CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Uso de software matemático en el planteamiento de problemas matemáticos. Una exploración en estudiantes del nivel medio superior.

T E S I S

Que presenta:

PAULINA SARAHÍ HERNÁNDEZ Y HERNÁNDEZ

Para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Director de la Tesis:

Dr. Antonio Rivera Figueroa

Ciudad de México Agosto, 2023

Agradezco a el CONACYT por el apoyo económico brindado para la realización mis estudios de maestría.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Antonio Rivera Figueroa por guiarme y acompañarme en este proceso no solo como director de tesis sino también como profesor. Gracias por su dedicación y compromiso durante la elaboración de este trabajo.

Agradezco a la Dra. Martha Leticia García Rodríguez y al Dr. Armando Solares Rojas por aceptar leer esta investigación y por sus comentarios.

Gracias a todos mis profesores del Departamento de Matemática Educativa: Dr. Luz Manuel Santos Trigo, Dr. Luis Enrique Moreno Armella, Dra. Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez, Dr. Antonio Rivera Figueroa, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez, Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco.

Un agradecimiento a todo el personal académico y administrativo del Departamento de Matemática Educativa.

Gracias a mis compañeros, que formaron parte de este viaje. Gracias a José Luis y a la profesora Norma Manzano por ayudar a que esta investigación se realizara.

Gracias a mis amigos, los que han sido y siguen siendo parte de mi vida y que me acompañaron también en esta etapa.

Gracias a mi familia por ser siempre un pilar fundamental en mi vida. Gracias a mi madre por darme no solo la vida sino también una parte de la suya, por creer en mí y acompañarme y apoyarme tanto. Gracias a Diego, por siempre estar ahí, a mi lado.

Gracias a todos los que directa e indirectamente participaron en la realización de esta tesis.

A mi madre, con todo el cariño del mundo.

Tabla de contenido

Resumen

La importancia del planteamiento de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido reconocida en las últimas décadas, también el uso de tecnología sobre todo en el planteamiento de problemas resulta prometedor. Sin embargo, el estudio de este tema sigue siendo relativamente reciente.

En esta investigación se hace una exploración acerca de los problemas planteados por un grupo de estudiantes de educación media superior con y sin el uso de herramientas digitales.

Los participantes de esta investigación eran 14 estudiantes de cuarto semestre de la preparatoria número 1 de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, la recolección de datos se llevó a cabo durante seis sesiones remotas por medio de archivos de texto en los que los estudiantes escribían sus problemas planteados, y por medio de entrevistas no estructuradas.

Los problemas planteados por los estudiantes fueron clasificados siguiendo la codificación propuesta por Leung & Silver, (1997) y se hizo un análisis de las entrevistas no estructuradas.

En el presente trabajo se presentan los resultados de esta investigación, así como las respuestas a las preguntas de investigación.

Abstract

The importance of problem posing in the teaching and learning of mathematics has been recognized in recent decades, also the use of technology especially in problem posing is promising. However, the study of this topic is still relatively recent.

This research explores the problems posed by a group of high school students with and without the use of digital tools.

The participants of this research were 14 fourth semester students from high school number 1 of the Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, the data collection was carried out during six remote sessions through text files in which students wrote their problems posed, and through unstructured interviews.

The problems posed by the students were classified following the coding proposed by Leung & Silver, (1997) and an analysis of the unstructured interviews was made.

This paper presents the results of this research, as well as the answers to the research questions.

Capítulo 1.

Introducción

Desde hace varias décadas el planteamiento de problemas en el contexto de la educación matemática ha sido tema de interés a nivel mundial de los investigadores en esta disciplina; principalmente lo que concierne al planteamiento de problemas por parte de los estudiantes. Algunos investigadores intentan describir lo que es un problema y lo que significa plantear un problema. Por ejemplo Schoenfeld (1985) apunta que una tarea matemática signifique un problema es una cuestión relativa al individuo que la enfrenta, una misma tarea puede significar un diferente nivel de esfuerzo para cada persona.

Por otra parte, Silver (1994, p. 19) dedica una sección de su artículo a la pregunta ¿Qué es el planteamiento de un problema matemático? En realidad, Silver describe diferentes situaciones en las que surgen o se plantean problemas matemáticos. Por ejemplo, el planteamiento de un problema matemático puede surgir durante la resolución de un problema, por la necesidad de resolver un problema inmerso en la resolución del problema original. La reformulación de un problema es otra situación en la que ocurre el planteamiento de un problema, aun cuando solamente se mire como una nueva versión del problema original. Las reformulaciones de los problemas no necesariamente son tareas triviales y en ocasiones pueden dar luz sobre un proceso de resolución.

El planteamiento de problemas también es una actividad de los autores de libros de texto, quienes plantean problemas para que el estudiante practique, reafirme sus conocimientos o puedes plantear situaciones desafiantes para los estudiantes. En cualquiera de los casos el estudiante solamente resuelve los problemas planteados por los autores o por los profesores, pero el estudiante no participa en el planteamiento de los problemas. Al respecto Kilpatrik (1987, p. 123) apunta que "la formulación de problemas debe verse no solo como una meta de la instrucción sino también como un medio de instrucción", citado en Silver (1994).

En la actualidad, actividades como hacerse preguntas, cuestionarse y plantearse problemas han sido reconocidas como importantes dentro del quehacer matemático, así como en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es innegable que “formular preguntas significativas tiene un rol tan importante para el trabajo científico como el de darles respuesta” (Stoyanoba & Ellerton, 1996). Al respecto cabe citar una declaración de los famosos físicos Albert Einstein y Leopold Infeld (1938), en su libro Evolución de la Física, quienes comentan a propósito del problema planteado por Galileo de determinar la velocidad de la luz, el cual no resolvió:

‘La formulación de un problema suele ser más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de habilidad matemática o experimental.’ (p. 95)

También, se considera que dentro de las competencias matemáticas que un individuo debe desarrollar para que domine las matemáticas está la habilidad para plantear problemas (Niss, 2003). Así que no solamente debiera usarse la resolución de problemas como recurso para el aprendizaje de las matemáticas, sino que también el mismo planteamiento de problemas matemáticos por parte del estudiante es relevante en su formación matemática, así que el planteamiento de problemas matemáticos debiera considerarse en su educación matemática.

Sin embargo, el estudio del planteamiento de problemas en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es relativamente reciente. Por ejemplo, Silver (1994) menciona que, si bien para ese tiempo plantear problemas había sido reconocido ya como un aspecto importante de la educación matemática y que había comenzado a recibir atención, no existía "una descripción coherente y exhaustiva del planteamiento de problemas como parte del plan de estudios y de la enseñanza de las matemáticas", ni se habían "realizado investigaciones sistemáticas sobre el planteamiento de problemas matemáticos" (p. 19).

Podemos observar que en los últimos años algunos investigadores y educadores han volcado su atención en el planteamiento de problemas matemáticos, explorando su naturaleza y defendiendo el potencial educativo de implementar actividades de planteamiento de problemas en la enseñanza de las matemáticas (Singer et al., 2013)

Silver(2013, p. 160) comenta que 'durante mucho tiempo se ha reconocido el valor potencial del planteamiento de problemas para ayudar a los estudiantes a convertirse en mejores solucionadores de problemas (Brown & Walter, 1983; English, 1997, 1998; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994)'. Se ha descubierto, que el planteamiento de problemas tiene efectos positivos en los estudiantes, pues les ayuda a mejorar su habilidad de resolver problemas, a potenciar su creatividad, a comprender más los conceptos matemáticos, a desarrollar el pensamiento matemático y a mejorar la actitud y la confianza de ellos en las matemáticas. (Singer et al., 2013)

También en los últimos años, el uso de tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha ganado relevancia. Existe una amplia gama de herramientas digitales que pueden ser utilizadas en las matemáticas con fines educativos o que incluso han sido diseñadas para este propósito. Ahora las herramientas tecnológicas tienen un potencial en la construcción de tareas concernientes al planteamiento de problemas.

El planteamiento de problemas puede ser un recurso para la enseñanza y el aprendizaje de contenido matemático y para desarrollar el hábito de hacerse preguntas en situaciones problemáticas. Esta es la perspectiva que nos motivó a llevar a cabo una investigación, cuyos resultados aquí reportamos.

La investigación fue de carácter exploratorio y descriptivo, la llevamos a cabo con estudiantes del nivel medio superior a lo largo de seis sesiones virtuales y su objeto de estudio fueron propuestas de problemas planteados por los estudiantes, para lo cual utilizaron herramientas digitales diseñadas y proporcionadas por el investigador.

Uno de los objetivos de nuestra investigación fue poner atención no solamente en la resolución de un problema matemático por parte del estudiante sino inducirlo a plantear un problema fuera del contexto de la resolución de algún otro problema; incluso, sin esperar que el estudiante necesariamente resuelva el problema que él mismo planteó. También, se invitó a los estudiantes a seleccionar de entre sus problemas planteados aquel que ellos consideraran el mejor. Es el planteamiento del problema lo que en primera instancia observaremos, analizaremos su proceso cognitivo desde que intenta plantear el problema.

Por ejemplo, observaremos si durante el planteamiento del problema el estudiante reconoce la necesidad de recurrir a un contenido matemático, quizá desconocido para él, que podría necesitar para darle sentido al problema.

Esperaríamos que, siendo problemas planteados por los estudiantes mismos, ellos estén motivados y dispuestos a adquirir los conocimientos matemáticos necesarios para resolverlos. Observaremos y daremos cuenta de cómo los estudiantes ponen en juego su pensamiento matemático, su razonamiento matemático, su disposición a aprender matemáticas, y su creatividad matemática, durante el desarrollo de las actividades de los estudiantes.

Una vez que los estudiantes hayan planteado uno o varios problemas, el investigador intervendrá para tratar de persuadirlos a reflexionar de manera grupal acerca de los problemas planteados, para que los analicen, los evalúen y discutan sobre ellos con el propósito de que reciban retroalimentación, examinen la calidad de sus propuestas e implementen lo que consideren relevante de esta reflexión en las sesiones posteriores. También, se espera que traten de crear nuevas situaciones problemáticas, quizá la discusión, pueda sugerir a esas nuevas situaciones y conducirlos a crear una o más generalizaciones del problema. El proceso de generalización de un problema puede considerarse como el planteamiento un nuevo de problema o nuevos problemas.

Como decíamos antes, en ocasiones un nuevo problema surge durante la resolución de un problema, nuestro objetivo es generar situaciones que conduzcan al planteamiento de un problema fuera del contexto de una resolución. Existen en la literatura sobre el planteamiento de problemas una gran cantidad de publicaciones en el área de Educación

Matemática. Pero aún en ese gran universo de publicaciones no pudimos encontrar respuestas satisfactorias a las preguntas:

- ¿Cómo provocar en el alumno la iniciativa de plantear un problema matemático?
- ¿Cómo motivar, persuadir o inducir al alumno a plantear un problema matemático, que no sea dentro de la resolución de un problema?
- ¿Cómo diseñar una situación que provoque el interés del estudiante por plantear un problema matemático?

Pensamos entonces en la idea que en nuestra investigación llamamos '*La libreta rota de lista de problemas*'. Esta consiste en una mini historia: alguien encuentra un trozo de libreta que constaba de una lista de problemas matemáticos. De esta libreta incompleta sólo se pudieron rescatar fragmentos de algunas de sus páginas. En cada trozo de estas páginas aparece una parte del enunciado de un problema. Entonces se muestran a los estudiantes fragmentos de estos problemas, como el que se ilustra en la Figura 1.

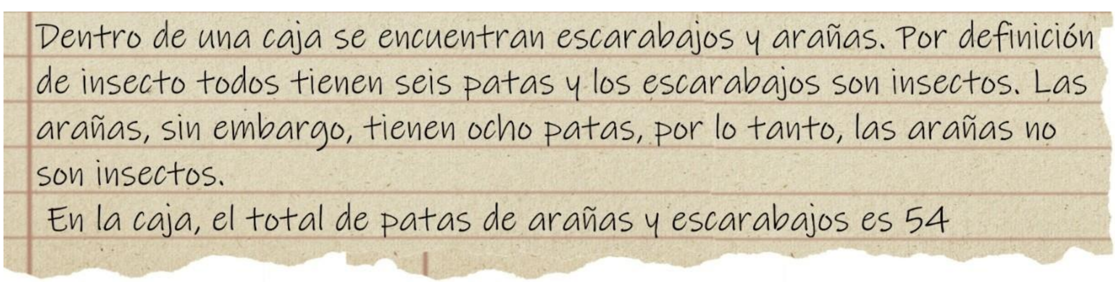

Dentro de una caja se encuentran escarabajos y arañas. Por definición de insecto todos tienen seis patas y los escarabajos son insectos. Las arañas, sin embargo, tienen ocho patas, por lo tanto, las arañas no son insectos.
En la caja, el total de patas de arañas y escarabajos es 54

Figura 1. Fragmento de una página con un enunciado incompleto de un problema.

Para cada fragmento de un problema le preguntamos a los estudiantes

- ¿Cuál pudo haber sido el problema?

Esta es una pregunta genérica que puede plantearse en diferentes situaciones, no necesariamente en el contexto particular de un enunciado incompleto de un problema;

quizá en una situación donde se conoce la solución de un problema, pero no el problema mismo. Estas situaciones también nos parecen interesantes.

Una vez que se les presentó a los estudiantes los fragmentos de los problemas, entre otras indicaciones, se les pidió que, en equipos, descubriesen o creasen su propio problema matemático que correspondiera al fragmento del enunciado.

La idea empleada para inducir al estudiante al planteamiento de un problema y los problemas empleados en nuestra investigación y su resolución son solamente un ejemplo de cómo se podría llevar a cabo esta actividad para la enseñanza de la matemática.

Esta tesis está constituida por seis capítulos; el primer capítulo es esta introducción. El capítulo 2 lo dedicamos a los antecedentes y a las preguntas de investigación. En este capítulo exponemos algunas ideas y resultados de investigaciones ya existentes acerca del planteamiento de problemas y el uso de la tecnología en actividades de planteamiento de problemas. Aquí también presentamos nuestras preguntas de investigación, así como sus objetivos.

El capítulo 3 está dedicado al marco teórico en el cual exponemos sobre lo que entenderemos algunos de los conceptos que usamos en este reporte de investigación: *problema matemático, planteamiento de problemas* y *situación de planteamiento de problemas*. También explicamos sobre la codificación que aplicamos a problemas planteados y que nos servido para analizar los resultados de la exploración.

El capítulo 4, llamado consideraciones metodológicas, exponemos sobre los participantes de esta investigación, así como de los instrumentos utilizados para la recolección de datos que constan de una serie de documentos elaborados por los participantes y entrevistas no estructuradas. También, explicamos los procedimientos de ejecución de la investigación y los materiales utilizados.

En el capítulo 5, presentamos el análisis de los resultados obtenidos. Aquí hacemos un análisis cualitativo de las respuestas de los participantes durante las entrevistas no estructuradas y del contenido de los documentos elaborados por ellos.

Finalmente, en el capítulo 6 damos respuesta a las preguntas de investigación y exponemos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Antecedentes y Preguntas de Investigación

El planteamiento de problemas se reconoce como una actividad de suma importancia en la investigación científica y en las matemáticas escolares (Cai et al., 2015). El planteamiento de problemas posee un potencial que podemos aprovechar para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; puede ayudar en el aprendizaje de contenido matemático y a desarrollar el hábito de hacerse preguntas en los estudiantes para que no solamente sea receptor de lo que le enseña el profesor.

Existen investigaciones acerca de la relación entre las actividades de planteamiento de problemas y la mejora de la comprensión conceptual del contenido matemático, la habilidad para resolver problemas y la creatividad de los estudiantes. Además, se afirma que este tipo de actividades ayudan a establecer comunicación entre los estudiantes a través de los problemas propuestos (Imaoka et al., 2015). También es mucho más probable que un estudiante se anime a resolver un problema que ha creado por sí mismo.(Kitchings, 2020)

Ya hemos mencionado que el planteamiento de problemas tiene la posibilidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Niss(2003) afirma que dominar las matemáticas significa 'poseer competencia matemática' (p. 6), entendiendo esta competencia como la 'capacidad de comprender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra-matemáticas en las que las matemáticas desempeñan o podrían desempeñar un papel' (p. 7).

Asimismo, Niss (2003) identifica 8 competencias entre las cuales podemos destacar:

- **Pensar matemáticamente:** Esto significa plantear preguntas características de las matemáticas y conocer los tipos de respuestas que las matemáticas pueden ofrecer.

- **Plantear y resolver problemas matemáticos:** Esto significa identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos puros o aplicados; abiertos o cerrados.

A lo largo de su vida escolar, los estudiantes reciben problemas matemáticos de sus profesores, instructores o directamente de libros de texto y en muchas ocasiones, cuando no se les da la oportunidad, no son conscientes de que ellos son capaces de crear sus propios problemas. Así, estos estudiantes han aprendido que los problemas matemáticos provienen de aquellas personas que saben más (Kitchings, n.d.). En este sentido, enrolar a los estudiantes en esta clase de actividades cobra importancia para el aprendizaje y dominio de las matemáticas, y para que ellos recobren confianza de sí mismos para plantear problemas matemáticos.

En algunos estudios han encontrado que para mejorar las habilidades de planteamiento de problemas de un individuo es importante darle oportunidad de explorar situaciones matemáticas (Cai et al., 2015); los autores hacen notar que al mezclar la exploración y la resolución de problemas con el planteamiento mismo podrían presentarse problemas más interesantes.

Con relación al uso de herramientas tecnológicas en actividades de planteamiento de problemas, (Imaoka et al., 2015) mencionan que 'los entornos informáticos proveen contextos ricos para visualizar objetos y para permitir a los estudiantes experimentar varios casos, así como explorar problemas de forma evolutiva.' (2015, p. 259) y aclaran que el uso de computadoras no puede asegurar el planteamiento de problemas pero que es, sin duda, una herramienta poderosa para este tipo de actividades.

Actualmente los estudiantes viven rodeados de tecnología que forma parte no solo de su vida cotidiana, sino que también permea en sus aulas de clase y en sus espacios de aprendizaje. Las computadoras y dispositivos móviles, así como las diversas opciones de software que existen se han convertido en herramientas, a veces indispensables, para el aprendizaje no sólo de las matemáticas sino de la cultura general, sobre todo en los últimos años en los que las condiciones globales nos han llevado a hacer uso de estas tecnologías para actividades que van desde la comunicación hasta tareas matemáticas específicas gracias a su practicidad y dinamismo.

Ya hace más de 3 décadas, el NCTM (1991) había afirmado que el planteamiento de problemas y la resolución de problemas eran las áreas en las que el uso de tecnología era más prometedor pues podían permitir a los estudiantes 'diseñar sus propias exploraciones y crear sus propias matemáticas' (Abramovich & Cho, 2015); además, Cai et al. (2015) mencionan que las tecnologías informáticas facilitan la exploración y la experimentación gracias a su flexibilidad.

Adicionalmente, Cai et al.(2015) encontró que el realizar actividades basadas en tecnología influía en la actitud de los estudiantes quienes se sentían más comprometidos y retados que los estudiantes con instrucciones tradicionales de planteamiento de problemas.

Entre las investigaciones que se han realizado acerca del planteamiento de problemas y el uso de tecnología podemos encontrar el de Beal and Cohen (2013), en la que desarrollaron “Teach Ourselves” una aplicación web que permitía a estudiantes de secundaria crear problemas de varias áreas entre ellas matemáticas y compartir estos problemas, así como también resolver problemas creados por sus compañeros.

También Chang et al. (2015) desarrollaron un sistema de planteamiento de problemas implementado en una tablet PC, en este sistema un grupo de estudiantes de aproximadamente 11 años, planteaba problemas, los refinaba y posteriormente los resolvía mediante escenarios de juego para finalmente recibir retroalimentación. Los resultados de esta investigación revelaron mayores capacidades en el planteamiento de problemas en el grupo que utilizó el sistema comparado con el grupo de control que realizó las actividades en papel.

Se ha demostrado también, que las investigaciones en entornos de geometría dinámica son una herramienta eficaz en el planteamiento de problemas, Leikin (2015) describe la integración de actividades de investigación en estos entornos que permiten a los participantes llegar a nuevos problemas a través de la investigación. También se han realizado estudios sobre el planteamiento de problemas con entornos basado en hojas de cálculo Abramovich & Cho (2006).

A pesar de lo ya mencionado, Abramovich & Cho (2015) apuntan que los estudios enfocados en el planteamiento de problemas con tecnología han sido “limitados no solo en número y alcance sino tambien en el nivel o grado” pues la mayoría de estos se han llevado a cabo con estudiantes de secundaria explorando dentro de entornos geométricos dinámicos.

Considerando lo antes expuesto, en nuestra investigación planteamos a estudiantes del nivel medio superior situaciones problemáticas con las que los inducimos a plantear preguntas, que los conducirán al planteamiento de problemas matemáticos. Planteamos situaciones en un entormo de medios digitales en que involucramos el uso de tres herramientas tecnológicas distintas, en específico un applet de GeoGebra, una situación con gráficas de funciones, y un simulador diseñado para acceder mediante una página web.

Con las actividades llevadas a cabo durante la presente investigación buscamos averiguar sobre las habilidades de los estudiantes en el planteamiento de problemas haciendo uso de la tecnología y desarrollar en los estudiantes el hábito de hacer preguntas. Por lo que proponemos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipo de problemas matemáticos plantean los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones?
- ¿Cuáles son los criterios de los estudiantes para elegir “el mejor” de entre sus problemas planteados?
- ¿ Qué dificultades podemos identificar que enfrentan los estudiantes durante el proceso de planteamiento de problemas y durante la discusión acerca de los problemas propuestos?
- ¿Cómo ayudaron las herramientas digitales para el planteamiento de problemas?

- ¿Qué efecto tienen estas actividades de planteamiento en el aprendizaje de las matemáticas y sus contenidos?

Con los siguientes objetivos:

- Analizar el desempeño de los estudiantes en actividades de planteamiento de problemas.
- Analizar el efecto del uso de herramientas digitales en los problemas planteados por los estudiantes.

Capítulo 3

Marco Teórico

Para el reporte de la investigación, consideramos conveniente explicar sobre el significado de algunos conceptos al que nos vamos a referir a lo largo del documento.

Problema matemático

Con relación a lo que significa un problema matemático, Schoenfeld (1985) apunta que una tarea matemática no cuenta inherentemente con la propiedad de ser un problema, sino que la relación entre la tarea y el individuo que la enfrenta, la convierte o no en un problema; así que es una situación relativa. Una misma tarea puede requerir un diferente nivel de esfuerzo para cada persona. En este sentido, un problema es una tarea que intelectualmente es relativamente difícil para quien está tratando de resolverlo.

Un problema es una tarea que cumple que:

a) El estudiante se encuentra interesado y comprometido en y con ella, y para la cual desea obtener una solución.

b) El estudiante no dispone de inmediato de un medio matemático al que pueda acceder con facilidad para conseguir esa solución. (Schoenfeld, 1989)

Por otro lado, cuando el alumno cuenta con medios de resolución fácilmente accesibles para una tarea matemática, esta suele llamarse ejercicio. Así que es conveniente distinguir entre ejercicio y problema matemático. En la educación matemática tanto las actividades de planteamiento de problemas, resolución de problemas, y resolución de ejercicios son tareas pedagógicas útiles (Van Harpen & Presmeg, 2013).

Planteamiento de problemas

De manera general podemos decir que el planteamiento de problemas matemáticos es el ‘proceso de formular y expresar un problema dentro del dominio de las matemáticas’ (Cai & Hwang, 2020, p. 2). El planteamiento de problemas es el proceso y no el problema mismo. A continuación, exponemos algunos de las ideas conducentes a describir lo que es el planteamiento de problemas

Según Silver(1994) el planteamiento de problemas puede referirse tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de un problema dado. La reformulación de un problema no necesariamente es una actividad trivial ni inútil. Las reformulaciones de problemas son recursos muy socorridos en el quehacer matemático que ayudan a comprender mejor un problema y que pueden dar luz sobre su solución, más que su formulación inicial. Estos procesos de planteamiento o reformulación de problemas pueden darse:

- Durante la resolución de un problema dado cuando este se recrea o se reformula para transformarlos en problemas que sean más fáciles o accesibles.
- Con la creación de un nuevo problema dada una situación o una experiencia.
- Después de la resolución de un problema, al examinar las condiciones bajo las cuales fue planteado, con lo cual se generarán problemas relacionados.

Por su parte, Stoyanova & Ellerton (1996) definen el planteamiento de problemas como 'el proceso mediante el cual, con base en la experiencia matemática, los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos'

El planteamiento de problemas puede verse desde dos perspectivas (Barabé & Proulx, 2015):

- *La perspectiva explícita:* En donde se pide de manera explícita a los estudiantes que planteen un problema.
- *La perspectiva implícita*: Donde el planteamiento de problemas ocurre de manera implícita durante la resolución de problemas.

En la *perspectiva explícita*, se pueden distinguir tres categorías entre los estudios que se llevan a cabo:

- Categoría 1: En esta categoría se pide a los participantes plantear un problema sin imponer ningún contexto o restricción.
- Categoría 2: En esta categoría se pide a los participantes generar problemas tomando en cuenta restricciones, que pueden ser:
    - Un contexto general.

    - Restricciones específicas.
    - Un problema resuelto anteriormente.
- Categoría 3: En esta categoría se pide a los participantes transformar un problema inicial para poder resolverlo.

Finalmente, Cai & Hwang, (2020) proponen la siguiente definición que busca englobar los distintos aspectos del planteamiento de problemas matemáticos:

> Por *planteamiento de problemas* en educación matemática, nos referimos a varios tipos de actividades relacionadas que implican o apoyan a profesores y alumnos en la formulación (o reformulación) y expresión de un problema o tarea basada en un contexto particular (al que nos referimos como contexto del problema o situación del problema). (p. 2)

Situaciones de planteamiento de problemas

Sobre las situaciones de planteamiento de problemas, Stoyanova & Ellerton, (1996) afirman que “cualquier situación de planteamiento de problemas puede ser clasificada como libre, semiestructurada y estructurada” (p. 519).

- *Libre*: Se pide que generen un problema de una situación dada natural o artificial.
- *Semiestructurada*: Se da una situación abierta y se les invita a explorar la estructura de la situación y complementarla aplicando conocimientos, habilidades, conceptos, y relaciones de sus experiencias matemáticas anteriores.

- *Estructurada*: Cuando las actividades de planteamiento de problemas están basadas en un problema específico.

Codificación de los problemas planteados

A continuación, exponemos una codificación propuesta por Leung & Silver, (1997) para clasificar los problemas propuestos por los participantes en actividades de planteamiento de problemas.

Los problemas pueden clasificarse como se explica a continuación. Cada propuesta de problema se codifica como problema o como declaración, después aquellas respuestas clasificadas como problema se dividen en problemas matemáticos y problemas no matemáticos. Se consideran problemas no matemáticos a aquellos que no necesariamente se resuelven con matemáticas.

A su vez los problemas matemáticos se clasifican en plausibles o no plausibles y finalmente las propuestas plausibles se clasifican según cuenten con información suficiente o no suficiente (Figura 2).

Se dice que las respuestas son plausibles cuando el problema planteado parece factible y no se encuentra información discordante. Además, para que un problema se clasifique con información suficiente, este debe poder resolverse con la información dada.

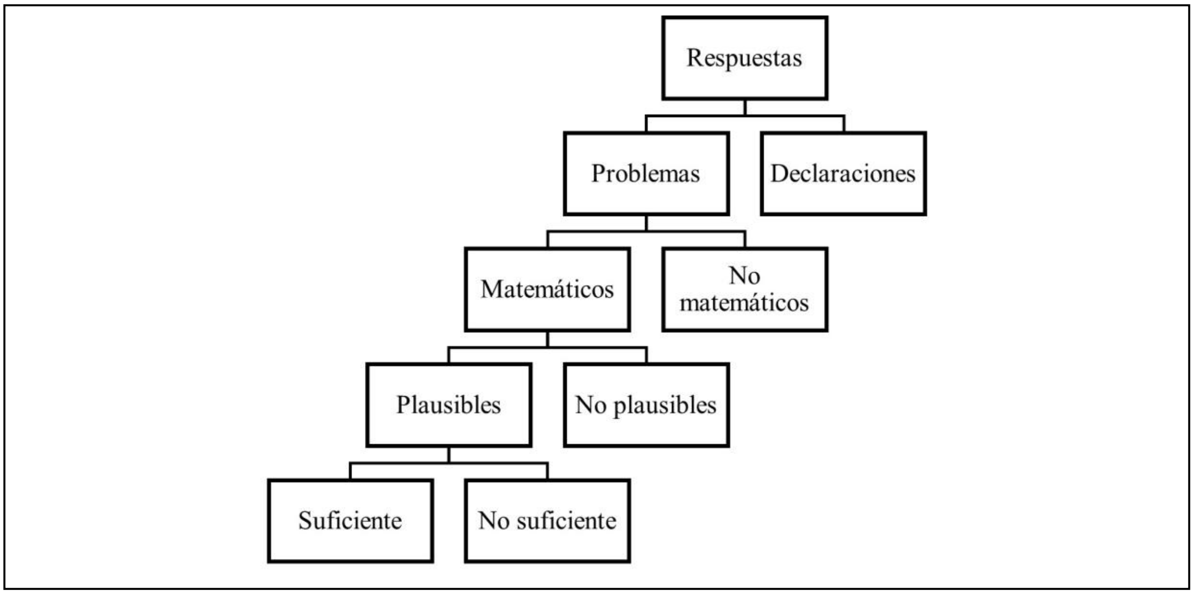


Figura 2. Codificación de problemas propuesta por Leung y Silver (1997)

Capítulo 4

Consideraciones Metodológicas

Sobre los Participantes.

En la investigación participaron 14 estudiantes de cuarto semestre de la preparatoria número 1 de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. De acuerdo con el plan de estudio de esta institución (UAEH, s.f.), los alumnos ya habían cursado las materias de álgebra, trigonometría y geometría analítica en primer, segundo y tercer semestre respectivamente y se encontraban cursando la materia de cálculo diferencial al momento de realizarse la investigación.

Los estudiantes participaron de manera voluntaria, la invitación para participar en este proyecto se les hizo llegar por medio de su profesora de matemáticas. Los estudiantes interesados se pusieron en contacto con el investigador vía correo electrónico.

Durante las comunicaciones con los estudiantes se les dio a conocer de manera general que en las sesiones se realizarían actividades sobre planteamiento de problemas. De los 14 estudiantes involucrados en esta investigación sólo 4 de ellos comentaron haber trabajado previamente con este tipo de actividades.

El número de estudiantes en cada una de las sesiones fue variable debido a que estas se realizaban fuera de su horario de clases y dependían de la disponibilidad de horario de los estudiantes y de su disposición para participar en las sesiones.

Sobre los instrumentos de investigación, las Sesiones y la Recolección de los Datos.

Como lo expresamos en la Introducción de esta tesis, para nuestra investigación usamos fragmentos de tres problemas. El primer problema que hemos llamado '*problema del biorritmo*' es problema de modelización matemática y fue elegido por la gran cantidad de sitios de internet donde aparece este tema, pero muy probablemente el usuario en general no se cuestiona cuál es esa matemática. El biorritmo que suele calificarse como concepto pseudocientífico se refiere al comportamiento de diversos aspectos fisiológicos de los individuos. El biorritmo tuvo un gran auge en la década de los 70s del siglo pasado cuando todavía no existían las computadoras personales. El uso del biorritmo se difundió ampliamente a través de libros para el público general. Se trata de un concepto con el cual se pretende dar cuenta del nivel, por ejemplo, del estado físico, estado intelectual y el estado emocional de los individuos a lo largo de su vida desde el día de su nacimiento. Esta teoría no tiene una base científica pero mucha gente que cree en ellos, así como los que creen en los horóscopos, consultan su biorritmo para saber cómo, en una fecha determinada, se encontrará física, intelectual y anímicamente. Así sabrá si podrá hacer ejercicio ese día, o qué suerte correrá ese día porque va a presentar un examen de matemáticas. Más allá de lo divertido que para muchos puede resultar la consulta de los biorritmos, sin que necesariamente se crean en ellos, nosotros centraremos nuestra atención en el aspecto matemático de esta pseudo-teoría, la cual supone que los estados físico, intelectual y emocional de cualquier individuo se comporta de manera periódica a lo largo de su vida, de acuerdo con los siguientes periodos o duración de los ciclos:

Estado físico: 23 días.

Estado emocional: 28 días.

Estado intelectual: 33 días.

Se supone que cada ciclo inicia el día de su nacimiento, y la situación de cada estado varía a lo largo del periodo y así al cabo de ese periodo se reinicia el estado.

Todos los estados inician con el nivel medio, el nivel comienza a incrementarse y al llegar a un cuarto de su ciclo llegan a su máximo nivel. Desde ahí empieza de decrecer hasta llegar nuevamente a la mitad del ciclo a su nivel medio. El nivel continúa decreciendo hasta llegar al final del tercer cuarto de ciclo a su mínimo nivel (algunos dirían nivel crítico). Nuevamente el nivel del estado empieza a crecer para concluir al final del ciclo en su nivel medio. Esto se repite durante toda la vida.   Hay una gran cantidad de sitios de internet en los que se pueden consultar esos ciclos para cualquier persona, quien lo único que tiene que hacer para la consulta es introducir su fecha de nacimiento. Lo que le presentamos al estudiante es fragmento de un problema que se refiere al biorritmo.

El segundo de ellos que hemos llamado ‘*problema de escarabajos y arañas*’ fue tomado de un programa radiofónico en el que se reta a los radioescuchas a resolverlo. Los premios para quienes resuelven correctamente los problemas planteados en los programas radiofónicos suelen ser pases para asistir a eventos musicales o deportivos. Los problemas de concurso en estos medios son planteados para el público en general, así que, como es de esperarse, los recursos requeridos para resolverlo son conocimientos básicos de matemáticas de la escuela primaria o secundaria y por supuesto el ingenio de los participantes. Este problema solamente fue la fuente de inspiración para generar problemas más interesantes (generalizaciones), donde intervienen matemáticas un poco más avanzadas.

El tercer problema que hemos llamado ‘*problema de una carrera en diferentes tipos de terrenos*’ se refiere a una competencia entre dos atletas los cuales corren en un terreno, una de cuyas dos partes es de tartán y la otra de fango. Uno de los atletas tiene una mayor habilidad para correr en tartán y el otro atleta lo supera en el terreno fangoso. Lo que se le presenta al estudiante es información sobre las posiciones iniciales de los atletas relativas a estos dos tipos de terreno y sobre los tiempos que cada uno de ellos le toma en correr 100 metros en cada tipo de terreno. Este problema es una versión de la modelización del problema de la refracción de la luz, el cual se ha traducido a una situación de la vida diaria de los individuos, si bien podemos considerarla ficticia es completamente factible en la vida real.).

Se realizaron seis sesiones y dadas las circunstancias debidas a la pandemia de Covi-19, estas sesiones se llevaron a cabo mediante la plataforma Zoom, una por semana de una duración aproximada de una hora. En cada sesión el número de participantes fue variable, los estudiantes trabajaron en equipos que conservaron a la mayoría de sus integrantes a lo largo de la investigación.

La plataforma Zoom nos permitió tener reuniones generales con todos los estudiantes y hacer video grabaciones de las sesiones, además de habilitar salas virtuales dentro de las reuniones generales para que los equipos pudieran trabajar de forma privada cada vez que fuera necesario.

Durante las sesiones se hicieron dos tipos de actividades:

En cada una de las sesiones impares – primera, tercera y quinta – se les presentó un fragmento del enunciado de uno de los tres problemas. Las actividades se desarrollaron con la siguiente dinámica: Dentro de la sala general de Zoom el investigador comenzaba cada sesión compartiendo pantalla en la cual mostraba a todos los estudiantes una imagen (distinta en cada ocasión) que simulaba ser un trozo de una hoja de una libreta. Acompañaba a la imagen la leyenda:

> "*Alguien ha encontrado algunas hojas de una libreta de problemas, sin embargo, la hojas se encuentran rotas así que los enunciados de los problemas están incompletos. Lee el siguiente fragmento de una hoja.* [imagen] *¿Podrías completar este problema?*".

La imagen se les hacía llegar de manera electrónica a los estudiantes para que pudieran consultarla a lo largo de toda la sesión.

Una vez que se les mostraba a los estudiantes el trozo de hoja con un enunciado incompleto de un problema, se les informaba que serían trasladados a salas virtuales, una sala por equipo, indicándoles que tenían que realizar las siguientes tareas:

- *Hagan propuestas para completar este problema.*
- *Utilicen, si lo requieren, las herramientas digitales proporcionadas para explorar la situación.*
- *De todos los problemas propuestos elijan uno de ellos, el que ustedes consideren el mejor.*

En lo que sigue llamaremos herramientas digitales a los diferentes tipos de software o applets que se les facilitaron a los estudiantes en cada una de las sesiones para la exploración de las situaciones presentadas. Cada software o applet fue creado por el investigador para la realización de este proyecto.

Estas herramientas no les fueron suministradas a los participantes desde el principio de la reunión sino después de determinado tiempo, ya sea mediante un archivo adjunto por medio de correo electrónico o mediante una liga que se les suministraba por medio del chat de la videollamada. En todos los casos las herramientas a utilizar se les mostraba a los estudiantes por medio de la función *compartir pantalla*, explicando su funcionamiento y aclarando las dudas que pudieran existir al respecto.

Las imágenes presentadas en cada una de estas sesiones, así como las herramientas digitales utilizadas por los estudiantes para su exploración las presentamos y describimos más adelante.

Como documento o trabajo entregable y para la recolección de datos, en estas sesiones los participantes debían elaborar un escrito por equipo en el que enlistarían todas sus propuestas sobre los problemas planteados e indicarían cuál de estas habían elegido como la mejor, asimismo, en este texto debían incluir un comentario explicando si habían utilizado las herramientas digitales para hacer sus propuestas y de qué manera y cómo habían elegido su “mejor” problema. En la primera sesión este escrito fue realizado por los estudiantes y compartido al investigador vía correo electrónico, para las sesiones posteriores, el documento fue elaborado mediante un procesador de texto en línea (Documentos de Google), para facilitar el trabajo sincrónico y colaborativo de los estudiantes.

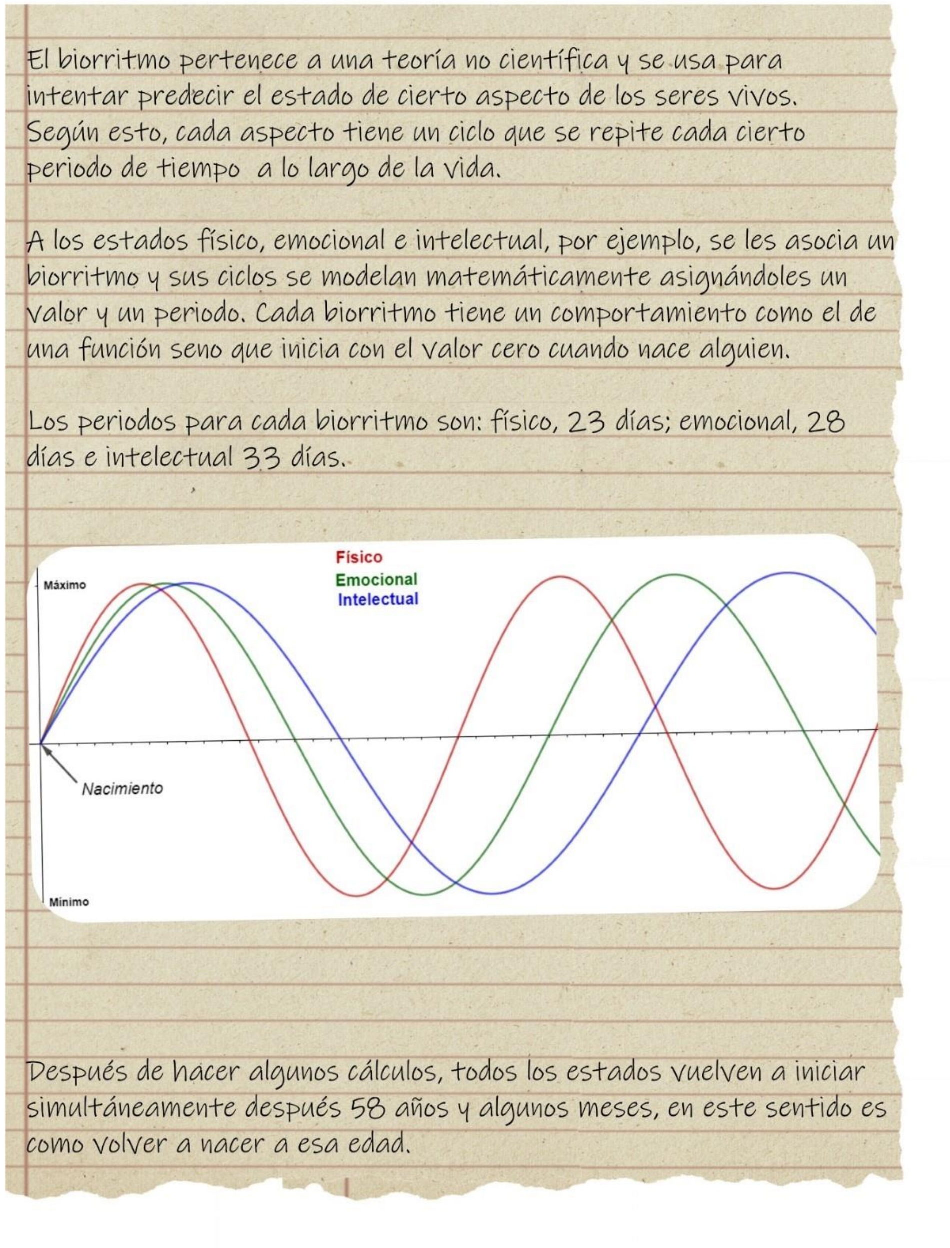
En cada una de las sesiones pares - sesiones segunda, cuarta y sexta - se llevaron a cabo discusiones grupales acerca de los problemas propuestos en la sesión inmediata anterior, para los cual el investigador mostraba por medio de la función “compartir pantalla” una presentación de PowerPoint con los problemas propuestos por cada equipo y mostrando el problema que cada uno había seleccionado como el mejor de entre todas sus propuestas.

En estas sesiones se realizaron entrevistas no estructuradas a los estudiantes y se les invitaba a opinar acerca de los problemas propuestos. Se les pidió a los estudiantes que dijeran si creían que su problema elegido podría resolverse y que en caso de que así fuera dieran un esbozo de la estrategia para resolverlo, esto con el objetivo de analizar con ellos la suficiencia de la información suministrada en las propuestas dadas. Estas sesiones fueron grabadas para un análisis cualitativo posterior.

A continuación, describimos la dinámica de las sesiones. Comenzamos con las sesiones impares.

Sesión 1 (Problema del biorritmo).

En la primera sesión participaron 12 estudiantes, quienes se organizaron en cuatro equipos de tres integrantes cada uno. El fragmento del enunciado del problema que se les presentó a los estudiantes fue el siguiente:



El biorritmo pertenece a una teoría no científica y se usa para intentar predecir el estado de cierto aspecto de los seres vivos. Según esto, cada aspecto tiene un ciclo que se repite cada cierto periodo de tiempo a lo largo de la vida.

A los estados físico, emocional e intelectual, por ejemplo, se les asocia un biorritmo y sus ciclos se modelan matemáticamente asignándoles un valor y un periodo. Cada biorritmo tiene un comportamiento como el de una función seno que inicia con el valor cero cuando nace alguien.

Los periodos para cada biorritmo son: físico, 23 días; emocional, 28 días e intelectual 33 días.

Después de hacer algunos cálculos, todos los estados vuelven a iniciar simultáneamente después 58 años y algunos meses, en este sentido es como volver a nacer a esa edad.

Figura 3. Fragmento del enunciado del problema de la primera sesión.

Alrededor de la mitad de la sesión se les proporcionó a los estudiantes la herramienta digital vía correo electrónico, en este caso era un archivo de Excel que contenía una gráfica de los biorritmos (Figura *4*), esta herramienta la elaboramos utilizando el lenguaje de programación Visual Basic for Applications.

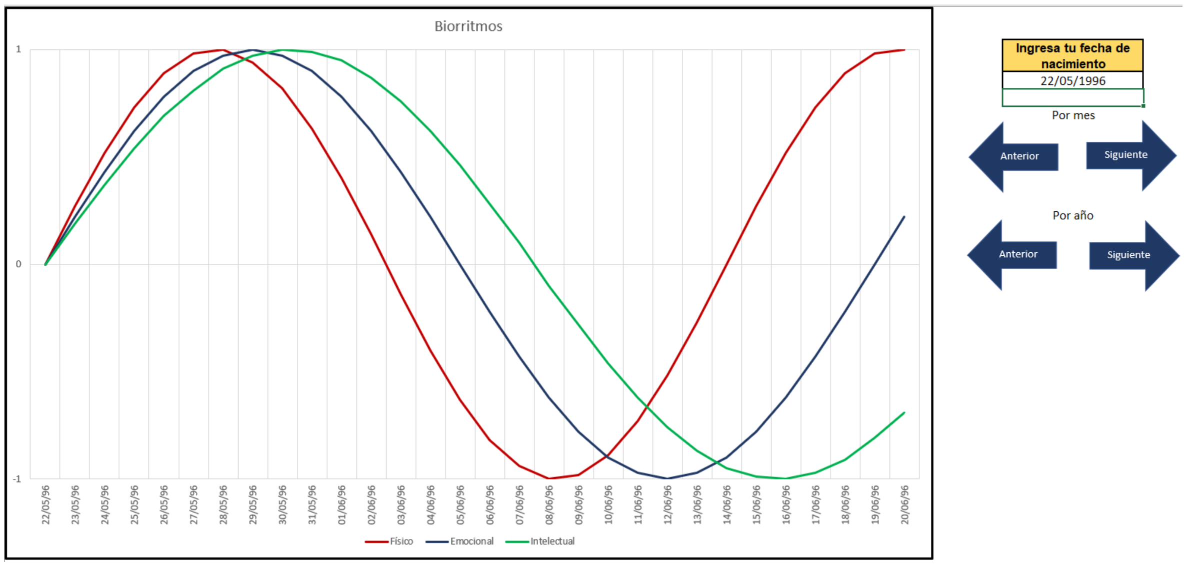


Figura 4.Interfaz del Applet para la primera sesión.

Este archivo digital también tenía un simulador de los biorritmos, el cual mostraba la gráfica que describía el comportamiento, a lo largo del tiempo, de cada uno de los estados del biorritmo de una persona que hubiese proporcionado su fecha de nacimiento, -gráfica verde para el estado intelectual, gráfica roja para el estado físico y gráfica azul para el estado emocional-.

En la parte izquierda de la Figura *4* pueden verse las gráficas. Los valores en el eje vertical varían de -1 a 1. Se aclaró oralmente a los estudiantes que en este caso el 1 representaba el nivel máximo de los estados mientras que el -1 representaba el nivel mínimo; hay 30 valores en el eje horizontal etiquetados con fechas, mostrando así los valores de los biorritmos durante 30 días.

En la parte derecha de la interfaz, debajo de la celda amarilla, se encuentra el espacio en donde el estudiante puede ingresar la fecha de nacimiento de una persona para observar sus biorritmos. Por defecto, al inicio, el centro de la gráfica mostrada corresponde justo a la fecha en la que se ingresa al software. Para su exploración se tienen dos pares de flechas, el primer par nos permite avanzar o retroceder en el tiempo en intervalos de 1 mes, mientras que el segundo par de flechas nos permite desplazarnos a través de los años.

***Sesión* 3 (Problema de escarabajos y arañas)**

En la tercera sesión participaron un total de 12 estudiantes que se organizaron en cuatro equipos de tres integrantes cada uno, el problema para completar era el mostrado en la Figura 5.

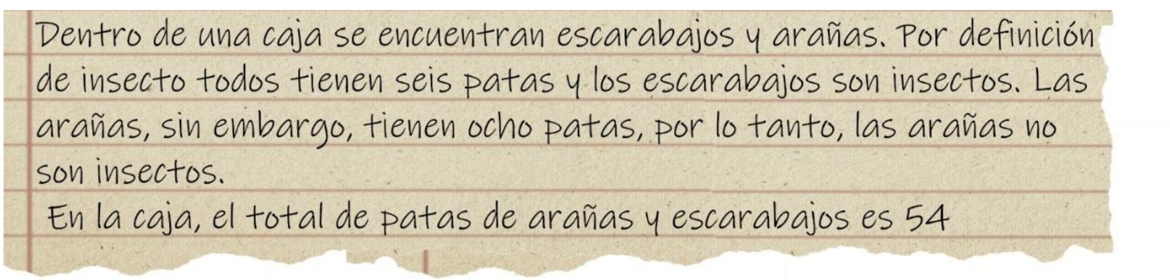

Dentro de una caja se encuentran escarabajos y arañas. Por definición de insecto todos tienen seis patas y los escarabajos son insectos. Las arañas, sin embargo, tienen ocho patas, por lo tanto, las arañas no son insectos.
En la caja, el total de patas de arañas y escarabajos es 54

Figura 5. Fragmento del enunciado del problema de la tercera sesión.

En esta ocasión los estudiantes trabajaron 20 minutos solamente con la imagen de la Figura 5. Más adelante se reporta sobre el trabajo llevado a cabo en cada lapso. Pasado este tiempo se les proporcionó la primera herramienta tecnológica que utilizaron en la sesión, un applet de GeoGebra que puede consultarse en la siguiente liga https://www.geogebra.org/m/xd3zzmzm y que se ve como la imagen a continuación (Figura *6*)

Figura 6. Imagen del primer applet para la tercera sesión.

En este applet los estudiantes podían ingresar el número de arañas y escarabajos que desearan sin ninguna restricción, la herramienta funciona como una calculadora que computa la cantidad total de patas que habría dentro de la caja según los números de escarabajos y arañas introducidos en el applet.

Después de 15 minutos, se les proporcionó un segundo applet, que puede consultarse en la liga https://www.geogebra.org/m/najeeb3x y que se ve como la imagen a continuación.

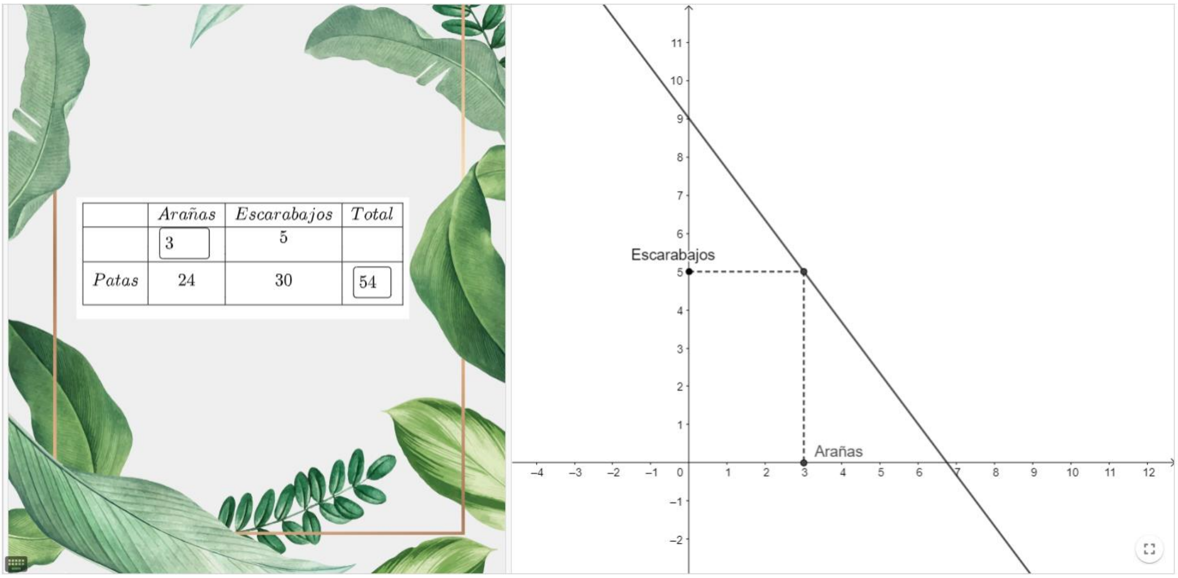


Figura 7. Imagen del segundo Applet para la tercera sesión.

Este segundo applet constaba con dos elementos:

Del lado izquierdo se mostraba una tabla similar a la del applet anterior. En esta tabla podemos ingresar un número total de patas y un número de arañas que deseemos proponer haya dentro de la caja. La herramienta calcula el número de escarabajos que se requieren para que se cumplan las condiciones, así como el número total de patas que habrá para cada tipo de animal.

Del lado derecho tenemos una gráfica que cambia cuando modificamos el número total de patas n que se introduce en la tabla del lado izquierdo. La gráfica corresponde a la ecuación $8x + 6y = n$. Los valores del eje horizontal representan las posibles cantidades de arañas dentro de la caja y los del eje vertical las posibles cantidades de escarabajos. Si se ingresa un valor x_1 para la cantidad de arañas en la tabla, el applet calcula la cantidad y_1 de escarabajos correspondientes. Además, en la gráfica se muestran los dos puntos en los que la recta corta a los ejes coordenados.

Con esta segunda herramienta se les explicó a los alumnos la relación entre ambos elementos del applet. La liga para ambas herramientas fue compartida con los estudiantes por medio del chat de la videollamada.

Sesión 5 (Problema de una carrera en diferentes tipos de terrenos)

En esta sesión participaron 8 estudiantes que se organizaron en 2 equipos de 3 integrantes y un equipo de 2 integrantes, el problema a completar es el siguiente:

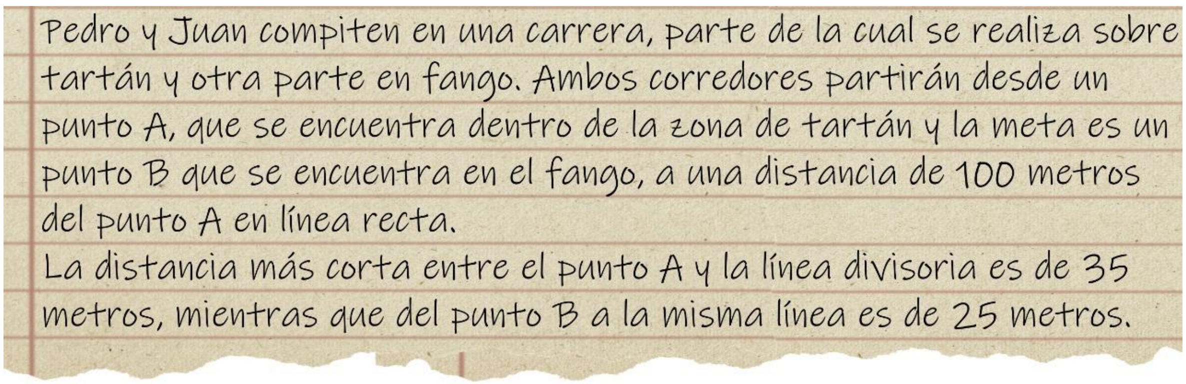

Pedro y Juan compiten en una carrera, parte de la cual se realiza sobre tartán y otra parte en fango. Ambos corredores partirán desde un punto A, que se encuentra dentro de la zona de tartán y la meta es un punto B que se encuentra en el fango, a una distancia de 100 metros del punto A en línea recta.
La distancia más corta entre el punto A y la línea divisoria es de 35 metros, mientras que del punto B a la misma línea es de 25 metros.

Figura 8. Fragmento del enunciado del problema de la quinta sesión.

Durante la primera mitad de la sesión los estudiantes discutieron sobre lo que podía ser la parte restante del enunciado del problema. Más adelante se comentará al respecto. A mitad de esta sesión se compartió con los estudiantes la herramienta que en este caso se trató de una página electrónica que simulaba la carrera. Esta herramienta se elaboró utilizando lenguaje HTML, JavaScript y CSS, y fue enviada a los estudiantes a través de un correo electrónico, puede consultarse en la siguiente liga https://matedu.cinvestav.mx/~planteamientodeproblemas/carrera/

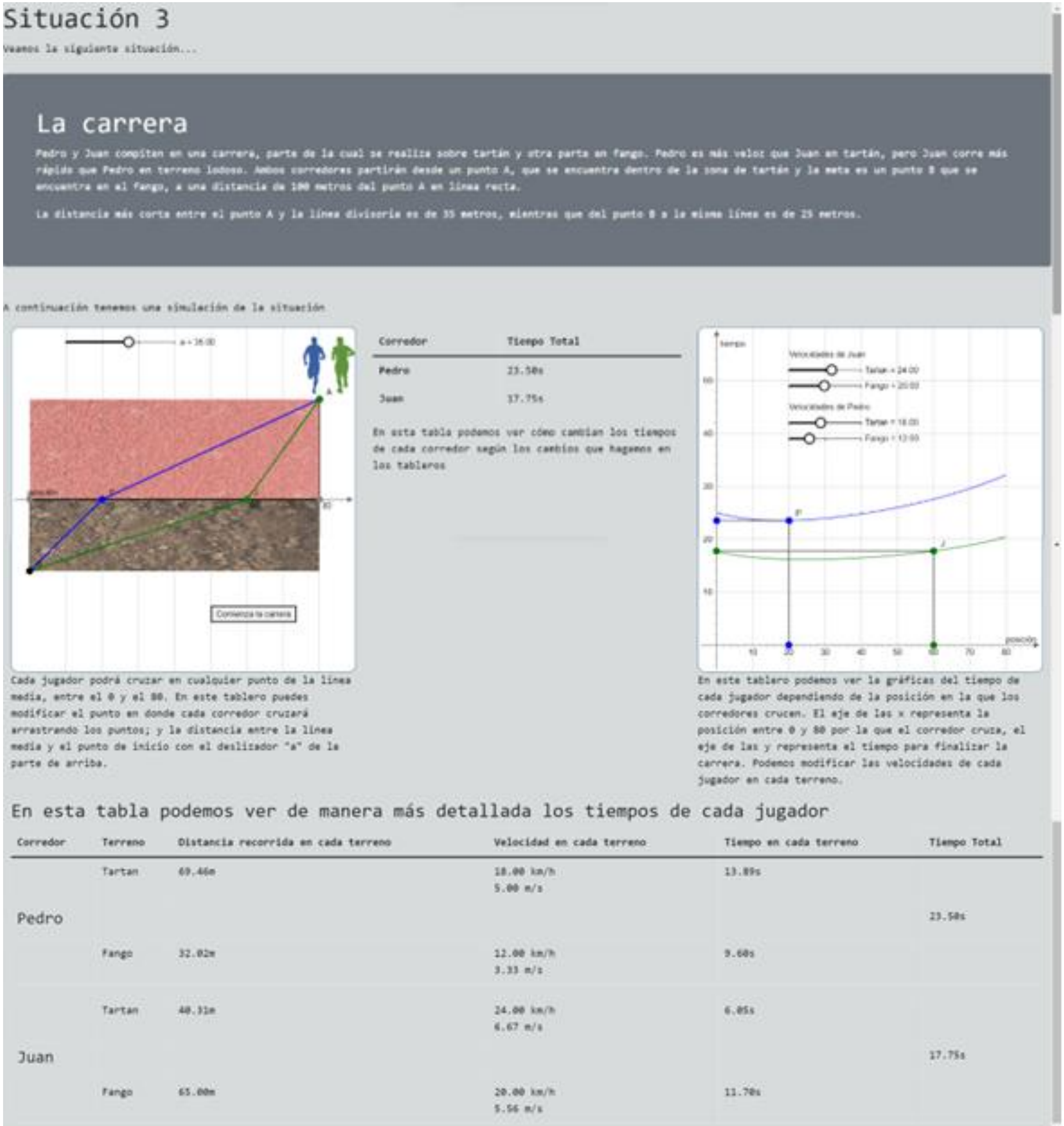


Figura 9. Imagen del archivo html para la quinta sesión.

Como podemos observar en la Figura 9, esta herramienta cuenta con varias secciones. En la sección de color gris oscuro se presenta un problema incompleto, justo debajo de esta sección se pueden apreciar los elementos de la Figura 10.

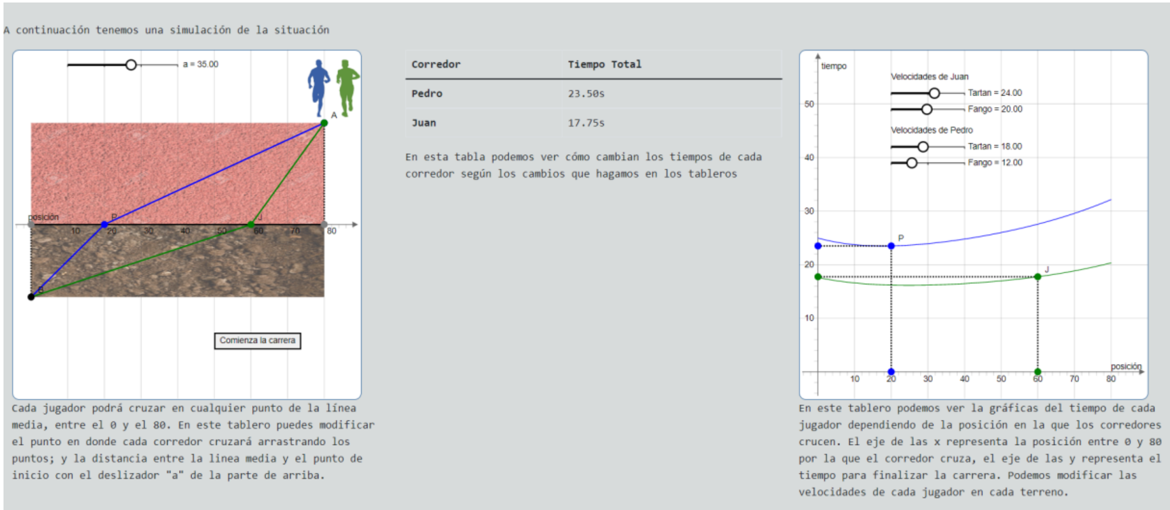


Figura 10. Una sección de la imagen del archivo HTML para la quinta sesión.

Para empezar, tenemos un primer *tablero* que tiene una simulación de la carrera. En este tablero los participantes podían modificar el valor de "a" que es la distancia entre la línea media y el punto de inicio moviendo el deslizador *a* que se encuentra en la parte superior, también tenían la posibilidad de arrastrar los puntos *P* y *J* que se encuentran sobre la línea media y que representan el punto por el cual cada corredor cruzará esta línea. Además, este tablero cuenta con un botón de *Comienza la carrera* que activa una simulación con los tiempos reales que tendrá cada corredor tomando en cuenta las condiciones dadas por el usuario.

Del lado derecho tenemos un segundo tablero en el que pueden apreciarse dos gráficas, cada una de ellas representa el tiempo que emplea cada corredor en función de la posición en la línea media por la que cruza y cambia de terreno. En este tablero también podemos cambiar las velocidades de cada uno de los corredores en cada uno de los terrenos moviendo los deslizadores, estas modificaciones afectan no solo las gráficas sino la simulación del primer tablero.

En la parte media de la Figura *10* se tiene una tabla de resumen que nos indica los tiempos totales de cada corredor con las condiciones que el usuario haya seleccionado.

Debajo de estos elementos podemos encontrar una tabla con información más detallada de las velocidades y tiempos de cada corredor en cada terreno, Figura *11*.

En esta tabla podemos ver de manera más detallada los tiempos de cada jugador

Corredor	Terreno	Distancia recorrida en cada terreno	Velocidad en cada terreno	Tiempo en cada terreno	Tiempo Total
	Tartan	69.46m	18.00 km/h 5.00 m/s	13.89s	
Pedro					23.50s
	Fango	32.02m	12.00 km/h 3.33 m/s	9.60s	
	Tartan	40.31m	24.00 km/h 6.67 m/s	6.05s	
Juan					17.75s
	Fango	65.00m	20.00 km/h 5.56 m/s	11.70s	

Figura 11. Sección del archivo HTML.

Las tablas y las gráficas son dinámicas y se modifican al mismo tiempo que el usuario hace cambios en algunos de los datos involucrados.

Como puede observarse en las imágenes cada sección de la herramienta cuenta con una breve descripción de la función y el uso de cada elemento, sin embargo, el investigador también explicó oralmente cómo utilizar la herramienta y aclaró dudas.

Sobre los problemas originales.

Primer problema.

El problema de los biorritmos fue creado especialmente para esta investigación.

Segundo problema

El problema de las arañas y los escarabajos, originalmente se presentaba en la radio como se muestra a continuación:

Problema. Dentro de una caja se encuentran escarabajos y arañas. Por definición de insecto todos tienen seis patas y los escarabajos son insectos. Las arañas, sin embargo, tienen ocho patas, por lo tanto, las arañas no son insectos. Si se sabe que, en la caja, el total de patas de arañas y escarabajos es 54 ¿cuántos escarabajos y cuántas arañas hay en la caja?

Tercer problema

El problema de la carrera en diferentes tipos de terreno, se obtuvo de su versión original de(Rivera, 2002) y se enunciaba como sigue.

Problema. Pedro y Juan compiten en una carrera, parte de la cual se realiza sobre tartán y otra parte en fango. Pedro ha participado en olimpiadas internacionales, mientras que Juan solamente ha participado en competencias de su pueblo. Pedro es más veloz que Juan en tartán, pero Juan corre más rápido que Pedro en terreno lodoso. Ambos corredores partirán desde un punto A, que se encuentra dentro de la zona de tartán y la meta es un punto B que se encuentra en el fango, a una distancia de 100 metros del punto A en línea recta.

Figura 12.

En carreras de 100 metros, las velocidades que desarrollan en promedio cada uno de los corredores son las siguientes:

En tartán:

Pedro puede correr a una velocidad promedio de 36 kilómetros por hora (100 metros en 10 segundos) y Juan a una velocidad promedio de 30 kilómetros por hora (100 metros en 12 segundos).

En el fango:

Pedro corre, también en promedio, a una velocidad de 12 kilómetros por hora, mientras que Juan es más rápido y corre a una velocidad promedio de 20 kilómetros por hora.

Se pregunta: ¿Quién gana la carrera, Pedro o Juan?

Capítulo 5

Análisis de Resultados

A continuación, se presentan los resultados de las sesiones, así como un análisis de los comentarios de los estudiantes acerca de sus propuestas y las respuestas a las entrevistas no estructuradas realizadas por el investigador.

Dentro de este análisis se adjuntan transcripciones de fragmentos de las sesiones grabadas, las conversaciones se presentan de manera fiel tal y como ocurrieron en la sesión. Para proteger el anonimato de los estudiantes, sus intervenciones en las transcripciones serán indicadas simplemente por el sustantivo “estudiante”, en caso de que más de un estudiante participé en alguno de los intercambios, se agregará delante de esta palabra un número entero para distinguirlos entre sí.

Además, se presentan todos los problemas propuestos por los estudiantes durante las sesiones en la Tabla 1, Tabla 2, Tabla 3. En estas tablas los problemas de cada equipo se separan utilizando sombreado y el problema que cada equipo eligió como el mejor entre sus propuestas se presenta en letra cursiva.

Para hacer una clasificación de las propuestas de los estudiantes utilizaremos la codificación de Leung & Silver, (1997) mencionada y explicada anteriormente en el marco teórico. Por motivos prácticos usaremos las siguientes letras:

N M – No matemático.

N P – No plausible.

N S – No suficiente.

S – Suficiente.

Así los problemas planteados que se codifiquen con la letra S son problemas matemáticos plausibles que contienen información suficiente para poder encontrarles solución.

Acerca de las sesiones 1 y 2

Además de las propuestas para completar los problemas, los archivos (producto de la sesión 1) contenían comentarios dados por los estudiantes acerca de la elección de su problema y el uso de la herramienta digital.

Todos los equipos afirmaron que la herramienta, en este caso el archivo de Excel había sido de ayuda en la elaboración de sus propuestas. Los participantes expresaron, para empezar, que la herramienta les había servido como un apoyo visual facilitando su comprensión acerca del comportamiento de los biorritmos. Además de esto mencionaron que, el poder moverse a través de las fechas, les permitió elaborar propuestas de problemas más específicas. Uno de los equipos expresó además que la herramienta les había ayudado a llegar a acuerdos entre los integrantes y otro más declaró que antes de tener la herramienta estructurar los problemas había resultado una tarea difícil.

Antes de recibir la herramienta digital todos los equipos ya habían planteado por lo menos una propuesta de problema.

Como ya se había comentado, en la sesión 2 se discutió sobre los problemas planteados en la sesión 1, las conversaciones con los estudiantes se centraron en los problemas que ellos habían elegido, aunque también se comentaron otras de sus propuestas. Todos los problemas de esta sesión pueden consultarse en la Tabla 1. De los problemas elegidos por los equipos, 4 de ellos tienen información suficiente y 1 información no suficiente.

A continuación, se presentan los problemas elegidos de la sesión 1 junto con algunos comentarios de la discusión alrededor de ellos.

El primer equipo eligió la propuesta

1.7 *Si la fecha de nacimiento es 15/08/2005 ¿Habrá un punto en donde las tres ondas se intersecan? Coloca la fecha aproximada.*

El equipo refirió que la elección de este problema vino del deseo de saber la fecha más exacta en la que el "ciclo" se repite ya que en el fragmento presentado en la imagen solo se menciona que son 58 años y algunos meses, además afirmaron que el problema podría resolverse con la información que se tiene disponible.

Investigador: ¿Ustedes creen que pueden resolver este problema con la información que tienen?

Estudiante: Yo creo que sí se puede contestar porque pues ya nos estaba dando el dato de que después de ciertos años volvía a iniciar el ciclo entonces pues todas las ondas vuelven a iniciar, entonces pues tendríamos que primero sacar el cálculo del tiempo exactamente, porque pues comenta que son ciertos años y unos meses, pero no lo da como tal exacto y ya en base a eso se tendría que sumarle a la fecha que ya se está estableciendo que es el 15 de agosto de 2005.

El segundo equipo eligió la propuesta

1.9 *¿En qué año inician simultáneamente los 3 aspectos de alguien que nació el 5 de abril de 2005?*

Los estudiantes eligieron este problema utilizando la herramienta digital, pues mencionaron que "nos percatamos que esa sugerencia abarcaba más datos que nos proporciona el Excel"; además dijeron que este problema pedía un resultado más específico. El equipo afirmó que este problema podía resolverse, ya que contaban con la información necesaria para hacerlo, en este caso el de la fecha de nacimiento de la persona, dado por ellos, y el tiempo que tardan en reiniciar, dada en la imagen.

El tercer equipo eligió la propuesta

1.16 *¿De acuerdo con la información de la gráfica ¿Hay algún momento donde una persona pueda estar al máximo (o mínimo) nivel de 2 o más aptitudes al mismo tiempo?*

En el archivo, el equipo mencionó que la razón por la que eligieron este problema fue que “la consideraron la más interesante por averiguar, ya que los demás dan solo información objetiva mientras que él planteamiento del único problema permitiría saber (en caso de que la hipótesis sea correcta) los estados máximos y mínimos de una persona a lo largo de su vida.”

Durante la sesión dos, al preguntarles si este problema podía resolverse con la información que se tenía, un integrante del equipo opinó que si bien el problema podía resolverse todo dependía de la fecha de nacimiento de la persona; por otro lado, un segundo integrante del equipo dijo que para resolverlo podría verse en la gráfica cuándo se alcanza el máximo nivel de los estados.

El cuarto equipo eligió las propuestas

1.20 *Con respecto a la teoría del biorritmo analizada con anterioridad, ¿cuáles la amplitud que tendrá cada uno de los estados?*

y

1.21 *Si todos los estados se vuelven a iniciar simultáneamente después de 58 años y algunos meses, ¿Cuál será el tiempo que transcurrirá para que este vuelva a pasar y en qué año o tiempo será?*

El equipo mencionó que para la elección de estos problemas se basaron “en la manera en la que está estructurado, ya que abarca casi en su totalidad la aplicación de la función seno”.

Sobre el 1.20 un integrante del equipo opinó que el problema podría resolverse “observando las gráficas y conforme a ello establecer una fórmula que sustituyendo […] dé la amplitud”, acerca de esta fórmula el estudiante indica que podría utilizar el hecho de que es una función seno pero que siente que no tiene completamente la información para obtenerla.

Sobre el 1.21 los participantes comentaron lo siguiente

Investigador: ¿Este problema, se podría resolver?

Estudiante 1: Primero tendríamos que sacar los 58 años con los meses exactos, no sé, el tiempo exacto para poder ya de nuevo hacer la suma de estos 58 y meses más otros 58.

Investigador: ¿Cómo haríamos eso?

Estudiante 2: Primero necesitamos una fecha de donde partir y ya de ahí contar los 58 años y conforme a la gráfica ver en qué mes exacto se vuelven a iniciar los estados.

Aquí, el estudiante 2 mencionó la necesidad de conocer además la fecha de donde partir, es decir, la fecha de nacimiento de la persona de quien estamos observando sus biorritmos, teniendo este dato el problema tendría información suficiente para resolverse.

Además de esto, el estudiante 1, apuntó al hecho de que en los problemas no se han utilizado algunos de los datos presentes en la imagen.

Estudiante 1: Creo que también estamos olvidando que cada onda, la física, emocional e intelectual tiene ciertos días, que era como algo de 23, 30 y tantos días, 28, y creo que esos son valores que para los problemas anteriores pues también podríamos, no sé, utilizarlos de alguna forma para poderlos contestar.

Investigador: Tenemos entonces algunos datos que no hemos utilizado, que son los 28 días, los 33 días y los 23 días. Estudiante 1, ¿para qué nos serviría saber lo de los 23 días, los 28 días y los 33 días en este problema en particular?

Estudiante 1: Podríamos analizar primero como se están comportando, ya tenemos el Excel que yo creo es de gran apoyo y más o menos tenemos que ir viendo cómo vamos avanzando conforme va avanzando el tiempo, donde van chocando los puntos en cuanto al eje x y y tomando en cuenta los días y ya en base a esto pues hacer como un cálculo, no sé a lo mejor podríamos calcular en pocos meses, a lo mejor en un periodo más pequeño y ya luego multiplicarlo por los 58 años o así para aproximarnos más al tiempo que ya tenemos.

Notamos nuevamente que la herramienta digital actúa como un apoyo visual para los estudiantes, aquí por ejemplo se mencionó como un auxiliar para observar las intersecciones de las curvas a través del tiempo.

Sobre la no suficiencia de información vemos que al mostrar el problema 1.11 *¿Cuántas veces a lo largo de la vida de un ser vivo es posible que los biorritmos vuelvan a iniciar coincidentemente?*, uno de los participantes apuntó "siento que depende de los años que viva la persona, pero por lo regular es uno". De la misma forma que en el problema 1.21 los alumnos notaron la necesidad de agregar más información para que el problema sea posible de resolver.

En otros casos, los estudiantes expresaron que para poder resolver los problemas se necesitaban otros datos o en todo caso realizar algún proceso extra e intermedio que les permitiera llegar a la respuesta deseada. Frecuentemente dicen necesitar una formula, ya sea correspondiente a las curvas que representan cada biorritmo o bien que les permita obtener la amplitud.

Sobre el problema 1.4 *Representa de manera gráfica cómo se verán los biorritmos a los 25 años, tomando en cuenta que la fecha de nacimiento es 15/08/2005*

Investigador: ¿se puede resolver este problema?

Estudiante: yo pienso que sí, creo que volvemos a tomar los mismos datos, tenemos que analizar, creo que, para muchos de los problemas, el comportamiento que tienen estas ondas. Tenemos que sacar no sé, alguna fórmula que nosotros ingresando el año y por ejemplo con el documento que nos envió de Excel ahí podemos ver el comportamiento poniendo la fecha, entonces tendíamos que ir a los 25 años después y ya poder graficarla.

Sobre el problema 1.7

Investigador: Entonces, tu pregunta es si habrá un punto en donde las tres ondas se intersecan, ya sabemos que sí tiene que pasar, porque en algún momento vuelven a iniciar, pero ¿en otro punto se van a tocar?, por ejemplo, esa podría ser también otra pregunta, ¿no?

Estudiante: Ahí sería un poco igual que la primera pregunta que vimos, sacar como una fórmula para ver cómo sería gráficamente las ondas y de ahí, ver si hay un patrón o si cambian.

Sobre el problema 1.20

Investigador: Ya que podrían responderla, propón una estrategia, cómo la responderías, qué es lo que harías para responderla.

Estudiante 1: Para empezar, yo diría que observando las gráficas y conforme a ello establecer una fórmula que sustituyendo pues te dé la amplitud.

[…]

Investigador: Esta fórmula que queremos obtener ¿cómo la sacaríamos?

Estudiante 1: En el problema indica que es una función seno, entonces se podría utilizar esa fórmula.

Investigador: ¿Crees que tienes toda la información para que puedas hacer esto, encontrar una fórmula?

Estudiante 1: Siento que sí hay información, pero no completamente.

Estudiante 2: Tengo un poco de duda acerca de la pregunta, porque no termino de comprenderla, no sé, por eso no puedo estructurar una formula o algo así.

Investigador: ¿Qué crees que le falta a esta pregunta?

Estudiante 2: No sé, es que la leo y dice cuál es la amplitud que tendrá cada uno de los estados, no sé, siento que le hacen falta algunos datos o información, como una pregunta que pueda yo contestar.

Investigador: ¿Qué datos crees que le faltarían? ¿Qué le agregarías tú para poder contestarla?

Estudiante 2: "¿Cuál es la amplitud que tendrá cada uno de los estados tomando en cuenta que la fórmula de estas ondas es tal?" No sé brindándonos ya, información extra.

Investigador: ¿Entonces lo que tu necesitarías sería la formula?

Estudiante 2: Sí, yo creo que necesitaría ese dato para más o menos guiarme y poder contestar la pregunta.

Investigador: ¿Estudiante 3, crees que es necesario que tengamos la formula?

Estudiante 3: Pues sí, según recuerdo lo de los senos, para calcular o algo así se hacía algo de sen (x-1).

Investigador: Ustedes creen que es posible que nosotros sepamos la fórmula de esta función seno o es necesario que nos la digan, Estudiante 4, ¿tú qué crees?

Estudiante 4: Yo diría que sí debería estar indicada para poder sacar la amplitud.

Cierto es que las fórmulas de cada curva podían obtenerse con la información dada en la imagen y la gráfica mostrada a los estudiantes, sin embargo, el hecho de que creyeran necesario que estas fórmulas se dieran de manera explícita parece apuntar más a la falta de conocimiento teórico en el tema.

Problemas de la sesión 1

ID	Problema	Tipo
1.1	De acuerdo con las funciones f'(x), establece 3 que representan cada ciclo realizado.	**S**
1.2	Coloca 2 coordenadas donde se intersecan la onda de biorritmo físico e intelectual si se calcula con base en una persona que nació el 15/08/2005.	**S**
1.3	Los biorritmos tienen fases negativas y positivas, tomando en cuenta los valores presentados para los periodos de una persona, ¿Aproximadamente en qué punto de la gráfica(día) iniciará la fase negativa de cada ciclo?	**S**
1.4	Representa de manera gráfica cómo se verán los biorritmos a los 25 años, tomando en cuenta que la fecha de nacimiento es 15/08/2005	**S**
1.5	Situándonos en el 15/08/2030 ¿cuánto tiempo faltará para que inicien simultáneamente los 3 ciclos?	**N S**
1.6	Cuando la gráfica está por encima de l0, hablamos de que nuestra mente y cuerpo están en el mejor estado, si un día positivo (punto de la gráfica) se altera, ¿Los demás puntos lo harán?	**N P**
1.7	*Si la fecha de nacimiento es 15/08/2005 ¿Habrá un punto en donde las tres ondas se intersecan? Coloca la fecha aproximada.*	**S**
1.8	¿Después de los 58 años en cuánto tiempo van a volver a iniciar simultáneamente otra vez los 3 aspectos?	**S**

1.9	*¿En qué año inician simultáneamente los 3 aspectos de alguien que nació el 5 de abril de 2005?*	**S**
1.10	¿En cuánto tiempo se logrará el máximo estado físico, emocional e intelectual posible simultáneamente?	**N P**
1.11	¿Cuántas veces a lo largo de la vida de un ser vivo es posible que los biorritmos vuelvan a iniciar coincidentemente?	**N S**
1.12	¿Cuántas veces una persona de 20 años habrá alcanzado un punto máximo de estado físico?	**S**
1.13	¿Cuántas veces se tendría que sumar cada término a sí mismo para volver a coincidir de nuevo? ¿Cuál sería el resultado de la suma a la que llegan todos los valores? ¿Cuántas veces se tendría que sumar cada término por sí mismo para llegar a ese resultado?	**S**
1.14	¿Con que frecuencia se tocan 2 periodos al mismo tiempo? ¿Y cuál es el comportamiento de la frecuencia de estos cuando se tocan?	**S**
1.15	¿Cuántas veces se tocan en el mismo punto 2 funciones antes de llegar a que coincidan todas?	**S**
1.16	*¿De acuerdo con la información de la gráfica ¿Hay algún momento donde una persona pueda estar al máximo (o mínimo) nivel de 2 o más aptitudes al mismo tiempo?*	**S**
1.17	Con respecto a la teoría del biorritmo y observando la gráfica, ¿cómo podrías determinar el estado físico y su amplitud en cualquier tiempo determinado?	**N P**

1.18	Observando el comportamiento de los biorritmos graficados como una función seno, indica el periodo y la amplitud de cada uno de los estados físicos.	**S**
1.19	¿Después de cuántos días los estados se vuelven a iniciar de acuerdo a los años indicados (58 años)?	**S**
1.20	*Con respecto a la teoría del biorritmo analizada con anterioridad, ¿cuál es la amplitud que tendrá cada uno de los estados?*	**S**
1.21	*Si todos los estados se vuelven a iniciar simultáneamente después de 58 años y algunos meses, ¿Cuál será el tiempo que transcurrirá para que este vuelva a pasar y en qué año o tiempo será?*	**N S**

Tabla 1. Concentrado de los problemas propuestos en la sesión 1.

De los 21 problemas propuestos por los estudiantes en esta sesión, 15 de ellos resultan tener información suficiente, 3 de ellos no tienen información suficiente y 3 son no plausibles.

Acerca de las sesiones 3 y 4

De la misma forma que lo hicieron en los archivos anteriores, los estudiantes explicaron por qué habían elegido su problema y si la herramienta digital, en este caso los applets de GeoGebra, había sido de ayuda para el planteamiento.

Todos los equipos afirmaron que los applets habían sido de ayuda, para empezar, mencionaron su función como apoyo visual comentando que las herramientas les habían permitido tener una visión más clara del problema. Uno de los equipos destacó la importancia de la tabla del segundo applet (Figura 7) para desarrollar sus propuestas gracias a que mostraba las posibles cantidades de arañas y escarabajos, calificándola como una herramienta fácil y rápida de utilizar. Otro equipo mencionó la importancia de la gráfica del segundo applet (Figura 7) para plantear un problema en específico, el problema 3.19 que puede consultarse en la Tabla 2, según su comentario en la herramienta pudo "visualizar como se forma un triángulo que contiene las posibles combinaciones donde se pueden meter tanto escarabajos como arañas en la caja". Más adelante en esta misma sección se hablará más profundamente de este problema, así como de otros comentarios que surgieron en la sesión 4 acerca del uso de los applets.

En esta sesión igual que en la primera todos los equipos ya habían planteado problemas antes de que se les proporcionara la herramienta digital. El primer equipo ya contaba con 5 de sus 10 problemas entre ellos el que eligieron como el mejor, el segundo equipo ya había planteado 4 de sus 5 problemas, aunque aún no planteaba su último problema que terminaron eligiendo como el mejor; el tercer equipo había planteado dos problemas, aunque terminaron eliminando uno de estos después de tener la herramienta, el último equipo tenía ya sus tres problemas antes de la herramienta.

En la sesión 4 se discutieron los problemas planteados en la sesión 3, las conversaciones con los estudiantes se centraron en los problemas que ellos habían elegido, aunque también se comentaron otras de sus propuestas. Todos los problemas de esta sesión pueden consultarse en la Tabla 2. De los problemas elegidos por los equipos, 3 de ellos tienen información suficiente y 1 es no plausible.

A continuación, se presentan los problemas elegidos de la sesión 3 junto con algunos comentarios de la discusión alrededor de ellos.

El primer equipo eligió la propuesta:

3.4 *¿Cuántas combinaciones de insectos y arañas se pueden hacer para sumar 54 patas?*

En el archivo realizado en la sesión 3 el equipo comentó que había elegido este problema porque consistía mayormente en estar probando diferentes combinaciones y que esta tarea podía realizarse con los applets. También mencionaron que sentían que este problema era fuera de lo común respecto a los problemas de matemáticas.

Durante la sesión 4 los estudiantes mencionaron que habían utilizado las herramientas no para plantear el problema sino para verificar que este tenía solución:

> **Investigador:** Muy bien, entonces vamos a recordar que en particular en la sesión pasada usamos dos herramientas de GeoGebra, un tipo de calculadora sencilla y otra un poco más elaborada donde tenían además una gráfica, para este problema en específico, ¿usaron estas herramientas?
>
> **Estudiante 1:** Primero, yo recuerdo que ya habíamos acabado nuestras propuestas antes de que nos enviara usted el material de apoyo.
>
> **Investigador:** ¿Entonces para este problema en específico no utilizaron ninguno de los dos?
>
> **Estudiante 2:** yo creo que el que sí utilizamos es el primero para sacar la respuesta, si en algún momento la teníamos que responder utilizamos el primero para ver cómo serían las combinaciones.

Con respecto a si el problema podía resolverse tal como lo habían planteado y de qué forma se haría, los participantes comentaron lo siguiente:

Estudiante 1: Yo, por ejemplo, lo contesté de una forma, […], yo fui como poniendo los múltiplos de arañas, por ejemplo, iba poniendo, 8, 16 y así y ya después de que tuve mis dos listas trataba de hacer combinaciones, trataba de decir "a ver cuál de estas dos columnas sumadas me daba el número de patas" entonces ya veía si tomaba cinco de uno y dos de otro completaban exactamente las 54 patas y no se pasaban, no eran menos y respetaban las condiciones de insectos y así.

Estudiante 2: Yo pensé en algo parecido nada más que sin buscar los múltiplos, sino que nada más poniendo algún número hasta llegar a la cantidad que se pide […] utilizando la calculadora como herramienta.

En este caso, el equipo ya había incluso resuelto el problema.

El segundo equipo eligió la propuesta:

3.15 *Si se sabe que hay más insectos que arañas en la caja, ¿Cuántos más insectos que arañas hay en la caja?*

En su archivo, los estudiantes comentaron que habían elegido este problema porque tiene un resultado específico, un resultado único. Durante la discusión de la sesión 4 agregaron además lo siguiente:

Estudiante: Lo elegimos porque bueno, en primer lugar, es un ejercicio que pensamos no todos tendríamos, es decir, no estaría repetido; en segundo lugar, porque consideramos que resolverlo implica al menos encontrar varias combinaciones posibles y, por tanto, conocimientos más profundos del problema.

Para este problema en específico los estudiantes dijeron haber utilizado la primera herramienta para verificar cuántas posibles combinaciones existían para que el total de patas fuera 54.

Sobre si el problema planteado podía resolverse, los estudiantes comentaron lo siguiente

Estudiante: Sí, se puede resolver, nosotros lo resolvimos mediante tabulaciones que podrían considerarse tanteo y la verdad desconozco si existe otro método, me imagino que sí, pero por el momento lo desconocemos.

Estudiante 2: yo creo que sí se puede resolver porque tenemos los datos suficientes para saber cuántas arañas y cuantos insectos puede haber en la caja.

Investigador: Ok, los datos suficientes, ¿cuáles serían los datos que necesitamos entonces?

Estudiante 2: La cantidad de patas de cada insecto y la máxima cantidad de patas que puede haber en la caja.

El tercer equipo eligió la propuesta:

3.19 *¿Para cuantas cantidades de números enteros positivos es posible establecer en una caja combinaciones de arañas y escarabajos si hay un límite de 120 patas?, ¿Y en cuántas de ellas el resultado total de patas son 54?*

En su archivo, el equipo explicó que eligió este problema por ser el problema más completo que tenían, mencionaron además que este problema surgió como una duda mediante la gráfica del segundo applet de GeoGebra y que además su resolución ayudaría a resolver el resto de las dudas que habían surgido.

Durante la sesión 4 el estudiante dijo lo siguiente:

> **Estudiante 1:** Yo lo planteé y también lo elegí porque cuando vi la representación gráfica que se hacía en la herramienta de GeoGebra que nos pasó se formaba como una especie de triángulo, no, bueno, como una especie de línea, y en esa línea se podía observar cómo variando la cantidad de arañas y escarabajos podía variar el total.

En la Figura *13* se presenta una sección del segundo en applet, en esta puede observarse el triángulo del que habla el Estudiante 1 y que está formado por la gráfica y los ejes coordenados.

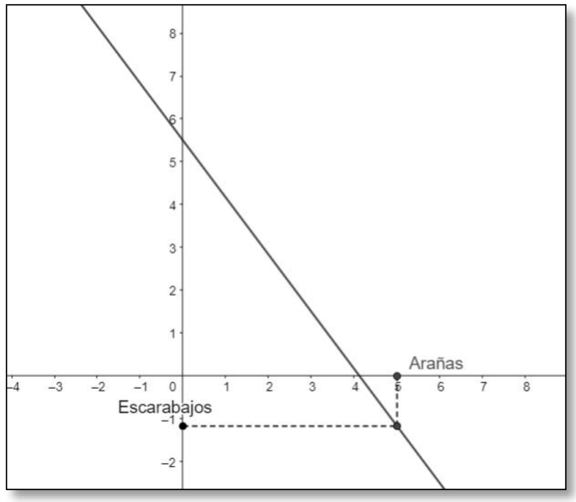


Figura 13. Captura de una sección del segundo applet de GeoGebra.

Estudiante 1: Gráficamente se ve este triángulo y el chiste es saber para cuántas, por ejemplo, en el caso que pone ahí pone 5 arañas y un número negativo de escarabajos así que eso no es, o sea, por cómo se plantea la pregunta no tiene mucho sentido que haya una cantidad negativa de escarabajos entonces por eso le puse números enteros positivos porque también no tiene sentido que también sea un cacho de un insecto por así decirlo.

Notamos que el estudiante se ha dado cuenta de las restricciones que tienen las cantidades de arañas y escarabajos, y que ha tomado en cuenta estas restricciones en el planteamiento de su problema, limitando desde el inicio sus posibles soluciones.

Estudiante 1: Y pues sí, al observar cómo esa especie de triángulo que se forma pensé que en ese espacio podrían caber varias cajas bueno, siempre y cuando delimites podrían caber, por así decirlo, varias cajas con distintas combinaciones

> de insectos, dependiendo pues sí, qué tanto los limites cuántos posibles puntos de coincidencias hay entre ambos números. […]

Con respecto a si era posible resolver el problema como lo habían planteado, comentaron lo siguiente:

> **Estudiante 1:** Yo creo que sí debería haber por lo menos una forma de mínimo obtener una referencia gráfica o elaborar una ecuación o este número que daría como resultado cada una de las líneas […] que están debajo del triángulo.

El estudiante nuevamente mencionó la representación gráfica de la herramienta esta vez para proponer una estrategia de resolución de su problema.

> **Estudiante 1:** Entonces a partir de todos esos números donde fácilmente podemos descartar cosas como por ejemplo, eliminar todas las posibilidades donde el numero sea impar, porque por cómo se plantea el problema no se puede conseguir insectos enteros cuando tienes número impares, eso sería por ejemplo ya descartar la mitad de posibilidades total para el número de patas, además puedes determinar un mínimo por ejemplo, que este mínimo sería seis que es la cantidad de patas que tiene un escarabajo y se podría así ir recortando.

Notamos también que el estudiante limita ahora las posibles soluciones a sus problemas después de haber analizado el comportamiento de las gráficas en el applet de GeoGebra.

> **Estudiante 1:** También simplemente hacerlo por tanteo y ver todas mediante esta herramienta o cualquier tabla ir evaluando uno por uno hasta ver pues sí cuando ya no se forman.
>
> **Investigador:** ¿Alguien tiene otra forma de resolver esto o cree que no se puede resolver o algo parecido? Estudiante 3, ¿crees que se puede resolver?
>
> **Estudiante 3:** Yo creo que sí también, no sé cómo, pero este, yo creo que si ocupamos la calculadora en vez de la gráfica.

El cuarto equipo eligió la propuesta:

3.21 *De acuerdo con el problema anterior, se observa que el total de patas entre arañas y escarabajos son 54, ¿Cuántas arañas y escarabajos hay en la caja si tomamos en cuenta que para sacar el número de arañas se requiere resolver la siguiente ecuación: 28x =84, y para obtener el número de escarabajos la operación a resolver es: Si a más b es igual a 11, ¿Cuánto es a multiplicado por b? y el resultado debe ser dividido entre 6.*

En su documento, el equipo dijo haber escogido este problema porque “es el mejor planteado, además al tener más información permite poner más en práctica nuestro pensamiento crítico a la hora de resolverlo”.

No se tiene más información respecto a este problema debido a que los miembros del equipo no asistieron a esta sesión, sin embargo, notaremos que se trata de un problema no plausible ya que no puede resolverse y carece de lógica.

Después de discutir acerca de los problemas elegidos, se revisaron y comentaron algunos otros de los problemas propuestos en la sesión 4.

Sobre el problema 3.16 ¿Cuántas patas habrá si hay la misma cantidad de arañas e insectos?

Notemos que en esta propuesta parece haberse ignorado u olvidado el hecho de que había 54 patas dentro de la caja.

Acerca de si este problema podía resolverse tal como se había planteado, los estudiantes comentaron lo siguiente:

> **Estudiante:** […] Sí se puede saber siempre ya sea que delimites o que escojas dos números al azar por ejemplo 4 y 4 y ya por eso se iguala, además sería hacer la multiplicación de 4x6 y 4x8 y sumar los resultados, si es que entendí bien qué plantea la pregunta.
>
> **Investigador:** Tú me dices que tenemos que delimitar, ¿así cómo está la podríamos resolver?
>
> **Estudiante:** Es que, así como esta, si no estamos tomando 54 como número o bueno, cualquier número como límite parece que estuviera inconcluso el problema, por lo menos para mí.
>
> […]
>
> **Investigador:** Estudiante 2, ¿tú qué opinas?

Estudiante 2: estoy de acuerdo en que faltaría un dato que delimite cuántas arañas o insectos hay porque si no probablemente las respuestas podrían ser infinitas.

Sobre el problema 3.11 ¿Cuál es el número de insectos y arañas dentro de la caja?

Notaremos que este para este problema puede encontrarse solución, tomando en cuenta que el número de patas es 54, las combinaciones de 3 arañas y 5 escarabajos, y 6 arañas y 1 escarabajo cumplen con las condiciones del problema, sin embargo, se tendría que la solución no es única, contrario a lo que parece indicar el uso del singular en la palabra *Cuál.*

Investigador: ¿tú crees que este problema se puede resolver?

Estudiante: Sí […] Cuando hay 1 escarabajo y 6 arañas me parece que sí salé.

Investigador: Muy bien, ahí tenemos una. Pero notemos que con 3 arañas y 5 escarabajos se puede hacer también, entonces tanto con 6 arañas y 1 escarabajo como con 3 arañas y 1 escarabajo. Vamos a notar entonces que hay más de una posible combinación, entonces, volviendo al problema. ¿Cuál sería la respuesta?

Estudiante: Ah, entonces sí puede haber más de una respuesta.

Investigador: Entonces, ¿podrías resolver este problema, así como está?

Estudiante: Así como está no.

Investigador: ¿Qué le haría falta?

Estudiante: No sé, tendríamos que especificar, poner alguna otra condición, que no rebase tantos insectos, o que a fuerzas debe haber de ambos, porque si solo hay escarabajos también podemos llegar al número, pero ya no hay arañas, entonces no sé, una condición.

Investigador: Estudiante 2, ¿estás de acuerdo en qué tendríamos que poner otra condición?

Estudiante 2: Si buscamos una sola respuesta sí necesitaríamos otro dato […].

Investigador: Así como está el problema, ¿se busca una respuesta o se buscan muchas?

Estudiante 2: Se buscan más de una porque no especifica.

Problemas de la sesión 3

	Problema	**Tipo**
3.1	¿Cuántos insectos, como máximo, podría haber dentro de esa caja?	S
3.2	Tomando en cuenta el número de patas de cada animal, ¿Cuántas arañas pueden estar dentro de la caja? ¿Cuántos escarabajos?	S
3.3	¿Existe la posibilidad de que en la caja estén repartidos a la mitad, es decir, que haya la misma cantidad de insectos y de arañas?	S
3.4	*¿Cuántas combinaciones de insectos y arañas se pueden hacer para sumar 54 patas?*	S
3.5	¿Cuántos animales, entre arañas y escarabajos, pueden estar como máximo dentro de la caja?	S

3.6	¿De qué especie animal es más probable que se encuentre en mayor cantidad dentro de la caja?	S
3.7	Si hay 5 escarabajos, ¿Cuántas arañas debe de haber para completar las 54 patas?	S
3.8	¿Es posible completar las 54 patas teniendo únicamente una araña y que el resto sean escarabajos?	S
3.9	Responde si es verdadero o falso: Se necesitan 3 arañas y 6 escarabajos para completar 54 patas en la caja	S
3.10	¿Puede llegar a ser proporcional el número de cada especie que se encuentra dentro de la caja?	N P
3.11	¿Cuál es el número de insectos y arañas dentro de la caja?	N S
3.12	¿Cómo se puede conocer la cantidad de patas de araña que hay en la caja?	N M
3.13	¿Cuántas combinaciones (cantidad de insectos y arañas), cuya suma sea 54 patas, existen?	S
3.14	¿Qué operaciones se necesitan hacer para saber la cantidad individual de los insectos y las arañas?	N P
3.15	*Si se sabe que hay más insectos que arañas en la caja, ¿Cuántos más insectos que arañas hay en la caja?*	S
3.16	¿Cuántas patas habrá si hay la misma cantidad de arañas e insectos?	N P
3.17	¿Cuál es el mayor número posible de arañas dentro de la caja?	S
3.18	¿Si hay 54 patas es posible que haya la misma cantidad de arañas e insectos?	S

3.19	*¿Para cuantas cantidades de números enteros positivos es posible establecer en una caja combinaciones de arañas y escarabajos si hay un límite de 120 patas?, ¿Y en cuántas de ellas el resultado total de patas son 54?*	S
3.20	Si se desea identificar el número de patas que pertenecen a los insectos y el número de patas que pertenecen a los que no son insectos. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno, de las patas, si sabemos que en total hay 54 patas en la caja?	N S
3.21	*De acuerdo con el problema anterior, se observa que el total de patas entre arañas y escarabajos son 54, ¿Cuántas arañas y escarabajos hay en la caja si tomamos en cuenta que para sacar el número de arañas se requiere resolver la siguiente ecuación: 28x =84, y para obtener el número de escarabajos la operación a resolver es: Si a más b es igual a 11, ¿Cuánto es a multiplicado por b? y el resultado debe ser dividido entre 6.*	N P
3.22	Con respecto a la lectura planteada con anterioridad, si se menciona que en total son 54 patas, ¿Cuántas insectos y no insectos debe haber en la caja para lograr esa cantidad de patas, tomando en cuenta que la cantidad de insectos es menor	S

Tabla 2. Concentrado de los problemas propuestos en la sesión 3.

De los 22 problemas propuestos por los estudiantes en esta tercera sesión, 15 tienen información suficiente, 2 información no suficiente, 4 son no plausibles y 1 son no matemáticos.

Acerca de las sesiones 5 y 6

De la misma forma que lo hicieron en los archivos anteriores, los estudiantes explicaron por qué habían elegido su problema y si la herramienta digital, en este caso la página electrónica, había sido de ayuda para el planteamiento.

En esta ocasión los estudiantes nuevamente afirmaron que la herramienta digital había sido de ayuda. Todos los equipos mencionaron la importancia de la página electrónica como representación visual, un equipo dijo que la herramienta les había ayudado a reafirmar la imagen mental que tenían de la situación mientras que otro equipo comentó que antes de que la página electrónica se les compartiera había sido complicado para ellos comprender la situación. Los estudiantes señalaron también que la herramienta les hizo cuestionar los tiempos de llegada de los corredores, así como cuál era la forma más rápida de realizar el recorrido de la carrera; además mencionar que " luego de poder observar la representación gráfica de la problemática y manipular los datos que podían variar, logramos desarrollar más propuestas".

Antes de que se les proporcionara la herramienta el primer equipo había planteado 3 problemas de los cuales descartaron uno, el resto de sus problemas incluyendo el problema que ellos consideraron como el mejor fueron plateados tras tener la herramienta tecnológica. El tercer equipo había planteado 4 de sus 5 problemas. El último equipo no había planteado ningún problema antes de poder utilizar la herramienta digital.

En la sesión 6 se discutieron los problemas planteados en la sesión 5, las conversaciones con los estudiantes se centraron en los problemas que ellos habían elegido, en esta ocasión solo se contó con la participación de miembros de dos de los equipos. Todos los problemas de esta sesión pueden consultarse en la Tabla 3. De los problemas elegidos por los equipos, 2 tienen información suficiente y 1 no es un problema matemático.

A continuación, se presentan los problemas elegidos de la sesión 5 junto con algunos comentarios de la discusión alrededor de ellos.

El primer equipo eligió la propuesta:

5.3 *Al haber llegado a la línea divisoria, tras haber recorrido el tartán desde el punto A con un ángulo de 70°, ¿Qué ángulo tiene que tomar para llegar al punto B? ¿Cuántos metros habrá recorrido en total? Si llego en un tiempo de 36s ¿a qué velocidad iba?*

En su documento, el equipo indicó que eligieron este problema debido a que contiene más información y solita realizar más operaciones, además que toma en cuenta más valores y variables.

Durante la discusión de la sesión 6, se volvió a hablar acerca del uso de la herramienta tecnológica.

Investigador: Para este problema en específico, ¿utilizaron la herramienta digital que en este caso fue la página donde podíamos tener esta simulación del problema?

Estudiante: Sí, de hecho, bueno, no sé si recuerda, bueno, pero lo externo con mis compañeros, yo tuve un poco de dificultad, de más o menos imaginarme cómo era el problema, porque no, no podía imaginarme cómo era lo de los 25 m y lo demás, entonces ya cuando usted nos envió el archivo, pues ya rápidamente dimensioné y dije “ah se puede aplicar a este problema y podemos utilizar alguna función tangente, cosenos y senos para realizarlo" y como que ya me surgió más ideas del problema a plantear.

Acerca de si creían que el problema propuesto podía resolverse tal como lo habían planteado, el estudiante compartió una propuesta de resolución.

Estudiante: Ahí yo empecé a pensar y dije, por ejemplo, el punto verde, tiene que avanzar ciertos metros y yo creo que ya había puesto las condiciones del problema y dije, ahí ya tenemos el valor de cuánto mide uno de los lados yo ya brindé otro y también brindé el ángulo, entonces ya con esos 3 valores ya se puede sacar el otro lado utilizando una de las funciones que ya había comentado [...] teniendo ese dato se puede sacar el otro de la misma forma y pues lo de a cuántos kilómetros, bueno, kilómetros por hora iba, pues ya se aplica un poco de física.

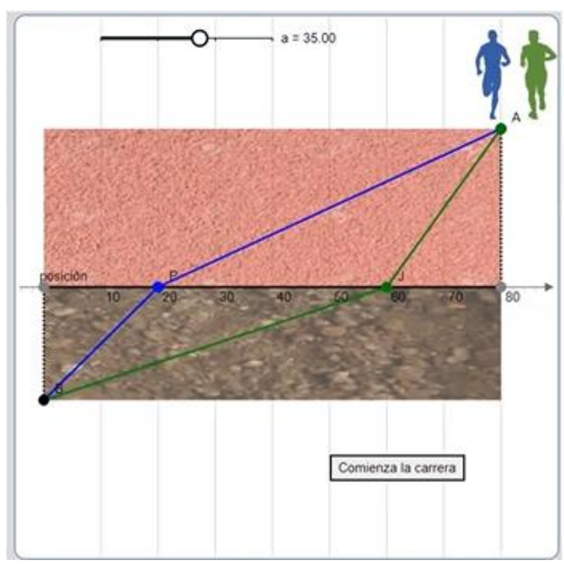


Figura 14. Representación de la situación 3

Este problema resulta tener información no suficiente, pues, aunque se da la medida del ángulo, no se aclara cuáles son los lados que lo forman dando lugar a la ambigüedad.

El tercer equipo eligió la propuesta:

5. 13 *¿Cuál es la forma de optimizar mejor el recorrido en la carrera*?

En su archivo, el equipo dijo haber seleccionado esta propuesta porque al usar la herramienta digital podía tenerse una mejor perspectiva de él. Los miembros del equipo no asistieron a la sesión 6 por lo que no se cuenta con una discusión del problema.

Este problema fue clasificado como un problema no matemático debido a la generalidad con la que se presenta.

El cuarto equipo eligió la propuesta:

5.14 *¿A qué velocidad tendría que ir Pedro para tomar la ruta más larga del punto A al punto B y llegar antes que Juan tomando la ruta más corta a una velocidad de 1 m/s?*

En su documento, el equipo explicó que este problema fue elegido ya que "su resolución requiere de una visión clara de los elementos que se requieren y que son mencionados para poderlo resolver".

Durante la discusión de la sesión 6 el equipo mencionó que para plantear este problema habían utilizado información que se encontraba de manera implícita en la situación presentada, como el hecho de que la longitud de la línea divisoria era de 100 m. Y que una vez tuvieron las distancias pudieron incluir otros conceptos como el de la velocidad y que al pensar en calcular la trayectoria más larga o la más corta pensaron en utilizar trigonometría y de ahí surgió la idea para este problema.

Sobre el uso de la herramienta, se mencionó lo siguiente:

> **Estudiante:** Sí, lo utilizamos porque también fue parte importante, nos dio la idea pues esta herramienta nos permite calcular el tiempo a partir de la velocidad y de la trayectoria.

Sobre si el problema podía resolverse tal como se había planteado, el estudiante afirmó que era posible dando incluso un esbozo de su propuesta de solución.

> **Estudiante:** Primero, como el primer paso se tienen que obtener la distancia más larga y la distancia más corta Pedro y Juan cada uno. Y después probablemente se tenga que realizar una ecuación, con una fórmula de física, me imagino. Quizá. Bueno, no, no recuerdo con exactitud, pero hacer una ecuación utilizando fórmulas de física y, obviamente después resolver esa ecuación. Así se realizaría.

Problemas de la sesión 5

	Problema	**Tipo**
5.1	¿Cuántos metros tendrá el ancho del rectángulo, que es la forma de la zona donde se realiza la carrera?	S

5.2	¿A cuántos metros del punto A, tocará Pedro la línea divisoria, si va corriendo en un ángulo de 67°5"?	S
5.3	*Al haber llegado a la línea divisoria, tras haber recorrido el tartán desde el punto A con un ángulo de 70°, ¿Qué ángulo tiene que tomar para llegar al punto B? ¿Cuántos metros habrá recorrido en total? Si llego en un tiempo de 36s ¿a qué velocidad iba?*	S
5.4	¿Cuántos metros debe medir cada zona del lugar dónde se realiza la carrera para que todos los puntos anteriores se cumplan?	N S
5.5	Teniendo en cuenta la distancia de los puntos a la línea divisoria, ¿Qué zona ocupará mayor terreno, la de fango o tartán?	S
5.6	¿A los cuántos segundos, Pedro cruzará por la posición 20 en la línea divisoria si lleva una velocidad de 15 km/h en la zona de tartán?	S
5.7	Si ambos corredores mantienen una velocidad constante de 13 km/h en ambas zonas, pero uno de ellos sigue una trayectoria en línea recta y otro se desvía de esta trayectoria, ¿llegarán al mismo tiempo al punto B?	S
5.8	¿Cuál es el área de la Zona del Tartán?	S
5.9	¿De cuántas formas podría ser el circuito, que cumplan con las características que se mencionan?	S
5.10	¿Cuál es la ubicación y posición exacta de la línea divisora?	N S
5.11	¿Qué punto se encuentra más cerca y cuál más lejos de la línea divisora?	S
5.12	¿Cuál sería la distancia de otros puntos de la línea respecto a y b, y si es así en qué intervalo variarán las distancias?	N S

5.13	¿*Cuál es la forma de optimizar mejor el recorrido en la carrera*?	N M
5.14	*¿A qué velocidad tendría que ir Pedro para tomar la ruta más larga del punto A al punto B y llegar antes que Juan tomando la ruta más corta a una velocidad de 1 m/s?*	S
5.15	¿Cuál es la fórmula matemática que describe el tiempo que le toma a cada uno de los corredores completar el recorrido del punto A al punto B?	S

Tabla 3. Concentrado de los problemas propuestos en la sesión 5.

De los 15 problemas de esta sesión, 11 tienen información suficiente, 3 no tienen información suficiente, 1 es no matemático.

Capítulo 6

Conclusiones

Como conclusiones del análisis de las respuestas de los estudiantes a la petición de que plantearan problemas que correspondiesen a los fragmentos de los enunciados que se les presentaron, procederemos a responder las preguntas de investigación planteadas en el Capítulo 2.

Respuesta a la primera pregunta de investigación. ¿Qué tipo de problemas matemáticos plantean los estudiantes durante el desarrollo de las sesiones?

A lo largo de las sesiones, los participantes de esta investigación propusieron un total de 58 problemas, 21 en la primera sesión, 22 en la tercera sesión y 15 en la quinta.

Por tipo de problemas nos vamos a referir a su clasificación que expusimos en el capítulo 3. La distribución de los problemas según la codificación descrita con anterioridad puede verse resumida en la tabla siguiente (Tabla 4).

	Primera Sesión	**Tercera sesión**	**Quinta sesión**	**Total**
No matemáticos	0	1	1	**2**
No plausibles	3	4	0	**7**
Información no suficiente	3	2	3	**8**
Información suficiente	15	15	11	**41**
Total	**21**	**22**	**15**	**58**

Tabla 4. Clasificación de las propuestas de problemas.

Como puede observarse más del 70% de los problemas propuestos en las sesiones son problemas con información suficiente. En la Tabla *5*, se muestra la distribución de los problemas de acuerdo con esta clasificación de los problemas que eligieron como los mejores.

	Primera Sesión	**Tercera sesión**	**Quinta sesión**	**Total**
No matemáticos	0	0	1	**1**
No plausibles	0	1	0	**1**

Información no suficiente	1	0	0	**1**
Información suficiente	4	3	2	**9**
Total	**5**	**4**	**3**	**12**

Tabla 5. Clasificación de los problemas elegidos por cada equipo.

Respuesta a la segunda pregunta de investigación. ¿Cuáles son los criterios de los estudiantes para elegir “el mejor” de entre sus problemas planteados?

Como se mencionó, en cada una de las sesiones impares, los estudiantes eligieron de entre sus propuestas el problema que consideraban como el mejor.

Sobre las razones por las que los participantes eligieron un problema de entre sus propuestas se mencionaron las siguientes:

- Les parecía más interesante de resolver.
- Abarcaba más datos o información proporcionados por el investigador.
- Tenía potencial para ser un problema que los otros equipos no habían propuesto.
- Les parecía un problema fuera de lo común respecto a los problemas de matemáticas que conocen.
- Les parecía mejor planteado que el resto de sus problemas.

Después de la sesión 2, en la que se les preguntó por primera vez a los estudiantes si los problemas que habían elegido podían resolverse, algunos participantes comenzaron a elegir sus problemas tomando en cuenta la posibilidad de resolverse. Así, los participantes utilizaron las herramientas tecnológicas que se les proporcionaron para explorar sus problemas propuestos y buscarles una solución.

A partir de la sesión 3, los estudiantes mencionaron entre sus criterios de elección los siguientes:

- El problema tenía una solución única.
- El problema podía resolverse directamente con el uso de las herramientas tecnológicas que se les habían compartido o bien las herramientas les permitían tener una mejor perspectiva del problema.
- Resolver el problema implica tener conocimientos más profundos.

Respuesta a la tercera pregunta de investigación ¿ Qué dificultades podemos identificar que enfrentan los estudiantes durante el proceso de planteamiento de problemas y durante la discusión acerca de los problemas propuestos?

Como podemos ver en la Tabla 4 y Tabla 5 los problemas planteados por los estudiantes son en su mayoría problemas con información suficiente y que por lo tanto tienen solución. Pero, notamos también, que de los 58 problemas propuestos 9 no tienen información suficiente; durante las discusiones de las sesiones pares, al preguntar a los estudiantes si creían que los problemas que habían elegido podían resolverse tal como estaban, los estudiantes notaron la falta de información, aunque comúnmente no podían puntualizar cuál o cuáles eran los datos faltantes que permitirían resolver el problema.

Además de la información faltante, notamos que los alumnos tenían dificultades para plantear problemas o para identificar si los problemas que ellos proponían eran factibles de resolverse debido a cierta falta de conocimiento del contenido matemático involucrado. Durante las discusiones los participantes hacían referencia a ciertos conceptos matemáticos que consideraban podían estar implicados o aplicarse en las situaciones dadas pero que ellos afirmaban no recordar por completo.

Respuesta a la cuarta pregunta de investigación. ¿Cómo ayudaron las herramientas digitales para el planteamiento de problemas?

En general, como pudimos notar, los participantes afirmaron que las herramientas digitales que se les compartieron fueron de ayuda para el planteamiento de los problemas.

Algo que los estudiantes mencionaron acerca de todas las herramientas, es que fueron de ayuda como apoyo visual, el archivo de Excel permitió a los participantes ver y entender el comportamiento de los biorritmos a través del tiempo, los applets de GeoGebra también ayudaron a comprender la situación mientras que la página hizo que los estudiantes tuvieran mucho más claras las condiciones de la carrera. Además, la representación visual les permitió hacer conexiones con otros conceptos matemáticos.

Resulta también importante destacar que, aunque las herramientas digitales fueron en general de utilidad en el planteamiento de los problemas los estudiantes fueron capaces de proponer problemas sin ayuda de estas. Para algunos de los problemas propuestos las herramientas no tuvieron influencia alguna, pero otros problemas solo pudieron surgir después de trabajar con ellas.

Como se sabe, los estudiantes pasaban aproximadamente la mitad de las sesiones impares planteando problemas sin tener acceso a las herramientas; durante las sesiones 1 y 3, con la situación de los biorritmos y la situación de las arañas todos los equipos ya tenían propuestas de problemas antes de que se les proporcionara la herramienta digital, mientras que en la sesión 5 con la situación de la carrera, la herramienta digital fue necesaria para que uno de los equipos pudiera hacer una propuesta de problema.

Otro aspecto que los estudiantes destacaron fue que, el poder manipular las herramientas y variar las condiciones les permitió explorar de manera más extensa la situación que se les presentaba.

Además, las herramientas fueron de ayuda para que los participantes establecieran condiciones en sus problemas, un caso interesante es el que se da en las sesiones 3 y 4 cuando uno de los participantes establece desde el planteamiento del problema restricciones para las soluciones de su problema tomando como referencia la gráfica disponible en el applet de GeoGebra.

También, como ya habíamos mencionado, los estudiantes utilizaron las herramientas digitales para averiguar si los problemas que habían propuesto tenían solución y para proponer una estrategia para resolverlos.

Respuesta a la quinta pregunta de investigación ¿Qué efecto tienen estas actividades de planteamiento de problemas en el aprendizaje de las matemáticas y sus contenidos?

En los problemas planteados, así como en las discusiones podemos notar cómo los estudiantes trataban de complementar la información que se les daba en los textos y las imágenes con conocimientos matemáticos que ellos poseían.

Al discutir si sus problemas tenían solución los participantes mencionaban otras ideas matemáticas que consideraban podían ayudarles a resolverlos y si bien en muchas ocasiones no eran capaces de explicar estas ideas con claridad sí parecían identificar la relación que estas tenían con sus problemas.

Vemos también que en los problemas planteados los estudiantes no se limitan solo a usar la información proporcionada por el investigador por medio de las imágenes y las herramientas, sino que son capaces de introducir apropiadamente otros términos y conceptos como son las funciones, la amplitud, las fórmulas, los ángulos en las situaciones dadas planteando así problemas más ricos.

Notamos que en general los estudiantes fueron capaces de plantear problemas matemáticos que contaban con información suficiente para su solución desde la primera sesión con y sin las herramientas digitales que en la mayoría de las ocasiones ayudaron a los estudiantes a plantear nuevos problemas o a verificar que los problemas que ya habían propuesto podían resolverse.

Si bien es cierto que el número de sesiones que se realizaron para esta investigación no es suficiente para observar un cambio significativo en las habilidades de planteamiento de problemas de los estudiantes, a través de las reuniones podemos notar que los participantes comenzaron a tomar en cuenta aspectos como dar información suficiente o establecer condiciones en sus problemas. Los estudiantes comenzaron a ser más críticos respecto a los problemas, por ejemplo, son interesantes sus declaraciones como 'Les parecía un problema fuera de lo común respecto a los problemas de matemáticas que conocen' o que un problema les pareciera mejor planteado que el resto de los problemas. Están enfocando su atención al planteamiento del problema y no a la solución del mismo.

También, observamos mayor participación de los estudiantes en las sesiones impares, sesiones en las que se proponían los problemas y cierto rechazo a participar en las sesiones pares, sesiones en las que se pedía discutir los problemas propuestos durante la sesión anterior. Durante las reuniones algunos estudiantes no asistían o salían de la reunión en cuanto comenzaba a cuestionárseles si sus problemas podían resolverse o no.

Notamos que estas actividades de planteamiento de problemas permiten a los estudiantes retomar sus conocimientos de matemáticas e insertarlos en situaciones y contextos apropiados, fuera de un curso específico, y que sus propuestas permiten ver la comprensión que tienen acerca de los contenidos matemáticos que conocen. Las herramientas tecnológicas por su parte acompañan al estudiante en su exploración de las situaciones y también en la búsqueda de posibles soluciones.

Referencias

Abramovich, S., & Cho, E. K. (2015). Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 71–102). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_4

Barabé, G., & Proulx, J. (2015). Problem Posing: A Review of Sorts. *Proceedings of the 37th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1277–1284.

Beal, C. R., & Cohen, P. R. (2012). Teach Ourselves: Technology to Support Problem Posing in the STEM Classroom. *Creative Education*, *03*(04), 513–519. https://doi.org/10.4236/ce.2012.34078

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing.* Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 3–34). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Chang, K.-E., Wu, L.-J., Weng, S.-E., & Sung, Y.-T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers & Education*, *58*(2), 775–786. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.002

Einstein, A. and Infeld, L. (1938). *The evolution of Physics*. London: Cambridge University Press.

English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183–217.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 83–106.

Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem Posing in the Upper Grades Using Computers. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 257–272). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_12

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics educatio*n (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kitchings, C. N. (2020, March). Problem Posing and Technology: A Synthesis of Research. *Problem Posing and Technology: A Synthesis of Research*.

Leikin, R. (2015). Problem Posing for and Through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. In *Mathematical Problem Posing* (pp. 373–391). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_18

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the Arithmetic Problem Posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9*(1), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217299

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Third Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116–124). Hellenic Mathematical Society.

Rivera, A. (2002). Una carrera singular. En: *Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza*. Serie Bachillerato, Sociedad Matemática Mexicana. Fascículo 1.4. Vol. 1, pp. 88-119. No publicado.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press Inc.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In *Toward the thinking curriculum: current cognitive research*. https://www.researchgate.net/publication/44425404

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 19–28. http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 157–162. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. *Technology in Mathematics Education*, 518–525.

UAEH. (n.d.). *Plan de estudios*. Retrieved May 15, 2022, from https://www.uaeh.edu.mx/campus/preparatoria1/plan-estudios.html

Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 117–132. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0