CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Actividades y procesos de resolución de problemas en un escenario en línea mediado por un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra)

Tesis que presenta

Allan Oasis Ayala Aguilar

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

En la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis:

Dr. Luz Manuel Santos Trigo

Ciudad de México Agosto, 2023

Agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN

Becario: 779145

Agradecimientos

Al Dr. Luz Manuel Santos Trigo por su orientación, apoyo y paciencia brindados en la realización de este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Armando Solares Rojas y Dr. Alberto Monzoy.

Al Dr. Hugo Espinoza por apoyarme en todo el proceso de análisis de datos.

A los profesores que me impartieron clase durante la duración de los estudios de maestría por compartir un poco de su conocimiento.

A mis companeros del Math Problem Solving Team (Adrian, Daniel y Tania) por su apoyo y consejos.

A mis amigos Daniela, Sharon, Alejandra y Mario por sus consejos y apoyo en momentos difíciles.

A Yeyni por estar conmigo en todo momento.

Dedico este trabajo a:

Mi madre y a mi padre, quienes siempre han confiado en mí y me han motivado a cumplir mis sueños y a salir adelante sin importar las adversidades que surjan en el camino. También dedico este trabajo a mí hermana que siempre ha estado apoyándome en todo momento.

Contenido

Resumen

El propósito de este estudio fue caracterizar la forma en cómo los estudiantes se apropiaban de un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) al resolver problemas en un escenario en línea que enfatizó la creación de modelos dinámicos, la formulación de conjeturas, la búsqueda de diversas maneras de resolver los problemas, la generalización de resultados y la formulación de nuevos problemas. En este contexto se distingue el uso de heurísticas como el arrastre o movimiento ordenado de objetos matemáticos, la cuantificación de atributos en la representación, el rastro o lugares geométricos que describen algunos objetos.

En el estudio participaron tres estudiantes de maestría que cursaban un seminario centrado en la resolución de problemas. La toma de datos se llevó a cabo en 32 sesiones del seminario de resolución de problemas, dos cada semana con una duración de dos horas cada una, haciendo un total de 64 horas en el semestre. El análisis de datos se organizó alrededor de tres diferentes fases (fase inicial, fase intermedia y fase final), con el fin de observar el desempeño y evolución de los estudiantes a lo largo del curso.

Los resultados muestran que los estudiantes experimentan dificultad en la transición de representar y analizar un problema con el uso de lápiz y papel y la construcción de modelos dinámicos en los caminos de solución. También se observó que los estudiantes gradualmente mostraron rasgos de apropiación del SGD (GeoGebra) lo que les permitió representar geométricamente los conceptos involucrados en los problemas, explorar y analizar relaciones entre los elementos de los modelos dinámicos construidos, establecer nuevas relaciones entre los conceptos y hallar la solución. También se observó que los estudiantes utilizaron heurísticas propias de GeoGebra como ser el movimiento controlado de puntos, la medición de objetos matemáticos y el rastro o lugar geométrico que dejan algunos puntos. Asimismo, gracias a la exploración y análisis de relaciones, fue posible que los estudiantes generalizaran resultados y formularan nuevos problemas.

Abstract

The purpose of this study was to characterize how students appropriated a Dynamic Geometry System (GeoGebra) when solving problems in an online scenario that emphasized the creation of dynamic models, the formulation of conjectures, the search for different ways to solve problems, the generalization of results and the formulation of new problems. In this context, the use of heuristics such as the dragging or ordered movement of mathematical objects, the quantification of attributes in the representation, the trace or geometric places that describe some objects are distinguished.

The study involved three master's students taking a seminar focused on problem solving. Data collection was carried out in 32 sessions of the problem-solving seminar, two each week with a duration of two hours each, making a total of 64 hours in the semester. The data analysis was organized around three different phases (initial phase, intermediate phase, and final phase), to observe the performance and evolution of the students throughout the course.

The results show that students have trouble in the transition of representing and analyzing a problem with the use of pencil and paper and the construction of dynamic models in the solution paths. It was also observed that students gradually showed traits of appropriation of the SGD (GeoGebra) which allowed them to represent geometrically the concepts involved in the problems, explore, and analyze relationships between the elements of the constructed dynamic models, establish new relationships between the concepts and find the solution. It was also observed that students used GeoGebra's own heuristics such as the controlled movement of points, the measurement of mathematical objects and the geometric trace or place left by some points. Likewise, thanks to the exploration and analysis of relationships, it was possible for students to generalize results and formulate new problems.

Capítulo 1

El Problema de investigación

1.1 Introducción

Uno de los principales propósitos de la educación matemática es investigar cómo los estudiantes aprenden y desarrollan conceptos matemáticos y caracterizar las formas de razonamiento que construyen y activan en la resolución de problemas. ¿Qué significa que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos y desarrollen competencias para resolver problemas? Santos-Trigo (2007) menciona que "aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios" (p. 36); involucra que desarrolle una forma de pensar que privilegie la formulación de preguntas como medio para entender conceptos, utilice diferentes representaciones de los problemas en la búsqueda de conjeturas y formas de sustentarlas.

La resolución de problemas resulta una actividad importante en la estructuración y organización del currículo y contribuye en el desarrollo de un pensamiento matemático de los estudiantes consistente con la práctica y desarrollo de la disciplina (Santos-Trigo, 2007a). En esta perspectiva, los estudiantes participan activamente en la construcción de su conocimiento y desarrollan recursos y estrategias que les permiten comprender conceptos y resolver problemas (Rivera & Santos, 2011).

En la agenda de investigación en la resolución de problemas, se destaca:

> "(a) el trabajo de la comunidad matemática que identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial en el quehacer matemático; (b) los desarrollos en la educación matemática, que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y (c) la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales en los procesos de formular y resolver problemas" (Santos -Trigo, 2019a, p. 1).

También se señala "el estudio sistemático de lo que implica el proceso de formulación y resolución de problemas y las formas de estructurar los enfoques de resolución de problemas para aprender matemáticas" (Santos -Trigo, 2020, p. 687). El objetivo esencial en el proceso de enseñanza de las matemáticas es lograr que el estudiante aprenda matemáticas y desarrolle un pensamiento matemático consistente con las prácticas de la disciplina. Santos-Trigo (2014a) establece que la resolución de problemas es importante porque está íntimamente relacionado con aprender matemáticas, ya que durante este proceso los estudiantes pueden identificar, explorar, verificar y comunicar sus soluciones y las estrategias utilizadas. Según Schoenfeld (1994) aprender matemáticas significa:

> (a) desarrollar un punto de vista matemático – que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras –desarrollo del sentido matemático (p. 60).

Otro elemento que se considera importante para aprender matemáticas es que los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina (Santos, 2007). Es decir, los estudiantes deben enfrentarse a situaciones similares a las que se enfrentan los matemáticos y eso incluye buscar diferentes representaciones para los problemas, plantear conjeturas, utilizar diferentes medios de representación, argumentar y defender sus resultados.

Existen distintos caminos para que un estudiante aprenda matemáticas y desarrolle su pensamiento matemático, pero algunos resultados de investigaciones demuestran "la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que los estudiantes necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos" (Santos-Trigo, 2007a, p. 523). Es decir, se espera que el estudiante se plantee una serie de preguntas que lo conduzcan a la búsqueda de diferentes representaciones, el planteamiento de conjeturas, establecer relaciones entre los datos y la incógnita. Según Santos-Trigo (2007) al conceptualizar la disciplina en términos de preguntas "los estudiantes construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales" (p.36).

Resolver y analizar problemas en los ambientes de aprendizaje resulta importante y puede favorecer la participación activa de los estudiantes en la construcción de su conocimiento matemático, ya que mediante la resolución de problemas los estudiantes pueden aplicar y adaptar una variedad de heurísticas, poner en práctica su creatividad, monitorear y reflexionar sobre los procesos de resolución, interactuar de mejor forma con los conceptos matemáticos y darles sentido, también tienen la oportunidad de plantear conjeturas y utilizar diferentes representaciones. Según Cai y Nie (2007) el propósito de enseñar resolución de problemas en el aula es "desarrollar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes, ayudarlos a adquirir formas de pensar, formar hábitos de persistencia y desarrollar su confianza para enfrentar situaciones desconocidas" (p. 471). Por su parte el National Council of Teachers of Mathematics (2010) establece que en la resolución de problemas se promueve a que el estudiante pueda reflejar su pensamiento de tal forma que puedan aplicar y adaptar estrategias aprendidas a otros problemas y en otros contextos, desarrollando así un interés por las matemáticas y por la actividad resolutora.

Schoenfeld (1985) concluye que el éxito o las dificultades que los estudiantes muestran en su experiencia de resolución de problemas se pueden caracterizar en términos de cuatro dimensiones relacionadas:

i) Los recursos básicos: esta categoría comprende el conocimiento base que incluye definiciones, hechos, reglas y procedimientos junto a las distintas formas de acceder a ellos.

ii) Las heurísticas: son estrategias generales que nos permiten encontrar el camino para la solución a problemas, estas incluyen el empleo de diagramas, el análisis de casos particulares, el relajamiento de condiciones, etc.

iii) Las estrategias de control o monitoreo: que permiten al estudiante evaluar y tener control constante del proceso de solución de problemas.

iv) Las creencias: son las concepciones que muestran los estudiantes acerca de las matemáticas y en particular hacia la resolución de problemas.

Incorporar la tecnología al proceso de enseñanza ha sido uno de los principales desafíos de la educación en las últimas décadas. Actualmente una parte de la agenda investigativa de la educación matemática está destinada a investigar la incorporación de la tecnología en la resolución de problemas. Los avances tecnológicos de la actualidad como los teléfonos inteligentes, tablet, internet y diferentes medios de comunicación han traído consigo diferentes cambios para la sociedad y las múltiples actividades que realizamos a diario, esto ha contribuido a que se realice una transformación en la forma en que las personas se comunican, interactúan y trabajan. Los avances tecnológicos brindan nuevas oportunidades para los maestros y estudiantes, por tal motivo las propuestas curriculares actuales hacen énfasis en la resolución de problemas y en el uso de herramientas digitales (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2009). Incorporar herramientas tecnológicas dentro de los salones de clases está trasformando la forma en que los estudiantes abordan la resolución de problemas, ya que provee unos recursos diferentes a los de un ambiente estáticos. Según Santos-Trigo (2010) el uso de la tecnología en la resolución de problema "ofrece la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que incluyen aproximaciones visuales, gráficas, numéricas y algebraicas" (p. 310). Una de las principales herramientas que está siendo utilizada para la enseñanza y en la resolución de problema es el Sistema de Geometría Dinámica (SGD). Según Santos et al. (2008) "el uso de software dinámico parece ofrecer a los profesores una oportunidad didáctica para desarrollar actividades de aprendizaje en las cuales los estudiantes pueden tomar ventaja de las características dinámicas de la herramienta para identificar y examinar relaciones matemáticas" (p. 669). Esto implica, representar conceptos de una forma dinámica, modelar problemas y observar el comportamiento de algunos objetos matemáticos, observar patrones, lugares geométricos, relaciones entre objetos, etc. Según Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2014) establecen que el uso del Sistema de Geometría Dinámica (SGD) también es una herramienta que nos permite transformar los materiales de aprendizaje tradicionales y ofrecer a los estudiantes otras formas para que desarrollen su pensamiento matemático. Las ventajas de utilizar esta herramienta en la resolución de problemas es que permite la creación de un modelo dinámico del problema y brinda la oportunidad para que el estudiante realice exploraciones, interactúe de una forma diferente con los contenidos y conceptos matemáticos, establezca nuevas relaciones entre los elementos, plantee nuevos problemas y generalice resultados. Otro elemento importante es que gracias a su dinamismo los estudiantes pueden activar una variedad de heurísticas propias para este sistema por ejemplo el arrastre, el movimiento ordenado el trazo y la visualización de lugares geométricos.

1.2 Planteamiento del problema

Los avances tecnológicos como teléfonos inteligentes, computadoras, tablets e internet se han convertido en herramientas para acceder a distintos tipos de información, ya que al alcance de un clic se pueden consultar libros digitales, videos y ejemplos de cualquier tema que sea de nuestro interés. También han modificado la forma en que nos comunicamos, ya que ahora podemos tener una conversación en tiempo real con una o más persona que se encuentre a miles de kilómetros de distancia en cualquier lugar del mundo. En la actualidad existen muchas alternativas en línea que los estudiantes pueden consultar para obtener información e interactuar virtualmente desde su celular o tabletas por ejemplo blogs, YouTube, Wikipedia, etc. Estos desarrollos en línea promueven oportunidades de aprendizaje permanente para todos, ya que son abiertas al público en general.

La disponibilidad de diferentes herramientas tecnológicas establece un desafío para el sistema educativo, ya que surge la interrogante de cómo se puede incorporar estos avances tecnológicos a la enseñanza y aprendizaje. Según Santos-Trigo (2016) el principal reto es establecer los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben desarrollar, de igual forma es importante considerar los tipos de escenarios de enseñanza que se desee desarrollar. Las primeras aproximaciones para incorporar la tecnología al proceso de enseñanza se remontan al siglo XX en donde la enseñanza por televisión llegaba a muchas personas, luego a mediados de la década de 1990 el aprendizaje en la web empieza a tomar importancia y finalmente se convirtieren en los cursos en línea que conocemos actualmente (Perry & Pilati, 2011).

Hoy en día los cursos en línea han tomado relevancia a nivel mundial debido a sus múltiples ventajas y a las oportunidades que brinda a los estudiantes. Además, si consideramos que para el 2030 la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés) tiene como objetivo el garantizar una educación de calidad, equitativa y que promueva oportunidades de aprendizaje permanente para todos (2015). Resulta de mucha importancia crear nuevos escenarios de aprendizaje que incorporen las herramientas tecnológicas actuales y tener una mayor cobertura. En un esfuerzo para contribuir con este objetivo las universidades han creado nuevos ambientes de aprendizaje en donde incorporan el potencial de las tecnologías digitales. Como resultado muchas universidades han abierto cursos masivos al público en general, teniendo una cobertura muy amplia y llegando a muchas personas sin importar el lugar geográfico donde se encuentren.

En el 2012 el Instituto Tecnológico de Massachusetts y la Universidad de Harvard crearon la plataforma digital edX con el objetivo de ofrecer cursos en línea de nivel universitario de un amplio rango de disciplinas, estos cursos son gratuitos y puede acceder cualquier persona interesada en sacar un curso en línea. Los cursos de edX consisten en una secuencia de aprendizaje que se compone de distintos recursos de aprendizaje como lecturas, foros de discusión, videos, ejercicios de evaluación o exámenes evaluativos de opción múltiple, preguntas de respuesta abierta, etc. En 2013 las universidades creadoras de edX compartieron su código dando origen a una nueva plataforma llamada Open edX. El objetivo de esta nueva plataforma es que cualquier institución educativa interesada pueda utilizar Open edX y pueda crear sus propios cursos en línea. Estos cursos en línea reciben el nombre de Cursos Masivos Abiertos en Línea (Massive Open Online Course, MOOC por sus siglas en inglés). Su principal característica es que están a cargo de institución educativa y son diseñados por uno o varios expertos en el tema. Otra característica es que son abiertos al público en general, es decir puede ser cursado por cualquier individuo sin importar su nivel económico, nivel de estudios, su edad o el lugar geográfico en donde se encuentre el participante. Cursar un MOOC requiere cierto grado de responsabilidad, ya que no existe un profesor encargado de responder o dar seguimiento puntual a cada participante, sino que cada integrante está a cargo de su aprovechamiento, desarrollo y participación en las actividades. Es decir, que dependiendo de la disponibilidad de tiempo e intereses del individuo así será el aprovechamiento de cada una de las actividades.

Por otro lado, existen desarrollos digitales que ofrecen contenidos curriculares y formas de presentarlos similares a las actividades que se implementan en los ambientes de clase. Por ejemplo, Khan Academy es una plataforma en línea que ofrece contenidos de diferentes disciplinas a través de videos explicativos. Esta plataforma tiene un apartado específico para las matemáticas, en donde encontramos una serie de videos que explican una variedad de conceptos, teoremas y demostraciones matemáticas. La principal característica de esta plataforma es que proporciona un ambiente de aprendizaje disponible en cualquier momento y lugar, por lo que puede ser una herramienta muy importante para los estudiantes, ya que pueden estudiar en cualquier momento y a su propio ritmo, es decir pueden consultar los videos las veces que sea necesario hasta tener la confianza que aclararon sus dudas o entienden un tema.

Específicamente en el ámbito de la educación matemática la incorporación de la tecnología digital cómo un instrumento que apoya la comunicación y colaboración en el proceso de enseñanza- aprendizaje se ha desarrollado en diferentes fases. La primera fase comenzó con la introducción de Logo como herramienta de enseñanza y la utilización de software como Cabri o Geometer's Sketchpad. La segunda fase llegó con la incorporación de nuevas nociones como el arrastre que permitía que los estudiantes pudieran experimentar nuevas experiencias con las matemáticas. La tercera fase llega con la incorporación del internet que impulsó el aprendizaje colaborativo utilizando la tecnología. La cuarta fase surgió con mejoras en el internet y expresiones como Web 2. 0 e Internet de banda ancha generaron cursos masivos abiertos en línea (MOOC) (Borba et al., 2021).

En la actualidad existen herramientas digitales específicas para trabajar problemas matemáticos, por ejemplo, GeoGebra, Cabri, Wolfran Alpha, Grapes, Derive, Mathematica, MatLab. Algunas de estas herramientas brindan una fuente valiosa de información para la educación matemática ya que muchas de ellas son utilizadas por los estudiantes para realizar tareas y otras son utilizadas por los maestros dentro de los salones de clases. Por tal motivo resulta importante analizar su impacto en los procesos de enseñanza- aprendizaje. De igual forma algunas de ellas han tomado relevancia en el proceso de resolución de problemas, ya que contribuye al proceso de comprensión de los enunciados, el diseño de un plan de solución, comunicación y discusión de los resultados y formulación de problemas de extensión. Además, permite que los estudiantes tengan un mejor desempeño en la resolución de problemas, por ejemplo, el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) permite que los estudiantes amplíen las formas de representación, exploración y análisis de conceptos o relaciones matemáticas para los diferentes casos (Hodge-Zickerman et al., 2021).

Santos-Trigo y Reyes-Rodríguez (2011) realizaron una investigación en un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales, en su reporte destacan algunos de los beneficios de usar un SGD (GeoGebra) en el proceso de resolución de problemas: 1) facilita la representación dinámica de los objetos matemáticos involucrados en los problemas asignados, 2) permite realizar exploraciones dinámicas de los objetos y las relaciones entre ellos, 3) fomenta la formulación de conjeturas a partir de la información visual y empírica (medición de atributos tales como longitud de un segmento, perímetro o área de un polígono, entre otros) y 4) proporciona la posibilidad de establecer conexiones entre diversos contenidos matemáticos, por ejemplo el uso de argumentos geométricos y algebraicos en la justificación de conjeturas.

El estudio realizado por Poveda (2019) establece un escenario de aprendizaje MOOC mediado por el uso de tecnologías digitales (modelos dinámicos GeoGebra, información de Wikipedia y Khan Academy) y la resolución de problemas. Los resultados de esta investigación sugieren: 1) que el uso de modelos dinámicos realizados en GeoGebra ofrece la oportunidad para que los estudiantes reconozcan la importancia de mover objetos al momento de realizar las exploraciones del problema, 2) usar modelos dinámicos de los problemas brindan oportunidades para que los estudiantes puedan cuestionarse sobre el significado de conceptos matemáticos y para que busquen relaciones entre los objetos involucrados y 3) los estudiantes proporcionan argumentos empíricos o visuales para justificar o refutar las conjeturas, además se descubrió información relevante sobre las propiedades de los objetos por medio de cuantificar sus atributos y analizar los lugares geométricos.

En este estudio interesa documentar los resultados de impartir un curso de resolución de problemas mediado por el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) en un escenario en línea, en un curso de maestría de educación matemática. Se plantea analizar el trabajo de los estudiantes al resolver problemas en un escenario en línea en términos de:

Caracterizar el trabajo de los estudiantes relacionado con el uso de GeoGebra en la resolución de problemas, donde se enfatiza, la creación de modelos dinámicos, la formulación de conjeturas, la búsqueda de diversas maneras de resolver los problemas, la generalización de resultados y la formulación de nuevos problemas.

Promover el uso de heurísticas como el movimiento ordenado de objetos matemáticos, la cuantificación de atributos en la representación, exploración y resolución de los problemas a partir de la construcción de modelos dinámicos.

1.3 Preguntas de investigación

De acuerdo con los objetivos de la investigación, se plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Qué formas de razonamiento exhiben los estudiantes durante las distintas etapas de resolución de los problemas en términos de los recursos y estrategias que utilizan en la construcción de modelos y procesos de solución de las tareas?
2. ¿Qué distingue a los acercamientos que muestran los participantes al resolver los problemas relacionados con los procesos de apropiación de la herramienta durante el desarrollo del curso, fase inicial, intermedia y final?

1.4 Justificación de la investigación

Los constantes avances tecnológicos han modificado la forma en que las personas desarrollan sus quehaceres diarios y la sociedad actual demandan que los individuos estén en un constante proceso de actualización. Por tal motivo incorporar la tecnología al proceso de enseñanza ha sido uno de los objetivos de los sistemas educativos y también se ha convertido en uno de sus principales desafíos.

La situación generada por la pandemia del COVID-19 y las medidas sanitarias contribuyeron para incorporar la tecnología en el proceso de enseñanza. Ya que a partir del 1 de abril la UNESCO encontró que las escuelas e instituciones de educación superior (IES) de 185 países habían cerrado a causa de la pandemia, afectando a 1,542,412,000 alumnos, que constituyen el 89.4% del total de alumnos matriculados (Marinoni et al., 2020). Este cierre tan abrupto de las instituciones educativas obligó a las autoridades a buscar los mecanismos para continuar con las labores educativas haciendo uso de todos los medios tecnológicos que se tenían al alcance. Es decir, forzó "a las universidades a evolucionar hacia la docencia en línea en un tiempo récord, implementando y adaptando los recursos tecnológicos disponibles e involucrando a profesores e investigadores que carecen de capacidades tecnológicas innatas para la docencia en línea" (García-Morales et al., 2021, p.1). Lo que significó que tanto docentes como estudiantes se vieron forzados a seguir con sus obligaciones educativas en un escenario en línea. Este acontecimiento permitió que se generara mucha información sobre los escenarios de enseñanza-aprendizaje en línea y de las herramientas tecnológicas, lo que contribuyó a que parte de la agenda investigativa de la educación matemática se centrara en temas relacionados con la tecnología digital y su incorporación a la educación (Borba et al., 2021).

La principal característica de los escenarios de aprendizaje en línea es que brinda la oportunidad a cualquier individuo, sin importar la hora y el lugar donde se encuentre, de consultar y estudiar temas específicos e interactuar con otros participantes durante el proceso de aprendizaje (Baldi, 2014). En la actualidad recursos tecnológicos como Zoom, GoToMeeting, Microsoft Teams, Skype, Google Hangouts, Google Meet permite que los docentes puedan programar reuniones, dar sus clases en tiempo real e interactuar con sus estudiantes sin la necesidad de estar en el mismo espacio físico. También brindan la oportunidad de realizar "videoconferencia, compartir material (p. Ej., Diapositivas, videos, presentaciones), interactuar a través de chats, crear foros de debate o grupos de trabajo, supervisar actividades prácticas, evaluar y dar tutoría a los estudiantes, grabar explicaciones y ponerlos a disposición de los estudiantes" (García-Morales et al., 2021, p.3). Utilizar estos recursos tecnológicos y los escenarios en línea para resolver problemas y para la enseñanza de las matemáticas, nos ofrece una información sustentada acerca de cómo utilizar las herramientas tecnológicas en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Santos -Trigo, 2007).

Cabe resaltar que antes del confinamiento las propuestas curriculares hacían énfasis en la incorporación de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Ya que "se reconoce que un factor importante en el crecimiento y evolución de las matemáticas y el aprendizaje es el poder que ofrece el empleo de distintas herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y comprensión de las ideas matemáticas" (Santos-Trigo, 2007, p. 37).

Incorporar la tecnología en el proceso de enseñanza de las matemáticas potencializa lo que los maestros y estudiantes pueden realizar en lápiz y papel, ya que nos permite ampliar las formas de razonamiento y crear nuevos escenarios para que los estudiantes desarrollen el conocimiento matemático. Según Santos-Trigo (2010) el uso de la tecnología "ofrece la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que incluyen aproximaciones visuales, gráficas, numéricas y algebraicas" (p. 310). También su uso contribuye a expandir y mejorar la forma en como los estudiantes comparten y discuten ideas matemáticas, lo que promueve el aprendizaje colaborativo (Santos-Trigo, 2019). Es decir, los estudiantes pueden usar muros digitales para compartir sus ideas, proporcionar retroalimentación y plantear sus preguntas, esto contribuye a que se extienda la discusión matemática fuera del salón de clases.

También resulta importante incorporar la tecnología en los procesos de resolución de problemas ya que los "desarrollos digitales recientes están dando forma e influyendo en la forma en que las personas y los estudiantes abordan las actividades de resolución de problemas" (Santos -Trigo, 2014a, p. 500). Principalmente se debe a que estos recursos permiten cambiar la forma en como los estudiantes realizan la representación y exploración del problema. Santos-Trigo (2019) establece que:

> El uso de la tecnología brinda oportunidades para que los estudiantes presten atención a actividades que incluyen la reconstrucción y el examen de figuras asociadas con enunciados de problemas, la construcción de modelos dinámicos de tareas, la formulación de conjeturas, la cuantificación de objetos o parámetros de comportamiento, la búsqueda de argumentos matemáticos y la comunicación de resultados (p. 86).

El uso de aplicaciones como GeoGebra (SGD) amplia los recursos con lo que generalmente se cuenta al resolver problemas en un ambiente estático. Ya que las herramientas que ofrece un SGD como GeoGebra permiten construir modelos dinámicos de los problemas y conceptos, realizar exploraciones y diferentes acercamientos hacia los problemas. Santos-Trigo (2007) "destaca que el uso del software de geometría dinámica permite construir una representación del problema en términos de las propiedades de los objetos del problema" (p. 51). Lo que contribuye a la formulación de conjeturas, realizar generalización y formular problemas de extensión. Este software dinámico también puede ser utilizado para la construcción precisa de los elementos básicos de la geometría (puntos, segmentos, rectas, círculos, polígonos, medianas, etc.) y para visualizar el comportamiento de alguna representación del problema (Santos-Trigo & Espinosa-Pérez, 2010).

Además, el uso de GeoGebra también contribuye al proceso de comprensión del problema ya que:

> Brinda oportunidades para que los estudiantes planteen preguntas sobre las formas de seleccionar las posibilidades de la herramienta para representar o reconstruir conceptos o figuras que aparecen en los enunciados del problema (ángulos, pendientes, áreas, perímetros, etc.) y visualizar o rastrear sus comportamientos gráficos (Santos -Trigo, 2020, p. 691).

En este sentido, el proceso de reconstruir la figura del problema o construcción del modelo dinámico permite que los estudiantes interactúen de una manera distinta con los conceptos y establezca conexiones entre ellos.

De igual forma contribuye a la fase de exploración ya que permite "cuantificar los atributos de los objetos (longitudes, ángulos, pendientes, áreas, perímetros, etc.) y visualizar o rastrear sus comportamientos gráficos" (Santos -Trigo, 2020, p. 691). Estos atributos brindan la oportunidad para que los estudiantes puedan analizar el comportamiento de algunos objetos a partir del movimiento de algunos elementos dentro del modelo dinámico, es decir pueden observar el camino o lugar geométrico que describen algunos elementos como puntos, segmentos, etc. En este contexto contribuye a que los estudiantes amplíen y mejoren sus heurísticas para resolver problemas. Según Santos-Trigo (2019a) "el movimiento ordenado, la cuantificación y medición de atributos (medida de ángulos, longitud de segmentos, perímetro, área, etc.), la generación y visualización de lugares geométricos y el uso de deslizadores son algunas heurísticas propias de un sistema de geometría dinámica" (p.10).

Capítulo 2

Marco Conceptual

En este capítulo se presenta el marco conceptual que proporciona bases para el desarrollo e implementación de las actividades del estudio. Se revisa el marco de resolución de problemas Schoenfeld (1985) para caracterizar las soluciones presentadas por los estudiantes y analizar los acercamientos que muestran en las diferentes fases del curso. Al incorporar elementos tecnológicos como el Sistema de Geometría Dinámica y al ser impartido en un escenario en línea es necesario complementar este marco con elementos que relacionen la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales.

2.1 Resolución de Problemas

- El marco presentado por Schoenfeld (1985) permite explicar el éxito o dificultades que un individuo o estudiante muestra al resolver problemas. Además, de que proporciona las herramientas para poder caracterizar el proceso de resolución de problemas, su propuesta incluye cuatro categorías o dimensiones que son:
- Dominio del conocimiento o recursos.
- Estrategias cognitivas o métodos heurísticos.
- Estrategias metacognitivas.
- Sistemas de creencias.

Los recursos son un inventario de conocimientos básicos que el estudiante identifica y activa al momento de resolver problemas (Schoenfeld, 1985). Es decir, es el conjunto de conocimientos matemáticos con los que el estudiante cuenta, incluyen los conceptos y definiciones que maneja, las fórmulas aprendidas, los procedimientos algorítmicos que sabe, las heurísticas o estrategias que ha utilizado, etc. Los recursos se pueden clasificar de la siguiente manera:

1. Conocimiento informal e intuitivo:

   Este conocimiento está relacionado con la forma en cómo los estudiantes interpretan un nuevo conocimiento matemático, es decir es la interpretación que el estudiante crea acerca de un concepto matemático. Existen ocasiones en donde el estudiante crea una falsa concepción o no realiza una correcta interpretación del concepto, esto se debe principalmente a los conocimientos asociados con su diario vivir y a sus experiencias previas.

2. Hechos, definiciones y similares:

   Hechos y definiciones es el conjunto de información o conocimiento que el estudiante tiene a su alcance al momento de resolver un problema. Además, de tenerlo almacenado en su memoria también se requiere que pueda acceder a ellos con facilidad y utilizarlo en el momento adecuado.

3. Procedimientos algorítmicos:

   Los procedimientos algorítmicos vienen a ser todas aquellas fórmulas, construcciones y algoritmos que se utilizan para resolver problemas rutinarios o ejercicios. Generalmente estos procedimientos son enseñados en los salones de clase en las diferentes modalidades y niveles educativos.

4. Procedimientos rutinarios:

   Los procedimientos rutinarios son catalogados como un tipo de técnica que nos permite encontrar el camino que dirige a la solución del problema, pero no especifica cuales son los procedimientos algorítmicos por utilizar

5. Competencias relevantes:

   Las competencias relevantes son un tipo especial de estrategias utilizadas específicamente para resolver problemas específicos, es decir es un procedimiento que el resolutor adopta al resolver problemas particulares. Sin embargo, para su uso es necesario que el estudiante conozca del procedimiento y lo comprenda.

6. Conocimiento de las reglas del discurso en el dominio:

   Este conocimiento está relacionado con la forma en como los estudiantes perciben los contenidos y las reglas matemáticas. Este apartado es importante ya que está relacionado directamente con el uso de la simbología y comprensión de conceptos que son elementos importantes al momento de resolver problemas.

2.2 Estrategias cognitivas o métodos heurísticos

Las Heurísticas son “las reglas de oro para resolver problemas efectivamente. Son estrategias bastante generales para lograr progresos en problemas no familiares o difíciles” (Schoenfeld, 1985, p. 44). Es decir, son estrategias generales que nos permiten encontrar el camino para la solución de problemas difíciles o para los cuales no conocemos una fórmula. Al ser un elemento importante en la resolución de problemas, nos surge la interrogante de ¿cómo los estudiantes pueden aprender las heurísticas? Ante este cuestionamiento Polya (1945) estipula que la construcción de las heurísticas depende en gran medida de la experiencia del estudiante al resolver problemas y de la observación de los métodos usados por otros individuos. Sin embargo, el hecho de que los estudiantes conozcan muchas heurísticas no garantiza que puedan emplearlas al momento de resolver problemas. Como lo señala Santos (2007) "no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias, sino que es importante que participe en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas" (p. 56). Esto significa, que no basta con que el estudiante conozca las estrategias, sino que es necesario que el estudiante se exponga a situaciones en donde deba aplicarlas en la solución de problemas. Para que los estudiantes tengan una mayor experiencia en el uso de heurísticas Schoenfeld (1985) propone actividades de resolución de problemas que se pueden llevar a cabo en el aula, con el fin de propiciar situaciones semejantes a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso de resolución de problemas.

Algunos ejemplos de heurísticas propuestos por Polya son: realizar analogías (considerar problemas relacionados o parecidos al problema tratado), descomponer y recomponer el problema (trabajar el problema analizando cada una de las partes por las que se conforma), dibujar una figura, examinar hipótesis, generalizar el problema, trabajar casos particulares del problema, comprobar el resultado, obtener el resultado de diferentes maneras, considerar la utilidad del resultado en otras situaciones, razonar el problema en forma regresiva (considerar el resultado como cierto), trabajar el problema por reducción a lo absurdo y demostración indirecta (establecer la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la afirmación contraria), buscar simetrías en el problema (como partes intercambiables del problema que no modifican su estructura), buscar objetivos particulares (descomponer el objetivo principal en objetivos más específicos), etc.

2.3 Estrategias metacognitivas

Según Santos-Trigo (2014) la metacognición se refiera al "conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema" (p. 69). Es decir, en esta etapa el estudiante debe estar en un constante seguimiento del progreso de la solución lo que incluye realizar una autoevaluación de su proceso, verificación de pasos y toma de decisiones respecto a continuar por el camino elegido o cambiar de estrategia. Según Schoenfeld (1985) este proceso incluye: “la elaboración de planes, la selección de objetivos y subobjetivos, el seguimiento y la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan, y la revisión o el abandono de los planes cuando las evaluaciones indican que deben tomarse tales medidas” (p. 27).

Podemos atribuir que el éxito o fracaso en el proceso de resolución de problemas depende en gran medida de la implementación de una estrategia de control adecuada, ya que con un buen control los estudiantes pueden aprovechar al máximo sus recursos y resolver problemas difíciles con cierta solvencia y por el contrario cuando no se tiene un buen control los estudiantes pueden presentar dificultades al usar sus recursos y fallar al resolver problemas que tienen a su alcance (Schoenfeld, 1985).

De acuerdo con Santos (2007) las acciones que involucran un control incluyen:

- Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución (fase de entendimiento del problema).
- Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad (fase de diseño).
- Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar algún camino que no esté produciendo resultados (fase de implementación).
- Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida (visión retrospectiva) (p. 60).

2.4 Sistemas de creencias

Esta dimensión se refiere a la forma en cómo el individuo o el estudiante concibe la disciplina. Es decir, las creencias o concepción que el estudiante tenga acerca de las matemáticas y sobre sí mismo influye directamente al momento de seleccionar el camino o la técnica usada para resolver el problema. Ante esta situación surge la pregunta ¿cómo los estudiantes adquieren sus creencias? Schoenfeld (1992) establece que las creencias que los docentes tienen acerca de las matemáticas repercuten directamente en las creencias de sus alumnos. Es decir que las creencias mostradas por los estudiantes provienen en gran medida al tipo de enseñanza que recibe dentro del salón de clases. Los maestros son considerados un ejemplo a seguir dentro del salón de clases, por lo tanto, su forma de concebir las matemáticas, su forma de enseñar, las tareas asignadas, los ejercicios que usa para la clase, los trabajos en grupo y la forma de evaluar influye directamente a las creencias que el estudiante pueda desarrollar. En relación con el tipo de creencias que los estudiantes muestran acerca de las matemáticas, Schoenfeld (1992) documenta las siguientes:

- Los problemas de matemáticas tienen una y sólo una respuesta correcta. Solo hay una forma correcta de resolver cualquier problema matemático, generalmente la regla que el maestro ha demostrado más recientemente a la clase.
- Los estudiantes ordinarios no pueden esperar comprender las matemáticas; esperan simplemente memorizarlo y aplicar lo que han aprendido mecánicamente y sin comprender.
- Las matemáticas son una actividad solitaria, realizada por individuos aislados. Los estudiantes que hayan entendido las matemáticas que han estudiado podrán resolver cualquier problema asignado en cinco minutos o menos.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real.
- La prueba formal es irrelevante para los procesos de descubrimiento o invención (p. 359).

2.4 La resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales

Al incorporar el SGD a la resolución de problemas la tarea del maestro está dirigida a propiciar escenarios en donde se reflexione y discuta acerca del uso de la tecnología, ya que de esta manera el estudiante desarrollará formas de pensamiento dirigidas a la comprensión de conceptos y se enganchará en una reflexión matemática continua (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) presentan un marco que permite planear y organizar actividades matemáticas en donde se promueve que los estudiantes incorporen el uso de un software dinámico al momento de resolver problemas. En otras palabras, se busca potenciar los recursos tecnológicos que se tienen al alcance para favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se presentan las cuatro etapas o fases del marco, las cuales se caracterizan por el conjunto de preguntas que guían la actividad y permiten profundizar en el problema mediante el uso de tecnología.

Comprensión del problema: Esta fase consiste en poder dar sentido a la información brindada en el enunciado, poder identificar los conceptos involucrados, la incógnita y pensar en posibles formas para representar el problema (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Incorporar la tecnología en esta etapa permite la construcción de un modelo dinámico, con el cual se puede plantear un nuevo tipo de preguntas que permitan comprender y dar sentido al problema. Algunas preguntas que pueden guiar este proceso son: ¿Cuáles son los conceptos involucrados?, ¿Cómo se relacionan los datos con la incógnita?, ¿Cómo puedo reconstruir la figura?, ¿Qué conceptos se pueden utilizar para construir la figura?, ¿Cómo se puede crear un modelo dinámico que contenga los elementos del enunciado?, ¿Existe condiciones que deben cumplirse al momento de crear el modelo dinámico?, ¿Se puede hacer otra representación?, ¿Es posible construir otro modelo dinámico del problema?

Exploración**:** En esta fase es importante utilizar la movilidad que nos brinda la herramienta para poder ampliar los casos para los que se puede analizar el problema, ya que se espera que el estudiante explore las propiedades de la figura y plantee conjeturas. Las preguntas que guían este proceso son: ¿Cómo puedo mover ordenadamente algunos parámetros dentro del modelo?, ¿Se puede establecer algunas relaciones al mover algunos elementos?, ¿Es visible algún lugar geométrico?, ¿Observas algún elemento o propiedad que requiera la atención?

Búsqueda de distintos acercamientos a la solución: El objetivo de esta fase es utilizar las exploraciones realizadas anteriormente para encontrar múltiples soluciones al problema. Se promueve a que el estudiante demuestre sus conjeturas y presente varias aproximaciones usando diferentes enfoques y conceptos matemáticos. Las preguntas que guían este proceso son: ¿Qué estrategias permiten llegar a la solución?, ¿Cuál acercamiento nos permite encontrar la solución?, ¿Existen otros caminos para llegar a la solución?, ¿Puedes presentar una solución argumentada?

Integración y reflexiones: En esta fase, se pretende que el estudiante reflexione acerca de los procesos implicados en las distintas etapas de la resolución de problemas. Las preguntas que guían esta fase son: ¿Cuáles fueron las principales ideas que ayudaron a solucionar el problema?, ¿Qué estrategias le sirvieron para llegar a la solución del problema?, ¿Cuáles fueron las estrategias más efectivas y cómo descartó las que no lo eran?, ¿Qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema?

El incorporar las tecnologías digitales a la resolución de problemas permite que los estudiantes puedan representar y explorar la disciplina de una forma nueva para ellos. Además, permite que los estudiantes puedan tener un medio de comunicación para compartir y discutir sus soluciones (Santos-Trigo, 2019). Incorporar un sistema de geometría dinámica (SGD) como GeoGebra permite que los estudiantes puedan realizar exploraciones, plantear conjeturas y crear un modelo dinámico de los problemas.

Con el fin de caracterizar el uso de tecnologías digitales al resolver problemas Santos-Trigo (2019) identifica cuatro tipos de tareas que permiten profundizar en las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que surgen en los enfoques de resolución de problemas mediados por tecnología.

a) Centrarse en las figuras: En este tipo de tarea utiliza al SGD (GeoGebra) para reconstruir la figura que describe el enunciado del problema o para hacer la imagen que acompaña al problema. No obstante usar GeoGebra para esta tarea permite que los estudiantes puedan identificar y explorar conceptos matemáticos necesarios para la construcción de la figura, ya que es necesario reflexionar acerca de cómo y qué propiedades son importantes para realizar la representación. Además, permite que el estudiante establezca conexiones con otros conceptos matemáticos, contribuye a la comprensión del problema y a la formulación de problemas de extensión.
b) Tareas de investigación: Este grupo de tareas tiene como finalidad motivar a los estudiantes a transformar el problema original. Es decir, no solo se promueve que el estudiante encuentre la solución al problema, sino que también pueda realizar una reflexión matemática que dé lugar a extender el problema y conectarlo con otros. Un punto de partida en esta tarea es el análisis del enunciado del problema, ya que permite que el estudiante encuentre relaciones matemáticas y puedan extender el problema.

c) Tareas de variación: Este grupo de tareas tiene como finalidad que el estudiante represente y analice problemas que involucren fenómenos de variación mediante un modelo gráfico. Es decir, los estudiantes pueden hacer uso de un SGD para construir una representación gráfica del fenómeno de variación sin necesidad de expresar el modelo algebraico. Por ejemplo, los problemas de optimización de Cálculo pueden ser abordados desde GeoGebra, ya que al definir algunas relaciones entre los elementos del problema podemos generar un lugar geométrico que describe el fenómeno y permite encontrar la solución.

d) Configuraciones dinámicas: En este tipo de tarea se refiere a la construcción de una configuración dinámica a partir de incorporar elementos matemáticos como puntos, rectas, triángulos, círculos, etc. El objetivo es realizar exploraciones de los elementos incorporados analizando sus propiedades, lo que da lugar a la formulación de preguntas o conjeturas, que a su vez surge la necesidad de demostrar. Este proceso permite plantear problemas o encontrar formas de validar las relaciones matemáticas encontradas. Es decir que en estas tareas no existe un problema o pregunta inicial, sino que se usa la movilidad de los elementos incorporados para poder plantear conjeturas, establecer relaciones y plantear nuevos problemas.

Existen problemas que pueden servir para trabajar cualquiera de las cuatro categorías. Es decir, el estudiante puede enfocarse en desarrollar una o más de estas tareas cuando se enfrentan a un problema mediado por las herramientas tecnológicas, en específico GeoGebra. Algunos problemas de geometría tienen esta característica, ya que el estudiante puede identificar y explorar conceptos matemáticos cuando realiza la construcción de la figura, de igual forma dan lugar a realizar generalizaciones y plantear problemas de extensión, además se puede crear un modelo dinámico del problema y en algunos casos se pueden convertir en problemas de optimización de cálculo.

2.5 Caracterización de algunas heurísticas propias de los ambientes de geometría dinámica

El dinamismo que proporciona una herramienta como el Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) permite que los estudiantes tengan acceso a un mundo nuevo de experiencia y les permita resolver problemas en un ambiente dinámico diferente al que están acostumbrados. La medición, el rastro y el arrastre son ejemplos de heurísticas esenciales en los procesos de resolución de problemas mediado por GeoGebra. El arrastre o movimiento controlado se observa cuando el movimiento depende de objetos específicos por ejemplo cuando una figura se mueve a medida que un punto se traslada sobre una trayectoria definida como una recta o circunferencia. La medición por su parte permite que el estudiante pueda observar y estudiar los objetos matemáticos desde el punto de vista de sus propiedades y no de sus formas, es decir pueden descubrir relaciones matemáticas que son difíciles de percibir en acercamientos algebraicos o geométricos en un medio estático. El rastro nos permite observar el recorrido o lugar geométrico que describen algunos objetos, resultado del movimiento de objetos dentro de una configuración dinámica.

Capítulo 3

Metodología de investigación

En este capítulo se presentan los elementos metodológicos asociados con el diseño e implementación del estudio. Se describe la naturaleza cualitativa de la investigación, los participantes, se detallan las sesiones de clases, las actividades extra-clase (tareas), los instrumentos utilizados para la recolección de datos y otros elementos importantes del análisis.

3.1 Naturaleza de la investigación

Esta investigación es de carácter cualitativo y se trata de documentar el desempeño de los estudiantes en un curso de resolución de problemas impartido en un escenario en línea, es decir, se hizo un seguimiento individual a lo largo del curso, haciendo énfasis en la forma en que cada participante trabajó en las actividades del curso, la forma en como resolvían problemas y las heurísticas que utilizaron.

3.2 Participantes

En el estudio participaron tres estudiantes que cursaban un seminario de post grado (resolución de problemas) del programa de maestría en Matemática Educativa. En la siguiente tabla se muestra información concerniente a los participantes de la investigación (Tabla 3.1).

Tabla 3.1. Formación y experiencia profesional de los participantes en la investigación

Nombre	Formación Profesional	Experiencia Profesional
Vera	Licenciada en matemáticas	Asesorías de secundaria y preparatoria
Carmen	Licenciatura en Matemáticas aplicadas	Secundaria y Universidad (Clases de cálculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales)
Hugo	Licenciado en física y matemáticas	Clases frente a grupo: medio superior y superior Asesorías en todos los niveles. Desde segundo grado de primaria.

3.3 Descripción del curso y tareas

Los datos que se reportan provienen de un curso de maestría en matemáticas educativa. La característica relevante de este curso es que era impartido en un escenario en línea sincrónico, mediado por herramientas tecnológicas como: Zoom usado para la videoconferencia, Teams y correo electrónico utilizado para la comunicación y GeoGebra utilizado específicamente para trabajar problemas matemáticos.

El objetivo de este curso de maestría era dar una visión general acerca de la educación matemática haciendo énfasis en los programas de investigación, los resultados importantes en la disciplina y que los estudiantes conocieran de las ideas del marco de resolución de problemas y del uso de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. De acuerdo con el programa de maestría los contenidos del curso están organizados de la siguiente manera:

1. Educación matemática como disciplina: Este apartado tenía como finalidad que los estudiantes discutieran las siguientes preguntas: ¿Qué es la educación matemática? ¿Cuáles son sus características y cómo se contrasta con otras disciplinas? ¿Cómo se realiza investigación en la disciplina? ¿Cómo se forma un profesional de la educación matemática? ¿Dónde se encuentra información y dónde se publican los resultados concernientes a la materia? ¿Cómo se construye un problema de investigación en la disciplina?
2. Resolución de problemas: en este apartado se pretendía que los estudiantes conocieran de los programas de investigación de la disciplina por lo que tomó como referencia el marco de resolución de problemas de Alan Schoenfeld. También se promovía que los estudiantes hicieran uso de herramientas tecnológicas al momento de resolver problemas, en específico hacer uso del sistema de geometría dinámica (GeoGebra). Con esto se pretendió promover una discusión y reflexión sobre el empleo de diversas tecnologías digitales en el desarrollo del conocimiento de los estudiantes y la creación de ambientes que permita que los estudiantes desarrollen pensamiento matemático consistente con el quehacer de la disciplina.
3. Programa internacional de evaluación de los alumnos (PISA). El objetivo fue que los estudiantes analizaran y discutieran los ítems y los resultados de la prueba

internacionales, además de reflexionar sobre su importancia del contexto nacional e internacional.

4. Análisis y estudio de tesis del área. En este apartado se pretendía que los estudiantes obtuvieran una visión general de la estructura de una tesis de investigación en el área, en particular se pretendía que las tesis presentadas y discutidas en clases estuviera relacionado con la resolución de problemas y el uso de tecnología.

Sesiones de clase

Se llevaron a cabo 32 sesiones del seminario de resolución de problemas, dos cada semana con una duración de 2 horas cada una, haciendo un total de 64 horas en el semestre. Cada una de las sesiones se impartió en un escenario en línea, haciendo uso de medios tecnológicos como Zoom y plataformas como Teams. Las sesiones estaban dedicada a estudiar temas de interés de la agenda de la matemática educativa y de la resolución de problemas mediada por un sistema de geometría dinámica (GeoGebra).

Tareas

Las tareas fueron un elemento importante del curso, ya que nos brindaron información acerca de la forma en cómo los estudiantes asimilaban los contenidos y cómo resolvían problemas apoyados en un sistema de geometría dinámica (GeoGebra). Es decir, las tareas fueron un instrumento que permitió hacer un seguimiento individual de los estudiantes a lo largo de curso. Las tareas asignadas se dividieron en 2 categorías: una dedicada a la resolución de problemas en donde no se exigía el uso de la tecnología y tenía como finalidad observar cómo los estudiantes utilizaban sus recursos al resolver los problemas y las estrategias utilizadas al resolverlos; por otra parte, interesaba que los estudiantes reflexionaran sobre la importancia de trabajar problemas no rutinarios. La segunda categoría estaba dedicada a resolver problemas donde se promovía el uso de la tecnología y tenía como finalidad observar el avance de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas mediados por la tecnología y la apropiación de los contenidos del curso, por tal motivo se presta atención a las exploraciones realizadas por los estudiantes, el planteamiento de conjeturas, los diferentes acercamientos, defensa de sus conjeturas y formulación de problemas de extensión.

Las instrucciones proporcionadas a los estudiantes para resolver las tareas fueron las siguientes:

- Presentar sus trabajos por escrito (Formato Word)
- Resolver los problemas apoyándose del sistema de geometría dinámica (GeoGebra)
- Plantear preguntas y hacer comentarios

Después de analizar los contenidos y el tiempo destinado para el curso, se acordó organizar los problemas alrededor de tres diferentes fases (fase inicial, fase intermedia y fase final), con el fin de observar el desempeño y evolución de los estudiantes a lo largo del curso, ya que contribuyó a esbozar un perfil personal del estudiante en donde se vea reflejado la comprensión del problema, la utilización de heurísticas, los recursos empleados, formulación de problemas de extensión y la apropiación de GeoGebra en la resolución de problemas.

3.4 Fase inicial

Se estableció que la fase inicial comprendería las primeras cinco semanas del curso de resolución de problemas y se aplicarían cinco problemas no rutinarios cuya solución requería el uso de conceptos estudiados en un primer curso de cálculo (Selden et al., 1994). Para fines de este estudio concebimos a los problemas no rutinarios como aquellos problemas en donde los estudiantes no conocen un método o un camino para poder llegar a la solución, por lo que se requiere que los estudiantes establezcan relaciones entre las definiciones, conceptos y técnicas de una manera creativa y nueva para ellos (Selden et al., 1994). Una de las claves para poder resolver estos problemas consiste en la comprensión e interpretación de los enunciados del problema, ya que de esta forma se facilita identificar los contenidos que están relacionados, además se requiere que el estudiante tenga dominio de su conocimiento matemático y pueda relacionarlos.

Dado que el tipo de problemas planteados en esta fase son destinados para estudiantes universitarios que hayan cursado la asignatura de cálculo, se espera que los estudiantes de maestría cuenten con los recursos necesarios para resolver los problemas. Cabe resaltar que para esta fase no era obligatorio el uso de tecnología, pero tampoco se prohibió su uso. Los problemas analizados fueron tomados de la tarea 1 asignada al inicio del curso.

A continuación, se presenta la tabla 3.2 que contiene los cinco problemas, las instrucciones de la tarea, los objetivos y los elementos considerados para el análisis.

Tabla 3.2. Elementos para el análisis fase inicial

	Instrucciones	Objetivo de la tarea	Elementos para observar en el análisis.
1. Encuentra valores para a y b tales que la línea $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica $f(x) = bx^2$ en el punto en que $x = 3$. 2. ¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ alguna raíz entre *-1* y *0*? ¿Por qué sí o por qué no? 3. Sea $f(x) = \begin{cases} ax, & si\ x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & si\ x > 1 \end{cases}$. Encuentra *a* y *b* tales que *f* es diferenciable en *1*. 4. Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o explica porque no existe solución. 5. ¿Hay algún a tal que $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}$ existe? Explica tu respuesta.	Resolver los 5 problemas no rutinarios presentes en el artículo de Selden et al. (1994)	Resolver problemas no rutinarios en donde se requiere establecer conexiones entre definiciones y conceptos.	Identificar los recursos utilizados por los estudiantes al resolver problemas no rutinarios. Identificar las heurísticas presentes en las soluciones (si las hay). Observar las dificultades y errores presentes en sus soluciones.

Una vez presentado el análisis de los problemas y después de esbozar el perfil de cada estudiante, se presentará una aproximación al problema mediada por GeoGebra, ya que nos permitirá identificar las ideas matemáticas que intervienen en la solución. La finalidad de presentar esta aproximación es promover la implementación de la tecnología en la resolución de problemas no rutinarios ya que su uso permite que los estudiantes puedan observar las relaciones establecidas entre las diferentes definiciones, comprender los teoremas, aclarar dudas y observar nuevos resultados que no se pueden apreciar en un medio estático.

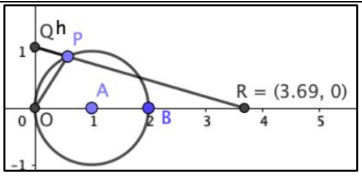
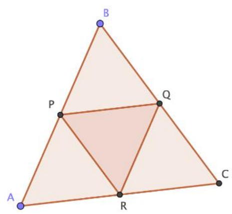
3.5 Fase intermedia

La fase intermedia abarcaría cinco semanas a mediados del curso de resolución de problemas y se aplicarían dos problemas de geometría, cabe mencionar que para estas instancias del curso se estudiaba el marco de resolución de problemas de Alan Schoenfeld y se iniciaba a promover el uso de GeoGebra como herramienta que permite el desarrollo del conocimiento matemático. Por tal motivo los problemas seleccionados tienen la característica de que son problemas que pueden ser abordados desde GeoGebra. Es decir, son problemas seleccionados intencionalmente para promover la creación de un modelo dinámico del problema, ya que así se pueden establecer nuevas relaciones entre los datos y la incógnita, plantear conjeturas, comprobar hipótesis, encontrar otros cercamientos o caminos a la solución, realizar generalizaciones, plantear problemas de extensión, etc.

Es importante considerar que en esta etapa del curso los estudiantes estaban familiarizándose con el uso de GeoGebra, la creación de modelos dinámicos y el marco de resolución de problemas, por lo que se considera importante que los estudiantes muestren evidencia de todos los elementos presentados anteriormente y de un dominio de los comandos de GeoGebra. Los problemas analizados fueron tomados de las tareas 2 y 3 asignados a mediados del curso. A continuación, se presentan la tabla 3.3 que contiene los dos problemas geométricos trabajados en esta etapa, las instrucciones de la tarea, los objetivos y los elementos considerados para nuestro análisis.

Tabla 3.3. Elementos para el análisis fase intermedia

	Instrucciones	Objetivo de la tarea	Elementos para observar en el análisis.
Tarea N 2, pregunta 11 6. En la figura se dibuja un círculo con centro en (1, 0) y radio 1. Selecciona un punto P sobre la circunferencia y un punto Q sobre el eje Y de tal manera que OP = OQ. Trace la recta QP que interseca al eje X en el punto R. ¿Pruebe que, si P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha, ¿existe un límite para la posición de R? Justifique su repuesta.	Responda todas las preguntas y cita las fuentes que consultes al elaborar el ensayo.	Promover la búsqueda de información en páginas oficiales. Hacer un escrito en el que se problematice algunos aspectos relacionados con el teorema de Pitágoras Resolver el problema haciendo uso del sistema de	Identificar los recursos utilizados por los estudiantes al resolver problemas y al realizar las exploraciones en GeoGebra. Identificar las preguntas plasmadas en su trabajo Identificar las heurísticas presentes en las

		geometría dinámica y poniendo en práctica los elementos vistos en clases. Es decir, formulación de preguntas, identificación de recursos, planteamiento de conjeturas, creación de un modelo dinámico y presentar múltiples aproximaciones.	soluciones (si las hay). Determinar cómo utilizan GeoGebra para resolver el problema. Observar las dificultades y errores presentes en sus soluciones. Analizar el modelo dinámico del problema presentado por los estudiantes. Analizar las múltiples aproximaciones presentadas al problema.
Tarea N 3, apartado 3 7. La figura representa un triángulo equilátero con lado 6 cm  a) Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC y CA, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR? b) Suponemos ahora que P, Q y R divide a los lados en: AR = 2; RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2 & PA = 4, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR? c) ¿Qué perímetro de los casos a y b es mayor? d) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?	Durante la clase se hizo hincapié en el uso de la tecnología para resolver el problema.		

3.6 Fase final

La fase final comprendería las últimas cinco semanas del curso de resolución de problemas y únicamente se aplicaría un problema de geometría. Debemos mencionar que para estas instancias del curso ya había finalizado el estudio del marco de resolución de problemas y los estudiantes tenían más experiencia usando GeoGebra. El problema seleccionado en esta fase fue tomado de la tarea 4 asignada en la parte final del curso y su principal característica es que podía abordarse con GeoGebra. Es decir, daba lugar a construir un modelo dinámico, realizar exploraciones, generalizar resultados y formular problemas de extensión. La tabla 3.4 contiene el problema 8, las instrucciones de la tarea, los objetivos de la asignación y los elementos considerados para el análisis.

Tabla 3.4. Elementos para el análisis fase final.

	Instrucciones	Objetivo de la tarea	Elementos para observar en el análisis.
Tarea N 4, apartado 3 8. Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son $A\ (0,0), B\ (5,0)$ y $C\ (0,10)$. El punto A se refleja sobre el segmento BC y se obtiene A'. Encuentre las coordenadas del punto A'. Sea B' el punto reflejado de B sobre AC y C' el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente. Encuentre el área del triángulo $A'B'C'$. a) Encuentre las coordenadas del punto A'. b) Sea B' el punto reflejado de B sobre AC y C' el punto reflejado de C con respecto BC respecti vamente. Encuentre el área del triángulo $A'B'C'$.	Resuelva los siguientes problemas y formule otros problemas relacionados que resulten de la construcción y exploración del modelo dinámico. Identifique los conceptos y estrategias que resulten importantes en la resolución de los problemas.	Presentar un modelo dinámico del problema que permita realizar exploraciones, el planteamiento de conjeturas, generalizaciones y formulación de problemas de extensión. Además de presentar múltiples acercamientos.	Identificar los recursos utilizados por los estudiantes al resolver problemas y al realizar las exploraciones en GeoGebra. Analizar las heurísticas presentes en las soluciones (si las hay). Analizar en qué medida utiliza la herramienta para resolver el problema. Observar las dificultades y errores presentes en sus soluciones. Analizar el modelo dinámico. Analizar las diferentes aproximaciones y las generalizaciones. Analizar los problemas de extensión.

Capítulo **4**

Análisis y discusión de resultados

En este capítulo se presenta y analiza el desempeño que muestran los tres participantes del estudio al resolver problemas asignados en las diferentes fases del curso y se destaca los procesos de solución que exhiben con el uso de GeoGebra como principal herramienta tecnológica. Principalmente interesa identificar los recursos y las heurísticas utilizadas en la construcción de los modelos y los procesos de solución, así mismo interesa documentar los caminos de apropiación de la herramienta de los estudiantes durante el desarrollo del curso. Se presenta, en cada fase, una tabla resumen que incluye los recursos utilizados por los estudiantes, las heurísticas y los errores que presentaron al resolver cada problema.

En el Apéndice se presenta a detalle las soluciones presentadas por los estudiantes, el análisis de los problemas, las tareas asignadas y el temario de la signatura.

4.1 Análisis Fase Inicial

Esta fase consta de 5 problemas, pero en este apartado únicamente se presenta el análisis del problema 1, ya que se considera que este problema brinda elementos para poder ejemplificar la forma en cómo los estudiantes resolvieron los problemas y nos permite crear un perfil personal enfocado en la forma en cómo presentan la solución, los recursos y heurísticas utilizadas. Además, permite detectar algunos elementos importantes del marco de resolución de problemas como ser la formulación de preguntas y conjeturas. También se presenta una tabla que resume las soluciones reportadas del problema 1 al 5, haciendo énfasis en los recursos usados, las heurísticas y los errores que comenten al resolver el problema.

Como complemento a esta información en el apéndice C se presenta el análisis de los cuatro problemas restantes que también son parte importante de los resultados, por lo que se estará citando algunos elementos que complementen el análisis. Nótese que está fue la primera tarea asignada en el curso por lo que no se exigió el uso de GeoGebra para resolver problemas. El análisis se divide en la etapa de comprensión del problema e implementación del plan.

Problema 1: Encuentra valores para a y b tales que la línea $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica $f(x) = bx^2$ en el punto en que $x = 3$.

Comprensión del problema

El significado de la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente a la función f(x) en un punto fue importante en la resolución de este problema, ya que permitía conectar el significado geométrico de la derivada de la función f(x) con la pendiente de la recta dada en el punto $(3, f(3))$. En este caso los tres estudiantes hacen uso de la esta interpretación de la derivada y lo utilizan para encontrar la solución al problema. En la Figura 1, Figura 2 y Figura 3 se aprecia un fragmento de la solución en donde los estudiantes establecen la relación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente.

> Evaluando en *f* en *x=3* obtenemos *9b* y recordando que la derivada es la pendiente de la recta tangente, entonces se satisface que *f'(x)=2bx*, de donde se sigue que la recta tangente a *f* en el punto *(3,9b)* tiene

Figura 1. Carmen usa la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto.

> Nótese que $f'(3) = 2b(3) = 6b = m_f$
> Representa la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de f(x) en el punto $(3, f(3))$

Figura 2. Hugo usa la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto.

> Se debe encontrar valores de a y b de tal forma que la línea dada sea tangente a $f(x) = bx^2$, para ello primero calculemos la primera derivada de $f(x)$ la cual es la pendiente de la recta tangente.

Figura 3. Vera usa la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto.

Nótese que los tres estudiantes comprendieron el enunciado del problema y pudieron establecer la relación entre la definición de derivada y la pendiente de la recta tangente a la función. En esta etapa no hay evidencia de la formulación de conjeturas procedentes del análisis de un modelo dinámico, ya que solo presentan los procedimientos algorítmicos necesarios para encontrar la solución al problema.

Implementación de un plan de solución

Vera y Hugo presentan esencialmente la misma solución con pequeñas variaciones de estilo, ver Figura 4 y Figura 5. Su procedimiento se resume a determinar que 6b es la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = bx^2$ que pasa por el punto $(3, f(3))$. Posteriormente identifican la pendiente en la ecuación $y = \frac{a-2x}{3}$. Teniendo estos elementos establecen la igualdad entre las pendientes obteniendo la ecuación $6\mathrm{b} = -\frac{2}{3}$ que les permite determinar el valor de b y posteriormente el valor de a.

Nótese que $f'(3) = 2b(3) = 6b = m_f$

Representa la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de f(x) en el punto $(3, f(3))$

Por otra parte, de la ecuación de la recta $2x + 3y = a$ se tiene que su pendiente es

$$m_l = -\frac{2}{3}$$

De tal forma que, para la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de la función en el punto $(3, f(3))$, debe ocurrir

$$m_f = m_l$$

En consecuencia

$$6b = -\frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{1}{9}$$

Entonces $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

A su vez, debe ocurrir que $(3, f(3)) = (3, -1)$ también sea un punto sobre la recta, por lo que sustituyendo se tiene

$$2x + 3y = a$$
$$2(3) + 3(-1) = a$$
$$6 - 3 = a$$
$$3 = a$$

De donde **se concluye que los valores requeridos para que ocurra lo esperado son**

$$\boldsymbol{a = 3}$$
$$\boldsymbol{b = -\frac{1}{9}}$$

Figura 4. Solución de Hugo.

Se debe encontrar valores de a y b de tal forma que la línea dada sea tangente a $f(x) = bx^2$, para ello primero calculemos la primera derivada de $f(x)$ la cual es la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = 2xb \cdots (1)$$

Ahora reescribamos la ecuación de la línea en términos de y

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{a}{3} \cdots (2)$$

Como lo que se quiere calcular es la recta tangente en el punto donde $x = 3$, hay que evaluar a (1) en este punto.

$$f'(3) = 2(3)b = 6b \cdots (3)$$

E igualar con la pendiente de (2), es decir,

$$6b = -\frac{2}{3} \cdots (4)$$

Despejando b de (4) se tiene que

$$b = -\frac{2}{3(6)} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Para encontrar el valor de a primero hay que encontrar el valor de y cuando $x = 3$, para ello basta con sustituir el valor de x y b en $f(x) = bx^2$, lo cual da lo siguiente:

$$f(3) = -\frac{1}{9}(3)^2 = -\frac{1}{9}(9) = -1 \cdots (5)$$

Así $(x, y) = (3, -1)$, sustituyendo estos valores en $2x + 3y = a$ se tiene que

$$2(3) + 3(-1) = a$$
$$3 = a$$

Por lo que $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica de $f(x) = bx^2$ cuando $a = 3$ y $b = -\frac{1}{9}$

Figura 5. Solución de Vera.

Vera y Hugo demuestran dominio de los recursos de cálculo que el problema demanda y habilidad para realizar los procedimientos algorítmicos. Además, reportan una solución clara y ordenada en donde siguen un procedimiento sistemático hasta encontrar la solución del problema. Estos elementos son característicos de una aproximación realizada en lápiz y papel, ya que únicamente hay evidencia de los procedimientos algorítmicos.

Por otro lado, la solución de Carmen es diferente a la reportada por sus compañeros, ya que, representa una visión más geométrica que algebraica, porque al encontrar $y = 3b(2x - 3)$ genera una familia de rectas tangentes a la función $f(x) = bx^2$ en el punto $(3,9b)$. Pretendía encontrar el valor de a y b que garantice que la recta $y = 3b(2x - 3)$ y la recta $y = -\frac{2x}{3} + \frac{a}{3}$ sean la misma. Cuando Carmen establece la ecuación $-\frac{2x}{3} = 6bx$ garantiza que las rectas $y = 3b(2x - 3)$ y la recta $y = -\frac{2x}{3} + \frac{a}{3}$ serán paralelas, es decir tendrán la misma pendiente y cuando establece la ecuación $\frac{a}{3} = -9b$ establece que ambas rectas deben coincidir. En la Figura 6 se observa la solución presentada por Carmen.

Evaluando en *f* en *x=3* obtenemos *9b* y recordando que la derivada es la pendiente de la recta tangente, entonces se satisface que *f'(x)=2bx*, de donde se sigue que la recta tangente a *f* en el punto *(3,9b)* tiene pendiente *f'(3) =6b*, por lo que la ecuación de la recta es *y=6b(x-3) +9b=3b(2x-3).* Recordando que la recta tangente es *2x+3y=a*, la cual es equivalente a $y = \frac{a-2x}{3}$, de donde debe satisfacerse:

$$6bx = -\frac{2x}{3} \Rightarrow b = -\frac{1}{9} \quad \text{y} \quad \frac{a}{3} = -9b \Rightarrow a = -27b = \frac{27}{9} = 3.$$

Entonces la recta tangente a $f(x) = -\frac{x^2}{9}$ en *x=3* es *2x+3y=3*.

Figura 6. Solución de Carmen.

En la solución reportada por Carmen se puede observar que tiene dominio de los recursos que el problema demanda, lo que le permitió encontrar una solución aplicando un procedimiento más geométrico que algebraico. Al analizar todas las soluciones reportadas por Carmen (apéndice C) se puede establecer que su concepción de resolver problemas es presentar una solución corta y precisa, dejando evidencia de solo los procedimientos algorítmicos que le permiten resolver el problema.

Un elemento que se puede destacar de la solución de Vera y Hugo es que presentan una reflexión sobre lo que implicó resolver el problema no rutinario. En la Figura 7 vemos que la reflexión de Vera gira en torno a los ejercicios que los estudiantes están acostumbrados a resolver en las clases de cálculo y las dificultades que implica resolver problema no rutinario. Aunque esta reflexión también puede interpretarse como las dificultades que Vera presentó al resolver el problema.

Reflexión: Comúnmente los problemas que se resuelven en los primeros cursos de cálculo tienen situaciones específicas para calcular la tangente de funciones en puntos exactos, pero en este problema se pide encontrar valores de a y b que hagan que la ecuación dada sea tangente a la gráfica de la función que se presenta en un punto específico, lo que se sale de lo que normalmente se resuelve en estos cursos.

Figura 7. Reflexión presentada por Vera.

La reflexión de Hugo está enfocada a discutir por qué los estudiantes de la investigación de Selden et al. (1994) prefieren usar recursos de geometría analítica para resolver este problema y dejan de un lado los recursos de cálculo. Su hipótesis establece que los estudiantes tienen mejor dominio de los recursos de geometría analítica con respecto a los de cálculo y por ende prefieren abordar el problema con estos recursos, ver Figura 8. Debemos señalar que Hugo y Vera presentan esta reflexión en cada una de las soluciones de los problemas de esta fase inicial, por lo que no se hará mención en todos los problemas, para mayor referencia ver las soluciones en el apéndice B.

REFLEXIÓN:

En las formas de abordar el problema se muestra una tendencia marcada al uso de los conocimientos en geometría analítica como herramienta principal, en contraste con las herramientas de calculo que podrían dar solución rápida al problema. Si bien la forma de abordar el problema con las herramientas de geometría analítica no es despreciable, es claro que las herramientas de cálculo son mejores para abordar este y cada uno de los siguientes problemas. Una razón posible para la cual los alumnos hayan procedido de tal forma es que los alumnos acababan de pasar por el curso de cálculo (no me queda claro si fue así o cuanto tiempo habría pasado desde que aprobaron el curso), por lo que las habilidades de uso de las herramientas del mismo curso aún no habían sido concretadas, en contraste con las herramientas de geometría analítica que ya habían cursado al menos hace 6 meses.
Otra posible explicación podría ser que concretar el uso de herramientas de variación (cálculo) requiere de habilidades particulares como la solución de "problemas algebraicos no rutinarios".

Figura 8. Reflexión presentada por Hugo.

Hugo también presenta un apartado en donde establece los contenidos necesarios para resolver el problema y plasma algunas preguntas que sirvieron de guía para encontrar el camino a la solución del problema. Estos elementos permiten apreciar que Hugo está reflexionando sobre el proceso que realiza al resolver problemas y está viendo los problemas desde otra perspectiva al plantear preguntas de los conceptos que se relacionan, ver Figura 9. Es importante mencionar que este apartado únicamente lo presenta Hugo y se hace presente en cada una de las soluciones de los problemas de esta fase inicial, para mayor referencia ver las soluciones de Hugo en el apéndice B.

CONOCIMIENTOS, HABILIDADES O PREGUNTAS REQUERIDOS PARA LA SOLUCIÓN:

- Concebir a una recta tangente y a la derivada de una función como objetos íntimamente relacionados a través de la representación de la derivada y la pendiente de la recta.
- ¿Cuál es la derivada de la función? ¿Qué representa dicha derivada en relación con una recta tangente?
- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- ¿En qué punto de la función la recta es tangente? ¿Ese punto que pertenece a la función, también pertenece a la recta? ¿por qué?

Figura 9. Hugo plantea algunas preguntas.

Conclusiones del análisis de la fase inicial

El análisis de la fase inicial permite crear un perfil personal de los estudiantes haciendo énfasis en como conciben a la resolución de problemas, la forma en como presentan la solución, uso de heurísticas, dominio de los recursos, etc. Para mayor referencia ver el análisis de los problemas del 2 al 5 en el apéndice C.

Para la fase inicial Carmen demostró habilidad para realizar los procedimientos algorítmicos y dominio de las definiciones de cálculo y álgebra que los problemas demandan, por lo que se considera que cuenta con los recursos para resolver los problemas de esta fase. Al no haber evidencia del uso de tecnología las heurísticas que resaltan son las utilizadas en un medio estático de resolución de problemas. Su concepción de resolver problemas es presentar una aproximación corta y clara en donde las conjeturas vienen precedidas de la interpretación de los datos y el análisis de la figura del problema, además no hay evidencia de todo el proceso que realizó antes de encontrar la solución, es decir no hay evidencia de las preguntas que se formuló, la información que consultó, sus aproximaciones fallidas o de las dificultades que enfrentó para encontrar la solución.

En la fase inicial Vera reporta soluciones con procedimientos sistemáticos y claros que le permitieron encontrar la solución a los 5 problemas, demostrando habilidad para realizar los procedimientos algorítmicos que el problema demanda y dominio de las definiciones de cálculo. Al igual que Carmen concibe que resolver problemas es presentar una aproximación corta y ordenadas. En sus aproximaciones tampoco hay evidencia del uso de tecnología por lo que sus conjeturas surgieron del análisis de la figura del problema y las heurísticas utilizadas son propias de un medio estático. Un elemento que podemos resaltar de su solución es la reflexión que presenta al final de cada problema, las cuales giran en donde en torno al tipo de problemas que los estudiantes resuelven dentro del salón de clases y la dificultad que conlleva resolver problemas.

En la fase inicial Hugo demostró un mejor desempeño que sus compañeras, ya que no presenta dificultad para establecer las relaciones entre los conceptos algebraicos y de cálculo. Sus aproximaciones destacan por ser sistemáticas y precisas dejando en evidencia que domina los procedimientos algorítmicos. A pesar de que su concepción de resolver problemas es presentar soluciones cortas podemos destacar que presenta un apartado en donde establece los contenidos necesarios para resolver el problema y plasma algunas preguntas que sirvieron de guía para encontrar la solución del problema y que permite apreciar la forma en cómo esta relacionando los conceptos matemáticos.

También presenta una reflexión al final de cada problema la cual está enfocada en discutir los recursos que los estudiantes necesitan para resolver los problemas y los motivos por los cuales los estudiantes de la investigación de Selden et al. (1994) deciden abordar los problemas con recursos geométricos o de álgebra y no con elementos del cálculo.

Tabla 4.1. Resumen de la solución del problema 1.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen	Procedimientos algorítmicos: Calcular la derivada Evaluar funciones Despejar variables Resolver ecuaciones lineales Encontrar una recta tangente a una parábola Fórmula: Ecuación punto-pendiente Hechos y definiciones: Definición de derivada Definición de rectas paralelas y tangentes. Competencia relevante: Concebir la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto. Establecer que la recta $y = 3b(2x - 3)$ es tangente a la función $f(x) = bx^2$. Y además es paralela e igual a $y = \frac{a-2x}{3}$			
Hugo y Vera	Procedimientos algorítmicos: Calcular la derivada Evaluar funciones Despejar variables Resolver ecuaciones lineales Hechos y definiciones: Definición de derivada Definición de pendiente Competencia relevante: Concebir la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto.			

Tabla 4.2. Resumen de la solución del problema 2, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen, Hugo y Vera	Procedimientos algorítmicos: Calcular la derivada Evaluar funciones Teorema de la primera derivada Hechos y definiciones: Definición de raíz de una ecuación Definición de una función creciente Competencia relevante: Asociar la primera derivada con el comportamiento de una función.			

Tabla 4.3. Resumen de la solución del problema 3, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen, Hugo y Vera	Procedimientos algorítmicos: Poder calcular la derivada Evaluar funciones Resolver sistemas de ecuaciones Calcular límites Hechos y definiciones: Definición de diferenciabilidad Definición de continuidad Competencia relevante: Reconocer las implicaciones de la diferenciabilidad. Establecer la igualdad de las derivadas laterales.	Concebir el problema como cierto		

Tabla 4.4. Resumen de la solución del problema 4, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen y Vera	Procedimientos algorítmicos: Calcular la primera y segunda derivada Evaluar funciones. Resolver ecuaciones Calcular los puntos críticos de una función. Teorema de la primera derivada. Teorema de la segunda derivada Hechos y definiciones: Definición de punto de inflexión Definición de función creciente Definición de punto critico Definición de punto máximo. Definición de ecuación Competencia relevante: Comprensión del criterio de la primera y segunda derivada	Dividir el problema por grupos.		Las estudiantes presentan dificultad para analizar la función $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ con el uso de elementos del cálculo, ver apéndice B.
Hugo	Procedimientos algorítmicos: Calcular la primera y segunda derivada Evaluar funciones. Resolver ecuaciones Calcular los puntos críticos de una función. Criterio de la primera derivada. Criterio de la segunda derivada Hechos y definiciones: Definición de punto de inflexión Definición de punto critico Definición de punto máximo. Competencia relevante: Comprensión del criterio de la primera y segunda derivada			

Tabla 4.5. Resumen de la solución del problema 5, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen y Hugo	Procedimientos algorítmicos: Dividir polinomios Factorizar polinomios Calcular el límite Calcular el valor numérico de un polinomio. Hechos y definiciones: Definición de divisibilidad Competencia relevante: Determinar que el numerador puede ser divisible por $x - 3$.			Hugo no maneja la definición de límite, ver apéndice B.
Vera	Procedimientos algorítmicos: Dividir polinomios Factorizar polinomios Calcular el límite Calcular el valor numérico de un polinomio. Teorema del factor Hechos y definiciones: Definición de divisibilidad Competencia relevante: Determinar que el numerador puede ser divisible por $x - 3$.			Vera no maneja la definición de límite, ver apéndice B.

A continuación, se presenta una aproximación que permite observar cómo el uso de GeoGebra puede contribuir a la resolución de problemas.

Primero se introduce un deslizador **b** que permita modificar el valor del coeficiente de la función $f(x) = bx^2$, este deslizador también permite modificar la pendiente y ordenada de la recta $y = 3b(2x - 3)$, de esta forma se genera una familia de parábolas y de rectas que pasan por el punto $(3,9b)$, ver Figura 10. Nótese que esta familia de rectas que pasa por el punto $(3,9b)$ es tangentes a la función $f(x) = bx^2$.

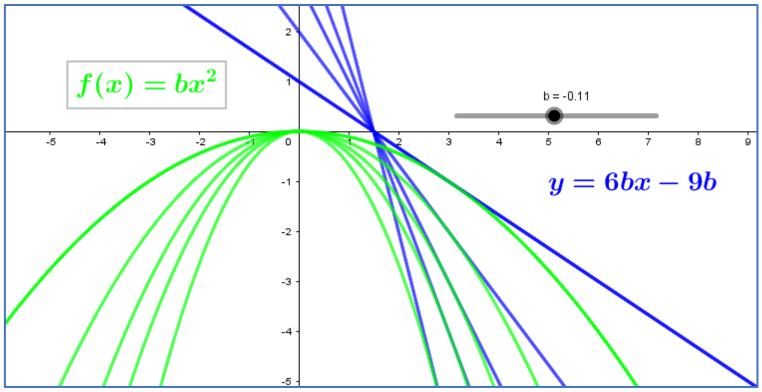


Figura 10. Familia de parábolas y rectas tangentes.

Para continuar con el procedimiento se introduce un deslizador **a** que cumple con la función de cambiar la ordenada al origen en la recta $\mathrm{y} = -\frac{2\mathrm{x}}{3} + \frac{\mathrm{a}}{3}$, al variar el valor del deslizador se genera una familia de rectas, se sabe que una de esas rectas tendrá que ser tangente a $\mathrm{f(x)} = \mathrm{bx}^2$ por ser un dato del problema. Ahora cuando se establece que $-\frac{2\mathrm{x}}{3} = 6\mathrm{bx}$ se está garantizando que la recta $\mathrm{y} = -\frac{2\mathrm{x}}{3} + \frac{\mathrm{a}}{3}$ sea paralela a la recta $\mathrm{y} = 6\mathrm{bx} - 9\mathrm{b}$, ya que tienen la misma pendiente. Ahora al modificar el valor del deslizador a se está generando una familia de rectas rojas que serán paralelas a la recta azul, ver Figura 11.

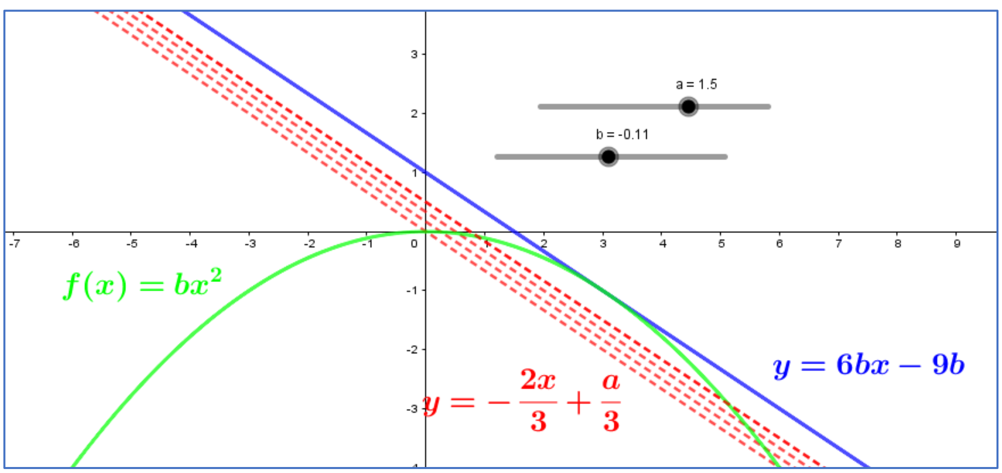


Figura 11. Familia de rectas paralelas a $\boldsymbol{y = 6bx - 9b}$.

Cuando se establece que $\frac{a}{3} = -9b$ se está garantizando que ambas rectas deben coincidir en el punto $(3{,}9b)$ y ser la misma. Al mover el deslizador $\boldsymbol{a}$ se puede encontrar el valor donde ambas rectas se sobreponen, en este caso la solución al problema es cuando $b = -0.111$ y $a = 3$, ver Figura 12.

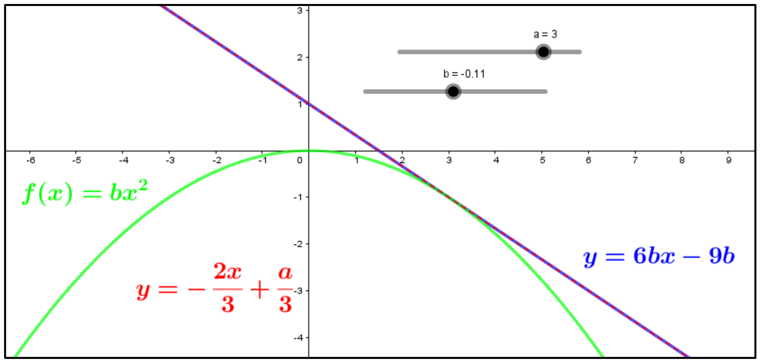


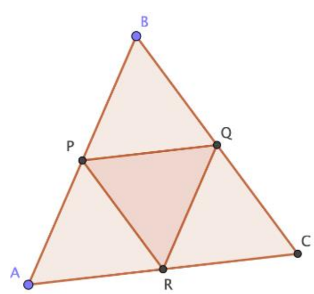
Figura 12. La solución al problema es cuando $b = -0.111$ y $a = 3$.

4.2 Análisis Fase Intermedia

La fase intermedia consta de 2 problemas de geometría, pero en este apartado únicamente se analiza el problema 7, ya que se considera que este problema nos permite caracterizar la forma en cómo los estudiantes resolvieron los problemas en esta fase. En este análisis se hace énfasis en las exportaciones realizadas al modelo dinámico, las conjeturas planteadas, las heurísticas y recursos utilizados, la formulación de problemas de extensión y la presentación de múltiples aproximaciones. También se presenta una tabla resumen de los problemas 6 y 7, haciendo énfasis en los recursos usados, las heurísticas, el uso de la herramienta y los errores que comenten al resolver el problema.

Como complemento a esta información en el apéndice C se presenta el análisis del problema 6 que también es parte de importante de los resultados, por lo que se estará citando algunos elementos que se consideren importantes de resaltar. El análisis se divide en la etapa de comprensión del problema, implementación del plan, modelo dinámico y uso de la herramienta.

Problema 7: La figura representa un triángulo equilátero con lado 6 cm



a) Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC y CA, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?

b) Suponemos ahora que P, Q y R divide a los lados en: $AR = 2$; $RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2$ & $PA = 4$, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?

c) ¿Qué perímetro de los casos a y b es mayor?

d) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

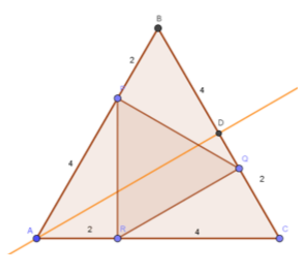
En inciso b) Vera reporta una solución en donde destaca el uso de la heurística de elemento auxiliar cuando añadió la bisectriz del ángulo ∠CAB, esta estrategia le permitió establecer la semejanza entre los triángulos ⊿ADC y ⊿RQC y utilizar las propiedades de la semejanza para calcular la medida del ∠CAD, ver Figura *13*. De su solución se puede señalar que considera algunas cosas como ciertas, por ejemplo, establece que los triángulos son semejantes, pero en su procedimiento no hay evidencia que demuestre este hecho.

De nuevo como $AR = CQ = BP = 2,\ RC = QB = PA = 4$ y $\sphericalangle RAP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QCR = 60°$ por criterios de congruencia son iguales y el triángulo PQR es equilátero. Por lo que tomamos el triángulo RQC para encontrar el lado que falta, intuitivamente se ve que es un triángulo rectángulo, para comprobar que lo es trazamos la bisectriz del ángulo $\sphericalangle CAB$ la cual divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos congruentes, ahora tomando $\triangle ADC$, este es semejante a $\triangle RQC$, es decir se cumple que:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{RC}{QC}$$

Por lo que $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CRQ$ pero $\sphericalangle CAD = \frac{60°}{2} = 30°$ así retomando el triángulo RQC se tiene que $\sphericalangle QCR = 60°, \sphericalangle CRQ = 30°$ en consecuencia el ángulo restante es un ángulo recto, ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Entonces para obtener el lado faltante aplicamos Pitágoras.

$$RQ = \sqrt{CR^2 - QC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = \sqrt{4(3)} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$



Así el perímetro del triángulo PQR es $3(2\sqrt{3}cm) = 6\sqrt{3}cm$

Figura 13. Solución de Vera, inciso b).

En el inciso b) Hugo reporta una solución con algunos elementos para destacar. En primer lugar, creó un modelo dinámico, ver enlace https://www.geogebra.org/m/xdabeshh, para resolver este problema. En su modelo se observa una familia de triángulos PQR equiláteros que se generan a partir del movimiento del punto H sobre el plano, ver Figura 14. En su solución se puede apreciar que el arrastre es limitado, ya que el punto H esta sobre el plano y por lo tanto hay posiciones donde su movimiento no genera movimiento en el triángulo PQR.

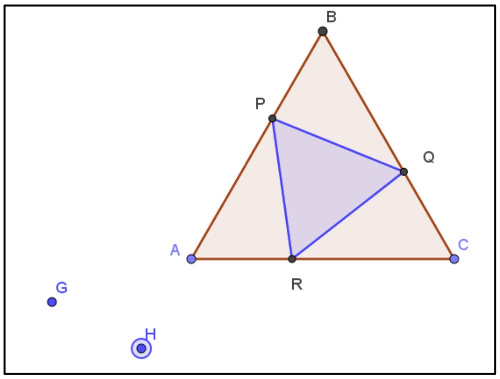


Figura 14. Modelo dinámico del problema presentado por Hugo.

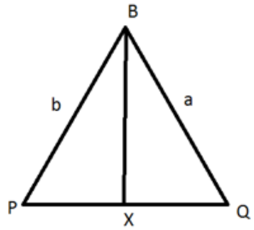
La exploración realizada al modelo permitió que Hugo formulara la siguiente conjetura; si el triángulo $\Delta PBQ \cong \Delta RAP \cong \Delta QCR$ entonces el triángulo PQR inscrito será equilátero. Al plantear esta conjetura Hugo convirtió el problema de un caso particular a un caso general (Heurística de generalizar). Es decir, está trabajando un problema general distinto al original a partir de la exploración realizada en GeoGebra, en la Figura 15 se aprecia el fragmento de solución donde plantea la conjetura.

> En el orden escrito, se tienen las congruencias $\Delta PBQ \approx \Delta RAP \approx$ ΔQCR. Lo que implica que el triángulo PQR se siempre sea equilátero. Además, curre que PQR es equiláterio si, y solo si, $\Delta PBQ \approx \Delta RAP \approx$ ΔQCR.

Figura 15. Conjetura planteada por Hugo.

En la Figura 16 se presenta otro fragmento de la solución de Hugo en donde utilizó la heurística de elemento auxiliar, cuando trazó la altura BX que es la altura del triángulo PBQ. Agregar este nuevo elemento es fundamental para continuar la demostración de su conjetura y para encontrar la solución al problema. Esta es una de las heurísticas propias del marco de resolución de problemas en un ambiente estático.

Por lo anterior dicho, se procede a calcular el valor de uno de los lados de triángulo PQR con ayuda de la siguiente figura, donde BX es la perpendicular al lado PQ.



$PQ = PX + (PQ - PX)$

Se tiene

$$PX^2 = b^2 - BX^2$$

por otra parte, por el teorema del cateto de Euclides

$$a^2 = b^2 + PQ^2 - 2PX * PQ$$

Así que

$$PX = \frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}$$

$$PX^2 = \left(\frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}\right)^2 = b^2 - BX^2$$

$$BX^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}\right)^2 \rightarrow (1)$$

Figura 16. Hugo traza la altura XB.

Obsérvese que Hugo también utilizó GeoGebra como un instrumento para verificar la respuesta, ya que hizo otro modelo dinámico del problema, que al igual que el anterior, le permitió crear una familia de triángulos PQR equiláteros a partir del movimiento de un punto, ver Figura 17. La diferencia de este modelo es que mueve el punto E sobre el eje x de tal forma que el segmento DE mida 2 cm, luego utilizó el comando de la distancia para medir los lados del triángulo PQR y calculó el perímetro, ver vista algebraica. Utilizar el arrastre permite que Hugo pudo verificar el resultado obtenido al introducir los datos del problema en la fórmula general que obtuvo. También se debe señalar que Hugo utilizó Wolfran Alpha para resolver la ecuación cuadrática que resultó de su demostración, esta herramienta le permitió encontrar con facilidad las raíces de la ecuación, ver Figura 18.

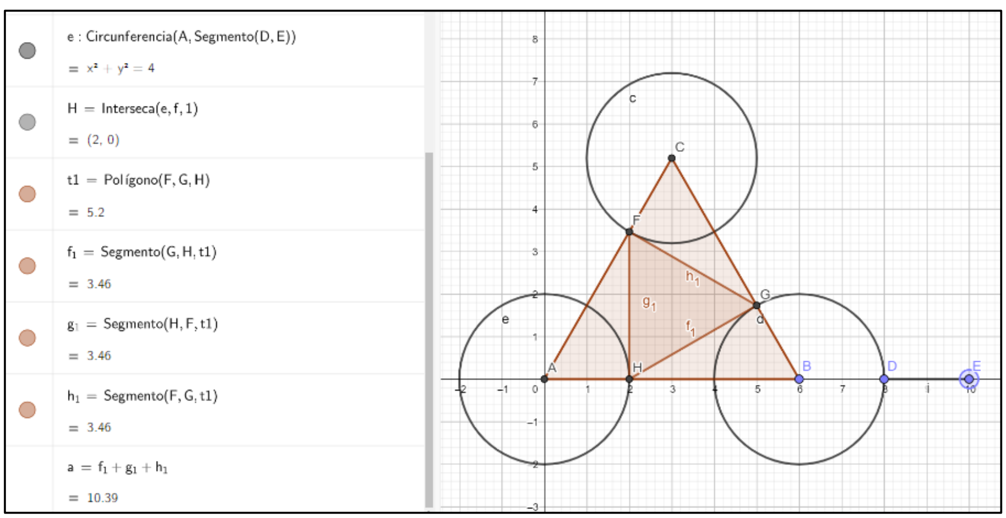


Figura 17. Modelo dinámico usado por Hugo para verificar la respuesta.

$$\left(AC^2\sqrt{3} - PQ^2\sqrt{3}\right)^2 = 36PQ^2b^2 - 9(b^2 + PQ^2 - a^2)^2$$

Realizando la sustitución de los datos

$$AC = 6;\ \ a = 4;\ b = 2$$

$$\left(36\sqrt{3} - x^2\sqrt{3}\right)^2 = 144x^2 - 9(x^2 - 12)^2$$

Cuya solución, con relación a este problema resulta (realizado en wólfram)

$$x = PQ = 2\sqrt{3}$$

Por lo que el perímetro del PQR es $6\sqrt{3} \approx 10.39$

El cual se verificó con GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/umjye8pd)

Figura 18. Hugo encontró la solución de la ecuación con ayuda de Wolfran Alpha.

Observe que Hugo también presenta otra solución al problema, en donde únicamente utilizó la ley de cosenos para encontrar el valor del lado PQ. En esta segunda aproximación no realizó un modelo dinámico, sino que su estrategia surgió del análisis de la figura del problema, ver Figura 19.

Otra solución más simple es utilizando el teorema de cosenos

$$PQ^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(60)$$

$$PQ^2 = a^2 + b^2 - ab$$

Sustituyendo y simplificando

$$PQ = \sqrt{16 + 4 - 8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Este método también permite demostrar que el triángulo PQR es equilátero.

Figura 19. Segunda aproximación al problema presentada por Hugo.

Al analizar el modelo dinámico presentado por Hugo destaca la forma de construir el triángulo PQR, ya que tomó como referencia la distancia entre $\mathrm{G\ y\ H}$ para generar 3 circunferencias de radio GH con centro en los vértices $\mathrm{A, B\ y\ C}$. Esta forma de proceder demuestra una forma de construir un triángulo equilátero inscrito, este proceso de construcción le permitieron crear el modelo dinámico a partir del movimiento del punto H sobre el plano, ver Figura 20. El movimiento controlado le permitió realizar la exploración y plantear la conjetura general de los triángulos inscritos. Para observar la solución completa reportada por Hugo ver apéndice B.

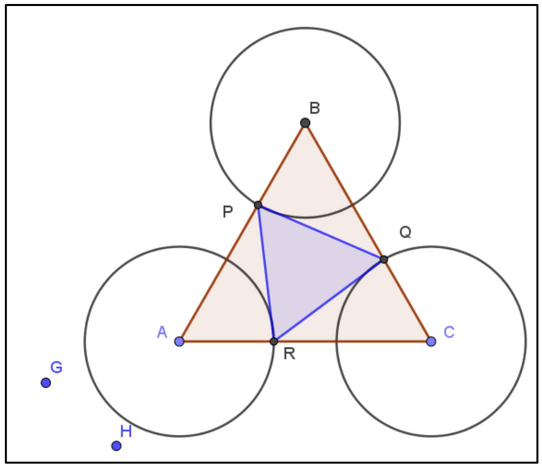


Figura 20. Construcción del triángulo PQR generado a partir del movimiento de H sobre el plano.

Análisis inciso d)

Comprensión del problema

Encontrar la posición de los vértices del triángulo inscrito PQR para que cumpla con la condición de que tenga perímetro mínimo era la dificultad de este problema. Por tal motivo crear un modelo dinámico del problema permitía que los estudiantes realizarán exploraciones y plantearan conjeturas respecto a la posición de los vértices.

Para este inciso Vera construyó un modelo dinámico del problema donde los puntos P, Q y R son móviles y están sobre los lados AC, BC y AB correspondientemente. La movilidad de los puntos le permitieron crear una familia de triángulos PQR inscritos. Al realizar la exploración Vera observó cómo se modificaba las medidas de los ángulos, lados y perímetro del triángulo PQR a medida se movían los puntos sobre los lados del triángulo ABC, ver Figura 21. Lo que le permitió plantear una conjetura que sugiere que a medida que uno de los ángulos del triángulo PQR se aproxima a 180° el perímetro aumentó y en cambio, cuando la medida de los ángulos se aproximó a 60°, el perímetro disminuyó. Concluyendo que la solución se encuentra cuando los vértices del triángulo PQR están en los puntos medios de los lados del triángulo ABC. En esta exploración la herramienta juega un papel importante ya que muestra la forma en cómo cambia la medida de los ángulos y el perímetro del triángulo a medida se mueven los puntos, el control que permite este arrastre y la medición de objetos son algunas de las heurísticas propias del proceso de exploración en GeoGebra.

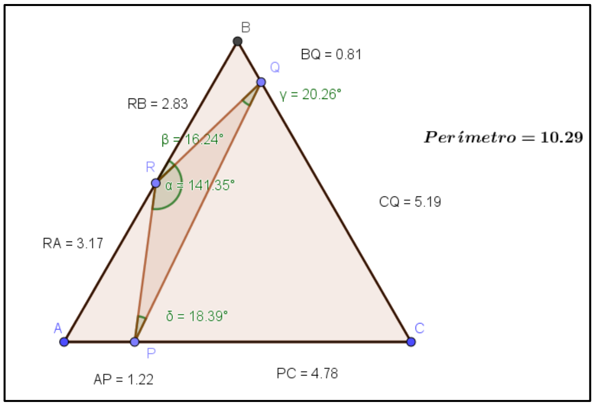


Figura 21. Exploración realizada por Vera.

En el modelo presentado por Hugo se observa que los puntos P, Q y R son puntos móviles sobre los lados AC, BC y AB respectivamente. El movimiento de cada punto genera una familia de triángulos PQR inscritos en el triángulo ABC y modifica la medida de los ángulos del triángulo PQR, todos estos elementos en la vista gráfica 1 en la Figura 22.

Por otro lado, en la vista gráfica 2 de la Figura 22, se observa los puntos G, K y I que tienen como abscisa la distancia de los puntos P, Q y R al eje x correspondientemente y en las ordenadas el perímetro del triángulo PQR. También se observa el lugar geométrico (azul) que describe el punto G respecto al movimiento de P sobre el lado AC. El lugar geométrico (negro) que describe el punto K respecto al movimiento de Q sobre el lado BC. El lugar geométrico (rojo) que describe el punto I respecto al movimiento de R sobre el lado AB. También se observa la recta L perpendicular al eje y en el punto L = (0,9), esta hace referencia al perímetro del triángulo PQR, ver Figura 22.

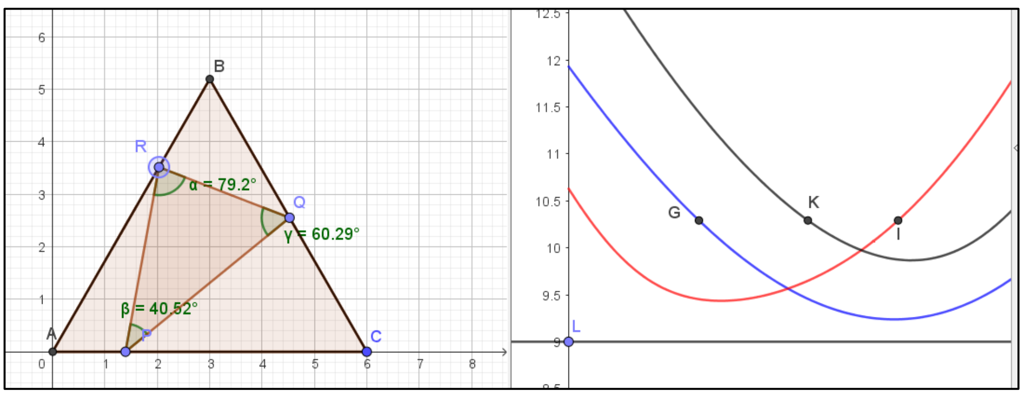


Figura 22. Modelo dinámico presentado por Hugo.

La exploración al modelo dinámico le permitió analizar el comportamiento de los lugares geométricos y conjeturar que cuando los vértices del triángulo PQR se aproximan al punto medio de los lados, los puntos G, K y I se aproximan a la recta L, ver Figura 23. Este arrastre le permitió establecer una relación entre la ubicación de los vértices del triángulo PQR y la variación del perímetro. Con esta exploración Hugo estableció relaciones matemáticas explícitas a partir de información empírica visual. Se debe señalar que a pesar de obtener los lugares geométricos Hugo no tuvo la iniciativa de investigar las propiedades de la cónica o de justificar su conjetura, estos elementos resultan importantes porque puede ser un punto de partida para la formulación de nuevos problemas.

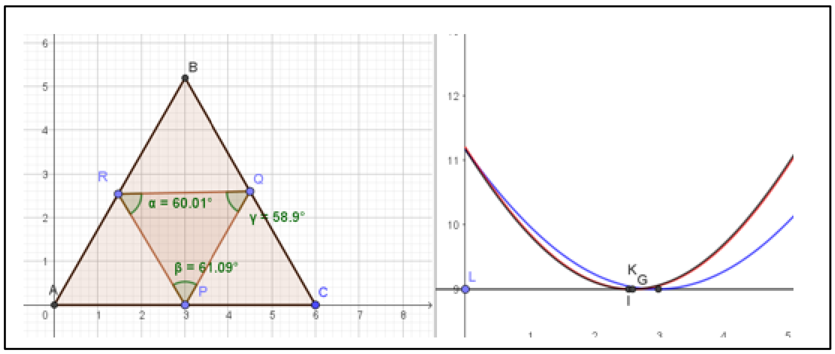


Figura 23. Aproximación de los lugares geométricos a la recta L.

Se debe señalar que Carmen presentó una solución donde no hay evidencia del uso de GeoGebra, es decir no existe un modelo dinámico del problema ni evidencia de exploraciones. El problema lo abordó tomando como referencia las estrategias usadas en los otros incisos, para más detalles ver la solución completa en el apéndice B.

Implementación de un plan de solución:

Carmen y Hugo reportaron soluciones similares entre sí, con pequeñas variaciones de estilo. Ya que utilizaron la misma heurística de trabajar un caso particular del problema para luego trabajar el problema original. Además, utilizaron los mismos recursos, es decir la ley de cosenos y elementos del cálculo para analizar la función perímetro.

Obsérvese que Carmen primero trabajó un caso particular donde considera que el triángulo PQR inscrito es equilátero, su objetivo es encontrar la medida del lado PR y demostrar que el perímetro es mínimo. Su procedimiento se resume en utilizar la ley del coseno para expresar la longitud del lado PR del triángulo PQR en términos de variables x, obteniendo como resultando que $\mathrm{PR} = \sqrt{3(\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 12)}$. Luego definió la función perímetro $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3\sqrt{3(\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 12)}$ y procedió con el análisis usando herramientas de cálculo hasta concluir que triángulo equilátero de perímetro mínimo se obtiene cuando el lado PR mide 3 cm, ver Figura 24.

d) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

Consideraremos primero el caso en donde el triángulo inscrito también sea equilátero, es decir, cuando los segmentos $AR = CQ = BP = x$ y $RC = BQ = AP = 6 - x$ con x en el intervalo [0,6], entonces los segmentos PQ=QR=QP son igual y satisfacen:

$$PR = \sqrt{\left(x^2 + (6-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (6-x) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36 - 6x + \mathrm{x}^2}$$

$$= \sqrt{3x^2 - 18x + 36} = \sqrt{3(x^2 - 6x + 12)}$$

Por lo cual podemos definir al perímetro como $f(x) = 3\sqrt{3(x^2 - 6x + 12)}$

Calculando la primera derivada obtenemos $f'(x) = 3\frac{1}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}}3(2x - 6)$

Observamos que $f'(x) = 0$, cuando $(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}} = 0$ ó $2x - 6 = 0$, sin embargo, $(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}} > 0$, para todo x, entonces solo se satisface que $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$.

Calculando la segunda derivada se tiene:

$$f''(x) = \frac{9}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}}(2) - \frac{9}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{3}{2}}(2x - 6)\text{^}2$$

Evaluando en x=3 se tiene que $f''(3) > 0$, por lo que f alcanza su mínimo cuando x=3, concluyendo que el triángulo equilátero de menor perímetro inscrito en un triángulo equilátero de lados de 6cm, es el triángulo que mide 3cm por lado.

Figura 24. Solución de Carmen al inciso d), caso particular.

Una vez encontrada la solución del caso particular decidió abordar el caso general (problema original) utilizando los mismos recursos y estrategia, pero sin encontrar la solución, ya que únicamente dejó expresada la función perímetro y no continuó con el análisis usando las herramientas de cálculo debido a la dificultad que implicaba analizar la función, ver Figura 25.

Consideraremos primero el caso en general, entonces definimos a las longitudes de los segmentos de la siguiente forma: AP=x, PB=6-x, BQ=y, QC=6-y, CR=z, RA=6-z con x,y,z en el intervalo [0,6], entonces las longitudes de los segmentos PQ, QR, QP son de la siguiente forma:

$$PR = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - 2 \cdot x \cdot (6-z) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - x \cdot (6-z)\right)}.$$

$$QP = \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - 2 \cdot y \cdot (6-x) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - y \cdot (6-x)\right)}.$$

$$RQ = \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - 2 \cdot z \cdot (6-y) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - z \cdot (6-y)\right)}.$$

De donde definimos al perímetro como la siguiente función:

$$f(x,y,z) = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - x \cdot (6-z)\right)} + \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - y \cdot (6-x)\right)} + \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - z \cdot (6-y)\right)}$$

La cual estamos interesado en minimizar.

Figura 25. Solución de Carmen al inciso d), caso general.

Obsérvese que gracias al modelo dinámico y a la exploración realizada Hugo estableció que la solución al problema se encuentra cuando los vértices del triángulo PQR estan sobre los puntos medios de los lados, ver Figura 26.

Respuesta:
La solución tiene que ser un equilátero cuyos vértices coinciden en los puntos medios de cada lado
La solución fue basada en GeoGebra.

Figura 26. Conjetura planteada por Hugo.

Para demostrar su conjetura Hugo trabajó un caso particular del problema y luego el caso general (heurística de trabajar un caso particular). En el caso particular Hugo considera que $a = b = c$ y el triángulo PQR inscrito es equilátero. Su procedimiento se resume en aplicar la ley del coseno para establecer una expresión que relaciona a PQ. Luego de realizar algunos cálculos encontró una ecuación racional que expresa la distancia del segmento PQ. Con esta información procedió a establecer la función perímetro y calculó la primera derivada, obteniendo el valor **a** y encontrando la posición en donde deben estar los vértices del triángulo equilátero, ver Figura 27.

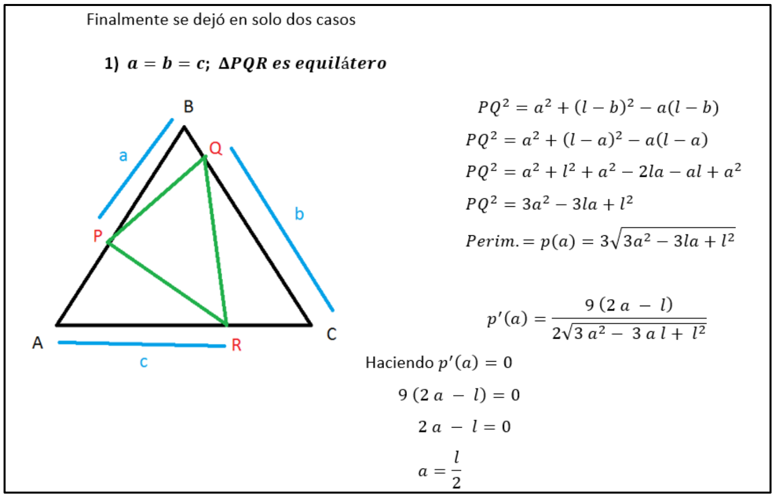


Figura 27. Caso particular donde el triángulo inscrito es equilátero.

Resulta interesante observar que a pesar de que creó un modelo dinámico del problema, la figura utilizada no es una construcción precisa del problema. Es decir, que la figura no representa las condiciones iniciales que estableció para este caso particular, por ejemplo, podemos ver que el triángulo PQR no es equilátero y la medida de a, b y c no es la misma, ver Figura 28

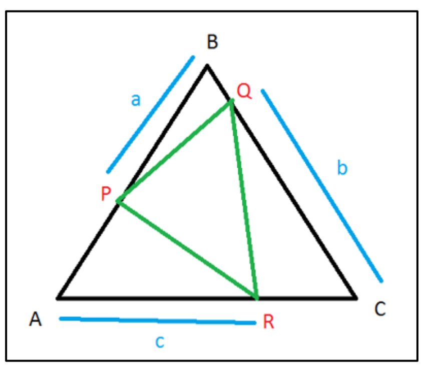


Figura 28. Construcción realizada por Hugo para el caso particular.

En la segunda parte del problema se aprecia que trabajó el caso general donde los vértices se ubican en cualquier posición de los lados del triángulo ABC, su forma de abordarlo es similar que el caso particular, es decir usó la misma estrategia y los mismos recursos de geometría y cálculo. Su procedimiento se resume en usar la ley de coseno para establecer la distancia de los lados del triángulo PQR, luego estableció la función perímetro, calculó las derivadas y finalizó el procedimiento estableciendo el valor de los lados, ver Figura 29. Para ver la solución completa ver apéndice B.

2) Considerando el diagrama anterior, se tiene

$$PQ = \sqrt{a^2 + (l-b)^2 - a(l-b)}$$

$$QR = \sqrt{b^2 + (l-c)^2 - b(l-c)}$$

$$PR = \sqrt{c^2 + (l-a)^2 - c(l-a)}$$

Por lo que el perímetro está determinado por la siguiente expresión

$$p = \sqrt{a^2 + (l-b)^2 - a(l-b)} + \sqrt{b^2 + (l-c)^2 - b(l-c)} + \sqrt{c^2 + (l-a)^2 - c(l-a)}$$

Bajo las restricciones

$$0 < a < l$$

$$0 < b < l$$

$$0 < c < l$$

Derivando parcialmente la función

$$p'_a = \frac{-l + b + 2a}{2\sqrt{-a(l-b) + (l-b)^2 + a^2}} + \frac{c - 2(l-a)}{2\sqrt{-c(l-a) + (l-a)^2 + c^2}}$$

$$p'_b = \frac{-l + c + 2b}{2\sqrt{-b(l-c) + (l-c)^2 + b^2}} + \frac{a - 2(l-b)}{2\sqrt{-a(l-b) + (l-b)^2 + a^2}}$$

$$p'_c = \frac{-l + a + 2c}{2\sqrt{-c(l-a) + (l-a)^2 + c^2}} + \frac{b - 2(l-c)}{2\sqrt{-b(l-c) + (l-c)^2 + b^2}}$$

Para lo anterior se verifica que $p'_a = p'_b = p'_c = 0$ si $a = b = c = \frac{l}{2}$, pero no se sabe nada acerca de que sea solución única.

Figura 29. Caso general donde los vértices se encuentran en cualquier posición.

Vera no reporta una solución al inciso d) a pesar de que realizó un modelo dinámico del problema y que con ayuda de la exploración logró conjeturar que los vértices triángulo PQR se deben ubicar en el punto medio de los lados del triángulo ABC. Una hipótesis para explicar este hecho es que Vera no tiene los recursos para demostrar su conjetura y en consecuencia no presenta una solución formal, sino que queda en solo una exploración, ver Figura 30.

Al estudiar la figura en GeoGebra se observa que si uno de los ángulos se acerca mucho a 180° el perímetro crece, en cambio cuando los ángulos se asemejan cada vez más entre sí, el perímetro decrece, por lo que el triángulo PQR de menor área es aquel que tiene sus vértices en los puntos medios de los segmentos que conforman el triángulo ABC.

https://www.geogebra.org/m/nhphswjs

Figura 30. Conjetura planteada por Vera, inciso d).

Modelo Dinámico y uso de la herramienta

Para este problema Vera utilizó la herramienta para crear un modelo dinámico. En su modelo se observa que los puntos móviles P, Q y R le permitieron generar una familia de triángulos inscrito. Además, encontrar la medida de los ángulos, lados y perímetro del triángulo PQR le permitieron observar cómo se relacionaban y variaban las medidas conforme se movían los puntos móviles. Esta exploración al modelo le permitió plantear una conjetura respecto a la posición de los vértices del triángulo PQR para que cumpliera con la condición de tener perímetro mínimo, ver Figura 31. El arrastre de los puntos móviles y la medición de los ángulos y lados le permitió observar relaciones y plantear la conjetura que la condujo a la solución del problema.

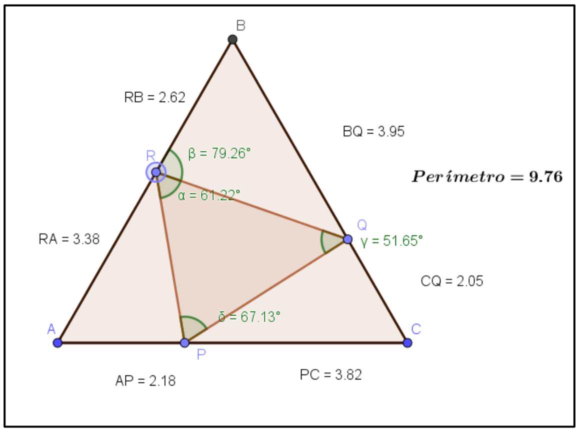


Figura 31. El arrastre de los puntos móviles permitió que Vera notara la variación en la medida de los lados, ángulos y perímetro.

La exploración al modelo dinámico realizado por Hugo le permitió establecer relaciones entre la altura de los puntos móviles P, Q y R y la variación del perímetro, como resultado obtuvo los puntos I, G y K. El arrastre de los puntos móviles sobre los lados le permitió encontrar el lugar geométrico generado por los puntos I, G y K. Analizar la trayectoria de los puntos sobre los lugares geométricos le permitió concluir que cuando los vértices del triángulo PQR se encuentran cerca del punto medio de los lados, el perímetro del triángulo PQR es mínimo ya que los puntos se acercan de la recta L, Figura 32.

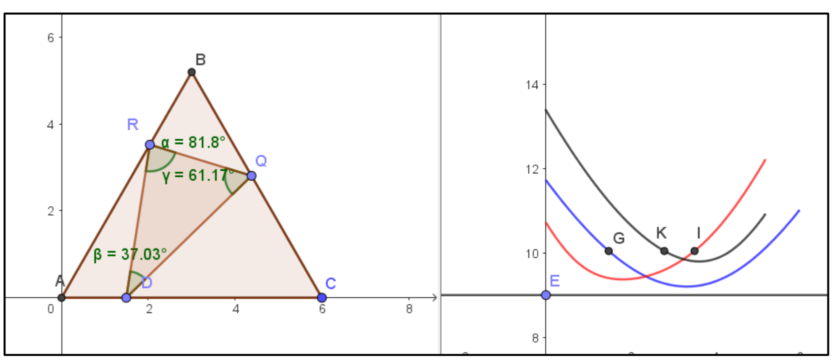


Figura 32. Lugar geométrico generado a partir del movimiento controlado de los puntos *P*, *Q* y *R*.

En la solución reportada por Carmen no hay evidencia del uso de GeoGebra, a pesar de que las instrucciones del problema especifican claramente los elementos que se esperan ver. También llama la atención que no hay evidencia de que utilizó la herramienta para construir la figura que el problema demanda, por lo que se considera que abordó el problema como si lo trabajará en lápiz y papel y no siente la necesidad de usar la herramienta.

A continuación, se señalan otros elementos de esta solución, por ejemplo, obsérvese que Hugo demuestra tener una estrategia de control, que le permitió tomar decisiones respecto a continuar o abandonar una solución. En la Figura 33 se puede apreciar una aproximación, al inciso d), que fue abandonada debido a la dificultad que implicaba resolver los procedimientos algorítmicos.

Una vez corregido mi respuesta ingenua en el enciso b, la respuesta me permitió tomar la siguiente expresión para poder realizar un análisis.

$$\left(AC^2\sqrt{3} - PQ^2\sqrt{3}\right)^2 = 36PQ^2b^2 - 9\left(b^2 + PQ^2 - a^2\right)^2$$

$$\left(\frac{36\sqrt{3}-x^2\sqrt{3}}{6x}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{b^2+x-a^2}{2x}\right)^2$$

$$\left(\frac{36\sqrt{3}-x^2\sqrt{3}}{6}\right)^2 = x^2b^2 - \left(\frac{b^2+x-a^2}{2}\right)^2$$

$$\left(36\sqrt{3} - x^2\sqrt{3}\right)^2 = 36x^2b^2 - 9\left(b^2 + x^2 - a^2\right)^2$$

$$3\left(36 - x^2\right)^2 = 36x^2b^2 - 9\left(b^2 + x^2 - a^2\right)^2$$

$$3x^4 - 216x^2 + 3888$$

$$= -9a^4 + 18a^2b^2 + 18a^2x^2 - 9b^4 + 18b^2x^2 - 9x^4$$

$$0 = -3888$$

$$-9b^4 - 9a^4 + 18a^2b^2 + \left(18a^2 + 18b^2 - 216\right)x^2 - 12x^4$$

$$-12x^4 + b_0^2 + c_0 = 0$$

$$x = \frac{\left(b_0^2 + c_0\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{(2)}3^{\frac{1}{4}}}$$

$$x = \frac{\left(\left(\left(18a^2 + 18b^2 - 216\right)\right)^2 + \left(-9b^4 - 9a^4 + 18a^2b^2 - 3888\right)\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{(2)}3^{\frac{1}{4}}}$$

Figura 33. Aproximación abandonada por Hugo.

Conclusiones del análisis de la fase intermedia.

El análisis de la fase intermedia permitió observar la forma en cómo los estudiantes se han apropiado del marco de resolución de problemas y la incorporación de la herramienta a la resolución de problemas.

En esta fase Carmen demostró habilidad para realizar los procedimientos algorítmicos y dominio de los conceptos de geometría y álgebra, pero presentó dificultad al realizar la transición de razonar un problema de forma estática a razonarlo de forma dinámica, es decir tuvo dificultad para presentar una solución que dependa del análisis de un modelo dinámico. El primer acercamiento de incorporar la tecnología lo realizó en el problema 6, en donde la exploración al modelo dinámico le permitió observar la forma en cómo disminuía la medida de uno de los ángulos, pero la exploración no brindó los suficientes elementos para plantear conjeturas o encontrar una estrategia que conduzca a la solución, por lo que se concluye que utilizó la herramienta para hacer una construcción precisa del problema, ya que todas las conjeturas que planteó vienen precedidas de la interpretación de la figura, para más referencias ver apéndice C. En el problema 7 no hay evidencia de un modelo dinámico ni usó GeoGebra para construir una representación del problema, en otras palabras, trabajó el problema en lápiz y papel y solo escribió la solución. Con estos elementos se puede decir que Carmen no se ha apropiado de la herramienta y no siente la necesidad de usar GeoGebra, ya que las conjeturas que plantea vienen precedidas de la interpretación de los datos y el análisis de la figura del problema, además sigue presentando aproximaciones cortas y precisas, sin reportar sus dificultades o las soluciones que abandonó al resolver el problema. En esta fase Vera demostró sus primeros acercamientos de incorporar la tecnología a la resolución de problemas. En el problema 6 utilizó GeoGebra cómo un mecanismo de comprobación visual del movimiento del punto R, esto luego evolucionó a la creación de un modelo dinámico del problema y a la realización de exploraciones que la condujeron a formular conjeturas respecto a la posición de los vértices en el problema 7. La exploración al modelo dinámico, el arrastre y la medición le permitieron realizar una comprobación visual de la respuesta del problema y a su vez a la formulación de conjeturas. A pesar de demostrar una evolución en cuanto al uso de herramienta se puede observar que no cuenta con los recursos para resolver los problemas de esta fase. En el problema 6 quedó evidenciado cuando seleccionó la estrategia y aplicó el teorema del cateto, ya que cometió errores, uno al intentar recordar el teorema y otro al aplicarlo de forma incorrecta en el problema, para ver el análisis completo de este problema ver el apéndice C. En el problema 7 no reporta la solución al inciso d), sino que únicamente deja planteada la conjetura respecto a la posición de los vértices.

En esta fase Hugo demostró sus primeros indicios de incorporar la tecnología a la resolución de problemas. En la solución del problema 6 resalta que realizó una exploración que solo le permitió realizar una verificación visual de las hipótesis que brinda el problema y presentar argumentos geométricos que explican la razón porque R se mueve a la derecha. En lo reportado del problema 7 se observa que (en el inciso b) la exploración al modelo dinámico le permitió plantear una conjetura y convertir un problema particular a uno general (heurística de generalizar). En el inciso d) la exploración al modelo dinámico y el arrastre para generar un patrón le permitió plantear la conjetura de la posición de los vértices del triángulo PQR. Del trabajo de Hugo también se observa la utilización de heurísticas propias de GeoGebra como el arrastre, la medición y el rastro, asimismo hay evidencia de heurísticas propias del marco de resolución de problemas como trabajar un caso particular del problema, de generalizar resultados y agregar un elemento auxiliar. Otro elemento que se puede señalar es que utilizó el arrastre como un instrumento para verificar el resultado obtenido en el inciso b). En esta fase Hugo demostró tener recursos sólidos ya que tiene destreza para realizar los procedimientos algorítmicos y manejo de las definiciones, sin embargo, presentó dificultad en la comprensión del problema 6, que lo condujo a trabajar un problema distinto al original. En resumen, Hugo demostró un mejor desempeño en esta fase, presentando varias aproximaciones, creando modelos dinámicos y usando heurísticas propias de GeoGebra.

Tabla 4.6. Resumen de la solución del problema 6, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Vera	Procedimientos algorítmicos: Aplicar el teorema del cateto Hechos y definiciones: Definición de triángulo rectángulo. Teorema del cateto.		Utilizó GeoGebra como un medio de comprobación visual de los elementos que buscan demostrar	Cometió un error al hacer la proyección sobre el cateto OR, cuando en realidad la proyección de los catetos debe hacerse sobre la hipotenusa. también utilizó incorrectamente la fórmula del teorema, ya que olvida elevar al cuadrado OQ en la expresión $OQ = (OA)(OR)$.

Tabla 4.7. Resumen de la solución del problema 6, ver apéndice C.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen	Hechos y definiciones: Definición de triángulo isósceles y rectángulo. Def. de cuerda. Def. de ángulos congruentes. Def. de segmentos congruentes. Def. de ángulo complementario y suplementarios. Propiedades de los triángulos rectángulos e isósceles. Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Teorema de lado mayor se antepone ángulo mayor. Competencia relevante: Identificar que el punto R alcanza su límite cuando la cuerda PB se aproxima al diámetro de la circunferencia AB	Elemento auxiliar	Utilizó GeoGebra para realizar una exploración donde observó el movimiento del punto R y la medida de uno de los ángulos.	Cometió un error al calcular el valor del ángulo OPR expresándolo como $180 - \frac{180° - \angle QOP}{2} = \frac{360° - \angle QOP}{2}$
Hugo	Procedimientos algorítmicos: Aplicar el teorema de Pitágoras. Hechos y definiciones: Def. de triángulo isósceles y rectángulo. Def. ángulos complementarios. Teorema de Pitágoras. Concepto de límite, Identidades trigonométricas.	Elemento auxiliar	Realizó una exploración que solo le permite realizar una comprobación visual y presentar argumentos geométricos que explican la razón porque R se mueve a la derecha.	Cometió un error cuando realizó la construcción de la figura, ya que consideró que los segmentos OP y QP son congruentes cuando en realidad los segmentos congruentes son OP y OQ.

Tabla 4.8. Resumen de la solución del problema 7

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen	Procedimientos algorítmicos: Utilizar los criterios de congruencia de triángulos. Aplicar el teorema de Pitágoras Aplicar la ley de coseno Operaciones aritméticas básicas. Calcular la primera y segunda derivada. Encontrar los puntos críticos. Hechos y definiciones: Def. de triángulo isósceles Def. de triángulo equilátero Propiedades de los triángulos equiláteros Ley de coseno Fórmula de perímetro Ángulos	Utilizó la estrategia de trabajar un caso particular del problema.		Cometió un error cuando calculó la segunda derivada, ya que aplica la regla de la cadena de forma incorrecta
Vera	Procedimientos algorítmicos: Aplicar el teorema de Pitágoras Utilizar la fórmula de perímetro Demostrar la congruencia de triángulos. Hechos y definiciones: Def. de triángulo equilátero Def. de triángulo rectángulo Def. de bisectriz Def. de ángulo Def. de punto medio Teorema de Pitágoras. Fórmula de perímetro Razón de proporcionalidad en la semejanza	Usó la heurística de elemento auxiliar cuando añadió la bisectriz del ángulo ∠CAB para establecer la semejanza entre los triángulos También se observa la heurística de arrastre, que le permite tener control del movimiento de los puntos que están sobre los lados del triángulo ABC y de la familia de triángulos inscritos.	Hizo un modelo dinámico del problema y utilizó la movilidad para observar la variación en la medida de los lados, ángulos y perímetro.	

Tabla 4.9. Resumen de la solución del problema 7

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Hugo	Procedimientos algorítmicos: Aplicar el teorema de Pitágoras. Resolver ecuaciones cuadráticas. Despeje de variables. Calcular el perímetro. Utilizar los criterios de congruencia. Encontrar la mediatriz con regla y compás. Calcular raíces cuadradas. Calcular derivadas Aplicar la ley de coseno. Ubicar puntos en el plano. Hechos y definiciones: Definición de congruencia. Def. de triángulo equilátero y rectángulo. Def. de perímetro. Fórmula de área del triángulo equilátero. Fórmula de perímetro. Ley de cosenos. Criterio de congruencia de triángulos. Teorema de Pitágoras	Utilizó la heurística de elemento auxiliar al trazar la altura BX que es la altura del triángulo PBQ en el inciso d). También utilizó el arrastre, que le permitió tener control del movimiento de los vértices del triángulo PQR a medida se mueve el punto H en el plano. También utilizó la heurística de trabajar un caso particular, esto se aprecia cuando trabajó primero con el triángulo inscrito equilátero y luego trabajó el caso original. Utilizó la heurística de generalizar en el inciso b), ya que primero resolvió un caso general y luego resolvió el caso particular del problema El arrastre y el rastro le permitieron generar los lugares geométricos que describen los puntos I, G y K.	Creó un modelo dinámico del problema y utilizó la movilidad para plantear una conjetura general que le permite encontrar la solución al inciso b). Creó un modelo dinámico del problema para verificar la respuesta del inciso b). Creó un modelo dinámico que le permitió establecer la posición de los vértices del triángulo PQR en el inciso d).	Confundió la simbología de la congruencia con la de la semejanza, por lo que se observan varios errores en su trabajo, pero no afectan en su solución.

A continuación, se presenta una aproximación mediada por GeoGebra. El objetivo de esta aproximación es evidenciar cómo se puede incorporar la herramienta en la solución de problemas y cómo se pueden presentar argumentos que permitan demostrar que triángulo PQR inscrito debe ser equilátero y sus vértices deben estar en los puntos medios. Además, se puede observar cómo se establecen nuevas relaciones con otros objetos matemáticos.

Primero se ubican los puntos móviles P, Q y R en los lados del AC, BC y AB. Observe que si los puntos Q y R están cerca de los vértices y el punto P se mueve sobre AC, el perímetro del triángulo varía entre 11 y 17 cm, ver Figura 34. Con la información que brindan estos dos casos no se puede sacar una conclusión respecto a la posición de los vértices.

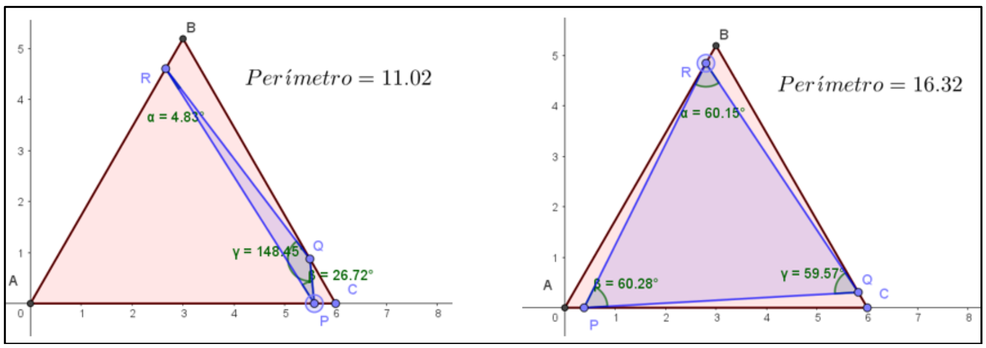


Figura 34. Análisis de algunos casos.

Si se estudian los casos donde los vértices se ubican cerca de los puntos medios, se puede observar que el perímetro disminuye y que la medida de los ángulos se aproxima a 60°, ver Figura 35. Este último ejemplo sugiere que se analice los triángulos equiláteros inscritos, ya que es posible que el triángulo que se busca sea equilátero. Ahora interesa realizar un modelo que permita construir una familia de triángulos equiláteros inscritos, para demostrar nuestra conjetura y encontrar en qué posición deben estar los vértices.

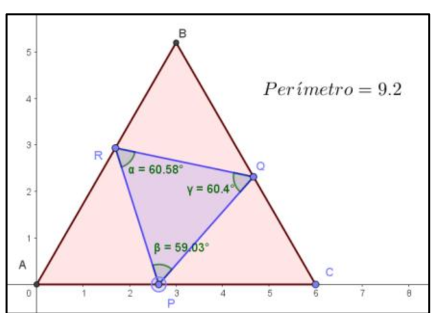


Figura 35. La medida de los ángulos se aproxima a 60°.

Para continuar con la solución se trabajará un caso particular del problema, es decir se va a inscribir un triángulo, al considerar esta condición, surge la interrogante de cómo se puede inscribir un triángulo equilátero dentro del triángulo equilátero ABC. En la Figura 36 se observa que los puntos P y K son puntos móviles y vértices del triángulo equilátero PFK.

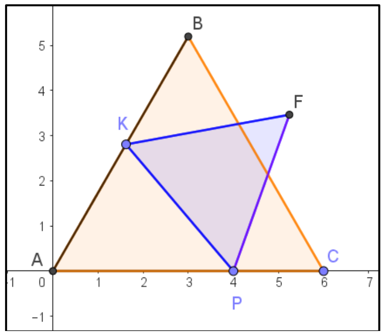


Figura 36. Triángulo equilátero PFK.

Observe que a medida se mueve el punto K se genera una familia de triángulos equiláteros, ahora interesa saber en qué lugar el vértice F interseca al lado BC, ya que ese será uno de los vértices. Al utilizar la opción de lugar geométrico se puede observar el rastro que deja el punto F a medida se mueve el punto K, ver Figura 37.

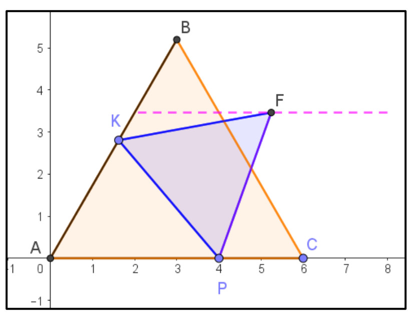


Figura 37. Lugar geométrico del punto F.

Ahora interesa conocer la intercepción del lugar geométrico de F con el lado BC. Para poder encontrar el lugar geométrico se va a rotar el lado AB con una rotación de 60° en sentido horario con respecto a P. Se marca las intercepciones y se encuentra el punto Q, que será uno de los vértices del triángulo equilátero inscrito, ver Figura 38.

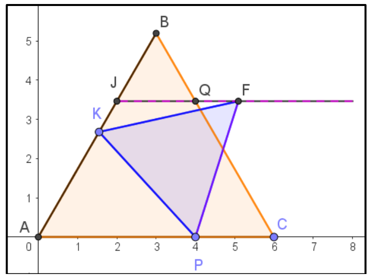


Figura 38. Rotación de 60° del lado AB con respecto a P.

Una vez obtenido el punto Q solo resta trazar la mediatriz del segmento PQ, marcar la intercepción con el lado AB y así se obtiene el triángulo equilátero PQR. Obsérvese que se genera una familia de triángulos equiláteros inscritos al mover el punto P sobre el lado AC. Interesa encontrar la posición de los vértices del triángulo PQR que permitan obtener el perímetro mínimo, ver Figura 39.

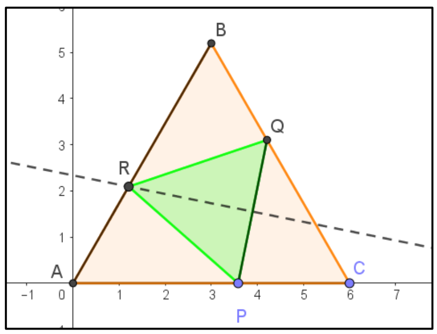


Figura 39. Familia de triángulos equiláteros inscritos.

Para poder encontrar en qué posición deben estar los vértices del triángulo PQR, se construirá un punto M que tenga como abscisa las coordenadas de x del punto P y en las ordenadas el perímetro del triángulo PQR. Ahora si se traza el lugar geométrico que genera el punto M cuando P se mueve, se obtiene el recorrido de color rojo. Si se analiza el lugar geométrico se puede apreciar que el punto M tiene un movimiento similar al de una hipérbola. Para realizar una verificación rápida de la hipótesis se puede usar el comando de cónica dado cinco puntos. Una vez comprobada la hipótesis se procede a analizar el movimiento del punto M sobre la hipérbola y cómo varía el perímetro del triángulo PQR.

Observe que a medida el punto P se aproxima al punto medio del lado AC, el punto M se acerca al vértice de la hipérbola y el perímetro disminuye. Con esta exploración se puede establecer que cuando M es el vértice de la hipérbola el perímetro del triángulo PQR es mínimo. Al observar estos argumentos se puede concluir que los vértices del triángulo PQR deben estar sobre los puntos medios de los lados del triángulo ABC, ver Figura 40.

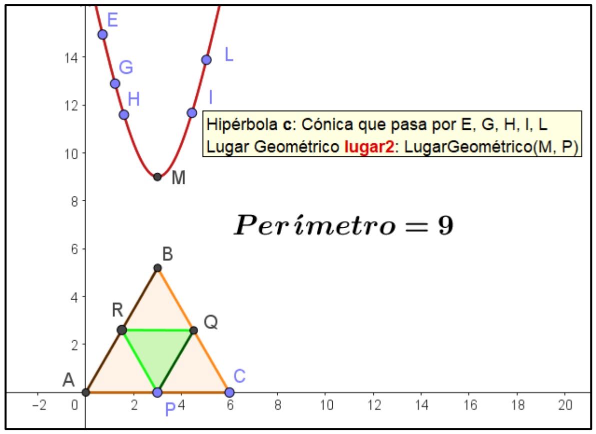


Figura 40. Triángulo PQR de perímetro mínimo.

4.3 Análisis Fase Final

En esta fase se analiza el desempeño de los participantes al trabajar el problema 8: Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son A $(0, 0)$, B $(5, 0)$ y C $(0, 10)$. El punto A se refleja sobre el segmento BC y se obtiene A’. Encuentre las coordenadas del punto A’. Sea B’ el punto reflejado de B sobre AC y C’ el punto reflejado de C con respecto AB respectivamente. Encuentre el área del triángulo A’B’C’.

El análisis destaca la forma en como los estudiantes presentan la solución, los recursos y heurísticas utilizadas, las conjeturas planteadas, las exploraciones realizadas, el uso de la herramienta y creación del modelo dinámico y la formulación de problemas de extensión. El análisis se divide en la etapa de comprensión del problema, implementación del plan, modelo dinámico y uso de la herramienta.

Comprensión del problema:

La reflexión de un punto con respecto a una recta representó un aspecto esencial en la solución de este problema, ya que permitía encontrar el triángulo A’B’C’. La principal dificultad del problema era determinar la base y la altura del triángulo A’B’C’, datos necesarios para calcular su área.

En la solución reportada por Carmen se observa que cometió un error al realizar la reflexión de los puntos A B y C, por ende la ubicación de A’, B’, C’ y la construcción del triángulo

A’B’C’ no es lo que establece el problema. En consecuencia, Carmen encuentra el área de un triángulo diferente al que el enunciado del problema establece.

Si se observa la figura presentada por Carmen vemos que el punto A′ lo ubica sobre la recta CB específicamente en la intercepción entre la recta CB y la perpendicular a CB que pasa por el punto A, realiza el mismo procedimiento con los otros puntos obteniendo así al triángulo ΔA’B’C’ = ΔCA′A, ver Figura 41.

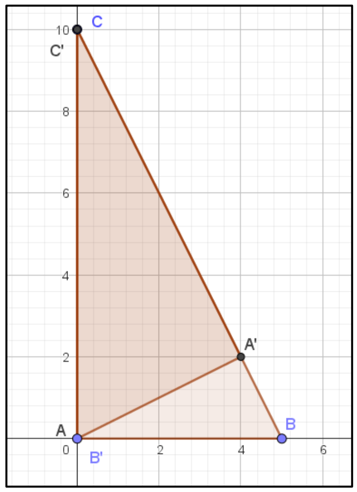


Figura 41. Construcción del triángulo $\Delta CA'A$ realizada por Carmen.

Con la explicación que brindó Carmen se observa que entendió la reflexión cómo la proyección del punto A sobre la recta reflejante BC, ver Figura 42. Lo que demostraría que no maneja el tema de la reflexión, es decir no cuenta con los recursos para resolver este problema.

Para obtener las coordenadas del punto A’, por construcción este debe estar en la recta perpendicular a la recta que pasa por B y C, la cual la podemos obtener por medio de la recta que pasa por dos puntos, donde $B=(x_1,y_1)$ y $C=(x_2,y_2)$.

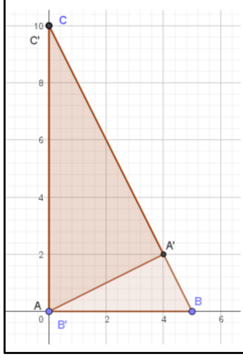
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{10}{-5}(x-5)=-2x+10.$$

Entonces la perpendicular a esta recta que pasa por A es.

$$y=\frac{1}{2}x.$$

Igualando ambas ecuaciones se satisface que

$$-2x+10=\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}x=10 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}=4.$$



Es decir $A'=\left(4,\frac{1}{2}4\right)=(4{,}2)$. Por otra parte, el punto B’ debe estar en la recta perpendicular a la recta que pasa por A y C, pero al estar esto dos en el eje X, entonces B’ debe de estar en una recta paralela al eje Y, pero la única recta que pasa por A y C es X=0, entonces la intersección de entre X=0 y Y=0 es el origen, es decir, $B'=(0{,}0)=A$. Finalmente, el punto C’ es el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente, al estar C en el segmento BC, entonces se tiene que C’=C. De esta forma el triángulo A’B’C’=A’AC. Observamos que $\angle CAB=\angle CA'A=90^o$, además $\angle ACB=\angle ACA'$, de donde se tiene entonces que$\angle ABC=\angle CAA'$, utilizando el criterio AAA, los triángulos ACB y A’CA son congruentes.

Figura 42. Explicación presentada por Carmen.

En la solución reportada por Vera se ve que cometió los mismos errores de Carmen al ubicar los puntos A’ , B’ y C’ que son la reflexión de los puntos A , B y C con respecto a la recta BC, AC y AB. En consecuencia, trabajó un problema distinto ya que encontró el área de un triángulo diferente al del problema. Al leer la explicación de Vera se observa que entendió la reflexión de la misma forma que Carmen, es decir entiende que A’ debe estar en la intercepción de la recta BC con la recta perpendicular a BC que pasa por A, ver Figura 43.

Para reflejar el punto A sobre el segmento BC, se levanta una perpendicular desde el segmento dado y que pasa por el punto A, el punto de intersección entre estos dos es el punto A', el punto B' está en la misma posición que A y el punto C' se refleja en la misma posición que C.

Ahora para encontrar las coordenadas del punto A', encontremos las ecuaciones de la recta perpendicular y de la que pasa por los puntos C y B.

Figura 43. Explicación presentada por Vera.

Una hipótesis para explicar esta situación es que existe la posibilidad de que las estudiantes se reunieron para resolver el problema, es decir, una le explicó a la otra su forma de entender el problema y en consecuencia presentan los mismos errores. Otra hipótesis es que Carmen y Vera realizaron una mala interpretación del enunciado del problema, comprendiendo que cuando el problema hace referencia que el punto A se refleja sobre el segmento BC, ellas interpretan que el punto A′ debe estar directamente sobre el segmento BC, aplicando el mismo procedimiento con los otros puntos. Ambas situaciones demuestran que las estudiantes no manejan el tema de la reflexión a pesar de tener una formación matemática.

En la solución reportada por Hugo se ve que también cometió el mismo error que sus compañeras al realizar reflexión del punto A con respecto a CB, en consecuencia, el punto A' no corresponde a la reflexión de A, sino que es el punto medio de la reflexión original. Una hipótesis para explicar este error es que no maneja el tema de la reflexión al igual que sus compañeras, pero siguiendo su procedimiento se observa que Hugo aplicó correctamente la definición de reflexión con los puntos B y C en consecuencia la ubicación del punto B' y C' si corresponde a lo pedido en el enunciado del problema, ver Figura 44. El éxito de su procedimiento se debió a que realizó un cambio en el enunciado del problema, es decir estableció que para ubicar el punto B' usará la expresión "reflejado respecto a" en lugar de "reflejado sobre". Este aspecto demuestra que el error de Hugo es una mala interpretación del enunciado del problema, ver Figura 45.

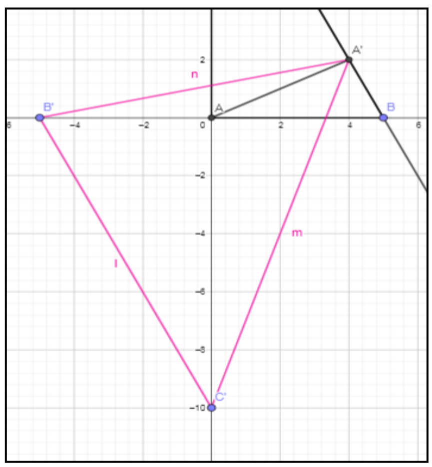


Figura 44. Reflexión de los puntos A', B' y C' y construcción del $\Delta A'B'C'$.

Para esta parte se considerará que B' es reflejado "respecto" a AC, y en lugar de "sobre".

Figura 45. Hugo cambió la terminología usada en la reflexión de B' y C'.

Obsérvese que Hugo presenta una lista de los recursos que necesitó para resolver el problema, esto permite ver la forma en cómo está comprendiendo el problema y la forma en cómo está relacionando los diferentes conceptos que intervienen en la solución, ver Figura 46.

Para la solución de este ejercicio se considerará:

- La ecuación de la recta que pasa por A’ y B’.
- La ecuación de la recta perpendicular del anterior punto.
- La propiedad de perpendicularidad de las rectas en geometría analítica.
- La intersección de las rectas del primer y segundo punto.
- La distancia de C’ a la intersección indicada en el punto anterior como altura del triángulo.
- La distancia de A’ a B’, como base del triángulo

Figura 46. Lista de recurso presentada por Hugo.

Implementación de un plan de solución:

Se debe resaltar que Carmen y Vera cometieron el mismo error al ubicar los puntos A’, B’ y C’ en consecuencia encuentran el área a un triángulo diferente al del problema original. La misma situación sucede con la solución reportada por Hugo, ya que él también cometió el mismo error al ubicar el punto A’. Tomando esto en cuenta se procede a analizar la estrategia usada para encontrar la solución.

La estrategia de Vera consistió en encontrar la medida del segmento A′B’ y A’C’ que son la base y la altura del triángulo A’B’C’. En su procedimiento estableció que usará el teorema de Tales para encontrar estas medidas, pero en realidad está utilizando la proporcionalidad que se puede establecer entre los lados de los triángulos semejantes, con este argumento demostró que no maneja el teorema de Tales y sus propiedades. Su procedimiento se resume en utilizar algunas razones y proporciones entre los lados de los triángulos semejantes, esto le permitió encontrar la medida de la base y altura que son los datos que necesita para calcular el área del triángulo A’B’C’, ver Figura 47. En este problema Vera utilizó GeoGebra para realizar la construcción de la figura del problema, ya que no hay evidencia de la realización de exploraciones y su estrategia viene precedida del análisis de la figura. Tampoco hay evidencia de la formulación de problemas de extensión o la generalización de resultados.

Para encontrar el área del triángulo $A'B'C'$ primero encontremos el valor del segmento BC usando Pitágoras

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{10^2+5^2} \\ &= \sqrt{125} \\ &= \sqrt{25(5)} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora encontramos cuanto miden los segmentos $A'B'$ y $A'C'$ usando Tales

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$\frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{10}{A'B'}$$

Así

$$A'B' = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando se tiene que

$$A'B' = 2\sqrt{5}$$

Ahora encontremos $A'C'$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$\frac{10}{5} = \frac{A'C'}{2\sqrt{5}}$$

Así

$$A'C' = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

Por último, se tiene que si $b = A'C'$ y $h = A'B'$ entonces

$$\boldsymbol{\acute{A}rea} = \frac{\boldsymbol{bh}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{(4\sqrt{5})(2\sqrt{5})}}{\mathbf{2}} = \mathbf{20}$$

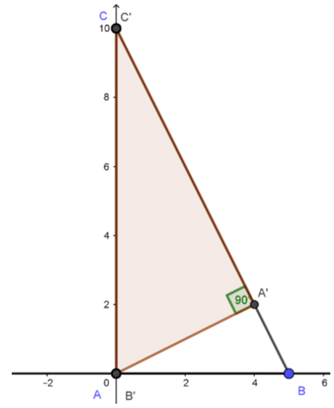
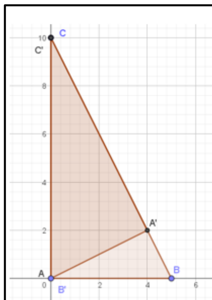


Figura 47. Solución reportada por Vera.

Para resolver este problema Carmen demostró que los triángulos ΔABC y $\Delta CA'A$ son semejantes utilizando el criterio de semejanza AAA. Posteriormente estableció algunas razones y proporciones entre los lados de los triángulos, esto le permitió establecer una razón entre las áreas de los dos triángulos ΔABC y $\Delta CA'A$ y encontrar la solución al problema, ver Figura 48. A pesar de presentar una construcción en GeoGebra se observa que Carmen no realizó ninguna exploración al modelo, sino que se limitó a utilizar la figura que brinda la herramienta. Esto quedó evidenciado al presentar una solución similar a la realizada en un ambiente estático donde las conjeturas y selección de la estrategia vienen precedidas del análisis de la figura.



Observamos que $\angle CAB = \angle CA'A = 90^o$, además $\angle ACB = \angle ACA'$, de donde se tiene entonces que$\angle ABC = \angle CAA'$, utilizando el criterio AAA, los triángulos ACB y A'CA son congruentes.

Utilizando el teorema de Pitágoras, se obtiene que la longitud del segmento BC es igual a

$$\sqrt{(AC)^2+(AB)^2} = \sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = \sqrt{25*5} = 5\sqrt{5}.$$

Observando que:

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{AB}{AA'} = \frac{BC}{AC} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{5\sqrt{5}}{5*2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces se tiene que:

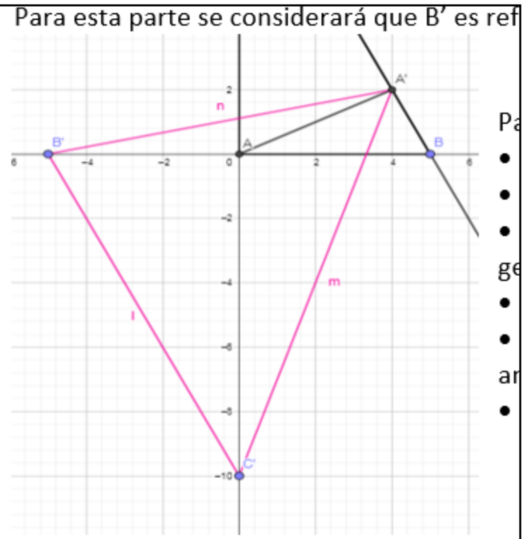
$$\frac{\frac{AB\cdot AC}{2}}{\frac{AA'\cdot A'C}{2}} = \frac{AB\cdot AC}{AA'\cdot A'C} = \frac{5\cdot 10}{AB\cdot AC} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 2} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad AB\cdot AC = (5\cdot 10)\frac{4}{5} = 40.$$

Por lo que el área del triángulo A'B'C' es igual a $\frac{AA'\cdot A'C}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Figura 48. Solución reportada por Carmen.

La estrategia usada por Hugo para resolver este problema fue encontrar la altura del triángulo $A'B'C'$ y la medida de la base B'A', ya que estos datos le permitían calcular el área del triángulo. Su procedimiento se resume en encontrar la ecuación de la recta $2y + 9x = 10$ que es perpendicular $A'B'$ que pasa por el punto C', se debe señalar que en este procedimiento Hugo cometió un error, ya que la ecuación es $2y + 9x = -20$. Posteriormente definió al punto P como la intercepción entre la recta $-2x + 9y = 10$ y la recta $2y + 9x = 10$, este punto sirvió de base para trazar la altura PC' del triángulo, luego utilizó el teorema de la distancia entre dos puntos para calcular la medida de B'A' y de PC' que es la base y altura del triángulo A'B'C'. A pesar de que Hugo agregó estos elementos auxiliares a la solución estos no se ven evidenciado en la figura que presentó del problema, ver Figura 49. Ya que no se observan los nuevos elementos, se puede concluir que Hugo analizó la figura que brinda GeoGebra y descubrió la estrategia que usaría para encontrar la solución. Y al no haber evidencia de los procedimientos algorítmicos se concluye que Hugo resolvió el problema con lápiz y papel y solo transcribió las respuestas de los procedimientos.

Para esta parte se considerará que B' es ref



Solución:

$l_{A'B'} = -2x + 9y = 10$

Perpendicular a $l_{A'B'}: l_0 \ = 9x + 2y = 10$

Intersección de $l_{A'B'}$con l_0: $P = (\frac{14}{17}, \frac{22}{17})$

Altura de $\Delta A'B'C$: $d(C', P) = 2\sqrt{\frac{545}{17}}$

Base de $\Delta A'B'C$: $d(A', B') = \sqrt{85}$

Por lo tanto

Figura 49. Solución reportada por Hugo

Extensiones:

Las características del problema y la creación de un modelo dinámico brindaron la oportunidad para que los estudiantes crearan problemas de extensión y generalizaran resultados. La solución reportada por Hugo presenta dos problemas de extensión. En el primer problema tomó como referencia el triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ y propuso analizar el comportamiento del área del triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ cuando A´ es un punto móvil en el lado BC. Nótese que no encontró la solución al problema, sino que solo propuso el problema y planteó una estrategia que podría servir de guía para encontrar la solución, ver Figura 50. Al observar estos elementos se puede pensar que Hugo exploró el modelo dinámico y encontró otras relaciones que le permitieron plantear el problema.

a) **Primera extensión**

Considere el punto $\boldsymbol{A'}$ como un punto móvil sobre el segmento BC.
Analice el área de $\Delta\mathrm{A'B'C}$ respecto al área de $\Delta\mathrm{ABC}$ cuando A' se mueve sobre el segmento.
¿Qué puede decir sobre las áreas de los triángulos cuando se mueve A'?
Si encuentra o no alguna relación entre las áreas, indique porqué ocurre esta relación o falta de relación.

Estrategias importantes: considerar las paralelas.

Figura 50: Primer problema de extensión presentado por Hugo.

Para el segundo problema Hugo estableció las siguientes consideraciones: $\mathrm{B'} = \mathrm{B},\ \mathrm{C'} = \mathrm{C}$. Observe que tomó como referencia el triángulo ABC y propuso encontrar la posición del punto $\mathrm{A'}$ de tal forma que el área del triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ sea el doble del triángulo ABC y otra posición en donde el área del triángulo $\mathrm{A'B'C'}$ sea mitad del área del triángulo ABC. Al analizar el problema se puede ver que está pensando en dos casos particulares, es decir solo se cuestionó estas dos relaciones entre las áreas sin ser capaz de llegar a la generalización. En este apartado tampoco hay evidencia de una solución, sino que solo propuso una estrategia que puede servir de guía, se puede suponer que considera que los problemas de extensión no se resuelven, sino que solo se proponen, en la Figura 51 se presenta el segundo problema de extensión.

b) Segunda extensión

Considere a $B' = B,\ C' = C$.

Refleje el punto A sobre el segmento BC. Llámelo P

Trace una circunferencia de radio AP.

Tome el punto A' sobre la circunferencia.

¿En qué posición debería colocar a A' para que el área de $\Delta A'B'C'$ sea dos veces la de ΔABC?

¿En qué posición debería colocar a A' para que el área de $\Delta A'B'C'$ sea la mitad de ΔABC?

Estrategias importantes: considerar la altura del triángulo.

Figura 51: Segundo problema de extensión.

Modelo Dinámico y uso de la herramienta:

Carmen y Vera solo utilizaron GeoGebra para construir la figura que el problema demanda, dejando un lado la construcción de un modelo dinámico y la realización de exploraciones. Con lo observado en esta fase se puede concluir que los estudiantes no se han apropiado de la herramienta, ya que existe un comando específico para realizar las reflexiones de puntos sobre una recta, este comando pudo haber ayudado a evitar el error al realizar las reflexiones de los puntos A, B y C. También se puede percibir que Carmen y Vera no sienten la necesidad de usar la herramienta para resolver el problema, ya que la estrategia que proponen viene precedida del análisis de la figura.

En la solución de Hugo se puede observar que utilizó la herramienta para construir la figura del problema, pero no hay evidencia de la incorporación de los nuevos elementos, es decir no agregó el punto P y la altura PC’ a la figura que construyó del problema, ver Figura 52. Además, con los elementos mostrados se concluyó que resolvió el problema con lápiz y papel y solo transcribió los resultados de los procedimientos, es decir su estrategia y conjeturas proceden del análisis de la figura que construyó en GeoGebra. Sin embargo, se puede observar que los problemas de extensión surgieron de la exploración de un modelo dinámico, ya que presentó algunos casos particulares del problema y además presentó algunas estrategias o pistas para encontrar la solución, estos elementos permiten concluir que utilizó la herramienta para formular los problemas.

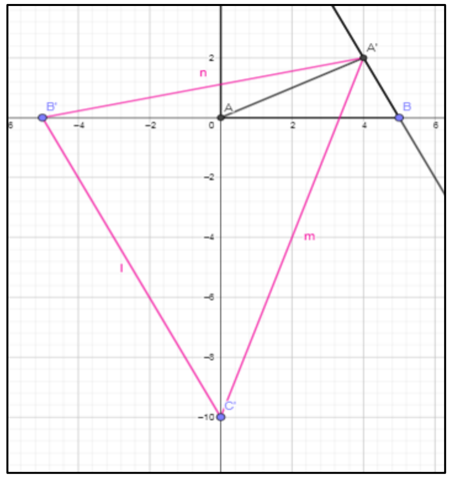


Figura 52: Construcción realizada por Hugo sin evidencia del punto P y de la altura PC'.

Conclusiones del análisis de la fase Final:

En conclusión, Carmen y Vera no cuentan con los recursos para resolver este problema, ya que no manejan el tema de la reflexión de un punto con respecto a una recta. Los errores que ellas presentaron al encontrar los puntos A’, B’ y C’ las llevó a encontrar el área de un triángulo diferente al del problema original. En el caso de Hugo cometió un error al encontrar A’, aunque esto podría atribuirse a una confusión causada por el leguaje usado en el enunciado del problema. Sin embargo, este error también lo llevó a trabajar un problema diferente al original. La principal hipótesis es que los tres estudiantes tuvieron contacto al resolver el problema, es decir un estudiante explicó a los demás su forma de entender el problema y por tal motivo los tres estudiantes cometieron el mismo error al encontrar A’.

En esta fase Carmen y Vera demostraron que no se han apropiado de GeoGebra para resolver problemas ya que únicamente utilizaron la herramienta para construir la figura que el problema demandaba. Es decir, no hay evidencia de la realización de exploración mediadas por la herramienta, sino que la selección de la estrategia y las conjeturas vienen precedidas del análisis de la figura. Por lo tanto, se concluye que existe algún grado de renuencia por parte de las estudiantes a incorporar la tecnología en el proceso de resolución de problemas, ya que las instrucciones del problema indicaban los elementos que se esperaban ver y en clases también se hizo énfasis en usar GeoGebra como un instrumento que promueve la reflexión matemática.

En el caso de Vera no reportó la solución al inciso d), sino que solo dejó expresada la conjetura, pero sin su respectiva demostración, con esto se puede concluir que no contaba con los recursos para resolver el problema y esto también quedó evidenciado en las otras fases del curso.

En la solución reportada por Hugo también se observa que cometió otros errores en los procedimientos algebraicos que afectaron en la solución. En cuanto al uso de la herramienta se puede observar que para encontrar la respuesta al problema solo usó GeoGebra para construir la figura, en cambio para formular los problemas de extensión creó un modelo dinámico y realizó exploraciones de algunos casos particulares.

Tabla 4.10. Resumen de la solución del problema 8.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Carmen	Procedimientos algorítmicos: Encontrar la pendiente de una recta. Encontrar la ecuación de una recta perpendicular. Encontrar el punto de intercepción de dos rectas. Utilizar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar el teorema de Pitágoras Hechos y definiciones: Def. de pendiente Def. de recta perpendicular. Congruencia de ángulos. Semejanza. Teorema de Pitágoras. Fórmula de área		Utilizó la herramienta para construir la figura del problema.	Cometió errores al ubicar los puntos A’ , B’ y C’ que son la reflexión de los puntos A , B y C respectivamente.
Vera	Procedimientos algorítmicos: Calcular la pendiente de una recta. Encontrar la ecuación de una recta perpendicular. Aplicar el teorema de Pitágoras Resolver sistemas de ecuaciones		Utilizó la herramienta para construir la figura del problema.	Cometió un error al ubicar los puntos A’ , B’ y C’ que son la reflexión de los puntos A , B y C respectivamente. proporcionalidad en triángulos semejantes.

Tabla 4.11. Resumen de la solución del problema 8.

Estudiante	Recursos	Heurísticas	Uso de la Herramienta	Errores o dificultades
Vera	Encontrar las coordenadas de un punto. Calcular el área de un triángulo Hechos y definiciones: Def. de pendiente Def. de recta perpendicular. Def. de recta Semejanza y sus propiedades. Teorema de Pitágoras. Proporcionalidad Fórmula de área. Fórmula de punto – pendiente			Confunde el teorema de Tales con la proporcionalidad en triángulos semejantes.
Hugo	Procedimientos algorítmicos: Calcular la pendiente de una recta. Encontrar la ecuación de una recta perpendicular. Aplicar el teorema de Pitágoras Resolver ecuaciones cuadráticas. Encontrar la intercepción de dos rectas. Encontrar las coordenadas de un punto. Evaluar funciones Calcular áreas Hechos y definiciones: Def. de reflexión Def. de pendiente Def. de recta perpendicular. Def. de recta Teorema de Pitágoras. Teorema de distancia entre dos puntos Fórmula de área. Fórmula de punto – pendiente	Agregar un elemento auxiliar.	Utilizó la herramienta para realizar la figura del problema. La exploración al modelo dinámico le permitió formular los problemas de extensión.	Cometió un error al ubicar el punto A’, ya que comprendió el enunciado del problema. Cometió un error al encontrar la ecuación de la recta perpendicular a $A'B'$ que pasa por el punto C’, ya que encontró la ecuación $2y + 9x = 10$ cuando en realidad la ecuación es $2y + 9x = -20$.

A continuación, se presenta una aproximación mediada por GeoGebra, con esta solución se demostrará que el problema se puede resolver de forma creativa y sin necesidad de realizar cálculos, ya que únicamente se necesita observar detenidamente la figura y agregar algunos elementos que comprueben las conjeturas.

Por los datos del problema se sabe que el triángulo ΔABC es un triángulo rectángulo que se encuentra construido sobre los ejes del plano cartesiano, tiene una base $AB = 5$ y altura $AC = 10$ y en consecuencia tiene un área de $25\ cm^2$. En esta aproximación se trabajará con el triángulo ΔABC pero se considera que EA es altura y BC es la base, también se trabajará con el triángulo $\Delta A'B'C'$ producto de la reflexión que tiene como base $B'C'$ y altura DA', ver Figura 53.

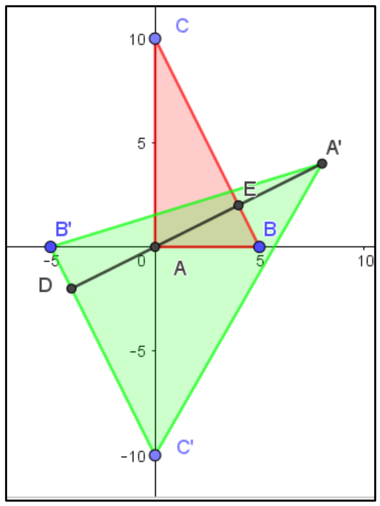


Figura 53. Triángulo $\Delta A'B'C'$ generado de la reflexión.

El primer objetivo es demostrar que las bases de los triángulos son congruentes, es decir $B'C' \cong BC$, esto se puede comprobar observando algunos elementos de la figura. Observe los triángulos $\Delta AB'C'$ y ΔABC son triángulos rectángulos por construcción, es decir el ángulo $\angle B'AC'$ y $\angle BAC$ son ángulos rectos. Se sabe que B'A $\cong$ BA porque B' es la reflexión de B. También se sabe que AC' $\cong$ AC porque C' es la reflexión de C. Ahora utilizando el criterio de LAL se concluye que, $\Delta AB'C' \cong \Delta ABC$ y en consecuencia $B'C' \cong BC$, ver Figura 54.

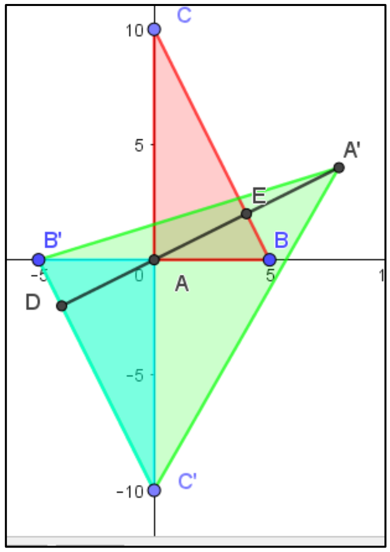


Figura 54. Segmento $B'C' \cong\ BC$

Ahora se necesita demostrar que la altura del triángulo ΔA′B′C′es tres veces la altura de triángulo ΔABC, se debe demostrar que DA ≅ EA, para ello se consideraran los triángulos ΔAB′D y ΔABE. Por la congruencia de triángulos se sabe que el ángulo ∠AB′D ≅ ∠ABE. Además, se sabe que B’A ≅ BA porque B’ es la reflexión de B y se tiene que el ángulo ∠B′AD ≅ ∠BAE por ser ángulos opuestos por el vértice. Ahora al utilizar el criterio de ALA se concluye que ΔAB′D ≅ ΔABE, en consecuencia, se concluye que DA ≅ EA. De igual forma se sabe que EA ≅ EA′ ya que A’ es la reflexión de A. Con esto se concluye que la altura del triángulo ΔA′B′C′es tres veces la altura de triángulo ΔABC, es decir DA′ ≅ 3EA, ver Figura 55.

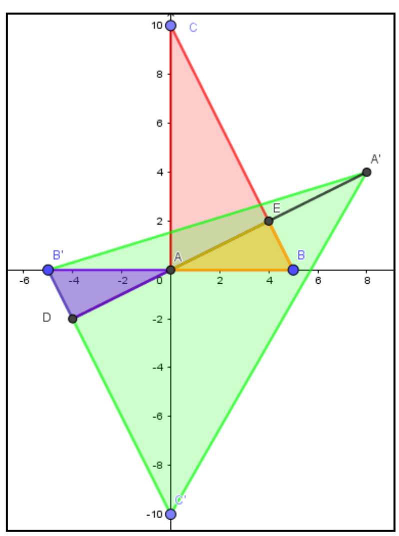


Figura 55. $DA' \cong 3EA$.

Al encontrar estas relaciones se puede concluir que el área del triángulo $\Delta A'B'C'$ es 3 veces el área del triángulo ΔABC. Con esto queda demostrado que no se necesita realizar ningún procedimiento sofisticado para responder el que área del triángulo $\Delta A'B'C'$ es de $75\ \text{cm}^2$.

Después de descubrir que el triángulo $\Delta A'B'C'$ obtenido de las reflexiones de los puntos A, B y C tiene 3 veces el área del triángulo ΔABC, surge la interrogante de qué sucede si se cambia la razón entre los lados del triángulo ΔABC o qué sucede si los valores considerados son números reales. Gracias a la movilidad que proporciona GeoGebra se puede verificar fácilmente esta interrogante. En la Figura 56 se puede observar que no importa la relación entre la base y la altura ya que la relación de 3 a 1 entre las áreas de los triángulos se mantendrá. Lo mismo sucede si la base y la altura son números reales, esta relación siempre será 3 a 1. Este tipo de preguntas y la movilidad de la herramienta promueven la generalización de resultados y la formulación de problemas de extensión.

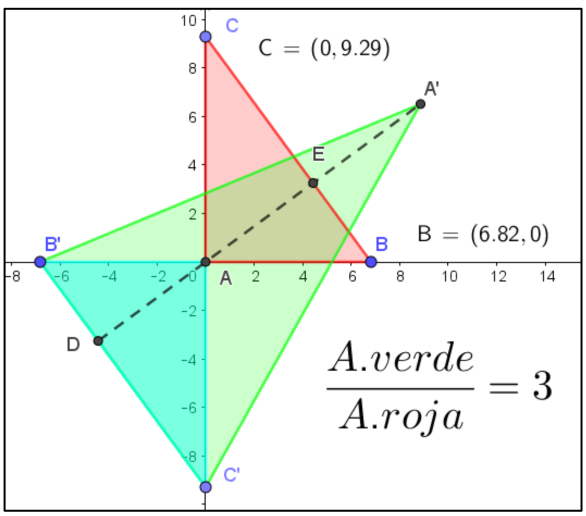


Figura 56. Relación de 3 a 1 entre las áreas de los triángulos.

A continuación, se presenta otra aproximación en donde se utilizan otro tipo de recursos, en este caso determinantes. Si se considera que ya se conocen los vértices del triángulo $\Delta A'B'C'$, existe un camino que ahorraría el proceso algebraico de calcular el área del triángulo. Este método consiste en usar determinante para realizar este cálculo.

Sabemos que $A' = (8,4), B' = (-5,0)$ y $C'(0-10)$

$$Área\ = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|(8 \times 0) + (0 \times 4) + (-10 \times -5) - (0 \times 0) - (8 \times -10) - (4 \times -5)|$$

$$= \frac{1}{2}|50 + 80 + 20|$$

$$= \frac{1}{2}(150)$$

$$75\ cm^2$$

Con este método se obtiene el resultado luego de realizar unas pocas operaciones aritméticas, si se considera el nivel académico y el nivel de conocimiento de los estudiantes de maestría, no está demás pensar que podían resolver el problema de esta manera, además de que tenía acceso a la red en donde se encuentra con facilidad esta información.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las respuestas a las preguntas de investigación y algunas reflexiones relacionadas con los resultados del estudio. El uso del Sistema de Geometría Dinámica (GeoGebra) para resolver problemas, contribuye a que los estudiantes planteen preguntas, construyan modelos dinámicos, realicen exploraciones, formulen conjeturas, analicen los conceptos matemáticos, propongan problemas de extensión y generalicen resultados. A partir del análisis del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas se responde las preguntas de investigación.

¿Qué formas de razonamiento exhiben los estudiantes durante las distintas etapas de resolución de los problemas en términos de los recursos y estrategias que utilizan en la construcción de modelos y procesos de solución de las tareas?

La transición que muestran los estudiantes al representar y explorar un problema con el uso de lápiz y papel hacia la construcción y exploración en forma dinámica se relaciona con sus procesos de apropiación de la herramienta. En este contexto, Carmen mostró cierta renuencia hacia el uso de la herramienta en el proceso de resolución de problemas. Se observó que las representaciones de los problemas que usó corresponden a los que se emplean con el uso de lápiz y papel, es decir empleo modelos estáticos para identificar propiedades matemáticas. En cuanto a los recursos Carmen identificó relaciones entre el significado de la derivada, diferenciabilidad, raíces y límite lo que le permitió encontrar la solución a los 5 problemas de cálculo de la fase inicial. En la fase intermedia Carmen demostró dominio de las propiedades geométricas de los triángulos y círculo, lo que le permitió establecer una relación entre las propiedades de la cuerda de una circunferencia y posición límite del punto P en el problema 6. En el problema 7 estableció relaciones entre las propiedades de los triángulos equiláteros y el perímetro mínimo de un triángulo inscrito, pero abandonó la solución debido a la dificultad que implicaba realizar los procedimientos algorítmicos. En la fase final exhibió cierta para representar la reflexión de los puntos con respecto a una recta y por lo tanto resolvió un problema diferente al original.

En el caso de Vera se observó cierta intermitencia en el uso del SGD, es decir, para algunos problemas creó un modelo dinámico y en otros utilizó una representación propia de las soluciones en lápiz y papel. En consecuencia, en algunas soluciones hay evidencia de exploraciones al modelo dinámico y de la formulación de conjeturas y en otras solo se observó la solución que dependía del análisis de la figura construida con la herramienta. Al hacer referencia a sus recursos se puede observar que tuvo un buen desempeño en la fase inicial ya que encontró la solución a los 5 problemas de cálculo y estableció relaciones entre el significado de la derivada, diferenciabilidad, raíces, divisibilidad y límite. En la fase intermedia su desempeño se ve afectado, ya que a pesar de que realizó exploraciones a los modelos dinámicos cometió errores al momento de seleccionar la estrategia y de implementar el plan de solución correspondiente. En particular en el problema 6 se observó que el arrastre realizado en la exploración le permitió verificar visualmente que el punto P se mueve a la derecha y que tendrá límite, pero cometió un error al momento de aplicar el teorema del cateto que hace referencia a que un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. En el problema 7 el movimiento controlado y la medición de los objetos matemáticos le permitieron plantear una conjetura respecto a la posición de los vértices, pero únicamente dejó plasmada la conjetura y no la demostró. A pesar de que en esta fase utilizó la herramienta, se puede observar que no contaba con los recursos para resolver los problemas y eso afectó su desempeño. En la fase final también cometió un error al realizar la reflexión de los puntos respecto a una recta y por lo tanto resolvió un problema distinto al original en donde únicamente usó GeoGebra para construir la figura que requería el problema.

Hugo fue el estudiante que demostró mejor desempeño en las diferentes fases del curso, ya que consiguió realizar la transición de razonar los problemas con ayuda de GeoGebra, es decir logró apropiarse de la herramienta y usarla cómo un instrumento para resolver problemas. También es el estudiante que utilizó más heurísticas propias de GeoGebra en las diferentes fases, por ejemplo, en el problema 7 inciso b) utilizó el arrastre para convertir un problema particular a uno general y utilizó el modelo dinámico cómo un medio de verificación de resultados. En el inciso d) del mismo problema, el movimiento controlado le permitió observar el rastro de algunos puntos y analizar su comportamiento, lo que le permitió formular una conjetura acerca de la posición de los vértices. En cuanto a los recursos, Hugo demostró dominio de los conceptos de cálculo y de los procedimientos algorítmico lo que le permitió resolver los problemas de la fase inicial, posteriormente presentó dificultad en la comprensión del problema 6, que lo llevó a trabajar un problema distinto al original. En la fase final también mostró problemas en la comprensión del enunciado del problema cometiendo un error al encontrar la reflexión de uno de los puntos y en consecuencia trabajando un problema diferente al planteado.

Los resultados de este estudio permiten concluir que el proceso de apropiación de un Sistema de Geometría Dinámica debe abordarse directamente a través de estrategias dirigidas donde el estudiante gradualmente construya y explore los problemas en términos de las permisiones o comandos que ofrece la herramienta. En este caso en particular Carmen fue la estudiante que demostró mayor dificultad para realizar la transición y para poder apropiarse de la herramienta a lo largo del curso. Su renuencia a incorporar GeoGebra al proceso de resolución de problemas se puede atribuir a que no siente la necesidad de utilizar esta herramienta para resolver problemas. Esta actitud hacia el uso de la tecnología también podría ser causada por las creencias que la estudiante tiene hacia las matemáticas y la resolución de problemas. En el caso de Vera a pesar de que realizó la transición y pudo realizar exploraciones a los modelos dinámicos sus recursos limitados impidieron que la herramienta le ayudara a buscar y sustentar relaciones importantes para la solución de los problemas. Hugo fue el estudiante que realizó mejor la transición de razonar los problemas con GeoGebra, pero presentó dificultad para comprender los enunciados de los problemas y eso lo llevó a trabajar dos problemas diferentes a los establecidos en las tareas.

2. ¿Qué distingue a los acercamientos que muestran los participantes al resolver los problemas relacionados con los procesos de apropiación de la herramienta durante el desarrollo del curso, fase inicial, intermedia y final?

Claramente, algunos estudiantes desarrollaron más habilidades que otros en cuanto al uso de GeoGebra para resolver problemas. Sin embargo, interesa resaltar la forma en cómo los estudiantes se iban apropiando de la herramienta a medida resolvían problemas y trascurría el curso de resolución de problemas.

En la fase inicial Carmen, Vera y Hugo resolvieron los 5 problemas de cálculo, pero no demostraron evidencia del uso de GeoGebra o de otra herramienta tecnológica. Este era un resultado esperado, ya que no se hizo énfasis en las instrucciones y además los estudiantes no están familiarizados con la incorporación de la tecnología en el proceso de resolución de problemas. Esto se relaciona con sus acercamientos previos a los problemas y a sus creencias. Es decir, ellos conciben que resolver problemas es presentar una solución formal y precisa en donde demuestran dominio de los conceptos y procedimientos algorítmicos que el problema demanda.

El primer acercamiento de Carmen a la solución de problemas mediados por GeoGebra se observó en el problema 6 de la fase intermedia. La exploración al modelo dinámico y el arrastre le permitió observar la forma en cómo disminuía la medida de uno de los ángulos a medida se movía el punto móvil. Sin embargo, la exploración no brindó suficientes elementos para plantear una conjetura o para establecer relación que conduzcan a la solución de problema, en cambio se concluye que en esta aproximación únicamente utilizó la herramienta para hacer una construcción precisa del problema, ya que sus conjeturas y su solución vienen precedidas del análisis de la figura. Por otro lado, en el problema 7 no hay evidencia del usó de GeoGebra para resolver el problema, a pesar de que las instrucciones eran claras con respecto a los elementos que se pedía representar y que el problema daba la oportunidad para crear un modelo dinámico. En la solución reportada del problema 8 de la fase final no hay evidencia de la construcción de un modelo dinámico, sino que usó GeoGebra solo para construir la figura del problema. Con el desempeño mostrado se puede concluir que Carmen mostró limitaciones en el uso de la herramienta a lo largo del curso y que exhibió cierta resistencia para incorporarla en el proceso de solución de problemas, ya que las instrucciones del problema exigían la construcción de un modelo dinámico y la realización de exploraciones. Una de las principales hipótesis es que ella no sintió la necesidad de incorporar este instrumento, ya que para ella es suficiente con presentar una solución corta y correcta.

En el caso de Vera el primer indicio de resolver problemas mediados por GeoGebra se observó en el problema 6 en donde la exploración al modelo dinámico le permitió realizar una comprobación visual acerca del movimiento del punto R, pero su exploración no fue significativa al momento de elegir la estrategia para resolver el problema. En el problema 7 realizó una exploración más estructurada, en donde el arrastre y la medición le permitió observar cómo cambiaba la medida de los ángulos, lados y perímetro conforme se movían los vértices del triángulo inscrito. La exploración le permitió plantear una conjetura respecto a la posición de los vértices y el perímetro mínimo. Para finalizar en el problema 8 Vera utilizó GeoGebra únicamente para construir la figura del problema, sin dejar evidencia de la realización de exploraciones. Con estos elementos se puede observar cómo Vera se fue apropiando de la herramienta lo largo del curso, empezando por una exploración que le permitió realizar una comprobación visual evolucionando a una exploración que le permitió la formulación de conjeturas.

En las soluciones reportadas por Hugo se puede observar que su primer acercamiento a la resolución de problemas mediado por GeoGebra lo realizó en el problema 6, donde la exploración al modelo dinámico le permitió realizar una verificación visual sobre el comportamiento del problema y presentar argumentos geométricos que explican la razón porque R se mueve a la derecha. En el problema 7, se observó una evolución con respecto al uso de la herramienta, ya que el arrastre y la medición que realizó le permitieron plantear una conjetura que transformó el inciso b) de un caso particular a un caso general.

En esta solución también utilizó GeoGebra cómo un instrumento de verificación, para ello creó un modelo dinámico que le permitía encontrar el perímetro de un triángulo inscrito sabiendo la posición de los vértices, en su modelo dinámico tomó como referencia el eje x del plano cartesiano y un punto móvil sobre el eje. En el inciso d) del mismo problema, el arrastre, la medición y el rastro que utilizó en la exploración le permitieron establecer relaciones entre la posición de los vértices y perímetro del triángulo inscrito, lo que dio lugar a la visualización de lugares geométricos y a formular una conjetura sobre la posición de los vértices del triángulo PQR. La exploración realizada en el problema 8 le permitió analizar casos particulares del problema y formular dos problemas de extensión.

Los resultados de este estudio permiten observar la importancia de guiar a los estudiantes durante el proceso de apropiación de la herramienta en la resolución de problemas. La apropiación de la herramienta resulta esencial en la construcción de los modelos dinámicos de los problemas. La exploración de los modelos les permitió explorar y analizar relaciones entre los elementos de los modelos, establecer nuevas relaciones entre los conceptos y resolver los problemas. Además, permitió que los estudiantes se enfrentaran a la resolución de problemas de una forma diferente a un escenario estático, ya que las exploraciones al modelo dinámico brindan la oportunidad para que los estudiantes plantean conjeturas a base de argumentos visuales, formulen nuevos problemas al cuestionarse aspectos sobre la construcción de figuras y establezcan nuevas relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos. También se observó que los estudiantes utilizaron heurísticas propias de GeoGebra como ser el movimiento controlado de puntos, la medición de objetos matemáticos y el trazo de lugares geométricos. Asimismo, gracias a la exploración y análisis de relaciones, fue posible que los estudiantes generalizaran resultados y la formularan nuevos problemas. En particular Hugo mostró mejor dominio y apropiación de la herramienta, además el desempeño mostrado permitió observar cómo iba evolucionando su forma de utilizar la herramienta a lo largo del curso y la forma en cómo mejoraron sus exploraciones. Por parte de Vera se observó un uso intermitente de la herramienta, ya que existen problemas en donde la utilizó para construir la figura. En el caso de Carmen ella únicamente usó la herramienta para construir la figura, mostrando cierta oposición a incorporar la herramienta al proceso de resolución de problemas.

Usos de GeoGebra durante el curso:

Exploración: el arrastre permitió que Hugo y Vera estudiaran la familia de triángulos equiláteros inscritos y observaran la forma en cómo cambia la medida de los lados, ángulos y perímetro.

Búsqueda de patrones: establecer una relación entre la altura de los puntos móviles al eje x y el perímetro del triángulo inscrito permitió que Hugo encontrará lugares geométricos que le permitieron identificar la posición de los vértices del triángulo PQR.

Verificación: Una vez resuelto el inciso b), Hugo creó un modelo dinámico el cual le permitió crear una familia de triángulos PQR inscritos, los cuales depende del movimiento del punto E sobre el eje x. Este modelo le permitió encontrar el perímetro de cualquier triángulo inscrito sabiendo la posición de los vértices.

Argumentación: Hugo logró ofrecer un argumento geométrico para explicar el movimiento del punto R en el problema 6, apoyándose en información visual ofrecida por el software.

Conexiones y extensiones: Hugo logró formular dos problemas de extensión gracias a la exploración del modelo dinámico y el estudio de casos particulares. También le permitió generalizar uno de los problemas.

Construcciones de figuras: construir la figura del problema fue uno de los principales usos que los estudiantes de dieron a GeoGebra.

Referencias

Baldi, S. (2014). Introducing Online Learning in a Small Organization: The Case of the Diplomatic Institute of the Italian Ministry of Foreign Affairs. En G. Vincenti, A. Bucciero, & C. Vaz de Carvalho (Eds.), *E-Learning, E-Education, and Online Training.* (págs. 30-40). Switzerland: Springer.

Borba, M. C., Engelbrecht, J., & Llinares, S. (2021). Using Digital Technology and Blending to Change the Mathematics Classroom and Mathematics Teacher Education. En K. Hollebrands, R. Anderson, & K. Oliver (Eds.), *Online Learning in Mathematics Education* (págs. 20-40). Springer.

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM Mathematics Education, 39*, 459–473. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-007-0042-3

García-Morales, V., Garrido-Moreno, A., & Martín-Rojas, R. (2021). Transformation of Higher Education After the COVID Disruption: Emerging Challenges in an Online Learning Scenario. *Front. Psychol. 12:616059.* https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.616059

Hodge-Zickerman, A., York, C. S., & Lowenthal, P. R. (2021). Teaching Mathematics Education Online:Instructional Theories, Strategies and Technologies. En K. Hollebrands, P. Anderson, & K. Oliver (Eds.), *Educations, Online Learrnig in Mathematics* (págs. 1-20). Springer.

Marinoni, G., Land, V., H., & Jensen, T. (2020). *The Impact of Covid-19 on Higher Education Around the World. IAU Global Survey Report.* Paris : The International Association of Universities (IAU).

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in High School Mathematics:Reasoning and sense making.*

National Council of Teachers of Mathematics. (2010). Mathematics Curriculum. Issues, Trends, and Future Directions. En B. Reys, R. Reys, & R. Rubenstein (Eds.). The Council, Reston, VA.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2015). *Education 2030 Incheon Declaration and Framework for Action: Towards inclusive and equitable quality education and lifelong learning for all.* Obtenido de http://documents.worldbank.org/curated/en/167341467987876458/Incheon-declaration-education-2030-towards-inclusive-and-equitable-quality-education-and-lifelong-learning-for-all

Perry, E. H., & Pilati, M. L. (2011). Online Learning. *New Directions for Teaching and Learning*(128), 95-104. https://doi.org/10.1002/tl.472

Polya, G. (1945). *How it solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Poveda, G. (2019). Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales en un curso masivo en línea. *(Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México.* https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26632.47367

Rivera, A., & Santos, M. (2011). Caracterización, Desarrollos y prospectivas de la Educación Matemáticas. En L. F. Reséndis, & L. M. Tovar (Eds.), *Las matemáticas a través de los 50 años de la ESFM del IPN. Publicaciones especiales de la Serie Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana. Comunicaciones 42* (págs. 185–207).

Santos. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* Trillas.

Santos -Trigo, L. M. (2007). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Matemática, Cuadernos de investigación y Formación en Educación*, *8*(6), 35-54.

Santos-Trigo, L. M. (2007a). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM, 8 (6)*, 523-536.

Santos-Trigo, L. M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes on the use of computational tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog (Eds.), *Technology implementation and teacher education: Reflective models* (págs. 296-313). IGI Global: Hersey PA.

Santos -Trigo, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos.* Trillas.

Santos -Trigo, L. M. (2014a). Problem solving in mathematics education. En E. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 496-501). Springer.

Santos- Trigo, M. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. En A. Ruis (Ed), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (págs. 333-346). Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Santos-Trigo. L, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (eds), *Mathematical Problem Solving. ICME-13 Monographs. Springer, Cham* (págs. pp. 63-89). https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Santos -Trigo, L. M. (2019a). La resolución de problemas matemáticos. Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital. *XV CIAEM-IACME,*. Medellín, Colombia.

Santos -Trigo, L. M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. En S. Lerman (Eds), *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 686-693). Springer, Cham. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast,, 1&2*, 279-302. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268

Santos-Trigo, M., & Espinosa-Pérez, H. (2010). High School Teachers use of Dynamic Software to generate serendipitous mathematical relations. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(1), 31-46. https://doi.org/https://doi.org/10.54870/1551-3440.1173

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2014). The Coordinated Use of Digital Technologies in Learning Environments. En L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao, & D. Liberona (eds), *Learning Technology for Education in Cloud. MOOC and Big Data. LTEC 2014. Communications in Computer and Information Science* (Vol. 446, págs. 61–71). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10671-7_6

Santos-Trigo, M., & Reyes-Rodríguez. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(3), 313-336. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.543159

Santos-Trigo, M., Hugo, E.-P., & Reyes-Rodríguez, A. (2008). Conecting dynamic representations of simple mathematical objets whit the construcción and exploraction of conic sections. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(5)*, 657-669. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/00207390701871465

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Gouws(Ed.), *NCTM Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problema solving* (págs. 53-70). Hillsdale NJ:Lawrence Earbaum Associates.

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can´t solve nonroutine problems. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning.*, 19-26. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4303.7208

Apéndice A

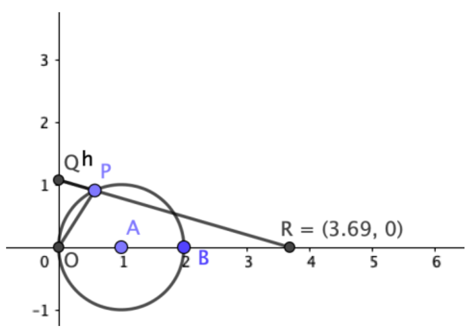
Tareas asignadas en clase.

Tarea 1: Resolver los 5 problemas presentes en el artículo de Selden et al. (1994).

1) Encuentra valores para a y b tales que la línea $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica $f(x) = bx^2$ en el punto en que $x = 3$.
2) ¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ alguna raíz entre -1 y 0? ¿Por qué sí o por qué no?
3) Sea $f(x) = \begin{cases} ax, & si\ x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & si\ x > 1 \end{cases}$. Encuentra a y b tales que f es diferenciable en 1.
4) Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o explica porque no existe solución.
5) ¿Hay algún a tal que $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 3ax + x - a - 1}{x^2 - 2x - 3}$ existe? Explica tu respuesta.

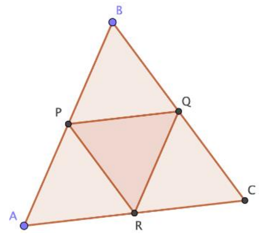
Tarea 2:

6) En la figura se dibuja un círculo con centro en (1, 0) y radio 1. Selecciona un punto P sobre la circunferencia y un punto Q sobre el eje Y de tal manera que OP = OQ. Trace la recta QP que interseca al eje X en el punto R. ¿Pruebe que, si P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha, ¿existe un límite para la posición de R? Justifique su repuesta.



Tarea 3: Resuelva los siguientes problemas haciendo uso de GeoGebra. Identifica los conceptos y estrategias que resulten importantes en la resolución de los problemas.

7) La figura representa un triángulo equilátero con lado 6 cm.



a) Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC & CA, ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?
b) Suponemos ahora que P, Q & R divide a los lados en: AR = 2; RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2 & PA = 4, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?
c) ¿Qué perímetro de los casos a & b es mayor?
d) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

Tarea 4: Introducción. Las tareas y problemas son el vehículo para que los estudiantes desarrollen recursos, estrategias y formas de razonamiento matemático. En el curso se ha enfatizado que los problemas son un punto de partida para que los estudiantes se involucren en actividades matemáticas. En este contexto, los mismos ejercicios que aparecen en los libros de texto se pueden transformar en otros problemas o actividades al modificar condiciones iniciales o extender el dominio a casos generales. Además, resulta importante siempre buscar diferentes maneras de resolver un problema y considerar la posibilidad de construir modelos dinámicos de los problemas con la intención de buscar nuevas soluciones o extensiones.

Resuelve los siguientes problemas y formula otros problemas relacionados que pueden aparecer cuando representes los enunciados con un modelo dinámico. Identifica los conceptos y estrategias que resulten importantes en la resolución de los problemas.

8) Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son A (0, 0), B (5, 0) & C (0, 10). El punto A se refleja sobre el segmento BC y se obtiene A'. Encuentre las coordenadas del punto A'. Sea B' el punto reflejado de B sobre AC y C' el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente. Encuentre el área del triángulo A'B'C'.

Apéndice B

Soluciones reportadas por los estudiantes:

Problema 1: Encuentra valores para a y b tales que la línea $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica $f(x) = bx^2$ en el punto en que $x = 3$.

Solución reportada por Carmen:

Evaluando en f en $x = 3$ obtenemos $9b$ y recordando que la derivada es la pendiente de la recta tangente, entonces se satisface que $f'(x) = 2bx$, de donde se sigue que la recta tangente a f en el punto $(3{,}9b)$ tiene pendiente $f'(3) = 6b$, por lo que la ecuación de la recta $es\ y = 6b(x-3) + 9b = 3b(2x-3)$. Recordando que la recta tangente es $2x + 3y = a$, la cual es equivalente a $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{a}-2\mathrm{x}}{3}$, de donde debe satisfacerse:

$$6\mathrm{bx} = -\frac{2\mathrm{x}}{3} \Rightarrow \mathrm{b} = -\frac{1}{9} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{a}}{3} = -9\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{a} = -27\mathrm{b} = \frac{27}{9} = 3.$$

Entonces la recta tangente a $f(x) = -\frac{\mathrm{x}^2}{9}$ en $x = 3$ es $2x + 3y = 3$.

Solución reportada por Vera:

Se debe encontrar valores de a y b de tal forma que la línea dada sea tangente a $f(x) = bx^2$, para ello primero calculemos la primera derivada de $f(x)$ la cual es la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = 2xb \cdots (1)$$

Ahora reescribamos la ecuación de la línea en términos de y

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{a}{3} \cdots (2)$$

Como lo que se quiere calcular es la recta tangente en el punto donde
$x = 3$, hay que evaluar a (1) en este punto.

$$f'(3) = 2(3)b = 6b \cdots (3)$$

E igualar con la pendiente de (2), es decir,

$$6b = -\frac{2}{3} \cdots (4)$$

Despejando b de (4) se tiene que

$$b = -\frac{2}{3(6)} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Para encontrar el valor de a primero hay que encontrar el valor de y cuando $x = 3$, para ello basta con sustituir el valor de x y b en $f(x) = bx^2$, lo cual da lo siguiente:

$$f(3) = -\frac{1}{9}(3)^2 = -\frac{1}{9}(9) = -1 \cdots (5)$$

Así $(x, y) = (3, -1)$, sustituyendo estos valores en $2x + 3y = a$ se tiene que

$$2(3) + 3(-1) = a$$

$$3 = a$$

Por lo que $2x + 3y = a$ es tangente a la gráfica de $f(x) = bx^2$ cuando $a = 3$ y $b = -\frac{1}{9}$

Reflexión: Comúnmente los problemas que se resuelven en los primeros cursos de cálculo tienen situaciones específicas para calcular la tangente de funciones en puntos exactos, pero en este problema se pide encontrar valores de a y b que hagan que la ecuación dada sea tangente a la gráfica de la función que se presenta en un punto específico, lo que se sale de lo que normalmente se resuelve en estos cursos.

Solución reportada por Hugo:

Nótese que

$$f'(3) = 2b(3) = 6b = m_f$$

Representa la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de f(x) en el punto $(3, f(3))$

Por otra parte, de la ecuación de la recta $2x + 3y = a$ se tiene que su pendiente es

$$m_l = -\frac{2}{3}$$

De tal forma que, para la pendiente de la recta que es tangente a la gráfica de la función en el punto $(3, f(3))$, debe ocurrir

$$m_f = m_l$$

En consecuencia

$$6b = -\frac{2}{3}$$
$$b = -\frac{1}{9}$$

Entonces

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2$$

A su vez, debe ocurrir que $\big(3, f(3)\big) = (3, -1)$ también sea un punto sobre la recta, por lo que sustituyendo se tiene

$$2x + 3y = a$$

$$2(3) + 3(-1) = a$$
$$6 - 3 = a$$
$$3 = a$$

De donde se concluye que los valores requeridos para que ocurra lo esperado son

$$a = 3$$
$$b = -\frac{1}{9}$$

Reflexión: En las formas de abordar el problema se muestra una tendencia marcada al uso de los conocimientos en geometría analítica como herramienta principal, en contraste con las herramientas de calculo que podrían dar solución rápida al problema. Si bien la forma de abordar el problema con las herramientas de geometría analítica no es despreciable, es claro que las herramientas de cálculo son mejores para abordar este y cada uno de los siguientes problemas.

Una razón posible para la cual los alumnos hayan procedido de tal forma es que los alumnos acababan de pasar por el curso de cálculo (no me queda claro si fue así o cuanto tiempo habría pasado desde que aprobaron el curso), por lo que las habilidades de uso de las herramientas del mismo curso aún no habían sido concretadas, en contraste con las herramientas de geometría analítica que ya habían cursado al menos hace 6 meses.

Otra posible explicación podría ser que concretar el uso de herramientas de variación (cálculo) requiere de habilidades particulares como la solución de "problemas algebraicos no rutinarios".

Conocimientos, habilidades o preguntas requeridos para la solución:

- Concebir a una recta tangente y a la derivada de una función como objetos íntimamente relacionados a través de la representación de la derivada y la pendiente de la recta.
- ¿Cuál es la derivada de la función? ¿Qué representa dicha derivada en relación con una recta tangente?
- ¿Cuál es la pendiente de la recta?
- ¿En qué punto de la función la recta es tangente? ¿Ese punto que pertenece a la función, también pertenece a la recta? ¿por qué?

Problema 2: ¿Tiene $\mathrm{x}^{21}+\mathrm{x}^{19}-\mathrm{x}^{-1}+2=0$ alguna raíz entre *-1* y *0*? ¿Por qué sí o por qué no?

Solución reportada por Carmen:

Definimos $f(x)=x^{21}+x^{19}-x^{-1}+2$, por una parte observamos que:

$$f'(x)=21x^{20}+19x^{18}+x^{-2}$$

Esta expresión está compuesta de términos que son positivos en $[-1,0)$, utilizando el criterio de la primera derivada se satisface que *f* es creciente en $[-1,0)$. Por otro lado, se satisface que $f\ (1)\ =1$, al ser f es creciente en $[-1,0)$ se cumple que $f(x)\geq 1$, cuando $x\in[-1,0)$, ya que f es creciente en $[-1,0)$, por lo que se concluye que *f* no tiene raíces en $[-1,0)$.

Solución reportada por Vera:

Analizando la ecuación se puede ver que no está definida en $x\ =\ 0$, además si $x\ =\ -1$ se tiene que

$$(-1)^{21}+(-1)^{19}-(-1)^{-1}+2=1\neq 0$$

Es decir, en -1 no existe una raíz, ahora para saber que no hay alguna raíz en $(-1,0)$ tomando en cuenta la derivada del polinomio

$$\frac{d}{dx}[x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2] = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$$

Se puede ver que la derivada es siempre positiva para todo punto en el que está definida la ecuación, lo que implica que la gráfica del polinomio es siempre creciente, por lo que cualquier valor que se tome en $(-1, 0)$ dará un número mayor que cero. Tomando en cuenta lo anterior se concluye que no existe ninguna raíz que pase por dicho intervalo.

Reflexión: Los problemas de resolución de ecuaciones normalmente son de grados pequeños o de ecuaciones que pueden ser descompuestas en factores, pero en este caso se presenta una ecuación de grado 21 y sin factores en los que se pueda descomponer.

Solución reportada por Hugo:

Consideremos al polinomio como la función

$$f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$$

De donde se observa que, para $x = -1$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^{21} + (-1)^{19} - (-1)^{-1} + 2 \\ &= -1 - 1 + 1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, el punto $(-1,1)$ pertenece a la gráfica de la función. Por lo que bastaría encontrar algún valor x_1 en el intervalo (-1,0) tal que

$$f(x_1) \leq 0$$

Sin embargo, nótese que

$$f'(x) = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$$

$$f'(x) > 0 \; para \; todo \; x \; en \; (-1,0)$$

Es decir, la función $f(x)$ es creciente en todo el intervalo por lo que no tomará valores negativos en el mismo.

<u>En conclusión, el polinomio $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ no tiene raíces en entre -1 y 0</u>

Reflexión: En el abordaje a este problema se muestra, en contraste con el anterior, un mayor uso sobre el intento de usar herramientas de cálculo y álgebra, pero sin avances significativos en su uso. Ciertamente, en este ejercicio se requiere una interiorización casi profunda sobre el comportamiento de los polinomios y su análisis con herramientas de cálculo.

Conocimientos, habilidades o preguntas requeridos para la solución:

- Tener interiorizada la relación numérica de los valores que adopta una función y sus derivadas con su representación gráfica, los conceptos de continuidad y los polinomios.
- ¿Qué relación guardan los polinomios con las gráficas de funciones? ¿Cómo se identifica que un polinomio tiene raíces según su gráfica?
- De la gráfica de una función, ¿cómo se comportan los valores que toma la función en los distintos cuadrantes?
- Si una función es continua en un intervalo, ¿qué se esperaría que pasara con los valores que toma la función si cruza con el eje de las abscisas?

Problema 3: Sea $f(x) = \begin{cases} ax, \ si \text{ x} \leq 1 \\ bx^2 + x + 1 \ , \ si \ x > 1 \end{cases}$. Encuentra a y b tales que f es diferenciable en *1*.

Solución reportada por Carmen:

Observamos que $f'(x) = \begin{cases} a, \ si \text{ x} \leq 1 \\ 2bx + 1 \ , \ si \ x > 1 \end{cases}$.

El que *f* sea diferenciable en *1* debe satisfacer que *f* y *f* ‘sean continuas, en particular en *1*, es decir, sus límites por ambos lados son iguales $\left(\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = f'(1) \right)$.

Por una parte, se satisface que $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} a = a$, mientras que por otra parte $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2\,bx + 1 = 2b + 1$, por lo que nos interesa que se cumpla $a = 2b + 1$.

Por hipótesis *f* es derivable, lo cual implica que *f* es continua (en particular en 1), por lo que se debe satisfacer que el límite por ambos partes coincida ($\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$).

De un lado tenemos que $\lim_{x\to 1^-} f\,(x) = \lim_{x\to 1^-} a\,x = a$, por otro lado $\lim_{x\to 1^+} f\,(x) = \lim_{x\to 1^+} b\,x^2 + x + 1 = b + 2$, por que se debe satisfacer $a = b + 2$.

Igualando los valores de a obtenidos se cumple que $b + 2 = 2b + 1$, lo cual implica que $b = 1$ y $a = 3$, de donde se sigue que:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & si \text{ x} \leq 1 \\ x^2 + x + 1\,, & si\ x > 1 \end{cases}.$$

Solución reportada por Vera

Supongamos a $f(x)$ diferenciable en 1, calculemos su derivada en ese punto. Primero derivemos la función

$$f'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ 2bx + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Si evaluamos la derivada en 1 se tiene que

$$f'(1) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ 2b + 1, & x > 1 \end{cases} \cdots (1)$$

Igualando

$$a = 2b + 1 \cdots (2)$$

Ahora como se supone diferenciable en 1, entonces es continua por lo que se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x\to 1} ax = a \cdots (3)$$

$$\lim_{x\to 1} bx^2 + x + 1 = b + 2 \cdots (4)$$

Igualando ambos límites se tiene

$$a = b + 2 \cdots (5)$$

Ahora tomando la ecuación (2) y (5) se tiene el sistema (6) el cual resolvemos para encontrar los valores de a y b donde la función es diferenciable en el punto 1

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ a = b + 2 \end{cases} \cdots (6)$$

Resolviendo el sistema se tiene que $a\ =\ 3$ y $b\ =\ 1$ por lo que

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1 \\ x^2 + x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Reflexión: Cuando se trabaja diferenciabilidad y continuidad en los cursos de cálculo por lo general se presentan problemas en los que se les pide a los alumnos determinar si es diferenciable o no, pero en este caso lo que se pide es encontrar valores que hagan a la función diferenciable.

Solución reportada por Hugo:

Notemos que para $x < 1$

$$f'(x) = a$$

Y para $x > 1$

$$f'(x) = 2bx + 1$$

Mientras que para $x = 1$, los límites laterales que definen a la derivada deben de coincidir, esto se traduce en que ambas derivadas calculadas, al evaluarlas en $x = 1$ deben coincidir para que la función sea diferenciable para ese valor

$$a = 2b(1) + 1$$
$$a = 2b + 1 \quad \rightarrow \quad (ec.1)$$

Por otra parte, como diferenciabilidad implica continuidad, los límites laterales en cuando $x \rightarrow 1$ también tienen que coincidir, es decir

$$f(1) = a(1) = b(1)^2 + (1) + 1$$
$$a = b + 2 \quad \rightarrow \quad (ec.2)$$

Así, se tiene

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ a = b + 2 \end{cases}$$

Del cual se tiene la solución

$$\underline{a = 3, \qquad b = 1}$$

Los cuales son los valores que habrá que sustituir en $f(x)$ para que sea diferenciable.

Reflexión: En este ejercicio resalta que la diferenciabilidad es un concepto exclusivo del cálculo, para el nivel de estudios a cuál se aplican los problemas, así como las herramientas que se utilizan para concebir al mismo. De lo anterior no es de extrañar que se mostraran formas muy similares de abordar el problema. Sin embargo, la solución de este requiere tener presente, a mi parecer, tres datos fundamentales, sin mencionar el dato evidente de que las derivadas deben de coincidir en el punto de discontinuidad, información que parece que intentaron aprovechar sin éxito; estos datos se muestran más en los tres puntos señalados adelante. Sin duda, este es un problema que no tenía otra solución viable más que el uso del concepto de derivabilidad y sus implicaciones, pero, a mi parecer, la falla se encuentra en la relación algebraica de este concepto con la solución del problema.

Conocimientos, habilidades o preguntas requeridos para la solución:

1) Para encontrar dos incógnitas se requieren dos ecuaciones.
2) Derivabilidad implica continuidad.
3) Agotar las opciones que se conocen antes de pasar a abordarlo de alguna otra forma.

Problema 4: Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o explica porque no existe solución.

Solución reportada por Carmen:

Definimos $f(x) = 4x^3 - x^4$, observamos que f es continua y derivable, además que $f'(x) = 12x^2 - 4x^3$. Nos interesa calcular los máximos y mínimos de f para poder establecer si es igual a *30* en algún punto, por lo que nos interesa calcular las raíces de *f'*, es decir, que $4x^2(3 - x) = 0$, lo cual se satisface cuando $x = 0$ y $x = 3$, observando que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, 3)$ y $f'(x) < 0$ en el intervalo $(3, \infty)$, por el criterio de la primera derivada, f es creciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y decreciente en el intervalo $(3, \infty)$.

Calculando la segunda derivada se satisface que $f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2 - x)$, evaluando en *0* se cumple que $f''(0) = 0$, por lo que, usando el criterio de la segunda derivada, *f* tiene un punto de inflexión en *0*. Por otro lado, evaluando *f* ‘’en *3* se satisface que $f''(3) = 24(3) - 12(3)^2 = -36 < 0$, considerando que f es creciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y decreciente en el intervalo $(3, \infty)$. Evaluando $f(3) = 4(3)^3 - (3)^4 =$

$27,$ entonces $f(x) \leq 27$ satisface que f tiene un máximo absoluto en *3*., es decir, no existe ningún $x \in R$ tal que $f(x) = 30$.

Solución reportada por Vera:

Para resolver el problema visualicemos a la ecuación como dos funciones $f(x) = 4x^3 - x^4$ y $g(x) = 30$, de las cuales se busca encontrar un punto en el que se intercepten ambas funciones, para ello primero analicemos los máximos y mínimos de $f(x)$, para ello calculemos su primer y segunda derivada

$$f'(x) = 12\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x}^3$$

$$f''(x) = 24\mathrm{x} - 12\mathrm{x}^2$$

Ahora encontremos las raíces de la primera derivada para ello igualamos a cero

$$12x^2 - 4x^3 = 0$$

Resolviendo se tiene que $x = 0$ y $x = 3$. Para saber si hay máximos o mínimos evaluamos la segunda derivada en $x = 3$ ya que cuando $x = 0$ hace que la derivada sea cero por lo que no existen máximos ni mínimos en este punto.

$$f''(3) = 24(3) - 12(3)^2 = -36$$

Como el resultado es negativo se dice que hay un máximo en 3, ahora para saber dónde se encuentra ese máximo evaluemos $f(x)$ en 3.

$$f(3) = 4(3)^3 - (3)^4 = 27$$

Así el punto máximo de $f(x)$ esta en el punto $(3, 27)$, por lo que las funciones nunca se cruzan, es decir no existe solución para $4x^3 - x^4 = 30$.

Reflexión: De nuevo como en el problema 2 se presenta una ecuación de grado mayor que 2, además se pide encontrar solución a la ecuación y no necesariamente donde cruza al eje x.

Solución reportada por Hugo:

El ejercicio puede verse como, encontrar los valores x para los cuales $f(x) = 0$ con $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ con x en los reales

Se procede analizando a $f(x)$.

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x)$$

$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2 - x)$$

Donde, para $f'(x) = 0$ se tiene $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Evaluando los puntos críticos x_1, x_2 en la segunda derivada se tiene

$$f''(0) = 0$$
$$f''(3) = 12(3)(2 - 3) < 0$$

Es decir, $\big(0, f(0)\big)$ es un punto de inflexión de la función, mientras que $(3, f(3))$ es un máximo de la función.

Sin embargo, se tiene que

$\big(0, f(0)\big) = (0, -30)$

y $\big(3, f(3)\big) = (3, -3)$

En consecuencia, la función $f(x)$ no tomará valores mayores o iguales a cero para ningún valor en su dominio, pues alcanzará su máximo absoluto en $x = -3$. De lo anterior se concluye que la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ no tiene soluciones reales.

Reflexión: Nuevamente, se muestra, como en el ejercicio 2, una relación entre el uso del cálculo y su relación con los polinomios, a lo que no es de extrañarse que la forma de abordar el problema fuera similar; en, pero se hace interesante que al no estar restringido en un intervalo se haya recurrido a más herramientas de cálculo para su análisis.

Conocimientos, habilidades o preguntas requeridos para la solución:

- Relación que guardan los polinomios con el cálculo.
- Saber esbozar una función a partir del análisis con sus puntos críticos y derivadas.
- Tener presente la relación de los valores que puede tomar una función y sus movimientos entre cuadrantes.

Problema 5: ¿Hay algún *a* tal que $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}$ existe? Explica tu respuesta.

Solución reportada por Carmen:

Reescribiendo el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x(3a-1)-a-1}{(x+1)(x-3)}.$$

De donde se observa que el coeficiente esta indeterminado cuando se evalúa en *3* de esta forma nos interesa que el denominador sea divisible por $(x-3)$ para calcular el límite. Por lo que realizamos las operaciones correspondientes, tenemos que el residuo es $-10a+20$ para que el polinomio sea divisible por $(x-3)$ debe cumplir que $10a=20$, es decir, $a=2$, de donde se obtiene:

$$2x^2-x(3a-1)-a-1=2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1).$$

Concluyendo que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x+1}$$
$$=\frac{7}{4}.$$

Solución reportada por Vera:

Observemos que el denominador se puede factorizar como $(x+1)(x-3)$, ahora para que exista el límite el numerador debe ser divisible entre $(x-3)$, para ello supongamos que

$$f(x)=2x^2-3ax+x-a-1$$

Ahora si $x=3$ encontremos el valor de a

$$2(3)^2-3a(3)+(3)-a-1=2(9)-9\mathrm{a}+2-\mathrm{a}$$
$$18-10\mathrm{a}+2=20-10\mathrm{a}$$

Así

$$20=10\mathrm{a}$$
$$\mathrm{a}=2$$

Ahora sustituyendo el valor de a en $f(x)$ se tiene que $f(x)=2x^2-5x-3$ lo cual se puede factorizar como $(x-3)(2x+1)$. Así se tiene que

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{7}{4}$$

Reflexión: Cuando se trabajan problemas de límites es común trabajar solo con problemas que piden encontrar el límite en puntos

Solución reportada por Hugo:

Nótese que el polinomio divisor puede ser factorizado como $(x-3)(x+1)$, de donde se sigue que el límite existe si, y solo si, el polinomio numerador puede factorizarse, con $(x-3)$ como uno de sus factores.

De lo anterior, se prueba que al realizar la división del polinomio numerador entre $x-3$, se consigue un residuo de $10a+20$, de lo cual, dado que se requiere una factorización, dicho residuo debe ser igual a cero. Así

$$a=-2$$

Luego se sigue que para $a=-2$ se tiene

$$\lim_{n\to 3} \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}=\lim_{n\to 3} \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{n\to 3} \frac{(2x+1)}{(x+1)}=\frac{7}{4}$$

Reflexión: En este ejercicio no es de extrañarse que muchos intentaran abordarlo por el lado correcto, pues suele ser un ejercicio típico en la solución de límites, salvo que se ha aplicado una modificación, casi despreciable si se tiene presente el significado de factorización y su relación con la división.

Conclusiones: Los ejercicios me parecen algo pretenciosos, pues en mi experiencia como docente y alumno, la asimilación de conceptos matemáticos no es un proceso fácil ni rápido para realizar. Requiere "un tiempo" para su realización y una secuencia didáctica insistente en mantener siempre presente los conocimientos aprendidos en cursos anteriores para su uso en cualquier momento.
Por lo que respecta a los conocimientos fácticos requeridos, se hace mención que se comprobó que los alumnos contaban con ellos, por lo que no pareciera ser un impedimento.

Problema 6: En la figura se dibuja un círculo con centro en (1, 0) y radio 1. Selecciona un punto P sobre la circunferencia y un punto Q sobre el eje Y de tal manera que OP = OQ. Trace la recta QP que interseca al eje X en el punto R. ¿Pruebe que, si P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha, ¿existe un límite para la posición de R? Justifique su repuesta.

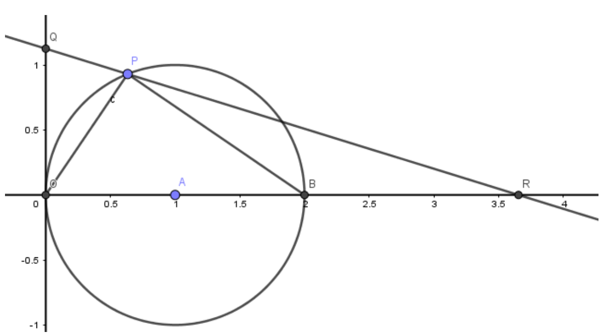
Solución reportada por Carmen:

Considerando el círculo con centro en (1, 0) y radio 1. Selecciona un punto P sobre la circunferencia y un punto Q sobre el eje Y de tal manera que OP = OQ. Trace la recta QP que interseca al eje X en el punto R.

- Sí P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha.

Definimos al triángulo OPQ, el cual satisface que es triángulo isósceles pues OP=OQ, observamos que cuando el punto P se acerca al punto O (considerando que P se encuentra en el primer cuadrante), el ángulo QOP se hace más pequeño (además de que este se encuentra entre cero y noventa grados). Por una parte, observamos que los ángulos OPQ y OQP, son iguales y valen $\frac{180° - \angle QOP}{2}$, entonces se cumple que el ángulo OPR mide $180 - \frac{180° - \angle QOP}{2} = \frac{360° - \angle QOP}{2}$, entonces se satisface que el ángulo OPR esta entre 135 y 180 grados, por lo que es el ángulo más grande que tiene el triángulo OPQ. Recordado que al ángulo mayor se opone el lado mayor, entonces OR, aumenta y dado que O es un punto fijo, para que OR crezca, R se debe de mover a la derecha, cuando P se acerca más a O.

- ¿Existe un límite para la posición de R?



Consideramos al triángulo OPQ, definimos $\angle POQ = \alpha$, al ser OPQ isósceles, entonces se satisface que $\angle PQO = \angle QPO = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Definimos al triangulo OPB, donde B es el punto (0,2), observamos que este es un triángulo rectángulo por construcción, donde $\angle OPB = 90°$, además de que $\angle POB = 90° - \alpha$, definiendo a $\angle PBO = \theta$, entonces se satisface que

$$\angle OPQ + \angle POB + \angle PBO = 90° + 90° - \alpha + \theta \Rightarrow \theta = \alpha$$

Tomando en cuenta al triángulo POB, observamos que el ángulo $\angle PBR = 180° - \alpha$, por otro lado, llamamos $\angle BPR = \beta$, el cual satisface:

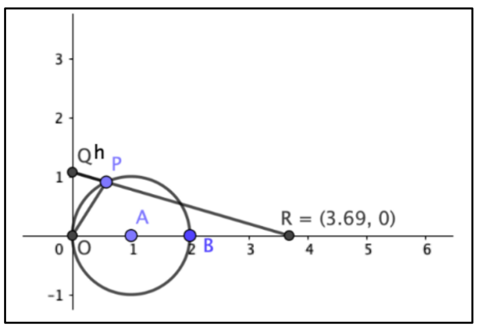
$$\angle QPO + \angle OPB + \angle BPR = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$$

Llamando $\angle PRB = \gamma$, entonces se cumple que

$$\angle PRB + \angle PBR + \angle BPR = \gamma + 180° - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2}$$

De esta forma obtenemos que el triángulo BPR es isósceles y que los lados PB y BR son de igual medida. Al ser PB una cuerda de la circunferencia con centro en A, entonces el valor máximo que puede alcanzar PB es 2, acercando a P a 0, observaremos que el punto R se acerca a 4, sin embargo, al estar R en una recta, no está definida para cuando PB y BR pertenecen a la misma recta, por lo que R es un punto de la forma de la forma (x,0), con $x \in [0,4)$.

Solución reportada por Vera:



Reconstruyendo la imagen en GeoGebra se puede ver que si existe un límite para para la posición de R. Tomando el triángulo OQR se puede ver que es un triángulo rectángulo porque su base y su altura esta sobre los ejes del plano, es decir tiene un ángulo recto, además el cateto formado por $OQ = OP$, Ahora por el teorema del cateto se tiene que

$$OQ = (OA)(OR)$$

Sustituyendo OQ por OP se tiene

$$OP = (OA)(OR)$$

Pero que P se acerca al punto O significa que tiende a cero por lo que su proyección igual, así

$$0 = (OA)(0)$$

Obteniendo así un límite para R. Ya que no es posible construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto igual a cero. https://www.geogebra.org/m/dn3aprbg

Solución reportada por Hugo:

Tomando como referencia la figura, y recorriendo el punto P en sentido horario, si puede afirmarse que el punto R se moverá hacia la derecha. La justificación de esta afirmación es la siguiente.

A medida que P se mueve en sentido horario, el segmento OP aumenta su longitud hasta alcanzar su máximo en el punto B. A partir de ahí, los puntos O, Q, R coinciden en el origen hasta que P coincide con el origen para volver a realizar el punto Q, P y R nuevamente sus recorridos.

El motivo de que R se mueva a la derecha de esta forma es porque R depende del punto Q y Q depende de la longitud del segmento OP. Observando con detenimiento, el movimiento de P, desde O a B, sin coincidir en ningún momento con alguno y en sentido horario, siempre proporciona los triángulos ΔOQR, ΔOQP y ΔOPR. Por construcción, ΔOQP es isosceles y ΔOQR tiene un angulo recto en el origen. De lo que se sigue que

$$m(< OQP) = m(< POQ)$$
$$m(< POQ) + m(< ROP) = 90°$$
$$< OQR = < OQP$$
$$m(< OQR) + m(< QRO) = 90°$$

$$\rightarrow m(< OQR) + m(< QRO) = m(< POQ) + m(< ROP)$$

$$m(< OQR) + m(< QRO) = m(< OQP) + m(< ROP)$$

$$m(< OQR) + m(< QRO) = m(< OQR) + m(< ROP)$$

$$m(< QRO) = m(< ROP)$$

Es decir, ΔOPR es isosceles. Independientemente de donde se encuentre P sobre la semi circunferencia abierta superior.

Ahora, si se baja la perpendicular desde P al segmento RO, se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes. Llámese E al punto de intersección de la perpendicular con RO. Entonces se tiene que

$$OP^2 = PE^2 + EO^2 \rightarrow EO^2 = OP^2 - PE^2$$
$$RP^2 = PE^2 + ER^2 \rightarrow ER^2 = RP^2 - PE^2$$
$$OR = OE + ER = EO + EO = 2EO$$

Pero por ocurrir $\Delta OPE \sim \Delta RPE$

$$OR^2 = 4EO^2 \rightarrow OR^2 = 4OP^2 - 4PE^2$$

$$OR = 2\sqrt{OP^2 - PE^2}$$

Nótese que OP siempre es mayor que PE bajo la siguiente relación.

Llamemos

$$\theta =< EOP$$
$$OP = r$$
$$PE = y$$

Se quiere saber el comportamiento de

$$r^2 - y^2 = k$$

Consideremos

$$r^2 sen^2\theta = y^2$$

Sustituimos

$$r^2 - r^2 sen^2\theta = k$$

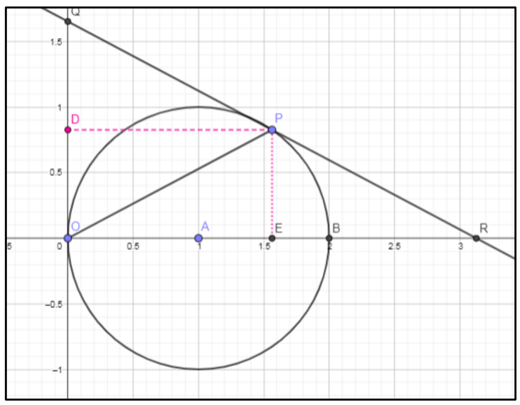
$$r^2 \cos^2 \theta = k$$

Nótese que θ hace un recorrido de $\frac{\pi}{2}$ a 0, lo que equivale a a realizar el recorrido en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ para $\cos^2\theta$. En cuyo intervalo $\cos^2\theta$ es creciente.

Además, r tambien es creciente, tomando los valores (0,2).

En consecuencia, k es creciente y OR es creciente, es decir, el punto R se mueve ya que O es un punto fijo.

Además, obsérvese que OQ > PE, pues $OQ = OD + DQ = PE + DQ$. (considerando la siguiente imagen)



Lo anterior siempre ocurre por construcción, ya que ΔOQP tiene que ser isosceles y tiene que estar sobre el eje positivo de las ordenadas. Este último hecho puede comprobarse fácilmente por contradicción.

En consecuencia, de lo mencionado, la recta QP corta al eje de las abscisas a la derecha del origen. Por lo que se concluye que R no solo se mueve, sino que se mueve a la derecha.

Por otra parte, por las restricciones de construcción y todos los argumentos, considerando la relación encontrada

$$r^2\cos^2\theta = k$$

Se sigue que

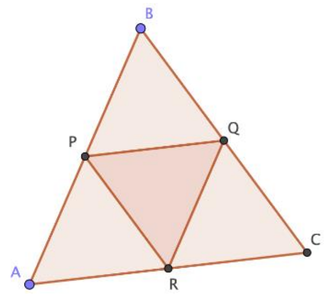
$$OR = 2\sqrt{\mathrm{r}^2\cos^2\theta} = 2|r\,cos\theta|$$

Por lo que tomando $r \to 2,\ \theta \to \pi$, se tiene que $OR \to 4$, sin embargo, no alcansa a tomar dicho valor. OR pasa de $4 - \epsilon$ a volverse indefinido, pues la recta QP coincide con el eje de las abscisas.

Para la solución a este ejercicio se usó la siguiente construcción en GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/tdzsrrhc

Problema 7: La figura representa un triángulo equilátero con lado 6 cm



e) Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC y CA, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?

Solución reportada por Carmen:

Consideramos el triángulo APR, al ser P y R puntos medios del triángulo equilátero, entonces los segmentos AP=AR=3cm por lo que el triángulo APR es isósceles. Además de que el $\angle PAB = 60°$, pues es el ángulo del triángulo equilátero $\angle BAC = 60°$, entonces al ser APR isósceles, se cumple que los ángulos $\angle PAR = \angle PRA = 90 - \frac{\angle BAC}{2} = 60°$, es decir APR es un triángulo equilátero. La misma situación ocurre con los triángulos RQC y PQB. Entonces se satisface que los lados del triángulo PQR miden 3cm, por lo que el perímetro es 9cm.

f) Suponemos ahora que P, Q y R divide a los lados en: $AR = 2$; $RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2$ & $PA = 4,$ ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?

Consideramos el triángulo APR, observamos que el segmento AR=2cm y AP=4cm. Además de que el $\angle PAB = 60°$, pues es el ángulo del triángulo equilátero $\angle BAC = 60°$. Utilizando el teorema del coseno para encontrar el tercer lado se satisface que:

$$PR = \sqrt{\left(AR^2 + AP^2 - 2 \cdot AR \cdot AP \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

La misma situación ocurre con los triángulos RQC y PQB. Entonces se satisface que los lados del triángulo PQR miden $2\sqrt{3}$ cm, por lo que el perímetro es $6\sqrt{3}$ cm.

g) ¿Qué perímetro de los casos a y b es mayor?

En el primer caso, el perímetro del triángulo PQR es 9cm, mientras que en el segundo caso es $6\sqrt{3}$ cm y considerando que $6\sqrt{3} \approx 10.39$ ... por lo que el segundo triángulo tiene mayor perímetro.

h) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

Consideraremos primero el caso en donde el triángulo inscrito también sea equilátero, es decir, cuando los segmentos $AR = CQ = BP = x$ y $RC = BQ = AP = 6 - x$ con x en el intervalo [0,6], entonces los segmentos PQ=QR=QP son igual y satisfacen:

$$PR = \sqrt{\left(x^2 + (6-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (6-x) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36 - 6x + \mathrm{x}^2}$$

$$= \sqrt{3x^2 - 18x + 36} = \sqrt{3(x^2 - 6x + 12)}$$

Por lo cual podemos definir al perímetro como $f(x) = 3\sqrt{3(x^2 - 6x + 12)}$

Calculando la primera derivada obtenemos $f'(x) = 3\frac{1}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}}3(2x - 6)$

Observamos que $f'(x) = 0$, cuando $(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}} = 0$ ó $2x - 6 = 0$, sin embargo, $(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}} > 0$, para todo x, entonces solo se satisface que $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$.

Calculando la segunda derivada se tiene:

$$f''(x) = \frac{9}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{1}{2}}(2) - \frac{9}{2}(3(x^2 - 6x + 12))^{-\frac{3}{2}}(2x - 6)\text{\textasciicircum}2$$

Evaluando en x=3 se tiene que $f''(3) > 0$, por lo que f alcanza su mínimo cuando x=3, concluyendo que el triángulo equilátero de menor perímetro inscrito en un triángulo equilátero de lados de 6cm, es el triángulo que mide 3cm por lado.

Consideraremos primero el caso en general, entonces definimos a las longitudes de los segmentos de la siguiente forma: AP=x, PB=6-x, BQ=y, QC=6-y, CR=z, RA=6-z con x,y,z en el intervalo [0,6], entonces las longitudes de los segmentos PQ, QR, QP son de la siguiente forma:

$$PR = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - 2 \cdot x \cdot (6-z) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - x \cdot (6-z)\right)}.$$

$$QP = \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - 2 \cdot y \cdot (6-x) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - y \cdot (6-x)\right)}.$$

$$RQ = \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - 2 \cdot z \cdot (6-y) \cdot cos(60°)\right)} = \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - z \cdot (6-y)\right)}.$$

De donde definimos al perímetro como la siguiente función:

$$f(x,y,z) = \sqrt{\left(x^2 + (6-z)^2 - x \cdot (6-z)\right)} + \sqrt{\left(y^2 + (6-x)^2 - y \cdot (6-x)\right)} + \sqrt{\left(z^2 + (6-y)^2 - z \cdot (6-y)\right)}$$

La cual estamos interesado en minimizar.

Solución reportada por Vera:

a. Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC & CA, ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?

Como PQR son puntos medios, entonces los segmentos $AP = PB, BQ = QC$ y $CR = RA$, y cada segmento miden $3cm$, además como ABC es equilátero también se cumple que $\sphericalangle RAP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QCR = 60°$, por lo anterior se tiene que los triángulos $APR,\ PBQ$ y RQC son iguales por criterios de congruencia, tomando en cuenta esto analizamos el triángulo RQC, el cual, cumple que $QC = CR$ y $\sphericalangle QCR = 60°$, como tiene dos lados iguales es isósceles, por lo que sus otros ángulos miden 60°, es decir es un triángulo equilátero y

$QR = 3cm$. Ahora como $\triangle APR = \triangle PBQ = \triangle RQC$, los segmentos PQ y RP son iguales a QR, por lo que el perímetro del triángulo PQR es $3(3) = 9\ cm$.

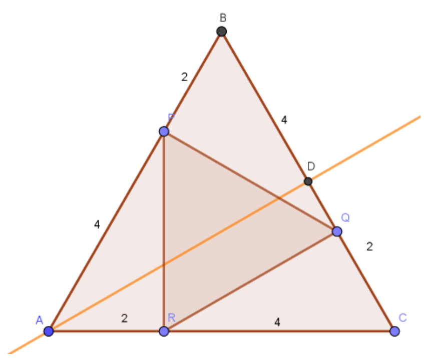
b. Suponemos ahora que P, Q & R divide a los lados en: $AR = 2$; $RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2$ & $PA = 4$, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?

De nuevo como $AR = CQ = BP = 2,\ RC = QB = PA = 4$ y $\sphericalangle RAP = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle QCR = 60°$ por criterios de congruencia son iguales y el triángulo PQR es equilátero. Por lo que tomamos el triángulo RQC para encontrar el lado que falta, intuitivamente se ve que es un triángulo rectángulo, para comprobar que lo es trazamos la bisectriz del ángulo $\sphericalangle CAB$ la cual divide a $\triangle ABC$ en dos triángulos congruentes, ahora tomando $\triangle ADC$, este es semejante a $\triangle RQC$, es decir se cumple que:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{RC}{QC}$$

Por lo que $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CRQ$ pero $\sphericalangle CAD = \frac{60°}{2} = 30°$ así retomando el triángulo RQC se tiene que $\sphericalangle QCR = 60°, \sphericalangle CRQ = 30°$ en consecuencia el ángulo restante es un ángulo recto, ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°. Entonces para obtener el lado faltante aplicamos Pitágoras.

$$RQ = \sqrt{CR^2 - QC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4(3)} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$



Así el perímetro del triángulo PQR es $3(2\sqrt{3}cm) = 6\sqrt{3}cm$

c. ¿Qué perímetro de los casos a & b es mayor?

De los casos anteriores el triángulo con mayor perímetro es el obtenido en el inciso b. ya que $3 < 2\sqrt{3}$

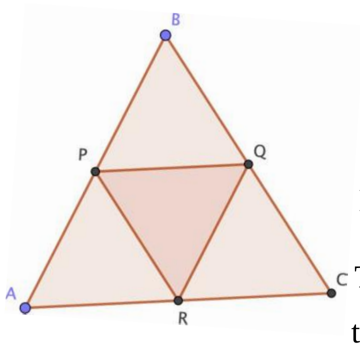
d. Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que el perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

Al estudiar la figura en GeoGebra se observa que si uno de los ángulos se acerca mucho a 180° el perímetro crece, en cambio cuando los ángulos se asemejan cada vez más entre sí, el perímetro decrece, por lo que el triángulo PQR de menor área es aquel que tiene sus vértices en los puntos medios de los segmentos que conforman el triángulo ABC.

https://www.geogebra.org/m/nhphswjs

Solución reportada por Hugo:

a) Si PQR son puntos medios de los lados AB, BC & CA, ¿Cuál es el perímetro del triángulo PQR?



Solución Respuesta: el perímetro mide 9 cm.

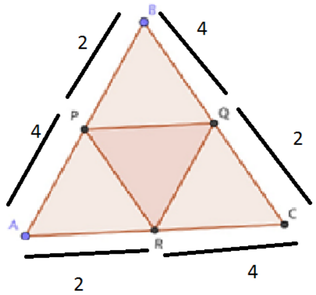
Razones:

El siguiente argumento funciona para cada uno de los lados.

Tomemos el lado PQ. Nótese que por ser equilátero ABC y tomarse PQ a la misma razón de sus lados correspondientes, PQ es paralelo a AC. Lo que, aplicando este mismo razonamiento para los otros dos lados, con sus lados correspondientes, nos lleva a concluir que el triángulo PQR es equilátero y sus lados miden 3 cm.

También se puede mostrar por semejanzas y congruencias.

b) Suponemos ahora que P, Q & R divide a los lados en: AR = 2; RC = 4, CQ = 2, QB = 4, BP = 2 & PA = 4, ¿cuál es el perímetro del triángulo PQR?



Respuesta:

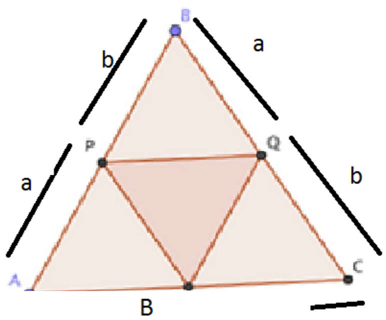
Nuevamente, podemos tomar congruencia de triángulos entre los triángulos PBQ, RAP y QCR. Pues basta rotar los triángulos y hacerlos coincidir con sus ángulos de 60° para ver que son congruentes.

Para lo anterior, se dan los argumentos basados en semejanza, los cuales pueden apoyarse con el siguiente diseño en GeoGebra, en el cual solo hay que mover el punto H.

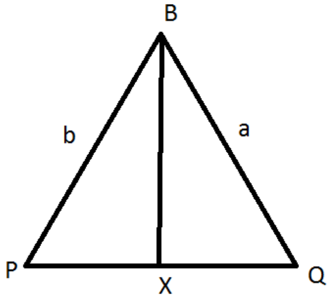
https://www.geogebra.org/m/xdabeshh

En el orden escrito, se tienen las congruencias $\Delta PBQ \approx \Delta RAP \approx$ ΔQCR. Lo que implica que el triángulo PQR se siempre sea equilátero. Además, curre que PQR es equiláterio si, y solo si, $\Delta PBQ \approx \Delta RAP \approx$ ΔQCR.

Y para construirlo bastará tomar los puntos P, Q y R a razón de que se cumpla que $a + b = 6$ bajo la siguiente configuración.



Por lo anterior dicho, se procede a calcular el valor de uno de los lados de triángulo PQR con ayuda de la siguiente figura, donde BX es la perpendicular al lado PQ.



$$PQ = PX + (PQ - PX)$$

Se tiene

$$PX^2 = b^2 - BX^2$$

por otra parte, por el teorema del cateto de Euclides

$$a^2 = b^2 + PQ^2 - 2PX * PQ$$

Así que

$$PX = \frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}$$

$$PX^2 = \left(\frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}\right)^2 = b^2 - BX^2$$

$$BX^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}\right)^2 \rightarrow (1)$$

Nótese que el triángulo ABC, al ser equilátero, su área es conocida y está dada por

$$A_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4}$$

De igual forma se calcula el área del triángulo PQR

$$A_{PQR} = \frac{PQ^2\sqrt{3}}{4}$$

Dado que se tienen las congruencias $\Delta PBQ \approx \Delta RAP \approx \Delta$QCR y las áreas anteriores son constantes, se tiene que

$$A_{ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 3A_{PBQ} + A_{PQR}$$

$$\frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 3A_{PBQ} + \frac{PQ^2\sqrt{3}}{4}$$

Donde

$$A_{PBQ} = \frac{PQ * BX}{2}$$

Por lo tanto

$$A_{ABC} = 3A_{PBQ} + A_{PQR}$$

$$\frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{PQ * BX}{2} + \frac{PQ^2\sqrt{3}}{4}$$

Por lo cual

$$\frac{AC^2\sqrt{3} - PQ^2\sqrt{3}}{6PQ} = BX$$

$$BX^2 = \left(\frac{AC^2\sqrt{3} - PQ^2\sqrt{3}}{6PQ}\right)^2$$

Tomando la ecuación (1) se tiene

$$\left(\frac{AC^2\sqrt{3} - PQ^2\sqrt{3}}{6PQ}\right)^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + PQ^2 - a^2}{2PQ}\right)^2$$

Simplificando

$$\left(\frac{AC^2\sqrt{3}-PQ^2\sqrt{3}}{6}\right)^2 = PQ^2b^2-\left(\frac{b^2+PQ^2-a^2}{2}\right)^2$$

$$\left(AC^2\sqrt{3}-PQ^2\sqrt{3}\right)^2 = 36PQ^2b^2-9(b^2+PQ^2-a^2)^2$$

Realizando la sustitución de los datos

$$AC = 6;\ \ a = 4;\ b = 2$$

$$\left(36\sqrt{3}-x^2\sqrt{3}\right)^2 = 144x^2-9(x^2-12)^2$$

Cuya solución, con relación a este problema resulta (realizado en wólfram)

$$x = PQ = 2\sqrt{3}$$

Por lo que el perímetro del PQR es $6\sqrt{3} \approx 10.39$

El cual se verificó con GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/umjye8pd)

Otra solución más simple es utilizando el teorema de cosenos

$$PQ^2 = a^2+b^2-2abcos(60)$$

$$PQ^2 = a^2+b^2-ab$$

Sustituyendo y simplificando

$$PQ = \sqrt{16+4-8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Este método también permite demostrar que el triángulo PQR es equilátero.

c) ¿Qué perímetro de los casos a & b es mayor?

En el segundo caso

d) Si P, Q, & R se seleccionan de manera arbitraria sobre los lados de ABC y se calcula el perímetro de los diferentes triángulos PQR, ¿dónde deben estar situados PQR para que perímetro sea mínimo? ¿Por qué?

Respuesta: La solución tiene que ser un equilátero cuyos vértices coinciden en los puntos medios de cada lado. La solución fue basada en GeoGebra.

https://www.geogebra.org/m/ht5rkrtj

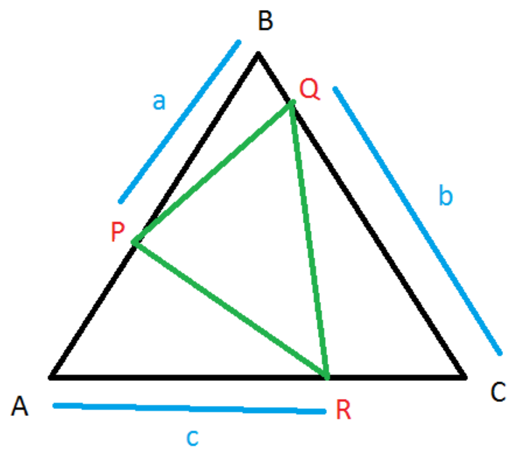
Para este ejercicio se intentó de múltiples formas llegar a la solución. Malamente buscando una solución sencilla. Algunos intentos se muestran en las siguientes ligas

https://docs.google.com/document/d/18_eeUU-GQrKWOB8k800d-Qdsg6vlGZcE?rtpof=true&authuser=hardirmh%40gmail.com&usp=drive_fs

https://docs.google.com/document/d/18XK3X3ZGjdXreYKxD6OxZumXpnS0DILE?rtpof=true&authuser=hardirmh%40gmail.com&usp=drive_fs

Finalmente se dejó en solo dos casos

1) $a = b = c;\ \Delta PQR\ es\ equilátero$



$$PQ^2 = a^2 + (l-b)^2 - a(l-b)$$
$$PQ^2 = a^2 + (l-a)^2 - a(l-a)$$
$$PQ^2 = a^2 + l^2 + a^2 - 2la - al + a^2$$
$$PQ^2 = 3a^2 - 3la + l^2$$
$$Perim. = p(a) = 3\sqrt{3a^2 - 3la + l^2}$$

$$p'(a) = \frac{9\,(2\,a\ -\ l)}{2\sqrt{3\,a^2 -\ 3\,a\,l +\ l^2}}$$

Haciendo $p'(a) = 0$

$$9\,(2\,a\ -\ l) = 0$$
$$2\,a\ -\ l = 0$$
$$a = \frac{l}{2}$$

2) Considerando el diagrama anterior, se tiene

$$PQ = \sqrt{a^2 + (l-b)^2 - a(l-b)}$$

$$QR = \sqrt{b^2 + (l-c)^2 - b(l-c)}$$

$$PR = \sqrt{c^2 + (l-a)^2 - c(l-a)}$$

Por lo que el perímetro está determinado por la siguiente expresión

$$p = \sqrt{a^2 + (l-b)^2 - a(l-b)} + \sqrt{b^2 + (l-c)^2 - b(l-c)} + \sqrt{c^2 + (l-a)^2 - c(l-a)}$$

Bajo las restricciones

$$0 < a < l$$

$$0 < b < l$$

$$0 < c < l$$

Derivando parcialmente la función

$$p'_a = \frac{-l + b + 2a}{2\sqrt{-a(l-b) + (l-b)^2 + a^2}} + \frac{c - 2(l-a)}{2\sqrt{-c(l-a) + (l-a)^2 + c^2}}$$

$$p'_b = \frac{-l + c + 2b}{2\sqrt{-b(l-c) + (l-c)^2 + b^2}} + \frac{a - 2(l-b)}{2\sqrt{-a(l-b) + (l-b)^2 + a^2}}$$

$$p'_c = \frac{-l + a + 2c}{2\sqrt{-c(l-a) + (l-a)^2 + c^2}} + \frac{b - 2(l-c)}{2\sqrt{-b(l-c) + (l-c)^2 + b^2}}$$

Para lo anterior se verifica que $p'_a = p'_b = p'_c = 0$ si $a = b = c = \frac{l}{2}$, pero no se sabe nada acerca de que sea solución única.

Otra forma de analizar la función del perímetro es considerándola como

$$p_0 = a^2 + (l-b)^2 - a(l-b) + b^2 + (l-c)^2 - b(l-c) + c^2 + (l-a)^2 - c(l-a)$$

Pues son los términos dentro de cada raíz los que determinan el comportamiento de la función. La raíz lo único que hace es “reducir/ralentizar” el comportamiento de cada factor dentro de ella y restringir el dominio a valores positivos, sin embargo, las soluciones a los sistemas de ecuaciones que resultasen deberían coincidir con las soluciones positivas de la función original del perímetro.

Es decir, para nuestro caso de estudio, es viable realizarlo de esta manera.

Considerando esto, basta con derivar parcialmente, respecto a a, b, c lo que arroja el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$4a + b + c = 3l$$

$$a + 4b + c = 3l$$

$$+b + 4c = 3l$$

Cuya solución es la misma que el caso anterior y puede garantizarse que es única.

Problema 8: Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son A (0, 0), B (5, 0) y C (0, 10). El punto A se refleja sobre el segmento BC y se obtiene A'. Encuentre las coordenadas del punto A'. Sea B' el punto reflejado de B sobre AC y C' el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente. Encuentre el área del triángulo A'B'C'.

Solución reportada por Carmen:

Para obtener las coordenadas del punto A', por construcción este debe estar en la recta perpendicular a la recta que pasa por B y C, la cual la podemos obtener por medio de la recta que pasa por dos puntos, donde $B = (x_1, y_1)$ y $C = (x_2, y_2)$.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{-5}(x - 5) = -2x + 10.$$

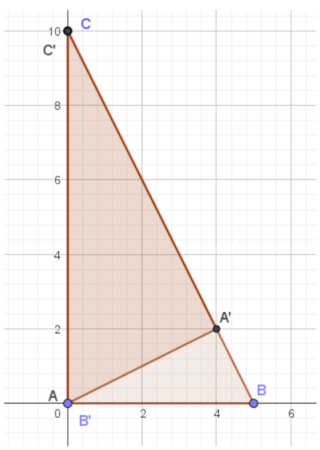
Entonces la perpendicular a esta recta que pasa por A es.

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Igualando ambas ecuaciones se satisface que

$$-2x + 10 = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}x = 10 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 4.$$

Es decir $A' = \left(4, \frac{1}{2}4\right) = (4{,}2)$. Por otra parte, el punto B' debe estar en la recta perpendicular a la recta que pasa por A y C, pero al estar esto dos en el eje X, entonces B' debe de estar en una recta paralela al eje Y, pero la única recta que pasa por A y C es X=0, entonces la intersección de entre X=0 y Y=0 es el origen, es decir, $B' = (0{,}0) = A$. Finalmente, el punto C' es el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente, al estar C en el segmento BC, entonces se tiene que C'=C. De esta forma el triángulo A'B'C'=A'AC.



Observamos que $\angle CAB = \angle CA'A = 90^o$, además $\angle ACB = \angle ACA'$, de donde se tiene entonces que$\angle ABC = \angle CAA'$, utilizando el criterio AAA, los triángulos ACB y A'CA son congruentes.

Utilizando el teorema de Pitágoras, se obtiene que la longitud del segmento BC es igual a

$$\sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = \sqrt{25 * 5} = 5\sqrt{5}.$$

Observando que:

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{AB}{AA'} = \frac{BC}{AC} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{5\sqrt{5}}{5*2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Entonces se tiene que:

$$\frac{\frac{AB \cdot AC}{2}}{\frac{AA' \cdot A'C}{2}} = \frac{AB \cdot AC}{AA' \cdot A'C} = \frac{5 \cdot 10}{AB \cdot AC} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad AB \cdot AC = (5 \cdot 10)\frac{4}{5} = 40.$$

Por lo que el área del triángulo A'B'C' es igual a $\frac{AA' \cdot A'C}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Solución reportada por Vera:

Para reflejar el punto A sobre el segmento BC, se levanta una perpendicular desde el segmento dado y que pasa por el punto A, el punto de intersección entre estos dos es el punto A', el punto B' está en la misma posición que A y el punto C' se refleja en la misma posición que C.

Ahora para encontrar las coordenadas del punto A', encontremos las ecuaciones de la recta perpendicular y de la que pasa por los puntos C y B.

Para ello se tiene que $y - y_1 = m(x - x_1)$.

- Ecuación de la recta que pasa por los puntos C y B.

Primero encontremos la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-0}{0-5} = \frac{10}{-5} = -2$

Ahora sustituyamos en $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 10 = -2(x - 0)$$

$$y - 10 = -2x$$

$$y = -2x + 10$$

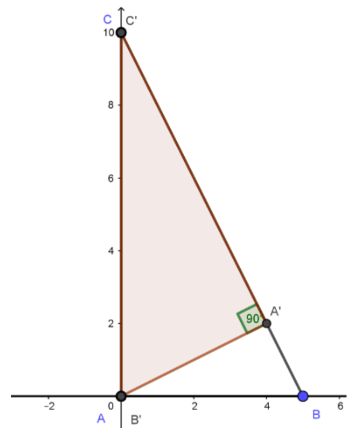
- Ecuación de la recta perpendicular que pasa por A

Para calcular su ecuación, encontremos su pendiente $m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, ahora sustituimos los valores en $y - y_1 = m(x - x_1)$ y se tiene que

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Ahora calculamos las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas y esas son las coordenadas de A'



$$y = \frac{1}{2}x \ldots (1)$$

$$y = -2x + 10 \ldots (2)$$

Multiplicando a ... (1) por un signo menos y sumando con la otra se tiene

$$0 = -\frac{5}{2}x + 10$$

Despejamos x de la ecuación anterior y se tiene que $x = 4$, Sustituyendo x en $\ldots(1)$ se encuentra $y = 2$, así las coordenadas de $A' = (4,2)$

Para encontrar el área del triángulo $A'B'C'$ primero encontremos el valor del segmento BC usando Pitágoras

$$BC = \sqrt{10^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{125}$$

$$= \sqrt{25(5)}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

Ahora encontramos cuanto miden los segmentos $A'B'$ y $A'C'$ usando Tales

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$\frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{10}{A'B'}$$

Así

$$A'B' = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando se tiene que

$$A'B' = 2\sqrt{5}$$

Ahora encontremos $A'C'$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$\frac{10}{5} = \frac{A'C'}{2\sqrt{5}}$$

Así

$$A'C' = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

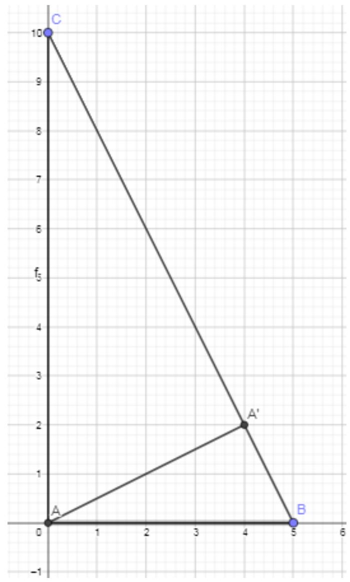
Por último, se tiene que si $b = A'C'$ y $h = A'B'$ entonces

$$Área = \frac{bh}{2} = \frac{(4\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{2} = 20$$

Solución reportada por Hugo

Se encuentra las coordenadas de A’

Considere la siguiente imagen:



$$< ACB \sim < A'AB$$

$$< CBA \sim < ABA'$$

$$< BAC \sim < BA'A$$

Por lo que $\Delta ACB \sim \Delta A'AB$

Luego

$$\frac{AC}{A'A} = \frac{BA}{BA'}$$

$$\frac{10}{A'A} = \frac{5}{BA'}$$

$$A'A = 2BA'$$

Por otra parte

$$AB^2 = BA'^2 + A'A^2$$

$$25 = BA'^2 + 4BA'^2$$

$$BA' = \sqrt{5}$$

Ahora, sea $A' = (x, y)$, se tiene

$$d(BA') = \sqrt{5} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$$

$$5 = (x-5)^2 + y^2 \to (1)$$

Consideremos la ecuación de la recta que pasa por C y B

$$m_{CB} = -2$$

$$y = -2x + 10 \rightarrow (2)$$

Sustituyendo en (1)

$$5 = (x-5)^2 + (-2x+10)^2$$

$$5 = x^2 + 25 - 10x + 100 + 4x^2 - 40x$$

$$5 = 5x^2 - 50x + 125$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

Cuyas soluciones son x=4, x=6. De las cuales solo se considera x=4, dado que tiene que ser menor a la ordenada de B.

Sustituyendo en (2)

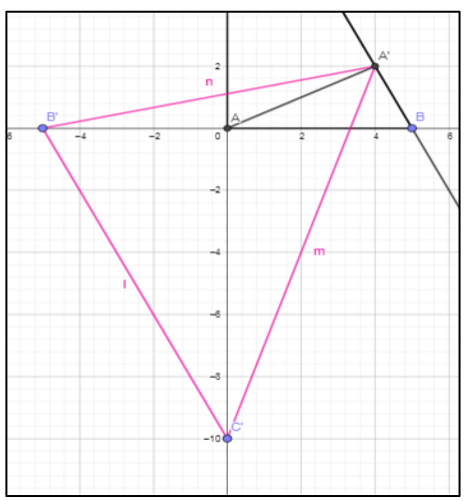
$$y = -2(4) + 10$$

$$y = 2$$

Por lo que se concluye que $A' = (4,2)$

a) Sea B' el punto reflejado de B sobre AC y C' el punto reflejado de C con respecto BC respectivamente. Encuentre el área del triángulo A'B'C'.

Para esta parte se considerará que B' es reflejado "respecto" a AC, y en lugar de "sobre".



Para la solución de este ejercicio se considerará:

- La ecuación de la recta que pasa por A' y B'.
- La ecuación de la recta perpendicular del anterior punto.
- La propiedad de perpendicularidad de las rectas en geometría analítica.
- La intersección de las rectas del primer y segundo punto.

- La distancia de C’ a la intersección indicada en el punto anterior como altura del triángulo.
- La distancia de A’ a B’, como base del triángulo

Solución:

$l_{A'B'} = -2x + 9y = 10$

Perpendicular a $l_{A'B'}: l_0 \ = 9x + 2y = 10$

Intersección de $l_{A'B'}$con l_0: $P = (\frac{14}{17}, \frac{22}{17})$

Altura de $\Delta A'B'C$: $d(C', P) = 2\sqrt{\frac{545}{17}}$

Base de $\Delta A'B'C$: $d(A', B') = \sqrt{85}$

Por lo tanto

$$A_{A'B'C} = \sqrt{\frac{545}{17}} * \sqrt{85} = 5\sqrt{109}$$

a) Primera extensión

Considere el punto A' como un punto móvil sobre el segmento BC.

Analice el área de $\Delta A'B'C$ respecto al área de ΔABC cuando A' se mueve sobre el segmento.

¿Qué puede decir sobre las áreas de los triángulos cuando se mueve A'?

Si encuentra o no alguna relación entre las áreas, indique porqué ocurre esta relación o falta de relación.

Estrategias importantes: considerar las paralelas.

b) Segunda extensión

Considere a $B' = B,\ C' = C$.

Refleje el punto A sobre el segmento BC. Llámelo P

Trace una circunferencia de radio AP.

Tome el punto A' sobre la circunferencia.

¿En qué posición debería colocar a A' para que el área de $\Delta A'B'C'$ sea dos veces la de ΔABC?

¿En qué posición debería colocar a A' para que el área de $\Delta A'B'C'$ sea la mitad de ΔABC?

Apéndice C

Análisis de problemas restantes

Análisis Problema 2: La ecuación $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ ¿tiene alguna raíz entre -1 y 0? ¿Por qué o por qué no?

Comprensión del problema

Para resolver este problema era necesario comprender que no se pide encontrar las raíces de la ecuación, sino que se debe demostrar que no existen raíces en el intervalo establecido. Para lograr este objetivo era necesario poder asociar la primera derivada con el comportamiento creciente o decreciente de una función en un intervalo dado. En este caso los tres estudiantes comprendieron el problema y relacionaron la derivada con el comportamiento de la función lo que les conduce a la solución del problema.

Implementación de un plan de solución:

La solución presentada por Carmen, Hugo y Vera es esencialmente la misma, con pequeñas diferencias de estilo al escribir, pero siguiendo el mismo esquema y estrategia. En las soluciones se aprecia que asocian la primera derivada con el crecimiento o decrecimiento de la función. Calcular la derivada y observar que siempre será positiva les permitió establecer que la función es creciente en el intervalo $(-1,0)$, este argumento les sirvió para explicar que la ecuación no tendrá raíces en ese intervalo, en la Figura *57*, Figura *58* y Figura *59* se aprecia la solución presentada por los estudiantes.

Definimos $f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$, por una parte observamos que:

$$f'(x) = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$$

Esta expresión está compuesta de términos que son positivos en *[-1,0)*, utilizando el criterio de la primera derivada se satisface que *f* es creciente en *[-1,0)*. Por otro lado, se satisface que *f (1) =1*, al ser *f* es creciente en *[-1,0)* se cumple que $f(x) \geq 1$, cuando $x \in [-1,0)$, ya que f es creciente en *[-1,0)*, por lo que se concluye que *f* no tiene raíces en *[-1,0)*.

Figura 57. Solución reportada por Carmen.

Consideremos al polinomio como la función

$$f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$$

De donde se observa que, para $x = -1$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^{21} + (-1)^{19} - (-1)^{-1} + 2 \\ &= -1 - 1 + 1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, el punto $(-1,1)$ pertenece a la gráfica de la función. Por lo que bastaría encontrar algún valor x_1 en el intervalo (-1,0) tal que

$$f(x_1) \leq 0$$

Sin embargo, nótese que

$$f'(x) = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$$

$$f'(x) > 0 \; para \; todo \; x \; en \; (-1,0)$$

Es decir, la función $f(x)$ es creciente en todo el intervalo por lo que no tomará valores negativos en el mismo.

En conclusión, el polinomio $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ no tiene raíces en entre -1 y 0

Figura 58. Solución reportada por Hugo

Analizando la ecuación se puede ver que no está definida en $x = 0$, además si $x = -1$ se tiene que

$$(-1)^{21} + (-1)^{19} - (-1)^{-1} + 2 = 1 \neq 0$$

Es decir, en -1 no existe una raíz, ahora para saber que no hay alguna raíz en $(-1,0)$ tomando en cuenta la derivada del polinomio

$$\frac{d}{dx}[x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2] = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$$

Se puede ver que la derivada es siempre positiva para todo punto en el que está definida la ecuación, lo que implica que la gráfica del polinomio es siempre creciente, por lo que cualquier valor que se tome en $(-1, 0)$ dará un número mayor que cero. Tomando en cuenta lo anterior se concluye que no existe ninguna raíz que pase por dicho intervalo.

Figura 59. Solución reportada por Vera.

En resumen, los estudiantes demostraron un procedimiento ordenado y sistemático que los condujo a encontrar la solución del problema. Además, demostraron comprensión del problema, dominio de procedimientos algorítmicos y de los recursos de cálculo que los condujo a utilizar la definición de función creciente y del teorema de la primera derivada para analizar el comportamiento de la función en el intervalo establecido. Con los elementos mostrados se puede concluir que los estudiantes cuentan con los recursos para resolver este tipo de problemas.

Cabe resaltar que el problema si permitía o ameritaba usar alguna herramienta tecnológica para realizar la gráfica de la función y verificar que no existía raíz en el intervalo establecido, a pesar de eso los estudiantes no presentaron evidencia del uso de tecnología, demostrando que no sienten la necesidad de incorporar la tecnología en el proceso de solución de problemas y que confían en sus argumentos algebraicos.

Con la ayuda de GeoGebra se presentar una aproximación que permite comprobar visualmente porque la ecuación no tiene raíces. Al graficar la derivada de la $f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$ se puede observar que no tiene intercepto con el eje x, ver Figura *60*. Esto permite garantizar que la función siempre será mayor que cero para cualquier valor del intervalo (-1,0), es decir la función $f(x)$ será creciente en todo el intervalo establecido y por lo tanto no tendrá intercepto con el eje x, esto garantiza que la ecuación no tendrá raíces. De igual forma se puede usar GeoGebra para graficar la función $f(x)$ y observar el punto exacto donde la gráfica corta al eje x. GeoGebra permite realizar una verificación visual de la respuesta y comprobar que no existe ninguna raíz en el intervalo (-1,0), ver Figura *61*.

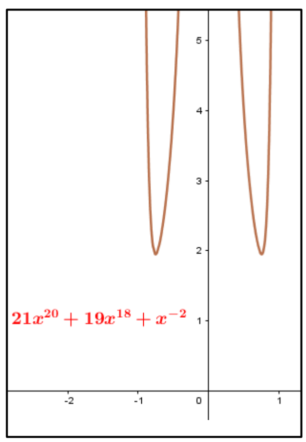


Figura 60. Gráfica de la derivada de la función $f(x)$

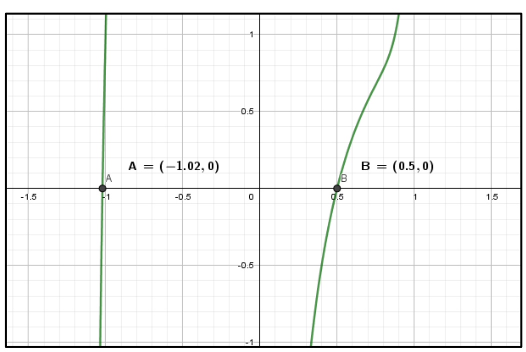


Figura 61. Gráfica de la función $f(x)$

Cabe señalar que también existen otras herramientas como Wolfram Alpha que brinda más información acerca de la expresión algebraica que se investiga, por ejemplo, se puede observar su gráfica, las raíces reales y las raíces complejas. Información suficiente para concluir visualmente que la ecuación $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ no tiene raíces en el intervalo (-1,0), ver Figura 62.

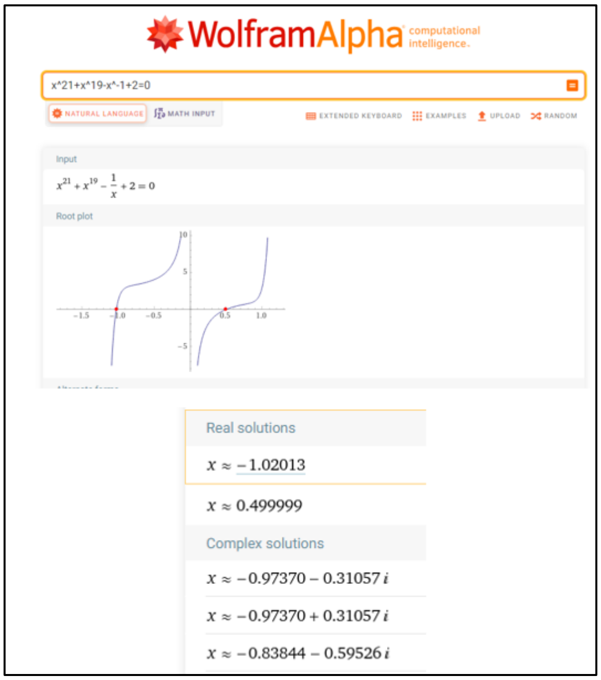


Figura 62. Información brindada por Wolfran Alpha

Análisis Problema 3: Sea $f(x) = \begin{cases} ax & si\ x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$. Encuentre a y b tales que f es diferenciable en 1.

Comprensión del problema:

Para resolver este problema era importante comprender el significado de la diferenciabilidad y sus implicaciones, ya que esto permitía establecer la igualdad de las derivadas laterales y la igualdad de los límites laterales. En este caso los tres estudiantes comprenden el problema y establecen la relación entre la diferenciabilidad y la continuidad que son elementos que conducen a la solución del problema.

Implementación de un plan de solución:

La solución presentada por Carmen, Hugo y Vera es esencialmente la misma, con algunas diferencias de estilo al presentar la solución. En su solución se destaca la heurística de concebir el problema como cierto, lo que les permitió utilizar la definición de diferenciabilidad y sus implicaciones. Es decir, calcularon la derivada y establecieron la igualdad de las derivadas laterales obteniendo como resultado una de las ecuaciones necesaria para resolver el problema. Posteriormente se apoyan del hecho de que la diferenciabilidad implica continuidad lo que les permitió establecer la igualdad de los límites laterales, obteniendo así la otra ecuación utilizada para encontrar el valor de las incógnitas. A continuación, se observa la solución presentada por Carmen, Hugo y Vera, ver Figura 63, Figura 64 y Figura 65.

Observamos que $f'(x) = \begin{cases} a, & si\ x \leq 1 \\ 2bx + 1, & si\ x > 1 \end{cases}$.

El que *f* sea diferenciable en *1* debe satisfacer que *f* y *f* 'sean continuas, en particular en *1*, es decir, sus límites por ambos lados son iguales $\left(\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = f'(1)\right)$.

Por una parte, se satisface que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} a = a$, mientras que por otra parte $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2\,bx + 1 = 2b + 1$, por lo que nos interesa que se cumpla $a = 2b + 1$.

Por hipótesis *f* es derivable, lo cual implica que *f* es continua (en particular en 1), por lo que se debe satisfacer que el límite por ambos partes coincida ($\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$). De un lado tenemos que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a\,x = a$, por otro lado $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} b\,x^2 + x + 1 = b + 2$, por que se debe satisfacer $a = b + 2$.

Igualando los valores de a obtenidos se cumple que $b + 2 = 2b + 1$, lo cual implica que $b = 1$ y $a = 3$, de donde se sigue que:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & si\ x \leq 1 \\ x^2 + x + 1, & si\ x > 1 \end{cases}.$$

Figura 63. Solución reportada por Carmen

Notemos que para $x < 1$ $\quad f'(x) = a$

Y para $x > 1$ $\quad f'(x) = 2bx + 1$

Mientras que para $x = 1$, los límites laterales que definen a la derivada deben de coincidir, esto se traduce en que ambas derivadas calculadas, al evaluarlas en $x = 1$ deben coincidir para que la función sea diferenciable para ese valor

$$a = 2b(1) + 1$$
$$a = 2b + 1 \quad \rightarrow \quad (ec. 1)$$

Por otra parte, como diferenciabilidad implica continuidad, los límites laterales en cuando $x \rightarrow 1$ también tienen que coincidir, es decir

$$f(1) = a(1) = b(1)^2 + (1) + 1$$
$$a = b + 2 \quad \rightarrow \quad (ec. 2)$$

Así, se tiene

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ a = b + 2 \end{cases}$$

Del cual se tiene la solución

$$\underline{\boldsymbol{a = 3}, \qquad \boldsymbol{b = 1}}$$

Los cuales son los valores que habrá que sustituir en $f(x)$ para que sea diferenciable.

Figura 64. Solución reportada por Hugo

Solución propuesta: Supongamos a $f(x)$ diferenciable en 1, calculemos su derivada en ese punto. Primero derivemos la función

$$f'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ 2bx + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Si evaluamos la derivada en 1 se tiene que

$$f'(1) = \begin{cases} a, & x \leq 1 \\ 2b + 1, & x > 1 \end{cases} \cdots (1)$$

Igualando

$$a = 2b + 1 \cdots (2)$$

Ahora como se supone diferenciable en 1, entonces es continua por lo que se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x\to 1} ax = a \cdots (3)$$

$$\lim_{x\to 1} bx^2 + x + 1 = b + 2 \cdots (4)$$

Igualando ambos límites se tiene

$$a = b + 2 \cdots (5)$$

Ahora tomando la ecuación (2) y (5) se tiene el sistema (6) el cual resolvemos para encontrar los valores de a y b donde la función es diferenciable en el punto 1

$$\begin{cases} a = 2b + 1 \\ a = b + 2 \end{cases} \cdots (6)$$

Resolviendo el sistema se tiene que $a = 3$ y $b = 1$ por lo que

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 1 \\ x^2 + x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Figura 65. Solución reportada por Vera

En resumen, los estudiantes encontraron la solución al problema demostrando comprensión del concepto de diferenciabilidad y sus implicaciones, tienen manejo de los procedimientos algorítmicos y uso de la definición de continuidad. Con los elementos antes mencionados se puede concluir que los estudiantes cuentan con los recursos para resolver este tipo de problemas.

A continuación, se presenta una aproximación mediada por GeoGebra que permite ilustrar geométricamente la diferenciabilidad y sus implicaciones. Al ser una función por partes se va a necesitar introducir dos deslizadores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ que cumplan el papel de las incógnitas de las ecuaciones de la función $f(x)$. El deslizador $\boldsymbol{a}$ permite cambiar la pendiente de la recta ax y de esta forma generar una familia de rectas; el deslizador $\boldsymbol{b}$ nos permite cambiar el coeficiente del término cuadrático de la función $bx^2 + x + 1$ y generar así una familia de parábolas. En la Figura 66 se aprecia el papel de los deslizadores, es decir, se observa la familia de rectas y parábolas generadas al mover los deslizadores.

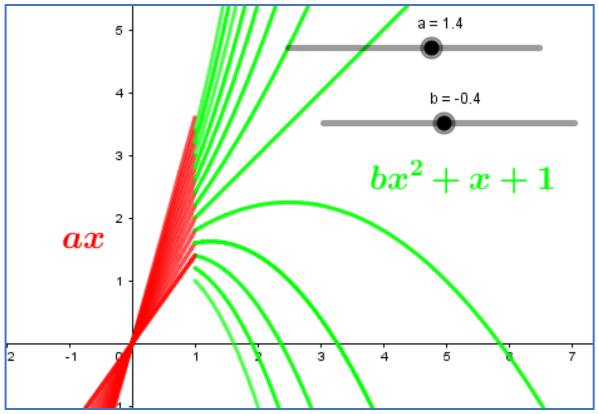


Figura 66. Familia de rectas y parábolas.

Dar por cierto que la función es diferenciable garantiza que la derivada existe y eso ocurre cuando la función es una curva suave, es decir los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ deben ser tales que la función no tenga cambios bruscos de dirección o picos. En la Figura 67 un otro ejemplo donde la función es continua pero no es diferenciable ya que se observa que en $x = 1$ la función tiene un pico, por tal motivo los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ quedan descartados ya que no existe la derivada en ese punto. Al establecer la igualdad de las derivadas laterales $a = 2b + 1$ estamos garantizando que la función no tenga picos.

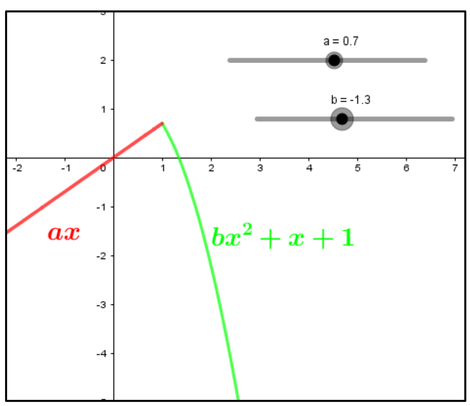


Figura 67. Gráfica de la función no diferenciable en $\boldsymbol{x = 1}$.

La igualdad de los limites laterales de $f(x)$ garantizan que la función es continua en $x = 1$, esto es una consecuencia directa del hecho que la función es diferenciable. Para conseguir que la función sea continua y diferenciable se debe seleccionar adecuadamente los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ del deslizador hasta lograr que la función no tenga picos y que tanto ax como $bx^2 + x + 1$ tengan la misma recta tangente en ese punto. En la Figura 68 se observa que tanto la recta roja como la parábola verde tienen la misma recta tangente en el punto $A = (1,3)$.

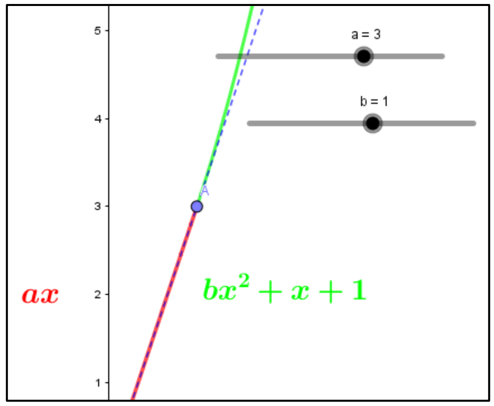


Figura 68. Gráfica de una función continua y diferenciable.

Problema 4: Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o explica porque no existe solución.

Comprensión del problema:

Este problema no requería encontrar las soluciones de la ecuación, sino que bastaba con demostrar que la ecuación no tiene solución, por lo que era necesario convertir la ecuación a una función y utilizar herramientas del cálculo para analizar su comportamiento. En este caso los tres estudiantes demostraron comprender el problema y reconocieron la importancia de utilizar sus recursos de cálculo para analizar la función, en particular utilizaron el criterio de la primera y segunda derivada que les permitió analizar la función y concluir que la ecuación no tiene solución.

Implementación de un plan de solución:
La solución presentada por Carmen y Vera son muy similares, ya que ambas deciden dividir el problema y solo trabajar una parte de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ (heurística de dividir el problema en partes). En el caso de Carmen definió la función $f(x) = 4x^3 - x^4$ y analizó su comportamiento utilizando el criterio de la primera y segunda derivada. Su intención era encontrar un valor de x para el cual la función $f(x) = 4x^3 - x^4$ sea igual a 30, elemento que le permitiría concluir que la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ tiene solución. En el caso de Vera definió la función $f(x) = 4x^3 - x^4$ y $g(x) = 30$ su propósito era verificar si las dos funciones si intersecan en algún punto, esto permitiría argumentar que comparten la misma coordenada en el eje x y que al menos existe una solución a la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$. En general el procedimiento de Carmen y Vera se resume en utilizar el criterio de la primera y

segunda derivada para analizar el comportamiento de $f(x)$ hasta encontrar el máximo de la función y comprobar que en ese valor la función $f(x)$ no alcanza a ser 30 y por lo tanto la ecuación no tiene solución ver Figura *69* y Figura *70*.

Definimos $f(x) = 4x^3 - x^4$, observamos que f es continua y derivable, además que $f'(x) = 12x^2 - 4x^3$. Nos interesa calcular los máximos y mínimos de f para poder establecer si es igual a *30* en algún punto, por lo que nos interesa calcular las raíces de f', es decir, que $4x^2(3-x) = 0$, lo cual se satisface cuando $x = 0$ y $x = 3$, observando que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, 3)$ y $f'(x) < 0$ en el intervalo $(3, \infty)$, por el criterio de la primera derivada, f es creciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y decreciente en el intervalo $(3, \infty)$.

Calculando la segunda derivada se satisface que $f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2-x)$, evaluando en *0* se cumple que $f''(0) = 0$, por lo que, usando el criterio de la segunda derivada, f tiene un punto de inflexión en *0*. Por otro lado, evaluando f ''en *3* se satisface que $f''(3) = 24(3) - 12(3)^2 = -36 < 0$, considerando que f es creciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y decreciente en el intervalo $(3, \infty)$. Evaluando $f(3) = 4(3)^3 - (3)^4 = 27$, entonces $f(x) \leq 27$ satisface que f tiene un máximo absoluto en *3*., es decir, no existe ningún $x \in R$ tal que $f(x) = 30$.

Figura 69. Solución reportada por Carmen.

Para resolver el problema visualicemos a la ecuación como dos funciones $f(x) = 4x^3 - x^4$ y $g(x) = 30$, de las cuales se busca encontrar un punto en el que se intercepten ambas funciones, para ello primero analicemos los máximos y mínimos de $f(x)$, para ello calculemos su primer y segunda derivada

$$f'(x) = 12\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x}^3$$
$$f''(x) = 24\mathrm{x} - 12\mathrm{x}^2$$

Ahora encontremos las raíces de la primera derivada para ello igualamos a cero

$$12x^2 - 4x^3 = 0$$

Resolviendo se tiene que $x = 0$ y $x = 3$. Para saber si hay máximos o mínimos evaluamos la segunda derivada en $x = 3$ ya que cuando $x = 0$ hace que la derivada sea cero por lo que no existen máximos ni mínimos en este punto.

$$f''(3) = 24(3) - 12(3)^2 = -36$$

Como el resultado es negativo se dice que hay un máximo en 3, ahora para saber dónde se encuentra ese máximo evaluemos $f(x)$ en 3.

$$f(3) = 4(3)^3 - (3)^4 = 27$$

Así el punto máximo de $f(x)$ esta en el punto $(3, 27)$, por lo que las funciones nunca se cruzan, es decir no existe solución para $4x^3 - x^4 = 30$.

Figura 70. Solución reportada por Vera.

En la solución de Hugo se puede observar que definió la función $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ y pretende encontrar un valor de x tal que $f(x) = 0$, es decir pretende demostrar que existe un valor de x donde la función intercepta al eje x. Este argumento le permitiría demostrar que la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ tiene solución. En la solución reportada se observa que utilizó los mismos recursos que sus compañeras, es decir analizó la función usando el criterio de la primera y segunda derivada, lo que le permitió encontrar los puntos críticos. Analizar el comportamiento de la función en estos valores le permitió comprobar que la función no intercepta al eje x y por lo tanto no existe solución a la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$, ver Figura 71.

El ejercicio puede verse como, encontrar los valores x para los cuales $f(x) = 0$ con $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ con x en los reales

Se procede analizando a $f(x)$.

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x)$$
$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2 - x)$$

Donde, para $f'(x) = 0$ se tiene $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Evaluando los puntos críticos x_1, x_2 en la segunda derivada se tiene

$$f''(0) = 0$$
$$f''(3) = 12(3)(2 - 3) < 0$$

Es decir, $(0, f(0))$ es un punto de inflexión de la función, mientras que $(3, f(3))$ es un máximo de la función.

Sin embargo se tiene que

$$(0, f(0)) = (0, -30)$$
$$\text{y} \quad (3, f(3)) = (3, -3)$$

En consecuencia, la función $f(x)$ no tomará valores mayores o iguales a cero para ningún valor en su dominio, pues alcanzará su máximo absoluto en $x = -3$.

De lo anterior se concluye que la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ no tiene soluciones reales.

Figura 71. Solución reportada por Hugo.

En resumen, Carmen y Vera utilizan la misma estrategia para encontrar la solución al problema, pero presentan algunas diferencias en cuanto a la forma de explicar su solución. En el caso de Carmen su explicación tiene un carácter más algebraico, ya que busca un valor de x en donde la función f sea igual a 30, en cambio Vera tiene una visión más geométrica, ya que intentan descubrir si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se interceptan en algún punto, ya que esto le permitiría demostrar la existencia de al menos una solución. Se puede concluir que ambas cuentan con los recursos para resolver este problema, ya que pueden aplicar el criterio de la primera y segunda derivada, también demostraron dominio de los procedimientos algorítmico que el problema demanda.

Por parte de Hugo demostró una mejor comprensión del problema y mejor selección de la estrategia, ya que analizó directamente la función $f(x) = 4x^3 - x^4 - 30$ sin necesidad de trabajar solo con una parte de la ecuación. Con los elementos mostrados se puede concluir que Hugo cuenta con los recursos para resolver el problema demostrando dominio de los criterios de la primera y segunda derivada y los procedimientos que esto demanda.

En este caso se puede usar GeoGebra como un instrumento de verificación rápida, ya que al realizar la gráfica de la función $f(x)$ y observar que la función no intercepta al eje x, permite concluir que la ecuación no tiene solución, ver Figura *72*.

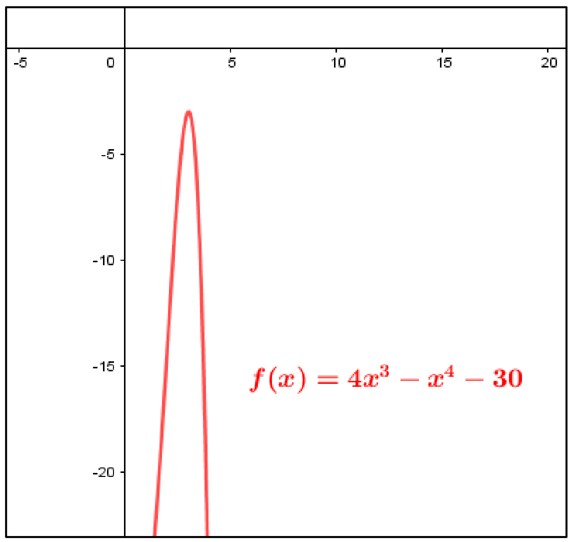


Figura 72. Gráfica de la función f(x).

Análisis Problema 5: ¿Hay algún a tal que $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 3ax + x - a - 1}{x^2 - 2x - 3}$ existe? Explica tu respuesta.

Comprensión del problema:

Para resolver este problema era necesario identificar que el numerador debía ser divisible por $(x - 3)$ para que la función esté definida y a su vez permitía encontrar el valor de la incógnita y calcular el límite. En este caso los tres estudiantes pudieron identificar este hecho, aunque en el caso de Vera y Hugo argumentaron que el numerador debe ser divisible por $x - 3$ para que el límite exista. Con esta afirmación se puede percibir que tiene una falsa concepción del concepto de límite, ya que no es necesario que la función este definida para que el límite exista. En la Figura *73* y Figura *74* se aprecia un fragmento de la solución en donde los estudiantes presentan este argumento.

Nótese que el polinomio divisor puede ser factorizado como $(x-3)(x+1)$, de donde se sigue que el límite existe si, y solo si, el polinomio numerador puede factorizarse, con $(x-3)$ como uno de sus factores.

Figura 73. Solución reportada por Hugo.

Solución propuesta: Observemos que el denominador se puede factorizar como $(x+1)(x-3)$, ahora para que exista el límite el numerador debe ser divisible entre $(x-3)$, para ello supongamos que

Figura 74. Solución reportada por Vera.

Implementación de un plan de solución:

La solución propuesta por Hugo es similar a la de Carmen, ya que eligió la misma estrategia y los mismos procedimientos algorítmicos. Su procedimiento se resume en dividir el polinomio del numerador por $(x-3)$, lo que les permitió obtener el valor de la incógnita, posteriormente calculó el límite, ver Figura *75* y Figura *76*.

Reescribiendo el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-x(3a-1)-a-1}{(x+1)(x-3)}.$$

De donde se observa que el coeficiente esta indeterminado cuando se evalúa en *3* de esta forma nos interesa que el denominador sea divisible por *(x-3)* para calcular el límite. Por lo que realizamos las operaciones correspondientes, tenemos que el residuo es $-10a+20$ para que el polinomio sea divisible por $(x-3)$ debe cumplir que $10a=20$, es decir, $a=2$, de donde se obtiene:

$$2x\hat{}2-x(3a-1)-a-1=2x\hat{}2-5x-3=(x-3)(2x+1).$$

Concluyendo que:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}\,lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{7}{4}.$$

Figura 75. Solución reportada por Carmen.

Nótese que el polinomio divisor puede ser factorizado como $(x-3)(x+1)$, de donde se sigue que el límite existe si, y solo si, el polinomio numerador puede factorizarse, con $(x-3)$ como uno de sus factores.

De lo anterior, se prueba que al realizar la división del polinomio numerador entre $x-3$, se consigue un residuo de $10a+20$, de lo cual, dado que se requiere una factorización, dicho residuo debe ser igual a cero. Así

$$\boldsymbol{a}=-\mathbf{2}$$

Luego se sigue que para $a=-2$ se tiene

$$\lim_{n\to 3} \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}=\lim_{n\to 3} \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{n\to 3} \frac{(2x+1)}{(x+1)}=\frac{7}{4}$$

Figura 76. Solución reportada por Hugo.

El procedimiento usado por Vera presenta algunas diferencias en cuanto a los recursos usados, ya que define a $f(x)=2x^2-3ax+x-a-1$, luego utilizó el teorema del factor para encontrar el valor de a y finalmente calculó el límite de la función, ver Figura *77*.

Solución propuesta: Observemos que el denominador se puede factorizar como $(x+1)(x-3)$, ahora para que exista el límite el numerador debe ser divisible entre $(x-3)$, para ello supongamos que

$$f(x)=2x^2-3ax+x-a-1$$

Ahora si $x=3$ encontremos el valor de a

$$2(3)^2-3a(3)+(3)-a-1=2(9)-9\mathrm{a}+2-\mathrm{a}$$
$$18-10\mathrm{a}+2=20-10\mathrm{a}$$

Así

$$20=10\mathrm{a}$$
$$\mathrm{a}=2$$

Ahora sustituyendo el valor de a en $f(x)$ se tiene que $f(x)=2x^2-5x-3$ lo cual se puede factorizar como $(x-3)(2x+1)$. Así se tiene que

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+1)}{(x+1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{7}{4}$$

Figura 77. Solución reportada por Vera.

En resumen, los tres estudiantes cuentan con los recursos para resolver los cinco problemas de cálculo, ya que encuentran todas las soluciones sin presentar mayor dificultad y sin errores para destacar. De igual forma demuestran dominio de los procedimientos algorítmicos que cada problema demanda. Al analizar sus soluciones se puede concluir que los estudiantes conciben que resolver problemas consiste en presentar una solución corta y precisa, en donde intentan demostrar que saben matemáticas mediante la utilización de fórmulas y teoremas matemáticos. Es decir, ellos no sienten necesidad de utilizar herramientas tecnológicas al momento de resolver problemas, ya que únicamente consideran que deben evidenciar su conocimiento matemático y encontrar la solución al problema. En esta fase se destacan los trabajos presentados por Hugo y Vera ya que presentan indicios de un proceso de reflexión de lo que implica resolver problemas de este tipo, esto queda evidenciado en las reflexiones que agregaron al final de cada problema.

A continuación, se presenta una aproximación mediada por GeoGebra que nos permitirá ver el problema 5 desde una visión gráfica. Si se crea un deslizador a que cumpla la función de la variable $\boldsymbol{a}$ en el numerador de la función $f(x) = \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}$ se obtiene una familia de funciones racionales. Además, se puede apreciar que cuando a toma algunos valores la función tiene comportamientos diferentes, pero con una característica en común y es que existe una asíntota vertical en $x = 3$, ya que la función no está definida para ese valor, por ejemplo, cuando $a = 2.2$ y cuando $a = 1.5$, es notorio que hay una asíntota vertical ya que los valores a la derecha y la izquierda de $x = 3$ crecen o decrecen muy rápido y viceversa, ver Figura *78* y Figura *79*.

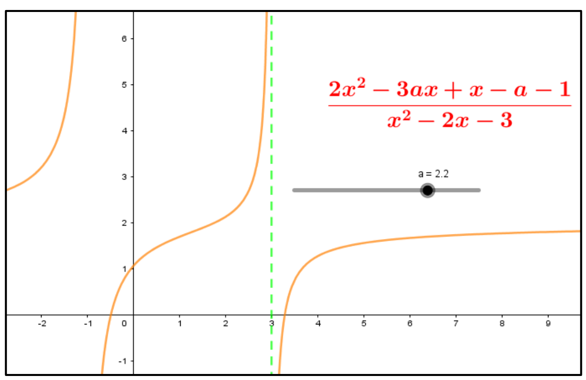


Figura 78. Gráfica de la función racional con $\boldsymbol{a = 2.2}$

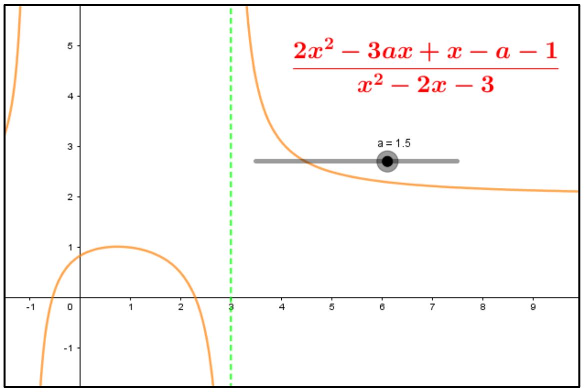


Figura 79. Gráfica de la función racional con $a = 1.5$

Con ayuda del deslizador se aprecia que hay muchos valores de a en donde la función no está definida, y que solo existe un valor en donde la función queda definida. Este es el motivo por el cual se hace énfasis de que el numerador $2x^2 - 3ax + x - a - 1$ debe ser divisible por $(x - 3)$, ya que se pretende eliminar la indeterminación de la función para este valor en específico. En la gráfica se puede observar que cuando $a = 2$ la función está definida para $x = 3$, es decir que la asíntota vertical desaparece y resulta más accesible calcular el límite de la función cuando x tiende a 3. Ver Figura 80.

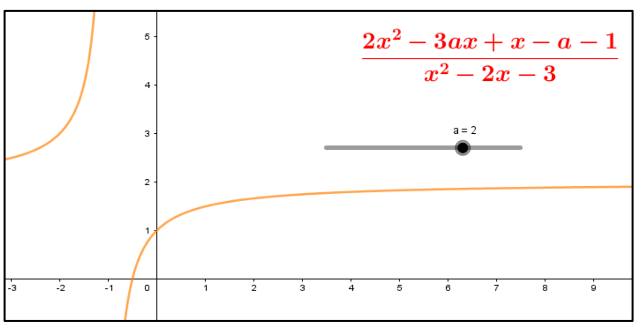


Figura 80. Gráfica de la función racional con $a = 2$

Análisis Problema 6: En la figura se dibuja un círculo con centro en (1, 0) y radio 1. Seleccione un punto P sobre la circunferencia y un punto Q sobre el eje Y de tal manera que OP = OQ. Trace la recta QP que interseca al eje X en el punto R. ¿Pruebe que, si P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha, ¿existe un límite para la posición de R? Justifique su repuesta.

Comprensión del problema:

En este problema se debía demostrar dos hipótesis, la primera es que el punto R se mueve hacia la derecha cuando P se acerca al punto O, y la segunda es verificar que existe un límite para la posición de R. La principal dificultad del problema radicaba en presentar argumentos que permitieran demostrar estas hipótesis, por tal motivo crear un modelo dinámico del problema permitía que los estudiantes realizaran exploraciones y plantearan conjeturas para demostrar estas hipótesis.

En la solución reportada por Carmen se observa que creó un modelo dinámico del problema y realizó una exploración superficial, en donde prestó atención a la forma en como disminuye la medida de uno de los ángulos, ver Figura 81. Esta exploración no brindó los suficientes elementos para plantear conjeturas o encontrar una estrategia que conduzca a la solución, por lo que concluimos que utilizó la herramienta para hacer una construcción precisa del problema ya que todas las conjeturas que plantea vienen precedidas de la interpretación de está.

- Sí P se acerca al punto O, R se mueve hacia la derecha.

Definimos al triángulo OPQ, el cual satisface que es triángulo isósceles pues OP=OQ, observamos que cuando el punto P se acerca al punto O (considerando que P se encuentra en el primer cuadrante), el ángulo QOP se hace más pequeño (además de que este se encuentra entre cero y noventa grados). Por una parte, observamos que los ángulos OPQ y OQP, son iguales y valen $\frac{180° - \angle QOP}{2}$, entonces se cumple que el ángulo OPR mide $180 - \frac{180° - \angle QOP}{2} = \frac{360° - \angle QOP}{2}$, entonces se satisface que el ángulo OPR esta entre 135 y 180 grados, por lo que es el ángulo más grande que tiene el triángulo OPQ. Recordado que al ángulo mayor se opone el lado mayor, entonces OR, aumenta y dado que O es un punto fijo, para que OR crezca, R se debe de mover a la derecha, cuando P se acerca más a O.

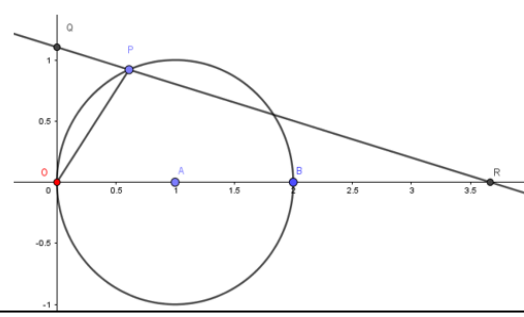


Figura 81. Exploración superficial del modelo dinámico, realizada por Carmen.

En la solución reportada por Vera se puede observar que realizó un modelo dinámico del problema que presenta en el siguiente link; https://www.geogebra.org/m/dn3aprbg. La exploración realizada al modelo le permite verificar que el punto R se mueve a la derecha a medida que el punto P se acerca al punto O y que punto R tiene un límite. Es decir, utilizó GeoGebra como un instrumento de verificación visual, ya que no presenta ninguna conjetura que explique estos hechos. Esto se aprecia en el siguiente fragmento de su tarea, ver Figura *82*.

Reconstruyendo la imagen en GeoGebra se puede ver que si existe un límite para para la posición de R.

Figura 82. Argumento presentado por Vera.

De la solución reportada por Hugo se puede señalar que presenta dificultad para comprender el enunciado del problema y para construir la figura, conduciéndolo a trabajar un problema diferente al original. Es decir, realizó una construcción considerando que los segmentos OP y QP son congruentes cuando en realidad los segmentos congruentes son OP y OQ, ver Figura *83*.

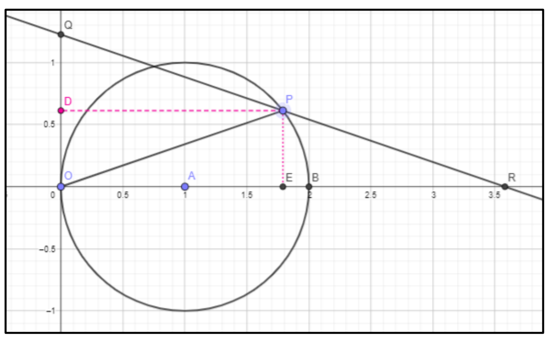


Figura 83. Hugo construye un problema distinto al original.

En cuanto al uso de GeoGebra se puede observar que Hugo realizó una exploración muy superficial que solo le permitió realizar una verificación visual de las hipótesis que brinda el problema y presentar argumentos geométricos que explican la razón porque R se mueve a la derecha. Es decir, solo establece que el punto P se mueve a la derecha a medida que OP aumenta su longitud, ver Figura *84*.

Tomando como referencia la figura, y recorriendo el punto P en sentido horario, si puede afirmarse que el punto R se moverá hacia la derecha. La justificación de esta afirmación es la siguiente.
A medida que P se mueve en sentido horario, el segmento OP aumenta su longitud hasta alcanzar su máximo en el punto B. A partir de ahí, los puntos O, Q, R coinciden en el origen hasta que P coincide con el origen para volver a realizar el punto Q, P y R nuevamente sus recorridos.
El motivo de que R se mueva a la derecha de esta forma es porque R depende del punto Q y Q depende de la longitud del segmento OP. Observando con detenimiento, el movimiento de P, desde O a B, sin coincidir en ningún momento con alguno y en sentido horario, siempre proporciona los triángulos ΔOQR, ΔOQP y ΔOPR. Por construcción, ΔOQP es isosceles y ΔOQR tiene un angulo recto en el origen. De lo que se sigue

Figura 84. Hugo presenta argumentos geométricos que explican el movimiento de R.

Implementación de un plan de solución:

En este problema los tres estudiantes presentaron soluciones diferentes, pero únicamente Carmen encontró la solución al problema, a pesar de que Hugo trabajó un problema diferente al original, también presentó una solución que explican el movimiento de R y su límite, pero las condiciones del problema son otras.

De la solución de Carmen se destacó la heurística de elemento auxiliar cuando agregó el segmento BP, que le permitió establecer nuevas relaciones entre los ángulos de los triángulos ΔOPB, ΔOPQ y ΔBPR, ver Figura *85*. Esta es una heurística propia de los escenarios estáticos y en este caso se ve que únicamente utilizó GeoGebra para realizar la construcción del problema y agregar el nuevo elemento.

¿Existe un límite para la posición de R?

Consideramos al triángulo OPQ, definimos $\angle POQ = \alpha$, al ser OPQ isósceles, entonces se satisface que

$$\angle PQO = \angle QPO = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Definimos al triangulo OPB, donde B es el punto (0,2), observamos que este es un triángulo rectángulo por construcción, donde $\angle OPB = 90°$, además de que $\angle POB = 90° - \alpha$, definiendo a $\angle PBO = \theta$, entonces se satisface que

$$\angle OPQ + \angle POB + \angle PBO = 90° + 90° - \alpha + \theta \Rightarrow \theta = \alpha$$

Tomando en cuenta al triángulo POB, observamos que el ángulo $\angle PBR = 180° - \alpha$, por otro lado, llamamos $\angle BPR = \beta$, el cual satisface:

$$\angle QPO + \angle OPB + \angle BPR = 90° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$$

Llamando $\angle PRB = \gamma$, entonces se cumple que

$$\angle PRB + \angle PBR + \angle BPR = \gamma + 180° - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2}$$

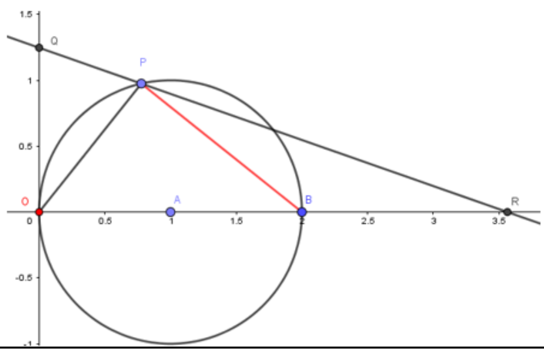


Figura 85. Carmen agrega el segmento BP.

El procedimiento de Carmen se resume en utilizar teoremas y propiedades geométricas que le permitieron concluir que el segmento PB es una cuerda de la circunferencia de radio AB con centro en A y que el punto R alcanza su límite cuando la cuerda PB se aproxima a su longitud máxima, que viene a ser el diámetro de la circunferencia de radio AB, ya que al estar definido PB como el lado de un triángulo isósceles este no puede tomar el valor exacto del radio ya que desaparece el triángulo, ver Figura 86.

De esta forma obtenemos que el triángulo BPR es isósceles y que los lados PB y BR son de igual medida. Al ser PB una cuerda de la circunferencia con centro en A, entonces el valor máximo que puede alcanzar PB es 2, acercando a P a 0, observaremos que el punto R se acerca a 4, sin embargo, al estar R en una recta, no está definida para cuando PB y BR pertenecen a la misma recta, por lo que R es un punto de la forma de la forma (x,0), con $x \in [0,4)$.

Figura 86. Argumento final mostrado por Carmen.

En el procedimiento presentado por Vera se puede observar que intentó demostrar que el punto R tendrá un límite aplicando el teorema del cateto, tomando, como referencia el triángulo rectángulo OQR y estableciendo que la proyección es $OQ = (OA)(OR)$. Con la hipótesis de que $OQ = OP$ dado en el problema y con ayuda de este teorema pretende demostrar que cuando P tiende a cero entonces la proyección también lo hace. Con este argumento concluye que R tendrá un límite, ya que no puede construirse un triángulo cuyo lado sea cero, ver Figura 87.

Se debe señalar que Vera evidencia poco dominio del teorema del cateto ya que se presenta algunos errores al momento de utilizarlo. En primer lugar, se observa que no maneja las condiciones del teorema, ya que pretende hacer la proyección sobre el cateto OR, cuando en realidad la proyección de los catetos debe hacerse sobre la hipotenusa. En segundo error consiste en utilizar incorrectamente la fórmula del teorema, es decir que ella estable que $OQ = (OA)(OR)$, cuando en realidad la fórmula establece que el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa, es decir $OQ^2 = (OA)(OR)$. Al observar estos errores se puede concluir que Vera no cuenta con los recursos para resolver este problema. Además, se debe enfatizar que tenía libre acceso a la red para buscar información concerniente al teorema y que no la usó, sino que se dejó guiar por su memoria y aplicó convenientemente lo que ella consideraba que era el teorema del cateto.

Reconstruyendo la imagen en GeoGebra se puede ver que si existe un límite para para la posición de R. Tomando el triángulo OQR se puede ver que es un triángulo rectángulo porque su base y su altura esta sobre los ejes del plano, es decir tiene un ángulo recto, además el cateto formado por $OQ = OP$, Ahora por el teorema del cateto se tiene que

$$OQ = (OA)(OR)$$

Sustituyendo OQ por OP se tiene

$$OP = (OA)(OR)$$

Pero que P se acerca al punto O significa que tiende a cero por lo que su proyección igual, así

$$0 = (OA)(0)$$

Obteniendo así un límite para R. Ya que no es posible construir un triángulo rectángulo que tenga un cateto igual a cero. https://www.geogebra.org/m/dn3aprbg

Figura 87. Solución de Vera.

Se debe recalcar que el error que Hugo cometió en la construcción lo conduce a trabajar un problema distinto al original, ya que ahora el punto R se mueve a la derecha cuando el punto

P se aproxima al punto B, de igual forma sigue existiendo un límite para el punto R. En esta solución se observa la utilización de la heurística de elemento auxiliar al trazar la altura EP, este nuevo elemento le permitió establecer algunas relaciones trigonométricas. También se puede observar la evolución del procedimiento algorítmico, empezando por algunas relaciones entre los ángulos hasta finalizar con una expresión trigonométrica que le permitió explicar porque el punto R se mueve a la derecha. De la segunda parte se puede señalar que tomó referencia la expresión trigonométrica encontrada en la primera parte de la solución y la variación del ángulo θ para explicar porque el punto R tiene un límite, ver Figura *88*.

Por otra parte, por las restricciones de construcción y todos los argumentos, considerando la relación encontrada

$$r^2 \cos^2 \theta = k$$

Se sigue que

$$OR = 2\sqrt{\mathrm{r}^2 \cos^2 \theta} = 2|r\ cos\theta|$$

Por lo que tomando $r \to 2$, $\theta \to \pi$, se tiene que $OR \to 4$, sin embargo, no alcansa a tomar dicho valor. OR pasa de $4 - \epsilon$ a volverse indefinido, pues la recta QP coincide con el eje de las abscisas.

Para la solución a este ejercicio se usó la siguiente construcción en GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/tdzsrrhc

Figura 88. Segunda parte de solución de Hugo.

En este problema los estudiantes presentaron sus primeros indicios de incorporar la tecnología en la resolución de problemas. Se puede percibir que Carmen realizó la exploración superficial que no brindó ningún elemento que contribuyera con la solución y terminó usando la herramienta solo para construir la figura del problema, ya que todas sus conjeturas vienen precedidas de analizar de está. En cambio, Vera y Hugo utilizaron la herramienta como un medio de comprobación visual de los elementos que buscan demostrar. Con los elementos mostrados se puede concluir que aún no se apropian de la herramienta como un instrumento que promueve la reflexión matemática. En cuanto a los recursos, Carmen y Hugo demostraron contar con los recursos para encontrar la solución al problema. En el caso de Vera no cuenta con los recursos para resolver este problema, ya que demostró que no maneja el teorema del cateto, en consecuencia, cometió un error al enunciar el teorema y al aplicarlo, lo que le impidió encontrar la solución del problema. También, se puede señalar que Hugo tiene dificultad para comprender el enunciado del problema que lo condujo a cometer un error al construir el modelo dinámico y a trabajar un problema distinto al original, pero que aún mantiene las incógnitas con otras condiciones.

A continuación, se presenta una exploración realizada en GeoGebra que brinda elementos para poder argumentar porque el punto R se mueve hacia la derecha y que tiene un límite. Si se traza la mediatriz de PR, se observa que a medida el punto P se acerca a O la mediatriz (verde) parece ser perpendicular al eje x y tangente a la circunferencia en el punto B, ver Figura 89.

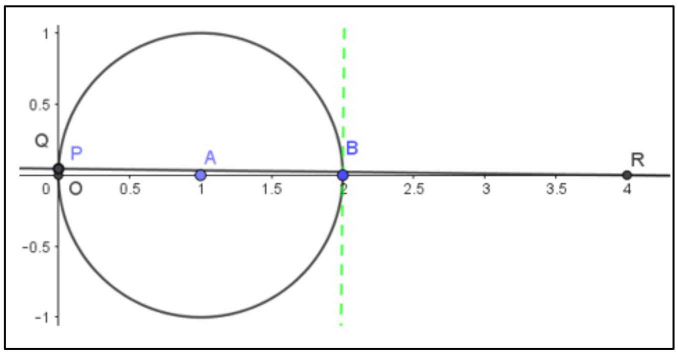


Figura 89. Mediatriz tangente a la circunferencia.

Si se traza la perpendicular al eje x que pasa por B, se aprecia que a medida que el punto P se mueve cerca del origen, la mediatriz (verde) se aproxima más a la recta perpendicular en azul. Es decir, a medida que el punto P tiende al origen la mediatriz tiende a la perpendicular y en consecuencia el punto R tiende a O' el cual esta definido como la reflexion del punto O con respecto a B, ver Figura 90.

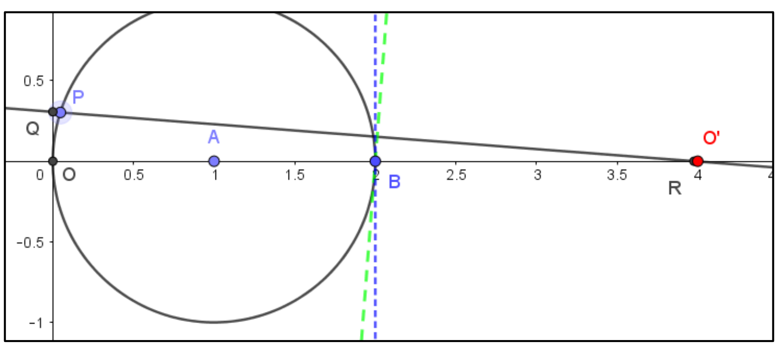


Figura 90. P tiende al origen y R tiende a O'

Note que si se realiza la reflexión de O con respecto a la mediatriz (verde) se obtiene el punto O''. Observe que a medida se mueve el punto P el lugar geométrico generado por el punto O'' es una semicircunferencia con centro en B y radio OB, ver Figura 91.

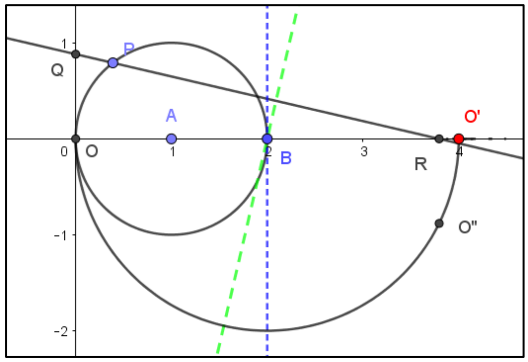


Figura 91. El punto O'' genera una semi circunferencia.

Nótese que si se considera PB como una cuerda de la circunferencia de radio AB, este elemento también podría servir para argumentar que el punto R alcanza su límite cuando la cuerda PB se aproxima al diámetro de la circunferencia AB. De igual forma podría decirse que R alcanza su límite cuando PB se aproxima a ser el radio de la circunferencia OB, ver Figura 92.

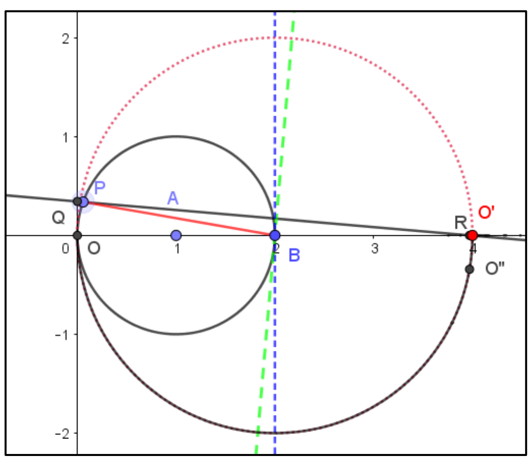


Figura 92. R alcanza su límite cuando la cuerda PB se aproxima al diámetro de la circunferencia OB.

A continuación, se presenta otra exploración al problema en donde se aprecian otros elementos matemáticos diferentes a los observados en la exploración anterior y que da lugar al estudio de otros contenidos y al planteamiento de nuevas conjeturas. En la Figura 93 se observa la recta PC perpendicular al eje x que pasa por el punto P, el punto O' es la reflexión del punto O con respecto a la recta PC. Nótese que a medida que el punto P se acerca a B entonces el punto O' se mueve a la derecha y también tiene un límite y coincide con el límite del punto R. Es decir, O' tiende a O'' que es la reflexión del punto O con respecto al punto B.

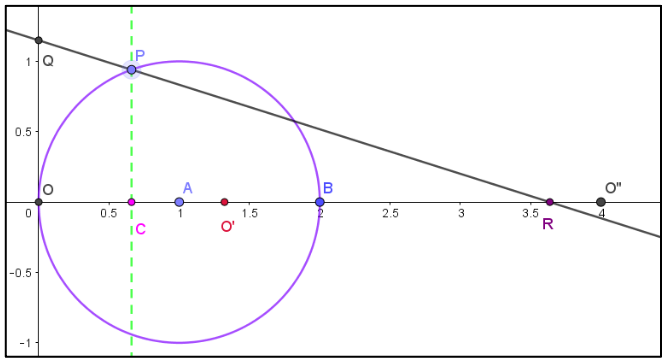


Figura 93. El punto O' tiende a O''

Si se unen los puntos O, P y O' se construye la familia triángulos OPO' que aparentemente son triángulos isósceles, lo que se puede demostrar utilizando el teorema de LAL considerando los triángulos ΔOPC y $\Delta O'PC$. Observe que si se traza el punto medio del segmento PO' y se mueve el punto P, el lugar geométrico generado por el punto E es similar a una elipse, ver Figura 94.

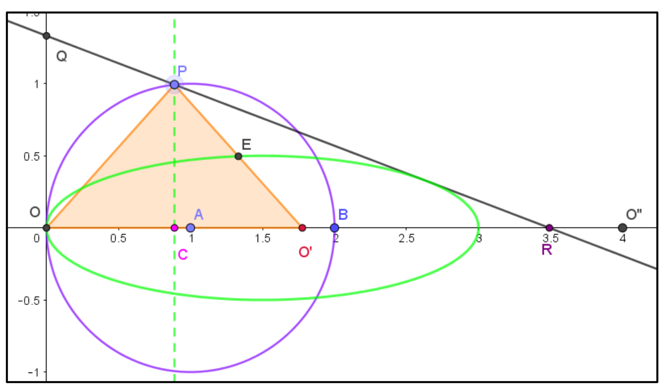


Figura 94. Lugar geométrico generado por E.

Ahora faltaría demostrar que efectivamente el lugar geométrico encontrado es una elipse. Para ello se necesita encontrar algunos elementos importantes de la elipse como ser el eje mayor, el eje menor y los focos. Observe que si se traza el simétrico de A respecto a B se encuentra el punto A' que esta sobre la elipse. Ahora si se considera que los puntos O y A' son vértices de la elipse por lo tanto OA' es el eje mayor, sabiendo esto se encuentra que el punto F es su punto medio. Al trazar una recta perpendicular al eje x que pase por F se obtiene el eje menor, ahora solo faltaría encontrar cuáles son sus vértices. Observe que, al encontrar el punto medio de OP y trazar el lugar geométrico de G con respecto a P, se obtiene una circunferencia. Al analizar la razón entre el segmento OG y OP se observa que OG es la mitad de OP por ser su punto medio y que esta razón se mantiene constante sin importar el movimiento de P. Es decir, existe una homotecia de razón 0.5 entre la circunferencia roja y la circunferencia original del problema. Ahora al trazar una recta paralela al eje x que pasa por G se observa que corta a la elipse en diferentes puntos, pero existe un punto en particular en donde aparentemente es tangente a la elipse, ver Figura 95.

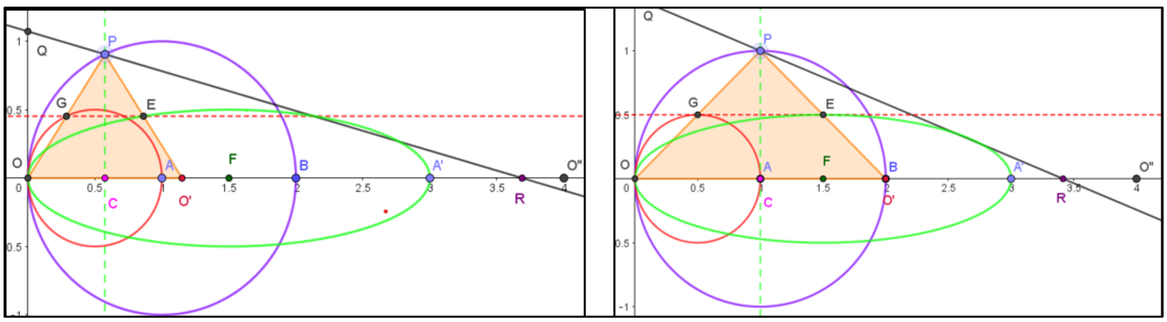


Figura 95. Movimiento de la recta EG paralela al eje x.

Si se consideran los observado anteriormente se debe encontrar otra circunferencia que tenga razón de 0.5 con la circunferencia original, ya que esta permitirá encontrar los vértices del eje menor de la elipse. Utilizando el comando de homotecia se encuentra la circunferencia rosa que cumple con estas características buscadas. Luego trazando una recta perpendicular al eje x que pase por el punto F. Observe que si marcar las intercepciones entre la recta azul y la circunferencia rosa se obtienen los puntos H y L que serán los vértices del eje menor, ver Figura 96.

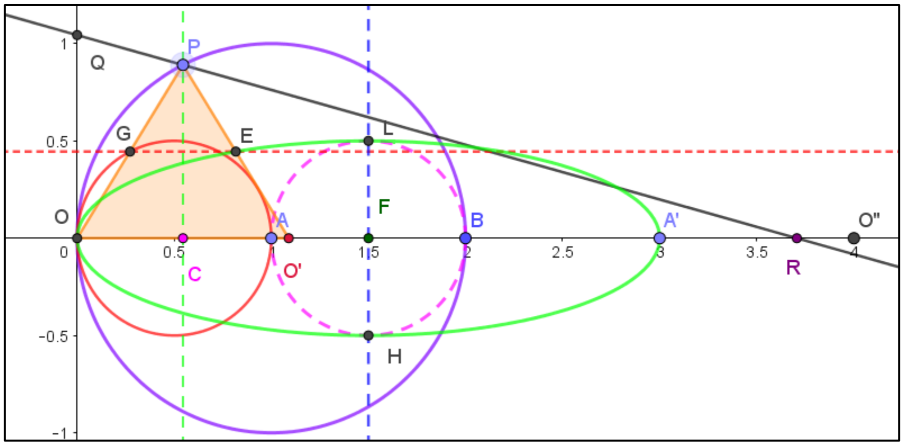


Figura 96. Vértices del eje menor.

Ahora solo falta encontrar cuáles son los focos de nuestra elipse. Para ello se traza una circunferencia de radio FA' con centro en L. Al marcar la intercepción de la circunferencia con el eje de las x se obtiene los puntos K y J que serán los focos de nuestra elipse, ver Figura 97.

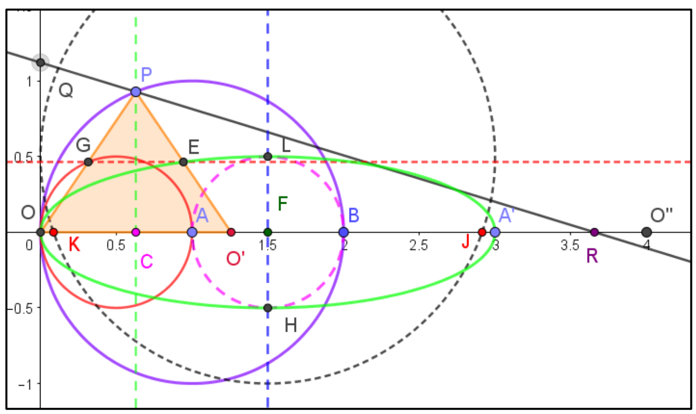


Figura 97. Focos de la elipse.

Para verificar que el resultado es correcto se usa el comando de elipse dado los focos y un punto de la elipse. Para ello se consideran los puntos K y J que son los focos y al punto L. observe que la elipse construida queda sobrepuesta con nuestro lugar geométrico en color verde, lo que garantiza que las conjeturas son correctas, ver Figura 98. Ahora queda como trabajo para el lector encontrar la ecuación de la elipse.

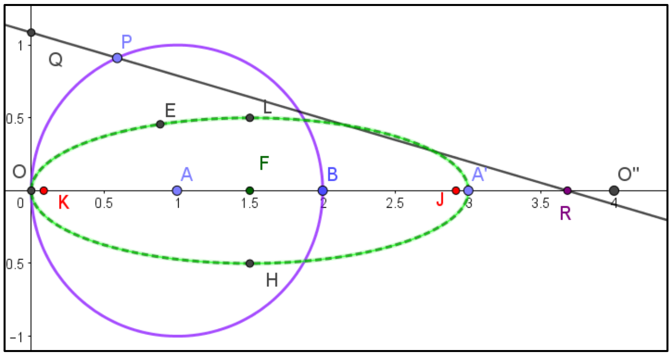


Figura 98. Elipse dado los focos y un punto sobre ella.

Se puede concluir que la movilidad que proporciona la herramienta permite realizar exploración y trabajar con nuevos elementos matemáticos, también permite la formulación de conjeturas, formular nuevos problemas, generalizar resultados y desarrollar nuestro pensamiento matemático.