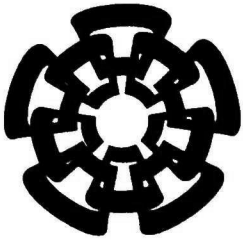


xx(147059,1)



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

Control Robusto con Modos Deslizantes y Lógica Difusa

Tesis que presenta:
Bernardo Rincón Márquez

para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV
IPN
**ADQUISICION
DE LIBROS**

Guadalajara, Jalisco, Diciembre de 2007.

CLASIF.: TK125.68 .P56 2007
ADQUIS.: PC-514
FECHA: 12-XI-2008
PROCED. Don. 2008
\$ _____

ID: 144220-1001

Control Robusto con Modos Deslizantes y Lógica Difusa

**Tesis de Doctorado en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Bernardo Rincón Márquez
Ingeniero Industrial Electricista
Instituto Tecnológico de Morelia 1978-1983

Director de Tesis
Dr. Alexander Georgievich Loukianov

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2007.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema y Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Organización del Trabajo .	3
2. Bases Teóricas	5
2.1. Control con Modos Deslizantes	5
2.1.1. Método del Control Equivalente	6
2.1.2. Sistema de Ecuaciones en la Forma Regular	8
2.1.3. Estabilidad de Modos Deslizantes	10
2.2. Control Difuso	12
2.2.1. Normalización y Desnormalización	12
2.2.2. Fuzificación de las Variables de Entrada	14
2.2.3. Mecanismo de Inferencia	15
2.2.4. Defuzificación	17
3. Control con Modos Deslizantes y Lógica Difusa Tipo Mamdani	25
3.1. Control Jerárquico con Modos Deslizantes.	25
3.2. Control con Lógica Difusa para el Ajuste de las Ganancias	35
4. Aplicación al Caso Escalar	41
4.1. Modelo del Motor de Corriente Directa	41
4.2. Diseño del Controlador	43
4.3. Resultados de la Simulación	44
5. Aplicación al Caso Vectorial	53
5.1. Modelo del Motor de Pasos .	53
5.2. Diseño del Controlador	55
5.3. Resultados de la Simulación	57

6. Control con Modos Deslizantes y Lógica Difusa Tipo Sugeno	67
6.1. Formulación del Problema	67
6.2. Método Propuesto	69
6.2.1. Transformación a la Forma Regular	69
6.2.2. Diseño de la variedad deslizante y del control.	72
6.2.3. Análisis de las dinámicas de los modos deslizantes	73
7. Aplicación a un Sistema Subactuado	75
7.1. Modelo del Pendubot.	75
7.2. Linealización del modelo	78
7.3. Diseño del Controlador	79
7.4. Resultados de la Simulación	82
8. Conclusiones y Trabajo Futuro.	85
A. Artículos Publicados	87
A.1. Conferencias	87
A.2. Revistas	87

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema y Antecedentes

En el campo del control automático, existe un gran interés en las técnicas de control robusto respecto a la variación de parámetros y perturbaciones. En este sentido, una técnica de control robusto sencilla, es la del Control por Modos Deslizantes (MD) [19], [20], la cual consiste de dos pasos:

- primero se selecciona una variedad de deslizamiento $s(x) = 0$, donde $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ tal que, la ecuación del movimiento de modos deslizantes sobre esta variedad tenga propiedades deseadas, al menos que sea estable, y
- segundo, diseñar o deducir una ley de control discontinuo capaz de estabilizar la proyección del movimiento del sistema en lazo cerrado en el subespacio de las variables deslizantes, es decir, que las trayectorias del sistema alcancen la variedad en un tiempo finito y permanezcan sobre esta variedad independientemente de las perturbaciones.

Es conocido, que el movimiento por modos deslizantes es invariante respecto a aquellas perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento¹ (matching condition) [1]. Sin embargo, en la práctica, muchos sistemas de control tienen perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento, y perturbaciones que no satisfacen dicha condición (unmatching condition). Este último tipo de perturbaciones afecta la ecuación de modos deslizantes. Para resolver este problema, se puede usar un control discontinuo con altas ganancias jerárquicas. Sin embargo, este control puede provocar oscilaciones o castañeteo (chattering) [20] debido al comportamiento de los dispositivos de control (histéresis, tiempo de retardo, etc.).

Para evitar el problema planteado, se propone un nuevo esquema de control usando la combinación de las técnicas Control MD [19], Control por Bloques [10], Control por Altas Ganancias [19], y Control con Lógica Difusa [12], [2], [13], [8] para una clase de sistemas no lineales que

¹Se llama “condición de apareamiento” o “matching condition”, cuando la incertidumbre pertenece al subespacio del control.

pueden presentarse en la forma Controlable por Bloques No Lineal (NBC-form) [10]. El Control por Bloques se usa para diseñar una variedad de modos deslizantes no lineal con dinámicas de modos deslizantes deseadas. Estas dinámicas contienen altas ganancias jerarquizadas para asegurar la estabilidad del movimiento de modos deslizantes en presencia de perturbaciones que no satisfacen la condición de apareamiento. Para rechazar los efectos de las perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento y hacer que la variedad sea atractiva se diseña un controlador de modos deslizantes. Finalmente, basados en la técnica de control con lógica difusa tipo Mamdani, los valores de las ganancias del controlador son modificados de tal manera que la amplitud del castañeteo del sistema de lazo cerrado se reduce. Cabe mencionar que el control con modos deslizantes y lógica difusa ya se ha investigado para sistemas con perturbaciones que satisfacen únicamente la condición de apareamiento en [5], [8], [12], [14], y [22].

Por otro lado, recientemente se ha usado el método difuso de Takagi-Sugeno (TS) para sistemas no lineales. Usando esta técnica, se obtiene fácilmente la dinámica de un sistema no lineal mediante la linealización del sistema en diferentes puntos cercanos al punto de operación. Una vez obtenidos los modelos lineales, se les diseña un controlador lineal local, y la ley de control total será la combinación difusa de esos controladores. Se han desarrollado varios algoritmos de control difuso TS, [16], [7], [6], y [18], que tienen buen desempeño y son estables, pero son sensibles respecto a las incertidumbres. Estas incertidumbres pueden incluir al error de modelado, variaciones paramétricas, errores de aproximación difusos, y perturbaciones externas, las cuales se presentan frecuentemente en la práctica. Para resolver el problema de robustez, en [23] se propone un controlador difuso TS usando la técnica de control de estructura variable (VSC). Sin embargo, para la estabilidad y la existencia de los modos deslizantes, establece condiciones muy restrictivas que no se cumplen en la práctica. Tales condiciones son: a). todas las matrices B_i , para $i = 1, 2, \dots, r$, de los r sistemas linealizados, deben ser idénticamente iguales a la matriz B , y b). las derivadas respecto al tiempo de las funciones de membresía no deben cruzar por cero.

Para superar el problema planteado en el párrafo anterior, en este trabajo se propone el siguiente esquema, primero se transforma el sistema original en la llamada Forma Regular [11]. Posteriormente, aplicando el método de Control Difuso TS al subsistema de orden reducido que no contiene al control, se diseña una variedad deslizante, y finalmente, se diseña un control discontinuo para que la variedad sea atractiva.

1.2. Objetivos

Son propósitos en este trabajo:

1. Desarrollar un esquema de control para sistemas no lineales con perturbaciones de ambos tipos, es decir las que satisfacen y las que no satisfacen la condición de apareamiento, basado en la combinación de las técnicas de Control por Bloques con altas ganancias, y de Control MD para proveer de robustez al sistema, y con la técnica de Control Difuso tipo Mamdani para reducir el castañeteo.

2. Desarrollar un esquema de control robusto para sistemas no lineales que se puedan separar en la llamada Forma Regular con perturbaciones, basado en la combinación de las técnicas de Control Difuso TS y Control MD.
3. Basados en los esquemas de control propuestos, diseñar algoritmos de control robusto para plantas electromecánicas actuadas (Motor de Corriente Directa, Motor a Pasos), y subactuadas (Pendubot).

1.3. Organización del Trabajo

La información presentada en este documento está organizada como sigue:

En el Capítulo 2, se establecen las bases teóricas que dan fundamento a este trabajo, tales como las técnicas del Control MD y Control con Lógica Difusa.

En el Capítulo 3, se propone el esquema de control robusto "Control con MD y Lógica Difusa tipo Mamdani", que combina las técnicas del Control por Bloques, Control por Altas Ganancias, Control MD, y Control con Lógica Difusa tipo Mamdani. Primero, el sistema original se transforma en la forma Controlable a Bloques No Lineal, y se definen las ganancias jerárquicas, después, suponiendo perturbaciones acotadas se establecen las condiciones de estabilidad para los modos deslizantes. Finalmente los valores de las ganancias del controlador son modificados mediante la técnica de control con lógica difusa tipo Mamdani

En el Capítulo 4, se presenta un ejemplo de aplicación del esquema antes propuesto, en donde la planta es un motor de corriente directa de imanes permanentes (caso escalar). Al final del capítulo se muestran resultados del problema de estabilización y de seguimiento de trayectorias.

En el Capítulo 5, el esquema de control propuesto en el Capítulo 3 se aplica para el control del motor a pasos con imanes permanentes (caso vectorial), y se presentan resultados de simulación para el seguimiento de trayectorias.

En el Capítulo 6, se propone el esquema de control robusto "Control con MD y Lógica Difusa tipo TS" para resolver el problema de estabilidad que se presenta cuando se aplica el Control Difuso TS, combinado con el Control MD.

En el Capítulo 7, el esquema presentado en el capítulo anterior, se aplica a una planta subactuada conocida como Pendubot, y se muestran resultados de simulación.

Finalmente, en el Capítulo 8, se presentan algunas conclusiones relevantes sobre el trabajo, y se establecen dos líneas de trabajo para tiempos venideros.

Capítulo 2

Bases Teóricas

2.1. Control con Modos Deslizantes

Los sistemas de control de estructura variable han sido mejorados ampliamente en los últimos años debido a que existe un interés constante sobre todo en áreas de aplicación a procesos físicos. Un sistema de estructura variable se construye alrededor de un conjunto de subsistemas continuos llamados estructuras que pueden conmutar durante el curso del control haciendo el control discontinuo. El resultado de la acción de control es una función discontinua de los estados del sistema, las perturbaciones y las señales de referencia. Un método popular de control de sistemas de estructura variable es el control por modo deslizante.

Para introducirnos en el tema, consideremos un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x, t, u) \quad (2.1)$$

donde $x \in R^n$ son los estados del sistema, $u \in R^m$ es la entrada de control, y f es una función continua en el tiempo t y localmente Lipschitz¹ en x y en u , lo que garantiza la existencia de solución.

¹Condición de Lipschitz: Sea

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ con } x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

. Entonces existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estados (2.2) tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$ si, $f(t, x)$ que es continua en tramos, satisface la *condición de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

para todo par (t, x) y (t, y) en alguna vecindad de (t_0, x_0) . L es una constante positiva conocida como *constante de Lipschitz*.

Cuando $f : R \rightarrow R$, la condición de Lipschitz puede escribirse como

$$\frac{|f(t, x) - f(t, y)|}{|x - y|} \leq L$$

implicando que el valor absoluto de la pendiente de la línea recta resultante en una gráfica de $f(x)$ contra x , sea menor que L .

El diseño del control por modos deslizantes se divide en dos partes: la primera consiste en determinar una variedad de deslizamiento

$$s(x) = 0 \quad (2.3)$$

donde $s = [s_1, \dots, s_m]^T$ tal que el movimiento del modo deslizante sobre esta variedad tenga propiedades deseadas (p.e. estabilidad del movimiento). La segunda parte consiste en determinar una ley de control

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{con } s_i(x) < 0 \\ u_i^-(x, t) & \text{con } s_i(x) > 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

diseñado para proporcionar estabilidad de la proyección del sistema en lazo cerrado (2.1) y (2.3) sobre el subespacio s .

Tales sistemas dinámicos discontinuos generan movimientos con trayectorias en las variedades, y se conocen como modos deslizantes. Debido a las discontinuidades, la velocidad del vector de estado puede estar directamente relacionada con la variedad, y los modos deslizantes ocurren a lo largo de esta variedad.

En los modos deslizantes, los dispositivos de implementación del control generan una función discontinua, por ejemplo los relevadores, o los conmutadores de alta frecuencia basados en los transistores de compuerta aislada (IGBT), etc., donde sus entradas de energía tienden a cero mientras la salida (su valor promedio) toma valores finitos. Entonces dichos dispositivos tienen una alta ganancia (teóricamente infinitos), esto significa que se suprime la influencia de perturbaciones e incertidumbres en el comportamiento del sistema. Sin embargo, el efecto de invariabilidad es alcanzado usando una ley de control finito. En segundo lugar, las trayectorias de los modos deslizantes están en alguna variedad de dimensión más baja que el sistema, entonces el orden de la ecuación de movimiento se reduce también, lo que permite la descomposición y la simplificación del procedimiento y el diseño del control.

2.1.1. Método del Control Equivalente

A continuación se presenta un procedimiento para obtener la ecuación de modos deslizantes a lo largo de la intersección de un conjunto de variedades para el sistema (2.1). Primero se determina el conocido como control equivalente, para lo cual se supone que existen modos deslizantes sobre la variedad

$$s(x) = 0 \quad (2.5)$$

donde $s(x) = [s_1(x), \dots, s_m(x)]^T$ entonces se encuentra un control continuo tal que para cualquier condición inicial del vector de estado sobre la variedad, la derivada del vector $s(x)$ se debe igualar a cero respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria del sistema (2.1), i.e.

$$\dot{s} = G(x)f(x, t, u) = 0 \quad (2.6)$$

donde los renglones de la matriz $G(x) = \frac{\partial s(x)}{\partial x} \in R^{m \times n}$ son los gradientes de las funciones $s_i(x)$.

Si se satisface la condición $\det \left(\frac{\partial \bar{f}(x, t, u)}{\partial u(x, t)} \right) \neq 0$, donde $\bar{f}(x, t, u) = G(x)f(x, t, u)$, entonces por el teorema de la función implícita² existe una región en la cual, de (2.6) se obtiene que $u(x, t) = u_{eq}(x, t)$ que es llamado el control equivalente. Sustituyendo $u_{eq}(x, t)$ en el sistema (2.1), se obtiene

$$\dot{x} = f(x, t, u_{eq}(x, t)) \quad (2.7)$$

lo que resulta evidente debido a la condición (2.6), es decir un movimiento que inicia en $s(x(t_0)) = 0$ procederá a lo largo de las trayectorias tendiendo sobre la variedad $s(x) = 0$.

Este procedimiento es llamado método del control equivalente y la ecuación (2.7) la cual se conoce como la ecuación de modos deslizantes, se obtiene como resultado de la aplicación de este método, que garantiza el movimiento sobre las intersecciones de las variedades $s_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Desde el punto de vista geométrico, el método del control equivalente implica una sustitución del control discontinuo no definido sobre el límite de la discontinuidad por un control continuo, el cual dirige el vector velocidad en el espacio de estado del sistema, a lo largo de las intersecciones de las variedades. Por ejemplo, para encontrar este vector en un sistema con una variedad simple $s(x) = 0$ en algún punto (x, t) , se debe variar la amplitud del control escalar desde $u^-(x, t)$ hasta $u^+(x, t)$, graficar el lugar geométrico de $f(x, u_{eq}, t)$ y encontrar el punto donde interseca al plano tangencial. El punto de intersección, determina al control equivalente $u_{eq}(x, t)$ y al lado derecho $f(x, t, u_{eq})$ de la ecuación diferencial de modos deslizantes (2.7).

Ahora consideremos el procedimiento del control equivalente para un caso particular e importante de un sistema no lineal con control discontinuo. Sea

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \quad (2.8)$$

donde $f \in R^n$ y $B \in R^{n \times m}$, y el control discontinuo $u \in R^m$ se determina conforme a (2.3). El control equivalente para (2.8) puede encontrarse de

$$\dot{s} = G(x)f(x, t) + G(x)B(x, t)u. \quad (2.9)$$

Suponiendo que la matriz $G(x)B(x)$ es no singular para toda x y t , se encuentra el control equivalente de (2.9) igual a

$$u_{eq}(x, t) = -[G(x)B(x, t)]^{-1}G(x)f(x, t). \quad (2.10)$$

Sustituyendo este control en (2.8) se obtiene la ecuación

$$\dot{x} = f(x, t) - B(x, t)[G(x)B(x, t)]^{-1}G(x)f(x, t) \quad (2.11)$$

²Teorema de la función implícita: Suponiendo que $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ es continuamente diferenciable en cada punto (x, y) de un conjunto abierto $S \subset R^n \times R^m$. Sea (x_0, y_0) un punto en S para el cual $f(x_0, y_0) = 0$ y para el cual la matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] (x_0, y_0)$ es no singular, entonces existen vecindades $U \subset R^n$ de x_0 y $V \subset R^m$ de y_0 tal que para cada $y \in V$ la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene una solución única $x \in U$. Además, esta solución puede ser dada como $x = g(y)$ donde g es continuamente diferenciable en $y = y_0$.

que describe el movimiento de los modos deslizantes sobre la variedad $s = 0$. Del teorema de la función implícita, se observa que la ecuación (2.11) tiene el orden reducido $n - m$, porque de la ecuación $s = 0$ es posible encontrar m coordenadas en función de las $n - m$ coordenadas restantes.

2.1.2. Sistema de Ecuaciones en la Forma Regular

Una forma conveniente de obtener la ecuación de modos deslizantes es separando al sistema completo en dos partes, una de las cuales dependerá de la entrada de control y tiene la misma dimensión que la entrada u . La otra parte no dependerá de la entrada y tiene la dimensión $n - m$; a esta división del sistema original se le conoce como forma regular del sistema. En esta sección se realizará un análisis para la obtención de la ecuación de modos deslizantes para sistemas reducidos a la forma regular tanto en el caso de sistemas lineales como en el caso de sistemas no lineales.

Caso Lineal

Sea el siguiente sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.12)$$

donde $x \in R^n$ son los estados, $u \in R^m$ la entrada de control.

Es posible que el sistema (??) sea reescrito de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

en donde $\dim(x_2) = \text{rank}(B_2) = m$. Empleando la siguiente transformación

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

cuya inversa es la siguiente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 + B_1 B_2^{-1} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

se obtiene la llamada forma regular del sistema (??) como

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{A}_{11} \hat{x}_1 + \hat{A}_{12} \hat{x}_2 \quad (2.13)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{A}_{21} \hat{x}_1 + \hat{A}_{22} \hat{x}_2 + \hat{B}_2 u \quad (2.14)$$

donde $\hat{A}_{11} = A_{11} - B_1 B_2^{-1} A_{21}$, $\hat{A}_{12} = (A_{11} - B_1 B_2^{-1} A_{21}) B_1 B_2^{-1} + (A_{12} - B_1 B_2^{-1} A_{22})$, $\hat{A}_{21} = A_{21}$, $\hat{A}_{22} = A_{21} B_1 B_2^{-1} + A_{22}$, y $\hat{B}_2 = B_2$.

Para el diseño de la ecuación de modos deslizantes se empleará el siguiente lema:

Lema 1 Si el par $\{A, B\}$ en (??) es controlable, entonces el par $\{\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}\}$ en (2.13) es controlable también.

Prueba. Supóngase que el par $\{\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}\}$ es no controlable. Entonces se reducirá al sistema (2.13) a la forma canónica controlabilidad mediante la transformación no singular $x_1 = Ty_1$, donde $y_1 \in R^{n-m}$, y $y_1^T = [\hat{y}_1^T \ \hat{y}_2^T]$. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{A}_{11}\hat{y}_1 + \hat{A}_{12}\hat{y}_2 + \hat{B}\hat{x}_2 \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \hat{A}_{22}\hat{y}_2\end{aligned}$$

en donde el par $\{\hat{A}_{11}, \hat{B}\}$ es controlable. El sistema (2.13)-(2.14) puede describirse de acuerdo con esta transformación y el subespacio de todos los vectores \hat{y}_2 será no controlable. Puesto que el sistema (2.13)-(2.14) resulta de la transformación no singular del sistema (??), el cual conserva la propiedad de controlabilidad, el sistema original debe ser no controlable lo cual contradice la condición. ■

Ahora, escogiendo la variedad deslizante $s = 0$ como $s = C_1\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 0$, $C_1 \in R^{m \times (n-m)}$ entonces

$$\hat{x}_2 = -C_1\hat{x}_1 \quad (2.15)$$

y reemplazando (2.15) en (2.13) se obtiene la ecuación de modos deslizantes sobre la variedad $s = 0$

$$\dot{\hat{x}}_1 = (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}C_1)\hat{x}_1$$

Por el Lema 1, existe la matriz C_1 tal que la matriz $(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}C_1)$ tiene $(n - m)$ valores propios deseados.

Caso No Lineal

Consideramos el sistema no lineal de la forma

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u. \quad (2.16)$$

El cual puede ser dividido como:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + B_1(x_1, x_2)u \quad (2.17)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)u \quad (2.18)$$

con $\dim(x_2) = \text{rank}(B_2) = m$ para toda x_1 y x_2 .

Supongamos que existe un mapeo difeomórfico $\phi(x)$, $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_{n-m}]^T$ $\phi(0) = 0$ que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} B_1(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} B_2(x) = 0. \quad (2.19)$$

Las condiciones de necesidad y suficiencia para la existencia de una solución de (2.19) están dadas por el Teorema de Frobenius [11].

La transformación no lineal

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \phi(x_1, x_2) \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

reduce el sistema (2.17)-(2.18) a la forma regular

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{f}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad (2.21)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{f}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \hat{g}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)u \quad (2.22)$$

donde \hat{f}_1 , \hat{f}_2 , y \hat{g}_2 son calculados de (2.17), (2.18) y (2.20).

Escogiendo la variedad deslizante

$$s = s_0(\hat{x}_1) + \hat{x}_2 = 0$$

o

$$\hat{x}_2 = -s_0(\hat{x}_1)$$

encontramos la ecuación de modos deslizantes sobre $s = 0$ como

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{f}_1(\hat{x}_1, s_0(\hat{x}_1)) \quad (2.23)$$

Es necesario encontrar la función $s_0(\hat{x}_1)$ tal que una solución de la ecuación de modos deslizantes (2.23) sea asintóticamente estable. En este caso es posible usar el método indirecto de Lyapunov. Sin embargo, con este método se puede lograr únicamente estabilización local,

2.1.3. Estabilidad de Modos Deslizantes

En la sección anterior se procedió con el diseño de la variedad deslizante tal que la ecuación de modos deslizantes tenga propiedades deseadas. Ahora se determinará la estabilización de los modos deslizantes o la estabilización del movimiento en un subespacio (s_1, \dots, s_m) descrita por la ecuación (2.9)

$$\dot{s} = G(x)f(x, t) + G(x)B(x, t)u. \quad (2.24)$$

donde $G(x) = \frac{\partial s}{\partial x}$. Para resolver este problema se puede usar el método de funciones de Lyapunov. Recordando que la variable de deslizamiento s debe ser elegida tal que $\det(GB) \neq 0$. En este caso podemos usar varias transformaciones no singulares de variedades

$$\hat{s} = \Omega(x)\sigma \quad (2.25)$$

o del control

$$u = \Omega(x)\hat{u}. \quad (2.26)$$

Método de Diagonalización

Usando (2.25) se puede obtener $\Omega = J(GB)^{-1}$, o de (2.26) $\Omega = (GB)^{-1}J$, donde $J \in R^{m \times m}$ es una matriz diagonal constante con elementos $j_{ii} > 0$. Entonces la ecuación de movimiento (2.24) se puede presentar en los respectivos subespacios \hat{s} y s , como sigue

$$\dot{\hat{s}} = Hx + Ju \quad (2.27)$$

donde $H = J(GB)^{-1}\Gamma f$, y

$$\dot{s} = Hx + J\hat{u} \quad (2.28)$$

con $H = Gf$. Se puede ver que las ecuaciones (2.27) y (2.28) son formalmente idénticas, confirmaremos nuestra discusión para el caso (2.27). A continuación analizaremos diferentes algoritmos para obtener una estabilidad local o estabilidad global.

Algoritmo 2 Proponemos $J = I_m$ por simplificación. El control puede escogerse como

$$u = -k_1 \text{sign}(\hat{s}) \quad (2.29)$$

donde $k_1 > 0$ se denomina ganancia del control. Sea la función candidata de Lyapunov la siguiente forma cuadrática definida positiva $V = \frac{1}{2}\hat{s}^T \hat{s}$, cuya derivada respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \hat{s}^T Hx - k_1 \hat{s}^T \text{sign}(\hat{s}) \\ &\leq -[k_1 \|\hat{s}\|_1 - \|\hat{s}\|_2 \|Hx\|_2] \end{aligned} \quad (2.30)$$

usando $\|\hat{s}\|_1 \leq \sqrt{m} \|\hat{s}\|_2$ se obtiene

$$\dot{V} \leq -\|\hat{s}\|_2 [k_1 \sqrt{m} - \|Hx\|_2]$$

la cual es negativa si se mantiene la siguiente condición

$$k_1 > \frac{\|Hx\|_2}{\sqrt{m}} \quad (2.31)$$

entonces el origen del subespacio $(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_m)$ es un punto de equilibrio localmente estable.

Algoritmo 3 Dado $J = I_m$ por simplificación. El control puede escogerse como

$$u = u_{eq} - k_1 \text{sign}(\hat{s}) \quad (2.32)$$

donde u_{eq} es el control equivalente calculado de

$$\dot{\hat{s}} = Hx + u_{eq} = 0$$

de donde se tiene $u_{eq} = -Hx$. Entonces el sistema en lazo cerrado (2.27) y (2.32) queda como sigue,

$$\dot{\hat{s}} = -k_1 \text{sign}(\hat{s})$$

y es globalmente estable para cualquier k_1 positiva.

2.2. Control Difuso

La lógica difusa es una transformación que mapea desde un espacio de entrada llamado universo de discurso no difuso a un espacio de salida llamado conjunto difuso. El universo de discurso no difuso al que representaremos como In^* , es el dominio en el cual están definidas cada una de las variables de entrada. El conjunto difuso son funciones definidas sobre un dominio al que identificaremos como In . A cada una de las variables de entrada le corresponde un conjunto difuso.

Los sistemas difusos se basan en R reglas del tipo if- then como la siguiente

$$\text{Regla } i : \text{if } In_1 = sp \text{ AND } \dots \text{ AND } In_n = bn \text{ then } y_i = g_i(u_1, \dots, u_m).$$

La parte entre el if y el then se llama antecedente y está formado por operandos lógicos asociados con las variables lingüísticas ($In_1, \dots, In_n \in In$) que representan a las variables no difusas de entrada ($In_1^*, \dots, In_n^* \in In^*$). A cada variable lingüística le corresponde un conjunto de valores lingüísticos {Cero, Pequeño, Mediano, Grande} los cuales se pueden representar también como $\{In_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, ne_i\}$ definidos dentro de su universo de discurso, donde n es el número de variables de entrada no difusas, y ne_i es la cantidad de funciones que contiene el conjunto difuso asociado con la i -ésima variable de entrada.

Los sistemas difusos se clasifican en sistemas MISO (multiple input - single output), ó, sistemas MIMO (multiple input multiple output). En este trabajo trataremos únicamente con sistemas tipo MISO. Las reglas de un sistema MISO pueden contener n operandos en el antecedente (uno por cada variable lingüística de entrada), y un elemento en el consecuente. El número total de reglas depende de la cantidad ne_i de valores lingüísticos asociados con cada variable lingüística de entrada, así para n variables lingüísticas de entrada se tendrán R reglas

$$R = \prod_{i=1}^n ne_i \quad (2.33)$$

Una aplicación importante de la lógica difusa es el desarrollo de controladores difusos los cuales realizan las siguientes acciones: la normalización, la fuzificación, la inferencia, la desfuzificación, y la desnormalización. En la Figura 2.1, se muestra un esquema del controlador difuso en donde observamos las diferentes partes que lo componen y la relación que guardan entre sí. A continuación analizaremos cada uno de los componentes del esquema mostrado.

2.2.1. Normalización y Desnormalización

La normalización o escalamiento de la variable de entrada, mueve el punto de operación de sus conjuntos difusos asociados, provocando que la magnitud del valor de la salida aumente o disminuya. La elección adecuada del factor de escalamiento afecta la estabilidad del sistema a ser controlado, debido a que influye en la sensibilidad³ del controlador difuso al modificar las regiones de operación de las variables de entrada [2], [12].

³Sensibilidad: Es la medida del cambio mínimo en una señal de entrada que puede detectar un instrumento.

En la Figura 2.2, se muestra el efecto del escalamiento de las variables de entrada del controlador difuso. Cuando el factor de escalamiento es menor que la unidad ($fe < 1$), la región de operación de la variable de entrada se recorre a la izquierda asignándoles funciones de membresía cercanos a cero. Cuando el factor de escalamiento es mayor que la unidad ($scale > 1$), la región de operación de la variable de entrada se recorre a la derecha asignándoles las funciones de membresía más alejadas al cero. Por ejemplo, el valor pico de la función de membresía Grande, se alcanza con una entrada $In^* = 0,75$ cuando el dominio o universo de discurso está normalizado en $[0, 1]$ es decir usando la escala $fe = 1$. En cambio se alcanza con $In_i = 1,5$ cuando se normaliza con el factor de escalamiento $fe = 0,5$, y se alcanza con $In_i = 0,375$ cuando se usa el factor de escalamiento $fe = 2$ [2].

La normalización del universo de discurso se logra usando la siguiente expresión

$$fe_i = \frac{fsIn_i}{In_i \text{ máx}} \tag{2.34}$$

donde $fsIn_i$ es el valor del nuevo dominio normalizado por ejemplo $fsIn_i = 1$, e $In_{i\text{máx}}$, es el valor máximo del universo de discurso sin normalizar. Las entradas normalizadas se determinan como $In_i = In_i^* * fe_i$.

El proceso inverso a la normalización consiste en multiplicar el valor de salida difuso por un factor de escalamiento o factor de desnormalización de la salida del controlador, tal escala se calcula como $fd = fsOut * Out \text{ máx}$ donde $Out \text{ máx}$ es el valor máximo posible del control. Entonces la magnitud de la salida del controlador difuso es

$$k = y * fd$$

donde y es la salida desfuzificada.

El escalamiento de las entradas y la salida, mueve el punto de operación de las variables lingüísticas, por lo que la ganancia de salida aumenta o disminuye. La elección adecuada de los factores de escalamiento, determinan la estabilidad del sistema a ser controlado considerando los siguientes criterios ([2], [12]):

1. El factor de desnormalización fd que afecta a la salida del controlador (ley de control u) tiene mucha influencia sobre la estabilidad y las oscilaciones. Debido a su impacto en la estabilidad, la determinación de este factor tiene alta prioridad en el diseño.



Figura 2.1: Controlador Difuso

2. El factor de normalización f_e influye más en la sensibilidad del sistema respecto a la elección apropiada de las regiones de operación de las entradas no difusas. Por lo tanto, los factores de normalización tienen segunda prioridad en el diseño.

2.2.2. Fuzificación de las Variables de Entrada

Los valores lingüísticos se definen mediante funciones de membresía o pertenencia. Entre las funciones más usuales están las triangulares, trapezoidales, gaussianas, campana, sigmoidales, z, pi, y, s, que se observan en las Figuras 2.3-2.6.

Los valores lingüísticos asociados a cada entrada, cubren todo el universo de discurso. La función de pertenencia describe la certidumbre de que un elemento de In^* denotado In_i^* , con descripción lingüística In_i , puede ser clasificado lingüísticamente como In_{ij} . El proceso que asigna un valor de grado de pertenencia a una variable de entrada se le llama fuzificación. La fuzificación es un mapeo $F : In_i^* \rightarrow In_i$, es decir $F(In_i^*) = LIn_i^{fuz}$ donde In_i denota a todos los conjuntos difusos que definidos sobre In_i^* . En otras palabras la fuzificación consiste en asignar a cada variable lingüística de entrada In_i un grado de pertenencia (2.36) entre cero y uno. En la Figura 2.7, se ejemplifica el proceso de fuzificación en donde se observa que a la entrada no difusa In_i^* le corresponden las funciones de membresía Pequeño y Mediano, y le asignan los grados de pertenencia $\mu_S(In_i^*)$, y $\mu_M(In_i^*)$, respectivamente.

Los valores lingüísticos asociados con cada variable lingüística de entrada son

$$LIn_i = \{\text{Cero, Pequeño, Mediano, Grande}\}$$

que de forma general pueden denotarse como

$$LIn_i = \{LIn(i, 1), LIn(i, 2), \dots, LIn(i, ne_i)\} \quad (2.35)$$

donde ne_i es el número de valores lingüísticos o número de elementos del conjunto difuso. Para fines prácticos son suficientes dos o tres valores lingüísticos para cada variable lingüística. De (2.33) se deduce que, entre menos valores lingüísticos se asignen a cada variable, entonces se tendrá una menor cantidad de reglas y mayor rapidez del algoritmo.

Con las funciones de membresía triangulares el grado de pertenencia correspondiente al j -ésimo elemento difuso de la i -ésima entrada se determina del siguiente modo:

$$\mu_{In_{i,j}}(In_i) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \text{máx} \left\{ 0, 1 + \frac{1 - In_i^* - cIn_{i,j}}{cIn_{i,j} - cIn_{i,j-1}} \right\} \\ \text{máx} \left\{ 0, 1 + \frac{cIn_{i,j} - In_i^*}{cIn_{i,j+1} - cIn_{i,j}} \right\} \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{si } In_i^* \leq cIn_{i,1} \mid In_i^* \geq cIn_{i,ne_i} \\ \text{si } In_i^* \leq cIn_{i,j} \wedge (In_i^* > cIn_{i,1} \wedge In_i^* < cIn_{i,ne_i}) \\ \text{si } In_i^* > cIn_{i,j} \wedge (In_i^* > cIn_{i,1} \wedge In_i^* < cIn_{i,ne_i}) \end{array} \end{cases} \quad (2.36)$$

En un sistema difuso bien definido, la suma de los grados de pertenencia correspondientes a una entrada no difusa debe ser la unidad. Por ejemplo en la Figura 2.7 $\mu_P(In) + \mu_M(In) = 1$.

La determinación de la anchura de las funciones de membresía asociadas a las variables de entrada y salida es dependiente de la razón de cambio entre ellas, como se aprecia en las Figuras.2.8, y 2.9. Por ejemplo, si se desea converger lentamente hacia la superficie deslizante, entonces el dominio del valor lingüístico Cero debe ser mayor que el de los otros valores lingüísticos, es decir la pendiente de la región más cercana al origen debe ser menor que la siguiente a ella

$$\frac{\Delta_1 Out}{\Delta_1 In} \leq \frac{\Delta_2 Out}{\Delta_2 In} \leq \dots \leq \frac{\Delta_{ne} Out}{\Delta_{ne} In}$$

Para lograr una convergencia rápida hacia la superficie deslizante, la pendiente de la región más cercana al origen debe ser mayor que la siguiente a ella, tal que, la pendiente de la región más alejada al origen sea la menor de todas

$$\frac{\Delta_1 Out}{\Delta_1 In} \geq \frac{\Delta_2 Out}{\Delta_2 In} \geq \dots \geq \frac{\Delta_{ne} Out}{\Delta_{ne} In}$$

2.2.3. Mecanismo de Inferencia

El mecanismo de inferencia está formado por el conjunto de reglas, de los criterios de decisión o de inferencia lógica, y de una base de conocimiento del sistema. Las reglas son parte importante del sistema difuso, y se basan en operaciones lógicas, algunas de las más comunes se describen a continuación.

La intersección o conjunción difusa usa un mapeo llamado Norma Triangular T , puede representar la multiplicación o el valor mínimo entre sus operandos. La intersección también se conoce como operación lógica AND. Sean $\mu_A(x)$, y , $\mu_B(x)$ dos operandos que representan los grados de pertenencia de sus respectivas entradas, entonces la intersección queda representada por

$$\mu_{A \cap B}(x) = (\mu_A(x) \text{ AND } \mu_B(x)) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (2.37)$$

y debe cumplir con las siguientes propiedades:

Acotado	$T(0, 0) = 0, \quad T(a, 1) = T(1, a) = a$
Monotonicidad	$T(a, b) \leq T(c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$
Conmutatividad	$T(a, b) = T(b, a)$
Asociatividad	$T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$.

La unión lógica también llamada operación lógica OR, usa un mapeo llamado Conorma Triangular S , puede representar la adición o el valor máximo entre sus operandos y se representa por

$$\mu_{A \cup B}(x) = (\mu_A(x) \text{ OR } \mu_B(x)) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)). \quad (2.38)$$

que debe cumplir con las siguientes propiedades:

Acotado	$S(1, 1) = 1, \quad S(a, 0) = S(0, a) = a$
Monotonicidad	$S(a, b) \leq S(c, d)$ si $a \leq c$ y $b \leq d$
Conmutatividad	$S(a, b) = S(b, a)$
Asociatividad	$S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

Sea $\{\mu_{In_{1,j}}, \mu_{In_{2,k}}, \dots, \mu_{In_{n,l}}\}$ el conjunto que representa la premisa para la i -ésima regla que también se puede representar como $(j, k, \dots, l; p, q)_i$, donde $\mu_{In_{1,j}}, \mu_{In_{2,k}}, \dots, \mu_{In_{n,l}}$ representan el grado de pertenencia correspondiente a cada una de las n entradas. El proceso de inferencia consiste de dos actividades principales.

1. Determinar el grado de relevancia de cada regla acorde a la situación actual, caracterizada por las entradas $In_i, i = 1, 2, \dots, n$, de acuerdo a:

a) Primero, se combinan las entradas con las premisas de cada regla

$$\begin{aligned}\mu_{In_{1,j}}(In_1) &= \mu_{In_{1,j}}(In_1) \times \mu_{In_1^{fuz}}(In_1) \\ \mu_{In_{2,k}}(In_2) &= \mu_{In_{2,k}}(In_2) \times \mu_{In_2^{fuz}}(In_2) \\ &\vdots\end{aligned}$$

tal que si se usa la fuzzificación singleton $\mu_{In_{i,j}}(\bar{In}_i) = \begin{cases} \mu_{In_{i,j}}(\bar{In}_i) & \text{para } \bar{In}_i = In_i \\ 0 & \text{para } \bar{In}_i \neq In_i \end{cases}$ resulta entonces

$$\begin{aligned}\mu_{In_{1,j}}(In_1) &= \mu_{In_{1,j}}(\bar{In}_1) \\ \mu_{In_{2,k}}(In_2) &= \mu_{In_{2,k}}(\bar{In}_2) \\ &\vdots\end{aligned}$$

- b) Después se determina cuáles reglas están activas, otorgando un valor al grado de pertenencia $\mu_i(In_1, In_2, \dots, In_n)$ a la premisa de la i -ésima regla llamada $\mu_{premisas}$ que representa la certidumbre que la premisa de cada regla mantiene para las entradas dadas. $\mu_i(In_1, In_2, \dots, In_n) = \mu_{In_{1,j}}(In_1) \times \mu_{In_{2,k}}(In_2) \times \dots \times \mu_{In_{n,l}}(In_n)$. En otras palabras se aplica el operador difuso (2.37), ó (2.38) al antecedente, dando por resultado un valor entre 0 y 1 que es el grado de soporte de la regla, y se forma el conjunto difuso de salida que es representado por una función de membresía adecuado a la cualidad del consecuente. Como ejemplo, supongamos que $\mu_{In_{1,j}}(In_1) = 0,4$, y $\mu_{In_{2,k}}(In_2) = 0,75$ y que están conectados por el operador lógico OR, entonces se tiene

$$\text{Regla } i : \text{if } In_1 = In_{1,j} \text{ OR } In_2 = In_{2,k} \text{ then } y_i = g_i(u_1, \dots, u_m).$$

esto es

$$\text{Regla } i : \text{if } 0,4 \text{ OR } 0,75 \text{ then } y_i = g_i(u_1, \dots, u_m).$$

resultando en el antecedente el grado de soporte o relevancia de la regla

$$(0,4 \text{ OR } 0,75) = 0,75$$

que se representa gráficamente, como se observa en la Figura 2.10.

2. La segunda tarea es inferir u obtener conclusiones usando las entradas actuales In_i y la información en la base de las reglas, que se puede hacer de dos maneras, una que involucra el uso de conjuntos implicados en cada regla, y la otra que usa el conjunto difuso sobre todos los implicados. A continuación se mostrará la primera, que es la más común:
- Una vez que en el paso de inferencia se calcula para la i -ésima regla $(j, k, \dots, l; p, q)_i$, el conjunto difuso implicado Ly_i con función de membresía $\mu_{\tilde{L}y_i}(y) = \mu_i(In_1, In_2, \dots, In_n) \times \mu_{Ly_i, p}(y)$ el conjunto difuso $\tilde{L}y_i$ especifica el nivel de certidumbre en el que la salida del sistema difuso debe estar en un valor de salida específica no difusa y dentro del universo de discurso Y tomando en consideración sólo a la i -ésima regla.
 - Si el antecedente es parcialmente verdadero, es decir, tiene un valor menor que uno, entonces el conjunto difuso de salida es truncado de acuerdo al método de implicación, como se muestra en la Figura 2.11.
 - Finalmente las funciones de salida de cada regla, se agregan obteniéndose el área total, de la cual se obtendrá un valor no difuso que representa la salida del sistema no difuso (Figura 2.12).

Existen diversos métodos de inferencia, algunos de los más comunes son, el método de inferencia Mamdani en el que tanto los antecedentes como los consecuentes son expresiones difusas, y el método de inferencia Takagi-Sugeno, donde los antecedentes son expresiones difusas y los consecuentes son funciones determinísticas.

2.2.4. Desfuzificación

La desfuzificación consiste en combinar todas las conclusiones de las reglas activas y determinar un valor de salida para la entrada actual. Algunos métodos para desfuzificar son los siguientes: Centro de Gravedad, Centro de Sumas, Medio de los Máximos, Primer Máximo, y Alturas. El método del Centro de Gravedad calcula una salida no difusa y usando el centro del área y el área de cada conjunto difuso implicado

$$y = \frac{\sum_{i=1}^R b_i \int_{y_i} \mu_{\tilde{L}y_i}(y) dy}{\sum_{i=1}^R \int_{y_i} \mu_{\tilde{L}y_i}(y) dy} \quad (2.39)$$

donde R es el número de reglas (2.33), b_i es el centro del área de la función de membresía de y_i asociada con el conjunto difuso implicado $\tilde{L}y_i$ para la i -ésima regla $(j, k, \dots, l; p, q)_i$.

La entrada para el proceso de desfuzificación es un conjunto difuso y la salida es un solo número. El método del Cálculo del Centroide regresa el centro del área bajo la curva como se presenta en la Figura 2.13.

Un método que da buenos resultados y que cumple con las propiedades de continuidad⁴, plausibilidad⁵, de no ambigüedad⁶, de baja complejidad computacional, y la consideración de todos los pesos⁷ [2, sec 3.6.8], es el método de las Alturas el cual es la forma discreta de (2.39)

$$y = \frac{\sum_{i=1}^R b_i \mu_i}{\sum_{i=1}^R \mu_i} \quad (2.40)$$

donde μ_i es la evaluación del grado de pertenencia de los conjuntos de membresía. Se supone que el sistema funcional está definido tal que independientemente de sus entradas tengamos $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 0$. La forma gráfica de representar la desfuzificación (2.40) se puede observar en la Figura 2.14.

⁴Continuidad: Un conjunto de reglas If-Then son continuas, si no tienen reglas adyacentes con conjuntos difusos de salida que tengan intersección vacía, por lo que un cambio suave en la entrada provoca un cambio suave en la salida.

⁵Plausibilidad: La salida no difusa Out_d es plausible o verosímil si se sitúa aproximadamente en medio del valor lingüístico del soporte de la regla "COut_n", y tiene un alto grado de pertenencia con "COut_n".

⁶Ambigüedad: Cuando el método de desfuzificación no se puede aplicar (para ambas composiciones max-min) porque los valores lingüísticos en la salida total son iguales.

⁷Consideración de todos los pesos: es cuando se toman en cuenta todas las conclusiones de las reglas en el cálculo de la salida.

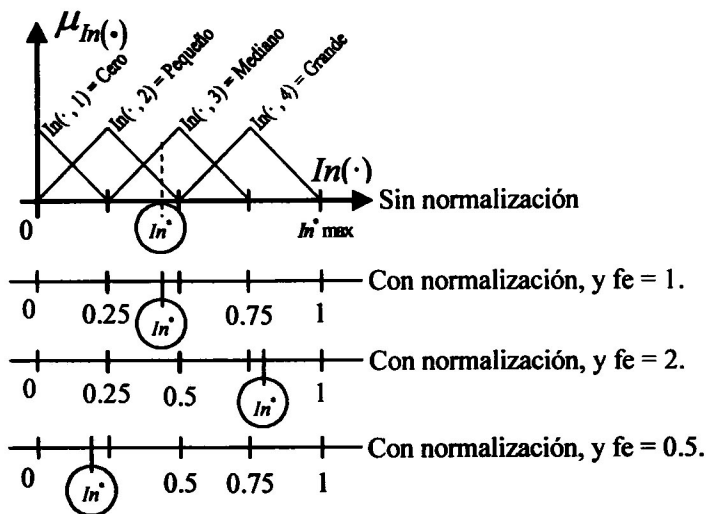


Figura 2.2: Efecto de la normalización sobre el dominio

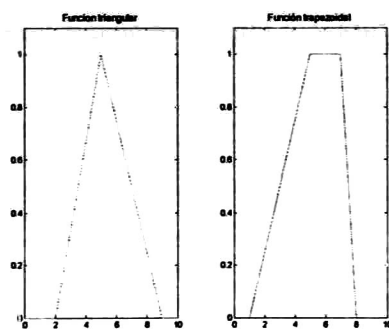


Figura 2.3: Funciones discretas

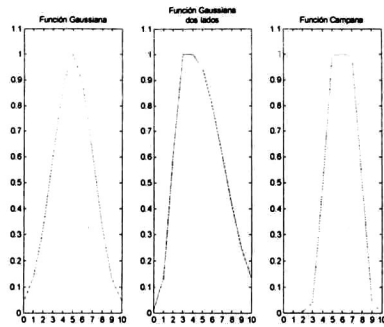


Figura 2.4: Funciones de distribución

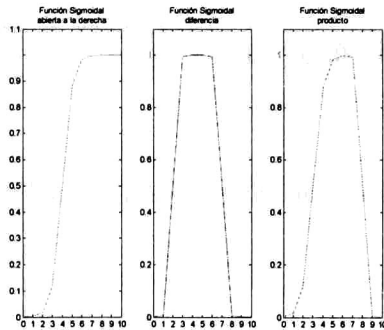


Figura 2.5: Funciones sigmoiales

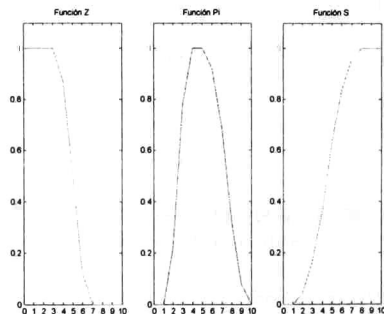


Figura 2.6: Funciones z, pi, s.

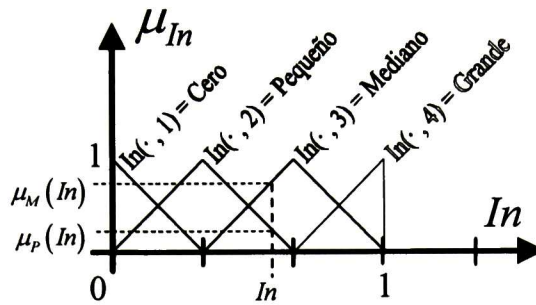


Figura 2.7: Proceso de fuzzificación

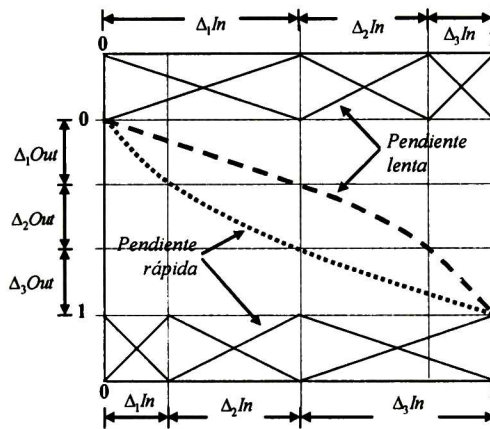


Figura 2.8: Efecto de la relación entrada-salida sobre la convergencia

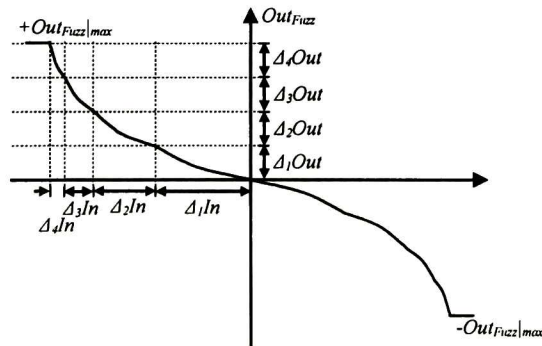


Figura 2.9: Razón de Convergencia

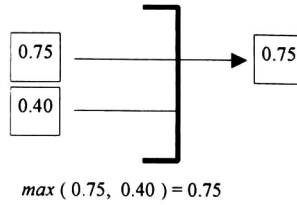


Figura 2.10: Grado de soporte de la regla

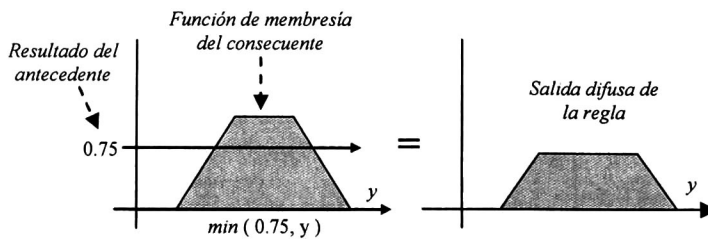


Figura 2.11: Implicación de la regla

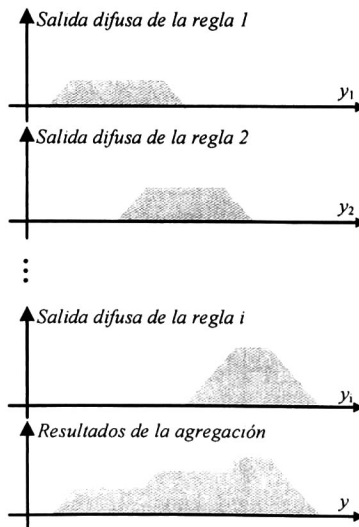


Figura 2.12: Agragación de salidas de las reglas

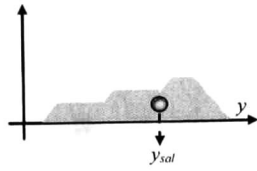


Figura 2.13: Calculo del centroide

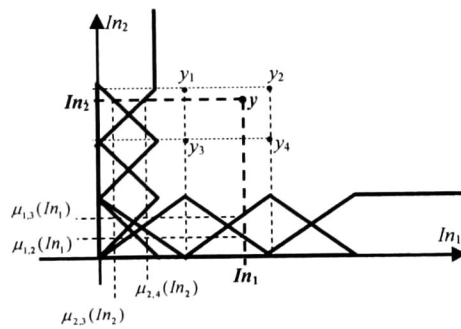


Figura 2.14: Proceso de desfuzificación

Capítulo 3

Control con Modos Deslizantes y Lógica Difusa Tipo Mamdani

3.1. Control Jerárquico con Modos Deslizantes.

Considere un sistema no lineal sujeto a perturbaciones, con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + B(x)u + g(x, w) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x \in X \subset R^n$ es el vector de estados, $u \in R^m$ es el control, y $y \in R^p$ es la salida regulada. El vector $f(x)$ y las columnas de $B(x)$ son campos vectoriales acotados y suficientemente suaves de clase C^∞ . El vector desconocido $g(x, w)$ representa las incertidumbres debido a variaciones en los parámetros, dinámicas no modeladas y perturbaciones externas $w(t)$, y $f(0) = 0$.

La salida y debe seguir a una señal de referencia $q(\omega)$ generada por un exosistema descrito por

$$\dot{\omega} = v(\omega)\tag{3.2}$$

con $\omega \in R^s$ and $v(0) = 0$.

Suponemos que el sistema (3.1) se presenta (posiblemente después de una transformación no lineal) en la llamada forma controlable a bloques no lineal (NBC-form) sujeto a perturbaciones:

$$\dot{x}_r = f_r(x_r) + B_r(x_r)x_{r-1} + g_r(x_r, w)\tag{3.3}$$

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + B_i(\bar{x}_i)x_{i-1} + g_i(\bar{x}_i, w), \quad i = r - 1, \dots, 2\tag{3.4}$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x) + B_1(x)u + g_1(x, w)\tag{3.5}$$

$$y = x_r\tag{3.6}$$

donde $x = (x_1^T, \dots, x_r^T)^T$, $r \leq n$, $x_i \in X_i \subset R^{n_i}$. $\bar{x}_i = (x_i^T, \dots, x_r^T)^T$ $\text{rank}(B_i) = n_i$, $\forall x \in X$,

$\sum_{i=1}^r n_i = n$, y las funciones $f_i(\bar{x}_i)$, y $B_i(\bar{x}_i)$ son acotadas y suficientemente suaves.

En sistemas electromecánicos frecuentemente se considera la siguiente estructura sobre el rango de cada bloque

$$n_r \leq n_{r-1} \leq \dots \leq n_1 = m. \quad (3.7)$$

Se puede notar que si las perturbaciones satisfacen la condición de apareamiento (matching condition), esto es, existe un vector $\lambda(x, w)$ tal que

$$g(x, w) = B(x) \lambda(x, w)$$

donde $\lambda \in R^m$, entonces en (3.3)-(3.4), $g_i(\bar{x}_i, w) \equiv 0$ para $i = r, \dots, 2$ y, el movimiento de modos deslizantes es invariante respecto a estas perturbaciones [1].

Nuestro objetivo es diseñar un esquema de control discontinuo que proporcione robustez sin castañeteo (chattering) para el sistema de lazo cerrado en presencia de perturbaciones tanto para el caso en que satisfacen la condición de apareamiento $g_1(x, w)$ como para aquellas que no la satisfacen, i.e. $g_i(\bar{x}_i, w) \neq 0$, $i = 2, \dots, r$.

El procedimiento de control consiste de los siguientes pasos:

1. La transformación del sistema (3.3)-(3.5) a una forma deseable con perturbaciones;
2. El diseño de una variedad deslizante con parámetros jerárquicos, y
3. El diseño del control discontinuo con modos deslizantes y lógica difusa.

Entonces, primero, usando la técnica de control por bloques [10], introducimos la siguiente transformación recursiva:

$$z_r = x_r - q(\omega) \equiv \Psi_r(x_r, \omega) \quad (3.8)$$

$$z_{i-1} = x_{i-1} + B_i^+(\bar{x}_i) [\bar{f}_i(\bar{x}_i, \omega) + k_i \Psi_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1})] \equiv \Psi_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \omega, \bar{k}_i) \quad (3.9)$$

$$i = r, \dots, 3 \quad (3.10)$$

$$z_1 = \tilde{B}_1(\bar{x}_2) x_1 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) + k_2 \Psi_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_2) \quad (3.11)$$

en donde $z = (z_1^T, \dots, z_r^T)^T$ es una nueva variable vectorial, $\bar{f}_r(x_r, \omega) = f_r(x_r) - \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} v(\omega)$, $k_i > 0$, $\bar{k}_r = k_r$, $\bar{k}_i = (k_i, \dots, k_r)^T$, $\bar{f}_{r-1} = f_{r-1} + \frac{\partial \Psi_{r-1}}{\partial x_r} f_r + \frac{\partial \Psi_{r-1}}{\partial \omega} v(\omega)$, $\bar{f}_{r-2} = f_{r-2} + \frac{\partial \Psi_{r-2}}{\partial x_r} f_r + \frac{\partial \Psi_{r-2}}{\partial \omega} v(\omega)$, $\bar{f}_i = f_i + \sum_{j=i+1}^r \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} f_j + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega} v(\omega)$ para $i = r-3, \dots, 2$, y $B_i^+(\cdot) = B_i^T(\cdot) [B_i(\cdot) B_i^T(\cdot)]^{-1}$ es la pseudo inversa de la matriz.

Lema 4 La transformación (3.8)-(3.11) reduce el sistema (3.3)-(3.5) a la siguiente forma deseada:

$$\dot{z}_r = -k_r z_r + \bar{B}_r(z_r, \omega) z_{r-1} + \bar{g}_r(z_r, \omega, w) \quad (3.12)$$

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + \bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega) z_{i-1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w), \quad (3.13)$$

$$i = r - 1, \dots, 3 \quad (3.14)$$

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + E_{21} z_1 + \bar{g}_2(\bar{z}_2, \omega, \bar{k}_3, w)$$

$$\dot{z}_1 = \bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_2) + \bar{B}_1(z, \omega) u + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_2, w) \quad (3.15)$$

donde $\bar{z}_i = (z_i^T \dots, z_r^T)^T$, $\bar{g}_i = g_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} g_j$, la función $\bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_2)$, las columnas de $\bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega)$ y $\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)$, $i = 1, \dots, r$ son funciones continuas y acotadas, y $\text{rank}(\bar{B}_1) = n_1 = m$.

El procedimiento para transformar el sistema (3.3)-(3.5) con salida (3.6) en el sistema cuasi linealizado (3.12)-(3.15) consiste de los siguientes pasos.

Paso 1. Derivando (3.8)

$$z_r = x_r - q(\omega) \equiv \Psi_r(x_r, \omega).$$

y usando (3.2) y (3.3) resulta

$$\dot{z}_r = \bar{f}_r(x_r, \omega) + B_r(x_r) x_{r-1} + g_r(x_r, w) \quad \bar{f}_r(x_r, \omega) = f_r(x_r, \omega) - \frac{\partial q(\omega)}{\partial \omega} v(\omega). \quad (3.16)$$

Sustituyendo la transformación (3.8) y (3.9) rescrita como $x_r = z_r + q(\omega)$ y $x_{r-1} = z_{r-1} - B_r^+(\bar{x}_r) [\bar{f}_r(x_r, \omega) + k_r z_r]$ en (3.16) resulta (3.12), de la forma

$$\dot{z}_r = -k_r z_r + \bar{B}_r(z_r, \omega) z_{r-1} + \bar{g}_r(z_r, \omega, w)$$

donde $\bar{B}_r(z_r, \omega) = B_r(x_r)|_{x_r = \Psi_r^{-1}(z_r, \omega)}$, y $\bar{g}_r(z_r, \omega, w) = g_r(x_r)|_{x_r = \Psi_r^{-1}(z_r, \omega)}$.

Paso i. Teniendo la nueva variable z_i como

$$z_i = x_i + B_{i+1}^+(x_{i+1}) [\bar{f}_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, \omega, \bar{k}_{i+2}) + k_{i+1} \Psi_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, \omega, \bar{k}_{i+2})] \equiv \Psi_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1})$$

para $i = r - k + 1, \dots, 3$, y tomando su derivada respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (3.4) resulta

$$\dot{z}_i = \bar{f}_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}) + B_i(\bar{x}_i) x_{i-1} + \bar{g}_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w) \quad (3.17)$$

donde $\bar{f}_i(\cdot) = \sum_{j=i+1}^r \left[\frac{\partial \Psi_i(\cdot)}{\partial x_j} f_j(\cdot) + B_j(\cdot) x_{j-1} \right] + \frac{\partial \Psi_i(\cdot)}{\partial \omega} v(\omega) + f_i(\cdot)$, y

$\bar{g}_i(\cdot) = \sum_{j=i+1}^r \left[\frac{\partial \Psi_i(\cdot)}{\partial x_j} g_j(\cdot) + B_j(\cdot) x_{j-1} \right] + g_i(\cdot)$. Entonces la transformación (3.9) entre las variables x_{i-1} y z_{i-1} puede describirse como

$$x_{i-1} = z_{i-1} - B_i^+(\bar{x}_i) [\bar{f}_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}) + k_i z_i] \quad (3.18)$$

Ahora, el bloque transformado (3.17) en las nuevas variables z_r, \dots, z_{i-1} , con entrada (3.18) tiene la forma deseada (3.13), esto es

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + \bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega) z_{i-1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w).$$

Paso r-1. Después de $r-2$ pasos, los bloques transformados del sistema (3.12)-(3.13) con z_r, \dots, z_2 quedan representados como

$$\dot{z}_r = -k_r z_r + \bar{B}_r(z_r, \omega) z_{r-1} + \bar{g}_r(z_r, \omega, w) \quad (3.19)$$

\vdots

$$\dot{z}_3 = -k_3 z_3 + \bar{B}_3(\bar{z}_3, \omega) z_2 + \bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, \bar{k}_4, w) \quad (3.20)$$

$$\dot{z}_2 = \bar{f}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) + B_2(\bar{x}_2) x_1 + \bar{g}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3, w) \quad (3.21)$$

En este paso, el vector x_1 considerado en (3.21), es un vector de control ficticio que puede ser seleccionado en la forma

$$x_1 = -B_2^+(\bar{x}_2) [\bar{f}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) + k_2 z_2 - E_{21} z_1] \quad (3.22)$$

donde $E_{21} = [I_{n_2} \ 0]$, $E_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$. Entonces el sistema (3.21) con (3.22) tiene la forma deseada

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + E_{21} z_1 + \bar{g}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3, w)$$

Paso r. En el último paso, la transformación (3.22) puede ser escrita como

$$B_2^\perp(x_2) x_1 = E_{22} z_1 \quad (3.23)$$

con $E_{22} = [0 \ I_{n_2-n_1}]$, $E_{22} \in R^{(n_2-n_1) \times n_1}$. y $\begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{bmatrix} = I_{n_1}$, la matriz $B_2^\perp(\cdot)$ es ortogonal a la matriz $B_2(\cdot)$, y la matriz cuadrada $\tilde{B}_1(\cdot) \equiv \begin{bmatrix} B_2(\cdot) \\ B_2^\perp(\cdot) \end{bmatrix}$ tiene rango $n_1 = m$. Usando (3.22) y (3.23), la variable z_1 puede ser obtenida de la forma (3.11), esto es

$$z_1 = \tilde{B}_1(\bar{x}_2) x_1 + \begin{bmatrix} \bar{f}_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) + k_2 \Psi_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_2) \quad (3.24)$$

De nuevo, tomando en cuenta la derivada respecto al tiempo de (3.24) a lo largo de las trayectorias de (3.3)-(3.5), tenemos como resultado (3.15), esto es

$$\dot{z}_1 = \bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_2) + \bar{B}_1(z, \omega) u + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_2, w)$$

donde $\bar{B}_1(\cdot) = \tilde{B}_1(\cdot) B_1(\cdot)$, y $\text{rank}(\bar{B}_1) = n_1 = m$. Así la transformación (3.8)-(3.11) convierte al sistema (3.3)-(3.5) en el sistema (3.12)-(3.15).

Dado que los parámetros del sistema (3.3)-(3.5) son acotados, entonces la transformación (3.8)-(3.11) también es acotada. Por lo tanto en la ecuación (3.12)-(3.15), $\bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega)$, y $\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)$, para $i = 1, \dots, r-1$ son acotadas. Debido a que el i -ésimo bloque en (3.3)-(3.5) es lineal respecto al cuasi control x_{i-1} para $i = 1, \dots, r-1$, y el término de la perturbación $\bar{g}_r(z_r, \omega, w)$ en (3.12) por la transformación (3.8)-(3.11) no depende de la ganancia k_r , entonces la perturbación $\bar{g}_{r-1}(\bar{z}_{r-1}, \omega, \bar{k}_r, w)$ depende sólo de la ganancia k_r , $\bar{g}_{r-2}(\bar{z}_{r-2}, \omega, \bar{k}_{r-1}, w)$ depende únicamente de las ganancias k_r , y k_{r-1} , y así sucesivamente. Entonces, es natural introducir la siguiente suposición:

S1 Suponemos que existen constantes positivas p_i , $q_{i,j}$, y d_i tales que

$$\|\bar{B}_r(z_r, \omega)\| \leq p_r \text{ y } \|\bar{g}_r(z_r, \omega, w)\| \leq q_{rr} \|z_r\| + d_r \quad (3.25)$$

$$\|\bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega)\| \leq p_i \text{ y } \|\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)\| \leq \sum_{j=i}^r \gamma_{i,j}(\bar{k}_{i+1}) \|z_i\| + d_i, \quad (3.26)$$

$$i = r-1, \dots, 1$$

donde $\gamma_{i,j}(\bar{k}_{i+1})$ es una función de clase K [9].

Para lograr la invariancia del sistema (3.12)-(3.15) en lazo cerrado respecto a las perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento, es natural seleccionar la variedad de deslizamiento como

$$s = 0, \quad s = z_1 = \Psi_1(\bar{x}, \omega, \bar{k}_2) \quad (3.27)$$

Entonces, la ley de control se elige de la forma

$$u = \begin{cases} -k_1 \frac{\bar{B}_1^T(z, \omega) s}{\|\bar{B}_1^T(z, \omega) s\|} + u_{eq} & \text{si } \bar{B}_1^T(z, \omega) s \neq 0 \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (3.28)$$

donde $k_1 > 0$, y el control equivalente $u_{eq}(z, \omega, \bar{k}_2)$ se calcula de $\dot{s} = 0$ en ausencia de perturbaciones como

$$u_{eq}(z, \omega, \bar{k}_2) = -\bar{B}_1^{-1}(z, \omega) \bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_2) \quad (3.29)$$

Para alcanzar la propiedad de robustez respecto a las perturbaciones que no satisfacen la condición de apareamiento (unmatching condition) $\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)$, las ganancias del controlador k_r, \dots, k_2 tienen que ser elegidas de manera jerárquica, desde la más pequeña hasta la más grande.

Dicha jerarquía en las ganancias puede establecerse definiendo los siguientes parámetros:

$$\alpha_{2,j}(\mu_2) = \frac{\gamma_{2,j}(\bar{k}_3)}{(k_2 - \gamma_{2,2}(\bar{k}_3))\theta_2}, \quad \beta_2(\mu_2) = \frac{d_2}{(k_2 - \gamma_{2,2}(\bar{k}_3))\theta_2}, \quad (3.30)$$

$$\alpha_{3,j}(\mu_2, \mu_3) = \frac{\gamma_{3,j}(\bar{k}_4) + \alpha_{2,j}(\mu_2)}{(k_3 - \gamma_{3,3}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2)p_3)\theta_3},$$

$$\beta_3(\mu_2, \mu_3) = \frac{d_3 + \beta_2(\mu_2)}{(k_3 - \gamma_{3,3}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2)p_3)\theta_3}, \quad (3.31)$$

$$\alpha_{i,j}(\mu_2, \dots, \mu_i) = \frac{\gamma_{i,j}(\bar{k}_{i+1}) + \alpha_{i-1,j}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})}{(k_i - \gamma_{i,i}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})p_i)\theta_i},$$

$$\beta_i(\mu_2, \dots, \mu_i) = \frac{d_i + \beta_{i-1}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})}{(k_i - \gamma_{i,i}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})p_i)\theta_i}, \quad (3.32)$$

$$i = 4, \dots, r; \quad j = i + 1, \dots, r,$$

donde $\mu_i = 1/k_i$, $i = 1, \dots, r$, $\alpha_{i,j}(k)$ y $\beta_i(k)$ son funciones de clase L [9], i.e. $\alpha_{i,j}(\mu) \rightarrow 0$ y $\beta_i(\mu) \rightarrow 0$ cuando $\mu \rightarrow 0$.

Estos parámetros son positivos si se mantienen las siguientes condiciones:

$$k_1 > \frac{1}{p_1} \left(\sum_{j=1}^r \gamma_{1,j}(\bar{k}_2) \|z_j\| + d_1 \right) \quad (3.33)$$

$$k_2 > \gamma_{2,2}(\bar{k}_3) \quad (3.34)$$

$$k_3 > \gamma_{3,3}(\bar{k}_4) + \alpha_{2,3}(\mu_2)p_3 \quad (3.35)$$

$$k_i > \gamma_{i,i}(\bar{k}_{i+1}) + \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})p_i, \quad i = 4, \dots, r-1 \quad (3.36)$$

$$k_r > q_{r,r} + \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1})p_r \quad (3.37)$$

Usando estas condiciones establecemos el siguiente resultado:

Teorema 5 Consideremos el sistema no lineal (3.12)-(3.15), suponemos que se cumplen las condiciones (3.25)-(3.26) y (3.33)-(3.37). Entonces, las soluciones del sistema en lazo cerrado (3.12)-(3.15), (3.28) y (3.29) para cualquier $q_0 > 0$ y $t_{r-1} > t_{r-2} > \dots > t_1 > t_0$ son acotadas por

$$\|s(t)\| < \|s(t_0)\| - \eta_1(t - t_0), \quad \eta_1 = \frac{q_1}{p_1}, \quad q_1 = k_1 - q_0 \quad (3.38)$$

$$\|z_2(t)\| \leq \|z_2(t_0)\| e^{-\xi_2(k_2)(t-t_1)}, \quad \xi_2(k_2) = (k_2 - \gamma_{2,2}(\bar{k}_3))(1 - \theta_2) \quad (3.39)$$

$$\|z_3(t)\| \leq \|z_3(t_0)\| e^{-\xi_3(k_3)(t-t_2)}, \quad \xi_3(k_3) = (k_3 - \gamma_{3,3}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2)p_3)(1 - \theta_3) \quad (3.40)$$

$$\|z_i(t)\| \leq \|z_i(t_0)\| e^{-\xi_i(k_i)(t-t_{i-1})}, \quad (3.41)$$

$$\xi_i(k_i) = (k_i - \gamma_{i,i}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})p_i)(1 - \theta_i),$$

$$i = 4, \dots, r-1$$

$$\|z_r(t)\| \leq \|z_r(t_0)\| e^{-\xi_r(k_r)(t-t_{r-1})}, \quad (3.42)$$

$$\xi_r(k_r) = (k_r - q_{r,r} - \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1})p_r)(1 - \theta_r)$$

y

$$\mathbf{s}(t) = 0, \forall t > t_1 \quad (3.43)$$

$$\|z_2(t)\| \leq \sum_{j=3}^r \alpha_{2,j}(\mu_2) \|z_j(t)\| + \beta_2(\mu_2), \forall t > t_2 > t_1 \quad (3.44)$$

$$\|z_3(t)\| \leq \sum_{j=4}^r \alpha_{3,j}(\mu_2, \mu_3) \|z_j(t)\| + \beta_3(\mu_2, \mu_3), \forall t > t_3 > t_2 \quad (3.45)$$

$$\|z_i(t)\| \leq \sum_{j=i+1}^r \alpha_{i,j}(\mu_2, \dots, \mu_i) \|z_j(t)\| + \beta_i(\mu_2, \dots, \mu_i), \forall t > t_i > t_{i-1}, \quad (3.46)$$

$$i = 4, \dots, r-1$$

$$\|z_r(t)\| \leq \beta_r(\mu_2, \dots, \mu_r), \forall t > t_r > t_{r-1}. \quad (3.47)$$

Prueba. Partiremos de que el sistema (3.15) con (3.27) y (3.28) puede escribirse como

$$\dot{z}_1 = \dot{s} = -k_1 \bar{B}_1(z, \omega) \frac{\bar{B}_1^T(z, \omega) s}{\|\bar{B}_1^T(z, \omega) s\|} + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_2, w) \quad (3.48)$$

Entonces usando una función candidata de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2} s^T s$, y tomando en cuenta su derivada en el tiempo a lo largo de las trayectorias de (3.48) bajo la condición (3.26) obtenemos

$$\dot{V}_1 = s^T \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_2, w) - k_1 \|\bar{B}_1^T(z, \omega) s\| \leq -\|s\| \left[k_1 p_1 - \left(\sum_{j=1}^r \gamma_{1j}(\bar{k}_2) \|z_j\| + d_1 \right) \right] \quad (3.49)$$

si la condición (3.33) se mantiene, entonces existe una constante positiva η_1 tal que $k_1 p_1 - \left(\sum_{j=1}^r \gamma_{1j}(\bar{k}_2) \|z_j\| + d_1 \right) \geq \eta_1$ y por lo tanto

$$\dot{V}_1 \leq \eta_1 \sqrt{2V_1}.$$

La solución de esta inecuación diferencial está acotada por

$$V_1(t) < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2V_1(t_0)} - \eta_1(t - t_0) \right)^2$$

De aquí la solución $s(t)$ formulada como en (3.38) se desvanece después de algún tiempo

$$t_1 < t_0 + \frac{1}{\eta_1} \|s(t_0)\|,$$

y el modo deslizante inicia sobre la variedad $s = z_1 = 0$ después de este tiempo. Este movimiento es descrito por el siguiente sistema de orden $(n - n_1)$:

$$\dot{z}_r = -k_r z_r + \bar{B}_r(z_r, \omega) z_{r-1} + \bar{g}_r(z_r, \omega, w) \quad (3.50)$$

$$\dot{z}_i = -k_i z_i + \bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega) z_{i-1} + \bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w) \quad (3.51)$$

$$i = r-1, \dots, 3$$

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + \bar{g}_2(\bar{z}_2, \omega, \bar{k}_3, w) \quad (3.52)$$

Para probar las estimaciones (3.39)-(3.42), seleccionamos una función candidata de Lyapunov $V_i = \frac{1}{2}z_i^T z_i$, para $i = 2, \dots, r$, paso a paso desde el segundo bloque hasta el r -ésimo bloque de (3.50)-(3.52).

En el primer paso, se deriva la función candidata de Lyapunov $V_2 = \frac{1}{2}z_2^T z_2$ a lo largo de las trayectorias de (3.52) y usando la Suposición S1 obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_2 \|z_2\|^2 + \|z_2\| \|\bar{g}_2(\bar{z}_2, \omega, \bar{k}_3, w)\| \\ &= -(k_2 - \gamma_{22}(\bar{k}_3)) (1 - \theta_2) \|z_2\|^2 - (k_2 - \gamma_{22}(\bar{k}_3)) \theta_2 \|z_2\|^2 \\ &\quad + \|z_2\| \left(\sum_{j=3}^r \gamma_{2j}(\bar{k}_3) \|z_j\| + d_2 \right) \\ &\leq -(k_2 - \gamma_{22}(\bar{k}_3)) (1 - \theta_2) \|z_2\|^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\forall \|z_2\| \geq \frac{\sum_{j=3}^r \gamma_{2j}(\bar{k}_3) \|z_j\| + d_2}{(k_2 - \gamma_{22}(\bar{k}_3)) \theta_2}, \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (3.54)$$

Eligiendo k_2 de acuerdo con (3.34) se asegura que la derivada $\dot{V}_2(t)$ (3.53) es negativa fuera de la región (3.54). De ésto, existe un tiempo finito t_2 tal que la solución $z_2(t)$ calculada por (3.39), entra a la región (3.44). Esto demuestra que la solución $z_2(t)$ está finalmente acotada por (3.44), y arbitrariamente decaerá rápido a cero cuando $k_2 \rightarrow \infty$ para \bar{k}_3 fija.

En el segundo paso, la derivada de la función candidata de Lyapunov $V_3 = \frac{1}{2}z_3^T z_3$ calculada a lo largo de (3.51), bajo (3.26) de la Suposición S1, (3.44) del Teorema 5, y los parámetros (3.30), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -k_3 \|z_3\|^2 + \|z_3\| \|\bar{B}_3(\bar{z}_3, \omega)\| \|z_2\| + \|z_3\| \|\bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, \bar{k}_4, w)\| \\ &\leq -(k_3 - \gamma_{33}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2) p_3) (1 - \theta_3) \|z_3\|^2 - (k_3 - \gamma_{33}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2) p_3) \theta_3 \|z_3\|^2 \\ &\quad + \|z_3\| \left(\sum_{j=4}^r (\gamma_{3j}(\bar{k}_4) + \alpha_{2j}(\mu_2)) \|z_j\| + d_3 + \beta_2(\mu_2) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -(k_3 - \gamma_{33}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2) p_3) (1 - \theta_3) \|z_3\|^2 \\ \forall \|z_3\| &\geq \frac{\sum_{j=4}^r (\gamma_{3j}(\bar{k}_4) + \alpha_{2j}(\mu_2)) \|z_j\| + d_3 + \beta_2(\mu_2)}{(k_3 - \gamma_{33}(\bar{k}_4) - \alpha_{2,3}(\mu_2) p_3) \theta_3}, \quad 0 < \theta_3 < 1. \end{aligned}$$

Si la condición (3.35) se mantiene entonces la solución (3.40) finalmente entra al dominio definido por (3.45) después de algún tiempo finito t_3 .

Procediendo del mismo modo para el $(i-1)$ -ésimo bloque del sistema (3.50)-(3.52), la región de convergencia para el estado $z_{i-1}(t)$, es

$$\begin{aligned} \|z_{i-1}(t)\| &\leq \sum_{j=i}^r \alpha_{i-1,j}(\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{i-1}) \|z_j(t)\| + \beta_{i-1}(\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{i-1}), \quad (3.55) \\ \forall t &> t_{i-1} > t_{i-2} \end{aligned}$$

En el siguiente paso, la derivada de $V_i = \frac{1}{2} z_i^T z_i$, a lo largo de las trayectorias del i –ésimo bloque (3.51) bajo la condición (3.26), y la condición (3.55), satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -k_i \|z_i\|^2 + \|z_i\| \|\bar{B}_i(\bar{z}_i, \omega)\| \|z_{i-1}\| + \|z_i\| \|\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)\| \\ &\leq -(k_i - \gamma_{ii}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1}) p_i) (1 - \theta_i) \|z_i\|^2 \\ &\quad - (k_i - \gamma_{ii}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1}) p_i) \theta_i \|z_i\|^2 \\ &\quad + \|z_i\| \left(\sum_{j=i+1}^r (\gamma_{i,j}(\bar{k}_{i+1}) + \alpha_{i-1,j}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1})) \|z_j\| + d_i + \beta_{i-1}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1}) \right) \\ &\leq -(k_i - \gamma_{ii}(\bar{k}_{i+1}) - \alpha_{i-1,i}(\mu_2, \dots, \mu_{i-1}) p_i) (1 - \theta_i) \|z_i\|^2, \quad 0 < \theta_i < 1 \end{aligned}$$

De esta ecuación, bajo las condición (3.36) se inferen (3.41) y (3.46).

En el último paso, el dominio de convergencia $z_{r-1}(t)$ está definido por la siguiente inecuación:

$$\|z_{r-1}(t)\| \leq \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) \|z_r(t)\| + \beta_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) \quad \forall t > t_{r-1} > t_{r-2}.$$

Esta expresión es usada para evaluar la derivada de la función candidata de Lyapunov $V_r = \frac{1}{2} z_r^T z_r$ a lo largo de las trayectorias de (3.50), esto es

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= -k_r \|z_r\|^2 + \|z_r\| \|\bar{B}_r(\bar{z}_r, \omega)\| \|z_{r-1}\| + \|z_r\| \|\bar{g}_r(\bar{z}_r, \omega, w)\| \\ &\leq -(k_r - q_{rr} - \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) p_r) (1 - \theta_r) \|z_r\|^2 \\ &\quad - (k_r - q_{rr} - \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) p_r) \theta_r \|z_r\|^2 \\ &\quad + \|z_r\| (d_r + \beta_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1})) \\ &\leq -(k_r - q_{rr} - \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) p_r) \theta_r \|z_r\|^2 \\ \forall \|z_r\| &\geq \frac{d_r + \beta_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1})}{(k_r - q_{rr} - \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) p_r) \theta_r}, \quad 0 < \theta_r < 1. \end{aligned}$$

■

Corolario 6 *Basándonos en el Teorema 5, las soluciones del subsistema (3.12)-(3.13) cuando $s = 0$, están limitadas con cotas finales (ultimate bounded)*

$$\|z_i(t)\| \leq b_i(\mu_2, \dots, \mu_r), \quad i = 2, \dots, r, \quad \forall t > t_r > t_{r-1} \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) &= \beta_r(\mu_2, \dots, \mu_r), \\ b_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_r) &= \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) + \beta_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}), \\ b_{r-2}(\mu_2, \dots, \mu_r) &= \alpha_{r-2,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}) b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) \\ &\quad + \alpha_{r-2,r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}) b_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) + \beta_{r-2}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}), \\ b_i(\mu_2, \dots, \mu_r) &= \sum_{j=i+1}^r \alpha_{i,j}(\mu_2, \dots, \mu_i) b_j(\mu_2, \dots, \mu_r) + \beta_i(\mu_2, \dots, \mu_i), \quad i = r-3, \dots, 2. \end{aligned}$$

Además, el error de seguimiento $z_r(t)$ tiende a cero cuando $\mu_i \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, r$.

Prueba. Bajo la condición (3.37) la solución $z_r(t)$ converge exponencialmente a la cota final

$$b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) = \beta_r(\mu_2, \dots, \mu_r). \quad (3.57)$$

Las cotas finales $b_2(\mu_2, \dots, \mu_r), \dots, b_r(\mu_2, \dots, \mu_r)$ para las variables $z_2(t), \dots, z_r(t)$, respectivamente, pueden ser calculadas usando las inecuaciones (3.44)-(3.47) paso por paso.

Primero, sustituyendo (3.57) en (3.46) para $z_{r-1}(t)$ se obtiene

$$b_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_r) = \alpha_{r-1,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) + \beta_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) \quad (3.58)$$

Segundo, sustituyendo (3.57) y (3.58) en (3.46) para $z_{r-2}(t)$ resulta

$$\begin{aligned} b_{r-2}(\mu_2, \dots, \mu_r) &= \alpha_{r-2,r}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}) b_r(\mu_2, \dots, \mu_r) \\ &+ \alpha_{r-2,r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}) b_{r-1}(\mu_2, \dots, \mu_{r-1}) + \beta_{r-2}(\mu_2, \dots, \mu_{r-2}) \end{aligned}$$

y entonces

$$b_i(\mu_2, \dots, \mu_r) = \sum_{j=i+1}^r \alpha_{i,j}(\mu_2, \dots, \mu_i) b_j(\mu_2, \dots, \mu_r) + \beta_i(\mu_2, \dots, \mu_i), \quad i = r-3, \dots, 2.$$

Dado que $b_i(\mu_2, \dots, \mu_r) \rightarrow 0$ cuando $\mu_i \rightarrow 0$ entonces el error de seguimiento z_r tiende a cero cuando $\mu_i \rightarrow 0, i = 2, \dots, r$ satisfaciendo las condiciones (3.34)-(3.37). ■

Partiendo del Teorema 5 podemos establecer los siguientes comentarios:

Comentario 7 Como las ganancias k_1, k_2, \dots, k_r tienden jerárquicamente al infinito, el movimiento total del sistema de lazo cerrado presenta un conjunto de movimientos parciales, los cuales convergen consecutivamente hacia las siguientes variedades con valores apropiados del control equivalente:

$$s \equiv \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_2) = 0, \quad u_{eq} = u_{eq}(0, z_2, \dots, z_r, \omega, \bar{k}_2, w) \quad (3.59)$$

$$z_2 \equiv \Psi_2(\bar{x}_2, \omega, \bar{k}_3) = 0, \quad u_{eq} = u_{eq}(0, b_2, z_3, \dots, z_r, \omega, \bar{k}_3, w) \quad (3.60)$$

$$z_i \equiv \Psi_i(\bar{x}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}) = 0, \quad u_{eq} = u_{eq}(0, b_2, \dots, b_i, z_{i+1}, \dots, z_r, \omega, \bar{k}_{i+1}, w) \quad (3.61)$$

$$i = 3, \dots, r$$

Comentario 8 El valor de la ganancia k_1 del controlador debe incrementarse para aumentar la razón de convergencia de la variable deslizante $s(t)$ (ver (3.38)) y la región de estabilidad definida por (3.33), respectivamente. Sin embargo, esta alta ganancia puede producir castañeteo [20] debido a defectos de los dispositivos de control, tales como tiempos muertos, histéresis, etc.

Comentario 9 Las ganancias k_2, \dots, k_r del controlador, las cuales definen la pendiente de las variedades (3.59)-(3.61), deberán incrementarse para darles más robustez a las dinámicas de modos deslizantes (3.50)-(3.51) respecto a las perturbaciones que no satisfacen la condición de apareamiento $\bar{g}_i(\bar{z}_i, \omega, \bar{k}_{i+1}, w)$ $i = 2, \dots, r$; esto es, aumentar la razón de convergencia de las variables z_2, \dots, z_r (ver (3.39)-(3.42)) y decrecer sus últimas cotas (3.56). Por otro lado, es necesario que estas ganancias decrezcan para incrementar la región de estabilidad definida por (3.33).

Estos comentarios son tomados en cuenta en el ajuste de las ganancias k_1, \dots, k_r del controlador basados en las condiciones de estabilidad (3.33)-(3.37) y mediante el uso de técnicas de lógica difusa.

3.2. Control con Lógica Difusa para el Ajuste de las Ganancias

Para resolver el problema descrito en la sección anterior, se propone ajustar sucesivamente los valores de las ganancias k_1, k_2, \dots, k_r dependiendo de los valores del control equivalente $\|u_{eq}(t)\|$ y de las variables $\|s(t)\|, \|z_2(t)\|, \dots, \|z_r(t)\|$, esto puede hacerse usando un esquema de lógica difusa. Estas ganancias cambian dentro de márgenes acotados por un valor mínimo hasta un valor máximo, tal que

$$k_{i \text{ mín}} \leq k_i \leq k_{i \text{ máx}}, i = 1, \dots, r,$$

o

$$\mu_{i \text{ mín}} \leq \mu_i \leq \mu_{i \text{ máx}}$$

donde $\mu_{i \text{ mín}} = 1/k_{i \text{ máx}}, \mu_{i \text{ máx}} = 1/k_{i \text{ mín}}, \mu_i = 1/k_i, i = 1, \dots, r$. Los valores $k_{i \text{ mín}}$ y $k_{i \text{ máx}}$ están calculados usando las condiciones iniciales $\|z_i(0)\|$ y las acotaciones (3.44)-(3.47) respectivamente, de tal manera, que se satisfacen las condiciones de estabilidad (3.33)-(3.37).

El proceso de ajuste consiste de r intervalos de tiempo correspondientes a r movimientos parciales.

Movimiento parcial 1. En este intervalo la ganancia k_1 es ajustada usando los valores de la variable deslizante $\|s(t)\|$ y del control equivalente $\|u_{eq}(t)\|$ (3.29). Nótese que el control equivalente contiene información acerca de la derivada $\|\dot{s}(t)\|$ y define la condición de alcanzabilidad (3.33), así como de la razón de convergencia de $\|s(t)\|$ a cero (3.38) para un valor dado de k_1 . Para el caso de control acotado, lo cual es natural en una aplicación, el valor de k_1 inicia con $k_{1 \text{ máx}}$, lo cual asegura (3.33), y entonces cuando $\|s(t)\|$ tiende desde $\|s(t_0)\|$ hacia cero, y apropiadamente $\|u_{eq}(t)\|$ decrece, el valor de k_1 decrece suavemente hasta $k_1 = k_{1 \text{ mín}}$ cumpliendo (3.33) y reduciendo o eliminando el castañeteo (chattering). En este intervalo, las ganancias k_i se mantienen constantes en su valor mínimo $k_{i \text{ mín}}$, para $i = 2, \dots, r$.

Movimiento parcial 2. Cuando los estados del sistema convergen hacia la variedad (3.59) dentro de una pequeña capa de acotamiento $\|s(t)\| \leq \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0$, lo cual corresponde al tiempo t_1 (3.43), el comportamiento del sistema de lazo cerrado es descrito por la ecuación de modos deslizantes (3.50)-(3.52). Debido a que la ganancia k_2 es más grande que las otras ganancias $k_i, i = 3, \dots, r$ la variable $z_2(t)$ es más rápida respecto a las otras variables $z_i(t), i = 3, \dots, r$. Así, el movimiento del sistema básicamente es definido por el subsistema (3.52). La ganancia k_2 del controlador empieza a incrementarse desde $k_2 = k_{2 \text{ mín}}$ hasta un valor máximo el cual está dentro de una cota superior $k_2 = k_{2 \text{ máx}}$, dependiendo de los valores $\|z_2(t)\|$ y $\|u_{eq}(t)\|$

manteniendo las condiciones de estabilidad (3.33) y (3.34). Como resultado, la razón de convergencia hacia cero de la variable $z_2(t)$ se incrementa.

En este intervalo, como el control está conmutando, podemos usar el valor completo del control equivalente $u_{eq}(z, \omega, \bar{k}_2, w) = -\bar{B}_1^{-1}(z, \omega) [f_1(z, \omega, \bar{k}_2) + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_2, w)]$ el cual es calculado de $\dot{s} = 0$ (3.15) sobre la variedad $s = 0$. Para el caso de perturbaciones desconocidas, el control equivalente $u_{eq}(0, z_2, \dots, z_r, \omega, \bar{k}_2, w)$ puede ser obtenido filtrando la señal de control con una constante de tiempo suficientemente pequeña τ_s [19] como

$$\tau_s \dot{u}_{eq}(t) + u_{eq}(t) = u(t) \quad (3.62)$$

Movimiento parcial 3. Cuando los estados del sistema convergen hacia la variedad (3.60), la variable $z_2(t)$ está cercana a sus cotas finales, prácticamente está dentro de una pequeña capa de acotamiento $\|z_2(t)\| \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq b_2(\mu_2 \text{ mín}, \mu_3 \text{ máx}, \dots, \mu_r \text{ máx}) + \varepsilon_{2,0}$, $\varepsilon_{2,0} > 0$, esto corresponde al tiempo t_2 (3.44), el comportamiento del sistema de lazo cerrado es descrito por el subsistema $\dot{z}_3 = -k_3 z_3 + \bar{B}_3(\bar{z}_3, \omega) z_2 + \bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, \bar{k}_4, w)$ (3.51). La ganancia k_3 del controlador es ajustada desde $k_3 = k_3 \text{ mín}$ hasta un valor máximo el cual está dentro de una cota superior $k_3 = k_3 \text{ máx}$, dependiendo de los valores $\|z_3(t)\|$ y $\|u_{eq}(t)\|$ manteniendo las condiciones de estabilidad (3.33)-(3.35), hasta que este movimiento parcial esté finalmente confinado en $\|z_3(t)\| \leq \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 \leq b_2(\mu_2 \text{ mín}, \mu_3 \text{ mín}, \mu_4 \text{ máx}, \dots, \mu_r \text{ máx}) + \varepsilon_{3,0}$, $\varepsilon_{3,0} > 0$, lo cual corresponde al tiempo t_3 (3.45), y así sucesivamente.

Un diagrama esquemático sobre la evolución de z_i y k_i , $i = 1, 2, \dots, r$ se muestra en la Figura 3.1. El diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado con la transformación de control por bloques, el controlador con lógica difusa y el controlador de modos deslizantes (SMFLC_{BC}) se presenta en la Figura 3.2. En la Figura 2.1 se muestra el diagrama de un bloque del controlador con lógica difusa. en donde $In_1 = z_i$, $In_2 = u_{eq}$, y la salida $y = k_d$.

A continuación se describen las tres partes del diagrama de bloques del esquema de control propuesto (Figura 3.2):

1. Control por Bloques. En este bloque, se transforman los estados x en las nuevas coordenadas z

$$T_{BC} : x \rightarrow z, \text{ tal que } z = T_{BC}(x)$$

donde el mapeo T_{BC} está definido por (3.8)-(3.11), y calcula el valor de las variables $z_i(t)$ (3.8)-(3.11) y el control equivalente $u_{eq}(z, \omega, \bar{k}_2)$ (3.29).

2. Control Difuso. El controlador está formado por varios bloques similares a los de la Figura 2.1. El primero usa a las entradas: $In_1 = \|s\| = \|z_1\|$ (3.11) e $In_2 = \|u_{eq}(z, \omega, \bar{k}_2)\|$ (3.29), en tanto que los otros bloques usan las entradas $In_1 = \|z_i\|$ $i = 2, \dots, r$ (3.8)-(3.9) e $In_2 = \|u_{eq}(t)\|$ (3.62). En conjunto determinan las ganancias k_i , $i = 1, \dots, r$ tal que satisfagan la condición de estabilidad (3.33)-(3.37). En este trabajo se seleccionaron funciones de

membresía con forma triangular como las de la Figura 2.8 la cual muestra los efectos de la relación entrada/salida sobre la pendiente de la trayectoria con la que los estados alcanzan la variedad deslizante. Cada uno de estos bloques consisten de las siguientes partes:

- a. Normalización de las entradas: en la cual se modifica la escala de las entradas. Primero se normaliza el universo de discurso no difuso $[In_{\min}^*(\cdot), In_{\max}^*(\cdot)]$ como $[In_{\min}(\cdot), In_{\max}(\cdot)] = [\varepsilon, 1]$ en donde $In^*(\cdot)$ son las entradas no difusas e $In(\cdot)$ son las entradas normalizadas. Las entradas normalizadas son calculadas como

$$In(\cdot) = In^*(\cdot) \times scale(\cdot)$$

con $scale(\cdot) = fe(\cdot) / In_{\max}^*(\cdot)$, en donde $fe(\cdot)$ es el factor de escalamiento tal que la cota superior del universo de discurso normalizado sea $In_{\max}(\cdot) = 1 / fe(\cdot)$. La Figura 2.2 presenta los efectos de escalar las variables de entrada del controlador difuso. Por ejemplo, en el caso donde se selecciona un factor de escala $fe(\cdot) > 1$ y se tienen valores grandes para alguna de las entradas, entonces a la variable de entrada no difusa se le asigna un conjunto difuso localizado lejos del cero. En cambio, usando $fe(\cdot) < 1$ y valores grandes de la entrada, a la variable de entrada no difusa se le asigna un conjunto difuso localizado cerca del cero.

- b. Fuzificación: en la que se transforma el valor de entrada no difuso, en valores fuzificados como

$$F : In^*(\cdot) \rightarrow LIn(\cdot) \text{ tal que } F(In^*(\cdot)) = LIn(\cdot)$$

donde $LIn(\cdot) = \{LIn(\cdot, 1), LIn(\cdot, 2), \dots, LIn(\cdot, ne(\cdot))\}$ es el conjunto de los términos del universo de discurso normalizado $[In_{\min}(\cdot), In_{\max}(\cdot)]$, $LIn(\cdot, j)$, $j = 1, 2, \dots, ne(\cdot)$ es el correspondiente valor de entrada fuzificado de $In^*(\cdot)$ y es conocido como función de membresía, y $ne(\cdot)$ es el tamaño del conjunto de términos. La función de membresía está definida por $LIn(\cdot, j) = \int \mu_{LIn(\cdot, j)}(In(\cdot)) / In(\cdot)$ donde $\mu_{LIn(\cdot, j)}(In(\cdot))$ es el grado de pertenencia de $(In(\cdot))$ a la función de membresía $LIn(\cdot, j)$ para $j = 1, 2, \dots, ne(\cdot)$.

- c. Mecanismo de inferencia: que usa una base de reglas y calcula la contribución de cada regla para la ganancia k_i . Cada controlador usa dos entradas y calcula una salida, por consiguiente las reglas son de la forma:

Regla 1. If $(In_1 = LIn(1, 1)$ and $In_2 = LIn(2, 1))$ then $Out = LOut(1, 1)$

Regla 2. If $(In_1 = LIn(1, 1)$ and $In_2 = LIn(2, 2))$ then $Out = LOut(1, 2)$

⋮

Regla $ne(2)$. If $(In_1 = LIn(1, 1)$ and $In_2 = LIn(2, ne(2)))$ then $Out = LOut(1, ne(2))$

Regla $ne(2) + 1$. If $(In_1 = LIn(1, 2)$ and $In_2 = LIn(2, 1))$ then $Out = LOut(2, 1)$

⋮

Regla $ne(1) \times ne(2)$. If $(In_1 = LIn(1, ne(1))$ and $In_2 = LIn(2, ne(2)))$

then $Out = LOut(ne(1), ne(2))$

donde $LOut(\cdot, \cdot)$ es el valor correspondiente de la ganancia en el consecuente de la regla.

- d. Defuzificación: la cual está basada en el método de defuzificación del peso medio [2], [13]. Produce un valor escalar de salida para el i –ésimo bloque ($i = 1, 2, \dots, r$) calculado como

$$k_d = \frac{\sum_{j=1}^{ne(1)} \sum_{k=1}^{ne(2)} LAnt(j, k) LOut(j, k)}{\sum_{j=1}^{ne(1)} \sum_{k=1}^{ne(2)} LAnt(j, k)} \quad (3.63)$$

donde $LAnt(j, k) = \min(LIn(1, j), LIn(2, k))$ es la cuantificación de la premisa de la regla activa, para $j = 1, \dots, ne(1)$ y $k = 1, \dots, ne(2)$. La Figura 2.14 muestra la grafica del cálculo de la ganancia difusa k_d (3.63) para dos entradas hipotéticas ($In^*(1), In^*(2)$).

- e. Desnormalización: el cual para cada i –ésimo bloque, multiplica la salida normalizada del controlador difuso (3.63) por un factor de desnormalización ($scale$), $k_i = k_d \times scale$, tal que siempre se satisface la condición (3.33)-(3.37).

3. Control de Modos Deslizantes. Este bloque usa los valores z_1, u_{eq}, y, k_1 , calculados en las etapas Control por Bloques, y Control Difuso para implementar el control con modos deslizantes u (3.28).

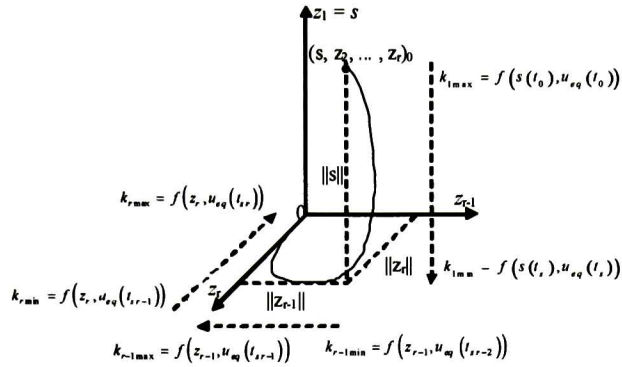


Figura 3.1: Evolución de los estados z_i y las ganancias k_i .

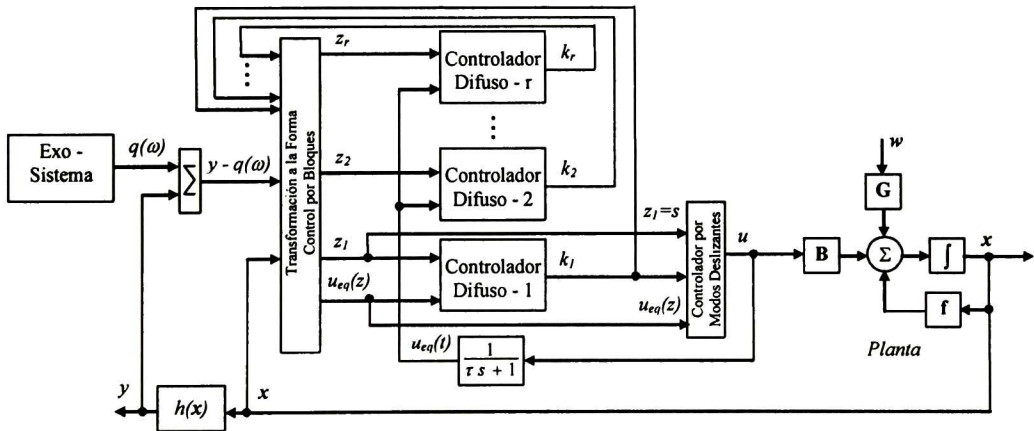


Figura 3.2: Diagrama de bloques del SMFLC_{BC}.

Capítulo 4

Aplicación al Caso Escalar

4.1. Modelo del Motor de Corriente Directa

En esta sección, aplicamos el esquema de control propuesto en el Capítulo 3 a un motor de corriente directa con imanes permanentes, cuyo modelo matemático [3] está dado por

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (4.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B}{J}\omega + \frac{k_m}{J}i \quad (4.2)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\lambda_0}{L}\omega - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v \quad (4.3)$$

donde: θ es la posición angular de la flecha del motor, ω es la velocidad angular de la flecha, i es la corriente de armadura, v es el voltaje de armadura, L y R son la inductancia y la resistencia de las bobinas de la armadura, J es el momento de inercia, B es el coeficiente de fricción viscosa, k_m es la constante del par del motor, λ_0 es la constante de fuerza contra electro motriz.

Eligiendo a las siguientes variables de estado $x_3 = \theta$, $x_2 = \omega$, y $x_1 = i$, y a la entrada de control como $u = v$, el sistema (4.1)-(4.3) queda representado en la forma controlable a bloques con la estructura $n_3 = n_2 = n_1 = 1$ (3.7). Considerando perturbaciones desconocidas tenemos

$$\dot{x}_3 = x_2 \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2x_2 + b_2x_1 + g_2(x_2, w_1) \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x) + b_1u + g_1(x_1, x_2) \quad (4.6)$$

donde $a_2 = \frac{B}{J}$, $b_2 = \frac{k_m}{J}$, $f_1(\mathbf{x}) = -a_1x_1 - c_1x_2$, $a_1 = \frac{R}{L}$, $c_1 = \frac{\lambda_0}{L}$, y $b_1 = \frac{1}{L}$. Las perturbaciones $g_2(x_2, w_1) = -c_2w_1 - \Delta a_2x_2$, $c_2 = \frac{1}{J}$, $g_1(x_1, x_2) = -\Delta a_1x_1 - \Delta c_1x_2$, Δa_1 , Δa_2 , y Δc_1 presentan variaciones de los correspondientes parámetros con las siguientes cotas $|\Delta a_1| \leq q_{11}$, $|\Delta a_2| \leq q_{22}$, y $|\Delta c_1| \leq q_{12}$, $|c_2w_1| \leq d_2$, donde $q_{11} > 0$, $q_{22} > 0$, $q_{12} > 0$, y $d_2 > 0$.

Se requiere que la salida $y = x_3$ siga a la señal de referencia ω_1 generada por

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \alpha_1 \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\alpha_1 \omega_1, \quad \text{para } \alpha_1 > 0\end{aligned}$$

donde $\omega = (\omega_1, \omega_2)^T$. Siguiendo el procedimiento de transformación a bloques, primero definimos el error de seguimiento como

$$z_3 = x_3 - \omega_1 = \psi_3(x_3, \omega) \quad (4.7)$$

derivando (4.7) y sustituyendo adecuadamente se tiene

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\omega}_1 = x_2 - \alpha_1 \omega_2 \quad (4.8)$$

ahora se introduce una dinámica deseada para z_3 como

$$\dot{z}_3 = -k_3 z_3 + z_2 \quad (4.9)$$

Resolviendo (4.8) y (4.9) para z_2 tenemos

$$z_2 = k_3(x_3 - \omega_1) + (x_2 - \alpha_1 \omega_2) = \psi_2(\bar{x}_2, \omega, k_3)$$

donde $\bar{x}_2 = (x_2, x_3)^T$. Entonces

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= (k_3 - a_2)x_2 + (\alpha_1^2 \omega_1 - k_3 \alpha_1 \omega_2) + b_2 x_1 + g_2(x_2, w_1) \\ \dot{z}_2 &= f_2(x_2, \omega, k_3) + b_2 x_1 + g_2(x_2, w_1)\end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $f_2(\cdot) = (k_3 - a_2)x_2 + (\alpha_1^2 \omega_1 - k_3 \alpha_1 \omega_2)$. Con dinámicas deseadas

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2 + z_1 \quad (4.11)$$

Usando (4.10) y (4.11) y encontrando z_1 tenemos

$$z_1 = k_2 z_2 + f_2(x_2, \omega, k_3) + b_2 x_1 + g_2(x_2, w_1) \equiv \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_3)$$

donde $\bar{k}_3 = (k_2, k_3)^T$. Sustituyendo adecuadamente y derivando, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= k_2 k_3 \dot{x}_3 + (k_2 + k_3 - a_2) \dot{x}_2 + b_2 \dot{x}_1 - k_2 k_3 \dot{\omega}_1 - (k_2 + k_3) \alpha_1 \dot{\omega}_2 + \alpha_1^2 \dot{\omega}_1 + \dot{g}_2(x_2, w_1) \\ \dot{z}_1 &= k_2 k_3 x_2 + (k_2 + k_3 - a_2)(-a_2 x_2 + b_2 x_1 + g_2(x_2, w_1)) + \\ &\quad b_2(f_1(x) + b_1 u + g_1(x_1, x_2)) - k_2 k_3(\alpha_1 \omega_2) - (k_2 + k_3) \alpha_1(-\alpha_1 \omega_1) + \alpha_1^2(\alpha_1 \omega_2) + \dot{g}_2(x_2, w_1)\end{aligned}$$

que podemos compactar como

$$\dot{z}_1 = f_1(x, \omega) + B_1 u + g_1(x, \omega, w)$$

donde $f_1(\cdot) = \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_3} x_2 - \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_2} a_2 x_2 + \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial \omega_1} \alpha_1 \omega_2 - \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial \omega_2} \alpha_1 \omega_1$, $B_1 = b_1 b_2$ y $g_1(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_i} g_i$.

Finalmente, el sistema (4.6)-(4.4) puede representarse en las nuevas variables como

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= -k_3 z_3 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 z_2 + z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(z, \omega, \bar{k}_3) + B_1 u + g_1(z, \omega, \bar{k}_3, w_1)\end{aligned}$$

4.2. Diseño del Controlador

Usando (4.7) y la transformación inversa

$$\begin{aligned}x_3 &= z_3 + \omega_1 \\ x_2 &= z_2 - k_3 z_3 + \alpha_1 \omega_2 \\ x_1 &= b_2^{-1} [(k_3^2 - a_2 k_3) z_3 - (k_2 + k_3 - a_2) z_2] + b_2^{-1} [a_2 \alpha_1 \omega_2 - \alpha_1^2 \omega_1] + b_2^{-1} z_1\end{aligned}$$

Las condiciones (3.25), y (3.26) de la Proposición ?? del Capítulo 3, se presentan como

$$\begin{aligned}|b_1| &\leq c_2 \\ |g_2(\cdot)| &\leq q_{22} |z_2| + \gamma_{23}(k_3) |z_3| + d_2 \\ |g_1(\cdot)| &\leq \gamma_{13}(k_3) |z_3| + \gamma_{12}(k_2) |z_2| + \gamma_{11} |z_1| + d_1\end{aligned}$$

donde $\gamma_{23}(k_3) = q_{22} k_3$, $d_2 = \alpha_1 [q_{22} c_2 (\alpha_1 + a_2)]$, $\gamma_{13}(k_3) = q_{11} c_2 (k_3 a_2 + k_3^2) + q_{12}$, $\gamma_{12}(k_2) = q_{11} c_2 (k_3 + k_2) + q_{12}$, $d_1 = \alpha_1 [q_{11} c_2 (\alpha_1 + a_2) + q_{12}]$, y $\gamma_{11} = q_{11} c_2$. Para forzar al movimiento de modos deslizantes sobre la variedad $z_1 = \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_3) = 0$ el control se elige de modo similar a (3.28) y (3.29):

$$u = -k_1 B_1^{-1} \frac{z_2}{|z_2|} + \bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_3) \text{ si } z_1 \neq 0$$

con $k_1 > 0$. Entonces la proyección del movimiento del sistema de lazo cerrado sobre el subespacio z_2, z_1 está definida por

$$\dot{z}_1 = -k_1 \frac{z_1}{|z_1|} + g_1(z, \omega, \bar{k}_3, w_1)$$

en la región definida como

$$\sum_{j=1}^3 \gamma_{1j}(\cdot) |z_j| + d_1 \leq k_1$$

la solución $z_1(t)$ converge a cero en un tiempo finito t_1 , y el modo deslizante forzado sobre la variedad $z_1 = 0$ es descrito por el siguiente sistema con perturbaciones que consta de dos bloques:

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= -k_3 z_3 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -(k_2 + a_2) z_2 + g_2(\bar{z}_2, \omega, k_3, w_1)\end{aligned}$$

En donde se deben cumplir las siguientes condiciones de estabilidad

$$k_2 > q_{11} - a_2$$

y

$$k_3 > \alpha_{23} (\mu_2)$$

Para reducir los efectos de las perturbaciones, aplicamos el esquema de control de control difuso con modos deslizantes descrito en la Sección 3.2, para el ajuste de las ganancias del controlador k_1 , k_2 y k_3 .

4.3. Resultados de la Simulación

A continuación se presentan algunos resultados de simulación para el motor de corriente directa, cuyos parámetros son: $L = 1\text{mH}$, $R = 0,5\Omega$, $J = 0,001\text{Kgm}^2$, $k_m = 0,008\text{Nm/A}$, $\lambda_0 = 0,001\text{Vs/rad}$, $B = 0,01\text{Nms/rad}$. El voltaje de alimentación es $u_0 = 100\text{V}$. En todas las figuras se muestran los estados x , z , y las ganancias k_i para $i = 1, 2, 3$, el control u , y las perturbaciones w_i para $i = 1, 2, 3$. Las Figuras 4.1-4.8 muestran resultados del problema de estabilización (PE) con control por bloques, mientras que las Figuras 4.9-4.16 presentan resultados de seguimiento de trayectorias (ST).

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran resultados del control por bloques (CB) estándar sin perturbaciones, donde observamos el efecto del castañeteo (chattering), mientras que en las Figuras 4.3 y 4.4 se muestran los resultados al aplicar el control con lógica difusa (CLD) donde se observan variaciones suaves de las ganancias k_i para $i = 1, 2, 3$, y el problema del castañeteo es resuelto, y se observa que el error es mas pequeño que en el primer caso. Las Figuras 4.5 y 4.6 muestran resultados del control por bloques pero ahora con perturbaciones, en donde se observan sus efectos y el castañeteo; mientras que en las Figuras 4.7 y 4.8 se observan mejoras en su comportamiento debido a la aplicación del esquema propuesto con variaciones suaves en las ganancias k_i para $i = 1, 2, 3$ y eliminación del castañeteo, aunque permanecen pequeñas oscilaciones debido a perturbaciones no desvanecientes las cuales son oscilatorias. Las Figuras 4.9 y 4.10 presentan resultados del problema de seguimiento de trayectorias con control por bloques estándar sin perturbaciones donde observamos el efecto del castañeteo, mientras que en las Figuras 4.11 y 4.12, se muestran resultados cuando se aplica el esquema de control propuesto, donde se observan variaciones de las ganancias k_i para $i = 1, 2, 3$ y se resuelve el problema del castañeteo. En las Figuras 4.13 y 4.14 se presentan resultados del sistema con perturbaciones y con control por bloques estándar, observando el castañeteo y efectos de las perturbaciones, en tanto que en las Figuras 4.15 y 4.16, se muestran resultados del sistema con perturbaciones al que se le aplica el esquema de control propuesto, en donde se observan variaciones suaves en las ganancias del controlador k_i para $i = 1, 2, 3$, y el problema del castañeteo es resuelto aunque permanecen pequeñas oscilaciones debido a las perturbaciones oscilatorias no desvanecientes.

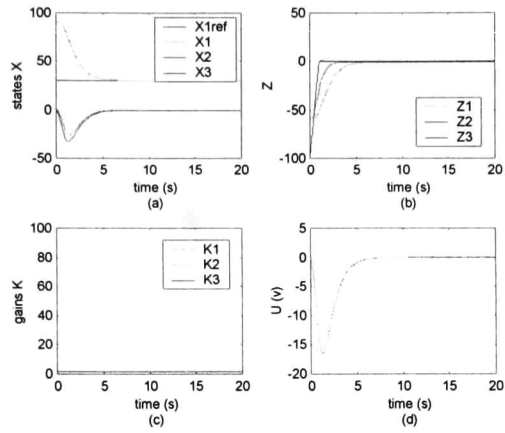


Figura 4.1: PE con CB sin CLD sin perturbaciones

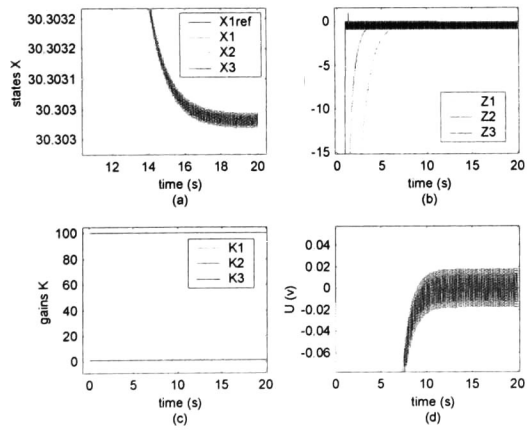


Figura 4.2: Acercamiento de PE con CB sin CLD sin perturbaciones

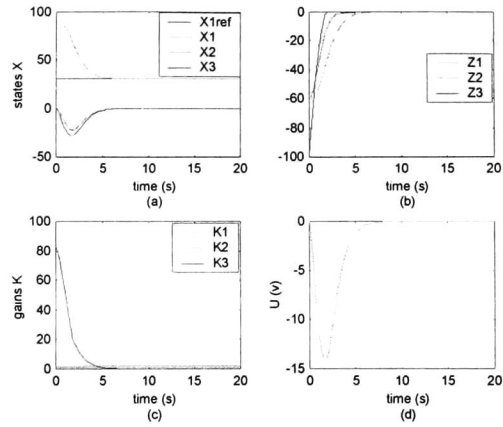


Figura 4.3: PE con CB con CLD sin perturbaciones

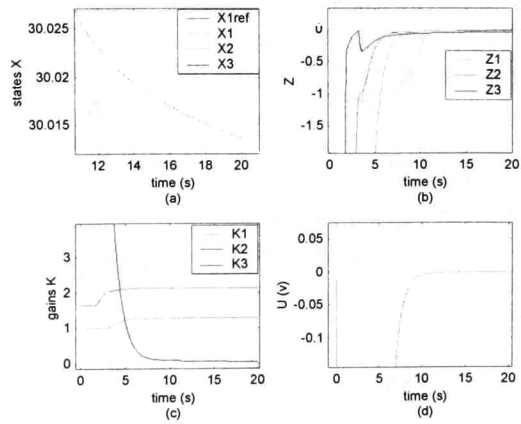


Figura 4.4: Acercamiento de PE con CB con CLD sin perturbaciones

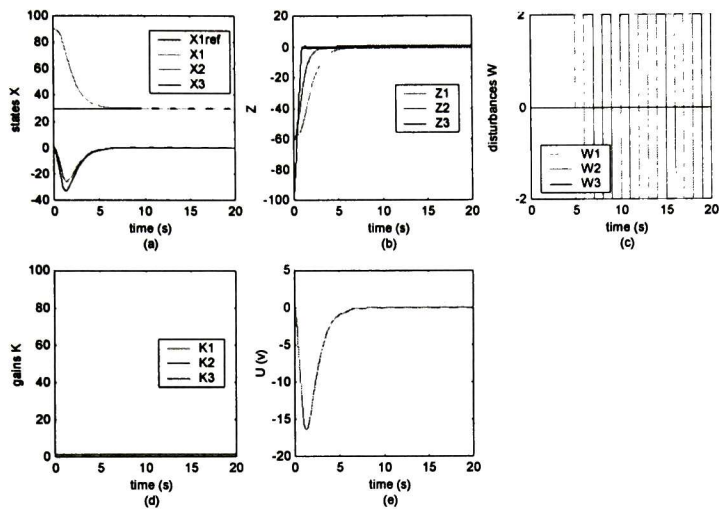


Figura 4.5: PE con CB sin CLD con perturbaciones

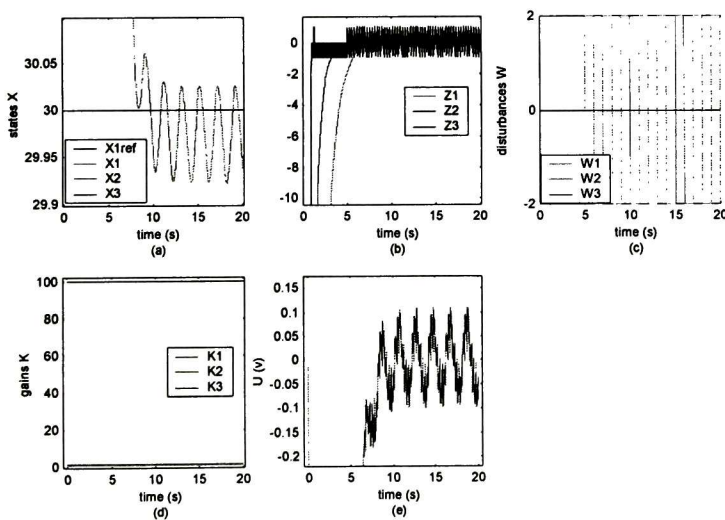


Figura 4.6: Acercamiento de PE con CB sin CLD con perturbaciones

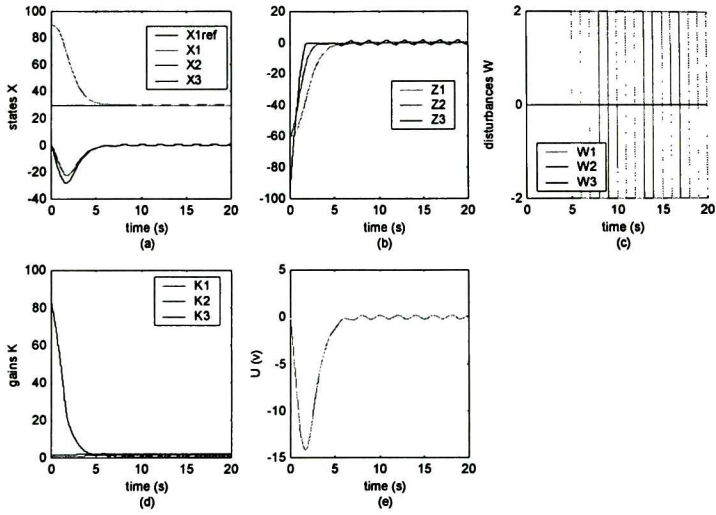


Figura 4.7: PE con CB con CLD con perturbaciones

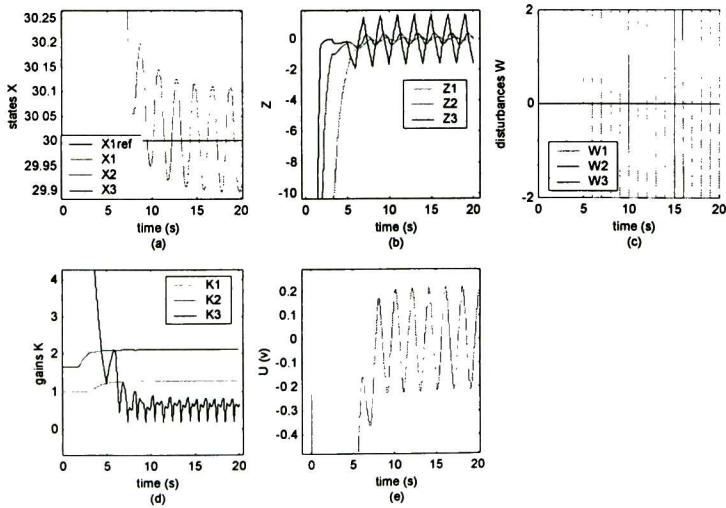


Figura 4.8: Acercamiento de PE con CB con CLD con perturbaciones

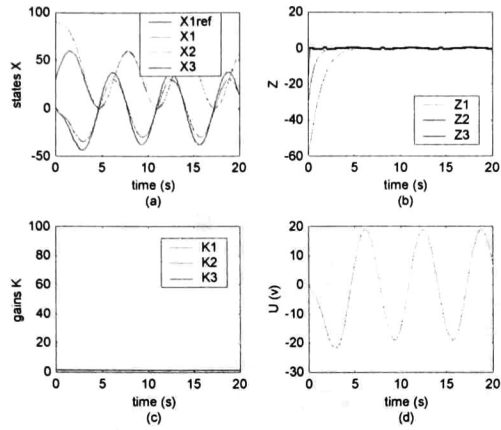


Figura 4.9: ST con CB sin CLD sin perturbaciones

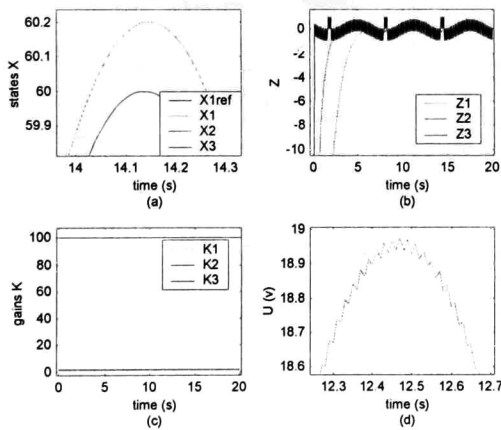


Figura 4.10: Acercamiento de ST con CB sin CLD sin perturbaciones

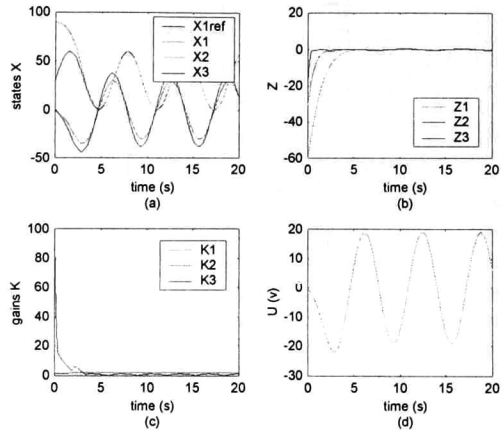


Figura 4.11: ST con CB con CLD sin perturbaciones

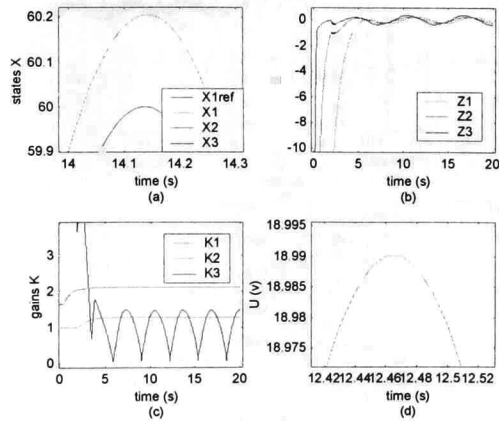


Figura 4.12: Acercamiento de ST con CB con CLD sin perturbaciones

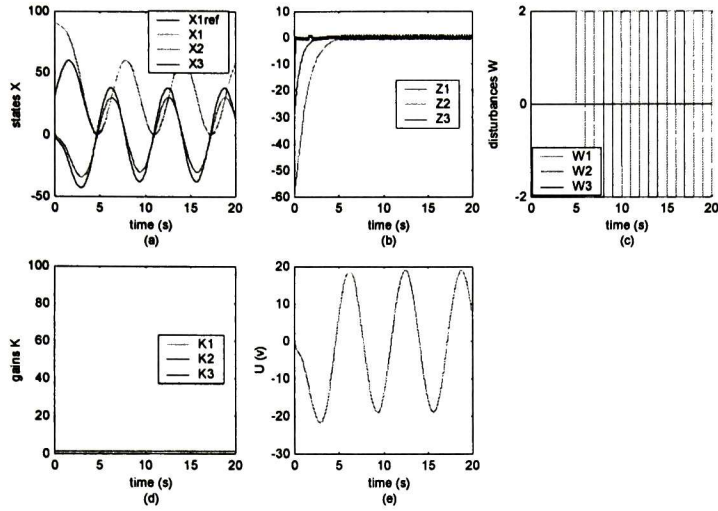


Figura 4.13: ST con CB sin CLD con perturbaciones

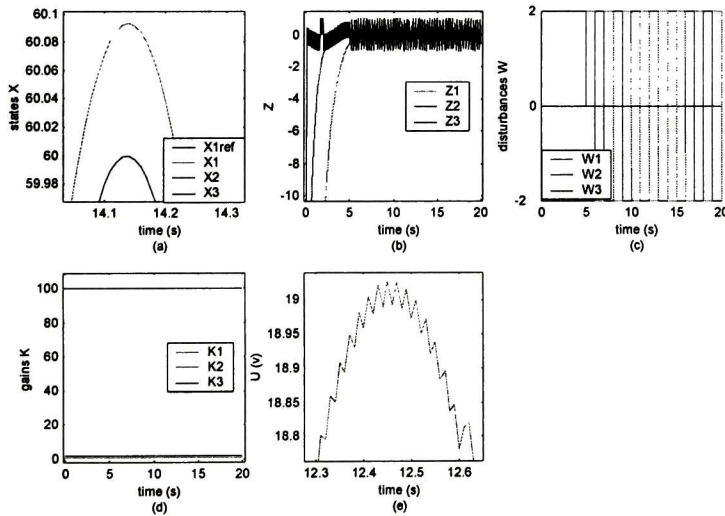


Figura 4.14: Acercamiento de ST con CB sin CLD con perturbaciones

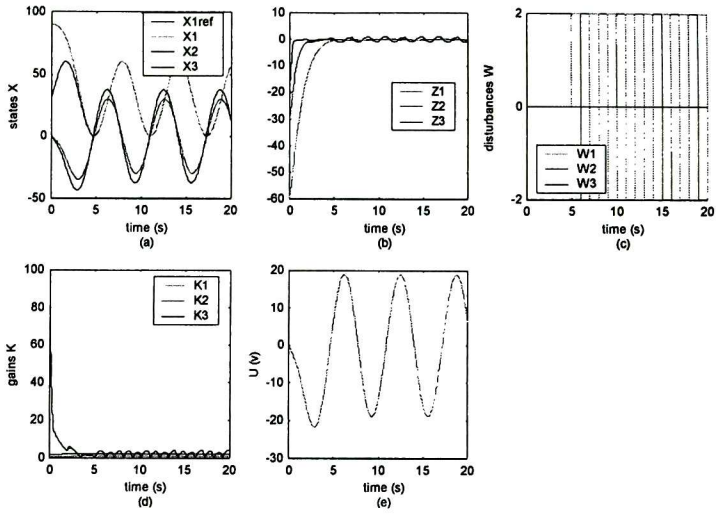


Figura 4.15: ST con CB con CLD con perturbaciones

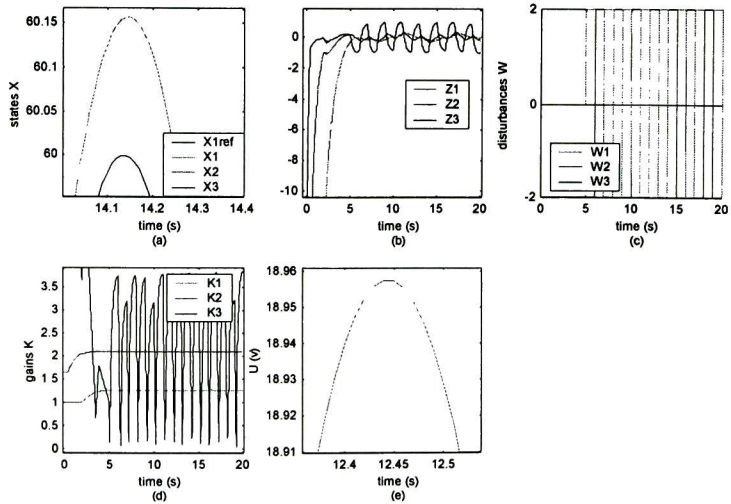


Figura 4.16: Acercamiento de ST con CB con CLD con perturbaciones

Capítulo 5

Aplicación al Caso Vectorial

5.1. Modelo del Motor de Pasos

En esta sección aplicamos el esquema propuesto en el Capítulo 3, para controlar un motor de pasos con imanes permanentes, cuyo modelo matemático [24] está dado por

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (5.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J} (-K_m i_a \sin(N_r \theta) + K_m i_b \cos(N_r \theta) - B\omega - \tau) \quad (5.2)$$

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri_a + K_m \omega \sin(N_r \theta) + v_a) \quad (5.3)$$

$$\frac{di_b}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri_b - K_m \omega \cos(N_r \theta) + v_b) \quad (5.4)$$

en donde θ es la posición angular de la flecha del motor, ω es la velocidad angular de la flecha, i_a e i_b son las corrientes en las fases A y B del motor, respectivamente, v_a y v_b son los voltajes aplicados a los devanados de las fases A y B , respectivamente. J es el momento de inercia. R y L son la resistencia y la inductancia en cada uno de los devanados de fase, N_r es el número de dientes del rotor, K_m es la constante del par del motor, B es la fricción viscosa, y τ representa a la perturbación del par de la carga.

Seleccionando a las siguientes variables de estado $x_4 = \theta$, $x_3 = \omega$, $x_2 = i_a$, y $x_1 = i_b$, y a las entradas de control como $u_2 = v_a$ y $u_1 = v_b$, el sistema (5.1)-(5.4) queda representado en la forma controlable a bloques no lineal (NBC-form) con la estructura $n_3 = n_2 = 1 < n_1 = 2$ (3.7). Considerando a la perturbación desconocida $w_1 = \tau$, tenemos

$$\dot{x}_4 = x_3 \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_3 + \begin{bmatrix} -b_{32}(x_4) & b_{31}(x_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + g_3(x_3, w_1) \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(x) \\ f_1(x) \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_2(x) \\ g_1(x) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

en donde $a_3 = \frac{B}{J}$, $b_{31}(x_4) = c_3 \cos(N_r x_4)$, $b_{32}(x_4) = c_3 \sin(N_r x_4)$, $c_3 = \frac{K_m}{J}$, $f_2(x) = -a_2 x_2 + c_1 b_{32}(x_4) x_3$, $f_1(x) = -a_1 x_1 + c_1 b_{31}(x_4) x_3$, $a_1 = a_2 = \frac{R}{L}$, $c_1 = \frac{J}{L}$, $b_1 = \frac{1}{L}$, y $g_3(x_3, w_1) = -c_2 w_1 - \Delta a_3 x_3$, $c_2 = \frac{1}{J}$, $g_2(x) = -\Delta a_2 x_2 + \Delta c_1 b_{32}(x_4) x_3$, $g_1(x) = -\Delta a_1 x_1 - \Delta c_1 b_{31}(x_4) x_3$, Δa_1 , Δa_2 , Δa_3 y Δc_1 presentan variaciones de los correspondientes parámetros con las siguientes cotas $|\Delta a_1| \leq q_{11}$, $|\Delta a_2| \leq q_{22}$, $|\Delta a_3| \leq q_{33}$ y $|\Delta c_1| \leq q_{13} = q_{23}$, $|c_2 w_1| \leq d_3$, donde $q_{11} > 0$, $q_{22} > 0$, $q_{33} > 0$ y $q_{13} = q_{23} > 0$, y $d_3 > 0$

Se requiere que la salida $y = x_4$ siga a la señal de referencia $q(\omega) = \omega_1$ generada por

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= \alpha_1 \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\alpha_1 \omega_1, \quad \text{para } \alpha_1 > 0\end{aligned}$$

donde $\omega = (\omega_1 \ \omega_2)^T$ Siguiendo el procedimiento de transformación a bloques, primero definimos el error de seguimiento como

$$z_4 = x_4 - \omega_1 = \psi_4(x_4, \omega) \quad (5.8)$$

derivando (5.8) y sustituyendo adecuadamente se tiene

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{\omega}_1 = x_3 - \alpha_1 \omega_2. \quad (5.9)$$

Ahora se introduce una dinámica deseada para z_4 como

$$\dot{z}_4 = -k_4 z_4 + z_3 \quad (5.10)$$

Resolviendo (5.9) y (5.10) para z_3 tenemos

$$z_3 = k_4 (x_4 - \omega_1) + (x_3 - \alpha_1 \omega_2) = \psi_3(\bar{x}_3, \omega, k_4)$$

donde $\bar{x}_3 = (x_3, x_4)^T$ Entonces

$$\dot{z}_3 = f_3(x_3, \omega, k_4) + B_3(x_4) x_1 + g_3(x_3, w_1) \quad (5.11)$$

donde $x_1 = (x_1, x_2)^T$, $f_3(\cdot) = (k_4 - a_3) x_3 + (\alpha_1^2 \omega_1 - k_4 \alpha_1 \omega_2)$ y $B_3(x_4) = \begin{bmatrix} -b_{32}(x_4) & b_{31}(x_4) \end{bmatrix}$. Tomando en cuenta que $a_3 > 0$, el vector cuasi control x_1 en (5.11) se elige como

$$x_1 = -B_3^T(x_4) [f_3(x_3, \omega, k_4) + (k_3 + a_3) \psi_3(\bar{x}_3, \omega, k_4) - E_{11} z_1] \quad (5.12)$$

con lo que resulta

$$\dot{z}_3 = -(k_3 + a_3) z_3 - E_{11} z_1 + g_3(x_3, w_1)$$

donde $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ahora la transformación (5.12) es extendida como sigue

$$B_3^\perp(x_4) x_1 = E_{12} z_1, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{bmatrix} = I_2 \quad (5.13)$$

tal que la matriz cuadrada $\bar{B}_3(x_4) = \begin{bmatrix} B_3(x_4) \\ B_3^\perp(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{32}(x_4) & b_{31}(x_4) \\ -b_{31}(x_4) & -b_{32}(x_4) \end{bmatrix}$ tiene rango $n_1 = m = 2$. Usando (5.12) y (5.13), el nuevo vector $z_1 = (z_1, z_2)^T$ puede obtenerse de la forma (3.11) esto es

$$z_1 = \tilde{B}_3(\bar{x}_4) x_1 + \begin{bmatrix} f_3(x_3, \omega, k_4) + (k_3 + a_3) \psi_3(x_3, \omega, k_4) \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_3)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_4)^T$ y $\bar{k}_3 = (k_3, k_4)^T$ Entonces

$$\dot{z}_1 = f_1(x, \omega) + B_1(\bar{x}_4) u + g_1(x, \omega, w)$$

donde $f_1(\cdot) = \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_4} x_3 - \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_3} a_3 x_3 + \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial \omega_1} \alpha_1 \omega_2 - \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial \omega_2} \alpha_1 \omega_1$, $B_1(x_4) = b_1 \tilde{B}_3(x_4)$ y $g_1(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi_1(\cdot)}{\partial x_i} g_i$. Finalmente el sistema (5.5)-(5.7) puede representarse en las nuevas variables como

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 &= -k_4 z_4 + z_3 \\ \dot{z}_3 &= -(k_3 + a_3) z_3 - E_{11} z_1 + \bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, k_4, w_1) \\ \dot{z}_1 &= f_1(z, \omega, \bar{k}_3) + \bar{B}_1(z, \omega) u + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_3, w_1) \end{aligned}$$

donde $\bar{z}_3 = (z_4, z_3)^T$, $\bar{f}_1(\cdot) = [\bar{f}_2(\cdot), \bar{f}_1(\cdot)]^T$ y $\bar{g}_1(\cdot) = [\bar{g}_2(\cdot), \bar{g}_1(\cdot)]^T$

5.2. Diseño del Controlador

Usando (5.8) y la transformación inversa

$$\begin{aligned} x_4 &= z_4 + \omega_1 \\ x_3 &= z_3 - k_4 z_4 + \alpha_1 \omega_2 \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_{32}(z_4 + \omega_1) [(k_4 + k_3) z_3 + (k_4 a_3 - k_4^2) z_4 + (\alpha_1^2 \omega_1 - k_4 \alpha_1 \omega_2)] \\ -b_{31}(z_4 + \omega_1) [(k_4 + k_3) z_3 + (k_4 a_3 - k_4^2) z_4 + (\alpha_1^2 \omega_1 - k_4 \alpha_1 \omega_2)] \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -b_{32}(z_4 + \omega_1) z_2 & -b_{31}(z_4 + \omega_1) z_1 \\ -b_{31}(z_4 + \omega_1) z_2 & -b_{32}(z_4 + \omega_1) z_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las condiciones (3.25), y (3.26) de la Proposición ?? del Capítulo 3, se presentan como

$$|b_{31}(\cdot)| \leq c_3, |b_{32}(\cdot)| \leq c_3, \quad (5.14a)$$

$$|\bar{g}_3(\cdot)| \leq q_{33} |z_3| + \gamma_{34}(k_4) |z_4| + \bar{d}_3 \quad (5.14b)$$

$$\begin{bmatrix} |\bar{g}_2(\cdot)| \\ |\bar{g}_1(\cdot)| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \gamma_{24}(k_4) |z_4| + \gamma_{23}(\bar{k}_3) |z_3| + \gamma_{22} |z_2| + \gamma_{21} |z_1| + d_2 \\ \gamma_{14}(k_4) |z_4| + \gamma_{13}(\bar{k}_3) |z_3| + \gamma_{12} |z_2| + \gamma_{11} |z_1| + d_1 \end{bmatrix} \quad (5.14c)$$

donde $\gamma_{34}(k_4) = q_{33} k_4$, $\bar{d}_3 = d_3 + q_{33} \alpha_1$, $\gamma_{24}(k_4) = q_{22} c_3 (k_4 a_3 + k_4^2) + q_{23} k_4$, $\gamma_{23}(\bar{k}_3) = q_{22} c_3 (k_4 + k_3) +$

$q_{23}, \gamma_{22} = \gamma_{21} = q_{22}c_3, d_2 = \alpha_1 [q_{22}c_3 (\alpha_1 + a_3) + q_{23}], \gamma_{14}(k_4) = q_{11}c_3 (k_4 a_3 + k_4^2) + q_{13}k_4, \gamma_{13}(\bar{k}_3) = q_{11}c_3 (k_4 + k_3) + q_{13}, d_1 = \alpha_1 [q_{11}c_3 (\alpha_1 + a_3) + q_{13}],$ y $\gamma_{12} = \gamma_{11} = q_{11}c_3$. Para forzar al movimiento de modos deslizantes sobre la variedad $z_1 = \Psi_1(x, \omega, \bar{k}_3) = 0$ el control se elige de modo similar a (3.28) y (3.29)

$$u := \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{cases} -k_1 \bar{B}_1^{-1}(\cdot) \begin{bmatrix} \frac{z_2}{|z_2|} + \bar{f}_1(z, \omega, \bar{k}_3) \\ \frac{z_1}{|z_1|} + \bar{f}_2(z, \omega, \bar{k}_3) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } \begin{bmatrix} z_2 \neq 0 \\ z_1 \neq 0 \end{bmatrix} \\ \text{de otro modo.} & \end{cases}$$

con $k_1 > 0$. Entonces la proyección del movimiento del sistema de lazo cerrado sobre el subespacio z_2, z_1 está definida por

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \frac{z_2}{|z_2|} + \bar{g}_2(z, \omega, \bar{k}_3, w_1) \\ -k_1 \frac{z_1}{|z_1|} + \bar{g}_1(z, \omega, \bar{k}_3, w_1) \end{bmatrix}$$

en la región definida como

$$\sum_{j=1}^4 \gamma_{ij}(\cdot) |z_j| + d_i \leq k_1, \quad i = 1, 2.$$

Las soluciones $z_2(t)$ y $z_1(t)$ convergen a cero en un tiempo finito t_1 , y el modo deslizante forzado sobre la variedad $z_1 = 0$ es descrito por el siguiente sistema con perturbaciones que consta de dos bloques:

$$\dot{z}_4 = -k_4 z_4 + z_3 \quad (5.15)$$

$$\dot{z}_3 = -(k_3 + a_3) z_3 + \bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, k_4, w_1) \quad (5.16)$$

Para determinar las condiciones de estabilidad del sistema (5.15)-(5.16), usamos primero una función candidata de Lyapunov $V_3 = \frac{1}{2} z_3^2$ y las cotas (5.14b), obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -(k_3 + a_3) |z_3|^2 + |z_3| |\bar{g}_3(\bar{z}_3, \omega, k_4, w_1)| \\ &= -(k_3 + a_3 - q_{22}) (1 - \theta_3) |z_3|^2 + (k_3 + a_3 - q_{22}) \theta_3 |z_3|^2 + |z_3| (\gamma_{34}(k_4) |z_4| + \bar{d}_3) \\ &\leq -(k_3 + a_3 - q_{22}) (1 - \theta_3) |z_3|^2 \\ \forall |z_3| &\geq \frac{\gamma_{34}(k_4) |z_4| + \bar{d}_3}{(k_3 + a_3 - q_{22}) \theta_3}, \quad 0 < \theta_3 < 1. \end{aligned}$$

Así

$$|z_3(t)| \leq |z_3(t_s)| e^{-\xi_3(k_3)(t-t_s)}. \quad \xi_3(k_3) = (k_3 + a_3 - q_{22}) (1 - \theta_3)$$

Entonces, hay un tiempo finito t_s tal que

$$|z_3| \leq \alpha_{34}(\mu_3) |z_4| + \beta_3(\mu_3), \quad \forall t > t_3 > t_s \quad (5.17)$$

donde $\mu_3 = \frac{1}{k_3}$ y los parámetros $\alpha_{34}(\cdot)$ y $\beta_3(\cdot)$ definidos como $\alpha_{34}(\mu_3) = \frac{\gamma_{34}(k_4)}{(k_3 + a_3 - q_{22})\theta_3} = \frac{\mu_3 \gamma_{34}(k_4)}{(1 + \mu_3(a_3 - q_{22}))\theta_3}$ y $\beta_3(\mu_3) = \frac{\bar{d}_3}{(k_3 + a_3 - q_{22})\theta_3} = \frac{\mu_3 \bar{d}_3}{(1 + \mu_3(a_3 - q_{22}))\theta_3}$ son positivos si las siguientes condiciones se mantienen:

$$k_3 > q_{22} - a_3 \quad (5.18)$$

En el segundo paso, la derivada de la función candidata de Lyapunov $V_4 = \frac{1}{2}z_4^2$ calculada a lo largo de las trayectorias de (5.16) y bajo las condiciones (5.17) y (5.18), está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &\leq -k_4 |z_4|^2 + |z_4| |z_3| \\ &= -[k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)](1 - \theta_4) |z_4|^2 + [k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)]\theta_4 |z_4|^2 + |z_4| \beta_3(\mu_3) \\ &\leq -[k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)](1 - \theta_4) |z_4|^2 \\ \forall |z_4| &\geq \frac{\beta_3(\mu_3)}{[k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)]\theta_4}, \quad 0 < \theta_4 < 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo la condición

$$k_4 > \alpha_{34}(\mu_3)$$

el error de seguimiento que está dado por

$$|z_4(t)| \leq |z_4(t_3)| e^{-\xi_4(k_4)(t-t_3)}, \quad t > t_3 > t_s, \quad \xi_4(k_4) = k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)$$

converge exponencialmente a la región definida por

$$|z_4| \leq \beta_4(\mu_3, \mu_4), \quad \forall t > t_4 > t_3 > t_s$$

donde $\beta_4(\mu_3, \mu_4) = \frac{\beta_3(\mu_3)}{[k_4 - \alpha_{34}(\mu_3)]\theta_4}$, y $\mu_4 = \frac{1}{k_4}$.

Para reducir los efectos de las perturbaciones, aplicamos el esquema de control de control difuso con modos deslizantes descrito en la Sección 3.2, para el ajuste de las ganancias del controlador k_1 , k_3 y k_4 .

5.3. Resultados de la Simulación

A continuación se muestran resultados obtenidos de la simulación en Matlab de un motor motor de pasos con imanes permanentes cuyos parámetros son los siguientes: $L = 10 \text{ mH}$, $R = 8,4 \Omega$, $J = 3,6 \times 10^{-6} \text{ Kgm}^2$, $K_m = 0,05 \text{ Vs/rad}$, $B = 1 \times 10^{-4} \text{ Nms/rad}$, $N_r = 50$. El voltaje máximo de alimentación es $u_0 = 2V$. Las ganancias del controlador son ajustadas dentro del rango $k_{i \text{ mín}} \leq k_i \leq k_{i \text{ máx}}$, para $i = 1, 3, 4$, con $k_{1 \text{ mín}} = 300$, $k_{1 \text{ máx}} = 1e4$, $k_{3 \text{ mín}} = 200$, $k_{3 \text{ máx}} = 300$, $k_{4 \text{ mín}} = 100$, y $k_{4 \text{ máx}} = 200$. La señal de referencia $q(\omega) = \omega_1$ es generada por $\dot{\omega}_1 = \alpha_1 \omega_2$, y $\dot{\omega}_2 = -\alpha_1 \omega_1$, con $\alpha_1 = \pi$. Las perturbaciones están acotadas como: $|\Delta a_1| \leq q_{11} = 0,1a_1$, $|\Delta a_2| \leq q_{22} = 0,1a_2$, $|\Delta a_3| \leq q_{33} = 0,1a_3$, $|\Delta c_1| \leq q_{13} = q_{23} = 0,1c_1$, donde $a_1 = a_2 = 840$, $a_3 = 27,78$, $c_1 = 0,00036$, y,

$\omega_1 \leq 0,0005$. El control equivalente u_{eq} , el cual es obtenido por un filtro de primer orden, usa una constante de tiempo $\tau_s = 0,1$.

En las Figuras 5.1-5.7, se muestran resultados del control por bloques con modos deslizantes sin control con lógica difusa. En ellas se aprecia el castañeteo (chattering) y los efectos de las perturbaciones. Mientras que en las Figuras 5.8-5.14 se presentan resultados usando el método propuesto de control por bloques con modos deslizantes combinado con control con lógica difusa. La Figura 5.15 muestra las perturbaciones del par de carga usadas para estas simulaciones. En las Figuras 5.2, 5.4, 5.6, 5.9, 5.11, y 5.13 se presentan acercamientos de las figuras 5.1, 5.3, 5.5, 5.8, 5.10, y 5.12, respectivamente.

Comparando la Figura 5.2 con la Figura 5.9, es notorio que el estado x_4 sigue a la entrada de referencia de forma más suave cuando se aplica el esquema de control propuesto. Efectos similares observamos en las Figuras 5.3 y 5.10, esto es, el error de seguimiento z_4 tiene un mejor comportamiento con dicho esquema. Respecto a las superficies de deslizamiento observamos en las Figuras 5.5 y 5.12 que desaparecen las oscilaciones de alta frecuencia. Finalmente, observamos en las Figuras 5.7 y 5.14 que cuando se aplica el control por bloques con modos deslizantes combinado con control con lógica difusa, entonces la señal de control tiene variaciones de menor frecuencia y amplitud, lo que resulta ventajoso para la implementación en tiempo real.

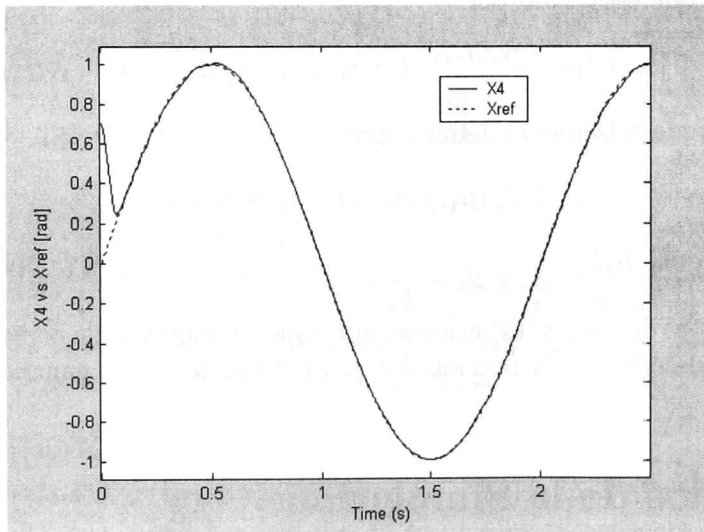


Figura 5.1: x_4 vs. ω_1 con perturbaciones sin lógica difusa

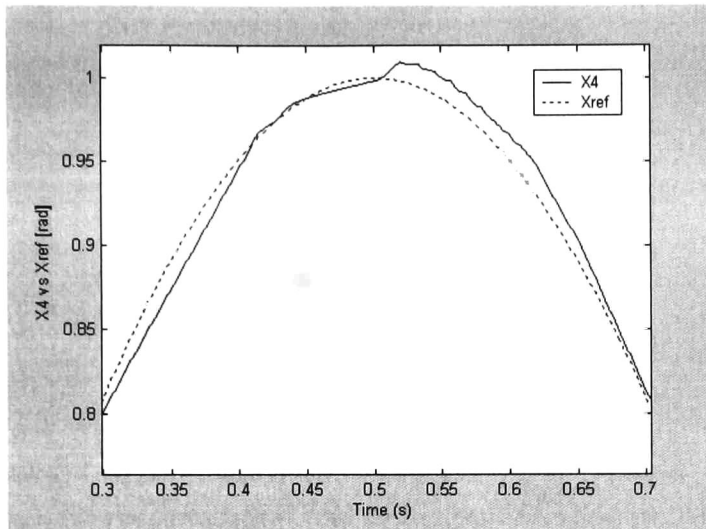
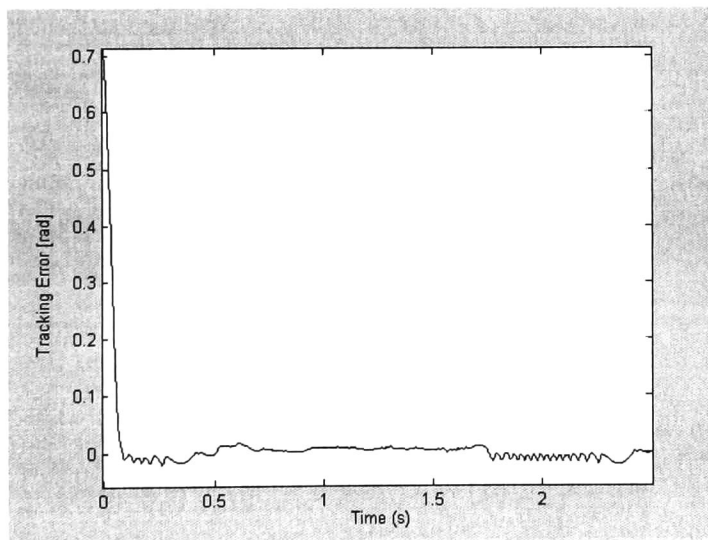


Figura 5.2: Acercamiento de la Figura 5.1

Figura 5.3: Error de seguimiento z_4 con perturbaciones sin lógica difusa

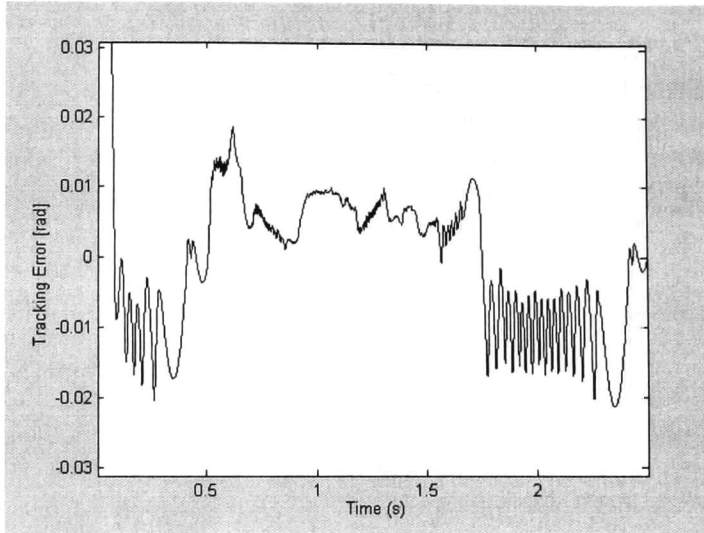
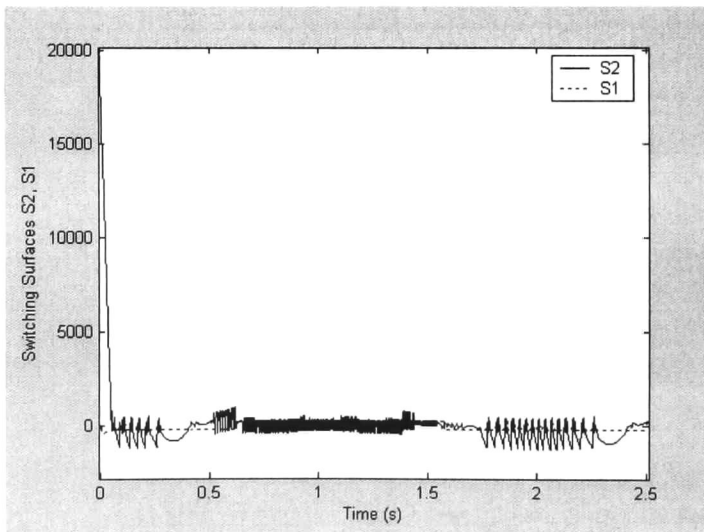


Figura 5.4: Acercamiento de la Figura 5.3

Figura 5.5: Superficies de conmutación (s_2, s_1) con perturbaciones sin lógica difusa

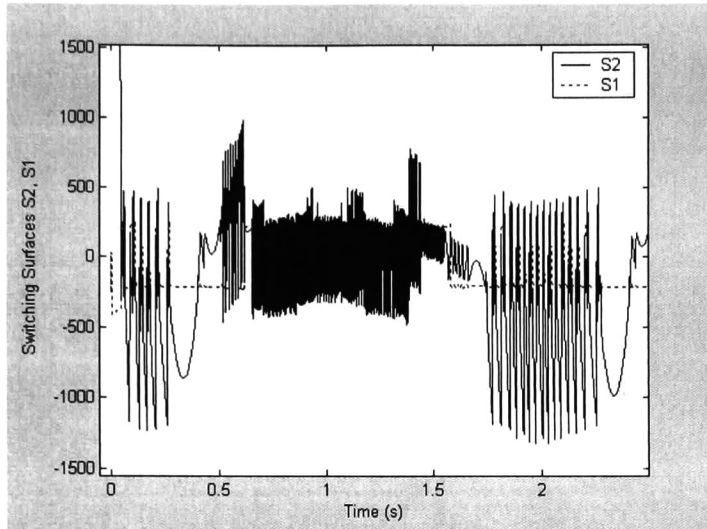


Figura 5.6: Acercamiento de la Figura 5.5

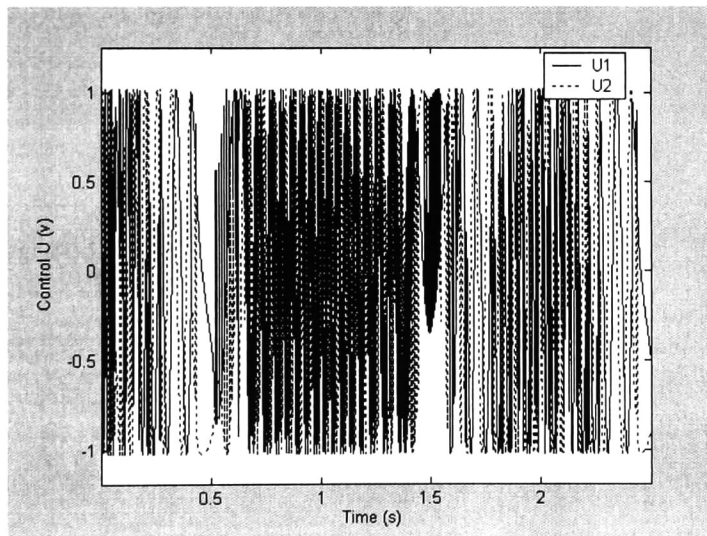


Figura 5.7: Señal de control con perturbaciones sin lógica difusa.

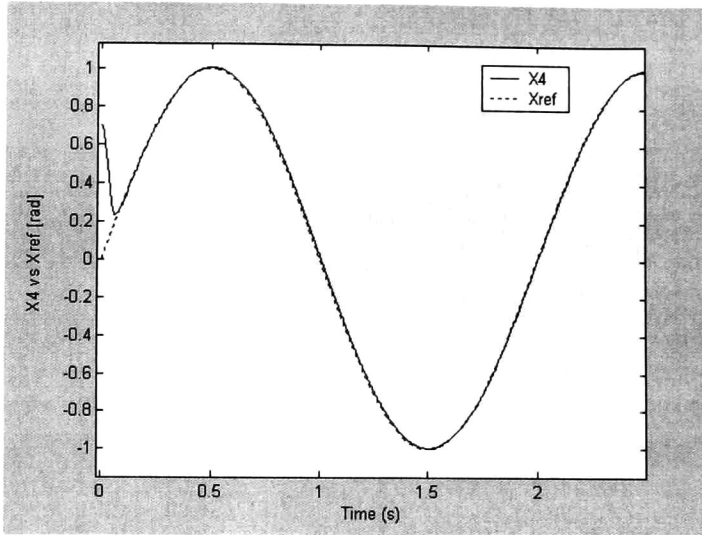


Figura 5.8: x_4 vs. ω_1 con perturbaciones y control con lógica difusa.

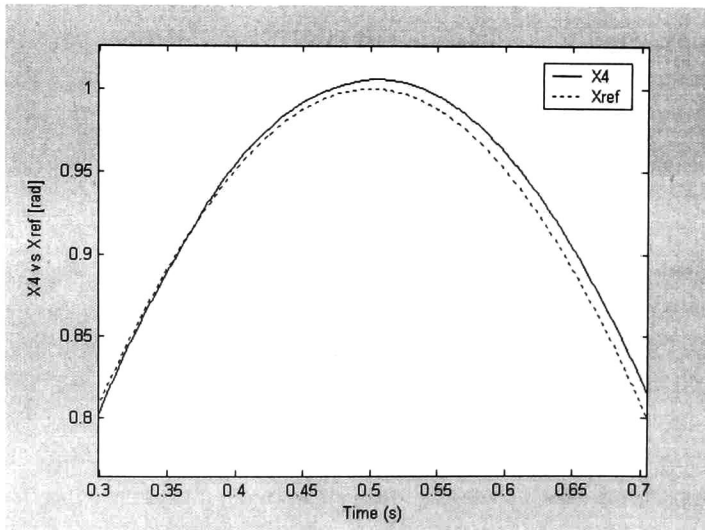


Figura 5.9: Acercamiento de la Figura 5.8

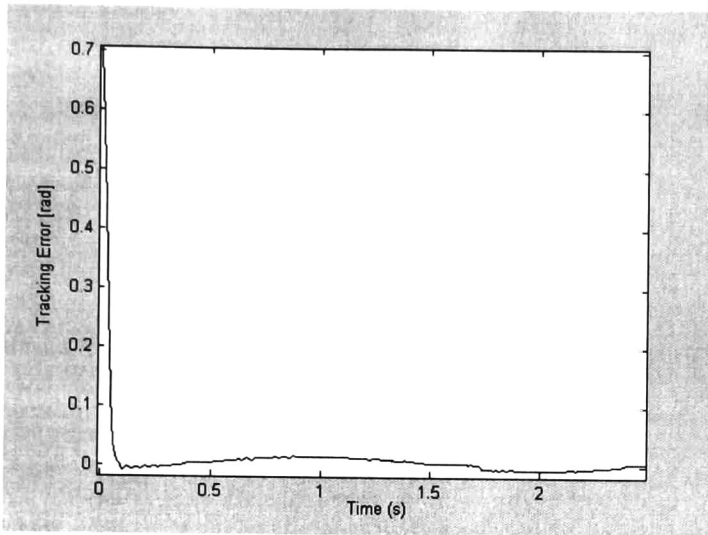


Figura 5.10: Error de seguimiento z_4 con perturbaciones y control con lógica difusa.

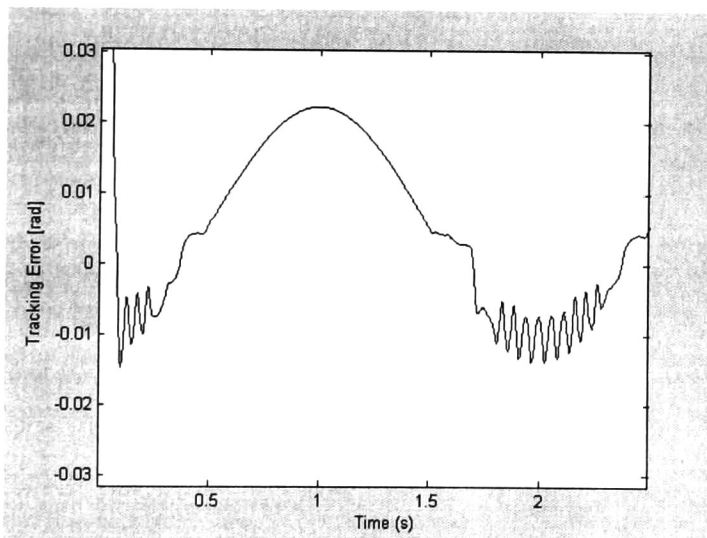


Figura 5.11: Acercamiento de la Figura 5.10

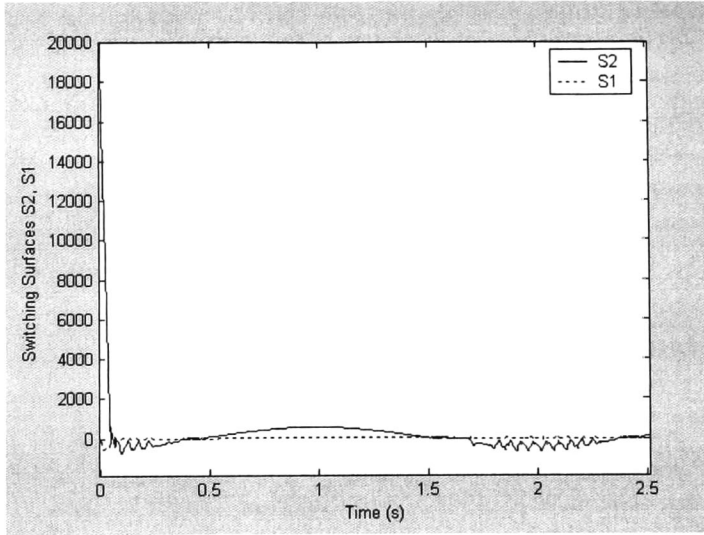


Figura 5.12: Superficies de conmutación (s_2, s_1) con perturbaciones y control con lógica difusa

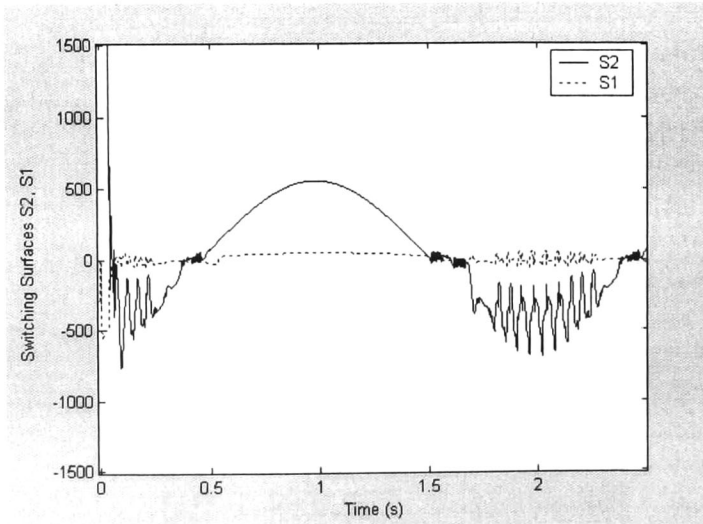


Figura 5.13: Acercamiento de la Figura 5.12

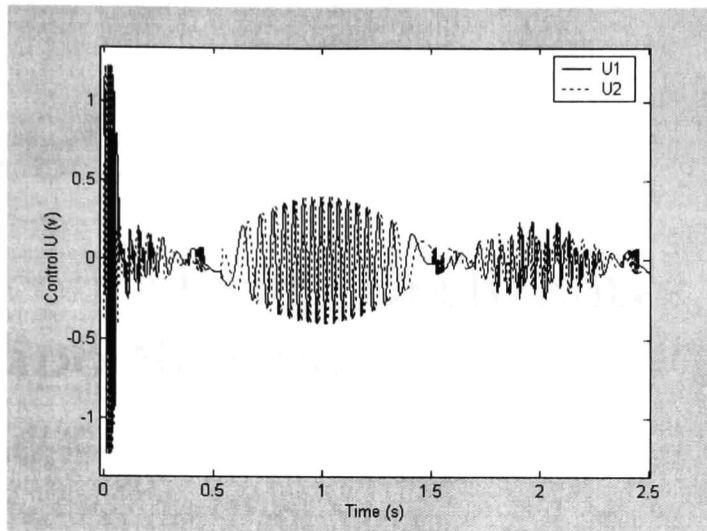


Figura 5.14: Señal de control con perturbaciones y control con lógica difusa.

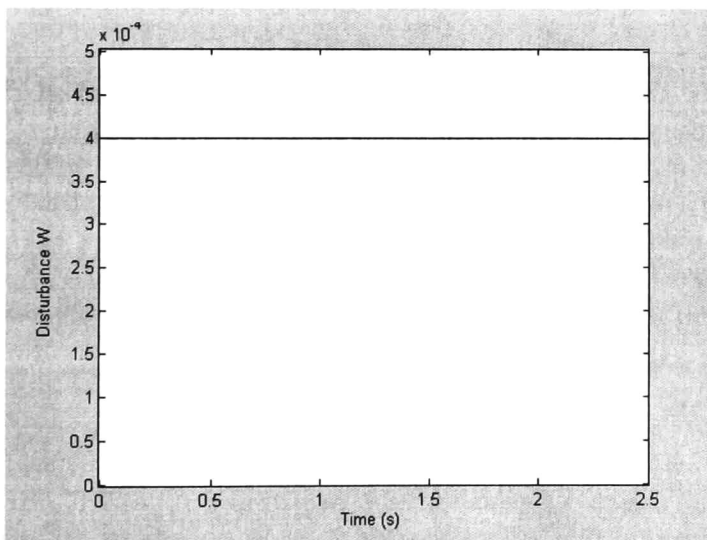


Figura 5.15: Perturbaciones del par de carga

Capítulo 6

Control con Modos Deslizantes y Lógica Difusa Tipo Sugeno

6.1. Formulación del Problema

Consideremos el siguiente sistema no lineal sujeto a perturbaciones descrito por

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + \Delta f(x, t) \quad (6.1)$$

en donde $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados, $u \in U \subset \mathfrak{R}^m$ es el vector de control el cual está acotado por

$$|u_i| \leq U_0 \text{ con } U_0 > 0 \quad (6.2)$$

El campo vectorial f y las columnas de B son mapeos suaves de clase $C_{[t, \infty)}^\infty$. El mapeo desconocido pero acotado Δf representa a las perturbaciones del modelo y a las perturbaciones externas, y se supone que $f(0) = \Delta f(0, t) = 0$ y $\text{rank}(B(x)) = m_0 \leq m$.

En el método de control con lógica difusa tipo Takagi-Sugeno (T-S), la parte nominal del sistema no lineal (6.1) es aproximada por un conjunto de modelos locales lineales. La dinámica del modelo difuso T-S [17] se describe por un conjunto de reglas If-Then, como se muestra a continuación:

$$\text{Regla } i: \text{ If } z_1(t) \text{ is } M_{1i}, z_j(t) \text{ is } M_{ji}, z_q(t) \text{ is } M_{qi} \text{ Then } \begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + \Delta f(x, t) \\ y = C_i x \end{cases}$$

donde A_i y B_i son matrices constantes de dimensiones apropiadas, $i = 1, \dots, r$ donde r es el número de reglas, z_j con $j = 1, \dots, q$ son las premisas variables, las cuales pueden ser funciones de las variables de estado; M_{ji} son los conjuntos difusos asociados a cada premisa. El modelo difuso completo T-S se infiere de la siguiente manera

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z)(A_i x + B_i u + \Delta f(x, t))$$

donde $h_i(z) = \frac{\lambda_i(z)}{\sum_{j=1}^r \lambda_j(z)}$, $\lambda_i(z) = \prod_1^q \mu_{ij}(z)$ y $\mu_{ij}(z)$ es la función de pertenencia o membresía de z_j correspondiente a M_{ji} . Además, puesto que $\sum_{j=1}^r \lambda_j(z) > 0$ y $\lambda_i(z) \geq 0$ se tienen las siguientes restricciones

$$\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1 \text{ y } h_i(z) \geq 0$$

El procedimiento estándar de diseño de los modos deslizantes como se sabe se compone de dos sub problemas. Primero se debe elegir la variedad deslizante no lineal en el espacio de estados del sistema

$$s(x) = \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i x, \quad s = (s_1, \dots, s_{m_0})^T \quad (6.3)$$

tal que

$$\text{rank}(GB) = \text{rank} \left(\sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z) C_i x + \sum_{i=1}^r h_i(z) C_i \dot{x} \right) B(x) = m_0 \forall x \in X \quad (6.4)$$

y la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{x} = f_s(x) + g_s(x, t), \quad s(x) = 0 \quad (6.5)$$

tenga las propiedades deseadas incluyendo la estabilidad como un requerimiento mínimo, donde $G = \frac{\partial s}{\partial x}$, $f_s = [I_n - B(GB)^{-1}G] f$ y $g_s = [I_n - B(GB)^{-1}G] g$. Segundo, se diseña un control discontinuo

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{if } s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x) & \text{if } s_i(x) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, m_0 \quad (6.6)$$

que garantice la convergencia de la proyección del movimiento sobre el subespacio s , dicho movimiento está regido por

$$\dot{s} = Gf + GBu + G\Delta f$$

donde $u_i^+(x)$ y $u_i^-(x)$, son funciones suaves a ser seleccionadas. Si la perturbación satisface la llamada condición de apareamiento (matching condition) [1], es decir, si existe un vector $\lambda(x, t)$ tal que

$$\Delta f(x, t) = B(x)\lambda(x, t) \quad \forall x \in X \text{ y } t \geq 0 \quad (6.7)$$

entonces $\Delta f_s = [I_n - B(GB)^{-1}G] B\lambda = 0$. En este caso, se puede mostrar que (6.5) queda reducido como

$$\dot{x} = f_s(x), \quad s(x) = 0. \quad (6.8)$$

Sin embargo, el problema principal, surge en este caso, el cual consiste en alcanzar la condición (6.4) que garantiza la existencia del control equivalente u_{eq}

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}(Gf + G\Delta f)$$

y la estabilidad de los modos deslizantes. Para superar este problema, se adopta el método integral de reducir el sistema original (6.1) a la Forma Regular, dado que la estructura de la Forma Regular permite diseñar una función de deslizamiento no lineal $s(x)$, la cual establezca la ecuación de los modos deslizantes.

6.2. Método Propuesto

En este capítulo diseñaremos un control robusto, para cuando se usa la técnica de control con lógica difusa tipo T-S. Primero transformaremos al sistema a su forma regular, y entonces basados en esta forma y usando la técnica T-S, se diseña una variedad deslizante y una ley de control; finalmente se analiza la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

6.2.1. Transformación a la Forma Regular

Considérese un sistema descompuesto en la siguiente forma

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (6.9)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)u + \Delta f_2(x_1, x_2) \quad (6.10)$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$ es el vector de estados transformado a la forma regular, $x_1 \in X_1 \subset \mathfrak{R}^{n-m_0}$, $x_2 \in X_2 \subset \mathfrak{R}^{m_0}$, y $\text{rank}(B_2(\cdot)) = \text{rank}(B(\cdot)) = m_0$. Nótese que en la terminología de [4], el subsistema (7.28) presenta las dinámicas controladas, mientras que el primer subsistema (7.24) presenta las dinámicas no controladas con entrada de control ficticia x_2 , conocida también como cuasi control.

La reducción del sistema (6.1) a la Forma Regular (7.24)-(7.28), puede hacerse por medio del método de la superficie integral [11]. Supongamos que el $\text{rank}(B(x, t)) = m_0 \leq m < n, \forall x \in X, \forall t \geq 0$ y que posiblemente después de reordenar, existe un bloque $B_2(x'_1, x_2)$ de orden $(m_0 \times m)$ tal que

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} B_1(x'_1, x_2) \\ B_2(x'_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

con $\text{rank}(B_2(x'_1, x_2, t)) = m_0, \forall x \in X, \forall t \geq 0$ donde x'_1 y x_2 son vectores de orden $(n - m_0) \times 1$ y $m_0 \times 1$, respectivamente. En este punto, introducimos las siguientes suposiciones.

S1. El sistema de Pfaffian

$$dx'_1 + A_1(x)dx_2 = 0, \quad A_1(x) = -B_1(x, t)B_2^+(x) \quad (6.12)$$

es completamente integrable, esto es, la siguiente condición se cumple [11]

$$\frac{\partial a_\alpha^j}{\partial x_\beta} - \sum_{k=1}^{n-\bar{n}_1} a_\alpha^i \frac{\partial a_\alpha^j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_\beta^j}{\partial x_\beta} - \sum_{k=1}^{n-\bar{n}_1} a_\beta^j \frac{\partial a_\beta^j}{\partial x_k}$$

la cual se obtiene usando el Teorema de Frobenius, donde $A_1(x) = \{a_\alpha^j(x)\}$, $i = 1, \dots, n - m_0$, α y $\beta \in \{(n - m_0 + 1), \dots, n\}$, B_2^+ es la pseudo inversa por la derecha de B_2 . Nótese que el rango pleno de B_2 , garantiza la existencia de B_2^+ que se define como $B_2^+ = B_2^T(B_2B_2^T)^{-1}$

S2. El mapeo no conocido $\Delta f(x, t)$ satisface la condición de apareamiento (matching condition) (6.7).

La suposición S1 implica que el subespacio controlado puede presentarse en forma explícita, y la suposición S2, significa que la perturbación dependiente del vector x_2 pertenece a este subespacio controlado.

Bajo la suposición S1, es posible mostrar que una solución de la ecuación (6.12) está dada por

$$x'_1 = \varphi_1(x_2, c), \quad \text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial c} \right) = n - m_0 \quad (6.13)$$

Por el teorema de la Función Implícita, existe un conjunto D_1

$$D_1 = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r_1\} \cdot r_1 > 0$$

tal que, se puede obtener el vector c de (6.13) como

$$c = \varphi(x'_1, x_2) \quad \forall x \in D_1 \subset X.$$

Ahora tomamos un cambio local de coordenadas dadas por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x'_1, x_2) \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

donde x_1 es un vector de orden $(n - m_0) \times 1$ que contiene a las variables nuevas.

Lema 10 *Si las suposiciones S1 y S2 se cumplen. Entonces la transformación (6.14) reduce el sistema (6.1) a la Forma Regular (7.24)-(7.28).*

Prueba. Debido a que la matriz $B(x, t)$ no es de rango pleno, impondremos restricciones sobre los componentes del vector de control u

$$u = B_2^+(x)v_0$$

resultando

$$Bu = BB_2^+v_0 = \begin{bmatrix} B_1B_2^+ \\ I_{m_0} \end{bmatrix} v_0 \quad (6.15)$$

en donde v_0 es un vector de entrada de dimensión $m_0 \times 1$. Se puede verificar que si $\varphi(x'_1, x_2, t) = c$ es una integral del sistema de Pfaffian (6.12), entonces se cumple la siguiente identidad

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} B_1B_2^+ \equiv 0. \quad (6.16)$$

De hecho, un diferencial $d\varphi$ calculado usando el sistema de Pfaffian (6.12), de la forma

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx = \frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{12}} B_1 B_2^+ \right) dx_2 \end{aligned}$$

es idénticamente igual a cero. De este resultado, la identidad (6.16) se obtiene inmediatamente. Además, de (6.16) y (6.15) se tiene que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} B_1 u + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} B_2 u = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{12}} B_1 B_2^+ \right) v_0 = 0. \quad (6.17)$$

Ahora, usando la suposición S2 (6.7), y dividiendo a f y Δf como

$$f = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ f'_2(x) \end{pmatrix} \quad \Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f'_1(x, t) \\ \Delta f'_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

entonces, bajo la suposición S2 (6.7), existen vectores $\lambda_0(x, t)$ de dimensión $\bar{n}_1 \times 1$, tales que

$$\Delta f := \begin{bmatrix} \Delta f'_1 \\ \Delta f'_2 \end{bmatrix} = B B_2^+ \lambda_0 := \begin{bmatrix} B_1 B_2^+ \\ I_{m_0} \end{bmatrix} \lambda_0$$

y la siguiente expresión se cumple bajo la condición (6.16)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} \Delta f'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \Delta f'_2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} B_1 B_2^+ \right) \lambda_0 = 0. \quad (6.19)$$

Diferenciando respecto al tiempo la variable nueva x_1 (6.14), a lo largo de las trayectorias del sistema (6.1) con (6.11) y (6.18), y usando (6.17) y (6.19), resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} (f'_1 + B_1 u + \Delta f'_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} (f'_2 + B_2 u + \Delta f'_2) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} f'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} f'_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{12}} B_1 B_2^+ \right) v_0 \\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} B_1 B_2^+ \right) \lambda_0. \end{aligned}$$

Definiendo $f_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} f'_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} f'_2 \right)_{x_1=\varphi^{-1}(x,t)}$ obtenemos la ecuación (7.24). ■

6.2.2. Diseño de la variedad deslizante y del control.

Para diseñar una variedad deslizante, el sistema (7.24)-(7.28) debe ser aproximado por el siguiente modelo T-S:

$$\dot{x}_1 = \sum_{i=1}^r h_i(x_1)(A_{1i}x_1 + B_{1i}x_2) \quad (6.20)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)u + \Delta f_2(x_1, x_2). \quad (6.21)$$

Considerando a x_2 como un control virtual para el subsistema (6.20), se puede elegir su valor deseado x_{2d} de la forma

$$x_{2d}(x_1) = \sum_{i=1}^r h_i(x_1)C_{1i}x_1 + v$$

donde $z(x_1)$ es una función que depende sólo del subestado x_1 . La función de deslizamiento $s(x)$ se selecciona como la diferencia entre el valor real y el valor deseado del subestado x_2

$$s(x) = x_2 - x_{2d} = x_2 - \sum_{i=1}^r h_i(x_1)C_{1i}x_1, \quad s = (s_1, \dots, s_{m_0})^T \quad (6.22)$$

Usando (6.20)-(6.22), la proyección del movimiento del sistema sobre el subespacio s puede obtenerse como

$$\dot{s} = f_s(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)u + \Delta f_s(x_1, x_2) \quad (6.23)$$

donde $\Delta f_s = \Delta f_2 + \dot{x}_{2d}$.

Definiendo la ley de control discontinua en la forma [20]

$$u = -k_0 \frac{B_2^T s}{\|B_2^T s\|} - B_2^{-1} f_s, \quad k_0 > 0 \quad (6.24)$$

entonces, se puede establecer el siguiente resultado.

Proposición 11 *La ley de control (6.24) y (6.22), bajo la siguiente condición:*

$$k_0 > \|B_2^{-1} \Delta f_s(x_1, x_2)\|, \quad k_0 > 0 \quad (6.25)$$

garantiza la convergencia de la solución del sistema en lazo cerrado (6.23)-(6.24), hacia la variedad $s(x) = 0$ (6.22) en un tiempo finito definido como

$$t_s < t_0 + \frac{1}{\eta} \|s(t_0)\|_2, \quad \eta > 0. \quad (6.26)$$

Prueba. La derivada respecto al tiempo de la función de Lyapunov $V_s = \frac{1}{2}s^T s > 0$ a lo largo de las trayectorias del sistema (6.23), con la ley de control (6.24), es de la forma

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_s &= s^T \left(-k_0 B_2 \frac{B_2^T s}{\|B_2^T s\|} + \Delta f_s(x_1, x_2) \right) \\
 &= -k_0 \|B_2^T s\| + s^T \Delta f_s(x_1, x_2) \\
 &= -k_0 \|B_2^T s\| + s^T B_2 B_2^{-1} \Delta f_s(x_1, x_2) \\
 &= -\|B_2^T s\| (k_0 - \|B_2^{-1} \Delta f_s(x_1, x_2)\|)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Bajo la condición (6.25), la derivada \dot{V}_s es negativa, por lo tanto el vector de estados alcanzará a la variedad $s(x) = 0$ (6.22) en un tiempo finito y después de este tiempo ocurre un movimiento de modos deslizantes. Para definir el intervalo de tiempo de convergencia, primero se debe calcular el término $\|B_2^T s\|$ en (6.27) como $\|s\| = \|(B_2^T)^{-1} B_2^T s\| \leq \|(B_2^T)^{-1}\| \|B_2^T s\|$ Entonces, sustituyendo $\|B_2^T s\| \geq \|(B_2^T)^{-1}\|^{-1} \|s\|$ en (6.27) y usando (6.25), resulta

$$\dot{V}_s \leq -k_0 \|(B_2^T)^{-1}\|^{-1} \|s\| < -\gamma \|s\|, \quad \gamma = k_0 \|(B_2^T)^{-1}\|^{-1}$$

Puesto que $V_s = \frac{1}{2}s^T s$, entonces, tenemos $\|s\| = \sqrt{2V_s}$ y a la siguiente desigualdad

$$\dot{V}_s < -\gamma \sqrt{2V_s} \tag{6.28}$$

ahora, usando el lema de comparación [9], la solución de (6.28) puede ser estimada como

$$V_s(t) < \frac{1}{2} \left(\sqrt{2V_s(t_0)} - \gamma(t - t_0) \right)^2$$

Así,

$$\|s(t)\| < \|s(t_0)\| - \eta(t - t_0).$$

Por lo tanto, $\|s(t)\|$ se desvanece en el tiempo finito, $t_s < t_0 + \frac{1}{\eta} \|s(t_0)\|_2$, (6.26) y el modo deslizante inicia sobre la variedad $s(x) = 0$ después de este tiempo. ■

6.2.3. Análisis de las dinámicas de los modos deslizantes

Ahora, para el sistema restringido a la variedad deslizante $s(x) = 0$ (6.22), ó, $x_2 = \sum_{i=1}^r h_i(x_1) C_{1i} x_1$, el sistema (6.20) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^r h_i(x_1) A_{1i} x_1 + \sum_{i=1}^r h_i(x_1) \sum_{i=1}^r h_i(x_1) B_{1i} C_{1i} x_1 \\
 &= \sum_{i,j=1}^r h_i(x_1) h_j(x_1) F_{i,j} x_1
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

donde

$$F_{ij} = A_{1i}x_1 + B_{1i}C_{1j}$$

y así, el problema no lineal original se reduce a alcanzar la estabilidad de las dinámicas de modos deslizantes del sistema descompuesto de orden reducido (6.29). Del análisis de Compensación Distribuida Paralela (PDC por sus siglas en ingles) [17], [21], se puede formular el siguiente resultado.

Proposición 12 *El equilibrio $x_1 = 0$ de un sistema de control difuso descrito por (6.29) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz simétrica $P_1 > 0$ y matrices C_{1j} , tal que*

$$F_{ii}^T P_1 + P_1 F_{ii}^T < 0 \quad (6.30)$$

para toda $j = 1, \dots, r$, y

$$\left(\frac{F_{ij} + F_{ji}}{2} \right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{F_{ij} + F_{ji}}{2} \right) < 0. \quad (6.31)$$

Prueba. Consideremos la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V_1 = x_1^T P_1 x_1$$

entonces, calculando la derivada de esta función tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1^T \sum_{i,j=1}^r h_i(x_1)h_j(x_1)Q_{ij}x_1 \\ &= x_1^T \sum_{i=1}^r h_i^2(x_1)Q_{ii}x_1 + x_1^T \sum_{ij>1}^r h_i(x_1)h_j(x_1)Q_{ij}x_1 \end{aligned}$$

con

$$Q_{ij} = (F_{ij} + F_{ji})^T P_1 + P_1 (F_{ij} + F_{ji}).$$

Dado que las funciones de pesos $h_i(x_1)$ son positivas, y del análisis PDC [17], [21], se concluye que, bajo las condiciones (6.30) y (6.31), la derivada \dot{V}_1 es negativa y entonces la solución del sistema (6.29) tiende asintóticamente a cero. ■

Los resultados presentados en el Lema 10, y las Proposiciones 11 and 12 pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 13 *Consideremos el sistema con perturbaciones (6.1) y supongamos que se cumplen las condiciones, (6.25), (6.30) y (6.31). Entonces, la solución del sistema en lazo cerrado (6.1), (6.24), y (6.22) es asintóticamente estable.*

Capítulo 7

Aplicación a un Sistema Subactuado

7.1. Modelo del Pendubot.

En el sistema electromecánico subactuado llamado pendubot que se muestra en la Figura 7.1, se aplica la estrategia de control propuesta en el Capítulo 6. El pendubot está compuesto por dos eslabones de masa m_1 y m_2 , respectivamente. En la base del primer eslabón se encuentra un actuador que ejerce un par torsional τ_1 , provocando un desplazamiento angular α_1 respecto al plano horizontal. La unión de los dos eslabones no tiene actuadores. El segundo eslabón es impulsado por el primero, provocando un desplazamiento angular α_2 . Cada eslabón tiene una longitud l_1 y l_2 , con centros de masa l_{c1} y l_{c2} , respectivamente.

La ecuación que modela el movimiento del pendubot está dada por [15]

$$D(\alpha_2) \ddot{\alpha} + C(\alpha_2, \dot{\alpha}) \dot{\alpha} + G(\alpha) + F(\dot{\alpha}) = \tau.$$

donde $D(\alpha_2) = \begin{bmatrix} D_{11}(\alpha_2) & D_{12}(\alpha_2) \\ D_{12}(\alpha_2) & D_{22} \end{bmatrix}$ es conocida como la matriz de inercias, $C(\alpha_2, \dot{\alpha}) = \begin{bmatrix} C_{11}(\alpha_2, \dot{\alpha}_2) & C_{12}(\alpha_2, \dot{\alpha}_2) \\ C_{21}(\dot{\alpha}_1, \alpha_2) & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de Coriolis, $G(\alpha) = [G_1(\alpha_1, \alpha_2) \ G_2(\alpha_1, \alpha_2)]^T$ es el vector de términos gravitacionales, $F(\dot{\alpha}) = [\mu_1 \dot{\alpha}_1 \ \mu_2 \dot{\alpha}_2]^T$ es el vector de términos de fricción viscosa, $\tau = [\tau_1 \ 0]^T$ es el vector del par rotacional aplicado por el actuador, y $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ es el vector de posición angular de los eslabones.

Los elementos que conforman a cada una de las matrices se definen a continuación

$$\begin{aligned}
 D_{11}(\alpha_2) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \alpha_2) + I_1 + I_2 \\
 D_{12}(\alpha_2) &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \alpha_2) + I_2 \\
 D_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
 C_{11}(\alpha_2, \dot{\alpha}_2) &= -2m_2 l_1 l_{c2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \\
 C_{12}(\alpha_2, \dot{\alpha}_2) &= -m_2 l_1 l_{c2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \\
 C_{21}(\dot{\alpha}_1, \alpha_2) &= m_2 l_1 l_{c2} \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_2 \\
 G_1(\alpha_1, \alpha_2) &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \alpha_1 + m_2 l_{c2} g \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 G_2(\alpha_1, \alpha_2) &= m_2 g l_{c2} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 F_1(\dot{\alpha}_1) &= \mu_1 \dot{\alpha}_1 \\
 F_2(\dot{\alpha}_2) &= \mu_2 \dot{\alpha}_2
 \end{aligned}$$

donde g es la constante gravitacional, I_1 e I_2 son los momentos de inercia del primero y segundo eslabón alrededor de sus centroides, respectivamente, y μ_1 y μ_2 son los coeficientes de fricción viscosa.

Despejando el vector de aceleración, tenemos otra forma muy conveniente de modelar la dinámica del pendubot

$$\ddot{\alpha} = -D^{-1}(\alpha_2) (C(\alpha_2, \dot{\alpha}) \dot{\alpha} + G(\alpha) + F(\dot{\alpha})) + D^{-1}(\alpha_2) \tau_1 \quad (7.1)$$

Seleccionando al vector de estados como $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dot{\alpha}_1 \ \dot{\alpha}_2]^T$, a la señal de entrada como $u = \tau_1$, y como señal de salida a x_2 , entonces (7.1) quedaría como

$$\dot{x}_{34} = -D^{-1}(x_2) (C(x_2, x_3, x_4) x_{34} + G(x_1, x_2) + F(x_3, x_4)) + D^{-1}(x_2) u \quad (7.2)$$

donde $x_{34} = [x_3 \ x_4]^T$. Sabemos que las siguientes relaciones se cumplen $\dot{x}_1 = x_3$, y $\dot{x}_2 = x_4$, entonces el sistema (7.2) se puede modelar en la forma extendida

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (7.3)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (7.4)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x) + b_3(x_2) u \quad (7.5)$$

$$\dot{x}_4 = f_4(x) + b_4(x_2) u \quad (7.6)$$

en donde

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= -b_3(x_2) [C_{11}(x_2, x_4) x_3 + C_{12}(x_2, x_4) x_4 + G_1(x_1, x_2) + F_1(x_3)] \\
 &\quad - b_4(x_2) [C_{21}(x_2, x_3) x_3 + G_2(x_1, x_2) + F_2(x_4)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= -b_4(x_2) [C_{12}(x_2, x_4) x_4 + C_{11}(x_2, x_4) x_3 + G_1(x_1, x_2) + F_1(x_3)] \\
 &\quad - \frac{D_{11}(x_2)}{D_{22}} b_3(x_2) [C_{21}(x_2, x_3) x_3 + G_2(x_1, x_2) + F_2(x_4)],
 \end{aligned}$$

$$b_3(x_2) = \frac{D_{22}}{|D(x_2)|} = \frac{d_3}{d_1 d_3 - d_3^2 - d_2^2 \cos^2 x_2}$$

y

$$b_4(x_2) = -\frac{D_{12}(x_2)}{|D(x_2)|} = -\frac{d_3 + d_2 \cos x_2}{d_1 d_3 - d_3^2 - d_2^2 \cos^2 x_2}$$

Nótese que el control aparece en los dos últimos renglones del sistema (7.3)-(7.6), el cual puede representarse como

$$\dot{x} = f(x) + b(x_2)u \quad (7.7)$$

con $f(x) = [x_3 \ x_4 \ f_3(x) \ f_4(x)]^T$ y $b(x_2) = [0 \ 0 \ b_3(x_2) \ b_4(x_2)]^T$

Se propone la siguiente transformación para que (7.7) quede en la forma regular

$$y_1 = x_2 \quad (7.8)$$

$$y_2 = x_1 \quad (7.9)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{b_3(x_2)}{b_4(x_2)}x_4 \quad (7.10)$$

$$y_4 = x_4. \quad (7.11)$$

La inversa de (7.8)-(7.11) es

$$x_1 = y_2 \quad (7.12)$$

$$x_2 = y_1 \quad (7.13)$$

$$x_3 = y_3 + \frac{b_3(y_1)}{b_4(y_1)}y_4 \quad (7.14)$$

$$x_4 = y_4. \quad (7.15)$$

Derivando respecto al tiempo a (7.8)-(7.11), y usando (7.3)-(7.6) y (7.12)-(7.15), obtenemos la forma regular de (7.7)

$$\dot{y}_1 = y_4 = \tilde{f}_1(y_4) \quad (7.16)$$

$$\dot{y}_2 = y_3 + \frac{b_3(y_1)}{b_4(y_1)}y_4 = \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4) \quad (7.17)$$

$$\dot{y}_3 = f_3(y) - \frac{b_3(y_1)}{b_4(y_1)}f_4(y) + \frac{d_3 d_2 y_4^2 \sin y_1}{(d_3 + d_2 \cos y_1)^2} = \tilde{f}_3(y) \quad (7.18)$$

$$\dot{y}_4 = f_4(y) + b_4(y_1)u \quad (7.19)$$

donde $\frac{b_3(x_2)}{b_4(x_2)} = -\frac{D_{22}}{D_{12}(x_2)} = -\frac{d_3}{d_3 + d_2 \cos x_2}$.

El sistema (7.16)-(7.19) se puede agrupar en dos bloques como se muestra a continuación

$$\dot{y}^1 = f^1(y^1, y^2) \quad (7.20)$$

$$\dot{y}^2 = f^2(y^1, y^2) + b_4(y_1)u \quad (7.21)$$

donde $y^1 = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$, $y^2 = y_4$, $f^1(y^1, y^2) = [\tilde{f}_1(y_4) \ \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4) \ \tilde{f}_3(y)]^T$, y $f^2(y^1, y^2) = f_4(y)$.

7.2. Linealización del modelo

Como se observa en la Figura 7.2, el sistema tiene dos puntos de equilibrio, uno en la posición de reposo correspondiente al punto $P_0(y)$, y el otro en la posición vertical ($P_1(y)$). Para probar el algoritmo, colocaremos los eslabones del pendubot en una posición intermedia $P_i(y)$ entre ambos puntos, y aplicaremos una ley de control tal que alcancen la posición de equilibrio vertical $P_1(y)$. Obsérvese que en cualquier punto a alcanzar, la suma de los ángulos de ambos eslabones debe ser igual a los 90 grados $\left(\alpha_{1i} + \alpha_{2i} = \frac{\pi}{2}, i = 0, 1, 2, \dots\right)$.

De acuerdo al algoritmo propuesto, únicamente se debe linealizar el bloque que no contiene al control (7.20), por lo que el sistema (7.20)-(7.21) para cada i –ésimo punto linealizado queda representado como

$$\dot{y}^1 = A_i y^1 + B_i y^2 \quad (7.22)$$

$$\dot{y}^2 = f^2(y^1, y^2) + b_4(y_1)u \quad (7.23)$$

donde

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1(y_4)}{\partial y_1} & \frac{\partial \tilde{f}_1(y_4)}{\partial y_2} & \frac{\partial \tilde{f}_1(y_4)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4)}{\partial y_1} & \frac{\partial \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4)}{\partial y_2} & \frac{\partial \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \tilde{f}_3(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial \tilde{f}_3(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial \tilde{f}_3(y)}{\partial y_3} \end{bmatrix}_{P_i(y)}, \text{ y } B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1(y_4)}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \tilde{f}_2(y_1, y_3, y_4)}{\partial y_4} \\ \frac{\partial \tilde{f}_3(y)}{\partial y_4} \end{bmatrix}_{P_i(y)}$$

Se debe resaltar que la ecuación donde aparece la ley de control u , es la misma en ambos sistemas (7.20)-(7.21), y (7.22)-(7.23).

En el proceso de linealización se utilizaron los siguientes parámetros del pendubot: $m_1 = 0,8293$ Kg, $m_2 = 0,3402$ Kg, $l_1 = 0,2032$ m, $l_2 = 0,38417$ m, $lc_1 = 0,1551$ m, $lc_2 = 0,1635$ m, $I_1 = 0,00595$ Kg-m², $I_2 = 0,00043$ Kg-m². $\mu_1 = 0,00545$ Kg/s, $\mu_2 = 0,00047$ Kg/s, $g = 9,81$ m/s². Para el punto de equilibrio ubicado en la parte superior de la región de trabajo, que corresponde a los dos eslabones totalmente verticales ($\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 0^0$), cuyas coordenadas en radianes son $P_1(y) = [0 \ \frac{\pi}{2} \ 0 \ 0]$, se tienen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 26,1997778 & 26,1997777 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4573093941 \\ -0,0225670293 \end{bmatrix}$$

Para un punto a la derecha del punto de equilibrio superior ($\alpha_1 = 56,25^0$, $\alpha_2 = 33,75^0$), donde sus coordenadas en radianes son $P_2(y) = [\frac{3\pi}{16} \ \frac{5\pi}{16} \ 0 \ 0]$, resulta la siguiente linealización

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 28,83722644 & 28,83722644 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5033452822 \\ -0,0248387806 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para un punto a la izquierda del punto de equilibrio superior ($\alpha_1 = 123,75^0$, $\alpha_2 = -33,75^0$), con $P_3(y) = \begin{bmatrix} -\frac{3\pi}{16} & \frac{11\pi}{16} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se obtienen

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 28,83722644 & 28,83722645 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5033452822 \\ -0,0248387806 \end{bmatrix}$$

7.3. Diseño del Controlador

Para diseñar la superficie de los modos deslizantes usando el método propuesto, primero consideramos el subsistema (7.22) y diseñamos el cuasi control y^2 empleando las siguientes reglas difusas:

$$\begin{aligned} \text{If } y = p_1 \text{ then } \Sigma_1 : & \begin{cases} \dot{y}^1 = A_1 y^1 + B_1 y^2 \\ \dot{y}^2 = f_4(y^1, y^2) + b_4(y_1) u \\ y^2 = K_1 e + y_{ss}^2 \end{cases} \\ \text{If } y = p_2 \text{ then } \Sigma_2 : & \begin{cases} \dot{y}^1 = A_2 y^1 + B_2 y^2 \\ \dot{y}^2 = f_4(y^1, y^2) + b_4(y_1) u \\ y^2 = K_2 e + y_{ss}^2 \end{cases} \\ \text{If } y = p_3 \text{ then } \Sigma_3 : & \begin{cases} \dot{y}^1 = A_3 y^1 + B_3 y^2 \\ \dot{y}^2 = f_4(y^1, y^2) + b_4(y_1) u \\ y^2 = K_3 e + y_{ss}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

en donde

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = (y^1 - y_{ref}^1) = \begin{pmatrix} y_1 - y_{1ref} \\ y_2 - y_{2ss} \\ y_3 - y_{3ss} \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

K_i es la matriz de ganancias del cuasi control respectivas para cada subsistema Σ_i , con $i = 1, 2, 3$, y y_{ss}^2 es el estado estable del cuasi control. Entonces

Realizaremos seguimiento de trayectorias al pendubot, entonces se define al exosistema

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \gamma \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= -\gamma \omega_1, \quad \gamma > 0 \end{aligned}$$

que generará la referencia para la salida $e_1 = x_2 - x_{2ref} = y_1 - y_{1ref} = y_1 - \omega_2$. Basados en esta referencia y usando la propiedad de estado estable del sistema pendubot

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2,$$

calculamos primero el estado estable para las variables originales como

$$\begin{aligned} x_{1ss} &= \pi/2 - \omega_2 \\ x_{3ss} &= \gamma \omega_1 \\ x_{4ss} &= -\gamma \omega_1. \end{aligned}$$

y despues para las variables transformadas

$$\begin{aligned} y_{2ss} &= \pi/2 - \omega_2 \\ y_{3ss} &= \gamma\omega_1 - \gamma D_{22} D_{12}^{-1}(\omega_2)\omega_1 \\ y_{4ss} &= -\gamma\omega_1. \end{aligned}$$

$$e = \begin{pmatrix} y_1 - \omega_2 \\ y_2 - (\pi/2 - \omega_2) \\ y_3 - (\gamma\omega_1 - \gamma D_{22} D_{12}^{-1}(\omega_2)\omega_1) \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

Entonces, el problema de seguimiento de trayectoria para el Pendubot, se reduce al problema de estabilización del sistema con nuevas variables (7.25). Usando el esquema propuesto en el Capítulo 6, la variable de deslizamiento s se elige de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s &= y^2 - \sum_{i=1}^3 \mu_i (y^1) K_i e + y_{ss}^2 \\ &= y^2 - [\mu_1 (y^1) K_1 + \mu_2 (y^1) K_2 + \mu_3 (y^1) K_3] e + y_{ss}^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

en donde $y_{ss}^2 = y_{4ss} = -\gamma\omega_1$.

Ahora, la proyección del movimiento del sistema en el subespacio s , se puede obtener derivando (7.26) alrededor de las trayectorias del sistema (7.22) (7.23)

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{y}^2 - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i (y^1) K_i e + y_{ss}^2 \right) \\ &= f^2 (y^1, y^2) + b_4 (y_1) u - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i (y^1) K_i e + y_{ss}^2 \right) \\ &= f_s (y^1, y^2) + b_4 (y_1) u \end{aligned}$$

donde $f_s = f^2 (y^1, y^2) - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i (y^1) K_i e + y_{ss}^2 \right)$. Para introducir los modos deslizantes elegimos el siguiente control discontinuo

$$u = -b_4 (y_1) M \text{sign} (s) \quad (7.27)$$

con $M > 0$. Entonces el sistema en lazo cerrado queda como

$$\begin{aligned} \dot{s} &= f_s (y^1, y^2) + b_4 (y_1) (-b_4 (y_1) M \text{sign} (s)) \\ &= f_s (y^1, y^2) - (b_4 (y_1))^2 M \text{sign} (s) \end{aligned}$$

Para determinar la estabilidad, usaremos la siguiente función cuadrática de Lyapunov $v = \frac{1}{2}s^2$,

debiéndose cumplir que $\dot{v} \leq 0$. Entonces, la derivada de la función de Lyapunov es

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= s\dot{s} \\
 &= s(f_s(y^1, y^2) - (b_4(y_1))^2 M \text{sign}(s)) \\
 &= sf_s(y^1, y^2) - (b_4(y_1))^2 M |s| \\
 &\leq |sf_s(y^1, y^2)| - (b_4(y_1))^2 M |s| \\
 &\leq |s| |f_s(y^1, y^2)| - |s| (b_4(y_1))^2 M \\
 &\leq |s| [(b_4(y_1))^2 M - |f_s(y^1, y^2)|]
 \end{aligned}$$

de donde se determina la condición de estabilidad

$$M > \frac{|f_s(y^1, y^2)|}{(b_4(y_1))^2}$$

Bajo esta condición tenemos el movimiento por modos deslizantes sobre la superficie

$$s = y^2 - \sum_{i=1}^3 \mu_i(y^1) K_i e + y_{ss}^2 = 0.$$

Se puede demostrar que este movimiento presentado sobre el error de control (7.25) se describe por el sistema de orden reducido

$$\dot{e} = \sum \mu_i(y^1) (A_i + B_i K_i) e. \quad (7.28)$$

Se observa que, para que el sistema (7.28) sea estable, debe elegirse adecuadamente cada matriz de ganancia K_i . mediante la técnica LMI, tal que

$$N_{ii}^T P + P N_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{N_{ij} + N_{ji}}{2} \right) < 0, \quad i < j \leq 3.$$

con

$$N_{ij} = A_i + B_i K_j.$$

De donde se obtuvieron los siguientes vectores de ganancias

$$K_1 = \begin{bmatrix} -50,8684 & -70,6885 & -20,1238 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -49,5302 & -69,5618 & -20,7413 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -49,5302 & -69,5618 & -20,7413 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

que estabilizan la dinamica de modos deslizantes (7.28).

7.4. Resultados de la Simulación

A continuación se muestran resultados de simulación del sistema (7.8)-(7.11) con el controlador (7.27), (7.26), y ganancias (7.29)-(7.31). En el control, fue usada una ganancia $M = 15$. Se establecieron las siguientes condiciones iniciales $x_1(0) = 1,48 \text{ rad } (85^\circ)$, $x_2(0) = 0,087 \text{ rad } (5^\circ)$, $x_3(0) = 0$, y $x_4(0) = 0$. Los resultados presentados, muestran la robustez del controlador propuesto (MDTS), respecto al controlador clásico.(C). Observando la Figura 7.3, en (a) se muestra una comparación entre la señal de referencia $x_{2r} = \omega_2$, y las trayectorias seguidas por la salida del pendubot, tanto cuando se le aplica el control propuesto, como cuando se aplica el regulador clásico. En (b) y (c), podemos ver la trayectoria del ángulo del primer eslabón x_1 , y el comportamiento de la variedad deslizante. Finalmente, en (d) se presenta el control aplicado por el actuador; dicho control está en función de $b_4(x_2)$, por esa razón es variable.

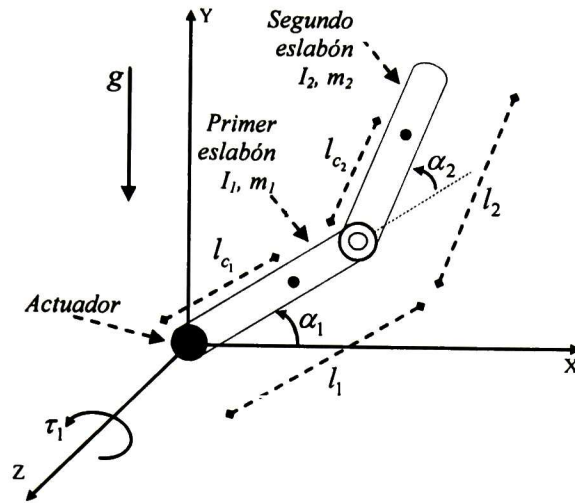


Figura 7.1: Diagrama Esquemático del Pendubot

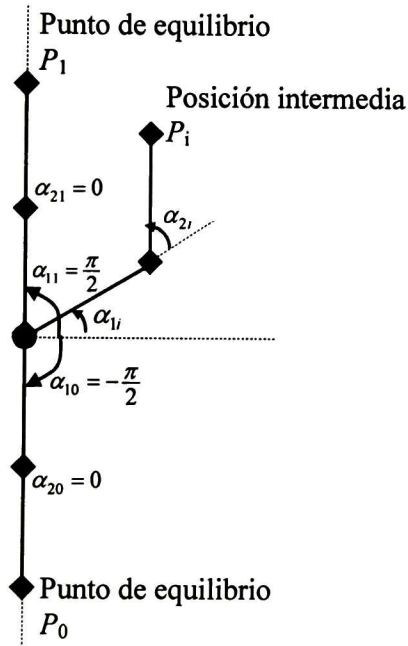


Figura 7.2: Espacio de Trabajo del Pendubot

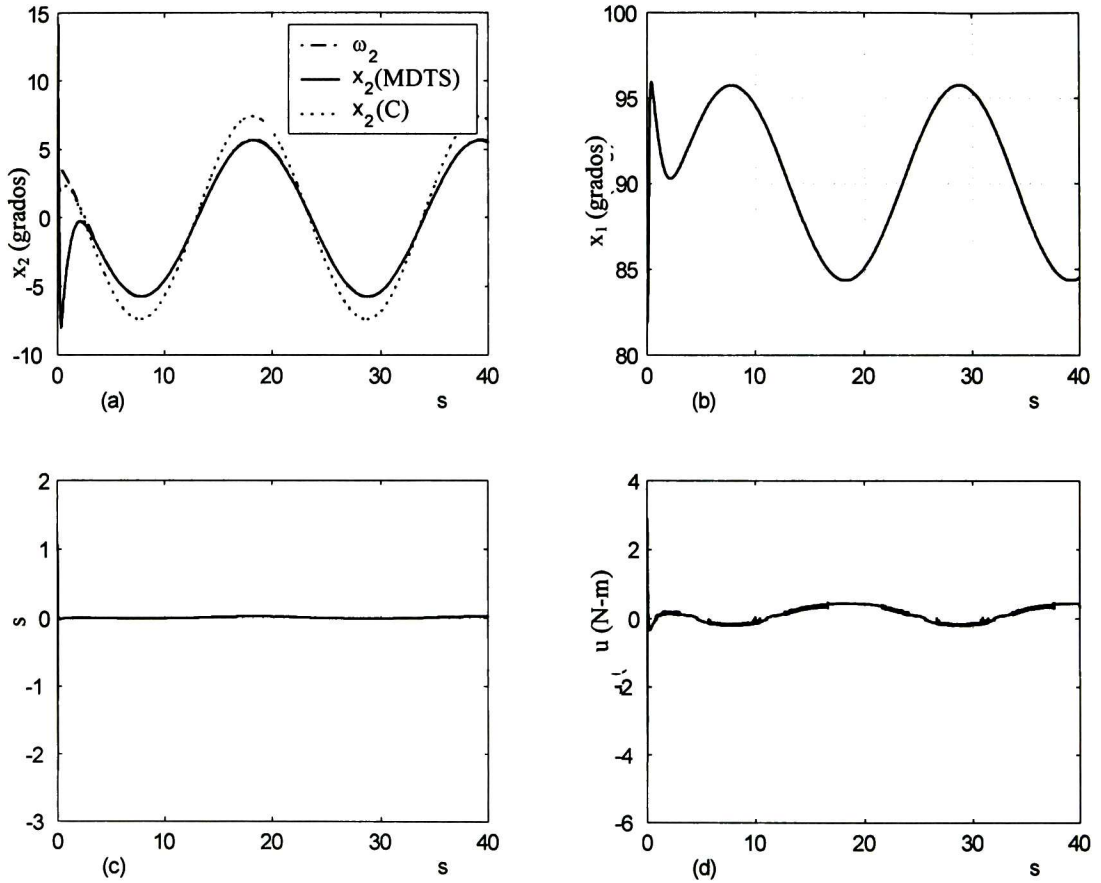


Figura 7.3: Comparación del control con Modos Deslizantes y Lógica Difusa tipo Takagi-Sugeno (MDTS) contra regulación clásica (C)

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo Futuro.

En este trabajo se proponen dos nuevos esquemas de control robusto para sistemas no lineales con perturbaciones, con múltiples entradas y múltiples salidas.

- El primer esquema se basa en las técnicas de Control por Bloques, Control MD, y Control Difuso tipo Mamdani. Este esquema está desarrollado para controlar una clase de sistemas que pueden ser representados en la llamada Forma Controlable a Bloques No Lineal, con perturbaciones. Las perturbaciones pueden satisfacer la condición de apareamiento, o no satisfacerla. Con la combinación de las técnicas del Control por Bloques y del Control MD se transforma al sistema original en una forma deseable con perturbaciones, y se diseñan una variedad deslizante con parámetros jerárquicos, y un control discontinuo. Finalmente, con el Control Difuso tipo Mamdani, las ganancias del control del modo deslizante y los parámetros jerárquicos son modificadas con el propósito de reducir el castañeteo.
- El segundo esquema está desarrollado basado en las técnicas de Control Difuso TS y Control MD. El propósito es controlar una clase de sistemas no lineales que no se pueden presentar en la Forma Controlable a Bloques, y por lo tanto no se puede aplicar la técnica de Control por Bloques. Sin embargo, esta clase de sistemas se pueden presentar en la llamada Forma Regular con perturbaciones que satisfacen la condición de apareamiento. En el esquema propuesto, primero el sistema original se transforma en la Forma Regular. Posteriormente, aplicando el método de Control Difuso TS al subsistema de orden reducido que no contiene al control, se diseña una variedad deslizante, y finalmente, se diseña un control discontinuo para que la variedad sea atractiva. Este esquema proporciona robustez a los sistemas difusos basados en el modelo, por otro lado, permite diseñar una variedad de deslizamiento no lineal con movimientos globalmente estables.

También, basado en el método de Lyapunov, se analizaron las condiciones de estabilidad en los dos esquemas propuestos.

El primer esquema fue aplicado mediante simulaciones al seguimiento de trayectorias tanto en un motor de corriente directa con imanes permanentes, como en un motor a pasos. Como

se muestra en los resultados el esquema propuesto es bastante alentador. Para las simulaciones, consideramos que las perturbaciones no podían ser medidas; sin embargo, el control propuesto por bloques con modos deslizantes jerárquico combinado con control con lógica difusa, mejoró el desempeño del sistema, reduciendo el castañeteo y garantizando la estabilidad.

Con base en el segundo esquema, fue desarrollado un controlador robusto por modos deslizantes y TS para un sistema subactuado (pendubot). Este controlador garantiza estabilidad semiglobal. Las simulaciones muestran la efectividad del método propuesto.

Como trabajo futuro, se pueden mencionar los siguientes:

- Extender el método propuesto de TS y MD a los sistemas con perturbaciones que no satisfacen la condición de apareamiento; e
- Implementar en tiempo real, los algoritmos de control desarrollados para los motores eléctricos y el pendubot.

Apéndice A

Artículos Publicados

A.1. Conferencias

- Bernardo Rincón Márquez, Alexander G. Loukianov and Edgar N. Sanchez, “Hierarchical Intelligent Sliding Mode Control: Application to Stepper Motors”, Proceedings of the American Control Conference, ACC 2004, pp. 1265-1270, June 30 – July 2, 2004, Boston, USA.
- Bernardo Rincón Márquez, Alexander G. Loukianov and Edgar N. Sanchez, “Robust Intelligent VSS Control” Proceedings of the 10th IFAC Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications, pp. 700-705, Osaka, July 26-28, 2004.
- Bernardo Rincón Márquez, Alexander G. Loukianov and Edgar N. Sanchez, “Chattering Reduction via Fuzzy Logic: Application to Stepper Motor” Proceedings of the European Control Conference ECC 2003, 1-4 September 2003, Cambridge, UK.
- Edgar N. Sanchez, Alexander G. Loukianov, Bernardo Rincón Márquez, “Robust Control Combining Sliding Mode and Fuzzy Logic” Memorias del Congreso Latinoamericano de Control Automático, Guadalajara, México, Diciembre, 2002.

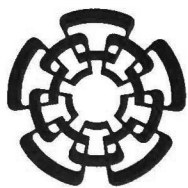
A.2. Revistas

- Bernardo Rincón Márquez, Alexander G. Loukianov and Edgar N. Sanchez, “Reducing Chattering by Fuzzy Logic: Application to Stepper Motors”, Enviado en 2005 al European Control Journal. Reenviado para segunda revisión en 2007.

Bibliografía

- [1] Drajenovic B. "The Invariance Conditions in Variable Structure Systems" *Automatica*, Vol. 5; p.p 287-295. 1969.
- [2] Driankov, D., Hellendoorn, H. and Reinfrank, M. "An Introduction to Fuzzy Control" Springer Verlag, USA. 1996.
- [3] Fitzgerald, A.E., Kingsley, C. and Kusko, A. "Electric Machinery". Third Edition, pp. 435-436. 1971.
- [4] Goodall, D.P. "Lyapunov Stabilization of a Class of Uncertain Affine Control Systems". Lecture notes in Control and Information Sciences 193.- Variable Structure and Lyapunov Control (A. Zinober, Ed.). Springer Verlag, New, York. 1994.
- [5] Ha, Q.P., Nguyen, Q.H., Rye, D.C. and Durrant-Whyte, H.F. "Fuzzy Sliding-Mode Controllers with Applications" *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, pp. 38-46, No. 1. February 2001.
- [6] Hong, S.K. and Langari, R. "Synthesis of an LMI-Based Fuzzy Control System with guaranteed optimal H-Infinity Performance" *Proc. 1998 IEEE World Congr. Comput. Intell.*, Anchorage, AK, June 1998.
- [7] Jadbabaie, A., Jamshidi, M. and Titli, A. "Guaranteed-Cost Design of Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Controllers via Linear Matrix Inequalities" *Proc. 1998 IEEE World Congr. Comput. Intell.*, Anchorage, AK, June 1998.
- [8] Kaynak, O., Erbatur, K. and Ertugrul, M. "The Fusion of Computationally Intelligent Methodologies and Sliding-Mode Control-A survey" *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, pp. 4-17, No. 1. February 2001.
- [9] Khalil, H.K. "Nonlinear Systems". 2nd. Ed., Prentice-Hall, New-Jersey. 1996.
- [10] Luk'yanov A.G., "Nonlinear Block Control with Sliding Mode". *Avtomatika i Telemachanika*, 5; 12-23. 1998. (in Russian).
- [11] Luk'yanov A.G. and Utkin V.I. "Methods for Reducing Dynamic System to Regular Form" *Automation and Remote Control*, Vol. 42, No. 4, pp. 413-420. 1981.

- [12] Palm, R., Driankov, D. and Hellendoorn, H. "Model Based Fuzzy Control Fuzzy Gain Schedulers and Sliding Mode Fuzzy Controllers" Springer Verlag Berlin Heidelberg. 1997
- [13] Passino, K.M. and Yurkovich, S. "Fuzzy Control" Addison Wesley Longman. 1998.
- [14] Scibile, L. and Kouvaritakis, B. "A Discrete Adaptive Near-Time Optimum Control for the Plasma Vertical Position in a Tokamak". IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 9, pp. 148-162, No.1. January 2001.
- [15] Spong, M.W and Vidyasagar, M. "Robot Dynamics and Control" John Wiley and Sons, Inc. New York, 1989.
- [16] Tanaka, K and Sugeno, M. "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control System" Fuzzy Sets Syst., vol. 45, pp. 133-156. 1992.
- [17] Tanaka, K and Sugeno, H.O. "Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A linear Matrix Inequality Approach". John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [18] Tanaka, K., Taniguchi, T. and Wang, H.O. "Fuzzy Control Based on Quadratic Performance Function: A Linear Matrix Inequality Approach" Proc. 1998 IEEE Conf. Decision Contr., Tampa, FL. Dec. 1998.
- [19] Utkin, V.I. "Sliding Modes in Control and Optimization" Springer_Verlag Berlin Heidelberg. 1992
- [20] Utkin, V.I. Guldner, J. and Shi, J. "Sliding Mode Control in Electromechanical Systems" Taylor and Francis. London, Philadelphia, PA. 1999
- [21] Wang, H.O., Tanaka, K. and Griffin, M. "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model". Pros. FUZZ/IFES, pp. 531-538, 1995.
- [22] Wong, L.K., Leung, F.H.F. and Tam, P.K.S. "A Fuzzy Sliding Controller for Nonlinear Systems" IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 48, pp. 32-37, No. 1. February 2001.
- [23] Zheng, F., Wang, Q.G. and Lee, T.H. "Tracking Control of MIMO Fuzzy Nonlinear Systems Using Variable Structure Control Approach" IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 10, no. 6, pp. 686-697. 2002.
- [24] Zribi, M. and Chiasson, J. N. "Position Control of a PM Stepper Motor by Exact Linearization". IEEE Trans. On Automatic Control, 36, 620-625. 1991.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Control Robusto con Modos Deslizantes y Lógica Difusa

del (la) C.

Bernardo RINCÓN MÁRQUEZ

el día 14 de Diciembre de 2007.

Dr. Edgar Nelson Sánchez Camperos
Investigador CINVESTAV 3D
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Alexander Georgievich Loukianov
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Ramón Antonio Félix Cuadras
Coordinador de Posgrado de la FIME
Universidad de Colima



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000006328