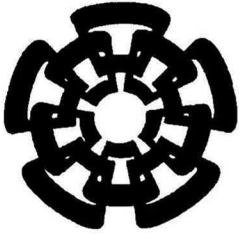




XX (135294,1)



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del  
I.P.N.  
Unidad Guadalajara**

# **Control Robusto de Manipuladores Robóticos por Modos Deslizantes Anidados e Integrales**

**CINVESTAV  
IPN  
ADQUISICION  
DE LIBROS**

**Tesis que presenta:  
Luis Enrique González Jiménez**

**para obtener el grado de:  
Maestro en ciencias**

**en la especialidad de:  
Ingeniería Eléctrica**

**CINVESTAV IPN  
USB INFORMACION Y DOCUMENTACION  
SERVICIO DOCUMENTAL**

**Directores de tesis:  
Dr. Alexander Georgievich Loukianov  
Dr. Bernardino Castillo Toledo**

Guadalajara, Jalisco, Agosto 2007.

CLASIF: 7X165, G8 .667 2007  
ADQUIS: SSI 462  
FECHA: 7-01-08  
PROCEL: Lon 2007

ID: 134666-1001

# **Control Robusto de Manipuladores Robóticos por Modos Deslizantes Anidados e Integrales**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Luis Enrique González Jiménez**

Ingeniero en Electrónica

Instituto Tecnológico de Sonora 2000-2005

Becario de CONACyT, expediente no. 199346

Directores de Tesis:

**Dr. Alexander Georgievich Loukianov**

**Dr. Bernardino Castillo Toledo**

## **Resumen**

Este trabajo está orientado al diseño de dos controladores robustos, uno basado en Modos Deslizantes Anidados y el otro en Modos Deslizantes Integrales Anidados. Estos controladores están diseñados para un tipo de sistema no lineal denominado Forma Controlable por Bloques con perturbaciones, además de que se muestra la aplicación de estos controladores en el modelo de manipuladores robóticos seriales.

El objetivo de estos controladores es el de lograr seguimiento de referencias en las posiciones angulares de los manipuladores robóticos, rechazando las perturbaciones externas, variaciones en los parámetros del sistema e incertidumbre en el modelado de la planta, además de presentar robustez tanto a perturbaciones matching (perturbaciones que se encuentran en el subespacio de control) como a perturbaciones no matching (que se encuentran fuera de dicho subespacio).

Se presentan estrategias para el modelado de manipuladores, los algoritmos de control, así como sus principios de diseño, y la aplicación de dichos controladores robustos en el modelo de manipuladores. Además de una sección dedicada a la simulación del modelo de un manipulador serial planar de 2 grados de libertad con los controladores planteados.

## **Summary**

This work is oriented to the design of two robust controllers, one based on Nested Sliding Modes and the other in Nested Integral Sliding Modes. The controllers are designed for a type of nonlinear system denominated Block Controllable Form with disturbances, in addition of which is the application of these controllers in the model of serial robotics manipulators.

The objective of these controllers is the one to obtain tracking of references in the angular positions of the robotics manipulators, rejecting the external disturbances, variations in the parameters of the system and uncertainty in the modeled one of the plant, besides to also present robustness not only to matching disturbances (disturbances that are in the subspace of control) but also to not matching disturbances (those whose are outside of this subspace).

Strategies for obtain the dynamic model of manipulators appears, the algorithms of control, as well as their principles of design, and the application of these robust controllers in the model of manipulators. In addition a section dedicated to the simulation of the model of a serial manipulator planar of 2 degrees of freedom with the raised controllers.

## **Agradecimientos**

*Antes que a nadie, agradezco a mis padres Ernesto González Inda y María Imelda Jiménez Castro por su apoyo y amor incondicional, que ha sido muy importante a lo largo de mi vida para lograr ser quien soy.*

*Agradezco a mis hermanos Ernesto Alonso, Kenia Selene y Yesenia Alejandra por estar siempre conmigo, y a pesar de la distancia seguir siendo los mejores hermanos que alguien pudiera tener.*

*Agradezco a Ángel María Cervantes Medina, mi futura esposa, por atreverse a compartir sus sueños conmigo e impulsar los míos al creer siempre en mí. Además de enseñarme que el amor existe.*

*Agradezco a mis asesores, Dr. Alexander Loukianov y Dr. Bernardino Castillo Toledo, por ser guías en el proceso de la elaboración de este trabajo.*

*Agradezco al Dr. Eduardo Bayro Corrochano por su apoyo, tiempo y valioso trabajo de revisión.*

*Agradezco al CINEVESTAV por hacer posible e impulsar la preparación académica y desarrollo tecnológico en México.*

*Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado durante los 2 años de maestría, ya que sin él muchos no podríamos realizar nuestros sueños de superación.*

*Agradezco a mis compañeros de generación Salvador, Enrique Aguayo, Alex Cervantes, Sr. Pizano, Ezequiel y Beto, por demostrarme que lo mas valioso de una amistad es la diversidad.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Trabajos previos	3
1.3. Objetivos del trabajo	5
1.4. Estructura del documento	5
<b>2. Modelado Matemático</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción	7
2.2. Modelado Cinemático	7
2.2.1. Cinemática Directa	9
2.2.2. Cinemática Inversa	9
2.2.3. Cinemática Diferencial	10
2.3. Modelado Dinámico	12
2.3.1. Ecuaciones de Lagrange	13
2.3.2. Ecuaciones de Newton-Euler	14
2.3.3. Dinámica Directa y Dinámica Inversa	17
<b>3. Algoritmos de Control</b>	<b>19</b>
3.1. Introducción	19
3.2. Forma No-Lineal Controlable por Bloques	19
3.3. Asunciones .	20
3.4. Modos Deslizantes Anidados (MDA)	21
3.4.1. Control por Modos Deslizantes Anidados	22
3.4.2. Análisis de estabilidad del CMDA	25
3.5. Modos Deslizantes Integrales Anidados	26
3.5.1. Modos Deslizantes Integrales	27
3.5.2. Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados	29
3.5.3. Análisis de Estabilidad del CMDIA	33

<b>4. Control de Manipuladores Robóticos</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción	37
4.2. Modelo Dinámico de Manipuladores Robóticos	37
4.3. Control por Modos Deslizantes Anidados (CMDA)	40
4.4. Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados	41
4.5. Simulaciones	44
4.5.1. Resultados para CMDA	44
4.5.2. Resultados para CMDIA	45
4.6. Análisis de Resultados	48
<b>5. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>53</b>
5.1. Conclusiones	53
5.2. Trabajo Futuro	54
<b>A. Clasificación de Manipuladores</b>	<b>57</b>
<b>B. Teorema de Estabilidad de Lyapunov</b>	<b>61</b>
<b>C. Manipulador de 2 Grados de Libertad</b>	<b>65</b>
<b>D. GLOSARIO</b>	<b>69</b>

# Índice de figuras

2.1.1.Uniones A) Revolutiva y B)Prismática.	8
2.1.2.Manipulador de 6 grados de libertad	8
2.2.1.Ejes de rotación y marcos de referencia para un manipulador de 6 grados de libertad.	11
2.3.1.Caracterización del eslabón $i$ para las ecuaciones de Newton-Euler.	15
3.3.1.Función sigmoideal para varios valores de $\varepsilon$	21
4.2.1.Manipulador de $n$ grados de libertad	38
4.5.1.Variable de estado $x_1$ y $x_{1ref}$ (CMDA)	45
4.5.2.Variable $x_3$ y su referencia (CMDA)	46
4.5.3.Superficies Deslizantes (CMDA)	46
4.5.4.Velocidades angulares (CMDA)	47
4.5.5.Retrato de fase (CMDA)	47
4.5.6.Señales de Control (CMDA)	49
4.5.7.Variable de estado $x_1$ y $x_{1ref}$ (CMDIA)	49
4.5.8.Variable $x_3$ y su referencia (CMDIA)	50
4.5.9.Señales de error (CMDIA)	50
4.5.10Velocidades angulares (CMDIA)	51
4.5.11Retrato de fase de las variables de error (CMDIA)	51
4.5.12Señales de Control (CMDIA)	52
5.1.1.Señales de control promedio (CMDA)	54
5.1.2.Señales de control promedio (CMDIA)	55
5.1.3.Vecindad de convergencia (CMDA)	55
5.1.4.Vecindad de convergencia (CMDIA)	56
A.0.1Clasificación de Manipuladores Industriales (Parte 1)	59

A.0.2Clasificación de Manipuladores Industriales (Parte 2)	60
C.0.1Manipulador Serial Planar de 2 grados de libertad con masas concentradas.	66

# Capítulo 1

## Introducción

En las últimas décadas la Robótica ha tenido un avance sustancial, en gran parte debido al desarrollo de *hardware* y *software* más eficiente como procesadores de alta velocidad, interfaces de fácil uso y acceso, sensores de mayor exactitud, entre otros. Esto ha permitido maximizar las capacidades de los dispositivos robóticos tales como repetitibilidad, exactitud y rendimiento; además de la posibilidad de realizar trabajos de alto riesgo como manejar residuos químicos peligrosos para el ser humano, acceder a lugares de dimensiones reducidas o a ambientes hostiles. Esto también ha creado una especial relación entre la *Robótica* y el *Control Automático*, permitiendo el crecimiento de aplicaciones de las técnicas de control automático en el campo de la robótica.

La alta *no-linealidad* de los dispositivos robóticos y su potencial de aplicación han sido detonantes en el crecimiento del interés de la comunidad científica por este campo y en el número de trabajos que tratan sobre el control de robots, ya sea aplicando técnicas y algoritmos de control ya utilizados en otros campos o creando algoritmos nuevos.

Entre los dispositivos más empleados en la industria se encuentran los robots manipuladores, que son una secuencia de eslabones conectados por uniones, en las cuales puede o no existir un actuador (eléctrico, hidráulico, etc) que permita el movimiento de los eslabones y el posicionamiento deseado de un efector final. No existe una definición única de robot manipulador. Quizás la definición más aceptada sea la de la **International Federation of Robotics (IFR)**, que dice:

*“Por robot industrial de manipulación se entiende a una máquina de manipulación automática, programable y multifuncional con tres o más ejes que*

*pueden posicionar y orientar piezas, herramientas o dispositivos especiales para la realización de trabajos diversos en las diferentes etapas de la producción industrial, ya sea en una posición fija o en movimiento.”[1]*

Una de las técnicas de control que se ha utilizado ampliamente en esta área es la de Control por Modos Deslizantes (CMD) debido a su baja sensibilidad a perturbaciones y a variaciones paramétricas, ya que es común que procesos industriales consistan de plantas operando bajo condiciones de incertidumbre y ruido.

El uso de manipuladores robóticos permite automatizar muchas actividades realizadas por el ser humano. Estas actividades dependen en gran medida de las características del manipulador como: grados de libertad, número de actuadores, dimensiones de los eslabones y el tipo de efector final que pueda manejar.

Entre las tareas que puede llevar a cabo un manipulador están las domésticas como cortar el césped, aspirar el polvo de una habitación, de ornamento; y aplicaciones industriales como la colocación de partes en un proceso de ensamblado, en la soldadura y el pintado de partes automotrices, empaquetado de productos terminados, entarimado o apilado de objetos, el corte de piezas base, entre otros.

## 1.1. Planteamiento del problema

En todas las actividades que un manipulador puede realizar se necesita que el efector final ejecute cierto movimiento; ya sea la reproducción de un movimiento ya prescrito (seguimiento de referencia) o que su movimiento se deba a factores presentes en su ambiente de trabajo. El control del movimiento del efector final demanda un análisis de las características mecánicas, de los actuadores y sensores del manipulador. Esto nos lleva a la necesidad de obtener un modelo matemático del mismo, y así diseñar una estrategia de control que nos permita lograr el correcto movimiento del efector final del robot.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, obtener un modelo exacto del manipulador es una tarea muy complicada. Esto debido a factores como:

- Dinámicas No Lineales. Debido a las fuerzas centrífugas, de Coriolis y gravitacionales.

- **Variaciones Paraméricas Internas.** Provocado por el calentamiento de los actuadores, desgaste en las uniones y el cambio de masa en los objetos manipulados.
- **Perturbaciones Externas.** Como ruido en los sensores, o debido factores del ambiente de trabajo.
- **Dinámicas de alta frecuencia no modeladas.** Esto debido a la flexibilidad de los eslabones, que suelen considerarse totalmente rígidos.[2]

Por lo tanto el algoritmo de control a implementar, deberá ser robusto ante los factores enlistados anteriormente.

## 1.2. Trabajos previos

Entre las estrategias de control diseñados y/o implementados con anterioridad, se encuentran las técnicas lineales y no lineales siguientes:

### **Linealización por Retroalimentación de estado**

En este caso los modelos no lineales del sistema se linealizan mediante un lazo de retroalimentación, de tal forma que se pueden utilizar técnicas de control para sistemas lineales. Esta estrategia de control puede encontrarse en forma detallada en [3], al igual que las tres estrategias siguientes.

### **PID**

Esta estrategia de control está basada en la manipulación de la dinámica de una planta por medio de un controlador con términos Proporcionales, Integrales y Derivativos, que al estar en lazo cerrado con la planta obtiene la dinámica deseada.

### **Pasividad**

Esta técnica consiste en que un sistema pasivo siempre consume energía, entonces se utilizan funciones de energía para el diseño y análisis de los sistemas; esta característica es inherente al modelo Lagrangiano de los manipuladores.

### **Funciones de Lyapunov**

El controlador está diseñado en base de funciones de Lyapunov, usando el concepto de la energía del sistema. La ventaja de esta técnica es que la región de estabilidad que proporciona el controlador es mayor que utilizando técnicas lineales.

### **Variable Structure Control (VSC)**

En esta técnica la estructura del controlador cambia de acuerdo a algún criterio para obtener un comportamiento deseado de la planta. El criterio por el cual cambia la estructura del controlador está basado en funciones de las variables de estado escogidas por el diseñador.[4]

### **Computed Torque**

Esta técnica consiste en el cálculo del esfuerzo de torsión o torca necesarios para cancelar las dinámicas naturales de la estructura mecánica del manipulador, por lo tanto requiere de un conocimiento exacto del modelo del manipulador.

### **Control inteligente**

En este tipo de controladores se distinguen básicamente 2 tipos: los que se basan en redes neuronales y los que utilizan control difuso. Básicamente las redes neuronales son un sistema que se entrena para emular una dinámica deseada, ya sea para el controlador, para identificar el modelo de alguna planta o ambas[5]. En el control difuso se obtienen varios submodelos, cuya estructura ofrece alguna ventaja sobre el modelo inicial (como linealidad) y se diseña un controlador no lineal en base a este conjunto de submodelos como en [6].

### **Control adaptivo**

La idea de este esquema de control es el cambiar los parámetros del controlador en función del cambio de los parámetros del modelo del sistema a controlar como en [7] y en [8], o se puede utilizar el esquema proponiendo un modelo lineal nominal y un lazo de control extra que se adapta a las no-linealidades de la planta que se vayan presentando con el transcurso del tiempo como en [2].



### **Visión Computacional y Álgebra Geométrica**

En este tipo de control se explota la simplicidad de los cálculos del álgebra geométrica para el modelado de dispositivos mecánicos, y en conjunto con la visión computacional crear un lazo de control para el manipulador, como en [9] y [10].

### **1.3. Objetivos del trabajo**

El objetivo más importante de este trabajo es diseñar un algoritmo de control que sea capaz de lograr que las posiciones angulares de los eslabones de un manipulador robótico realicen un seguimiento de trayectorias deseadas, y que sea robusto a perturbaciones externas y variaciones paramétricas. Además que sea robusto, no solo a perturbaciones que estén en el subespacio de control, sino también a perturbaciones que no se encuentren en este subespacio. Para este objetivo se diseñarán y probarán dos algoritmos basados en Modos Deslizantes: Control por Modos Deslizantes Anidados y Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados.

### **1.4. Estructura del documento**

La estructura de este documento estará definida como se describe a continuación. En el capítulo 2 se tratará el modelado de manipuladores robóticos, se explicará la forma de obtener la dinámica de estos dispositivos por medio del planteamiento de las ecuaciones de Euler-Lagrange, utilizando los conceptos de Energía Cinética y Potencial.

En el capítulo 3 se muestra el análisis de 2 algoritmos de control robustos, para el seguimiento de trayectorias, de sistemas en la forma controlable por bloques y que presentan perturbaciones en el subespacio de control además de perturbaciones fuera de este subespacio.

En el capítulo 4 se muestra la aplicación de los algoritmos analizados en el capítulo 3, en los manipuladores descritos en el capítulo 2.

En el capítulo 5 se muestran las conclusiones del trabajo así como las actividades futuras.



# Capítulo 2

## Modelado Matemático

### 2.1. Introducción

En el control de un robot manipulador es fundamental tener un modelo matemático de la manera más exacta posible. Esto nos permite poder elegir una estrategia de control adecuada, tomando en cuenta la estructura de dicho modelo. La manera más simple de modelar la cinemática de un manipulador es utilizando el concepto de *cadena cinemática*. Una cadena cinemática es un conjunto de cuerpos rígidos, también llamados eslabones o links, acoplados por *pares cinemáticos*. Un par cinemático, o *unión*, es el acoplamiento de dos cuerpos rígidos de tal forma que delimite su movimiento relativo. Existen muchos tipos de pares cinemáticos, pero dentro de ellos destacan dos: el *par de rotación* o *revolutivo* y el *par de deslizamiento* o *prismático*. En la figura 2.1.1 se pueden observar estos tipos de pares cinemáticos o uniones.

Al primer eslabón de una cadena cinemática se le suele llamar *base* y al último se le denomina *efector final* como se muestra en la siguiente figura.

En este capítulo se mencionan dos características que se pueden modelar de un manipulador: su Cinemática y su Dinámica.

### 2.2. Modelado Cinemático

Cinemática es el estudio del posible movimiento y configuraciones de un sistema. Por lo tanto este tipo de modelado se refiere a la descripción del movimiento del manipulador con respecto a un sistema de referencia fijo, sin importar las fuerzas y momentos que generan dicho movimiento. En pocas

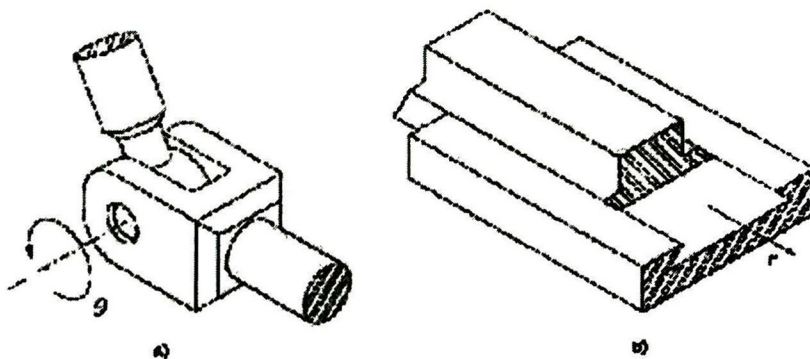


Figura 2.1.1: Uniones A) Revolutiva y B) Prismática.

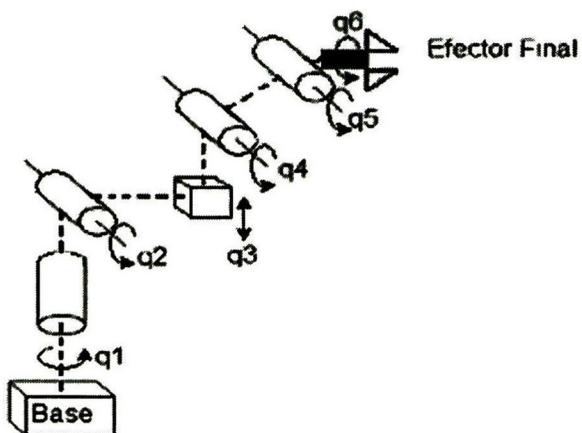


Figura 2.1.2: Manipulador de 6 grados de libertad

palabras, a la cinemática solo le concierne la geometría del sistema. En el modelado de manipuladores se pueden distinguir 3 tipos de cinemática: la cinemática directa, la cinemática inversa y la diferencial.

### 2.2.1. Cinemática Directa

La cinemática directa de un manipulador consiste en determinar el mapeo entre las **variables de las uniones** (*posición y velocidad angulares*) y la **posición y orientación** del efector final, con respecto a algún sistema de referencia. De la mecánica de los cuerpos rígidos, se puede expresar la cinemática directa de un manipulador por medio de la *matriz de transformación homogénea* de dimensiones (4 x 4) que se muestra a continuación:

$${}^bT_e(q) = \begin{pmatrix} {}^bR_e(q) & {}^b p_e(q) \\ O & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

Donde  $q$  es el vector de las variables de uniones con dimensiones (n x 1),  ${}^b p_e(q)$  es el vector de la posición del efector final de dimensiones (3x1),  ${}^bR_e(q) = ({}^b n_e, {}^b s_e, {}^b a_e)$  es la matriz de rotación del marco de referencia del

efector final ( $e$ ) con respecto al marco de referencia base ( $b$ ) y  $O$  es un vector de ceros de dimensiones (3x1). El superíndice que precede a una variable denota el marco de referencia en el que está expresada. Nótese que la matriz  ${}^bR_e(q)$  es ortogonal y sus columnas son vectores unitarios de los ejes de referencia del efector final.

Cabe destacar que uno de los procedimientos más efectivos y utilizados para obtener la cinemática directa de un manipulador, es la llamada **Notación Modificada de Denavit-Hartenberg**; esta se puede encontrar explicada en [3].

### 2.2.2. Cinemática Inversa

A diferencia de la cinemática directa, que obtiene la posición y orientación del efector final en base a las variables de las uniones, la cinemática inversa determina los valores de las variables de las uniones a partir de una posición  $p_e$  y orientación  $R_e$  dadas para el efector final. Este problema es muy importante, ya que las tareas a realizar están definidas en base a posiciones y orientaciones del efector final, entonces para que el manipulador las lleve

a cabo correctamente se debe traducir esta información en valores de las variables de uniones  $q$ .

En cuanto a la cinemática directa se refiere, una vez que se tiene la información de las variables de uniones, la posición y orientación del efector final está definida de forma única. En general esto no sucede para la cinemática inversa, lo que hace a este problema mucho más complejo. Esta complejidad se debe a las siguientes razones [3]:

1. Las ecuaciones a resolver son, en general, no lineales; para las cuales no siempre es posible encontrar soluciones en forma cerrada.
2. Pueden existir múltiples o hasta infinitas soluciones (en el caso de manipuladores redundantes).
3. Puede no existir solución, debido a la estructura cinemática del manipulador.

La existencia de solución se puede garantizar si la posición y orientación del efector final pertenecen al espacio de trabajo del manipulador.

### 2.2.3. Cinemática Diferencial

Este tipo de cinemática se refiere al mapeo entre el vector de velocidades de uniones  $\dot{q}$  ( $n \times 1$ ) y el vector de velocidad del efector final  $v$ . Dicha relación se puede observar en la ecuación siguiente:

$$v = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ w \end{pmatrix} = J(q)\dot{q} \quad (2.2.2)$$

Donde  $\dot{p}$  ( $3 \times 1$ ) es el vector de velocidad lineal,  $w$  ( $3 \times 1$ ) es el vector de velocidad angular, y  $J(q)$  es lo que se conoce como *matriz Jacobiana* o *Jacobiano*.

Existen 2 formas para calcular el Jacobiano de un sistema mecánico: el Jacobiano Geométrico y el Jacobiano Analítico.

#### Jacobiano Geométrico

Este tipo de Jacobiano se obtiene mediante un procedimiento geométrico, basado en el cálculo de lo que contribuye cada velocidad de unión a la

velocidad lineal y angular del efector final. Estas contribuciones están dadas por la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{\omega}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 a_1 + \bar{\xi}_1 (a_1 \times p_{1n}) & \dots & \xi_n a_n + \bar{\xi}_n (a_n - p_{nn}) \\ \bar{\xi}_1 a_1 & \dots & \bar{\xi}_n a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = J_n(q) \dot{q} \quad (2.2.3)$$

Donde  $Z_k$  es el eje de rotación de la unión  $k$  como se muestra en la figura 2.2.1.  $a_k$  es el vector unitario de  $Z_k$  y  $p_{kn}$  denota el vector del origen del marco de referencia  $k$  al origen del marco de referencia  $n$ .

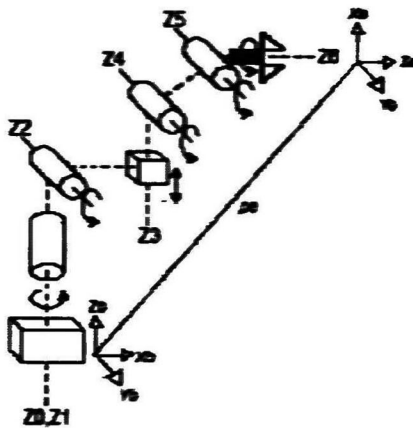


Figura 2.2.1: Ejes de rotación y marcos de referencia para un manipulador de 6 grados de libertad.

Los términos  $\bar{\xi}_i$  y  $\xi_i$  definen características del tipo de unión de la siguiente manera:

$$\bar{\xi}_i = 1 - \xi_i$$

- $\xi_i = 0$  si la unión  $i$  es revolutiva.
- $\xi_i = 1$  si la unión  $i$  es prismática.

Notese que  $J_n$  es una función de  $q$  a través de los vectores  $a_k$  y  $p_{kn}$ , los cuales pueden ser obtenidos sobre la base de la cinemática directa.

### Jacobiano Analítico

Este tipo de Jacobiano suele utilizarse si la orientación y posición del efector final están especificados en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio de trabajo del manipulador.

Si estructuramos el vector de posición y orientación del efector final de la siguiente forma:

$$x = \begin{pmatrix} p_e \\ \phi_e \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

donde  $p_e$  es el vector de posición y  $\phi_e$  el de orientación. Entonces es posible calcular el Jacobiano por la diferenciación directa de la ecuación anterior, por ejemplo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{pmatrix} = J_a(q) \dot{q} \quad (2.2.5)$$

Existe una relación entre los dos tipos de Jacobianos, determinada por:

$$J_n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi_e) \end{pmatrix} J_a \quad (2.2.6)$$

donde  $T(\phi_e)$  es una matriz de transformación que depende de los parámetros usados para representar la orientación del efector final. Cabe mencionar que siempre se puede encontrar una matriz de mapeo entre el Jacobiano Analítico ( $J_a$ ) y el Geométrico ( $J_n$ ) si  $T(\phi_e)$  tiene rango pleno.

## 2.3. Modelado Dinámico

El modelado dinámico de un robot manipulador consiste en encontrar el mapeo entre las fuerzas ejercidas sobre la estructura del manipulador y las posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones. Las formas más usadas para calcular dicho modelo son : las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones de Newton-Euler. La primera es más simple y sistemática, y la segunda más eficiente desde un punto de vista computacional.



### 2.3.1. Ecuaciones de Lagrange

Si tomamos en cuenta que las variables de las uniones  $q_i$  constituyen un conjunto de *coordenadas generalizadas* del sistema, el modelo dinámico del manipulador puede ser inferido por las ecuaciones de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.1)$$

donde  $\tau_i$  es el efecto de fuerza del actuador en la unión  $i$ , un esfuerzo de torsión para una unión revolutiva y una fuerza para una unión prismática. Y  $L$  es un término conocido como el *Lagrangiano*, y equivale a:

$$L = T - U \quad (2.3.2)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema y  $U$  es la energía potencial. La energía cinética es una forma cuadrática de las velocidades de las uniones como se muestra en la siguiente ecuación:

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad (2.3.3)$$

donde  $H(q)$  es la matriz de inercia ( $n \times n$ ) del manipulador y es simétrica y definida positiva. Sustituyendo (2.3.3) en (2.3.2) y derivando lo necesario como en (2.3.1), llegamos a las *ecuaciones de movimiento* siguientes:

$$H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.3.4)$$

donde  $\tau$  es el vector de torca de las uniones ( $n \times 1$ ),  $g(q)$  es el vector de fuerzas gravitatorias ( $n \times 1$ ) con

$$g_i(q) = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

y

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{H}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q} \left( \dot{q}^T H(q) \dot{q} \right) \right)^T$$

es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis. Este término es cuadrático en las velocidades de las uniones, y entonces podemos escribir su elemento genérico como

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

definiendo

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right),$$

estos términos son conocidos como los *Símbolos de Christoffel* del primer tipo, estos términos hacen que la matriz  $\dot{H} - 2C$  sea anti-simétrica; esta propiedad será muy útil para fines de control.

El modelo dinámico en la forma (2.3.4) está representado por un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden acopladas, que relaciona las posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones con las torcas de las mismas. Los elementos  $H$ ,  $C$  y  $g$  son funciones de los parámetros cinemáticos y dinámicos de los eslabones, y se pueden obtener expresando la energía cinética y potencial en términos de la posición y velocidad de las uniones.

### 2.3.2. Ecuaciones de Newton-Euler

Este tipo de formulación permite obtener la dinámica de un manipulador rígido sin derivar las expresiones explícitas de los términos  $H$ ,  $C$  y  $g$ . Las ecuaciones son obtenidas como resultado de dos cálculos recursivos; nombrados *recursivo hacia adelante*, para calcular las velocidades y aceleraciones de los eslabones del eslabón 0 al  $n$ , y *recursivo hacia atrás*, para calcular las fuerzas y momentos (y por lo tanto torcas) de los eslabones desde eslabón  $n$  al 0.

Si definimos a  $p_i$  como el vector de posición del origen del marco de referencia del eslabón  $i$ . Entonces la velocidad lineal del origen del marco de referencia del eslabón  $i$  esta dada por

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + w_{i-1} \times p_{i-1} + \xi_i \dot{q}_i a_i \quad (2.3.5)$$

donde la velocidad angular del eslabón  $i$  esta dada por

$$w_i = w_{i-1} + \bar{\xi}_i \dot{q}_i a_i. \quad (2.3.6)$$

Derivando (2.3.5) y (2.3.6) nos da

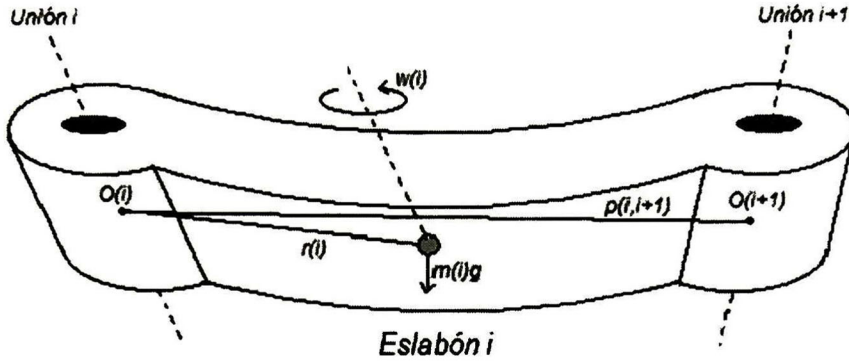


Figura 2.3.1: Caracterización del eslabón  $i$  para las ecuaciones de Newton-Euler.

$$\ddot{\mathbf{p}}_i = \ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{\mathbf{w}}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i} + \mathbf{w}_{i-1} \times (\mathbf{w}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i}) + \xi_i (\ddot{\mathbf{q}}_i \mathbf{a}_i + 2\mathbf{w}_{i-1} \times \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{a}_i)$$

y

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \bar{\xi}_i (\ddot{\mathbf{q}}_i \mathbf{a}_i + \mathbf{w}_{i-1} \times \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{a}_i)$$

además si definimos  $\mathbf{p}_{ci}$  como el centro de masas del eslabón  $i$ , su aceleración sería

$$\ddot{\mathbf{p}}_{ci} = \ddot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{w}}_i \times \mathbf{r}_i + \mathbf{w}_i \times (\mathbf{w}_i \times \mathbf{r}_i) \quad (2.3.7)$$

donde  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición del centro de masas del eslabón  $i$  con respecto a el marco de referencia  $i$ , como lo define la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_i.$$

Con referencia a la figura (2.3.1), donde definimos a  $O_i$  como el origen del marco de referencia del  $i^{\text{ésimo}}$  eslabón, las ecuaciones de Newton definen un balance de fuerzas actuando sobre el eslabón  $i$  en la forma de

$$\gamma_i = m_i \ddot{p}_{ci} - m_i g + \gamma_{i+1} \quad (2.3.8)$$

donde  $\gamma_i$  denota la fuerza ejercida por el eslabón  $i - 1$  sobre el eslabón  $i$  en el origen del marco de referencia del eslabón  $i$ . Sustituyendo (2.3.7) en (2.3.8) nos da

$$\gamma_i = m_i \ddot{p}_i + \dot{w}_i \times m_i r_i + w_i \times (w_i \times m_i r_i) + \gamma_{i+1}.$$

El efecto de  $m_i g$  será automáticamente introducido tomando  $\ddot{p}_0 = -g$ .

Las ecuaciones de Euler también ofrecen un equilibrio de momentos actuando sobre el eslabón  $i$  (referido al centro de masas) en la forma

$$\mu_i = I_i \dot{w}_i + w_i \times \left( \hat{I}_i w_i \right) + r_i \times \gamma_i + \mu_{i+1} + p_{ci,i+1} \times \gamma_{i+1} \quad (2.3.9)$$

donde  $I_i$  es el tensor de inercia del eslabón  $i$  con respecto de su centro de masas. Aplicando el *teorema de Steiner* ( ver **Glosario**), el tensor de inercia respecto al origen del marco de referencia  $i$  está dado por

$$I_i = I_i + m_i S^T(r_i) S(r_i)$$

entonces (2.3.9), vía (2.3.7), puede ser reescrita como

$$\mu_i = I_i \dot{w}_i + w_i \times (I_i w_i) + m_i r_i \ddot{p}_i + \mu_{i+1} + p_{i,i+1} \times \gamma_{i+1}.$$

El esfuerzo de torsión (torca)  $u_i$  puede ser obtenido proyectando  $\gamma_i(\mu_i)$  sobre el eje  $Z_i$ , como

$$u_i = \left( \xi_i \gamma_i + \bar{\xi}_i \mu_i \right)^T a_i + I_{mi} \ddot{q}_i + F_{si} \text{sign}(\dot{q}_i) + F_{vi} \dot{q}_i$$

donde las contribuciones del motor de inercia y la fricción de las uniones se han agregado.

### 2.3.3. Dinámica Directa y Dinámica Inversa

Obtener el modelo dinámico de un manipulador robótico es de interés, tanto para simulación como para el control de dicho dispositivo. Para lo primero necesitamos las denominadas *dinámicas directas* del manipulador, esto es que para un conjunto conocido de torcas de unión  $u_i$ , se obtengan las posiciones, velocidades y aceleraciones resultantes. Para lo segundo, nos conciernen las *dinámicas inversas* del manipulador que, contrario a las dinámicas directas, de un conjunto conocido de posiciones, velocidades y aceleraciones de las uniones se obtienen las torcas de uniones resultantes.

El proceso computacional para la dinámica directa es, en general, mayor que la carga de cómputo para obtener la dinámica inversa de un manipulador. Esto es porque el modelado dinámico da naturalmente el mapeo de posiciones, velocidades y aceleraciones de unión a las torcas de unión, como se muestra en la ecuación (2.3.4).

En cambio para la dinámica inversa suele procederse de la siguiente manera: de la ecuación (2.3.4) se despeja

$$\ddot{q} = H(q)^{-1} \left( u - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) \right) \quad (2.3.10)$$

de esta ecuación podemos obtener una representación en espacio de estados como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ -H(q_1)^{-1} (C(q_1, q_2) q_2 + g(q_1)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H(q_1)^{-1} u \end{bmatrix}$$

donde  $q_1$  es el vector de posiciones angulares ( $n \times 1$ ) de las uniones y  $q_2$  es el vector de velocidades angulares ( $n \times 1$ ), esta representación nos provee de  $2n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden ser integradas en el tiempo bajo condiciones iniciales conocidas para obtener los estados  $q_1$  y  $q_2$ .

Los términos  $H(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$  pueden ser obtenidos por medio de las ecuaciones de Lagrange, pero un método más eficiente consiste en usar las ecuaciones de Newton-Euler de la siguiente manera: los vectores  $C(q, \dot{q})$  y  $g(q)$  se obtienen de computar  $u$  con  $\ddot{q} = 0$ . Entonces, las columnas  $h_i$  de la matriz  $H(q)$  se obtienen como la torca  $u$  con  $\hat{g} = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ ,  $\dot{q}_i = 1$  y  $\dot{q}_j = 0$  para  $j \neq i$ . Iterando este procedimiento para  $i = 1, \dots, n$  podemos obtener toda la matriz de inercia.



# Capítulo 3

## Algoritmos de Control

### 3.1. Introducción

En esta sección del documento se analizarán dos algoritmos de control basados en técnicas de modos deslizantes para una clase de sistemas no lineales en la forma No-lineal Controlable por Bloques (forma NCB). El objetivo de estos algoritmos es que el vector de salida del sistema logre seguimiento de trayectorias de forma satisfactoria.

Primero se mostrará la estructura de la forma NCB, continuando con las asunciones que se tomarán en cuenta para el desarrollo de la estrategia de control, y por último se mostrarán los algoritmos CMDA (Control por Modos Deslizantes Anidados [11]) y CMDIA (Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados [12]).

### 3.2. Forma No-Lineal Controlable por Bloques

Para un sistema MIMO no lineal perturbado presentado en la forma NCB tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 + \lambda_1(x_1, t) \\
&\vdots \\
x_{r-1} &= f_{r-1}(\bar{x}_i) + b_{r-1}(\bar{x}_{r-1})x_r + \lambda_{r-1}(\bar{x}_{r-1}, t) \\
\dot{x}_r &= f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r)u + \lambda_r(\bar{x}_r, t)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$y = h(X) \tag{3.2.2a}$$

donde  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)^T$ ,  $x_i \in X_i \subset \mathfrak{R}^{n_i}$

Los  $f_i(\cdot)$  y  $b_i(\cdot)$  son campos vectores suaves definidos en  $X_i$  y  $d_i(\cdot)$  es un término de perturbaciones debido a variaciones paramétricas, incertidumbre del modelado y perturbaciones externas.

La ecuación (3.2.2a) define el vector de salida del sistema. El vector  $\lambda_r$  es denominado comúnmente como *perturbación matched* debido a que se encuentra dentro del subespacio de control y los términos  $\lambda_i(\cdot)$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ , son conocidos como *perturbaciones no matched* debido a que se encuentran fuera de este subespacio. El subespacio de control es el generado por las columnas de  $b_r(\cdot)$ , y se denomina a una perturbación matched ya que el vector de control  $u$  puede afectar a todos los componentes de la perturbación  $\lambda_r$  mediante la matriz de control  $b_r(\cdot)$ .

La estructura del sistema está definida por los enteros  $(n_1, \dots, n_r)$  y cumplen con la condiciones

$$n_1 \leq \dots \leq n_r \tag{3.2.3}$$

$$\sum_{i=1}^r n_i = n \tag{3.2.4}$$

donde  $n$  es el orden total del sistema.

### 3.3. Asunciones

Se mencionarán las siguientes asunciones que serán fundamentales para poder llevar a cabo las estrategias de control.

1.- La función signo puede ser aproximada por medio de la función sigmoïdal de acuerdo a lo mostrado por el límite



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \text{sigm}(\varepsilon S) = \text{sign}(S) \quad (3.3.1)$$

donde

$$\text{sigm}(\varepsilon S) = \tanh(\varepsilon S).$$

La figura 3.3.1 muestra esta aproximación para varios valores de  $\varepsilon$ .

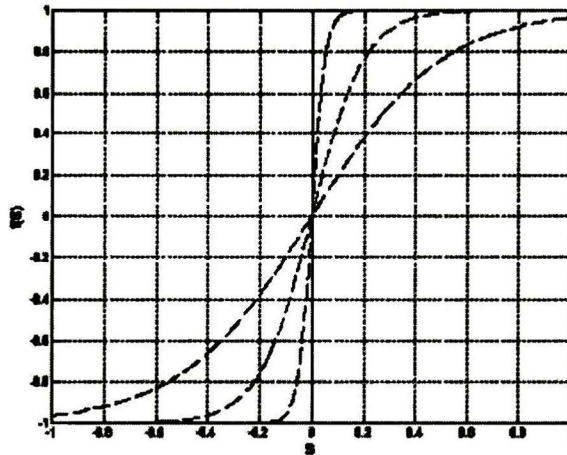


Figura 3.3.1: Función sigmoide para varios valores de  $\varepsilon$

- 2.-  $\text{rango}(b_i(\cdot)) = n_i, \forall t \geq 0$ .
- 3.-  $\|\lambda_i(\bar{x}_i)\| \leq \beta_i(\bar{x}_i) > 0$ , donde  $\beta_i(\bar{x}_i)$  es una función positiva conocida para  $i = 1, \dots, r$ .

### 3.4. Modos Deslizantes Anidados (MDA)

Los Modos Deslizantes juegan un papel muy importante en la teoría de Control de Estructura Variable, la idea principal es forzar la ocurrencia de Modos Deslizantes en alguna variedad o superficie del espacio de estados. Por lo general estas superficies se diseñan como la intersección de hiperplanos en

el espacio de estados, de tal forma que una vez que el sistema ha alcanzado esta superficie, la estructura del lazo de retroalimentación se adapta para "deslizar" el estado del sistema por esta superficie, entonces la respuesta del sistema depende solo del gradiente de la *superficie deslizante* y permanece insensible a las perturbaciones que cumplen con la *condición matching* (Ver sección 2.2).

Sin embargo el control por Modos Deslizantes no es robusto a las *perturbaciones no matched*, ese es el punto que atacan los Modos Deslizantes Anidados para los sistemas en la forma NCB.

El principio es aprovechar la estructura de dichos sistemas, de tal manera que en el  $i^{\text{ésimo}}$  bloque del sistema,  $i = 1, \dots, r - 1$ , se toma al vector  $x_{i+1}$  como un vector de control ficticio, pseudocontrol o control virtual; el cual nos ayudará a definir la dinámica de dicho bloque y la referencia para el bloque siguiente. Este proceso se hace de forma iterativa hasta llegar al  $r^{\text{ésimo}}$  bloque donde aparece el vector de control real  $u$ . De esta manera las perturbaciones fuera del subespacio generado por  $u$ , se encuentran dentro del subespacio generado por sus respectivos controles virtuales y pueden ser rechazadas. Esto será tratado en detalle a continuación.

### 3.4.1. Control por Modos Deslizantes Anidados

Para este algoritmo procederemos con el control por bloques (Block Control [13]) y consideramos una planta en la forma NCB. Iremos definiendo el procedimiento por pasos:

**Paso 1** Para el primer bloque del sistema (3.2.1) tenemos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 + \lambda_1(x_1, t) \quad (3.4.1)$$

definimos una superficie pseudodeslizante (*ver Glosario*) como

$$s_1 = x_1 - x_{1,ref} \quad (3.4.2)$$

donde  $x_{1,ref}$  es el vector de referencias a seguir, por lo tanto la superficie es el error de seguimiento. Derivamos (3.4.2) entonces

$$\dot{s}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 + \lambda_1(x_1, t) - \dot{x}_{1,ref}. \quad (3.4.3)$$

Definimos a la variable  $x_2$  como el control virtual para este bloque para, de esta forma, modelar la dinámica de este bloque proponiendo su referencia  $x_{2,ref}$  y considerar a la perturbación  $\lambda_1(x_1, t)$  como matched. Para esto necesitamos definir la superficie para el siguiente bloque

$$s_2 = x_2 - x_{2,ref}. \quad (3.4.4)$$

De esta expresión despejamos  $x_2$  y la sustituimos en (3.4.3) resultando

$$\dot{s}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)s_2 + b_1(x_1)x_{2,ref} + \lambda_1(x_1, t) - \dot{x}_{1,ref}. \quad (3.4.5)$$

Entonces proponemos

$$x_{2,ref} = -b_1(x_1)^{-1} \left( f_1(x_1) - \dot{x}_{1,ref} + k_1 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_1) \right) \quad (3.4.6)$$

$$k_1 > 0. \quad (3.4.7)$$

Sustituyendo (3.4.6) en (3.4.5) tenemos

$$\dot{s}_1 = b_1(x_1)s_2 + \lambda_1(x_1, t) - k_1 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_1).$$

**Paso i ( i = 2, ..., r-1 )** Para el  $i^{\text{ésimo}}$  bloque

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \lambda(\bar{x}_i, t) \quad (3.4.8)$$

definimos la  $i^{\text{ésima}}$  superficie pseudodeslizante

$$s_i = x_i - x_{i,ref}. \quad (3.4.9)$$

Derivamos (3.4.9), entonces

$$\dot{s}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) - \dot{x}_{i,ref}. \quad (3.4.10)$$

Definimos la superficie para el siguiente bloque

$$s_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+1,ref}. \quad (3.4.11)$$

Despejamos  $x_{i+1}$  y la sustituimos en (3.4.10) resultando

$$\dot{s}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i) s_{i+1} + b_i(\bar{x}_i) x_{i+1,ref} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) - \dot{x}_{i,ref}. \quad (3.4.12)$$

Entonces proponemos

$$x_{i+1,ref} = -b_i(\bar{x}_i)^{-1} \left( f_i(\bar{x}_i) - x_{i,ref} + k_i \text{sigm}(\varepsilon_i s_i) \right) \quad (3.4.13)$$

$$k_i > 0. \quad (3.4.14)$$

Sustituyendo (3.4.13) en (3.4.12) resulta

$$\dot{s}_i = b_i(\bar{x}_i) s_{i+1} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) - k_i \text{sigm}(\varepsilon_i s_i).$$

**Paso r** Para el  $r^{\text{ésimo}}$  y último bloque

$$\dot{x}_r = f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r) u + \lambda_r(\bar{x}_r, t) \quad (3.4.15)$$

donde aparece la variable de control real  $u$ , definimos la superficie deslizante

$$s_r = x_r - x_{r,ref}. \quad (3.4.16)$$

Derivamos esta expresión

$$\dot{s}_r = f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r) u + \lambda_r(\bar{x}_r, t) - \dot{x}_{r,ref} \quad (3.4.17)$$

y definimos el control

$$u = b_r(\bar{x}_r)^{-1} \left( -f_r(\bar{x}_r) - k_r \text{sign}(\varepsilon_r s_r) + x_{r,ref} \right) \quad (3.4.18)$$

$$k_r > 0. \quad (3.4.19)$$

sustituimos (3.4.18) en (3.4.17) y obtenemos

$$\dot{s}_r = \lambda_r(\bar{x}_r, t) - k_r \text{sign}(\varepsilon_r s_r),$$

con lo que termina el procedimiento.

### 3.4.2. Análisis de estabilidad del CMDA

Se puede observar que si agrupamos las derivadas de las superficies en lazo cerrado tenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_1 &= -k_1 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_1) + b_1(x_1) s_2 + \lambda_1(x_1, t) \\
 &\vdots \\
 s_{r-1} &= -k_{r-1} \text{sigm}(\varepsilon_{r-1} s_{r-1}) + b_{r-1}(\bar{x}_{r-1}) s_r + \lambda_{r-1}(\bar{x}_{r-1}, t) \\
 \dot{s}_r &= -k_r \text{sign}(s_r) + \lambda_r(\bar{x}_r, t).
 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Ahora si logramos demostrar que el sistema (3.4.20) tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen, esto es que todas las superficies (pseudodeslizantes o deslizantes) convergen a cero en tiempo finito, demostraremos que  $x_i \rightarrow x_{i,ref}$  para  $i = 1, \dots, r$ , asegurando así el seguimiento de trayectorias.

Para demostrar lo anterior proponemos la siguiente función de Lyapunov [15] para el último bloque

$$V_r = \frac{1}{2} s_r^T s_r \tag{3.4.21}$$

entonces derivamos a  $V_r$  y obtenemos

$$\dot{V}_r = s_r^T \dot{s}_r. \tag{3.4.22}$$

Entonces sustituyendo (3.4.20) en (3.4.22) nos queda

$$\dot{V}_r = s_r^T (-k_r \text{sign}(s_r) + \lambda_r(\bar{x}_r, t)) \tag{3.4.23}$$

$$< \|s_r\| (-k_r + \|\lambda_r(\bar{x}_r, t)\|). \tag{3.4.24}$$

Definimos

$$k_r > \beta_r$$

y debido a la asunción 3, nos queda

$$\dot{V}_r < 0$$

entonces  $s_r \rightarrow 0$  en tiempo finito. Cuando esto sucede tenemos

$$s_{r-1} = -k_{r-1} \text{sigm}(\varepsilon_{r-1} s_{r-1}) + \lambda_{r-1}(\bar{x}_{r-1}, t). \quad (3.4.25)$$

Entonces, de forma similar al bloque anterior, proponemos

$$V_{r-1} = \frac{1}{2} s_{r-1}^T s_{r-1} \quad (3.4.26)$$

derivamos esta expresión, definimos una  $\varepsilon_{r-1}$  para cumplir la asunción 1 y definimos

$$k_{r-1} > \beta_{r-1}.$$

Entonces logramos que

$$\dot{V}_{r-1} < 0$$

entonces  $s_{r-1} \rightarrow 0$  en tiempo finito. Y así sucesivamente hasta lograr que

$s_i \rightarrow 0$  en tiempo finito, definiendo

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^T s_i, \quad k_i > \beta_i, \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (3.4.27)$$

Demostrando así que con esta estrategia de control logramos el seguimiento de trayectorias, ya que existe una vecindad atractiva del origen del sistema (3.4.20).

Con este resultado terminamos la sección referente al algoritmo de control por Modos Deslizantes Anidados y pasamos al siguiente algoritmo que será explicado a continuación.

### 3.5. Modos Deslizantes Integrales Anidados

Este algoritmo es la combinación de Modos Deslizantes Anidados y de Modos Deslizantes Integrales [13], de tal forma que se obtengan los beneficios de ambos enfoques: la robustez durante toda la respuesta del sistema del enfoque integral y la robustez a perturbaciones no matched del enfoque anidado. También, con ayuda del enfoque integral, se pueden reducir las ganancias de los controles discontinuos, en comparación con el control por Modos Deslizantes Anidados.

Antes de empezar con el desarrollo de este algoritmo, trataremos brevemente el enfoque de Modos Deslizantes Integrales, como fundamento de los MDIA.

### 3.5.1. Modos Deslizantes Integrales

Durante la respuesta del sistema a un controlador de Modos Deslizantes se pueden definir dos etapas: la *Etapa de Aproximación* y la *Etapa Deslizante*.

La etapa de aproximación se presenta antes que la deslizante, y es cuando la respuesta del sistema se acerca a la superficie, en esta etapa el sistema no es robusto a las perturbaciones externas. Por lo general para darle robustez durante toda su respuesta se implementa Control de Alta Ganancia, pero inevitablemente se compromete la estabilidad del sistema limitando así la aplicación de este tipo de control.

Otra alternativa para darle robustez durante toda la respuesta al sistema, es usar el concepto de Modos Deslizantes Integrales (MDI). La base de este tipo de modos deslizantes es la eliminación de la etapa de aproximación asegurando así robustez durante toda la respuesta del sistema. El diseño del controlador por MDI presupone la existencia de un controlador diseñado con anterioridad para la planta nominal (sin perturbaciones), agregándole a este controlador existente un término discontinuo para forzar la ocurrencia de modos deslizantes y así obtener una respuesta como si la planta fuera la nominal con su controlador en lazo cerrado, a pesar de las perturbaciones externas y variaciones paramétricas del sistema. A continuación trataremos en más detalle el diseño de este tipo de controlador.

#### Principios de Diseño del Controlador por MDI

Para un sistema como

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + \lambda(x, t)$$

donde  $x \in X_n \subset \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados,  $B(x)$  es la matriz de control y  $\lambda(x, t)$  es el vector de *perturbaciones matched* que contiene las perturbaciones debidas a factores externos, variaciones paramétricas e incertidumbre de modelado. Se asume este vector  $\lambda(x, t)$  como acotado, y cuya cota puede ser definida como:

$$\|\lambda(x, t)\| \leq h^+(x, t) \quad (3.5.1)$$

donde  $h^+(x, t)$  es una función escalar positiva conocida. Entonces definimos

$$u = u_0 + u_1 \quad (3.5.2)$$

donde  $u_0$  es el control prediseñado para el sistema nominal, y  $u_1$  es el control discontinuo que diseñaremos para rechazar la perturbación. Entonces

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u_0 + B(x)u_1 + \lambda(x, t). \quad (3.5.3)$$

Ahora definimos la superficie

$$\sigma = s(x) + z \quad (3.5.4)$$

donde el término  $s(x)$  es una función de los estados del sistema (definida por algún criterio) y  $z$  es el término integral que será determinado después. Entonces si derivamos (3.5.4) y sustituimos (3.5.2) tenemos

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial s}{\partial x} (f(x) + B(x)(u_0 + u_1) + \lambda(x, t)) + \dot{z}$$

y si definimos

$$\dot{z} = \frac{\partial s}{\partial x} (-f(x) - B(x)u_0)$$

entonces

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial s}{\partial x} (B(x)u_1 + \lambda(x, t)).$$

Y si definimos

$$z(0) = -s(0)$$

y

$$u_1 = -M(x)B(x)^{-1} \text{sign}(s)$$

donde  $M(x)$  se escoge de tal forma que se force la ocurrencia de modos deslizantes por el control discontinuo  $u_1$ , además de que ocurran desde el primer instante ya que  $\sigma(0) = s(0) + z(0) = 0$ .

Por lo tanto



$$\begin{aligned}\sigma &= 0 \\ \dot{\sigma} &= 0\end{aligned}$$

entonces

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial s}{\partial x} (B(x) u_{1eq} + \lambda(x, t)) = 0$$

depejando

$$B(x) u_{1eq} = -\lambda(x, t) \quad (3.5.5)$$

sustituyendo (3.5.5) en (3.5.3) tenemos

$$\dot{x} = f(x) + B(x) u_0 \quad (3.5.6)$$

lo que es equivalente al sistema nominal con la señal de control  $u_0$ , el cual era nuestro objetivo.

### 3.5.2. Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados

Continuaremos con el procedimiento para diseñar un controlador por MDIA utilizando Block Control, cuyo objetivo es el seguimiento de trayectorias. Para cumplir dicho objetivo definiremos a las funciones  $s_i(x_i)$  como los errores de seguimiento del bloque  $i$ . Esto será ilustrado mejor en el algoritmo, al cual lo estructuraremos en pasos.

**Paso 1** Considerando el sistema en la forma NCB (3.2.1) tenemos para el primer bloque

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1) x_2 + \lambda_1(x_1, t) \quad (3.5.7)$$

definimos una superficie pseudodeslizante como

$$\sigma_1 = e_1 + z_1 \quad (3.5.8)$$

$$e_1 = x_1 - x_{1,ref}$$

donde  $x_{1,ref}$  es el vector de referencias a seguir,  $e_1$  es el error de seguimiento del primer bloque y  $z_1$  es el término integral.

Derivamos (3.5.8) entonces

$$\dot{\sigma}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)x_2 + \lambda_1(x_1, t) - \dot{x}_{1,ref} + \dot{z}_1. \quad (3.5.9)$$

Definimos a la variable  $x_2$  como el control virtual para este bloque. Para esto necesitamos definir la superficie para el siguiente bloque

$$\sigma_2 = e_2 + z_2 \quad (3.5.10)$$

$$e_2 = x_2 - x_{2,ref}. \quad (3.5.11)$$

Entonces definimos

$$x_{2,ref} = x_{20,ref} + x_{21,ref}. \quad (3.5.12)$$

Sustituyendo (3.5.12) en (3.5.11), sustituyendo el resultado en (3.5.10) y despejando  $x_2$  tenemos

$$x_2 = \sigma_2 - z_2 + x_{20,ref} + x_{21,ref}$$

y la expresión anterior la sustituimos en (3.5.9) obteniendo

$$\dot{\sigma}_1 = f_1(x_1) + b_1(x_1)(\sigma_2 - z_2 + x_{20,ref} + x_{21,ref}) + \lambda_1(x_1, t) - \dot{x}_{1,ref} + \dot{z}_1. \quad (3.5.13)$$

Entonces sabiendo que

$$e_2 = \sigma_2 - z_2$$

definimos

$$\dot{z}_1 = -f_1(x_1) - b_1(x_1)(e_2 + x_{20,ref}) + \dot{x}_{1,ref} \quad (3.5.14)$$

$$z_1(0) = -e_1(0) \quad (3.5.15)$$

proponemos el control nominal  $x_{20,ref}$ , para modelar la dinámica del bloque nominal, como

$$x_{20,ref} = b_1(x_1)^{-1} \left( -f_1(x_1) + \dot{x}_{1,ref} - c_1 e_1 \right).$$

Entonces con (3.5.14) la ecuación (3.5.13) se reduce a

$$\dot{\sigma}_1 = b_1(x_1) x_{21,ref} + \lambda_1(x_1, t). \quad (3.5.16)$$

Y por último definimos

$$x_{21,ref} = -k_1 b_1(x_1)^{-1} \text{sigm}(\varepsilon_1 \sigma_1)$$

para definir a (3.5.12).

**Paso i (para  $i=2, \dots, r-1$ )** Para el  $i^{\text{ésimo}}$  bloque

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i) x_{i+1} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) \quad (3.5.17)$$

definimos su superficie pseudodeslizante como

$$\sigma_i = e_i + z_i \quad (3.5.18)$$

$$e_i = x_i - x_{i,ref}.$$

Derivamos (3.5.18) entonces

$$\dot{\sigma}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i) x_{i+1} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) - \dot{x}_{i,ref} + \dot{z}_i. \quad (3.5.19)$$

Tomamos a la variable  $x_{i+1}$  como el control virtual para este bloque y definimos la superficie para el siguiente bloque como

$$\sigma_{i+1} = e_{i+1} + z_{i+1} \quad (3.5.20)$$

$$e_{i+1} = x_{i+1} - x_{i+1,ref}. \quad (3.5.21)$$

Entonces definimos

$$x_{i+1,ref} = x_{(i+1)0,ref} + x_{(i+1)1,ref}. \quad (3.5.22)$$

Sustituyendo (3.5.22) en (3.5.21), luego en (3.5.18) y despejando  $x_{i+1}$  tenemos

$$x_{i+1} = \sigma_{i+1} - z_{i+1} + x_{(i+1)0,ref} + x_{(i+1)1,ref} \quad (3.5.23)$$

y la expresión anterior la sustituimos en (3.5.19) obteniendo

$$\dot{\sigma}_i = f_i(\bar{x}_i) + b_i(\bar{x}_i) (\sigma_{i+1} - z_{i+1} + x_{(i+1)0,ref} + x_{(i+1)1,ref}) \quad (3.5.24)$$

$$+ \lambda_i(\bar{x}_i, t) - \dot{x}_{i,ref} + \dot{z}_i. \quad (3.5.25)$$

Entonces sabiendo que

$$e_{i+1} = \sigma_{i+1} - z_{i+1}$$

definimos

$$\dot{z}_i = -f_i(\bar{x}_i) - b_i(\bar{x}_i) (e_{i+1} + x_{(i+1)0,ref}) + \dot{x}_{i,ref} \quad (3.5.26)$$

$$z_i(0) = -e_i(0)$$

y proponemos

$$x_{(i+1)0,ref} = b_i(\bar{x}_i)^{-1} \left( -f_i(\bar{x}_i) + \dot{x}_{i,ref} - c_i e_i \right)$$

entonces la ecuación (3.5.24) se reduce a

$$\dot{\sigma}_i = b_i(\bar{x}_i) x_{(i+1)1,ref} + \lambda_i(\bar{x}_i, t) \quad (3.5.27)$$

Y por último definimos

$$x_{(i+1)1,ref} = -k_i b_i(\bar{x}_i)^{-1} \text{sigm}(\varepsilon_i \sigma_i)$$

para obtener el término (3.5.22) completo.

**Paso r** Para el  $r^{\text{ésimo}}$  y último bloque

$$\dot{x}_r = f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r) u + \lambda_r(\bar{x}_r, t) \quad (3.5.28)$$

donde aparece la variable de control real  $u$ . Del último de los pasos anteriores tenemos

$$\sigma_r = e_r + z_r \quad (3.5.29)$$

$$e_r = x_r - x_{r,ref} \quad (3.5.30)$$

la cual es una superficie deslizante. Entonces definimos

$$u = u_0 + u_1. \quad (3.5.31)$$

Si sustituimos (3.5.30) en (3.5.29), derivamos y en el resultado sustituimos (3.5.31) tenemos

$$\dot{s}_r = f_r(\bar{x}_r) + b_r(\bar{x}_r)(u_0 + u_1) + \lambda_r(\bar{x}_r, t) - \dot{x}_{r,ref} + \dot{z}_r.$$

Entonces definimos

$$\dot{z}_r = -f_r(\bar{x}_r) - b_r(\bar{x}_r)u_0 + \dot{x}_{r,ref} \quad (3.5.32)$$

para la cual proponemos

$$u_0 = b_r(\bar{x}_r)^{-1} \left( -f_r(\bar{x}_r) + \dot{x}_{r,ref} - c_r e_r \right)$$

y nos queda

$$\dot{\sigma}_r = b_r(\bar{x}_r)u_1 + \lambda_r(\bar{x}_r, t). \quad (3.5.33)$$

Entonces diseñamos el control  $u_1$  como

$$u_1 = -b_r(\bar{x}_r)^{-1} k_r \text{sign}(\varepsilon_r \sigma_r) \quad (3.5.34)$$

y obtenemos la ley de control

$$u = b_r(\bar{x}_r)^{-1} \left( -f_r(\bar{x}_r) + \dot{x}_{r,ref} - c_r e_r - k_r \text{sign}(\varepsilon_r \sigma_r) \right)$$

para finalizar el algoritmo.

### 3.5.3. Análisis de Estabilidad del CMDIA

Si obtenemos la dinámica de las superficies en lazo cerrado nos queda

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= -k_1 \text{sign}(\varepsilon_1 \sigma_1) + \lambda_1(x_1, t) \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_i &= -k_{r-1} \text{sign}(\varepsilon_{r-1} \sigma_{r-1}) + \lambda_{r-1}(\bar{x}_{r-1}, t) \\ \dot{\sigma}_r &= -k_r \text{sign}(\varepsilon_r \sigma_r) + \lambda_r(\bar{x}_r, t). \end{aligned} \quad (3.5.35)$$

Para probar que se rechazan las perturbaciones  $\lambda_i$ 's, tenemos que demostrar que las superficies deslizantes convergen a cero en tiempo finito. Para esto proponemos una función de Lyapunov [15] como sigue

$$V = \frac{1}{2} S^T S$$

donde  $S$  está definida por

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_r \end{bmatrix}$$

Entonces si derivamos esta función de Lyapunov tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S^T \dot{S} \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} [\sigma_i^T (-k_i \text{sigm}(\varepsilon_i \sigma_i) + \lambda_i(\bar{x}_i, t))] + \sigma_r^T (-k_r \text{sign}(\varepsilon_r \sigma_r) + \lambda_r(\bar{x}_r, t)) \end{aligned}$$

Si nos apoyamos en la asunción 1 y elegimos un conjunto de  $\varepsilon_i$ 's lo suficientemente grande, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^r [\sigma_i^T (-k_i \text{sign}(\varepsilon_i \sigma_i) + \lambda_i(\bar{x}_i, t))]$$

por lo que

$$\dot{V} < \sum_{i=1}^r [|\sigma_i| (-k_i + \|\lambda_i(\bar{x}_i, t)\|)]$$

entonces con la asunción 3 podemos establecer que

$$\dot{V} < \sum_{i=1}^r [|\sigma_i| (-k_i + \beta_i)]$$

Y si definimos que

$$k_i > \beta_i, \quad \forall i = 1, \dots, r$$

entonces

$$\dot{V} < 0$$

por lo tanto las superficies convergen a cero y el sistema entra en Modos Deslizantes en tiempo finito. Cuando esto sucede tenemos:

$$\begin{aligned} s_i &= 0 \\ \dot{s}_i &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Así de las ecuaciones (3.5.16), (3.5.27) y (3.5.33) concluimos que

$$b_i(\bar{x}_i) x_{i1,ref} = -\lambda_i(\bar{x}_i) \quad \forall i = 1, \dots, r-1$$

$$b_r(\bar{x}_r) u_1 = -\lambda_r(\bar{x}_r)$$

con lo que se rechazan las perturbaciones del sistema original. Ahora utilizando las derivadas de las  $z_i$  (3.5.14, 3.5.26 y 3.5.32) junto con las ecuaciones (3.5.16), (3.5.27), (3.5.33) y (??) podemos definir la dinámica de las variables de error de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -c_1 e_1 + b_1(x_1) e_2 \\ &\vdots \\ e_{r-1} &= -c_{r-1} e_{r-1} + b_{r-1}(\bar{x}_{r-1}) e_r \\ \dot{e}_r &= -c_r e_r \end{aligned}$$

Ahora demostraremos que este sistema de error tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable. Entonces proponemos la siguiente función de Lyapunov para el último bloque

$$V_{er} = \frac{1}{2} e_r^T e_r$$

Si derivamos  $V_{er}$  obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{V}_{er} &= e_r^T \dot{e}_r \\ &= e_r^T (-c_r e_r) \\ &= -c_r \|e_r\|^2\end{aligned}$$

entonces

$$V_{er} < 0$$

por lo que  $e_r \rightarrow 0$  en tiempo finito. Cuando esto sucede tenemos

$$e_{r-1} = -c_{r-1} e_{r-1}.$$

Definimos

$$V_{er} = \frac{1}{2} e_r^T e_r$$

y con el mismo procedimiento anterior podemos demostrar que

$$V_{e(r-1)} < 0,$$

por lo que  $e_{r-1} \rightarrow 0$  en tiempo finito, y así sucesivamente. Entonces todas las variables de error convergen a cero en tiempo finito, logrando así el seguimiento de las trayectorias y cumpliendo los objetivos de control planteados.



# Capítulo 4

## Control de Manipuladores Robóticos

### 4.1. Introducción

En esta parte del documento se desarrollará un controlador por Modos Deslizantes Anidados y uno por Modos Deslizantes Integrales Anidados para manipuladores robóticos rígidos seriales de  $n$  grados de libertad. Para empezar con el diseño de este controlador debemos definir primero un modelo matemático de la planta a controlar, en este caso nos interesa el modelo de la dinámica del sistema.

### 4.2. Modelo Dinámico de Manipuladores Robóticos

Para un manipulador de  $n$  grados de libertad como el de la figura 4.2.1 se tiene el siguiente modelo dinámico

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (4.2.1)$$

donde  $H(q)$  es la matriz de inercia ( $n \times n$ ) del manipulador la cual es simétrica y definida positiva,  $\tau$  es el vector de torca de las uniones ( $n \times 1$ ),  $g(q)$  es el vector de fuerzas gravitatorias ( $n \times 1$ ) y  $C(q, \dot{q})$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis.

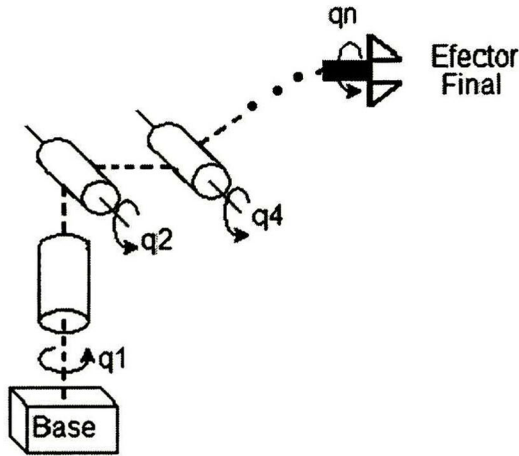


Figura 4.2.1: Manipulador de  $n$  grados de libertad

Para obtener una representación en espacios de estados de este modelo dinámico, definiremos las siguientes variables de estado

$x_{2i-1}$  es la posición angular del  $i$ -ésimo eslabón ( $q_i$ )

$x_{2i}$  es la velocidad angular del  $i$ -ésimo eslabón ( $\dot{q}_i$ )

para  $\forall i = 1, \dots, n$ . Eso nos dá  $2n$  ecuaciones diferenciales con la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \lambda_1(x_1, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{2n-1} &= x_{2n} + \lambda_{2n-1}(\bar{x}_{2n-1}, t) \\
 \dot{x}_2 &= f_1(\bar{x}_2) + b_1(\bar{x}_2)u + \lambda_2(\bar{x}_2, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{2n} &= f_n(\bar{x}_{2n}) + b_n(\bar{x}_{2n})u + \lambda_{2n}(\bar{x}_{2n}, t)
 \end{aligned}$$

donde  $f_i(\bar{x}_{2i})$  es la  $i^{\text{ésima}}$  fila del término  $H(q)^{-1}(-C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q))$ ,

$b_i(\bar{x}_{2i})$  es la  $i^{\text{ésima}}$  fila de  $H(q)^{-1}$ ,  $\lambda_i$  son las perturbaciones (matched para  $i = 1, 3, \dots, 2n - 1$  y no matched para  $i = 2, 4, \dots, 2n$ ) y  $u$  es el vector de torcas de las uniones que serían las entradas de nuestro modelo en espacio de estados.

Si definimos

$$y_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \end{bmatrix} \quad y_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}$$

y

$$\lambda_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{2n-1} \end{bmatrix} \quad y_{nm} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{2n} \end{bmatrix}$$

obtenemos una representación vectorizada en espacios de estados como

$$\dot{y}_1 = y_2 + \lambda_m \tag{4.2.2}$$

$$\dot{y}_2 = f(y_1, y_2) + b(y_1)u + \lambda_{nm} \tag{4.2.3}$$

La dimensión de los vectores  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\lambda_n$ ,  $\lambda_{nm}$ ,  $f(\cdot)$  y  $u$  es  $(n \times 1)$  y la matriz  $B$  tiene dimensiones  $(n \times n)$ . Nótese que la estructura de este modelo coincide con la Forma No Lineal Controlable por Bloques(3.2.1) descrita anteriormente, por lo tanto asumimos que

$$\begin{aligned} \|\lambda_m\| &< \beta_1 \\ \|\lambda_{nm}\| &< \beta_2 \end{aligned}$$

lo nos permitirá aplicar los algoritmos de CMDA y CMDIA en el manipulador.

### 4.3. Control por Modos Deslizantes Anidados (CMDA)

Basándonos en el modelo representado por (4.2.2) y (4.2.3), y en el algoritmo desarrollado en el capítulo anterior definimos

$$s_1 = y_1 - y_{1ref} \quad (4.3.1)$$

Donde  $y_{1ref}$  es el vector de referencias. Una manera de obtener este vector es por medio del posicionamiento deseado del efector final y luego la obtención de la cinemática inversa para dicha posición. Entonces si derivamos la ecuación (4.3.1) tenemos

$$\dot{s}_1 = \dot{y}_1 - \dot{y}_{1ref} + \lambda_m \quad (4.3.2)$$

Definimos la superficie para el siguiente bloque

$$s_2 = y_2 - y_{2ref} \quad (4.3.3)$$

Para utilizar a  $y_2$  como pseudocontrol del primer bloque tenemos que despejarla de la ecuación de la segunda superficie y sustituirla en (4.3.2) obteniendo

$$\dot{s}_1 = s_2 + y_{2ref} - y_{1ref} + \lambda_m \quad (4.3.4)$$

Entonces definimos

$$y_{2ref} = y_{1ref} - k_1 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_1)$$

Continuamos con el segundo bloque derivando la ecuación (4.3.3) y obteniendo

$$\dot{s}_2 = f(y_1, y_2) + b(y_1)u + \lambda_{nm} + \dot{y}_{2ref}$$

Donde

#### 4.4. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES INTEGRALES ANIDADOS41

$$\begin{aligned}
 y_{2ref} &= \dot{y}_{1ref} - k_1 \varepsilon_1 P (y_2 - y_{1ref} + \lambda_m) & (4.3.5) \\
 P &= \begin{bmatrix} 1 - \tanh^2(\varepsilon_1 s_{11}) & 0 \\ 0 & 1 - \tanh^2(\varepsilon_1 s_{12}) \end{bmatrix} \\
 s_1 &= \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definimos el control

$$U = b(y_1)^{-1} \left( -f(y_1, y_2) + \dot{y}_{1ref} - k_1 \varepsilon_1 P (y_2 - y_{1ref}) - k_2 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_2) \right)$$

Y definimos las ganancias de las funciones deslizantes (control discontinuo) como

$$\begin{aligned}
 k_1 &> \beta_1 \\
 k_2 &> \beta_2 + k_1 \varepsilon_1 \beta_1
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

para finalizar el diseño de este controlador.

### 4.4. Control por Modos Deslizantes Integrales Anidados

La idea de este controlador es la siguiente: además de rechazar las perturbaciones (matched y no matched) y de lograr seguimiento de trayectorias, reducir las ganancias de las funciones deslizantes. Esto se logra al introducir los términos integrales en el proceso de diseño. Entonces tomando como base el mismo modelo de la planta que el controlador anterior, definimos para el primer bloque

$$s_1 = e_1 + z_1 \tag{4.4.1}$$

$$e_1 = y_1 - y_{1ref} \tag{4.4.2}$$

Donde  $y_{1ref}$  es el vector de trayectorias a seguir. Derivando (4.4.1) tenemos

$$\dot{s}_1 = y_2 - y_{1ref} + \dot{z}_1 + \lambda_m \quad (4.4.3)$$

Usamos a  $y_2$  como pseudocontrol para modelar la dinámica de este bloque proponiendo

$$y_{2ref} = y_{2,0ref} + y_{2,1ref} \quad (4.4.4)$$

Para esto definimos la superficie para el segundo bloque

$$s_2 = e_2 + z_2 \quad (4.4.5)$$

$$e_2 = y_2 - y_{2ref} \quad (4.4.6)$$

Sustituimos (4.4.6) en (4.4.5) y del resultado despejamos  $y_2$ , obteniendo

$$y_2 = s_2 - z_2 + y_{2ref} \quad (4.4.7)$$

Ahora sustituyendo (4.4.4) en (4.4.7) y el resultado lo sustituimos en (4.4.3), para obtener

$$\dot{s}_1 = s_2 - z_2 + y_{2,0ref} + y_{2,1ref} - y_{1ref} + \dot{z}_1 + \lambda_m \quad (4.4.8)$$

de (4.4.5) sabemos que

$$e_2 = s_2 - z_2$$

entonces (4.4.8) se reduce a

$$\dot{s}_1 = e_2 + y_{2,0ref} + y_{2,1ref} - y_{1ref} + \dot{z}_1 + \lambda_m \quad (4.4.9)$$

Definimos

$$\dot{z}_1 = -e_2 + y_{1ref} - y_{2,0ref}$$

Entonces proponemos

$$y_{2,0ref} = y_{1ref} - c_1 e_1$$

por lo tanto la ecuación (4.4.8) nos queda como

$$\dot{s}_1 = y_{2,1ref} + \lambda_m$$

#### 4.4. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES INTEGRALES ANIDADOS 43

y proponemos

$$y_{2,1ref} = -k_1 \text{sigm}(\varepsilon_1 s_1)$$

Ahora derivando la superficie del segundo bloque tenemos

$$\dot{s}_2 = f(y_1, y_2) + b(y_1)u - y_{2ref} + \dot{z}_2 + \lambda_{nm} \quad (4.4.10)$$

Donde  $y_{2ref}$  corresponde a la ecuación (4.3.5). Proponemos

$$u = u_0 + u_1$$

y sustituimos en (4.4.10), entonces nos queda

$$\dot{s}_2 = f(y_1, y_2) + b(y_1)u_0 + b(y_1)u_1 - y_{2ref} + \dot{z}_2 + \lambda_{nm} \quad (4.4.11)$$

Definimos

$$\dot{z}_2 = -f(y_1, y_2) - b(y_1)u_0 + y_{2ref}$$

y proponemos

$$u_0 = b(y_1)^{-1} \left( -f(y_1, y_2) + y_{2ref} - c_2 e_2 \right)$$

con lo que (4.4.11) se reduce a

$$\dot{s}_2 = b(y_1)u_1 + \lambda_{nm}$$

Entonces proponemos

$$u_1 = -k_2 b(y_1)^{-1} \text{sigm}(\varepsilon_2 s_2)$$

con las ganancias de las funciones deslizantes definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} k_1 &> \beta_1 \\ k_2 &> \beta_2 \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

finalizando así el diseño del controlador.

## 4.5. Simulaciones

En la realización de las simulaciones de los controladores diseñados se utilizó el modelo de un robot manipulador serial planar de 2 grados de libertad con uniones revolutivas, el desarrollo de dicho modelo se puede encontrar en el **apéndice a**. Este modelo se resume en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_m \\ \dot{y}_2 &= f(y_1, y_2) + b(y_1)u + \lambda_{nm} \end{aligned}$$

Para todas las simulaciones se utilizaron los siguientes parámetros del manipulador,

$$M1 = 10 \quad M2 = 1 \quad L1 = 1 \quad L2 = 1$$

, donde  $M_i$  es la masa del  $i^{\text{ésimo}}$  eslabón y  $L_i$  es su longitud, también se utilizaron los vectores de perturbaciones siguientes

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2\sin(\frac{1}{2}t) \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 5\cos(2t) \\ 5 + 3\sin(t) \end{bmatrix}$$

, las *variaciones paramétricas*,

$$M1 = +20\% \quad M2 = -35\% \quad L1 = +40\% \quad L2 = -15\%$$

y el vector de referencias.

$$y_{1ref} = \begin{bmatrix} 2\sin(2t) \\ 2 + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

### 4.5.1. Resultados para CMDA

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones del control por Modos Deslizantes Anidados utilizando los siguientes parámetros de control

$$\varepsilon = 20 \quad k_1 = 8 \quad k_2 = 500$$



En la figura 4.5.1 se muestra la gráfica de las señales  $x_1$  (posición del primer eslabón) y su referencia.

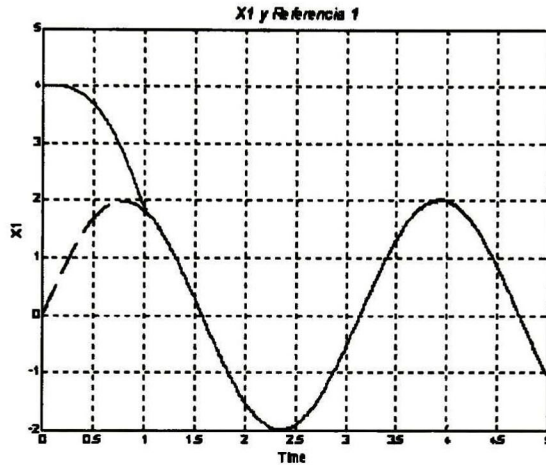


Figura 4.5.1: Variable de estado  $x_1$  y  $x_{1ref}$  (CMDA)

En la figura 4.5.2 se aprecia la gráfica del estado  $x_3$  y su referencia. En las 2 gráficas anteriores podemos observar que se logra el seguimiento de trayectorias en tiempo finito.

En la figura 4.5.3 se observan las señales de error y como convergen a cero.

En la figura 4.5.4 se muestran las velocidades angulares de los eslabones.

En la figura 4.5.5 se puede observar el retrato de fase de las superficies deslizantes (que en el caso del CMDA son las señales de error). Por último tenemos en la figura 4.5.6 las señales de control del CMDA.

#### 4.5.2. Resultados para CMDIA

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones del control por Modos Deslizantes Integrales Anidados utilizando los siguientes parámetros de control

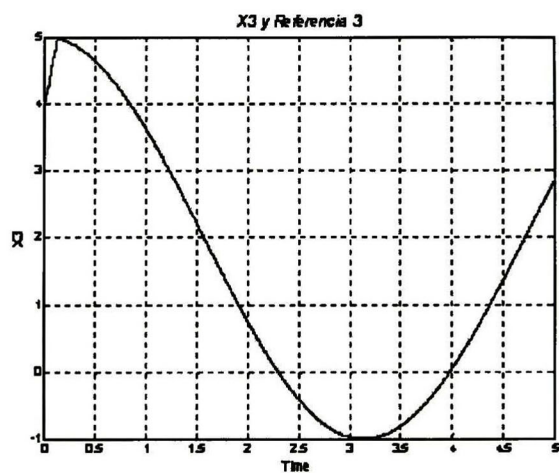
Figura 4.5.2: Variable  $x_3$  y su referencia (CMDA)

Figura 4.5.3: Superficies Deslizantes (CMDA)

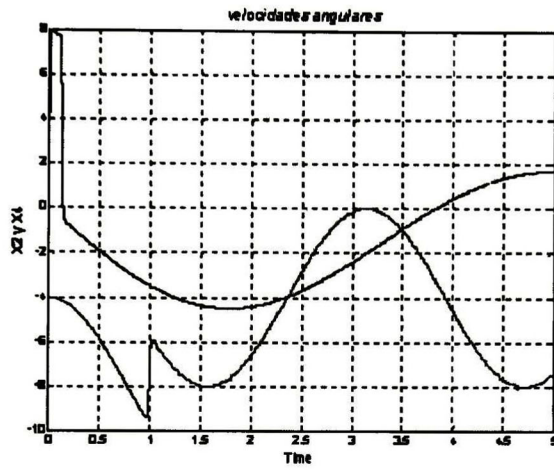


Figura 4.5.4: Velocidades angulares (CMDA)

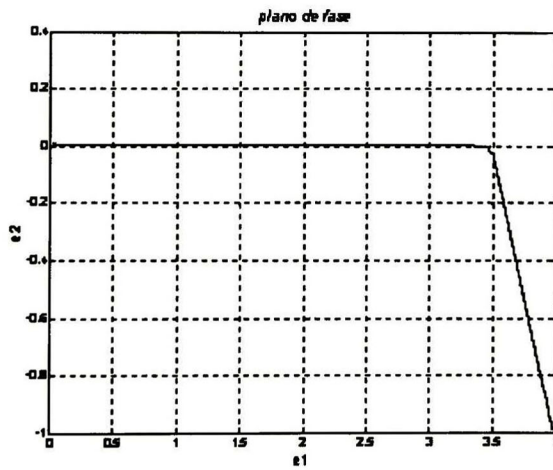


Figura 4.5.5: Retrato de fase (CMDA)

$$\varepsilon = 20 \quad k_1 = 8 \quad k_2 = 40 \quad c_1 = 3,5 \quad c_2 = 3,5$$

En la figura 4.5.7 se observa la variable de estado  $x_1$  y su referencia  $x_{1ref}$ .

En la figura 4.5.8 se muestra la gráfica de la variable de estado  $x_2$  y de su referencia, se puede observar que para las dos variables ( $x_1$  y  $x_2$ ) se logra el seguimiento de referencia.

En la siguiente figura 4.5.9 se muestra la gráfica de las señales de error, con una convergencia a cero en tiempo finito.

En la figura 4.5.10 se observan las velocidades angulares de los eslabones del manipulador. En la siguiente figura 4.5.11 encontramos la gráfica del retrato de fase de las señales de error para el manipulador.

Por último tenemos la figura 4.5.12 donde se muestran las señales de control obtenidas para este controlador.

## 4.6. Análisis de Resultados

De las figuras 4.5.1 y 4.5.7 se puede notar que los dos controladores logran un seguimiento de trayectoria en aproximadamente el mismo tiempo, al igual que en las figuras 4.5.2 y 4.5.8 donde las referencias para el segundo eslabón se alcanzan en tiempos comparables. Esto concuerda con los resultados del análisis de estabilidad desarrollados tanto para el CMDA, como para el CMDIA, en los cuales se mostró la estabilidad el origen del sistema de error en ambos casos.

La señales de error para el CMDIA convergen dos veces más lento que para el CMDA, debido a que la ganancia utilizada en la función deslizante para CMDA es mucho más grande que para CMDIA, lo que ocasiona una convergencia mas rápida, sin embargo la respuesta del CMDIA es mas suave, lo que en el caso del control de manipuladores es deseable.

Las velocidades angulares tiene un comportamiento similar para ambos controladores, aún cuando se nota una componente de mayor frecuencia en las velocidades angulares del CMDIA.

Para el CMDA el retrato de fase converge a una vecindad del origen, y en el caso del CMDIA converge al origen, esto puede verse claramente en 4.5.3 y 4.5.9, este comportamiento se debe a que el CMDA necesita una ganancia de control discontinuo mucho más grande para reducir la vecindad de convergencia del sistema de error y rechazar la perturbación, en cambio para el CMDIA solo se necesita la ganancia del control discontinuo necesaria para

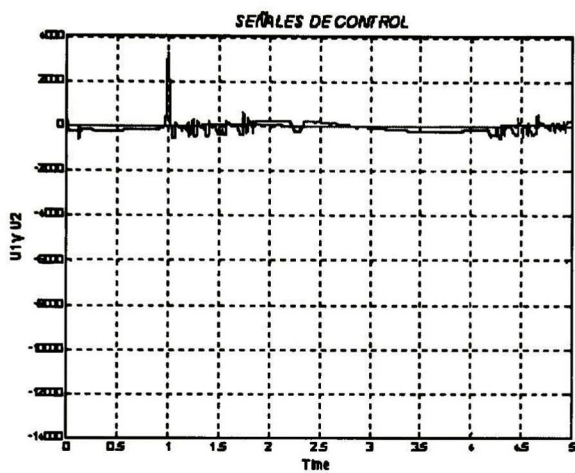
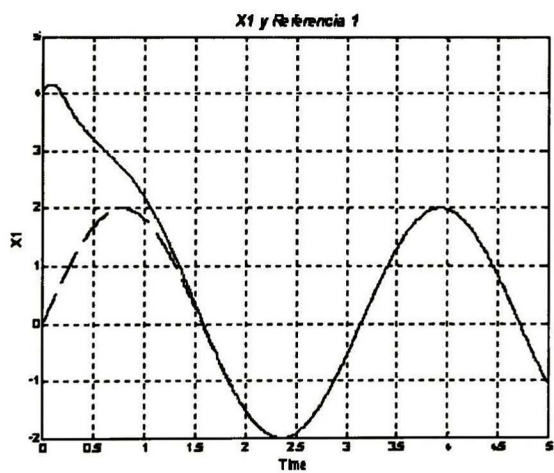


Figura 4.5.6: Señales de Control (CMDA)

Figura 4.5.7: Variable de estado  $x_1$  y  $x_{1ref}$  (CMDIA)

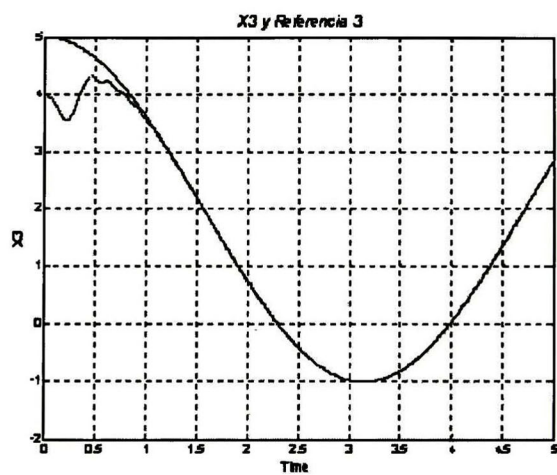


Figura 4.5.8: Variable  $x_3$  y su referencia (CMDIA)

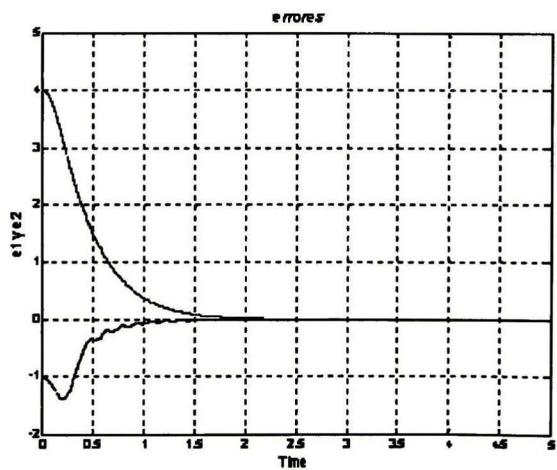


Figura 4.5.9: Señales de error (CMDIA)

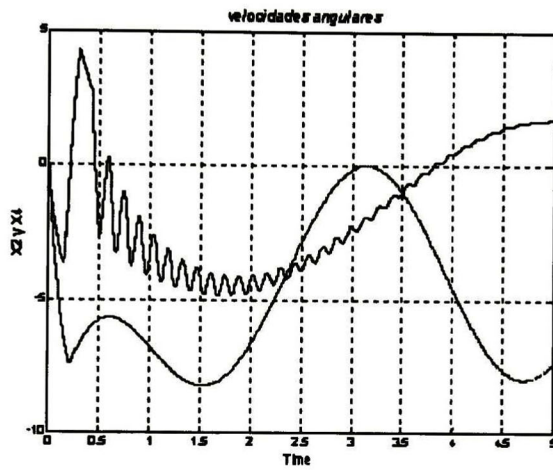


Figura 4.5.10: Velocidades angulares (CMDIA)

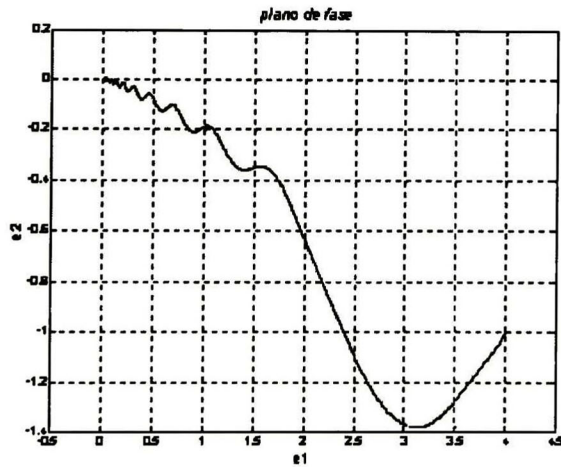


Figura 4.5.11: Retrato de fase de las variables de error (CMDIA)

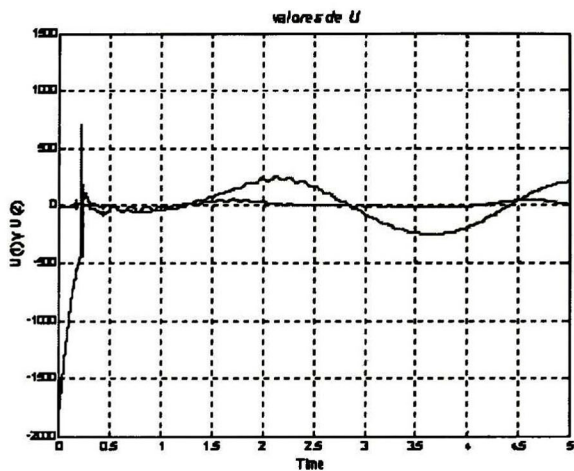


Figura 4.5.12: Señales de Control (CMDIA)

rechazar la perturbación, ya que utiliza la retroalimentación de las variables de error para lograr el seguimiento de trayectorias.

Las señales de control del CMDA, mostradas en la figura 4.5.6, tienen picos mas alto que las del CMDIA, mostradas en la figura 4.5.12, además la componente de más frecuencia en las señales de control tienen mayor magnitud para el CMDA, esto también es debido a la diferencia de las ganancias en el control discontinuo de ambos controladores.



# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 5.1. Conclusiones

Se diseñaron dos controladores, CMDA y CMDIA, que resultaron ser robustos ante perturbaciones externas, a variaciones paramétricas e incertidumbres de modelado de hasta un 40 % de los valores nominales, con un seguimiento satisfactorio de las referencias.

Sin embargo, existen diferencias entre los resultados arrojados por uno y otro algoritmo; la más significativa es la magnitud de las señales de control necesarias para obtener un error aproximadamente del mismo orden en los dos controladores.

Analizando las figuras 5.1.1 y 5.1.2 podemos concluir lo antes mencionado; en CMDA se tiene una magnitud promedio de las señales de control de 252 unidades con picos de hasta 4800 unidades y para CMDIA se obtienen señales de control de magnitud promedio de 76 unidades, con picos máximos de 425 unidades. Esto representa una bondad extra a CMDIA, ya que se necesita menos energía (casi 4 veces menos) para lograr un buen desempeño en el seguimiento de trayectorias, lo que en la implementación práctica de un controlador es muy importante.

Esto se debe a que las ganancias de las funciones deslizantes son menores en el controlador que considera el enfoque integral, ya que la estabilidad se asegura por medio de la retroalimentación del error en la planta nominal, y el control discontinuo solo se utiliza para rechazar la perturbación, en cambio en el CMDA se utiliza el control discontinuo para rechazar la perturbación y estabilizar el sistema de error, lo que ocasiona que el diseño de las ganancias

de las funciones deslizantes sean más grandes. Esto puede observarse en las ecuaciones (4.3.6) y (4.4.12).

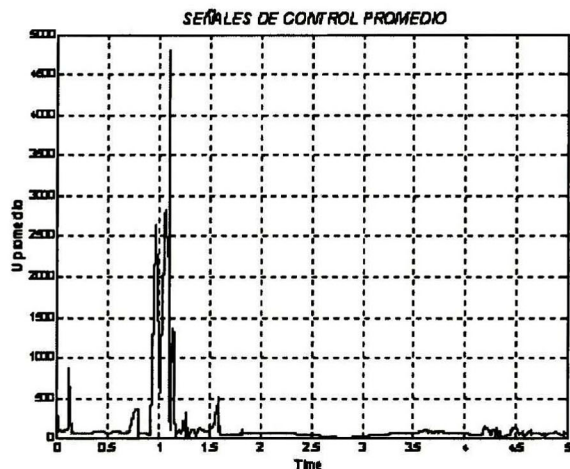


Figura 5.1.1: Señales de control promedio (CMDA)

Otra conclusión importante es que simulando los dos algoritmos, obtenemos una vecindad de convergencia para el error en CMDA, pero podemos notar que el desempeño es mejor con el CMDIA que logra que el error converja a una vecindad más pequeña del origen. Esto se muestra en las figuras 5.1.3 y 5.1.4.

Para finalizar se concluye que el control por Modos Deslizantes Anidados permite el rechazo de perturbaciones matched y no matched, pero en cuestión de energía utilizada en el control tiene mejor desempeño el controlador por Modos Deslizantes Integrales Anidados.

## 5.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se puede mencionar

- Modelado del manipulador de 6 grados de libertad Adept Six600<sup>TM</sup> que se encuentra en el laboratorio de Control Automático del CINVESTAV

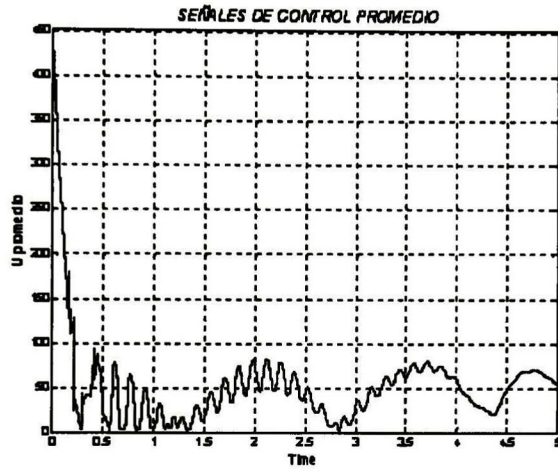


Figura 5.1.2: Señales de control promedio (CMDIA)

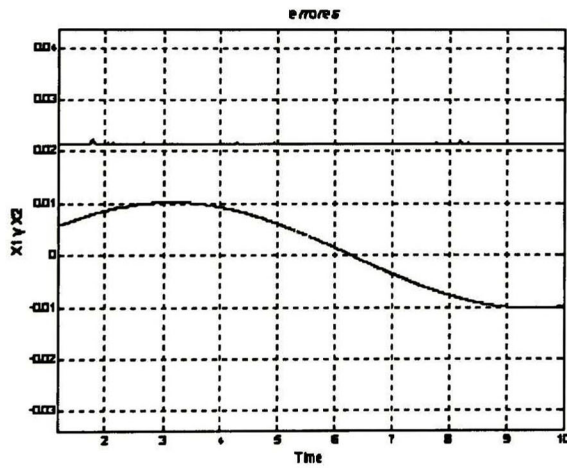


Figura 5.1.3: Vecindad de convergencia (CMDA)

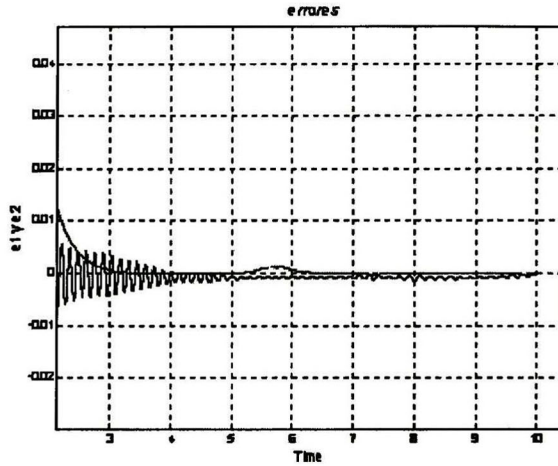


Figura 5.1.4: Vecindad de convergencia (CMDIA)

Unidad Gdl., el cual incluye una mano robótica de la marca Barret Hand<sup>TM</sup>

- Diseño e implementación de un controlador por medio de MDIA para el manipulador antes mencionado.
- Diseño de una estrategia de control que aborde el problema de Chattering (componentes de alta frecuencia en la señal de control), se podrían utilizar enfoques como Modos Deslizantes de Alto Orden [14], o Modos Deslizantes Integrales incluyendo la dinámica del actuador.
- Diseño de una estrategia de control que logre que un manipulador reaccione a factores ambientales para llevar a cabo tareas como: evasión de obstáculos ó reconfiguración de tareas a realizar. Esto puede lograrse con la conjunción de un sistema de visión que perciba los cambios en el espacio de trabajo del manipulador y retroalimente dicha información al controlador.

# Apéndice A

## Clasificación de Manipuladores

Existen muchas formas de clasificar a los robots industriales, en esta sección empezaremos con las clasificaciones de robots industriales, para ubicar a los manipuladores en el contexto general, y luego mostraremos una clasificación de manipuladores industriales.

**Clasificación de Robots Industriales** Los robots industriales se pueden clasificar por la forma en que realizan tareas en:

- **Robots Inteligentes** Son sistemas mecánicos multifuncionales controlados por computadores capaces de relacionarse con su entorno o a través de sensores y tomar decisiones en tiempo real.
- **Robots con Control Computacional.** Similares a los anteriores pero carecen de la capacidad de relacionarse con el entorno que les rodea.
- **Robots de Aprendizaje** Se limitan a repetir una secuencia de movimientos realizada con la intervención de un operador y luego lo memorizan todo. También se denominan Robots de Macro.

Se pueden clasificar por el medio donde se desenvuelven en:

- **Terrestres**
- **Aéreos**
- **Acuáticos**

- **Híbridos**

Y se pueden clasificar por su estructura mecánica en:

- **Robots Manipuladores.** Son sistemas mecánicos multifuncionales cuyo sistema de control permite gobernar el movimiento de sus elementos de las formas siguientes: Manuales, Programados e Inteligentes.
- **Robots Móviles.** Este tipo de robots son autónomos, y poseen un sistema de navegación automático (planificación percepción y control).
- **Manipuladores Móviles.** Es la combinación de los anteriores.

**Clasificación de Manipuladores Industriales** La clasificación de manipuladores industriales que se mostrará a continuación está basada en su *estructura cinemática y su espacio de trabajo*. En la figura A.0.1 se pueden observar 3 clases de manipuladores: Cilíndrico, Cartesiano y Articulado. La primera columna muestra un ejemplo tipo de la clase de manipulador, la segunda columna muestra su estructura cinemática y la tercera su espacio de trabajo

En la figura A.0.2 se muestran tres clases más de manipuladores industriales: Esférico, Tipo SCARA (Selectively Compliant Articulated Robot Arm) y Paralelo.

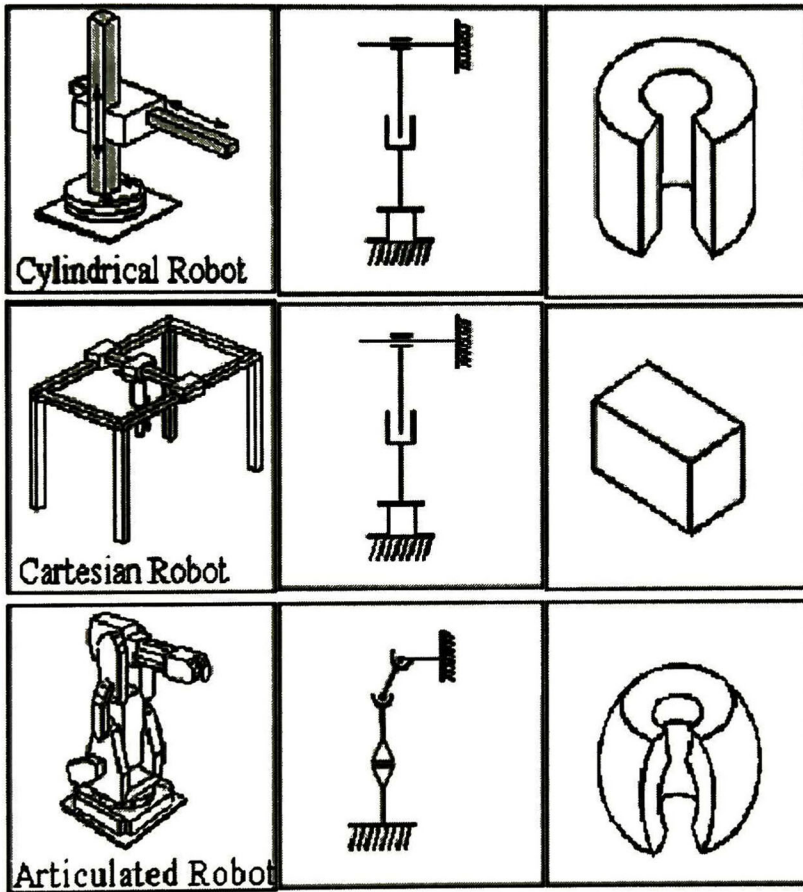


Figura A.0.1: Clasificación de Manipuladores Industriales (Parte 1)

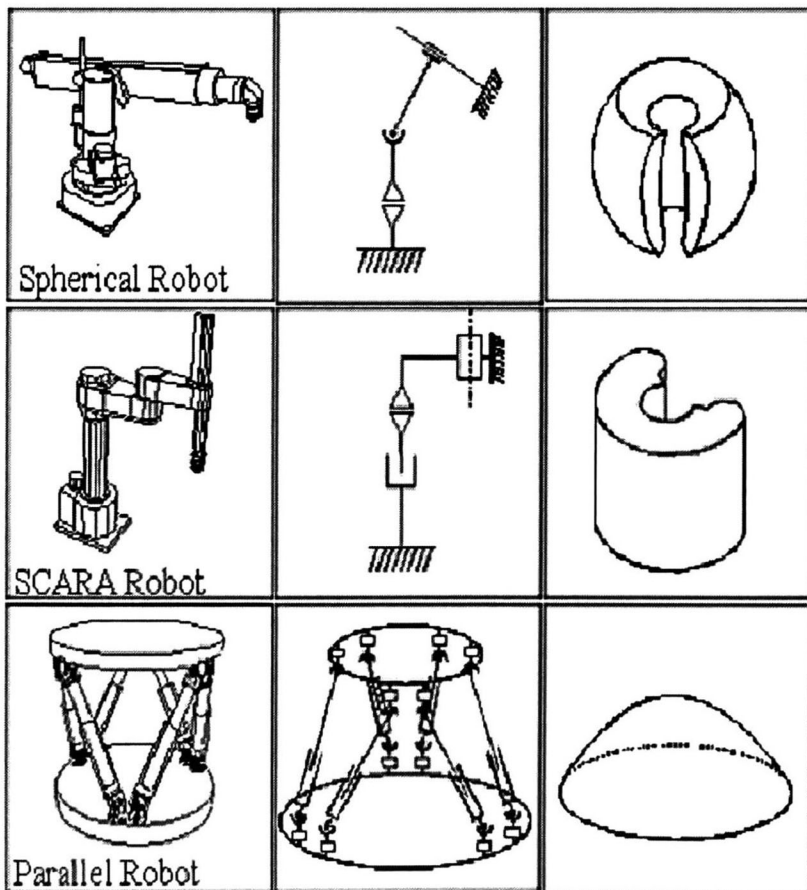


Figura A.0.2: Clasificación de Manipuladores Industriales (Parte 2)



## Apéndice B

### Teorema de Estabilidad de Lyapunov

La estabilidad de un sistema no lineal, en el sentido de Lyapunov, utiliza el concepto de la energía del sistema para enunciar condiciones que definan dicha estabilidad. Para ilustrar lo anterior considere el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{B.0.1}$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$  es una función continua por partes en  $t$  y es Lipschitz en  $x$  sobre  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset R^n$  es un dominio que contiene al origen  $x = 0$ . Entonces el origen es un punto de equilibrio de (B.0.1) en  $t = 0$  si

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

, esta afirmación puede hacerse para cualquier punto de equilibrio que no esté en el origen, si existe una transformación que traslade ese punto de equilibrio al origen ([15]).

Los conceptos de estabilidad para el punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (B.0.1) son:

**Estable.** Si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{B.0.2}$$

**Uniformemente Estable.** Si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que se satisface (B.0.2).

**Inestable.** Si no es estable.

**Asintóticamente Estable.** Si es estable y existe una  $c = c(t_0) > 0$  tal que si  $t \rightarrow \infty$  entonces  $x(t) \rightarrow 0$  para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .

**Uniformemente Asintóticamente Estable.** Si es uniformemente estable y existe una  $c > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que si  $t \rightarrow \infty$  entonces  $x(t) \rightarrow 0$  para todo  $\|x(t_0)\| < c$ , uniformemente en  $t_0$ .

**Globalmente Uniformemente Asintóticamente Estable.** Si es uniformemente estable y para cada par de números positivos  $\epsilon$  y  $c$ , existe una  $T = T(\epsilon, c) > 0$  tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

Ahora definimos la estabilidad del sistema (B.0.1) de la siguiente manera:

Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema y  $D \subset R^n$  un dominio conteniendo a  $x = 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \tag{B.0.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \tag{B.0.4}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$  donde  $W_1(x)$ ,  $W_2(x)$  y  $W_3(x)$  son funciones continuas positivas en  $D$ . Entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio **uniformemente asintóticamente estable**.

Si las condiciones (B.0.3) y (B.0.4) se satisfacen globalmente (para todo  $x \in R^n$ ) y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  es **globalmente uniformemente asintóticamente estable**.

Suponga que las condiciones (B.0.3) y (B.0.4) se satisfacen con

$$\begin{aligned} W_1(x) &\geq k_1 \|x\|^c \\ W_2(x) &\geq k_2 \|x\|^c \\ W_3(x) &\geq k_3 \|x\|^c \end{aligned}$$

para algunas constantes positivas  $k_1, k_2, k_3$  y  $c$ . Entonces  $x = 0$  es un punto de equilibrio **exponencialmente estable**. Si además lo anterior se cumple globalmente, entonces es **globalmente exponencialmente estable**.

En la última forma que establecimos la estabilidad del sistema (B.0.1), a

la función  $V$  se le conoce como función de Lyapunov.



## Apéndice C

# Manipulador de 2 Grados de Libertad

Consideremos un brazo manipulador con 2 grados de libertad (DOF), con uniones rotatorias y masas concentradas como el que se muestra en la siguiente figura

Sabemos que la dinámica de cualquier manipulador puede ser resumida en:

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = \tau$$

Para el caso de un manipulador de la figura definimos:

$$\begin{aligned}x_1 &= q_1 \\x_2 &= \frac{d}{dt}(q_1) \\x_3 &= q_2 \\x_4 &= \frac{d}{dt}(q_2)\end{aligned}$$

Donde  $q_i$  es el desplazamiento angular del  $i$ -ésimo link y  $\frac{d}{dt}(q_i)$  es su velocidad angular, obteniendo así el siguiente modelo matemático

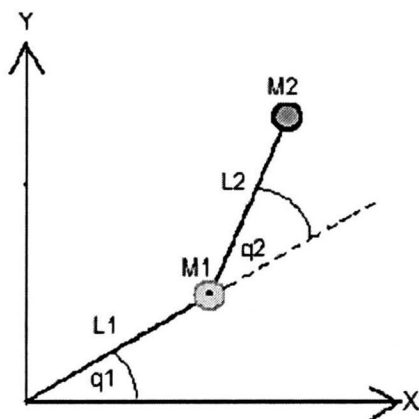


Figura C.0.1: Manipulador Serial Planar de 2 grados de libertad con masas concentradas.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \lambda_{11} \\ \dot{x}_2 &= [m_{22} (\tau_1 - N_1) - m_{12} (\tau_2 - N_2)] / DM + \lambda_{21} \\ \dot{x}_3 &= x_4 + \lambda_{12} \\ \dot{x}_4 &= [-m_{12} (\tau_1 - N_1) + m_{11} (\tau_2 - N_2)] / DM + \lambda_{22} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} m_{22} &= (L_2)^2 M_2 \\ m_{12} &= m_{22} + L_1 L_2 M_2 \cos x_3 \\ m_{11} &= L_1^2 (M_1 + M_2) + 2m_{12} - m_{22} \\ N_1 &= L_1 L_2 M_2 (\dot{x}_1)^2 \sin x_3 \\ N_2 &= -L_1 L_2 M_2 \left( 2\dot{x}_1 \dot{x}_3 - (\dot{x}_3)^2 \right) \sin x_3 \end{aligned}$$

y los parámetros del manipulador

$M_i$  es la masa del  $i^{\text{ésimo}}$  link,  
 $L_i$  es la longitud del  $i^{\text{ésimo}}$  link,  
 $\tau_i$  es la torca aplicada al  $i^{\text{ésimo}}$  link,

definimos  $y_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ,  $y_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_m = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_{nm} = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \end{bmatrix}$

Donde  $y_1$  es el vector de desplazamiento angular del manipulador,  $y_2$  es el vector de velocidad angular,  $\lambda_m$  es el vector de perturbaciones matched,  $\lambda_{nm}$  es el vector de perturbaciones no matched.

Y así tenemos un modelo vectorizado

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \lambda_m \\ \dot{y}_2 &= f(y_1, y_2) + b(y_1)u + \lambda_{nm} \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \begin{bmatrix} (-N_1 m_{22} + m_{12} N_2) / DM \\ (-N_2 m_{11} + m_{12} N_1) / DM \end{bmatrix} \\ b(y_1) &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ u &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La dimensión de los vectores  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\lambda_m$ ,  $\lambda_{nm}$ ,  $f$  y  $u$  es  $(n \times 1)$  y la de la matriz  $B$  es  $(n \times n)$ .





# Apéndice D

## GLOSARIO

**Algoritmo.** (del latín, dixit *algorithmus* y éste del matemático persa al-Jwarizmi) Es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema. Es decir, que un algoritmo es un método para encontrar la solución a algún problema.

**Energía Cinética.** Es la energía que posee un cuerpo por encontrarse en movimiento y está definida por

$$E_p = \frac{1}{2}mv^2$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $v$  su velocidad.

**Energía Potencial.** Es la energía almacenada en un sistema, o una medida del trabajo que un sistema puede entregar. La energía potencial de un cuerpo se define como la energía que es capaz de generar un trabajo como consecuencia de la posición del mismo.

**Espacio de Estados.** Es una manera de describir sistemas de ecuaciones diferenciales. Esta representación tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, t) + b(X, t)U \\ y &= h(X) \end{aligned}$$

donde  $X$  es el vector de estados,  $U$  es el vector de entradas,  $y$  es el vector de salidas y  $f(\cdot)$  es una función de estados y tiempo al igual que  $b(\cdot)$ .

**Fuerza Centrífuga.** Es la que se produce cuando se obliga a un cuerpo a dar vueltas. Para que un cuerpo de vueltas, hay que aplicar una fuerza hacia

el centro (llamada centrípeta). La fuerza centrífuga es la fuerza en oposición a la fuerza centrípeta.

**Fuerza de Coriolis.** También denominada *efecto de Coriolis*, descrita en 1835 por el científico francés Gaspard-Gustave Coriolis, es una fuerza ficticia o aparente que sirve para explicar el movimiento anómalo que describe un objeto que se mueve dentro de un sistema de referencia no inercial en rotación.

**Matriz de Transformación Homogénea.** Es una matriz de dimensiones  $(4 \times 4)$  que transforma un vector de posición, expresado en coordenadas homogéneas, de un sistema de coordenadas hasta otro.

**Sistema MIMO.** (Multi Input-Multi Output) se trata de sistemas que tienen múltiples entradas y salidas.

**Sistema No Lineal.** Sistemas cuyo comportamiento no es expresable como la suma de los comportamientos de sus descriptores. Más formalmente, un sistema físico, matemático o de otro tipo cuyas ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento son no lineales. En particular, el comportamiento de sistemas no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal.

**Superficie Deslizante.** Es una trayectoria definida en función de los estados de un sistema, que representa una trayectoria en el espacio de estados, por la cual se desea que se "deslice" el comportamiento del sistema. Esto se logra con un control discontinuo, generalmente con la función signo.

**Superficie Pseudodeslizante.** Es el análogo de la superficie deslizante, pero cuando la función signo se aproxima con una sigmoideal.

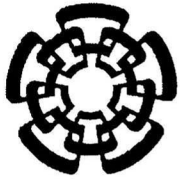
**Tensor de Inercia.** Un tensor es una entidad geométrica que los conceptos de escalar, vector y operador lineal, de forma que sea independiente al sistema de coordenadas. Por lo tanto, el Tensor de Inercia un conjunto de momentos y productos de inercia de un sistema mecánico, expresados en tensores.

**Teorema de Steiner.** Es una fórmula que nos permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto O, cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masas.

# Bibliografía

- [1] *www.IFR.org*.
- [2] D. P. Stoten, *Model Reference Adaptative Control of Manipulators*, Research Studies Press LTD, UK, 1990.
- [3] Carlos canudas de Wit, Bruno Siciliano and George Bastin, *Theory of Robot Control*, Springer,UK,1996
- [4] M. F. Mendes, W. Kraus Jr. and E. R. de Pieri, Variable Structure Position Control of an Industrial Robotic Manipulator.
- [5] T. Ozaki, T. Susuki, T. Furuhashi, S. Okuma and Y. Uchikawa, *Trajectory Control of robotic Manipulator Using neural Networks*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, VOL 39, No. 6, pp 555-570,1992.
- [6] Choi, S. B. and Kim, J. S., *A Fuzzy Sliding Mode Controller for Robust Tracking of Robotic Manipulators*, Mechatronics 7(2), 1997.
- [7] J. J. Craig, *Adaptive Control of Mechanical Manipulators* , Addison-Wesley,1988.
- [8] J. E. Slotine and W. Li, *Adaptive Manipulator Control: A case study*, IEEE Tras. Automat. Control, VOL AC-33, no 11, pp 995-1003, 1988.
- [9] Eduardo Bayro Corrochano, Luis Eduardo Falcón Morales and Julio Zamora Esquivel, *Visually Guided Robotics Using Conformal Geometric Computing*, 2006.
- [10] Eduardo Bayro Corrochano, *Robot Perception and Action Using Conformal Geometric Algebra*, In handbook of geometric computing, Applications in Pattern recognition, Computer Vision, neural Computing and Robotics, Springer Verlag, Heidelberg, Cap. 13, pp. 405-458, 2005.

- [11] A. Adhami-Mirhosseini y M. J. Yazdanpanah, *Robust Tracking of Perturbed Nonlinear Systems by Nested Sliding Mode Control*, International Conference on control and Automation, pp. 44-48, 2005.
- [12] Jorge Rivera y Alexander Loukianov, *Integral Nested Sliding Mode Control: Application to the Induction Motor*, International Workshop on Variable Structure Systems, 2006.
- [13] Vadim Utkin, Jürgen Guldner and Jingxin Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor and Francis, UK, 1999.
- [14] Wilfrid Perruquetti and Jean Pierre Barbot, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker Inc, USA, 2002.
- [15] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, USA, Cap. 3, pp. 132-140, 1996.



# **CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

**CONTROL ROBUSTO DE MANIPULADORES ROBOTICOS POR MODOS DESLIZANTES  
ANIDADOS E INTEGRALES**

del (la) C.

Luis Enrique GONZÁLEZ JIMÉNEZ

el día 30 de Agosto de 2007.

Dr. Juan Luis Del Valle Padilla  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov  
Investigador CINVESTAV 3C  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Manuel Cañedo Castañeda  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006794