CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS

AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

LA ENSEÑANZA DE LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS: UN ESTUDIO DE CASO

TESIS

Que presenta

MARITZA TAPIA AMBROSIO

Para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE

MATEMÁTICA EDUCATIVA

Directora de Tesis:

DRA. AVENILDE ROMO VÁZQUEZ

Ciudad de México — Agosto, 2023

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Dra. Avenilde Romo Vázquez por su dedicación y constancia en la elaboración de esta tesis. A pesar de las circunstancias en las que trabajó conmigo no dudó en ningún momento continuar con su labor. Ella es parte crucial en esto, porque hizo aportaciones nuevas a esta investigación.

Muchas gracias por sus palabras de aliento cuando más las necesité fueron muy oportunas, eso habla del gran ser humano que es. Gracias por estar ahí a cada paso de la redacción, por sus orientaciones que hacen que el día de hoy pueda culminar con este proyecto.

A la Dra. Marta Elena Valdemoros Álvarez, por iniciar esta tesis junto con la Dra. Avenilde, por sus aportaciones en la metodología de esta investigación y por las horas dedicadas a cada asesoría para que el escrito fuera lo más descriptivo posible. Sus experiencias en el tema del estudio de caso brindaron un panorama distinto al que tenía e hicieron posible que eso quedara plasmada en este trabajo.

A la Dra. Mirela Rigo Lemini, por la revisión, comentarios y las reflexiones hacia este documento.

Al Dr. Alberto Santana Ortega, por sus observaciones, comentarios y sugerencias para esta investigación.

Agradezco a Servicios Educativos Integrados al Estado de México por el apoyo que me brindó al otorgarme la “Beca Comisión” de un año que me permitió culminar mis estudios de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Un especial agradecimiento a la Profra. Alma, por su disposición y optimismo a la hora de trabajar en este proyecto, en cada entrevista que tuve con ella siempre se mostró segura y confiada, no tenía temor a demostrar lo que no sabía. Sin sus aportaciones, esta investigación no tendría sentido.

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico a la memoria de mi madre Lidia Magdalena Ambrosio Reyes, me vio iniciar este proyecto, pero no culminarlo. Su partida fue algo inesperado y muy doloroso. El hecho de que no estés físicamente conmigo no significa que no sigas aquí, siempre te recordaré por medio de cada palabra de aliento brindada, por cada regaño, por cada abrazo, por cada sonrisa y por decirme que en esta cabecita había muchas cosas, confió que el día de hoy estarías muy orgullosa de mí, así como yo lo estuve de ti. Te amo mamá.

También dedico este trabajo a mi familia:

A mi esposo Sahit, por su empatía demostrada durante la redacción de este trabajo. Este proyecto no ha sido nada fácil y tú estuviste a cada paso conmigo, motivándome para que siguiera adelante. Has estado conmigo en los momentos más turbulentos y me has demostrado tu amor de todas las maneras posibles.

A mi padre Gregorio Tapia Flores quien con sus palabras siempre ha sido una inspiración para ser un mejor profesional, por su sostén en las malas y por su alegría en las buenas.

A Mary y Kesy, una sala, un cuarto, un tiempo, por brindarme su apoyo incondicional cuando necesitaba de un espacio para tomar mis asesorías, dejaban de hacer cualquier ruido con tal de que pudiera trabajar.

Angélica y Joseph, la distancia solo es una manera en como los lazos familiares se unen más.

A mi sobrino Jesús por dedicarme su oratoria de Benito Juárez, es un recuerdo que atesoro mucho.

A Xana, por tu compañía que me demuestras día a día.

RESUMEN

La presente tesis de maestría incorpora los resultados de una investigación basada en la enseñanza de la adición y sustracción del número entero de una docente con formación normalista que labora en una escuela de nivel secundaria del Estado de México. El profesor es el encargado de buscar aquellas actividades que impacten de manera directa en el estudiante para lograr el aprendizaje, en este sentido, los objetivos de esta investigación son dos, el primero es identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego una profesora al realizar una propuesta didáctica sobre la adición y sustracción del número antero, el segundo analizar la mirada profesional de la profesora con relación a dicha enseñanza.

Para realizar la investigación se le solicitó a una profesora de matemáticas de secundaria que elaborara una propuesta didáctica del tema de adición y sustracción del número entero, considerando que los alumnos no conocen nada del tema, abordándolo desde tres aspectos inicio, desarrollo y cierre. Posterior a ello, se le realizó una entrevista semi estructurada, esta permitió aclarar aspectos que no se pudieron ver durante la propuesta didáctica. El instrumento que prevaleció a lo largo de la investigación fue la observación no participante.

El análisis de los instrumentos permitió identificar las estrategias que utiliza la profesora para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, la cual parte de dos tareas, la primera con relación a la conceptualización del número entero a partir de ejemplos de la vida cotidiana. La segunda refiere a la operatividad aditiva del número entero que consiste en un modelo de neutralización. Esto evidencia el tipo de conocimiento matemático, didáctico y profesional que pone en juego para el diseño de la propuesta didáctica. Lo anterior permite tener un acercamiento a la competencia profesional de la profesora, es decir, a su mirada profesional.

ABSTRACT

This master's thesis incorporates the results of a research based on the teaching of addition and subtraction of the whole number by a teacher with normalist training who works in a secondary school in the state of Mexico. The teacher is in charge of looking for those activities that have a direct impact on the student to achieve learning, in this sense, the objectives of this research are two, the first is to identify the mathematical and didactic knowledge that a teacher puts into play when making a didactic proposal on the addition and subtraction of the whole number, the second is to analyze the professional noticing of the teacher in relation to such teaching.

In order to carry out the research, a high school mathematics teacher was asked to elaborate a didactic proposal on the topic of addition and subtraction of the whole number, considering that the students do not know anything about the topic, approaching it from three aspects: beginning, development and closure. Subsequently, a semi-structured interview was conducted, which allowed clarifying aspects that could not be seen during the didactic proposal. The instrument that prevailed throughout the research was non-participant observation.

The analysis of the instruments allowed us to identify the strategies used by the teacher for teaching addition and subtraction of the whole number, which is based on two tasks, the first one related to the conceptualization of the whole number based on examples from everyday life. The second one refers to the additive operability of the integer, which consists of a neutralization model. This evidences the type of mathematical, didactic and professional knowledge that he puts into play for the design of the didactic proposal. This allows an approach to the professional competence of the teacher, that is, to her professional noticing.

ÍNDICE

Contenido

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre los problemas asociados a la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones aditivas de números enteros se han generado desde hace varios años (*p. ej*. Cid y Bolea, 2007; Gallardo, 1994; Küchemann, 1980). Los docentes por su parte, han generado propuestas con el objetivo de que los alumnos puedan conceptualizar el número entero y principalmente el número negativo, en las cuales incluyen modelos que enfatizan el uso de la recta numérica o de fichas de dos colores; la existencia de cantidades opuestas; las acciones de subir y de bajar elevadores; las medidas sobre y bajo el nivel del mar o las referencias de deudas y haberes. A partir de dichos modelos, se pretende generar reglas sintácticas que permitan a los alumnos operar aditivamente. Sin embargo, después de su uso en la enseñanza, algunos obstáculos (*p. e*. didácticos) y dificultades asociadas a la noción y operatividad del número entero son persistentes en los estudiantes, principalmente en la sustracción.

La superación tanto de los obstáculos como de las dificultades, requiere que el docente modifique o reoriente sus propuestas didácticas para posibilitar la comprensión de sus estudiantes. Por lo tanto, resulta necesario analizar los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que posee el profesor de matemáticas para el desarrollo de sus propuestas didácticas, conocimientos que ha adquirido a lo largo de su experiencia escolar y profesional. Llinares (2013) ha denominado lo anterior como *mirada profesional*.

Así, esta investigación se basa en un estudio de caso que brinda un acercamiento profundo a la práctica docente, y específicamente a la enseñanza de los números enteros en secundaria, donde el sujeto de investigación es una docente de formación inicial normalista, con once años de experiencia. Para el análisis de su planificación docente y de su mirada profesional se consideran dos temas principales: 1) la conceptualización del número entero y 2) la operatividad aditiva del número entero, y se utilizan dos instrumentos. El primero consiste en solicitar a la docente una propuesta didáctica dirigida a la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, la cual, se asume permite reflejar la mirada profesional de la docente. El segundo, constituye una entrevista semiestructurada, que permite profundizar en los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que conforman dicha mirada profesional en torno a la enseñanza de los números enteros.

La tesis está conformada por cinco capítulos que se detallan a continuación. El capítulo 1 se centra en el planteamiento del problema, partiendo de las dificultades asociadas a la operatividad del número entero y su relación con las que presentan los estudiantes en pruebas estandarizadas. De la misma manera, se presentan características de la formación inicial del docente de nivel secundaria, formación que supone la base de sus conocimientos matemáticos y didácticos. Posteriormente, se presentan los objetivos del presente estudio y las preguntas de investigación que guiaron su desarrollo.

El capítulo 2 se enfoca a analizar investigaciones relevantes sobre el número entero y su operatividad aditiva. Partiendo del desarrollo histórico del número entero, seguido de las propuestas de enseñanza que se han generado a lo largo de los años y terminando con las modificaciones realizadas a la enseñanza de este conjunto de números en el nuevo modelo educativo.

En el capítulo 3 se despliega el marco teórico que sustenta esta investigación, descrito en cuatro apartados. En el primero y segundo se aborda la parte conceptual del número entero, de la adición y de la sustracción. En el tercero se presenta lo relacionado con la mirada profesional docente y en el cuarto, los obstáculos relacionados con la enseñanza del número entero.

El capítulo 4 se centra en la descripción de la metodología que se siguió en el desarrollo de la investigación, la cual recae en un estudio de caso, además, se describen las técnicas utilizadas que son las siguientes: la primera una propuesta didáctica elaborada por el sujeto de investigación, la segunda una entrevista etnográfica y la tercera la observación no participante. Seguida de una descripción del sujeto de investigación y las razones de su elección, finalmente se detalla el escenario que se utilizó.

En el capítulo 5 se presenta el análisis de la propuesta didáctica y la entrevista realizada al sujeto de investigación considerando dos temas principales: 1) la conceptualización del número entero y 2) la operatividad aditiva del número entero.

El capítulo 6 está destinado a las conclusiones a las que se llegó en este trabajo, sintetizando lo abordado en el proceso de la investigación, así como los futuros estudios que se pueden desprender de esta indagación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presentan, primeramente, algunas dificultades relacionadas con la operatividad de los números enteros, las cuales han sido reportadas en diferentes investigaciones y también han sido identificadas en las respuestas de estudiantes a problemas de pruebas estandarizadas como el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) y la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU). Posteriormente, se ilustran características de la formación normalista de los docentes de educación secundaria con especialidad en matemáticas, que supone un ejemplo representativo en la enseñanza de los números enteros. Finalmente, se presenta el objetivo de esta investigación, que constituye un estudio de caso, en el que se analiza la mirada profesional de una profesora experimentada con formación inicial normalista, en torno a la enseñanza de la operatividad de los números enteros.

1.1. Las dificultades asociadas a la operatividad con números enteros

Alrededor de la operatividad del número entero se han realizado varias investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de este conjunto de números. En los años 80´s Küchemann (1980) propone a alumnos de 14 años un cuestionario sobre adición, sustracción y multiplicación de números enteros. Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las adiciones, seguidas por las multiplicaciones, mientras que las sustracciones resultan ser las operaciones peor resueltas. Por su parte, Borba (1995) muestra indicios de que se resuelven mejor las operaciones que afectan a números del mismo signo, que las que afectan a números de distinto signo.

La gran dificultad asociada a la manipulación de los números enteros, y más específicamente, de los números negativos y de su operatividad con la resta se reporta en diversas investigaciones (*p. ej.* Cid y Bolea, 2007; Gallardo, 1994; Küchemann, 1980; Lytle, 1994). Estos autores afirman la existencia de una confusión entre las estructuras aditivas y multiplicativas de dicho conjunto numérico. Léonard y Sackur (1990) hacen notar que el porcentaje de éxito de los alumnos en la realización de adición y sustracción de enteros disminuye al enseñar el producto de enteros, porque es entonces cuando aplican la regla multiplicativa de los signos a las operaciones aditivas de este conjunto de números, dando lugar a errores que al principio no se producían.

Gallardo (1996) enfatiza que los estudiantes presentan dificultades en el no reconocimiento de la triple naturaleza de la sustracción, que consiste en quitar, completar y diferenciar. Bell (1982) también constata errores por la utilización indebida de la regla multiplicativa de los signos: $-9-2=+11$ porque dos negativos hacen un positivo. Este fenómeno de aplicar una regla multiplicativa a una aditiva es observado por Chiu (2001). De hecho, el error más frecuente observado en las sustracciones consiste en utilizar la regla operativa de la adición de dos números positivos. Asimismo, se ha identificado que la integración de reglas sintácticas suele enfatizar el uso de los signos como medio para establecer pautas que permitan solucionar rápidamente un problema planteado.

De manera más amplia, Filloy (1999) centró su atención en los sistemas matemáticos de signos, los significados y sentidos que los estudiantes confieren al momento de abordar y operar los números enteros. Otras investigaciones, más recientes, se han enfocado en analizar los modelos concretos que pueden ser utilizados para enseñar la adición y la sustracción (Cid, 2002).

Así como los que aparecen en los libros de texto, y sus posibles efectos didácticos (*p. ej.* Bittar y Gonçalves, 2015; Rivero, 2020). Bittar y Gonçalves (2015) analizaron libros de texto de Brasil y Rivero (2020) de Uruguay, documentando, en ambos casos, el uso de contextos cotidianos para introducir la enseñanza de los números enteros: metros sobre y bajo el nivel del mar, temperaturas mayores o menores que cero, pisos de un edificio y sótanos, así como los diferentes tipos de lenguaje utilizados para referirse a la enseñanza de este conjunto numérico en contextos cotidianos y matemáticos escolares.

Las investigaciones anteriores evidencian las dificultades que aún se observan en relación con la adición y sustracción del número entero, especificando dos situaciones, la primera relacionada con el uso de reglas sintácticas sin sentido y la segunda referida al aumento de esta dificultad cuando se enseña la multiplicación de este conjunto de números. Para superar estas situaciones, se han utilizado diferentes propuestas didácticas, que, a pesar de los objetivos establecidos, pueden resultar una vía para facilitar u obstaculizar la transición entre la adicción y la multiplicación de los números enteros. Con el objetivo de reconocer las dificultades más comunes de los estudiantes, se analizan a continuación resultados de las pruebas estandarizadas PLANEA y MEJOREDU.

1.2. Las dificultades de estudiantes en las pruebas PLANEA y MEJOREDU

En años recientes, con el fin de evaluar el aprendizaje de los estudiantes en la educación básica en México, se han hecho pruebas estandarizadas a nivel nacional como son PLANEA y MEJOREDU. Así, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en torno a la operatividad de los números enteros pueden ser observadas en ellas.

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) propuso para el año 2015, la prueba PLANEA como un instrumento para valorar los aspectos relacionados con los aprendizajes clave del currículo en los campos formativos de Lenguaje y Comunicación y Matemáticas en la educación básica. La prueba fue aplicada en Junio del 2015 solo para alumnos de 6º de Primaria y 3º de Secundaria. Para el 2017 se integró a alumnos de 6º semestre de media superior. En la tabla 1.1 se muestra lo correspondiente al área de matemáticas a nivel secundaria.

Para efectos de esta investigación solo se proporcionará la estadística del Nivel I (NI) y Nivel III (NIII). El alumno que se encontraba en el NI solo podía resolver problemas que implicaban comparar o realizar cálculos con números naturales, aquel que estaba en el NIII era capaz de resolver problemas con fracciones, números enteros o potencias de números naturales.

Tabla 1.1

Ejes temáticos y unidades de análisis que evalúa PLANEA

Eje temático	Unidad de análisis	Cantidad de reactivos
Sentido numérico y pensamiento algebraico	Números y sistemas de numeración	2
	Problemas aditivos	7
	Problemas multiplicativos	7
	Patrones y ecuaciones	6
Forma, Espacio y Medida	Figuras y cuerpos	9
	Medida	4
Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	7
	Análisis y representación de datos	2
	Nociones de proporcionalidad	2

En el año 2015 el 65.4% de la población estudiantil en México estaba en el NI, mientras que el 7.5% en el NIII. Para el año 2017 (que fue el último reporte que hubo a nivel nacional)[1] el 64.5% se hallaba en el NI y solo el 8.6% de los alumnos se encontraba en el Nivel III. Como se puede observar de un año a otro hubo un incremento para el NIII y el porcentaje de alumnos correspondientes al NI fue menor.

En la unidad de análisis de problemas aditivos, uno de sus contenidos es la adición y sustracción del número entero, en la prueba en línea del 2017 para alumnos de 3º se presentó el siguiente problema:

> Un submarino se encontraba a 1 300 metros por debajo del nivel del mar. Subió 450 metros y después bajó 375 metros. ¿A cuántos metros por debajo del nivel del mar se encuentra el submarino?

[1] La última prueba que se aplicó fue en el año 2019, sin embargo, no hay una estadística a nivel nacional, únicamente por estado y por escuela.

A) 1 375 m

B) 2 125 m

C) 1 225 m

D) -1 225 m

En este reactivo se espera que los estudiantes asocien los niveles del mar con los números enteros, cuando el enunciado especifica que se encontraba a 1300 metros por debajo del nivel del mar, la representación aritmética es -1300. Posteriormente, para indicar que subió, se utiliza la expresión de $+450$, significando el signo de + como el signo de la operación, no como el signo del número, y finalmente, para indicar que bajó nuevamente, se utiliza: -375. La expresión para la resolución del problema es la siguiente: $-1300 + 450 - 375 = -1225$. Sin embargo, es muy recurrente que los alumnos apliquen una regla multiplicativa en este tipo de operaciones (Bell, 1982; Chiu, 2001; Gallardo, 1994), ya que dos negativos hacen uno positivo $-1300 - 375 = 1675$, y posterior a ello, restan el que tiene signo diferente $1675 - 450 = 1225$. Por lo tanto, la respuesta que consideran como correcta es el inciso C.

Para mayo del 2019, entra en vigor la nueva estrategia para evaluar los aprendizajes esperados de los alumnos con la aplicación del examen de Evaluación Diagnóstica para las Alumnas y los Alumnos de Educación Básica propuesta por la Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (MEJOREDU[2]), el cual se aplicó en tres momentos para el ciclo escolar 2020-2021 y 2021-2022. Para el ciclo escolar 2022-2023, solo se aplicó en una sola ocasión. Lo nuevo de esta evaluación es que el docente cuenta con tablas descriptivas por cada reactivo, donde se especifica los errores más frecuentes que presentan los estudiantes al responder incorrectamente (obsérvese Tabla 1.2). Esto permite enriquecer el diagnóstico grupal, ya que por medio de ellas puede reconocer los niveles de

[2] La Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación es un organismo público descentralizado, no sectorizado, con autonomía técnica. Su misión es la siguiente: impulsar la mejora continua de la educación básica, media superior, inclusiva y de adultos para contribuir al desarrollo integral de las niñas, niños, adolescentes, jóvenes y adultos en sus diversos contextos sociales con un enfoque de inclusión, equidad y excelencia.

aprendizaje de los estudiantes. Uno de los reactivos de la evaluación diagnóstica de 2º grado de educación secundaria del ciclo escolar 2022-2023 es el siguiente:

> 5. En un juego, Rosario acumuló 17 puntos a favor y 26 en contra. ¿Cuál es el puntaje final de Rosario?
>
> A) 9
>
> B) 43
>
> C) − 9
>
> D) − 43

El contexto del reactivo es puntos a favor y en contra, la operación binaria es la sustracción de dos números enteros donde el sustraendo es mayor que el minuendo, dando como resultado un número negativo. Este tipo de problemas suele usarse como ejemplo en la enseñanza de la adición y sustracción de números enteros. En la tabla 1.2 se puede observar la argumentación que se considera produce el alumno cuando responde correctamente. En la tercera columna se muestran los errores más frecuentes de razonamiento y de estrategia que tienen los estudiantes al elegir la respuesta incorrecta.

En la argumentación de la respuesta correcta, los estudiantes asocian un número positivo a los puntos a favor y un número negativo los puntos en contra. Sin embargo, la solución del problema se puede efectuar por medio de una sustracción. Por lo tanto, el ejercicio también inhibe esta operación.

Se enfatiza que estas pruebas no se han considerado como un elemento importante en la mejora del rendimiento académico y del desempeño docente. Si bien, en cada una de estas evaluaciones se realizan reportes estadísticos y analíticos donde se establecen los parámetros alcanzados, no han sido una herramienta para la práctica docente en el aula, pues no son objeto de análisis ni los reactivos, ni sus opciones de respuesta, perdiéndose la oportunidad de generar una mirada docente sobre las dificultades de los estudiantes.

Tabla 1.2

Tablas descriptivas correspondiente al reactivo 5 de la evaluación diagnóstica 2° de educación secundaria

Reactivo	Argumentación Respuesta correcta	Errores más frecuentes Respuestas incorrectas
5	La respuesta correcta es C, para responder acertadamente, el estudiante establece los signos correspondientes a cada valor positivo a favor y negativo en contra. Realiza la operación de acuerdo con la regla de los signos para la adición de números con signo.	Errores de razonamiento. Se asocian al mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo cual conlleva el manejo errado de los axiomas, teoremas, corolarios y definiciones. **Por ejemplo, interpreta y usa inadecuadamente la regla de los signos para la suma de dos números enteros, un positivo y un negativo.** (A) Errores de transferencia. Se deben a la falta de habilidad del estudiante para usar los conocimientos adquiridos para resolver situaciones problemáticas reales. Se presentan cuando el estudiante transforma inadecuadamente la situación dada en un problema de números con signo. **Este error se muestra cuando los estudiantes no interpretan que "a favor" se traduce como positivo y "en contra" como negativo, por lo que hacen una interpretación errónea de la situación real.** (B) Errores de transferencia y de razonamiento. Se deben a la falta de habilidad del estudiante para usar los conocimientos adquiridos para resolver situaciones problemáticas reales. Se presentan cuando el estudiante transforma inadecuadamente la situación dada en un problema de números con signo, además **se asocia con la interpretación y uso inadecuado de la regla de los signos para la suma de dos números enteros positivo da como resultado un negativo. (D)**

Las dificultades de los estudiantes identificadas en estas pruebas, pueden aludir a un problema de generación en generación, el cual se ve directamente involucrado con los actores que están a cargo de enseñar este contenido, en este caso los profesores de matemáticas. Por lo que en esta investigación se analiza la mirada profesional que tiene una docente sobre la enseñanza de la adición y sustracción de los números enteros.

1.3. La formación de los profesores de matemáticas

La formación de los docentes que imparten la asignatura de matemáticas a nivel secundaria es muy diversa. Actualmente, el currículo enfatiza de acuerdo con el catálogo de perfiles de Educación Básica emitido por el Servicio Profesional Docente para el ciclo escolar 2021-2022, que la preparación que debe tener un docente para impartir la asignatura de matemáticas a nivel secundaria es de Nivel Licenciatura, con las siguientes áreas de conocimiento: Matemáticas, Estadística, Educación media en Físico-Matemático, Ingeniería en cualquier especialidad, Enseñanza de las matemáticas, entre otras, y la Licenciatura en Educación secundaria con Especialidad en Matemáticas (Formación Normal). Sin embargo, en la convocatoria para el proceso de selección para la admisión de Educación Básica en el Estado de México, tienen prioridad los egresados de las escuelas normales en relación con el perfil ya que son las únicas en ofrecer esa área de conocimiento:

Función docente	
Nivel/servicio/materia educativa	Área del conocimiento
Educación secundaria, matemáticas	Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas.

Figura 1.1. Área pedagógica o de conocimiento relacionada con el nivel con base en la convocatoria para el proceso de selección para la admisión de Educación Básica (ciclo escolar 2021-2022)

Como se observa en la Figura 1.1, existe una discrepancia en relación con el perfil, ambas coinciden en que cumplen con el perfil profesional, los conocimientos, aptitudes y experiencia para desempeñar las funciones docentes a fin de contribuir al desarrollo integral y al máximo logro de los aprendizajes de los educandos.

1.3.1 Plan de estudios 1999

La formación profesional en la licenciatura de educación secundaria, con base en el Plan 1999, atiende tres campos distintos:

a) Formación general, que corresponde a todo profesional de la enseñanza que realiza su labor en la educación básica, independientemente del nivel escolar en el cual la desempeñe.
b) Formación común a todos los licenciados en educación secundaria, incluidas sus distintas especialidades.
c) Formación específica, referida a los contenidos científicos y a las competencias didácticas requeridas por cada especialidad (SEP, 1999, p. 34).

La licenciatura está conformada por 8 semestres, en el tercero se desarrollan los conocimientos en torno a los Números y sus relaciones, la organización de los contenidos se centra en dos aspectos fundamentales: 1) en el significado de los números, diferentes formas de representarlos, relaciones entre ellos y sistemas numéricos. 2) Se refiere al significado de las operaciones y sus relaciones, resaltando que la comprensión del significado de las operaciones en los sistemas numéricos es el fundamento para estudiar otras áreas de las matemáticas.

Para trabajar lo anterior se proponen tres bloques temáticos. En el Bloque II es donde se trabaja lo relacionado al número entero. A su vez, este bloque se subdivide en 6 temas, de los cuales tres hacen referencia a los números enteros. El primero está enfocado en los números enteros y las propiedades de las operaciones de adición y de producto, el segundo en los enteros ubicados en la recta numérica, y el tercero en el orden de los números enteros. Sin embargo, en el programa solo se enfatiza una bibliografía básica que corresponde al Libro para el maestro de Matemáticas de Educación Secundaria elaborado por Alarcón y colaboradores. Además, el Fichero de actividades didácticas de Matemáticas hecho por la SEP, lo demás será propuesto por el docente formador.

En relación con el plan y programa de 1999, las competencias que definen el perfil de egreso se agrupan en cinco grandes campos:

1. Habilidades intelectuales específicas.
2. Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria.
3. Competencias didácticas.

4. Identidad profesional y ética.
5. Capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela.

La tercera competencia especifica que el docente en formación al culminar la licenciatura:

> Sabe diseñar, organizar y poner en práctica estrategias y actividades didácticas, adecuadas a las necesidades, intereses y formas de desarrollo de los adolescentes, así como a las características sociales y culturales de éstos y de su entorno familiar, con el fin de que los educandos alcancen los propósitos de conocimiento, de desarrollo de habilidades y de formación valoral establecidos en el plan y programas de estudio de la educación secundaria (SEP, 1999, p. 11).

Por lo tanto, el docente es el encargado de buscar aquellas actividades que impacten de manera directa en el estudiante, considerando lo establecido en el plan y programa de estudio vigente. Sin embargo, esto puede estar dotado de ciertos aspectos que influyen dentro de su práctica docente, como son la historia académica, la formación continua y el uso del libro de texto.

> No se puede pensar en una nueva imagen del país si no se trabaja en educación, y no se puede pensar en educación sin considerar de manera preponderante a los educadores. Es con ellos con quienes están las mejores alternativas para el futuro (INEE, 2015, p. 4).

La formación de profesores ha sido uno de los factores vinculados con la calidad de la educación, aunque esta última puede ser multifactorial. En el 2018 el INEE definió que recibir una educación así se basa en adquirir las competencias y los conocimientos necesarios para asegurar el reconocimiento y el respeto permanente a todos los derechos humanos. Los resultados de las evaluaciones nacionales como PLANEA y MEJOREDU indican la existencia de deficiencias alarmantes en el rendimiento escolar de los estudiantes en matemáticas, como se pudo analizar en el apartado anterior, donde la población estudiantil a nivel secundaria se encuentra en el Nivel I.

A nivel nacional hay un número importante de profesores de matemáticas egresados de la Escuela Normal. A finales del ciclo escolar 2020 – 2021 e inicios del ciclo escolar 2021-2022, el Departamento de Estadística perteneciente a los Servicios Educativos Integrados al Estado de México (SEIEM), realiza un compendio estadístico de los centros educativos que lo conforman (obsérvese Tabla 1.3), donde muestra datos cuantitativos referentes a la educación básica, media superior y superior.

Tabla 1.3

Carreras y programas de las escuelas Normales federalizadas en el Estado de México

Escuela / Sede	Licenciatura
CAMEM Tlalnepantla 15DLT0001Q	Licenciatura en educación preescolar 2018 Licenciatura en educación primaria 2018 Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de la formación ética y ciudadana en educación secundaria 2018
Normal Rural Lázaro Cárdenas 15DNL0001F	Licenciatura en educación primaria 2018
Normal Superior Valle de México 15DNL0002E	Licenciatura en educación preescolar 2018 Licenciatura en educación primaria 2018
Normal Superior Valle de Toluca 15DNL0003D	Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de la biología en educación secundaria 2018 Licenciatura en educación preescolar 2018 Licenciatura en educación primaria 2018 Licenciatura en enseñanza y aprendizaje del español en educación secundaria 2018 Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria 2018 Licenciatura en enseñanza y aprendizaje del inglés en educación secundaria 1999

Como muestra la tabla anterior hay cuatro escuelas Normales federalizadas, de las cuales solo la Normal Superior del Valle de Toluca cuenta con la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria y el programa vigente es el del 2018. Por lo tanto, hubo un cambio en el nombre de la licenciatura, ya que en el Plan 1999 era Licenciatura en Educación Secundaria con la Especialidad en Matemáticas (que fue con el que la profesora participante en esta investigación se formó). Para finales del ciclo escolar 2020-2021, el total de alumnos egresados era 248, de los cuales solo 233 se titularon. En el informe no se reporta cuántos alumnos iniciaron la licenciatura en esa generación, pero se describe que para el siguiente ciclo escolar tuvo un total de 1647 estudiantes inscritos, considerando solo los cuatro primeros semestres de la carrera. De la cantidad total, 105 corresponde a la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria.

Por lo anterior, se genera un interés en analizar el tipo de propuestas didácticas enfocadas en la enseñanza de los números enteros, que realiza un profesor con este perfil. Por ello, el propósito de esta investigación es analizar las estrategias que elabora una docente con formación normalista, referente al tema de adición y sustracción del número entero, y analizar, en la medida de lo posible, los recursos que esta formación puso a su disposición para ejercer su práctica docente.

1.4. Objetivos del estudio

Con base en los antecedentes y en el planteamiento del problema, los objetivos de esta investigación son los siguientes:

- Identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego la profesora al realizar las actividades de la propuesta didáctica.
- Analizar la mirada profesional de la profesora con relación a la enseñanza de la adición y sustracción del número entero.

1.5. Preguntas de investigación

Las preguntas junto con los objetivos constituyen el eje rector de esta investigación, ya que determinan lo que se desea indagar de manera más profunda, por ello, se plantean los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego la profesora al realizar las actividades de la propuesta didáctica?

- ¿Cuál es la mirada profesional de la docente con relación a la enseñanza de la adición y sustracción del número entero?

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

En este capítulo se analizan algunas investigaciones significativas y relevantes que existen sobre el número entero y su operatividad aditiva. Este apartado es particularmente importante, porque brinda una idea de lo que se ha investigado a lo largo de los años en relación con este conjunto de números, sobre todo, se puede constatar que durante la historia el uso de soluciones negativas ha representado una gran dificultad para los matemáticos. Posteriormente, se presenta la visión actual de la enseñanza de los números enteros en la educación básica, considerando para ello el plan y programa de estudios vigente. Finalmente, dado el rol fundamental que juega el docente en su enseñanza, se incluyen elementos sobre la formación inicial y continua, enfatizando la relación entre los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores, los cuales constituyen un referente esencial para la enseñanza de este conjunto numérico.

2.1. Del desarrollo histórico del número entero a los obstáculos en su construcción

Históricamente el desarrollo de los números enteros conllevó un gran esfuerzo. Sesiano (1985) señala que en el siglo III Diofanto no aceptaba soluciones negativas e incluso llegó a mencionar que eso era algo absurdo. De hecho, como lo ilustra Glaeser (1981) desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas como el álgebra, la geometría analítica, la trigonometría, entre otras. Por ejemplo, en el siglo XII Bhaskara desarrolló la más famosa de sus fórmulas para la solución de una ecuación de segundo grado, de la que obtiene siempre dos soluciones: enteras positivas y enteras negativas, aunque sólo sean de interés las enteras positivas, ya que él especificaba que las soluciones negativas eran incongruentes.

En los tiempos medievales los números negativos se consideraban como entidades propias y no como cantidades restadas, como números inexistentes. Al paso de los años, diversas investigaciones como Hefendehl-Hebeker (1991) y Gallardo (2002) detallan la lucha que los matemáticos tuvieron con los números enteros, particularmente con lo que significa tener números menores que cero. Así, por ejemplo, en los preliminares de la célebre obra de *Géométrie de position* de Carnot (1803), aparecen veinticuatro páginas dedicadas a las cantidades negativas y se afirma lo siguiente:

> Nada es más simple que la noción de cantidades negativas precedidas por cantidades positivas más grandes que ellas; pero en álgebra nos encontramos a cada paso con expresiones de formas negativas aisladas y cuando se quiere conocer con precisión el sentido de estas expresiones faltan principios claros, porque éstas son el resultado de operaciones que no son, en sí mismas, claras ni ejecutables más que para las cantidades positivas o, más bien, absolutas (Carnot, 1803, pp. 2-3).

Lo anterior se puede definir como un obstáculo epistemológico (Bachelard, 1938) del número entero, específicamente del conjunto de los números negativos (esto se retomará en el capítulo 3), que tiene que ver con su naturaleza misma, con su matematización.

Cid (2003) categoriza un conjunto de investigaciones didácticas en torno al número entero en tres áreas: Propuestas de enseñanza, dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos, e implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo, y afirma que estas áreas no son independientes entre sí, pero que existen investigaciones que relacionan las dificultades de aprendizaje con las propuestas de enseñanza. Con base en esta investigación las dificultades de aprendizaje no solo se reflejan en los alumnos, sino que, debido a la epistemología del número entero, también se evidencian en el docente, por lo que los obstáculos didácticos pueden seguir prevaleciendo.

El desarrollo histórico evidencia la complejidad de la epistemología del número entero y esto puede relacionarse con la existencia de obstáculos didácticos que tienen que ver directamente con la enseñanza a cargo del profesor.

2.2. Propuestas de enseñanza de los números enteros

Ernest (1985) muestra que un gran número de textos matemáticos recomiendan el uso de la recta numérica como medio para la enseñanza de la adición y la sustracción de números naturales de un dígito, ya que es una vía para la comprensión de las operaciones elementales. En esta misma dirección, Janvier (1983) y Liebeck (1990) se han enfocado en el uso de este modelo para la enseñanza de los números negativos y han discutido su efectividad para comprender dichas operaciones, en especial la sustracción. Sin embargo, Bruno y Cabrera (2006) enfatizan el uso de la recta numérica como modelo para ambas operaciones, pero con números enteros no resulta fácil para muchos estudiantes de secundaria. Gallardo y Romero (1999) analizan las dificultades a las que se enfrenta el profesor en la enseñanza de los números enteros al operar con este modelo, más específicamente en la adición y sustracción con números enteros, señalando ventajas y dificultades.

Cid (2002) señala que las propuestas didácticas comúnmente utilizadas para la enseñanza del número entero y su operatividad aditiva, suelen incluir modelos de neutralización basados en contextos de deudas y haberes, temperaturas y movimientos en sentidos opuestos. Al tratarse de contextos familiares para el alumno, puede que tengan un mayor grado de atención por parte de ellos, lo que ayudará a dar sentido a los números enteros positivos y principalmente a los números enteros negativos. Sin embargo, la autora también enfatiza que no hay una pertinencia de dichos modelos, porque los alumnos pueden generar conclusiones erróneas o pueden no desprenderse de los modelos: si sube es positivo, si baja es negativo. Sin embargo, esto no siempre es correcto.

2.3. El profesor, actor clave en la enseñanza de los números enteros

Dolores (2014) enfatiza que en la década de los 70´s y los 80´s existía en México una polémica entre los que ejercían la enseñanza de la matemática, la fuente radicaba en el reconocimiento del objeto de la profesión.

> Los matemáticos tienen como objeto de estudio a la matemática misma y su desarrollo, los ingenieros utilizan a la matemática como herramienta para el diseño de la obra civil, como puentes, edificios, casas habitación, etc. En cambio, los profesores de matemáticas tienen como objeto de estudio a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Dolores, 2014, p. 15).

Los tres perfiles aceptados por el Servicio Profesional Docente, matemáticos, ingenieros y profesores (presentados en el apartado 1.3.), tienen un aspecto en común: la enseñanza de la matemática. Sin embargo, cada uno basará su enseñanza en su formación matemática: universitaria o normalista. El primer profesional ve a esta asignatura como una disciplina, el segundo como una herramienta para el diseño y el tercero, como objeto de enseñanza. A lo largo de los años, ha existido la discusión de que uno tiene algo que el otro no, pero lo que sí es un hecho, es que su formación inicial impacta de manera directa en los estudiantes.

Mendoza (2018) reporta que el docente de secundaria debe conocer aspectos fundamentales de los números enteros: su desarrollo histórico, su epistemología y su didáctica para no obstaculizar la emergencia de los números negativos, específicamente en la operación de la sustracción. En relación con estos conocimientos, dos referentes resultan fundamentales para el profesor: su formación inicial y su práctica docente. La primera está conformada por un largo bagaje, ya que antes de ingresar a la licenciatura ha trabajado varios años con este conjunto de números (desde la secundaria hasta el nivel licenciatura), mientras que, en la segunda, el recurso a los libros de texto, al plan y programa de estudio, así como su experiencia con los estudiantes, contribuyen a ampliar sus conocimientos sobre este conjunto numérico.

2.4. Las Escuelas Normales y su incidencia en la formación inicial

La formación inicial y continua, como se señaló anteriormente, constituyen un referente fundamental para la generación de propuestas y planificaciones didácticas de los docentes. A lo largo de la historia de México, la formación inicial de los profesores de matemáticas de educación básica ha estado principalmente a cargo de las Escuelas Normales, que en 1982 adquirieron el nombramiento de instituciones de educación superior y sus egresados suelen tener una prioridad sobre los egresados de otras escuelas para la asignación de plazas docentes.

Navarrete (2015) enfatiza que "los enfoques de formación que circulan en estas instituciones han ido en paralelo con las políticas educativas nacionales" (p. 17), porque a partir de las reformas a la educación básica, se generan los rasgos del perfil para los estudiantes de nivel básico, lo que impacta de manera directa en la formación de los nuevos docentes. En esta dirección, Camarena (2015) afirma que la formación docente depende de lo curricular, cuya conformación responde a determinadas visiones y misiones a nivel político.

Asimismo, los docentes con la Licenciatura en Educación Secundaria con la Especialidad en Matemáticas son formados en las Escuelas Normales, que ofrecen programas de licenciatura con perspectivas teóricas-metodológicas específicas para la formación docente en educación básica en nuestro país. Su formación en esta institución tiene como objetivo que construyan conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

En el año 2015, el INEE en un apartado en la Revista de Evaluación para Docentes y Directivos (Red) realizó un reporte sobre las escuelas formadoras de docentes. De las cuales 484 eran Escuelas Normales, 76 Unidades y 208 Subsedes Académicas en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), 695 Instituciones de Educación Superior que forman en docencia. Con relación a las escuelas Normales, 274 eran públicas y 210 particulares. La entidad federativa con más escuelas Normales públicas era el Estado de México con un total de 39. Mientras el estado que tenía más escuelas Normales Particulares era Guanajuato con 32.

2.5. La formación continua y su incidencia en la práctica docente

El objeto de la práctica docente es la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y su prioridad es propiciar en el estudiante el aprendizaje. Para dar alcance a esto, es necesario que el profesor domine el conocimiento matemático, epistemológico y pedagógico, así le dará pauta para que conozca cómo aprenden los estudiantes y con base en ello, pueda diseñar las estrategias, procedimientos y medios didácticos que posibiliten el aprendizaje. Ante esto, Dolores (2014) afirma que la formación docente se articula sobre la base de tres áreas fundamentales: matemática, pedagógica y docente.

Zapatera (2019) enfatiza que uno de los objetivos de la investigación en didáctica de las matemáticas es la formación y desarrollo del profesor de matemáticas, en particular, el estudio del conocimiento y de las destrezas que necesita para desarrollar su profesión.

Llinares (2013) hace una reflexión sobre la educación matemática centrada en la formación de los profesores y especialmente en desarrollar la competencia docente *mirar profesionalmente*. Esta competencia está centrada en comprender la manera en el que el profesor usa el conocimiento de matemáticas para la enseñanza, cuando realiza diferentes tareas matemáticas profesionales. El autor identifica que hay tres aspectos para el análisis de la enseñanza: *"*las tareas matemáticas, el aprendizaje del estudiante producto de la resolución de las tareas matemáticas, la interacción y el discurso matemático en el aula*"* (p. 119). Desde esta perspectiva se puede tener una idea de cómo los profesores interpretan las situaciones de las matemáticas.

Así, una característica de esta competencia docente es que el profesor esté consciente de cómo analiza las situaciones de enseñanza relacionándolo con el conocimiento matemático, ya que esto determina la oportunidad para que los alumnos puedan visualizar un contenido matemático de manera relevante.

Otras investigaciones, como la de Aké (2021), se han enfocado en caracterizar la competencia de la mirada profesional de los docentes, a partir del análisis de tareas de planificación didáctica y se ha encontrado que no hay una caracterización profesional específica para el profesor de matemáticas. En estas investigaciones se han considerado escenarios no solo a nivel diagnóstico, sino también a nivel de desarrollo, proponiendo los posibles escenarios formativos y los contextos de estudio específicos que se centran en los conocimientos matemáticos y didácticos con los que debe de contar el docente para la enseñanza de la matemática. También hay otros estudios como el de Rico (2013) enfocado en el análisis didáctico, donde enfatiza el uso de categorías para analizar el contenido matemático en un documento escolar. Lo anterior se examina con la finalidad de potencializar la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje.

Además, la autora parte de la noción del modelo de conocimiento del profesor (MTSK, por sus siglas en inglés *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge*). Modelo de conocimiento que además de saber matemáticas como tal, el docente tiene que desarrollar un conocimiento especializado que incluye dos dimensiones: el conocimiento matemático escolar y el conocimiento didáctico del contenido.

2.6. La enseñanza de los números enteros en el nuevo modelo educativo

La enseñanza de los números enteros ha tenido una modificación importante ya que en el Plan y programas de estudio para la educación básica 2017 que rige la Educación Básica en México, ha incluido el tema de los números enteros desde 5o de primaria con el Aprendizaje Esperado: "Resuelve problemas que impliquen el uso de números enteros al situarlos en la recta numérica, y al compararlos y ordenarlos" (p. 173). Esto representa una oportunidad para que los estudiantes tengan un primer acercamiento a este conjunto de números y empiecen a operar desde ese nivel educativo, ya que anteriormente sólo se enseñaba a nivel secundaria.

De la misma manera, uno de los propósitos de este plan de estudios a nivel secundaria es que los alumnos "Utilicen de manera flexible la estimación, el cálculo mental y el cálculo escrito en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos" (p. 162). Se une con el Aprendizaje Esperado

“Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos” (p. 178). Es en este nivel educativo que existe una formalidad para poder operar con este conjunto de números. Para ello, el docente buscará las estrategias apropiadas para que suceda eso.

A partir de lo anterior, la presente investigación se centra en analizar una propuesta de enseñanza en relación con este conjunto de números, lo cual permitirá indagar sobre los elementos que utiliza una docente para la enseñanza de la adición y sustracción, y con base en ello, identificar los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego.

CAPÍTULO 3
MARCO TEÓRICO

El marco teórico que sustenta esta investigación presenta particularmente los constructos y nociones en los que se basa el análisis de los datos. Primeramente, se muestran los conceptos matemáticos de número entero, entendido desde la equivalencia de pares ordenados de dos números naturales. Posteriormente, se definen las dos operaciones aditivas, adición y sustracción. Por otro lado, en el contexto de la enseñanza se dirige la atención a la competencia mirada profesional, abordando un elemento primordial de la práctica docente, la planificación didáctica. Finalmente, se considera el concepto de obstáculo, que permite analizar dificultades específicas que surgen en el proceso de la enseñanza.

3.1. Número entero

Como se ha analizado en los apartados anteriores la aceptación del número negativo a través de la historia no ha sido fácil, incluso matemáticos como Descartes no aceptaba soluciones menores que la nada, es decir, menores que el cero. Esta dificultad no ha desaparecido con el tiempo y reaparece a nivel escolar, surgiendo la siguiente cuestión: ¿cómo se le hace saber a un estudiante que sí existen números menores que cero? Particularmente, debido a que cuando resolvían en primaria la siguiente sustracción $6 - 7 = \_\_$, se les afirmaba que eso no se podía realizar, porque a algo menor no le puede quitar algo mayor. Sin embrago, cuando el estudiante incursiona en la educación secundaria, descubre que esa afirmación no es cierta, porque el resultado hace la extensión al número negativo.

Desde esta situación surgen propuestas para definir el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), considerando aspectos que están relacionados con la fundamentación del concepto matemático.

Uno de ellos, consiste en calcular diferencias entre pares de números naturales $m - n < 0$ tal que $n > m$, Sea $n, m \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, $6 - 8$. Esta operación no tiene sentido en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$); pero es posible ampliar ese conjunto para darle sentido al resultado de la sustracción, el -2.

$\mathbb{Z}$ surge como una extensión de $\mathbb{N}$

Se define una relación de equivalencia entre pares ordenados de números naturales:

$$(a,b)\sim(c,d) \leftrightarrow a+d=b+c$$

La relación $\sim$ en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es una relación de equivalencia donde se puede verificar que:

I. Es reflexiva ya que $(a,b)\sim(a,b)\ ya\ que\ a+b=b+a$
II. Es simétrica ya que $(a,b)\sim(c,d)\ \rightarrow(c,d)\sim(a,b)$
III. Es transitiva ya que si $(a,b)\sim(a_1,b_1)\ y\ (a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\rightarrow(a,b)\sim(a_2,b_2)$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ /\sim$ Conjunto de las clases de equivalencia, se llama conjunto de los números enteros y cada clase de equivalencia se llama número entero. De esta manera, por notación se tiene que:

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim y\ [a,b]\ para\ las\ clases\ de\ equivalencia.$$

$$C_{(a,b)}=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(x,y)\sim(a,b)\}$$

Así el número -2 puede definirse a través de clases de equivalencia, como se presenta a continuación:

$-2=C_{(6,8)}\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:(x,y)\sim(6,8)\}$ ya que $6-8=-2$, y así se tienen otros pares ordenados que pertenecen a esta clase de equivalencia, por ejemplo: $(2,4),(5,7),(10,12)$.

El orden total $\leq$ en $\mathbb{Z}$ coincide con $\mathbb{N}$ con el orden $\leq$, ($\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos). Para lo anterior se puede establecer que:

Sean $m=n$, números naturales, entonces se tiene que:

$$m=n\ en\ \mathbb{N}\ \rightarrow m=n\ en\ Z$$

$$m<n\ en\ \mathbb{N}\rightarrow n=m+p, \text{algún } p \text{ natural } \rightarrow n-m=p\in\mathbb{N}\rightarrow m<n\ en\ \mathbb{Z}$$

Además, $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n - 0 = n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n > 0$

Se concluye que $\mathbb{N}$ es el conjunto de los positivos o $\mathbb{Z}^+$, es decir, los enteros mayores que cero y negativos o $\mathbb{Z}^-$corresponden a los enteros menores que cero. De esta manera $\mathbb{Z}$ es la extensión de $\mathbb{N}$. A partir de lo anterior se puede establecer la numerabilidad del conjunto de los números enteros, es decir, que $\mathbb{Z}$ tiene el mismo número de elementos que $\mathbb{N}$. Se concluye entonces que $\mathbb{Z}$ es la unión de $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros negativos y el cero.

Otra representación del conjunto de los números enteros, que no es precisamente como par ordenado, es mediante la representación directa en un eje o recta numérica, como se ilustra en la figura 3.1.

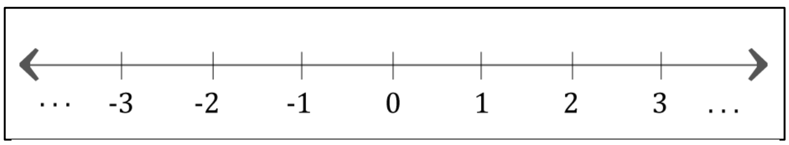


Figura 3.1. Representación en la recta numérica de los números enteros.

La recta numérica es una representación gráfica y visual de los números enteros, donde se asocia el concepto de número simétrico, los números enteros positivos a la derecha del cero y los números enteros negativos a la izquierda del cero, donde ambos números se encuentran a la misma distancia del cero.

Ambas definiciones presentadas corresponden al conjunto de los números enteros, donde $\mathbb{Z}$ es el símbolo para representarlo matemáticamente, $\mathbb{Z}^+$ corresponde a los números mayores a cero (que también serían los números naturales $\mathbb{N}$) y $\mathbb{Z}^-$ corresponde a los números menores a cero, situación que puede observarse en la representación de la recta numérica.

3.2. Operatividad aditiva

Las operaciones aritméticas de adición y sustracción construyen inicialmente un medio para conceptualizar los recuentos o procesos para poder cuantificar, estos son los términos adecuados para un conocimiento matemático:

> Hemos contado 20 objetos por un lado y 35 por otro y nos preguntan que cuántos hay en total, podemos decir que hay 55 objetos en total, sin necesidad de efectuar ningún nuevo recuento, gracias a que *sabemos sumar* y si nos preguntan qué diferencia hay entre las dos primeras colecciones de objetos, podemos decir que se diferencian en 15 objetos, sin necesidad de nuevos recuentos, gracias a que *sabemos restar* (Cid et. al, 2002, p. 231).

Algunos de los conceptos más utilizados en la enseñanza para referirse a la suma y a la resta van en sentido de lo anterior, reunir para la suma y quitar para la diferencia. Sin embargo, estos conocimientos tan comunes para los números naturales se modifican al considerar la operatividad con los números enteros, ya que no se puede establecer una sola regla para la suma o resta, por lo tanto, se tienen que analizar estos dos conceptos.

3.2.1. Adición

Desde el proceso de enseñanza y aprendizaje, sumar se entiende como la acción por la cual ambas cantidades simultáneamente se *reúnen* formando una cantidad mayor que las dos originales. Otra interpretación que se presenta en la escuela se expresa bajo la forma del verbo *añadir*. Lo que sugiere este verbo es que a partir de una cantidad inicial se le añade algo, transformándola en una cantidad final.

Al respecto, Maza (1988) especifica que la suma puede entenderse desde el punto de vista formal, como una operación binaria o una operación unitaria:

> La suma como operación binaria es la definición matemática más usual. Así, la suma entre números naturales sería una aplicación que se simboliza con "+". A todo par de números naturales le correspondería otro número natural.
>
> $$+: N \times N \rightarrow N$$
>
> La suma, considerada como operación unitaria sería una aplicación que se puede simbolizar por "$+\ k$" entre los siguientes conjuntos:
>
> $$+k: N \rightarrow N$$

En el ámbito de la educación matemática ha resultado difícil que los estudiantes tengan habilidad para operar con números enteros, ya que confunden la estructura aditiva con la multiplicativa. Es posible que esta dificultad surja porque los conocimientos adquiridos en matemática en los primeros años escolares son referidos a los números naturales y en este conjunto, las palabras *agregar y aumentar* están relacionadas con la adición, mientras que *quitar y disminuir* se relacionan con la sustracción.

En las situaciones anteriores se ha introducido la adición en el conjunto de los números naturales, porque en la suma de dos números naturales se obtiene otro natural, ya que cumplen con la propiedad de cerradura del número natural. En el caso de la sustracción no siempre se cumple con esta propiedad, porque si el sustraendo tiene un mayor valor absoluto que el minuendo, la propiedad no se aplica, aunque ambos valores sean número naturales. En ocasiones, el cálculo de una adición con números de distinto signo puede dar como resultado un número negativo, del mismo modo ocurre en la sustracción, en donde al restar dos números positivos el resultado puede ser un número negativo.

3.2.2. Sustracción

Sustraer sería lo contrario de agregar, pero esto no siempre es así. La acción de restar es quitar, por la ausencia de conmutatividad. Por ello, “el profesor suele ajustarse a la acción propia del verbo quitar” (Maza, 1989, p. 12). Por su naturaleza la resta es una operación que parte de una cantidad inicial de a elementos, posteriormente otra cantidad de b elementos es retirada o quitada de la cantidad inicial que pasa a transformarse en otra de $a - b$ elementos.

Para comprender la naturaleza de esta operación sobre los números enteros se consideran los estudios de Gallardo (1994, 2002), en los que se han encontrado tres aspectos que conceptualizan al número negativo:

a) La triple naturaleza del signo menos.

b) Los niveles de conceptualización del número negativo.

c) La triple naturaleza de la sustracción.

En relación con la triple naturaleza del signo menos, Gallardo (2002) encuentra tres formas distintas de carácter conceptual de este signo.

- Signo unario. Es el signo correspondiente al número, se utiliza para representar al número negativo. -5, $-a$ con $a \epsilon N$.
- Signo binario. Es el signo correspondiente a la operación de sustracción.

  $(-5) - (-3) =$; $a - b$ con $a < 0$, $b < 0$, con $a, b \epsilon Z$.
- Signo menos en la definición de simétrico. Es el signo correspondiente a la operación de negación o simetrización de un número o de una variable. Se utiliza para representar simétricos. – $(-4) = 4$; $-(a) = -a \; \forall \; a \epsilon Z$.

Los niveles de conceptualización son explicados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1

Niveles de aceptación del número negativo

Niveles de aceptación	Descripción
Nivel del número sustractivo	El signo menos tiene un carácter sólo binario, es decir, pertenecientes a la operación de sustracción: $a - b = c$ con $a > b$ $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Número signado	Se asocia al natural un signo de más o menos apareciendo la dualidad del signo como unario para el número y binario para la operación. Signo unario: $-a$. Signo binario: $+a - (b), a, b \in \mathbb{N}$.
Número relativo	Se concibe desde la idea de los opuestos en situaciones discretas y simétricas en situaciones continuas: $-(a), a \in \mathbb{Z}$.
Número aislado	El aislado se acepta como la solución de una operación, una ecuación o un problema.
Número negativo formal	Se ha llegado a la formalización, alcanzando la extensión del número natural al entero, con sus propiedades.

En la tabla se observan los niveles de aceptación del número negativo propuestos por Gallardo (1994).

La conceptualización de la triple naturaleza de la sustracción se define de la siguiente manera:

- Quitar: Si se pretende quitar una cantidad de otra para disminuirla.
- Completar: Si se pretende calcular la cantidad que falta para completar otra cantidad.
- Diferencia: Si se pretende comparar dos cantidades, calculando la diferencia entre ellas.

3.3. Mirada Profesional

Un elemento para comprender y analizar la práctica profesional docente es a partir de una competencia que Llinares (2013) ha denominado como Mirada Profesional. Esta admite examinar diferentes aspectos de la enseñanza de la matemática, considerando los momentos didácticos, las tareas matemáticas, el aprendizaje de los estudiantes, la interacción en el aula y el discurso matemático.

La mirada profesional es una componente de la práctica profesional del profesor de matemáticas que le permite "interpretar las situaciones de enseñanza en las matemáticas" (Llinares, 2013, p. 119), algo que lo diferencia de alguien que no es profesor de matemáticas. Al respecto, Mason (2002) refiere que la competencia mirar profesionalmente es la capacidad que tiene un profesor para interpretar situaciones de enseñanza-aprendizaje considerando dos aspectos: *darse cuenta de (account of)*, que se centra en observar las situaciones, evitando interpretaciones, juicios o evaluaciones y *darse cuenta para (account for),* que se centra en interpretar y explicar lo que se observa para adoptar decisiones adecuadas.

Según Llinares (2013) la práctica profesional del docente de matemáticas está enfocada hacia las tareas que organiza. Es decir, la relación que existe entre el conocimiento del profesor y la práctica profesional genera la idea del uso del conocimiento en contexto, que deriva en la noción de competencia docente del profesor de matemáticas. Así, el uso del conocimiento en la práctica (el uso de la mirada profesional) brinda un foco para comprender la práctica profesional del profesor y su conocimiento profesional.

El sistema de la actividad que propone el Autor pone de relieve la relación dialéctica entre el conocimiento teórico y la práctica y el desarrollo de esta competencia docente (obsérvese figura 2.1). El significado que tiene la mirada profesional está vinculado a la forma en que el profesor usa el conocimiento de matemáticas para la enseñanza cuando realiza diferentes tareas.

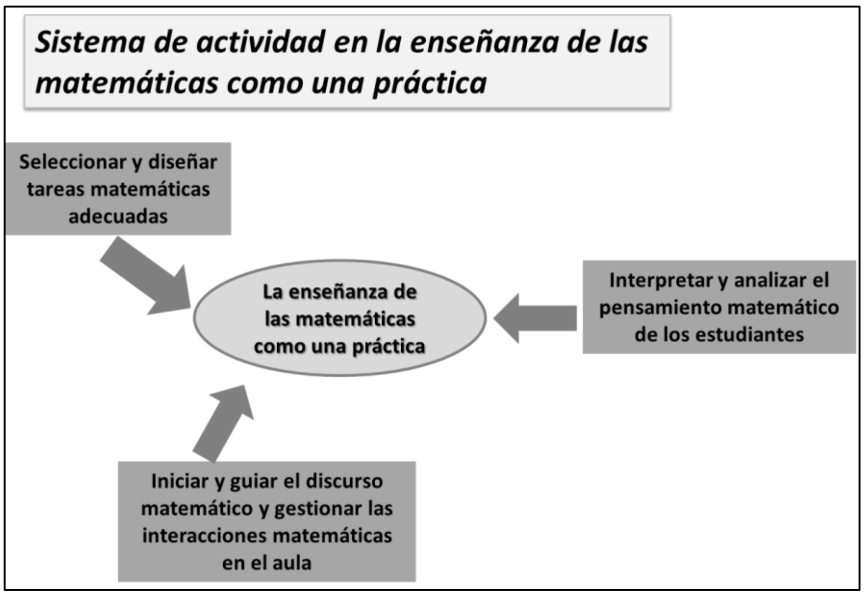


Figura 2.1. Sistema de actividad en la práctica profesional del profesor de matemáticas, propuesto por Llinares (2013).

La tipificación de las tareas pone de relieve la identificación y el reconocimiento de los contextos en los que el profesor usa el conocimiento de manera competente. Además, Llinares (2013) argumenta lo siguiente:

> Es, en este sentido, en el que la relación entre el conocimiento del profesor y la práctica profesional genera la idea del “uso del conocimiento en contexto” que deriva en la noción de competencia docente (ésta no es innata y debe empezar a desarrollarse en los programas de formación de profesores) del profesor de matemáticas. De esta manera el “uso del conocimiento en la práctica” (la competencia docente) se convierte en un foco relevante para comprender mejor la práctica profesional del profesor y su conocimiento

> profesional (conocimiento de matemáticas para enseñar) (Llinares, 2013, p. 120).

Así, la concepción que tenga el profesor dependerá del saber y esto impactará de manera directa en su mirada profesional. Por ello, es importante que los programas, como afirma el autor, puedan trabajar desde la formación dicha competencia, para que los docentes puedan tener más herramientas que coadyuven a su práctica docente.

Autores como Dolores (2014) y Llinares (2013) asumen que las competencias profesionales le permiten al docente usar sus conocimientos y destrezas para gestionar la enseñanza y así determinar tareas profesionales que estén dirigidos al aprendizaje de sus alumnos. Esta competencia posibilita al docente focalizar su atención en aquellos aspectos que puedan potencializar su práctica profesional, así como en aquellos que le presentan cierta dificultad.

Para Parodi (2021) mirar profesionalmente requiere que el profesor ponga en uso todo su conocimiento acerca de la enseñanza de la matemática considerando tres componentes: percibir, interpretar y decidir. Esto le permitirá al docente tomar decisiones oportunas para la enseñanza. El autor afirma que el conocimiento matemático es necesario, pero no suficiente para mirar profesionalmente su práctica. En esta dirección, Zapatera (2019) afirma que la perspectiva de la competencia mirar profesionalmente ofrece algo que la didáctica no puede, que son las formas en que se producen y reproducen los conocimientos en situaciones extraescolares, porque algunos conocimientos matemáticos que se ponen en juego en situaciones extraescolares, difícilmente pueden ponerse en relación con los de la escuela.

Centrar la atención en el desarrollo de la mirada profesional sobre la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, requiere que el docente valore su práctica profesional desde su experiencia considerando tres elementos fundamentales: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico y el conocimiento profesional. El primero referido a los contenidos matemáticos en cuestión, el segundo referido a la manera en cómo el docente presenta dichos contenidos para ser enseñados y aprendidos por sus alumnos, y el tercero referido a los conocimientos surgidos en la enseñanza de las matemáticas, vista como una práctica, que le permiten planificar la clase, analizar el pensamiento matemático de los estudiantes y gestionar las interacciones en el aula. Estos tres tipos de conocimientos se compaginan en un componente que el docente utiliza para su práctica docente, la planificación didáctica.

3.3.1. La planificación didáctica

La planificación didáctica es un instrumento que los docentes suelen utilizar para tener una secuencia de las actividades que proponen en el aula para enseñar determinado contenido matemático. Llinares (2013) enfatiza que el profesor al realizar dicha herramienta moviliza su conocimiento matemático en relación con lo que quiere que sus estudiantes aprendan. El mismo autor sugiere la idea de demanda cognitiva que se refiere a la competencia docente para analizar tareas matemáticas (actividades que se resuelven de cierta manera), la cual está determinada por la forma en la que el profesor identifica la actividad matemática que la tarea puede potenciar en sus alumnos. La mayoría de las veces está centrada con base en lo establecido en el plan y programa vigente, donde se especifica el aprendizaje a lograr.

La estructura de una clase es un elemento importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que por medio de ella se construye o se logra el conocimiento, en la cual el docente debe tomar en cuenta los conceptos, materiales, recursos, procedimientos y ejercicios.

Los momentos didácticos más utilizados en la planificación didáctica son inicio, desarrollo y cierre. La Secretaría de Educación Pública (SEP) define que el inicio es la parte introductoria al tema y la recuperación de saberes previos. El desarrollo pertenece a las actividades de aprendizaje elaboradas por los estudiantes para la comprensión del tema. El cierre está dirigido a las conclusiones y la confirmación de conocimientos.

En esta dirección, Suárez (2002) puntualiza tres momentos: comienzo, cuerpo y cierre. Según el autor, el inicio de una clase se compone de dos elementos:

motivación y enfoque. El primero recae en el acto docente y este es el encargo de despertar el interés en sus estudiantes mediante la experiencia que tengan ellos frente al tema, el segundo en dirigir la atención del estudiante hacia lo más importante o darle selectivamente algo con lo que se pueda relacionar el contenido a trabajar, como el concepto de algo.

En el desarrollo se expone el conocimiento, las habilidades y procedimientos que requiera el contenido. Para el cuerpo de la clase se emplean breves explicaciones, dependiendo de lo que se quiera profundizar del tema y su confrontación con la realidad. Además, puede existir una generalización de lo aprendido y llevarlo al campo de lo concreto. El último momento está enfocado en la síntesis de lo abordado en el momento didáctico anterior, a partir de la repetición, los estudiantes generan conclusiones para evocar lo aprendido, de ello surge la evaluación.

Tanto la SEP como el autor concuerdan en las acciones que lleva cada estructura de la planeación. Para los fines de esta investigación solo se analizará un acercamiento a la planeación didáctica, es decir, una propuesta didáctica que realiza el sujeto de investigación con relación al tema de adición y sustracción del número entero.

Se distinguen tres tipos de conocimientos asociados a la planificación didáctica: matemático, didáctico y profesional. El conocimiento matemático se refiere al conocimiento disciplinar (históricamente desarrollado) y al escolar (presente en el plan de estudios y en los libros de texto). El conocimiento didáctico, de acuerdo con Rico (2015) se define como el conjunto de conocimientos teóricos, técnicos y prácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Este conocimiento se refleja en el uso que el docente da a las herramientas necesarias para planificar la enseñanza de un tema, con la finalidad de profundizar en el aprendizaje de sus estudiantes, considerando las expectativas, limitaciones y oportunidades que le brinda, así como el manejo de las tareas matemáticas. El conocimiento profesional es el que se produce en la práctica de la enseñanza de las matemáticas, y por tanto, incluye elementos de los conocimientos matemático y didáctico, particularmente se refiere a los construidos a lo largo de la experiencia y de las actividades de desarrollo profesional (o formación continua), determinados por las características de los contextos de enseñanza en los que ha laborado, los cuales impactan en la forma en que selecciona o diseña tareas para la clase y le permiten sugerir cierta gestión de la clase.

La planificación didáctica, como se define en los párrafos anteriores, evoca que el docente es un experto a la hora de seleccionar las actividades para el diseño de sus secuencias, de ello, deriva el uso de ciertos modelos que le puedan ayudar a generar una explicación con los estudiantes. En relación con la enseñanza del número entero, Arcavi y Bruckheimer (1981) hacen una clasificación de las distintas propuestas de introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela que puede hacerse extensiva a la estructura aditiva. La clasificación es la siguiente:

- ✓ Introducción inductiva: Se caracteriza por el descubrimiento y generalización de regularidades.
- ✓ Introducción deductiva. Consiste en añadir a los números naturales, sus simétricos respecto a la suma y definir las operaciones en ese nuevo conjunto numérico, de manera que se conserve la estructura algebraica de los números naturales.
- ✓ Introducción constructiva. Se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia: (a, b) equivalente a (a', b') si, y sólo si $a + b' = b + a'$.
- ✓ Introducción por medio de modelos. Es una presentación de los números enteros basada en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los alumnos o que les pueden resultar más atractivos.

Para efectos de esta investigación se centrará en la introducción por medio de modelos, ya que estos ayudan a conjeturar o al menos a justificar un conocimiento, dando sentido a sus reglas de funcionamiento y posteriormente, por analogía o conclusiones, extenderlas al conjunto de los números enteros. Estos modelos, según Cid (2001) han recibido distintos nombres: modelos físicos, modelos intuitivos, modelos concretos. Es además muy frecuente, que se presenten a través de juegos didácticos, estrategia que sirve para motivar la reflexión sobre el modelo y sus reglas.

> En el proceso de modelización matemática, el objeto de estudio es un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible, mientras que el sistema matemático, es el modelo que lo representa. Esto quiere decir que lo que realmente se estudia es el modelo matemático, deduciendo, a partir de él, el comportamiento del sistema inicial. El modelo es, por consiguiente, un dispositivo mediador entre nuestra necesidad de conocer y nuestra capacidad para hacerlo (Cid, 2001, p. 531).

Los modelos concretos, según la autora, son un apoyo para la comprensión de la noción y también para su reconstrucción en caso de olvido. Este tipo de modelos son usados en contextos escolares en la enseñanza del número entero, los más utilizados por los docentes y en los libros de texto son los siguientes: deudas y haberes, temperaturas medidas por un termómetro, altitudes por encima o debajo del mar, personas que suben o bajan escaleras o elevadores, objetos que recorren un camino con dos sentidos, posiciones y desplazamientos en la recta numérica.

Cid (2003) define a los modelos de neutralización como aquellos que se basan en los signos predicativos que se refieren a medidas de cantidades de magnitud de sentidos opuestos que se neutralizan entre sí, en tanto que los signos operativos binarios se identifican con los conceptos de adición (añadir, reunir) y sustracción (quitar, separar). Un ejemplo de este tipo de modelo es el de las fichas de dos colores, en el cual la adición se interpreta como la reunión de fichas, o bien como una acción de añadir fichas a un conjunto dado de ellas, seguido del proceso de neutralización para obtener la representación apropiada del resultado. La sustracción se relaciona con la acción de quitar o separar fichas.

En este sentido, un modelo que se le ha dado un auge importante para la enseñanza de la adición y la sustracción es el modelo empleado por los chinos, donde utilizan fichas de dos colores (blancas y negras) que simbolizan la neutralidad, si bien estos colores no evocan al yin y al yang.

3.3.2. El modelo Chino-Gallardo

El modelo Chino-Gallardo se ha definido como la oposición entre positivos y negativos, en el cual se considera la operatividad empleada por los matemáticos chinos, que está basada en dos elementos relacionados con el conteo de los números positivos extendido a los números negativos. Y en el proceso de sustracción existen casos en que se requiere de una representación alternativa del minuendo para llevar a cabo la operación de resta, recurriendo entonces a la adición adecuada de ceros según sea el caso:

a) La oposición entre positivos y negativos.
b) La suma de números opuestos es cero.

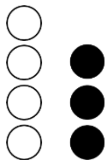
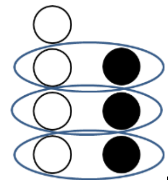
La operatividad en el campo aditivo se basa en los siguientes elementos:

1. El conteo de los números positivos no se extiende a los negativos, es decir solo los números positivos se utilizan para contar.
2. En la sustracción se requiere una representación alternativa del minuendo para llevar a cabo la resta, se recurre a la adición de ceros según se requiera.
3. Es necesario tener en cuenta que $a = a + 0 = a + 0 + 0 + 0 \cdots$
4. Los números positivos (cantidades) corresponden a bolitas blancas y los números negativos están representados por bolitas negras.

Para ilustrar el uso del modelo y sus códigos se expresa a continuación su uso en la adición y sustracción de números positivos y negativos.

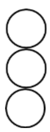
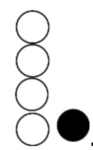
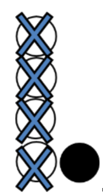
3.3.2.1. Adición por medio del modelo Chino-Gallardo

En la adición de dos números enteros, se juntan dos bolitas y al hacerlo se neutralizan, una bolita blanca con una negra forma el cero. Entonces el resultado corresponde a las bolitas que quedan sin neutralizarse. El resultado de la suma es positivo o negativo dependiendo de las bolitas que queden. Por ejemplo, $4 + (-3) =$ en el modelo chino se expresa de la siguiente manera:

 Entonces se forman ceros y el resultado es uno positivo .

3.3.2.2. Sustracción por medio del modelo Chino-Gallardo

Para la sustracción de números enteros, solo se coloca el número de bolitas que le corresponde al minuendo y dependiendo de la sustracción, se puede recurrir a la suma de un cero, para poder quitar. Por ejemplo: $3 - 4 =$ __, el minuendo es menor que el sustraendo, por lo tanto, no se puede quitar. Por lo tanto, se recurre a la suma de un cero al número, en el modelo chino:

 Como no se puede quitar 4 al 3 se le agrega un cero $3 + 0$, . Ahora se puede realizar la sustracción, tachando cuatro cantidades positivas . Entonces el resultado de la operación es un uno negativo.

Si bien, el uso de este modelo enfatiza la utilización de los conceptos de la adición y sustracción, entendiendo para cada uno de ellos el de agregar y el de quitar, también contrapone un conflicto, como se analizó en el planteamiento del problema, Lytle (1994) y Gallardo (1994) observan que existe un conflicto específicamente con la sustracción, ya que si el alumno no se afianza bien del modelo puede producir una confusión entre la estructura aditiva y multiplicativa del número entero, lo que daría pauta a un obstáculo didáctico.

En definitiva, el docente es el encargado de que esto se pueda evitar a través de que él conozca detalladamente el modelo y lo lleve de tal manera que el alumno pueda generar las reglas para operar aditivamente. Además, el profesor será quien les ayude a superar los conflictos del mismo modelo.

3.4. Los obstáculos en la enseñanza del número entero

En la enseñanza de los números enteros surgen ciertos obstáculos, errores y/o dificultades que no necesariamente tienen que ser del profesor, sino que a través del tiempo se arrastra con eso, Bachelard (2002) vio los obstáculos como el corazón de la cognición, tanto para el aprendizaje individual como para el desarrollo histórico del pensamiento científico. En este sentido, Bishop et al. (2014), definen que "un obstáculo puede entenderse como un conocimiento que es útil para resolver cierto tipo de problema, pero cuando se aplica a un nuevo problema o contexto es inadecuado o conduce a contradicciones" (p. 26).

Si bien, como se analizó en el capítulo dos, la aceptación del número entero a través de los siglos no ha sido las más adecuada por los grandes matemáticos, incluso hay quienes no aceptaban su existencia, por lo que a nuestros días se ha venido arrastrando con esa concepción. Incluso, en la actualidad un docente que no conoce este conjunto de números, cuando se enfrenta a una situación donde debe de utilizar un número entero, niega su existencia, principalmente con los números negativos. Bachelard (2002) definió lo anterior como obstáculo epistemológico, aquel que tiene que ver con su misma naturaleza, con su matematización.

A partir de la clasificación de obstáculos que definió este autor, Brousseau (1997) (citado en Bishop et al. 2014), ha adaptado tres tipos de obstáculos a la enseñanza de las matemáticas y los ha definido de la siguiente manera:

- Obstáculo ontogenético: Son aquellos que tienen que ver con el estudiante, con sus capacidades y conocimientos de acuerdo con su edad y con su madurez cognitiva, de tal manera que, ante la adquisición de nuevos conceptos, sus capacidades y conocimientos resultan insuficientes.
- Obstáculo epistemológico: Se consideran arraigados en la naturaleza misma del conocimiento de un tema e independientes de la cultura, la sociedad y el entorno de aprendizaje propios.
- Obstáculo didáctico: Relacionado con la enseñanza del profesor, con el currículum, con el método o la interpretación de la transposición didáctica (la forma en que la noosfera en principio y luego el docente adecuan un

> contenido para ser enseñado), si la elección de tal enseñanza resulta ser eficaz para algunos estudiantes, no lo será para otros, el proyecto para esos otros se convierte en un obstáculo didáctico.

En esta misma dirección, Bishop et al. (2014) definen en un solo concepto los tres obstáculos anteriores como obstáculo cognitivo, el cual refiere a la comprensión o el conocimiento que alguna vez apoyó la capacidad de aprendizaje de un alumno, pero puede impedir el aprendizaje de un nuevo concepto. Esta comprensión puede estar presente en la construcción del conocimiento de un alumno individual o en el crecimiento histórico del conocimiento en un campo en particular.

En la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, suele observarse de manera frecuente el obstáculo cognitivo, ya que siguen surgiendo ideas arraigadas en relación con el número negativo y su operatividad con la sustracción, dando pauta a afirmar errores y sobre todo a generar creencias falsas.

En este capítulo se describieron los aspectos teóricos que apoyarán en el sustento del análisis de los datos obtenidos durante la investigación. Así, la enseñanza del sujeto de estudio puede ser examinando desde dos aspectos, el primero desde el conocimiento matemático que refiere a la conceptualización del número entero y el segundo desde la operatividad de este conjunto de número. Ambos ligados desde una herramienta fundamental del docente, la planificación didáctica, donde pone en juego su conocimiento matemático y didáctico.

CAPÍTULO 4
DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta el diseño metodológico que se siguió en el desarrollo de la investigación, el cual brinda una mirada amplia sobre el tipo de metodología utilizada, el cual recae en el estudio de caso y da una amplia justificación del por qué se usa este. Otro de los aspectos a abordar son las técnicas utilizadas, en esta cuestión se enfoca a tres, el primero una propuesta didáctica elaborada por el sujeto de investigación, el segundo una entrevista etnográfica y el tercero la observación no participante. Además, se da una descripción sobre el sujeto de investigación y por qué se elige. El escenario de esta investigación es por medio de una plataforma virtual, ya que por la pandemia no se pudo tener acceso al salón de clases.

4.1. Metodología y método

La metodología de investigación fue cualitativa de corte interpretativa. Taylor y Bogdan (1986) le dan un sentido amplio, ya que produce datos descriptivos que se han generado en las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y lo más importante, permite observar de manera directa la conducta de los sujetos.

El método cualitativo implementado es etnográfico, ya que éste se caracteriza por la descripción o reconstrucción analítica de carácter interpretativo. La recolección de los datos que se hace desde el punto de vista del sujeto de investigación, lo que permitió que se pudiera acercar a ella por medio de una plataforma para poder observar y escuchar las nociones que tiene acerca del número entero, así como un acercamiento de lo que lleva al aula por medio de una propuesta didáctica.

Celigueta y Solé (2014) consideran que la etnografía pretende comprender los hechos sociales desde la perspectiva de sus actores, agentes o sujetos, pero sin olvidar los contextos locales en los que estos suceden. Por lo que es importante considerar el contexto en el que se desarrolla la investigación y las implicaciones que puede tener en los resultados. Así, una de las características para este trabajo visto desde el punto etnográfico, consiste en observar qué acontece alrededor de la enseñanza de los números enteros a partir de la propuesta didáctica que la docente comparte, y que es señalada como aquella que suele utilizar en sus clases. Así, se obtuvieron datos que después fueron analizados e interpretados logrando una comprensión sobre su actuar.

La metodología de una investigación no puede ser única, esta puede ser flexible y retomar no solo un método sino pueden ser varios, en esta dirección, Bisquerra (2000) propone una clasificación sobre la metodología de investigación en educación de acuerdo con distintos criterios, uno de ellos es según el número de individuos, del cual se desprende dos estudios: de grupo y estudios de sujeto único. En este sentido, la metodología a utilizar es el estudio de caso.

El estudio de caso es una herramienta de investigación específica, algo complejo, en funcionamiento, su fortaleza radica en que a través de éste se registra la conducta del sujeto de investigación en el fenómeno estudiado. “El objetivo fundamental del estudio de un caso no es la comprensión de otros. La primera obligación es comprender este caso” (Stake, 1999, pp.16 y 17). Por lo tanto, el deber de este trabajo es comprender y analizar al sujeto de investigación, concentrar toda la atención hacia él.

Stake (1999), afirma que los estudios de caso son de gran interés en la educación, porque de cierta manera el sujeto de investigación se asemeja a otros, sin embargo, no es grande el interés que tiene en generalizar. El trabajo del investigador es escuchar con atención lo que tienen que contar. El estudio de caso tiene un interés muy especial para esta investigación, ya que busca detalladamente lo que sabe el sujeto respecto a un tema.

El estudio de caso se eligió porque ofrece a esta investigación una particularidad y una complejidad al mismo tiempo, permitirá comprender el actuar del sujeto de investigación frente a un tema determinado, donde pondrá en juego su experiencia y su conocimiento. En palabras de Cohen et al. (2007), “los estudios de caso son un ejemplo único de personas reales en tiempos reales” (p. 253). Lo que permite a este trabajo comprender las ideas con mayor claridad del sujeto de investigación.

Uno de los criterios que se tomó en cuenta, en relación con los objetivos y las preguntas de investigación fue el tiempo, ya que este fue un poco limitado en cuestión de acudir al aula por la situación de la pandemia, porque en el mes de Marzo del 2021 se tuvo un acercamiento por mensaje con la docente pidiéndole que fuera parte de este trabajo. Hubo una respuesta favorable, pero por la situación laboral que llevaba en ese momento debido al confinamiento se pudo obtener la plática con ella hasta el mes de Julio de ese año. Una vez que hubo un avance en el análisis de los datos obtenidos se le solicitó una segunda entrevista, sin embargo, esta se aplazó por situaciones laborales de la docente y se hizo hasta el mes de Junio del 2022. Otro aspecto que se consideró fue la disposición con la que contó el sujeto de investigación, ya que en todo momento mostró interés en el trabajo a realizar.

Pareciera que el estudio de caso es una base de la cual no se puede tener una generalización, sin embrago, se toma la decisión de trabajar con un solo sujeto para que se pueda estudiar a profundidad, lo que permite llevar un mejor seguimiento del procedimiento que utiliza para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero y del conocimiento que tiene en relación con el número entero.

Stake (1999), hace tres diferencias entre estudios de caso intrínseco, instrumental y colectivo. Esta investigación se centra en el segundo, ya que un caso se examina para profundizar un tema. Este tipo de caso juega un papel de apoyo, facilitando la comprensión del objeto de estudio.

El propósito del estudio de caso instrumental es analizar para obtener una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico, es una cuestión que se debe de investigar desde un caso particular para conseguir algo diferente a lo indagado en otros trabajos. El autor anterior asevera que cada estudio de casos es un instrumento para aprender.

4.2. Técnicas utilizadas en la investigación

Cada investigación tiene un objetivo diferente y con base en este, el investigador elige las técnicas que le ayuden a la recolección de los datos. En esta cuestión, los instrumentos que se eligieron son en tenor de recoger el punto de vista del sujeto de investigación, dejando a un lado los estereotipos que uno trae consigo mismo.

4.2.1. Propuesta didáctica

El primer instrumento consistió en solicitar a la docente que elaborara una propuesta didáctica enfocada en el tema de adición y sustracción del número entero, considerando que los alumnos no conocen nada del tema, abordándolo desde tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. Se le solicita esta estructura porque es la forma en que la SEP pide las planificaciones y el sujeto de investigación está familiarizado con ello. Con esto se cumplen los objetivos de esta investigación, porque a partir de este se podrá identificar los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que pone en juego la profesora al realizar las actividades de la propuesta didáctica y con ellos dar cuenta de su mirada profesional.

La propuesta permitirá responder las preguntas de investigación, porque dará cuenta del conocimiento matemático, didáctico y profesional que pone en juego para la enseñanza de la operatividad aditiva del número entero. El inicio de la propuesta proporcionará una parte sobre el conocimiento matemático que posee el sujeto de investigación en relación con el número entero. Durante el desarrollo de la propuesta se analizará la estrategia que utiliza el sujeto de investigación, similar al que propone Arcavi y Bruckheimer (1981) (descrita en el marco teórico), que hace referencia a los modelos basados en sistemas de objetos ya que estos resultan atractivos para los estudiantes, así como la gestión que propone y los conocimientos que sustentan sus elecciones en la conformación de esta fase medular de la propuesta. El cierre de la propuesta servirá para la examinar las conclusiones a las que llegan los alumnos con la estrategia utilizada y la forma en que puedan operar este tipo de números.

La propuesta didáctica se elaboró en presencia del investigador, por el momento no se le permite el uso de algún material de apoyo (búsqueda en el libro de texto, internet o algún documento), ya que no se cumpliría con el objetivo de la investigación.

4.2.2. La entrevista

Guber (2015), considera que la entrevista es una estrategia para hacer que la gente hable sobre lo que sabe, piensa y cree, en este sentido, la segunda técnica a utilizar es una entrevista etnográfica. Se elige ésta porque busca que el entrevistado responda a las preguntas del investigador con sus propias categorías de pensamiento. Esto permite, que la persona entrevistada hable y el entrevistador escuche, interviniendo solo cuando sea necesario para pedir alguna aclaración o para dirigir la conversación hacia algún aspecto que sea de interés. La entrevista se hizo en un horario externo a la clase de la profesora. Para el análisis de los datos, se transcribieron algunos fragmentos de la entrevista.

Antes de solicitar la propuesta didáctica, se redactaron las siguientes preguntas en relación con dos tareas: 1) la conceptualización del número entero y 2) la operatividad aditiva del número entero:

1. Conceptualización del número entero: Con estas preguntas se reafirma y se esclarece lo que aborda en la propuesta didáctica, ver de una manera más cercana la noción del número entero.
   - 1.1. ¿Qué es un número entero?
   - 1.2. Las ejemplificaciones que describes en tus actividades se pueden observar las temperaturas, las deudas, incluso escribes que en un elevador ¿Dónde se trabaja esta parte? (Esta pregunta se redactó en el momento en que la docente describía su propuesta didáctica).
2. Operatividad aditiva del número entero: En esta tarea se analizará cómo entrelaza el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico para efectuar la adición y sustracción del número entero. Partiendo de la noción conceptual de estas dos operaciones. La suma de qué modo la considera, como reunir o añadir. Respecto a la resta, se espera identificar una de la conceptualización de la triple naturaleza propuesta por Gallardo (1994).
   - 2.1. ¿Qué es la suma?
   - 2.2. ¿Qué es la resta?

2.3. ¿De dónde te basas para obtener esta secuencia de actividades, lo habías trabajado durante tu licenciatura, experiencia o durante algún curso de actualización?

2.4. ¿Cuáles son las conclusiones que generan los alumnos?

2.5. ¿Qué se les facilita a tus estudiantes con relación a este tema?

2.6. ¿Qué dificultades observas en los estudiantes durante el desarrollo de este tema?

2.7. ¿Cuántas veces has aplicado esta misma secuencia?

2.8. Siempre es la misma o ¿Qué modificaciones has realizado? ¿Por qué?

Las operaciones aditivas que se plantearon son en correspondencia a las dos tareas planteadas la conceptualización del número entero y la operatividad aditiva. Durante la descripción de la propuesta y la entrevista, solo se pudo observar la manera en que efectúa una suma de un número negativo más un número positivo, por lo tanto, se le solicitó que por medio de su material pudiera resolver lo siguiente:

- ✓ Adición de:

  Un número positivo más número positivo.

  Un número positivo más número negativo.

  Un numero negativo más número negativo.

- ✓ Sustracción de:

  Un número positivo menos número positivo (donde el minuendo es más grande que el sustraendo).

  Un número negativo menos un número negativo (donde el minuendo es más pequeño que el sustraendo).

  Un número negativo menos un número positivo (donde el minuendo es más pequeño que el sustraendo).

4.2.3. Observación no participante

Una de las fortalezas que tiene un estudio de caso según Cohen et al. (2007), es que permite observar los efectos en contextos reales, ya que cualquiera que sea el problema o el objetivo que indagar, en el centro de cada estudio de caso se encuentra la observación. Estos autores han definido dos tipos principales de observación: observación participante y observación no participante. Para los fines de esta investigación, se usó la segunda.

La observación no participante permitió obtener directamente el punto de vista de la profesora desde su campo de trabajo, para esto se apoyó de una forma de registro que fue la videograbación. Guber (2015) afirma que esta técnica, apoya a que el investigador observe sistemáticamente a los sujetos y registre todo lo que ve y escucha.

Además, el investigador solo desempeña el papel de observador porque fija su atención en aquellas situaciones de su interés. En este caso y con base en los antecedentes históricos de esta investigación, se pudo centrar la atención en una de las dificultades en la docente que fue en la operatividad de la sustracción, lo que permitió al investigador actuar en el momento. De ahí la importancia de usar esta técnica, ya que la experiencia de la autora de esta tesis sirvió para tomar decisiones oportunas que llevaran al objetivo de este estudio. La primera obligación del etnógrafo, según Rodríguez et al. (1999), es permanecer donde la acción tenga lugar.

4.2.4. Videograbación

Woods (1987) sugiere que los principales requisitos de la observación son un ojo avizor, un oído fino y una buena memoria. A veces los filmes, las grabaciones y las fotografías pueden ayudar a la memoria y para fines de este proyecto es indispensable utilizarlas. Una técnica que se pudo aplicar utilizando la plataforma de MEET es la videograbación, porque esto permitió que se vuelva una y otra vez para observar y analizar lo que sucedió en el momento.

Otra de las ventajas de la videograbación, es el registro de notas a medida que ocurren los hechos. Cohen et al. (2007) afirman que escribir notas tiene la ventaja de estimular el pensamiento, y esto es lo que le brinda al investigador en que tenga un acercamiento más profundo con el sujeto de investigación.

4.3. Sujeto de investigación

Como se observa en el planteamiento del problema, existe una variedad en la formación de los docentes que están a cargo de impartir la asignatura de matemáticas, por lo tanto, el sujeto de estudio para esta investigación es una profesora. Bruno (2009) enfatiza que una investigación que requiere de la implicación del profesorado resulta realmente compleja, ya que es difícil controlar la realidad que impone su labor, porque está en un lugar determinado y trabaja con alumnos concretos. En esta indagación, no se pudo tener acceso al aula, ya que durante la pandemia las clases estuvieron a distancia y una vez que se retornó a las aulas, los permisos no fueron oportunos en la escuela.

La profesora Alma fue elegida dentro de tres profesores que permitieron trabajar con el investigador, ya que mostró una disposición al trabajo y cumple con las características para el logro del objeto de estudio.

Alma es una profesora cuya formación inicial es de la Normal Superior de México, su grado máximo de estudios es la licenciatura, actualmente trabaja en una secundaria técnica del Estado de México, su experiencia docente es de 11 años. Durante su práctica docente ha trabajado en los tres grados de nivel secundaria, en los dos últimos ciclos escolares su énfasis ha sido con tercer grado.

Comenta que durante su práctica docente ha tenido solo un taller de formación continua, del cual es de donde proviene la propuesta didáctica que describe. No recuerda el nombre del taller ni dónde lo tomó, solo que fue parte del Centro de Actualización del Magisterio (CAM).

4.4. El escenario

El primer encuentro que se tuvo con la docente fue en un CTE[3] de una sesión ordinaria en el año 2018. En este consejo se reunieron varias escuelas de la zona 16 del Municipio de Ecatepec, Estado de México. La organización de las sesiones estuvo a cargo de los directivos en donde colocaron en varias aulas a diferentes docentes de cada escuela con el fin de abordar ciertas problemáticas con los estudiantes. En una de las participaciones, la docente refirió haber trabajado con Logo[4] cuando estudiaba la secundaria, esto hizo llamar la atención y tener una conversación con ella, en la cual se le preguntó qué tipo de formación tenía a lo que respondió que era normalista.

Para aquel año, durante un seminario de la maestría, como parte de un trabajo académico se tenía que realizar un cuestionario o la aplicación de la resolución de problemas en relación con la razón y la proporción. De esto, se decidió trabajar con 6 profesores de educación secundaria, 3 eran de la asignatura matemática y 3 de la asignatura de ciencias (biología, física o química). Durante el análisis del cuestionario, resalta la profesora Alma, ya que las justificaciones que brinda en cada respuesta son las apropiadas para la noción de razón, por lo que sobresale de los otros docentes. Es ahí en donde se decide que ella era una candidata idónea para realizar este trabajo.

El escenario donde se realizó la descripción de la propuesta didáctica y la entrevista fue por medio de la plataforma MEET[5], desde una cuenta G Suiste. Se elige esta

---

[3] Consejo Técnico Escolar (CTE), es el órgano colegiado integrado por el personal directivo y docente, así como por los actores educativos que están directamente relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje en una escuela, en el que se lleva a cabo el análisis y la toma de decisiones que propician la transformación de las prácticas docentes y facilita que niñas, niños y adolescentes logren los aprendizajes esperados, de modo que la escuela cumpla con su misión (SEEM, 2021, 1 agosto).

[4] LOGO es un software que fue diseñado en los años 60´s para para aplicarlo en la enseñanza y aprovechar sus características, que lo hacían flexible, modular e interactivo. Su objetivo es que los alumnos aprendan a programar a partir de comandos por medio de una tortuga.

[5] Google **MEET**, antes conocida como Hangout **MEET**, es la solución de videoconferencias por excelencia de Google, incluida en los distintos paquetes de G Suite que permite realizar llamadas y videoconferencias desde cualquier lugar y tipo de dispositivo con conexión a internet.

porque el Gobierno del Estado de México proporcionó cuentas gratuitas para que los docentes pudieran trabajar a distancia con los alumnos.

4.5. Triangulación de los datos

La validación de esta investigación se hizo por medio de la triangulación de los datos. Woods (1987) afirma que los triángulos tienen una fuerza enorme. En la investigación en ciencias sociales, la utilización de tres métodos diferentes o más para explorar un problema aumenta enormemente las posibilidades de exactitud. Para los fines de este trabajo, entre los cuales está el analizar los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales de un tema en específico, y la mirada profesional del sujeto de investigación, la forma de triangulación es la siguiente:

1. Analizar la propuesta didáctica que describe el sujeto de investigación para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero.
2. Dialogar con el sujeto después de la narración.
3. Observar la descripción tal y como la realiza.

Al contrastar las técnicas anteriores, se obtiene una validación del estudio que se realizó.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo está dedicado al análisis de la propuesta didáctica y la entrevista realizada a la profesora Alma en relación con el tema de la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, considerando dos temas principales: 1) la conceptualización del número entero y 2) la operatividad aditiva del número entero. Por ello, este capítulo se estructura considerando la naturaleza de los datos obtenidos mediante los dos instrumentos de investigación: la propuesta didáctica realizada por la profesora Alma y la entrevista sobre dicha propuesta. La primera proporcionó datos relacionados con los tres momentos didácticos que Alma describe para aborda la enseñanza de los dos temas mencionados anteriormente. El segundo instrumento de investigación, la entrevista, permitió esclarecer los aspectos que no son explícitos en el primer instrumento. El análisis de los instrumentos se hizo de dos maneras, primero se examinó cada uno y posteriormente se examinaron como un todo. Ambos instrumentos brindaron hallazgos importantes en esta investigación.

5.1. Análisis de la propuesta didáctica realizada por Alma

En esta sección se analiza la propuesta didáctica para la enseñanza de la adición y sustracción de los números enteros, realizada por la profesora Alma (véase Apéndice A), a solicitud expresa de la autora de esta tesis. Se identificaron los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el número entero que ella pone en juego y a partir de ello, se reconocieron elementos que conforman parte de su mirada profesional. Una descripción general de la propuesta didáctica antecede el análisis de los tres momentos didácticos. Se identificaron dos grandes temas que son objeto de enseñanza en la propuesta: conceptualizar los números enteros y presentar la operatividad aditiva del número entero.

5.1.1. Descripción de la propuesta didáctica realizada por Alma

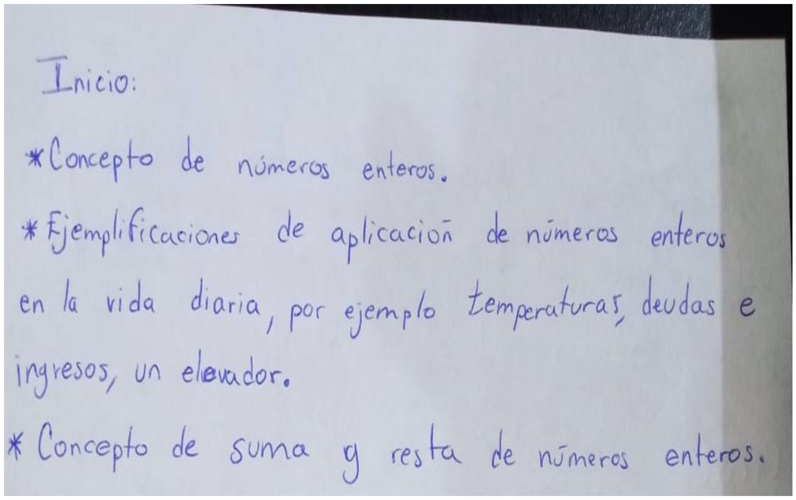
La propuesta didáctica de Alma está organizada en tres momentos didácticos: inicio, desarrollo y cierre, los cuales fueron sugeridos por la investigadora ya que es una forma de trabajo que conoce la profesora, porque la estructura se asemeja a lo solicitado por el Plan y programa, de igual manera esto se puede observar en los libros de textos.

El inicio está orientado a la conceptualización del número entero, partiendo de ejemplos de la vida cotidiana (por ejemplo, temperaturas, deudas, pisos de elevadores). El desarrollo está dedicado a la adición de un número negativo y un número positivo mediante el uso de fichas azules y rojas (que aparecen dibujadas). El cierre está enfocado en la institucionalización de la ley de los signos de la suma y resta de los números enteros. Cada una de estas fases es analizada a continuación.

5.1.1.1. Momento didáctico referido al inicio de la propuesta de Alma

En una clase de matemáticas de nivel secundaria, que sigue una organización *tradicional*[6], el profesor tiene la responsabilidad de propiciar que los alumnos logren la conceptualización operativa del número entero. En ese sentido, el inicio de la propuesta didáctica de Alma tiene como objetivo general la conceptualización del número entero, luego la ejemplificación de la aplicación de este conjunto de números en situaciones de la vida diaria y culmina con el concepto de suma y resta de números enteros (obsérvese figura 5.1). Durante su descripción, Alma dio lectura a lo que estaba escrito.

[6] En la enseñanza secundaria los profesores de matemáticas suelen tener la responsabilidad de la enseñanza de los contenidos y los alumnos suelen tener un rol receptivo.



Inicio:

*Concepto de números enteros.

*Ejemplificaciones de aplicación de números enteros en la vida diaria, por ejemplo temperaturas, deudas e ingresos, un elevador.

*Concepto de suma y resta de números enteros.

Figura 5.1. Actividades del primer momento didáctico, las cuales están dirigidas a la conceptualización del número entero.

Se puede inferir que para Alma es importante que sus estudiantes conozcan el concepto del número entero. El uso de ejemplos de situaciones de la vida cotidiana parece estar referido a que los estudiantes reconozcan un sentido concreto del uso de estos números y al mismo tiempo profundicen en su conocimiento, con el objetivo de resolver tareas que surgen en su vida cotidiana. De hecho, en el Programa de estudio 2011 se afirma que “la formación matemática que permite a los individuos enfrentar con éxito los problemas de la vida cotidiana depende en gran parte de los conocimientos adquiridos y de las habilidades y actitudes desarrolladas durante la Educación Básica” (p. 19).

Otro uso que puede inferirse de estos ejemplos es tener una base para lograr la conceptualización del número entero. Los contextos elegidos por Alma son clásicos: temperaturas, deudas e ingresos y pisos de elevadores, que funcionan como modelos concretos (Cid, 2002) con potencialidades y limitantes didácticas.

En el caso de las temperaturas y considerando el termómetro se podrían observar que los números negativos están por debajo del cero. Es decir, que existen y que se utilizan para representar las temperaturas muy frías. Mientras que las temperaturas menos frías e incluso las más cálidas se representan con los números positivos. Con base en ello, el termómetro puede asociarse con la representación de los números enteros en la recta numérica, evidenciando una lógica similar: el cero como elemento neutro, hacia arriba o a la derecha los números enteros positivos y hacia abajo o a la izquierda los números enteros negativos. Lo que parece tener un potencial didáctico interesante, sobre todo si se asocia a contextos de experimentación en el laboratorio y se tiene como referente epistemológico a la física escolar de la secundaria, como lo ilustra Salinas (2022).

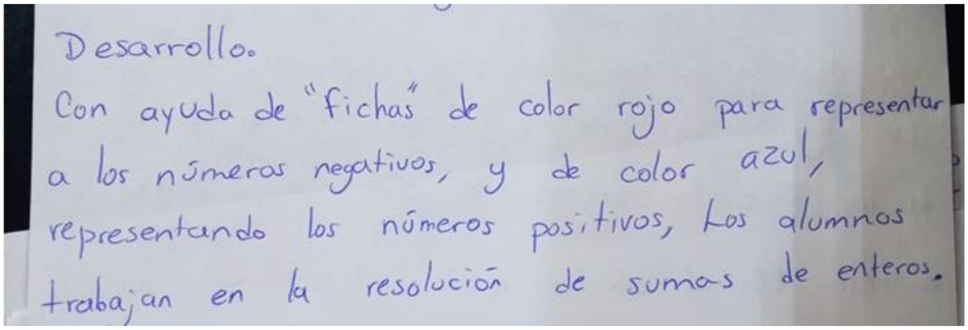
El contexto del haber y el deber, sin embargo, genera algunas dificultades didácticas: al restar una deuda no necesariamente se obtiene un número positivo o al restar una deuda de otra deuda el resultado no necesariamente es negativo. Asimismo, en el contexto del elevador *subir* puede llevar a asociar esta acción con los números positivos, más allá de la representación de los pisos superiores y la acción de bajar, puede asociarse con los números negativos, que suelen utilizarse para representar pisos en el subsuelo. Lo cual es erróneo, pues se puede bajar entre pisos superiores y subir desde el sótano al piso superior más elevado, sin que ello este asociado a números positivos o negativos.

Es necesario señalar que a partir de la propuesta de Alma no es posible afirmar el uso que se hace de estos ejemplos cotidianos, por lo que en la entrevista se profundizó sobre esta situación.

El último elemento de la fase de inicio está referido al concepto de suma y resta de números enteros, sin embargo, no hay definición o concepto que refiera a estas operaciones o cómo las concibe. No obstante, el desarrollo de la propuesta está dedicado a este punto.

5.1.1.2. Momento didáctico referido al desarrollo de la propuesta de Alma

El momento didáctico de desarrollo de la propuesta didáctica elaborada por la profesora se enfoca en la adición y sustracción del número entero, lo que evidencia continuidad en las actividades que ella sugiere en el inicio. Durante la descripción oral que efectúa de esta fase, la profesora menciona que utiliza fichas de dos colores, para representar el número negativo utiliza el rojo y para el número positivo usa el azul (obsérvese figura 5.2), las cuales son dibujadas en papel.

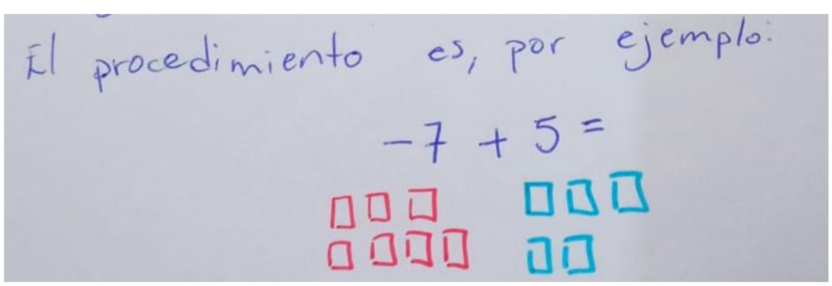


Desarrollo.
Con ayuda de "fichas" de color rojo para representar a los números negativos, y de color azul, representando los números positivos, Los alumnos trabajan en la resolución de sumas de enteros.

Figura 5.2. Descripción de la representación del número entero.

Al observar el uso de dos colores diferentes, se anticipa que se utilizará un método de neutralización de dos números opuestos con el mismo valor, los colores ayudarán a distinguir un número positivo de uno negativo. Cada uno de los colores de las fichas representará el sentido de cada sumando, ya sea positivo o negativo, mientras que la docente solo colocará el signo operativo binario para saber qué operación realizar. Este método es similar al modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994).

Alma comienza con la adición de un número negativo (-7) más uno positivo (5), por lo tanto, dibuja 7 rectángulos de color rojo y 5 rectángulos de color azul (obsérvese figura 5.3). En su descripción oral, la profesora Alma menciona que utilizará el ejemplo *menos siete más cinco* (-7+5), donde hay una confusión con relación a la naturaleza del signo menos (Gallardo, 2002), ya que al mencionar *menos siete* está utilizando el signo binario de la operación para representar el signo unario del número. Por lo tanto, en esta forma de enunciar la operación, no hay un reconocimiento conceptual del número negativo.



El procedimiento es, por ejemplo:
$-7 + 5 =$

Figura 5.3. Representación gráfica de la suma y colores que utiliza Alma, el azul para simbolizar al número entero positivo y el rojo para el número entero negativo.

La profesora Alma espera que los alumnos representen cada sumando utilizando el material concreto, descrito por ella como material abstracto. Para la profesora titular del grupo, esta es la mejor manera que los estudiantes logren realizar la suma correctamente.

Para efectuar la adición de dos números enteros, la profesora Alma cancela una ficha de color rojo por una ficha de color azul (obsérvese figura 5.4). Esto lleva a pensar que cada una de las fichas toma el valor de la unidad, la azul con valor de una unidad positiva y la roja con valor de una unidad negativa. En el modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994) a esto se le denomina neutralizar, es decir, se realiza la suma de dos números enteros opuestos, por lo que se obtiene cero. Sin embargo, ella no logra identificar esto.

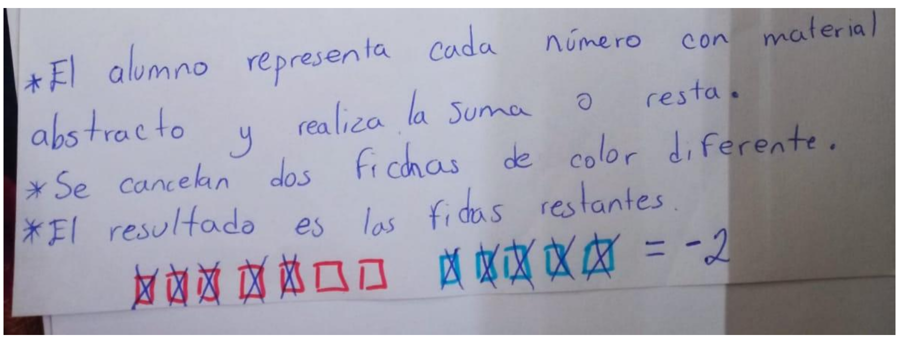


Figura 5.4. Método empleado por Alma para llevar a cabo la suma de dos números enteros.

Para calcular el valor de la suma se cuentan los rectángulos no tachados, en este caso el resultado es negativo dos. Desde una perspectiva matemática la operación correspondería a la siguiente: a siete negativo se le suma cinco positivo, dando como resultado dos negativo. Durante la exposición de esta estrategia, la profesora Alma no considera otros ejemplos, por lo que no es posible analizar cómo efectúa una suma de dos números negativos o una resta utilizando su estrategia. Por lo tanto, esto se indagó posteriormente en la entrevista.

La estrategia de la profesora está enfocada en la suma y ella parte de esa idea. Sin embargo, al efectuar el procedimiento se infiere que confunde la suma con la resta, porque en una de las indicaciones coloca: “El alumno representa cada número con material abstracto (refiriéndose al material concreto) y realiza la suma o resta", lo que lleva a pensar que en un mismo ejercicio puede realizar tanto una suma como una resta. Esto hace suponer que para Alma tienen un mismo significado ambas operaciones o, dicho de otra forma, si hay un signo negativo como parte de uno de los sumandos, éste se asocia con el signo binario de la resta.

Otro aspecto que se analiza es cómo llega la profesora Alma al resultado, ella escribe *se cancelan dos fichas y el resultado son las fichas restantes*, si se tuviera el material concreto, en vez de cancelar o tachar las fichas, se tendrían que quitar. Por lo que esta última acción refiere a una de las tres conceptualizaciones de la resta que propone Gallardo (1994, 2002): quitar una cantidad de otra para disminuirla.

Con la finalidad de que el alumno pueda apropiarse del procedimiento, la profesora Alma sugiere la práctica de diferentes ejemplos con el objetivo de que el estudiante identifique lo que realiza en cada una de las operaciones, sin embargo, no los describe en su propuesta.

5.1.1.3. Momento didáctico referido al cierre de la propuesta de Alma

El cierre de la propuesta didáctica está asociado al último punto del desarrollo, porque a partir de la práctica y de la inferencia que realicen los estudiantes se podrá generar la *ley de los signos de suma y resta*, con el objetivo de poder realizar cualquier operación sin la ayuda del material. Para la profesora Alma, esto pretende que sus alumnos logren la generalización del procedimiento para poder efectuar una suma o una resta de cualquier número entero, donde los sumandos sean dos números positivos, dos números negativos, un número positivo y un número negativo. A partir de la propuesta presentada por la profesora Alma, no se podría afirmar que la operación de la resta estaría en posibilidades de formalizarse para este conjunto de números, sobre todo quedar fundamentada rigurosamente, ya que la conceptualización que tiene la profesora con relación a la sustracción no es clara.

5.1.2 Conocimientos didáctico y profesional inferidos de la propuesta de Alma

En los apartados anteriores se describió los momentos en los que está estructurada la propuesta didáctica. Cada uno de ellos presenta diferentes tareas matemáticas, que desde la percepción de la profesora resultan efectivas para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero. De manera general, se puede observar que parte de lo particular a lo general, hace uso de un modelo por medio de material concreto y genera conclusiones sobre lo que los alumnos suelen realizar, basándose en su práctica y en la gestión que suele tener en la implementación de esta propuesta didáctica.

Durante el primer momento se abordan los aspectos que ella considera que pueden ser la base para llegar a la conceptualización del número entero y por medio de éste puedan darle un sentido. Para ello, utiliza ejemplos clásicos que los alumnos pueden asociar con su uso en la vida diaria, aunque ellos no necesariamente hayan tenido experiencia en estos contextos, sí los pueden identificar en relación con el contexto escolar donde ha estado laborando.

El desarrollo es la parte medular de la propuesta didáctica de Alma, porque es donde describe parte de la operatividad del número entero; para este momento destina el uso de material concreto, que son las fichas de color azul y fichas de color rojo. El hecho de que ella utilice el recurso muestra que reconoce la potencialidad de estos modelos para establecer la aditividad de los números enteros, es una manera de permitir a sus estudiantes manipular fichas que representan números positivos y números negativos, estableciendo reglas para operarlos. Y con base en la práctica puedan ir deduciendo algunas reglas que le permitan resolver una adición de números enteros, donde los sumando sean números negativos y números positivos. Es decir, su apuesta didáctica es que el trabajo con material concreto y un modelo didáctico utilizado (al menos en su práctica) constituye una base para generalizar.

5.2. Análisis de la entrevista de Alma

El segundo instrumento utilizado en esta investigación es la entrevista. En los siguientes apartados se presentan algunos fragmentos que contienen lo más relevante para la investigación, lo cual permite dilucidar y confirmar algunas suposiciones que surgieron en el análisis de la propuesta didáctica que elaboró Alma para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero. Así mismo, la entrevista coadyuvó a complementar los hallazgos encontrados en la investigación con relación a los dos temas enseñados: 1) la conceptualización del número entero y 2) la operatividad aditiva del número entero.

La propuesta didáctica de Alma, como se ha señalado anteriormente, está estructurada en tres momentos didácticos. El inicio de la propuesta didáctica de Alma tiene tres actividades: 1. La conceptualización del número entero, 2. Ejemplificación de la aplicación de este conjunto de números en situaciones de la vida diaria y 3. Concepto de suma y resta de números enteros. Ninguna de estas actividades presenta una definición o descripción de la propia Alma, por lo tanto, en la entrevista se retoman con el objetivo de profundizar en los conocimientos matemáticos y didácticos que sustentan dicha propuesta, y que de cierta forma permiten apreciar conocimientos profesionales.

5.2.1. Conceptualización del número entero abordado por Alma en la entrevista

En la actividad 1 del momento didáctico del inicio, la profesora Alma escribió que comienza con el concepto del número entero, sin embargo, durante la descripción no menciona cuál es, por lo tanto, para esclarecer este punto se le preguntó lo siguiente:

Fragmento de la entrevista

E[7]: Me comentaste que una de tus actividades del inicio, fue dar como tal el concepto de número entero, ¿cuál es ese concepto?

[7] E es el código con el que se describe la participación de la entrevistadora.

A[8]: Bueno, les explico que hay diferentes tipos de números, este… les pongo el diagramita, el de los números (hace un círculo en el aire con los dedos de su mano derecha). Que están los números naturales, los quebrados, los enteros. Les digo que cualquier número ya sea negativo o positivo y normalmente para el concepto de número entero se los pongo en una… se los represento en una recta numérica, o sea ahí sí ocupo la recta numérica como para ejemplificarles y por eso ocupo lo de las temperaturas, y las deudas y todo eso … y el nivel del mar. Ya les digo que estos números nos ayudan a representar por ejemplo temperaturas negativas, o si tenemos una deuda, pisos de bajo de, que van al sótano y ese es el concepto que les doy.

E: ¿Uno más matemático?

A: (hace una negación con su cabeza y se ríe)… mmm, ando frita.

En su respuesta es posible apreciar que ella reconoce la existencia de varios conjuntos de números: los naturales, los racionales (quebrados) y los enteros. Los cuales representa mediante un diagrama, refiriéndose a uno de Venn, sin dibujarlo. Sin embrago, es conocido que la estructura del diagrama de los números reales se aborda utilizando como referente a la teoría de conjuntos, empezando por los números naturales, seguido del conjunto de los números enteros, después el conjunto de los números racionales. En una segunda entrevista, se le solicita que especifique cuál es el diagrama que utiliza y ella muestra la figura 5.5. Este diagrama es muy común, porque se puede encontrar en libros de aritmética y álgebra, incluso la figura 5.5[9] aparece en las imágenes de un buscador en internet, por lo tanto, indica que este es un recurso que utiliza para la enseñanza.

Los números enteros forman parte del conjunto de los números reales, sin embargo, la profesora no conceptualiza este conjunto de números. Porque en su definición no se puede observar una extensión de los naturales hacia los números negativos,

[8] A es el código con el que se describe la participación de la profesora Alma.
[9] Las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 las comparte Alma por medio de un mensaje de WhatsApp durante la segunda entrevista.

identificarlos como números opuesto o como números simétricos respecto al cero. En relación con el nivel de conceptualización del número negativo propuesto por Gallardo (1994) se encuentra en el nivel del número sustractivo, ya que solo hay un reconocimiento binario.

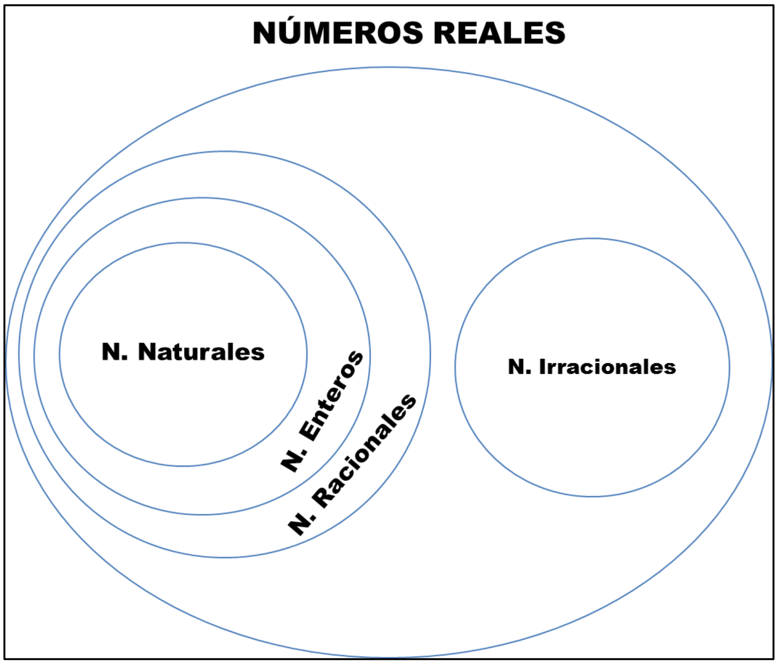


Figura 5.5. Diagrama que muestra Alma en la segunda entrevista para explicar la existencia de diferente conjunto de números.

En la respuesta de Alma, también sugiere el uso de contextos clásicos para que los alumnos puedan relacionar el concepto de número entero con su vida cotidiana, así, en el siguiente apartado se analizan. Esto mismo se relaciona con la actividad 2 del momento didáctico del inicio de la propuesta didáctica.

5.2.1.1. Conceptualización del número entero por medio de contextos cotidianos clásicos

Los contextos cotidianos que Alma refiere, temperatura, metros sobre y bajo el nivel del mar, pisos de elevadores, posibilitan la conceptualización y uso del número entero. Estos parecen favorecidos por lo establecido en el Plan y Programa 2011 y 2017, que enfatizan establecer relaciones entre las matemáticas enseñadas y la vida cotidiana. Así, el uso de estos ejemplos parece estar legitimado por estos documentos rectores y el concepto matemático parece quedar sujeto a ellos. Además de estos contextos, Alma refiere que utiliza la recta numérica para conceptualizar a los números enteros, esto se analiza a continuación.

5.2.1.2. La recta numérica

El uso de la recta numérica suele ser enfatizado durante la formación normalista como un medio de ubicación. De hecho, en el siguiente fragmento de la entrevista se puede analizar que este recurso es considerado como instrumento didáctico y que puede dar soporte, al menos de cierta manera, a la asignatura de historia.

Fragmento de la entrevista

E: ¿Recuerdas haber trabajado algo más [en referencia con los números enteros] cuando estabas estudiando?

A: mmm… Es que cuando estábamos estudiando yo me acuerdo de que el maestro no nos dio muchas técnicas como didácticas, eran más de conceptos matemáticos por esa parte, entonces, mmm… pues por eso antes lo aplicaba muy teórico y no ocupaba un material de apoyo para que lo entendieran mejor y al principio sí… algo más didáctico, no.

E: ¿Cómo lo aplicabas muy teórico?

A: Me iba directo a la ley de los signos de suma y resta, ocupaba el elevador (mueve su mano hacia arriba y hacia abajo simulando el elevador) con diagramas que subiera y bajara o con la recta numérica. Esa es la que ocupábamos más en la Normal. Nos ponían la recta [con su dedo índice derecho traza una recta], que fuéramos avanzando o que fuéramos retrocediendo y así.

E: Y ahorita ya hiciste un cambio entre la recta numérica y el uso de las fichas, ¿cuál te convence más para abordar este tema?

A: Yo creo que para empezarlo el de las fichas me ha funcionado más, y ya después [piensa un poco] uso la recta numérica, también es como importante para localizar los números y todo eso. Y también, porque, bueno, muchos compañeros de historia que tienen… mmm… dificultades en eso cuando quieren ubicar los años en una línea de tiempo, este si les cuesta trabajo, y si de hecho, sí [sonríe], al ubicar, o sea tiene que ver un poquito con la ubicación de los números en la recta numérica y pues también les sirve para eso, y también para la suma y resta, pero no sé, yo siento que se les dificulta más la suma y la resta en la recta.

E: Ok. Entonces, solo se utiliza como un medio para ubicar.

A: mmm […] Sí.

Aunque en la primera entrevista no se específica de qué manera utiliza la recta numérica, solo se puede elucidar que por medio de ella avanza o retrocede. Por eso, en la segunda entrevista se le solicita que dibuje la recta numérica que utiliza para ubicar a los números enteros, sin embargo, no lo hace y solo muestra la figura 5.6. Refiere que como utiliza las fichas rojas y azules, maneja estos mismos colores. En la recta numérica sigue utilizando el significado de magnitudes opuestas.

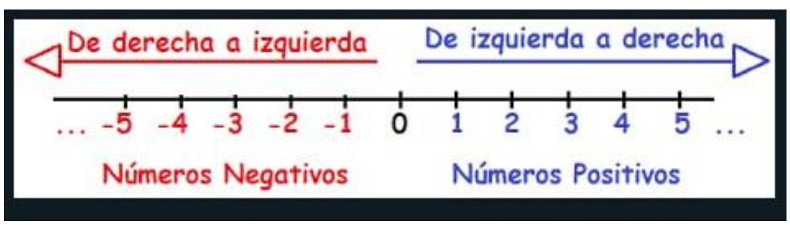


Figura 5.6. Recta que comparte Alma para representar al número entero.

Por medio de la recta numérica pretende dar un significado al concepto de número entero con relación al sentido izquierdo, números negativos y derecho, números positivos. Por lo tanto, sigue mostrando este conjunto de números como cantidades opuestas. En la figura anterior se observa que Alma identifica al número cero como un punto de partida para diferenciar los negativos de los positivos.

Para darle sentido a la recta numérica utiliza contextos cotidianos que pueden ser conocidos por los estudiantes con la finalidad de que comprendan los números negativos. En el planteamiento del problema se aborda que autores como Gallardo (1994), Lytke (1994), Küchemann (1980), Cid y Bolea (2007) han evidenciado que los alumnos presentan una gran dificultad al manipular números enteros, específicamente con los negativos. Sin embargo, esta cuestión también es observable en esta docente.

5.2.1.3. El uso del termómetro

Otro contexto que utiliza la docente para representar los números enteros es mediante el uso de las temperaturas. Ella no sólo utiliza la idea de las diferentes temperaturas sino también el termómetro (obsérvese figura 5.7) para asociar a los números positivos, temperaturas por arriba de cero, y al número negativo temperaturas por debajo del cero. Esta actividad le permite identificar al 0 como neutro y como punto de partida. Ella menciona que lo representa mediante una recta de manera vertical y parte del cero y hasta el 100 como la temperatura más alta, para simbolizar a los números positivos, para los números negativos no menciona hasta qué número, solo enfatiza que no es tan bajito.

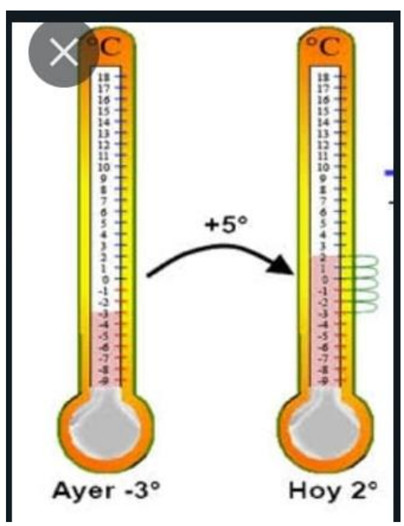


Figura 5.7. Imagen que comparte Alma para representar al número entero en un contexto clásico, como es el termómetro.

El uso del termómetro puede ser un potencial didáctico como lo afirma Salinas (2022). Alma observa que números arriba de cero son números positivos y números por debajo de cero son negativos. Sin embargo, no logra establecer la correspondencia de orden que tiene este contexto ni observar cuando dos números opuestos presentan simetría respecto al cero, tampoco logra identificar este último como neutro.

5.2.1.4. Deudas e ingresos

En relación con las deudas (gastos) e ingresos los representa por medio de colores, porque al utilizarlos los alumnos lo relacionan con su vida diaria, una deuda es un número negativo y un ingreso es un número positivo. Sin embargo, Alma comenta que al utilizar estos ejemplos los alumnos lo asocian más como una operación, cuando es una deuda lo restan, cuando es un ingreso lo suman. Por lo que esta estrategia no es una vía para definir al número entero, ya que ocasiona un conflicto, incluso la misma profesora distingue que esto es un problema para los alumnos. En este sentido, el uso de este contexto no distingue la naturaleza del signo unario ni del signo binario (Gallardo, 2002).

Al usar estos ejemplos clásicos, la profesora Alma no conceptualiza al número entero de una manera formal, pero sí lo representa por medio de algo concreto, de una experiencia que ella supone que sus estudiantes han vivido, no de un modo directo, sino a través de alguna experiencia. La profesora representa al número entero positivo y al número entero negativo mediante contextos clásicos con la finalidad de que sus estudiantes logren darle sentido y posteriormente tener un acercamiento formal a este conjunto de números. Sin embrago, como se observó en el contexto de las deudas, solo se puede establecer la relación con el número entero positivo, pero no con el número entero negativo, por lo que resulta un obstáculo para aceptar el número negativo. Es decir, parece que la profesora Alma reconoce el potencial didáctico de estos contextos, pero no señala o no menciona que también pueden ser causa de confusión o impedir la construcción de su significado matemático.

5.2.1.5. Metros sobre y por debajo del nivel del mar

Chiu (2001) argumenta que los estudiantes pueden beneficiarse del razonamiento metafórico de varias maneras, esto incluye la comprensión de conceptos, la interpretación de representaciones y la conexión de conceptos. En este sentido, la docente se apoya en algunos contextos clásicos como la temperatura y metros sobre el nivel del mar, situaciones que los alumnos pueden reconocer por medio de su vida diaria o que hayan escuchado algo al respecto. Ella menciona que en alguna ocasión utilizó el ejemplo del Monte Everest, donde les específica a sus alumnos que los metros sobre el nivel del mar son cantidades positivas, de las negativas no refiere nada. Regularmente, en los libros de texto, hay dos maneras en que representan a los números negativos, por medio de una recta numérica o por medio de colores opuestos.

5.2.2. Concepto de adición y sustracción

La actividad número tres del momento didáctico del inicio de la propuesta didáctica está dedicada al concepto de suma y resta, sin embargo, en el diseño no hace una descripción o mención a qué se refieren estos dos conceptos. Con el objetivo de profundizar en ellos, en la entrevista se le preguntó lo siguiente:

Fragmento de la entrevista

…

E: El siguiente concepto que tú manejas es el de suma y resta ¿Cuál es el concepto de la suma?

A: De suma le digo, pues es … yo creo que es muy básico, pero igual les digo que es agregar, porque incluso en tercero luego cuando pasan al lenguaje algebraico, me ha tocado que no saben qué es agregar o no saben cómo representar eso de agregar. Entonces les digo que en la suma es… pues sí es agregar una cantidad a otra y pues la resta es quitar, es este… sustraer.

El concepto que refiere Alma para la suma es el de agregar una cantidad a otra, mientras que para el de resta lo concibe de dos maneras, como quitar y como sustraer.

5.2.3. Operatividad aditiva: adición de dos números enteros

La primera operación que trabaja durante la descripción de su propuesta didáctica es la adición de un número entero positivo más un número entero negativo, sin embargo, no se puede establecer si ese procedimiento lo aplica cuando los sumandos son dos números positivos o cuando son dos números negativos. Lo que lleva a suponer que la adición y la sustracción tenían el mismo significado para Alma. Sin embargo, en la primera entrevista se le pregunta por el significado de ambas operaciones y hace la diferencia.

Al especificar que la adición es parte de agregar una cantidad a otra se puede suponer que solo se agregan aquellas cantidades positivas o aquellas negativas, ya que en la operación que ella resuelve $(-7+5)$ no menciona la palabra *agregar*, en su lugar maneja la palabra cancelar y ésta lleva a quitar. Conceptualmente las dos operaciones están bien referidas, pero operativamente no. Con una sola operación no es suficiente establecer el significado que le otorga a cada una. Por ello, durante la entrevista se le solicita que resuelva tres adiciones y tres sustracciones por medio de la estrategia que utiliza para la enseñanza de este contenido (véase Apéndice B). Los ejercicios están descritos en la tabla 5.1.

5.2.3.1. Adición de dos números positivos

El primer ejercicio que resuelve Alma es $12+3=$, a lo que ella responde que es 15, con base en esto se le pregunta lo siguiente:

Fragmento de la entrevista

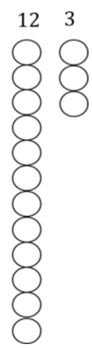
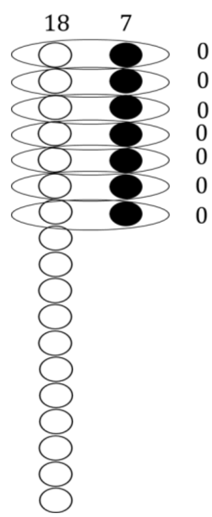
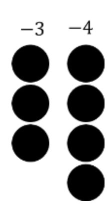
E: ¿Cómo le explicas esto a tus alumnos?

A: mmm… Bueno, yo creo que ahí no tienen tanta dificultad sabiendo que ya lo vieron en primaria, como que parto de ese supuesto.

Para realizar la adición de dos números positivos ($12+3=$), Alma dibuja 12 fichas azules y 3 fichas azules (obsérvese figura 5.8), por lo que identifica que los sumandos son positivos. Para obtener el resultado contabiliza el total de cuadritos azules que son 15. El concepto que utiliza de suma es de reunir porque sólo cuenta el número de fichas. Respecto a la enseñanza con los alumnos refiere que no hay tanta dificultad porque esto ya lo vieron en primaria, por lo que se infiere que es una adición de números naturales.

Tabla 5.1

Adiciones que se le propusieron a Alma

Ejercicio	Sumandos	Operatividad por el modelo Chino-Gallardo	Resultado	Descripción
$12 + 3 =$	Un número positivo más un número positivo		$+15$	Como ambos sumandos son positivos, se reúnen el total de bolitas.
$18 + (-7) =$	Un número positivo más un número negativo		$+11$	Como un sumando es positivo y otro negativo, al juntarse una bolita blanca con una bolita negra éstas se neutralizan, es decir, se obtiene cero y solo se cuentan las bolitas no neutralizadas.
$(-3) + (-4) =$	Un número negativo más un número negativo		-7	Como ambos sumandos son negativos, se reúnen el total de bolitas.

Descripción de las adiciones que se le propusieron a Alma en la entrevista y resolución por medio del modelo Chino-Gallardo.

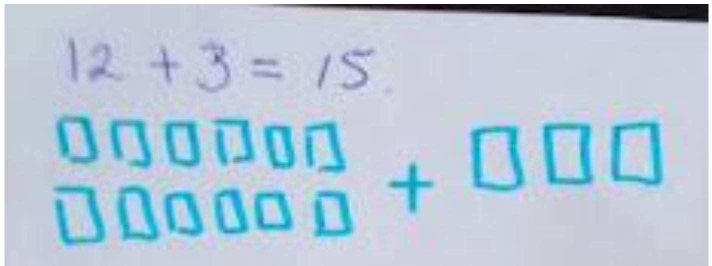


Figura 5.8. Dibujo que realiza Alma para representar la suma de dos números positivos.

Para la adición utiliza la notación horizontal, no utiliza el signo unario de los sumandos, solo el signo binario de la suma. Lo anterior consiste en realizar la suma de dos números naturales, ya que en el resultado solo escribe 15, sin signarlo. En relación con el modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994), la notación es vertical y el color para representar al número positivo es diferente, en concordancia con la operatividad reúne el total de fichas que le corresponde a cada sumando.

5.2.3.2. Adición de un número positivo más un número negativo

Al efectuar la adición de un número positivo con un número negativo $18 + (-7) =$, la profesora representa el número positivo dibujando 18 fichas (cuadritos azules) y para el número negativo 7 fichas (cuadritos rojos). Para calcular el valor de la suma tacha 7 cuadritos para ambos sumandos, es decir, realiza la neutralización, después solo cuenta el resto de los cuadritos (obsérvese figura 5.9). Cuando termina la operación menciona *me quedan más once, bueno, once positivo*. Para ella no hay una claridad entre la distinción del signo binario con el unario, sin embargo, el uso de los colores podría ser que Alma haga el reconocimiento del número entero positivo.

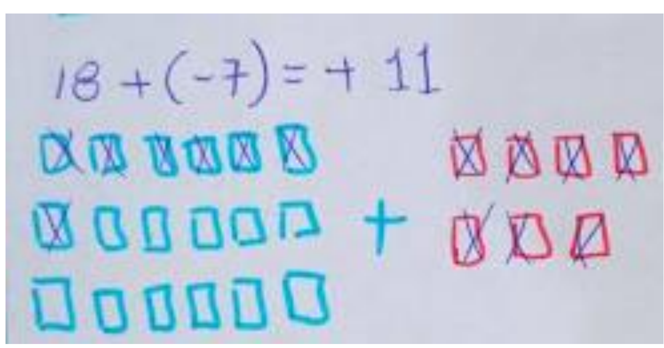


Figura 5.9. Dibujo que realiza Alma para representar la suma de un número positivo y un número negativo.

Operativamente elimina por una ficha azul una ficha roja, lo que da como resultado el cero y por eso solo se cuentan las fichas que quedaron sin neutralizar. En esta situación, el resultado de la adición es un número positivo. Cuando Alma menciona *es más once* y corrige a *es positivo once*, pudiera llegar a considerarse que hace un reconocimiento del número entero positivo y que distingue el signo unario del binario.

5.2.3.3. Adición de dos números negativos

Antes de realizar el procedimiento menciona que la respuesta es *menos siete*, por lo que no hace el reconocimiento del número negativo de manera verbal, aunque en su esquema si lo identifica por medio del color rojo. La adición la hace mental, realiza el procedimiento por medio de las fichas, dibuja para el primer sumando tres cuadritos rojos y para el segundo sumando cuatro cuadritos rojos (obsérvese figura 5.10).

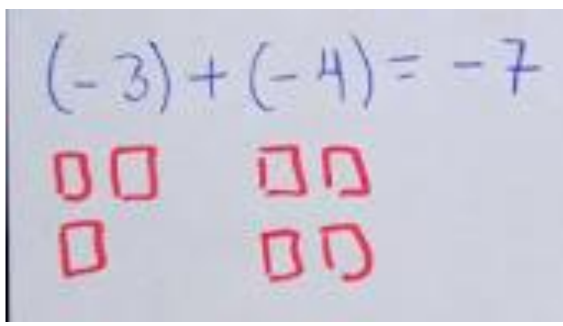


Figura 5.10. Dibujo que realiza Alma para representar la adición de dos números negativos.

Realiza la notación de manera horizontal, utiliza el color rojo para representar al número negativo, para determinar el resultado cuenta el total de fichas ya que son del mismo color, el concepto que utiliza para la suma es el de reunir. El procedimiento es similar al que utiliza en la adición de dos números enteros positivos. El color le ayuda a realizar la adición y definir si la suma será un número positivo o un número negativo.

Hasta el momento, se puede analizar que la adición de números enteros no representa un conflicto para Alma, ya que el uso de las fichas le permiten hacer la distinción entre números negativos y números positivos. Claramente se puede apreciar que este material le ayuda en la enseñanza de este contenido, porque como ella afirma permite a sus estudiantes que efectúen generalizaciones a partir de la misma práctica. En ninguno de los ejercicios se hace la distinción del signo unario del número y del signo binario de la operación, para ella es lo mismo un más que un positivo. Sin embargo, ella se percata por un momento de esa distinción cuando hace la adición de un número positivo más un número negativo.

5.2.4. Operatividad aditiva: sustracción de dos números enteros

La sustracción la define como quitar o sustraer, como lo especifica Alma, el concepto coincide con una de las tres conceptualizaciones de la sustracción definidas en el marco teórico, quitar para disminuir una cantidad. Sin embargo, en su propuesta no es posible observar cómo efectúa esta operación, por lo que en la entrevista se le solicita que resuelva tres sustracciones donde el minuendo y sustraendo son números enteros, los ejercicios están descritos en la tabla 5.2.

5.2.4.1. Sustracción de dos números positivos

La operación inicial propuesta a Alma es $34 - 15 =$. Sin embargo, la profesora no la resuelve, ella argumenta que no ocupa números tan grandes cuando los alumnos están aprendiendo la resta con números negativos. También señala que una vez que han practicado suficientemente el método, y con la finalidad de que no ocupen tantas fichitas, entonces sí suele proponer este tipo de tareas. En la entrevista resuelve la sustracción por $9 - 5 =$ (obsérvese figura 5.11).

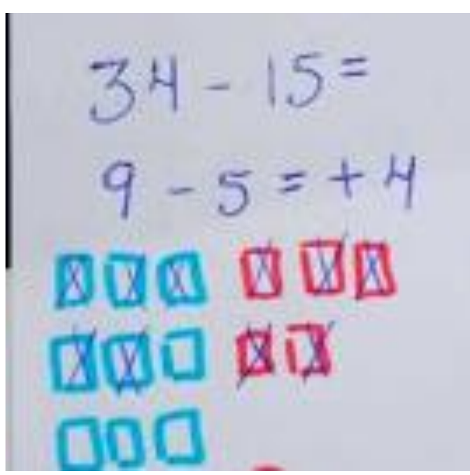
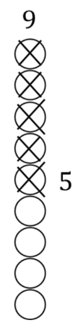
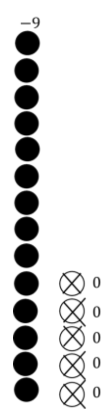


Figura 5.11. Dibujo que realiza Alma para representar la resta de dos números positivos.

Tabla 5.2

Sustracciones que se le propusieron a Alma

Ejercicio	Minuendo y sustraendo	Operatividad por el modelo Chino-Gallardo	Resultado	Descripción
$9-5=$	Un número positivo (mayor que el sustraendo) menos un número positivo (menor que el minuendo)		$+4$	Se coloca el número de bolitas blancas que le corresponden al minuendo y se quitan el número de bolitas correspondientes al sustraendo.
$-7-(-8)=$	Un número negativo (mayor que el sustraendo) menos un número negativo (menor que el minuendo).		$+1$	Se coloca el número de bolitas negras que le corresponden al minuendo y como no se le puede quitar el sustraendo, se le agrega un cero, entonces se puede hacer la sustracción.
$-9-5=$	Un número negativo (menor que el sustraendo) menos un número positivo (mayor que el minuendo).		-14	Se coloca el número de bolitas negras que le corresponden al minuendo, pero hay que sustraerle positivo cinco, por lo que se agregan 5 ceros hasta para poder sustraer el número positivo.

Descripción de las sustracciones que se le propusieron a Alma y resolución por medio del modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994).

Para efectuar la sustracción dibuja 9 cuadritos azules y 5 cuadritos rojos, por lo que signa al minuendo como un número positivo y al sustraendo como un número negativo, por lo que se observa que hay una confusión con el signo binario de la sustracción. El procedimiento que utiliza para la resolución de la operación es el mismo que usa para la adición de un número positivo y un número negativo, por cada ficha azul cancela una roja.

En relación con el modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994), solo tenía que haber dibujado las fichas correspondientes al minuendo para poder quitar las fichas correspondientes al sustraendo (obsérvese tabla 5.2 primer ejercicio) y con ello aplicar el concepto de resta que emplea. Además, al resultado de la resta le coloca el signo + sugiriendo que hay más azules que rojas, por lo tanto, es positivo.

5.2.4.2. Sustracción de dos números negativos

La sustracción para resolver es $-7-(-8)=$, por lo que Alma hace un cambio en la estructura de la sustracción y la convierte a una adición (obsérvese figura 5.12), en un principio no especifica qué procedimiento ocupa, pero se deduce que aplica la regla de los signos para la multiplicación de números enteros o el inverso aditivo del número.

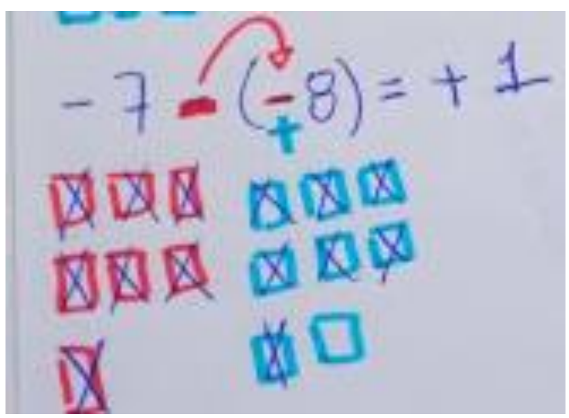


Figura 5.12. Dibujo que realiza Alma para representar la resta de dos números negativos.

Fragmento de la entrevista

E: La siguiente operación $-7-(-8)=$

A: Aquí les digo que es resta y como hay un signo negativo va a modificar el signo que está adentro, si lo tengo negativo ahora va a hacer positivo, me va a cambiar las fichitas de color por así decirlo. Yo aquí planeaba poner este … poner 8 fichas rojas, pero este signo (señala el signo de la resta) de afuera de la resta me va a hacer que ahora no sean rojas, ahora van a hacer azules. Así es como les explicaría a los chicos y hago el mismo procedimiento, solo aclarándoles que este signo que representa la resta (señala nuevamente el signo de la resta) va a hacer que cambie el signo del paréntesis.

E: ¿Por qué cambia el signo?

A: ¡Ay! … hay no sé, que mala (se ríe), no, no sabría cómo decirles porque de hecho si tuve conflictos ahorita, ahorita tuve primer año y no supe cómo explicarles esa parte, si les decía que así como te explicaba a ti, cuando tengo un signo negativo fuera del paréntesis (señalando el signo de la sustracción) hace que me cambie el signo que está adentro, es así como una regla, pero no supe explicarles por qué, porque yo lo manejo así, yo le entendía que era por la ley de los signos de multiplicación menos por menos, más, pero en ese punto cuando abordas este tema en primero, se empieza con suma y resta. Entonces, aún no han visto la ley de los signos de la multiplicación, entonces, por eso no mmm… no sé explicarles por qué, nada más les menciono la regla.

La sustracción no se efectúa porque ella cambia el signo negativo del sustraendo por uno positivo aplicando el inverso aditivo, esto lleva a suponer que el hecho de que el número negativo se encuentre entre paréntesis signifique una multiplicación. En su descripción solo hace hincapié que debe de cambiar el signo, pero está muy consciente de que no puede aplicar la regla multiplicativa de números enteros, porque es un contenido de otro grado. En este aspecto, Alma sigue recurriendo a la programación de contenidos con base en el Plan y programa de estudios. Entonces, cuando ella identifica lo relevante de la tarea matemática y vincula el aprendizaje de sus alumnos con los objetivos curriculares es una manifestación de la competencia docente (Llinares, 2013).

En el modelo Chino-Gallardo (Gallardo, 1994), solo tenía que dibujar los cuadritos rojos para representar el sustraendo y dibujar un cero (un cuadrito rojo y un cuadrito azul) para poder sustraer el otro número y así poder llegar al resultado de positivo uno.

5.2.4.3. Sustracción de un número negativo menos un número positivo

La última sustracción que realizó Alma es $-9-5=$, se toma un momento para analizarlo, en un inicio comenta que ya había hecho este ejercicio, pero después se da cuenta de que es diferente. Ella, para efectuar la sustracción dibuja únicamente cuadritos de color rojo, signando al número cinco como un número negativo debido al signo de la resta que le antecede (obsérvese figura 5.13). El resultado se obtiene de contar el número total de cuadritos rojos que hay. En ningún momento se observa que realice la resta, efectúa el mismo procedimiento de la adición, reunir. La sustracción está compuesta por un número negativo y un número positivo, por lo tanto, en el esquema que ella representa se tendría que observar esa distinción.

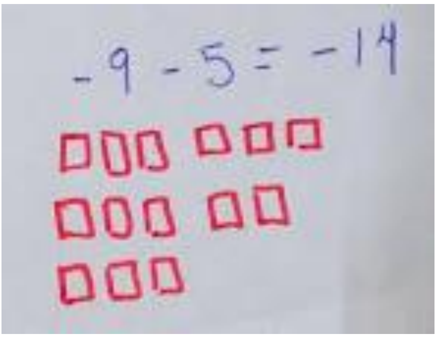


Figura 5.13. Dibujo que realiza Alma para representar la resta de dos números negativos.

Únicamente en el primer ejercicio se puede observar la resta, en los siguientes dos evita la resta y realiza el mismo procedimiento que en la suma. Aunque el método es dominado para la suma, para la resta existe un conflicto y ella lo detecta, además afirma que no sabe cómo plantearlo a los alumnos. Lo que refiere a la enseñanza, el uso de cifras grandes es un problema, ya que el número de fichas que se utilizan no alcanzarían para poder representar las cantidades. De hecho, las cantidades grandes se suelen utilizar cuando los alumnos han repasado el procedimiento varias veces y aplican la ley de la suma y la resta. Aunque en el segundo ejercicio aplicó la regla multiplicativa del número entero (el producto de dos números negativos es positivo), este contenido se trabaja hasta segundo grado, por lo cual no encuentra cómo explicarles a sus estudiantes sin tener que aplicar esta regla.

El modelo que utiliza Alma es muy compatible y utilizable para poder realizar la adición de números enteros, porque su estrategia consiste en ocupar fichas azules y fichas rojas para poder aparearlas y así cancelar una por una, con la finalidad de llegar al resultado. Sin embargo, para la resta no es muy viable, ya que en ninguno de los ejercicios propuestos se puede observar el concepto de sustracción que ella propone.

5.3. Mirada profesional de Alma

Esta investigación permitió observar de una manera cercana la mirada profesional de Alma respecto a la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, ya que pone en juego sus conocimientos y destrezas para el diseño y desarrollo de tareas que le den una estructura a su propuesta didáctica. Llinares (2013) enfatiza que la elección y adaptación de tareas constituye una actividad profesional importante del profesor.

La selección de tareas está asociada a tres conocimientos. El primero a lo matemático, el cual tiene que ver con la conceptualización del número entero y, cómo define y opera aditivamente. El segundo con lo didáctico, a partir del uso que le da al modelo de las fichas, los contextos cotidianos que emplea para sustentar conceptualmente al número entero, lo modelos de representación y la manera en que se apoya de estos para dar sentido al número entero y su operatividad. El tercero con lo profesional, que le permite decidir la gestión de la propuesta: definir el trabajo autónomo, en binas y grupal, el uso de contextos cotidianos para la operación de suma y de resta (lo que funciona y lo que no), anticipar las dificultades de los estudiantes, el uso de números no demasiado grandes con el modelo de fichas, y cuándo pasar del modelo de fichas a las operaciones.

A lo largo de su práctica profesional Alma ha desarrollado una competencia docente denominada por Llinares (2013) como *Mirada profesional*, la cual le permite tomar decisiones para la enseñanza de cualquier tema, ya que a partir de su experiencia en el aula ella se hace experta sobre las formas en que puede impartir una clase considerando lo que puede favorecer a la enseñanza y lo que puede ser una dificultad. Así, el uso del conocimiento en la práctica profesional le permite hacer una reflexión para darse cuenta de aquellos aspectos que en su práctica no están bien cimentados.

La mirada profesional le permite a Alma que sea consciente de las dificultades que tiene para utilizar en su enseñanza el modelo de fichas en la sustracción con los números enteros. Por lo tanto, evita enseñar la operación de la sustracción con ese modelo y recurre a presentar la ley de los signos de la multiplicación, sin que haya logrado generar una explicación acorde con su propuesta didáctica. Asimismo, su mirada profesional le permite observar y analizar estos conflictos en sus estudiantes, incluso, la misma experiencia a lo largo de los años ha hecho que ella identifique esto. Es decir, solo un profesor de matemáticas se hace profesional en la misma práctica, adoptando y adaptando tareas para su enseñanza. En este caso, Alma adapta el modelo de fichas, utilizándolo ampliamente para la suma, pero poco para la sustracción. Lo anterior, se relaciona con lo que afirma Mason (2002), al darse cuenta de las dificultades le sirve para adaptar su propuesta a lo que ella considera que puede manejar con sus estudiantes y lo que no, lo evita.

La competencia docente mirar profesionalmente se centra en el conocimiento matemático del profesor enfocado en diferentes dominios específicos, ante esto la investigación permite identificar la noción que tiene Alma sobre el número entero, ella no lo define como un conjunto de números que parte de los números naturales, sino como aquellos números cuyo signo los distingue entre números positivos y números negativos. Además, los asemeja como números opuestos entre sí y esto lo hace reiteradamente a lo largo del diseño de su propuesta didáctica. Para representarlos utiliza dos colores, azul para los positivos y rojo para los negativos.

Incluso recurre a la recta numérica para especificar su posición en relación con el cero, positivos a la derecha de este y negativos a la izquierda.

Sin embargo, en su definición se observa que la manera en que define al número entero no refleja los fundamentos matemáticos apropiados para que se establezca una conceptualización formal de este conjunto de números. Por lo tanto, cuando ella trabaje esto con sus alumnos, se convertirá en un obstáculo didáctico, como lo refiere Bishop et al. (2014), será útil para ciertos contextos, pero aplicarlo a un nuevo problema o nuevos contextos será inadecuado, como ocurrió en el contexto de las deudas.

Alma realiza la adición y la sustracción por medio del modelo de las fichas, por lo que en esta idea sigue teniendo la noción de que el número positivo y el número negativo son opuestos. Si se parte del concepto matemático tiene un acercamiento, no obstante, no logra reconocer que el número entero es una extensión del número natural.

Al llevar a cabo la aditividad del número entero apela a la idea conceptual de agregar para la adición y quitar para la sustracción, algo que ella realiza con base en la operatividad aditiva del número entero, incluso en su discurso enfatiza que los alumnos no presentan ningún conflicto cuando se trata de operaciones con números naturales o positivos. Sin embrago, no es el caso para los números negativos. Específicamente, en la resta de números negativo es donde se observa una limitante de su conceptualización teórica.

La adición es ampliamente expresada por medio de su modelo, porque le permite llegar a la construcción de la regla sintáctica. Sin embargo, cuando los sumandos son positivos y negativos, aplica el concepto quitar y esto refiere a una sustracción. Un obstáculo cognitivo que se logra observar en Alma es en relación con la sustracción de números enteros, porque confunde la sustracción con el número negativo. Por ello, en los ejercicios que se le proponen no logra realizar las sustracciones, sino que las convierte en adiciones para aplicar el mismo procedimiento, y en todo momento, evita la resta. De hecho, en la misma entrevista ella enfatiza que es algo que le cuesta trabajo explicar, ya que su estrategia no le permite establecer esa relación, lo que conlleva a inferir que evita este tipo de operaciones. Es decir, la manera en que utiliza su modelo didáctico es limitada.

De lo anterior se pueden observar dos obstáculos, el didáctico y el epistemológico. Si bien, Alma refiere que la estrategia que utiliza la aprendió en un curso que tomó en el centro de maestros, en el cual esta estrategia pudo no haber sido impartida adecuadamente. Ella refiere que tiene un conflicto con la resta, y es observable que el modelo no le ayudó a superarlo, por ende, es algo que sigue trasmitiendo a sus estudiantes. Lo que se anticipa como un obstáculo didáctico. Con relación al segundo, históricamente la aceptación del número entero, específicamente con el número negativo, no era muy bien visto, por lo que actualmente es común que se signe al número negativo con el signo binario de la operación, porque a pesar de los años es un conflicto que se sigue transmitiendo.

Alma hace uso de su conocimiento didáctico (Rico, 2015), ya que en el momento que conoce esta estrategia decide hacer uso de ella y la adapta a sus necesidades. Su conocimiento profesional permite a la profesora apreciar que el uso de este material ha sido un éxito para la enseñanza de la adición y sustracción del número entero porque es algo con lo que sigue trabajando. Aunado a esto, una potencialidad asociada a su propuesta didáctica es el material concreto que utiliza para la operatividad del número entero (que son las fichas de color rojo y las fichas de color azul), ya que aportan una representación física y concreta para este tipo de números, además, permite el reconocimiento de cantidades opuestas entre el número entero positivo y del número entero negativo. Con ello, se puede establecer la relación cuando se opera con dos enteros positivos, dos enteros negativos o uno y uno.

La competencia docente de Alma le permite analizar tareas matemáticas de tal manera que ésta puede potenciar en sus alumnos el aprendizaje, en este sentido, el material concreto tiene un potencial didáctico para enseñar la operatividad de la adición, pero no así para la sustracción. Esto se debe a que en el curso que tomó no lo explican la forma de operar con la segunda operación, por lo que ella recurre a su experiencia con la operatividad multiplicativa para poder llegar a la solución correcta de la operación.

Los contextos cotidianos empleados por Alma muestran potencialidades y obstáculos. El contexto de la temperatura tiene un potencial didáctico ya que tiene un acercamiento real al uso de los números enteros, porque el termómetro ayuda a visualizar la simetría de dos números enteros respecto al cero, lo que brindaría una oportunidad para la conceptualización del número entero, sin embargo, no logra observar esto. Referente a las deudas surge un obstáculo cognitivo para poder usar este conjunto de números, porque en algunos casos solo puede utilizar a los naturales y no hacer la extensión a los negativos. Por lo tanto, puede impedir el aprendizaje de la sustracción de números enteros.

Respecto a la recta numérica es el contexto con más potencial didáctico que presenta, porque le concede hacer una representación física del número entero y con ello es posible hacer la extensión del número natural al entero a partir de cantidades opuestas. Sin embargo, no lo utiliza de esa manera porque solo distingue la parte de ubicar números y establecer el sentido que toma un número entero: positivo a la derecha y negativo a la izquierda.

La enseñanza realizada por Alma constituye un objeto de estudio muy abundante, ya que, por medio de los dos instrumentos, la propuesta didáctica y la entrevista, se pudo analizar a profundidad la manera en que desarrolla sus actividades a partir de los conocimientos matemáticos, didácticos y profesionales que ha adquirido a lo largo de su experiencia docente. Así como la forma en que su falta de conocimientos teóricos le impiden apropiarse del uso de su modelo didáctico para enseñar la operación de la sustracción con números enteros.

En este capítulo también se evidencia la manera en que ella pone en juego su mirada profesional para la enseñanza del tema adición y sustracción del número entero y cómo la misma experiencia hace que tome decisiones en tenor del aprendizaje de sus estudiantes. Además, es consciente de las dificultades que presenta en relación con la sustracción de números negativos y encuentra formas de superarlas, que resultan poco adecuadas para la enseñanza en el primer año de secundaria.

5.4. Respuestas de las preguntas de investigación

El principal tema de esta investigación se centra en la enseñanza de la adición y sustracción del número entero, vista desde la perspectiva de una docente. Los cuestionamientos que guiaron esta investigación son dos, el primero en relación con los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego al realizar la propuesta didáctica y segundo la mirada profesional de la docente frente a este tema.

La primera pregunta es ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos y didácticos que pone en juego la profesora al realizar las actividades de la propuesta didáctica? Se halló que los conocimientos matemáticos que refiere Alma para el desarrollo de su propuesta están enfocados a la conceptualización formal del número entero, al procedimiento de operar aditivamente con este conjunto de números y la construcción de reglas para que sus alumnos puedan utilizarlas al realizar ejercicios. Además, le permite diseñar actividades conforme a las habilidades y necesidades de sus estudiantes considerando las dificultades del mismo contenido.

Respecto al conocimiento didáctico es la forma en que Alma utiliza el conocimiento matemático para que pueda enseñar a sus alumnos. Para ello, utiliza contextos cotidianos (*p. ej*. temperaturas, deudas e ingresos, pisos de elevadores) que le permiten entrelazar la parte conceptual del número entero con la vida cotidiana, así, el estudiante puede tener una idea aproximada de su utilidad. Para la operatividad aditiva usa un modelo de neutralización el cual lo aplica por medio de fichas de dos colores, azules y rojas. Esto accede que sus estudiantes puedan ver la neutralidad, aunque ella no lo especifique en ningún momento.

Desde el uso de los ejemplos cotidianos hasta el uso de las fichas de dos colores, determina que Alma tiene presente la oposición de las cantidades, es decir, lo contrario, lo opuesto a un número positivo es un número negativo y esto es algo que se observa en toda la propuesta didáctica.

La segunda pregunta de investigación ¿Cuál es la mirada profesional de la docente con relación a la enseñanza de la adición y sustracción del número entero? La mirada profesional de Alma se basa en la valoración de su práctica profesional considerando su experiencia. Es decir, de la forma en que sus conocimientos profesionales se relacionan con los conocimientos matemáticos y didácticos (explícita e implícitamente). Todo el bagaje que ha adquirido le permite tomar decisiones para organizar, definir y analizar sus conocimientos para poder plasmarlos en una propuesta cuyo objetivo es que sus alumnos puedan aprender. Así, la mirada profesional de Alma permite centrar su atención en aquellos aspectos que puedan potencializar su práctica profesional, como el uso del material didáctico, sin embargo, también puede detectar aquellos que le presentan cierta dificultad, como realizar la operación de la sustracción con números negativos.

Ella tiene una formación inicial normalista, aunque, durante su trayecto formativo no recuerda que la escuela le haya podido brindar herramientas para este tema, se puede observar que desarrolló las competencias didácticas y esto recae en su mirada profesional, que en gran medida parte de su experiencia escolar y su formación continua. Y que muy posiblemente, haya integrado los conocimientos construirlos en la formación de una manera tal, que ahora le sea imposible reconocerlos. A lo largo de su trayectoria como docente, ha elegido la mejor manera de que sus alumnos puedan resolver ejercicios de adición y sustracción de números enteros y el uso de este modelo le ha brindado confianza.

CAPÍTULO 6
CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de esta investigación, tomando en cuenta la importancia que tuvo el estudio de caso, la noción del número entero y su operatividad, visto desde el sujeto de investigación y cristalizado a través de su mirada profesional. Además, se sugieren algunas ideas sobre futuros estudios que se pueden indagar a partir del trabajo realizado en esta tesis.

6.1. Conclusiones generales

El planteamiento del problema brindó una mirada amplia sobre lo relevante que ha sido la enseñanza del número entero, así como su operatividad aditiva y las dificultades que aún siguen persistiendo principalmente en la sustracción, pese a las investigaciones que se han realizado (*p. ej*. Salinas, 2022; Mendoza, 2018; Cid y Bolea, 2007; Gallardo, 1994; Küchemann, 1980).

El estudio de caso, para esta investigación brindó una mirada muy cercana sobre lo que una docente de nivel secundaria aplica con sus estudiantes sobre el tema de adición y sustracción del número entero. Además, este método permitió profundizar sobre la mirada profesional que tiene la profesora y cómo es que ésta influye de manera directa en su actuar. El estudio de este caso no se hizo con la finalidad de llegar a generalidades sino a particularidades, porque Alma deja en esta investigación una dirección que se puede abordar hacia otros profesores en su misma situación.

Las condiciones en las que se llevó esta investigación no fueron las más oportunas porque debido a la pandemia las entrevistas y el contacto con la profesora se tuvieron que hacer a distancia por medio de una plataforma virtual y vía WhatsApp. Ante esto, la disposición que presentó Alma en todo momento hizo que se pudiera indagar más profundamente, pocos docentes muestran tal interés, ya sea por miedo a equivocarse o por no querer ser exhibidos. En este caso, Alma lo vio desde un punto diferente, ya que la entrevista le permitió reflexionar sobre algunos aspectos de su misma práctica y reconocer que aún tiene ciertos conflictos, específicamente con la sustracción de número enteros.

Respecto a los conocimientos matemáticos y didácticos de Alma en torno al número entero, no hay una definición formal del concepto del número entero, pero sí hay un reconocimiento de un número positivo y de un número negativo, los cuales son representados por medio de dos colores azul y rojo. En todo momento, ella mantiene la idea de que los números enteros son cantidades opuestas. El número entero fue ejemplificado por medio de contextos clásicos, porque para ella es importante que sus estudiantes puedan relacionar la matemática con la vida cotidiana, además, el uso de contextos cotidianos está sugerido tanto el Plan y Programa 2011 como en el 2017. Por lo cual, se considera, que ello también tiene influencia en que sean utilizados como referentes para el diseño de su propuesta didáctica.

Sus conocimientos profesionales aunados y relacionados con los conocimientos matemáticos y didácticos, anteriormente descritos, permiten a Alma determinar el modelo de fichas como medio para que los alumnos generen conclusiones a partir de lo que realizan, en este caso, a generar las reglas para poder operar aditivamente con este conjunto de números.

Cuando opera aditivamente el concepto de sustracción lo aplica para el de adición ya que cuando hay una suma de un número positivo más un número negativo, el término de cancelar lo traslada al de quitar y esto es un término de la resta. Así, los obstáculos que permanecen en ella son el ontogenético y el didáctico, porque solo pone en práctica lo que aprendió durante su formación académica. Por ende, esto impactará de manera directa con su enseñanza, porque la elección de sus estrategias resultará eficaz para el aprendizaje de ciertos contenidos. En este caso, el uso de las fichas fue oportuno para llevar a cabo la adición de dos números enteros, pero no para la sustracción de este conjunto de números.

Una de las características de la formación de profesores normalistas según el Plan y Programa 1999 (que fue con el que se instruyó Alma) es que se rigen bajo un enfoque matemático y didáctico. Sin embargo, durante la entrevista se descubre que ella no recuerda haber trabajado nada con relación al conjunto de los números enteros, pero sí en relación con las fracciones. Su mirada profesional conformada a lo largo de su experiencia docente, que incluye la instancia de formación continua, los conocimientos profesionales generados en los diferentes contextos que ha laborado y en la producción de adaptaciones a su enseñanza con el objetivo de satisfacer las cambiantes exigencias curriculares y sociales, expresadas en las necesidades de sus estudiantes, es lo que le da la pauta para que ella determine qué actividades son las más oportunas para la enseñanza de este tema, así, su formación continua se ve influenciada por su ejercicio profesional.

6.2. Futuros estudios

Después de realizar este trabajo surgen dos líneas de investigación, la primera orientada hacia los profesores en servicio, haciendo dos interrogantes ¿Qué sabe un docente referente a los números enteros y su operatividad? Y ¿Qué debería saber para su enseñanza? Aunque hay investigaciones en el tema como el de Mendoza (2018), se podría proponer un taller específico para los docentes en el que se reflexione sobre el uso de modelos concretos en la enseñanza de los números enteros, así como enfoques hacia la modelización matemática y al uso de contextos diversos, (clásicos y científicos), donde el producto sea una propuesta didáctica donde aborden los conocimientos matemáticos y didácticos. Así como un análisis de la mirada profesional de los docentes y cómo puede ser considerada en la creación de este tipo de talleres.

La segunda línea de investigación es con relación a la formación que reciben inicialmente los docentes. Si bien, en el planteamiento del problema se vislumbró que hay varios perfiles para impartir la asignatura de matemáticas a nivel secundaria, se reconoce que en los últimos años se ha pretendido valorar la formación normalista. Por ello, se tendría que mirar hacia esta formación para saber quién forma a los futuros profesores y cuál es el enfoque de formación actual en relación con los números enteros. Asimismo, sería interesante poder formar en el desarrollo de la mirada profesional, generando actividades que permitan recrear instancias de la práctica docente en la formación, como lo han venido proponiendo diferentes investigadores (Mason 2002; Llinares 2013; Parodi 2021;), sin que aún se haya considerado la enseñanza de los números enteros y su operatividad, tema fundamental en la enseñanza de las matemáticas del nivel secundaria.

REFERENCIAS

Aké, L. (2021, Noviembre 16). *Inclusión en la formación docente: Posibilidad o fantasía* [sesión de conferencia]. 3er Encuentro Estatal de Enseñanza de las matemáticas, Baja California. https://fb.watch/kQOBeE79Cs/

Arcavi, a. bruckheimer, m. (1981). How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers? *Mathematics in School*, 10(5), 31-3.

Bachelard, G. (2002). *The Formation of the Scientific mind*. (M. McAllester Jones, Trans.). Manchester. Clinnamen Press. (Original work published 1938).

Bell, A. (1982). Looking at children and directed numbers. *Mathematics Teaching*, *100*, 66-72.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. & Lewis, M. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An analysis of children´s Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 19-61.

Bisquerra, R. (2000). Clasificación de los métodos de investigación. En *Métodos de investigación educativa*. Barcelona. Ceac.

Bittar, M. & Gonçalves, K. (2015). As operações de adição e subtração dos números inteiros em livros didáticos do 7º ano de ensino fundamenta. En de Souza, A., Blauth, I. y Silva, A. (Eds). *Actas del IX seminário SUL-Mato- Grossense de pesquisa em educação matemática*, 58 -71. SESEMAT.

Borba, R. (1995). Understanding and operations with integers: Difficulties and obstacles. *Proceedings of the 19th International Conference of* Psychology *of Mathematics Education*, *2*, 226- 231.

Bruno, A. & Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en España. *Educación Matemática*, 18(3), 125-149. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518306

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. *PNA*, *3*(2), 87-103.

Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En X. Martínez, & P. Camarena. *La educación matemática en el siglo XXI*, México: Editorial Colección paideia siglo XXI.

Carnot, L. (1803), Géométrie de position, J.B.M. Duprat, Libraire pour les Mathématiques, París.

Celigueta, G. & Solé, J. (2013). Etnografía para educadores (1ra ed.). UOC.

Chiu, M. (2001). Using Metaphors to Understand and Solve Arithmetic Problems: Novices and Experts Working with Negative Numbers. *Mathematical Thinking and Learning*, *3*, 93-124.

Cid, E. & Bolea (2007, febrero 1-16). *Diseño de un Modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico* (presentación de documento). II Congreso Internacional sobre Teoría Antropológica de la Didáctica, Úzes, Francia.

Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *En Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano, 31*, 529-542.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. *En Publicaciones del seminario matemático García de Galdeano*, 25, 5-7. https://reneues.files.wordpress.com/2019/04/del-cid-los-numeros-negativos-investigacion-didactica.pdf

Cid, E., Godino, J., & Batanero, C. (2002). *Sistemas Numéricos y su Didáctica para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros (2da. ed.). Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/2_Sistemas_numericos.pdf

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Case studies. Research Methods in Education* (6ta. ed). Routledge.

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2022). Tablas descriptivas para la evaluación diagnóstica. Recuperado el 10 de septiembre de 2022 de https://www.mejoredu.gob.mx/evaluacion-diagnostica-2022

Consejos Técnicos Escolares. Gobierno del Estado de México (2021). Recuperado 29 de mayo de 2022, de https://seduc.edomex.gob.mx/consejos-tecnicos-escolares#:~:text=El%20Consejo%20T%C3%A9cnico%20Escolar%20es,de%20decisiones%20que%20propician%20la

Dolores, F. (2014). La formación profesional de los profesores de matemáticas. En C. Dolores, F. García, J. Hernández & L. Sosa (eds). *Matemática educativa: La formación de profesores* (pp. 13-25). Díaz de Santos.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(4), 411-424.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. Iberoamérica.

Gallardo, A. (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. (Tesis doctoral inédita). CINVESTAV.

Gallardo, A. (1996). Qualitative analysis in the study of negative numbers. In L. Puig & A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Group for the Psychoology of Mathematics Education, 2*, 377-384. Universidad de Valencia (Spain).

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 171-192.

Gallardo, A. & M. Romero (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. *Proceedings of the 21th International Conference of* Psychology *of Mathematics Education,* 1, 226-231.

Gonçalves, K., & Bittar, M. (2017). A Distância entre o saber acadêmico e o saber ensinado revelado em um livro didático de matemática do 7º ano: o caso da adição e subtração com números inteiros. Amazônia. *Revista de Educação em Ciências e Matemática*, 13(27), 107-123.

Guber, R. (2015). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad*. Siglo XXI Editores.

Hefendel-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to intelectual Constructs. *For the Learning on Mathematics* II, 1, 26-32.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). Resultados Nacionales 2015. Matemáticas. http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2015/PlaneaFasciculo_10.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2018). Planea Resultados nacionales 2017. 3º de secundaria Lenguaje y Comunicación, Matemáticas http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). Evaluación del desempeño docente. *Red*, 2, 4-11. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/Red02PDF.pdf

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. *Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of Psychology of Mathematics Education* (295-300). Montreal

Küchemann, D. (1980). Children's Understanding of Integers. *Mathematics in School*, *9*, 31-32.

Léonard, F. & Sackur, C. (1990), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherché. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

Liebeck, P. (1990). Scores and Forfeits - An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(3), 221-239.

Llinares, (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50*, 117-133.

Lytle, P. (1994). Investigation of a model based on the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, *3*, 192-199. Lisboa.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge.

Maza, C. (1989). *Sumar y restar: El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta*. Visor.

Mendoza, E. (2018). *Caracterización de la enseñanza de los enteros en docentes de educación secundaria* (Tesis de maestría inédita). CINVESTAV.

Navarrete, Z. (2015). Formación de profesores en las Escuelas Normales de México. Siglo XX. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*. *17*(25), 17-34.

Parodi, S. (2021). Acerca de la mirada profesional del profesor. *Reloj de agua*, *24*, 28-38.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *33*, 11-27.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En Flores, P. & Rico, L (Eds). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. 21-40. Pirámide.

Rivero, F. (2020). *Análisis de prácticas lingüísticas en torno a la enseñanza de los números enteros. Un estudio exploratorio.* [Tesis de maestría, CICATA, IPN]. Repositorio Institucional. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2020/rivero_2020.pdf

Rodríguez, G., Gil, J. & García, E. (1999). El análisis en la secuencia de investigación. En *Metodología de la investigación cualitativa,* 44-48. Aljube.

Salinas, G. (2022). *La enseñanza de los números positivos y negativos en estudiantes de primero de secundaria, desde la experimentación en el laboratorio* (Tesis doctoral inédita). CINVESTAV.

Secretaría de Educación Pública. (1999). *Plan de estudios 1999. Licenciatura en Educación Secundaria. Documentos básicos. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento académicos de las Escuelas Normales.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Los números y sus relaciones. Programa de estudio. Licenciatura en Educación Secundaria. Especialidad: Matemáticas. Tercer semestre. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento académicos de las Escuelas Normales.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas. SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Matemáticas. Educación Secundaria. Plan y Programas de Estudio, Orientaciones didácticas y Sugerencias de Evaluación*. SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Catálogo de Perfiles. Educación Básica.* https://www.usebeq.edu.mx/PaginaWEB/Content/PromocionFuncionIncentivos/CAT%C3%81LOGO%20DE%20PERFILES%20EDUCACION%20BASICA.pdf

Sesiano, J. (1985). The appearance of negative solutions in mediaeval mathematics. *Archive for History of Exact Sciences*, *32*(2), 105-150.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso* (2da. ed). Morata.

Suárez, R. (2002). *La educación. Teorías educativas, estrategias de enseñanza aprendizaje*. Trillas.

Taylor, S. & Bogdan, R. (1987). Introducción ir hacia la gente. En *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Paidós.

Wood, P. (1987). *La escuela por dentro*. Paidós.

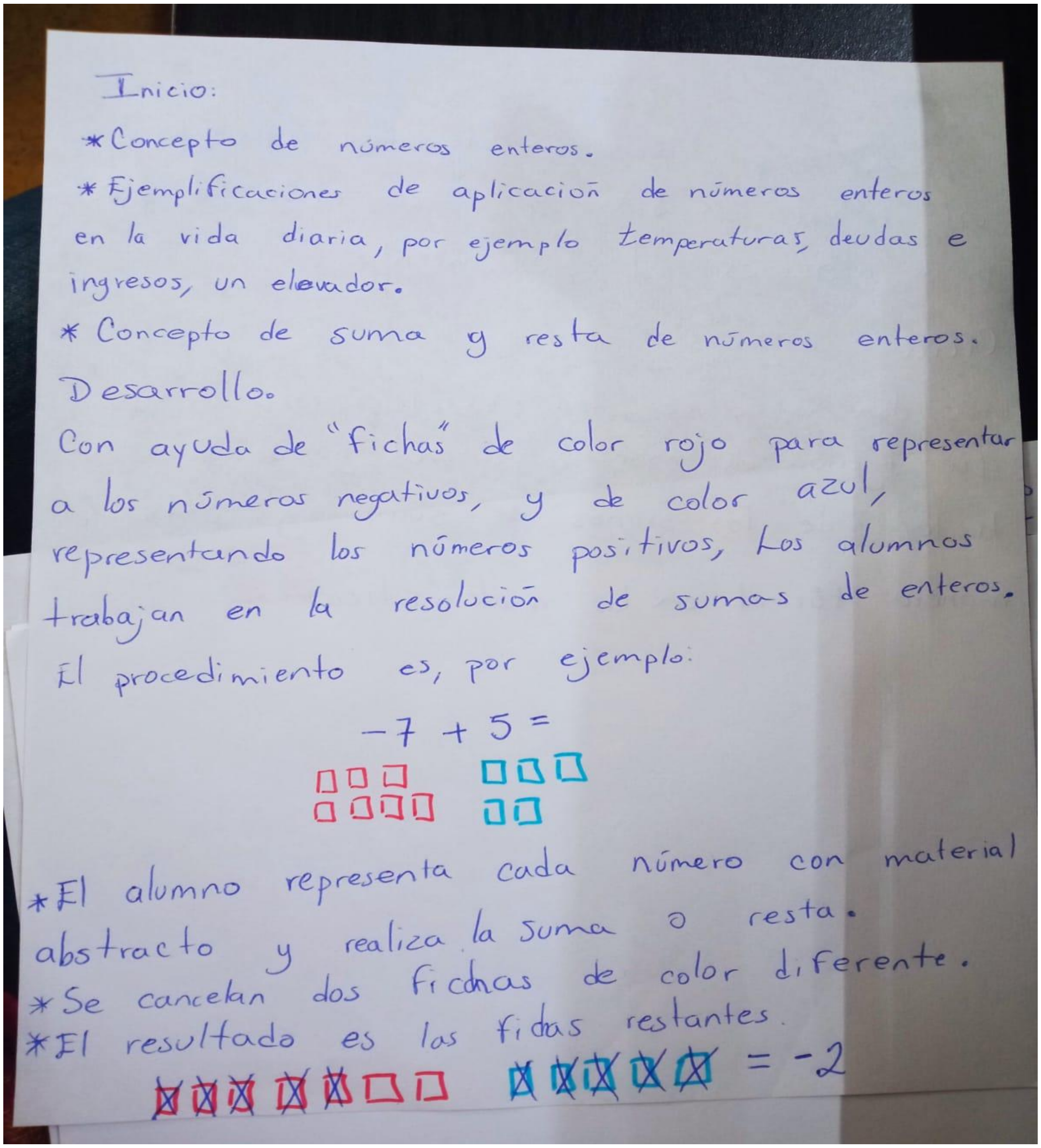
Zabala, A. (2000). La práctica educativa: Cómo enseñar (7ma. ed.). Grao.

Zapatera, A. (2019). Descriptores del Desarrollo de la Mirada Profesional en el Contexto de la Generalización de Patrones. *Bolema, 33(65)*, 1464-1486. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a23

APÉNDICES

Apéndice A

Propuesta didáctica elaborada por la profesora Alma.



Inicio:

* Concepto de números enteros.
* Ejemplificaciones de aplicación de números enteros en la vida diaria, por ejemplo temperaturas, deudas e ingresos, un elevador.
* Concepto de suma y resta de números enteros.

Desarrollo.

Con ayuda de "fichas" de color rojo para representar a los números negativos, y de color azul, representando los números positivos, Los alumnos trabajan en la resolución de sumas de enteros.

El procedimiento es, por ejemplo:

$$-7 + 5 =$$

* El alumno representa cada número con material abstracto y realiza la suma o resta.
* Se cancelan dos fichas de color diferente.
* El resultado es las fichas restantes.

$$= -2$$

El alumno práctica con diferentes ejemplos este metodo en binas, con el objetivo de que pueda abstraes el conocimiento.

Cierre.

Se dan a conocer las conclusiones a las que llegaron de manera personal y se precisa la ley de los signos de suma y resta de manera fórmal en las matemáticas.

Apéndice B

Operaciones realizadas por la profesora Alma por medio del modelo Chino-Gallardo.