el área del estudio en materia condensada, basadas en la ecuación de Langevin para procesos de Ornstein-Uhlenbeck y un modelo de vidrios de espín. Nuestra propuesta modifica dicho esquema al incluir el efecto de la deriva del mercado, considerándola como una contribución constante en la ecuación de Langevin en una primera aproximación. Utilizando nuestro esquema, hemos podido describir con razonable precisión el comportamiento del primer y segundo momento estadísticos de las funciones de distribución de las series temporales del tipo de cambio de las monedas USD/MXN durante los años mencionados. Adicionalmente, hemos observado que la introducción de un nuevo parámetro en el modelo original nos permite detectar cambios de tendencia en el comportamiento del tipo de cambio de las divisas, al menos en el caso de USD/MXN.

Basados en nuestros resultados, consideramos que nuestra propuesta podría llegar a constituirse como una herramienta de utilidad para el estudio de las fluctuaciones temporales del tipo de cambio entre las divisas desde una perspectiva de la física estadística. Esta herramienta se plantea desde la perspectiva del estudio de la materia condensada por lo que resulta complementaria a los métodos tradicionales existentes en áreas como finanzas o economía.





VI

Apéndice



### 6.1. R

#### 6.1.1. Introducción a R

R [12] es un lenguaje de programación enfocado principalmente en la estadística computacional. Fue desarrollado en agosto de 1993 como una alternativa al lenguaje S, creado por Laboratorios Bell (actualmente AT&T). Debido a su versatilidad y aplicabilidad en diversas áreas, como probabilidad, estadística, análisis y ciencia de datos, R se ha convertido en una herramienta fundamental para investigadores y profesionales de la estadística.

#### 6.1.2. Características de R

R es un lenguaje de tipo intérprete, lo que significa que permite la ejecución de líneas de programa sin necesidad de compilar todo el código, lo cual resulta conveniente para llevar a cabo pruebas con diversas modificaciones en tiempo real. Además, R cuenta con una gran cantidad de paquetes y librerías especializadas para análisis de datos, lo que facilita la realización de análisis complejos.

#### 6.1.3. Uso de R en la estadística computacional

R es una herramienta muy útil para el análisis de datos y la estadística computacional. Permite la visualización de datos, el ajuste de modelos estadísticos, la realización de pruebas de hipótesis y la simulación de datos, entre otras funcionalidades. Además, R tiene la capacidad de integrarse con otras herramientas de software, lo que amplía aún más su potencial para el análisis de datos.

### 6.2. C++

C++ es un lenguaje de programación de propósito general, que se enfoca en la programación orientada a objetos y permite crear aplicaciones con una amplia variedad de usos, desde videojuegos y simulaciones hasta el diseño de sistemas operativos. A diferencia de R, C++ es un lenguaje compilado, lo que significa que es necesario compilar todo el código antes de ejecutarlo. Sin embargo, C++ es preferible a R cuando se requiere procesar grandes cantidades de cálculos o realizar iteraciones complejas.

### 6.3. Caminata aleatoria 1D

Imaginemos por un momento que tenemos una moneda cuya probabilidad de obtener como resultado ‘águila’ es de 0.5 y la probabilidad de obtener ‘sol’ también es de 0.5. Si después de lanzar la moneda al aire el resultado es ‘águila’, daremos un paso al frente respecto a la posición en la que nos encontramos actualmente; si el resultado es ‘sol’, daremos un paso hacia atrás. Si partimos del origen, después de un lanzamiento terminaremos en alguna de las posiciones: ‘+1’ o ‘-1’ con un 0.5 de probabilidad en ambos casos. Por otra parte, si llevamos a cabo dos lanzamientos seguidos, las posiciones finales posibles son: ‘-2’ con un 0.25 de probabilidad, ‘+2’ también con 0.25 de probabilidad y finalmente ‘0’ con un 0.5 de probabilidad. Esto sucede porque para llegar a la posición ‘+2’ o ‘-2’ es necesario obtener ‘+1’ o ‘-1’ dos veces seguidas, respectivamente, mientras que para llegar a la posición ‘0’ tenemos dos posibilidades: una es avanzar ‘+1’ y luego retroceder ‘-1’, la otra opción es primero retroceder ‘-1’ y luego avanzar ‘+1’. Para facilitar un poco la visualización de lo que ocurre, el resultado para el caso de tres lanzamientos seguidos lo podemos observar en la Tabla 6.1 y para cuatro lanzamientos seguidos en la Tabla 6.2. Notemos que el número de lanzamientos impares nos llevan a posiciones impares y el número de lanzamientos pares a posiciones pares, como se muestra en la Fig. 6.1.

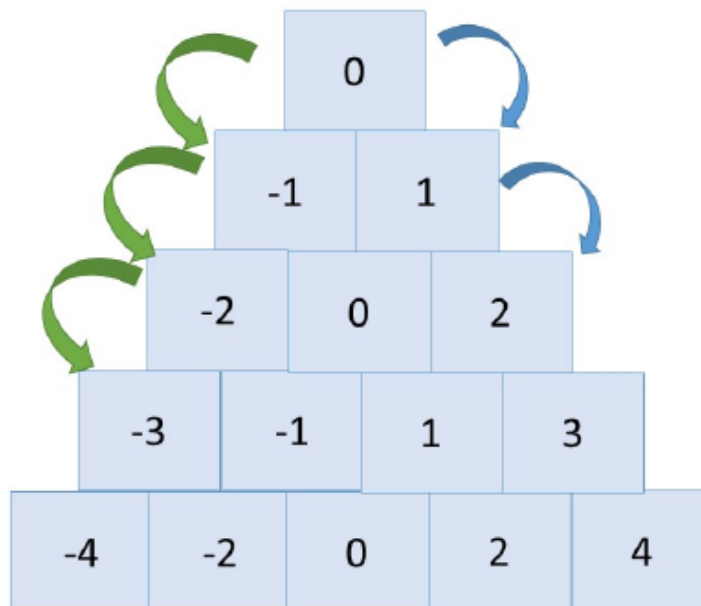


Figura 6.1: Posiciones posibles respecto al número de pasos consecutivos.

Posición	Probabilidad
3	1/8
1	3/8
-1	3/8
-3	1/8

Tabla 6.1: Posiciones posibles y su respectiva probabilidad, después de tres lanzamientos seguidos.

Posición	Probabilidad
4	1/16
2	1/4
0	3/8
-2	1/4
-4	1/16

Tabla 6.2: Posiciones posibles y su respectiva probabilidad, después de cuatro lanzamientos seguidos.

Para un valor grande de lanzamientos seguidos, por ejemplo 1000, es tedioso llevar a cabo los cálculos con papel y lápiz, así que vamos a crear un programa escrito en R que nos permita simular el resultado de N lanzamientos seguidos y con él podremos calcular las probabilidades asociadas a la caminata aleatoria.

Código 6.1: Caminata aleatoria de N pasos.

```

caminata_aleatoria <- function(n)
{
  y <- 0      # Posicion inicial
  lst <- c(1,-1) # El "1" respresenta "Norte", mientras que "-1" representa "Sur"
  for(i in seq(1,n,1))
  {
    salto <- sample(lst,1,replace=FALSE)
    y <- y + salto
  }
  return(y)
}

```

Vamos a simular 100,000 veces el resultado que obtendríamos al hacer 1,000 lanzamientos seguidos y con ello vamos a obtener las posibles posiciones y sus respectivas probabilidades.

Código 6.2: 100000 simulaciones de una caminata aleatoria de 1000 pasos consecutivos.

```

n <- 100000 # Numero de veces que vamos a simular la caminata
num <- 1000 # Numero seguido de lanzamientos
Y <- 0
for(j in seq(1,n,1))

```

```

{
  Y[j] ← caminata_aleatoria(num)
}

```

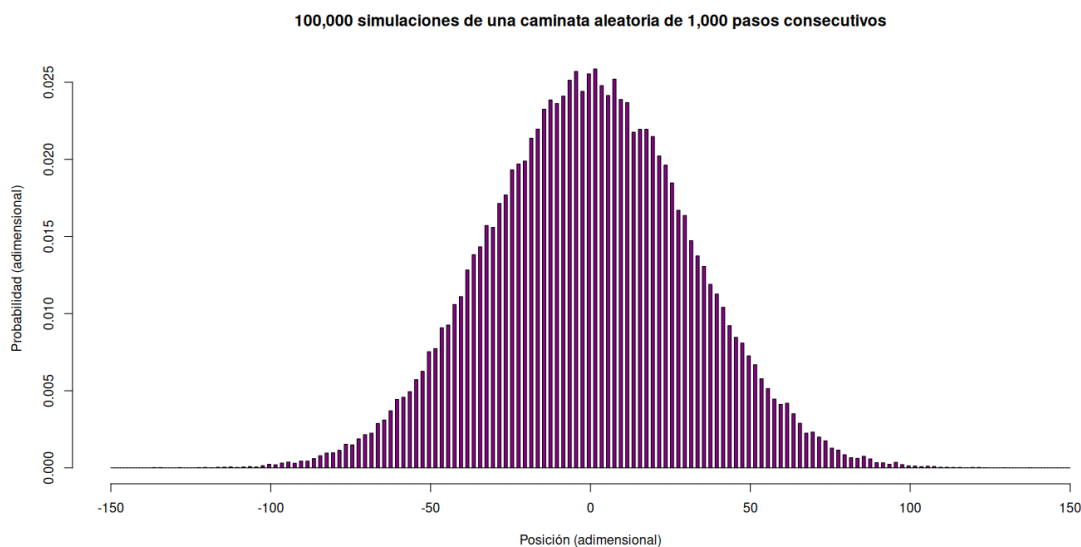


Figura 6.2: Probabilidad asociada a la posición para una caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos.

A partir de los resultados mostrados en la Fig. 6.2 podemos notar que la caminata aleatoria al parecer sigue una distribución normal, para comprobar si la hipótesis es correcta podemos recurrir a un gráfico del tipo Q-Q. Note que las posiciones impares tienen una probabilidad de 0.0 % de ocurrir.

Con base en la Fig. 6.3, determinamos que una distribución gaussiana con media cero y desviación estándar  $\sqrt{N}$  se ajusta de manera excelente a los resultados obtenidos a partir de la simulación. Para ello, vamos a comparar la función de distribución de probabilidad de los resultados obtenidos a través de la simulación y al función de densidad de probabilidad de una distribución gaussiana con media  $\mu = 0$  y desviación estándar  $\sigma = \sqrt{1000}$ , ver Fig. 6.4. Si generamos una muestra de números aleatorios a partir de la distribución propuesta e introducimos un factor de dos, esto porque las posiciones impares no son posibles, obtendremos una excelente aproximación a los resultados de la simulación.

El resultado del párrafo anterior es interesante porque muestra que aunque la dispersión, en una caminata aleatoria, crece conforme aumenta la raíz cuadrada del número  $N$ , la media sigue siendo cercana a cero, es decir, tenemos una probabilidad significativamente alta de volver al punto de partida independientemente del número de pasos  $N$  de la caminata aleatoria. En la Fig. 6.6 se muestra la trayectoria de una caminata de 1000 pasos consecutivos generada a través de nuestro algoritmo; podemos apreciar que aunque la dispersión es grande, en repetidas ocasiones volvemos al punto de partida u origen.

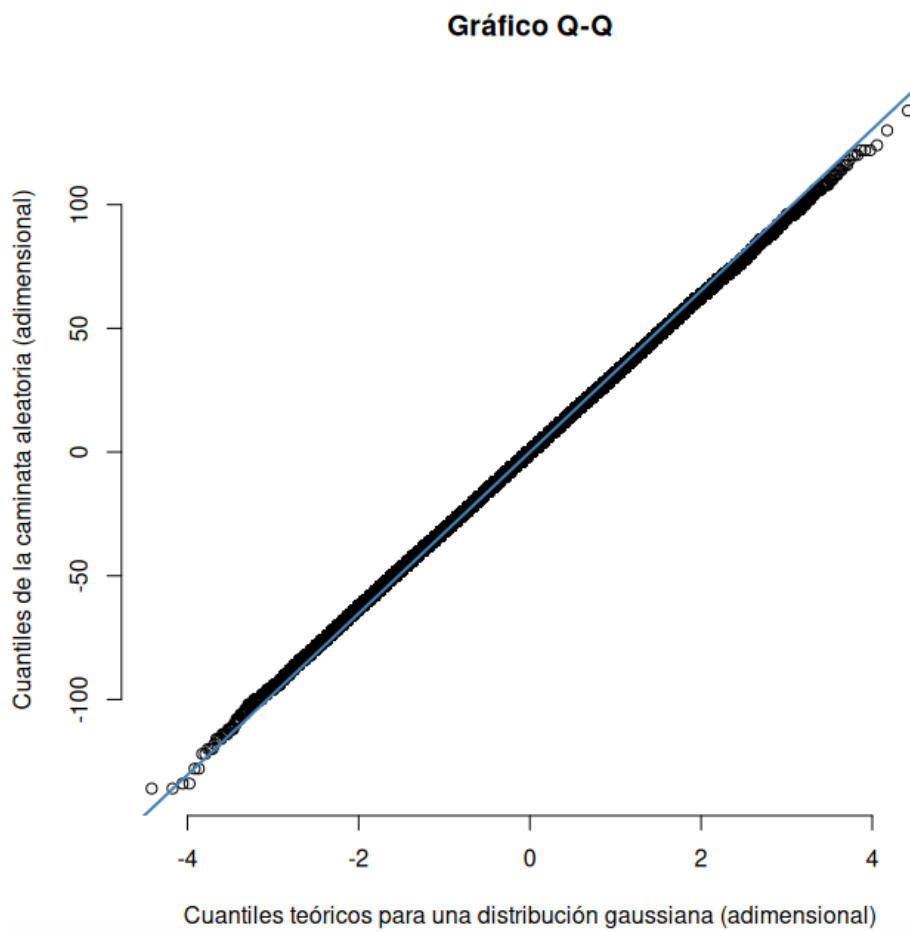


Figura 6.3: Gráfico Q-Q de los datos obtenidos a partir de la simulación de la caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos, los puntos representan los datos de la simulación y la línea azul el valor teórico de una distribución gaussiana.

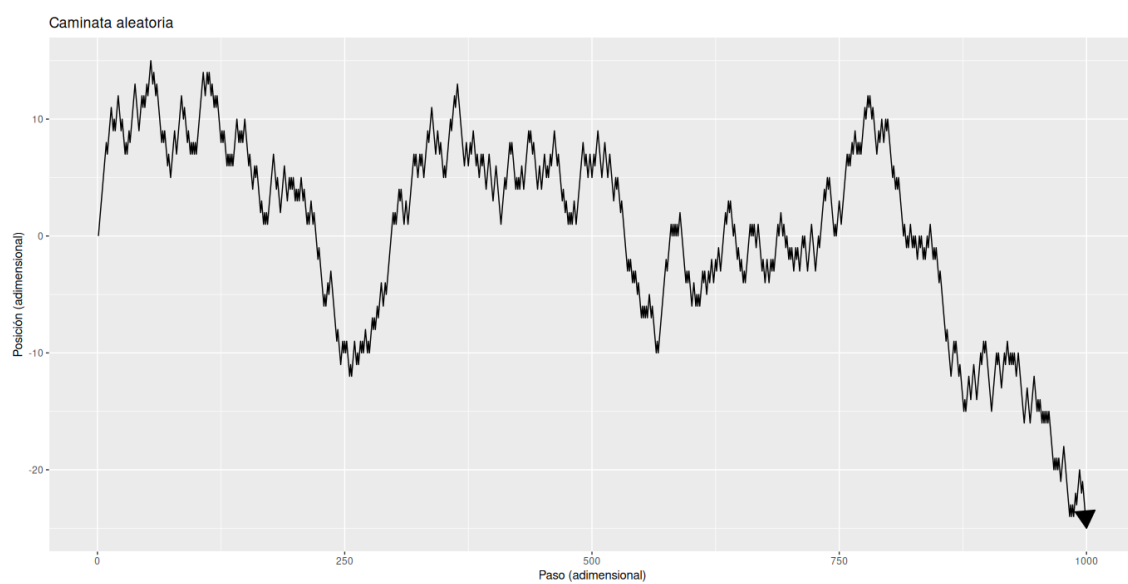


Figura 6.6: Trayectoria de una caminata aleatoria de 1,000 pasos consecutivos.

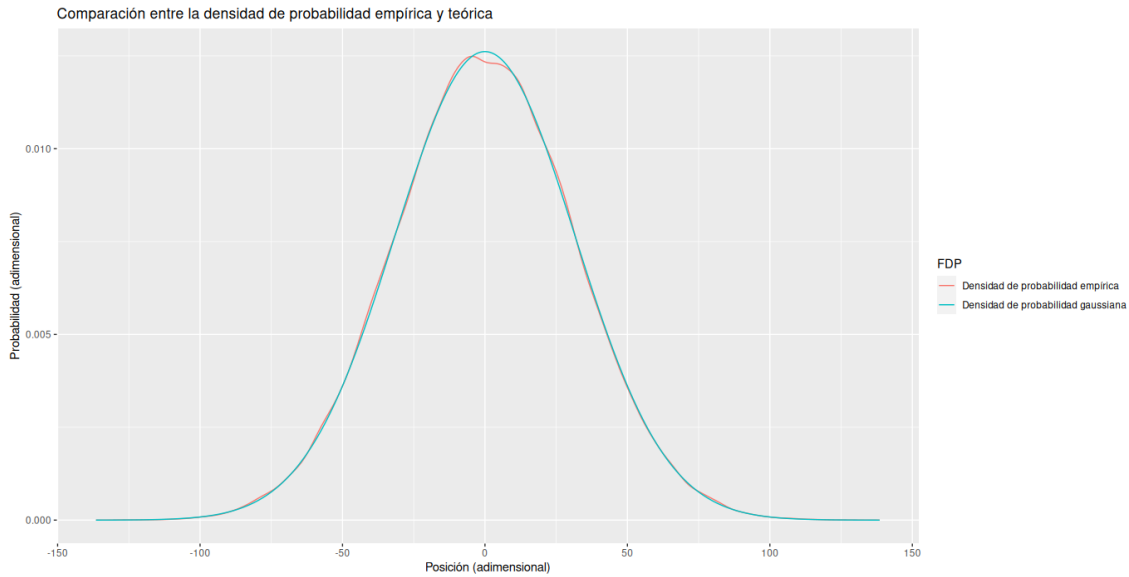


Figura 6.4: Comparación entre las funciones de distribución de probabilidad de los resultados obtenidos a partir de la simulación (azul) y la distribución gaussiana propuesta (rojo).

#### 6.4. Caminata aleatoria 2D y 3D

Podemos extender el proceso de la caminata aleatoria de la sección previa a más dimensiones, como dos o tres dimensiones, en la Fig. 6.7 se puede apreciar una caminata aleatoria de 10,000 pasos consecutivos en 2D. La Fig. 6.8 muestra el resultado de simular una caminata aleatoria de 5,000 pasos consecutivos, pero en 3D.

Vamos a modificar el código que usamos para generar la caminata aleatoria previa, como propuesta; en lugar de dar saltos discretos con valores que bien pueden ser '-1' ó '+1', ahora vamos a dar saltos o pasos que provienen de una distribución normal de media cero y desviación estándar uno, es decir, como alternativa a usar números enteros, restringidos a '-1' ó '+1', se usan números reales.

Código 6.3: Caminata aleatoria de N pasos modificada.

```

caminata_aleatoria_nueva <- function(n)
{
  posicion      <- 0    # Posicion inicial
  for (i in seq(1,n,1))
  {
    salto       <- rnorm(1,mean=0,sd=1) # Distribucion normal con u = 0 y std = 1
    posicion    <- posicion + salto
  }
  return(posicion)
}

```



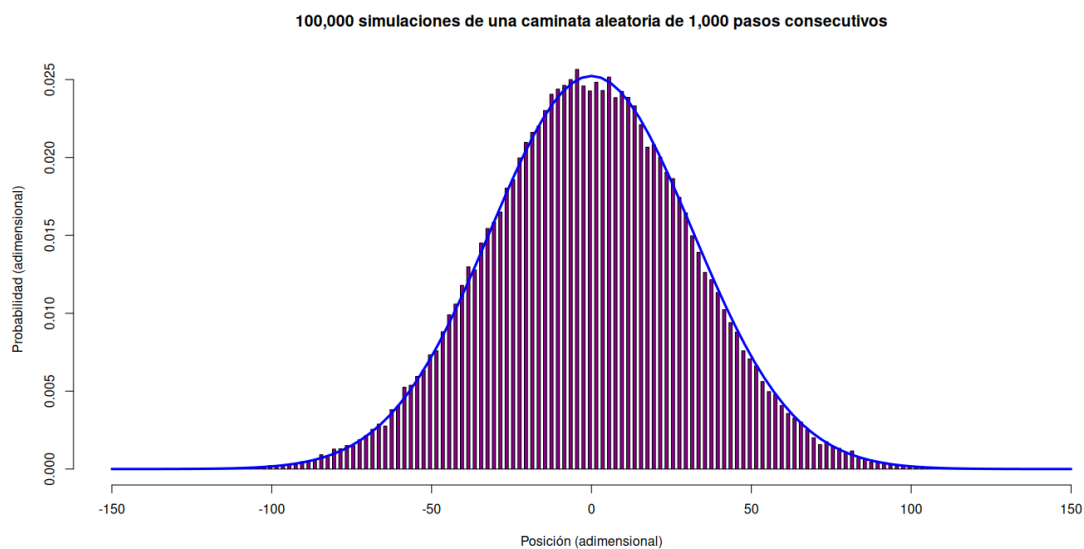


Figura 6.5: Comparación entre los resultados obtenidos a partir de la simulación (gráfica de barras) y los generados por la distribución gaussiana propuesta (línea azul).

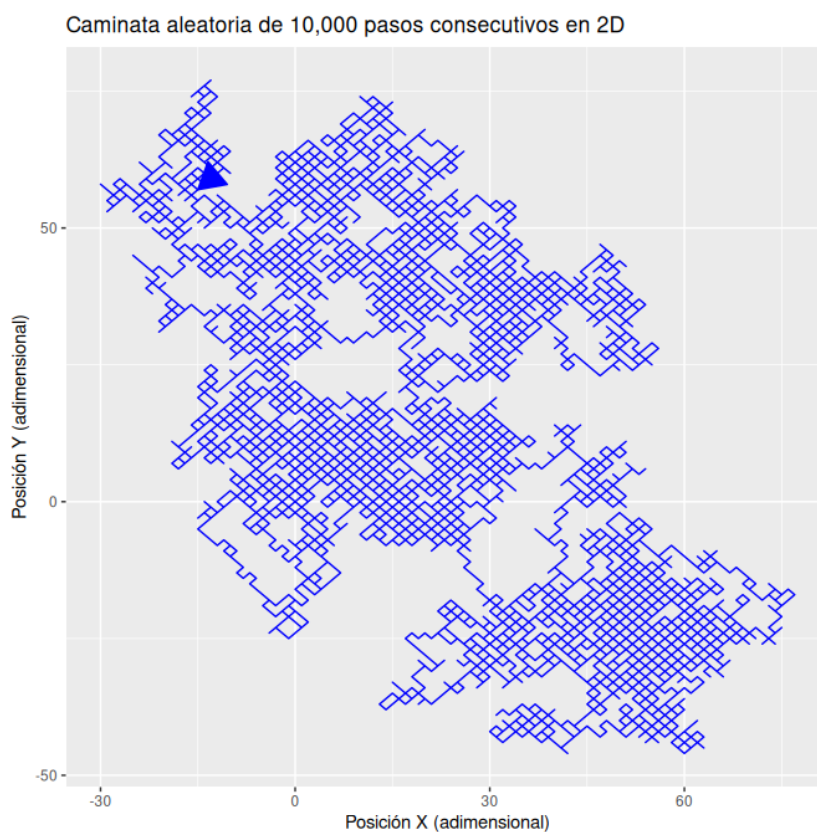


Figura 6.7: Trayectoria de una caminata aleatoria de 10,000 pasos consecutivos en 2D.

Si volvemos a simular una caminata aleatoria en 2D con la nueva función, el resultado que obtenemos se puede apreciar en la Fig. 6.9. Notemos que hay ciertas regiones del espacio que son exploradas con mayor frecuencia en relación a otras. Si calculamos numéricamente el desplazamiento cuadrático medio (MSD) de la simulación, ver Fig. 6.10, podemos observar que para un desfase temporal comprendido entre 3,500 y

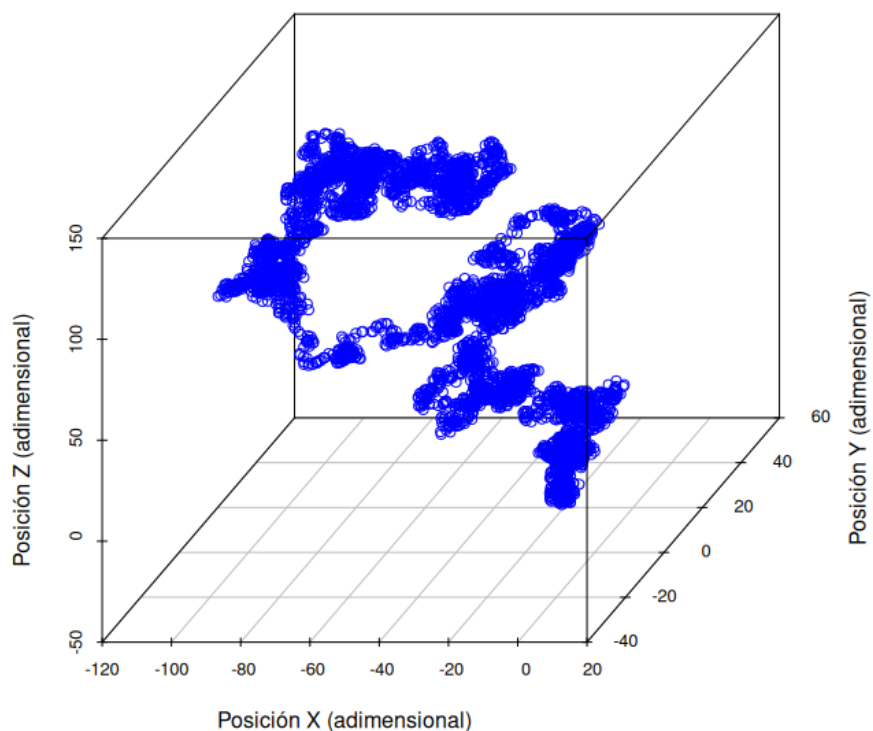
**Caminata aleatoria de 5,000 pasos consecutivos en 3D**

Figura 6.8: Trayectoria de una caminata aleatoria de 5,000 pasos consecutivos en 3D.

7,5000 existe una especie de 'atoramiento' espacial. Con este pequeño ejemplo el lector debería percatarse que el MSD es una herramienta muy poderosa para estudiar el comportamiento espacial y temporal de una serie de tiempo, ya que permite detectar características importantes, que podrían pasar desapercibidas, del sistema analizado de una manera sencilla.

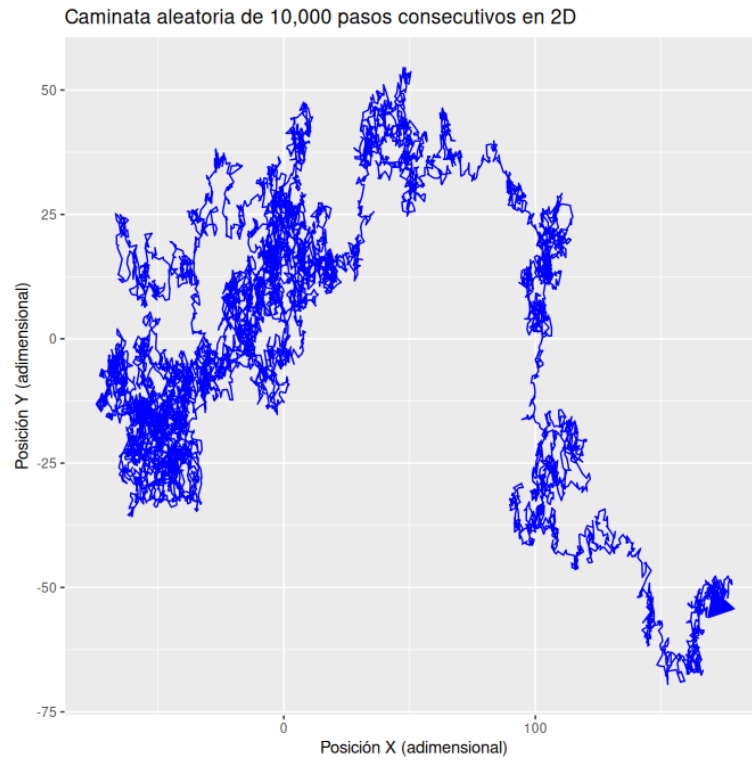


Figura 6.9: Trayectoria de una caminata aleatoria de 10,000 pasos consecutivos en 2D donde los saltos provienen de una distribución gaussiana con media cero y desviación estándar uno.

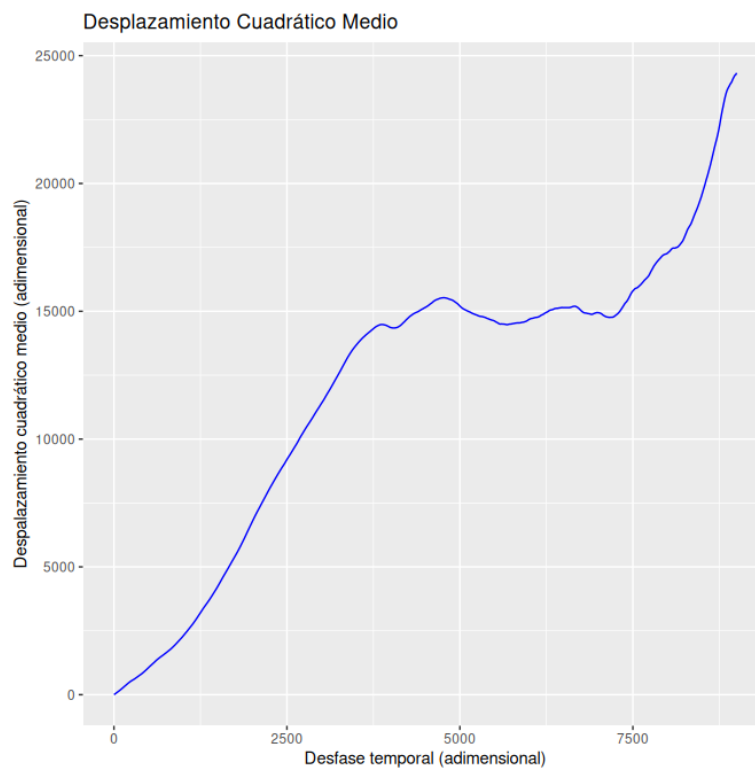


Figura 6.10: Desplazamiento cuadrático medio numérico de la trayectoria de la caminata aleatoria mostrada en la Fig. 6.9.



- [1] J. Clara-Rahola, A. M. Puertas, M. A. Sánchez-Granero, J. E. Trinidad-Segovia, and F. J. de las Nieves, “Phys. Rev. Lett. 118, 068301,” 2017.
- [2] M. A. Sánchez-Granero, J. E. Trinidad-Segovia, J. Clara-Rahola, A. M. Puertas, and F. J. de las Nieves, “PloS One 12, e0188814,” 2017.
- [3] A. M. Puertas, M. A. Sánchez-Granero, J. Clara-Rahola, J. E. Trinidad-Segovia, and F. J. de las Nieves, “Phys. Rev. E 101, 032307,” 2020.
- [4] M. C. Medel Lopez, “Caminata aleatoria: Ruina del jugador,” <https://hdl.handle.net/20.500.12371/15355>, Accedido en noviembre de 2022.
- [5] S. Díaz Infante Velasco, “Métodos en diferencias finitas estándar para la ecuación de Langevin,” [https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1008/262/2/TE\\$\%20384.pdf](https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1008/262/2/TE$\%20384.pdf), Accedido en noviembre de 2022.
- [6] H. López Terrazaz, “La ecuación de difusión y la cadena de nacimiento y muerte,” <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/10906/103.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, Accedido en diciembre de 2022.
- [7] A. L. Torres Flores, “Solución analítica de la ecuación de difusión en medios heterogéneos,” <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11697/solucionanalitica.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, Accedido en diciembre de 2022.
- [8] E. Jurado Galicia, “Una introducción a la difusión anómala,” [https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/18656/JURADO\%20GALICIA\%20EDITH\%20Tesis\%202007\\_217.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/18656/JURADO\%20GALICIA\%20EDITH\%20Tesis\%202007_217.pdf?sequence=1&isAllowed=y), Accedido en diciembre de 2022.
- [9] B. Romero Suárez, “Método de lattice Boltzmann para difusión anómala en medios porosos,” <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10435https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10435>, 1927, Accedido en junio de 2022.
- [10] L. S. Ornstein and W. R. Van Wijk, *On the derivation of distribution functions in problems of Brownian motion*. Physica, 05 1934, vol. 1, no. p.235-254.
- [11] D. J. Wales, “Exploring energy landscapes,” <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/10906/103.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, Accedido en diciembre de 2022.
- [12] The-R-Foundation<sup>®</sup>, “The R project for statistical computing,” <https://www.r-project.org>, Accedido en junio de 2022.

