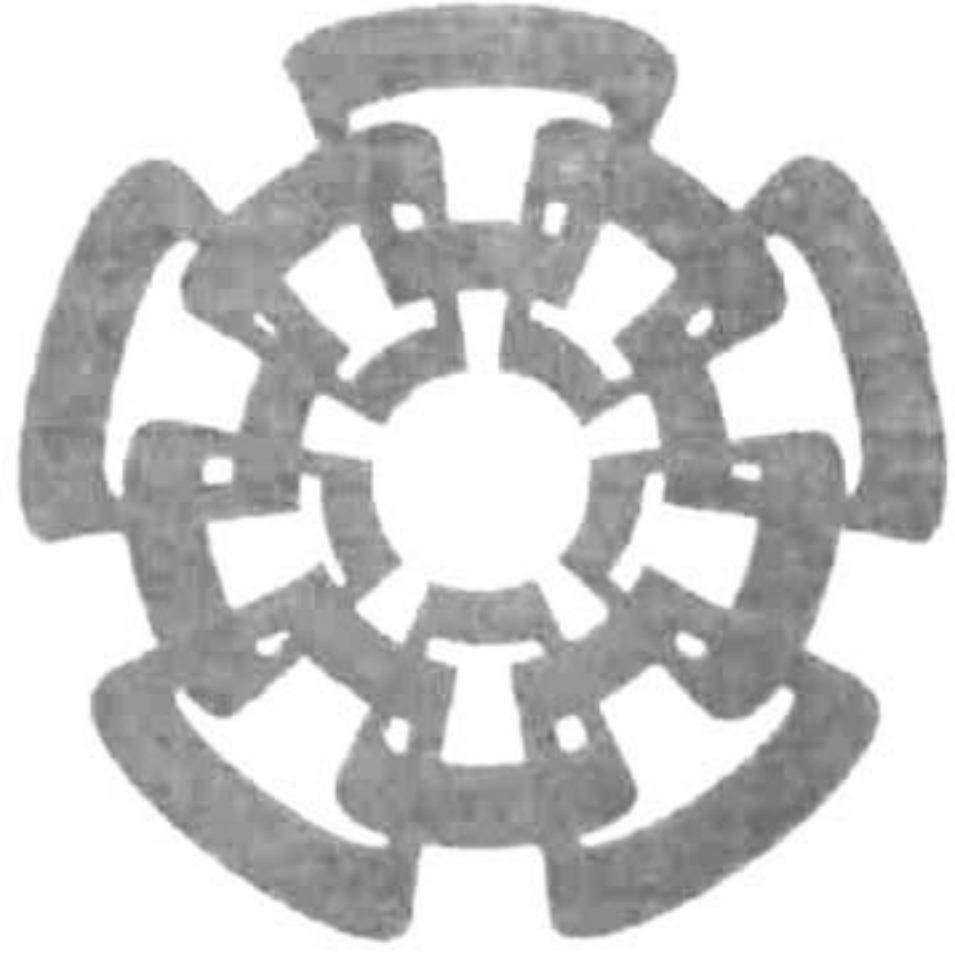






XX(147076.1)





Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

del I.P.N.

Unidad Guadalajara

# **Síntesis de controladores para Redes de Petri continuas temporizadas**

Tesis presentada por:  
**Enrique Javier Aguayo Lara**

Para obtener el grado de:  
**Maestro en ciencias**

En la especialidad de:  
**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis:  
**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

**CINVESTAV**  
IPN  
**ADQUISICION**  
**DE LIBROS**

Guadalajara, Jalisco, Marzo 2008.



CLASIF.: <u>TRIGS/CB . A38</u>	2008
ADQUIS.: <u>BC-499</u>	
FECHA: <u>11-XI-2008</u>	
PROCED.: <u>Don. - 2008</u>	
\$ _____	

VD: 144178 - 1001



# **Síntesis de controladores para Redes de Petri Continuas Temporizadas**

**Tesis de maestría en ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Enrique Javier Aguayo Lara**

Ingeniero Industrial y de Sistemas

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de  
Monterrey 1999-2003

Becario de CONACYT, expediente No. 199290

Director de Tesis:

**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Marzo, 2008.



# Índice general

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Revisión de la literatura.	2
<b>2. CONCEPTOS PRELIMINARES</b>	<b>3</b>
2.1. CONCEPTOS BÁSICOS EN REDES DE PETRI	4
2.1.1. Redes de Petri (RP)	4
2.1.2. Redes de Petri Temporizadas (RPT)	12
2.1.3. Redes de Petri Continuas (RPC)	13
2.1.4. Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPCT)	15
2.2. ACCIONES DE CONTROL EN RPCT	21
2.3. ECUACIÓN DE ESTADO Y CONTROLABILIDAD	22
2.3.1. Ecuación de Estados	23
2.3.2. Controlabilidad	26
2.3.3. Marcados de Equilibrio	28
2.3.4. Control en RPCT	31
2.4. CONCLUSIONES .	38
<b>3. CONTROL POR PROPAGACIÓN DE FLUJOS</b>	<b>41</b>
3.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADOS	42
3.1.1. Propagación de Flujos	43
3.2. CONTROL PARA LA ECUACIÓN DE ESTADOS MÍNIMA	53
3.3. SISTEMA DE ERROR	54
3.4. CONCLUSIONES .	67
<b>4. COMPARACIÓN DE LEYES DE CONTROL</b>	<b>69</b>
4.1. EJEMPLO 1. UN GRAFO MARCADO	70
4.2. EJEMPLO 2. UNA MÁQUINA DE ESTADOS	73



4.3. EJEMPLO 3. UNA RED DE LIBRE ELECCIÓN	78
4.4. CONCLUSIONES .	82
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>83</b>



# AGRADECIMIENTOS

A mi Oto... que iniciamos juntos una nueva aventura el mismo día.

A. mi familia. Por siempre estar ahí conmigo.

Gracias mamá.

Gracias papá.

Gracias Carmen; también por tus correcciones.

A mis maestros del CINVESTAV.

En particular a mi asesor, el Dr. Antonio Ramírez Treviño por compartir tanto conmigo y ayudarme en esta experiencia.

A CONACYT.

A Bere. No tengo palabras para agradecer todo tu apoyo.

Gracias por dejarme seguir soñando.

Este trabajo lo hicimos juntos.



# SÍNTESIS DE CONTROLADORES PARA REDES DE PETRI CONTINUAS TEMPORIZADAS

## RESUMEN

Las Redes de Petri son una herramienta de modelado para Sistemas de Eventos Discretos. A partir de éstas surgen las Redes de Petri Continuas, que son una relajación del modelo utilizando la técnica de fluidificación, con el objetivo de disminuir en lo posible el problema de la explosión de estados.

En el presente trabajo se propone una ley de control para Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPCT) que lleva el estado inicial del sistema  $m_0$  a algún marcado requerido  $m_d$  utilizando un esquema Encendido/Apagado.

Se propone el concepto de Propagación de Flujos, que es la manera en que las marcas del sistema RPCT se distribuyen a través de los lugares de la red, así como su representación vectorial y un algoritmo para calcularlo a partir de la matriz de Controlabilidad del sistema.

Con los vectores de Propagación de Flujos se forma la Matriz de Propagación, a partir de la cual se sintetiza una ley de control de tipo Encendido/Apagado que hace que el sistema de RPCT evolucione de manera rápida hacia el estado  $m_d$ .

PALABRAS CLAVE: Control de Redes de Petri Continuas Temporizadas



# SYNTHESIS OF CONTROL LAWS FOR TIMED CONTINUOUS PETRI NETS

## ABSTRACT

Petri Nets (PN) are a Discrete Events Systems modelling tool. Timed Continuous Petri Nets are a relaxation of the PN model by using a fluidification technique.

This work major concern is about proposing Control Laws for Timed Continuous Petri Nets (CTPN) which takes the system from its initial state  $m_0$  to a required marking  $m_d$  by using an on/off control scheme.

The concept of Flow Propagation is proposed, which is the way that tokens are distributed on the net's places.

The Propagation Matrix is formed with the Flow Propagation Vectors. From Propagation vectors an On/Off control law is proposed, which evolves in short time the TCPN system towards a final state  $m_d$ .

**KEY WORDS:** Timed Continuous Petri Nets Control







# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Entre las herramientas de modelado para los Sistemas de Eventos Discretos [5] se encuentran las Redes de Petri (RP), que capturan características del sistema físico como las relaciones causales, exclusión mutua, asincronismo y el paralelismo de eventos, entre otras. Además, las RP brindan un soporte matemático que permite describirla con su matriz de Incidencia y su marcado inicial.

Con la Matriz de Incidencia es posible calcular elementos conservativos de las RP, como son los P-Semiflujos y los T-Semiflujos.

Algunas de las propiedades de interés para este trabajo que se van a revisar son la vivacidad y el acotamiento. Las técnicas más comunes que se utilizan para su análisis son:

- Reducción [10] [3], donde se eliminan algunos nodos de acuerdo a reglas que permiten que las propiedades de vivacidad y acotamiento se conserven.
- Simulación, que son algoritmos que toman muestras significativas de la red para poder inferir propiedades de la misma.
- Enumeración de estados, a través de la construcción de un grafo, llamado de alcanzabilidad, en la que los nodos representan los estados que el sistema puede alcanzar y los arcos dirigidos representan la forma en que se puede ir de un estado a otro.

Desafortunadamente para Redes de Petri con muchas marcas, todas las técnicas descritas anteriormente resultan en problemas computacionalmente complejos [6].

Para resolver este problema, las técnicas de análisis basadas en la aproximación fluidificada de las RP [25] han resultado ser eficientes [14], [15].

Como resultado del proceso de fluidificación en las RP, surgen las Redes de Petri Continuas [17], que hasta el día de hoy son entendidas como una aproximación del modelo discreto y no como un modelo del sistema físico.



## 1.1. Revisión de la literatura.

En las Redes de Petri Continuas existen diferentes enfoques, entre los que destacan el propuesto en [9] por Hassan Alla, donde los flujos que pasa por las transiciones son constantes, y el presentado en [10] y [25] por Manuel Silva y Laura Recalde, en el cual el flujo que pasa por las transiciones depende del marcado de los lugares.

En este trabajo se trabajará con el modelo de Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPCT) bajo la semántica de servidores infinitos de Silva y Recalde.

En las RPCT se han definido conceptos como la Controlabilidad y la Alcanzabilidad. La controlabilidad es la propiedad que determina si es posible ir de cualquier marcado del sistema a otro, mientras que la alcanzabilidad determina cuales son los marcados a los que se puede llegar partiendo de un marcado fijo.

El sistema descrito por Silva y Recalde se comporta como un sistema lineal conmutado cuando hay varios lugares de entrada para una transición. Además, es importante resaltar que el estado del sistema  $m$  es siempre un vector acotado por abajo, puesto que no puede tener elementos menores a cero.

La acción de control que se puede aplicar a una RPCT es también acotada por el estado, puesto que debe ser mayor a cero y menor al flujo del sistema, que depende del estado  $m$ .

En el trabajo que presentó Vázquez en [26], se propuso una ley de control que garantiza que un marcado  $m_d \in Class(m_0)$  pueda ser alcanzado. Sin embargo, dicha ley de control hace que el sistema evolucione lentamente, por lo que la búsqueda de otra que permita que se haga de manera más rápida es importante.

El objetivo de este trabajo es Proponer leyes de control más rápidas que las existentes en la literatura.

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de Redes de Petri, Redes de Petri Temporizadas, Redes de Petri Continuas y Redes de Petri Continuas Temporizadas, así como la ecuación estados del sistema y los conceptos de Controlabilidad. También se presenta una ley de control basada en la orientación del campo vector hacia el marcado requerido  $m_d$ .
- En el capítulo 3 se presentan los conceptos de Propagación de Flujos, Matriz de Propagación y la ley de control propuesta en este trabajo.
- Por último en el capítulo 4, se hace una comparación de resultados entre la ley de control de Vázquez [26] y la que se presenta en este trabajo.



## Capítulo 2

# CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo se presentan los conceptos básicos y las propiedades más importantes de las RP, tanto discretas como continuas, además de la manera en que el tiempo es incluido en ambos modelos.

También se presentan el concepto de Controlabilidad y una tipo de ley de control para las RP Continuas Temporizadas (RPCT).

Un sistema RPCT, puede ser representado por un sistema lineal conmutado con una ecuación de estados la cual se puede manipular algebraicamente para llegar a una expresión reducida, llamada Ecuación de estados mínima.

La principal propiedad definida y caracterizada a partir de la ecuación de estados mínima es la controlabilidad. Dicha propiedad es la que determina si el estado del sistema puede ser llevado a cualquier punto dentro de un conjunto llamado de Alcanzabilidad.



## 2.1. CONCEPTOS BÁSICOS EN REDES DE PETRI

Se presentan los conceptos de Redes de Petri (RP), que son intrínsecamente discretas, Redes de Petri Temporizadas (RPT), Redes de Petri Continuas (RPC) y Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPTC), abordando el caso de la semántica de servidores infinitos.

### 2.1.1. Redes de Petri (RP)

**Definición 2.1.1** *Redes, Conjuntos  $\cdot x$  y  $x^\bullet$ , Sub-redes.*

Una red  $N$  es una 3-tupla  $(P, T, F)$ , donde  $P$  y  $T$  son conjuntos finitos y disjuntos y  $F$  es una función definida en  $P \cup T$ ,  $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ , tal que  $F \cap (P \times P) = F \cap (T \times T) = \emptyset$ .

Los elementos en  $P$  son llamados **lugares** y gráficamente se representan por círculos. Los elementos en  $T$  son llamados **transiciones**, representados por rectángulos.  $F$  es llamada la **relación de flujo** de la red, representada por flechas que van de los lugares a las transiciones o de las transiciones a los lugares. Se suele llamar de manera general a los elementos en  $P \cup T$  **nodos** de  $N$  o elementos de  $N$  y los elementos de  $F$  son llamados **arcos**.

Dado un nodo de la red  $N$ , se define el conjunto  $\cdot x = \{y \mid (y, x) \in F\}$  y el conjunto  $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ . Los elementos en el conjunto  $\cdot x$  ( $x^\bullet$ ) de un lugar son las transiciones de entrada (salida) a éste. De manera similar, para las transiciones, su conjunto  $\cdot x$  ( $x^\bullet$ ) son los lugares de entrada (salida) de ésta.

Dado un conjunto  $X$  de nodos, se define  $\cdot X = \cup_{x \in X} (\cdot x)$  y  $X^\bullet = \cup_{x \in X} (x^\bullet)$ .

Una tripleta  $(P', T', F')$  es llamada sub-red de  $N$  si  $P' \subseteq P, T' \subseteq T$  y  $F' = F \cap ((P' \times T') \cup (T' \times P'))$ .

Si  $X$  es un conjunto de elementos de  $N$ , entonces la tripleta

$$(P \cap X, T \cap X, F \cap (X \times X))$$

es una sub-red de  $N$  generada por  $X$ .

**Definición 2.1.2** *Caminos y Circuitos*

Un **camino** en una red  $(P, T, F)$  es una secuencia no vacía  $x_1 x_2 \dots x_k$  de nodos que satisfacen

$$(x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k) \in F \quad (2.1)$$

Un camino  $x_1 x_2 \dots x_k$  se dice que va de  $x_1$  a  $x_k$ .

Un camino que va de un nodo  $x$  a un nodo  $y$  es un **circuito** si ninguno de sus elementos se repite y además  $(y, x) \in F$ . Note que una secuencia conteniendo solo un elemento es un camino, pero no un circuito, porque para cada nodo  $x$ ,  $(x, x) \notin F$ .



Una red  $(P, T, F)$  es llamada conexa si cualesquiera dos nodos  $x, y$  satisfacen  $(x, y) \in (F \cup F^{-1})^*$  Donde para cualquier conjunto  $Q$ ,  $Q^*$  es la cerradura transitiva de  $Q$ .

Una red  $(P, T, F)$  es fuertemente conexa si  $\forall x, y \in P \cup T, (x, y) \in F^*$ , es decir, para cualesquiera dos nodos existe un camino que lleva de  $x$  a  $y$ .

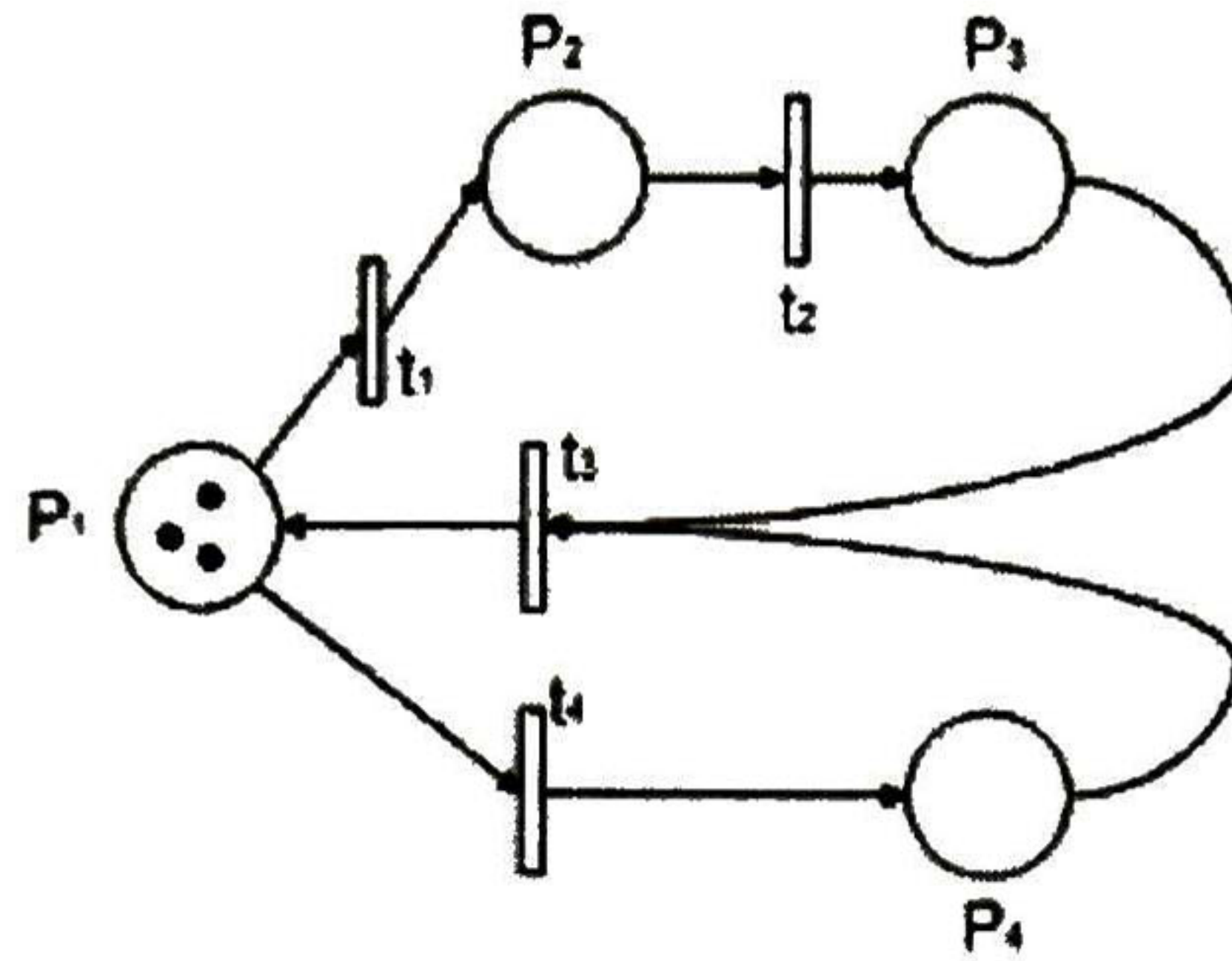


Figura 2.1: Ejemplo de una Red de Petri

**Ejemplo 2.1.3** En la figura 2.1 se ve gráficamente una red de Petri, donde

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \tag{2.2}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \tag{2.3}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} (p_1, t_1), (p_1, t_4), (p_2, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_3) \\ (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_1), (t_4, p_4) \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

Como ejemplos de los conjuntos *Pre* y *Post* se tiene:

$$\bullet t_3 = \{p_3, p_4\} \tag{2.5}$$

$$t_3^\bullet = \{p_1\} \tag{2.6}$$

$$p_1^\bullet = \{t_1, t_4\} \tag{2.7}$$

$$\bar{p}_1 = \{t_3\} \tag{2.8}$$

De igual forma, se observa que  $p_1 t_1 p_2 t_2 p_3$  es un camino, mientras que  $p_1 t_4 p_4 t_3$  es un circuito.



**Definición 2.1.4 Marcados**

Un **marcado** de una red  $(P, T, F)$  es un mapa  $m : P \rightarrow \{\mathbb{N} \cup 0\}$ . Un marcado es representado por el vector  $[m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n)]^T$ , donde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  es una numeración fija y arbitraria de  $P$ .

Un lugar  $p$  se dice que está marcado en un marcado  $m$  si  $m(p) > 0$ . Un conjunto de lugares  $R$  se dice marcado si alguno de los lugares de  $R$  está marcado.

El número total de marcas en un conjunto  $R$  es denotado por  $m(R)$ , es decir:

$$m(R) = \sum_{p \in R} m(p).$$

El marcado nulo es el marcado que mapea todos los lugares a 0.

El marcado en una red de Petri es representado por  $m(p)$  marcas (puntos negros) o el número  $m(p)$  en el lugar  $p$ . En la figura 2.1 el marcado se representa por el vector  $[3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , indicando el número de marcas en cada lugar.

**Definición 2.1.5 Peso de los arcos**

El **peso de los arcos** es una función  $w : F \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , que asocia un número natural ó cero a cada arco.

Cuando todos los arcos tienen peso igual a 1, la red es llamada ordinaria.

El peso de los arcos equivale al número de arcos que están dibujados de un nodo a otro.

Gráficamente, el peso de los arcos se escribe cerca de éstos. Si el peso es igual a 1, éste no se escribe.

**Definición 2.1.6 Regla de disparo**

Un marcado  $m$  **habilita una transición**  $t$  si para cada lugar  $p \in \bullet t$ ,  $m(p) \geq w(p, t)$ . Si  $t$  está habilitada en el marcado  $m$ , entonces ésta puede dispararse y su disparo lleva al marcado sucesivo  $m'$  (se escribe  $m \xrightarrow{t} m'$ ) que es definido para cada lugar  $p$  por:

$$m'(p) = \begin{cases} m(p) & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \notin t^\bullet \\ m(p) - w(p, t) & \text{si } p \in \bullet t \text{ y } p \notin t^\bullet \\ m(p) + w(t, p) & \text{si } p \notin \bullet t \text{ y } p \in t^\bullet \\ m(p) - w(p, t) + w(t, p) & \text{si } p \in \bullet t \text{ y } p \in t^\bullet \end{cases} \quad (2.9)$$

$w(p_i, t)$  marcas se quitan de cada lugar  $p_i \in \bullet t$  y se agregan  $w(t, p_j)$  marcas a los lugares  $p_j \in t^\bullet$ .

Un marcado es llamado **muerto** si ninguna transición está habilitada por éste.



**Definición 2.1.7** *Secuencias de disparo, Marcados alcanzables*

Sea  $m$  un marcado de la red  $N$ . Si  $m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_n} m_n$  son disparos de transiciones habilitadas, entonces  $\sigma = t_1 t_2 \dots t_n$  es una **secuencia de disparos** que va de  $m$  a  $m_n$  y se escribe  $m \xrightarrow{\sigma} m_n$ . En la misma forma se puede representar la secuencia vacía  $\epsilon$ , es decir,  $m \xrightarrow{\epsilon} m$  para cualquier marcado  $m$ .

Se escribe  $m \xrightarrow{*} m'$ , cuando  $m'$  es **alcanzable** desde  $m$ , es decir, que existe una secuencia de disparos  $\sigma$  tal que  $m \xrightarrow{\sigma} m'$ . El conjunto de todos los marcados alcanzables desde  $m$  es denotado por  $RS(m)$ .

Si  $m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} m_2 \xrightarrow{t_3} \dots$  para una secuencia infinita de transiciones  $\sigma = t_1 t_2 t_3 \dots$  entonces  $\sigma$  es una secuencia infinita de disparos y se escribe como  $m \xrightarrow{\sigma}$ .

**Definición 2.1.8** *Matrices Pre, Post y de Incidencia*

Sea  $N$  la red  $(P, T, F)$ . La matriz *Post*, denotada por  $C^+$ , de orden  $|P| \times |T|$  es definida por:

$$Post(p, t) = C^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } (p, t) \notin F \\ w(p, t) & \text{si } (p, t) \in F \end{cases} \quad (2.10)$$

La matriz *Pre*, denotada por  $C^-$ , de orden  $|P| \times |T|$  es definida por:

$$Pre(p, t) = C^- = \begin{cases} 0 & \text{si } (t, p) \notin F \\ w(t, p) & \text{si } (t, p) \in F \end{cases} \quad (2.11)$$

La matriz de incidencia, denotada por  $C$ , es definida por la ecuación:

$$C = Pre - Post = C^- - C^+ \quad (2.12)$$

**Ejemplo 2.1.9** *De la figura 2.1, las matrices que representan al sistema son:*

$$Pre = C^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Post = C^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad m_0 = [3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



De manera similar a representaciones vectoriales de cualquier mapeo, la representación matricial de la matriz de incidencia depende de la enumeración de lugares y transiciones.

**Definición 2.1.10** *El vector columna  $T$  asociado a la transición  $t$  se denota como  $\mathbf{t}$ .*

*De manera similar, el vector fila  $P$ , que está asociado al lugar  $p$ , es denotado por  $\mathbf{p}$ .*

La entrada  $C(p, t)$  en la matriz de incidencia representa el cambio de marcado del lugar  $p$  ocasionado por el disparo de la transición  $t$ . Entonces, si la transición  $t$  está habilitada en el marcado  $m$  y  $m \xrightarrow{t} m'$  entonces  $m' = m + \mathbf{t}$ . Para una generalización de esta ecuación a secuencias de transiciones, se necesita la siguiente definición.

**Definición 2.1.11** *Vectores de Parikh de secuencias de transiciones*

*Sea  $(P, T, F)$  una red y sea  $\sigma$  una secuencia de transiciones. El vector de parikh  $\vec{\sigma} : T \rightarrow \{\mathbb{N} \cup 0\}$  de  $\sigma$  mapea cada transición  $t \in T$  al número de ocurrencias de  $t$  en  $\sigma$ .*

*Si  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ , el vector de parikh de una secuencia  $\sigma_1 = t_1 t_3 t_1 t_1 t_2$  es*

$$\vec{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

*y el de  $\sigma_2 = t_4$  es*

$$\vec{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

Se puede observar que para cualquier transición  $t$ ,

$$\mathbf{t} = C \vec{t} \quad (2.15)$$

Así ocurre que si  $m \xrightarrow{t} m'$ , entonces  $m' = m + C \vec{t} = m + \mathbf{t}$  (donde  $m$  y  $m'$  son tratados como vectores columna). Para una secuencia de disparos finita cualquiera  $\sigma$  tal que  $m \xrightarrow{\sigma} m'$ , se puede encontrar  $m' = m + C \vec{\sigma}$ , como se puede ver en el siguiente lema.

**Lema 2.1.12** *Lema de ecuación de marcado*

*Para cualquier secuencia finita de disparos  $m \xrightarrow{\sigma} m'$  de una red  $N$ , la siguiente ecuación de marcado se cumple:*

$$m' = m + C \vec{\sigma} \quad (2.16)$$

*La demostración de este lema se encuentra en [10]*



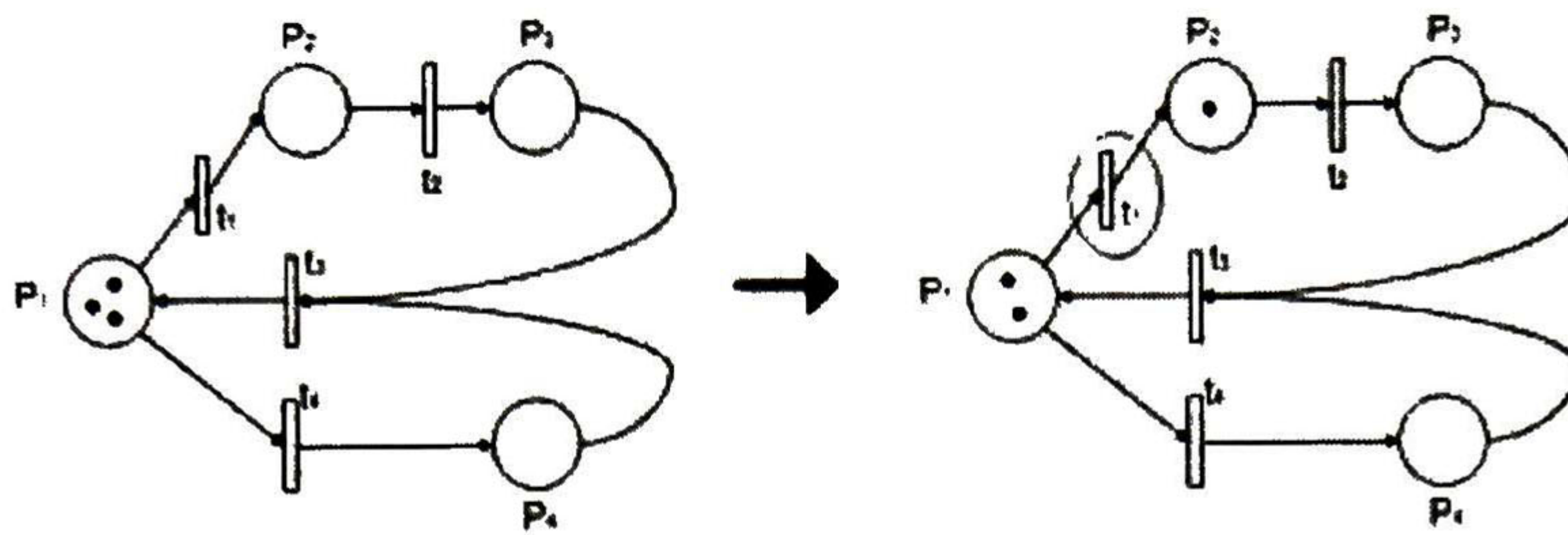


Figura 2.2: Evolución de marcado

**Ejemplo 2.1.13** En la figura 2.2 se puede ver de manera gráfica la evolución de marcado después del disparo de la transición  $t_1$ .

Para determinar el marcado después del disparo de la transición  $t_1$  utilizando el lemma 2.1.12 y la información previa del ejemplo 2.1.9:

$$m' = m_0 + C\vec{\sigma} \tag{2.17}$$

donde para representar el disparo de la transición  $t_1$ ,  $\vec{\sigma} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$$m' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

**Definición 2.1.14** *Sistemas de Red. Marcado inicial y marcados alcanzables.*

Un **sistema** de red (o sólo un sistema) es un par  $(N, m_0)$  donde  $N$  es una red conexa que tiene al menos un lugar y una transición y  $m_0$  es un marcado de  $N$ , llamado **marcado inicial**. Un **marcado**  $m'$  se dice **alcanzable** en un sistema y un marcado  $m_0$  si existe una secuencia de transiciones  $\sigma$  tal que  $m_0 \xrightarrow{\sigma} m'$ .

Una vez que la Red de Petri ha sido introducida, se presentan a continuación algunas de las propiedades de éstas, entre las que figuran la vivacidad y acotamiento, además de otras que son referentes a su estructura.

**Definición 2.1.15** *Vivacidad y propiedades relacionadas*



Un sistema es vivo si para cada marcado alcanzable y cada transición  $t \in T$ , existe un marcado  $m' \in RS(N, m)$  que habilita la transición  $t$ . Si  $(N, m_0)$  es un sistema vivo, entonces se dice que  $m_0$  es un marcado vivo de  $N$ .

Un sistema es vivo en lugares si para cada marcado alcanzable  $m$  y cada lugar  $p$  existe un marcado  $m' \in RS(N, m)$  que marca al lugar  $p$ .

Un sistema es libre de bloqueos si cada marcado alcanzable habilita al menos una transición, es decir, si no se puede alcanzar ningún marcado muerto (que no habilita transiciones) desde el marcado inicial.

**Definición 2.1.16** *Sistemas acotados. Cotas de un lugar.*

Un sistema es **acotado** si para cualquier lugar  $p$  existe un número natural  $b$  tal que  $m(p) \leq b$  para cualquier marcado alcanzable. Si  $(N, m_0)$  es un sistema acotado, entonces se dice que  $m_0$  es un marcado acotado para  $N$ .

La cota de un lugar  $p$  en un sistema acotado  $(N, m_0)$  se define como:

$$\max \{m(p) | m \in RS(N, m_0)\} \quad (2.19)$$

Un sistema es llamado  $b$ -Acotado si ningún lugar tiene una cota que sea mayor a  $b$ .

**Definición 2.1.17** *P-Invariantes (P-Semiflujos)*

Un **P-Invariante** de una red  $N$  es una solución racional de la ecuación

$$Y^T \cdot C = 0 \quad (2.20)$$

**Proposición 2.1.18** *Propiedad fundamental de los P-Invariantes*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema y sea  $I$  un P-Invariante de  $N$ . Si  $m_0 \xrightarrow{*} m'$ , entonces

$$I^T \cdot m = I^T \cdot m' \quad (2.21)$$

La demostración de esta proposición se encuentra en [10].

Esta propiedad fundamental significa que existen conjuntos de lugares en una red de Petri en los cuales la suma de sus marcas permanece constante ante el disparo de transiciones.



**Definición 2.1.19** *T-Invariantes (T-Semiflujos)*

Un **T-Semiflujo** de una red  $N$  es una solución racional de la ecuación

$$C \cdot X = 0 \quad (2.22)$$

**Proposición 2.1.20** *Propiedad fundamental de los T-Semiflujos*

Sea  $\sigma$  una secuencia finita de transiciones de una red  $N$  que está habilitada en el mercado  $m$ . Entonces el vector de parikh  $\vec{\sigma}$  es un T-Invariante si y sólo si  $m_0 \xrightarrow{\sigma} m$  (es decir, ssi la ocurrencia de  $\sigma$  reproduce el mercado  $m$ ).

Los P-sistemas (Máquinas de Estados) son aquellos en los que todas sus transiciones tienen exactamente un lugar de entrada y un lugar de salida.

**Definición 2.1.21** *P-Sistemas (Máquinas de estados), P-Redes*

Una red es P-Red si  $|\bullet t| = 1 = |t\bullet| \forall t \in T$

Un sistema  $(N, m_0)$  es un P-Sistema si  $N$  es una P-Red.

La propiedad fundamental de las Máquinas de Estado es que todos los marcados alcanzables contienen exactamente el mismo número de marcas. Dicho de otra forma, el número de marcas del sistema permanece invariante ante el disparo de transiciones. Lo anterior, significa que todos los lugares de una máquina de estados forman un P-Semiflujo.

Los Grafos Marcados o T-Sistemas son aquellos en los que todos los lugares tienen exactamente una transición de entrada y una de salida.

**Definición 2.1.22** *T-Sistemas (Grafos Marcados), T-Redes*

Una red es T-Red si  $|\bullet p| = 1 = |p\bullet| \forall p \in P$

Un sistema  $(N, m_0)$  es un T-Sistema si  $N$  es una T-Red.

La propiedad fundamental de los grafos marcados es que la cantidad de marcas de los circuitos permanece invariante ante el disparo de transiciones.

Otro tipo de redes muy estudiado son las de Libre elección (Free-Choice)

**Definición 2.1.23** *Redes de Libre Elección (Free-Choice)*

Una red  $(P, T, F)$  es de libre elección si  $(p, t) \in F$  implica  $\bullet t \times p\bullet \subseteq F$  para cada lugar  $p$  y cada transición  $t$ .

Un sistema  $(N, m_0)$  es de libre elección si  $N$  es de libre elección.



La propiedad fundamental de las redes de libre elección es que si un marcado habilita alguna transición de  $p^\bullet$ , donde  $p$  es un lugar de la red, entonces habilita a todas las transiciones en  $p^\bullet$ .

**Definición 2.1.24** *Sifones y Sifones propios*

Un conjunto  $R$  de lugares de una red son un **sifón** si  $\bullet R \subseteq R^\bullet$ . Un sifón es llamado **sifón propio** si éste no es el conjunto vacío.

Dos importantes hechos de los sifones son que: Sifones que no tienen marcas permanecen sin marcas y que los sistemas vivos no tienen sifones sin marcas.

**Definición 2.1.25** *Trampas y Trampas propias*

Un conjunto  $R$  de lugares de una red son una **trampa** si  $R^\bullet \subseteq \bullet R$ . Una trampa es llamada **trampa propia** si éste no es el conjunto vacío.

## 2.1.2. Redes de Petri Temporizadas (RPT)

Las redes de Petri temporizadas evolucionan de forma similar a las Redes de Petri, pero asignan un tiempo de retardo entre el disparo de una transición y el cambio de marcado. Existen dos modelos importantes, uno de ellos temporizado en lugares [24], pero se prefiere el modelo temporizado en transiciones por ser más natural, puesto que la representación de actividades de un sistema es a través de las transiciones [27]. A continuación se presenta una breve descripción de éstas.

**Definición 2.1.26** *Redes de Petri Temporizadas en transiciones [22]*

Una **Red de Petri Temporizada en transiciones** se define como un par  $(N, D)$ , donde:

$N$  es una Red de Petri.

$D : T \rightarrow (R^+ \cup 0)^{|T|}$  es una función de Retardos que asigna el tiempo que una transición  $t_i$  toma para realizar su disparo.

En una red de Petri temporizada en transiciones, las marcas pueden tener cualesquiera de los dos atributos: *disponible* y *no disponible*. En el marcado inicial, todas las marcas se encuentran *disponibles* y pueden cambiar su estado cuando una transición  $t_i$  está habilitada.



Una transición  $t_j$  se encuentra habilitada cuando  $m_{disp}(p_i) \geq Pre(p_i, t_j) \forall p_i \in \bullet t_j$  y  $m_{disp}(p_i)$  son las marcas disponibles en el lugar  $p_i$ .

Cuando la transición  $t_j$  es disparada,  $Pre(p_i, t_j)$  marcas cambian su atributo a *no disponibles*, de modo que no son removidas del lugar  $p_i$  (pero permanecen congeladas y no pueden habilitar a ninguna otra transición) hasta  $d_j \in D$  unidades de tiempo después, cuando se colocan  $Post(p_k, t_j)$  marcas etiquetadas como *disponibles* en los lugares  $p_k \in t_j^\circ$ .

De hecho, la evolución de marcado de las RPT también cumple con la ecuación 2.16.

Las RPT son ampliamente utilizadas para la programación de tareas (en inglés scheduling), puesto que se puede minimizar el tiempo para llegar de un marcado  $m$  a otro  $m'$  cuando existen caminos paralelos. Para mas detalles sobre scheduling se puede consultar [23].

### 2.1.3. Redes de Petri Continuas (RPC)

Las Redes de Petri Continuas [8] surgen a partir de un proceso de fluidificación, en el que cada una de las marcas es dividida en  $k$  partes y en el proceso al límite, cuando  $k \rightarrow \infty$  se pueden hacer disparos de partes reales de marcas.

Las RPC surgen como una opción para disminuir en lo posible uno de los principales problemas de los sistemas de eventos discretos (SED): la explosión de estados [1].

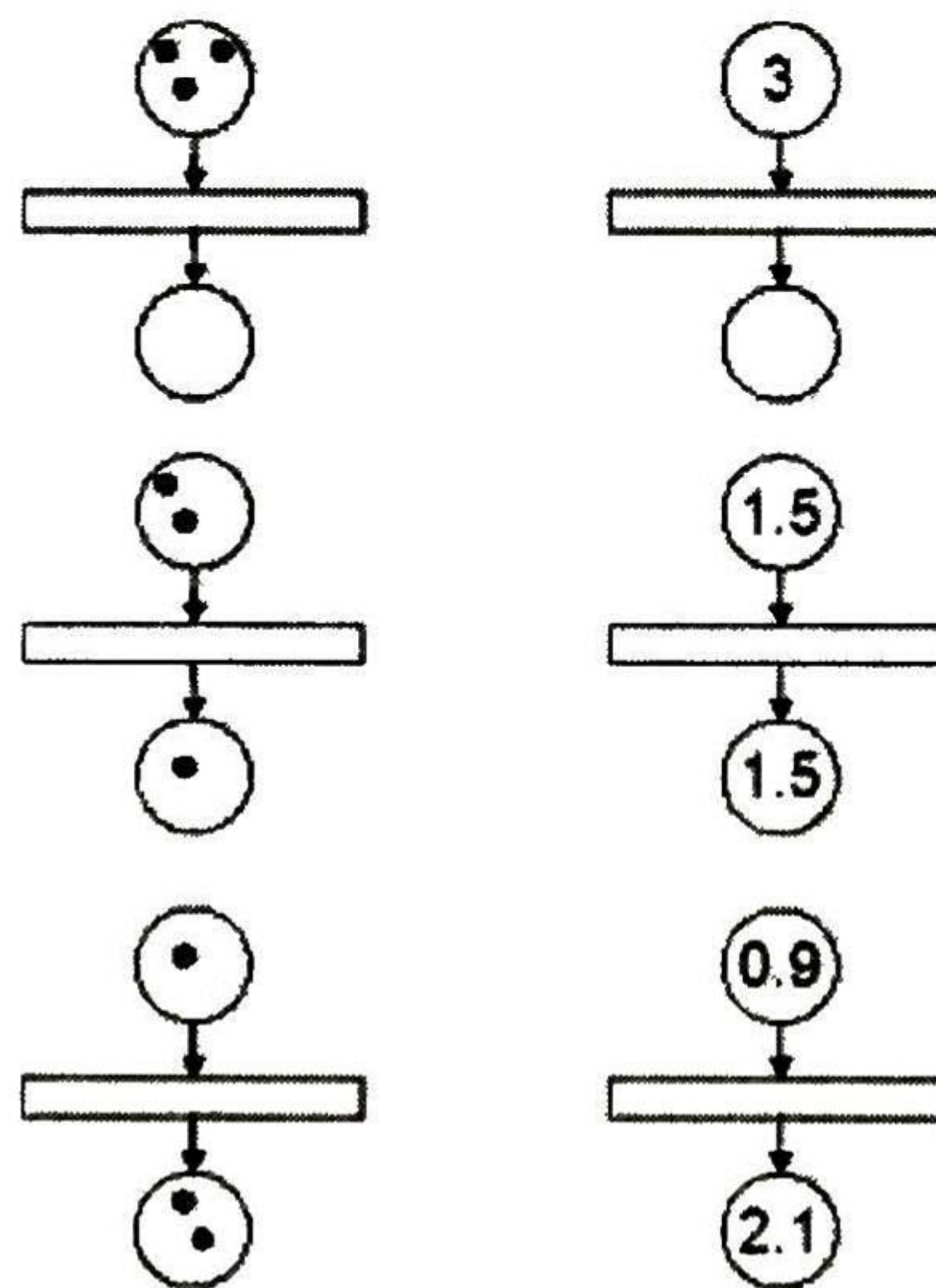


Figura 2.3: Evolución de marcado de una RP y de una RPC

Como se puede observar en la figura 2.3, una RP está limitada a disparos de marcas



completas, es decir, la cantidad de disparo está limitada a números naturales, mientras que en el caso de las RPC, se puede disparar cualquier cantidad real de marcas.

Existen trabajos de aplicación de las RPC, como el que se muestra en [28] y otros referentes a propiedades de éstas, como se presentan en ([17], [11], [26]).

A diferencia del caso discreto, en una RPC una transición  $t_i$  se encuentra habilitada en un marcado  $m$  si y sólo si  $\forall p \in \bullet t_i, m(p) > 0$ .

**Definición 2.1.27** *Grado de habilitación de una transición*

*El grado de habilitación de una transición  $t$  es:*

$$enab(t, m) = \min_{p \in \bullet t} \frac{m(p)}{Pre(p, t)} \quad (2.23)$$

La transición  $t$  puede disparar cualquier cantidad  $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < enab(t, m)$  y llevando el sistema a un nuevo marcado  $m' = m + \alpha C(P, t)$ , donde  $C$  es la matriz de incidencia previamente mencionada en la definición 2.1.8.

Si un marcado  $m'$  puede ser alcanzado desde  $m_0$  con una secuencia de disparos  $\sigma$ , la ecuación fundamental de marcado puede ser reescrita como:

$$m = m_0 + C\sigma \quad (2.24)$$

donde  $\sigma \in (\mathbb{R} \cup 0)^{|T|}$  es el vector de conteos de disparos.

**Definición 2.1.28** *Acotamiento, vivacidad y lim-vivacidad para RPC*

*Una RPC  $N_c$  es:*

**Acotada** si todos sus lugares son acotados

$$\forall p_i \in P, \exists b_i \in \mathbb{R} | b_i \geq m(p_i) \quad \forall m(p) \in RS(N_c, m_0)$$

**Viva** si toda transición es viva (Cualquier transición puede volver a ser disparada desde cualquier marcado alcanzable)

La propiedad de vivacidad puede ser extendida a **lim-vivacidad** suponiendo que una secuencia de longitud infinita puede ser disparada. Una transición  $t$  no es lim-viva ssi existe un marcado alcanzable tal que ninguno de sus sucesores habilite a la transición  $t$ .

**Definición 2.1.29** *Acotamiento estructural y Vivacidad estructural*

*Una red es:*



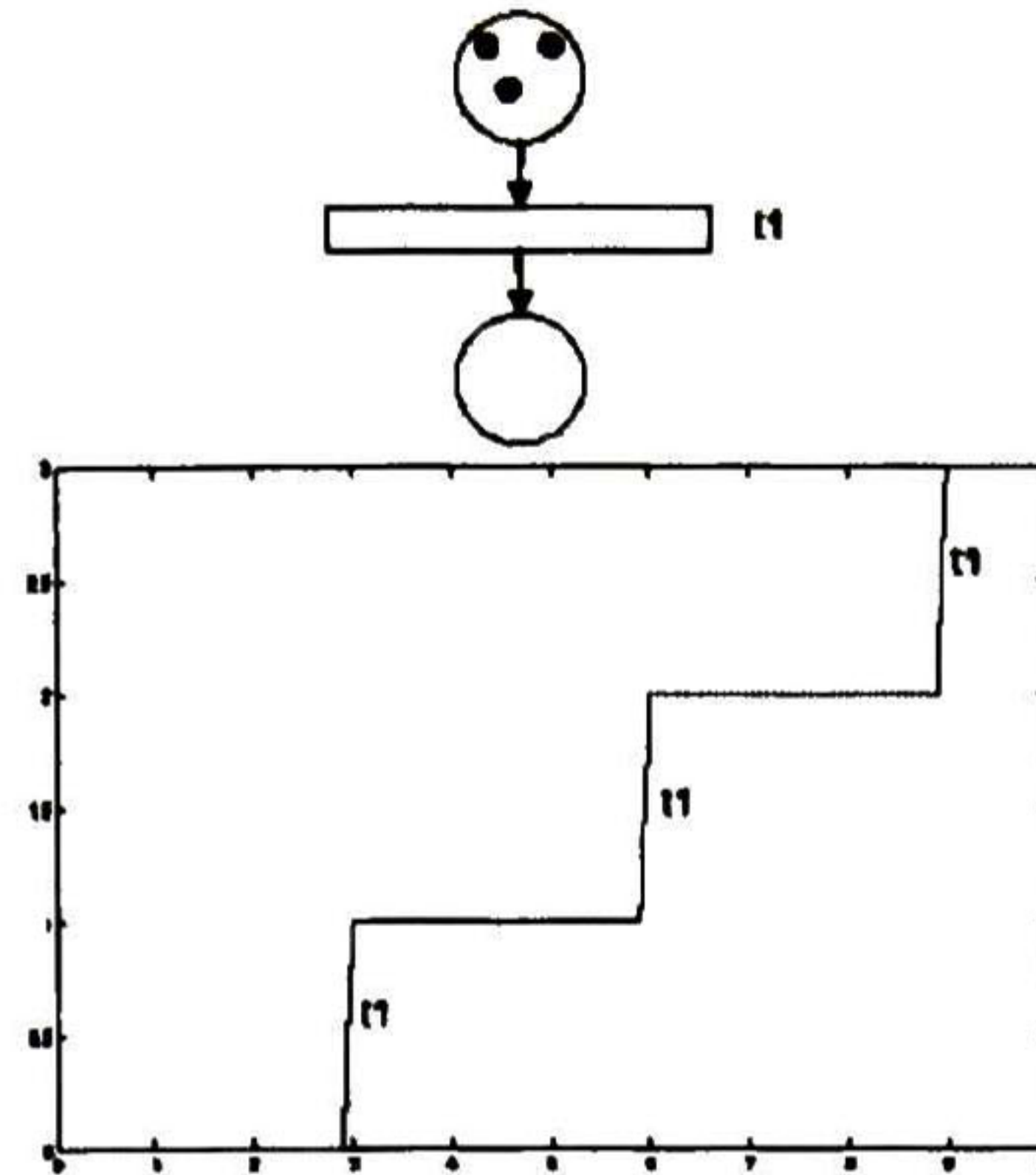


Figura 2.4: Evolución de marcado de una RPT en el tiempo

**Estructuralmente acotada** cuando  $(N, m_0)$  es acotada para cualquier marcado inicial  $m_0$

**Estructuralmente viva** cuando existe un marcado  $m_0$  tal que la red  $(N, m_0)$  es viva.

#### 2.1.4. Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPCT)

Como se mencionó previamente, existen dos semánticas importantes con las cuales se ha trabajado en las Redes de Petri Continuas Temporizadas (RPCT): Semántica de Servidor Único (para detalles y ejemplos de aplicación vea [13]) y Semántica de Servidores Infinitos. Su principal diferencia radica en que en el primer caso se tiene un sistema regido por ecuaciones lineales [9] [7] y transiciones con flujos de marcas constantes, mientras que en el segundo se cuenta con un sistema dinámico en el que las transiciones tienen flujos dependientes del marcado, lo cual es representado por medio de ecuaciones diferenciales.

Partiendo de la introducción de tiempo en las RP, es posible de manera natural introducirlo en el modelo continuo. Si una tarea, representada por la transición  $t_i$  en una RPT, toma  $d_i$  unidades de tiempo, se asigna el tiempo de retardo correspondiente en la transición.

El paso de una marca de un lugar  $p$  a otro  $p'$  a través de la transición  $t_i$  en una RPT representa que se completó la tarea que dicha transición representa [2]. En la figura 2.4 se observa la evolución del marcado ocasionado por el disparo de una transición.

Para capturar dicho comportamiento en el caso continuo, a la transición  $t_i$  se le asigna una tasa de disparo máximo  $\lambda_i = \frac{1}{d_i}$  de modo que tome el mismo tiempo en pasar una marca completa en el caso discreto que en el continuo. En la figura 2.5 se ve la similitud entre los



dos modelos.

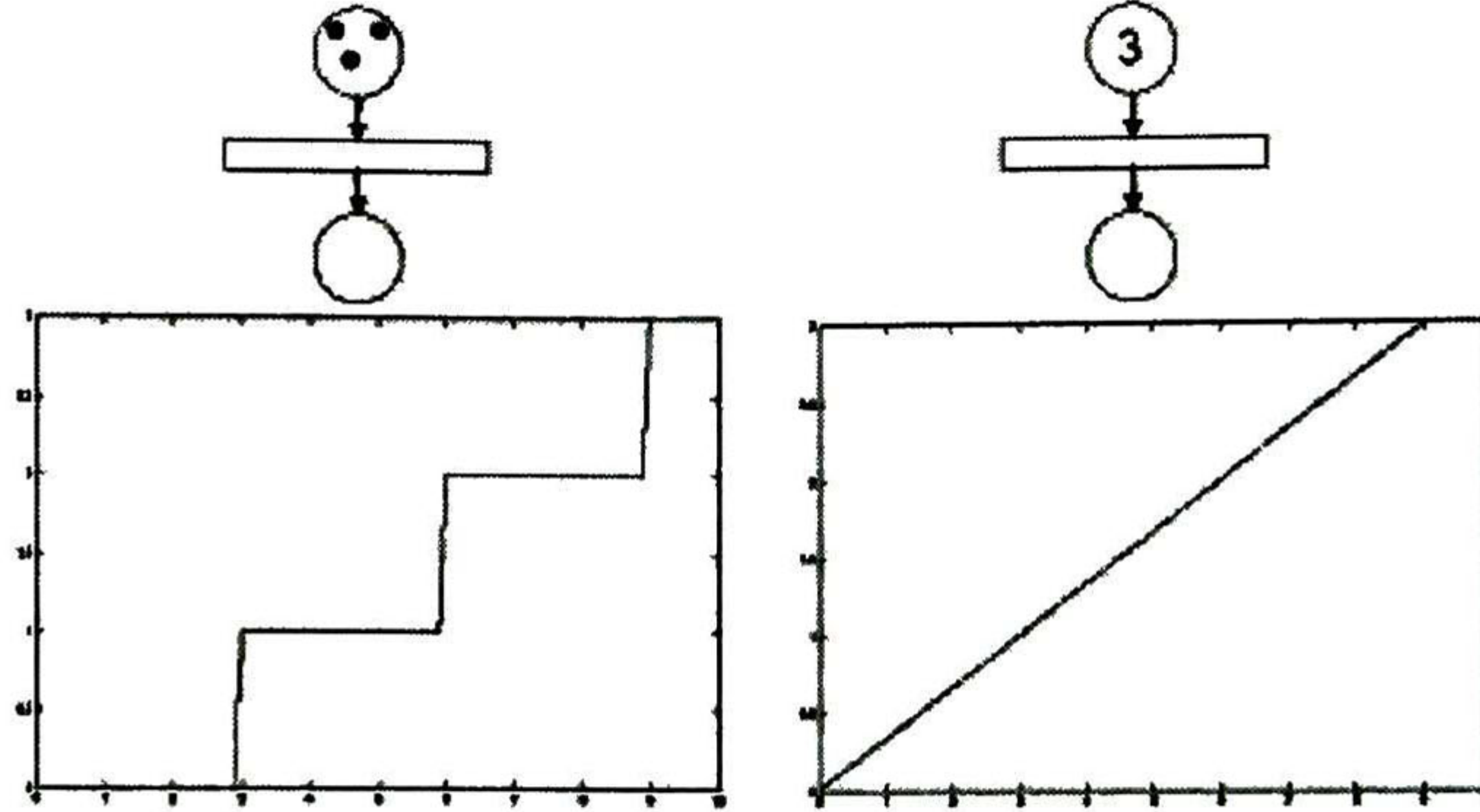


Figura 2.5: Evolución de marcado en el tiempo de una RPT y una RPCT

**Definición 2.1.30** *Red de Petri Continua Temporizada (RPCT)*

Una **RPCT**  $(N_c, \lambda)$  es una **RPC**  $N_c$  (sin tiempo) junto con una función  $\lambda : T \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{|T|}$  donde  $\lambda(t_i) = \lambda_i$  es la tasa de disparos de la transición  $t_i$ .

**Definición 2.1.31** *Sistema de Red de Petri Continua Temporizada*

Un **sistema RPCT** es una tupla  $\Sigma = (N_c, \lambda, m_0)$ , donde  $(N_c, \lambda)$  es una **RPCT** y  $m_0$  es el marcado inicial de la red.

Con estas definiciones, la ecuación fundamental de marcado depende del tiempo  $\tau$ :

$$m(\tau) = m_0 + C \cdot \sigma(\tau) \quad (2.25)$$

Si derivamos la ecuación 2.25 con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{m}(\tau) = C \cdot \dot{\sigma}(\tau) \quad (2.26)$$

Utilizando como notación  $f(\tau) = \dot{\sigma}(\tau)$  para representar el flujo que pasa a través de una transición en el tiempo, se obtiene la ecuación  $\dot{m}(\tau) = C \cdot f(\tau)$ , que puede ser reescrita por simplicidad como:



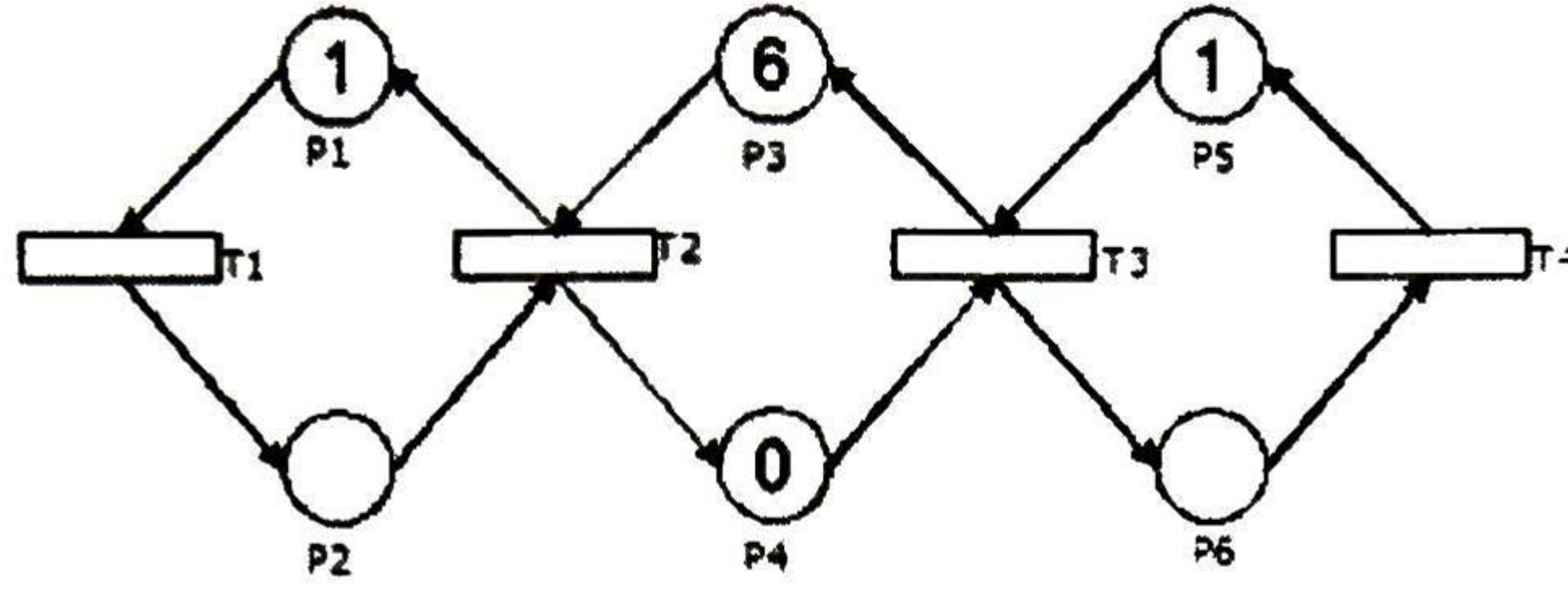


Figura 2.6: Ejemplo de un sistema de RPCT

$$\dot{m} = C f \quad (2.27)$$

En este trabajo, la investigación se enfocó en la semántica de servidores infinitos, donde el flujo de cada transición depende del grado de habilitación de cada una de las transiciones, de modo que el vector de flujos  $f$  puede definirse como:

$$f(t_i) = f_i = \lambda(t_i) \min_{p_j \in \bullet t_i} \left\{ \frac{m(p_j)}{Pre(p_j, t_i)} \right\} \quad (2.28)$$

Note que el flujo es proporcional al grado de habilitación de la transición y a la tasa de disparo  $\lambda_i$  de la transición.

**Ejemplo 2.1.32** Considere como ejemplo la figura 2.6. Los flujos de las transiciones son:

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t_1) \cdot m(p_1) \\ \lambda(t_2) \cdot \min(m(p_2), m(p_3)) \\ \lambda(t_3) \cdot \min(m(p_4), m(p_5)) \\ \lambda(t_4) \cdot m(p_6) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$f = \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 \\ \lambda_2 \min(m_2, m_3) \\ \lambda_3 \min(m_4, m_5) \\ \lambda_4 m_6 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Si el vector de tasas de disparo  $\lambda = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , entonces



$$\dot{m} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 m_1 \\ \lambda_2 \min(m_2, m_3) \\ \lambda_3 \min(m_4, m_5) \\ \lambda_4 m_6 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\dot{m} = \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 - f_1 \\ f_1 - f_2 \\ f_3 - f_2 \\ f_2 - f_3 \\ f_4 - f_3 \\ f_3 - f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min(m_2, m_3) - m_1 \\ m_1 - \min(m_2, m_3) \\ \min(m_4, m_5) - \min(m_2, m_3) \\ \min(m_2, m_3) - \min(m_4, m_5) \\ m_6 - \min(m_4, m_5) \\ \min(m_4, m_5) - m_6 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

**Nota 2.1.33** Una RPCT bajo la semántica de servidores infinitos es un sistema lineal conmutado, dado por el operador  $\min$  que aparece en la definición de flujo.

El sistema lineal conmutado aparece por las sincronizaciones del sistema ( $|\bullet t| > 1$ ). Cada uno de los sistemas lineales está definido por un conjunto de arcos en  $Pre$  que restringen el flujo que pasa por cada una las transiciones.

**Definición 2.1.34** Restricción en el flujo que pasa por una transición

Sea  $\Sigma = (N_c, \lambda, m_0)$  una RPCT y sea  $m$  un marcado alcanzable. Se dice que el arco  $(p, t)$  restringe el flujo que pasa por una transición  $t$  en el marcado  $m$  ssi

$$f(t) = \lambda(t) \frac{m(p)}{Pre(p, t)} \quad (2.33)$$

**Definición 2.1.35** Configuración

Sea  $\Sigma = (N_c, \lambda, m_0)$  una RPCT. Una **configuración** de  $\Sigma$  en el marcado  $m$  es un conjunto de  $(p, t)$  arcos que describen el flujo real que pasa por todas las transiciones.

El número total de configuraciones en un sistema está dado por

$$NumConfig = \prod_{i=1}^{|T|} |\bullet t_i| \quad (2.34)$$



Entonces, una configuración es una cobertura de  $T$  por sus arcos de entrada. Una posible representación de una configuración dada es a través de una matriz de configuración  $\Pi$ . La construcción de esta matriz se explica a continuación.

**Definición 2.1.36** *Vector característico de Restricción del flujo que pasa por una transición*

Sea el arco  $(p_i, t_j)$  el que restringe el flujo que pasa por la transición  $t_j$  en el marcado  $m$ , entonces el **vector característico de restricción del flujo que pasa por la transición**  $\pi_j(m)$  es un vector con sus elementos igual a cero y un uno en la posición  $i$ .

$$\pi_j(m) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ \dots \\ i-1 \\ i \\ i+1 \\ \dots \\ n \end{array} \quad (2.35)$$

Es claro que  $\pi_j(m) \in \{0, 1\}^{|P|}$  y que depende del marcado. En caso de que existan dos arcos  $(p_i, t)$  y  $(p_j, t)$  cumplan con la definición 2.1.34, cualesquiera de los dos vectores característicos puede ser utilizado para representar al arco en la configuración, pero siempre se deberá elegir sólo uno.

**Definición 2.1.37** *Matriz de configuración  $\Pi(m)$*

Dado un marcado  $m$ , la **matriz de configuración** se construye con el transpuesto de los vectores característicos de restricción en la dinámica de una transición.

$$\Pi(m) = \begin{bmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \\ \dots \\ \pi_{|T|}^T \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

**Ejemplo 2.1.38** *En la figura 2.6, el sistema tiene 4 configuraciones. Sus matrices de configuración  $\Pi(m)$  son*



$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

cuando  $m_2 < m_3$  y  $m_4 < m_5$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

cuando  $m_2 > m_3$  y  $m_4 < m_5$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

cuando  $m_2 < m_3$  y  $m_4 > m_5$  y

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

cuando  $m_2 > m_3$  y  $m_4 > m_5$ .

Existe una matriz de configuración  $\Pi(m)$  asociada a cada marcado  $m$  de la red. Nótese que el producto  $\Pi(m) \cdot m(\tau)$  es la representación vectorial del operador mín del grado de habilitación de cada transición,  $enab(\tau)$ , con el marcado  $m(\tau)$ .

**Definición 2.1.39** *Matriz de máxima tasa de disparo*

*La matriz máxima tasa de disparo se denota por:*

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{|T|}) \quad (2.41)$$

**Nota 2.1.40** *De acuerdo a las definiciones anteriores y su notación, el vector de flujo y la ecuación fundamental son:*



$$f = \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m \quad (2.42)$$

$$\dot{m} = C \cdot \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m \quad (2.43)$$

## 2.2. ACCIONES DE CONTROL EN RPCT

En una RPCT las acciones de control se pueden dar a través de las transiciones del sistema. ¿Qué acciones son válidas?

Se debe tomar en cuenta que las transiciones de una RPT representan tareas y que el retardo asociado a las transiciones representa el tiempo que ésta toma en realizarse (en muchos casos representa el tiempo promedio que éstas toman).

Dicho tiempo no puede ser disminuido sin que represente una modificación al sistema de manera importante, como lo sería el reemplazar una máquina en una línea de producción por otra más eficiente en tiempo. Sin embargo, es posible detener la ejecución de alguna de estas tareas por así convenir a la programación de tareas (Scheduling), para lograr comportamientos requeridos en el sistema.

El retrasar la ejecución de algunas tareas puede interpretarse como incrementar el tiempo que una tarea toma en ejecutarse. Entendido de éste modo, en una RPT es posible aumentar el tiempo que una transición tiene asignada, pero no disminuirlo.

De la definición 2.1.30 y la manera en que se asignan las tasas de disparo de las transiciones, se puede concluir que la única acción de control válida es disminuir o frenar el flujo de una transición.

### Definición 2.2.1 *Transiciones Controlables e Incontrolables*

*Si el flujo de una transición  $t$  puede ser disminuido o inclusive detenido, se dirá que dicha transición es **controlable**. En cualquier otro caso, la transición se dice ser **Incontrolable** o no controlable.*

El flujo de una transición después de una acción de control se convierte en  $f_i - u_i$ , donde  $f_i$  es el flujo del sistema no forzado, es decir, sin control (vea la definición 2.42) y  $u_i$  es la acción de control. El vector de flujo controlado queda expresado como

$$f = \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m - u \quad (2.44)$$



donde  $u_i = 0$  si la transición  $t_i$  no es controlable. La ecuación fundamental con flujo controlado quedaría como:

$$\dot{m} = C \cdot (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m - u) \quad (2.45)$$

Está claro que el flujo controlado deberá ser mayor a cero y como sólo se puede reducir, entonces el control del sistema queda acotado como se muestra:

$$0 \leq u \leq \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m$$

## 2.3. ECUACIÓN DE ESTADO Y CONTROLABILIDAD

Una RPCT puede ser representada por un sistema lineal conmutado positivo y acotado [4].

La familia de sistemas lineales se origina porque la RPCT tiene varias configuraciones y cada configuración resulta en un sistema lineal. Además el estado, que en este caso el marcado en cada lugar, y el disparo de una transición siempre son positivos.

Finalmente, el acotamiento se obtiene porque las marcas de un lugar no puede ser mayor que la regla dictada por los P-Semiflujos y el disparo de una transición siempre es positivo, pero con una cota que depende el número de carcass de los lugares de entrada.

En el caso de la dimensión del estado  $n$ , en el caso general de los sistemas lineales, define un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . Si el sistema puede ser llevado de cualquier condición inicial a cualquier punto dentro del espacio con alguna entrada de control, se dice que el sistema es controlable.

Sin embargo, si se considera el vector de marcado  $m$  como el estado del sistema, en las RP en general existen componentes invariantes, como es el caso de los P-Semiflujos, donde el número de marcas permanece constante. Tales condiciones hace que el valor del marcado no pueda ser cualquiera en cada lugar y se limita el tipo de redes que podrían ser consideradas controlables de acuerdo a la definición clásica. Se presentará otra definición que resulta más apropiada para el tipo de sistemas con el cual se está trabajando.

Es fácil de ver que el espacio que genera el estado de un sistema RPCT no es un espacio vectorial. Primero, el valor del estado  $m \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)^{|P|}$ , donde  $P$  es el conjunto de lugares de la red; además, cuando existen P-Semiflujos, el marcado nulo  $m = \mathbf{0}^{|P|}$  no se puede alcanzar cuando el marcado inicial  $m_0 \neq \mathbf{0}^{|P|}$ .



En general, no se tiene ninguna estructura matemática para el conjunto de estados alcanzables.

Para el caso particular de RPCT es un sistema de múltiples entradas, puesto que en cada transición controlable se tiene una entrada al sistema.

### 2.3.1. Ecuación de Estados

La ecuación de estado del sistema fue introducida en el capítulo anterior.

$$\dot{m} = C \cdot (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m - u) \quad (2.46)$$

$$0 \leq u \leq \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m \quad (2.47)$$

Proponiendo

$$u = I_u \cdot \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m \quad (2.48)$$

donde  $I_u$  es una matriz diagonal con elementos  $0 \leq I_{ui} \leq 1$  para cumplir con el acotamiento del control (garantizar  $f_i - u_i \geq 0$ ).

Así, es posible sustituir y factorizar la ecuación 2.46 del siguiente modo:

$$\dot{m} = C \cdot (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m - I_u \cdot \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m) \quad (2.49)$$

$$\dot{m} = C \cdot (I - I_u) (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m) \quad (2.50)$$

Haciendo

$$I_c = I - I_u \quad (2.51)$$

es posible dejar el sistema expresado como



$$\dot{m} = C \cdot I_c \cdot (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m) \quad (2.52)$$

donde  $I_c$  es una matriz diagonal con elementos  $0 \leq I_{ci} \leq 1$  que representan el porcentaje de apertura de cada una de las transiciones.

A partir de la matriz de incidencia  $C$  pueden ser calculados los P-Semiflujos del sistema. Suponga ahora que el conjunto

$$\{m_1^i, m_2^i, \dots, m_q^i\}$$

es el conjunto de marcados que pertenecen al  $i$  –ésimo P-Semiflujo. Entonces

$$m_1^i + m_2^i + \dots + m_q^i = K \quad (2.53)$$

Derivando la ecuación previa, se tiene

$$\dot{m}_1^i + \dot{m}_2^i + \dots + \dot{m}_q^i = 0 \quad (2.54)$$

Por lo tanto, es posible calcular la dinámica de marcado utilizando  $q - 1$  lugares y la ley conservativa que da el  $i$  –ésimo P-Semiflujo.

Para obtener una ecuación mínima de RPCT es necesario eliminar las filas linealmente dependientes de la matriz de incidencia  $C$ , de manera tal que el rango de la matriz se preserve.

**Definición 2.3.1** *Estado mínimo de un sistema RPCT*

*El estado mínimo  $m_m$  de una RPCT es una proyección del estado  $m$  del sistema*

$$m_m(\tau) = P \cdot m(\tau) \quad (2.55)$$

donde  $P$  es la matriz de proyección.

En general,  $P$  es no invertible, pero es posible obtener el estado del sistema completo  $m$  a partir del mínimo  $m_m$ . Para ello, se utiliza la siguiente ecuación:

$$m(\tau) = \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_m(\tau) \\ B^T m_0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$



donde  $B$  es una base de P-Semiflujos del sistema.

Note que  $B^T m_0$  es constante y contiene la información de las marcas en los P-Semiflujos.

Ahora, defina una función  $G$  tal que:

$$G(m_m(\tau)) = \Pi(m) \cdot m(\tau)$$

Finalmente, la ecuación de estado mínima queda como:

$$\dot{m}_m = C_m I_c \Lambda G(m_m) \quad (2.57)$$

donde  $m_m$  es el vector estado mínimo,  $C_m = P \cdot C$  y las matrices  $I_c$  y  $\Lambda$  son las previamente definidas en la ecuación 2.52.

Cabe señalar que la ecuación 2.57 no representa un modelo mínimo del sistema, puesto que para el computo del marcado del sistema RPCT es necesaria la información de los P-Semiflujos. Sin embargo, es posible demostrar que existe una biyección entre  $m$  y  $m_m$  (para mayor detalles vea [26]).

Algunas definiciones importantes previas a la controlabilidad se presentan a continuación.

**Definición 2.3.2** *Conjunto de Estados Estructuralmente Admisibles (SASS(N) por sus siglas en inglés. Vea [26])*

Sea  $N$  una RPCT. El SASS(N) se define como  $SASS(N) = \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|P|}$ .

**Definición 2.3.3** *Relación  $\beta$*

Sea  $N$  una RPCT. Sea  $B$  una base del anulador izquierdo de la matriz de incidencia  $C$ . La relación  $\beta : SASS(N) \rightarrow SASS(N)$  está definida como:

$$m_1 \beta m_2 \text{ ssi } B^T m_1 = B^T m_2, \forall m_1, m_2 \in SASS(N) \quad (2.58)$$

$Class(m_0)$  es la clase de equivalencia del marcado inicial  $m_0$  bajo la relación  $\beta$ .

Para ejemplificar, vea la figura 2.7 donde se muestra una RPCT. Su  $SASS(N)$  es el primer cuadrante de  $\mathbb{R}^2$  donde en el eje horizontal se muestra el marcado del lugar  $p_1$  y en el vertical el marcado del lugar  $p_2$ . Su  $Class(m_0)$  es la línea que cumple la ecuación  $m(p_1) + m(p_2) = 1$ , que es el P-Semiflujo del sistema.



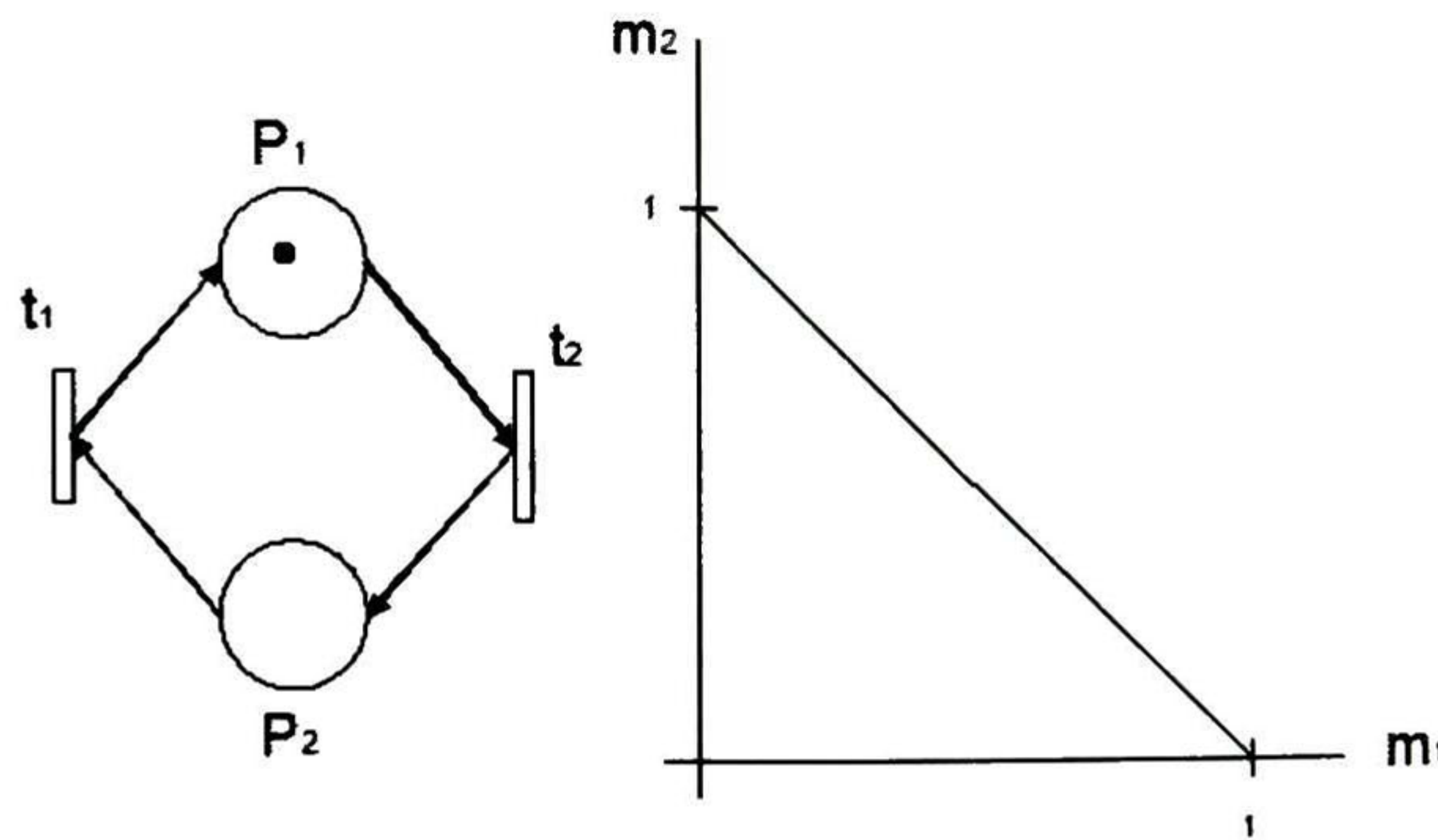


Figura 2.7: Un sistema RPCT, su  $SASS(N)$  y su  $Class(m_0)$

**Definición 2.3.4** Clase de equivalencia de mínimo orden

Sea  $(N, m_0)$  un sistema RPCT. La clase de equivalencia de mínimo orden de  $m_0$  se define como:

$$Class_m(m_0) = \{m_m | m_m = Pm, m \in Class(m_0)\}$$

**Proposición 2.3.5** Caracterización del interior de  $Class_m(m_0)$

Sea  $m = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{|P|}]^T \in Class(m_0)$  un marcado  $\forall m_i \neq 0$  ssi  $m_m$  es un punto interior de  $Class_m(m_0)$ .

**Proposición 2.3.6** Equivalencia de solución de la ecuación de estados y la ecuación de estados mínima.

Una entrada  $u$  transfiere el estado  $m$  de  $m_0 \in Class(m_0)$  a  $m_1 \in Class(m_0)$  en el tiempo  $t_1$  ssi  $u$  transfiere el estado  $m_m$  de  $m_{m0}$  a  $m_{m1}$  en el tiempo  $t_1$ . Donde  $m_{m0} = Pm_0$  y  $m_{m1} = Pm_1$ .

Para detalles de su demostración vea [26].

### 2.3.2. Controlabilidad

La controlabilidad en sistemas de RPCT se definió partiendo de la definición clásica de Controlabilidad en sistemas lineales. Sin embargo, como fue previamente expuesto, la definición tradicional de los sistemas lineales no puede ser aplicada, precisamente por los



componentes conservativos de las RP. A continuación se presentan definiciones acordes a las características de las RPCT propuestas por Vázquez en [26].

Las siguientes definiciones fueron obtenidas de [26].

**Definición 2.3.7** *Completamente Controlable con Entrada Acotada (BIFC por sus siglas en inglés)*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT.  $(N, m_0)$  es Completamente controlable con entrada acotada (BIFC) si existe una entrada tal que para cualesquiera dos mercados  $m_1, m_2 \in \text{Class}(m_0)$ , es posible transferir el mercado de  $m_1$  a  $m_2$  y la entrada cumple la condición  $0 \leq u_i \leq [\Lambda\Pi(m)m]_i$  a través de toda la trayectoria

Esta definición puede ser darse sobre un conjunto de estados

**Definición 2.3.8** *Controlabilidad con Entrada Acotada (BIC)*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT.  $(N, m_0)$  es Controlable con entrada acotada (BIC) sobre  $S \subseteq \text{Class}(m_0)$  si existe una entrada tal que para cualesquiera dos estados  $m_1, m_2 \in S$ , es posible transferir el estado de  $m_1$  a  $m_2$  y la entrada cumple la condición  $0 \leq u_i \leq [\Lambda\Pi(m)m]_i$  a través de toda la trayectoria

**Proposición 2.3.9** *Equivalencia de controlabilidad de la ecuación de estados y la ecuación mínima de estados*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT. Considere la ecuación del sistema como en la ecuación (2.52) y su ecuación mínima como en (2.57) con condición inicial  $m_{m0} = Pm_0$ . El sistema  $(N, m_0)$  es BIFC ssi su ecuación de estados mínima es completamente controlable sobre  $\text{Class}_m(m_0)$  y  $I_{ci} \in [0, 1]$  en toda la trayectoria.

Para referencia de su demostración, favor de ver [26].

Los siguientes teoremas consideran el caso en el que todas las transiciones son controlables. En el resto del presente trabajo, se considerará que todas las transiciones son controlables.

**Teorema 2.3.10** *Controlabilidad sobre el interior de  $\text{Class}(m_0)$*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT. Considere la ecuación de estado mínima de la red como en la ecuación (2.57) y sea  $n$  el orden de la ecuación de estado mínima. Sea  $S$  el conjunto de todos los puntos interiores de  $\text{Class}(m_0)$ . El sistema  $(N, m_0)$  es BIC sobre  $S$  ssi  $\forall d \in \mathbb{R}^n \exists v \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|T|}$  tal que  $C_m v = d$ .

La demostración de este teorema se encuentra en [26].



El significado del teorema 2.3.10 es simple. La ecuación  $\dot{m}_m = C_m f$  representa la ecuación de estado mínima. Si existe  $v$  tal que  $C_m v = d$  significa que el campo vector de  $\dot{m}_m$  puede ser orientado en cualquier dirección  $d \in \mathbb{R}^n$ . En este caso, es posible dirigirse hacia cualquier punto del espacio alcanzable del sistema.

**Teorema 2.3.11** *Condición equivalente de controlabilidad*

$\forall d \in \mathbb{R}^n, \exists v \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|T|}$  tal que  $C_m v = d$  ssi  $\exists k \in \ker_d(C_m), k \in \mathbb{R}^{|T|}$ , donde  $\ker_d(C_m)$  es el anulador derecho de  $C_m$ .

*La demostración de este teorema se encuentra en [26].*

Este teorema busca un T-Semiflujo positivo (todos los elementos del T-Semiflujo son positivos). Si es posible encontrarlo, quiere decir que un cambio en el mercado ocasionado por el disparo de alguna transición puede ser compensado por el disparo del resto de las transiciones del sistema (en alguna proporción adecuada). La importancia de que sea positivo radica en que cualquier cambio puede ser compensado y no sólo el de algún sub-conjunto de lugares.

Una consecuencia del teorema 2.3.11 se presenta en el siguiente teorema, que da condiciones necesarias y suficientes para la alcanzabilidad.

**Teorema 2.3.12** *Alcanzabilidad*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT. Considere la ecuación de estado mínima de la red como en la ecuación (2.57) y sea  $n$  el orden de la ecuación de estado mínima. Sea  $S \subseteq \text{Class}_m(m_0)$  un conjunto convexo tal que  $\forall m_m \in S$  sus elementos sean diferentes de cero. El mercado  $m_{md} \in S$  es alcanzable desde  $m_0 \in S$  ssi  $\exists v \in \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|T|}$  tal que  $C_m v = (m_{md} - m_{m0})$ .

*La demostración de este teorema se encuentra en [26].*

Cabe señalar que el teorema anterior da condiciones de alcanzabilidad incluso cuando el sistema no sea BIFC.

### 2.3.3. Marcados de Equilibrio

Los marcados de equilibrio  $m_{eq}$  en una RPCT son aquellos en los que con alguna acción de control es posible mantener  $m_{eq}$  para todo tiempo posterior. En una RPCT es posible inducir infinitos puntos de equilibrio, pero algunos de éstos resultan importantes por sus características óptimas en algún sentido [12], [16].



Se puede escribir  $\dot{m}_d(u_d)$  cuando en la ecuación 2.46 se hace  $u = u_d$ .

$$\dot{m} = C \cdot (\Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m - u_d) \quad (2.59)$$

**Definición 2.3.13** *Puntos de equilibrio [21]*

Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT. Sea  $m_d \in RS(N, m_0)$  y  $0 \leq u_d \leq \Lambda \Pi(m_d) m_d$ . Entonces  $(m_d, u_d)$  es un **punto de equilibrio** si  $\dot{m}_d(u_d) = 0$ .

Cualquier mercado de equilibrio puede mantenerse de manera trivial con una entrada  $u = f$ , ( $I_c = 0$ ) puesto que  $\dot{m} = C(f - u) = 0$ . Sin embargo, esta solución normalmente no tiene ningún sentido práctico. ¿Es posible mantener un mercado de equilibrio con  $u \neq f$ ?

Sea  $m$  el mercado actual de la red. Suponga que en la red existe algún vector  $X$ , tal que  $C \cdot X = 0$ , es decir,  $X$  es un T-Semiflujo. ¿Existe algún vector  $u$  tal que  $m$  sea un vector de equilibrio?

**Proposición 2.3.14** *Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT. Sea  $m$  un punto interior de  $Class(m_0)$  y  $f = \Lambda \Pi(m)m$  el flujo del sistema no forzado. Si existe un T-Semiflujo  $X_i$  ( $C \cdot X_i = 0$ ), entonces, existe  $u$  tal que el par  $(m, u)$  es un mercado de equilibrio y que  $u \neq f$  ( $u$  es una solución no trivial).*

**Demostración.** Como  $m$  es un punto interior de  $Class(m_0)$  entonces  $m(p_i) \neq 0 \forall p \in P$ . Entonces,  $f = \Lambda \Pi(m)m$ , tiene sólo elementos  $f_j > 0$ .

Además es claro que  $C \cdot (\alpha \cdot X_i) = 0$  para cualquier valor  $\alpha \geq 0$ .

La ecuación  $I_\alpha f = \alpha \cdot X_i$  tiene solución para cualquier  $\alpha \geq 0$ , donde  $I_\alpha$  es una matriz diagonal con elementos  $I_{\alpha i} > 0$ .

$$I_\alpha f = \left[ I_{\alpha 1} f_1 \quad I_{\alpha 2} f_2 \quad \dots \quad I_{\alpha |T|} f_{|T|} \right]^T \quad (2.60)$$

$$\alpha \cdot X_i = \left[ \alpha \cdot x_{i1} \quad \alpha \cdot x_{i2} \quad \dots \quad \alpha \cdot x_{i|T|} \right]^T \quad (2.61)$$

La solución es de hecho

$$I_{\alpha j} = \frac{\alpha \cdot x_{ij}}{f_j} \quad (2.62)$$

Para encontrar una matriz diagonal  $I_c$  que cumpla con la cota  $0 < I_{ci} \leq 1$  basta con encontrar cualquier valor  $\beta$  tal que



$$\beta \cdot \max_j \{I_{\alpha j} \cdot f_j\} \leq 1 \quad (2.63)$$

$$I_c = \beta \cdot I_\alpha \quad (2.64)$$

Conociendo  $I_c$  es simple encontrar el vector  $u = I_u \cdot f$  despejando de la ecuación 2.51. ■

La proposición 2.3.14 muestra que siempre que se requiera que un mercado  $m$  sea de equilibrio y además exista algún T-semiflujo en la RPCT, entonces existe  $u$  tal que el par  $(m, u)$  es un mercado de equilibrio de acuerdo a la definición 2.3.13. Sin embargo, existen infinitas soluciones para  $u$ . La siguiente proposición permite encontrar la solución menos restrictiva al flujo.

**Proposición 2.3.15** *Sea  $(N, m_0)$  un sistema de RPCT y sea  $m$  un punto interior de  $\text{Class}(m_0)$ . Si existe una solución no trivial  $u$  para que el par  $(m, u)$  sea un mercado de equilibrio, entonces existe un par  $(m, u^*)$  tal que  $\sum_i f_i$  es máxima respecto al par  $(m, u)$ . La solución a este problema es:*

$$I_c^* = \beta^* I_c \quad (2.65)$$

donde  $\beta^* = \frac{1}{\max_j \{I_{cj}\}}$  y  $I_c = I - I_u$ ,  $I_u|u = I_u \cdot f$ .

**Demostración.** Dado un mercado  $m$ , el flujo del sistema no forzado es  $f = \Lambda\Pi(m)m$ .

Conociendo  $u$ , siempre es posible encontrar  $I_u$ , tal que  $u = I_u \cdot f$ . También es simple calcular  $I_c = I - I_u$ .

Es evidente que el flujo controlado del sistema ( $f - u^* = I_c^* \cdot f$ ) será máximo cuando los elementos de  $I_c^*$  sean máximos, puesto que  $f$  es un vector de elementos positivos y  $I_c$  es una matriz diagonal de elementos positivos.

Calculando  $\beta^* = \frac{1}{\max_j \{I_{cj}\}}$  se puede calcular  $I_c^* = \beta^* I_c$  que maximiza los elementos de

$I_c^*$ . Es claro que el valor real  $\beta^* \geq 1$ , puesto que  $0 < I_{ci} \leq 1$ .

Entonces la ecuación  $\dot{m} = C \cdot (\beta^* I_c) \cdot f = 0$ , puesto que  $\dot{m} = \beta^* \cdot C \cdot I_c \cdot f = \beta^* \cdot 0$ . ■

Es posible encontrar cual es el par  $(m, u)$ , tal que se logre maximizar la suma de flujos que pasan por las transiciones. La solución fue introducida en [20] y a continuación se presenta.

Considere el siguiente problema de programación lineal.



$$\begin{aligned}
& \text{máx } \left\{ \sum_i f_i \right\} \\
C \quad & f = 0, f \geq 0 \quad (a) \\
& m = m_0 + C \cdot \sigma \quad (b) \\
f(t_i) = & \lambda_i \frac{m(p_j)}{Pre(p_j, t_i)} - v(p_j, t_i), \forall p_j \in \bullet t_i, v(p_j, t_i) \geq 0 \quad (c)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

donde  $v(p_j, t_i)$  son variables de holgura.

En la solución del problema de programación lineal, se elige

$$u_i = \text{mín}_{p_j \in t_i} \{v(p_j, t_i)\} \tag{2.67}$$

Las soluciones presentadas no indican cual es la manera en llegar del mercado inicial  $m_0$  al mercado óptimo  $m_d$ . Estos resultados simplemente indican la ley de control  $u_d$  que se debe aplicar para mantener el sistema en equilibrio con el par  $(m_d, u_d)$ .

#### 2.3.4. Control en RPCT

A continuación se describe un algoritmo de control propuesto por Vázquez en [26]. Para mayor detalle, vea la referencia mencionada.

Sea  $(N, m_0)$  un sistema RPCT BIFC, vivo y acotado. Sea  $m_{md} \in Class_m(m_0)$  un mercado requerido y sea  $m_{m0} = Pm_0$  un punto interior de  $Class_m(m_0)$ . Defínase el vector de error mínimo como:

$$e_m(\tau) = (m_{md} - m_m) \tag{2.68}$$

Por hipótesis de controlabilidad, siempre es posible encontrar un vector  $v$  tal que

$$C_m v = e_m \tag{2.69}$$

con  $v \in \mathbb{R}^{+|T|}$ .

Para encontrar la ley de control  $I_c$  de la ecuación 2.52, se necesitan calcular los flujos del sistema como sigue:



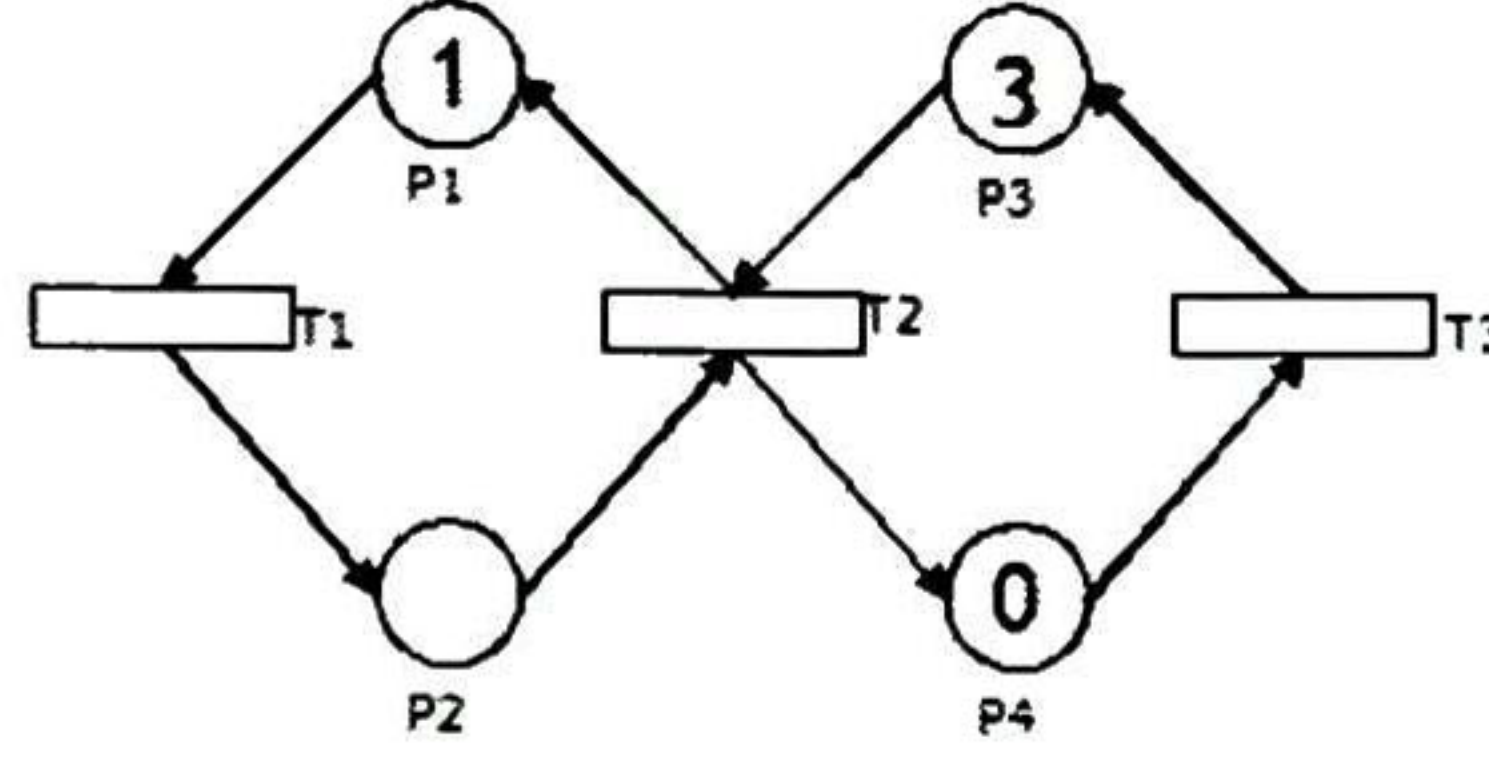


Figura 2.8: Ejemplo de RPCT

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{|T|} \end{bmatrix} = \Lambda G(m_m) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \pi_1 \\ \lambda_2 \pi_2 \\ \dots \\ \lambda_{|T|} \pi_{|T|} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Ahora, calcule la función  $\alpha(v, \Lambda G(m_m)) : \mathbb{R}^{+|T|} \times \mathbb{R}^{+|T|} \rightarrow \mathbb{R}^{+|T|}$ .

$$\alpha(v, \Lambda G(m_m)) = \frac{1}{\max \left\{ \frac{v_1}{f_1}, \frac{v_2}{f_2}, \dots, \frac{v_{|T|}}{f_{|T|}} \right\}} \quad (2.71)$$

Con la función  $\alpha(v, \Lambda G(m_m))$  calcule una entrada  $I_c$ , con  $I_{ci} \in [0, 1]$ , tal que  $\alpha(v, \Lambda G(m_m)) \cdot v = I_c \Lambda G(m_m)$ . De hecho  $I_c$  se calcula como:

$$I_c = \alpha(v, \Lambda G(m_m)) \cdot \text{diag} \left( \frac{v_1}{f_1}, \frac{v_2}{f_2}, \dots, \frac{v_{|T|}}{f_{|T|}} \right) \quad (2.72)$$

**Ejemplo 2.3.16** *Suponga que se tiene el sistema de RPCT de la figura 2.8 con marcado inicial y marcado requerido*

$$m_0 = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 2,9 \\ 0,1 \end{bmatrix}, m_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

*respectivamente.*

*La matriz de incidencia del sistema es*



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

y su vector de tasas máximas de disparo es

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

La matriz de configuración para el mercado actual es

$$\Pi(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Primero, es necesario determinar una base de los  $P$ -Semiflujos de la RPCT, de modo que se puedan encontrar los elementos de la ecuación 2.57.

$$B^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

La solución es para este caso

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Del vector de estados  $m \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)^4$ , dos de sus elementos pueden ser calculados por la ecuación 2.21. Para este caso se elige

$$m_m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

como el vector de estado mínimo. La matriz  $P$  de la ecuación 2.55 es



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

De modo que la matriz de incidencia mínima es

$$C_m = PC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Para calcular la ley de control  $I_c$  de la ecuación 2.57, se calcula el vector  $e_m$  de la ecuación 2.68

$$e_m = P(m_d - m) \quad (2.82)$$

$$e_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 2,9 \\ 0,1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.83)$$

$$e_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,9 \\ 2,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -2,9 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Una solución para el vector  $v > 0$  de la ecuación 2.69 es

$$v = \begin{bmatrix} 3,8 \\ 3,9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Los flujos del sistema en el mercado  $m_{m0}$ , de acuerdo a la ecuación 2.70 son:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 2,9 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

De este modo, la función  $\alpha(v, \Lambda G(m_m))$  de la ecuación 2.71 es

$$(v, \Lambda G(m_m)) = \frac{1}{\max \left\{ \frac{3,8}{0,9}, \frac{3,9}{0,1}, \frac{1}{0,1} \right\}} = \frac{1}{39} \quad (2.87)$$

Por último se calcula la ley de control  $I_c$  de la ecuación 2.72



$$\frac{1}{39} \cdot \text{diag} \left( \frac{3,8}{0,9}, \frac{3,9}{0,1}, \frac{1}{0,1} \right) \quad (2.88)$$

$$I_c = \begin{bmatrix} 0,1083 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2564 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Es necesario calcular  $I_c$  con este algoritmo de manera continua, conforme el marcado  $m_m$ , y por lo tanto el vector  $e_m$ , cambian.

La evolución de marcado con el control descrito se muestra en la figura 2.9. Se observa que la tendencia del marcado es asintótica hacia el marcado requerido  $m_d$ , pero después de simular el sistema por 500 unidades de tiempo, éste aún no ha sido alcanzado.

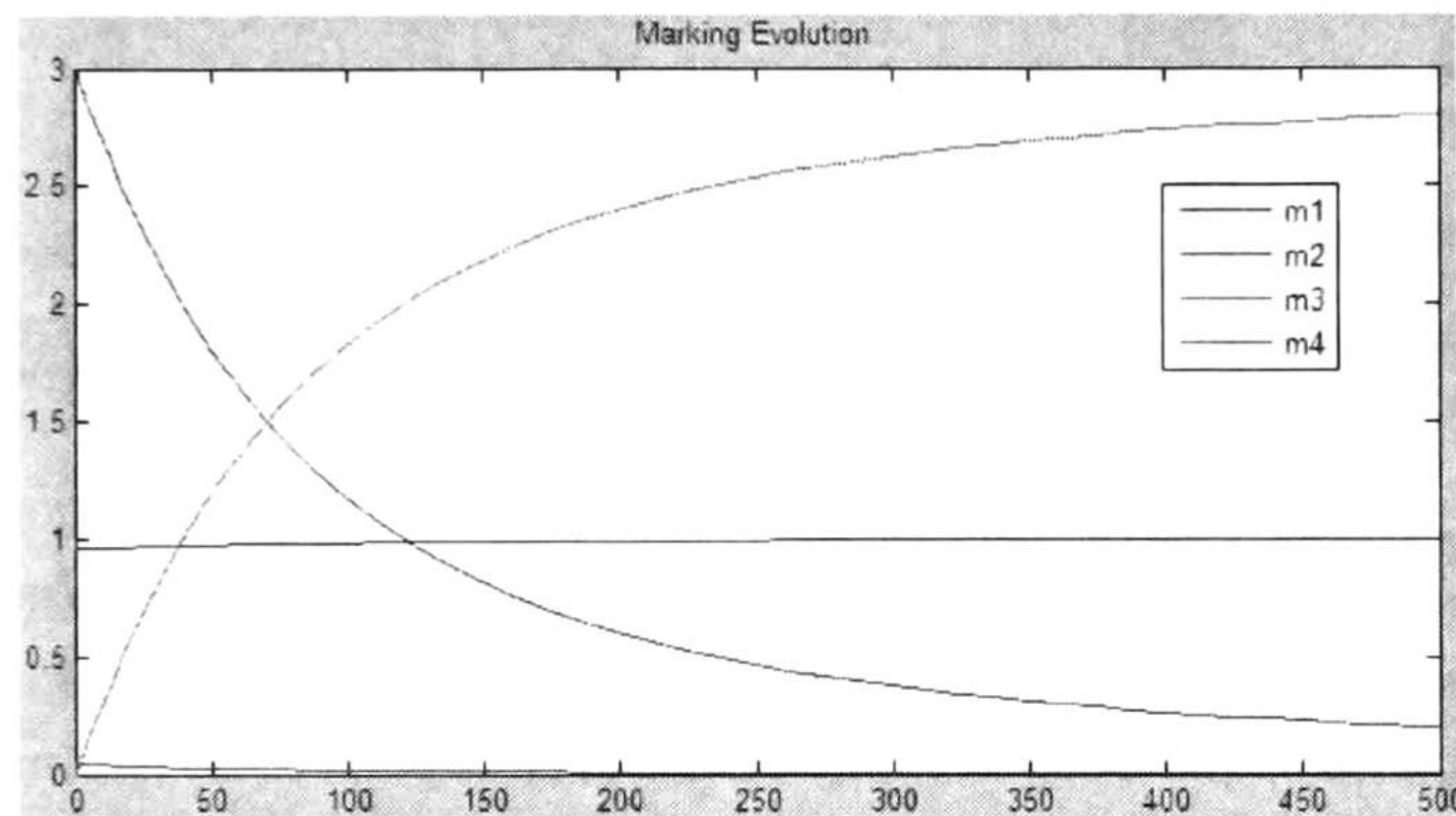


Figura 2.9: Evolución de marcado utilizando la ley de control

Del P-Semiflujo  $Y_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  se puede saber que  $m_2 = 1 - m_1$ . En la figura 2.10 se observa un plano de fase de los marcados linealmente independientes  $m_1$  y  $m_3$ , donde el marcado  $m_1$  es siempre muy cercano a 1, por lo que  $m_2$  es siempre aproximadamente 0. Tal condición, hace que el grado de habilitación de la transición  $t_2$  también tienda a 0. Este hecho provoca que la evolución del sistema sea lenta.

En la figura 2.11 se muestran los flujos del sistema controlado, que muestra gráficamente la magnitud de los flujos que pasan por cada una de las transiciones del sistema.

El control propuesto por Vázquez [26], basado en la orientación del campo vector, se dirige desde el marcado inicial  $m_0$  hasta el requerido  $m_d$  siempre en la dirección  $(m_d - m)$ , de modo que siempre intenta reducir el error del sistema.

Suponga que  $m_0$  es un marcado en la cerradura de  $Class(m_0)$ , como se muestra en



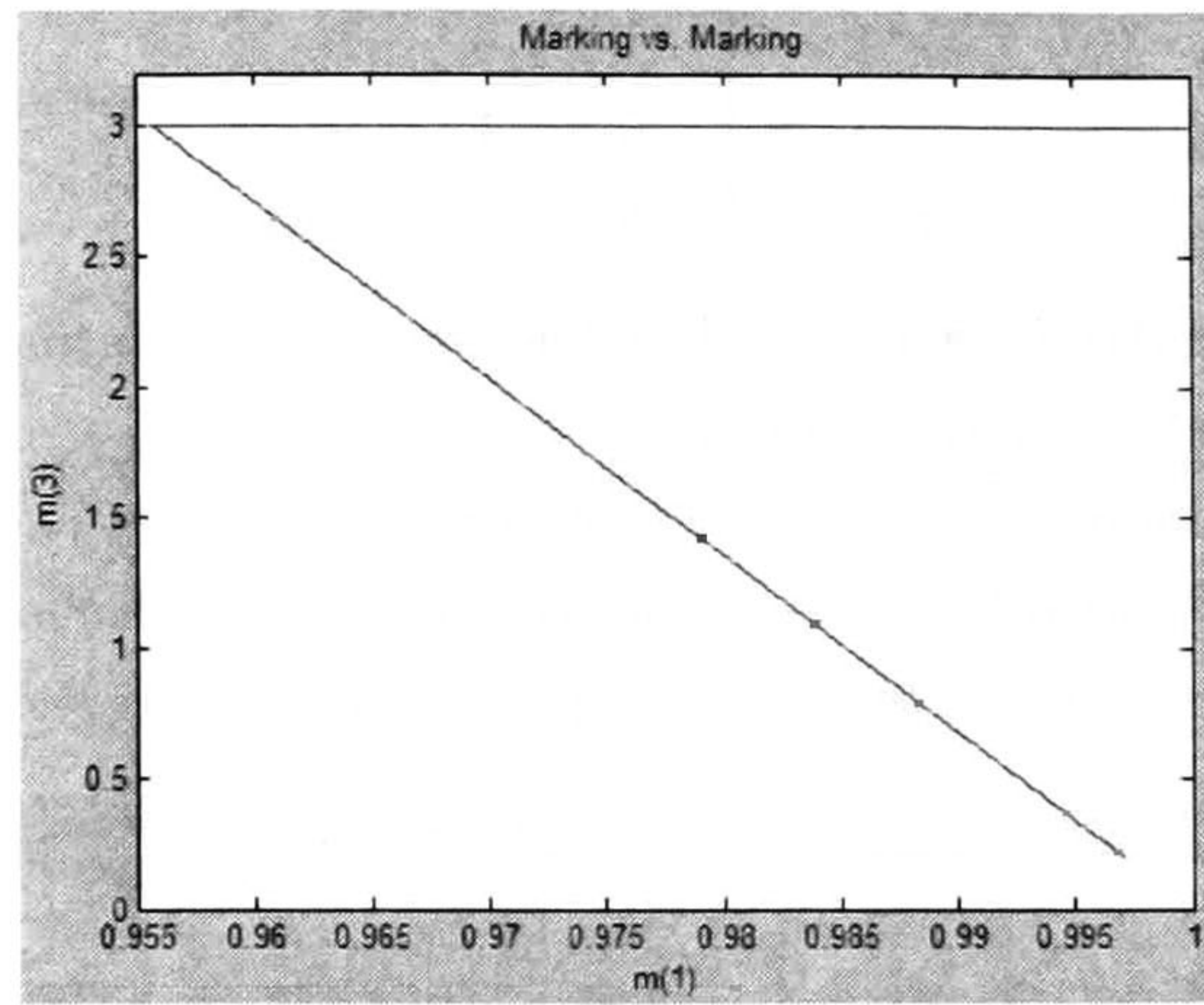


Figura 2.10: Plano de fase de 2 lugares linealmente independientes

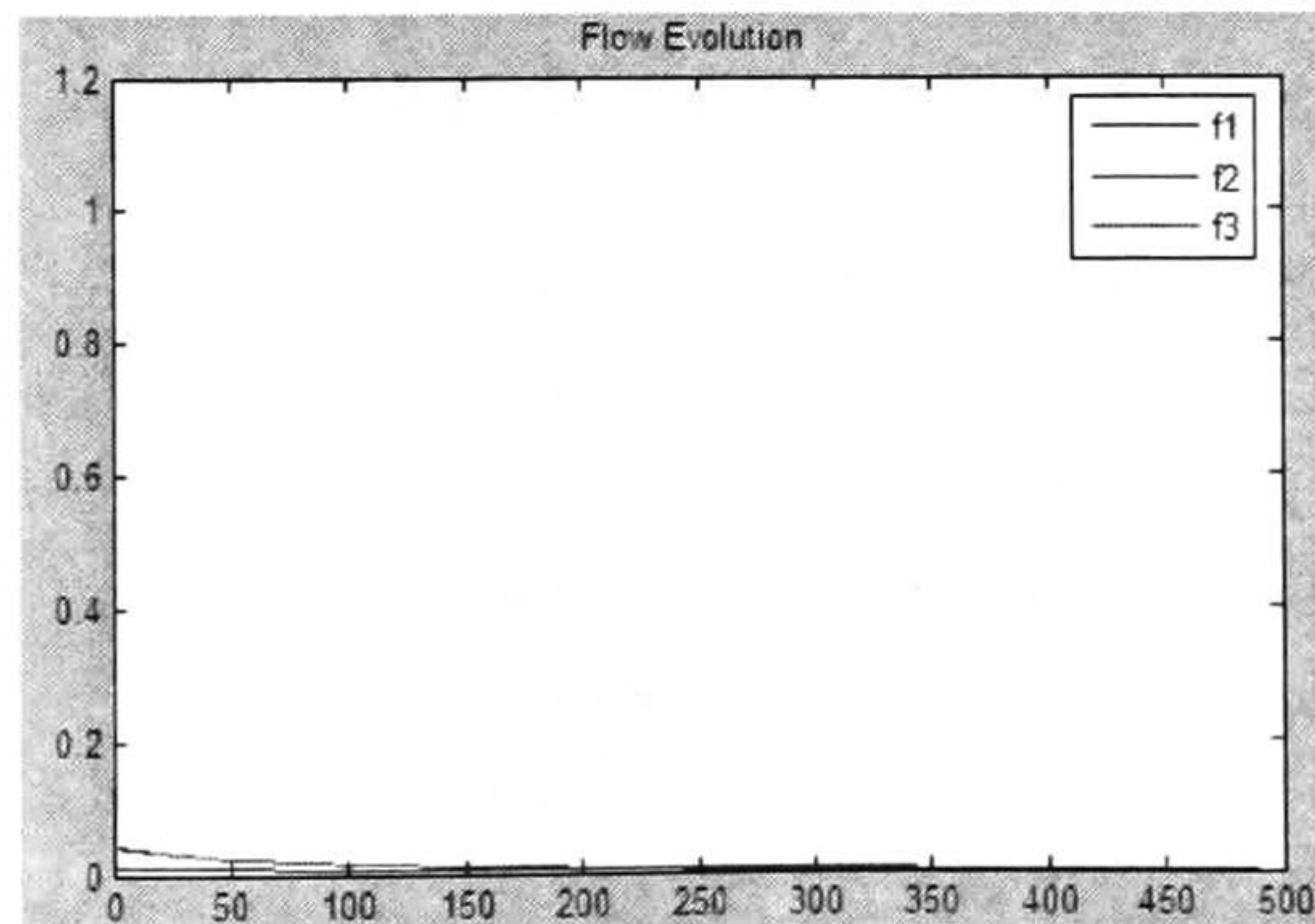


Figura 2.11: Flujos del sistema RPCT



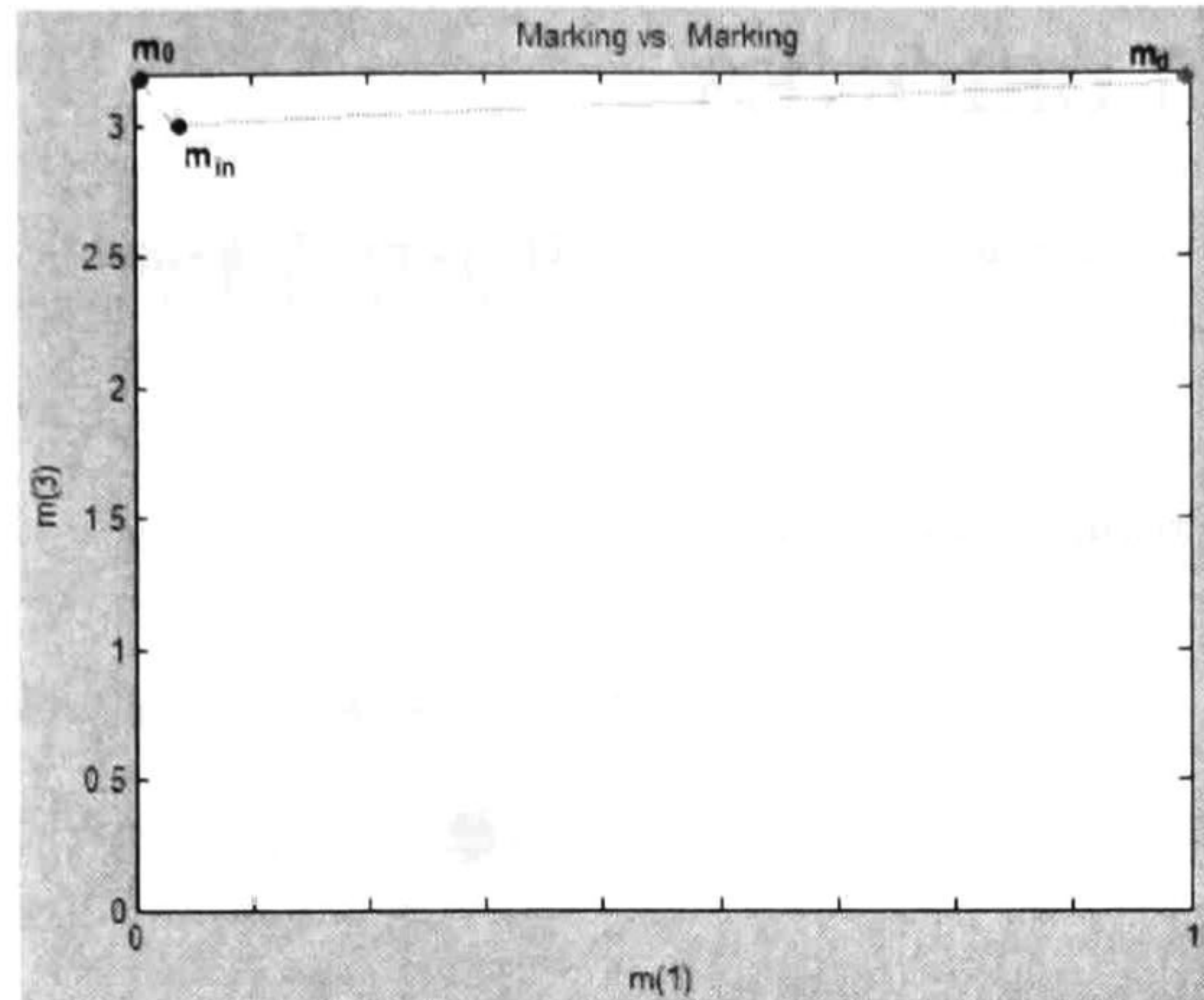


Figura 2.12: Inicio de orientación del campo vector

la figura 2.12, correspondiente al espacio de alcanzabilidad del sistema RPCT descrito en el ejemplo 2.3.16. Sea marcado inicial mínimo  $m_{m0} = [0 \ 3]^T$ . Es sencillo demostrar que cuando el sistema es BIFC y además  $\exists m(p_i) = 0$ , alguna transición tiene grado de habilitación  $enab(t_i) = 0$  y por lo tanto  $\exists f_i = 0$ .

Para que la ecuación 2.71 tenga solución  $\alpha(v, \Lambda G(m_m)) > 0$ , es necesario  $\forall f_i \neq 0$ .

Cuando sucede que  $\exists m_i = 0$ , Vázquez propone iniciar el sistema con una ley de control donde  $I_c$  es invertible, de modo que se alcance algún punto interior  $m_{in}$ , a partir del cual se puede orientar el campo vector del sistema con la solución de la ecuación 2.72.



## 2.4. CONCLUSIONES

Las propiedades más relevantes de las RP para el desarrollo del este trabajo que se presentaron, son:

- Estructura y Propiedades de las RP

$$N = (P, T, F) \quad (2.90)$$

$$C = Post - Pre \quad (2.91)$$

- Evolución del mercado

$$m' = m_0 + C \vec{t} \quad (2.92)$$

- Elementos invariantes

- P-Semiflujos. Solución a

$$Y \cdot C = 0 \quad (2.93)$$

- T-Semiflujos. Solución a

$$C \cdot X = 0 \quad (2.94)$$

- Fluidificación de RP

- Sistema RPCT: Un sistema lineal conmutado

$$\dot{m} = C \Lambda \cdot \Pi(m) \cdot m \quad (2.95)$$

- Transiciones controlables e incontrolables

- Temporización

- Vector de tasas máximas de disparo de las transiciones

- Configuraciones

- Cobertura de las transiciones por sus arcos de entrada

- Matrices  $\Pi(m)$

- Ecuación de estados

$$\dot{m} = C I_c \Lambda \Pi(m) m \quad (2.96)$$



- Ecuación de estados mínima

$$\dot{m}_m = C_m I_c \Lambda G(m) \quad (2.97)$$

- Dada la existencia de P-Semiflujos en el sistema, el orden de éste se puede reducir a  $n = \text{rango}(C)$

- Controlabilidad

- Definición de controlabilidad. Caso *BIFC* y caso *BIC*
- Caracterización. Es suficiente con encontrar un T-Semiflujo Positivo para la matriz de incidencia mínima

$$C_m v = 0 \quad (2.98)$$

tal que  $v \in R^{+|T|}$ .

- Leyes de control

- Orientación del campo vector usando la ecuación

$$I_c = \alpha(v, \Lambda G(m_m)) \cdot \text{diag} \left( \frac{v_1}{f_1}, \frac{v_2}{f_2}, \dots, \frac{v_{|T|}}{f_{|T|}} \right) \quad (2.99)$$

- Demostración de la existencia de una ley de control  $I_c$  cuando el sistema RPCT es *BIFC*.







## Capítulo 3

# CONTROL POR PROPAGACIÓN DE FLUJOS

En este capítulo se propone una ley de control que sea más rápida que las existentes en la literatura, utilizando como base el concepto de Propagación de Flujos. A partir de éste se determina una Matriz de Propagación, que permite sintetizar las acciones de control de tipo encendido/apagado, que llevarán al sistema RPCT de su estado inicial al algún estado requerido.

Las acciones de control pueden ser sintetizadas usando la ecuación de estado mínima con una transformación que elimina las redundancias del sistema.



El problema de llevar una RPCT de un estado inicial  $m_0$  a un punto  $(m_d, u_d)$  de equilibrio implica el cálculo de una ley de control  $I_c$ .

Una posible ley de control fue propuesta en [26] y presentada en el capítulo anterior.

Desafortunadamente, el uso de esta ley de control hace que el estado  $m_d$  se con una evolución muy lenta, por lo que es necesario proponer una ley de control que pueda llevar en menor tiempo al sistema RPCT desde un marcado inicial  $m_0$  hasta un marcado requerido  $m_d$ .

### 3.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADOS

Dado un sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

La solución a la ecuación de estado [18] es:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

donde la matriz exponencial  $e^{At}$  es la serie infinita

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (3.3)$$

Para el caso de las RPCT, la ecuación de estados del sistema es

$$\dot{m} = C(\Lambda\Pi(m) \cdot m) - C \cdot u \quad (3.4)$$

por lo que la solución a la ecuación de estados está dada por

$$m(t) = e^{C\Lambda\Pi(m)t}m_0 + \int_0^t e^{C\Lambda\Pi(m)(t-\tau)}Cu(\tau)d\tau \quad (3.5)$$

donde

$$e^{C\Lambda\Pi(m)t} = I + C\Lambda\Pi(m)t + \frac{1}{2!}(C\Lambda\Pi(m))^2t^2 + \frac{1}{3!}(C\Lambda\Pi(m))^3t^3 + \dots \quad (3.6)$$

A partir de la integral de convolución

$$\int_0^t e^{C\Lambda\Pi(m)(t-\tau)}Cu(\tau)d\tau \quad (3.7)$$

se introduce al sistema el efecto de la acción de control



$$e^{C\Lambda\Pi(m)(t-\tau)}C \quad (3.8)$$

La acción de control siempre queda en el espacio generado por:

$$\left( I + C\Lambda\Pi(m)t + \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 t^2 + \frac{1}{3!} (C\Lambda\Pi(m))^3 t^3 + \dots \right) C \quad (3.9)$$

$$C + C\Lambda\Pi(m)tC + \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 t^2 C + \frac{1}{3!} (C\Lambda\Pi(m))^3 t^3 C + \dots \quad (3.10)$$

pero como  $t$  es una variable escalar que representa el tiempo, en la ecuación 3.10 pueden conmutar y reescribirse como:

$$C + (C\Lambda\Pi(m)C)t + \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right) t^2 + \left( \frac{1}{3!} (C\Lambda\Pi(m))^3 C \right) t^3 + \dots \quad (3.11)$$

Entonces, la matriz  $e^{C\Lambda\Pi(m)t}C$  contiene los vectores sobre los cuales se puede mover el estado. Tales direcciones están incluidas en la matriz

$$C, (C\Lambda\Pi(m)C), \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right), \dots, \left( \frac{1}{k!} (C\Lambda\Pi(m))^k C \right) \quad (3.12)$$

y ponderadas en proporción a la base  $\{t, t^2, \dots\}$ .

### 3.1.1. Propagación de Flujos

Es posible controlar las transiciones continuas con un esquema Encendido/Apagado, donde una transición puede estar restringida a flujo cero  $f_i = 0$  por alguna acción de control  $u_i = \lambda_i enab(t_i)$  o bien no forzada, con  $f_i = \lambda_i enab(t_i)$  por una acción de control  $u_i = 0$ .

#### Definición 3.1.1 *Transición Abierta, Transición cerrada*

Una transición  $t_i$  se dice **Abierta** cuando la acción de control aplicada sobre su flujo es  $u_i = 0$  o equivalentemente,  $I_{ci} = 1$ .

Una transición  $t_i$  se dice **Cerrada** cuando la acción de control aplicada sobre su flujo es  $u_i = f_i = \lambda_i enab(t_i)$  o equivalentemente,  $I_{ci} = 0$ .

De la ecuación 3.5 se puede ver como  $e^{C\Lambda\Pi(m)t}C$  es un mapa



$$\Psi : \{\mathbb{R}^+ \cup 0\}^{|T|} \rightarrow \mathbb{R}^{|P|} \quad (3.13)$$

que proyecta el flujo que pasa por las transiciones de la red sobre el cambio de marcado  $m$ .

Sea el flujo controlado del sistema  $f_c = f - u = I_c f$

$$f_c = I_c f = \left[ I_{c1} f_1 \quad I_{c2} f_2 \quad \dots \quad I_{c|T|} f_{|T|} \right]^T \quad (3.14)$$

$$I_c f = \sum_{i=1}^{|T|} I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.15)$$

donde  $\vec{t}_i$  es una representación de Parikh del disparo de la transición  $t_i$ .

Entonces

$$e^{C\Lambda\Pi(m)t} C \cdot \sum_{i=1}^{|T|} I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.16)$$

es una matriz con las direcciones a través de los cuales el sistema puede evolucionar dependiendo del flujo controlado  $I_c f$ .

La ecuación 3.16, queda entonces como

$$\left[ C + (C\Lambda\Pi(m)C) + \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right) + \dots \right] \sum_{i=1}^{|T|} I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.17)$$

Así, es posible determinar el efecto de abrir una transición  $t_i$  haciendo  $I_{ci} = 1$  y  $I_{cj} = 0$   $\forall i \neq j$ .

$$\left[ C + (C\Lambda\Pi(m)C) + \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right) + \dots \right] I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.18)$$

Entonces, como

$$C \cdot I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.19)$$

tiene el efecto del flujo  $f_i$  sobre el conjunto  $\{\bullet t_i \cup t_i^\bullet\}$  ( $\dot{m} = Cf$ ), el efecto sobre algún otro lugar  $p_j \notin \{\bullet t_i \cup t_i^\bullet\}$ , viene dado por

$$\left[ (C\Lambda\Pi(m)C) + \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right) + \left( \frac{1}{3!} (C\Lambda\Pi(m))^3 C \right) + \dots \right] I_{ci} f_i \vec{t}_i \quad (3.20)$$



Para que exista efecto sobre algún lugar  $m_j \notin \{\bullet t_i \cup t_i^\bullet\}$ , el vector de la ecuación 3.20 debe tener valores diferentes de cero en la posición correspondiente al lugar  $p_j$ .

De acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton [18], en una serie

$$I + A + A^2 + \dots + A^k \quad (3.21)$$

los términos  $A^r$  son una combinación lineal de los términos anteriores, para  $r > n - 1$ , donde  $n = \text{rango}(A)$ .

Entonces, basados en tal teorema, habrá cambios en el efecto del flujo que pasa por la transición  $t_i$  sobre algún lugar  $p_j \notin \{\bullet t_i \cup t_i^\bullet\}$  sólo cuando algún elemento de conjunto

$$\left\{ C, (C\Lambda\Pi(m)C), \left( \frac{1}{2!} (C\Lambda\Pi(m))^2 C \right), \dots, \left( \frac{1}{(n-1)!} (C\Lambda\Pi(m))^{n-1} C \right) \right\} \quad (3.22)$$

al ser multiplicado por  $I_{ci} f_i \vec{t}_i$  arroje un valor diferente de cero en la posición de  $p_j$ .

El expandir hasta el término  $n - 1$  no significa que se aproxime el efecto de propagación con sólo una parte de la serie infinita de la ecuación 3.20, sino que la acción de control sólo tendrá efectos en el espacio generado por los vectores de la ecuación anterior.

Como en la ecuación 3.18  $I_{ci}$  y  $f_i$  son escalares, se puede reescribir como

$$I_{ci} f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot C \vec{t}_i \quad (3.23)$$

De la ecuación 2.15

$$I_{ci} f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i \quad (3.24)$$

De este modo se obtiene el efecto de abrir la transición  $t_i$  sobre los lugares de la red.

**Definición 3.1.2** Operación  $Sign()$  de un vector

Sea  $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]^T$  un vector.

$$Sign(v) = [Sign(v_1) \ Sign(v_2) \ \dots \ Sign(v_k)]^T \quad (3.25)$$

donde

$$Sign(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i > 0 \\ -1 & \text{si } v_i < 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$



**Definición 3.1.3** El vector de Propagación de Flujos  $V s_i \in \{-1, 0, 1\}^{|P|}$  es un vector que representa la dirección del efecto de abrir la transición  $t_i$  sobre los lugares  $p_j \in P$  de una RPCT.

$V s_{ij} = 1$ , significa que abrir la transición  $t_i$  aumenta el marcado en el lugar  $p_j$ .

$V s_{ij} = -1$ , significa que abrir la transición  $t_i$  disminuye el marcado en el lugar  $p_j$  o bien que disminuye el grado de habilitación de alguna transición en  $p_j$ .

$V s_{ij} = 0$ , significa que abrir el flujo de la transición  $t_i$  no tiene ningún efecto en el marcado sobre el lugar  $p_j$ .

Una forma de calcular  $V s_i$  es

$$\text{Sign} (I_{ci} f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) \quad (3.27)$$

El vector de propagación  $V s_i$  sólo tiene información de la dirección, mas no de la magnitud del cambio en el marcado.

**Proposición 3.1.4** Sea  $(N, m_0)$  una RPCT. Cuando se calcula el vector de propagación  $V s_i$

$$\text{Sign} (I_{ci} f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) = \text{Sign} (e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) \quad (3.28)$$

**Demostración.** Es claro que

$$\text{Sign}(\alpha v) = \text{Sign}(\alpha) \text{Sign}(v)$$

Para calcular el vector  $V s_i$  el valor  $I_{ci} = 1$ . Entonces,

$$\text{Sign} (I_{ci} f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) = \text{Sign}(I_{ci}) \cdot \text{Sign} (f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) \quad (3.29)$$

$$= \text{Sign} (f_i \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) \quad (3.30)$$

Además, en una RPCT se cumple que  $f_i \geq 0$ .

Si  $f_i = 0$ , entonces quiere decir que  $\text{enab}(t_i) = 0$ , y el vector de Parikh de la transición  $t_i$  es cero, puesto que no está habilitada. De ese modo

$$\text{Sign} (0 \cdot e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{t}_i) = \text{Sign} (e^{C\Lambda\Pi(m)t} \cdot \mathbf{0}) = 0 \quad (3.31)$$

.Si  $f_i > 0$ , entonces ocurre lo mismo que en la ecuación 3.29. ■



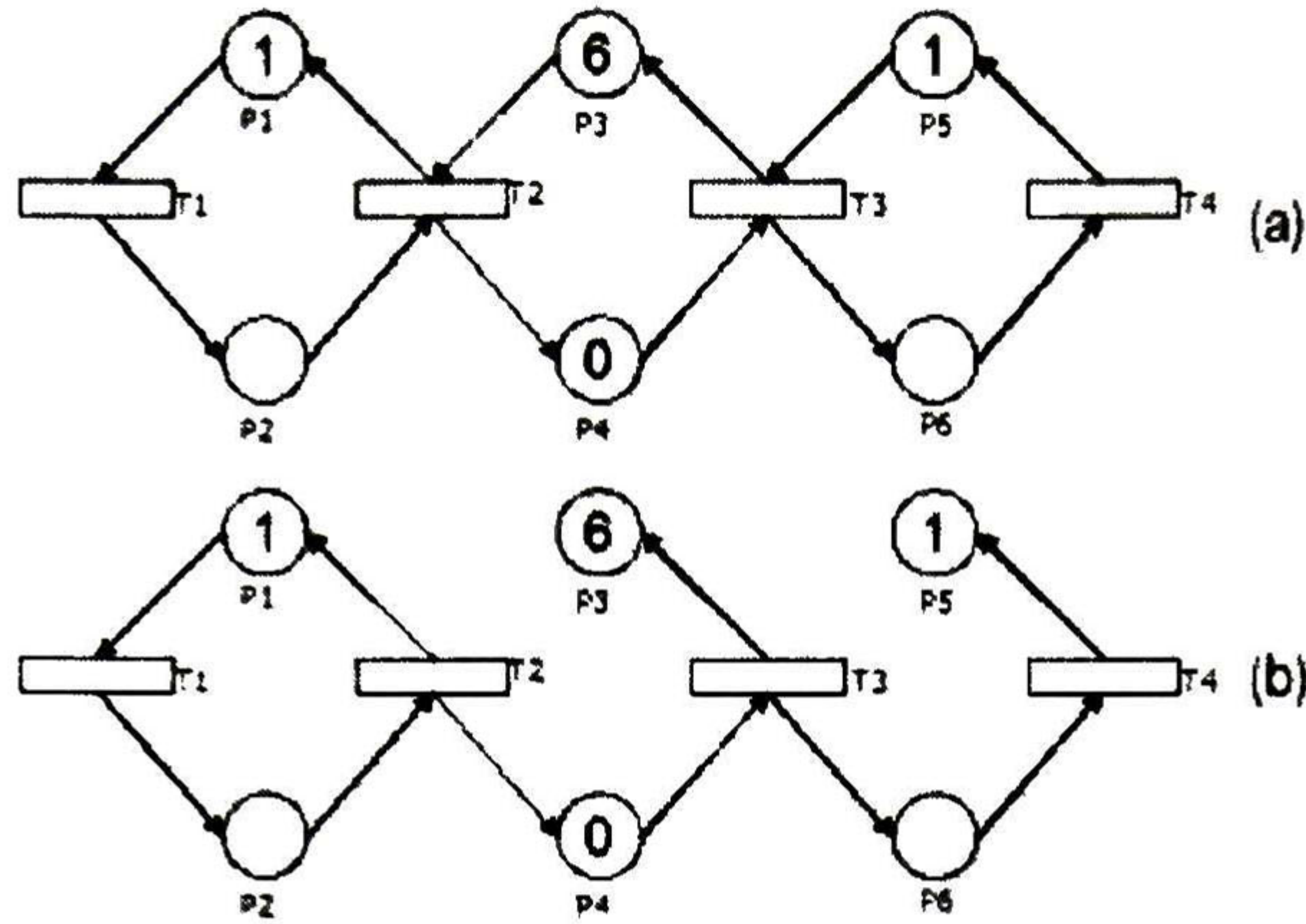


Figura 3.1: Ejemplo de Propagación de flujo

**Definición 3.1.5** *Matriz de Propagación  $M_s(m)$*

La matriz de Propagación de un sistema en una configuración dada  $\Pi(m)$  es la representación matricial de los vectores de propagación de flujo de todas las transiciones del sistema. Se construye con los transpuestos de los vectores  $V s_i$ .

$$M_s(m) = \begin{bmatrix} V s_1^T \\ V s_2^T \\ \dots \\ V s_{|T|}^T \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

La Matriz de Propagación  $M_s(m)$  puede ser calculada con ayuda de la matriz de controlabilidad como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.6** En la figura 3.1 se ve una RPCT y la cobertura de arcos de entrada a las transiciones que genera la configuración  $\Pi(m)$ .

La matriz de incidencia del sistema es

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$



El vector de tasas de disparo máximas es

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

y la condición inicial del sistema es

$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

El mercado inicial se encuentra en la configuración representada por la matriz

$$\Pi(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La matriz de controlabilidad del sistema está dada por

$$\mathbb{C} = \left[ C \quad (C\Lambda\Pi(m)) \cdot C \quad \dots \quad (C\Lambda\Pi(m))^{n-1} \cdot C \right] \quad (3.37)$$

Partiendo del primer bloque de la matriz de controlabilidad, el  $\text{Sign}()$  de la primer columna de  $C$  es la dirección del cambio del mercado a un primer paso ocasionado por el flujo de la transición  $t_1$ .

Los vectores  $Vs_i$  a primer paso son los vectores  $\text{Sign}(t_i)$ , por lo que la matriz  $M_s(m)$  queda inicialmente como:

$$M_s(m) = \text{Sign}(C^T) \quad (3.38)$$

Para el ejemplo,



$$M_{s0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Al ser el primer paso, la matriz  $M_{s0}$  contiene muchos elementos 0, por lo que se continúa con la propagación a segundo paso con

$$(C\Lambda\Pi(m)) \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

A un segundo paso, aparecen efectos de propagación en las columnas 1 y 2. Aparecen valores  $-1$  y  $1$  en la primera y segunda columna de 3.40. En la primera de ellas afectan a los lugares  $p_3$  y  $p_4$  mientras que en la segunda a los lugares  $p_5$  y  $p_6$ .

Calculando

$$\text{Sign}(C\Lambda\Pi(m) \cdot C)^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

y sustituyendo los elementos  $M_{s0}(i, j) = 0$  por los correspondientes en la ecuación 3.41, se hace

$$M_{s1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Es importante señalar que los efectos a primer paso se mantienen igual, sólo se cambian los elementos cero.

Sin embargo, la ecuación 3.42 todavía tiene elementos igual a cero, por lo que se continúa



con la propagación a tercer paso

$$(C\Lambda\Pi(m))^2 \cdot C = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Del mismo modo, se sustituyen en la ecuación 3.42 los valores correspondientes a

$$\text{Sign}(((C\Lambda\Pi(m))^2 \cdot C)^T) \quad (3.44)$$

, quedando

$$M_{s2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

El algoritmo concluye cuando todos los elementos de  $M_{sk}$  son diferentes de cero o bien cuando ningún elemento cero de la matriz  $M_{sk}$  cambia.

De hecho, por el teorema de la ecuación 3.21, ningún elemento diferente de cero puede aparecer después del cálculo con

$$(C\Lambda\Pi(m))^k \cdot C \quad (3.46)$$

donde  $k = \text{rango}(C) - 1$ .

Para este caso  $\text{rango}(C) = 3$ , por lo que basta con calcular hasta  $(C\Lambda\Pi(m))^2 \cdot C$ .

De este modo, la matriz de Propagación final es

$$M_s(m) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Los ceros que aparecen en la matriz  $M_s(m)$  aparecen por la configuración actual del sistema.

Vea la figura 3.1 b) donde la transición  $t_4$  aumenta el marcado del lugar  $p_5$ , pero como el arco  $(p_5, t_3)$  no es el que restringe el flujo de la transición  $t_3$ , el grado de habilitación de ésta no cambia. Gráficamente se observa que no existe un camino partiendo de la transición



$t_4$  hacia los lugares  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$ .

**Nota 3.1.7** Es claro existen tantas Matrices de propagación  $M_s(m)$  como configuraciones en el sistema, por lo que se puede calcular una Matriz de Propagación  $M_s(m)$  para cada marcado del sistema.

**Definición 3.1.8** Vector de Error

El vector de error es la diferencia entre el marcado actual  $m$  del sistema y el marcado requerido  $m_d$

$$e = m - m_d \quad (3.48)$$

**Definición 3.1.9** Conflicto Estructural.

Un conflicto estructural ocurre cuando  $|\bullet p| > 1$ .

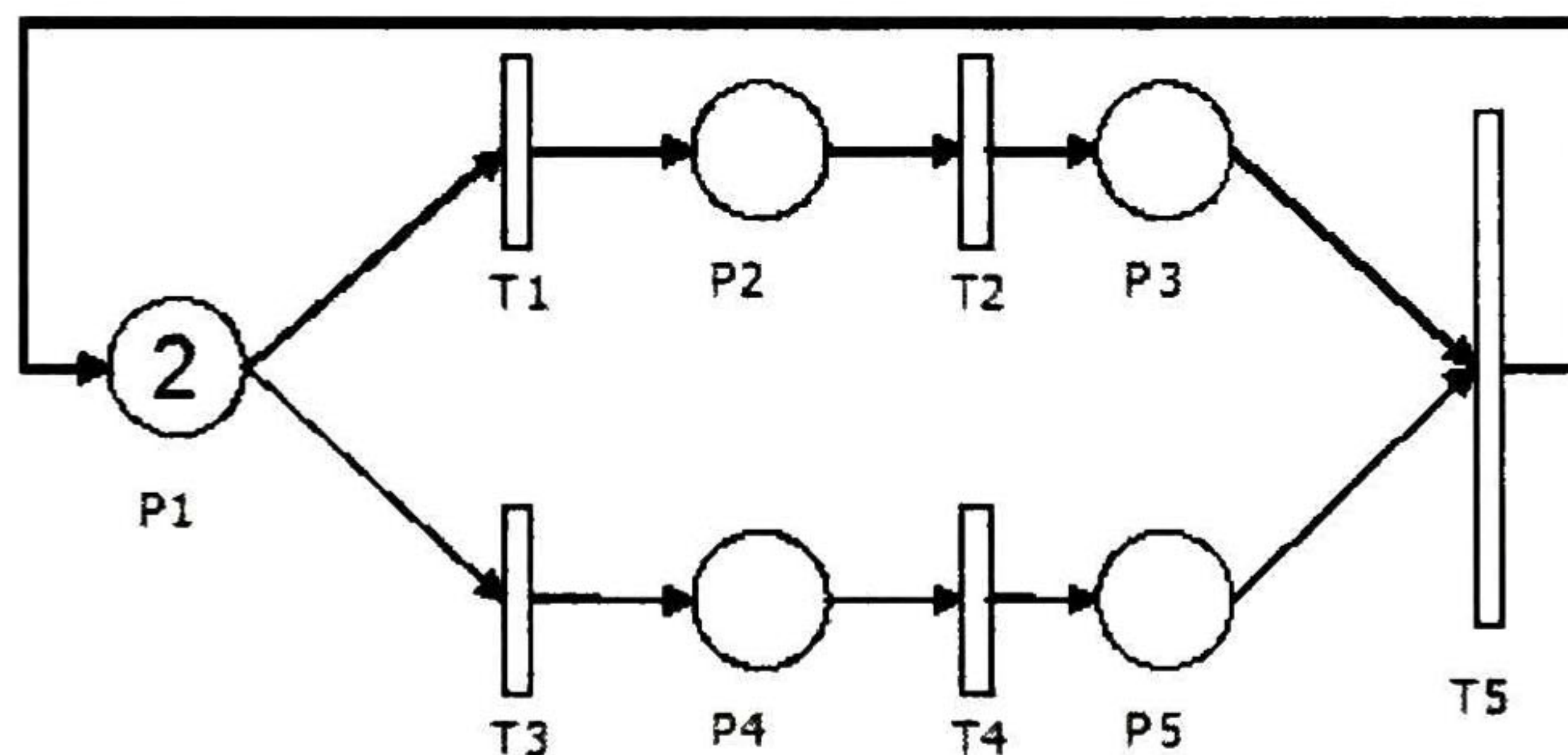


Figura 3.2: Propagación de flujos en una RPCT con conflicto estructural.

En la figura 3.2 existe un conflicto entre las transiciones  $t_1$  y  $t_3$ . Cuando se propaga el flujo de la transición  $t_1$  está claro que ésta quita marcas del lugar  $p_1$ , por lo que el grado de habilitación de la transición  $t_3$  disminuye y el número de marcas que recibe  $p_4$  es menor, por lo que se percibe como una disminución en el marcado de  $p_4$ . Dicha disminución, decrementa el grado de habilitación de  $t_4$ , por lo que nuevamente se percibe como una disminución en el marcado de  $p_5$ . Tal efecto se obtiene con el algoritmo de cálculo de la matriz  $M_s(m)$  del ejemplo 3.1.6



Cuando el valor de algún vector  $Vs_i(p_j) = 1$  significa que la transición  $t_i$  aumenta en algún momento el marcado del lugar  $p_j$ . Del mismo modo, cuando  $Vs_i(p_j) = -1$  la propagación de flujo disminuye el marcado del lugar  $p_j$ .

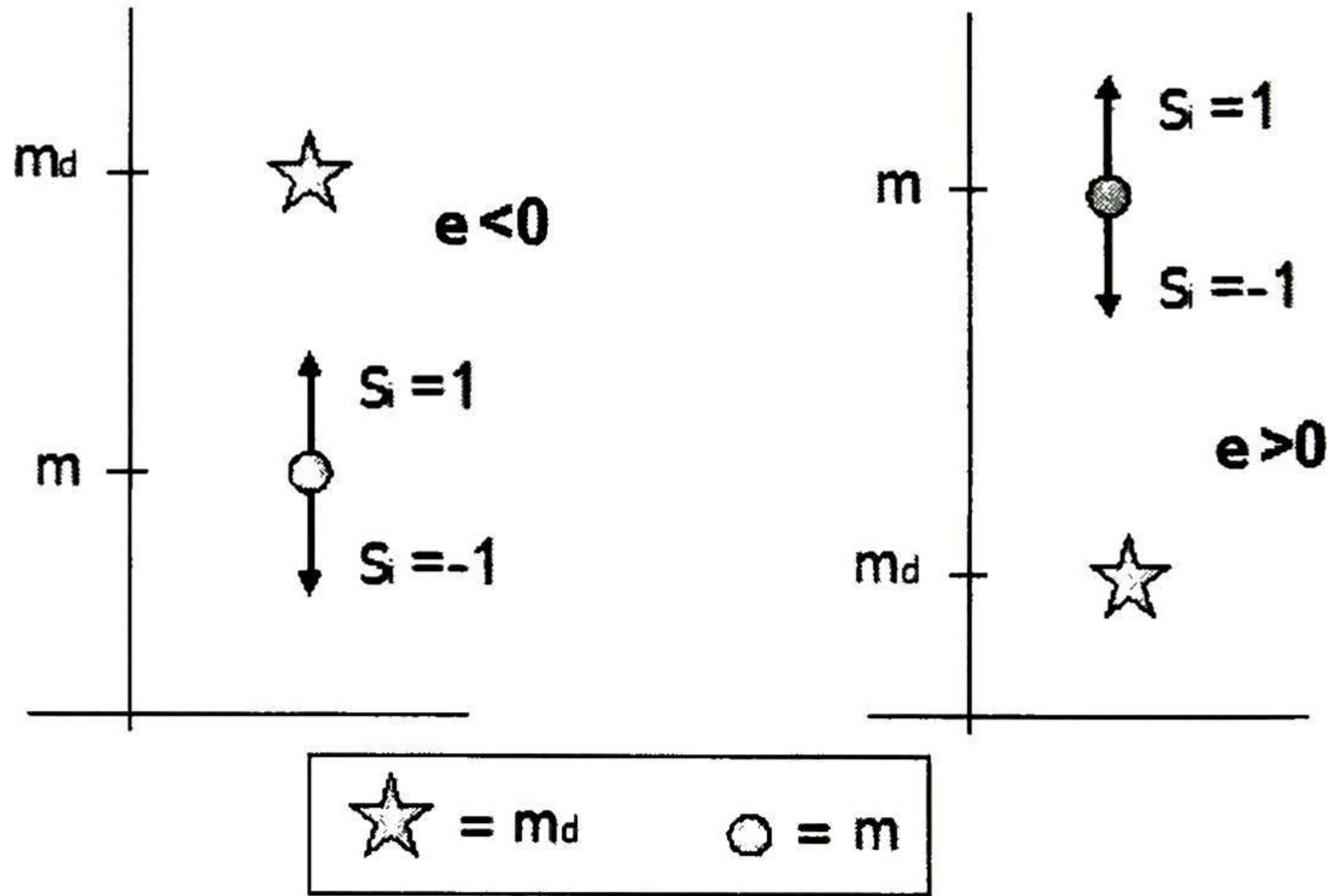


Figura 3.3: Efecto de la propagación y el signo del error

Suponga que  $m_d(p_j) > m(p_j)$  (por simplicidad  $m_{dj}$  y  $m_j$ ) entonces,  $e_j = m_j - m_{dj} < 0$ .  
Sea  $Vs_i(p_j) = 1$ .

Entonces, al abrir la transición  $t_i$  el marcado del lugar  $p_j$  incrementará y  $m_j \rightarrow m_{dj}$ . Si por el contrario,  $Vs_i(p_j) = -1$ , el marcado  $m_j$  disminuirá al abrir  $t_i$  y  $m_j$  se alejará de  $m_{dj}$ .

En la figura 3.3 se puede ver gráficamente el comportamiento inducido por abrir una transición cuando  $Vs_i$  toma valor positivo o negativo y su dirección con respecto al error.

La ley de control  $I_c$  en función del error se propone como

$$I_{ci} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } -Vs_i \cdot e > 0 \\ 0 & \text{cuando } -Vs_i \cdot e < 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

$I_{ci}$  puede ser expresado en términos del operador  $Sign()$  como sigue:

$$I_{ci} = \frac{1}{2} (1 + Sign(-Vs_i \cdot e)) \quad (3.50)$$



De este modo, cada transición  $t_i$  ayuda a reducir el error del sistema, aún cuando el error no se encuentre en los lugares  $(\bullet t_i \cup t_i \bullet)$ .

De manera matricial, sean las superficies

$$S = -M_s(m) \cdot e \quad (3.51)$$

La acción de control

$$I_{ci} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } S_i > 0 \\ 0 & \text{cuando } S_i < 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Si se define la matriz  $\Sigma = \text{diag}(\text{Sign}(S))$ , entonces,

$$I_c = \frac{1}{2} (I + \Sigma) \quad (3.53)$$

## 3.2. CONTROL PARA LA ECUACIÓN DE ESTADOS MÍNIMA

Para utilizar la ecuación de estado mínimo, como la de la ecuación 2.57, es necesario transformar la Matriz de Propagación  $M_s(m)$  al espacio de orden  $n = \text{rango}(C)$ .

El valor de la ecuación 3.51, se puede sustituir en 3.51, quedando

$$S = -M_s(m) \cdot (m - m_d) \quad (3.54)$$

Usando la ecuación 2.56 y sustituyendo en la ecuación 3.54

$$S = -M_s(m) \cdot \left( \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_m \\ B^T m_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{md} \\ B^T m_0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.55)$$

donde  $m_m = P \cdot m$  y  $m_{md} = P \cdot m_d$ . Por tanto,

$$S = -M_s(m) \cdot \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} m_m \\ B^T m_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{md} \\ B^T m_0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.56)$$



$$S = -M_s(m) \cdot \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} e_m \\ B^T m_0 - B^T m_0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.57)$$

$$S = -M_s(m) \cdot \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Se puede reescribir el producto  $M_s(m) \cdot \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1}$  como

$$M_s(m) \cdot \begin{bmatrix} P \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{sm}(m_m) & M_{sc} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

de modo que la ecuación 3.58 queda

$$S = \begin{bmatrix} M_{sm}(m_m) & M_{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_m \\ 0 \end{bmatrix} = M_{sm}(m_m) \cdot e_m \quad (3.60)$$

De este modo, la Matriz de Propagación mínima  $M_{sm}(m_m)$  se obtiene de la ecuación 3.59 y la superficie  $S$  será referenciada como  $S_m$  cuando se calcule con el vector de error mínimo  $e_m$ .

Así, la ley de control para la ecuación de estados mínima queda como

$$I_{ci} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } S_{mi} > 0 \\ 0 & \text{cuando } S_{mi} < 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Si se define la matriz  $\Sigma_m = \text{diag}(\text{Sign}(S_m))$ , entonces,

$$I_c = \frac{1}{2} (I + \Sigma_m) \quad (3.62)$$

### 3.3. SISTEMA DE ERROR

Es posible definir un error entre el marcado actual del sistema y el marcado requerido. A partir de ésta información, se puede encontrar cuál es la dinámica del sistema de RPCT expresado en términos de este vector. A continuación se presenta dicho sistema.



Utilizando la definición 3.1.8, es posible determinar la dinámica del error de la siguiente manera.

$$\dot{e} = \dot{m} - \dot{m}_d \quad (3.63)$$

Pero como

$$\dot{m}_d = 0 \quad (3.64)$$

Entonces

$$\dot{e} = \dot{m} = CI_c \Lambda \Pi(m) \cdot m \quad (3.65)$$

Despejando de la ecuación 3.48,  $m = e + m_d$  y sustituyendo en 3.65 obtenemos

$$\dot{e} = CI_c \Lambda \Pi(m) \cdot (e + m_d) \quad (3.66)$$

Del mismo modo como la ecuación 2.52 la dinámica del error también es un sistema lineal conmutado.

Para demostrar la estabilidad asintótica del controlador propuesto se exploró la posibilidad de aproximar el control propuesto a otro de tipo retroalimentación de estados a cada paso, como se describe a continuación, sin embargo no se ha podido concluir con una demostración completa.

La ecuación de estados del error también puede reescribirse como

$$\dot{e} = C \Lambda \Pi(m) \cdot m - C \cdot u \quad (3.67)$$

pero de la ecuación 3.48

$$m = e + m_d \quad (3.68)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en 3.67 se obtiene



$$\dot{e} = C\Lambda\Pi(m) \cdot (e + m_d) - C \cdot u \quad (3.69)$$

Proponiendo una matriz de transformación  $T$ , se puede encontrar un nuevo vector de estados transformado [18] tal que

$$T \cdot m' = m \quad (3.70)$$

donde  $m'$  es el estado transformado del sistema.

Como la ecuación 3.70 es una biyección, existe un isomorfismo entre  $m$  y  $m'$  por lo que siempre existe un vector  $m'_d$  tal que

$$T \cdot m'_d = m_d \quad (3.71)$$

La elección de  $T$  (de  $|P| \times |P|$ ) es la siguiente:

1. Se eligen las columnas linealmente independientes (L.I.) de la matriz de incidencia  $C$ . De este modo se tienen  $r = \text{rango}(C)$  columnas linealmente independientes. Suponga que las columnas L.I. de  $C$  son  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
2. Se eligen los vectores  $t'_1, t'_2, \dots, t'_{|P|-n}$ , tal que la matriz

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n & t'_1 & t'_2 & \dots & t'_{|P|-n} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

cumpla que  $\text{rango}(T) = |P|$ .

Con esa matriz de transformación, el estado  $m'$  se puede dividir en su parte controlable y su parte no controlable.

$$m' = \begin{bmatrix} m_c \\ m_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Si se transforma la ecuación 3.68, se tiene

$$Tm' = e + Tm'_d \quad (3.74)$$

Despejando el error de la ecuación anterior, se tiene

$$e = Tm' - Tm'_d \quad (3.75)$$



$$e = T(m' - m'_d) \quad (3.76)$$

Definiendo  $e' = m' - m'_d$ , se tiene

$$e = Te' \quad (3.77)$$

Partiendo de la ecuación 3.77, se tiene

$$T \cdot \dot{e}' = \dot{e} \quad (3.78)$$

Sustituyendo la ecuación 3.69 en la ecuación anterior, se tiene que

$$T \cdot \dot{e}' = C\Lambda\Pi(m) \cdot (e + m_d) - C \cdot u \quad (3.79)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.71 y 3.77 en la ecuación anterior

$$T \cdot \dot{e}' = C\Lambda\Pi(m) \cdot T(e' + m'_d) - C \cdot u \quad (3.80)$$

despejando  $\dot{e}'$  de la ecuación anterior, se obtiene

$$\dot{e}' = T^{-1}C\Lambda\Pi(m) \cdot T(e' + m'_d) - T^{-1}C \cdot u \quad (3.81)$$

Por la forma de la matriz de transformación  $T$ , se tiene que

$$T^{-1}C\Lambda\Pi(m) \cdot T = \begin{bmatrix} Ac & A_{12} \\ \mathbf{0} & A\bar{c} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

y

$$T^{-1}C = \begin{bmatrix} Bc \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Es claro que  $\text{rango}(Bc) = \text{rango}(C)$ , puesto que  $\text{rango}(T^{-1}C) = \text{rango}(C)$ .

De la ecuación 3.73, el vector  $m_{\bar{c}}$  corresponde a la conservación de marcas en los P-Semiflujos, por lo que permanece siempre constante.

Haciendo  $e' = \begin{bmatrix} e_c \\ e_{\bar{c}} \end{bmatrix}$  y  $m'_d = \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix}$  se obtienen las siguientes ecuaciones

$$e_c = m_c - m_{dc} \quad (3.84)$$



$$e_{\bar{c}} = m_{\bar{c}} - m_{d\bar{c}} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

Entonces el sistema de error queda

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_c \\ \dot{e}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{\bar{c}} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} e_c \\ e_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} B_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \quad (3.86)$$

donde  $\dot{e}_{\bar{c}} = 0$ .

Por la forma de  $T$ , el sub-sistema  $\dot{e}_c$  es controlable

$$\dot{e}_c = A_c \cdot e_c + A_c \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - B_c \cdot u \quad (3.87)$$

Proponiendo

$$u = K_c \cdot e_c + v \quad (3.88)$$

y sustituyendo en 3.87

$$\dot{e}_c = A_c \cdot e_c + A_c \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - B_c \cdot K_c \cdot e_c - B_c \cdot v \quad (3.89)$$

$$\dot{e}_c = (A_c - B_c \cdot K_c) \cdot e_c + A_c \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - B_c \cdot v \quad (3.90)$$

Definiendo

$$w = A_c \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - B_c \cdot v \quad (3.91)$$

Sustituyendo  $w$  en la ecuación 3.90 se tiene

$$\dot{e}_c = (A_c - B_c \cdot K_c) \cdot e_c + w \quad (3.92)$$

**Proposición 3.3.1** *Sea el sistema de error*

$$\dot{e}_c = (A_c - B_c \cdot K_c) \cdot e_c + w \quad (3.93)$$

con

$$w = A_c \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - B_c \cdot v \quad (3.94)$$

Entonces  $w$  se encuentra en el subespacio de control del sistema de error.

**Demostración.** El término  $w$  se puede reescribir de la siguiente forma:



$$w = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix} - B_c \cdot v \quad (3.95)$$

$$w = T^{-1} C \Lambda \Pi_i \cdot T \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix} - B_c \cdot v \quad (3.96)$$

$$w = B_c \Lambda \Pi_i \cdot T \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix} - B_c \cdot v \quad (3.97)$$

$$w = B_c \left( \Lambda \Pi_i \cdot T \begin{bmatrix} m_{dc} \\ m_{d\bar{c}} \end{bmatrix} - v \right) \quad (3.98)$$

Por lo tanto es fácil de ver que el término  $w$  se encuentra en el sub-espacio de  $B_c$ . ■

Como el sistema 3.90 es controlable, siempre se pueden asignar los valores propios deseados. Desafortunadamente como la acción de control es acotada, como se mencionó anteriormente, no siempre es posible asignar cualquier valor deseado, pero si es posible encontrar valores propios reales y negativos.

Una forma de solucionar el acotamiento es hacer la acción de control igual a la propuesta con la propagación de flujos en la ecuación 3.53.

$$u = K_c \cdot e + v = (I - I_c) \Lambda \Pi_i m \quad (3.99)$$

con

$$I_u = I - I_c \quad (3.100)$$

y sustituyendo la ecuación 3.53 se tiene

$$I_u = I - \frac{1}{2} (I + \Sigma) = \frac{1}{2} (I - \Sigma) \quad (3.101)$$

Entonces la acción de control es

$$u = \frac{1}{2} (I - \Sigma) \Lambda \Pi_i m \quad (3.102)$$

Definiendo la acción de control como  $f_u$ , se tiene

$$f_u = \frac{1}{2} (I - \Sigma) \Lambda \Pi_i m \quad (3.103)$$

La retroalimentación de estados se puede hacer igual a  $f_u$  de modo que



$$Kc \cdot e + v = f_u \quad (3.104)$$

Por último, haciendo  $v = v_1 + v_2$  la igualdad de la ecuación anterior queda como

$$Kc \cdot e + v_1 + v_2 = f_u \quad (3.105)$$

**Proposición 3.3.2** *Sea*

$$f_u = \frac{1}{2} (I - \Sigma) \Lambda \Pi_i m \quad (3.106)$$

*Entonces siempre existe una matriz  $Kc$  y dos vectores  $v_1$  y  $v_2$ , tal que*

$$Kc \cdot e + v_1 + v_2 = f_u \quad (3.107)$$

$$f_u = \frac{1}{2} (I - \Sigma) \Lambda \Pi_i m \quad (3.108)$$

*y además el sistema de error*

$$\dot{e}_c = (Ac - Bc \cdot Kc) \cdot e_c + w \quad (3.109)$$

*con*

$$w = Ac \cdot m_{dc} + A_{12} \cdot m_{d\bar{c}} - Bc \cdot (v_1 + v_2) \quad (3.110)$$

*tiene los valores propios deseados y una perturbación en el sub-espacio del control.*

**Demostración.** *Primero es simple diseñar  $v_2$  de modo que*

$$Ac \cdot m_{dc} + A_{12} - Bc \cdot v_2 = 0 \quad (3.111)$$

*y así, la ecuación 3.109 queda como:*

$$\dot{e}_c = (Ac - Bc \cdot Kc) \cdot e_c - Bc \cdot v_1 \quad (3.112)$$

*Por otro lado, es posible hacer que la matriz  $(Ac - Bc \cdot Kc)$  sea una matriz triangular*



superior  $\Phi$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \alpha_1 & x & x & x & x \\ 0 & \alpha_2 & x & x & x \\ 0 & 0 & \alpha_3 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

donde  $x$  son valores arbitrarios y  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  son escalares reales y negativos que corresponden a los valores propios de la matriz  $\Phi$ .

Sea

$$Kc = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

donde  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  son vectores columna de dimensión  $|T|$ .

Por otro lado sea

$$Bc = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_r \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

donde  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  son vectores fila de dimensión  $|T|$ .

Entonces el producto  $Bc \cdot Kc$  es una matriz de  $r \times r$

$$Bc \cdot Kc = \begin{bmatrix} b_1 k_1 & b_1 k_2 & \dots & b_1 k_r \\ b_2 k_1 & b_2 k_2 & \dots & b_2 k_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_r k_1 & b_r k_2 & \dots & b_r k_r \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Sea también la matriz del sistema

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Entonces para que  $A_c - BcKc = \Phi$  se requiere resolver las siguientes ecuaciones:

$$a_{ii} - b_i k_i = \alpha_i \quad (3.118)$$

para  $i = 1, 2, \dots, r$ . A este conjunto de ecuaciones se le denominará  $\Psi_1$  y corresponden a



los valores propios del sistema.

Además,

$$a_{ij} - b_i k_j = 0 \quad (3.119)$$

para  $i > j$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  y  $j = 1, 2, \dots, r$ . A este conjunto de ecuaciones de le denominará  $\Psi_2$  y corresponde a la parte de ceros de la matriz triangular superior.

Sea el vector

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_r \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

un vector columna de dimensión  $|T| \cdot r$ .

Sea el vector columna  $g_1$  de dimensión  $r$

$$g_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 - a_{11} \\ \alpha_2 - a_{22} \\ \dots \\ \alpha_r - a_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

y sea la matriz  $D_1$  de  $r \times |T| \cdot r$  una matriz diagonal a bloques con los vectores fila de  $Bc$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -b_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -b_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -b_r \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Es claro que  $\text{rango}(D_1) = r$  puesto que cada vector fila  $b_i$  está en diferente espacio de columnas.

Entonces el conjunto de ecuaciones  $\Psi_1$  se puede reescribir como

$$D_1 \tilde{k} = g_1 \quad (3.123)$$

Sean  $g_{2l}$  vectores columna de dimensión  $r - l$

$$g_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{r1} \end{bmatrix}, g_{22} = \begin{bmatrix} a_{32} \\ a_{33} \\ \dots \\ a_{r2} \end{bmatrix}, \dots, g_{2(r-1)} = \begin{bmatrix} a_{r,(r-1)} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$



y sea el vector columna  $g_2$  de dimensión  $\frac{r(r-1)}{2}$

$$g_2 = \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ \dots \\ g_{2(r-1)} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Sean también las matrices  $D_{2l}$  de dimensión  $(r-l) \times |T| \cdot r$  matrices a bloques con los elementos de  $Bc$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} D_{21} &= \begin{bmatrix} b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_r & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_r & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dots & \\ D_{2(r-1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & b_r & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.126)$$

y la matriz  $D_2$  de dimensión  $\frac{r(r-1)}{2} \times |T| \cdot r$

$$D_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \\ \dots \\ D_{2(r-1)} \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

Para calcular  $\text{rango}(D_2)$  basta con saber que los vectores fila  $b_i$  de la matriz  $Bc$  son linealmente independientes y en cada bloque de  $D_{2l}$  se encuentran en diferente espacio de columnas por lo que  $\text{rango}(D_2) = \frac{r(r-1)}{2}$ .

Entonces, el conjunto de ecuaciones  $\Psi_3$  se puede reescribir como

$$D_2 \tilde{k} = g_2 \quad (3.128)$$



Para hacer  $Kc \cdot e + v_1 + v_2 = f_u$  es posible despejar

$$Kc \cdot e = f_u - v_1 - v_2 \quad (3.129)$$

y denominarlo como el conjunto de ecuaciones  $\Psi_3$ .

Se puede desarrollar el producto  $Kc \cdot e$  del siguiente modo

$$Kc \cdot e = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_r e_r \quad (3.130)$$

Construyendo  $D_3$  de dimensión  $|T| \times |T| \cdot r$

$$D_3 = \begin{bmatrix} e_1 I_{|T|} & e_2 I_{|T|} & \dots & e_r I_{|T|} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

Entonces es posible escribir el conjunto de ecuaciones  $\Psi_3$  como

$$D_3 \tilde{k} = f_u - v_1 - v_2 \quad (3.132)$$

En general, la ecuación

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \tilde{k} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ f_u - v_1 - v_2 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

siempre tiene solución, puesto que  $v_1$  es un parámetro libre de diseño.

Dependiendo de los valores del error  $e$  y la matriz

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

puede perder rango en las filas de  $D_3$ , puesto que  $\text{rango} \left( \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \right) = r + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{r(r+1)}{2}$

En ese caso, se pueden encontrar las filas L.I. de la matriz  $D_3$  y encontrar un par de matrices de proyección  $P_{LI}$  y  $P_{LD}$  tal que  $P_{LI}D_3$  contenga las filas L.I. de  $D_3$  y  $P_{LD}D_3$  contenga las filas Linealmente Dependientes (LD) de  $D_3$ .

Sea

$$H = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ P_{LI}D_3 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$



con  $\text{rango}(H) = h$ . Entonces siempre existe una solución a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_h \end{bmatrix} H = P_{LD} D_3 \quad (3.136)$$

Para que la ecuación 3.133 tenga solución cuando se pierde rango en  $D_3$  es necesario que  $(f_u - v_1 - v_2)$  pertenezca al rango de la matriz  $D$ . Para que esto ocurra, siempre es posible hacer

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ P_{LI}(f_u - v_1 - v_2) \end{bmatrix} = P_{LD}(f_u - v_1 - v_2) \quad (3.137)$$

El producto  $P_{LI} \cdot (-v_1 - v_2)$  va a dejar un vector con las variables  $v_i$  que pertenecen a las ecuaciones que son L.I., del mismo modo que  $P_{LD} \cdot (-v_1 - v_2)$  es un vector con las variables  $v_j$  que pertenecen a las ecuaciones L.D.

De hecho, es posible despejar la ecuación 3.137, de modo que

$$P_{LD} \cdot (v_1 + v_2) = P_{LD} \cdot f_u - \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ P_{LI}(f_u - v_1 - v_2) \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

El sistema de error, una vez definidas  $v_1$  y  $v_2$  como se indica en las ecuaciones 3.138 y 3.111 queda como sigue:

$$\dot{e}_c = (Ac - Bc \cdot Kc) \cdot e_c - Bc \cdot v_1 \quad (3.139)$$

De este modo siempre se puede elegir  $Kc$ ,  $v_1$  y  $v_2$  para hacer que el sistema de la ecuación 3.109 tenga valores propios deseados a cada paso que se calcula  $f_u$  y además es evidente que  $Bc \cdot v_1$  están en el espacio del control. ■

En el caso de los errores de cada estado, no es posible considerar que la ley de control propuesta siempre decrementa el valor de

$$e^T \cdot e \quad (3.140)$$

puesto que en algunas ocasiones el error aumenta en algunos lugares para poder finalmente disminuir hacia cero, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.3** Con referencia al ejemplo 3.1.6, sean el marcado inicial y el que se desea alcanzar



$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

respectivamente. Este caso es crítico para las RPCT, puesto que se tiene un error inicial

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

y la transición  $t_3$  no está habilitada por el marcado inicial  $m_0$ . Una acción de control local no es suficiente para alcanzar el marcado requerido ya que este tipo de redes no permiten el disparo de las transiciones  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  por que quieren imponer flujos negativos, sin embargo las leyes de control propuestas en [26] y en el capítulo anterior permiten resolver este problema y alcanzar  $m_{d2}$ .

Las gráficas de evolución de mercado del sistema se muestran en la figura 3.4.

El control basado en la Propagación de Flujos es mucho mas rápido que el que se propone en [26], puesto que toman aproximadamente 7 contra 470 unidades de tiempo, respectivamente en alcanzar y mantener en equilibrio el mercado requerido  $m_{d2}$ .



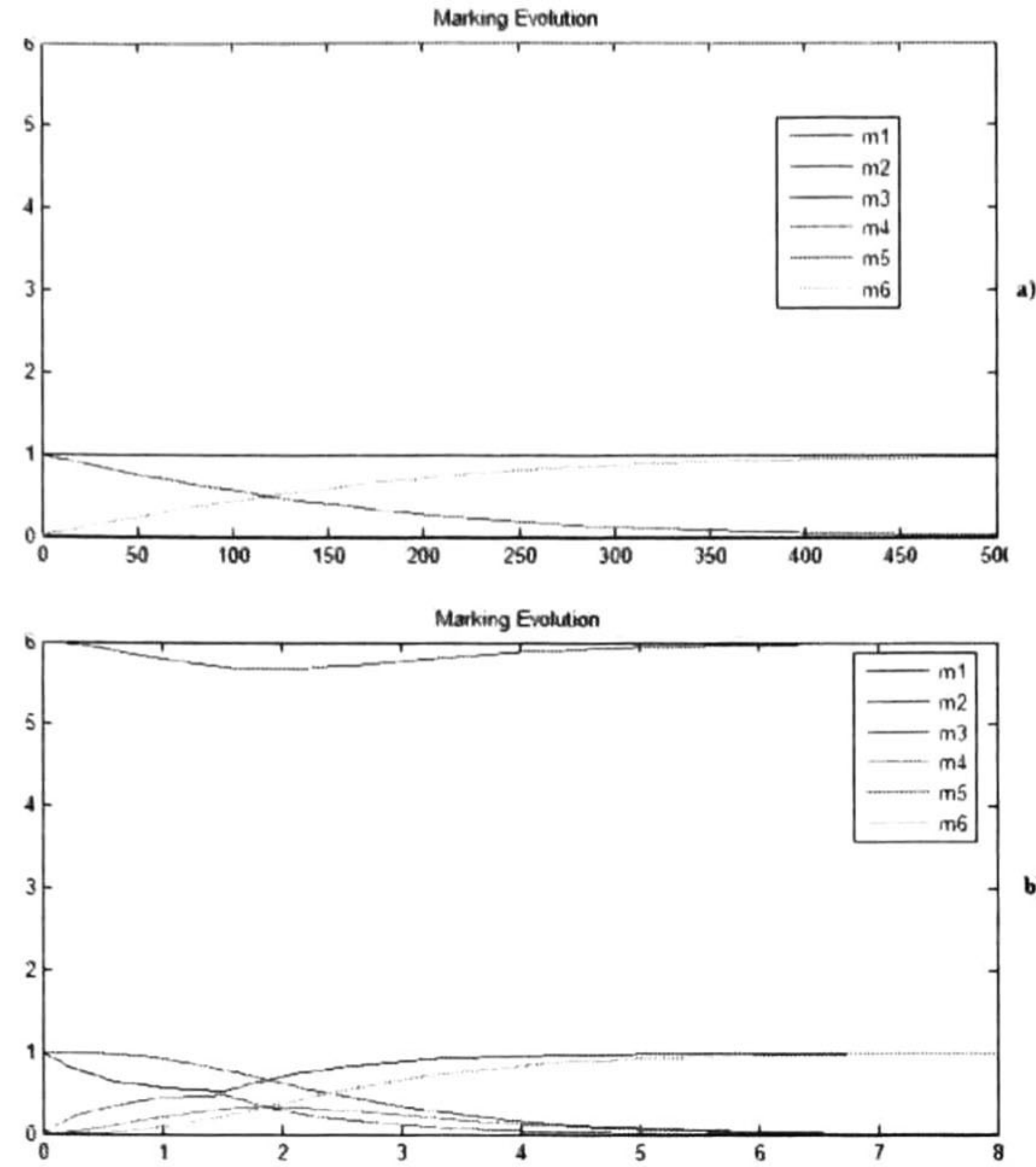


Figura 3.4: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos

### 3.4. CONCLUSIONES

En este capítulo se introdujeron algunos conceptos importantes como:

- Propagación de Flujos

- Este concepto permite comprender el efecto de cualquier transición  $t_i$  sobre todos los lugares de la red.
- $V_{s_{ij}} = 1$ , la transición aumenta el marcado del lugar  $p_j$ .
- $V_{s_{ij}} = -1$ , la transición decrementa el marcado del lugar  $p_j$ .
- $V_{s_{ij}} = 0$ , la transición no tiene ningún efecto en marcado del lugar  $p_j$ .

- Matriz de propagación

$$M_s(m) = \begin{bmatrix} V_{s_1^T} \\ \dots \\ V_{s_{|T|}^T} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$



- Control encendido apagado

$$I_c = \frac{1}{2} (I + \Sigma_m) \quad (3.144)$$



## Capítulo 4

# COMPARACIÓN DE LEYES DE CONTROL

En este capítulo se presentan ejemplos de simulación utilizando:

- La ley de control propuesta en [26] y descrita en el capítulo 2
- La ley de control basada en la Propagación de Flujos

La comparación de resultados es bajo la métrica del tiempo transcurrido hasta que un mercado requerido  $m_d$  se alcanza y se hace de equilibrio.



Se presenta una comparación entre el desempeño en términos de tiempo de la ley de control de la ecuación 2.72 y revisada en la sección 2.3.4 con la propuesta en este trabajo en la ecuación 3.53 y descrita en el capítulo anterior.

Se presentarán tres ejemplos

- Un Grafo Marcado
- Una Máquina de Estados
- Una Red de Libre Elección (Free choice)

#### 4.1. EJEMPLO 1. UN GRAFO MARCADO

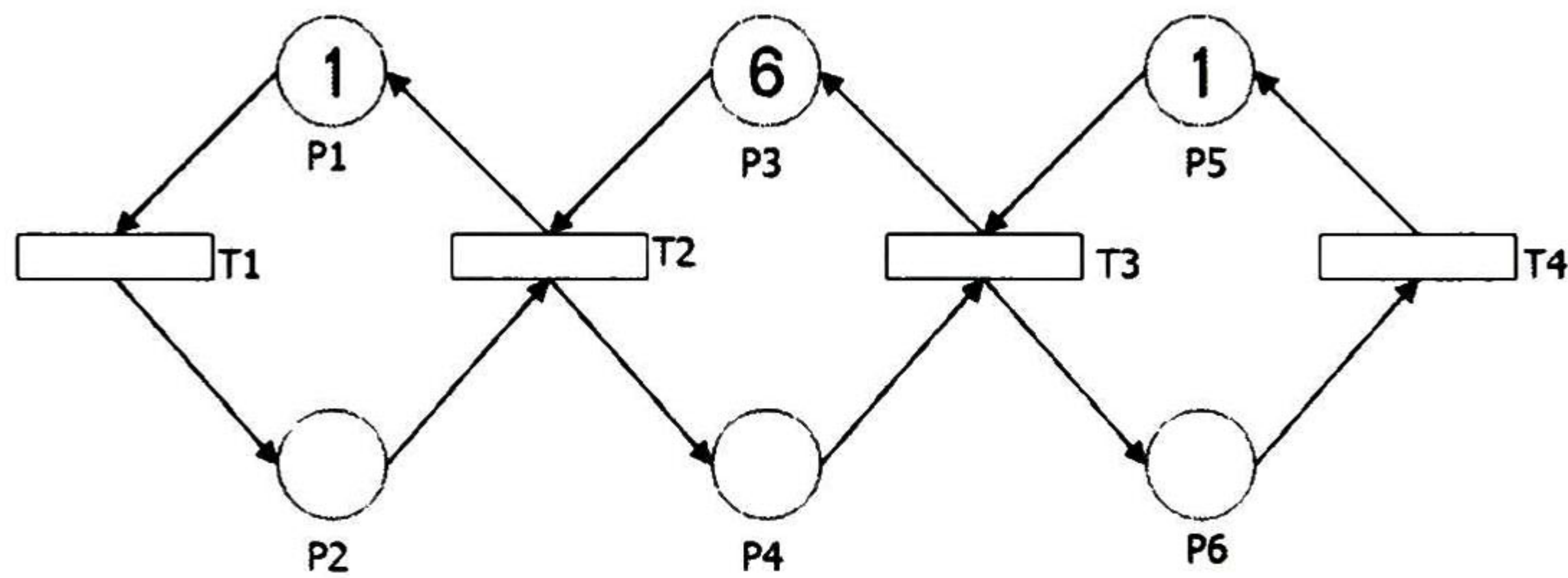


Figura 4.1: Ejemplo 1. Un grafo marcado.

En la figura 4.1 se tiene un sistema de RPCT.

La matriz de incidencia, vector de máximas tasas de disparo y configuración se muestran en el ejemplo 3.1.6.

Sea

$$m_{d1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 5,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

el marcado que se desea alcanzar.



En el primero de los casos, se deja evolucionar el sistema sin control ( $I_c = I$ ) hasta que alcanza un punto de equilibrio. De hecho, el marcado de equilibrio que alcanza el sistema es el que se muestra en 4.1.

Posteriormente, se calcula la ley de control  $I_c$  utilizando el control de la ecuación 2.72.

Por último, se calcula  $I_c$  utilizando la Propagación de Flujos con la ecuación 3.53.

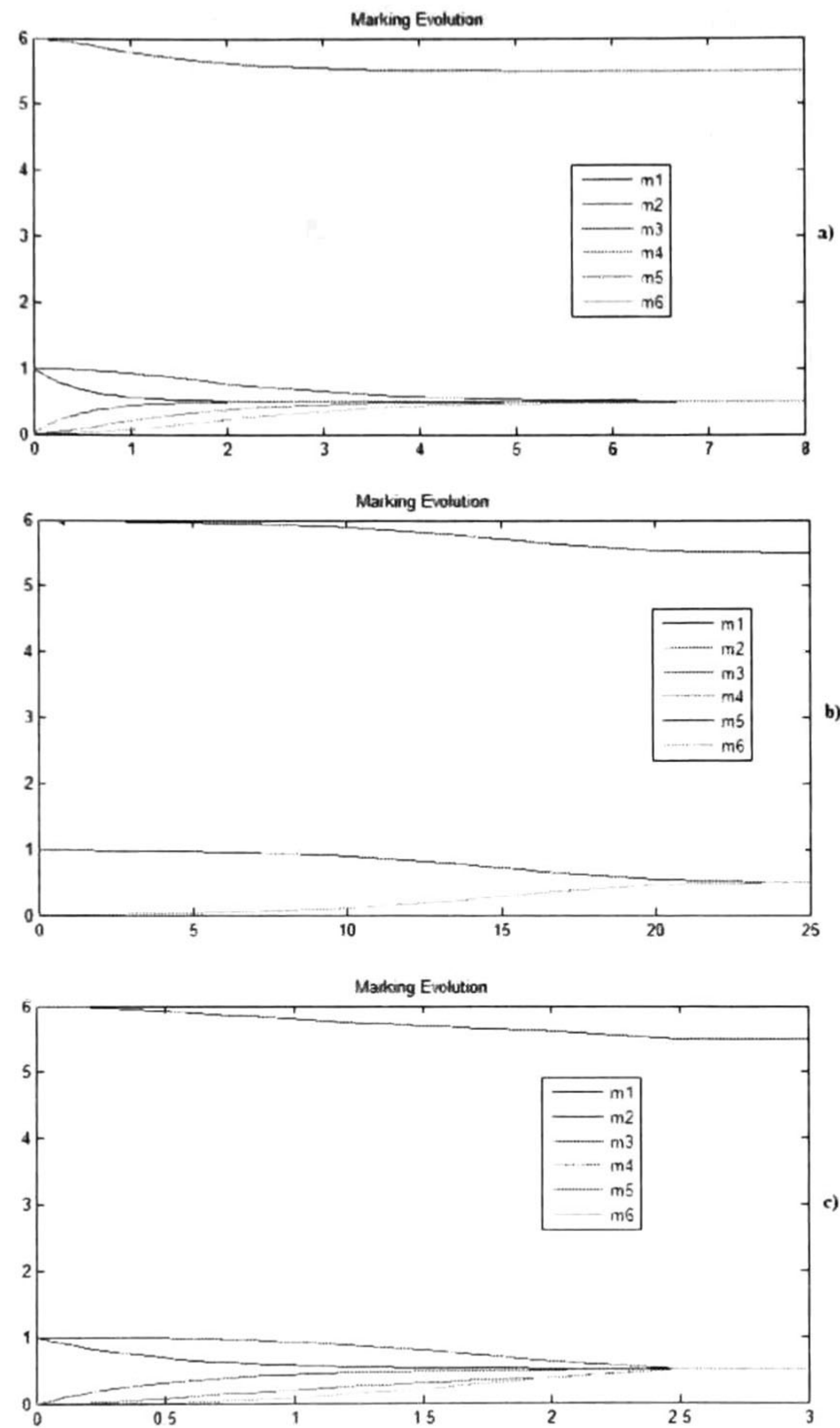


Figura 4.2: a) Sistema sin control. b) Orientación del campo vector. c) Propagación de Flujos.

Los resultados de las simulaciones se presentan en la figura 4.2 a), b) y c).

En la figura 4.2 a), que es cuando  $I_c = I$ , se observa que el sistema alcanza el punto 4.1 en aproximadamente 7 unidades de tiempo.



Cuando se orienta el campo vector del sistema en la dirección de  $m_d$  utilizando la ecuación 2.72, el sistema tarda casi 25 unidades de tiempo en llegar al mercado requerido mostrado en 4.1 y mantenerse en equilibrio.

En cambio, con el control de la ecuación 3.53 propuesto en este trabajo, el sistema llega al mercado requerido y se mantiene en equilibrio en sólo 2.5 unidades de tiempo, lo cual representa una ventaja respecto a dejar evolucionar el sistema con acción de control  $u = 0$ .

Por último, suponga el caso en el que el mercado requerido a alcanzar es

$$m_{d3} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 3 \\ 3 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

que al igual que el mercado  $m_{d1}$  es un mercado de equilibrio natural del sistema (se puede llegar a él sin ninguna acción de control dependiendo del mercado inicial), y que además también resulta óptimo respecto a la maximización de flujos del sistema.

Nuevamente el control por Propagación de Flujos resulta más rápido que en el que se orienta el campo vector desde un principio. En la figura 4.3 se observa como a uno de los controles toma casi 50 unidades de tiempo, mientras que el otro sólo toma alrededor de 8 unidades de tiempo.



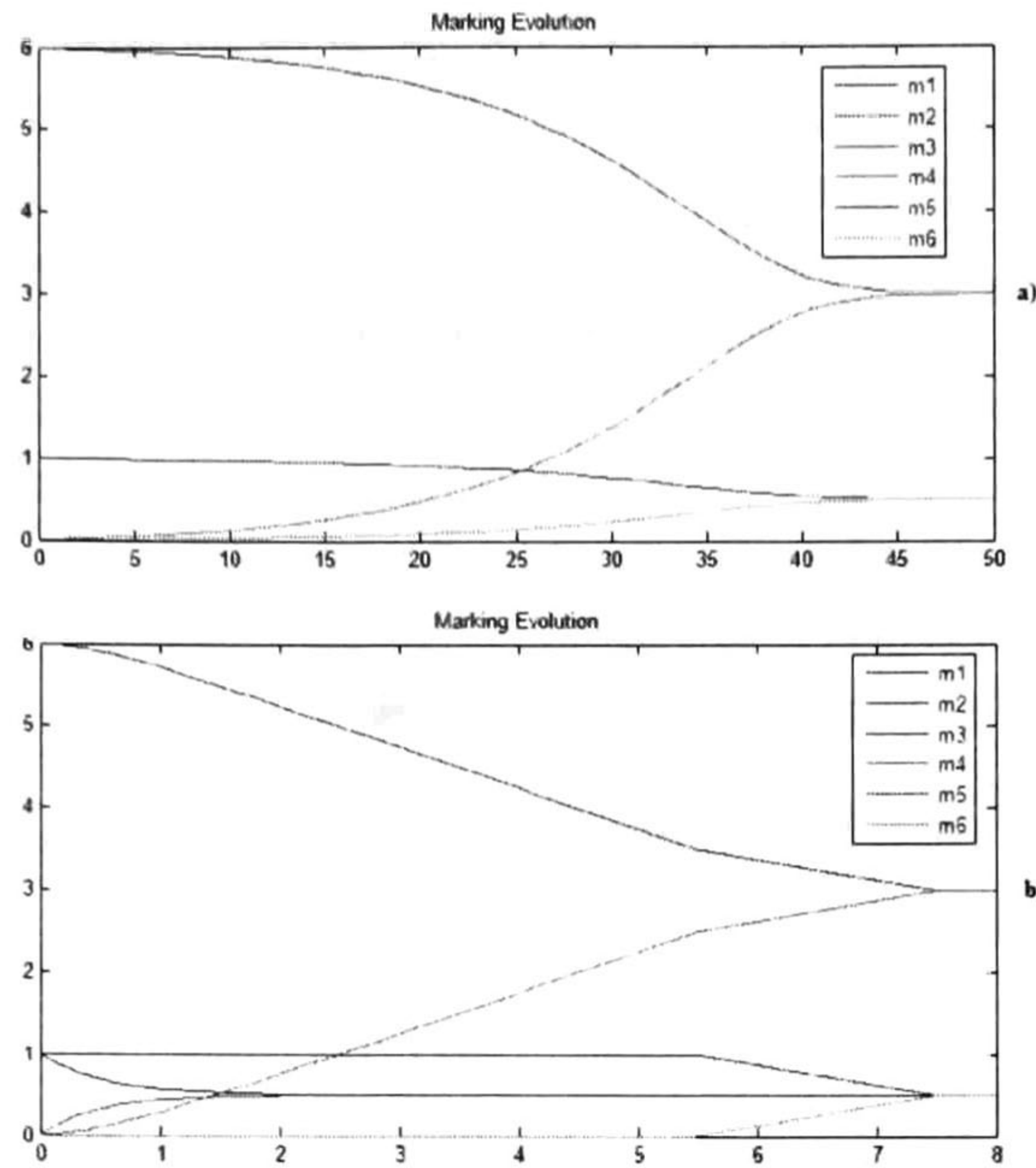


Figura 4.3: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos

## 4.2. EJEMPLO 2. UNA MÁQUINA DE ESTADOS

Para el caso de la máquina de estados de la figura 4.4 el vector de flujos máximos está dado por

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Además suponga que



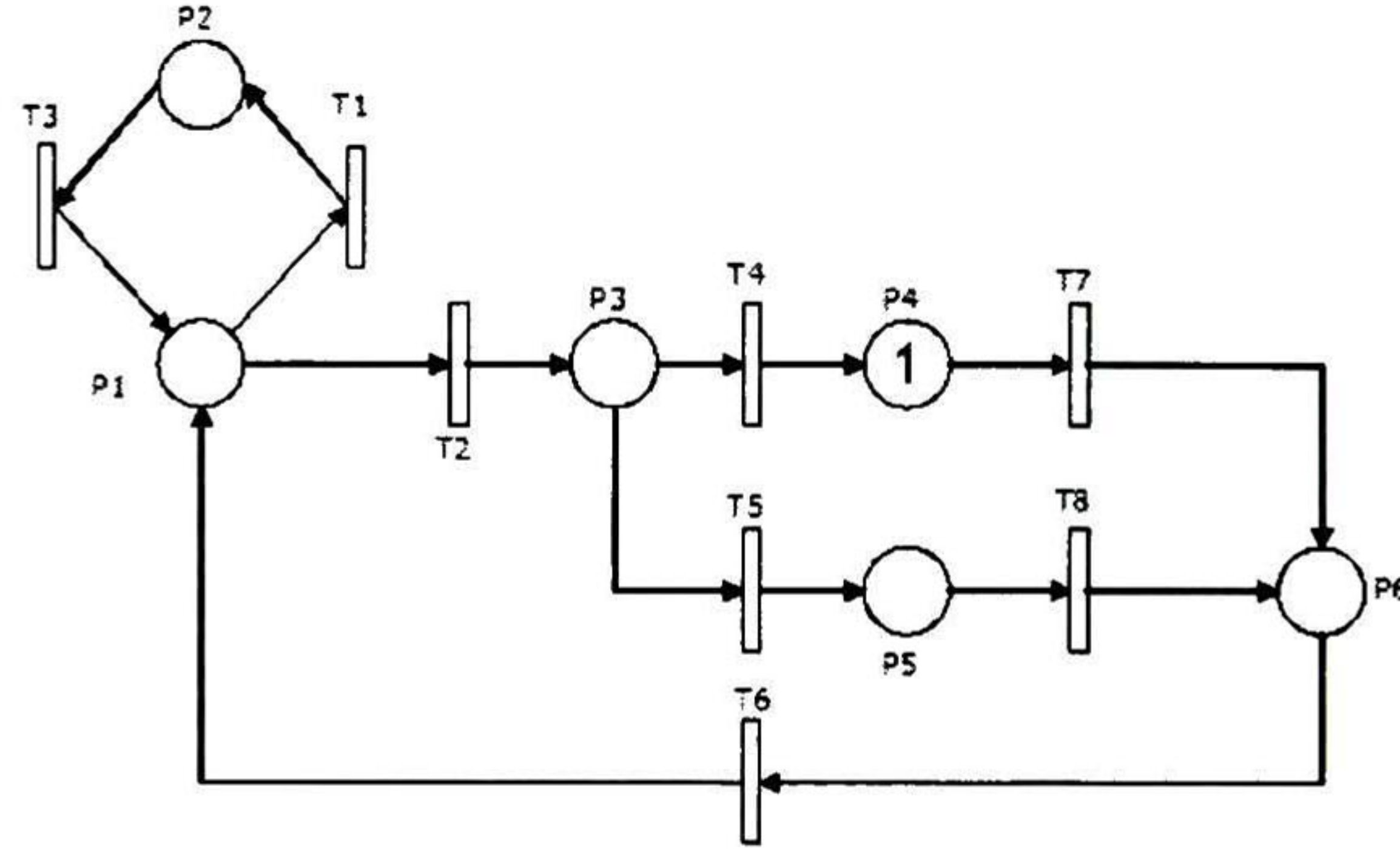


Figura 4.4: Ejemplo 2. Una máquina de estados.

$$m_{d1} = \begin{bmatrix} 0,1716 \\ 0,5122 \\ 0,1145 \\ 0,0575 \\ 0,0575 \\ 0,0866 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

es el marcado de equilibrio al que el sistema llegaría si la condición inicial es:

$$m_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Su matriz de incidencia es

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$



En los tres casos mostrados en la figura 4.5 el marcado  $m_{d1}$  se alcanza si se impone a la red la condición inicial  $m_0$ . Sin embargo, el tiempo que toma en llegar con  $I_c = I$  es de alrededor de 15 unidades de tiempo.

Desafortunadamente, utilizando la orientación del campo vector como control, el tiempo de estabilización en el marcado requerido es de alrededor de 320 unidades de tiempo. Esto ocurre porque el sistema se encuentra en una condición inicial cercana a la cerradura del conjunto  $Class(m_0)$ .

Como en el caso de los grafos marcados, con el control basado en la Matriz de Propagación el tiempo en el que el sistema alcanza el marcado  $m_{d1}$  se reduce, aún cuando se compara contra el sistema no forzado, a no más de 6 unidades de tiempo.

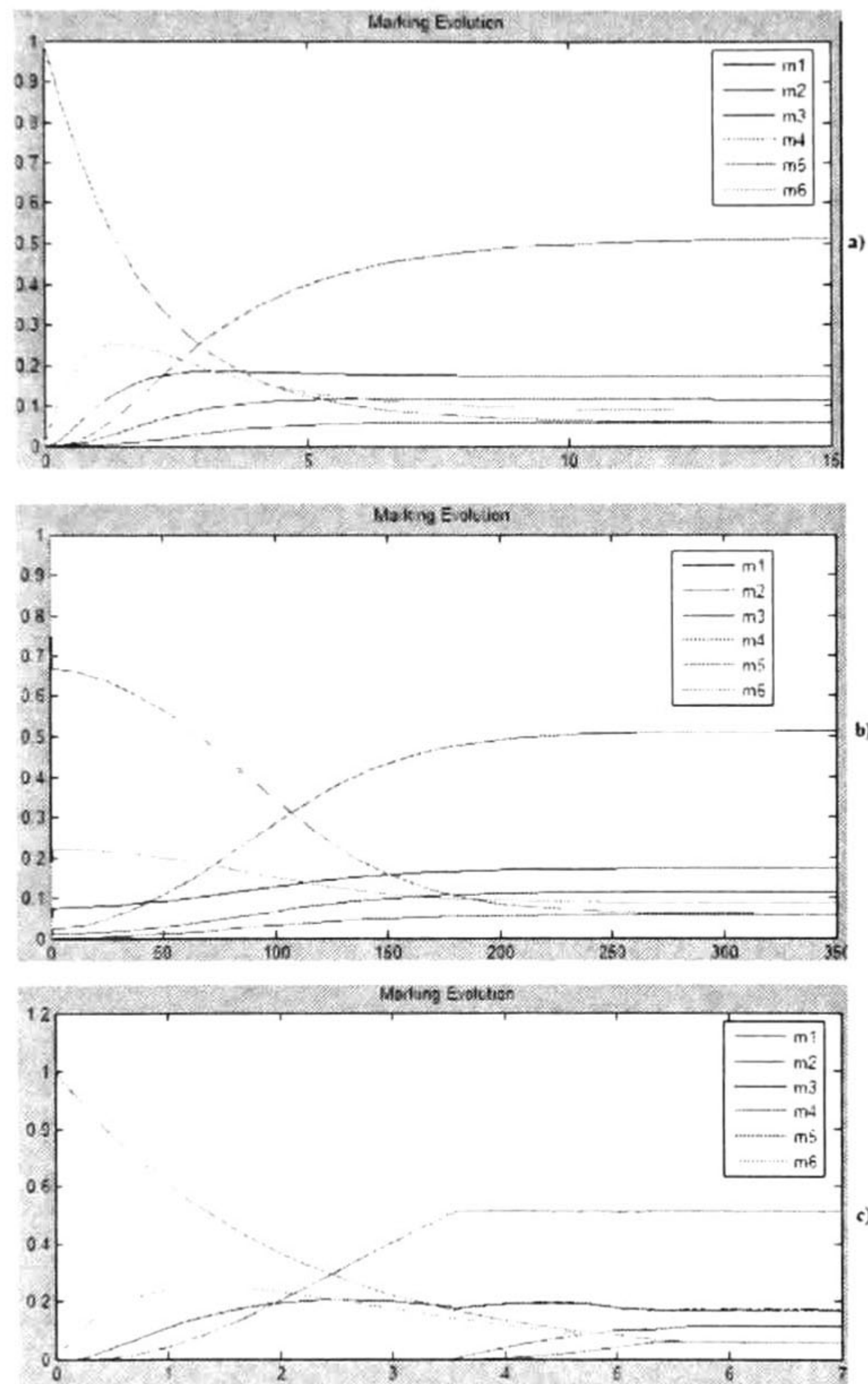


Figura 4.5: a) Sistema no forzado. b) Orientación del campo vector. c) Propagación de Flujos

En la figura 4.4, se requiere que el marcado a alcanzar sea el que optimiza los flujos de acuerdo a la ecuación 2.66. Entonces se tiene que el marcado requerido es



$$m_{d2} = \begin{bmatrix} 0,2564 \\ 0,2564 \\ 0,2051 \\ 0,0513 \\ 0,1026 \\ 0,1282 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Para llegar a este marcado de equilibrio orientando el campo vector se necesitan alrededor de 180 unidades de tiempo contra 6 unidades de tiempo utilizando el control por propagación de flujos, como se puede ver en la figura 4.6.

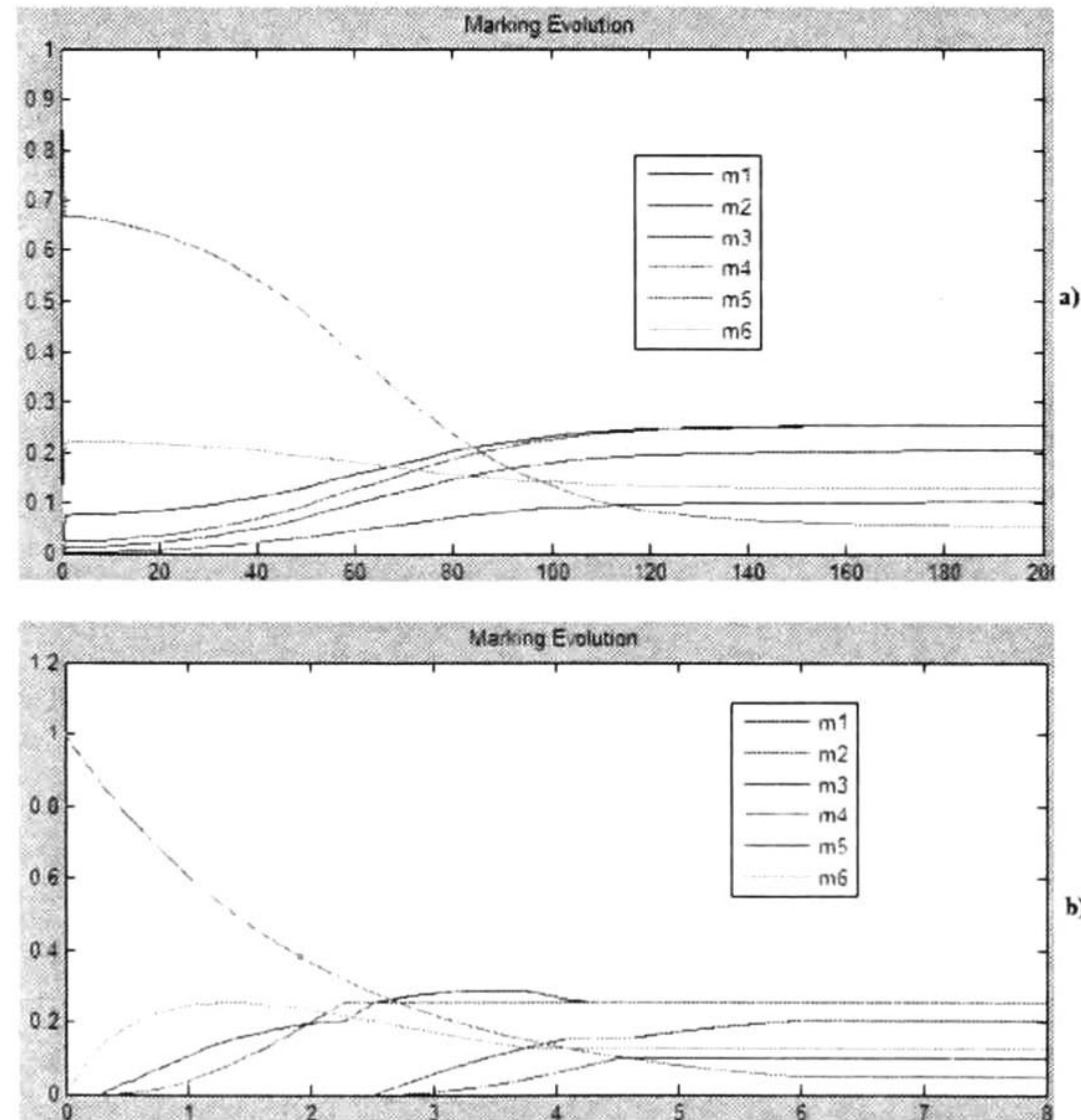


Figura 4.6: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos

Suponga ahora que el marcado requerido es



$$m_{d3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Para el caso en que se orienta el campo vector con la ecuación 2.72 hacia un punto en la cerradura del conjunto  $Class(m_0)$ , como lo es el marcado  $m_{d3}$ , el sistema tarda mucho en converger al marcado requerido.

A pesar de que en la figura 4.7 se puede ver que la tendencia del marcado está en dirección correcta, también es evidente que después de las 2,500 unidades de tiempo aún existe un error considerable.

Por el contrario, utilizando la ley de control de la ecuación 3.53, basado en la Propagación de Flujos, en aproximadamente 8 unidades de tiempo el marcado requerido prácticamente fue alcanzado (en realidad converge de manera asintótica, pero su error ya es muy pequeño).

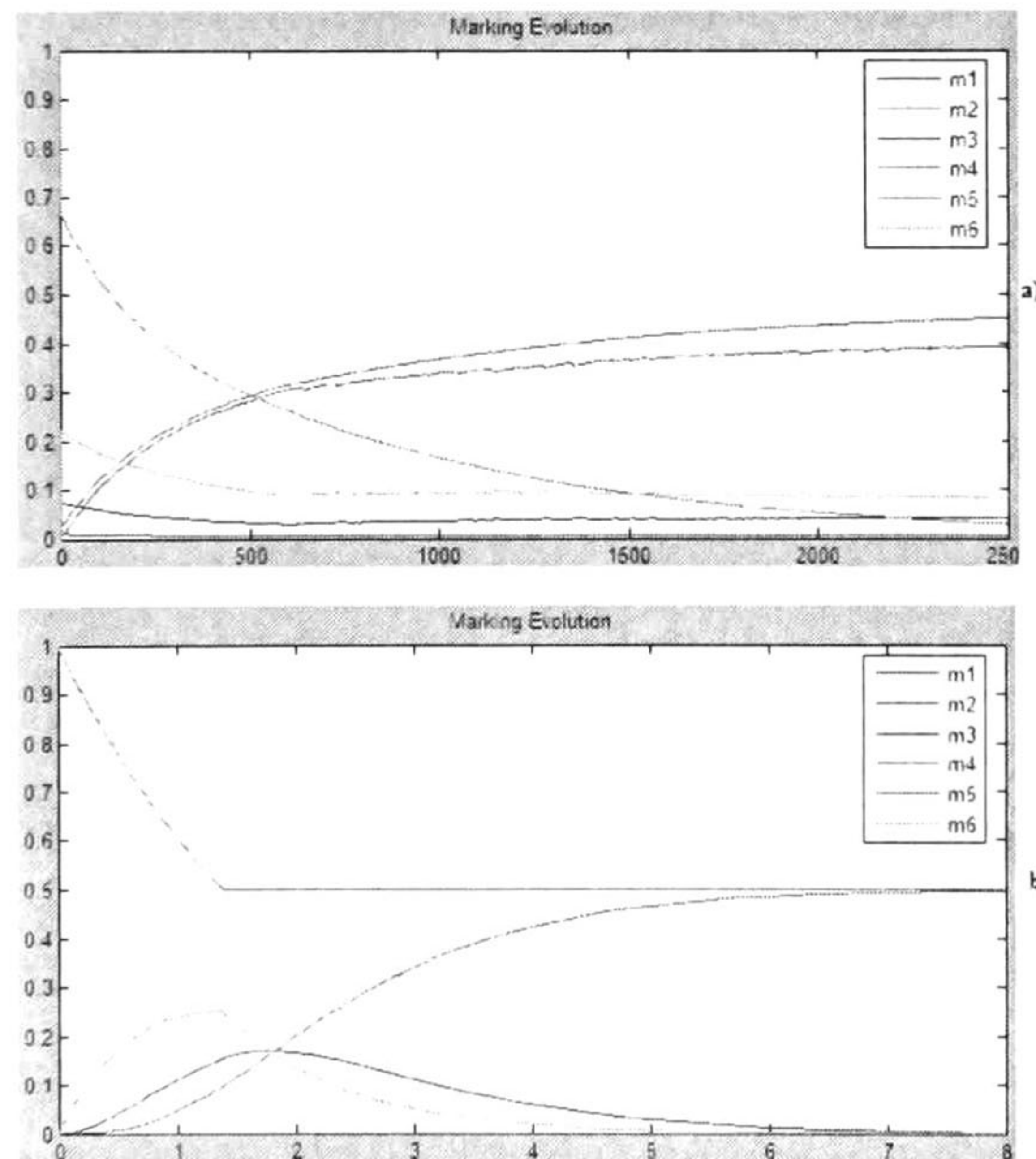


Figura 4.7: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos



### 4.3. EJEMPLO 3. UNA RED DE LIBRE ELECCIÓN

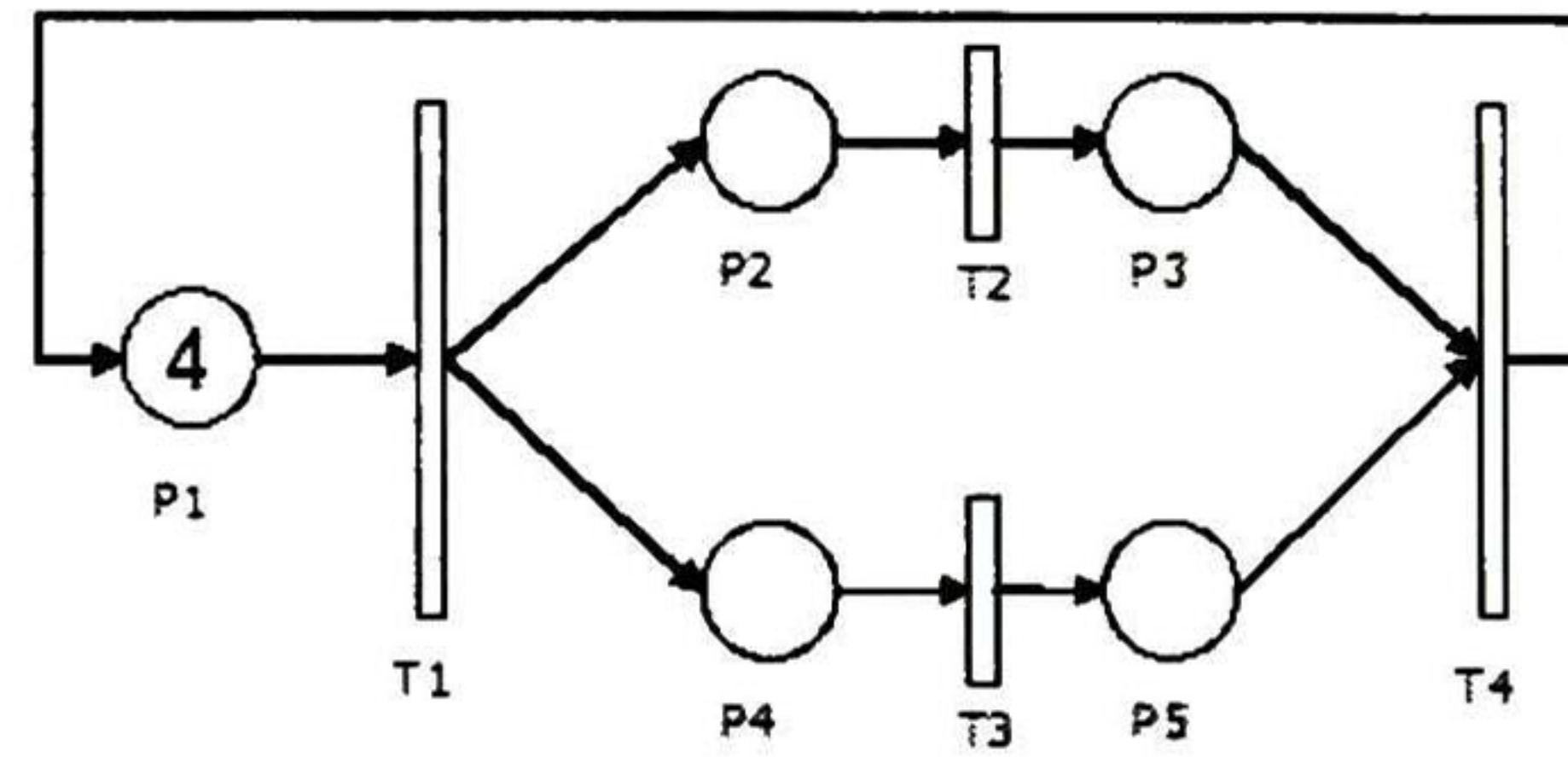


Figura 4.8: Ejemplo 3. Una Red de Libre Elección

En la figura 4.8 se muestra la red del tercer ejemplo. En este caso la estructura de la red corresponde a una Red de Libre elección.

La condición inicial de este sistema es:

$$m_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La matriz de incidencia es

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Sea el marcado requerido

$$m_{d1} = \begin{bmatrix} 1,3333 \\ 1,3333 \\ 1,3333 \\ 1,3333 \\ 1,3333 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

que es el marcado que el sistema alcanza cuando  $I_c = I$ , es decir, sin control. Además la  $u_d$  que se obtiene en el par  $(m_{d1}, u_d)$  hace que los flujos que pasan por las transiciones sean



máximos.

Se observa en la figura 4.9 a) la evolución del marcado de no forzada, que dura casi 5 unidades de tiempo en equilibrarse.

Utilizando el control de la ecuación 2.72, en la figura 4.9 b) se ve que tarda casi 13 unidades de tiempo en alcanza el marcado  $m_{d1}$  y hacerlo de equilibrio.

Para el caso del control propuesto en la ecuación 3.53 en este trabajo, la figura 4.9 c) muestra que se requieren sólo 1.4 unidades de tiempo para que el sistema se encuentre en el marcado requerido.

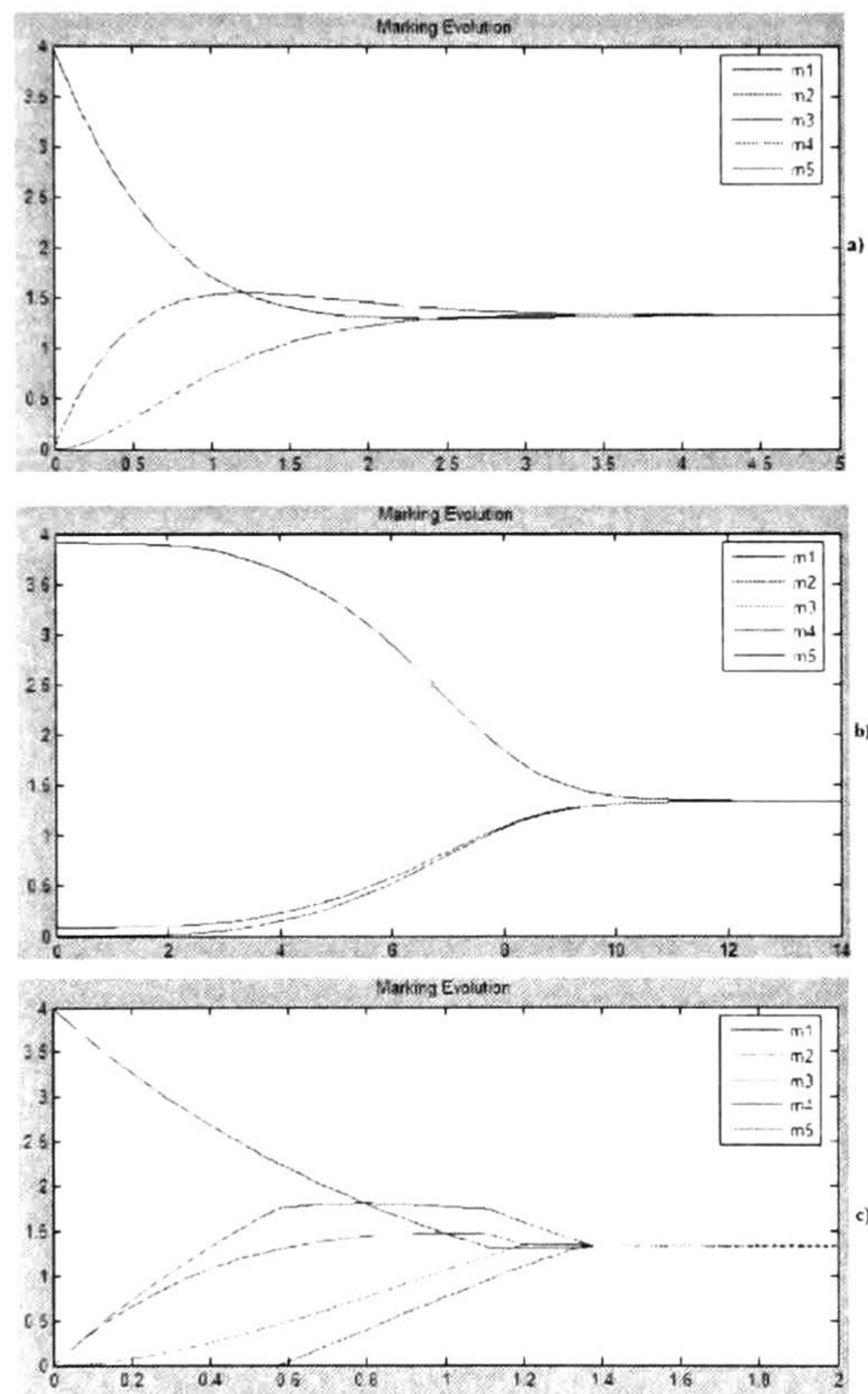


Figura 4.9: a) Sistema no forzado. b) Orientación del campo vector. c) Propagación de Flujos

Suponga ahora que se requiere alcanzar el marcado



$$m_{d2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Se puede ver en la figura 4.10 que el control orientando el campo vector hacia el error toma aproximadamente 15 unidades de tiempo en alcanzarlo, mientras que utilizando la Propagación de Flujos se requieren tan sólo 2 unidades de tiempo.

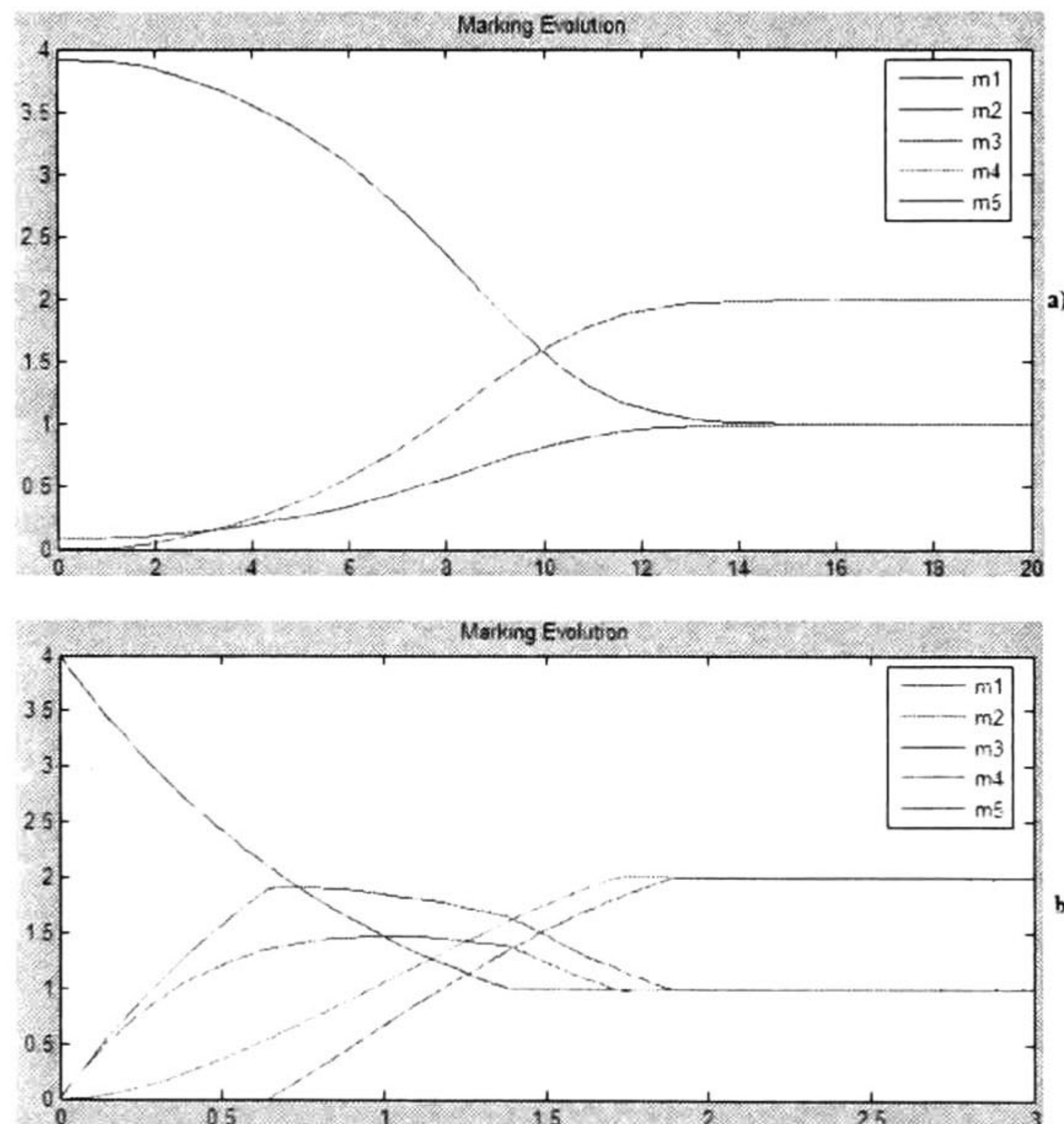


Figura 4.10: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos

En el último de los casos, sea ahora el marcado a alcanzar

$$m_{d3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Se puede ver que  $m_{d3}$  tiende a un extremo del sistema ( $\exists m_{d3i} = 0$ ).



Se puede ver que el marcado  $m_{d3}$  tiene marcados iguales a cero. La evolución en ambos casos es similar, sin embargo como el marcado inicial  $m_0$  también tiene lugares con cero marcas, orientar el campo vector con algún  $m_i$  cercano a cero resulta muy lento.

En este caso al controlar orientando el campo vector le toma alrededor de 4,000 unidades de tiempo mientras que cuando se utiliza la Matriz de Propagación se consumen sólo 5 unidades de tiempo. Estos resultados de simulación se muestran en la figura 4.11.

Es evidente que el estado  $m_{d3}$  nunca será alcanzado en tiempo finito (se alcanza de manera asintótica), pero para efectos prácticos, se utiliza un  $\varepsilon$  de tolerancia.

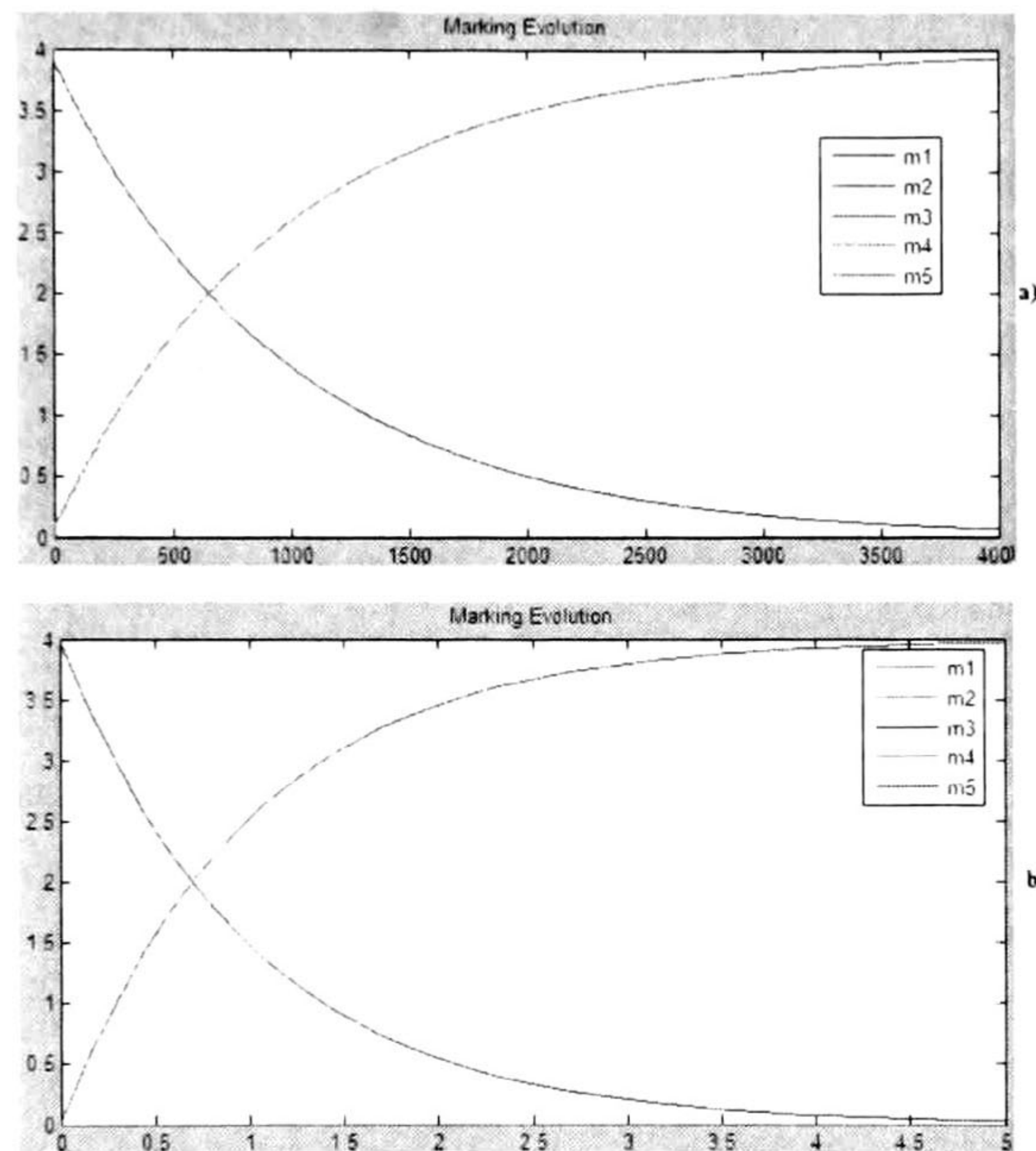


Figura 4.11: a) Orientación del campo vector. b) Propagación de flujos



## 4.4. CONCLUSIONES

Los resultados de este capítulo muestran una mejora sustancial en términos de tiempo, puesto que en todos los casos el mercado  $m_d$  fue alcanzado más rápido con el control por propagación de flujos que con la ley de control propuesta por Vázquez [26] basada en la orientación del campo vector.

Los ejemplos analizados fueron:

- Un Grafo Marcado
- Una Máquina de Estados
- Una Red de Libre Elección

Como se presentó, incluso cuando el mercado requerido  $m_d$  es un punto de equilibrio natural del sistema (aquel que se alcanza sin ninguna ley de control desde el mercado inicial  $m_0$ ) el control por propagación de flujos disminuyó el tiempo de convergencia.



# Capítulo 5

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una ley de control que reduce el tiempo en el que un sistema RPCT alcanza un mercado requerido  $m_d$  desde una condición inicial  $m_0$  cualquiera.

Como el sistema tiene estado acotado, puesto que nunca puede ser menor a cero, las RPCT no forman un espacio vectorial e incluso su conjunto de estados alcanzables no tiene ninguna estructura que facilite su análisis. Esta condición hace que muchos resultados de teoría de control no puedan ser adaptados a la teoría de RPCT.

Además, el control que se puede hacer es acotado por el estado, lo cual es una restricción por sí misma compleja.

Lo anterior hizo necesario desarrollar nuevos conceptos que permitieran simplificar el análisis para el cálculo de la ley de control  $u$ , de modo que se cumpliera con la cota

$$0 \leq u \leq \Lambda \Pi(m)m \quad (5.1)$$

La manera de simplificarlo fue con a ayuda del control proporcional al flujo del sistema, de modo que la ley de control queda en términos de una matriz diagonal  $I_c$  con

$$I_{ci} \in \{0,1\} \quad (5.2)$$

Los conceptos propuestos que ayudaron a la solución del problema son:

- Un esquema Encendido/Apagado para el control
  - Cuando una transición  $t_i$  está abierta la acción de control sobre ésta es  $u_i = 0$  o equivalentemente  $I_{ci} = 1$ . Es decir, la transición  $t_i$  deja pasar el máximo flujo que puede.



- Cuando una transición  $t_i$  está cerrada, la acción de control sobre ésta es  $u_i = f_i$  o equivalentemente  $I_{ci} = 0$ . Es decir, por la transición  $t_i$  no pasa flujo.
- Propagación de flujos
  - El vector  $Vs_i$  tiene información del efecto de cada transición  $t_i$  sobre todos los lugares  $p_j$  de la red.
- Matriz de Propagación
  - El controlador abre y cierra transiciones de acuerdo a la ecuación

$$I_c = \frac{1}{2}(I + \Sigma) \quad (5.3)$$

En el capítulo 4 se observa una comparación entre la ley de control propuesta por Vázquez en [26] y la que se desarrolló en este trabajo, con resultados contundentes en términos de la reducción de tiempo para alcanzar el mercado requerido  $m_d$ .

Sería interesante continuar la investigación orientada a la optimización de la ley de control de modo que se garantice la convergencia desde cualquier condición inicial  $m_0$  hasta el mercado requerido  $m_d$  en tiempo mínimo.

Del mismo modo, el trabajo para sintetizar controladores de tareas (Schedules) para sistemas de eventos discretos, pudiera verse beneficiado utilizando los resultados de este trabajo, puesto que el espacio de búsqueda de las combinaciones de las transiciones que se deben disparar para encontrar Schedules óptimos pudiera reducirse.

Otra posible extensión es tomar en cuenta casos para transiciones no controlables que no fue abordado en el presente trabajo.



# Bibliografía

- [1] BALDUZZI F., Di FBBRARO A., GIUA A. Decidability results in first-order hybrid petry nets. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*.
- [2] BALDUZZI F., GIUA A., SEATZU, C. Modelling and simulation of manufacturing systems with first-order hybrid petri nets. *Int. J. of Production research*.
- [3] BERTHELOT, G. Checking Properties of Nets Using Transformations. *Lecture Notes in Computer Science: Advances in Petri Nets 1985*.
- [4] BORRELLI, F. Constrained Optimal control of linear and hybrid systems. *Lectures Notes in Control and Information Sciences*.
- [5] CASSANDRAS, C. G. Discrete event systems. *Modeling and Performance Analysis*. Asken Associates. 1993.
- [6] CORMEN Thomas, LEISERSON E., RIVEST Ronald. *Introduction to algorithms*. MIT Press. 1990.
- [7] DAVID R., ALLA H.. Continuous and hybrid Petri Nets. *Journal of Circuits, Systems and Computers*.
- [8] DAVID R., ALLA H. Continuous Petri nets. In *Proc. of the 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets*, pages 275,294, Zaragoza, Spain, 1987.
- [9] DAVID R., ALLA H. *Discrete, Continuous and Hybrid Petri Nets*. Springer. 2005
- [10] DESEL, Jörg, ESPARZA, Javier. *Free choice Petri nets*. Cambridge University press. 1995.
- [11] GAUJALA, Bruno, GIUA, Alessandro. *Optimal stationary behavior for a class of timed continuous Petri nets*. 2004.

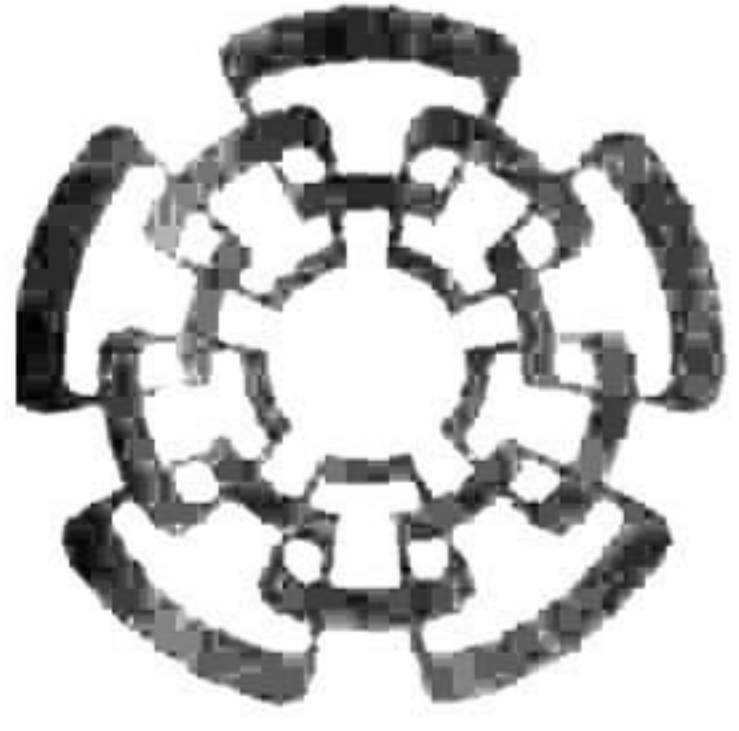


- [12] GIUA A., MAHULEA C. RECALDE L., SEATZU C., SILVA M. Optimal control of timed continuous petri nets via model predictive control. WODES'06 8th International workshop on Discrete Event Systems. Pages 235-241. Ann Arbor, USA, July 2006.
- [13] GUDIÑO, Gema. Modelado y Simulación de Sistemas de Distribución de Agua Potable Usando Redes de Petri Híbridas. Cinvestav. Trabajo de Tesis. 2007.
- [14] HADDAD S., RECALDE L., SILVA M. On the computational power of timed differentiable Petri Nets. En E. Asarín and P. Bouyer editors. Formal Modeling and Analysis of timed systems. 4th Int. Conf. FORMATS 2006. Volumen 4202 de LNCS. Pags. 230-244. Paris 2006. Springer.
- [15] HADDAD S., RECALDE L., SILVA M. On the computational power of timed differentiable Petri Nets. Technical report RR-06-05, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España. 2006.
- [16] JÚLVEZ J. RECALDE L. SILVA M. Steady-state performance evaluation of continuous mono T-semiflows Petri Nets. Automatica, 41(4): 605-616, 2005.
- [17] JÚLVEZ, Jorge. Técnicas Algebraicas para el Análisis y Control de Redes de Petri Continuas. Tesis doctoral. Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas. Universidad de Zaragoza. 2004.
- [18] KAILATH, Thomas. Linear Systems. Prentice Hall. 1980.
- [19] KHALIL, Hassan. Nonlinear Systems. Prentice Hall. 1996.
- [20] MAHUELA, RAMIREZ, RECALDE, SILVA. Steady state control, zero valued poles and token conservation laws in continuous net systems.
- [21] MAHULEA Cristian. Timed Continuous Petri Nets: Quantitative Analysis, Observability and Control. Tesis Doctoral. Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas. Universidad de Zaragoza.
- [22] RAMCHANDANI,Chander. Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Petri Nets. Tesis doctoral. Massachusetts Inst of Tech Cambridge Project Mac.
- [23] RAMÍREZ, Antonio. Scheduling en redes de Petri. Tesis doctoral.
- [24] SIFAKIS, J., "Petri nets for performance evaluation,"in: Beilner, H. and Gelenbe, E. (eds.), Measuring, Modeling, and Evaluating Computer Systems (Proc. 3 rd Symp., IFIP Working Group 7.3), North-Holland, Amsterdam, pp. 75-93, 1977.



- [25] SILVA, M., RECALDE, L. Continuization of Timed Petri Nets: From Performance Evaluation to Observation and Control. 26th International Conference On Application and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency; Application and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency 2006.
- [26] VÁZQUEZ, Renato. Controlabilidad en Redes de Petri Continuas Temporizadas. Cinvestav. Trabajo de Tesis. 2006.
- [27] VERNADAT F.B., DICESARE Frank, HARHALAKIS G. , PROTH J.M., SILVA Manuel. Practice of Petri Nets in Manufacturing. Chapman & Hall. 1993.
- [28] ZERHOUNI N., FERNEY M., EL MOUDNI A. Transient analysis of manufacturing systems using continuous Petri nets.1995.





**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Síntesis de controladores para Redes de Petri Continuas  
Temporizadas

del (la) C.

Enrique Javier AGUAYO LARA

el día 07 de Marzo de 2008.

Dr. Luis Ernesto López Mellado  
Investigador CINVESTAV 3B  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Ofelia Begovich Mendoza  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño  
Investigador CINVESTAV 3A  
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. María Elena Meda Campaña  
Profesor Titular  
Universidad de Guadalajara CUCEA





CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006317