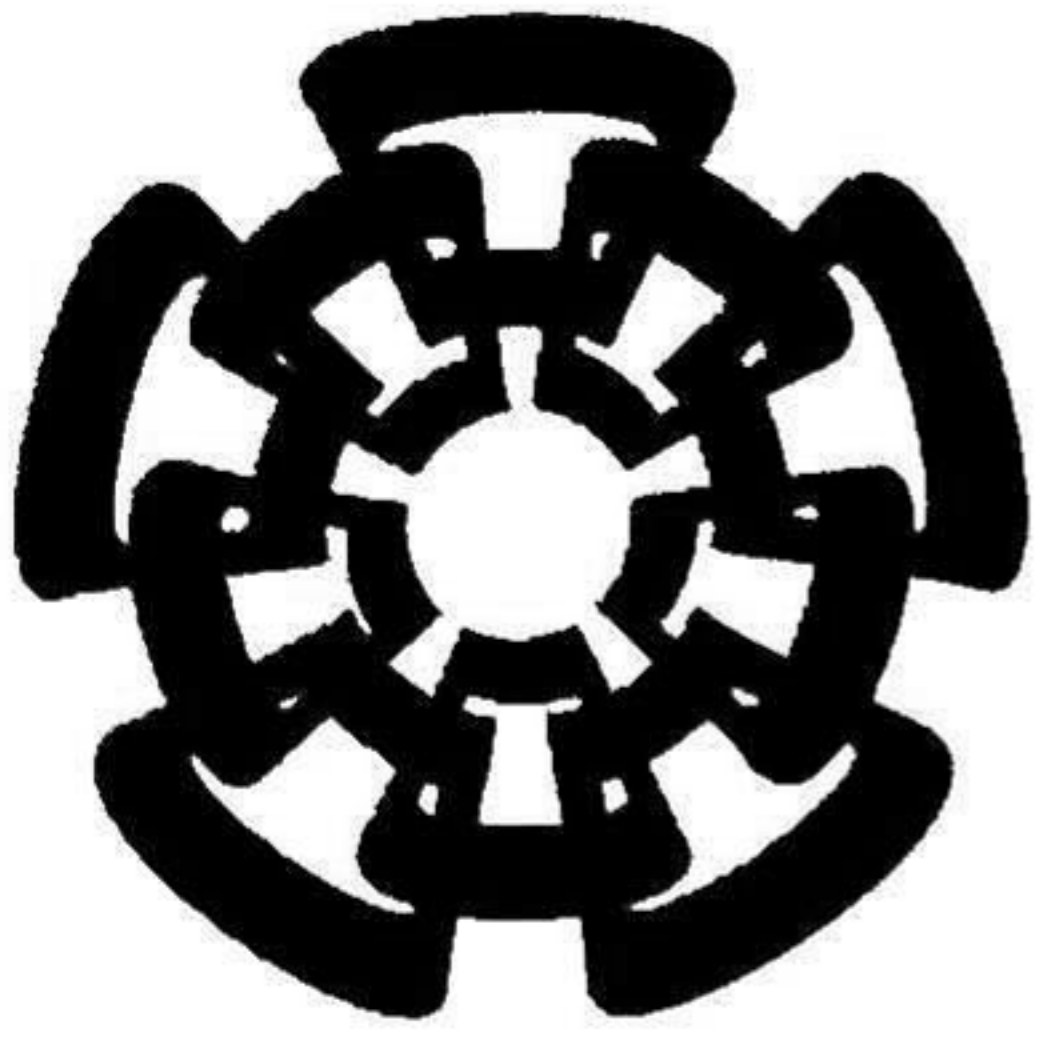


XXC135291.1)



CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Mapas tridimensionales para navegación robótica

CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS

Tesis que presenta:
Miguel Bernal Marín

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

CINVESTAV IPN
USB INFORMACION Y DOCUMENTACION
SERVICIO DOCUMENTAL

Director de Tesis
Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

Guadalajara, Jalisco, Julio de 2007.

CLASIF.: 7 K165.48 . B47 2007
ADQUIS.: SSI - 458
FECHA: 7-01-08
PROCED.: Don. - 2007
\$

ID: 134662-1001

Mapas tridimensionales para navegación robótica

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Miguel Bernal Marín

Licenciado en Matemáticas

Universidad de Guadalajara 1998-2002

Becario de CONACYT, expediente no. 172052

Director de Tesis

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Julio de 2007.

Resumen

Esta tesis trata sobre la construcción de escenarios virtuales a partir de dispositivos de entrada capturados por un robot móvil. Los dispositivos de entrada son: sensor láser de medición de distancia, y un sistema de cámaras de visión estéreo.

A partir de estos dispositivos creamos una representación del ambiente que rodea al robot móvil. Haciendo uso del *álgebra geométrica conformal* se hace la representación de este entorno, y gracias a la facilidad de interpretación de sus entidades se logra manipular las figuras geométricas como: el punto, el par de puntos, la línea recta, el círculo, el plano y la esfera.

Utilizando el sensor láser creamos un mapa 2D el cual captura los objetos que están a su alcance y los guarda como una entidad llamada *par de puntos* perteneciente al álgebra geométrica conformal.

Con la ayuda del sistema de cámaras de visión estéreo representamos los objetos tridimensionales que pertenecen al ambiente que rodea al robot móvil. Esos objetos los representamos como entidades del álgebra geométrica conformal ya antes mencionados.

Utilizando las transformaciones del álgebra geométrica conformal en movimientos rígidos, unificamos los sistemas de coordenadas de los dispositivos de entrada y recreamos en un ambiente de 3D al robot móvil *geometer* y a todos los objetos registrados por los sensores en una escala 1:1, ubicándolos en el ambiente, en la posición donde fueron registrados en el mundo real.

Transformando las líneas al espacio de Hough utilizaremos un algoritmo para la localización del robot móvil dentro de un ambiente ya preestablecido.

Abstract

This thesis deals with the problem of creating virtual scenes from input devices captured by a movable robot. The input devices are: laser sensor for distance measure, and a camera stereo vision system.

From these devices a representation of the environment surrounding the robot can be created. Using *conformal geometric algebra* we can represent this environment, and thanks to the facility of interpretation of their entities one can manipulate geometric figures like: point, pair of points, line, circle, plane and spheres.

Using the laser sensor a 2D map is created which captures the objects near it, and keeps them like a pair of points pertaining to conformal geometric algebra.

With the aid of the stereo vision system, the three-dimensional objects that belong to the environment that surrounds to the mobile robot can be represented. These objects are represented like entities of conformal geometric algebra already mentioned.

Using the transformations of conformal geometric algebra in rigid movements, we unified the coordinate systems of the input devices, and we recreated in a 3D virtual world the mobile robot geometer and all the objects registered by the sensors in a 1:1 scale locating them in such 3D virtual world, in the exact position where they were registered in the real world.

Transforming the lines to the Hough space we will use an algorithm for the location of the mobile robot within an already pre-established atmosphere.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por haberme permitido vivir esta experiencia.

A mis padres Miguel Bernal Acevez e Ildelisa Marin Buriel por haberme apoyado a seguir superándome, a mi hermana Angélica Bernal Marin por aguantarme todos estos años.

A mi asesor Dr. Eduardo José Bayro Corrochano por su guía en la realización de la tesis y su motivaciones para seguir siempre adelante.

A todos aquellos que no menciono en esta página pero que saben que les agradezco mucho por su apoyo y comprensión.

Al Grupo de GeovisLab por su amistad y apoyo.

A los Jessaitos que siempre cuento con su intersección.

También doy gracias al CONACYT por haberme apoyado con una beca económica durante mis estudios de maestría, teniendo un número de registro 172052.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Agradecimientos	v
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructura de la Tesis	4
2. Álgebra Geométrica	5
2.1. Introducción al Álgebra Geométrica Clifford	6
2.1.1. El producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2	6
2.1.2. Producto exterior (parte bivectorial del producto Clifford)	7
2.2. Álgebra Geométrica	8
2.2.1. Propiedades de los multivectores	10
2.3. Álgebra Geométrica Conformal	13
2.3.1. Proyección estereográfica	13
2.3.2. Espacio de Minkowski	15
2.3.3. Definición del álgebra geométrica conformal	16

2.3.4.	Transformaciones conformales	22
2.3.5.	Movimientos rígidos: Rotadores, Trasladares y Motores	25
2.4.	Propiedades de algunas entidades en Conformal	30
2.4.1.	Propiedades del punto	30
2.4.2.	Propiedades de la esferas	31
2.4.3.	Propiedades del círculo	32
2.4.4.	Propiedades de las líneas	33
2.4.5.	Propiedades del par de puntos	34
2.4.6.	Propiedades de los rotores	35
2.4.7.	Propiedades de los motores .	36
3.	Navegación Robótica en 2D	39
3.1.	Construcción de mapas con base en segmentos de líneas usando el sistema láser	39
3.1.1.	Usando segmentos de líneas en vez de puntos .	40
3.1.2.	Correspondencia entre líneas	44
3.1.3.	Calculando la ubicación actual	47
3.1.4.	Construcción de mapas	49
3.2.	Uso del Álgebra Conformal para la creación de mapas	51
3.2.1.	Uso de la entidad <i>par de puntos</i>	51
3.2.2.	Coordenadas locales y globales en conformal	53
3.2.3.	Correspondencia entre líneas (<i>par de puntos</i>)	54
3.2.4.	Construcción de mapas	55
4.	Fusión de dispositivos para la creación de un mapa en 3D	59
4.1.	Reconstrucción de objetos 3D usando visión estéreo	60
4.1.1.	Reconstrucción de entidades conformales	61

4.2. Modelado en 3D y unificación de coordenadas	64
4.2.1. Uso de <i>motores conformales</i> en 3D	65
4.2.2. Modelado de dispositivos de entrada	65
4.2.3. Realización del mapa en 3D	69
5. Relocalización	73
5.1. Representación del mapa en el espacio de Hough	74
5.2. Relocalización basados en la transformada Hough	75
6. Conclusiones	79
6.1. Navegación robótica	79
6.1.1. Principales resultados .	79
6.1.2. Trabajo futuro	80
6.2. Fusión de dispositivos	80
6.2.1. Principales resultados	80
6.2.2. Trabajo futuro	81
6.3. Relocalización	81
6.3.1. Principales resultados	81
6.3.2. Trabajo futuro	82
A. Modelo Matemático de Visión Computacional	83
A.1. Modelo de una cámara	83
A.1.1. Proyección de puntos	85
A.2. Geometría proyectiva de 2 vistas .	86
A.2.1. El tensor bifocal .	86
A.3. Triangulación	87

Índice de figuras

2.1. Bivector; el plano orientado	7
2.2. Área de un paralelogramo	7
2.3. Sentido del bivector	8
2.4. Proyección estereográfica en 1D	13
2.5. Vectores base y líneas nulas del plano de Minkowski.	16
2.6. Visualización del modelo homogéneo para la proyección estereográfica en el caso 1D.	17
2.7. La traslación como una reflexión sobre dos planos paralelos	25
2.8. La rotación como una reflexión sobre dos planos que se intersecan	26
3.1. Muestra simple de datos obtenidos por el sensor láser	40
3.2. (a) Extracción de la línea desde los puntos obtenidos, (b) Corrección de línea extraída y sus propiedades	42
3.3. Descripción paramétrica de una línea recta	44
3.4. a) Toma inicial del sensor láser, b) Toma después de un giro y desplazamiento del sensor láser	50
3.5. Casos de intersección de esferas	57
4.1. Modelo a escala de GEOMETER	60
4.2. a) reconstrucción de círculo y línea, b) reconstrucción de esfera, c) reconstrucción de línea y plano	63

4.3. Origen de coordenadas del sensor láser	66
4.4. Origen de coordenadas del sistema estéreo	68
4.5. Mapa 3D con y sin paredes virtuales	69
4.6. Paredes virtuales registradas con el sensor láser	71
5.1. Representación de un mapa en el espacio de Hough	74
5.2. Pasos en la relocalización	78
A.1. Modelo de la cámara pinhole	84
A.2. Los planos ópticos \mathbf{p}_i^T en la cámara con centro en \mathbf{C}	86
A.3. La matriz fundamental F y triangulación. Los puntos de las imágenes \mathbf{x} y \mathbf{x}' retroproyectados en rayos. Si la restricción epipolar $\mathbf{x}'F\mathbf{x} = 0$ se satisface, entonces estos dos rayos viven en un plano, y se intersecan en un punto \mathbf{X} en 3D.	88
A.4. Triangulación de un punto en la práctica	89

Índice de cuadros

2.1. Representación de las entidades y sus duales en Conformal	22
2.2. Transformaciones conformales y sus versores representados	26

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad la tecnología ha desarrollado varios mecanismos para facilitar la vida del ser humano. Uno de esos mecanismos son los robots móviles, que pueden desplazarse de un lugar hacia otro realizando tareas específicas. Estos robots móviles son una extensión del ser humano para poder realizar tareas que al hombre se le dificultan o serían imposibles de hacer.

Las tareas de un robot móvil son tan variadas que pueden ser: llevar algún objeto de un extremo de una habitación a otro extremo de la misma habitación, recoger la basura que se encuentre por el suelo, explorar lugares inalcanzables para el hombre (como cavernas, cráteres o el fondo del mar), realizar mapas virtuales del entorno que rodea el robot para así tener conocimiento de donde se ubica el robot a un tiempo, exploración a distancia si necesidad de que el hombre se encuentre donde está el robot (exploraciones de otros planetas), entre otras tareas.

La navegación o exploración rodeada de muros (dentro de edificios, pasillos, habitaciones, etc.) o fuera de ellos (en lugares al aire libre sin límite de espacio), es otra tarea que los robots móviles hacen. En la cual es muy importante saber que obstáculos hay frente al robot móvil para poder evitarlos, así como saber donde está ubicado y cuál es su posición respecto a otros objetos que lo rodean.

El tamaño de los robots móviles es un factor importante para la tarea que tienen que realizar. Hay robots pequeños que ayudan a entrar en rincones que ningún ser viviente puede entrar, otros grandes que ayudan al hombre a cargar

objetos pesados y llevarlos de un lugar a otro. Otro factor importante son los sensores de entrada al sistema con los que está equipado el robot, si son finos o generan ruido a la hora de las mediciones de entrada, si están montados sobre él o están montados en algún otro lugar en el ambiente.

También hay que tomar en cuenta cómo se desplaza el robot: si es por medio de ruedas o si es por algún sistema automático de desplazamiento utilizando extremidades. Dependiendo del ambiente al cual fue enviado el robot, ciertas características de movimiento son necesarias para alcanzar el éxito de la tarea a realizar.

1.1. Antecedentes

En el área de la exploración por medio de robots móviles, se han desarrollado diferentes algoritmos, los cuales dependen directamente de los dispositivos de entrada al sistema con los que cuenta el robot móvil.

Al principio se utilizaban los sonares ultrasonido los cuales regresaban la información de la distancia que había entre un objeto y el sensor. Este dispositivo no es muy preciso en sus mediciones y puede dar datos erróneos acerca de la ubicación de un objeto. Además que solo se puede tener la distancia de un objeto en un punto por cada uno de estos sensores.

Luego aparecieron los sensores de alcance utilizando láser. Estos equipos tienen mayor exactitud que los utilizados por sonares ultrasonidos. Existen sensores láser con la capacidad de registrar la distancia de objetos en un rango de 180° , haciendo un barrido y tomando registro de la distancia por cada grado o 0.5 grados. Con esto obtenemos 180 o 360 mediciones de distancia de objetos que son alcanzados por el sensor láser. El sensor láser nos proporciona mayor información sobre los objetos que se encuentran en el alcance del sensor.

También se han utilizado las cámaras de vídeo (CCD) para la captura de la información que rodea a un robot móvil y así plasmarla dentro de un ambiente virtual, y conocer su posición con respecto al robot.

Generalmente cuando se habla de construir un mapa de un entorno, se utiliza los sensores láser debido a que sus mediciones son más exactas y que se cuenta

con rango de 180° de alcance para tomar estas mediciones. Los mapas creados con estos sensores son contruidos a base de *figuras geométricas*, u *ocupación de celdas*. Las figuras geométricas son creadas a partir de las mediciones obtenidas y agrupando varias de ellas en una representación geométrica (generalmente líneas). Los mapas de ocupación de celdas crean un arreglo bidimensional en el cual cada posición de ese arreglo le llamamos celda; estas celdas tienen un valor que indica si hay un objeto en ella o no lo hay.

La mayoría de los mapas creados son de dos dimensiones, debido a que se utilizan sensores de alcance y estos solo nos regresan la distancia de un objeto con respecto del sensor. Estas distancias son plasmadas en un mapa representando la ubicación de dicho objeto de acuerdo a un sistema de coordenadas en un plano cartesiano.

Un problema general en la navegación robótica es el conocimiento de la posición y orientación del robot dentro de un ambiente determinado. La construcción virtual de estos ambientes transformados en mapas y su ubicación dentro de ellos también es un problema fundamental.

1.2. Objetivos

El *álgebra geométrica* es una herramienta que permite trabajar con objetos geométricos de una manera mas fácil. Se trabajará en ella y en particular en *geometría conformal* para hacer uso de sus entidades. Se obtendrán las propiedades necesarias de cada entidad y su representación en un ambiente virtual.

Se hará el uso del *álgebra geométrica conformal* para la representación de mapas 2D y con ello hacer uso del trasladador y rotor para obtener la posición del robot dentro del mapa.

Con ayuda de un sistema estéreo, se reconstruirán los objetos en un ambiente 3D usando sus respectivas representaciones en el *álgebra geométrica conformal*.

Utilizando *álgebra de motores* aplicado al *álgebra geométrica conformal* se creará un ambiente único de coordenadas el cual representará los objetos registrados por los diferentes sensores (láser y sistema estéreo) del robot móvil *geometer*. Con ello se creará un mapa en 3D del entorno del robot móvil.

Una vez obtenido este mapa en 3D y utilizando los registros del sensor láser, hacemos uso de la forma de la línea en el espacio de Hough, para implementar un algoritmo de relocalización. Éste será utilizado para saber la posición del robot dentro del mapa una vez creado.

1.3. Estructura de la Tesis

Este documento esta estructurado de la siguiente manera:

Capítulo 1 Introducción a los robots móviles, los dispositivos de entrada al sistema de un robot, objetivos y estructura de la tesis.

Capítulo 2 Introducción al *álgebra geométrica*, donde se explica cómo son sus entidades y cuál es la forma con que se trabaja con ella; el uso del *álgebra geométrica conformal* con sus entidades y sus representaciones en el espacio, así como las propiedades de algunas de las entidades del álgebra.

Capítulo 3 Navegación y creación de un mapa 2D basado en la información proporcionada por el sensor láser haciendo uso del *álgebra geométrica conformal*, e introduciendo los segmentos de línea representados por la entidad *par de puntos*.

Capítulo 4 La fusión de los dispositivos de entrada de un robot móvil (sensor láser y sistema de cámara estéreo), para la creación de un mapa virtual de su entorno, utilizando *álgebra geométrica conformal* como marco de trabajo.

Capítulo 5 Uso de la representación de la línea en el espacio de Hough, para la relocalización del robot móvil dentro de un ambiente preestablecido.

Capítulo 6 Conclusiones y trabajo futuro.

Apéndice A Modelo matemático de Visión computacional, empleado para la reconstrucción de objetos en 3D.

Capítulo 2

Álgebra Geométrica

Lo que actualmente llamamos *álgebra geométrica*, también es conocida como *álgebra de Clifford*¹, en donde una serie de propiedades y operadores son añadidas al álgebra, para extender el sistema de números reales hacia el cálculo vectorial. El álgebra geométrica es introducida por David Hestenes en la década de 1960.

El álgebra de Clifford (o álgebra geométrica) tiene la propiedad de representar *entidades de orden mayor* en forma simbólica compacta y actuar en ellas de forma lineal. Una *entidad de grado mayor* puede ser visto como un subespacio del espacio vectorial. Esto significa por ejemplo, que líneas y planos son llamados entidades de orden mayor, que son representadas como únicos elementos en el álgebra de Clifford.

El lector puede consultar a las siguientes bibliografías para profundizar en el tema [1][2][3][4].

¹William K. Clifford 1845-1879

2.1. Introducción al Álgebra Geométrica Clifford

2.1.1. El producto Clifford de vectores en \mathbb{R}^2

Seria útil tener una multiplicación de vectores que satisfagan los mismos axiomas de multiplicación de los números reales - *distributivo, asociativo y conmutativo* - y que su norma se preserve en la multiplicación $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Como esto es imposible en dimensiones de $n \geq 3$, nos enfocaremos en la distribución y asociación y dejaremos la conmutabilidad.

Tomando dos vectores ortogonales \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 en el espacio vectorial \mathbb{R}^2 La magnitud de el vector $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ es $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si el vector \mathbf{r} es multiplicado por si mismo $\mathbf{r}\mathbf{r} = \mathbf{r}^2$, resultaría igual al cuadrado de su magnitud.

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 \quad (2.1)$$

Usando la forma de coordenadas, introduciremos el producto de vectores de tal forma que

$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)^2 = x^2 + y^2 \quad (2.2)$$

Utilizando la regla distributiva sin asumir la conmutabilidad obtenemos

$$x^2\mathbf{e}_1^2 + y^2\mathbf{e}_2^2 + xy(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = x^2 + y^2 \quad (2.3)$$

Esto se satisface si los vectores ortogonales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ obedecen las reglas de multiplicación

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \end{array}} \quad \text{que corresponde con} \quad \boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1 \\ \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \end{array}} \quad (2.4)$$

Usamos la propiedad asociativa para calcular el cuadrado de $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1$. Como el cuadrado del producto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ es negativo, se sigue que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ no es un escalar ni un vector. El producto es una nueva clase de unidad llamado **bivector**, representando el área del plano orientado (ver fig. 2.1) del cuadrado con los lados \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Escribiremos $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

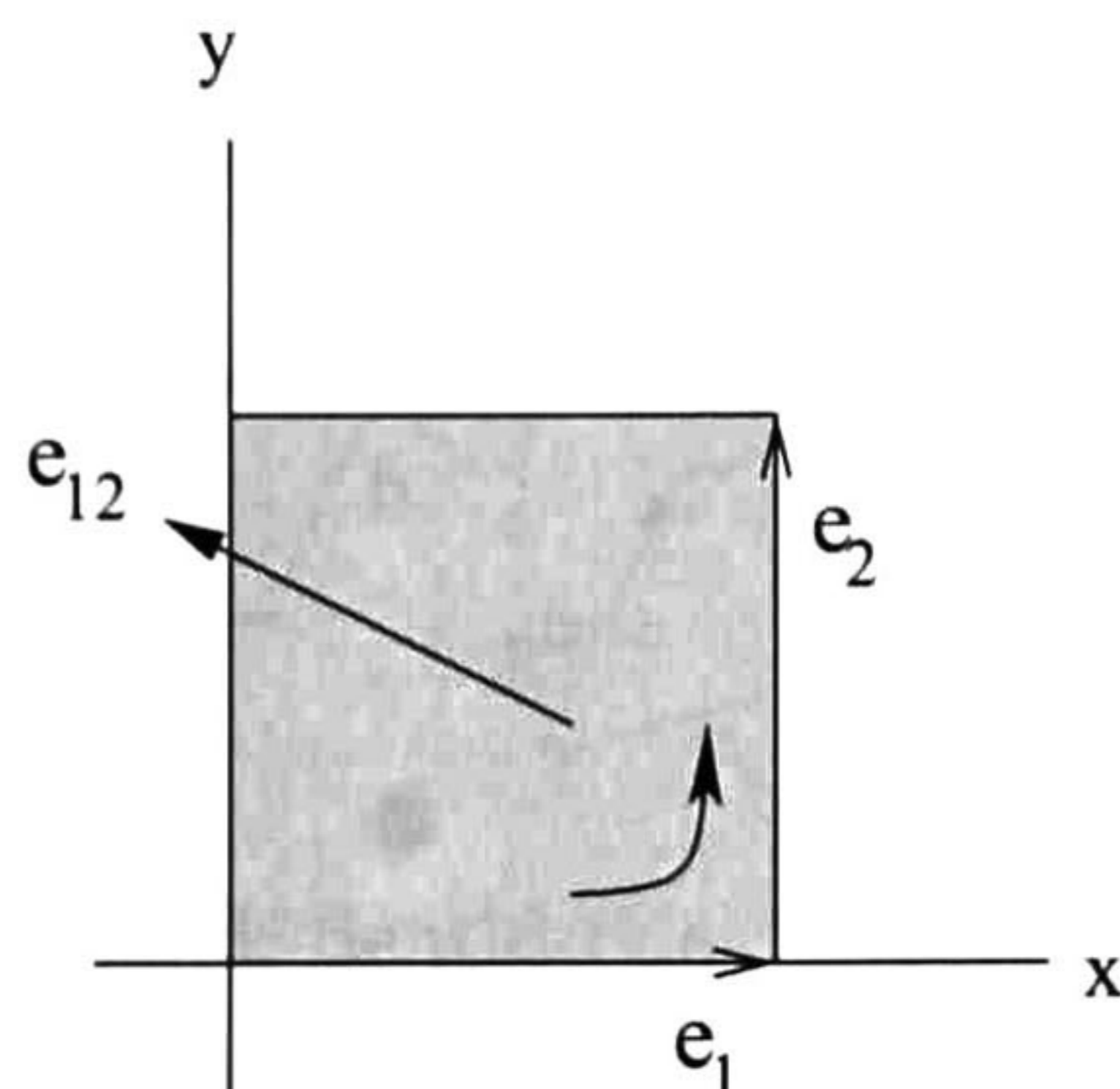


Figura 2.1: Bivector; el plano orientado

2.1.2. Producto exterior (parte bivectorial del producto Clifford)

Extrayendo las partes escalar² y bivector del producto Clifford, tenemos como producto de dos vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2. \quad \text{El producto escalar 'a punto b'} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12}. \quad \text{El producto exterior 'a wedge b'} \quad (2.6)$$

El bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ representa el segmento del plano orientado del paralelogramo con lados \mathbf{a} y \mathbf{b} . El área de este paralelogramo (ver fig. 2.2) es $|a_1b_2 - a_2b_1|$, y tomaremos la magnitud del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ para que sea esta área $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

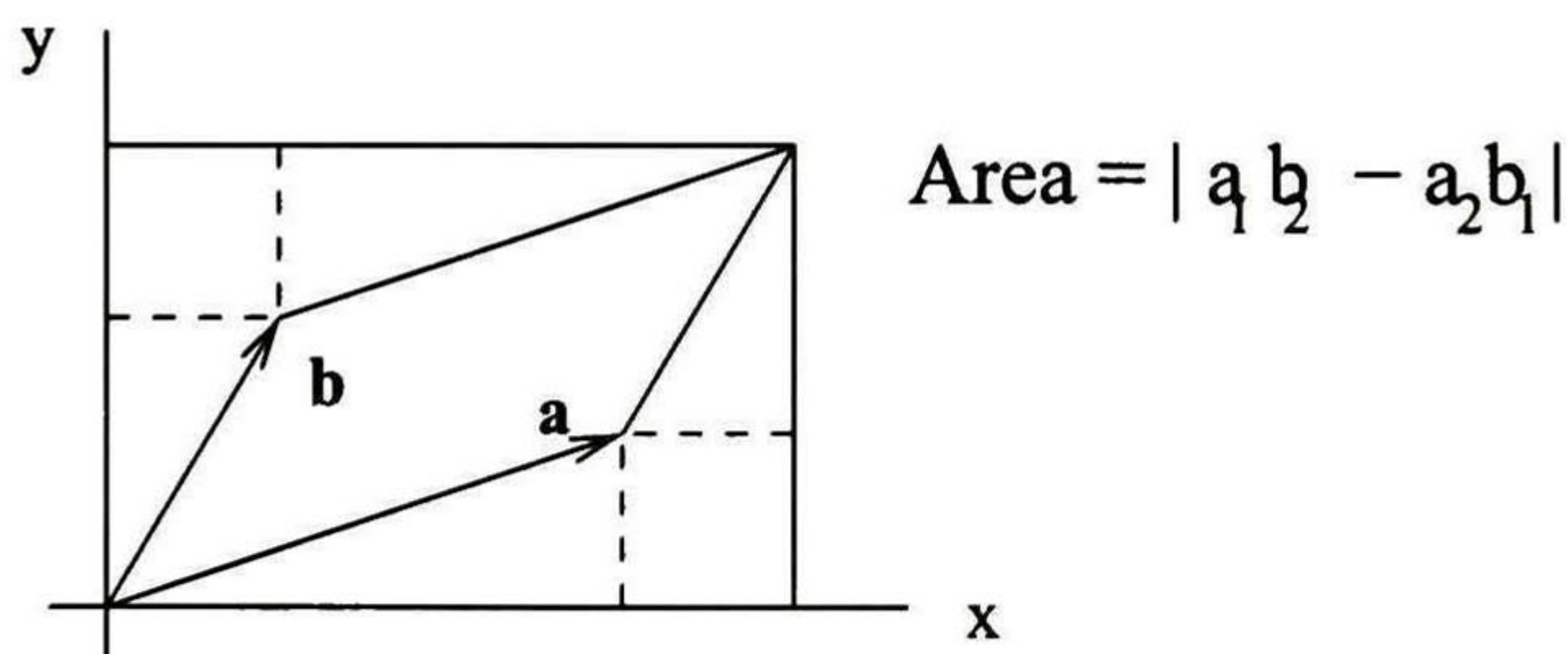


Figura 2.2: Área de un paralelogramo

²El producto escalar también es conocido como **producto punto** ó **producto interior**

El paralelogramo puede ser visto como una clase de producto geométrico de sus lados

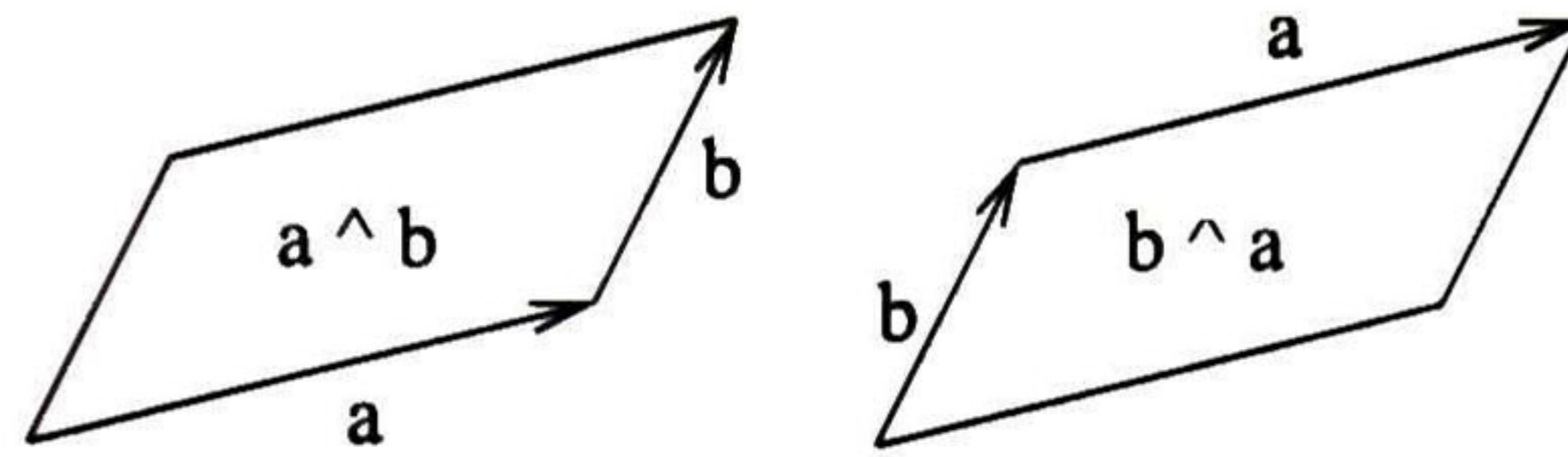


Figura 2.3: Sentido del bivector

El bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ tienen la misma magnitud pero con sentidos de rotación opuestos (ver fig. 2.3). Esto puede ser expresado simplemente escribiendo

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (2.7)$$

Notamos que el producto Clifford de dos vectores

$$(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} \quad (2.8)$$

es la suma de su parte escalar $(a_1b_1 + a_2b_2)$ y un bivector $(a_1b_2 - a_2b_1)$.

El producto Clifford así como el producto exterior y producto interior (o escalar), puede ser llevado a mayores dimensiones (ejemplo \mathbb{R}^n donde $n \geq 2$).

2.2. Álgebra Geométrica

Un espacio vectorial n -dimensional puede ser expandido usando las bases ortogonales de sus vectores $\{\mathbf{e}_i\}, i = 1, \dots, n$. tal que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$. Esto nos lleva a una base que expande un espacio vectorial lineal que corresponde al álgebra geométrica \mathcal{G}_n .

$$1, \{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k\}, \dots, \mathbf{I} \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \quad (2.9)$$

En general un álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$ ($p, q, r, \in \mathbb{N}$) es un espacio lineal de dimensión 2^n , $n = p + q + r$, con un subespacio que llamaremos *blades*, en donde p, q y r corresponde al número de vectores base que cuadran a $+1, -1$ y 0 , respectivamente. La notación $\mathcal{G}_{p,q,r}(\mathbb{R}^{p,q,r})$ es usada para determinar de que espacio vectorial provienen los elementos del álgebra.

Para aclarar lo anterior, sean e_i y e_j ($e_i, e_j \in \mathbb{R}^{p,q,r}$) dos vectores de la base ortonormal de un espacio vectorial. Entonces el producto geométrico de los vectores de la base, nos da la base del álgebra geométrica $\mathcal{G}_{p,q,r}$ esta definida como

$$e_i e_j := \begin{cases} 1 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{1, \dots, p\} \\ -1 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{p+1, \dots, p+q\} \\ 0 \in \mathbb{R} & \text{para } i = j \in \{p+q+1, \dots, n\} \\ e_{ij} = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i & \text{para } i \neq j. \end{cases} \quad (2.10)$$

El producto geométrico (o Clifford) de dos vectores se puede representar de la siguiente forma

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.11)$$

La regla conmutativa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ junto con la regla anticonmutativa $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ nos da la relación que hay entre \mathbf{ab} y \mathbf{ba} . Así

$$\mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.12)$$

Sumando y restando las ecuaciones (2.11) y (2.12), podemos definir

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \quad (2.14)$$

El producto exterior de un r vector puede definirse como la parte anti-simétrica del producto geométrico. Este es llamado r -blade o blade de grado r . Una combinación lineal de los r -blades es llamado r -vector. El conjunto de r -vectores es un subespacio $\binom{n}{r}$ -dimensional de \mathcal{G}_n , denotado por \mathcal{G}_n^r . Todo el espacio \mathcal{G}_n esta dado por la suma de sus subespacios

$$\mathcal{G}_n = \sum_{i=0}^n \mathcal{G}_n^i \quad (2.15)$$

Esta suma también se puede representar como una suma de la parte par e impar del álgebra $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_n^+ \oplus \mathcal{G}_n^-$ donde

$$\mathcal{G}_n^+ = \mathcal{G}_n^0 \oplus \mathcal{G}_n^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_n^e \quad \text{parte par} \quad (2.16)$$

$$\mathcal{G}_n^- = \mathcal{G}_n^1 \oplus \mathcal{G}_n^3 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_n^o \quad \text{parte impar} \quad (2.17)$$

donde $e \leq n$ es par y $o \leq n$ es impar.

Un elemento genérico de \mathcal{G}_n es llamado *multivector*. De acuerdo con (2.15), cada multivector M puede ser escrito en su forma expandida como

$$M = \sum_{i=0}^n \langle M \rangle_i \quad (2.18)$$

donde $\langle M \rangle_i$ denota la parte i -vector.

2.2.1. Propiedades de los multivectores

Un elemento M de \mathcal{G}_n es *invertible* si existe otro elemento N de \mathcal{G}_n tal que $MN = NM = 1$. En elemento N , si éste existe, es único. Éste es llamado el *inverso* de M , y es denotado por M^{-1} . Por ejemplo, un vector nulo³ de \mathcal{G}_n no es invertible, pero cualquier vector no nulo \mathbf{a} es invertible, con

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \quad (2.19)$$

Esta capacidad del álgebra geométrica para la división de vectores facilita varios cálculos.

Por la asociatividad y multi-linealidad, el producto exterior se extiende a cualquier número finito de multivectores y a escalares, con la siguiente cláusula especial

$$\lambda \wedge M = M \wedge \lambda = \lambda M, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n \quad (2.20)$$

El producto interior de un r -blade $a_1 \wedge \cdots \wedge a_r$ con un s -blade $b_1 \wedge \cdots \wedge b_s$ esta ser definido como

$$\begin{aligned} & (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) \\ &= \begin{cases} ((a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot b_1) (b_2 \wedge \cdots \wedge b_s) & \text{si } r \geq s \\ (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) (a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) & \text{si } r < s \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

y

$$(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot b_1$$

³Un vector \mathbf{a} es nulo si $\mathbf{a}^2 = 0$

$$= \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge (a_i \cdot b_1) \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_r \quad (2.22)$$

$$a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} b_1 \wedge \cdots \wedge b_{i-1} \wedge (a_r \cdot b_i) \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_s \quad (2.23)$$

Veamos un ejemplo del uso de (2.21) con (2.23). Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{G}_n$ 1-vectores y $\mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ un 2-vector. El producto interior de \mathbf{a} con \mathbf{B} esta dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (2.24)$$

Como $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ son escalares, podemos ver que el producto interior de un vector con un bivector resulta en un vector. Generalizando podemos mostrar que para $s \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_{\langle s \rangle} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_3 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \mathbf{b}_4 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_s) \\ &\quad - \cdots \\ &= \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_i) [\mathbf{B}_{\langle s \rangle} \setminus \mathbf{b}_i] \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $[\mathbf{B}_{\langle s \rangle} \setminus \mathbf{b}_i]$ denota el blade $\mathbf{B}_{\langle s \rangle}$ sin el vector \mathbf{b}_i . Así el producto interior de un vector con un s -blade da como resultado un $(s-1)$ -blade. Otro ejemplo de esta importante regla es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{\langle s \rangle} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{B}_{\langle s \rangle} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{B}_{\langle s \rangle}) \quad (2.26)$$

con $s \geq 2$. Donde \mathbf{A} es un 2-bade, ($r = 2$). Si aumentamos el valor de r de tal forma que $r < s < n$ llegamos a

$$\mathbf{a}_1 \cdot \left(\mathbf{a}_2 \cdot \left(\cdots \left(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{B}_{\langle s \rangle} \right) \right) \right) \quad (2.27)$$

vemos que (2.27) es una representación del segundo caso de (2.21).

Por bilinealidad, el producto interior es extendido hacia cualquiera dos multivectores, si

$$\lambda \cdot M = M \cdot \lambda = 0, \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{G}_n \quad (2.28)$$

Para cualquier blade A y B con grados r y s diferente de cero, tenemos

$$A \cdot B = \langle AB \rangle_{|r-s|} \quad (2.29)$$

$$A \wedge B = \langle AB \rangle_{r+s} \quad (2.30)$$

El blade de mas alto grado es el n -blade y es llamado *pseudoescalar* ($I = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$). Un álgebra geométrica se llama *no degenerada* si la magnitud del pseudo-escalar es diferente de cero. Los pseudo-escalares son indexados de acuerdo al álgebra a la que pertenecen, por ejemplo $I_E \in \mathcal{G}_3$, $I_C \in \mathcal{G}_{4,1}$ ⁴

El *dual* de un multivector M en \mathcal{G}_n es denotado por

$$M^* = M I_n^{-1} \quad (2.31)$$

donde I_n^{-1} difiere de I_n por lo menos por un signo. El *dual* de un r -blade es un $(n-r)$ -blade.

La *reversión* de un s -blade $A = a_1 \wedge \dots \wedge a_s$ se denota como

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{s-1} \wedge a_s)^\sim \\ &= a_s \wedge a_{s-1} \wedge \dots \wedge a_2 \wedge a_1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

y generalizando, la *reversión* para un multivector

$$\langle \tilde{M} \rangle_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n. \quad (2.33)$$

Dado un producto geométrico de varios multivectores $D = ABC$, donde $A, B, C, D \in \mathcal{G}_n$ la reversión de estos esta dada por

$$\tilde{D} = \widetilde{ABC} = \tilde{C} \tilde{B} \tilde{A} \quad (2.34)$$

La *involución principal* de \mathcal{G}_n , también llamada *involución de grado* es denotada por " $\widehat{}$ " y definida por

$$\langle \widehat{M} \rangle_i = (-1)^i \langle M \rangle_i, \text{ para } M \in \mathcal{G}_n, 0 \leq i \leq n. \quad (2.35)$$

El *producto conmutador* $A \times B$ es definido para cualquier multivector A y B por

$$A \times B \equiv \frac{1}{2}(AB - BA) = -B \times A. \quad (2.36)$$

⁴Para abreviar la notación $\mathcal{G}_{3,0,0} \simeq \mathcal{G}_3$ y $\mathcal{G}_{4,1,0} \simeq \mathcal{G}_{4,1}$

La función exponencial de un multivector M puede ser expresada en series de expansión, como

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad (2.37)$$

2.3. Álgebra Geométrica Conformal

Es necesario introducir un álgebra que envuelva a varias entidades geométricas (puntos, líneas, planos, esferas, círculos, etc.). El uso de la geometría conformal esta motivada por la introducción de proyecciones estereográficas.

2.3.1. Proyección estereográfica

En pocas palabras, una proyección estereográfica es el medio para generar mapas planos de la tierra. En este caso, imaginemos a la tierra como una esfera transparente, intersecada en el ecuador con un plano. Ahora imaginemos que en el polo norte \mathbf{n} hay un foco que ilumina a través de la esfera. Cada punto de la esfera proyectara un punto en el papel y ahí es donde se dibuja el mapa. La regla para la proyección estereográfica tiene una clara descripción geométrica y es ilustrada para el caso de 1D en la figura 2.4.

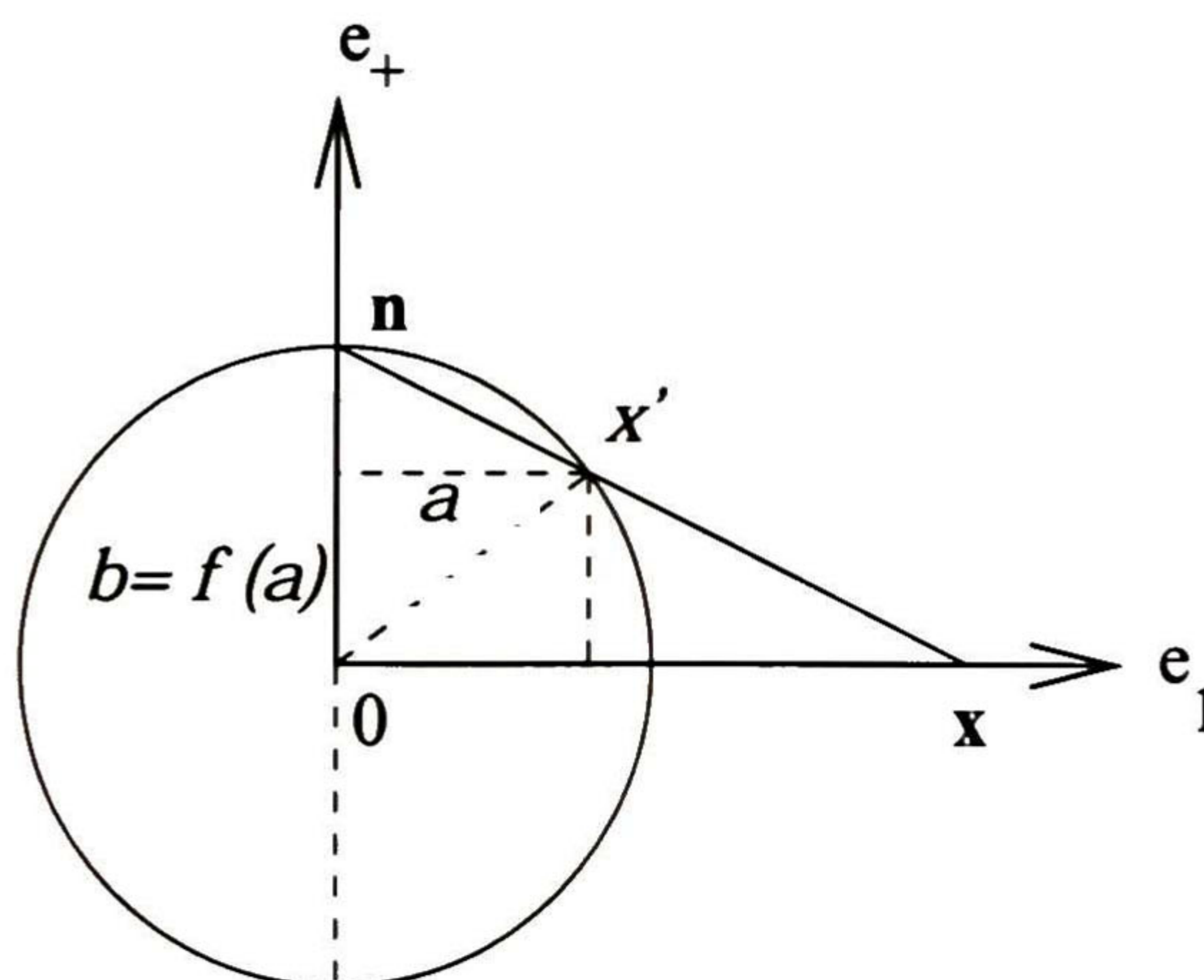


Figura 2.4: Proyección estereográfica en 1D

Antes de introducir formalmente algunos términos del álgebra geométrica conformal, desarrollaremos los cálculos básicos de las propiedades de la proyección estereográfica. Por simplicidad usaremos el caso de 1D (\mathcal{G}_1), y trabajaremos en \mathcal{G}_2 con los vectores bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_+\}$ ⁵. La proyección la haremos con un círculo de radio $\rho = 1$.

Sea x un punto en \mathbf{e}_1 que lo podemos representar en \mathcal{G}_2 como

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_+ \quad (2.38)$$

y \mathbf{n} un punto en \mathbf{e}_+ ($\mathbf{n} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_+$), que esta en el polo norte del círculo unitario. La ecuación de la recta entre estos dos puntos es

$$f(a) = -\frac{1}{x}a + 1 \quad (2.39)$$

y la ecuación del círculo unitario es

$$a^2 + f(a)^2 = 1 \quad (2.40)$$

Necesitamos encontrar la solución a este sistema de ecuaciones para saber en donde se intersecan las funciones, sustituyendo (2.39) en (2.40)

$$a^2 + \left(-\frac{1}{x}a + 1\right)^2 = 1 \quad (2.41)$$

y desarrollando el cuadrado de (2.41)

$$a^2 + \frac{a^2}{x^2} - 2\frac{a}{x} = 0 \quad (2.42)$$

factorizando a

$$a\left(a + \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x}\right) = 0 \quad (2.43)$$

la primer solución de (2.43) es $a = 0$ que es el polo norte. La otra solución sale con

$$a\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} \quad (2.44)$$

despejando a

$$a = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad (2.45)$$

⁵Llamamos \mathbf{e}_+ a esta base porque cuadra a $+1$, ($\mathbf{e}_+^2 = 1$)

sustituyendo el valor de a en (2.39) nos queda

$$f(a) = -\frac{1}{x} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) + 1 \quad (2.46)$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (2.47)$$

con esto obtenemos el punto⁶ $\mathbf{x}' = ae_1 + be_+$ que queda como⁷

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= ae_1 + be_+ \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1}e_1 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando coordenadas homogéneas agregamos una tercera base $\{e_-\}$ ⁸, trabajaremos ahora en $\mathcal{G}_{2,1}$, y la ecuación (2.48) queda de la siguiente forma

$$\mathbf{x}'' = \frac{2x}{x^2 + 1}e_1 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}e_+ + e_- \quad (2.49)$$

multiplicando (2.49) por $\frac{x^2+1}{2}$ nos queda una representación homogénea del punto sobre el círculo como

$$\mathbf{x}''' = xe_1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)e_+ + \frac{1}{2}(x^2 + 1)e_- \quad (2.50)$$

haciendo una factorización de los x^2 nos queda

$$\mathbf{x}''' = xe_1 + \frac{1}{2}(x^2)(e_- + e_+) + \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad (2.51)$$

veremos después, como esta representación (2.51) nos es conveniente en el álgebra conformal. En la figura (2.6) se muestra como queda este punto en este espacio.

2.3.2. Espacio de Minkowski

El plano de *Minkowski* $\mathbb{R}^{1,1}$ tiene una base ortonormal $\{e_+, e_-\}$ que definimos con las propiedades

$$e_+^2 = 1, \quad e_-^2 = -1, \quad e_+ \cdot e_- = 0. \quad (2.52)$$

⁶Sustituyendo $f(a) = b$

⁷El sistema tiene dos soluciones, uno el trivial, donde la línea es intersecada en el polo norte \mathbf{n} y la otra en \mathbf{x}'

⁸Llamamos a esta base e_- porque cuadra a -1, ($e_-^2 = -1$)

Una base *nula* $\{e_0, e\}$ la introducimos como

$$e_0 := \frac{1}{2}(e_- - e_+) \quad \text{y} \quad e := e_- + e_+ \quad (2.53)$$

Estos vectores pueden interpretarse como el origen e_0 de nuestro sistema de coordenadas y un punto en el infinito e . Alternativamente, la base nula puede ser definida directamente en términos de las siguientes propiedades

$$e_0^2 = e^2 = 0, \quad e \cdot e_0 = -1 \quad (2.54)$$

Un pseudo-escalar unitario E para $\mathbb{R}^{1,1}$ es definido por

$$E := e_0 \wedge e = e_+ \wedge e_- = e_+ e_- \quad (2.55)$$

donde tenemos las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} E^2 = 1, \quad \tilde{E} = -E, \quad Ee = -e, \quad e_0 E = e_0 \\ e_+ E = e_-, \quad e_- E = e_+, \quad e_+ e = 1 + E \\ e_- e = -(1 + E), \quad e \wedge e_- = E, \quad e_+ \cdot e = 1. \end{aligned} \quad (2.56)$$

La base vectorial y líneas nulas de $\mathbb{R}^{1,1}$ son mostradas en la fig 2.5, donde el área sombreada representa el pseudo-escalar unitario E .

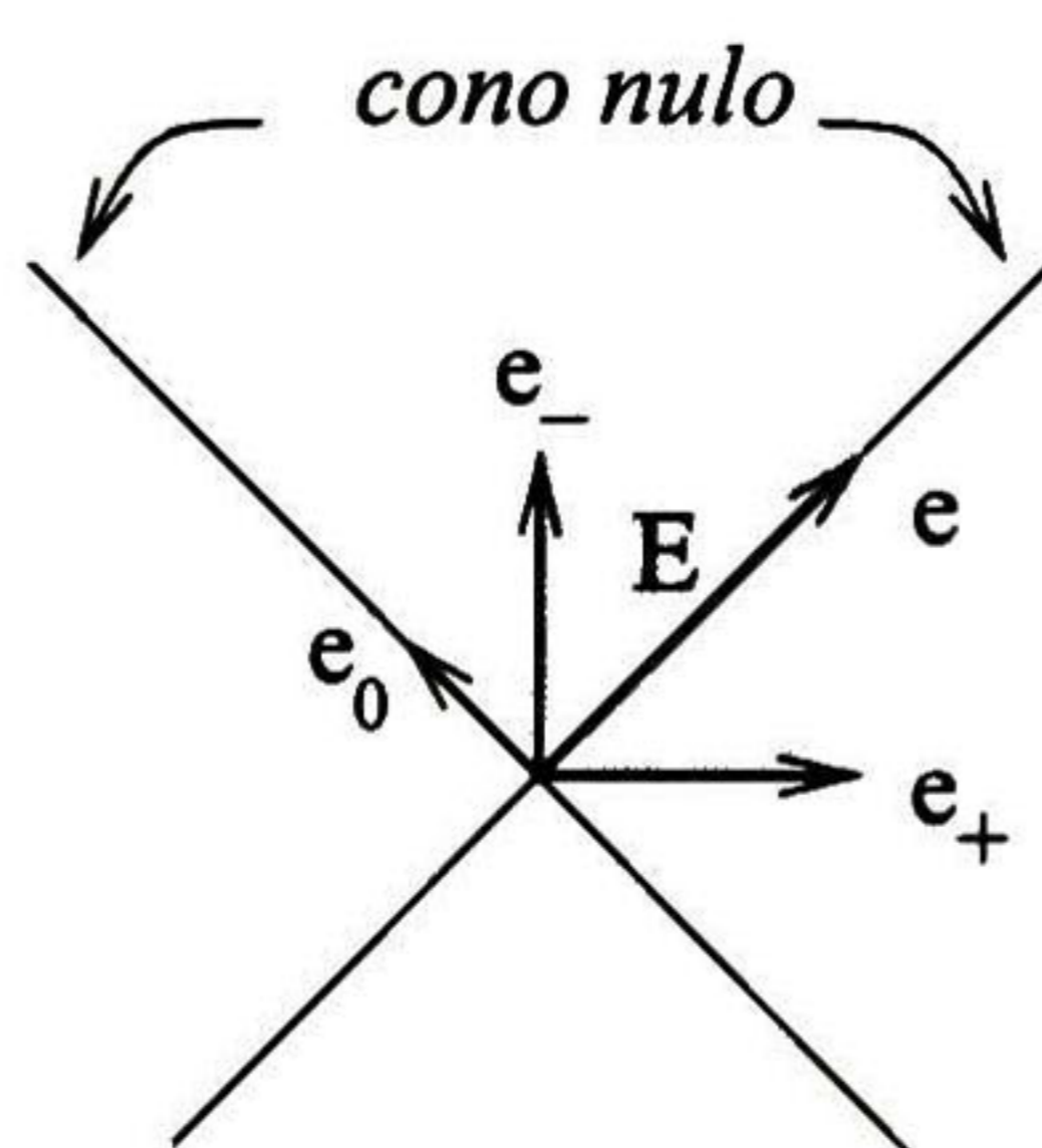


Figura 2.5: Vectores base y líneas nulas del plano de Minkowski.

2.3.3. Definición del álgebra geométrica conformal

El rol que juega el plano de Minkowski de generar *vectores nulos*, y expandir el espacio vectorial Euclidiano \mathbb{R}^n a $\mathbb{R}^{n+1,1} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{1,1}$, resulta en la álgebra

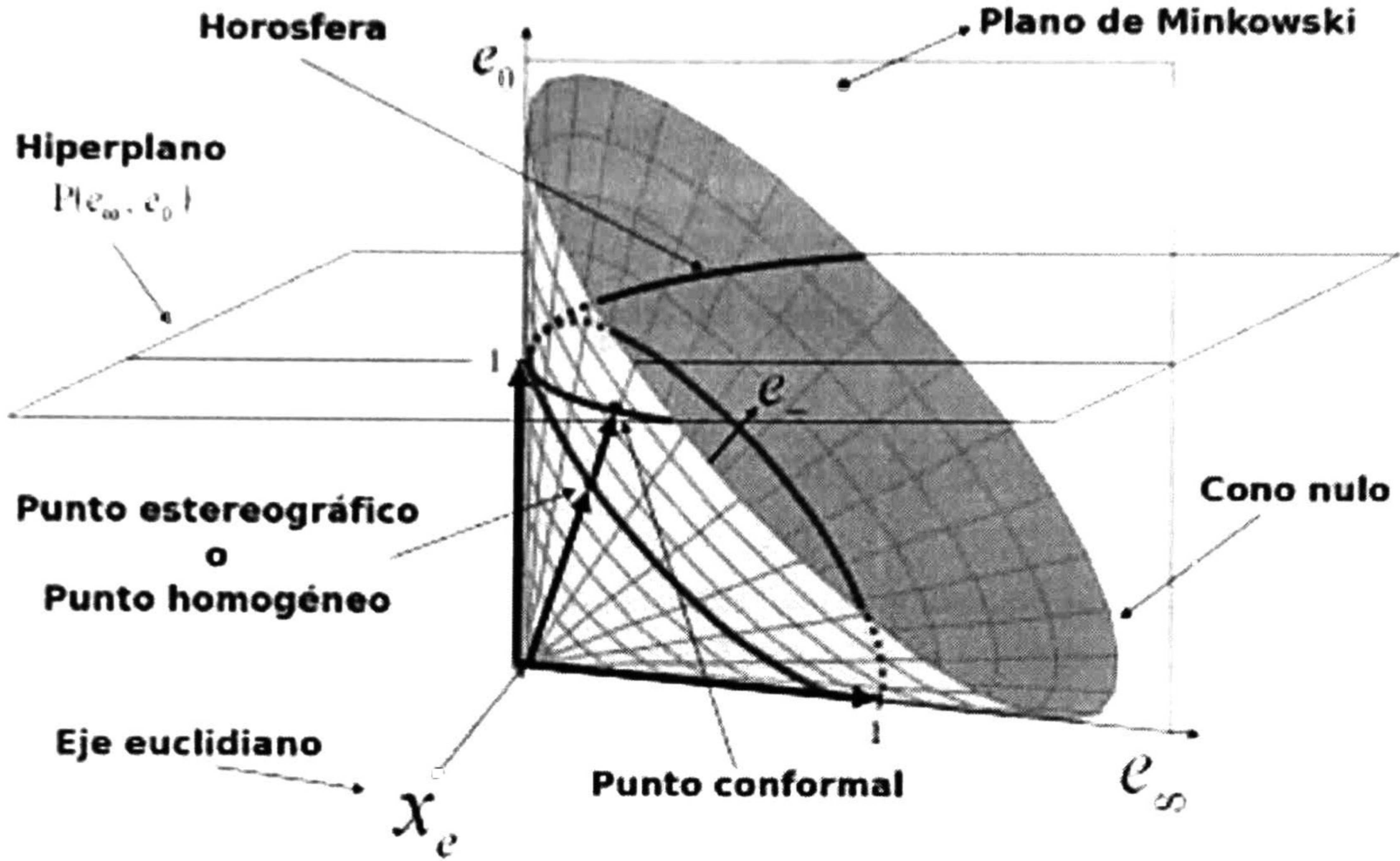


Figura 2.6: Visualización del modelo homogéneo para la proyección estereográfica en el caso 1D.

geométrica conformal $\mathcal{G}_{n+1,1}$. El conjunto \mathbb{N}^{n+1} de todos los vectores nulos en \mathbb{R}^n es llamado *cono nulo*, y el conjunto de los puntos generalizados homogéneos de grado superior es llamado *horósfera*. En la fig. 2.6 se muestra la visualización del modelo homogéneo para la proyección estereográfica en el caso 1D. Todos los puntos estereográficos proyectados viven en el cono, que es el *cono nulo* del espacio de Minkowski. También se notan el Hiperplano $\mathbb{P}(e, e_0)$ y la horósfera del álgebra conformal.

Un vector en este espacio puede ser representado como una *descomposición ortogonal*

$$\underline{a} = P_E(\underline{a}) + P_E^\perp(\underline{a}) \tag{2.57}$$

donde los operadores de proyección P_E y reyección P_E^\perp están dados por

$$P_E(\underline{a}) = (\underline{a} \cdot E)E = \alpha e_0 + \beta e \in \mathbb{R}^{1,1} \tag{2.58}$$

$$P_E^\perp(\underline{a}) = (\underline{a} \cdot E^*)\tilde{E}^* = (\underline{a} \wedge E)E = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \tag{2.59}$$

El espacio vectorial conformal derivado de \mathbb{R}^3 es denotado como $\mathbb{R}^{4,1}$. Una base vectorial esta dada por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-\}$. El álgebra correspondiente $\mathcal{G}_{4,1}$ contiene $2^5 = 32$ elementos. El pseudo-escalar unitario⁹ esta denotado como

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{e}_{+_{-123}} = \mathbf{E}\mathbf{I}_E \quad (2.60)$$

En seguida se presentan las entidades del álgebra geométrica conformal, las cuales estan en la tabla 2.1.

Puntos

En esta álgebra los *puntos* son considerados como elementos del llamado cono nulo, y obedecen a las siguientes propiedades

$$\{\underline{x} \in \mathcal{G}_{n+1,1} | \underline{x}^2 = 0, \underline{x} \cdot \mathbf{e} = -1\} \quad (2.61)$$

Los puntos del cono nulo son relacionados con los puntos Euclidianos de \mathbb{R}^3 por medio de

$$\underline{x} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e} + \mathbf{e}_0 \quad (2.62)$$

donde $\underline{x} \in \mathcal{G}_{3+1,1}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Sustituyendo los valores de (2.53) en (2.62) tenemos

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e} + \mathbf{e}_0 \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2(\mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+) \\ &= \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - 1)\mathbf{e}_+ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 + 1)\mathbf{e}_- \end{aligned} \quad (2.63)$$

Como podemos ver, al desarrollar la ecuación (2.63), es clara la relación que hay con las ecuaciones (2.50) y (2.51). Esta es exactamente la representación homogénea de un punto proyectado estereográficamente sobre el círculo pero ahora en \mathbb{R}^3 . La representación de un punto es mas compacta si es escrita usando $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}_0\}$ en vez de $\{\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-\}$.

Poniendo $\mathbf{x} = 0$ en (2.62) podemos ver que $\underline{x} = \mathbf{e}_0$ es el punto homogéneo que corresponde al origen en \mathbb{R}^n . De

$$\frac{\underline{x}}{-\underline{x} \cdot \mathbf{e}_0} = \mathbf{e} + 2 \left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{e}_0}{\mathbf{x}^2} \right) \frac{\longrightarrow}{\mathbf{x}^2 \rightarrow \infty} \mathbf{e} \quad (2.64)$$

⁹El pseudo-escalar unitario de \mathcal{G}_3 se representa como $\mathbf{I}_E = \mathbf{e}_{123}$

vemos que cuando \mathbf{x}^2 tiende al infinito, obtenemos como resultado \mathbf{e} . Con esto podemos decir que \mathbf{e} representa el punto en el infinito.

Usando (2.62) podemos expandir el producto geométrico de dos puntos \underline{a} y \underline{b} como

$$\underline{a}\underline{b} = \mathbf{a}\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}[(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + (\mathbf{b}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\mathbf{b}^2)\mathbf{e} + (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{E}]. \quad (2.65)$$

La parte escalar de (2.65) nos da

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}\mathbf{b} - \frac{1}{2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \quad (2.66)$$

Así, el producto interno de dos puntos homogéneos nos da directamente la distancia Euclidiana al cuadrado entre ellos. Como $\underline{a}^2 = \underline{b}^2 = 0$, tenemos que

$$(\underline{a} - \underline{b})^2 = -2\underline{a} \cdot \underline{b} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 \quad (2.67)$$

Par de Puntos

Tomando la parte bivectorial de (2.65) nos queda una entidad llamada *par de puntos* en su forma dual, la cual, en una sola entidad guarda la localización de 2 puntos pertenecientes al álgebra y esta definida como

$$\begin{aligned} \underline{PP}^* &= \underline{a} \wedge \underline{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}[(\mathbf{b}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}\mathbf{b}^2) \wedge \mathbf{e} + (\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

En su forma estándar, el par de puntos es la intersección de 3 esferas.

Esferas

La ecuación de la *esfera* de radio ρ con centro en el punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ puede ser expresada como

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = \rho^2 \quad (2.69)$$

Usando (2.66), podemos expresar (2.69) como una ecuación equivalente en términos de puntos homogéneos:

$$\underline{x} \cdot \underline{p} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 = -\frac{1}{2}\rho^2 \quad (2.70)$$

Usando la restricción $\underline{x} \cdot \underline{e} = -1$ de (2.61), podemos simplificar (2.70) a

$$\begin{aligned}\underline{x} \cdot \underline{p} &= (\underline{x} \cdot \underline{e}) \frac{1}{2} \rho^2 \\ \underline{x} \cdot \underline{p} - (\underline{x} \cdot \underline{e}) \frac{1}{2} \rho^2 &= 0 \\ \underline{x} \cdot (\underline{p} - \frac{1}{2} \rho^2 \underline{e}) &= 0 \\ \underline{x} \cdot \underline{s} &= 0\end{aligned}\tag{2.71}$$

donde

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{p} - \frac{1}{2} \rho^2 \underline{e} \\ &= (\underline{p} + \frac{1}{2} \underline{p}^2 \underline{e} + \underline{e}_0) - \frac{1}{2} \rho^2 \underline{e} \\ &= \underline{p} + \frac{1}{2} (\underline{p}^2 - \rho^2) \underline{e} + \underline{e}_0\end{aligned}\tag{2.72}$$

es la representación de la esfera en el álgebra geométrica conformal. La entidad \underline{s} tiene las propiedades

$$\underline{s}^2 = \rho^2 > 0\tag{2.73}$$

$$\underline{e} \cdot \underline{s} = -1\tag{2.74}$$

Con estas propiedades podemos recuperar la forma (2.72) y el centro \underline{p} .

Alternativamente, una esfera puede ser representada en su forma dual de $\underline{s}^* = \underline{s} \underline{I}_c^{-1}$. La ventaja de la forma dual de la esfera es que puede ser calculada desde 4 puntos conformales (en 3D) que estén en su superficie y puede ser escrita de la forma

$$\underline{s}^* = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} \wedge \underline{d}\tag{2.75}$$

La ecuación (2.71) tiene su forma dual que es

$$\underline{x} \wedge \underline{s}^* = 0\tag{2.76}$$

tanto (2.71) como (2.76) representan a un punto que esta sobre la superficie de la esfera. Otras propiedades de la esfera se verán mas adelante.

Plano

Si reemplazamos uno de los puntos de (2.75) por el punto en el infinito tenemos

$$\begin{aligned}
 \underline{P}^* &= \underline{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} \\
 &= \underline{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} + \mathbf{E}(\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a}) \\
 &= \underline{e} \mathbf{I}_{\mathbf{E}} d + \mathbf{N} \mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Geoméricamente podemos interpretar ésto como una esfera en su forma dual, ya que es un wedge de 4 puntos, pero uno de los puntos es el infinito, esto nos da una esfera con radio infinito que equivale a un *plano*. En (2.77) se representa la ecuación del plano pasando por los puntos \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} . Podemos reconocer a $d \mathbf{I}_{\mathbf{E}} = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}$ como el momento del plano con tangente $\mathbf{N} = (\underline{b} - \underline{a}) \wedge (\underline{c} - \underline{a})$, que es la representación de Hesse del plano con normal \mathbf{N} y distancia d .

Círculo

Un *círculo* \underline{z} puede ser representado como la intersección de dos esferas \underline{s}_1 y \underline{s}_2 . Esto significa que para cada punto $\underline{x} \in \underline{z}$

$$\underline{x} \in \underline{z} \iff \underline{x} \in \underline{s}_1 \text{ y } \underline{x} \in \underline{s}_2 \tag{2.78}$$

Asumiendo que \underline{s}_1 y \underline{s}_2 son linealmente independientes, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \underline{x} \in \underline{z} &\iff (\underline{x} \cdot \underline{s}_1) \underline{s}_2 - (\underline{x} \cdot \underline{s}_2) \underline{s}_1 = 0 \\
 &\iff \underline{x} \cdot (\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2) = 0 \\
 &\iff \underline{x} \cdot \underline{z} = 0
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

donde $\underline{z} = \underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2$ es la intersección de las esferas. La intersección con una tercera esfera nos regresa la entidad par de puntos.

La forma dual del círculo (en 3D) puede ser expresado por tres puntos viviendo sobre él, como

$$\underline{z}^* = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} \tag{2.80}$$

donde $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \underline{z}^*$.

Entidad	Representación	Grado	Representación Dual	Grado
Esfera	$\underline{s} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - \rho^2)\mathbf{e} + \mathbf{e}_0$	1	$\underline{s}^* = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c} \wedge \underline{d}$	4
Punto	$\underline{x} = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e} + \mathbf{e}_0$	1	$\underline{x}^* = (-\mathbf{E}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e} + \mathbf{e}_0)\mathbf{I}_E$	4
Plano	$\underline{P} = \mathbf{N}\mathbf{I}_E - d\mathbf{e}$ $\mathbf{N} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{c})$ $d = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{I}_E$	1	$\underline{P}^* = \mathbf{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}$	4
Línea	$\underline{L} = \underline{P}_1 \wedge \underline{P}_2$ $= \mathbf{r}\mathbf{I}_E + \mathbf{e}\mathbf{M}\mathbf{I}_E$ $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	2	$\underline{L}^* = \mathbf{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b}$	3
Círculo	$\underline{z} = \underline{s}_1 \wedge \underline{s}_1$ $\underline{s}_z = (\mathbf{e} \cdot \underline{z})\underline{z}$ $\rho_z = \frac{z^2}{(\mathbf{e} \wedge \underline{z})^2}$	2	$\underline{z}^* = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}$	3
Par de Puntos	$\underline{PP} = \underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2 \wedge \underline{s}_3$	3	$\underline{PP}^* = \underline{a} \wedge \underline{b}, \underline{X}^* = \mathbf{e} \wedge \underline{x}$	2

Cuadro 2.1: Representación de las entidades y sus duales en Conformal

Línea

Las *líneas*, así como en el caso de los planos, se pueden definir como un círculo que pasa por el punto en el infinito haciendo un círculo de radio infinito. Su forma dual se define como

$$\begin{aligned}
 \underline{L}^* &= \mathbf{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b} \\
 &= \mathbf{e} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{E} \\
 &= \mathbf{e}\mathbf{M} + \mathbf{r}\mathbf{E}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde $\mathbf{M} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es un bivector representando el momento [1] (que es el plano donde vive la línea) y $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ representa la dirección de la línea en coordenadas de Plücker. También se puede ver que esta línea pasa por los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

2.3.4. Transformaciones conformales

Una transformación de figuras geométricas se dice que es *conformal* si preserva su *forma*; esto es, si dicha figura preserva sus ángulos y por lo tanto la

forma de líneas rectas y círculos. Cualquier transformación conformal en \mathbb{R}^n puede ser expresada como una composición de *inversiones* en esferas y *reflexiones* en hiper planos. En general, una transformación conformal tiene la forma

$$g(\underline{x}) = G\underline{x}\widehat{G}^{-1} = \sigma\underline{x}' \quad (2.82)$$

donde $\underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1,1}$, G es un versor y σ es un escalar. Como el cono nulo es invariante bajo G , (i.e. $(\underline{x}')^2 = \underline{x}^2 = 0$), es conveniente aplicar un factor escalar σ para asegurar $\underline{x}' \cdot \mathbf{e} = \underline{x} \cdot \mathbf{e} = -1$.

Un *versor* es cualquier multivector que puede expresarse como el producto geométrico de vectores invertibles. Los versores en \mathcal{G}_n forman un grupo bajo el producto geométrico, llamado *grupo de versores*. Los versores de magnitud unitaria forman un subgrupo, llamado *grupo alfiler o perno* (pin group).

Un *versor par* es aquél que $\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{V}}$ y es llamado *spinor* (de giro) o *rotor* si

$$\mathbf{V}\widetilde{\mathbf{V}} = |\mathbf{V}|^2 \quad (2.83)$$

y un *versor impar* es aquel que $\mathbf{V} = -\widehat{\mathbf{V}}$.

Veamos a continuación algunos de estos versores.

Inversiones

La forma general de una reflexión sobre un vector $\underline{s} = -\widehat{\underline{s}}$ es

$$s(\underline{x}) = -\underline{s}\underline{x}\underline{s}^{-1} = \underline{x} - 2(\underline{s} \cdot \underline{x})\underline{s}^{-1} = \sigma\underline{x}', \quad (2.84)$$

donde $\underline{s}\underline{x} + \underline{x}\underline{s} = 2(\underline{s} \cdot \underline{x})$ de (2.13). Analizaremos ahora que pasa cuando \underline{s} representa una esfera y tiene la forma de (2.72). Si \underline{s} representa una esfera unitaria centrada en el origen ($\rho = 1$ y $\mathbf{p} = 0$), entonces \underline{s} y \underline{s}^{-1} se reduce a $\mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{e}$. Sustituyendo $-2(\underline{s} \cdot \underline{x}) = \mathbf{x}^2 - 1$ en (2.84) obtenemos

$$\sigma\underline{x}' = (\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\mathbf{e} + \mathbf{e}_0) + (\mathbf{x}^2 - 1)(\mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{e}) = \mathbf{x}^2(\mathbf{x}^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{-2}\mathbf{e} + \mathbf{e}_0), \quad (2.85)$$

el cual es el mapeo conformal de \mathbf{x}^{-1} tomando como $\sigma = \mathbf{x}^2$

Veamos ahora cómo una esfera arbitraria invierte un punto, tomando de nuevo (2.72) tenemos

$$\underline{s} \cdot \underline{x} = \underline{p} \cdot \underline{x} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e} \cdot \underline{x} = -\frac{1}{2}[(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2 - \rho^2] \quad (2.86)$$

sustituyendo en (2.84) y haciendo un poco de álgebra nos queda

$$\sigma \underline{x}' = \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{\rho} \right)^2 [g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}g^2(\mathbf{x})\mathbf{e} + \mathbf{e}_0], \quad (2.87)$$

donde

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\rho^2}{\mathbf{x} - \mathbf{p}} + \mathbf{p} = \frac{\rho^2(\mathbf{x} - \mathbf{p})}{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} + \mathbf{p} \quad (2.88)$$

es una inversión en \mathbb{R}^n .

Reflexiones

Un hiperplano con normal unitaria \mathbf{n} y una distancia δ (con signo) del origen en \mathbb{R}^n puede ser representada por el vector

$$\underline{P} = \underline{s} = \mathbf{n} + \delta \mathbf{e} \quad (2.89)$$

Insertando $\underline{s} \cdot \underline{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ en (2.84), podemos encontrar que

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}} + 2\delta\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x} - \delta\mathbf{n})\hat{\mathbf{n}} + \delta\mathbf{n} \quad (2.90)$$

La expresión (2.90) es equivalente a la reflexión $\mathbf{n}\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}}$ en el origen, trasladada por δ a lo largo de la dirección de \mathbf{n} . Un punto \mathbf{c} está en el hiperplano cuando $\delta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$, en donde (2.89) puede ser escrita

$$\underline{P} = \underline{s} = \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c})\mathbf{e} \quad (2.91)$$

Vía (2.90), este vector representa la reflexión en el hiperplano a través del punto \mathbf{c} .

Traslaciones

Una traslación puede ser modelada como dos reflexiones sobre dos hiperplanos paralelos (ver fig. 2.7). Asumiendo que los dos planos están normalizados esto quiere decir que la magnitud de su normal sea igual a uno y que uno de ellos pasa por el origen (el valor de la distancia $\delta = 0$). Entonces de (2.89) podemos representar el operador de traslación (llamado trasladador) como

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \underline{P}_1 \underline{P}_2 &= (\mathbf{n} + \delta \mathbf{e})(\mathbf{n} + 0\mathbf{e}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \mathbf{t}\mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde $\mathbf{t} = 2\delta\mathbf{n}$ y $\|\mathbf{n}\| = 1$. La distancia de traslación es dos veces la separación entre los hiperplanos.

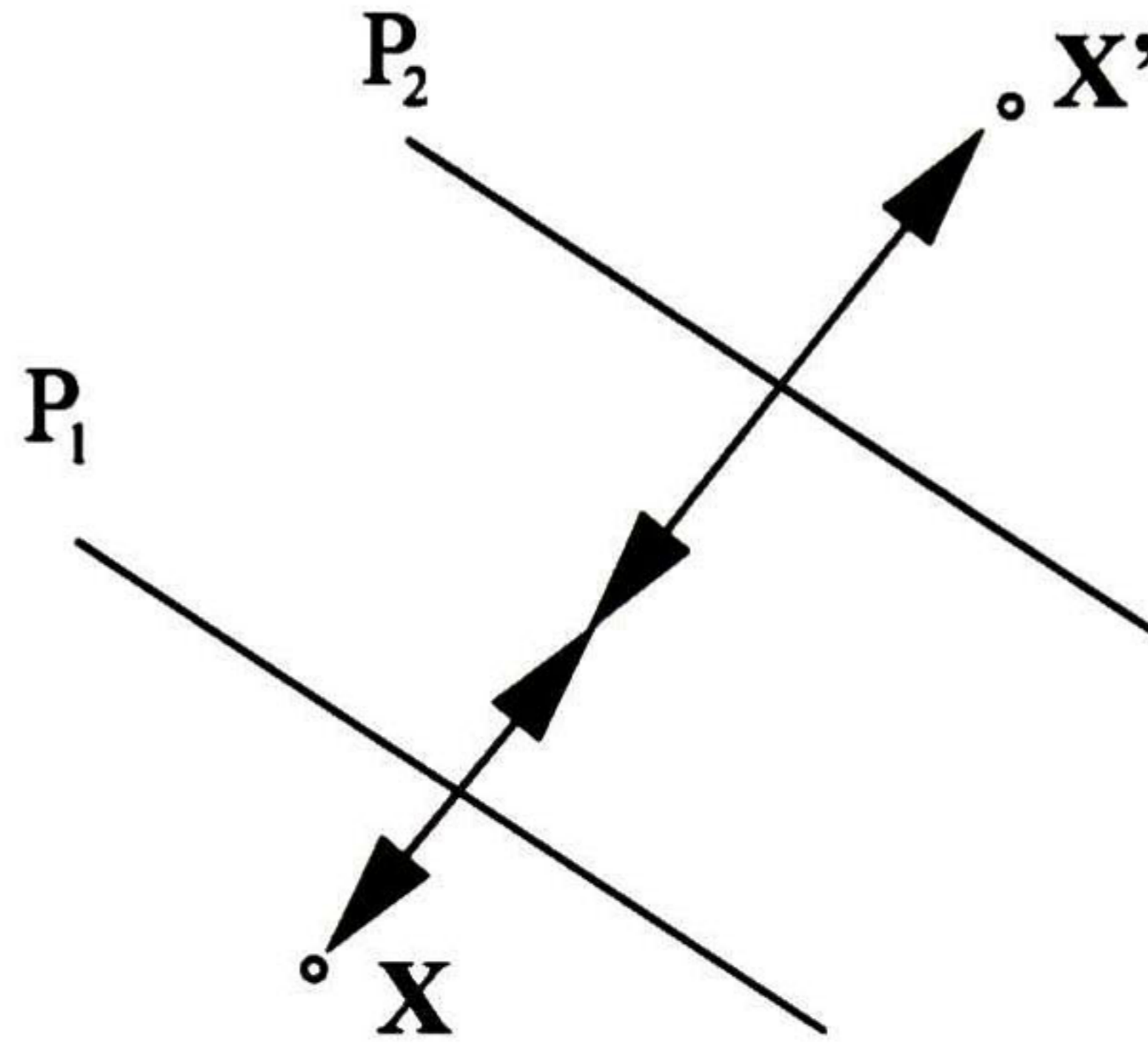


Figura 2.7: La traslación como una reflexión sobre dos planos paralelos

Rotaciones

Usando (2.91), las rotaciones pueden ser modeladas por la composición de dos reflexiones sobre dos hiperplanos que se intersecan en un punto \mathbf{c} (vea fig. 2.8) como

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a} + e(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}))(\mathbf{b} + e(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) = \mathbf{ab} + e(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})) \quad (2.93)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son las normales unitarias. Escribimos $R = \mathbf{ab}$ y $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times R$, para simplificar notación. Así se establece que el producto de dos reflexiones en cualquier punto es equivalente a una rotación sobre ese punto.

2.3.5. Movimientos rígidos: Rotores, Trasladares y Motores

En esta sección hablaremos de los movimientos rígidos de las entidades en el álgebra conformal. Se ha mencionado anteriormente sobre las transformaciones conformales y su representación. Ahora veremos otra forma de representar algunos de esos versores.

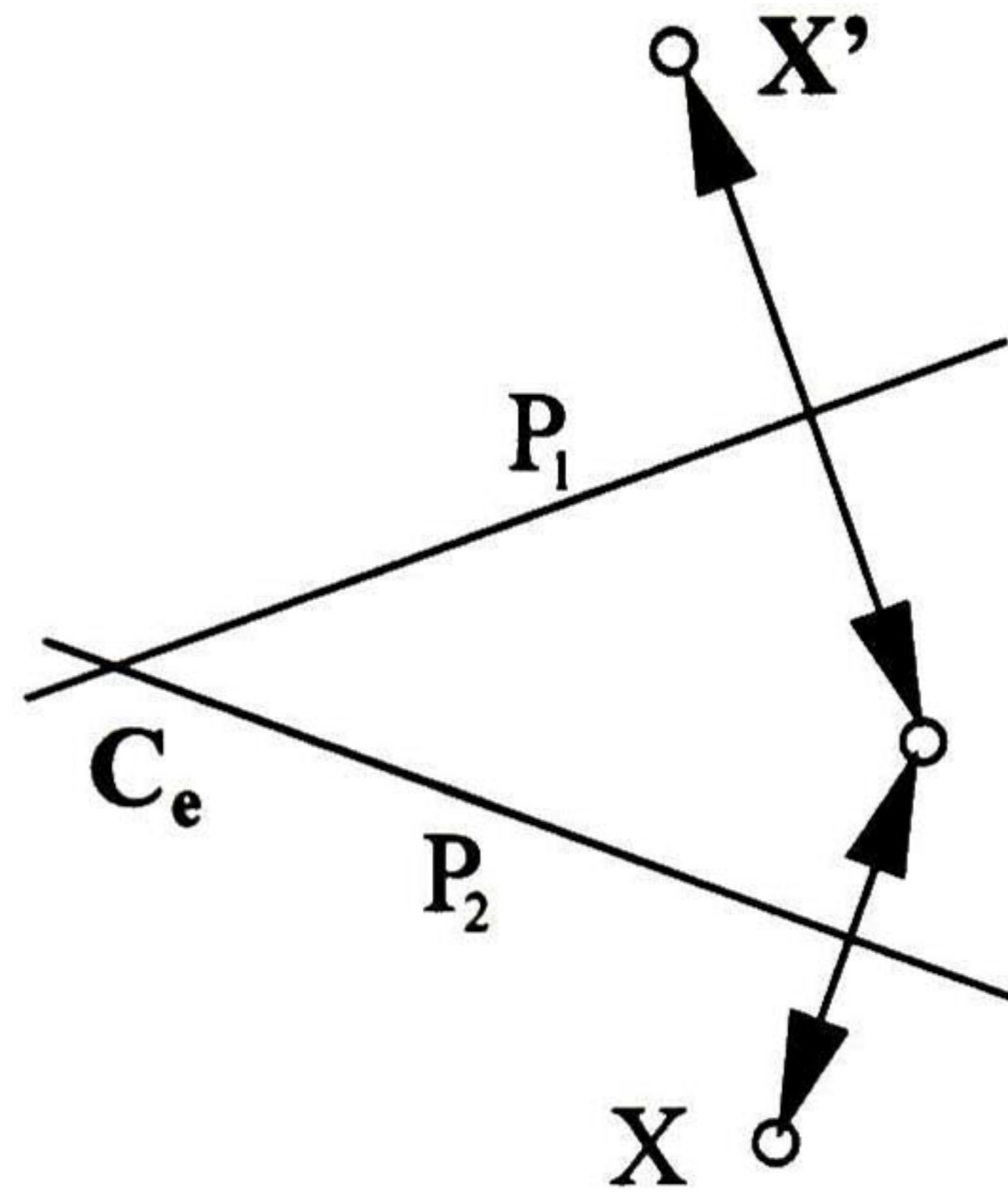


Figura 2.8: La rotación como una reflexión sobre dos planos que se intersecan

Tipo	$g(\mathbf{x})$ en \mathbb{R}^n	Versor en $\mathcal{G}_{n+1,1}$	$\sigma(x)$
Inversión	$\frac{\rho^2}{\mathbf{x}-\mathbf{p}} + \mathbf{p}$	$\underline{s} = \mathbf{p} - \frac{1}{2}\rho^2\mathbf{e}$	$\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{p}}{\rho}\right)^2$
Reflexión	$-\mathbf{nxn} + 2\mathbf{x}\delta$	$\underline{P} = \mathbf{n} + \delta\mathbf{e}$	1
Traslación	$\mathbf{x} - \mathbf{t}$	$\underline{\mathbf{T}} = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}$	1
Rotación	$\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{c})\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{c}$	$\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \mathbf{e}(\mathbf{c} \times \mathbf{R})$	1

Cuadro 2.2: Transformaciones conformales y sus versores representados

Los bivectores del álgebra geométrica pueden ser usados para representar rotaciones de entidades en el espacio de 3D. Un *rotor*¹⁰ \mathbf{R} es un elemento par del álgebra \mathcal{G}_3 que satisface $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$. En $\mathcal{G}_{4,1}$ una rotación puede ser expresada por un rotor de la forma

$$\mathbf{R} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{l}\right) \quad (2.94)$$

donde los componentes de este rotor $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ son similares al rotor de \mathcal{G}_3 , un bivector unitario $\underline{l} \in \langle \mathcal{G}_3 \rangle_2 \subseteq \mathcal{G}_{4,1}$, el cual representa una línea en conformal (de magnitud unitaria) que pasa por el origen (sin momento) que es el eje de rotación, y un ángulo θ , el cual representa el ángulo de rotación. Usando la representación

¹⁰Rotor es una abreviación de *rotador*

de Euler del rotor (2.94) nos queda como

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{l}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{l}\end{aligned}\quad (2.95)$$

desarrollamos (2.95) para encontrar también a $\tilde{\mathbf{R}}$

$$\mathbf{R} = r_c - r_s \underline{l} = r_c - r_{s_1} \mathbf{e}_{23} - r_{s_2} \mathbf{e}_{31} - r_{s_3} \mathbf{e}_{12} \quad (2.96)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = r_c + r_s \underline{l} = r_c + r_{s_1} \mathbf{e}_{23} + r_{s_2} \mathbf{e}_{31} + r_{s_3} \mathbf{e}_{12} \quad (2.97)$$

La rotación de una entidad (punto, esfera, línea, plano, par de puntos, círculo) puede ser realizada multiplicando la entidad por \mathbf{R} por la izquierda y por su reverso $\tilde{\mathbf{R}}$ por la derecha. Por ejemplo, la rotación de un punto puede ser escrita como

$$\underline{x}' = \mathbf{R}\underline{x}\tilde{\mathbf{R}} \quad (2.98)$$

Un rotor representa el grupo de $SO(3)$ en el álgebra geométrica Euclidiana. Como el rotor es un versor en \mathcal{G}_n , pertenece al grupo de versores, entonces el producto geométrico de dos rotores $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2$ resulta en un nuevo rotor. De esto se sigue que

$$\underline{x}' = \mathbf{R}\underline{x}\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)\underline{x}(\tilde{\mathbf{R}}_1\tilde{\mathbf{R}}_2) \quad (2.99)$$

Para trasladar una entidad respecto a un vector de traslación $\mathbf{t} \in \langle \mathcal{G}_3 \rangle_1$, usamos el *traslador*, $\mathbf{T} \in \mathcal{G}_{4,1}$,

$$\mathbf{T} = \exp\left(\frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) = \left(1 + \frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \quad (2.100)$$

utilizando (2.37) y la restricción $\mathbf{e}^k = 0$ para $k \geq 2$. Un traslador es un rotor especial actuando en el infinito usando el vector nulo \mathbf{e} . Similar a la rotación, una entidad puede ser trasladada multiplicando la entidad por \mathbf{T} por la izquierda y por su reverso $\tilde{\mathbf{T}}$ por la derecha.

$$\underline{x}' = \mathbf{T}\underline{x}\tilde{\mathbf{T}} \quad (2.101)$$

Para expresar un movimiento rígido, la aplicación consecutiva de un rotor y un traslador pueden ser escritos como el producto de ellos. Tal operador es expresado como \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}\mathbf{R} \quad (2.102)$$

Es un multivector especial de grado par llamado *motor*, el cual es la abreviación de *momento y vector*. El movimiento rígido por ejemplo de un punto \underline{x} puede ser escrito como

$$\underline{x}' = \mathbf{M}\underline{x}\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{TR}\underline{x}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}} \quad (2.103)$$

Esta formalización del desplazamiento rígido puede ser utilizada para cualquier entidad en el álgebra conformal (mencionadas en el cuadro 2.1). Esta representación es en contraste para formar una definición de motores en el marco del álgebra de motores [1], el álgebra $\mathcal{G}_{3,0,1}^+$ la cual formula la Cinemática en un espacio compuesto por líneas y el cual es isométrico al álgebra de cuaterniones duales.

Transformaciones de giro y tornillo

Siguiendo la definición del motor en el álgebra conformal y basados en el rotor llamado de *giro*, todo movimiento rígido puede ser expresado como un giro o movimiento de tornillo, el cual es una rotación sobre una línea en el espacio (en general, que no pase por el origen)¹¹ combinado con una traslación a lo largo de esta línea. En el álgebra geométrica conformal es posible usar los rotores y trasladores para expresar movimientos de tornillo en el espacio.

Para modelar la rotación de un punto \underline{x} alrededor de una línea \underline{L} arbitraria en el espacio, la idea general es trasladar el punto \underline{x} con el vector de distancia entre la línea \underline{L} y el origen, para realizar la rotación en el origen y trasladar de regreso el punto transformado. Entonces el motor $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ describe una rotación general que tiene la forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{TR}\widetilde{\mathbf{T}} = \mathbf{R}_{\underline{L}} \quad (2.104)$$

donde se puede ver la traslación, la rotación y la traslación de regreso respectivamente. (2.104) se puede expresar como un rotor sobre la línea \underline{L} . Al aplicar $\mathbf{M} = \mathbf{RL}$ a un punto obtenemos

$$\underline{x}' = \mathbf{R}_{\underline{L}}\underline{x}\widetilde{\mathbf{R}}_{\underline{L}} = \mathbf{TR}\widetilde{\mathbf{T}}\underline{x}\widetilde{\mathbf{R}}\widetilde{\mathbf{T}} \quad (2.105)$$

¹¹Tal operador también es llamado *rotación general*

donde $\mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{R}}_{\underline{L}}$. Usando la forma exponencial del trasladador y rotor obtenemos¹²

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\underline{L}} &= \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}} \\
 &= \exp\left(\frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{l}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{l}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \\
 &= \exp\left(\left(1 + \frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right) \left(-\frac{\theta}{2}\underline{l}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{e}\mathbf{t}}{2}\right)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\underline{l} + \mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l}))\right)
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Esta es la fórmula correspondiente a la rotación general dada en [5]. La representación exponencial de los motores, rotores y trasladadores es usada para un manejo sencillo de ellos y sus derivaciones.

Es interesante mencionar que la parte exponencial de $\mathbf{R}_{\underline{L}}$ consiste directamente en los componentes de la línea para rotar las entidades alrededor de ella. Retomando (2.81) y usando una dirección unitaria $|\mathbf{r}| = 1$ y como segundo punto la representación de la dirección \mathbf{t} de traslación del origen a la línea, podemos representar una línea como

$$\underline{L}^* = \mathbf{e}(\mathbf{t} \wedge \mathbf{r}) + \mathbf{r}\mathbf{E} \tag{2.107}$$

la cual en su forma estándar es expresada como:

$$\begin{aligned}
 \underline{L} &= \mathbf{e}(\mathbf{t} \wedge \mathbf{r})\mathbf{I}_{\mathbf{E}} + \mathbf{r}\mathbf{I}_{\mathbf{E}} \\
 &= \mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l}) + \underline{l}
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Así, dada una línea en álgebra conformal que tenga magnitud unitaria, y usando su forma estándar \underline{L} , se puede hacer que cualquier entidad gire alrededor de ella usando esta línea como eje de rotación. Esta expresión se puede representar como

$$\mathbf{R}_{\underline{L}} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\underline{L}\right) \tag{2.109}$$

¹²En el paso 4 usamos la propiedad $\mathbf{g}\exp(\xi)\tilde{\mathbf{g}} = \exp(\mathbf{g}\xi\tilde{\mathbf{g}})$ para $\mathbf{g}\tilde{\mathbf{g}} = 1$.

Los movimientos en tornillo pueden ser representados por movimientos rígidos. Un *movimiento de tornillo* es aquel que para cada movimiento rígido de cuerpos puede ser realizado por una rotación en un eje combinado con la traslación paralela en ese eje. Para modelar el movimiento de tornillo, la entidad tiene que trasladarse durante una rotación general respecto al eje de rotación.

El motor resultante puede ser calculado utilizando (2.102) con (2.106) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \mathbf{T}_{dr} \mathbf{R}_{\underline{L}} &= \mathbf{T}_{dr} \mathbf{T} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{T}} \\
 &= \exp\left(\frac{\mathbf{e}d\mathbf{r}}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\underline{l} + \mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l}))\right) \\
 &= \exp\left(\frac{\mathbf{e}d\mathbf{r}}{2} - \frac{\theta}{2}(\underline{l} + \mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l}))\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}\left(\underline{l} + \underbrace{\mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l} - \frac{d}{\theta}\mathbf{r})}_{\mathbf{m}}\right)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{\theta}{2}(\underline{l} + \mathbf{e}\mathbf{m})\right) \tag{2.110}
 \end{aligned}$$

El bivector en la parte exponencial, $-\frac{\theta}{2}(\underline{l} + \mathbf{e}\mathbf{m})$ es la representación de un tornillo. Si \mathbf{m} es cero, el motor \mathbf{M} actúa como un rotor y si \underline{l} es cero, el motor actúa como un trasladador. Para $\mathbf{m} \perp \underline{l}^*$, el motor actúa como una rotación general y para $\mathbf{m} \not\perp \underline{l}^*$, el motor actúa como un movimiento de tornillo.

2.4. Propiedades de algunas entidades en Conformal

A continuación se presentan algunas de las propiedades de las entidades antes vistas, las cuales se utilizarán en capítulos posteriores.

2.4.1. Propiedades del punto

Gracias a que en $\mathcal{G}_{4,1}$ y más específicamente en el álgebra geométrica conformal usamos coordenada homogéneas, podemos tener representaciones únicas de

los puntos o hasta un factor escalar. Para quitar ese factor escalar normalizamos estos puntos de la manera siguiente

$$\underline{x} = \frac{\underline{x}}{-\mathbf{e} \cdot \underline{x}} \quad (2.111)$$

La representación proyectiva para el punto de la forma (2.62) es

$$\mathbf{e} \wedge \underline{x} = \frac{\mathbf{e} \wedge \underline{x}}{-\mathbf{e} \cdot \underline{x}} = \mathbf{e}\mathbf{x} + \mathbf{e} \wedge \mathbf{e}_0 \quad (2.112)$$

Notemos que $\mathbf{e} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{e}\mathbf{x} = -\mathbf{x}\mathbf{e}$ porque $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = 0$. Utilizando (2.56) tenemos

$$(\mathbf{e} \wedge \underline{x})\mathbf{E} = 1 + \mathbf{e}\mathbf{x} \quad (2.113)$$

Esta es la representación de un punto en el modelo afino [5].

Utilizando (2.59) sobre un punto $\underline{x} \in \mathcal{G}_{4,1}$ normalizado, podemos recuperar el punto \mathbf{x}

$$P_{\mathbf{E}}^{\perp}(\underline{x}) = \mathbf{x} \in \mathcal{G}_3 \quad (2.114)$$

2.4.2. Propiedades de la esferas

Teorema 2.4.1 *Dos esferas o hiperplanos \underline{s}_1^* , \underline{s}_2^* se intersecan, son tangentes o paralelos, o no se intersecan si y solo si $(\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2)^2$ es $<, =, > 0$ respectivamente. [5].*

Examinemos el caso en el que \underline{s}_1^* , \underline{s}_2^* son ambas esferas que es el caso que usaremos posteriormente.

- *si se intersecan*, la intersección $(\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2)^*$ es una esfera, como $\mathbf{e} \wedge (\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2)^* \neq 0$. El centro y radio de la intersección son el mismo que el de la esfera $(P_{\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2}(\mathbf{e}))^*$. La intersección yace en un hiperplano $(\mathbf{e} \cdot (\underline{s}_1 \wedge \underline{s}_2))^*$
- *si son tangentes*, el punto de tangencia es proporcional al vector nulo $P_{\underline{s}_2}^{\perp} = (\underline{s}_2 \wedge \underline{s}_1)\underline{s}_1^{-1}$
- *si no se intersecan*, hay dos puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ llamados *puntos Poncelet*. los cuales son inversos uno del otro con respecto a las dos esferas \underline{s}_1^* y \underline{s}_2^* .

□

Al igual que el punto (2.111) la esfera puede estar hasta un factor escalar, para normalizar la esfera empleamos

$$\underline{s} = \frac{\underline{s}}{-\mathbf{e} \cdot \underline{s}} \quad (2.115)$$

Para obtener el centro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ de una esfera ya normalizada aplicamos (2.59) a \underline{s}

$$\mathbf{p} = (\underline{s} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} \quad (2.116)$$

y para recuperar $\underline{p} \in \mathcal{G}_{4,1}$

$$\underline{p} = \underline{s} + \frac{1}{2}\underline{s}^2\mathbf{e} \quad (2.117)$$

Sean $\underline{x}, \underline{s} \in \mathcal{G}_{4,1}$ un punto y una esfera respectivamente. Para saber si \underline{x} esta dentro, sobre o fuera de la esfera utilizamos

$$\underline{x} \cdot \underline{s} = \begin{cases} > 0 & \text{si } \underline{x} \text{ esta dentro de la esfera} \\ = 0 & \text{si } \underline{x} \text{ esta sobre la esfera} \\ < 0 & \text{si } \underline{x} \text{ esta fuera de la esfera} \end{cases} \quad (2.118)$$

2.4.3. Propiedades del círculo

Sea $\underline{z}^* = \underline{a} \wedge \underline{b} \wedge \underline{c}$ un círculo creado a partir de tres puntos. De acuerdo con (2.77) el plano \underline{P}_z^* en el que yace este círculo se puede calcular con

$$\underline{P}_z^* = \underline{z}^* \wedge \mathbf{e} \quad (2.119)$$

mientras que con

$$\underline{L}_z^* = \underline{z} \wedge \mathbf{e} \quad (2.120)$$

calculamos la línea perpendicular a \underline{P}_z^* que pasa por el centro del círculo. Haciendo el producto interior de (2.119) con (2.120)

$$\underline{L}_z^* \cdot \underline{P}_z^* = \mathbf{e} \wedge \underline{s}_{\mathbf{e}_0} \quad (2.121)$$

obtenemos la esfera $\underline{s}_{\mathbf{e}_0}$ pre-operada por \mathbf{e} , la cual tiene el centro en \mathbf{p}_z , que es el mismo punto en donde se encuentra el centro del círculo \underline{z}^* , pero el radio de $\underline{s}_{\mathbf{e}_0}$

es la distancia que hay entre el centro de \underline{z} y el origen. El radio $\rho_{\underline{z}}$ del círculo se puede calcular con

$$\rho_{\underline{z}} = \frac{\underline{z}^2}{(\underline{e} \wedge \underline{z})^2} \quad (2.122)$$

y la esfera que tiene el mismo centro y radio que el círculo se puede obtener aplicando el teorema 2.4.1 quedando

$$\underline{s}_z = (\underline{e} \cdot \underline{z})\underline{z} \quad (2.123)$$

que también se puede expresar usando (2.119)

$$\underline{s}_z^* = \frac{\underline{z}}{\underline{P}_z^*} \quad (2.124)$$

2.4.4. Propiedades de las líneas

El cuadrado de una línea (2.81) esta dado por

$$\begin{aligned} (\underline{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b})^2 &= -(\underline{b} \wedge \underline{a} \wedge \underline{e}) (\underline{e} \wedge \underline{a} \wedge \underline{b}) \\ &= [(\underline{b} \wedge \underline{a}) \cdot \underline{e}] [\underline{e} (\underline{a} \wedge \underline{b})] \\ &= [\underline{a} - \underline{b}] \cdot [\underline{a} - \underline{b}] \\ &= (\underline{a} - \underline{b})^2 \end{aligned} \quad (2.125)$$

el cual es igual a la distancia Euclidiana al cuadrado del segmento que se forma entre los puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Una línea se puede normalizar de la siguiente manera

$$\underline{L}^* = \frac{\underline{L}^*}{\sqrt{\underline{L}^* \underline{L}^*}} \quad (2.126)$$

Al normalizar, el segmento de línea que une dos puntos \mathbf{a} y \mathbf{b} tiene una magnitud unitaria.

Para recuperar los vectores correspondientes al momento y la dirección de una línea se aplican las siguientes formulas

$$\mathbf{r} = \underline{L}^* \cdot \mathbf{E} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_+ \underline{L} \quad (2.128)$$

en donde $\mathbf{r}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$.

Para encontrar el punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ perteneciente a la línea más cercano al origen, se aplican las formulas (2.127) y (2.128) normalizando previamente la línea con (2.126)

$$\mathbf{p} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} \quad (2.129)$$

en donde $\mathbf{M} = \mathbf{mI}_E$ es un bivector.

La distancia de un punto $\underline{x} \in \mathcal{G}_{4,1}$ a una línea $\underline{L}^* \in \mathcal{G}_{4,1}$ se basa en (2.73). Para obtenerla, formamos una esfera que tenga su centro $\underline{p} \in \underline{L}^*$ y el punto \underline{x} en la superficie de la esfera, como se muestra en (2.69) aplicando (2.67)

$$\rho^2 = \left(\frac{\underline{L}^* \cdot \underline{x}}{\underline{L}^* \cdot \underline{x} \cdot \mathbf{e}} \right)^2 \quad (2.130)$$

De (2.130) podemos observar que $\underline{L}^* \cdot \underline{x} = \underline{z}$ es un círculo que pasa por \underline{x} con centro en $\underline{p} \in \underline{L}^*$ y el plano $\underline{L}^* \cdot \underline{x} \cdot \mathbf{e} = \underline{P}$ es el plano donde yace el círculo \underline{z} . Con (2.130) se puede sacar el vector dirección entre la línea \underline{L}^* y el punto \underline{x} , utilizando el centro \underline{p} y el mismo punto \underline{x} para crear una línea entre ellos y aplicar la ecuación (2.127).

2.4.5. Propiedades del par de puntos

Sea $\underline{PP}^* = \underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2$, entonces para poder recupera los dos puntos que están en la entidad *par de puntos* se aplica la siguiente formula

$$\underline{p}_{1,2} = \frac{\underline{PP}^* \pm \sqrt{\underline{PP}^* \underline{PP}^*}}{\underline{PP}^* \cdot \mathbf{e}} \quad (2.131)$$

donde

$$\underline{PP}^* - \sqrt{\underline{PP}^* \underline{PP}^*} = \underline{p}_1 \underline{p}_2 = \underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 + \underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2 \quad (2.132)$$

$$\underline{PP}^* + \sqrt{\underline{PP}^* \underline{PP}^*} = -\underline{p}_2 \underline{p}_1 = -\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 + \underline{p}_1 \wedge \underline{p}_2 \quad (2.133)$$

y $\underline{PP}^* \cdot \mathbf{e} = \underline{P}$ es el plano tangente a la línea que forman estos dos puntos ubicado entre el par de puntos a una distancia equidistante de cada punto. El punto \underline{p}_1 se recupera teniendo como numerador a (2.132) y \underline{p}_2 teniendo como numerador a (2.133).

La esfera \underline{S}_{PP^*} que contiene en su superficie al par de puntos $\underline{PP^*}$ se puede obtener mediante

$$\underline{S}_{PP^*} = \frac{\underline{PP^*}}{\underline{PP^*} \wedge \mathbf{e}} \quad (2.134)$$

2.4.6. Propiedades de los rotores

Dado un rotor $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ podemos extraer el ángulo de rotación θ hasta una diferencia de signo y su eje de rotación \underline{l} de la siguiente manera

$$c = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{R}}}{2} \quad (2.135)$$

despejando θ de (2.135)

$$\theta = 2 \cos^{-1}(c) \quad (2.136)$$

Para obtener el eje de rotación, se sustrae la parte escalar del rotor. Al hacer esto nos queda solo la parte bivector. Aquí al rotor lo tratamos como si fuera una línea en conformal

$$\underline{L} = \mathbf{R} - c = \frac{\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}}}{2} \quad (2.137)$$

y lo normalizamos sacando su dual \underline{L}^* y utilizando (2.126). Así obtenemos el eje de rotación unitario en su forma dual. Por ultimo regresamos la línea a su forma estándar.

Nótese que si $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\underline{L}} = \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}}$ es una rotación general, los caso (2.135) y (2.137) son validos, ya que la única diferencia es el bivector $\mathbf{e}(\mathbf{t} \cdot \underline{l})$ que representa el momento de la línea.

Para obtener el rotor cuyo eje pase por el origen y que tenga la forma de (2.106) aplicamos (2.59)

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{\underline{L}} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} \quad (2.138)$$

Ya sea que un rotor este en el origen o no lo este, una de las propiedades que conserva es que su magnitud sea unitaria, esto es que $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$. Veamos el caso para $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\underline{L}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\underline{L}}\tilde{\mathbf{R}}_{\underline{L}} &= \mathbf{TR}\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{TR}(1)\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{T}(1)\tilde{\mathbf{T}} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.139}$$

2.4.7 Propiedades de los motores

Dado un motor $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ de la forma (2.102) podemos extraer su vector de traslado y por consecuencia su parte traslador, y su parte de rotación en el origen.

De (2.102) podemos observar que

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{TR} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\mathbf{et}\right)\mathbf{R} \\
&= \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{etR}
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Al igual que en (2.138) aplicamos (2.59) al motor (2.140)

$$\mathbf{R} = (\mathbf{M} \wedge \mathbf{E})\mathbf{E} \tag{2.141}$$

y extraemos la parte de rotación, la cual tiene su eje de rotación pasando por el origen (una línea sin momento).

Vemos que el segundo sumando de (2.140) es un rotor multiplicado por $\frac{1}{2}\mathbf{et}$, entonces haciendo un poco de álgebra podemos obtener

$$\mathbf{R}' = (\mathbf{e}_- \cdot \mathbf{M})\mathbf{I}_E \tag{2.142}$$

el cual tiene una característica especial. Si tomamos las entradas del rotor resultante de (2.141) y las asignamos a un vector \mathbf{v}_1 y haciendo lo mismo para (2.142) en \mathbf{v}_2 , vemos que $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, ya que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Teniendo los rotores (2.141) y (2.142) podemos expresar (2.140) como

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} + \mathbf{eR}'\mathbf{I}_E \tag{2.143}$$

Finalmente, el vector de traslación \mathbf{t} puede ser recuperado igualando (2.140) con (2.143), de donde se sigue que

$$\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{etR} = \mathbf{R} + \mathbf{eR}'\mathbf{I}_E$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}et\mathbf{R} &= e\mathbf{R}'\mathbf{I}_E \\
 \frac{1}{2}et\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} &= e\mathbf{R}'\mathbf{I}_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 et &= 2e\mathbf{R}'\mathbf{I}_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 -e_0 \cdot et &= -e_0 \ 2e\mathbf{R}'\mathbf{I}_E\tilde{\mathbf{R}} \\
 t &= 2\mathbf{R}'\mathbf{I}_E\tilde{\mathbf{R}}
 \end{aligned} \tag{2.144}$$

Una vez obtenido el vector de traslación, podemos crear el trasladador \mathbf{T} con (2.100). Así podemos calcular el motor utilizando (2.141) y (2.144) quedando de la siguiente manera $\mathbf{M} = (1 + \frac{1}{2}et)\mathbf{R}$.

Nótese que estos casos son válidos para un rotor que tenga su eje de rotación en el origen. En el caso de que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_L = \mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}$ el rotor (2.141) devolverá el rotor que tenga el mismo eje pero este estará en el origen, y conservara su ángulo de rotación θ , y (2.144) devolverá un vector de traslación diferente al del trasladador original debido a que se empleo un rotor en el origen en vez de un rotor trasladado fuera del origen. El motor resultante conservara el mismo comportamiento, esto es, sea $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ y de la forma $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1\mathbf{R}_L = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}_2$, entonces podemos encontrar $\mathbf{M}_2 = \mathbf{T}_3\mathbf{R}_2$ utilizando (2.141) y (2.144) donde $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2$.

Dado que $\mathbf{M} \in \mathcal{G}_{4,1}^+$ es el resultado del producto geométrico de multiplicar vectores invertibles ($\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = 1$ y $\mathbf{T}\tilde{\mathbf{T}} = 1$), \mathbf{M} es considerado un versor, con la propiedad $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}} = 1$ ya que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{T}\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{T}} \\
 &= \mathbf{T}(1)\tilde{\mathbf{T}} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.145}$$

por lo que pertenece al grupo de versores, y como también tiene magnitud unitaria pertenece al grupo pin de versores.

Capítulo 3

Navegación Robótica en 2D

La creación de mapas para un robot móvil es uno de los problemas fundamentales en la robótica. En la literatura, el problema de creación de mapas con robots móviles es frecuentemente llamado *problema de localización y creación de mapas simultaneo* (*simultaneous localization and mapping problem*, SLAM) [6, 7]. Esto es porque la creación de mapas incluye a los dos, estimación relativa de la posición del robot con el mapa y generación de un mapa usando el sensor de entrada y la estimación acerca de la pose del robot.

3.1. Construcción de mapas con base en segmentos de líneas usando el sistema láser

Hay básicamente dos tipos de mapas adecuados para la localización, el mapa de celdas ocupadas (*occupancy grid map*) y el mapa basado en primitivas geométricas (*geometric primitive map*). El mapa de celdas ocupadas representa el entorno que rodea al robot como un arreglo de celdas bidimensional, cada una indicando la posibilidad de que estén ocupadas. Es fácil de construir, y especialmente aceptable para sensores de rango impreciso como lo son los sonares de ultrasonido. Pero es difícil para su uso directamente en la localización y planeo de rutas.

El mapa basado en primitivas geométricas ha sido explotado en varias in-

vestigaciones [8, 7]. El segmento de línea es la primitiva más ampliamente usada. Dado que no todos los objetos proveen segmentos de líneas, estos mapas no pueden dar una región cerrada y conectada como los mapas de celdas ocupadas.

Utilizaremos dos mapas en nuestra construcción: uno será el *mapa local* el cual tendrá la ubicación de los objetos censados actualmente con coordenadas locales del sensor láser, y el *mapa global* el cual tendrá los objetos previamente censados y ubicados de acuerdo a la posición inicial de la exploración.

3.1.1. Usando segmentos de líneas en vez de puntos

La utilización de un sensor láser 2D ha crecido popularmente en la aplicación de robots móviles. Este provee digitalización densa de datos y medidas mas concretas a comparación de otros sensores como los infrarrojos y sonares ultrasonido. Las mediciones muestran claramente las características de una línea para un ambiente ordinario entre muros, como se muestra en la figura 3.1.



Figura 3.1: Muestra simple de datos obtenidos por el sensor láser

Como entidad geométrica, la línea provee una información amplia y precisa, pero con mucho menos carga de información que los puntos que pertenecen a ella. Es por eso que un algoritmo basado en líneas sea más eficiente que uno basado en puntos.

Para extraer los segmentos de línea de un rango de puntos obtenidos del sensor láser, usaremos el método de *rompimiento de líneas recursivo* (*recursive line splitting*), el cual es confiable y rápido. Varios pasos de este método son explicados a continuación.

Sea V el vector resultante de las mediciones del Láser y $v_i \in V \quad i = 1 \dots n$ una muestra de este vector con coordenadas x y y , ($v_i = (v_{i_x}, v_{i_y})$). Sea L el conjunto de grupos de puntos, los cuales forman líneas de V , y $L_1 = V$ es el primer conjunto a evaluar.

1. Forme una línea con los puntos inicial y final.

Sea L_k un conjunto de puntos que forma la línea \mathbf{l}_k desde v_p hasta v_f , donde $v_p, v_f \in L_k$, son los puntos iniciales y finales de L_k y del segmento de la línea \mathbf{l}_k . Donde $\mathbf{l}_k = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T$ es un vector que representa una línea que satisface

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}v_{f_x} + \mathbf{b}v_{f_y} + \mathbf{c} = 0 \quad (3.1)$$

2. Encuentre el punto más lejano (mayor distancia) de esta línea.

Sea $v_{md} = \max\{d(\mathbf{l}_k, v_i)\} \quad \forall v_i \in L_k$, donde $d(\mathbf{l}_k, v_i)$ es la distancia de un punto a una línea y esta definida como

$$d(\mathbf{l}, p) = \frac{\mathbf{a}p_x + \mathbf{b}p_y + \mathbf{c}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \quad (3.2)$$

donde $p = (p_x, p_y)$ es un punto en 2D.

3. Si esta distancia es pequeña, se ha encontrado una línea.

Si $v_{md} < \xi$, entonces L_k representa al conjunto de puntos que pertenecen a una línea, donde ξ es una cota inferior, la cual representa la distancia máxima de error de un punto para pertenecer a una línea.

4. Si no, divida el grupo de puntos en este punto y repita.

Si $v_{md} \geq \xi$, entonces dividimos $L_k = L_{k_1} \cup L_{k_2}$ en dos grupos donde $v_p, v_{p+1}, \dots, v_{md} \in L_{k_1}$ y $v_{md+1}, \dots, v_f \in L_{k_2}$. Ahora con estos dos nuevos conjuntos repetimos para cada uno desde el paso inicial hasta encontrar un conjunto que represente a una línea.

La cardinalidad de $|L|$ es igual al número de segmentos de líneas extraídas de la lectura del sensor láser. Una vez obtenidos estos conjuntos de puntos L_k ,

y sus líneas respectivas \mathbf{l}_k , verificamos la inclinación para cada línea de L , para fusionar aquellas líneas que tengan una inclinación menor a una cota ϕ_ξ , esto es:

Sea ϕ_k el ángulo de inclinación de \mathbf{l}_k , entonces $\forall \mathbf{l}_k \in L$ si $|\phi_k - \phi_{k-1}| < \phi_\xi$, fusionamos L_k y L_{k+1} , ($L_n = L_k \cup L_{k+1}$) y formamos la línea respectiva \mathbf{l}_n con los puntos $v_p \in L_k$ y $v_f \in L_{k+1}$.

Rectificamos estas líneas dado que $\forall \mathbf{l}_k \in L$ son las líneas creadas por los puntos v_p y v_f . Utilizando el método de Mínimos Cuadrados podemos rectificar esta línea para que represente la línea que esta pasando por el conjunto de puntos de L_k (ver fig 3.2 (b)). Una vez rectificada esta línea podemos extraer sus características que la representan.

Como la dirección del barrido para la obtención de los puntos del sensor láser es en sentido de las manecillas del reloj o contra del reloj, la línea obtenida tendrá una dirección. Esto es importante para verificar la correspondencia de líneas. En otras palabras si $\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{l}_m = 1$ tienen la misma dirección, y si $\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{l}_m = -1$ son de direcciones opuestas.

También se obtiene una distancia ρ que representa la *distancia de Hesse* y un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ del punto más cercano a la línea en coordenadas polares. Estos dos últimos podemos asociarlos con la *transformada de líneas de Hough* [9].

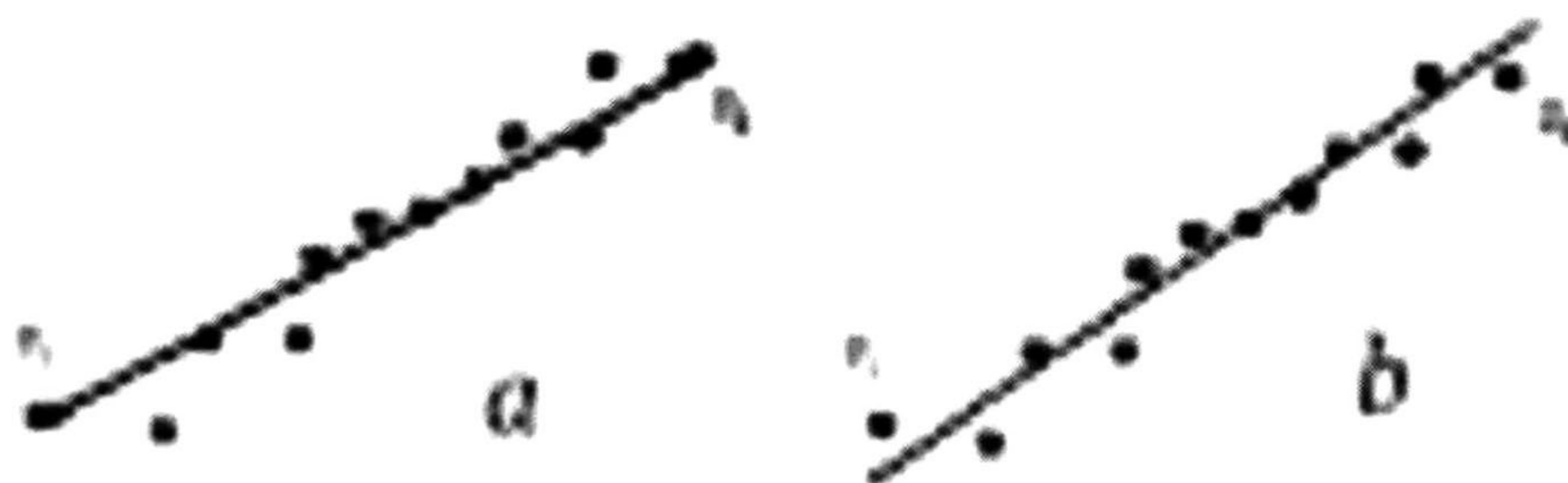


Figura 3.2: (a) Extracción de la línea desde los puntos obtenidos, (b) Corrección de línea extraída y sus propiedades

Definimos una estructura para nuestro segmento de línea \mathbf{l}_k del conjunto de puntos de L_k la cual tendrá los siguientes miembros: (x_i, y_i) punto inicial, (x_f, y_f)

punto final, (ρ) distancia de Hesse, (θ) ángulo en coordenadas polares del punto mas cercano al origen, (p_{x_c}, p_{y_c}) punto mas cercano al origen y los parámetros de la descripción o representación de la línea (a, b, c) donde $ax + by + c = 0$.

Utilización de las características de la transformada de Hough de líneas

La transformada de Hough [9] es una técnica general para la identificación del lugar y orientación de ciertos tipos de entidades geométricas en el tratamiento de imágenes digitales. La transformada consiste en la parametrización de la descripción de una entidad en cualquier lugar en el espacio de la imagen original. Se genera un acoplamiento de valores en el espacio definido de estos parámetros, y para cada punto de acoplamiento se van acumulando los valores anteriores, indicando que tan bien se generan los parámetros correspondientes de una entidad en la imagen dada. Los valores de los puntos de acumulación relativamente de mayor valor describen una identidad que puede ser mapeada a la imagen original, correspondiendo está con una entidad presente en la imagen.

La forma más simple de la transformada de Hough es la transformada de Hough de líneas. Utilizando una representación de la línea en su forma normal

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho \quad (3.3)$$

esta ecuación especifica una línea pasando por (x, y) que es perpendicular a la línea trazada desde el origen hasta (ρ, θ) , en el espacio de coordenadas polares (i.e., $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ en coordenadas rectangulares, ver fig. 3.3). Para cada punto (x, y) en la línea, θ y ρ son constantes.

Ahora, para cada punto (x, y) dado, podemos obtener líneas pasando sobre este punto resolviendo (3.3) para ρ y θ , iterando sobre los posibles valores del ángulo θ . Este método es numéricamente estable para correspondencias de líneas en cualquier ángulo.

Con la transformada de Hough podemos tener representada una línea con solo dos entradas (ρ, θ) . Estos parametros los podemos sacar con el punto mas cercano al origen que pertenezca a la línea.

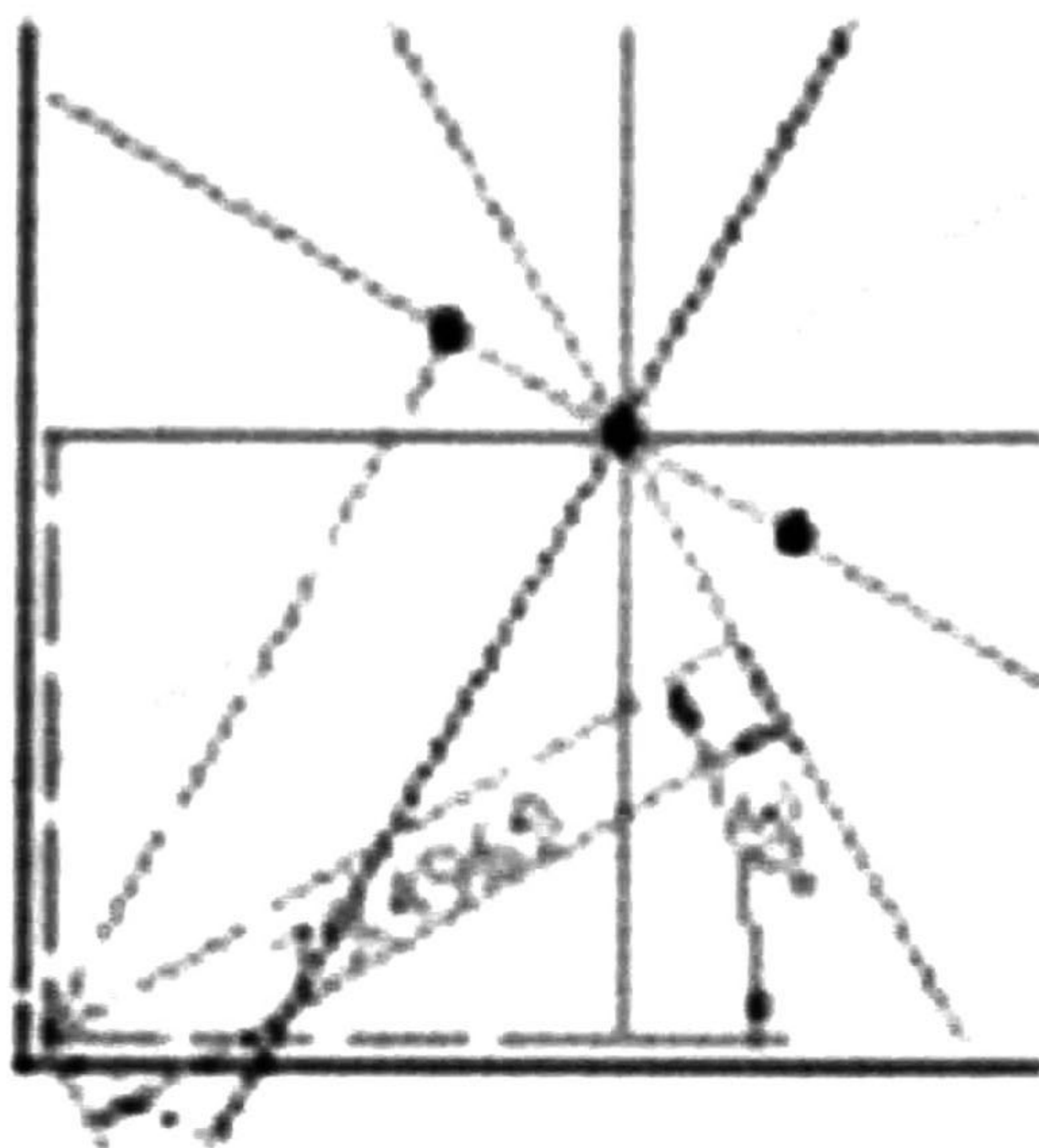


Figura 3.3: Descripción paramétrica de una línea recta

3.1.2. Correspondencia entre líneas

Mediante la utilización de segmentos de línea se construye un mapa del área donde se encuentra el robot. Usando dos conjuntos de segmentos de líneas, uno extraído de la última lectura del sensor láser L , y otro del mapa global antes construido G , éstos pueden ser fácilmente asociados para calcular la posición actual del robot. Esta tarea es la de *ubicación actual*. Las lecturas del *odómetro* son usadas para una aproximación del movimiento más exacto.

Para encontrar las correspondencias de los pares de segmentos de línea, primero transformamos los segmentos de línea de la lectura del sensor láser actual en base a las coordenadas globales con el movimiento aproximado del robot móvil. Esto se hace mediante una matriz de rotación R_{θ_o} y un vector de traslación $T_o = (t_{o_x}, t_{o_y})^T$, los cuales representan el ángulo de rotación θ_o y la traslación t_{o_x} y t_{o_y} en x y y respectivamente, obtenidos por medio del odómetro¹. Una vez obtenidos estos datos podemos calcular

$$v'_i = R_{\theta_o} v_i + T_o \quad (3.4)$$

¹Al iniciar el robot se encuentra en la posición $T_o = (0, 0)$ y $\theta = 0$.

donde v_i es el punto original obtenido del sensor láser y v'_i es el punto transformado según el movimiento aproximado del robot. Debido a que el cálculo de la transformación de todos los puntos obtenidos del sensor láser toma mucho tiempo, nos enfocaremos a transformar con (3.4) los puntos (x_i, y_i) iniciales y (x_f, y_f) finales de cada línea l_k , y con ellos obtener la nueva estructura del segmento de línea l'_k ya transformada. Así obtenemos el nuevo conjunto L' que representa el conjunto de segmentos de líneas locales desplazados hacia la posición del mapa global G . Después, una verificación de la asociación de los segmentos de línea es realizada, un segmento de línea actual contra todos los demás del conjunto de mapa global, basada en los siguientes criterios:

Sea M una matriz de proximidad de los segmentos, con dimensiones $|G| \times |L'|$, en donde las entradas $m_{g,l}$ están compuestas por

$$m_{g,l} = \sqrt{\text{diffTheta}(\theta_{G_g}, \theta_{L'_l})^2 + (\rho_{G_g} - \rho_{L'_l})^2} \quad ; g = 1 \dots |G|, l = 1 \dots |L'|,$$

donde $(\theta_{G_g}, \rho_{G_g})$ y $(\theta_{L'_l}, \rho_{L'_l})$ representan los segmentos de línea en el espacio de Hough de los conjuntos G y L' respectivamente. La función $\text{diffTheta}(\theta_{G_g}, \theta_{L'_l})$ la podemos definir como

$$\text{diffTheta}(\theta_a, \theta_b) = \begin{cases} \theta_a - \theta_b - 2\pi & \text{si } \theta_a > \theta_b \text{ y } \theta_a + \theta_\xi \geq 2\pi \text{ y } \theta_b + \theta_\xi \leq 0 \\ \theta_a - \theta_b + 2\pi & \text{si } \theta_a < \theta_b \text{ y } \theta_b + \theta_\xi \geq 2\pi \text{ y } \theta_a + \theta_\xi \leq 0 \\ \theta_a - \theta_b & \text{si no se cumplen los casos anteriores} \end{cases} \quad (3.5)$$

en donde θ_ξ es un umbral que nos indica si estamos cerca del ángulo 0. Dado que los ángulos θ_k están en un rango de $[0, 2\pi)$ y son cíclicos, la diferencia de estos la podemos expresar yendo hacia un sentido o hacia el otro. Ya que el sentido de incremento en los grados es sentido contrario a las manecillas del reloj, el giro a favor de este tiene que ser positivo y el giro en contra tiene que ser negativo. Esto es si $\theta_a - \theta_b = \theta_c$, si $\theta_a > \theta_b$, θ_c tiene que ser positivo, o si $\theta_a < \theta_b$, θ_c tiene que ser negativo. Veamos un ejemplo de esto:

Sea $\theta_a = \frac{199}{100}\pi$ y $\theta_b = \frac{2}{100}\pi$, y su diferencia $\theta_a - \theta_b = \frac{199}{100}\pi - \frac{2}{100}\pi = \frac{197}{100}\pi$. Esta diferencia tiene que ser constante aun si le sumamos algún ángulo a esta diferencia. Si sumamos π a θ_a y θ_b , obtenemos $\theta_{a+\pi} = \theta_a + \pi = \frac{199}{100}\pi + \pi = \frac{299}{100}\pi = \frac{99}{100}\pi$ y $\theta_{b+\pi} = \theta_b + \pi = \frac{2}{100}\pi + \pi = \frac{102}{100}\pi$, ahora hacemos la diferencia $\theta_{a+\pi} - \theta_{b+\pi} = \frac{99}{100}\pi - \frac{102}{100}\pi = -\frac{3}{100}\pi$. Vemos que $\frac{197}{100}\pi + 2\pi k = -\frac{3}{100}\pi + 2\pi r$, para

algún $k, r \in \mathbb{Z}$, pero para fines del cálculo necesitamos estandarizar las medidas y saber cual de estas medidas vamos a utilizar. Si aplicamos (3.5) a θ_a y θ_b nos queda

$$\text{diffTheta}(\theta_a, \theta_b) = \text{diffTheta}\left(\frac{199}{100}\pi, \frac{2}{100}\pi\right) = -\frac{3}{100}\pi$$

donde $\theta_\xi = \frac{2}{100}\pi$. Dádonos un resultado estándar para cualquier diferencia de ángulos.

Una vez obtenida la matriz M , extraemos el valor mas pequeño por columna de cada fila, siendo este menor a una cantidad mínima de distancia y alojamos en C_i el valor de la columna donde se ubica dicho valor. Donde C es el vector de correspondencias y esta definido de la siguiente forma

$$C_i = \begin{cases} \min\{M_{i,l}\} & \text{si } \min\{M_{i,l}\} < \delta \text{ para } l = 1 \dots |L'| \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde δ es una cota mínima de distancia para la correspondencia de líneas. En el caso de que $C_i = C_j = \beta \neq 0$ para $i \neq j$, calculamos el mínimo de la diferencia lineal de sus componente en el espacio de Hough con el segmento de línea local en conflicto, tomando en consideración primero los ángulos $\min\{|\theta_\beta - \theta_i|, |\theta_\beta - \theta_j|\}$, y después la distancia de Hesse $\min\{|\rho_\beta - \rho_i|, |\rho_\beta - \rho_j|\}$, asignando β al de menor valor y al de mayor valor 0, donde θ_μ y ρ_μ son propiedades de la línea $\mathbf{l}_\mu \in G$ para $\mu = i, j$, y θ_β y ρ_β son propiedades de la línea $\mathbf{l}_\beta \in L'$

Al final el vector C de correspondencias tiene una dimensión igual a G ($|C| = |G|$), en donde el valor de cada entrada de C representa las entradas correspondientes de líneas de L' . Si la entrada $C_i = 0$ entonces no tiene una correspondencia la línea \mathbf{l}_i , $i = 1 \dots |C|$. Si $C_i = k$ entonces la línea $\mathbf{l}_i \in G$ corresponde con la línea $\mathbf{l}_k \in L'$

Sea $N = \{\mathbf{l}_n \mid \mathbf{l}_n \in L', \mathbf{l}_n \notin C \text{ y } \mathbf{l}_n \notin G\}$, el conjunto de los nuevos segmentos de líneas que no tienen correspondencia con algún otro segmento de línea en el mapa global G . A estas nuevos segmentos de líneas las agregaremos posteriormente a G .

3.1.3. Calculando la ubicación actual

La ubicación actual es realizada en base a la correspondencia de los pares de segmento de líneas y la odometría registrada hasta el momento. Debido a que los datos obtenidos del odómetro no son precisos es necesario hacer una rectificación o corrección de la posición actual del robot móvil. Esto se hace por medio de

$$\theta = \theta_o + \theta_{corr} \quad (3.6)$$

$$T = T_o + T_{corr} \quad (3.7)$$

donde θ es en ángulo ya corregido sumando θ_o obtenido del odómetro y θ_{corr} obtenido del cálculo de ubicación actual; $T = (t_x, t_y)^T$ es el vector de posición actual por medio de la traslación del robot móvil en los ejes x y y , donde $T_o = (t_{o_x}, t_{o_y})^T$ es el vector obtenido por el odómetro y $T_{corr} = (t_{corr_x}, t_{corr_y})^T$ es el vector calculado por la ubicación actual.

Cálculo de θ_{corr}

Cuando hay correspondencia en los segmentos de líneas, no todos son paralelos, con ello podemos calcular la posición actual. Como los dispositivos de sensor láser que actualmente se usan tienen un amplio ángulo de medición, muchas veces se satisface esta condición.

Suponiendo que hemos obtenido $n \leq |C|$ correspondencias de pares de segmentos de línea, donde $l_k \in G$ corresponde a $l_{C_k} \in L'$ El ángulo de rotación θ_{corr} es calculado con

$$\theta_{corr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n diffTheta(\theta_{G_i}, \theta_{L'_i}) \quad (3.8)$$

Una vez obtenido θ_{corr} podemos recalcular de nuevo las correspondencias de las líneas y así tener una mayor aproximación entre la correspondencia de ellas. Debido a que el ángulo suministrado en (3.4) es impreciso, reemplazamos este ángulo con (3.6) para futuros cálculos.

Cálculo de T_{corr}

Ya calculado (3.6) con (3.8), volvemos a calcular las correspondencias, así aseguramos que las correspondencias sean correctas y habrá un número igual o mayor de correspondencias por la corrección del ángulo. Una vez obtenidas estas m correspondencias ($m \geq n$ correspondencias), procederemos a calcular el desplazamiento en las coordenadas x y y .

Sean $\mathbf{l}_{L'} \in L'$ y $\mathbf{l}_G \in G$ los segmentos de líneas que corresponden uno al otro en los mapas local y global respectivamente. Si $m = 1$ obtenemos $p_G \in \mathbf{l}_{L'}$ el punto más cercano a \mathbf{l}_G , y $p_{L'} \in \mathbf{l}_G$ el punto más cercano a $\mathbf{l}_{L'}$ y calculamos el desplazamiento T_{corr} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} t_{corr_x} &= p_{G_x} - p_{L'_x} \\ t_{corr_y} &= p_{G_y} - p_{L'_y} \end{aligned} \quad (3.9)$$

En caso de que $m > 1$ utilizamos la transformada de Hough (3.3) de los segmento de línea $\mathbf{l}_{L'}$ y \mathbf{l}_G , y utilizando los puntos mas cercanos al origen de cada una de las líneas nos queda

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{L'} &= p_{L'_{xc}} \cos \theta_{L'} + p_{L'_{yc}} \sin \theta_{L'} - \rho_{L'} = 0 \\ \mathbf{l}_G &= p_{G_{xc}} \cos \theta_G + p_{G_{yc}} \sin \theta_G - \rho_G = 0 \end{aligned}$$

donde solo existe una diferencia de traslación entre \mathbf{l}_G y $\mathbf{l}_{L'}$ ya que $\theta_{L'} = \theta_G$ por el paso anterior de la corrección del ángulo. Esto nos lleva a

$$\mathbf{l}_G = \mathbf{l}_{L'} + t_{corr_x} \cos \theta_{L'} + t_{corr_y} \sin \theta_{L'} = 0 \quad (3.10)$$

la expresión (3.10) la podemos escribir también como

$$\rho_G - ((p_{L'_{xc}} + t_{corr_x}) \cos \theta_{L'} + (p_{L'_{yc}} + t_{corr_y}) \sin \theta_{L'}) = 0 \quad (3.11)$$

Utilizando la restricción (3.11) necesitamos encontrar T_{corr} para todos los segmentos de línea y este tiene que ser el mismo en todos ellos. Utilizando el método de mínimos cuadrados sobre todas las correspondencias m , buscamos este desplazamiento utilizando

$$\sum_{i=1}^m (\rho_{G_i} - \rho_{T_i})^2 = 0 \quad (3.12)$$

donde $\rho_{T_i} = (p_{L'i_{xc}} + t_{corr_x}) \cos \theta_{L'_i} + (p_{L'i_{yc}} + t_{corr_y}) \sin \theta_{L'_i}$. Así al final tendremos los valores de T_{corr} , donde $t_{corr_x} < T_{\xi_x}$, y $t_{corr_y} < T_{\xi_y}$ correspondientes al desplazamiento corregido por la medición de odometría no excedidos de un desplazamiento de corrección dado.

Actualizamos los datos de (3.7) y volvemos a calcular las correspondencias en donde tendremos una mayor exactitud en el giro y desplazamiento del robot y así sabremos la posición de él con respecto a los objetos que lo rodean actualmente.

3.1.4. Construcción de mapas

Una vez obtenidas las correspondencias de las líneas entre el conjunto de mapa local L' y el conjunto de mapa global G creamos el escenario del ambiente que nos rodea y para ello plasmamos nuestros segmentos de línea en una región, la cual tendrá como figuras segmentos de líneas.

En la figura 3.4 se ilustra unas muestras tomadas por el sensor láser antes de transformarlas en segmentos de línea, las cuales en a) son las muestras tomadas al inicio y nos muestran la ubicación del robot antes de cualquier movimiento. En b) se muestra que el robot ha girado y trasladado hacia otro punto donde se puede apreciar las muestras que esta tomando actualmente en el mapa local (en las coordenadas locales del sensor láser) y sus correspondientes en el mapa global (ubicación a partir de las coordenadas iniciales).

Construcción del mapa local

El mapa local esta constituido de la última toma del láser del robot. Esta es la región de la que actualmente se tiene información, y sabemos por las muestras tomadas cual es su estructura y a qué distancia actual tenemos los objetos que se encuentran en ella.

Las coordenadas de las muestras con respecto al robot son las coordenadas locales del láser. Se debe de tener cuidado si se esta utilizando un sensor láser en lugares diferentes al centro de un robot ya que si éste se encuentra en una posición diferente a la del centro del robot, el desplazamiento y giro del mismo

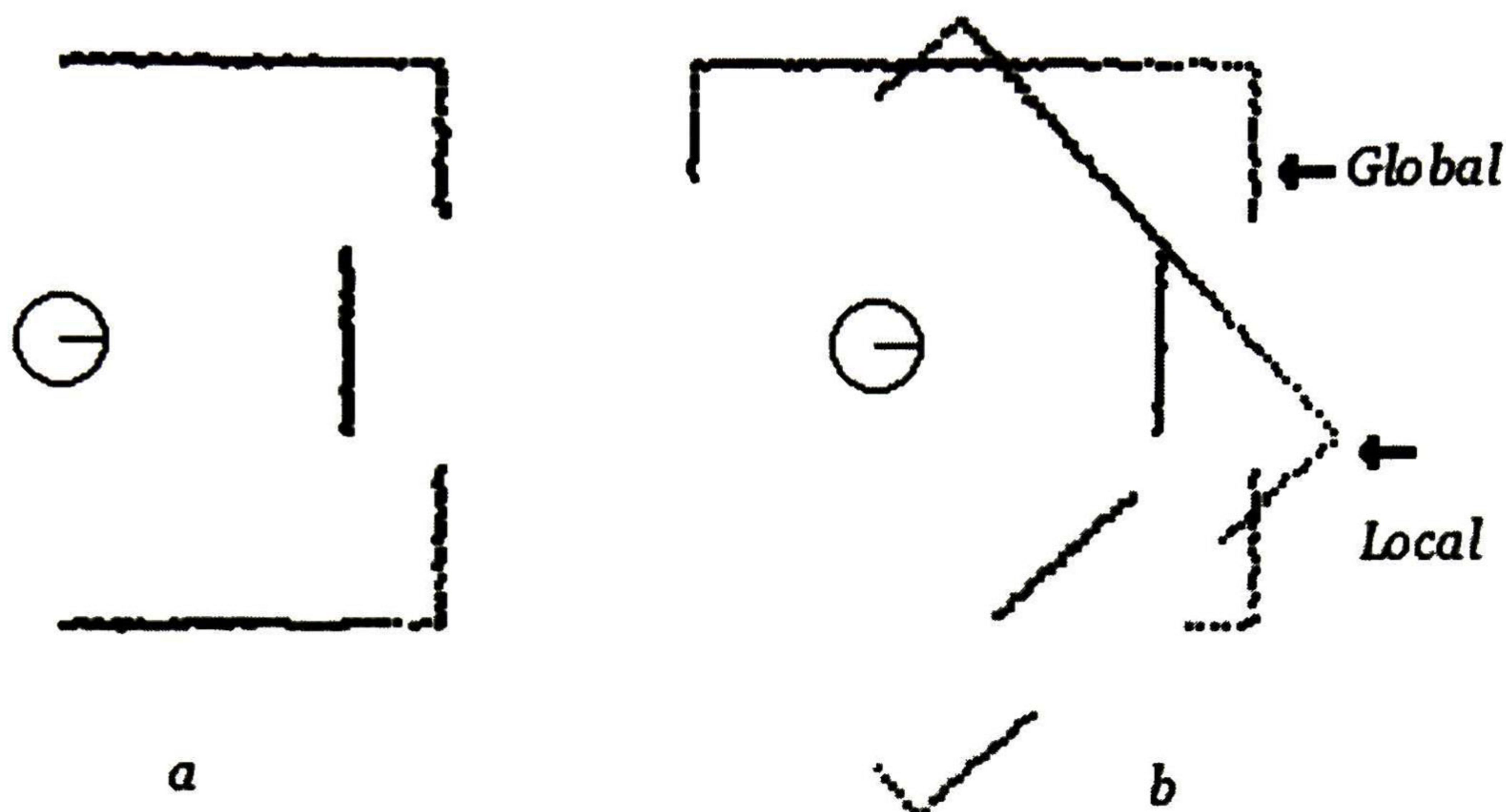


Figura 3.4: a) Toma inicial del sensor láser, b) Toma después de un giro y desplazamiento del sensor láser

provocarían que las muestras del láser obtenidas sean erróneas. Para la corrección de estos datos necesitaríamos agregar una matriz de giro y un vector de posición a la ecuación (3.4) para indicar la posición exacta del centro del sensor láser con respecto al centro de giro y desplazamiento del robot.

Una vez tomadas las consideraciones de la posición del sensor láser procedemos a capturar las muestras que son una sucesión de puntos y las transformamos a segmentos de líneas para obtener el conjunto L .

Generalmente el mapa local L no se muestra en el mapa global ya que éste aparecería con respecto a las coordenadas iniciales donde comenzó la exploración. Pero este mapa se puede mostrar si es desplazado por (3.4) dándonos L' para ver la posición de los objetos actualmente censados respecto al mapa global.

Construcción del mapa global

El mapa global G es el mapa final que se ha de generar de todo nuestro entorno. Éste comienza en la posición inicial donde está el robot y generalmente se utiliza dentro de ambientes controlados y cerrados donde no halla un movimiento

de objetos ya que si los hay el mapa quedaría con objetos que no pertenecen al ambiente original.

El mapa global G se genera a partir de la primera lectura registrada por el sensor láser tomando en cuenta el desplazamiento y giro del robot si éste tuvo algún movimiento previo a la lectura del sensor láser.

Las siguientes tomas del sensor láser se van asignando a lo que es el mapa local L el cual puede llegar a tener parte de algunos objetos del mapa global. Estos objetos son fusionados y añadidos al mapa global.

Teniendo en cuenta que hay segmentos de línea en G y L' que tienen correspondencia por medio de C , fusionamos estas líneas para que formen un solo segmento de línea y así queden todos dentro de G , añadiendo también aquellos segmentos de línea pertenecientes a N que no tienen relación con ningún segmento de línea antes tomado. La parte de fusión de líneas se explicara mas adelante.

3.2. Uso del Álgebra Conformal para la creación de mapas

En el álgebra conformal existen varias entidades geométricas que podemos utilizar para la creación de los mapas generados por el sensor láser. Viendo la estructura de los segmentos de línea notamos que existe una entidad en el álgebra conformal que puede tener estas características, la entidad *Par de Puntos* (2.68).

3.2.1. Uso de la entidad *par de puntos*

Extraemos la información del láser y aplicamos el método *rompimiento de líneas recursivo* para obtener los segmentos de línea y sus puntos extremos. Una de las propiedades de la entidad *Par de puntos* es que tenemos los puntos finales e iniciales en ella misma, podemos calcular la distancia de Hesse, el punto mas cercano al origen y con este obtener su ángulo, y sacar la línea que pasa entre este par de puntos.

Sea $E2C : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_{4,1}$ una función inyectiva que mapee los puntos de \mathcal{G}_2 a $\mathcal{G}_{4,1}$ y tomando las bases de (2.62) la definimos de la siguiente forma

$$E2C(x, y) = xe_1 + ye_2 + 0e_3 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)e + e_0 \quad (3.13)$$

la propiedad de inyectividad se ve en que $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 \subset \mathcal{G}_{4,1}$, su inversa se define como $E2C^{-1}(xe_1 + ye_2 + ze_3 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)e + e_0) = (x, y)$. Con esto estamos diciendo que estamos trabajando sobre un plano determinado de $\mathcal{G}_3 \subset \mathcal{G}_{4,1}$.

Ahora, sean \underline{p}_i y \underline{p}_f los puntos iniciales y finales mapeados respectivamente a $\mathcal{G}_{4,1}$ y $\underline{PP}^* = \underline{p}_i \wedge \underline{p}_f$ la entidad par de puntos,

La estructura del segmento de línea la podemos recuperar de la siguiente forma:

Punto inicial y final : aplicando la formula (2.131) a \underline{PP}^* y $E2C^{-1}$

Representación de la línea : $\underline{L}^* = \underline{PP}^* \wedge e$. Esta no es exactamente igual a (a, b, c) pero es la representación de la línea en $\mathcal{G}_{4,1}$, y teniendo los puntos inicial y final se puede recuperar (a, b, c) .

Distancia de Hesse : aplicando la formula (2.130) con la *representación de la línea* y e_0

$$\rho^2 = \left(\frac{\underline{L}^* \cdot e_0}{\underline{L}^* \cdot e_0 \cdot e} \right)^2 \quad (3.14)$$

Punto mas cercano al origen : aplicando la formula de (2.129)

$$\mathbf{p} = -(\underline{L}^* \cdot \mathbf{E}) \quad ((e_+ \quad \underline{L})\mathbf{I}_E) \quad (3.15)$$

Ángulo en coordenadas polares del punto mas cercano : ya obtenido el punto mas cercano en $\mathcal{G}_{4,1}$, mapeamos este punto a \mathcal{G}_2 con $E2C^{-1}$, luego se saca su representación polar y de ahí su ángulo.

Utilizando el álgebra conformal en la representación de segmentos de líneas podemos utilizar todas sus propiedades y características tal como las transformaciones conformales.

3.2.2. Coordenadas locales y globales en conformal

Como se ha dicho anteriormente el sensor láser regresa la posición de sus mediciones en su propio sistema de coordenadas. Necesitamos trasladar esas posiciones de acuerdo a la posición del robot y a la posición en la cual se encuentra el sensor láser sobre el robot móvil. Para ello recurrimos a los movimientos rígidos de las entidades en conformal.

El origen de las coordenadas globales las tomamos en base al origen que tiene el robot internamente (usando el odómetro). Utilizando el caso del *problema de calibración mano-ojo* [10, 11] y utilizando $\mathcal{G}_{4,1}$ con los métodos mencionados en [12] pero aplicados a $2D^2$ encontramos el vector de traslación $\mathbf{t}_{laser-robot}$ y el ángulo de rotación $\theta_{laser-robot}$ del origen del sensor láser desde el origen de coordenadas globales. Con estos datos y utilizando (2.94), (2.100) y (2.102) creamos el *motor*

$$\mathbf{M}_{laser-robot} = \mathbf{T}_{laser-robot} \mathbf{R}_{laser-robot} \quad (3.16)$$

que nos lleve desde el origen de coordenadas globales al origen del sensor láser. Así cualquier punto registrado en el sensor láser lo obtendremos en coordenadas globales ubicados en el origen.

Sean $\mathbf{T}_{robot}, \mathbf{R}_{robot} \in \mathcal{G}_{4,1}$ el trasladador y rotor de los movimientos del robot móvil creados a partir de (3.7) y (3.6) utilizando únicamente las primeras dos coordenadas en el caso del trasladador y la última en el caso de la rotación ya que estamos trabajando en $2D$, el *motor* de desplazamiento del robot es $\mathbf{M}_{robot} = \mathbf{T}_{robot} \mathbf{R}_{robot}$; con él tenemos el desplazamiento del robot y junto con (3.16) obtenemos el *motor* que trasladará los puntos del sensor láser en cualquier posición en la que se encuentre el robot, no únicamente en el origen. Este motor es

$$\mathbf{M}_{laser} = \mathbf{M}_{l-r} \mathbf{M}_{robot} \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{M}_{l-r} = \mathbf{R}_{robot} \mathbf{M}_{laser-robot} \widetilde{\mathbf{R}_{robot}}$. Con (3.17) podemos trasladar cualquier entidad en conformal $\underline{x} \in \mathcal{G}_{4,1}$ de las coordenadas del sensor láser a las coordenadas globales en cualquier ubicación del robot dentro del mapa global de la siguiente manera

$$\underline{x}' = \mathbf{M}_{laser} \underline{x} \widetilde{\mathbf{M}_{laser}} \quad (3.18)$$

²La tercera coordenada siempre es cero, excepto para la rotación

3.2.3. Correspondencia entre líneas (*par de puntos*)

Sea L_{PP} el conjunto que contiene las entidades de par de puntos correspondientes a la última lectura del sensor láser y G_{PP} el conjunto de par de puntos pertenecientes al mapa global. Utilizamos (3.17) en L_{PP} para trasladar los *pares de puntos* a las coordenadas globales quedando estas como L'_{PP} .

Utilizando (2.134) para crear las esferas de cada elemento de L'_{PP} y G_{PP} , y aplicando el teorema 2.4.1 entre las esferas resultantes de L'_{PP} y G_{PP} , creamos una matriz M_c con dimensiones $|G_{PP}| \times |L'_{PP}|$, la cual será la matriz de correspondencias entre los pares de puntos del mapa local y global. Los casos que se pueden encontrar al hacer esto se ilustran en la figura 3.5 y son los siguientes:

1. Las esferas se intersecan y es continuación del segmento de línea, figura 3.5 (a).
2. Las esferas no se intersecan pero está una dentro de la otra y son del mismo segmento, figura 3.5 (b).
3. Las esferas se intersecan y no son del mismo segmento figura, 3.5 (c).
4. Las esferas no se intersecan y está una dentro de la otra pero no son del mismo segmento figura, 3.5 (d).
5. No se intersecan y no son del mismo segmento, 3.5 (e).

Llenamos la matriz M_c dado los casos anteriores

$$m_{g_{pp}, l'_{pp}} = \begin{cases} l'_{pp} & \text{si los caso 1 o 2.} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde $l'_{pp} \in L'_{PP}$. Para los casos 1 y 3 donde hay intersección, hay que tomar en cuenta el ángulo de la línea tomando en cuenta a (3.5). Para los casos 2 y 4 donde no hay intersección utilizamos (2.118), usando el centro de la esfera del mapa local como punto para ver si esta dentro o fuera de la esfera del segmento de línea global.

También hay que tomar en cuenta que podemos encontrar líneas demasiado cercanas de diferentes objetos delgados como escritorios o sillas y se pueden llegar

a confundir por un error de aproximación. Esto lo evitamos mediante la medición de las distancias de los centros de las esferas del mapa global con las líneas del mapa local utilizando (2.130) y cuidando que ésta no pase de un umbral ξ_d dado.

Una vez obtenida M_c verificamos que no haya ninguna correspondencia repetida de segmento de línea entre segmentos del mapa local y del mapa global. Se verifica que la magnitud de la diferencia de los momentos de las líneas obtenidas por (2.128) no sea mayor a ξ_m . Si hay alguna correspondencia repetida se elimina quedando la que este mas próxima a la línea correspondiente del mapa global.

3.2.4. Construcción de mapas

Una vez obtenidas las correspondencias entre el mapa local y mapa global calculamos la ubicación actual de (3.6) y (3.7) como ya se había dicho anteriormente y procedemos a fusionar los mapas locales y globales para que queden en uno solo.

Fusión de líneas

Sean $l'_{pp} \in L'_{pp}$ y $g_{pp} \in G_{pp}$ dos entidades que corresponden una a la otra en los diferentes mapas. Utilizando (2.125) sacamos la longitud de segmento de línea de cada uno de ellos y le asignamos a \underline{pp}_{mayor} el de mayor longitud y a \underline{pp}_{menor} el de menor longitud. Creamos las esferas respectivas de cada uno con (2.134) y verificamos que efectivamente se corresponden utilizando los casos 1 o 2 de la sección anterior.

Sacando la dirección de cada línea con (2.127) y haciendo el producto interior entre ambas para ver si tienen el mismo sentido, definimos los puntos extremos del segmento mas grande \underline{pp}_{mayor} extrayéndolos con (2.131) de la manera siguiente:

$$\underline{p_{e1}} = \begin{cases} \underline{p_1} & \text{Si tiene el mismo sentido} \\ \underline{p_2} & \text{Si tienen sentido opuesto (volteamos los extremos)} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\underline{p_{e2}} = \begin{cases} \underline{p_2} & \text{Si tiene el mismo sentido} \\ \underline{p_1} & \text{Si tienen sentido opuesto (volteamos los extremos)} \end{cases} \quad (3.21)$$

donde $\underline{p_1}, \underline{p_2} \in \underline{pp_{mayor}}$. Y utilizando la esfera correspondiente a $\underline{pp_e} = \underline{p_{e_1}} \wedge \underline{p_{e_2}}$, verificamos usando (2.118) con los puntos extremos de $\underline{pp_{menor}}$, que si hay algún punto perteneciente a $\underline{pp_{menor}}$ fuera de la esfera, éste será sustituido por el punto extremo correspondiente de la esfera. Así nos aseguraremos de que estamos construyendo el segmento mas grande.

Al final remplazamos $\underline{g_{pp}}$ por $\underline{pp_e}$ y agregamos a G_{pp} aquellos segmentos de línea que no tengan correspondencia y pertenezcan a L'_{pp} .

Verificación final

Se hace una verificación final para comprobar si al fusionar el mapa haya quedado algún segmento de línea repetido y que este ocupando un espacio de mas dentro del conjunto G_{pp} . A estos segmentos repetidos hay que eliminarlos de G_{pp} .

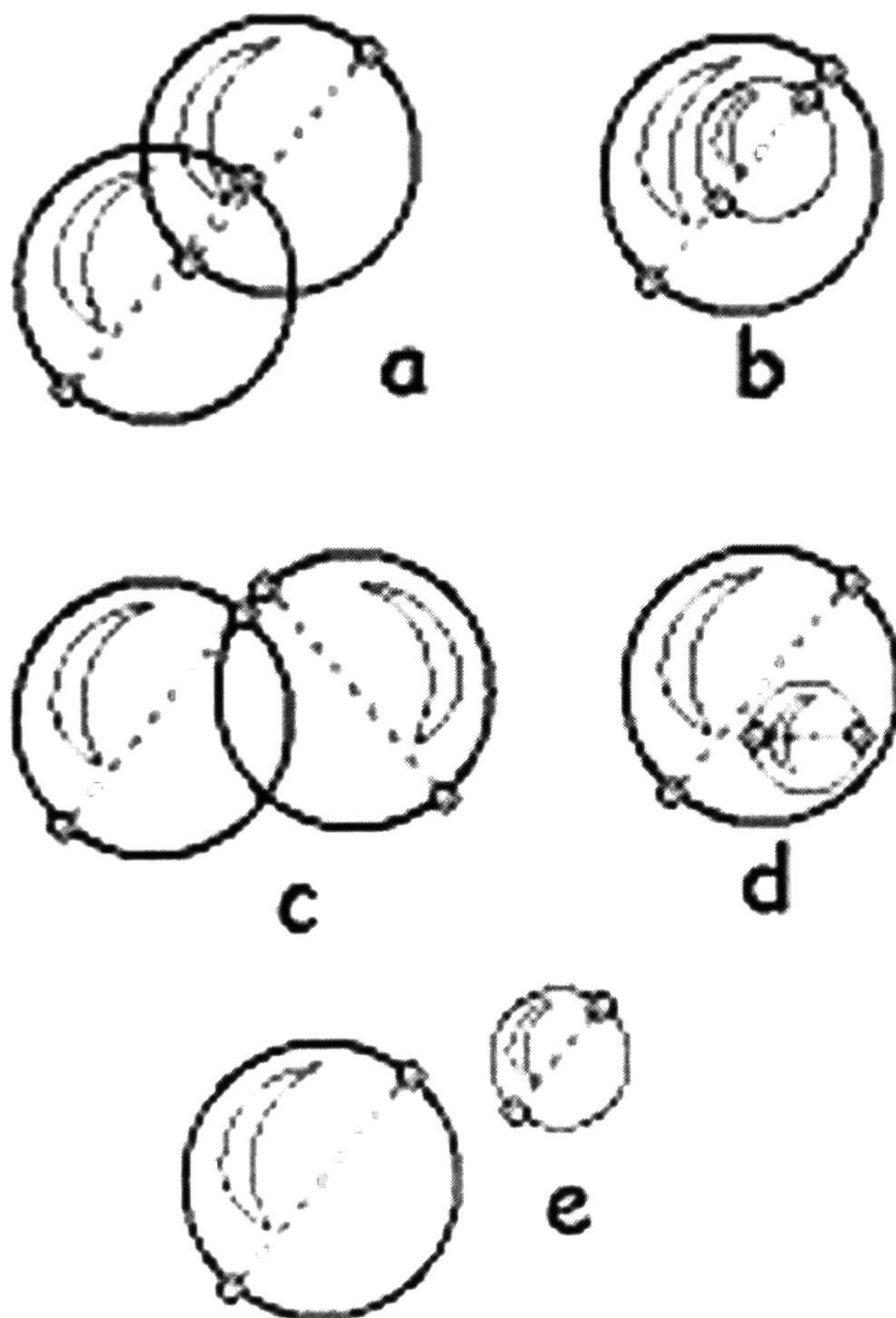


Figura 3.5: Casos de intersección de esferas

Capítulo 4

Fusión de dispositivos para la creación de un mapa en 3D

La creación de mundos virtuales a partir de la obtención de datos registrados por diferentes dispositivos es una de las tareas que hoy en día se han estado estudiando en varias disciplinas de la visión computacional. Se usan diversos [7, 8] sensores para medir los objetos que hay alrededor de un robot móvil el cual va guardando incrementalmente información de su entorno. Estos sensores pueden ser cámaras de vídeo, sonar ultrasonido, sensor láser, entre otros.

Los mapas generalmente son basados en objetos geométricos ya que estos presentan una facilidad de representación en el espacio tridimensional. Estos mapas generalmente son usados para la exploración de sitios a los que el hombre no le es posible acceder y los robots móviles son una opción buena para explorar esos rincones inaccesibles.

Utilizaremos un robot móvil (geometer) con un cabezal estéreo para la captura de información de los objetos que nos rodean. Este cuenta con una unidad pan-tilt que nos proporciona un movimiento en dos ejes y con ellos poder alcanzar a visualizar otros objetos que le rodean sin necesidad de girar al robot. Además se cuenta con un sensor láser que registra los objetos que están al frente del sensor con un rango de 180° y un alcance de 5m.

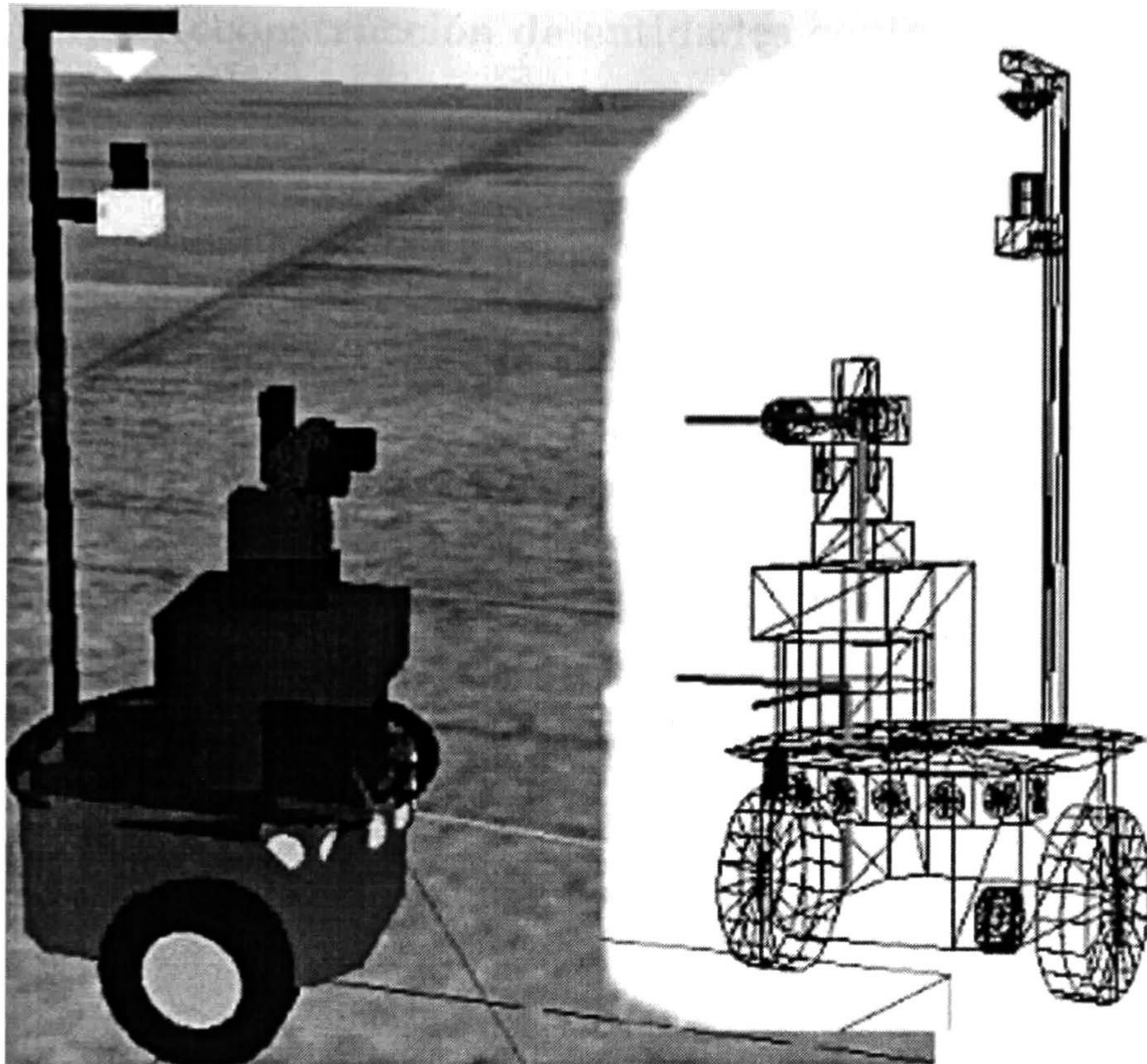


Figura 4.1: Modelo a escala de GEOMETER

4.1. Reconstrucción de objetos 3D usando visión estéreo

Se necesita tener por lo menos 2 cámaras que estén registrando el entorno que rodean a un robot para poder plasmarlos y proyectarlos en un entorno de 3D. A este sistema de 2 cámaras se llama sistema estéreo, el cual utiliza un algoritmo de triangulación para poder obtener la reconstrucción 3D y de ahí registrarlo.

Para la triangulación es necesario que las 2 cámaras estén debidamente calibradas, y ubicar en las 2 imágenes de las cámaras el punto del que se quiere encontrar la posición en 3D homogéneo. Para mayor información, el lector se puede referir al apéndice A.

4.1. RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS 3D USANDO VISIÓN ESTÉREO 61

4.1.1. Reconstrucción de entidades conformales

Las entidades geométricas son fáciles de encontrar dentro de un ambiente cotidiano. Gracias a que cada una de las entidades en geometría conformal se pueden construir a partir de puntos, no es necesario un calculo extenso para la representación de éstas.

La triangulación de un punto en un sistema estéreo nos regresa este punto en coordenadas homogéneas. Sea \mathbf{X} un punto en coordenadas homogéneas 3D (de la forma (A.4)). Utilizando su representación en coordenadas euclidianas y usando (2.62) para pasarlo a $\mathcal{G}_{4,1}$, tenemos este mismo punto representado en el espacio conformal.

Para la representación de las entidades es necesarios que cada entidad según su tipo se vaya almacenando en un conjunto el cual contenga todas la entidades previamente expuestas.

El punto

El punto es la entidad mas fácil de representar en espacio conformal, ya que es un punto euclidiano 3D pasado a conformal por medio de (2.62) y se puede recuperar el punto en euclidiano tal como se muestra en (2.114).

El par de puntos

Al tener dos puntos en conformal aplicamos (2.68), esta entidad la representamos por sus dos puntos en el espacio, dichos puntos los podemos recuperar con (2.131), y después pasarlos a euclidiano.

La línea

Una vez obtenido el par de puntos en conformal, que es por donde se quiere que pase la línea, se puede ilustrar una línea que pase por esos 2 puntos y la representación de ésta línea en conformal la obtenemos con (2.81).

Es recomendable guardar también la entidad par de puntos para así saber

de donde a donde se requiere que se despliegue la línea.

Si no es necesario que se despliegue en cierta ubicación la línea, se normaliza con (2.126), se obtiene su dirección con (2.127) y el punto mas cercano de ésta línea al origen usando (2.129). Una vez obtenidos estos datos desplazamos este punto en la dirección de la línea y desplegamos ésta según su magnitud original.

En la figura 4.2 (a) y (c) se muestra como queda representada la línea en el ambiente.

El círculo

Dados 3 puntos en conformal podemos expresar un círculo con (2.80). Para desplegarlo necesitamos sacar su centro \mathbf{p}_z , esto se puede hacer de 2 maneras:

1. Utilizando (2.119) sacamos el plano en el que yace el círculo (2.120) la línea normal al círculo y (2.123) la esfera pre-operada por e, sacando el centro de la esfera que tiene como radio la distancia del centro del círculo al origen.
2. Utilizando (2.123) normalizando con (2.115) y obteniendo el centro con (2.116).

El radio del círculo lo sacamos con (2.122).

Una vez obtenido el radio y el centro creamos un rotor \mathbf{R}_z con (2.96) usando de eje la línea normal al círculo. Localizamos un vector $\mathbf{v}_\perp \in \mathcal{G}_3$ perpendicular a la línea normal, normalizamos este vector y lo multiplicamos por el radio del círculo ($\mathbf{v}_\perp = \rho_z * \mathbf{v}_\perp$). A este vector \mathbf{v}_\perp lo pasamos a $\mathcal{G}_{4,1}$ para que sea el punto que rotaremos alrededor del círculo para poder así dibujar su circunferencia. Comenzamos a dibujar la circunferencia del círculo, rotando el vector perpendicular utilizando \mathbf{R}_z y a la hora de plasmar el segmento de la circunferencia le sumamos el centro \mathbf{p}_z a este vector.

En la figura 4.2(a) se muestra como quedaría ilustrado el círculo.

4.1. RECONSTRUCCIÓN DE OBJETOS 3D USANDO VISIÓN ESTÉREO

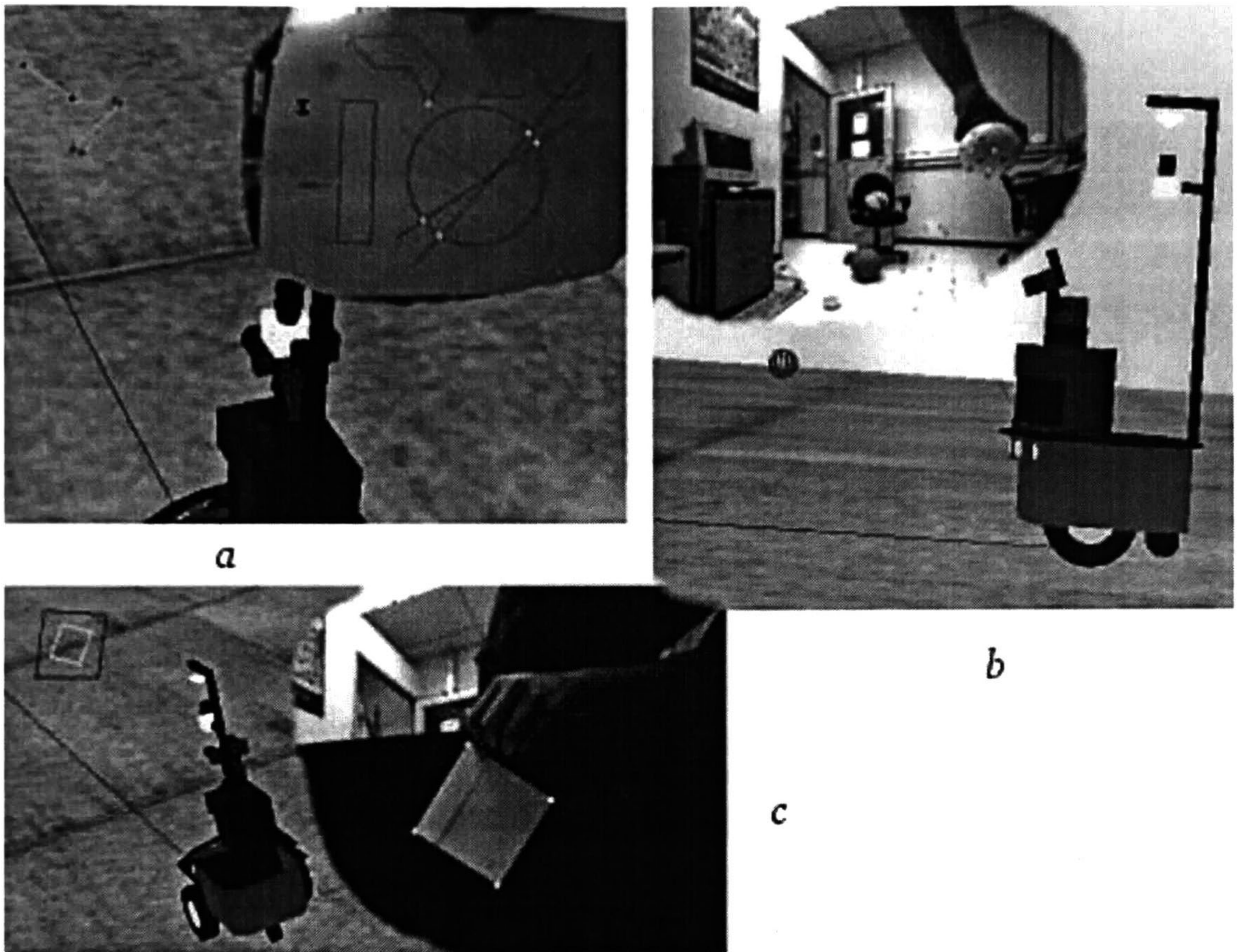


Figura 4.2: a) reconstrucción de círculo y línea, b) reconstrucción de esfera, c) reconstrucción de línea y plano

El plano

Debido a que el plano es un *wedge* de cuatro puntos conformales (2.77) y uno de ellos el e. Representamos al plano utilizando la misma técnica usada en el círculo usando los tres puntos conformales que representan al círculo. En vez de ilustrar una circunferencia se ilustrara un cuadrado.

Al igual que en la línea se recomienda guardar el círculo para futuros cálculos de despliegue (ver fig. 4.2 (c)).

La esfera

La esfera la definimos con 4 puntos en conformal (2.75) y con (2.115) normalizamos esta esfera para poder sacar su centro y su radio con (2.116) y (2.73).

Con el centro y el radio es sencillo plasmar la esfera en un ambiente 3D, utilizando las primitivas de OpenGL (ver fig. 4.2 (b)).

4.2. Modelado en 3D y unificación de coordenadas

Existen varios sensores que registran el ambiente que los rodean. Algunos de estos sensores capturan puntos como los sonares ultrasonido o sensores láser, otros capturan imágenes como las cámaras de vídeo, donde estas imágenes pueden ser de un escenario tal como es o con una perspectiva omnidireccional. Cada uno de estos sensores tiene su propio sistema de coordenadas y registra cada objeto según las mismas.

Al de registrar un mismo objeto por medio de diferentes sensores y combinar estos registros en un mismo ambiente, este objeto aparecería en distintos lugares de acuerdo a la posición física de cada uno de estos sensores. Para que este objeto aparezca dentro del ambiente ubicado en un mismo lugar y que todas las mediciones tomadas por los diferentes sensores converjan en un mismo punto es necesario unificar las coordenadas de cada uno de éstos en un mismo sistema en común, creando así un ambiente único donde todos los sensores registren un objeto y este se encuentre de acuerdo al lugar y posición donde fue tomado dicho objeto.

El ambiente en el que se van a unificar estos objetos es un ambiente tridimensional creado con el estándar OpenGL. Ahí se ha modelado el robot móvil (geometer), con algunos de sus dispositivos con una escala en la cual todos los puntos registrados queden exactamente 1:1 con el robot. Por lo tanto lo que se registre en los sensores y se plasme en el ambiente virtual será la ubicación exacta en la realidad.

4.2.1. Uso de *motores conformales* en 3D

Para poder unificar todos los sensores en un mismo ambiente es necesario conocer la posición del origen del sistema de coordenadas de cada uno de estos sensores con respecto al origen de coordenadas del ambiente unificado. Esto lo podemos lograr gracias al *problema de calibración mano-ojo* [10, 11], y con la ayuda del *álgebra conformal* podemos encontrar el origen del sistema de coordenadas en cada uno de los sensores.

Utilizando los métodos mencionados en [12] modificándolos para el uso de rotores (2.94), trasladores (2.100) y motores (2.102) según sus definiciones en el álgebra conformal y utilizando las propiedades de cada uno de ellos, podemos extraer los ejes de rotación y vectores de traslación necesarios para llegar al origen de coordenadas de cada uno de los sensores partiendo del origen de coordenadas del ambiente unificado.

Gracias a que estas entidades forman un álgebra [1] podemos realizar operaciones entre los trasladores, rotores y motores dando como resultado otro motor, el cual tendrá en una sola entidad el desplazamiento y giro de todos los movimientos realizados individualmente.

4.2.2. Modelado de dispositivos de entrada

Llamamos dispositivos de entrada a aquellos dispositivos que ingresan información al sistema interno del robot móvil. Estas entradas pueden ser para saber su ubicación (odómetro), saber qué objetos están a su alrededor mediante medidores de alcance (sonar ultrasonido, sensor láser) o medidores de toque, conocer el ambiente tal cual lo ve una persona (cámaras de vídeo), sonidos en el ambiente, etc.

Desplazamiento del robot móvil (odómetro)

El desplazamiento del robot generalmente es sobre un plano cartesiano con coordenadas x y y , y cuenta también con un ángulo de giro θ sobre un eje determinado (generalmente z). Estas mediciones se registran mediante la

odometría, pero esta no es 100% confiable debido a que las ruedas del robot pueden patinar y dar mediciones erróneas. Para corregir estas mediciones de desplazamiento utilizamos (3.7), y para la corrección del ángulo de giro del robot (3.6).

Declaramos a \mathbf{R}_{pos} el rotor creado a partir de la definición (2.96) utilizando el ángulo (3.6) y el eje de rotación z , y \mathbf{T}_{pos} el trasladador definido por (2.100) y utilizando $\mathbf{t} = (x, y, 0)^T$ obtenido de las coordenadas de desplazamiento en el plano cartesiano.

Anteriormente ya habíamos mencionado a \mathbf{R}_{pos} y a \mathbf{T}_{pos} pero solo para 2D y con nombres de $\mathbf{R}_{\text{robot}}$ y $\mathbf{T}_{\text{robot}}$ respectivamente. Ahora los usaremos pero en un ambiente tridimensional.

Unidad de sensor láser

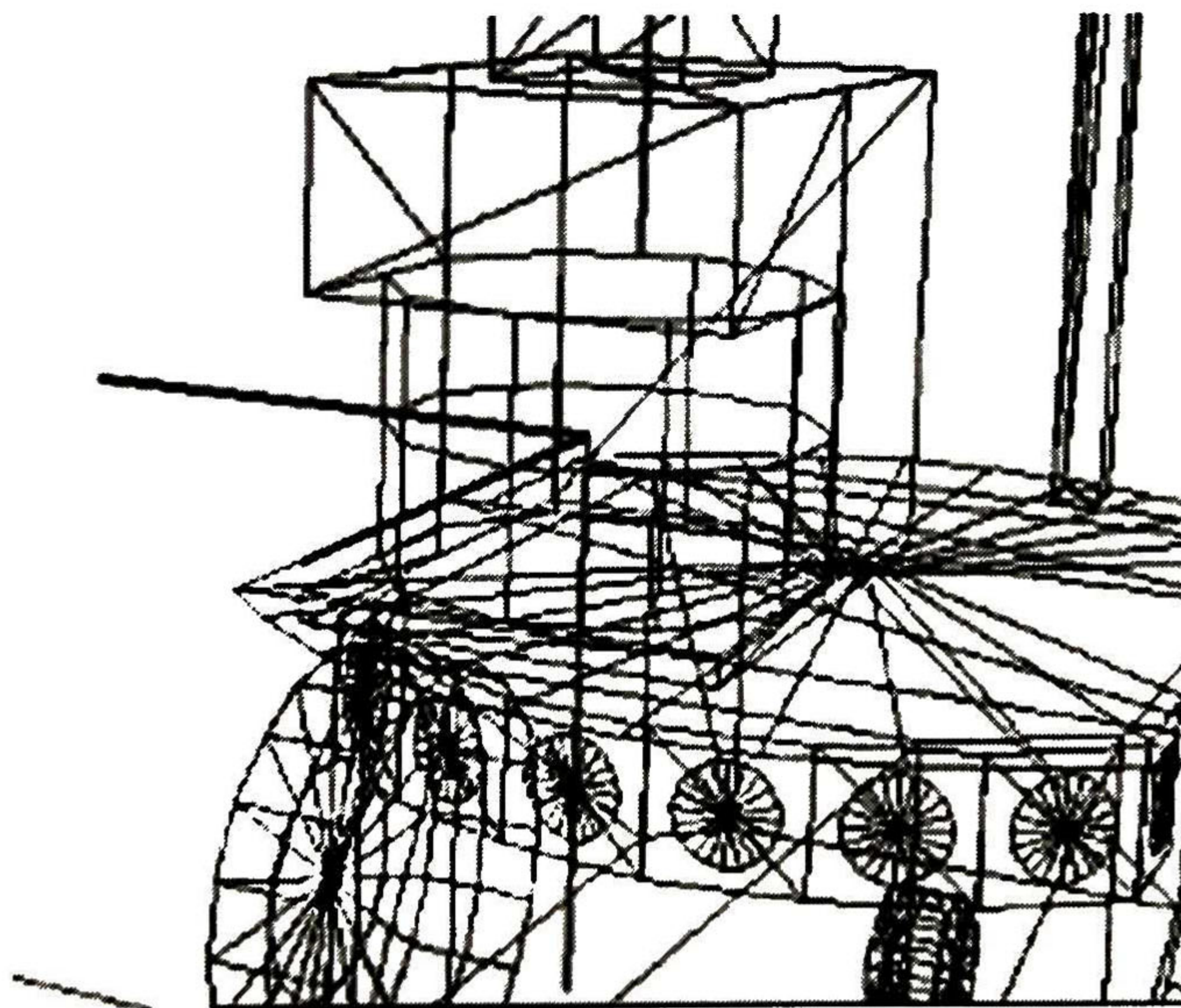


Figura 4.3: Origen de coordenadas del sensor láser

Basándonos en (3.16) pero ahora tomando en cuenta el aspecto tridimensional y encontrando a qué altura se localiza el sensor láser definimos \mathbf{M}_{lsr} que es el motor que lleva desde el origen del sistema de coordenadas unificado al origen del sensor láser. Ahora definimos el motor que lleva los puntos registrados del

sensor láser al sistema de coordenadas unificado en cualquier posición en la que se encuentre el robot móvil. Definimos a

$$\mathbf{M}_{cl} = \mathbf{R}_{pos} \mathbf{M}_{lsr} \widetilde{\mathbf{R}}_{pos} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{M}_{pos} = \mathbf{T}_{pos} \mathbf{R}_{lsr} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{M}_{lu} = \mathbf{M}_{cl} \mathbf{M}_{pos} \quad (4.3)$$

donde (4.1) es el motor de traslación y giro hacia el centro del láser; (4.2) es el movimiento del robot usando el láser y (4.3) es el motor que nos lleva al origen del sensor láser en el sistema de coordenadas unificado.

Utilizando (4.3) con cualquier entidad geométrica registrada con el sensor láser la podemos trasladar fácilmente al sistema de coordenadas unificado usando la forma

$$\underline{x}' = \mathbf{M}_{lu} \underline{x} \widetilde{\mathbf{M}}_{lu} \quad (4.4)$$

Unidad Pan-Tilt

La unidad Pan-Tilt es una unidad que tiene dos grados de libertad, la cual hace que se mueva el cabezal tanto vertical como horizontalmente. Sean θ_{pan} y θ_{tilt} los grados de libertad que tiene esta unidad pan-tilt, utilizando *el problema de calibración mano-ojo* [12] encontramos los ejes de rotación $\underline{L}_{pan}, \underline{L}_{tilt} \in \mathcal{G}_{4,1}$ correspondientes al pan y el tilt respectivamente, encontramos el punto que tiene la distancia mínima entre los ejes \underline{L}_{pan} y \underline{L}_{tilt} , y creamos un trasladador a ese punto desde el origen de coordenadas unificado. Sea \mathbf{T}_{eje} el trasladador que manda el origen de coordenadas unificado al punto con distancia mínima entre los ejes del dispositivo pan-tilt. Este punto nos sirve como referencia para encontrar los ejes del pan-tilt. Como el eje del pan es casi vertical y el eje del tilt es casi horizontal, creamos los rotores \mathbf{R}_{pan} y \mathbf{R}_{tilt} en los ejes ¹ z y x respectivamente.

El trasladador a este punto, nos lleva al punto que sirve de partida para ir hacia el origen de coordenadas de las cámaras.

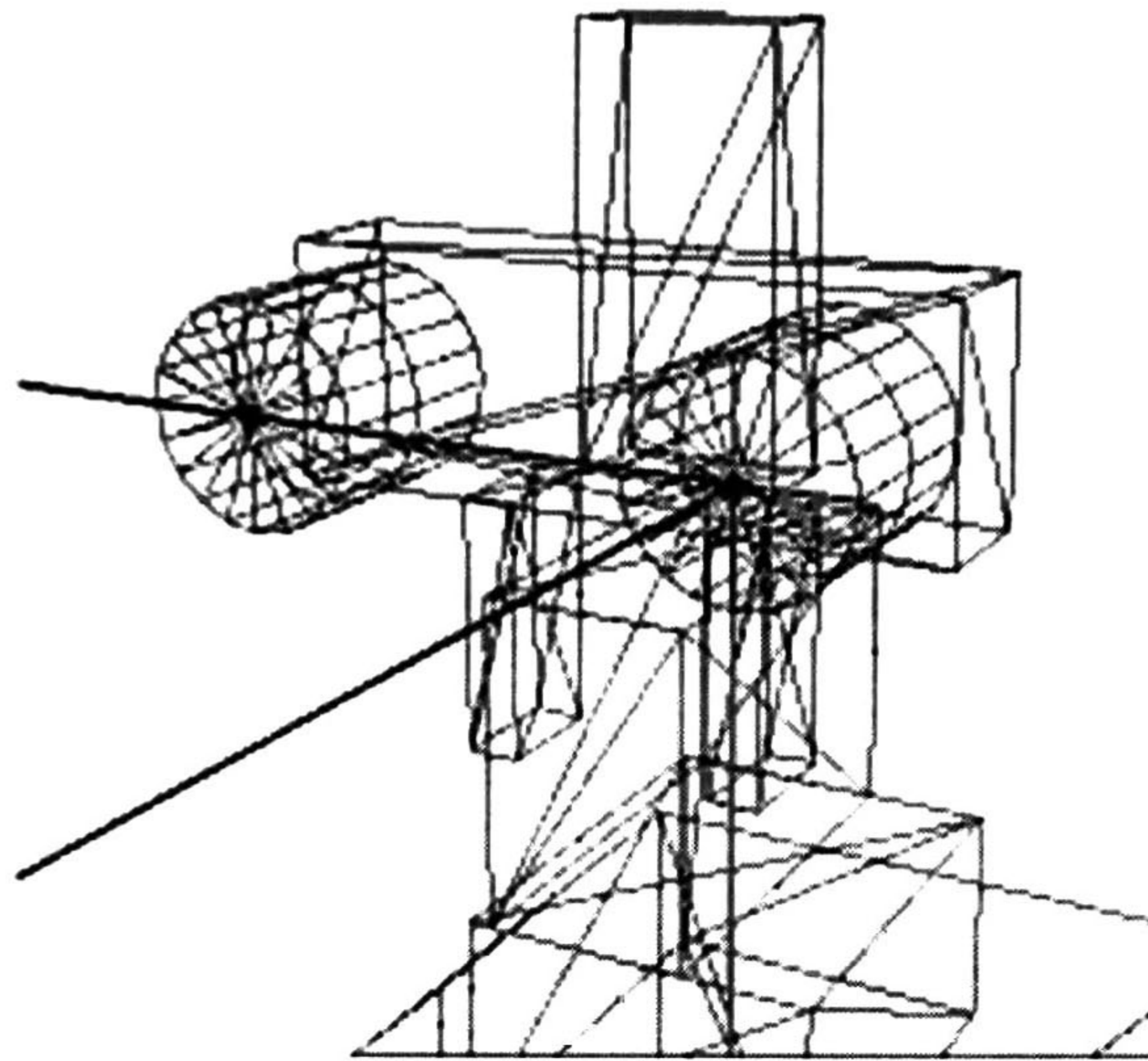


Figura 4.4: Origen de coordenadas del sistema estéreo

Sistema estéreo

El sistema estéreo tiene su origen de coordenadas en la cámara del lado izquierdo según nuestro modelo en el robot móvil (geometer). Para llegar ahí creamos un trasladador \mathbf{T}_{ojo} desde el punto que tiene la distancia mínima entre los ejes del pan-tilt hacia el origen de coordenadas del ojo.

El motor que nos lleva desde el origen de coordenadas unificado al origen de coordenadas de la cámara estéreo se desarrolla de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_{\text{ep}} = \mathbf{R}_{\text{pos}} \mathbf{T}_{\text{eje}} \widetilde{\mathbf{R}}_{\text{pos}} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{R}_{\text{pt}} = \mathbf{R}_{\text{pos}} \mathbf{R}_{\text{pan}} \mathbf{R}_{\text{tilt}} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{T}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{\text{pt}} \mathbf{T}_{\text{ojo}} \widetilde{\mathbf{R}}_{\text{pt}} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}_{\text{mpt}} = \mathbf{T}_{\text{pos}} \mathbf{R}_{\text{pt}} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{M}_{\text{eu}} = \mathbf{T}_{\text{opt}} \mathbf{T}_{\text{ep}} \mathbf{R}_{\text{mpt}} \quad (4.9)$$

donde (4.5) es la traslación al punto que tiene la distancia mínima a los ejes de pan-tilt, teniendo en cuenta la rotación de la posición del robot. (4.6) es el rotor

¹Se pueden usar L_{pan} y L_{tilt} como ejes de rotación utilizando (2.109).

resultante de todos los giros que sea han hecho tanto en la posición del robot, como en el pan-tilt. (4.7) es la traslación a la cámara izquierda del sistema estéreo teniendo en cuenta todos los giros que ha tenido el sistema. (4.8) es el motor de movimientos del robot, junto con el pan-tilt. (4.9) es el motor de movimiento completo del robot.

Cualquier punto registrado por las cámaras, en cualquier ángulo de θ_{pan} y θ_{tilt} , en cualquier posición del robot se podrá mandar de las coordenadas del sistema estéreo a las coordenadas del sistema unificado con

$$\underline{x}' = M_{eu} \underline{x} \widetilde{M}_{eu} \quad (4.10)$$

4.2.3. Realización del mapa en 3D

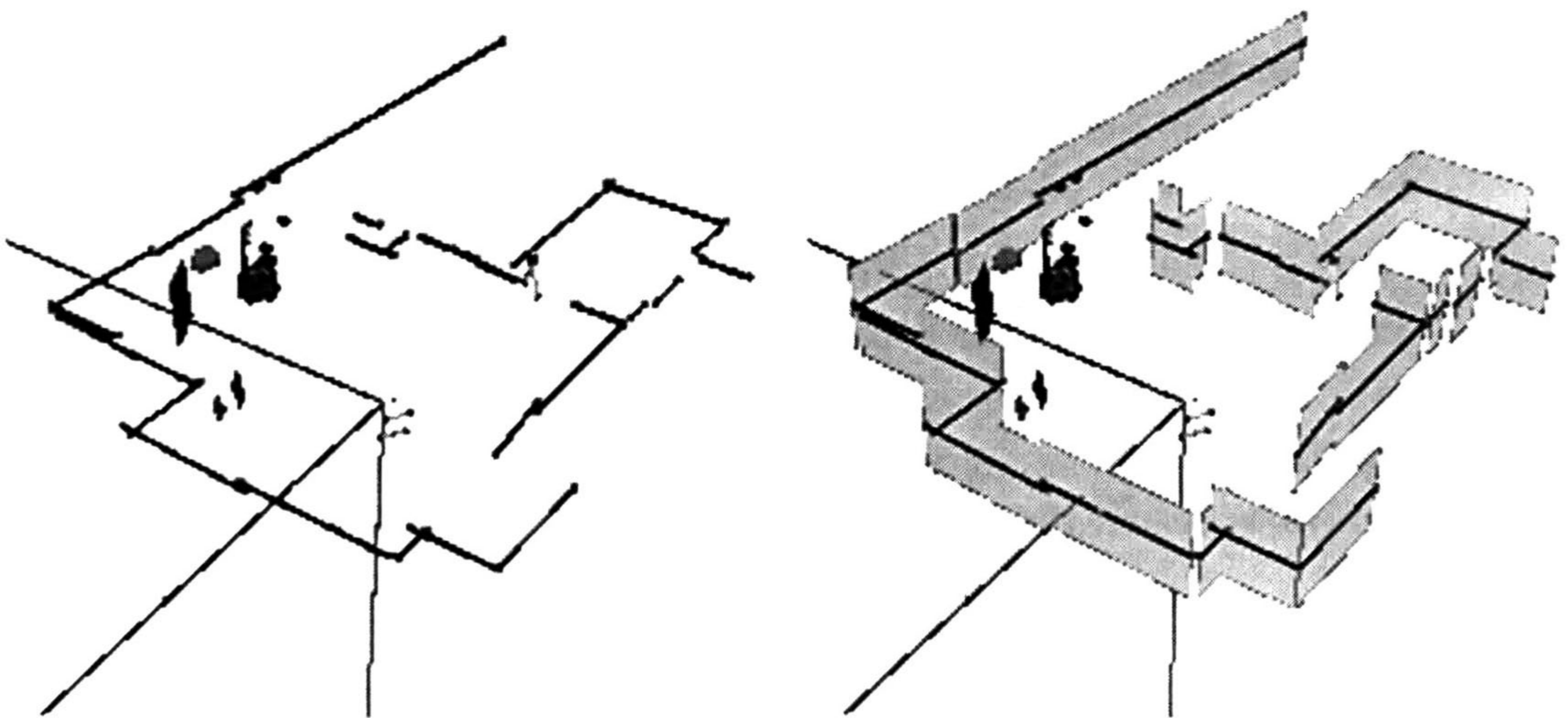


Figura 4.5: Mapa 3D con y sin paredes virtuales

El sistema completo del robot móvil geometer (hasta lo que se ha explicado) tiene en total 5 grados de libertad para el registro de información. Estos son:

1. Posición en desplazamiento en el eje x
2. Posición en desplazamiento en el eje y

3. Posición del ángulo de rotación θ
4. Posición del ángulo de rotación de pan θ_{pan}
5. Posición del ángulo de rotación de tilt θ_{tilt}

Si en algún momento cambia el valor de alguno de ellos, es necesario realizar el calculo del motor, rotor, o traslador en el cual intervenga, para mantener actualizados los datos.

Una vez teniendo los datos actualizados se procede a capturar los datos y plasmarlos en el ambiente virtual utilizando (4.4) para las lecturas del láser y (4.10) para las lecturas de las imágenes estéreo.

Paredes virtuales del láser

Los segmentos de línea se pueden apreciar mejor si se utiliza un plano perpendicular al piso simulando una pared. Esta técnica solo sirve de visualización ya que no estamos seguros de que realmente sea una pared lo que el sensor láser esta detectando o si es algún otro objeto que esta a la misma altura del sensor láser.

Para evitar una posible colisión, es necesario el uso de las cámaras, para así tener a la vista los objetos que están fuera del alcance del sensor láser. Una ventaja que tiene este sistema estéreo es que cuenta con la unidad pan-tilt que le ayuda a observar lugares que no se alcanzarían a ver si las cámaras estuvieran fijas en un solo lugar.

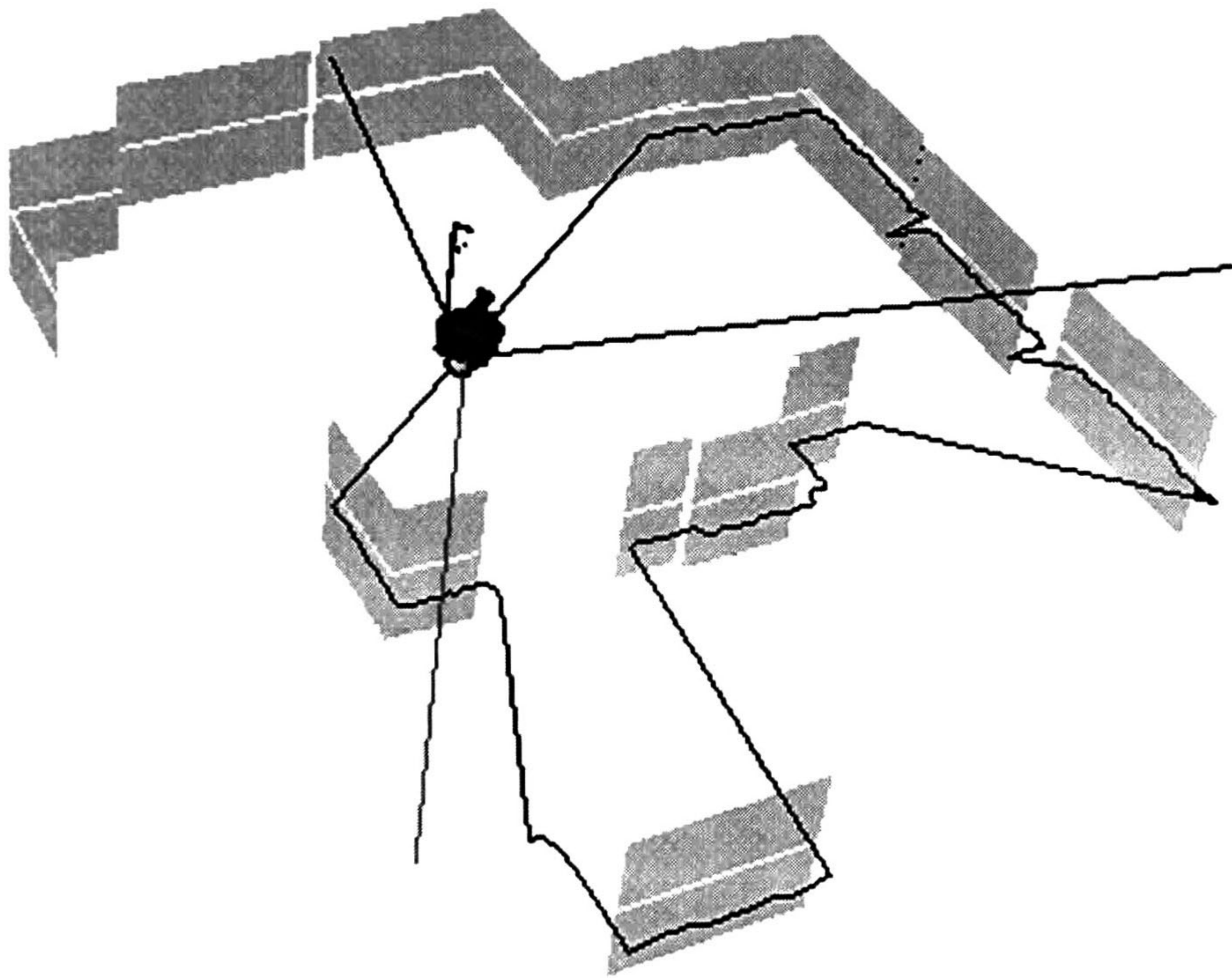


Figura 4.6: Paredes virtuales registradas con el sensor láser

Capítulo 5

Relocalización

La localización de un robot en un entorno ya establecido, es uno de los problemas que se presentan una vez que el robot ha terminado de realizar el mapa completo de su entorno y éste es movido a un lugar arbitrario. Entonces la función, es localizarse dentro del mapa realizado previamente.

Típicamente los robot tienen registrada internamente la posición en la que se encuentran partiendo del momento en que fue iniciado el registro (utilizando el odómetro). Esta información una vez que el robot, fue puesto en otro lugar del entorno no sirve de mucho. Lo que hay que hacer es volver a registrar el entorno actual donde se encuentra ubicado el robot crear un pequeño mapa y hacer una comparación de este mapa contra el mapa registrado anteriormente.

Los mapas que se han realizado en capítulos anteriores, han contenido información geométrica del entorno que lo rodea. De ese entorno utilizaremos los registros obtenidos por el sensor láser ya que este es el que ha formado más entidades geométricas las cuales utilizaremos para la relocalización.

Debido a que solo usaremos los registros del sensor láser, utilizaremos las características de los segmentos de línea para esta localización. Una de estas características es la representación de la línea en el espacio de Hough.

5.1. Representación del mapa en el espacio de Hough

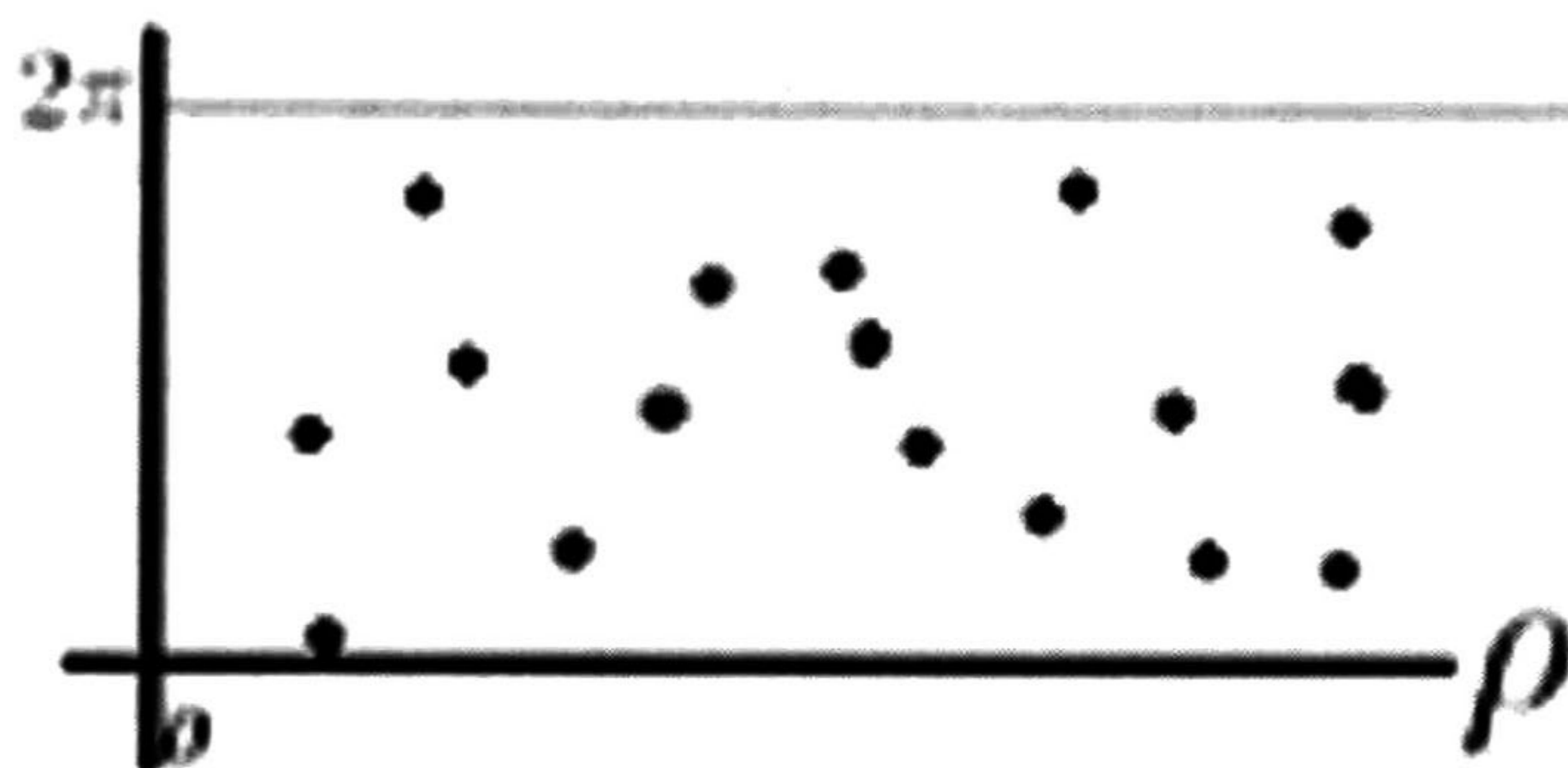


Figura 5.1: Representación de un mapa en el espacio de Hough

Los mapas generados con segmentos de línea son representados en el espacio de Hough (3.3) como una gráfica que pertenece al primer cuadrante del plano cartesiano (ver figura 5.1), en donde los valores de θ y ρ no tienen valores negativos y existe una continuidad circular con respecto al eje de θ .

La continuidad del eje de θ se puede representar cuando alguna línea cambia de ángulo pero sigue teniendo el mismo ρ , este ángulo solo será desplazado en el rango de $[0, 2\pi)$. Si el ángulo de una línea llega al límite superior de 2π o lo supera, este pasará a la parte inferior de la gráfica iniciando con $\theta = 0$.

Si ubicamos un robot móvil en una posición arbitraria del mapa hacemos que gire sobre su eje de rotación y si este eje de rotación está ubicado en el centro de coordenadas del sensor láser. El resultado del giro representado en el espacio de Hough se ilustraría en los puntos (ρ, θ) , donde estos solo se desplazarán en el eje de θ y este movimiento sería cíclico.

5.2. Relocalización basados en la transformada Hough

Para la relocalización se necesitan 2 cosas: el mapa generado previamente del entorno, y el mapa generado a partir de la nueva posición a la que se quiere localizar el robot.

Sea M el conjunto de segmentos de línea (entidad par de puntos en geometría conformal) el cual representa el mapa del entorno de un robot, y L el conjunto de segmentos de línea que se encuentran cerca de la nueva ubicación del robot. A estos segmentos les sacamos su representación en el espacio de Hough (3.3) M_h y L_h , donde cada punto (ρ, θ) representa una línea en el plano cartesiano.

Debido a que estamos hablando de las mismas entidades podemos decir que $L_h \subset M_h$ con una diferencia de un ángulo $\Delta\theta$ y un desplazamiento Δx y Δy , el cual repercute en el valor de ρ .

Como estas líneas están desplazadas por el ángulo $\Delta\theta$, si recorremos cada uno de los puntos de M_h con la diferencia de cada una de las líneas de L_h y sacamos su distancia (la cual no debe de ser mayor a un ξ_θ y ξ_ρ dados), obtendremos la correspondencia entre las líneas del mapa generado previamente con las líneas del mapa generado a partir de la nueva posición.

1. Sea $m \in M_h$ un segmento de línea del mapa principal, y para todo $l \in L_h$ sacamos su diferencia de ángulo $\Delta\theta$ y la diferencia $\Delta\rho$ de la siguiente manera:

$$\Delta\theta_j = \text{diffTheta}(m_{i_\theta}, l_{j_\theta}) \quad (5.1)$$

$$\Delta\rho_j = m_{i_\rho} - l_{j_\rho} \quad (5.2)$$

donde $\Delta\theta_j, \Delta\rho_j \in \phi_{m_i l}$, es un nuevo conjunto que contiene las diferencias de un elemento $m_i \in M_h$ contra todos los elementos $l_j \in L_h$, y lo representamos como

$$m_i - L_h = \phi_{m_i l} \quad (5.3)$$

2. Una vez obtenidas estas diferencias del i -ésimo elemento de M_h agregamos esta diferencia a los elementos del mapa de la nueva ubicación dándonos

como resultado

$$L_h + \phi_{m_i l} = \psi_{h_i} \quad (5.4)$$

3. Con ψ_{h_i} hemos desplazado las líneas de L_h con respecto al valor de $\Delta\theta$, de acuerdo a la diferencia de ángulo de un segmento de línea de M_h . Además obtenemos la diferencia de $\Delta\rho$ para aproximarlos al valor de ρ de los segmentos de M_h . Estos valores los comparamos con M_h , realizando una diferencia entre M_h y ψ_{h_i}

$$M_h - \psi_{h_i} = \xi_{h_i} \quad (5.5)$$

4. Sea \mathcal{V} una matriz de votos, con una dimensión de $|M| \times |L|$, la cual está inicializada en cero. Esta matriz la llenamos de la siguiente forma

$$\mathcal{V}_{m,l} = \begin{cases} \mathcal{V}_{m,l} + 1 & \text{si los valores de } \xi_{h_i} \text{ son menores a } \xi_\theta \text{ y } \xi_\rho \\ \mathcal{V}_{m,l} & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5.6)$$

5. Se repite este procedimiento para toda $m_i \in M_h$, para que al final la matriz \mathcal{V} tenga una votación referente a la línea que corresponde entre el mapa recién registrado y el mapa del ambiente previamente capturado.

Una vez obtenido todos los votos posibles de la matriz \mathcal{V} , sacamos el que haya tenido más votos por columna, y de acuerdo a la posición de la fila, esta será la línea que corresponde.

6. Creamos un nuevo vector \mathcal{C} de dimensión $|M|$, el cual tendrá en cada posición el valor de referencia al segmento de línea correspondiente a L . Si no existe correspondencia entre una línea de M y una de L , tendrá un valor nulo.
7. Se obtiene el promedio Θ de la diferencia de ángulos entre las líneas que corresponden entre sí utilizando (3.5).
8. Se crea un rotor (2.96) para girar al robot móvil dentro del entrono virtual con un ángulo Θ . Este rotor se aplicará a todas las entidades de L . Una vez corregido el ángulo, lo único que hace falta es un desplazamiento sobre las coordenadas x y y .

5.2. RELOCALIZACIÓN BASADOS EN LA TRANSFORMADA HOUGH 77

9. Obtenemos los puntos más cercanos al origen de cada par de líneas en correspondencia. Sacamos su desplazamiento utilizando la misma metodología que se uso para sacar a T_{corr} haciendo uso de (3.12).
10. Creamos un trasladador (2.100) con los datos obtenidos del desplazamiento en x y y . Le aplicamos este trasladador a todos los elementos de L para que se desplacen al lugar donde corresponden las líneas.
11. Una vez hechas estas correcciones de posición y ubicación del robot móvil (rotación (3.6) y traslación (3.7)). Se puede seguir navegando en el ambiente e incrementar los objetos capturados por los diferentes dispositivos de entrada.

En la figura 5.2 se muestra una serie e imágenes correspondientes a una relocalización del robot geometer dentro de una habitación virtual pequeña.

Se muestra en la figura 5.2 (a) que esta tomando unas medidas del lugar, luego en (b) crea el mapa correspondiente a esas mediciones. (c) se carga el mapa ya antes tomado (líneas negras) y se compara con las líneas recién tomadas. (d) se hacen los cálculos necesarios aplicando la relocalización y se aplica el rotor y trasladador resultante y se coloca en la posición de acuerdo al mapa original y se hace una comparación con las líneas que corresponden.

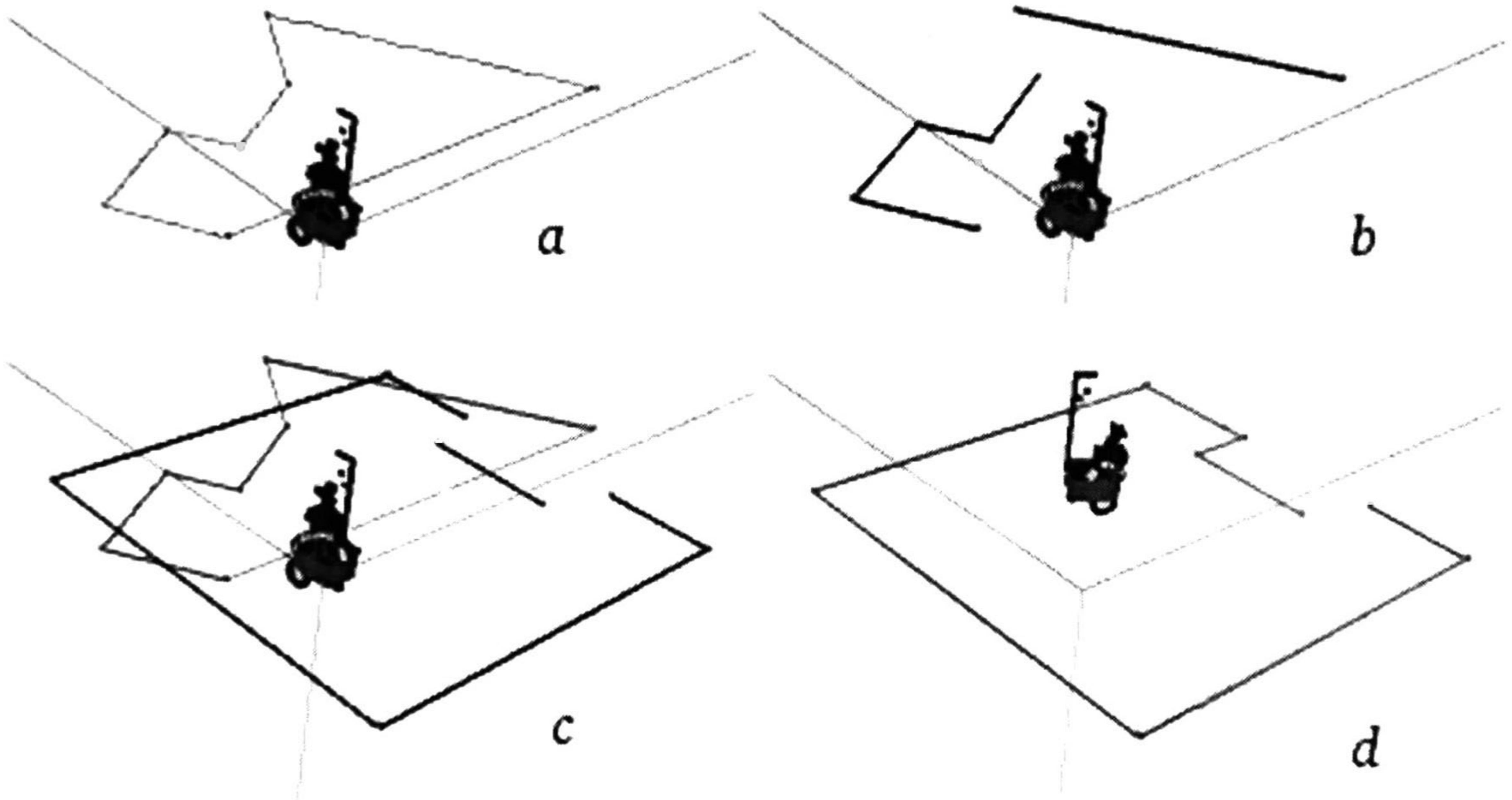


Figura 5.2: Pasos en la relocalización

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se presentaron los temas de navegación robótica utilizando *álgebra geométrica conformal*, la fusión de dispositivos para la creación de mapas 3D y la localización de un robot móvil dentro de un mapa previamente capturado. En las siguientes secciones se presentarán los resultados, así como las conclusiones y trabajo futuro de los temas antes mencionados.

6.1. Navegación robótica

6.1.1. Principales resultados

Se hizo uso del *álgebra geométrica conformal*, para una representación mas compacta de un segmento de línea utilizando la entidad *par de puntos*. Con esto estamos representando en una sola entidad un segmento de línea con la cual se pueden extraer todas las propiedades necesarias para la construcción de los mapas. Esto hace más fácil el guardar información ya que solo es necesario guardar una entidad en vez de varios datos.

Se utilizaron las transformaciones conformales en movimientos rígidos para la ubicación y localización del robot móvil dentro del ambiente virtual. Haciendo uso de los trasladadores, rotores y motores del *álgebra geométrica conformal*, se hace mas sencilla la representación y la aplicación de los mimos para cualquier

movimiento del robot y datos obtenidos con el sensor láser.

Se expusieron nuevas fórmulas dentro del álgebra geométrica conformal (capítulo 2) para el desarrollo del capítulo 3, principalmente para el manejo de *líneas y puntos*, y *líneas y par de puntos*.

6.1.2. Trabajo futuro

Dentro de lo que es la creación de mapas y la navegación robótica, quedan varios temas a tratar al igual que en SLAM, donde se busca que la navegación sea automática y sin necesidad de intervención humana.

Los métodos aquí expuestos se pueden perfeccionar para su uso autónomo, utilizando las fórmulas del capítulo para la medición de distancias y haciendo el uso del álgebra geométrica conformal para su representación mas compacta.

Dentro del SLAM queda mucho por desarrollar ya que hay varios factores que entorpecen la creación de estos mapas, como el registro de objetos que se esten moviendo dentro del ambiente, o el registro de objetos que representan un obstáculo pero no pueden ser alcanzados por el sensor láser.

6.2. Fusión de dispositivos

6.2.1. Principales resultados

Se presento el uso del álgebra de motores en conformal para la fusión de los sistemas de coordenadas de cada dispositivo de entrada del robot móvil.

Utilizando los motores se puede pasar fácilmente de un sistema de coordenadas a otro, teniendo en consideración en que existe un sistema de coordenadas unificado el cual todos los sensores se tienen que regir por él.

Fueron modelados los 5 grados de libertad que tiene el robot móvil geometer para el registro de objetos al sistema interno. Estos grados de libertad fueron el desplazamiento en las coordenadas x y y , la posición del robot con respecto al eje z y los movimientos de pan-tilt.

Se presentaron las técnicas para la representación en un ambiente virtual de las entidades conformales, así como las propiedades de cada una de ellas para lograr estas representaciones.

Se creó un modelo a escala 1:1 del robot móvil *geometer*, con el cual se obtiene un realismo en los objetos que está registrando el robot. Estos registros están dentro del ambiente virtual en la posición y lugar de acuerdo a donde los objetos reales fueron registrados.

En la creación de los mapas 3D se propuso el uso de paredes virtuales para darle un realismo al ambiente 3D que está registrando el robot.

Se desarrolló las propiedades de los trasladadores, rotores y motores del álgebra geométrica conformal.

6.2.2. Trabajo futuro

Realizar el modelado de los otros dispositivos con los que cuenta el robot móvil *geometer*, y fusionarlos dentro del sistema de coordenadas unificado.

Utilizar el álgebra de motores en conformal para modelar diferentes dispositivos que tengan las características del robot móvil *geometer*.

Automatizar el registro de entidades conformales dentro de un ambiente 3D.

La creación de un algoritmo para la realización de motores en geometría conformal, los cuales modelen un mecanismo con n grados de libertad.

6.3. Relocalización

6.3.1. Principales resultados

Se utilizó la representación de la línea en el espacio de Hough, a fin de utilizar el rango del ángulo, que es de $[0, 2\pi)$.

Se introdujo un algoritmo para la localización de un robot dentro de un ambiente ya conocido con anterioridad. Donde el robot está en una posición

arbitraria y este algoritmo busca la posición del robot dentro del mapa conocido.

6.3.2. Trabajo futuro

Mejorar este algoritmo introduciendo términos de probabilidad, lo cual ayudaría a saber con mayor exactitud la posición del robot móvil.

Realizar experimentos en ambientes donde existan un número considerablemente grande de líneas en las cuales exista una mayor posibilidad de error al realizar de la localización, e implementar las mejoras al algoritmo.

Apéndice A

Modelo Matemático de Visión Computacional

En este capítulo explicaremos el modelo matemático comúnmente usado en visión computacional. La *Geometría Proyectiva* es el modelo más ampliamente usado en este ámbito. Este modelo matemático está basado en el cálculo vectorial, álgebra de matrices y tensores. El lector puede referirse a [13] para mayor información acerca de este tema.

A.1. Modelo de una cámara

La manera más común de modelar las proyecciones perspectivas en un plano de una imagen es usando el modelo de *la cámara pinhole* (ver fig. A.1). En el cual tenemos un *centro de la cámara* (C) o centro de proyección, también conocido como *centro óptico*, un plano de la imagen o *plano focal* ($z = f$), un rayo o línea perpendicular al plano de la imagen llamado *eje principal* o rayo principal de la cámara y un punto p llamado *punto principal* el cual es la intersección del plano de la imagen y el eje principal.

A partir de este modelo se van agregando características especiales de las cámaras, como la posibilidad de tener píxeles no cuadrados (como en el caso de las *cámaras CCD*) y que éstos tengan inclinación. Con estas características el

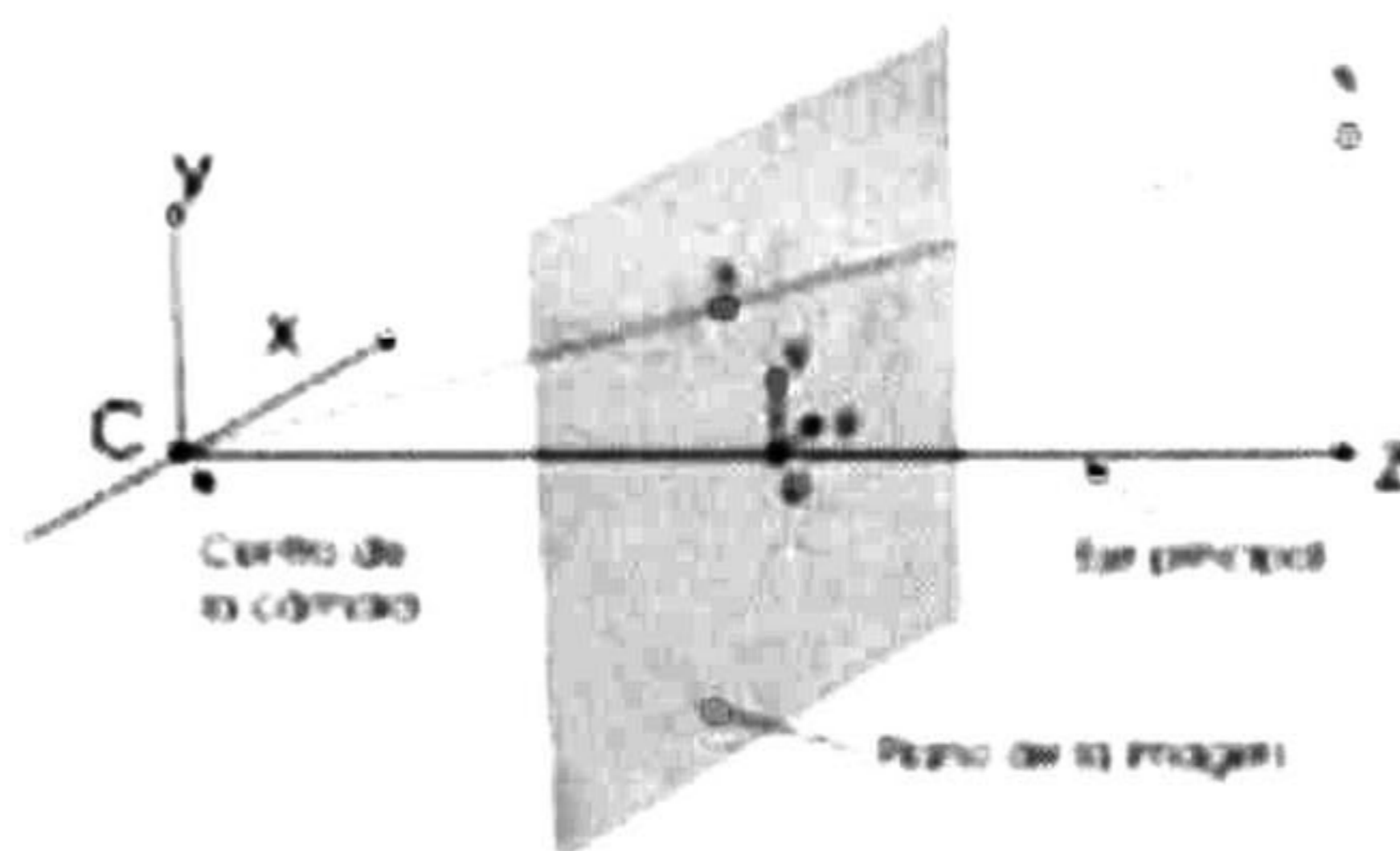


Figura A.1: Modelo de la cámara pinhole

modelo que representa a la cámara es una matriz de proyección de 3 x 4, la cual podemos representar como

$$P = KR \left[I \mid -\tilde{C} \right] \quad (A.1)$$

donde K es llamada la *matriz de calibración de la cámara*, R es una matriz de rotación de 3 x 3 que representa la orientación del marco del sistema de coordenadas de la cámara, I es la matriz identidad de 3 x 3, y \tilde{C} es un vector columna que representa las coordenadas del centro de la cámara en el marco de sistema de coordenadas del mundo.

La matriz K tiene la forma

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & x_0 \\ 0 & \alpha_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

donde

- $\alpha_x = fm_x$ y $\alpha_y = fm_y$ representan el factor escalar en las coordenadas x y y de la distancia focal de la cámara en términos de las dimensiones de los pixeles m_x y m_y en las direcciones x y y respectivamente.
- s es el parámetro de inclinación¹.
- $x_0 = m_x p_x$ y $y_0 = m_y p_y$ son las coordenadas del punto principal en el plano de la imagen en términos de las dimensiones de los pixeles.

¹Para una cámara CCD $s = 0$ generalmente, si $s \neq 0$ los ejes x y y de la cámara no son perpendiculares (este caso es poco común).

Desarrollando (A.1), P puede ser representada como

$$P = K \left[R \mid \mathbf{t} \right] \quad (\text{A.3})$$

donde $\mathbf{t} = -R\tilde{C}$.

A.1.1. Proyección de puntos

En geometría proyectiva, todos los n D puntos son representados por un vector columna de $(n+1)$ D entradas usando las *coordenadas homogéneas*. Así, la forma general de un punto \mathbf{X} en 3D es

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

\mathbf{X} representa el punto Euclidiano $(X/W, Y/W, Z/W)$. Bajo el modelo de la cámara pinhole la proyección de un punto 3D homogéneo se escribe como

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{x} &= P\mathbf{X} & (\text{A.5}) \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \mathbf{X} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{p}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{X} \end{aligned}$$

Donde \mathbf{x} es un vector de 3 entradas que representa un punto en 2D en coordenadas proyectiva. λ es un factor escalar arbitrario diferente de cero que es conocido como la profundidad proyectiva. Nótese que las filas \mathbf{p}_i^T de P pueden ser vista como la intersección de los planos ópticos (vea fig. A.2).

El conjunto de todos los puntos \mathbf{X} homogéneos en 3D es llamado *espacio proyectivo de 3D* \mathbb{P}^3 . En este conjunto el punto nulo $\mathbf{0} = [0, 0, 0, 0]^T$ es excluido. Similarmente, el conjunto de todos los puntos \mathbf{x} homogéneos en 2D es llamado *espacio proyectivo de 2D* \mathbb{P}^2 .

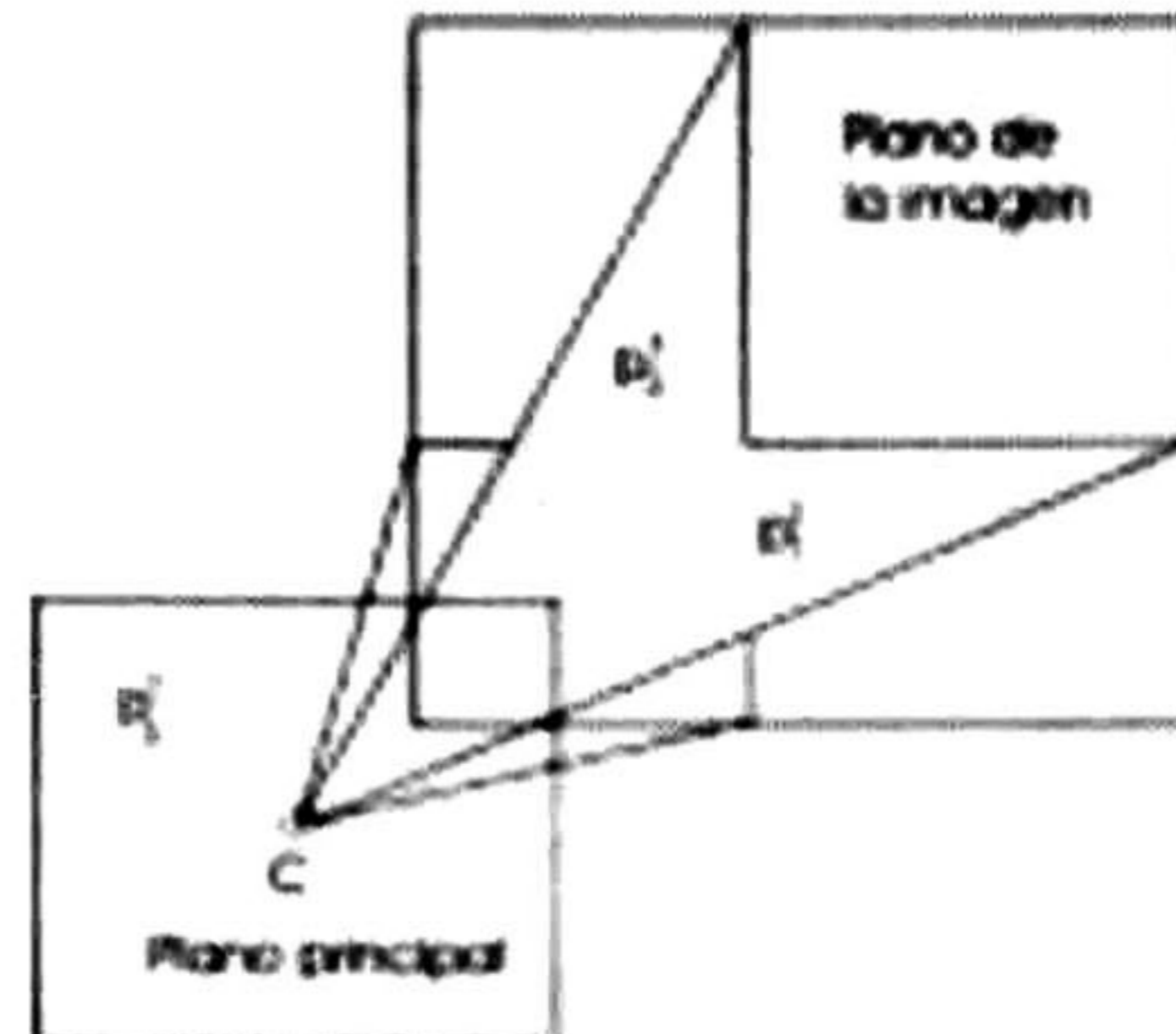


Figura A.2: Los planos ópticos p_i^T en la cámara con centro en C

A.2. Geometría proyectiva de 2 vistas

Hasta ahora hemos visto la ecuación básica para la proyección de un punto en el plano de la imagen. Para la reconstrucción de éste, la geometría proyectiva del escenario debe de ser estimada primero. Esta geometría puede ser expresada por el tensor bifocal. Describiremos ahora los algoritmos que se implementan para el calculo de este tensor, y con este reconstruir nuestro escenario.

A.2.1. El tensor bifocal

La geometría proyectiva definida para dos vistas, se puede describir por un Tensor Bifocal, también llamado *Matriz Fundamental*, (véase fig. A.3). Esta matriz esta definida por la ecuación

$$\mathbf{x}'^T F \mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.6})$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{x}' son los puntos correspondientes de la primera y segunda vista respectivamente. La matriz F de 3×3 tiene rango dos con 7 grados de libertad (degrees of freedom, (dof)), y puede ser calculada con 8 (o mas) correspondencias de puntos. Si $\mathbf{x} = [x, y, 1]^T$ y $\mathbf{x}' = [x', y', 1]^T$ entonces (A.6) puede ser reescrita como

$$x'x f_{11} + x'y f_{12} + x' f_{13} + y'x f_{21} + y'y f_{22} + y' f_{23} + x f_{31} + y f_{32} + f_{33} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Las entradas de F se pueden reagrupar en un vector columna \mathbf{f} tal que la ecuación (A.7) se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} x'x & x'y & x' & y'x & y'y & y' & x & y & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = 0 \quad (\text{A.8})$$

De un conjunto de n correspondencias de puntos, podemos hacer un sistema de la forma

$$\begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} = Z\mathbf{f} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Donde \mathbf{f} puede ser resuelta tomando el vector nulo de Z .

Una vez que la matriz F es conocida, las matrices de las cámaras pueden ser calculadas como

$$P = [I|0] \quad (\text{A.10})$$

$$P' = [[e']_x F | e'] \quad (\text{A.11})$$

donde $e' = [e'_1 \ e'_2 \ e'_3]^T$ es el vector nulo de F^T ($F^T e' = 0$) y

$$[e']_x = \begin{bmatrix} 0 & -e'_3 & e'_2 \\ e'_3 & 0 & -e'_1 \\ -e'_2 & e'_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

La formula general para calcular P' es

$$P' = [[e']_x F + e'v^T | \lambda e'] \quad (\text{A.13})$$

donde $v = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ es cualquier vector y λ es un escalar no cero.

A.3. Triangulación

Dada las matrices de las cámaras P y P' sean \mathbf{x} y \mathbf{x}' dos puntos en las dos imágenes que satisfacen (A.6). Estos puntos se pueden retroproyectar en una línea o un rayo e intersecarlos para localizar este punto en 3D.

El rayo retroproyectado desde \mathbf{x} por P es obtenido resolviendo $P\mathbf{X} = \mathbf{x}$. La familia parimétrica de la solución para calcular este rayo esta dada de la forma

$$\mathbf{X}(\lambda) = P^+ \mathbf{x} + \lambda \mathbf{C} \quad (\text{A.14})$$

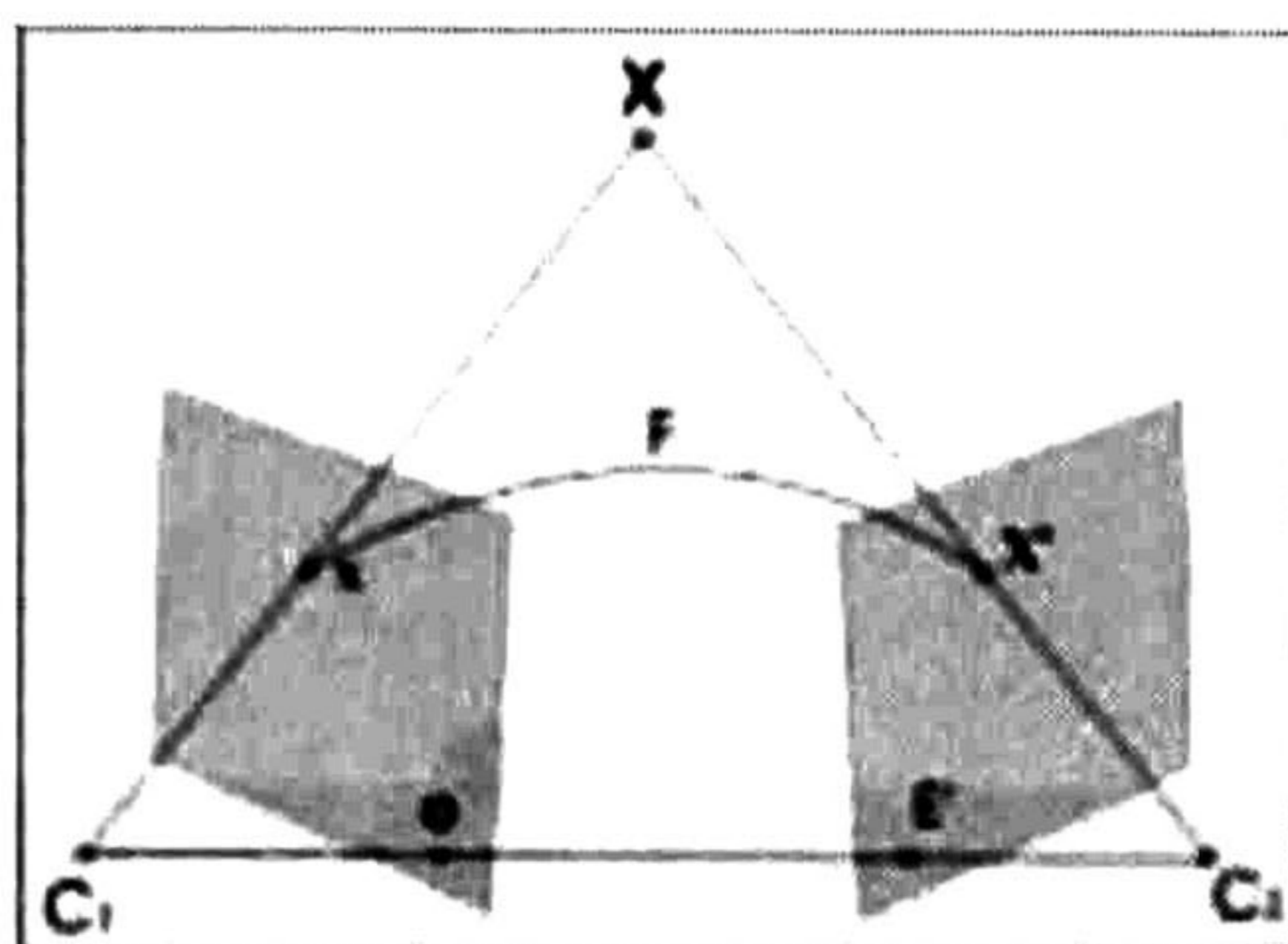


Figura A.3: La matriz fundamental F y triangulación. Los puntos de las imágenes \mathbf{x} y \mathbf{x}' retroproyectados en rayos. Si la restricción epipolar $\mathbf{x}'F\mathbf{x} = 0$ se satisface, entonces estos dos rayos viven en un plano, y se intersecan en un punto \mathbf{X} en 3D.

donde P^+ es la pseudo-inversa² de P , y \mathbf{C} es un vector nulo, llamado el centro de la cámara, definida por $P\mathbf{C} = 0$. El rayo es parametrizado por un escalar λ . Un punto $P^+\mathbf{x}$ vive en el rayo porque este es proyectado hacia \mathbf{x} , ya que $P(P^+\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Una vez que se tienen los dos rayos correspondientes a \mathbf{x} y \mathbf{x}' , estos se intersecan en un punto ya que viven en el mismo plano epipolar. Este punto \mathbf{X} se proyecta por estas dos cámaras hacia los puntos \mathbf{x} y \mathbf{x}' en las dos imágenes (ver la fig A.3).

Pero en la práctica estos casos ideales pocas veces se presentan debido al ruido en las imágenes y escalas de las mismas, por lo cual los rayos no son coplanares, y por consecuencia no se intersecan. La solución a este caso es encontrar un segmento de línea donde su magnitud intersecan la distancia mínima que hay entre estos dos rayos (ver la fig A.4). Una vez encontrado este segmento de línea, se calcula su punto medio y este se toma como el punto \mathbf{X} en 3D que representa la retroproyección de los puntos \mathbf{x} y \mathbf{x}' .

²La pseudo-inversa se puede definir como $P^+ = P^T(PP^T)^{-1}$, la cual $PP^+ = I$

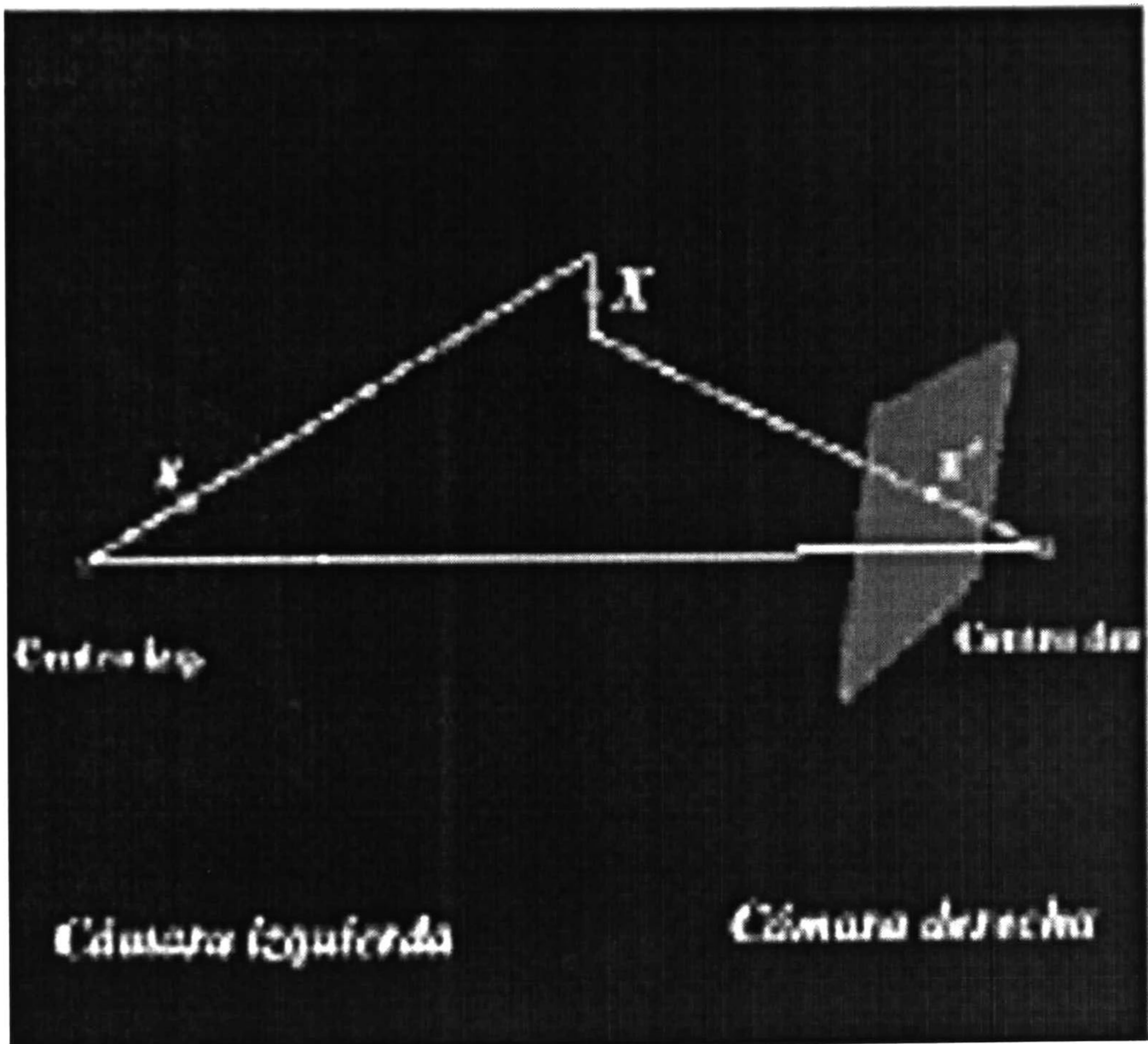


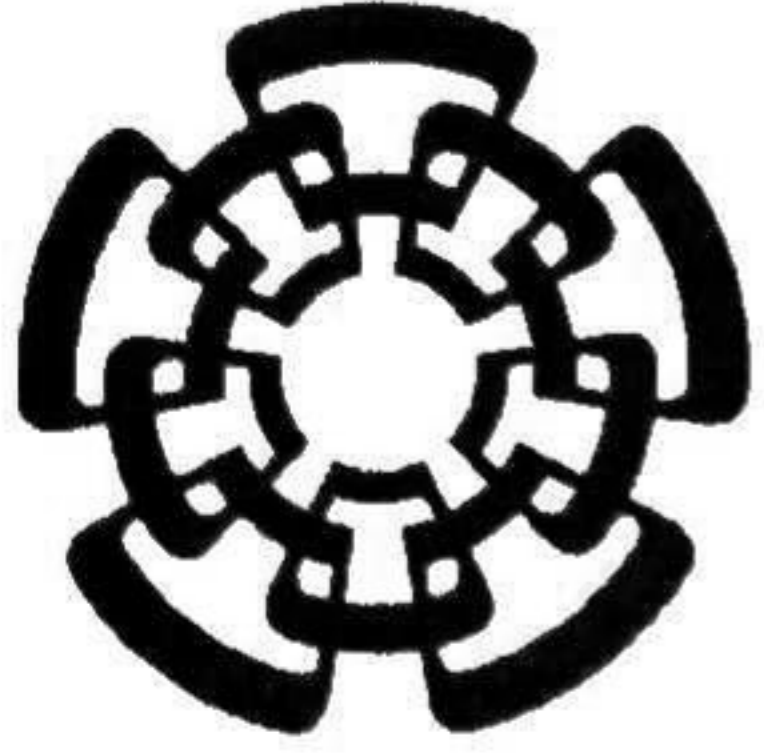
Figura A.4: Triangulación de un punto en la práctica

90 PÉNDICE A. MODELO MATEMÁTICO DE VISIÓN COMPUTACIONAL

Bibliografía

- [1] Bayro Corrochano Eduardo. *Geometric Computing for Perception Action Systems*. Springer, 2001.
- [2] Lounesto Pertti. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] Sommer G., editor. *Geometric Computing with Clifford Algebras*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- [4] Hestenes D., Li H., and Rockwood A. New algebraic tools for classical geometry. *En [3]*, pages 3–26, 2001.
- [5] Li H., Hestenes D., and Rockwood A. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. *En [3]*, pages 27–59, 2001.
- [6] Dirk Hähnel, Rudolph Triebel, Wolfram Burgard, and Sebastian Thrun. Map building with mobile robots in dynamic environments.
- [7] Chieh-Chih Wang and Chuck Thorpe. Simultaneous localization and mapping with detection and tracking of moving objects.
- [8] Li Zhang and Bijoy K. Ghosh. Line segment based map building and localization using 2d laser rangefinder.
- [9] Paul Hough. Hough transform. <http://planetmath.org/encyclopedia/HoughTransform.html>, <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/hough.htm>, 1962.
- [10] R.Y. Tsai and R.K. Lenz. A new technique for fully autonomous and efficient 3d robotics hand/eye calibration. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, pages 5(3):345–358, 1989.

- [11] E. Bayro-Corrochano. Motor algebra for 3d kinematics: The case of the hand-eye calibration. *Journal of Mathematical Imagin and Vision*, pages 13:79–100, 2000.
- [12] Reyes Lozano Leo Hendrik. *Métodos Geométricos para Visión Robótica*. PhD thesis, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Guadalajara, México, 2004.
- [13] Richard Hartley and Andrew Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2000.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Mapas tridimensionales para navegación robótica

del (la) C.

Miguel BERNAL MARÍN

el día 30 de Julio de 2007.

Dr. Eduardo José Bayro Corrochano
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006790