CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS AVANZADOS
DEPARTAMENTO DE
INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

De la representación oral de los números a la escrita. Un estudio didáctico con dos adultos de baja o nula escolaridad.[1]

Santiago Alonso Palmas Pérez
Dirección de tesis: Dr. David Block Sevilla.

[1] Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una beca de CONACYT.

Agradecimientos:

Sin duda, quiero agradecer al Dr. David Block cuya paciencia e inteligencia admiraré. Le agradezco a él por tanto tiempo preparando a detalle el presente trabajo.

Gracias por estar aquí David.

Quisiera agradecer a los lectores de esta tesis: Dra. Judith Kalman y la Dra. Alicia Ávila. A la Dra. Judith Kalman por ser una inspiración incesante desde mis primeros pasos en la maestría. La fuente de la cuál mi tesis es veta procede de los trabajos realizados por Dra. Alicia Ávila, cuya lectura me ayudó a mejorar mi tesis.

A todos mis compañeros que me ayudaron en la realización de esta tesis. A todos aquellos que activa e intelectualmente me apoyaron para consumar la presente obra.

Gracias a toda mi familia cuyo apoyo sin igual me hacen una persona completa.

Gracias a Tania cuyo apoyo incondicional y cariño abre caminos y enriquece el espíritu.

Índice.

Abstract

The aim of this thesis is to discuss the process of teaching mathematics to adults with little or no formal education. The project has two main objectives: 1) To contribute to the analysis of the educational characteristics of the materials available for teaching the decimal number system, specifically to examine how existing proposals take into account learners' previous knowledge acquired in everyday life and work, outside the context of formal schooling. This knowledge is often not expressed in written form, but orally. 2) To generate knowledge from the development and implementation of an alternative teaching proposal for the conventional written representation of numbers, based on the recovery of previous mathematical knowledge. The project was based on theoretical proposals established by *didactical engineering,* working with semiliterate adults in two communities: one rural and one urban.

Resumen de la tesis

Este trabajo aborda la problemática de la enseñanza de matemáticas en la educación de adultos de baja o nula escolaridad.[2] Tiene dos objetivos: 1) contribuir al análisis de las características didácticas de los materiales disponibles para la enseñanza del número y el sistema decimal dirigidos a adultos con baja o nula escolaridad en base a la forma en que toman en cuenta la existencia de conocimientos previos, no expresados por escrito, que los adultos han adquirido fuera de la escuela, en su vida cotidiana y laboral y 2) generar conocimientos sobre alternativas didácticas para la enseñanza de la representación escrita convencional de los números a adultos, con base en la recuperación de sus conocimientos matemáticos previos. Para ello, se realizó una experiencia de *ingeniería didáctica*[3] en una comunidad rural y en una comunidad urbana.

[2] Entiendo por adultos de baja o nula escolaridad aquellas personas mayores de 15 años que no han asistido a la escuela o que asistieron solamente algunos años, pero, debido a su experiencia de vida, tienen importantes conocimientos de lo numeración oral.

[3] Una experiencia de ingeniería didáctica se refiere a la construcción de situaciones didácticas para abordar un problema de enseñanza de algún concepto matemático, siguiendo ciertos criterios metodológicos (Artigue, 1995).

Capítulo 1. Introducción

Los números, y en específico la representación escrita de ellos, son la base de la matemática escrita. Una persona que comprenda los símbolos numéricos logrará involucrarse, comprender y participar en el campo de la cultura escrita. La presente tesis se sitúa en la problemática del analfabetismo y busca contribuir al desarrollo de alternativas didácticas que den vida a los números escritos, de manera que los hagan accesibles y funcionales para los adultos con baja o nula escolaridad[4]. Para ello, se estudian secuencias didácticas para la enseñanza del número y el sistema decimal de numeración escrita. Es bien conocida la destreza de los adultos analfabetas con los problemas aritméticos elementales y el cálculo mental (Ávila, 2005; Carraher *et al.*, 1986; Acioly y Días Schielman, 1986; Ferreiro *et al.*, 1983), sin embargo, considero que aún hay mucho por indagar en cuanto a la forma de aprovechar esos conocimientos en los procesos de enseñanza de la escritura numérica. Se trata de avanzar en la construcción de un puente entre la representación de los números de manera oral y su representación escrita.

Para el diseño de la situación didáctica parto de lo que se sabe acerca de los conocimientos previos que tiene un adulto con baja o nula escolaridad. Este conocimiento se adquirió a través de dos fuentes, por una parte, se hizo una revisión de las investigaciones sobre el tema y, por otra, se hizo una exploración *in situ* con los adultos con los cuales se trabajó. Al parecer las investigaciones sobre el tema concuerdan que los adultos tienen sus propios estilos de resolución de problemas aritméticos: sumar y restar de izquierda a derecha, multiplicar mediante sumas sucesivas y dividir mediante restas sucesivas (Ávila, 2005; Acioly y Días Schielman, 1986; Block y Nemirovsky, 1988; Carraher *et al.*, 1986). Así mismo se ha reconocido

[4] En México, el censo de población realizado en febrero del 2000 registraba 5.9 millones eran analfabetas, la mitad de los cuales son mayores de 49 años (INEA, 2006). Según datos de la UNESCO (Disponible en: http://stats.uis.unesco.org/unesco/TableViewer/tableView.aspx?ReportId=210, visitado el 2 de Agosto, 2010), el total de personas consideradas analfabetas en México para 2008 era de 7.1% de la población. Según datos del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en 2009 (Disponible en: http://www.inee.edu.mx/index.php/publicaciones, visitado el 2 de Agosto, 2010), del total de la población mexicana, 7.8% de las personas no sabían leer ni escribir (personas que declaran no saber leer o escribir).

En México, más allá del analfabetismo, existe el problema del rezago educativo. Según datos del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA) en 2008, 33 millones de personas se encontraban en rezago educativo, es decir, 44% de quienes tienen 15 años o más; la principal fuente del problema se asocia con la velocidad con la que este grupo poblacional crece, sumado a la ineficiencia y desigualdad con las que se atiende al rezago educativo.

que los adultos identifican algunos símbolos numéricos (Ferreiro, *et al.*, 1983; Ávila 1989).

La creación de situaciones didácticas se basó en parte de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007) para crear una articulación entre los conocimientos informales y los formales. De esta teoría se tomaron insumos conceptuales para crear dos situaciones didácticas para la enseñanza de la representación escrita de los números. Esta teoría permitió asimismo identificar características de las situaciones didácticas que son "determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, para la evolución de sus conocimientos". (Gálvez, 1994)

1. Alfabetización matemática: posición teórica

Parto de que el adulto no escolarizado ha desarrollado conocimientos matemáticos acerca del número y del sistema decimal, a través de su experiencia de vida y, especialmente, a partir del manejo de dinero. Estos conocimientos, de expresarse, lo hacen de manera oral y se encuentran por lo general contextualizados (Ávila, 1990; Ávila, Waldegg, 1997; Ferreiro, Fuenlabrada, *et al*. 1983; Carraher, Carraher y Schliemann, 1997; Delprato, 2005).

No obstante lo anterior, considero, a partir de la experiencia y de los mismos estudios citados, que hay conocimientos que no se adquieren sin una enseñanza intencional, por ejemplo, la representación formal, escrita y simbólica de los números, por mencionar sólo alguno. Pienso que es posible aprovechar los conocimientos que los adultos tienen sobre la numeración oral para que accedan de manera más económica y contextualizada al conocimiento del número escrito. Para afirmar lo anterior me baso en las tendencias contemporáneas para la enseñanza de las matemáticas que enfatizan la importancia de la contextualización y la problematización (Brousseau, 2007), así como en el papel de los conocimientos personales, implícitos e informales, para la adquisición de conocimientos más formales.

Una revisión de las alternativas didácticas ofrecidas por distintas instituciones (INEA, SEP y algunas organizaciones no gubernamentales), incluso las que hemos encontrado en trabajos de investigación (Delprato y Fuenlabrada, 2003; Mariño, 1997), me han llevado a formular la hipótesis de que todavía es posible, y necesario, avanzar en el aprovechamiento de los conocimientos informales de los adultos para su adquisición de la representación escrita de los números, por lo que contribuir a este campo es uno de los propósitos de este trabajo.

Recurro a la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) pues ofrece las herramientas teóricas y prácticas idóneas para crear un diseño didáctico que favorezca la adquisición de nuevos conocimientos apelando a los conocimientos previos de los individuos. Asimismo, esta teoría permite estudiar, mediante la metodología de la ingeniería didáctica, procesos de enseñanza de conceptos matemáticos produciéndolos a partir de ciertas premisas.

Otra veta de análisis, además de la didáctica, es la de los estudios que exploran las *prácticas* matemáticas de las personas y las comunidades, entre estos se encuentran los llamados estudios de “etnomatemáticas”, así como, más ampliamente, los acercamientos socioculturales. (Baker, Street y Tomlin, 2003)

Si bien exploré las posibilidades que ofrece esta línea para enriquecer el análisis, cabe precisar que una diferencia importante entre el presente trabajo y los acercamientos socioculturales radica en que en el presente análisis no se pretende desentrañar de manera exhaustiva los conocimientos personales y locales, implicados en las prácticas sociales, sino a partir de algunos de estos conocimientos —sobre todo los relacionados con la numeración oral convencional en el contexto del uso del dinero— explorar alternativas didácticas para acceder a la numeración convencional escrita. Para lo anterior, se tiene en mente, ciertamente, un adulto con baja o nula escolaridad interesado en adquirir un conocimiento sobre esta numeración.

2. Estructura de la tesis

Este trabajo se organiza en cinco capítulos. En el presente capítulo se plantea la problemática. En el segundo capítulo se hace una revisión de la literatura ya existente para responder a las preguntas: ¿qué sabemos de la representación escrita de los números? y ¿qué sabemos acerca de lo que saben los adultos analfabetas acerca de los números? Además, se hace una revisión de los materiales existentes para la enseñanza del número y el sistema decimal a los adultos.

El tercer capítulo presenta el diseño de las secuencias didácticas para la enseñanza de la representación escrita de los números, sus características, las hipótesis que subyacen y los posicionamientos que se hacen con relación a otras propuestas. En este mismo capítulo se presentan las situaciones utilizadas en el sondeo de conocimientos.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los resultados de la implementación de la secuencia con dos mujeres adultas de baja escolaridad, en dos contextos diferentes.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones de esta tesis, procurando destacar los avances y posibles generalizaciones de la implementación didáctica expuesta en el capítulo previo, así como las dificultades y algunas de las posibles alternativas que podrían seguirse explorando.

Capítulo 2. Conocimientos y saberes acerca de las representaciones numéricas.

Este capítulo constituye el marco de referencia de la presente tesis. En primer lugar revisaremos, brevemente, algunas características del conocimiento matemático que subyace a la representación de los números naturales, cuyo aprendizaje por parte de los adultos será nuestro objeto de estudio. Distinguiremos la representación de aquello que ésta representa, veremos varios tipos de representación y nos detendremos en las características del sistema decimal de numeración, así como en las de la numeración oral.

En esta parte pondré en perspectiva la discusión que se ha generado en la esfera de la enseñanza de los números a los niños, en particular en lo tocante a la conveniencia o no de enseñar los principios de base y posición del sistema. Retomaré elementos de esta discusión por estimar que aportan elementos que considero pertinentes para la educación de adultos.

En la segunda parte de este capítulo, entraré en la problemática de la enseñanza de la numeración a los adultos. Recuperaré, a partir de la revisión de algunos estudios, que los adultos no alfabetizados tienen importantes conocimientos acerca de la numeración oral. A partir de lo anterior, veré la pertinencia de considerar las numeraciones oral y escrita, como dos registros semióticos[5] (Duval, 1993) y abordaré tanto la problemática de la enseñanza como la del tránsito de uno a otro. Bajo esta premisa, revisé enseguida algunas propuestas para la enseñanza de la numeración a adultos no alfabetizados, con una pregunta en mente ¿de qué manera organizan este tránsito?

Finalmente, cerraré el capítulo precisando, a la luz de lo revisado, los aspectos de la problemática de la enseñanza de los números a los adultos con las características que hemos apuntado anteriormente.

Cabe señalar que el análisis didáctico del objeto “Sistema de numeración”, el de las alternativas de enseñanza existentes y el de los conocimientos previos de los sujetos a quienes está dirigida la enseñanza, forman parte de la metodología de la ingeniería didáctica.

[5] Se refiere a tipos de representación, por ejemplo, oral, escrita u otras. Esto lo analizaremos más adelante.

1. Los números naturales y sus representaciones

En este apartado vamos a abordar tres aspectos: la problemática de diversidad de representaciones para un mismo concepto (el número natural), la existencia de dos grandes alternativas de generar el sistema decimal de numeración (y sus consecuencias para la enseñanza) y finalmente la las características de la representación verbal-oral.

1.1 Un concepto y una diversidad de representaciones

Una característica distintiva del acercamiento desde la didáctica de las matemáticas a los objetos de enseñanza[6] es la importancia concedida al estudio epistemológico del conocimiento matemático en juego, en este caso, del sistema decimal de representación numérica. En ese tenor, abordaré la diferencia entre el concepto de *número* y sus representaciones, esto es, entre el significado y significante del número.

Los números naturales son aquellos que usamos para contar: uno, dos, tres… Los números son ideas que clasifican colecciones mediante la relación de la cardinalidad (o cantidad de elementos de un conjunto) formando colecciones equipotentes (colecciones entre cuyos elementos se puede establecer una relación uno a uno).[7] El número y su construcción ya no son un producto de investigación

---

[6] Esta característica se asume por lo tanto en la metodología de la ingeniería didáctica, elegida para esta tesis (Artigue, 1995 y Gálvez, 1994) de la que se hablará más adelante.

[7] Existen diferentes definiciones matemáticas del número natural, por ejemplo las de Dedekin, Peano y Frege. En teoría de conjuntos, los números naturales se pueden definir con el axioma de la existencia del conjunto vacío Ø , a este conjunto se le asocia el número 0. A partir de este conjunto se pueden definir todos los naturales de la siguiente manera: se toma el conjunto que contiene al vacío, en matemáticas se escribe { Ø }, esto podría pensarse como una bolsa que contiene al vacío, en ese conjunto hay 1 elemento –la bolsa–; a este conjunto se le asocia el número 1 (recuérdese que se trata de definir aquí la idea de número 1 no la representación gráfica [1]). Ahora se toma al conjunto que tiene al conjunto que tiene al vacío, el cual se escribiría {{ Ø }}, observemos que tiene 2 elementos –la bolsa que tiene al vacío y la bolsa que contiene a la bolsa que contiene al vacío–, a este conjunto se le asocia el número 2. Y así se continua hasta ver que a cualquier número natural le corresponde de manera biunívoca un conjunto de conjuntos que tiene al vacío.

Otra definición del número implicó la formulación de ciertos axiomas (axiomas de Peano) que no conciben la existencia del conjunto vacío. Interpretados en términos de la teoría de conjuntos, estos axiomas equivalen a la definición de los números naturales anterior. Sin embargo, esta definición de los números naturales está construida a partir de la función el sucesor S(a)=a+1.

matemática frecuente, sin embargo a lo largo de la historia ha sido objeto de acaloradas discusiones[8].

Por otra parte, los números pueden tener diferentes tipos de representaciones expresadas con grafías (que llamaremos numerales) o diferentes palabras que nombran a los números (y que llamaremos eventualmente representación verbal-oral o escrita de los números). El significante de los números constituye aquello mediante lo cual éstos se expresan, se comunican, se manipulan, se operan y se usan. El significante será cualquier tipo de representación semiótica que se pueda usar de los números.

En la historia ha existido una gran diversidad de formas de representar a los números, conformadas en sistemas. Por ejemplo, sistemas aditivos como los de los egipcios, adito-multiplicativos como los de los números romanos o posicionales como los de los mayas. “Los numerales, en su forma presente, no aparecerían sino hasta el siglo XV o XVI” (Willerding, 1969) , dichos numerales son los que hoy conocemos como símbolos arábigos o indo-arábigos[9]: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}.

Ifrah tiene registrado que las primeras representaciones orales no llegaban a especificar más allá de dos números:

> […] los indígenas de las islas Murria usaban las palabras *netat* y *neis* para 1 y 2, respectivamente, y las expresiones *neis-netat* (=2+1) y *neis-neis* (=2+2) para 3 y 4. A partir de ahí, decían algo como <<un montón>>. (Ifrah, 2002:42)

Además, el propio Ifrah ha rastreado que las primeras representaciones escritas de los números provienen de los egipcios, cretenses, harappense, hititas, lidios, fenicios y elamitas, entre otros. Estas representaciones evolucionaron de dibujos que representaban los animales o cosas que contaban a rayas que simbolizaban el número. Probablemente los etruscos entre los siglos VI-IV a.C. fueron quienes introdujeron un trazo distinto para el 5 que no fuera producto de la suma de cinco rayas. (Ifrah, 2002:48-49)

Con respecto al diseño de las cifras arábigas que hoy en día utilizamos, hay varias hipótesis, una de ellas es que cada numeral está relacionado con el número de

---

[8] Por ejemplo, considerar en la construcción de los números naturales la existencia del cero como axioma o como algo que puede ser construido. Más recientemente, la discusión sobre si es válido considerar al método “inducción matemática” como formador de la serie de los naturales.

[9] Otro gran debate.

ángulos menores o iguales que 90º, es decir "un ángulo" para el numeral 1, "dos ángulos" para el número 2, y así sucesivamente. Otra hipótesis es que a cada numeral arábigo le corresponde un vértice en su diseño; para 1 hay sólo un vértice, para 2 hay dos vértices, etc. Una teoría más es aquélla que se inclina por la resta de líneas de un solo símbolo parecido a: □, dependiendo del número que se quiera trazar (Ifrah, 2002:807).

En el mismo sentido, cabe destacar que el sistema decimal sólo es una de las tantas maneras para representar los números. Existen otros sistemas que usan diferente base (por ejemplo base 5, base 10 o base 20, como los Mayas) y existen sistemas en los que no importa la posición, sino sólo el conjunto de símbolos.

1.2 El sistema de numeración decimal escrito: dos acercamientos posibles

En nuestro sistema decimal se usa la base 10 y la posición de cada cifra dentro del numeral determina su valor. Explicaré esto con más detalle pues éste es el sistema numérico del que se hablará en este trabajo.

La base 10 se refiere a que cada cifra escrita dentro de un número multiplicará su valor por 10^{n-1} donde *n* es la posición que ocupa de derecha a izquierda. Por ejemplo, [258] representa [2 de 100, 5 de 10, 2 de 1], ya que el 2 está en la tercer posición y se multiplica por $10^{3-1} = 100$; el 5 está en la segunda posición de derecha a izquierda y ese 5 vale $5(10^{2-1}) = 5(10^1) = 50$ y, finalmente, el 8 será multiplicado por $10^{1-1} = 10^0 = 1$.

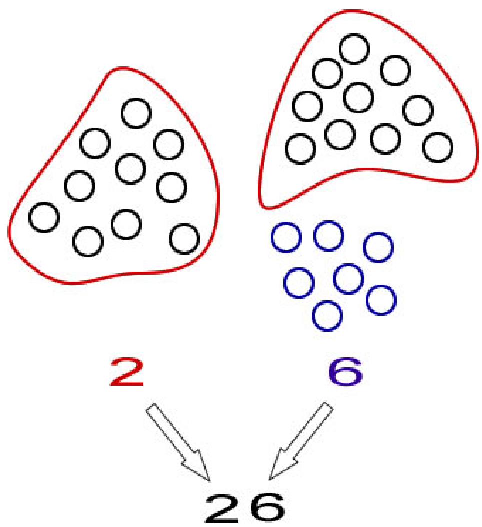
Para este estudio es relevante diferenciar entre el valor absoluto y el valor relativo de las cifras:

- El *valor absoluto* de una cifra de un número es el valor del escalar que multiplica a la potencia de 10 (en el sistema decimal).
- El *valor relativo* de una cifra de un número es el valor total, esto es, el escalar multiplicado por la potencia de 10 relativa a su posición.

Por ejemplo, en el número 368, el valor absoluto de la cifra "3" es 3 y el valor relativo es 3X100= 300.

Dada una colección, para determinar la representación numérica decimal de su cardinalidad se pueden agrupar sus elementos: se agrupan los objetos en decenas, enseguida a formar grupos de 10 decenas, o sea de centenas, y así sucesivamente. Posteriormente, se cuentan el número de grupos de cada tipo y se representan dichas cantidades utilizando la posición de las cifras en el numeral:

Existe una forma de encontrar la representación numérica anterior, que no pasa por hacer agrupamientos sino por *contar* los objetos recitando la serie numérica oral y traduciendo a lo escrito, o bien, directamente, usando la serie numérica escrita para identificar el numeral. Esto es lo que veremos enseguida.



La serie numérica escrita del sistema decimal se puede "generar" mediante *el algoritmo de la serie,* esto es, se puede formar por un ensamble de signos, infinito y ordenado, lo cual permite definir una biyección[10] entre números y símbolos que conserva el orden. (Colomb, 1978). Como no podemos crear tantos símbolos diferentes como números será necesario crear una serie con un número finito de signos donde se mantenga el orden (siguiendo un algoritmo).

> … cuando se piensa en la utilización de un número finito de signos, hay que combinar (de acuerdo a las reglas que definen un algoritmo) una secuencia infinita (con orden total) de los signos y los conjuntos de signos. En la mayoría de los casos el número de signos elegidos

[10] Se dice que una función de un conjunto A en un conjunto B es biyectiva cuando a cada elemento de conjunto A le corresponde uno y solo uno del conjunto B, y viceversa.

> definirán la base del sistema de numeración. (Colomb, 1978:9, traducción propia)

Por ejemplo, con los tres símbolos 0, 1, 2, se puede generar una serie de manera algorítmica (0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, etcétera), obteniendo un orden total al que se le asocia una biyección con los número naturales. El algoritmo que genera la serie escrita en base 10 puede pensarse como un odómetro (o un contador manual) en el que la rueda extrema derecha gira pasando por 0, 1, 2, … , después del 9 regresa a cero pero hace girar la rueda de la izquierda un lugar, ésta avanza hasta el 1. Después de diez giros más (1, 2, …y hasta 0 nuevamente) de la rueda de la derecha, la rueda de la izquierda avanza otro lugar, de 1 a 2, y así sucesivamente.

Este algoritmo forma un orden total y así es posible escribir cualquier número. Con esto quiero decir que cada número natural puede representarse en el odómetro,; no hay dos representaciones para un mismo número.

Cabe observar que, sin tener que hacer un análisis en términos de centenas, decenas y unidades, se puede escribir el número que cuantifica una colección, asociando a cada objeto un elemento de la serie numérica, la cual se genera mediante el algoritmo mencionado. Esta forma de generar la serie numérica es empleada comúnmente, de manera implícita, para escribir la serie numérica. Una regla muy parecida subyace a la numeración oral, tema que se retomará más adelante. Por el momento es suficiente decir que las palabras utilizadas para enumerar se modifican cada diez números: veinti, treinta, cuarenta, etcétera y por ello, en la numeración oral también subyace la base diez[11].

Para terminar este apartado sobre las representaciones escritas, haré una última precisión sobre algunas variantes de la representación convencional con las que nos encontraremos frecuentemente en el estudio:

Se llama “notación desarrollada”[12] a aquella que fragmenta el valor global de un número en una suma de los valores (relativos) que representan sus dígitos y su

---

[11] Aunque no completamente puesto que los números once, doce, trece, catorce y quince no les antecede el prefijo “dieci-”. Etimológicamente, *once* proviene del latín *undĕcim* ('uno y diez o diez y y uno'); *doce*, de*duodĕcim* ('dos y diez'); *trece*, de *tredĕcim* ('tres y diez'); catorce, de*quattuordĕcim* ('cuatro y diez'); *quince*, de *quindĕcim* ('cinco y diez'). Sin embargo, el latino *sedĕcim* ('seis y diez'), que pervivió en el romance antiguo como *sedze* y *seze*, que en francés, por ejemplo, dio *seize*, se perdió en la lengua moderna y se formó analíticamente *dieciséis*. En vez del sintético *septendĕcim*, se adoptó también la forma analítica, esa sí ya usual en el latín *decem et septem*, de donde *diecisiete*. Lo mismo ocurrió con *decem et octo* y *decem et novem*, que se prefirieron a las formas *octodĕcim* y *novendĕcim*, con lo que pasaron al castellano como *dieciocho* y *diecinueve* (Corominas, 2008).

[12] Esta es una terminología matemática estándar.

posición. Esta representación alude directamente al valor relativo de cada cifra. Así, la notación desarrollada del número 368 es: 3 X100 + 6X10 + 8.

Usaré el nombre de *traducción literal*[13] para designar a aquella representación (errónea) en la que el número se escribe como se escucha[14], es decir, a cada numeral le hace corresponder la cantidad de ceros que acarrea desde su escritura desarrollada. Por ejemplo, [258] se escribiría <<200508>>.

Llamaré representación *global* o *convencional* a la representación usual de los números, para distinguirla de otras representaciones, en particular, de la desarrollada. Observemos que en esta representación sólo se escriben los valores absolutos cifras.

Representación global o convencional.	Representación desarrollada.	Traducción literal.
325	3 de 100 2 de 10 5 de 1	300205

Tabla 1. Tipos de representaciones numéricas.

1.3 La representación oral de los números

En este trabajo defino la representación verbal[15] (oral) de los números como las expresiones orales que denotan las ideas de números. Asimismo, y como veremos más adelante, el tratamiento dentro de este registro semiótico abarca a la operatoria básica[16] representada de manera oral. Por ejemplo, todo cálculo mental que se logre expresar verbalmente será considerado conocimiento numérico oral. A continuación mostraré diferencias y similitudes entre la representación oral y la escrita.

La representación oral de los números responde a una lógica de construcción diferente a la del registro escrito de los numerales. En la representación oral se expresan los valores relativos de cada número y no los valores absolutos. Por ejemplo, el número 258 se pronuncia de manera oral como "doscientos cincuenta y

[13] Esta es una terminología mía, al igual que *representación global*.
[14] En el caso de la lengua francesa el 80 se dice: *quatre vingt* y se han identificado escrituras en niños como [20202020].
[15] Formalmente sería representación verbal-oral, sin embargo en esta tesis no usaré la representación verbal-escrita, por ende usaré simplemente representación verbal o representación oral de los números.
[16] Con operatoria básica me refiero a: suma, resta, multiplicación y división.

ocho”, nombrando cada uno de sus valores *relativos*. Si se nombraran sus valores *absolutos*, dicho número se llamaría: dos, cinco y ocho.

La numeración oral guarda algunas similitudes con la serie escrita y lo que es más importante, presenta también un algoritmo que permite generarla: después de un nueve se pasa a la decena siguiente y se repiten las cifras de cero a nueve, después de nueve decenas y nueve unidades, se antepone la centena y se repite la numeración anterior precedida de la palabra “ciento”, etc.[17] Estas regularidades son las que permiten que las personas, desde temprana edad, puedan empezar a recitar fragmentos de la serie oral (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994), y después, relativamente pronto, puedan recitarla hasta prácticamente cualquier número.

Las diferencias entre los dos tipos de registros conciernen también a la operatoria. En los algoritmos convencionales escritos de suma, resta y multiplicación, se opera con los valores absolutos y de derecha a izquierda, es decir, empezando con las unidades. Sin embargo, se ha registrado que la suma oral se hace, frecuentemente, considerando los valores relativos y de izquierda a derecha (Ávila, 2005; Acioly y Días Schielman, 1986; Carraher *et al.*, 1986). Por ejemplo, al pedirle a los adultos que sumen 245 + 123, primero sumarían los cienes 200+100=300, luego 40+20=60 y luego 5+3=8, para luego sumar todos los resultados: 300+60+8=368.

Para esta tesis será importante marcar la diferencia entre dos tipos de registros semióticos (escrito y oral) y su tratamiento dentro de ellos con el fin de observar las dificultades que tiene el tránsito de uno al otro.

2. Conocimientos previos de adultos y propuestas didácticas.

Este apartado trata de los conocimientos matemáticos de los adultos con baja o nula escolaridad a la luz de las investigaciones académicas. Centraré este análisis en los conocimientos que poseen los adultos acerca de las representaciones numéricas (tanto orales como escritas). Además, mostraré el interés de reconocer a las representaciones numéricas, orales y escritas como dos registros semióticos. Revisaré algunas características de las alternativas didácticas para la enseñanza de la numeración para niños y discutiré los diferentes caminos con los que se puede

[17] Hay algunas irregularidades, pero ésta son realmente pocas, por ejemplo, en lugar de decir “diez y cinco” decimos “quince”.

abordar la enseñanza de este tema. Por último, justificaré mi elección de un camino desde el cuál enseñaré la numeración a adultos de baja o nula escolaridad, entrando en debate con la literatura afín.

2.1 Los adultos no alfabetizados conocen la numeración oral.

Son varias las investigaciones que reportan el amplio conocimiento de aritmética oral que tienen los adultos no alfabetizados (Ferreiro, *et al*. 1983; Ávila, 1983; Mariño, 1997; Mariño, 2003 y Delprato, 2002). Los adultos de baja o nula escolaridad conocen los números y los comprenden, pues los usan; por lo general de lo que carecen es de una escritura formal de los números.

Ávila (1983, 1990 y 2005), Acioly y Días Schielman, (1986), Carrahher *et al.* (1986), Delprato (2002), Delprato y Fuenlabrada (2008), Ferreiro *et al.* (1983), Mariño (1997 y 2003), así como la presente tesis, han registrado que los adultos que operan oralmente lo hacen con sumas sucesivas yendo desde números mayores a los menores[18].

> Las operaciones aritméticas que realizan los analfabetos se relacionan con su trabajo, con los intercambios comerciales y con el dinero (Ferreiro *et al.,* 1983); Luria, (1980). También se ha afirmado que el pensamiento matemático de los analfabetos está irremediablemente ligado al contexto en el que se genera la experiencia particular; y que esta liga no permite resolver problemas más allá de los datos proporcionados por el ámbito de la propia experiencia (Luria, 1980). (Ávila, 2005:181).

En el presente trabajo se tuvo la intención de retomar, en la mayor medida posible, los conocimientos de cálculo y de la representación oral de los números en el aprendizaje de la representación escrita.

El trabajo realizado por Ávila (2007) enfoca el tránsito entre los dos tipos de representaciones ya mencionadas. Este estudio parte de que:

> Las personas que no han ido a la escuela desarrollan en su vida conocimientos numéricos y destrezas de cálculo cargados de significado que con frecuencia alcanzan una importante sistematicidad y eficacia. (Ávila, 2007:314)

[18] Por otra parte, estudios como el de Kalman (2004) muestran a adultos de baja o nula escolaridad capaces de moverse en un mundo letrado sin dificultades que los paralicen por completo.

Aun cuando los adultos no hayan asistido a una escuela formal tienen conocimientos numéricos básicos. En particular, por los aprendizajes a lo largo de su trayectoria de vida, los adultos no alfabetizados tienen conocimientos importantes sobre la representación oral de los números, los cuales les permiten operar con agilidad, eficacia y sistematicidad. Aún más, los adultos no alfabetizados tienen conocimientos e hipótesis de escritura de los números, explicaré esto a continuación.

Una práctica frecuente en la representación escrita de los números, llevada a cabo sobre todo por quienes están en un proceso de aprendizaje, consiste en escribir los numerales “como se escuchan”, esto es, anotando los valores relativos de las cifras, en lugar de los absolutos, por ejemplo escribir <<200508>> para doscientos cincuenta y ocho. A cada numeral se le asigna la cantidad de ceros que acarrea desde su escritura desarrollada. En la secuencia didáctica desarrollada en esta tesis consideré la *traducción literal*[19] de los números. Aunque efectivamente no es una representación convencional y si uno trata de leerlo convencionalmente lo que lee es -doscientos mil quinientos ocho-, hago énfasis en que hay conocimiento dentro de esta escritura. Se necesita reconocer las cifras, reconocer la relevancia del cero, también es necesario saber que se escribe de izquierda a derecha y sumar los valores relativos para obtener el número requerido; todos los elementos antes mencionados sirven para formar hipótesis previas de numeración escrita por parte de los adultos. De lo anterior, entonces, podemos afirmar que uno de los conocimientos que tienen los adultos no escolarizados es que: si bien [200508] no dice doscientos cincuenta y ocho en términos convencionales, si dice convencionalmente “200” “50” y “8”.

Coincido con Ávila (2007) y Delprato (2002) en que para favorecer que el adulto decida sobrepasar sus conocimientos previos, y acepte optar por los que se le pretende enseñar, conviene hacerlo tomar conciencia de los límites de sus procedimientos y de sus representaciones[20].

> La toma de conciencia simultánea de las potencialidades del cálculo mental (como recurso de validación mediante la estimación) y de sus alcances (o sea sus límites ante la complejidad operatoria),

[19] Escritura que se registró para adultos analfabetas en el presente estudio y en Delprato (2005), y para niños en Lerner, Sadovsky y Wolman (1994).

[20] Por ejemplo comparando sus producciones escritas numéricas con las convencionales dentro de una situación didáctica específica.

> pareciera ser una vía para, cuestionándolo, proponer medios alternativos de resolución: la escritura.[21] (Delprato, 2002)

Es por todo ello que en esta tesis estudié la posibilidad de acceder a la escritura de los números, sin pasar por un análisis previo de la base y la posición, sino a través de la operatoria e hipótesis previas, respondiendo a preguntas como: ¿qué características debe tener una situación didáctica para la enseñanza de número y sistema decimal en donde se retome en la mayor medida posible los conocimientos numéricos orales de adultos con baja o nula escolaridad? Si reconocemos en los adultos ciertos conocimientos previos como la operatoria básica, ¿cómo poder retomarlos para crear una situación que funcione como puente entre la numeración oral y la numeración escrita?[22] Para lograr esto, elegí una posición que busca explotar los conocimientos previos[23] del adulto, mediante la generación una escritura que cuestione sus propias concepciones de la representación escrita de los números por medio de una situación didáctica desafiante. En el capítulo siguiente desarrollaré dicha situación.

La presente tesis procura ser una alternativa diferente a la enseñanza de la numeración escrita, retomando la numeración oral (tanto los números como la operatoria) como conocimiento previo y usándola como puente hacía la numeración escrita. Esta tesis aspira a enseñar los números a partir de la apropiación de las reglas del sistema escrito con base en la operatoria y numeración oral.

Utilizo la operatoria solo como conocimiento previo y no como fin, pues en este estudio no se pretende explorar alternativas de su enseñanza. Se retoma la operatoria para acceder, a través de ella y la secuencia didáctica, a una escritura formal de los números. En esta opción, se conserva la idea de partir de un análisis del sistema de numeración decimal en términos de unidades, centenas, etc., pero anclado al sistema monetario y al cuestionamiento de concepciones previas sobre la representación escrita de los números.

La implicación de estudiar los conocimientos previos es que en lugar de ver al conocimiento matemático desde su representación y uso convencional, se reconocen formas locales de apropiación del contenido matemático. Es necesario reconocer los

---

[21] Aunque Delprato lo dice para la operatoria, retomaré esta idea sobre cuestionar sus propios medios alternativos para acceder simplemente a una escritura formal de los números.
[22] Sin pretender representar la operatoria básica.
[23] Por conocimientos previos entiendo todo aquel conocimiento que se ha adquirido previo al momento de la enseñanza formal. Este conocimiento, en adultos con baja o nula escolaridad, se adquiere en la práctica diaria y de ésta emanan los conocimientos matemáticos previos.

conocimientos previos para la creación de situaciones didácticas, aunque no es un objetivo de este trabajo indagar acerca de dónde y cómo se producen. El estudio de las prácticas situadas y de los conocimientos matemáticos que en ellas se manipulan es necesario para comprender cuáles son estos conocimientos previos y cómo aprovecharlos para el tránsito a una escritura formal. Simplemente, hay que reconocer el conocimiento previo útil para el tránsito entre representaciones, con esto no quiero decir que todo conocimiento previo es útil, ni que todo conocimiento previo es desechable.

Rogoff (1990) plantea que “el objetivo del proceso cognitivo no es producir pensamientos, sino guiar la acción inteligente, interpersonal y práctica” (1990:32), esto nos permite ver que los conocimientos previos estuvieron alguna vez inmersos —y continúan estando—[24] en prácticas sociales útiles y por ello el dinero como material didáctico y el cálculo mental como componente esencial, podría facilitar la puesta en práctica de la situación didáctica a planear.

2.2 La numeración oral y escrita: dos registros semióticos

La problemática de la enseñanza de la representación de los números a adultos analfabetas radica en que las representaciones de los números, oral y escrita, tienen dos formas de construcción distintas. Para explicar de mejor manera esta problemática podemos ver ambas representaciones de los números como representaciones semióticas.

Duval (1993) define que “para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales”:

1. **La formación de una representación identificable** como una representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprensible en un lenguaje dado); en este caso el español y los números arábigos.
2. El **tratamiento** de una representación es la transformación de esta representación **en el mismo registro** en que ella ha sido formulada. En este caso, que se pueda operar en ambos registros.

[24] De hecho, la práctica semiescolarizada del trabajo de campo realizada en esta tesis la retomo como una práctica útil y continua. Esos conocimientos previos serán utilizados por los adultos en esta práctica.

3. **La conversión** de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

Según estos criterios, puede decirse que las dos representaciones de los números, oral y escrita, constituyen representaciones semióticas.

La educación matemática se ha centrado en las dos primeras actividades cognitivas: la formación de representaciones y el tratamiento dentro del mismo registro.

> Generalmente, se considera que la conversión de las representaciones sería evidente desde el momento en que se es capaz de formar representaciones en registros diferentes y efectuar sobre las representaciones formadas algunos tratamientos (Duval, 1993).

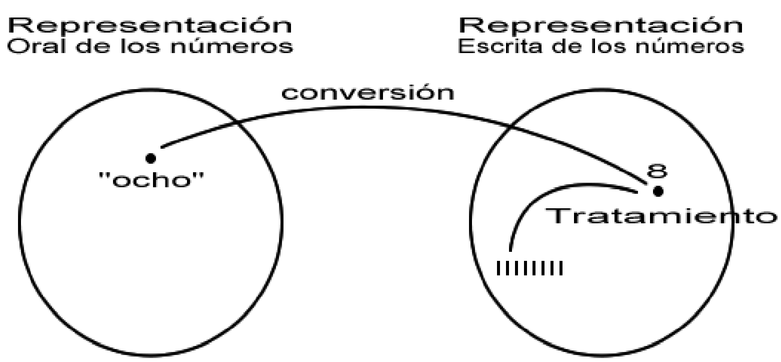


Figura 1. Dos representaciones semióticas de los números.

El tratamiento en un mismo registro semiótico refiere a hacer operaciones dentro de una representación. Por ejemplo, un tratamiento en la representación escrita puede ser hacer una cuenta por escrito, anotar un precio o simplemente escribir un numeral. El tratamiento en la representación oral puede ser sumar, restar, multiplicar, organizar de mayor a menor, etc.

Existen diversas representaciones gráficas de los números (números romanos, arábigos, palitos, etc.), y cada una de ellas destaca algo en particular al poner en juego diferentes aspectos de la idea de número. Así, representar una cantidad de manera pictográfica, como colección de "palitos" por ejemplo, destaca la parte del número *cardinal*,[25] pero ésta representación no es funcional para, entre otras cosas, representar cantidades grandes. Casi todos los sistemas de numeración conocidos, recurren a la representación de agrupamientos de elementos mediante signos arbitrarios. En el sistema romano, por ejemplo, X representa un agrupamiento de 10 objetos, en el maya una raya horizontal representa un agrupamiento de cinco. Además, los sistemas incorporan operaciones entre los agrupamientos en aras de aumentar su eficiencia. El romano incorpora el principio aditivo, el maya, como el nuestro, es aditivo y multiplicativo a la vez, además de utilizar al posición de los signos como un signo más (mediante la posición se sabe qué tipo de agrupamiento está representado).

Cada representación semiótica numérica funciona de manera diferente en su tratamiento. La conversión será un paso esencial para poder escribir los números de manera formal. Lo interesante del uso de este concepto de registro, es que para moverse de un registro a otro, se conservan algunos elementos, se eliminan otros y se requieren otros. La pregunta es qué se mantiene de un registro a otro, y qué los distingue.

2.3 Alternativas para la enseñanza de la numeración escrita a niños

En la historia reciente de la enseñanza se han registrado al menos dos diferentes caminos para la enseñanza de las representaciones numéricas. Uno de ellos consiste en enseñar primero base y posición para que los alumnos entiendan el sistema decimal como un caso particular. El otro camino consiste en partir del algoritmo que genera la serie escrita, es decir, mostrar cómo se agrega una cifra a la izquierda cada vez que se llegan a usar los diez signos del registro escrito.

La investigación educativa ha cuestionado si, en la enseñanza, el primer acercamiento a la representación escrita de los números tiene que pasar necesariamente por entender el valor relativo de las cifras, habida cuenta de la dificultad conceptual de dicha noción, y del hecho de que los niños tienen algunas hipótesis sobre la construcción de los números antes de entrar a la enseñanza formal (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994). Dicho cuestionamiento debe ser ponderado

[25] Cardinal indica el número o cantidad de elementos de un conjunto. El cardinal permite comparar la cantidad de elementos de varios conjuntos.

también respecto de la enseñanza a adultos, considerando que ellos tienen aún más experiencias de vida y algunas hipótesis de escritura sobre los números.

En la enseñanza de la representación de los números a los niños se han propuesto varias soluciones. En los años setenta, el énfasis en la enseñanza de la numeración estuvo puesto en la posición (Block, Álvarez, 1999:58). En esa época se les presentaban diferentes sistemas de numeración con distintas bases y se suponía que los niños aprenderían el caso del sistema decimal sólo aplicando las hipótesis encontradas anteriormente, una petición muy fuerte para los niños.

En los años ochenta la atención se desplazó, de la estructura inherente de las matemáticas al proceso de aprendizaje del niño y, en consecuencia, a los métodos de enseñanza. En esta década disminuyó el énfasis en la enseñanza explícita de los principios de base y posición, lo cual se traduce en que se enseñó únicamente sistema en base 10 y no otras bases (Block, Álvarez, 1999).

Por último, en los años noventa, se pretendió enseñar el número con situaciones didácticas que propiciaran que el alumno se adaptara a un medio resistente construyendo conocimiento (Brousseau, 2007). Las situaciones didácticas ofrecían variables didácticas que podían ser modificadas para cuestionar los errores, apoyar hipótesis y observar interpretaciones de los conceptos por parte de los alumnos y, finalmente, aprender.

En los años noventa se le dio mucha importancia a la diversidad de significados que asumen los conceptos al funcionar en distintos contextos y a “la resolución de problemas como actividad a través de la cual los estudiantes puedan construir nociones matemáticas” (Block, Álvarez, 1999).

En esta época se introducen primero de los números entre el 1 y el 20, como símbolos arbitrarios, sin todavía introducir un análisis en términos de los principios de base y posición (SEP, 2003). Esta introducción se proponía mediante el conteo y su relación con los numerales escritos en una tira numérica[26] (esta idea fue retomada en el presente trabajo).

[26] La tira numérica fue introducida en los materiales de los noventa con el mismo propósito que se propuso en esta experiencia: que los aprendices identificaran numerales a partir de del conteo. En el caso de los adultos, este tipo de uso del instrumento es tanto más pertinente cuanto que su dominio del conteo es mucho mayor.

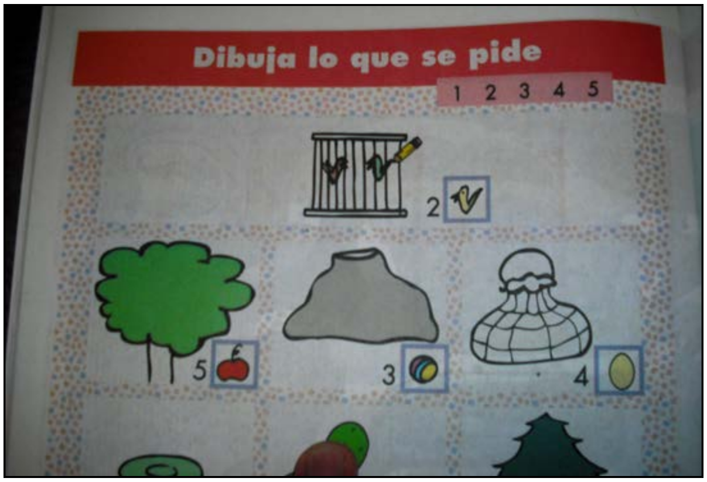


Ilustración 1. Observemos la tira numérica arriba a la derecha de la imagen. (Libro de texto gratuito, Matemáticas Primer Grado, 2004)

La enseñanza del sistema decimal ocurre después de que se han introducido los primeros 20 numerales y para ello se priorizó la enseña explícita los principios de base y posición (SEP, 2002) y sobre la identificación del algoritmo generador de la serie. Esta propuesta, al enseñar los primeros 20 números antes de introducir el sistema de numeración, reconoce la complejidad de los principios de base y posición, y la posibilidad de que los alumnos aprendan al menos un fragmento de la numeración escrita sin pasar por ese conocimiento, en tanto símbolos arbitrarios e identificando algunas regularidades de la serie. Cabe señalar que en otros países, se postergó la enseñanza explícita de los principios de base y posición hasta un año escolar[27] y en su lugar se favoreció la identificación del algoritmo generador de la serie (como el algoritmo de la serie mostrado en la página 15).

Lo interesante para mí de esta propuesta es que se enseña los primeros 20 números antes de enseñar el sistema decimal de numeración, así como la confrontación de errores comunes al momento de los primeros intentos de escritura. Esto se retomará para la creación de las situaciones didácticas.

En años recientes, identificamos en la literatura sobre el tema las dificultades y los errores más frecuentes de los alumnos cuando aprenden a escribir números. Nos pareció relevante la observación que hacen Delia Lerner y Patricia Sadovsky, quienes muestran que “los niños tienen oportunidad de elaborar conocimientos acerca de este sistema de representación desde mucho antes de ingresar a primer grado” (1994:97),

[27] Propuesta de ERMEL, en Francia (Colomb, 1991).

saben, por ejemplo, que a cantidades más grandes le corresponden números con más cifras, que en la comparación de numerales, la cifra de la izquierda "es la que manda", esto es, elaboran conceptualizaciones de la escritura a partir de la representación oral de los números.[28]

En el presente estudio pudimos comprobar que los adultos con los que trabajé tienen hipótesis sobre la escritura de los numerales, tanto los que la conocen un poco, como los que parecían no conocerla. Por ejemplo, se registró, al igual que en estudios con niños, una producción escrita de los números basada en una traducción directa de lo oral, es decir, para escribir el (258) el adulto escribió [200508], que es una traducción directa de 200, 50 y 8. El problema de esta escritura —que llamamos desarrollada— se origina en que la numeración hablada *no es posicional.*

Sin embargo, esta numeración hablada es *secuencial*, es decir: en un enunciado primero se dice "doscientos", luego "cincuenta" y luego "ocho", y no "ocho", "cincuenta" "doscientos", por ejemplo. La numeración hablada, en el español, va de mayor a menor (de izquierda a derecha) y solo se pronuncian los valores globales. En comparación, la representación escrita solo usa los valores absolutos pero también se lee de izquierda a derecha. Esto es relevante para mi trabajo por que caracteriza los errores de los adultos y con ellos se planea la situación didáctica.

2.4 Alternativas para la enseñanza de la numeración escrita y los algoritmos de suma y resta en adultos no alfabetizados: dos posturas.

El análisis de las propuestas existentes para la enseñanza del sistema decimal a adultos y jóvenes con baja y nula escolaridad fue una de las primeras tareas que emprendí, motivado por el interés de conocer las formas en que éstas consideran los conocimientos previos de los adultos sobre la numeración no escrita.

[28] Ver ejemplo en Lerner, Sadovsky y Wolman (1994:116) donde el niño escribe el mil quinientos treinta y seis como [1000 500 36] para después corregir borrando ceros. Hipótesis que resulta de una correspondencia de la representación oral y la escrita.

2.4.1 La propuesta oficial del Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA)

El "módulo" del INEA es el instrumento base para la enseñanza del nuevo "Modelo Educación para la Vida y el Trabajo" (MEVyT). Las características de dicho modelo son el planteamiento y tratamiento de los temas desde la recuperación de experiencias, saberes y conocimientos de las personas. (INEA, 2000a)

Específicamente en el módulo de *Matemáticas para empezar*, que es el primer módulo en donde se ven los números, en la introducción dice:

> En el eje de Matemáticas el modelo *Educación para la vida* parte de situaciones relacionadas con la vida diaria de las personas jóvenes y adultas. [...] También se resuelven problemas que tenemos, por ejemplo, cuando pagamos el camión, efectuamos actividades de agricultura, albañilería, hacemos un vestido y muchas otras labores. (INEA, 2000ª: 3)

Es decir, hay una intención de recuperación de conocimientos previos de los jóvenes y adultos. El modelo MEVyT ofrece a los adultos:

- Acceso a una educación que responda a sus necesidades e intereses.
- Reconocimiento de sus experiencias y de los conocimientos que ya tienen, para que a partir de ello desarrollen nuevas habilidades que te permitan mejorar tus condiciones de vida.
- Elementos para continuar aprendiendo a lo largo de toda su vida.
- Promover actitudes para que tengan una mejor convivencia con su pareja, familia y comunidad, además de un mejor desempeño en su trabajo.[29]

Para la enseñanza del número se utiliza el módulo "Matemáticas para empezar" (INEA, 2000a) que forma parte de los módulos básicos y se ubica en el Nivel Inicial dentro del modelo Educación para la vida. Todo el eje de Matemáticas del modelo Educación para la vida pretende:

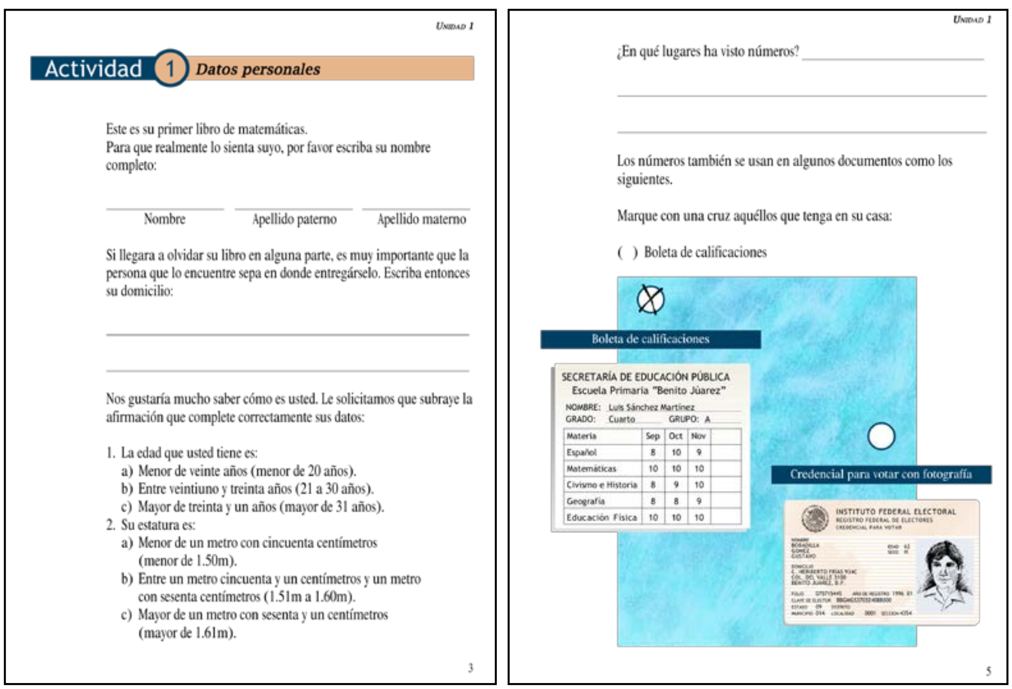
> […]promover que las personas jóvenes y adultas reconozcan números, cantidades, signos que se usan en matemáticas como +, -, =, <, >, ÷, X, etcétera; así como el uso de letras y fórmulas matemáticas, por ejemplo: a+b=c; (bxh). Lo mas importante en este eje es que la persona joven y adulta desarrolle competencias, es

[29] INEA. http://www.conevyt.org.mx/cursos/recursos/promo_mevyt/Con_frames/frameset_ofrece.htm

decir, que piense, razone, decida, participe, opine y escuche la opinión de los demás y no que realice planas de ejercicios, números y cuentas (INEA, 2000c)

Las “competencias”[30] que pretende desarrollar todo el eje de matemáticas son: resolución de problemas, comunicación de ideas matemáticas, razonamiento matemático, aplicación de ideas matemáticas, estimación de resultados y razonamiento cualitativo, medición, relaciones y pensamiento algebraico y pensamiento geométrico (INEA, 2000c:2).

En el *Libro del Adulto 1* (INEA, 2000b) se hace una breve introducción con la actividad 1 en la sección A de los números y su uso preguntándole al adulto su edad, estatura y peso. Además se ponen documentos con números (boleta de calificaciones, credencial para votar, recibo de luz y acta de nacimiento) para reconocer la importancia de los números. Se comenta que existen otras maneras de representación como los números mayas.


UNIDAD 1

Actividad 1 **Datos personales**

Este es su primer libro de matemáticas.
Para que realmente lo sienta suyo, por favor escriba su nombre completo:

Nombre Apellido paterno Apellido materno

Si llegara a olvidar su libro en alguna parte, es muy importante que la persona que lo encuentre sepa en donde entregárselo. Escriba entonces su domicilio:

Nos gustaría mucho saber cómo es usted. Le solicitamos que subraye la afirmación que complete correctamente sus datos:

1. La edad que usted tiene es:
   a) Menor de veinte años (menor de 20 años).
   b) Entre veintiuno y treinta años (21 a 30 años).
   c) Mayor de treinta y un años (mayor de 31 años).
2. Su estatura es:
   a) Menor de un metro con cincuenta centímetros (menor de 1.50m).
   b) Entre un metro cincuenta y un centímetros y un metro con sesenta centímetros (1.51m a 1.60m).
   c) Mayor de un metro con sesenta y un centímetros (mayor de 1.61m).

3

UNIDAD 1

¿En qué lugares ha visto números?

Los números también se usan en algunos documentos como los siguientes.

Marque con una cruz aquéllos que tenga en su casa:

( ) Boleta de calificaciones

Materia	Sep	Oct	Nov	
Español	8	10	9	
Matemáticas	10	10	10	
Civismo e Historia	8	9	10	
Geografía	8	8	9	
Educación Física	10	10	10	

5

Ilustración 2. Introducción en el Libro del Adulto. (INEA, 2000b:3,5)

[30] Término utilizado por el mismo INEA.

Posteriormente,[31] se pide escribir los números del 1-9 utilizando los números formales, rayitas y de manera oral, para ello se plantea un conteo de costales de café. En la página 34 (INEA, 2000b:34) se muestra la tabla siguiente:

Recuerde: usted está utilizando los primeros números naturales:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve

Ilustración 3. Tira numérica que aparece en la actividad 7 del Libro del Adulto (INEA, 2000b:34)

Acompaña una nota diciendo “Recuerde: usted está utilizando los primeros números naturales” (INEA, 2000b:34) donde se supone que el adulto ya conoce que así se nombran los números y que sólo lo tiene que recordar. Una virtud es mostrar al adulto una tira numérica en donde aparezcan los numerales separados en cajas, aunque probablemente sea precipitado escribir el nombre de los números cuando apenas están reconociendo algunos numerales. El agregar diseños gráficos alrededor de los numerales podría dificultar la comprensión de las particularidades del diseño numérico.

En la actividad 8 del *Libro del Adulto* se pretende que éste identifique números en un rango de 1-20. En esta sección se hace un camino numerado por el cual los adultos, jugando con una ficha, saltarán de una casilla a la siguiente registrando los números del 1 al 20. Esta actividad es interesante ya que emplea el concepto de secuencia jugando con dados, y podría mejorarse mediante preguntas como ¿cuál número creé que va después del *x*? ¿Cuál va antes? Así se podría generar una discusión sobre el reconocimiento de la serie numérica.

En la actividad 9 se recurre al conteo de dibujos de garrafones para registrar el número de garrafones que hay. Se muestra una serie de números parecida a la tabla anterior.

Es de notarse el hecho de que no se hace referencia explícita al conocimiento de los números de manera oral ni en el *Libro del Adulto* ni en la *Guía del Asesor*. Aunque hay ciertas ideas que parecerían retomar los conocimientos previos como lo

[31] Actividad 7 de la sección C del *Libro del Adulto 1* del módulo “Matemáticas para Empezar”.

contextual (con el dinero) o el *conteo deíctico*,[32] no se hace un recuento del conocimiento oral de los adultos, ni en operatoria ni en conteo.

Para la representación del sistema decimal se utiliza el módulo “Los números” (INEA, 2000d) que forma parte de los módulos básicos y se ubica en el Nivel Inicial dentro del modelo Educación para la vida. Las competencias que pretende desarrollar este módulo y la unidad que enseña el sistema decimal en específico son:

> Comparte sus saberes matemáticos con sus compañeros familiares y amigos, para resolver problemas matemáticos. Participa en equipo y expone sus ideas matemáticas para tomar decisiones conjuntamente. Reconoce que para el aprendizaje y uso de las matemáticas es fundamental que éstas se representen, se discutan, se lean, se escriban, se escuchen y se compartan. Reflexiona oralmente y por escrito, aclara y expresa sus ideas y las relaciona con los símbolos matemáticos elementales. Reconoce que hay problemas que pueden tener distintas soluciones y diversos caminos para llegar a éstas. (INEA, 2000d)

El tema del sistema decimal se desarrolla en las secciones A, B y C del *Libro del Adulto* del Módulo “Los números”. (INEA, 2000e)

En la sección A se pretende que el adulto “reconozca diferentes maneras de representar los números del 1 al 9” (INEA, 2000e:7) haciendo una actividad de conteo de prendas y anotando en una tabla con el nombre de la prenda, el número de rayitas igual al número de prendas y el número escrito. En otra actividad se propone que el adulto use los signos >, < e = (ídem.) comparando dos numerales.

Posteriormente, se busca enseñar los números entre 1-50 haciendo operaciones y mostrando una tira con dichos números y sus nombres. Dada la fuerte tendencia de las décadas anteriores de enseñar los principios de base y posición del sistema decimal, tendencia que ha sido cuestionada (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994), es interesante observar que aquí estos números se enseñan sin partir del análisis explícito del sistema de numeración, aunque paralelamente, se presentan los agrupamientos de unidades, decenas y centenas.

En la actividad 11 (INEA, 2000e:75) se agrupan centenas, decenas y unidades usando “estadísticas de gente alfabetizada” coloreando conjuntos de 100 personas de azul, conjuntos de 10 personas de verde y 1 persona de amarillo. Se explica que se

---

[32] Con *conteo deíctico* me refiero al conteo oral (o mental) que se va realizando a la par de señalar con el dedo cada elemento de un conjunto. Una digitación de los números.

llaman centenas, decenas y unidades a esos conjuntos respectivamente. No hay aquí todavía una vinculación con la escritura convencional, es decir, no hay alguna actividad en donde se muestre pasar de las centenas, decenas y unidades a la escritura convencional.

En resumen, la propuesta del INEA retoma contextos relacionados con el dinero (como compras en tiendas, cuentas de dinero) conocidos para los adultos y sugiere copiar los símbolos para irlas conociendo; Esta propuesta utiliza como hipótesis que los adultos conocen el conteo oral.

Ahora bien, no se encontró alguna actividad en donde se use la operatoria oral, que los adultos ya poseen, para generar la escritura. Existen actividades en las que se retoman estos conocimientos, pero para analizar la misma operatoria básica (sumas, restas, etc.). Lo anterior resulta relevante, pues, como ya se mencionó, en el estudio de la presente tesis se intentará utilizar el conocimiento sobre la operatoria oral para generar una escritura consistente y formal.

La propuesta del INEA utiliza el conocimiento previo del *orden* de los números en la numeración oral para estudiar los primeros números. Se apela a este conocimiento ya que se le pide al adulto completar series numéricas incompletas en donde se tiene que sumar de dos en dos e ir llenando una tabla con los símbolos correspondientes.

En conclusión, la propuesta de MEVyT del INEA tiene avances en relación con diseños anteriores en el sentido de que no impone un acercamiento al sistema en términos de analíticos y trabaja la notación escrita separando los primeros 20 números de los demás. En lo visto en el módulo “Matemáticas para empezar”, para la enseñanza de la escritura de los números hay una incipiente recuperación de la operatoria básica y no se retoma el conteo oral como medio para acceder a la escritura.

2.4.2 Propuestas emanadas de la investigación: un debate

La investigación educativa también ha generado alternativas didácticas para la enseñanza a adultos no alfabetizados del sistema decimal y su representación gráfica. Existen algunas investigaciones en las que se proponen maneras de enseñar la operatoria básica formal y algunas, menos, sobre la adquisición del sistema de numeración escrito.

Para la enseñanza del sistema decimal a adultos y jóvenes con baja o nula escolaridad, hay un consenso en que la familiaridad con el uso del dinero en personas adultas hace de este referente un contexto con gran potencial didáctico (Mariño, 1983; Carraher, Carraher y Schilemann, 1997; Ávila, 1983 y 1990; Delprato 2002). Este referente, señala Ávila, "es a la vez la fuente primordial del cálculo oral, ámbito privilegiado de aplicación del mismo". (Ávila, 2007:323)

Delprato (2002) también retoma el contexto comercial de los conocimientos previos de los adultos, pero señala algunas limitaciones:

> El trabajo con el ámbito comercial y particularmente con el dinero como referente, generó una restricción de situaciones posibles por ejemplo de cantidades con las cuales efectuar pagos. (Delprato, 2002)

Además de la dificultad que señala Delprato, puede mencionarse otra directamente ligada al estudio del sistema de numeración: el hecho de que una cantidad de dinero se puede expresar de muchas maneras y no solamente mediante billetes monedas potencias de 10, y con coeficientes menores a 10. No obstante, en el diseño de la situación didáctica que se estudia en esta tesis se consideró que el potencial didáctico de este recurso, dado en gran parte por la familiaridad que los adultos tienen con él, justificaba ampliamente utilizarlo.

Pasemos ahora a un aspecto más polémico: enseñar los algoritmos convencionales u otros procedimientos. Ávila destaca los dos caminos alternativos, uno en el que se enseñen los algoritmos convencionales y otro en el que se muestren algoritmos adaptados a lo que los adultos ya saben. Esta investigadora opta por la enseñanza de los algoritmos convencionales ya que, como concuerdan Knijnik (1997), Delprato (2002) y Ávila, "desde el punto de vista social vale más" (Ávila, 2007:319). Esto se refiere a que los algoritmos tradicionales, por su característica de provenir de la escuela, tienen más valor en la sociedad, que otros algoritmos.

Si bien el argumento del valor social de los algoritmos convencionales tiene peso, hay también importantes argumentos a favor del uso de otros algoritmos en la enseñanza a los adultos no alfabetizados. A continuación presento los que considero más significativos.

En primer lugar, están las dificultades que se generan por las diferencias entre los procedimientos de cálculo mental que los adultos suelen dominar, y los algoritmos convencionales. Tanto Ávila como Delprato, quienes optaron por la enseñanza de los algoritmos convencionales, señalan estas dificultades y aportan ejemplos elocuentes.

> En mi opinión, los procedimientos construidos en la experiencia de vida son en buena medida responsables de la dificultad de Margarita para restar: ella ha comenzado a hacerlo de izquierda a derecha, usando el procedimiento espontáneo según el cual se cuenta primero lo que tiene más valor relativo; este procedimiento sólo es útil cuando la desagrupación no es necesaria. (Ávila, 2007:335)

Así, Ávila opta por "enfrentar al cálculo convencional sin conceder un espacio didáctico a la representación gráfica del cálculo oral" (2007:341). Delprato opta no solamente por enseñar los algoritmos convencionales de la suma y la resta sino por intentar que los adultos comprendan las reglas que subyacen a dichos algoritmos, reglas basadas en las propiedades de base y posición del sistema decimal de numeración. Por ejemplo, busca que comprendan que cuando una cifra del minuendo se va a restar de una cifra menor del sustraendo, debe hacerse un proceso de desagrupamiento de la cifra de orden superior. En su estudio, la investigadora deja ver que esta meta es compleja y que, como lo señaló Ávila, los conocimientos previos de los adultos pueden dificultarla (Delprato, 2002).

En Delprato llega además a otro resultado que retomaremos más adelante, al notar que la heterogeneidad de los procesos individuales para la adquisición de la cultura escrita afecta al proceso de enseñanza-aprendizaje.

> […] en esta investigación se constataron, en general, la incidencia en una propuesta de enseñanza de ciertos estilos diferentes de aprendizaje, en términos de vínculos con recursos de resolución (lo simbólico, el cálculo mental). Esta evidencia conduce a un nuevo interrogante: ¿cómo gestionar esta diversidad? (Delprato, 2002)

Estos estudios, a la vez que optan por la enseñanza de los algoritmos convencionales, han ayudado a poner en evidencia el carácter de obstáculo que pueden llegar a representar los conocimientos previos de los adultos en la adquisición de los algoritmos convencionales, y más específicamente, los procedimientos espontáneos de resolución de problemas.

Un segundo argumento que cuestiona la pertinencia de la enseñanza de los algoritmos convencionales a los adultos radica en que la enseñanza de dichos procedimientos está siendo cuestionada en la misma escolaridad básica, con lo cual están empezando a perder el carácter privilegiado de ser “los que se enseñan en la escuela”, y con ello también, de ser “los convencionales”[33]. Algunas manifestaciones de esta pérdida de jerarquía pueden verse tanto en los embates surgidos desde la investigación (por ejemplo las críticas que hizo Brousseau (2007b) al algoritmo convencional de la multiplicación en los años 60), como en los cambios curriculares que se han ido dando en el mundo. En México, por ejemplo, la desaparición del algoritmo convencional para dividir (el de la “casita”) en países como Holanda o, menos radicalmente, la introducción de procedimientos alternativos que conviven con el convencional, en México (SEP, 1992).

Esta tendencia a disminuir la importancia de los algoritmos convencionales de las operaciones aritméticas elementales tiene en su origen un hecho tan simple como contundente: el uso masivo, popular, de las calculadoras. La razón de ser de dominar complicados algoritmos, que alguna vez fue posibilitar la realización a mano de largas cuentas, con rapidez y precisión, y cuyo costo en horas de enseñanza es muy alto, ha desparecido debido a la accesibilidad irrestricta a las calculadoras. Ello ha llevado a reorientar paulatinamente los propósitos de la enseñanza del cálculo en la escuela, cuyo énfasis pasa de la destreza en el cálculo a mano, a la comprensión de la operación (no del algoritmo), a la comprensión de sus propiedades, al desarrollo de procedimientos más fáciles de comprender, más cercanos a los procedimientos espontáneos, al desarrollo de cálculo mental como medio de estimar y controlar resultados y a la capacidad de resolver una mayor diversidad de problemas. Así, esta pérdida de valor en la escuela básica misma, seguramente les restará también el “valor social” al que se ha hecho referencia para sostenerlos en la educación de adultos.

Un tercer argumento en contra de la enseñanza de los algoritmos convencionales a los adultos no alfabetizados es la presencia misma de las calculadoras en su propio medio cotidiano y de trabajo. Hay adultos que, afirmando no saber leer y escribir, ni tampoco hacer cuentas, usan la calculadora[34]. Es muy probable que aquellos que no

[33] Los procedimientos “convencionales” se presentan de hecho en distintas modalidades, no son universales, por ejemplo, desde hace más de 20 años circulan en la escuela mexicana dos algoritmos distintos para la resta y dos modalidades del algoritmo para la división.
[34] Dato que se presentará en la tesis doctoral de Diana Solares.

usan la calculadora, la vean usar por alguna de las personas cercanas con las que interactúan.

Las razones anteriores hacen palidecer, desde nuestro punto de vista, el argumento del valor social de los algoritmos convencionales, sobre todo en una mirada a mediano plazo, y recubren de un nuevo interés los estudios, pocos, que se han interesado en la enseñanza a adultos no alfabetizados, de procedimientos alternativos. Un investigador conocido en America Latina que ha trabajado en esta dirección, sobre todo en sus trabajos iniciales, es Mariño (1997). Este autor exploró la posibilidad de poner en juego con adultos no alfabetizados procedimientos alternos de cálculo, más cercano a los procedimientos de cálculo mental que utiliza, por ejemplo, para la suma, Mariño retoma la suma de izquierda a derecha.

En el presente estudio, partimos de la hipótesis de que la presencia de la calculadora hace que el reto primordial de la enseñanza con los adultos no alfabetizados sea, hoy en día, la apropiación de la escritura de los números y, en segundo lugar, la utilización de éstos para potenciar su capacidad de cálculo mental, mediante procedimientos diversos y flexibles, así como la incorporación del uso de la calculadora.

En el estudio nos ocuparemos únicamente de la escritura de los números. Partimos del conteo espontáneo del dinero y de la operatoria mental como conocimientos previos para la enseñanza de la numeración decimal. Tomo en cuenta también algunas hipótesis[35] sobre los números escritos, que se han identificado en poblaciones de niños en proceso de aprender a escribir los números y que podrían ser compartidas por los adultos.

3. Comentario final: pertinencia de explorar vías que recuperen conocimientos previos

Mirar a las representaciones verbales orales y escritas de los números como registros semióticos abre la posibilidad de visualizar con más detenimiento las características que tiene la dificultad de transitar de un registro al otro. Ello llevó en el presente estudio a prestar atención a la posibilidad de aprovechar el conocimiento previo del

[35] Por ejemplo, entre más números más grande será la cantidad. Esta hipótesis es registrada en niños en Alvarado (2002) y Lerner, Sadovsky y Wolman (1994).

cálculo oral para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la numeración escrita de los números naturales.

Por otra parte, se observó que en los materiales existentes para adultos no alfabetizados no se retoman el conteo y el cálculo oral para la enseñanza del registro numérico escrito. No obstante, de los materiales existentes se recuperaron ideas para la creación de las situaciones didácticas, por ejemplo, la de dividir la enseñanza de los números en dos fases, una con los veinte primeros números y otra con la construcción del sistema decimal, ya sea por base y posición o por las regularidades del sistema.

Asimismo, se reconocieron advertencias, dentro de la investigación educativa, en el uso del contexto del dinero para la creación de situaciones didácticas pertinentes. Igualmente, se tomaron en cuenta las investigaciones anteriores para observar las principales dificultades que tienen los adultos al momento de aprender a escribir los números.

A continuación se presentan las situaciones didácticas diseñadas.

Capítulo 3. Diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la representación escrita de los números

A partir de la revisión anterior, se diseñó una secuencia didáctica que busca permitir a los adultos transitar con la mayor autonomía posible de la representación oral de los números a la representación escrita. En este capítulo presentaré algunos elementos teóricos y metodológicos de la didáctica de las matemáticas que orientaron tanto el diseño como el estudio empírico de la secuencia. Enseguida, describiré y fundamentaré la secuencia didáctica así como las situaciones utilizadas en el sondeo.

1. Metodología y marco teórico de referencia

La ingeniería didáctica es una metodología utilizada frecuentemente en los estudios de didáctica de las matemáticas y se caracteriza por las formas de validación a las que está asociada (Artigue, 1995). En comparación con otro tipo de metodologías que usan grupos de control y comparación externa, la ingeniería didáctica basa su análisis en la confrontación *a priori* y *a posteriori*, es decir, se hace un análisis de lo que se espera obtener aplicando cierta secuencia didáctica y se confronta con los resultados obtenidos luego de la aplicación *in situ.*

La ingeniería didáctica se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) la cual

> apunta a modelar situaciones de enseñanza de modo de permitir una elaboración y una gestión controlada y se fundamentan en un enfoque eminentemente constructivista, partiendo del principio que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparece como problemático para el sujeto. (Vargas, 2000)

Antes de precisar las características de la metodología ingeniería didáctica, me detendré para introducir algunos conceptos básicos de la TSD.

Una *situación didáctica* es, según su definición más teórica, un "*modelo* de interacción entre el alumno, el profesor, el saber y un medio determinado" (Brousseau, 2007:17). Un componente central de la situación didáctica es el problema que se plantea al alumno, elegido *ex profeso* por el maestro con la intención de que aprenda algo, algún concepto o procedimiento.

La *situación adidáctica* es el concepto que se centra en las interacciones entre sujeto y medio. El medio determina y dispone recursos para que el sujeto identifique el problema matemático. Hay dos características específicas de estas situaciones didácticas especiales:

1. El sujeto debe poder elegir entre varias estrategias (el conocimiento que se irá construyendo será aquello que lo lleve a desarrollar algunas de estas estrategias).
2. La situación presenta al alumno una meta a lograr que puede identificarse de manera independiente al conocimiento específico (pues si no, el sujeto tendría que saber ya para poder abordar el problema).

Las características especiales de este tipo de situaciones buscan permitir que el sujeto, en interacción con el medio, desarrolle cierto conocimiento. El *medio* (*milieu*) es definido como:

> el objeto de la interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. (Brousseau, 2007)

En alusión a la necesidad de una enseñanza específica, Brousseau agrega que “Un medio sin intención didáctica es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera”. Esto aplica claramente al caso del conocimiento de la numeración escrita que se desea que los adultos conozcan pues ésta, a diferencia de la numeración oral, normalmente no se adquiere sin una intervención didáctica específica.

> En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos, transmite.
>
> Es decir, es el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.) (Bujanda, 1981)

Vuelvo ahora a las características de las experiencias de ingeniería didáctica. Éstas constan de cuatro fases: un análisis preliminar, una fase de diseño de la secuencia didáctica y de análisis previo, la experimentación y el análisis de la experimentación.

En el estudio preliminar de la presente investigación se analizaron tres dimensiones de la enseñanza del concepto de número y de sistema decimal:

- En un plano *epistemológico*, caracterizamos los sistemas de representación oral y escrita de los números, destacamos dos acercamientos posibles a la representación escrita, a través de los principios de base y posición o a través de las regularidades de la escrita (Colomb, 1978).
- En un plano *cognitivo*, revise aportes de estudios sobre los conocimientos de los niños en relación con la numeración escrita, previos a la enseñanza formal, así como los aportes de estudios sobre conocimientos de adultos no escolarizados (Ávila, 1983, 1990 y 2005; Acioly y Días Schielman, 1986; Carrahher *et al.*, 1986; Delprato, 2002; Delprato y Fuenlabrada, 2008; Ferreiro *et al.,* 1983; Mariño, 1997 y 2003). En estos estudios se reportan evidencias de conocimientos sobre la numeración, previos a la enseñanza. En el caso de los adultos, éstos son muy amplios, pero conciernen sobre todo, si no únicamente, a la numeración oral. Conceptualizamos entonces la problemática del aprendizaje de la numeración escrita como la creación de un puente entre dos tipos de registros semióticos, uno de ellos en el plano mental/oral y otro el escrito. Plantemos que el tránsito entre estos dos registros constituye un delicado proceso cognitivo por parte de los adultos analfabetas.
- Finalmente, en un plano *didáctico*, abordaremos dos alternativas para la enseñanza del SDN, tanto en la enseñanza de adultos como en la de niños: la centrada en la base y la posición del SDN y la que propone recurrir al algoritmo de la serie. Revisé algunas propuestas curriculares (INEA, SEP) y destaco la necesidad de retomar en mayor medida los conocimientos previos de los adultos como base y guía de la construcción de situaciones didácticas para la enseñanza de la representación escrita del número y el sistema decimal.

Los resultados de este estudio preliminar fueron reportados en el capítulo anterior. Las siguientes tres fases, el diseño y análisis previo de la secuencia, la aplicación de la secuencia, y el análisis posterior constituyen el cuerpo del presente capítulo.

Las secuencias didácticas

Las secuencias didácticas construidas en esta tesis pretenden funcionar como puente entre dos registros semióticos utilizando en la mayor medida posible los conocimientos previos e hipótesis de los adultos acerca de la escritura de los números. El conocimiento previo, registrado recurrentemente en las investigaciones, al que haremos referencia es el de la verbalización de los números (incluyendo la operatoria oral). Se busca que las situaciones pongan en juego dicho conocimiento, en un contexto adecuado, y promuevan el aprendizaje de la escritura formal de los números por parte del adulto. En esta metodología es fundamental el análisis *a priori* de la situación

> El investigador en Didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el aula; sólo posteriormente podría contrastar sus previsiones con los comportamientos observados. (Gálvez, 1994:43)

Para ello, identifiqué el "estado inicial" (sus conocimientos previos) en el que los adultos entran en la práctica escrita de los números. Después presupongo cómo será el tránsito y compararé con los resultados obtenidos en la exploración *in situ*.

2. Diseño y análisis previo de las secuencias didácticas

Para este trabajo desarrollé una secuencia didáctica para la enseñanza del sistema decimal, en la que consideré los aportes de las investigaciones referentes al tema, los materiales existentes, lo que se sabe de las estrategias de cálculo en adultos (Ávila, 1990; Ferreiro *et al*., 1983; Mariño, 1997; Delprato y Fuenlabrada, 2008), algunos elementos de la teoría de la situaciones didácticas (Brousseau, 2007), además seguí la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995).

El diseño de la secuencia se dividió en dos secciones: números chicos (1-20) y números grandes (1-999). Esta división respondió a la intención de que se pudiera abordar el sistema de representación de números grandes cuando los adultos ya tuvieran cierta familiaridad con los primeros números, y en particular con los dígitos, los cuales forman parte de todos los numerales. El corte no se hizo en 9, como se solía hacer en las propuestas de los años setenta y anteriores, debido a que no considero necesario que los adultos comprendan previamente los principios de base y posición, para poder aprender a representar números mayores que 9. Era deseable que el 10, el 11, etc., fueran vistos, en un primer momento, como símbolos arbitrarios, tan arbitrarios como los anteriores, y no como la representación de una decena y cero unidades, un decena y dos unidades, y así sucesivamente.

A continuación describiré la secuencia diseñada para esta tesis, explicitando las variables consideradas y los efectos esperados. Mostraré con detalle las formas específicas mediante las cuales se procuró crear un puente entre dos registros semióticos utilizando en la medida de lo posible los conocimientos previos e hipótesis de los adultos acerca de la escritura de los números.

2.1 Secuencia didáctica para la enseñanza de la representación escrita de números chicos (1-20)

El diseño de la secuencia comenzó con la creación de un dispositivo para transitar de lo oral a lo escrito con los números chicos. Aunque la secuencia incluye algunas situaciones principales, y otras secundarias, la apropiación de dicho dispositivo fue el objetivo general de la situación didáctica planeada.

Durante la revisión de materiales de enseñanza de la escritura de los números para niños (SEP, 1994) se identificó una tira numerada que podría facilitar la relación entre el conteo y los numerales, aunque en la propuesta de la SEP solo se una como una forma de presentación de los numerales y no dentro de una situación didáctica. Con esta idea en mente se creó **La tira numérica** para crear un vínculo entre el conocimiento oral de los números por parte de los adultos y los símbolos numéricos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Figura 2. La tira numérica.

Para su creación, se consideró que los adultos podrían recitar la serie numérica (1…2…3…)[36] y, de manera sincronizada, ir contando los cuadritos con símbolos numéricos a partir del lado izquierdo de la tira (marcado con color rojo para facilitar su identificación). Al último número pronunciado le corresponderá el símbolo al que llegue en la tira.

Este dispositivo busca ofrecer, a una persona que ya domina la serie oral de los primeros números, una manera de encontrar por sí misma la representación escrita correspondiente, funcionando como una especie de traductor o diccionario. En comparación con los niños, aquí se crea toda una situación didáctica para darle sentido a la tira numérica y no solo como exposición de los numerales. Además, se toma en cuenta el *conteo* como parte esencial del trabajo con la tira numérica, concepto que aún no es comprendido del todo por los niños. La originalidad de este trabajo consiste en que ese misma herramienta didáctica podría funcionar con los adultos, incluso mejor que con los niños, debido a su fuerte uso del conocimiento previo del conteo.

Los tipos de tarea que se abordaron para el aprendizaje de la representación de los primeros numerales fueron los siguientes:

- Establecer la correspondencias entre número oral y numeral.
- Identificar números en portadores e interpretar su función. Es decir, identificar los números del 1-20 en diferentes tipos de textos y documentos impresos o portadores: cuentas comerciales, avisos, periódicos, etcétera (Ferreiro *et al.*, 1983)"
- Cuantificar (se refiere a contar objetos de un conjunto, poder enumerarlos y decir o escribir, cuántos son). También me refiero a esta tarea como "codificación".
- Concretizar, esto es, a partir de un número oral, armar la colección de objetos con la cantidad que el número refiere. En algunos casos de la presente tesis, hablaré de "decodificación" o "interpretación".
- Analizar características gráficas de los numerales y practicar el trazo.

[36] Retomando las conclusiones de Lerner, Sadovsky y Wolman (1994), las investigaciones de Ferreiro *et al*. (1983) así como exploraciones de conocimientos previos en esta tesis.

Para la **correspondencia entre número oral y numeral** se le preguntó al alumno por varios números en la tira numérica, por ejemplo: ¿Cuál es el número uno, tres, cinco, once? Si el adulto no conocía un número, se le mostró cómo podía encontrarlo contando los símbolos numéricos sobre la tira. Asimismo, se le pidió que anotara en una hoja el numeral encontrado y, si era preciso, se le ayudó con el trazo.

Recíprocamente, se señaló un símbolo al azar de la tira numérica y se le preguntó cuál era, si lograba identificarlo, se verificaba contando desde la izquierda el número que dijo. En el diseño se procuró que la validación[37] proviniera del mismo material y, con ello, se volviera cada vez más autónomo el alumno usando el dispositivo e identificando los numerales.

Para trabajar sobre **números en portadores** se trabajaron diferentes portadores de números adecuados al entorno contextual, tales como: recibo de luz, gas, agua, boleta de calificaciones, fotos de precios en tiendas cercanas. En cada caso se preguntó si podría reconocer el número escrito y si sabía qué indicaba ese número. Por ejemplo, si en una botella de refresco encontrábamos *2 lt* se preguntaba si reconocía el símbolo y si podía decirnos qué quería decir. En caso de que no supiera, algunas veces se le explicó que significaba cada elemento gráfico. Si podía reconocer dónde estaba el numeral, se le pedía que lo buscara en la tira.

Para **concretizar** y **cuantificar** utilicé una actividad de mensajes, que llamamos "el juego de los recados", para dicha actividad podían utilizar la tira numérica. El juego consistió en, dada una cantidad de corcholatas (en algunos lugares les dicen "fichas"), conseguir la cantidad de piedritas necesaria para poner una piedrita en cada una de las corcholatas; si cada corcholata tenía una piedra encima, y no sobran corcholatas, entonces uno ganaba el juego. Dado que las piedritas están lejos o hay que solicitarlas a una tercera persona, era necesario hacer alguna representación de la cantidad.[38]

En la primera fase (breve, ya que solo fue para comprender el juego) se puso una cantidad de corcholatas y el adulto tuvo que decir el número de piedras que necesitaba para que cada corcholata tuviera su piedra. Después, se entregaba la

[37] Es una forma de constatar que el resultado es el "correcto".

[38] Las situaciones de mensajes fueron creadas por Guy Brousseau para funcionalizar el lenguaje matemático, esto es, para propiciar que funcione como un medio de comunicación. En el caso del número, Brousseau creó la ya famosa situación que en México se conoce como "Platos y Cucharas" y que es similar a la que aquí proponemos con piedras y corcholatas. Cabe señalar que cuando esta actividad se plantea a los niños, el propósito es, en primer lugar, que aprendan a contar. En nuestro caso, los adultos ya saben contar, y lo que nos interesó fue que usaran alguna representación de la cantidad.

cantidad solicitada por el adulto, fuera correcta o no. Para terminar la jugada, se verificaba el error o el acierto poniendo en cada corcholata una piedra. La validación nuevamente está dentro de la misma situación para fomentar que el adulto cuestione su propia práctica y aprenda la representación escrita desde la tira numérica.

En la segunda fase ocurrió lo mismo sólo que en vez de que el adulto dijera el número oralmente, tuvo que mandarlo en un recado escrito al maestro[39] (o a quien tuviera las piedras) para que este último la entregara dicha cantidad y se verificara. Si el alumno tenía problemas para escribir el número se le siguió insistiendo en el uso de la tira numérica. Esta actividad se practicó varias ocasiones (entre 5 y 10 veces) para permitir que el adulto mejorara su desempeño. Para que la comunicación fuera mínimamente realista y tuviera sentido, fue necesario que quién surtía las corcholatas no supiera cuántas corcholatas necesitaba el solicitante antes del momento de ver el recado escrito. En esta primer parte se trabajó la concretización.

Para cuantificar, el maestro mandó un “recado” escrito con la cantidad de piedras que necesitaba y el adulto dio las piedras. Para interpretar el recado, el adulto pudo apoyarse en la tira numérica. Posteriormente, se verificó que la cantidad de piedras coincidiera con la de corcholatas, y, en caso de error, se intentó ver en dónde había ocurrido tal error. Al igual que la actividad anterior, se realizó la actividad en varias ocasiones (entre 5 y 10 veces) para su mejor aprovechamiento.

En algunas de las actividades de reafirmación y profundización se utilizaron tarjetas que de un lado tenían un número entre 1 y 20, y del otro su correspondiente cantidad con puntos.[40]

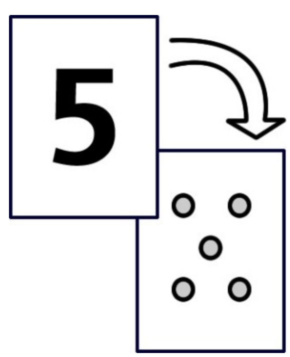


Figura 3. Tarjetas numeradas.

[39] En la mayoría de los casos, yo fui el maestro. Me referiré a mí como maestro para adecuarme a las normas. Posteriormente, en las transcripciones de registros se registra como “M”.
[40] Material llamado “Tarjetas número colección” del Libro *Matemáticas Primer grado*, SEP, 1993.

El juego de colección (numérica) a número consistió en mostrarle al alumno una tarjeta al azar del lado de los puntos y pedirle que anotara en una hoja el número con el que se representa la cantidad de puntos que había. Cuando la anotaba, lo verificamos con el numeral del anverso. Asimismo, le sugerí al adulto que usara la tira numérica de apoyo, esto para fomentar su apropiación.

Después se le mostró al adulto el numeral en la tarjeta y se le pidió que nos diera la cantidad de piedras que decía la tarjeta. Para verificar si estuvo en lo correcto se pusieron las piedras encima de cada punto en el lado contrario.

Para comenzar a trabajar desde este momento con el orden,[41] se planteó la siguiente actividad: se pusieron las tarjetas en el orden de la serie 1…2…3…, con los números visibles; después, se quitaba una tarjeta al azar sin que el alumno viera cuál, y se le pedía que, viendo las que quedaban, dijera cuál había sido la tarjeta hurtada y escribiera el número. Finalmente, se comprobaba volteando la carta.

Otra actividad para favorecer la identificación de regularidades de la serie fue “El Tesoro”, la cual consistió en esconder un dibujo debajo de una tarjeta numerada y pedir al adulto que lo encontrara, diciéndole, por ejemplo, “el tesoro está debajo del ocho”, “el tesoro está dos números antes/después del siete”, “el tesoro está entre el tres y el ocho”. Después se le pidió que él escondiera el tesoro y diera pistas para encontrarlo.

Todas estas actividades se hicieron con la tira numérica como material de apoyo en caso de que el adulto tuviera alguna duda. Con esto, se buscó que la tira numérica fuera una herramienta parecida a un diccionario que facilitara el tránsito entre los dos registros semióticos diferentes. Lo anterior favoreció, como veremos en el análisis, que los adultos con quienes trabajé efectivamente se apropiaran de la tira numérica.

Finalmente, para **apoyar el trazo** se preparó un material con fomi y lija. Se recortó la silueta de los números en fomi y se pegó encima de una base de lija. El alumno recorrió el trazo del símbolo numérico hecho de fomi para ir reconociendo el trazo.

[41] Con miras a trabajar las regularidades del sistema aunque se harán más visibles con rangos mayores.

Figura 4. Lija con numeral en fomi.

En esta actividad observe, sobre la marcha, que los adultos podrían tener dificultad en reconocer las diferentes **formas graficas** de los dígitos existentes en los productos de la vida cotidiana. Para esto, se imprimió una hoja con variados diseños de los numerales y se analizó junto con el adulto de manera detallada enfatizando en las características gráficas de cada numeral.

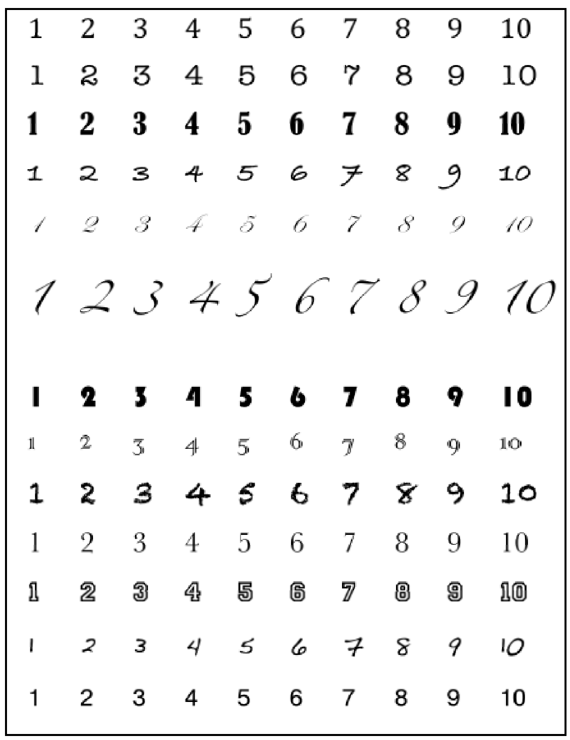


Ilustración 2. Hoja con diferentes grafías numéricas.

2.2 Secuencia didáctica para la enseñanza de la representación escrita de números grandes (1-999)

2.2.1 Alternativa elegida

Como vimos en el capítulo 2 (sección 2.4), hay dos grandes alternativas para introducir la representación escrita de los números; la analítica, que consiste en formar los numerales considerando el valor relativo de las cifras que los componen (unidades, decenas, centenas, etc.), valor que depende de la posición; y la sintética, que consiste en identificar progresivamente regularidades en la serie numérica sin analizar, de entrada, los valores relativos de las cifras que componen a los numerales.

Hemos visto también que en el debate sobre la enseñanza de la numeración a los niños pequeños, hay una tendencia a recomendar que se aplace la enseñanza de los principios del sistema, es decir, aplazar la alternativa analítica, habida cuenta de la dificultad conceptual que para los niños representan las nociones de base y posición.

Por otra parte, he planteado que uno de los propósitos centrales de este estudio es explorar situaciones didácticas que permitan, en la medida de lo posible, recuperar los conocimientos que los adultos ya tienen sobre la numeración oral.

Después de considerar algunas opciones, tanto en la vertiente analítica como en la sintética, decidí explorar en este estudio una alternativa analítica pues me pareció que tenía un potencial importante con respecto a la recuperación de los conocimientos previos sobre la numeración hablada: los adultos, al manipular el dinero, llevan a cabo implícitamente una descomposición de las cantidades, de acuerdo a los billetes y monedas del sistema monetario. Aunque en el sistema monetario hay agrupamientos que no son potencias de 10 (2, 5, 20, 50…), los que sí lo son (1, 10, 100, 1000) son frecuentes y permiten expresar cualquier cantidad. Por ello consideré que dicho conocimiento del dinero por parte de los adultos facilitaría su acceso a la alternativa analítica. Como veremos, tal hipótesis se verificó en parte, aunque también se pusieron de manifiesto dificultades.

2.2.2 La situación del cheque

La secuencia construida consta de actividades que se trabajaron con un material que llamamos “El cheque” y con monedas y billetes de $100, $10 y $1. La situación central es, nuevamente, de comunicación: se procuró que el adulto aprendiz pidiera cierta cantidad de dinero mediante “El cheque” y que el “banco” (en algunos casos el maestro y en otras el alumno) lo interpretara y entregara el dinero solicitado. El adulto (o el maestro) contaba el dinero y verificaba si es la cantidad correcta.

“El cheque” es una tabla con encabezados de billetes y monedas de $100, $10, $1 con un espacio en blanco debajo de cada uno.

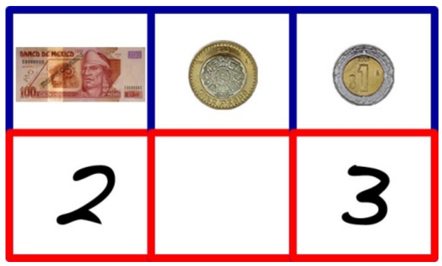


Figura 5. El cheque.

En la Figura 5 se ejemplifica la forma de pedir al “banco” doscientos tres pesos. Concebí este material como un puente que, partiendo del conocimiento previo del conteo de dinero (contar el dinero, descomponer una cantidad en billetes y monedas de distinta denominación y operar con dinero) y de la escritura de los dígitos, les permitiría acceder a la escritura formal de números de tres cifras.

El dispositivo “El cheque” busca facilitar el paso de la expresión oral de una cantidad a la expresión escrita (codificar) y a la inversa, de la escrita a oral (decodificar). Para la primera conversión, el procedimiento es el siguiente: a partir de una cantidad de dinero dicha oralmente, se espera que el adulto determine cuántos billetes/monedas de cada denominación forman esa cantidad y anote esas cantidades de billetes en los casilleros correspondientes de “El cheque”. Se parte de que el adulto sabe hacer ambas acciones. Para la segunda conversión, la decodificación, el procedimiento es el siguiente: dada una cantidad de dinero escrita en el cheque (registro gráfico), se espera que el adulto obtenga el valor relativo correspondiente a cada cifra y enseguida sume dichos valores hasta tener la cantidad total, por ejemplo, “2 de cien, doscientos, 3 de diez, treinta, total doscientos treinta”, lo cual también saben hacer.

Así, se espera que el dominio del tratamiento que los adultos tienen en el registro oral permita la conversión al registro gráfico. No se espera en cambio que, al principio, haya tratamientos en el registro gráfico. Por ejemplo, para saber cómo se escribe el –

doscientos ochenta y tres- primero lo pensarían en dinero, luego contarían cada billete o moneda y luego escribirían (eventualmente con ayuda la tira numérica) el número usando solo valores absolutos –como en la escritura formal-.

Además, pueden ocurrir cambios en la secuencia didáctica debido a varios factores, por ejemplo, la necesidad de confrontar una hipótesis para lograr que se comprenda mejor el material. Estas modificaciones de la secuencia didáctica se pueden dar en cualquiera de las variantes generadas por las variables didácticas que se manipularon [42].

La secuencia didáctica de “El cheque” tuvo las siguientes variables didácticas:

- Codificación y decodificación dependiendo del rol de propietario del “banco”.
- El cambio de roles entre el docente al alumno con respecto a quien maneja el “banco”
- Cambios en el diseño del material, tales como quitar el marco o las líneas que separan cada cuadro.
- Tamaño de las cantidades enteras que se utilizaron.

Para introducir el material puse cierta cantidad de dinero sobre la mesa y le pregunté al adulto: ¿me podría decir cuánto dinero hay en la mesa? Enseguida, le mostré, a manera de ejemplo, cómo anotar el número en la tabla. Esto se hizo varias veces.[43]

Las instrucciones que di en la situación central de comunicación fueron:

1. El maestro (*M*) le dice al adulto aprendiz (*A*) una cantidad de dinero oralmente (de preferencia menor que 1000) que tendrá que pedir al “banco”.
2. *A* hace un “Cheque” por esa cantidad, contando el dinero.
3. *A* entrega el cheque al “banco” representado por una tercera persona (*B*), que no tuvo que haber escuchado la cantidad que *M* dijo a *A*.
4. *B* entrega a *A* la cantidad solicitada en el “cheque”.

[42] Usaré la definición de Brousseau (2007) “Las variables didácticas son los elementos de una situación que pueden ser modificados por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno”.,

[43] Esta fue una modificación al diseño original, ya que en la primera aplicación de la situación se pretendió que el adulto utilizara el material sin indicaciones previas y fuera aprendiendo a usarlo conforme se hiciera evidentes los errores. Sin embargo, éstos no se hicieron evidentes, pues se requerían cantidades muy grandes de billetes de $100 o monedas.

5. *A* cuenta el dinero y ve si corresponde a lo que pidió o si no.
6. Si hubo error, se busca la causa.

Con ello pretendí cubrir la concretización y cuantificación de los números en contexto.

Más adelante hice una variación en el paso 4: se propuso al adulto a obviar la entrega de dinero para agilizar el trabajo y centrarnos en la escritura. Decidí no hacer explícita de entrada la restricción de que el número de billetes/monedas que se podía anotar en cada casillero debía ser máximo de nueve (que es consecuencia de otra restricción: cada vez que se junten 10 billetes/monedas de cierta denominación, se deben cambiar por billetes de la denominación siguiente). La restricción se dio más adelante, cuando fue necesario.

La situación de "El Cheque" se planteó varias veces en la modalidad en la que el adulto es emisor del cheque, manipulando la variable didáctica del tamaño y tipo de números, por ejemplo.

- 135, 258 (sin ceros intermedios)
- 27, 5, (con espacios en blanco en el cheque)
- 20, 50, 300, 500, (cantidades "redondas)
- 540, 320 (con ceros al final)
- 805, 104, (con ceros intermedios.

Decidí introducir la escritura del cero en el momento que hiciera falta, al escribir números con ceros intermedios

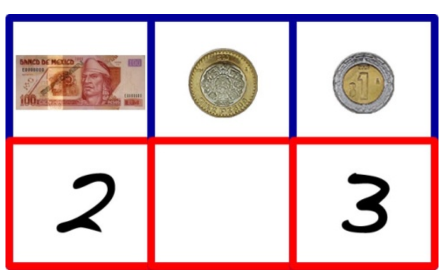


Figura 6. Utilizando un cero intermedio.

Después se intercambiaron los papeles y el alumno fue el banco. Le escribí en la tabla una cantidad y el alumno dio la cantidad en dinero, preguntándole ¿Cuánto le estoy pidiendo?

2.2.3 Continuación de la secuencia

Reglas de cambio:

Para hacer explícita la regla de cambio (10 unidades de un orden se cambian por una del orden siguiente) en cierto momento propuse el juego ya típico de "El Cajero" [44] (Delprato, 2002), en el que gana quién consigue primero un billete de mil. Se explicó en este momento la regla de cambio: cada 10 monedas de $1 es una de $10, cada 10 monedas de $10 forman uno de $100 y 10 de $100 forman $1000. Se jugó con tres dados: uno verde para centenas, rojo para decenas y azul para unidades.

Posteriormente, propuse situaciones en las que los numerales se escribían en un papel en blanco (de manera convencional) para que el adulto, con ayuda del dispositivo pudiera interpretar el valor de cada cifra y leer el número.

Interpretación de números escritos:

- El Maestro (*M*) anota un número,
- El Alumno (*A*) dice la cantidad que representa,

Observemos que todavía no se supone que *A* sepa leer números, por lo que, para poder decir la cantidad escrita, *A* tuvo que interpretar cifra por cifra, en términos de billetes/monedas, de 100, de 10 y de 1 y formar la cantidad total. (Por ejemplo, para "235" *A* diría: 2 de cien, doscientos, más 3 de diez, treinta, llevo doscientos treinta, etc.),

- *A* verifica tomando esa cantidad de dinero y viendo si corresponde con lo que está en la tabla.

El adulto escribe un número a partir de la cantidad que se le diga:

- *M* dice "ochocientos nueve",
- *A* debió de escribir el número,

[44] Adaptación tomada de Delprato (2002).

Observemos que *A* no sabe escribir números como nosotros todavía. Para escribir el número dictado tuvo que pensar en la cantidad de billetes de 100, de 10 y de uno que necesita e irlas anotando en el orden correcto: 8-0-9,

- *M* y *A* formaron la cantidad fijándose cuántos billetes de cada tipo hacían falta, verificando así si *A* acertó.

Esta actividad tuvo que repetirse numerosas veces hasta que se lograra cierto nivel de destreza.

Numerales en contextos:

A partir de los primeros acercamientos con el material de “El Cheque”, se crearon situaciones para la interpretación de números en diferentes portadores. El alumno interpretó números escritos en diferentes contextos. Se buscaron precios en revistas, en dibujos y fotos de precios en una tienda, posteriormente, se copiaron los números en el material y se decodificaron. Esto con el fin de reconocer en el material un dispositivo de traducción del mundo escrito al oral.

Se repitieron situaciones como las anteriores usando una tabla sin encabezados, como la siguiente:

Figura 7. Tabla 2

Esto con el fin de acercarse a la escritura convencional de los números.

2.2.4 Algunos errores previsibles y pasos a seguir.

De entrada, preví algunos errores, basados en estudios anteriores a los que ya he hecho referencia, sobre los primeros intentos de los adultos y niños sobre la escritura de los números.

En el paso del registro oral al escrito de cantidades sin ceros, un error puede ser la escritura “desarrollada“ (para <<25>> poner <<205>>). En este caso, planee las siguientes interacciones:

- A partir de la escritura del adulto, decodificarla con la tabla de cheques. Dado que en dicha tabla solamente se podrán ubicar tres cifras, podría ser necesario ampliar la tabla por la izquierda. En ese caso, se diría al adulto que, dado que puso más de tres cifras, se necesitan más casilleros y se le explicaría que el cuarto casillero corresponde a billetes de 1000 y el quinto a un valor que es de 10 billetes de 1000 (aunque no trabajamos con esos)
- Además, podemos pedirle que forme la cantidad en juego con monedas/billetes, y que codifique en la tabla la cantidad, por ejemplo, para el número 25, pone dos monedas de 10 y cinco de uno y las registra en la tabla. Con ello se puede comparar la escritura que resulta en la tabla (<<25>>) con la que él hizo (<<205>>).

Un error que es, en cierta forma, simétrico del anterior al escribir las cantidades que llevan ceros intermedios, por ejemplo “doscientos cinco”, consiste en no poner los ceros [25]. Cabe resaltar que este último error responde a una lógica distinta a la del anterior: escribir veinticinco así “205”, podría ser generado por alguien que ya sabe escribir el número veinte y el número cinco, es decir, que ya tiene cierto conocimiento sobre la escritura de los números y simplemente los yuxtapone. Esto no necesariamente ocurre cuando en cambio, se escribe el “doscientos cinco” así [25].

En este caso, se previó que, si el adulto escribía, por ejemplo, [25] para -doscientos cinco pesos-, el receptor del mensaje le daría 25 pesos. Al reconocer que no se le dio lo que pidió, se invitaría al adulto a proponer soluciones y, de no hacerlo, se le explicaría la función del cero.[45]

2.2.5. Situaciones para favorecer la identificación de regularidades.[46]

Estas actividades se planearon previo a la puesta en práctica del trabajo de campo, sin embargo, por falta de tiempo no se pudieron aplicar.

[45] En cualquier sistema numérico posicional es necesaria la existencia de un cero.
[46] No se pudieron aplicar por falta de tiempo.

La primer actividad planeada para favorecer la identificación de las regularidades del sistema fue la siguiente: el maestro escribiría números en una hoja para después preguntarle al adulto –qué número es- haciéndole notar sobre la marcha que los números que se leen con la palabra “mil” llevan cuatro cifras, los que se leen con la palabra “ciento” llevan siempre tres cifras, mientras que los veinte, treinta, cuarenta, etc., son de dos cifras. A pesar de que los adultos conocen la numeración oral, al oralizar números escritos puede ocurrir que lean “siete cientos” en vez de “setecientos”. En esta ocasión, sería correcto decirlo de esa manera, ya que significaría que el adulto logró entender la lógica del sistema decimal en donde los números de tres cifras llevan la palabra “cientos” y que los números de dos cifras acaban en “ente, enta”.

Por último, se pretendió usar la calculadora como herramienta para la escritura de números planteándole, al adulto, la similitud de este dispositivo con el material de “El cheque”. Esto se pensó puesto que en la calculadora se escriben los números de izquierda a derecha y cada que se anota un número se recorre un lugar a la izquierda. La calculadora es una herramienta de basta disponibilidad y una herramienta socialmente reconocida por su utilidad.

A continuación se registra como fue la experiencia de aplicación de las dos secuencias didácticas a mujeres de una comunidad rural y una urbana.

3. El sondeo

En cada una de las experiencias se comenzó con una pequeña entrevista para explicar al adulto qué tipo de trabajo estábamos realizando y conocer ciertos aspectos contextuales en los que el adulto manejara los números. Más adelante, al momento de realizar la experiencia de exploración, varias situaciones se modificaron; sin embargo, aquí se reproduce lo inicialmente planeado.

Los aspectos de número que se abordaron en ésta exploración fueron:

- Cuantificación de dinero.
- Concretización en dinero.
    - A partir de números orales.
    - A partir de números escritos.
- Escritura.

- A partir de dinero.
- A partir de lo oral.

- Lectura de números.
- Operatoria en contexto (de manera oral).

La *cuantificación* de dinero implicó dar una cantidad de dinero y pedirle que lo contara. Se puso cierta cantidad de dinero sobre la mesa y se le preguntó al adulto: ¿me podría decir cuánto dinero hay en la mesa? Esta actividad se realizó atendiendo la siguiente tabla; el Rango 1, se consideró sólo como números redondos; el Rango 2, como números menores que 50 y múltiplos de 2; el Rango 3, siguen siendo números redondos pero mayores que 200 y 1000; por último el Rango 4, serán los números no múltiplos de 5 entre 200 y 1000. El Rango 6 serán los mayores 1000. Sí hay éxito pasamos al siguiente rango.

<table>
<tr><td colspan="5">Se inició con el Rango 1, ejemplo: 50, 65, 80, 100.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Hay éxito:</td><td colspan="2">No hay éxito:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se exploró con el Rango 3, ejemplo: 200, 500, 850, 1000.</td><td colspan="2">Se exploró con el Rango 2 múltiplos de 5. Ejemplo: 10, 15, 20,</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hay éxito</td><td>No hay éxito</td><td>Hay éxito</td><td>No hay éxito</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se intentó con números que no sean múltiplos de 5 (Rango 4). Ejemplo: 283, 567, 467, 899, 999.</td><td></td><td>Números que no sean múltiplos de 5. Ejemplo: 7, 8, 13, 19, 20</td><td></td></tr>
<tr><td>Hay éxito.</td><td>No hay éxito</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Números en el Rango 6. Ejemplo: 1001, 1059, 2000</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

La *concretización* será el paso inverso, a partir de un registro oral (o escrito) se les pidió que nos diera esa cantidad dinero. Se fueron dictando cantidades y el alumno las tuvo que formar con dinero.

Se inició con el Rango 1, ejemplo: 50, 70, 75, 100.

<table>
<tr><td colspan="3">Hay éxito:</td><td colspan="2">No hay éxito:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se exploró con el Rango 3, ejemplo: 200, 500, 850, 1000</td><td colspan="2">Se exploró con el Rango 2 múltiplos de 5. Ejemplo: 1, 2, 5, 15, 20.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hay éxito</td><td>No hay éxito</td><td>Hay éxito</td><td>No hay éxito</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se intentó con números que no sean múltiplos de 5. Ejemplo: 283, 587, 467, 899, 999.</td><td></td><td>Números que no sean múltiplos de 5. Ejemplo: 7, 8, 13, 19, 20</td><td></td></tr>
<tr><td>Hay éxito.</td><td>No hay éxito</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Números en el Rango 4. Ejemplo: 1001, 1059, 1467, 1789, 2000</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Con estas dos actividades se buscó reconocer en qué medida los adultos podían cuantificar, concretizar y ordenar un número contextualizado con dinero de manera oral.

Para analizar la escritura numérica se procuró registrar hasta qué punto pueden los adultos leer y escribir números, así como cuantificar, concretizar y ordenar un número contextualizado con dinero de manera escrita por medio de portadores como el calendario, la boleta de calificaciones, el recibo de luz o gas, la cinta métrica y los envases.

En este caso, se presentaba a los adultos los portadores, por ejemplo, un calendario común y se les preguntaba: ¿conoce esto?, ¿para qué sirve?, ¿dónde hay números?, ¿qué significan estos números?

Por su parte, la lectura de números pretendió documentar, cómo los adultos conocen y utilizar la información numérica que existe en el mercado. Esto se hizo a través de una lectura de precios en etiquetas y de números en billetes con números entre 50 y 200.

La operatoria en contexto de manera oral se trabajó con problemas sencillos. Para cada problema, se dejó que los adultos lo resolvieran con los recursos que quisieran, y después se exploró su dominio con otro recurso, es decir, si resolvió el problema mentalmente, se le preguntó si podía hacerlos con lápiz y papel, y viceversa. Esto con la finalidad de explorar cómo hacían (o si hacían) uso de materiales físicos para resolver operaciones básicas.

Capítulo 4. La puesta en práctica de la secuencia

En este capítulo presento los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica. Primero, describo brevemente algunos aspectos metodológicos del trabajo de campo realizado, a saber, la forma en que contacté a los adultos, el número de sesiones de estudio realizadas con ellos, la duración de las mismas. Posteriormente describo los resultados de la aplicación de la secuencia con cada uno de los dos adultos que participaron.

1. Los adultos participantes

Al buscar a las personas adultas con quienes trabajaría, tenía varios objetivos: encontrar a alguien que no supiera leer ni escribir los números, que quisiera aprender a hacerlo y que tuviera la posibilidad de tomar las clases.

Desde hace nueve años he participado en la realización de campañas de alfabetización en comunidades rurales a lo largo del país, además de campañas de alfabetización urbanas; es por ello que conocía un proyecto de educación de adultos urbano en el Colegio Madrid A.C. En este proyecto encontré a Raquel, estudiante 6º de preparatoria y participante del proyecto de alfabetización para adultos desde hace un año. Raquel me comentó que ella le daba clase a Rocío, una señora que no sabía leer ni escribir los números, por lo que le pedí que me permitiera trabajar con ella. Más adelante contaré quién es y qué sabe.

Al buscar más personas con baja o nula escolaridad, hice trabajo de campo en dos comunidades: La Puerta de Enmedio y El Mezote en el municipio de Colón, estado de Querétaro. En estas comunidades había trabajado un par de años una campaña de alfabetización rural organizada por escuelas del sur de la Ciudad de México en las cuales participé por siete años. Las primeras personas que identifiqué fueron Lourdes (65 años aproximadamente), María Dolores (52 años) y Carmen (60 años) con quien finalmente realicé el trabajo.

En los otros dos casos no se logró un trabajo estable por distintas razones, únicamente realicé una entrevista previa a cada una, así como una exploración de conocimientos. En el caso de María Dolores, en el momento de hacer la entrevista, nos comentó que ella no sabía leer ni escribir los números, pero en la exploración de conocimientos detecté que conocía bastante acerca de los números (leer números de hasta 5 cifras, escribir números de 5 cifras, concretizar[47] y cuantificar dinero), por lo que opte por buscar otros participantes. Con Lourdes, en la entrevista y en la exploración detecté que era buena candidata para el proyecto pues no lograba escribir números de dos cifras pero cuantificaba y concretizaba dinero muy bien y tenía un gran conocimiento en la serie oral. Lamentablemente, en la segunda ocasión que regresamos ya no quiso tomar clase.

Si bien las dos personas con quienes trabajé constantemente pertenecen a contextos distintos, uno urbano y otro rural, esta diferencia no resultó significativa en la experiencia. En cambio, sí lo fue el hecho de que una tuviera ciertos conocimientos incipientes sobre la numeración escrita y la otra persona ninguno.

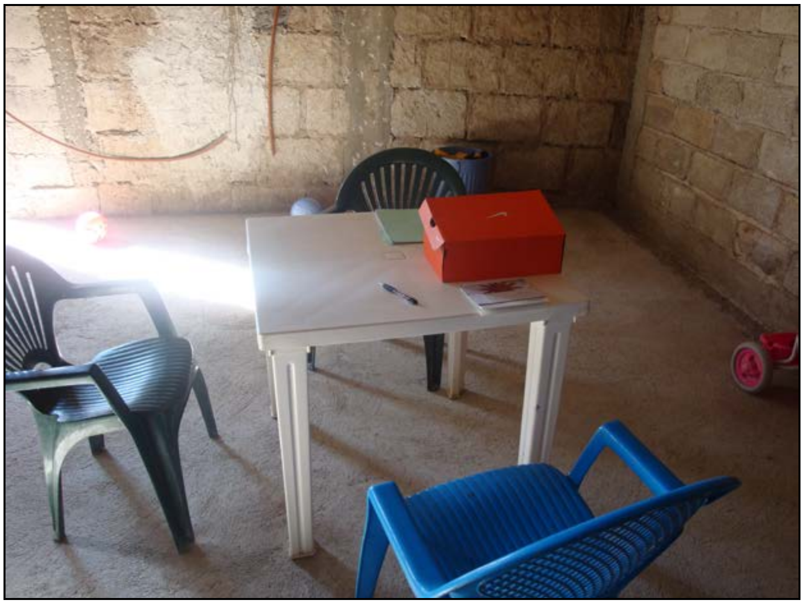
A continuación presentaré una tabla en la que se resume mi trabajo de campo. En todos los casos, la entrevista previa no se videograbó por ser el primer acercamiento, sin embargo, tanto la exploración de conocimientos y cada una de las clases de experimentación de la situación didáctica está video grabada con fines analíticos (entre paréntesis se encuentra la duración de la sesión en particular).

Personas.	Entrevista previa.	Exploración de Conocimientos	Experimentación de la situación didáctica.
Lourdes	✓	✓ (1:14:44 hrs.)	×
María Dolores	✓	✓(1:11:17 hrs.)	×
Rocío	✓	✓ (1:11:42 hrs.)	✓ (1 sesión) (1:41:00 hrs.)
Carmen	✓	✓(85:32 min.)	✓ (7 sesiones) (aprox.: 1hr cada una)

En el caso de Rocío se trabajó dentro del Colegio Madrid A.C. y asistieron una camarógrafa, Raquel (con frecuencia tuvo participaciones espontáneas) y yo. El trabajo con Carmen se realizó aproximadamente cada dos semanas, visitándola en su comunidad y se trabajaba en la parte trasera de una tienda de abarrotes.

[47] Concretizar se refiere a pasar del número escrito a la cantidad real de dinero.

El encargado de la conducción de la situaciones didácticas siempre fui yo y en algunos casos tuvieron intervenciones espontáneas mis compañeros. En un solo caso (que después no se concretaría) una de mis compañeras hizo la exploración de conocimientos por que la persona se negó a trabajar con un hombre.



2. El caso de Rocío

2.1 Introducción.

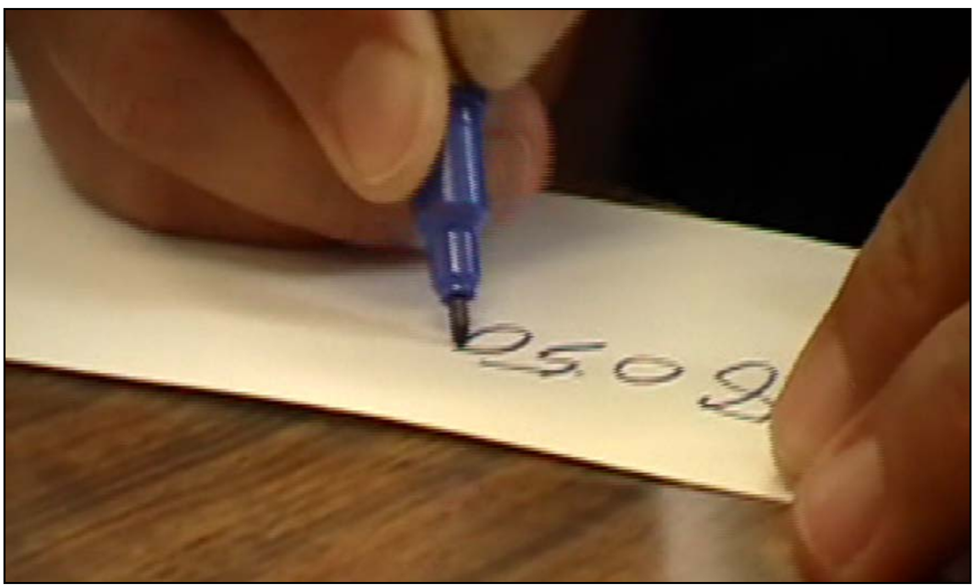
Roció es una mujer de 32 años, vive con su familia cerca de la carretera federal a Cuernavaca. Tiene dos hijos a los cuales quiere ayudar en su tránsito por la escuela, razón que la motivó a asistir a las clases.[48] Rocío supo de las clases del proyecto del Colegio Madrid por medio de la señora con la que trabaja; ella cuida a dos niños por las tardes, alumnos del Colegio Madrid. La señora con la que trabaja Rocío se enteró del proyecto de alfabetización urbana —gratuito para todas las personas— y le comentó a Roció, quien después de un par de semanas se inscribió. Ahora Rocío

[48] Esta situación es frecuente, se ha registrado en el trabajo de Ferreiro et. Al (1983) y Kalman (2004).

tiene seis meses aproximadamente de ir constantemente y conoce muy bien a su maestra actual, Raquel.

Raquel ha sido la alfabetizadora de Rocío desde hace un par de meses, la maestra anterior salió de la escuela y Raquel tomó la clase con Rocío. Tiene una buena experiencia dando clases en la campaña urbana y ha participado en la campaña de alfabetización rural durante un año; mostró gran interés por participar en esta investigación.

Fueron dos sesiones de trabajo con Rocío, conducidas por Raquel y por mí. Una de ellas fue para realizar la exploración de conocimientos y la siguiente para poner en práctica una de las situaciones didácticas planeadas con el fin de que Rocío conociera los números. Estas sesiones están registradas en videograbadora y fueron realizadas en el Colegio Madrid A.C. (donde tomaban clase Raquel y Rocío) y formaron parte de la Campaña Urbana de Alfabetización en la cual participan alumnos del mismo Colegio y personas de las colonias cercanas a la escuela.



Rocío en la sesión de trabajo, escribiendo el ochocientos cincuenta y ocho.

2.2 ¿Qué sabía?

En la primera sesión de trabajo con Rocío hice una exploración de sus conocimientos previos acerca de los números y el sistema decimal escrito y oral (ver guión de la exploración en el apartado anterior). Se exploraron diferentes tipos de tareas con los números y algunas veces se usó el contexto del dinero con miras a reconocer la viabilidad de dicho contexto en el trabajo de la situación didáctica de “El cheque”.

Rocío tuvo un desempeño irregular: mostró tener conocimientos de la representación escrita de los números pues logró escribir e interpretar algunos numerales, pero también, en ciertos casos, cometió errores, sin que fuera fácil identificar un patrón.

La **concretización** de cantidades de dinero se exploró a partir de números dictados y números escritos. Rocío mostró una dificultad para concretizar cantidades en ambos casos (dictados y escritos), probablemente porque le cuesta trabajo retener cantidades en la mente por mucho tiempo. Cuando trabajábamos un problema más de diez minutos no recordaba qué número era el que le pedí. Repetidamente me preguntaba acerca del número con el cual se estaba trabajando.

A partir de los números escritos*:* escribí en un papel el numeral [701][49] y le pedí que entregara esa cantidad de dinero, pero, antes de que tomara el dinero, le pedí que nos dijera qué número estaba escrito. Rocío respondió <setenta y uno>, y en el momento de darnos el dinero nos dio un billete de $500 uno de $200 y $1, es decir, leyó mal el numeral pero lo concretizó bien, lo cual no deja de ser extraño: hubiera esperado que concretizara la cantidad de dinero que leyó. ¿Acaso no podía pronunciar los numerales pero sí podía interpretarlos? El desempeño en otras tareas que veremos a continuación me hizo pensar que esto era poco probable.

Para explorar sus conocimientos acerca de la **escritura** de los números, se le pidió que escribiera la cantidad de dinero que le dimos y además se le dictaron algunos números. En la siguiente tabla se muestra la representación escrita resultante del dinero entregado.

Dinero entregado	Representación escrita
$20	<<20>>
$858	<<8050>>

Tabla. 1

En la siguiente tabla se muestra la representación escrita a partir de números dictados.

[49] Entre paréntesis cuadrados refiere al registro escrito únicamente, ya sea de Rocío o mío.

Número dictado	Representación escrita.
Diez	<<10>>
Cinco	<<5>>
Ochocientos setenta	<<8070>>

Tabla. 2

Rocío logró escribir los números de una y dos cifras que se le pidieron de manera correcta tanto a partir de dinero cómo dictado. Los errores comenzaron cuando se usan números de tres cifras. Al parecer el error es producido por la “traducción literal de lo oral a lo escrito”, es decir, escribir como se dice. Se encontró que Rocío borraba (o simplemente no escribía) algunos ceros intermedios, probablemente por suponer que resultaría un número muy grande para el que ella quería escribir.

En resumen, en las producciones escritas de Rocío se registraron importantes conocimientos previos: la escritura de izquierda a derecha, el uso correcto de las cifras, la escritura correcta de numerales hasta de dos cifras. Para numerales más grandes, Rocío tiende a incurrir en lo que he llamado *traducción literal* de los números, aunque varía la cantidad de ceros intermedios que escribe.

Las tareas de **lectura de números** comenzaron con el reconocimiento de números en portadores (dinero, tanto billetes como monedas) En las que Rocío identificó muy bien en donde había números. Hubo una buena lectura de números hasta de dos cifras y también de números mayores, pero redondos[50], el error comenzó cuando los números no eran redondos, de tres cifras y con ceros intermedios. Por ejemplo, leyó bien el número [850], le pedí entonces que leyera [8050] para verificar si existía cierta consistencia con el error anterior “traducción directa literal de lo oral”. Esto se confirmó pues lo leyó como <ochocientos veinte>. Estos problemas son similares a los que se han detectado en niños que están en proceso de aprender a escribir los números (Lerner, Sadovsky y Wolman; 1994).En un caso particular, no pudo distinguir la diferencia entre el numeral [7] y el [1], probablemente por la mínima diferencia gráfica entre estos dos numerales.

Por último, exploré la **operatoria en contexto** usando dinero en dos categorías: de manera oral *sin usar* dinero físico y de manera oral *usando* dinero. Sin usar dinero, se le plantearon sumas: ¿cuánto tendría si tiene ochocientos cincuenta pesos y gana veinte pesos más? A lo cual Rocío respondió bien aunque le tomó

[50] Es decir, aquellos números con solo una cifra distinta de cero.

aproximadamente 20 minutos para responder (parecía que se distraía). Con respecto a la sustracción, se le preguntó: ¿cuánto tendría si tiene cuarenta pesos y compra algo de veinticinco pesos?, no lo pudo resolver.

Usando dinero logró sumar $10 + $5 + $10 y resolvió $40 - $30.[51] El método para restar fue "completar" hasta llegar al número que tenía al principio. Cuando se le pidió que restará [$43 - $25][52] usando dinero no pudo hacerlo, probablemente porque ahora los números no eran redondos.

En conclusión, Rocío tiene cierto conocimiento de los números y del sistema del sistema decimal de representación, con limitaciones claras. Más allá del rango de los números de dos cifras, tiene un desempeño irregular, en el que resulta difícil identificar lo que puede y lo que no. Tiende a cometer el error de escritura literal tanto en la escritura como en la lectura. El desempeño de Rocío en operatoria (suma y resta) se muy limitado, (en varias ocasiones no logró resolver un problema que implicaba sumar y prácticamente no logró restar). En general, el desempeño de Rocío fue difícil de reconocer y categorizar.

2.3 La experiencia didáctica en torno al dispositivo "El cheque"

Lograr que Rocío comprendiera el funcionamiento del dispositivo "El Cheque" resultó difícil por diversas causas, algunas relativas a tensiones que se sitúan en el nivel de los conocimientos en juego, los de Rocío y los exigidos por el dispositivo. Otras tuvieron que ver con la forma específica, poco clara, en que se transmitió la consigna y otras más con algunas características del dispositivo mismo. A pesar de las dificultades, hubo indicios de que Rocío empezó a utilizar el dispositivo para mejorar su desempeño en la interpretación de las cantidades. A continuación se analizan estos aspectos.

2.3.1 Una respuesta inesperada y un efecto "Topaz"

Como se registró anteriormente, decidí no introducir, de entrada, la restricción de no poner más de nueve monedas/billetes de cada denominación en los casilleros del

[51] El problema fue de "quitar": Si usted tiene 40 pesos y se gasta treinta ¿cuánto le queda?.
[52] Problema de "quitar": Si tiene 43 pesos y gasta 25 ¿cuánto le queda?

cheque, sino hasta el momento en que hiciera falta. Sin embargo, debido a que Rocío ya tenía cierto conocimiento de la escritura de varios numerales, ocurrió que desde la primera situación anotó un número mucho mayor que 9 en un casillero, de hecho, anotó todo el numeral dictado, 320, en el casillero de los pesos. Su representación fue correcta, incluso desde el punto de vista de la lógica del dispositivo de “El cheque”, una cantidad de 320 pesos bien puede formarse con 320 monedas de un peso.

Debido a que no se esperaba dicha respuesta de Rocío, y a que yo seguía pensando que tal vez la situación misma podría proporcionar a Rocío retroalimentación sobre “su error” —cosa imposible, pues en realidad no había un error —, di lugar a una larga interacción con ella en la que yo insistía en interpretar “El Cheque” según la lógica que intentaba transmitirle (dando 320 monedas de un peso). Después un rato, la maestra Raquel y yo fuimos transformando la consigna, hasta preguntarle directamente por las cantidades de billetes-monedas de cada denominación. Veamos un fragmento de esta primera interacción. Se puso como primer actividad pedirle al banco $322

(M: maestro; Ro: Rocío; Ra: Raquel):

M: Ajá, yo le voy a… pues, por ejemplo pídale al banco $322 pesos, entonces usted, usando el cheque, se lo tiene que mandar al banco y el banco le tiene que dar trescientos veintitrés… veintidós.
Ro: No le sé a esto…
Ra: Vamos a intentarle
M: Sí, el primero es como para probar (…)
Ro: No sé. Entonces ¿qué? Trescientos ¿qué?
M: Trescientos veintidós pesos.
(Rocío escribe <<320>> sólo en la casilla de $1)

Raquel: Muy bien…
(risas) (Al parecer Roció se dio cuenta de que, pese a la aprobación de la maestra, no había logrado hacer lo que se le pedía, pues respondió lo siguiente.)
Ro: Por eso le digo que yo no le sé. No le sé al cheque. (risas)
(…).
Ra: ¿Cómo cuántas moneditas le voy a tener que dar de a peso? (se intenta hacer que la tabla funcione con la interpretación con la que se diseñó; al parecer, esta intención profundizará los malentendidos con Ro)
Ro: ¿de a peso?
Ra: Usted aquí me dijo que le dé trescientos veinte moneditas de a peso.
(…)

> Ro: Pues yo diría que de ese… ¿del papel no tienes?
> M: ¿Del papel dice? Pero aquí (señalando al cheque) dice, aquí justo dice que son puras monedas de a peso (…) Entonces, ¿cómo le haría para poner 320 pesos ahora con un número en cada cuadro? ¿Cómo le pediría al banco?
> Ro: No le sé. La verdad nunca he ido al banco. (risas)

Poco a poco Rocío respondió a la petición de que considerara el número de billetes de 100 que se requería. Aparentemente, mediante sucesivos cambios de consigna cerré una situación originalmente abierta, incurriendo en lo que en didáctica se ha llamado "efecto Topaz"[53] (Brousseau, 2007): al no obtener la respuesta deseada, el docente opta por presentar al alumno cuestiones cada vez más explícitas y más fáciles, pero a su vez, cada vez más lejos de la resolución del problema original. La respuesta obtenida no surge entonces del problema, es inducida de distintas maneras, y su significado se trivializa.

El principal problema en la transmisión de la consigna fue que no se tuvo en cuenta que si Rocío, ante la petición de escribir 322 en el cheque, escribía de buenas a primeras el número 320, iba a resultar muy complicado que desarrollara otra escritura basada en la descomposición en unidades, decenas y centenas. ¿Qué debía haber hecho entonces? Probablemente, reconocer que la escritura era buena, hacer notar que faltaban 2 pesos, y pasar a otros números más difíciles para ella, o bien retomar el dispositivo de otra manera (más adelante se esboza una alternativa) y, después, volver sobre su representación, analizándola en términos de su descomposición en billetes monedas de distinta denominación.

2.3.2 Una dificultad más precisa: representar una cantidad mediante notación desarrollada

En los intentos sucesivos por explicar a Rocío el funcionamiento de "El cheque" las dificultades continuaron. Su conocimiento previo sobre la escritura de números de dos y tres cifras obstaculizó la representación de una cantidad de decenas o centenas mediante un número menor que 10, referido a monedas/billetes de 10 o de 100, esto

[53] El término "efecto", según se lee en el diccionario, puede entenderse como resultado producido por una causa, o como consecuencia de la aplicación de una decisión. Pero también es posible relacionarlo (particularmente en el arte) con la búsqueda de una impresión, con la creación de una ilusión. Este nombre de "efecto Topaz" proviene de una obra de teatro en la que el protagonista, Topaz, es un profesor que hace un dictado a su alumno que demuestra gran dificultad en ejecutar la tarea. Topaz exagera y deforma las palabras para evitar que su pupilo cometa errores.

es, tendió a dificultar el uso del valor relativo de las cifras. Veamos como ejemplo un fragmento de registro[54], cuando se intentó que Rocío utilizara el material de "El Cheque" para escribir [135]:

> Ra: Ok. ¿Y cuántos billetes? No cuánto vale el billete, sólo cuantos hay, hay dos hay uno hay tres. Billetes…
> Ro: Nada más tengo uno.
> Ra: Entonces nada más ponemos uno ahí, porque hay un billete.
> Ro: (Escribe 100 debajo del billete de $100, en "El Cheque")
> Ra: Es de cien, pero hay uno. Aquí queremos apuntar nada más cuántos billetes tenemos no el valor del billete ni cuántos pesos son, sólo la cantidad de billetes.
> Ro: Nada más uno
> Ra: Nada más uno, y aquí ¿cuánto dice?
> Ro: Cien.
> Ra: Y ¿tenemos uno o cien?
> Ro: Nada más Cien. Un billete de ésta.
> Ra: Y no queremos poner cuánto vale el billete ¿sí me entiende? Sólo queremos poner la cantidad de billetes. Es como si aquí hubiera un dibujito de una manzana. Sólo tenemos una manzana entonces aquí ponemos 1. ¿Entonces cuántos billetes tenemos? ¿Cuántos billetes tenemos?
> Ro: Nada más uno, éste.
> Ra: Pues nada más ponemos 1 porque tenemos un billete
> Ro: Entonces nada más pongo así (Escribe 1 debajo del $100)

Sabiendo que, por ejemplo, el cien se escribe "100", a Rocío se le dificultó ver que también se puede representar con el dígito "1", referido a billetes de 100. La maestra (Ra) intentó relacionar los billetes de 100 con objetos que suelen contarse, como las manzanas, para que, por analogía, Rocío "contara" el número de billetes de cien. Rocío sí sabe que un billete de cien equivale a pesos, la dificultad está en la representación: aunque se trate de un solo billete, éste representa cien pesos y la representación de esa cantidad, conocida por Rocío, es"100".

La dificultad pudo haberse acentuado por el hecho de que, en ciertos momentos los distintos referentes en juego de los números, número de billetes, valor de los billetes/monedas y valor total tendieron a intercalarse en la consigna.

El dinero es quizá el referente en el que de manera más frecuente y natural una misma cifra, por ejemplo el cinco, puede usarse de dos maneras: se usa para decir "cinco pesos" pero también "cinco billetes/monedas", cuyo valor representado es mayor que cinco, es 50 o 500. Por ello pienso que el tránsito de una forma a la otra no

[54] Retomado de la introducción del material, la segunda actividad.

causaría dificultad, sin embargo no resultó así, no en el nivel de representación escrita.

Veamos un ejemplo más. Rocío sigue intentado representar la cantidad de 135 pesos. La maestra le ayuda escribiendo el 1 en el casillero de los billetes de cien.

> Ro. Entonces éste es el cheque. Ah… ¿qué? ¿cuánto me dijo?
> M: Ciento treinta y cinco
> Ra: ¿Cuántos billetes de $100 quiere que le dé?
> Ro: ¿Cuánto me dijo?
> M: Ciento treinta y cinco.
> (Raquel escribe 1 en la casilla de $100)
> Ra: Pero ahora no vamos a apuntar el número completo, nada más vamos a apuntar *cuántos billetes queremos que le dé*.
> Ro. ¿Cuántos? (Completa con dos ceros en las casillas del $100 a un lado del dígito ya escrito y diciendo:) aquí tengo cien… y faltan ¿qué?
> M: ciento treinta y cinco
> Ro: Treinta… (y escribe 35 en la casilla del $10)
> M: ciento treinta y cinco
> Ro: Ahí está

La escritura que finalmente se obtiene, [100 35] <u>no corresponde</u>, esta vez, a lo que he llamado “traducción literal de lo oral”, pues lo que Rocío tuvo intención de escribir, orientada por las intervenciones de la maestra, no fue 135 directamente, sino 100 y luego 35. Lo que en cambio se confirma es la dificultad para transmitir a Rocío la posibilidad de solamente escribir las cantidades de billetes/monedas, es decir, los valores absolutos.

2.3.3 Otras dificultades con el dispositivo “El cheque”: el contexto

El banco. El usar cualquier material que contenga un contexto particular crea vacíos para algunos alumnos que no estén familiarizados con dicho contexto. Se pensó que Rocío conocía lo que eran los cheques, su uso y su utilización en un banco. Al momento de ir planteando las primeras consignas del material Rocío nos dejó ver que ese contexto no era conocido por ella:

> M:(…) Entonces como le haría para poner 320 pesos […]. ¿Cómo le pediría al banco?
> Ro: No le sé. La verdad nunca he ido al banco. (risas)

El material presupone varias cosas: que los adultos han utilizado el dinero de manera constante y conocen su uso, que los adultos conocen lo que es un cheque y cómo se usa,[55] que los adultos conocen los dígitos y su uso cómo cardinal. En general se acepta que el dinero es un contexto familiar, pero pocas veces se advierte que si usamos el dinero en una situación didáctica, éste acarrea varias acepciones contextuales cómo: ¿en dónde lo usa? ¿cómo lo usa? ¿de dónde lo obtiene? ¿cómo son las transacciones qué realiza con él?

2.3.4 Interpretar más fácil que cuantificar

Como registré en los apartados anteriores, la cuantificación de dinero con la tabla ("El Cheque") fue complicada, sin embargo, el proceso inverso, la interpretación de números escritos en "El Cheque" resultó más accesible como se podrá observar en el siguiente ejemplo.

En esta actividad se le pidió a Rocío que interpretara el número [362] escrito en el cheque:

> M: Ahora me toca a mí pedirle, pero uno muy difícil. Así mire (Escribo [362] en el cheque).
> Ro: (Contando dinero) Aquí son trescientos. Seis monedas de … Trescientos. sesenta. ¿Cómo sería? ¿Trescientos sesenta y dos?. ¿Te tengo que dar?
> M: Sí. Yo le di el banco. ¿Es mucho? No.
> Ro: Trescientos sesenta y dos. ¿Está bien? A ver cuéntalos a ver si no me equivoqué.
> M: A ver son… cien, doscientos, trescientos. Trescientos… uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, trescientos sesenta y uno.
> Ro: ¡Ah! Me faltó un peso.

A pesar de que en el momento de concretizar le faltó un peso, hizo la primera lectura de manera correcta. Formó el número decodificando cifra por cifra según lo previsto, en términos de cantidades de monedas/billetes. Rocío logró interpretar números de hasta tres cifras con el material.

Es notoria la diferencia de dificultad entre interpretar y elaborar el código. Esto se tomó en cuenta para la situación didáctica que hicimos con Carmen; se optó por interpretar el código la primera vez que se utilizó el material.

[55] En el sentido de que es un papel que se cambia por dinero en el banco, pero no en la manera de llenarlo, la cual es específica de la situación didáctica, y no corresponde a cómo se llenan los cheques en la realidad.

2.3.5 Progreso logrado, a pesar de las dificultades

A pesar de las dificultades que se observaron en la puesta en práctica de la situación didáctica usando “El Cheque”, se observó cierto avance en la lectura de números de tres dígitos. Al final de la segunda sesión salimos del salón a leer números de tres cifras escritos en casilleros numerados dentro de la escuela; Rocío logró leerlos consultando la tabla (“El Cheque”) y respetando el valor relativo de los dígitos. En este momento leyó [345] como: tres de cien, cuatro de diez y cinco de uno, después de un rato y sumando cada una de las cantidades, supuso que eran trescientos cuarenta y cinco. Este logro manifiesta un avance significativo considerando que al comienzo de las sesiones no podía leer números de tres cifras con toda seguridad. No obstante, el número [345] no contiene ceros intermedios y, por lo tanto, no se puede decir, todavía, que Rocío sabe leer *cualquier* número de tres cifras, pero sin duda es un avance.

2.4. Comentario final

La característica del material “El cheque” de implicar el desagrupamiento del número global en su notación desarrollada, hace que probablemente, éste sea inadecuado para una persona que, como Rocío, ya tiene algún conocimiento de la escritura global (convencional) de los números.

Fue muy sorprendente la imposibilidad para Rocío de representar una cantidad mediante una notación —la implícita en “El Cheque”—, cuando ella ya conocía una distinta. Cien se escribe con un uno y dos ceros, y no puede escribirse solamente con un uno, aun cuando éste refiera a la cantidad de billetes de cien. Sin embargo, en el camino inverso, de lo escrito a lo oral, Rocío no tuvo dificultad en interpretar el numeral y mostró que podía conseguirlo, apoyándose en “El cheque”. En este caso no tiene dificultad en interpretar los dígitos como referidos a billetes/monedas, es decir, como valores relativos.

Es probable entonces que planteando primero las situaciones de interpretación, las situaciones de cuantificación hubieran resultado más accesibles. Esto queda por averiguarse.

Me pregunto también si, en casos como el de Rocío, en el que ya se tiene un conocimiento parcial de la escritura de los numerales, sería más conveniente optar por una alternativa didáctica que no esté basada en la descomposición analítica de los numerales, esto es, una alternativa en la que estos se presenten de entrada de manera global. En las conclusiones finales desarrollaré un poco más esta idea.

3. El caso de Carmen

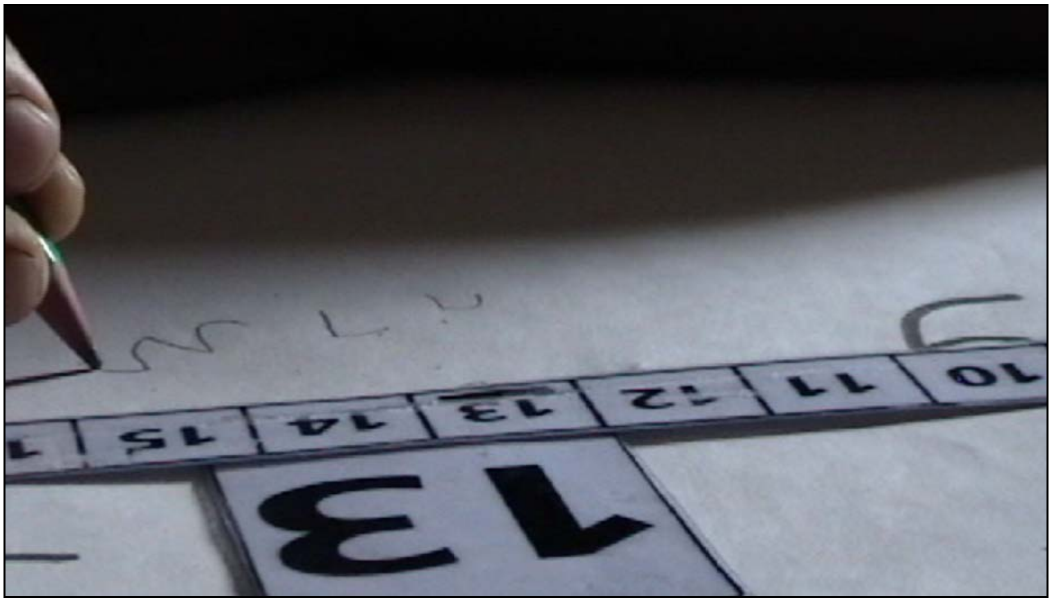
3.1 Introducción

El trabajo de campo se realizó en el municipio de Colón a 40 kilómetros de la ciudad de Querétaro en donde se encuentran dos comunidades de más de 300 y menos de mil personas cada una: El Mezote y La puerta de Enmedio. Ambas comunidades cuentan con una calle principal, tienen agua, luz, aproximadamente ocho tiendas de abarrotes entre las dos, una escuela primaria con tres salones y una secundaria. El principal recurso económico de las comunidades es el campo, el cultivo del nopal y maíz, así como la participación en obras públicas, generalmente, por invitación del gobierno, el cual paga aproximadamente 620 pesos la quincena por un trabajo de 8 horas diarias.

En las mismas comunidades encontré a Carmen, de sesenta años, que no había asistido a la escuela. Le hice una pequeña entrevista para saber si tenía oportunidad de participar y quería aprender a escribir los números. Aceptó. En la exploración de conocimientos manifestó que no diferenciaba entre dibujos, números y letras[56], pero sí reconocía el valor nominal de los billetes del sistema monetario nacional. Por otro lado, Carmen mostró un dominio amplio de operaciones aritméticas no escritas, pudo resolver la mayoría de los problemas de suma y resta de manera oral sin necesidad de representación escrita.

Por todo esto, Carmen me pareció la persona ideal para llevar a cabo la experiencia, aun cuando tenía un conocimiento sobre escritura numérico mínimo comparado con el de Rocío.

[56] Esto ocurrió al mostrarle cartulinas con diferentes símbolos como letras, números y dibujos, no reconocía en dónde había un número o en dónde había dibujos.



Carmen en la sesión de trabajo, copiando el numeral [13] con ayuda de la tira numérica.

3.2 ¿Qué sabía?

La exploración de conocimientos duró aproximadamente una hora y media, Carmen participó atenta todo el tiempo. Desde el comienzo de la sesión dejó ver su amplio dominio de operaciones aritméticas no escritas, pudo resolver la mayoría de los problemas de suma y resta de manera mental. Esta destreza frecuente en los adultos no alfabetizados ya se ha documentado ampliamente (Ávila, 1990; Ávila, 1993; Mariño, 1997; Mariño, 2003; Ferreiro *et al.*, 1983; Delprato, 2002).

Para comenzar la sesión de exploración se le propuso resolver problemas de suma y resta usando el contexto del dinero, Carmen respondió todas las preguntas sin usar lápiz, papel o calculadora (estaban a su disposición). La tabla siguiente resume las sumas y restas que se le propusieron y sus diferentes respuestas:

Operaciones contextualizadas con dinero, ordenadas por tipo de operación y por tamaño de los números.		Respuesta
Suma	17 + 17	✓
	20 + 20	✓

	60 + 60	✓
	61 + 61	✓
	614 + 614	✓
Resta	150 - 25	✓
	200 - 50	✓
	200 - 198	7 pesos
Multiplicación	2 veces 16	✓
División	125/2	70 y después 62.50

Al resolver algunos problemas Carmen, como muchos otros adultos (ver Mariño, 1997; Ferreiro *et al*., 1983; Delprato, 2002), recurrió de manera recurrente a la descomposición de las cantidades en centenas, decenas y unidades para así controlar con mayor facilidad la resolución de la operación. También tendió a descomponer los números en otros más sencillos de manejar, como los múltiplos de 5. Por ejemplo, para sumar 17 + 17 sumó primero 15 +15 y luego <<los pesos de más>> 2+2=4, entonces 15+15+4=34. Otro ejemplo ocurrió cuando le pregunté “Si un kilo de arroz vale 16 pesos ¿cuánto valen dos?, nos dijo que 32 y cuando le pregunté como lo hizo nos dijo: “pues dos veces 15 es 30 y luego le sumo los pesos que faltan.”

Le ofrecimos usar la calculadora y el lápiz, pero no los usó en ningún momento, inclusive los evitaba. Cuando le pedimos que escribiera un número cualquiera, repetía “no sé”. Sesiones más tarde, Carmen nos comentó que le daba pena que nos diéramos cuenta que no sabía escribir.

Para explorar la escritura se propuso una actividad en la cual se le mostraba el dibujo de un producto del mercado (sin precio), se le preguntaba cuánto costaba cada producto aproximadamente y se le pidió que escribiera el precio en un papel.

Carmen intentó escribir el número 10 y lo escribió como una “S”, le pedimos que pusiera el precio de las “fresas” y volvió a escribir un 10 como una “S”, después nos comentó que el precio de las manzanas era de 7 pesos, le pedimos que lo escribiera y escribió un “círculo”. Esta parte sugiere que, si bien mostró no saber escribir de manera convencional, utilizaba *signos iguales para cantidades iguales y símbolos distintos para números distintos*[57].

Al utilizar varios portadores de números, Carmen no logró:

Identificar donde estaban los números y donde las letras.

Identificar algún uso de las grafías numéricas (al preguntarle si podía intuir para qué se usan las grafías numéricas nos dijo que no sabía).

Identificar el numeral 5 y el 10.

Identificar el símbolo "$7" en una botella de refresco.

Se registró que Carmen no diferencia entre dibujos, letras y números. Al presentarle el conjunto de grafías escritas en un cartón: [5], [be], [v] se le preguntó cuál era el número, ella respondió que [be] era el número en ese conjunto de figuras (es necesario precisar que en este caso los símbolos no estaban contextualizados).

En la segunda parte de la exploración de conocimientos, se sondeó en qué rango de números podía **cuantificar** el dinero. Carmen siempre contó de manera correcta las cantidades que se le presentaron de los billetes/monedas, facilitándose la tarea mediante el conteo de los billetes de mayor a menor denominación.

Cantidad de dinero	Cuantificación de Carmen.
$65	✓
$80	✓
$100 (un billete de $100)	✓
$100 (dos billetes de $50)	✓

Con algunas de las cantidades anteriores, le pedimos que hiciera diferentes conversiones, por ejemplo, le pedimos que nos diera $100 pesos con un solo billete, luego con dos billetes y luego con por lo menos una moneda de $5. Para observar sus métodos de control le dimos un cambio erróneo, le dimos $90 pesos en varias monedas y billetes diciendo que eran $100, los contó y supo que eran noventa diciendo: "faltan $10 pesos."

Le pedimos "cambio" de $200 en varias denominaciones y nos lo dio muy bien. Su manera eficaz de cuantificar el dinero nos hace pensar que podría cuantificar

[57] En estudios con niños se han identificado hipótesis similares con palabras no numéricas (Ferreiro y Teberosky, 1999) y también con los numerales mismos (Lerner, Sadovsky y Wolman,1994)

cantidades mayores de las que se le presentaron, esto no se pudo verificar en el sondeo pero se verá más adelante en el momento de la aplicación de la secuencia didáctica.

Al preguntarle cómo reconocía el valor de cada uno de los billetes respondió que la principal forma de reconocerlos era el personaje que tienen impreso: “es calvo”, “feo”, “con sombrero”.

Al pedirle que nos mostrara cómo reconocía las monedas de diferente denominación nos hizo notar que lo hacía por el tamaño y el color. Se le mostraron unas monedas de juguete para compararlas con las verdaderas y trabajar con ellas. Las monedas de juguete sólo tenían en común con las de verdad el numeral. Aunque Carmen no reconocía los numerales al comienzo, identificó la similitud entre los numerales de las monedas de juguete y los numerales en las monedas reales. Aparentemente estas diferencias no causaron dificultad en el transcurso de la experimentación didáctica, ya que siempre se tuvo a la mano una tabla en donde estaban dibujadas las monedas falsas y las reales.

En la tercera parte de la exploración se pidió concretizar números en dinero. Al igual que con la cuantificación de dinero, Carmen logró concretizar cantidades en un rango amplio, aproximadamente de 0-1000. Pudo saber qué cantidad de dinero había que dar exactamente en todas las ocasiones y siempre utilizó el mismo método: entregó primero centenas luego decenas y por último unidades.

Por ejemplo: le pedimos que nos diera 587 pesos. Comenzó dándonos 500 pesos con dos billetes de $200 y uno de $100, luego 4 billetes de $20 pesos y al final una moneda de $5 y una de $7. Esta manera de concretizar, de la denominación mayor a la menor, es una característica del conteo de dinero que facilita el propio conteo y mantiene un control. A continuación daré un ejemplo del método que utilizó Carmen.

> Cuando a Carmen se le dan 12 billetes de $100, 23 monedas de $10 y 13 de $1, ella cuenta primero los billetes de $100, al llegar a diez billetes los agrupa y sabe que ahí hay mil pesos. Los dos billetes de $100 que sobran los aparta y prosigue con las monedas de $10. Agrupa las monedas de $10 en pilas de 10 monedas y las coloca encima de los dos billetes de $100, las monedas que le sobran las separa. Cuenta las monedas de $1, hace pilas de 10 monedas, las coloca junto con las 3 monedas de $10 que sobraron y separa las 3 monedas de $1 sobrantes.

El método de ir entregando el dinero de mayor a menor denominación es el mismo que utiliza para cuantificar. Este recurso es cómodo, económico y fiable. Cómodo porque rápidamente se acerca a la cantidad que se desea, económico pues en lugar de contar grandes cantidades de unidades sueltas, primero agrupa y cuenta cantidades más pequeñas de grupos iguales, y fiable como consecuencia de lo anterior.

Quisiera registrar que Carmen usa los números en su vida cotidiana, sin embargo, los usa sin reconocerlos en la escritura. Al conversar con Carmen en la entrevista previa, nos contó que usaba los números para saber cuánto debe al comprar una lavadora. Nos mostró una tarjeta en donde se va descontando de la deuda lo que va pagando mes con mes. Existen dos tarjetas iguales, una la tienen los comerciantes y otra Carmen, al restarle a la deuda se anota en ambas tarjetas la nueva cuenta. Al preguntarle cómo le hacía para reconocer los números nos comentó que sus familiares le ayudaban.

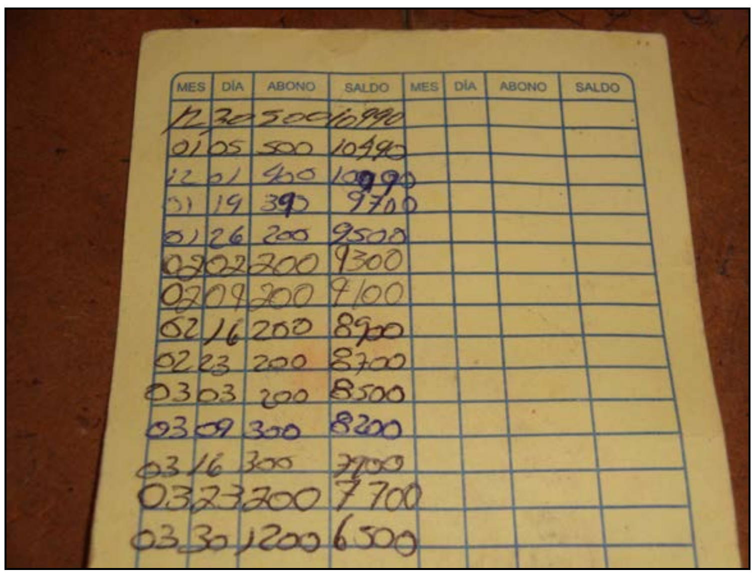


Ilustración 4. Tarjetas de deuda.

Carmen coteja con los vendedores la deuda de la lavadora, ella paga, hace cálculos mentales y concilia con los comerciantes una nueva deuda la cual memoriza un mes hasta el nuevo pago. Al finalizar el concilio, acude a su familia para verificar si la operación que hicieron tanto ella como el vendedor es correcta, si no es así, a la próxima visita de los vendedores los confronta. Esto deja ver que una persona no escolarizada no necesita una comprensión total de los números y sus operaciones para poder moverse en un mundo letrado. Pero, como ella misma nos explicó, conocer los números y lograr operar con ellos daría una mayor autonomía y control, o como ella nos dijo: “lo haría yo solita, sin necesitar a nadie”. Este breve ejemplo confirma la hipótesis de que los conocimientos previos se desarrollan en una actividad social útil.

En suma, Carmen demostró un amplio conocimiento de las representaciones orales de los números y las operaciones aritméticas básicas que únicamente expresa de forma oral, debido a su desconocimiento de la lectura y la escritura de números. Su conocimiento de operaciones mentales en contexto de dinero va desde la cuantificación, la representación, el orden, hasta sus vastas opciones para el cálculo de operaciones mentales básicas.

3.3 Breve relato de lo ocurrido

Durante la experimentación de la primera secuencia didáctica, se pretendía que Carmen utilizará el dispositivo de “La tira numérica” para transitar desde su conocimiento de una representación oral de los números de 1 a 20 a la representación escrita de los mismos. Como ya se dijo en la justificación del dispositivo “Tira numérica” parte de que los adultos saben contar[58], es decir, tienen ya un conocimiento del recitado de la serie numérica y de la asociación del último número recitado con la cardinalidad (en comparación con los niños que aún lo tienen que construir). Lo que se buscó entonces fue facilitar un puente entre estos dos registros semióticos.

El uso de la tira numérica permitió a Carmen, efectivamente, acceder a la representación escrita de los números a partir de la oral. Explicaré esto más a fondo en la sección correspondiente a números chicos y la utilización de “La tira numérica”.

La segunda parte del trabajo con Carmen consistió en la puesta en práctica de varias situaciones didácticas utilizando la herramienta de “El cheque” cuyo propósito es también el de facilitar el paso del conocimiento oral de los adultos al escrito, pero ahora con números grandes.

Con este material Carmen logró escribir números de tres cifras sin ayuda de la tira numérica en un papel en blanco a partir de su representación oral. Asimismo, el

[58]Conteo refiere a cinco principios: Principio de uno a uno, principio de orden estable, principio de cardinalidad, principio de abstracción y principio de orden irrelevante (Gelman y Gallistel, 1978; en Ramírez, 2003).

material resultó funcional para decodificar los numerales, pasándolos a la representación oral. En la sección números grandes, mostraré cómo ocurrió el tránsito entre los conocimientos previos de Carmen (la concretización y cuantificación del dinero, su conocimiento de conteo y cálculos mentales) hacia la representación escrita formal de los números hasta tres cifras..

3.4 Números chicos: “La tira numérica“

Con la secuencia de situaciones de “La tira numérica” Carmen tuvo un avance claro: de no lograr distinguir entre un dibujo y un número, ahora logra codificar y decodificar números con apoyo de la tira e incluso escribe el [8][59] sin necesidad de algún apoyo.

3.4.1 Tránsito entre representaciones semióticas (oral→escrita y escrita→oral)

Para iniciar este apartado, me gustaría dejar apuntado el concepto de *aprendizaje* que subyace en lo que se expondrá en lo sucesivo: el aprendizaje es el proceso por el cual se modifican los conocimientos (Brousseau, 2007). A lo largo del trabajo con la secuencia de situaciones didácticas se pretendió que Carmen modificara sus conocimientos, al transitar de su conocimiento sobre la representación oral de los números, al conocimiento de la representación escrita, mediante el apoyo de la tira numérica.

La introducción del uso de la tira numérica ocurrió con la siguiente *consigna*:

> M: Si quiere encontrar un número, comience a contar desde la izquierda, donde está el color rojo, y cada cuadro lo cuenta y lo sigue con el dedo. Al último número que diga le corresponde el símbolo que señaló.

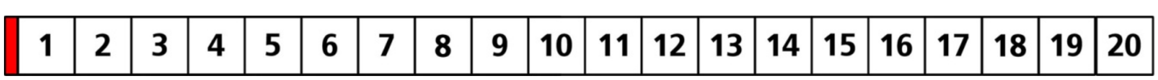


Figura 2. La tira numérica.

[59] A partir de este momento, utilizaré los corchetes cuadrados para referirme a la representación escrita. Esta grafía: [8], representa el numeral ocho. Con los guiones me referiré a la denominación oral: -ocho-.

Para ampliar la explicación acerca de cómo se utiliza el material se continuó con un ejemplo:

> El Maestro (M)[60] escribió un número [4] en un papel y le pidió a Carmen decir qué número es, usando la tira. Carmen fue contando desde la izquierda a derecha cada cuadro sobre la tira numérica haciendo una relación entre los números que decía y el cuadro que señalaba. Carmen no encontró el [4] en la tira porque la forma de la grafía del maestro no era la misma que la de la tira numérica. Se le explicó, brevemente, las similitudes gráficas entre ambas grafías (de la tira y la del maestro).

Resalta el hecho de que la relativa simpleza del material se une fuertemente al conocimiento previo de Carmen, la enumeración, para que se creen puentes entre las representaciones oral y escrita. Carmen usó desde la primera ocasión la tira, enumerando de izquierda a derecha y correspondiéndola con su representación oral, aunque tuvo ligeras dificultades como el hecho de que le resultara difícil diferenciar las grafías de los numerales. Para Carmen la diferencia entre el numeral [4] dibujado en la tira y el numeral cuatro [4] dibujado por el maestro contradecía su hipótesis de que a grafías diferentes le correspondían números diferentes, mostrada en la exploración de conocimientos.

Los rasgos gráficos que caracterizan a cada cifra en específico son difíciles de notar para los adultos con baja escolaridad. Carmen dijo que el cuatro que se veía en la tira numérica y el cuatro escrito por el maestro no eran el mismo número porque estaba más pequeño y “no se juntaba arriba”, refiriéndose a la parte en donde se intersectan las dos líneas arriba de la grafía. Más adelante expondré cuatro ejemplos de las dificultades relativas a la grafía.

En las primeras sesiones utilizando “La tira numérica” Carmen logró *dado un número oral, ubicar el símbolo correspondiente*. Esto paso fue relativamente rápido ya que, con su conocimiento del conteo, el dispositivo le permite poner en relación los símbolos numéricos orales con los escritos. No obstante, como veremos más adelante, la comprensión de la instrucción de que en cada cuadro hay uno y sólo un número se dificultó por la intromisión de otros factores.

Otra actividad que se propuso para practicar el paso del número oral al escrito fue un juego en el que se escondía un “tesoro” (un papel con un dibujo) debajo de una

[60] Todas las actividades fueron conducidas por quien esto escribe. En el presente trabajo hablaré del conductor en tercera persona para adecuarme a normas de escritura.

de las tarjetas numeradas que se encontraban en orden, de menor a mayor. El juego consistió en decir debajo de qué número estaba el tesoro para que Carmen lo encontrara.

> En la sesión dos se le escondió el tesoro debajo del número 6 y se le dijo la pista: está debajo del número seis. Se introdujo la condición de que tenía que hacerlo en menos de tres intentos. Lo que hizo primero fue buscar el seis en la tira numérica y después lo intentó comparar con las tarjetas. Al comparar, levantó primero el [9] (el número mas similar al 6), al ver que no estaba levantó el contiguo [8] y dijo –no está en el ocho-. Volvió a ubicar al 6 en la tira y levantó el [11], [7] y finalmente el [6]. Al preguntarle cómo lo hizo dijo que lo había encontrado por verlo en la tira.

En este ejemplo vemos como Carmen usa la tira como primera herramienta para encontrar el numeral propuesto, con dificultad, haciendo ensayo y error para corroborar su elección, pero encontrándolo al final.

Poco a poco Carmen fue logrando claros avances en el uso de la tira numérica. Por ejemplo, respondía a la pregunta de qué número es [5] contando desde el color rojo y de izquierda a derecha hasta encontrar el número:

> Se le señaló un número sobre la tira [5] y se le pidió decir qué número era, Carmen contó cada cuadro sobre la tira de izquierda a derecha mientras los enumeraba en voz alta. Al llegar al símbolo exclamó: -es el cinco-.
> Otro ejemplo ocurrió en la tercera sesión cuando se le dio una tarjeta con el numeral [14] y se le preguntó cuál número es. Carmen buscó en la tira, comparando uno por uno comenzando desde la izquierda, lo encontró, después rectificó y dijo –éste es el catorce-.

Por supuesto, estos logros requirieron la familiarización de Carmen con las diferencias y similitudes entre grafías, así como la gradual apropiación de la herramienta.

El color rojo del lado izquierdo, junto al numeral [1], tuvo dos funciones para Carmen, pues además de permitirle saber por dónde empezar a contar, le ayudó a reconocer la posición de algunos numerales (derecho o al revés): en caso de duda recurría a la tira numérica sabiendo que el color rojo siempre va a la izquierda.

3.4.2 Cuantificar e interpretar

Para organizar situaciones en las que los números orales y escritos funcionaran como expresiones de cantidades, se introdujo un material de apoyo que llamaremos "Las tarjetas numeradas"[61] o simplemente las tarjetas. Las tarjetas tienen escrito un numeral (entre 1 y 20) de un lado y del otro lado la cantidad del numeral en puntos.

Con la introducción de las tarjetas, se propusieron varios problemas en donde se le pidió a Carmen contar los puntos en la tarjeta y corresponder esa cantidad con un numeral de la tira numérica.

> En la sesión uno, se le dieron a Carmen todas las tarjetas numeradas (veinte en total) revueltas y se le pidió encontrar el trece. Primero, Carmen identificó el numeral trece en la tira, contando sobre ella cada cuadrito de izquierda a derecha desde 1 al 13, luego, buscó en las tarjetas, fijándose más en los puntos detrás de cada tarjeta que comparando el numeral; fue desechando algunas hasta que encuentra la tarjeta [13].

Así, Carmen prefiere buscar la colección de trece puntos contando los puntos, lo cual sabe hacer, en vez de identificar el numeral, lo cual está aprendiendo y le cuesta trabajo. Volveremos sobre esto más adelante.

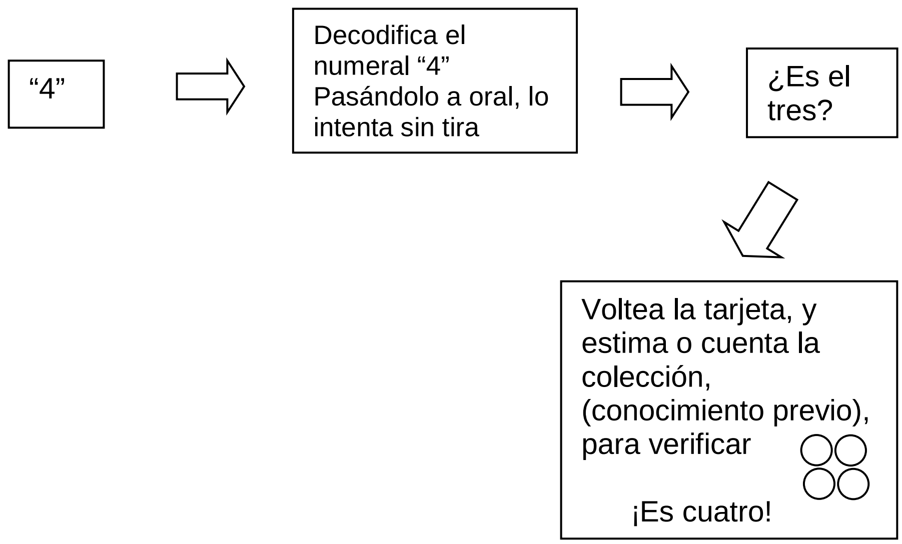
Otro ejemplo en el que Carmen dejó ver que es la colección misma, y no el numeral escrito lo que le permite verificar si hay determinada cantidad (dicha oralmente) ocurrió en una actividad sobre el orden de los números:

> En la sesión tres, se le colocaron las tarjetas [9], [11], [12] y [13], por el lado de los numerales, en orden y dejando un espacio en el lugar del 10. Se le preguntó qué número faltaba. Carmen contestó: -diez-. Se le dio la tarjeta [20], para observar si registraba el error o lo pasaba por alto. En un primero momento Carmen dijo que estaba bien el número, al parecer reconoció el 0 como símbolo característico del diez, pero rectificó al voltear la carta y ver muchos puntos y dijo: -¡Ah! No es. No es porque tiene muchos puntitos-.

Algunos adultos de baja escolaridad tienen los conocimientos necesarios para estimar la cantidad de elementos en una colección[62] y esto les permite verificar si un número dado es factible o no. Los adultos de baja escolaridad cuentan con la estimación como

[61] Material similar al que se presenta en Manual para CONAFE.
[62] Esta capacidad seguramente depende del contexto y tiene un límite.

conocimiento previo a las situaciones escolares, es decir, pueden “tener idea” de cuánto hay por percepción visual de la colección. Esto ayuda a Carmen a identificar rápidamente si un número es cercano al que se le pide, sólo volteando la carta.



En los primeros intentos por traducir lo oral a lo escrito, observé que Carmen prefiere sostener su conteo en vez de apoyarse en la tira numérica, esto porque el conteo de la cardinalidad de la colección —que es un conocimiento previo— es una herramienta apropiada y segura para ella.

Finalmente, veamos un ejemplo tomado de la sesión 3 del desempeño que Carmen logra en la tarea de interpretar un numeral con apoyo de la tira. La estimación de la colección será nuevamente su medio de verificación.

> Se le dio la tarjeta con el numeral [13], por el lado del numeral y se le pidió que entregara esa cantidad de frijoles, con la restricción de no voltear la tarjeta (para no ver los puntos). Primero Carmen identificó el numeral en la tira, enseguida contó el número de casilleros que hay desde el extremo izquierdo de la tira hasta ese numeral, así averiguó que el numeral en cuestión era el trece. Entonces tomó trece frijoles y se los da al Maestro. Se le preguntó cómo le podríamos hacer para saber si sí eran trece los que indicaba la tarjeta y Carmen nos dijo que sólo volteando la carta (pensando en una correspondencia biunívoca entre los puntos y los frijoles). Eso fue lo que hicimos y pusimos un fríjol encima de cada punto detrás de la tarjeta. Después escribió el trece haciendo un análisis tipográfico detallado.

La colección dibujada en la tarjeta permitió validar si la cantidad de frijoles era realmente la cantidad representada de manera oral: -trece-.

Como se explicó previamente, las colecciones dibujadas en las tarjetas numeradas funcionan para controlar la decodificación del numeral. El conteo funcionó como retroalimentador de hipótesis para saber qué número se encuentra detrás, es decir, para controlar la decodificación. Asimismo, el interpretar el numeral por el número de puntos que hay detrás de cada tarjeta numerada, hace del conteo una forma de validación.

> En la sesión cuatro se le escribió en una hoja de papel el [4], se le pusieron todas las tarjetas numeradas del lado de los puntos y se le pidió que dijera debajo de qué tarjeta se encontraba ese número. Sin ver la tira, Carmen lo tradujo a la representación oral: -es el tres-. Levantó la tarjeta tres y la retroalimentación que dio el conteo de los puntos detrás de la tarjeta hizo que rectificara y dedujera que era el –cuatro-.

El conteo, en tanto conocimiento previo, es una de las herramientas que Carmen puede usar para validar sus progresos en la decodificación de numerales. Ésta es una característica en común con los niños de cierta edad.

3.4.3 Orden

Entre los números naturales existe una relación de *orden total*, esto es, una relación binaria que es antisimétrica, transitiva y total.[63] Cuando los numerales de la numeración decimal se van generando en el orden de los números, se hacen visibles regularidades que pueden constituir una importante ayuda en el proceso de aprender a escribirlos.

Usé el *orden* de los números naturales —el cual forma parte de los conocimientos previos de Carmen— como recurso para que siguiera avanzando en su capacidad de decodificar los numerales y, sobre todo, para que empezara a observar ciertas regularidades de la serie, en particular, que después del 10, se repiten los dígitos del 1 al 9 en el mismo orden agregando un uno a la izquierda.

[63] En matemáticas la construcción de los números naturales por conjuntos hace que se defina un orden total. Para que los conjuntos tengan un orden tienen que cumplir tres características: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (antisimetría), si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (transitividad) y $a \leq b$ o $b \leq a$ (totalidad o completitud). Se puede describir también como: cualquier par de elementos en los naturales son comparables bajo la relación “mayor que”.

Esto se intentó con algunas situaciones de orden:

> Al final de la sesión dos, jugando al “tesoro”, se le pidió a Carmen esconder el tesoro y dar una pista con la condición de que dijera el número, sino cualquier alrededor. Carmen nos lo escondió debajo del [8] y dijo – [el tesoro] está después del cinco o del seis.- Se levantó el siete y no había nada. Carmen corrigió y dijo –luego enseguida del siete-. Usa el “después” de una manera que resulta ambigua: a veces es después amplio, otras es “inmediatamente después”. Está aprendiendo.

Manejar el orden de los numerales escritos desde la tira numérica no es un paso sencillo para Carmen. El orden establecido de los números tiene características didácticas que Carmen aún no construye; por ejemplo, para cada número, solo hay uno que está inmediatamente después, pero más de uno que están después. Esta pequeña hipótesis, al parecer sencilla, es una dificultad para ella.

Que Carmen maneje el orden en un nivel oral puede ser aprovechado para pasar de ese conocimiento oral al escrito. El conocer el orden de los números en su dimensión oral, es una característica específica de los adultos con baja o nula escolaridad (tal vez derivado del uso del dinero) y este conocimiento previo es una de las bases para el uso de la tira numérica como puente al uso de las grafías de los numerales.

3.4.4 Posibles hipótesis de Carmen sobre la representación escrita de los números

La mayoría de las dificultades encontradas a lo largo de la experimentación nos dejaron entrever hipótesis que Carmen tiene acerca de las grafías numéricas. Las principales son:

- Si se quita el [1] del [16] obtienes “quince”. Esta consideración proviene de la hipótesis según la cual a cada grafía le corresponde un valor. En este caso cada dígito tiene cierto valor, de manera que si a un numeral se le quita una cifra, se resta cierto valor al valor total.
- Los numerales que tienen dos dígitos representan a dos números. Por ejemplo, en una ocasión Carmen interpretó el [10] como “diez y once” porque son dos grafías diferentes. Esta consideración parece provenir de una

hipótesis similar a la del caso anterior: a cada grafía le corresponde un número.

Estas observaciones motivaron algunas intervenciones no planeadas en la construcción de la situación didáctica, con el fin de confrontar las hipótesis de Carmen. Por ejemplo, cuando Carmen manifestó que el [10] son dos números distintos, el diez y el once, se le pidió recordar que a cada cuadro en la tira le corresponde uno y sólo un número. Esta intervención hace ver que cuando utiliza el material es necesario recalcar la correspondencia uno a uno de cuadro con numeral y número.

El siguiente ejemplo dará cuenta de la apropiación[64] del material y de algunos puntos interesantes, entre ellos, la elaboración de hipótesis acerca de la representación escrita de los números:

> En la sesión cuatro se le dio a Carmen la tarjeta numerada [10] y se le preguntó qué número era. Carmen dijo –veinte-, buscó otro número parecido en las tarjetas y como no lo encontró, afirmó que era el –veinte-. Se optó por mostrarle el [20] en las tarjetas para que lo comparara. Al parecer el cero es un indicio para decidir qué número es, ya que al comparar gráficamente los numerales ella dice que se parecen en la "bolita" pero al comparar el primer dígito dice que no son iguales. Al notar esa diferencia volvió a la tira numérica y encontró que era el diez.

En esta actividad se puede observar que Carmen elabora hipótesis acerca de la escritura de los numerales; en este caso asume que si el numeral tiene un cero será -veinte-. Esta hipótesis deja ver que Carmen va desarrollando ideas acerca de la representación de los números con base en la comparación entre grafías. Carmen compara los numerales haciendo de *la diferenciación de características tipográficas* su herramienta para conocer cómo se escriben los números.

Durante el estudio de las diferentes situaciones didácticas se gestionó una nueva herramienta para Carmen: la comparación entre numerales. La comparación funcionará entonces para discriminar el número que pretende escribir de los que no y con ello dar un paso adelante en la escritura ágil de los números.

---

[64] Entiendo *apropiación* en un sentido simple de uso con autonomía para ciertos fines, imprimiendo las adaptaciones necesarias

Cabe señalar, también, que las actividades en clase se transformaron *in situ*. Cambié algunas actividades para confrontar las hipótesis de Carmen. La transformación de las actividades es un acto común al docente. El maestro "concibe y manipula las *regulaciones didácticas* para modificar el medio objetivo"[65] (Brousseau, 2007:56) y motivar que el sujeto aprenda corrigiendo sus acciones.

En este caso, le presenté la tarjeta [10] y se le pidió compararla con la tarjeta [20] en vez de simplemente decirle que el número que ella había elegido no era el veinte. Esta acción propició que Carmen cuestionara su hipótesis, y creara una nueva, asumiendo que los números que tienen cero pueden ser números diferentes al veinte.

Noto también la apropiación que Carmen tiene sobre la tira numérica. Cuando Carmen se encuentra con una hipótesis de la que duda, regresa a la tira numérica para comparar. Carmen regresa a la tira para observar que tanto el [10] como el [20] están en la tira y están en cuadros diferentes y, por lo tanto, no son el mismo número aunque tienen un mismo símbolo [0]. El regresar a la tira es una nueva característica de apropiación, esta vez, construida de manera espontánea.

3.4.5 Progresos

Poco a poco Carmen mostró progresos notorios, su destreza para codificar y decodificar cuantificando puntos en las tarjetas numeradas y codificándolos a numerales usando la tira numérica mejora en cada sesión. Ejemplo:

> En la sesión 4 se le pusieron todas las tarjetas numeradas, en orden y del lado de los puntos, y se le pidió que encontrara la tarjeta con –diez puntos-, después, con ayuda de la tira, escribiera el número que está detrás de la tarjeta que había tomado y lo comparara con el numeral detrás de la tarjeta. Carmen comenzó con un conteo de los puntos de todas las tarjetas desde la izquierda a la derecha usando únicamente la vista; luego, comenzó a contar los puntos con el dedo, se detuvo y nos preguntó si podía contar con los dedos; le dije que sí. Para corroborar que la tarjeta que tomó sí era la de diez contó los puntos, uno por uno, mientras los fue coloreando. Para escribir el 10, primero lo identificó en la tira y luego lo copió en una hoja. Comparó el numeral que ella escribió y el del reverso de la tarjeta y dijo -sí es-, es decir su número escrito y el número en la tarjeta son similares gráficamente.

[65] Es el sujeto posicionado como alumno ante la situación objetiva. El alumno está en posición de sujeto que actúa.

Posterior a esta situación, de la misma manera, le pregunté por el tres. Carmen señaló la tarjeta rápido. Volteó la carta, sin querer, y ella misma dijo –¡ah! Me equivoqué, la tenía que voltear después de escribir el número. Bueno, de todas maneras está acá (refiriéndose al numeral [3] en la tira numérica). Esto pone de manifiesto que ya ubica rápidamente el tres en la tira. En esta parte escribió muy bien el numeral tres, comparado con los intentos anteriores. El avance en su destreza para pasar de número oral a número escrito es notorio.

Además, existieron indicios claros de la apropiación de la herramienta:

> En la cuarta sesión se le pidió a Carmen que encontrara la tarjeta [5] entre todas las tarjetas numeradas. Ella encontró la tarjeta contando los puntos del reverso de la tarjeta y cuando se le pidió que escribiera el número, dijo que no se acordaba y *pidió la tira numérica para reconocerlo*. Al reconocerlo lo copió y lo revisó con la tarjeta.

Considero que el hecho de *pedir la tira numérica* expresa un indicio de la apropiación de la herramienta, puesto que ella reconoce la función de esta herramienta. Con este hecho Carmen "corrige sus acciones y anticipa sus acciones" (Brousseau, 2007): sabiendo que la tira numérica funciona como un "diccionario", la pide de *motu propio* para reconocer qué numeral es en una circunstancia en la que es pertinente.

Al pasar las sesiones, la apropiación de la tira fue cada vez más manifiesta y con ello Carmen llegó a reconocer algunos números sin tener que recurrir a la tira.

> En la sesión cuatro volvimos a jugar al "tesoro". Esta vez escondimos el tesoro debajo de la tarjeta [8] (en todas las tarjetas el numeral era el lado visible). Carmen lo reconoció sin usar la tira. Este logro fue, posiblemente, producto del énfasis en el [8] durante todas las actividades previas. También es probable que sea el [8] por la simpleza de forma gráfica: dos círculos.

En la misma sesión se le escribió en un papel el numeral [1] y se le pidió que encontrara la tarjeta en la que estaba ese número (las tarjetas estando por el lado de la colección). Sin la tira reconoció el uno, lo buscó en las tarjetas, la volteó y verificó.

Cuando Carmen ya reconoce varios de los números, pone en juego un nuevo recurso: *el conteo a partir de números que ya reconoce*. Al no identificar un numeral, ella usa el hecho de que los numerales están ordenados. Por ejemplo, cuenta desde el ocho que ya identificó, hasta el número que se le indicó (en lugar de contar desde el uno). Esto ocurrió cuando se le pidió encontrar el tesoro debajo del [15], Carmen dice que ya no se acuerda qué número es y opta por numerar oralmente las tarjetas a partir del ocho hasta llegar al 15, (ocho, nueve, diez…). Por último levantó la tarjeta y encontró el tesoro.

Comparando lo registrado en la exploración de conocimientos con el final de la cuarta sesión, considero que Carmen tuvo un avance. La tira numérica fue una herramienta útil para que reconociera los numerales y con ello la escritura de los números, a partir de conocimientos que ella ya poseía.

3.5 Números grandes: "El cheque"

3.5.1 Resumen del proceso

La siguiente tabla muestra la cantidad de actividades por tipo de tarea de la secuencia para números grandes, en la que se usó el dispositivo "El cheque" (entre corchetes están los números codificados o decodificados):

		Número de actividades [valores]
Ejemplos		**3** [123, 32, 31]
Codificación	Con dinero	**3** [212, 381, 423]
	Desde la representación oral	**2** [200, 222]
Decodificación		**8** [528, 49, 148, 58, 419, 832, 5, 64]

En la siguiente sección se mostrarán las actividades más representativas e ilustrativas de los ejemplos sobre codificación y decodificación.

3.5.2 Análisis de las situaciones didácticas

a) Proceso de transmisión de la consigna

El material se presentó al comienzo de la quinta sesión preguntándole a Carmen si reconocía los números que hay en cada moneda y billete. Carmen primero reconocía de qué moneda o billete se trataba y luego buscaba el número dentro de la moneda o billete. Posteriormente se analizaron con más cuidado las monedas y el billete dibujados en el cheque. Después entre Carmen y yo hicimos el trabajo de reconocer algunos numerales dentro de las monedas y billetes, algunos sin usar la tira [$1, $2] y otros con la tira [$5].

Lo que veremos a continuación es un ejemplo de cómo el referente dinero puede empezar a apoyar la decodificación, respondiendo al propósito con el que se construyó la situación didáctica para números grandes.

La consigna con Carmen se modificó con respecto a la consigna utilizada con Rocío. El principal cambio fue un énfasis en que los números que se escriben en el cheque no representan el valor total, sino indican *sólo el número de monedas o billetes que se tienen*, es decir, se explicó, por ejemplo, que para tener cien pesos, no se deben poner “cien” en la casilla del $100, sino el número de billetes que se quiere en la casilla correspondiente: [1] en la casilla debajo de $100.

Una segunda modificación en la consigna consistió en presentarle el material con un ejemplo de cómo se usa, en vez de dejarla usar el material y verificar con el mismo; se le dijo:

> –Este material funciona para escribir número mayores que veinte, […] funciona poniendo el *número de monedas* de $1, el *número de monedas* de $10 y el *número de billetes* de $100. Se optó por darle un ejemplo de escritura con dinero. Se le dio en dinero [$123=$100+2($10)+3($1)] ella lo contó y el maestro lo escribió sobre el cheque y se le insistió en que notara que sólo se escriben el número de billetes y no la denominación.

Al ponerle un ejemplo a Carmen de cómo se escribe un número en el cheque se registró un mejor desempeño, en comparación con Rocío, el cual se reflejó en un menor uso de una escritura literal de los números, descomponiendo un valor en su escritura desarrollada. No se debe perder de vista que, además de estos cambios, otros factores pudieron influir en la mejor comprensión de la consigna, empezando por el hecho de que Carmen no tenía conocimientos sobre le escritura de los números que perturbaran su interpretación del cheque.

Con el ejemplo se pretendió mostrarle cómo se usa el dispositivo del cheque y con ello que observara que a cada cuadro le corresponde uno y sólo un número.

Una tercera modificación a la consigna utilizada con Rocío para introducir el material consistió en añadir a la consigna original la instrucción de que "El cheque" es como *hacer una lista de compras y* que en cada casilla se iba a poner *el número de billetes, no lo que vale cada billete*. Este añadido fue producto del desempeño de Rocío usando el material. Explicaré un poco más este cambio.

Cuando se utilizó el material con Rocío se notó que recurrentemente escribía una cantidad global dentro de un cuadro, es decir, para escribir 999 escribía el 900 debajo de la casilla de $100, 90 debajo de $10 y 9 debajo de $1. Para tratar de evitar que este tipo de escritura en el cheque no se repitiera con Carmen se hizo énfasis en que no se escribiera lo que valen los billetes o monedas, sino la cantidad de billetes o monedas.

Comenzaré el análisis destacando algunas ideas sobre la escritura que me parece que Carmen puso de manifiesto y, al mismo tiempo, señalaré como las fue modificando en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la sesión cinco (primera sesión utilizando el Cheque) le pedí a Carmen (quien en ese momento era el banco) darnos la cantidad de $49 pesos escrito como un [4] debajo del $10 y un [9] debajo del $1. Carmen observó la tabla comparando los números con la tira numérica. Primero reconoció el 9 y enseguida reconoció el 4 (aun cuando la tipografía era diferente). Al preguntarle ¿cuánto le estaré pidiendo?, ella reconoció el 4 pero lo asoció con los billetes de $100. Al parecer tiene una primera hipótesis: el número de la extrema izquierda es siempre de "cien".

Después de revisarlo juntos, Carmen se dio cuenta que está debajo de la moneda de $10. Enseguida, cuando a Carmen se le pidió reconocer cuántos billetes de cien le estaba pidiendo, pensó que le pedí un billete de $100, por el dibujo que hay en el cheque (esta es una dificultad generada por el diseño de la tabla misma, tal vez inevitable). Se le dijo que sólo se fijara en el número debajo del dibujo, que lo de arriba era sólo "para saber cuánto valen". Ella dice entonces "me pidió cuarenta y nueve". Al final se le explicó que un [4] y [9] juntos y en ese orden son el cuarenta y nueve.

Además de los ejemplos resueltos, otro tipo de "ayuda" fue recordarle constantemente cómo usar "El cheque", es decir, decirle que en cada recuadro sólo se puede escribir una y sólo una cifra.

> En la sesión cinco se le dieron $212 con billetes de $100, $10 y $1 y se le pidió escribir ese número en el cheque. Ella preguntó: —¿Los pongo dónde?— Se le explicó que sólo se escribe el número de billetes. En la casilla debajo del $100 escribe un [2].
> Para escribir cuántas monedas de $10 tenemos, le preguntamos ¿cuántas monedas de diez hay?, ella nos dice: una. Le preguntamos: ¿entonces qué ponemos aquí? (señalando el recuadro debajo de la moneda de $10). Ella nos respondió –tres-, yo le pregunté -¿Tres? ¿por qué?, ella corrige y dice –diez-; le volvemos a decir que en la casilla sólo se escribe *el número de monedas, no cuánto vale el billete.* Después de un intento fallido (diciendo -doce-) Carmen dice –una (moneda)- y se le dijo: entonces se escribe el uno. Ella nos responde: ¡Ah yo pensaba que eran estas (las de uno) con estas (las de diez)-, refiriéndose a contar.
> Con las monedas de $1 no hubo problema porque ella misma entendió que iba un 2 en el lugar debajo del $1. Al preguntarle ¿qué número está debajo del $10? (estaba el 1) responde: "el diez" y ella misma rectifica, después de pensarlo, que no, que era el uno. Al pedirle que nos diga cuánto dinero hay en total nos dice: doscientos doce.

Cuando Carmen dice "¿Los pongo dónde?", lo más probable es que no está pensando en el símbolo "200" puesto que aún no lo conoce, sino en el garabato que deberá poner, quien sabe cual, puede ser el 2 o quizá otro. Esta actividad es el primer intento de codificar un número dentro de "El cheque".

Sin duda yo guié a Carmen para que pusiera el número dos debajo de la casilla de $100, pero cabe observar que cuando le pregunté —¿entonces qué ponemos aquí? — su respuesta –tres- probablemente se refería a las tres monedas que estaban sobre la mesa, una de diez y dos de un peso. Pero frente a mis preguntas —¿tres? ¿por qué? — ella corrige y entonces se va al valor global, no al número de monedas.

Es decir, existe un intento de entender que se escribe tres —monedas que quedan—, hay otro intento donde dice doce —menciona lo que falta pero en valor global— y al final parece entender que se consideran las monedas de $10 y las de $1 por separado porque dice: —ah yo pensaba que eran estas (las de uno) con estas (las de diez).

Aunque Carmen no conoce como Rocío la representación escrita del número (10), si tiene una intención similar a la de Rocío de escribir en el casillero el valor total que representa la moneda: diez pesos, y no el número de monedas: una moneda. Se asoma la dificultad de separar valor absoluto y valor relativo, sin embargo, Carmen solo presentó esta dificultad una única vez.

En las diferentes actividades usando “El cheque” se pretendió ir poco a poco alejando el dinero físico para quedarse sólo con un análisis en el registro escrito. Sin embargo, se optó en repetidas ocasiones en darle el dinero para que aprovechara su conocimiento de –conteo del dinero- y luego lo transcribiera. Ejemplo:

> Escribiendo en “El cheque”, Carmen le tuvo que pedir al banco (en este caso el camarógrafo) una cantidad que se le dijo oralmente: cuatrocientos veintitrés pesos. Al principio, Carmen parecía no saber cómo hacerlo ya que se quedó callada. Se le pidió que pensara en cuántos billetes de $100 le pediría para obtener $423, ella dijo –¿trece?-. Se analiza cuántas monedas/billetes de cada una se necesitarían para obtener $423, para lo cual se optó por darle el dinero y ella lo fue contando. Poco después, Carmen escribió el número de billetes y monedas en cada espacio correspondiente. Lo escribió bien usando de apoyo la tira numérica, aunque se tardó (10 minutos). Ahora el “banco” lo lee. Pero no se lee bien (por la grafía) y el banco confunde el 4 con un 0. Después de preguntarle a Carmen qué número era, cuatro o cero, el banco le da $433 pesos (en vez de 423, a propósito para ver si lo cuenta bien). Carmen lo cuenta y le devuelve $10.

Al darle el dinero perdió un poco el sentido de la actividad que consistía en que “El cheque” iba a ser el vehículo para comunicar la cantidad que ella iba a recibir. Ya teniendo el dinero, anotar la cantidad en “El cheque” se convirtió entonces en un ejercicio de pasar al papel sin otro propósito que el de hacerlo. Se insinúo aquí otra vez un “efecto Topaz”, aunque, probablemente, esto fue necesario.

Cabe hacer la observación de que el hecho de que “el banco” le diera una cantidad errónea de dinero para observar si Carmen se daba cuenta, constituye un recurso docente que a veces funciona para propiciar un mayor análisis de los elementos en juego por parte del alumno.

b) Procesos de Codificación y Decodificación en el material de “El cheque”

Codificación

La codificación es el proceso mediante el cual se convierte en numeral escrito un número oral o concretizado en dinero. Dicho proceso con el material de “El cheque” pide que el adulto parta de cierto conocimiento previo: suma y resta de números en un rango de $0<x<999$, conocimiento de la escritura de los primeros diez dígitos y una idea de que las cantidades globales se pueden expresar con un solo dígito (Ejemplo: que 500 se exprese con un solo 5 en el cuadro debajo del $100).

El puente entre las dos representaciones de los números se procuró abordar con la modificación del rol del banco, esto es, en vez de codificar primero, ahora decodificaba los números en “El cheque”. Pretendí que en el momento que Carmen fuera el banco, *decodificaría* un numeral hacía una representación oral y cuando ella no fuera el banco, podría *codificar* la representación oral hacía la escrita. En este proceso, se observó que Carmen tenía un buen desempeño en cada una de las actividades, por ejemplo:

> En la sexta sesión se le pidió a Carmen escribir el $222 en “El cheque”. Le preguntamos: ¿cuántos billetes de $100 tenemos que pedir?, ella nos respondió dos y anotó el 2 debajo del billete de $100. ¿Cuántas monedas de $10? Ella nos respondió dos y escribió el 2 debajo de $1. Así mismo con el $1 y siempre copiando el 2 en la tira. Escribió 222 en la tira.

A partir de la asociación de las cifras de un numeral con los billetes/monedas de 100, 10 y un pesos, Carmen fue logrando cierta comprensión del sistema de representación de los números. Su desempeño en la actividad que mostraré a continuación ejemplifica bien este logro, a la vez que deja ver las dificultades que tuvo y, también, la manera ejemplar en que logró integrar sus conocimientos de matemáticas orales con los nuevos conocimientos acerca de la representación escrita.

> En la sexta sesión se propuso una actividad de juego con dados usando “El cheque”[66]. A cada dado se le asocia un valor, un dado para $100 otro para $10 y otro para $1. Los tres dados de diferente color corresponden al número de billetes/monedas que se irá sumando dependiendo de a qué dado le corresponde qué valor nominal.
> Se empieza por el número 64 escrito en “El cheque”. Para comenzar la actividad se optó por dar un ejemplo; en el dado correspondiente a

[66] Sin marco.

> los billetes de $100 nos sale 4, es decir, tenemos que sumar 4 billetes de $100 a los 64 pesos que ya estaban escritos en el cheque. En el ejemplo ella responde: -cuatrocientos sesenta y cuatro- y dice que le falta un cuatro en el cuadro debajo $100 en el cheque-.
> Ahora nos sale 1 para las monedas de $10, le decimos que le tenemos que sumar uno de diez a 464, ella dice (suma mentalmente) –cuatrocientos setenta y cuatro- y luego le pregunté: ¿qué tenemos que cambiar para que en vez de 464 sea 474, ella nos dice –tenemos que cambiar el *setenta*-, al decir esto nos señala el 4 de los billetes de $100. Para ayudarla le pedimos que escriba en una hoja en blanco el [464] y el [474] y que lo compare, para lograrlo se codificó con "El cheque". Carmen observa rápidamente que el único que cambia es el seis.

Así, Carmen logra identificar la cifra que hay que modificar para que un número se "convierta" en otro, diez unidades mayor. Continuando con la actividad:

> Tirando el dado, Carmen tiene que sumar 4 de a $1, ella suma mentalmente, obtiene 478 y nos dice que tenemos que cambiar el 4 por el 8 (lo escribe sin usar la tira). Regresamos al dado de $100 y nos sale 1. Le pregunté ¿1 de $100 más 468?, ella calcula mentalmente y respondió 568. Ella nos dice lentamente que "*hay que cambiar el 4 por un 5"*.

Aquí, dados dos números con una diferencia de 100 representados oralmente, Carmen logra saber, de manera sobresaliente, que lo único que cambia es la cifra de las centenas, es decir, logra identificar el cambio en el registro de lo escrito, con lo cual muestra que puede empezar a traducir una transformación aditiva del sistema de numeración oral al escrito. La actividad continúa:

> Nos sale el 5 monedas de $10 y le pregunté: ¿cuánto es 568 más 50?, ella calcula mentalmente y dice: 618. ¿Cómo lo cambiamos? Ella nos dice que tenemos que "cambiar el 5 por un 6 y también el 6 por el dieciocho". Después de preguntarle –¿cuántas monedas de diez se necesitan para dieciocho?- ella nos responde -una y escribimos un 1-.

Notemos cómo Carmen, al tener la capacidad de reconocer las regularidades del sistema desde lo oral, logra codificar los numerales dentro de "El cheque". Este, es un gran avance partiendo de que Carmen no reconocía la diferencia entre dibujos, letras y numerales.

Las dificultades más serias de Carmen fueron: el reconocimiento de numerales, y pensar que las monedas del marco de "El cheque" también se cuentan. La primer dificultad es relativa al no reconocimiento de los numerales, aunque esto se sorteó con el uso de la tira numérica. Carmen utilizaba la tira numérica como dispositivo de traducción.

La segunda dificultad responde a que en “El cheque” no es claro el porqué de los encabezados. En la consigna se omiten las explicaciones del porqué de los dibujos de las monedas y billetes.

Al parecer, la dificultad que vimos con Rocío deriva de las dificultad de que a una cifra le corresponden dos tipos de valencia. A continuación explicaré esto. Las dos valencias son:

- Valor absoluto: Es el que queremos que los adultos utilicen para codificar y decodificar, es el número de billetes o monedas.
- Valor relativo: Es el que aparece cuando se considera el valor total representado por la cantidad de billetes o monedas, es el valor al que se llega haciendo sumas repetidas.

500 pesos

Valor absoluto del 5: **5** (remite a billetes de 100 pesos)	Valor relativo del 5: **500** remite a unidades de un peso

La dificultad radica en aceptar que el 5 (valor absoluto) pueda representar 500 (valor relativo.

La ambivalencia de las cifras del sistema decimal (valor absoluto, valor relativo), puesta en juego en el dispositivo del “El cheque” (número de billetes y valor total de esos billetes), constituye una dificultad para los adultos no alfabetizados, no solamente cuando éstos tienen ya ciertos conocimientos sobre escritura de números que entran en conflicto con dicha característica, como en el caso de Rocío, sino también, aunque en menor medida, cuando no hay conocimientos previos sobre la escritura, como en el caso de Carmen.

Cabe destacar que esta dificultad no ocurre en el registro oral, pues ahí, aun en el caso poco usual en el que una cantidad es nombrada mediante el número de billetes o monedas que la componen, por ejemplo, cinco billetes de cien, el referente, billetes de cien en este caso, se enuncia inmediatamente junto a la cifra que cuantifica. Es claro que el "5" remite a los billetes de cien pesos y no a unidades de un peso.

Es probablemente por todo esto, que Carmen, quien prácticamente no tenía conocimientos de escritura, pudo entender que en el cheque las cantidades se separan en sus valores absolutos y esos son los números que se escriben.

Decodificación

Preví que durante el proceso de decodificación[67] una posible dificultad de Carmen podría ser la misma que con Rocío, es decir, aceptar que una cantidad "grande" como 400 se pueda escribir con números tan pequeños como 4. Par evitar esta dificultad se modificó la situación original y ahora, en la mayoría de los casos, se optó por mostrarle los billetes para que los contara en vez de sólo el registro oral.

Mostraré un ejemplo de cómo Carmen decodificó usando el cheque.

> En la quinta sesión, era el turno de Carmen ser el banco y se le entregó, de manera escrita en el cheque: $528. Sin explicar nada, ella tomó su tira numérica y comparó los números escritos. Ella dijo "serán como ochocientos"". Se le preguntó ¿cuántos billetes de cien le tiene que dar al maestro?, ella dijo -cien pesos-, pero ella misma dice que no y busca en su tira. Confunde el 3 con el 5 porque "tiene la misma parte de abajo". Encuentra que se parece más al cinco, cuenta cinco billetes y los aparta. Se le pregunta -¿cuántas monedas de $10 le pedimos?-. Reconoce que es el 2 comparando (de uno en uno) con la tira, cuenta las monedas y las va juntando con los billetes (no reconocía el dos por estar en diferente tipografía). Al final reconoce muy fácil el 8 (ella misma dice que ése ya no se le olvida) y cuenta 8 monedas de $1 y listo.

Su primera aproximación "serán como ochocientos" pudo provenir del hecho de que la cifra "8" es la que mejor reconoce. La mayor dificultad de Carmen al decodificar fue

[67] Recordemos que he llamado "decodificación" al proceso mediante el cual se pasa del código escrito al oral, o a la concretización.

entender los numerales escritos en el cheque, pero, con ayuda de la tira numérica, logró de manera acertada comparar y reconocer cada número.

Cabe señalar, por otra parte, que el uso de la tira numérica en las situaciones didácticas de “El cheque” fue recurrente. La tira numérica funcionó como apoyo para comparar grafías, para reconocer un numeral, como dispositivo de control, o simplemente como un recurso que parecía dar seguridad a Carmen. Ejemplificaré;

> En la quinta sesión, se le dio una tabla sin marco a Carmen donde estaba escrito [148] de forma que cada numeral estaba en la casilla correspondiente, se le preguntó ¿cuál es? Carmen reconoce primero las cifras. –éste es el uno, éste es el ocho y el cuatro- (al parecer el orden en que los dijo fue porque unos se los sabe más). Ella nos dice: serían cuatro monedas de diez y ocho de peso y luego uno de cien. Se le pregunta: y ¿todo junto?, ella cuenta en su mente cuantas monedas serían y nos dice ciento treinta y ocho, analizamos brevemente y nos dice: ciento cuarenta y ocho.

El reconocimiento de números con apoyo de la tira es un signo de apropiación de la tira numérica y, con el apoyo de “El cheque”, puede ser un paso hacía el uso de la escritura del sistema decimal de numeración. En esta actividad se nota un avance claro de Carmen al poder decodificar un número escrito en una tabla sin marco y sin usar el dinero real. El recurso a su conocimiento previo se hace presente al sumar mentalmente cantidades globales y llegar a obtener el resultado, es ahí donde Carmen logra poner su conocimiento de suma de números al servicio de la escritura de los mismos.

En varias ocasiones, al intentar entender “El cheque”, Carmen recurría a la tira numérica para escribir los números o para leerlos. Por ejemplo, en la sexta sesión se le escribió en “El cheque” sin marco 832.

> Por las repetidas ocasiones en que se trabajó con el numeral ocho, Carmen reconoce rápidamente el 8 y dice: ¿son 8 de diez? Se le recuerda “El cheque” con marco y reconoce que 8 se refiere a los $100. Para reconocer los numerales 3 y 2 acude a su tira numérica y después traduce. Al mismo tiempo va sumando al mismo tiempo: son ocho de cien más tres de diez, ochocientos treinta, más dos de a peso, ochocientos treinta y dos.

Es importante registrar que Carmen, al trabajar con ”El cheque”, tiende a recurrir a su tira numérica como herramienta de traducción y le da confianza para reconocer numerales. En esta ocasión se nota que al emplear un numeral con frecuencia, en este caso el 8, logra reconocerlo sin usar la tira numérica. Además, sin decirle que use la tira, ella la toma para traducir las cifras y así componer, por medio de operaciones mentales, el número escrito en el cheque.

3.5.3 Relación con las grafías, un proceso difícil

La relación de Carmen con las grafías resultó un proceso difícil, y también interesante, en el que se dejaron ver posibles hipótesis de Carmen y en el que también se registraron logros. Debido a que este proceso ocurrió en la experimentación de “Números Chicos” y “Números Grandes”, agrupé todo lo registrado en este apartado.

<u>Dificultades para identificar los rasgos característicos de cada grafía.</u>

Un ejemplo se presentó en la sesión 1, Carmen pensó que el [5] y el [3] eran el mismo número, le pregunté por qué y nos señaló que la parte inferior de los numerales [5] y [3] es exactamente igual.

Otro ejemplo, tomado de la secuencia de números grandes es el siguiente: a partir de la petición de leer el número [7], Carmen confundió este numeral con el [1] ya que las diferencias gráficas entre los dos numerales son realmente muy pocas: la línea horizontal superior del [7] es en el [1] pequeña y con una inclinación, la línea que en el numeral [1] es vertical, en el [7] es curva y ligeramente convexa hacia la derecha.

Veamos un último ejemplo: al final de la última sesión hicimos una visita a una tienda cercana, observamos precios y números escritos en algunos productos en la tienda. Carmen intentó leer un [1] pero como la tipografía era con un ancho considerable y tenía una línea horizontal de base (*1*) lo confundió con un [12].

Así, identificar qué es lo que en un numeral puede cambiar y qué es lo que no debe cambiar para que siga simbolizando al mismo número, es problemático para Carmen, y probablemente para cualquier persona en proceso de aprender.

Esta dificultad pretendió enfrentarse mediante la muestra de diferentes tipografías impresas en una hoja de papel. Cada renglón está lleno de un mismo número con diferentes tipografías y se le pidió a Carmen hacer su propio numeral a un lado de la hoja y decir en qué se parecía y en qué no.

Dificultades para trazar

En la primera sesión donde se le pidió que localizara el [8]. Carmen comenzó a contar, de izquierda a derecha cada cuadrito de la tira numérica hasta encontrar el ocho. Al intentar escribirlo surgieron varias dificultades generadas por falta de la destreza que requiere trazar un numeral. Sobre esta dificultad volveré más adelante. En varias ocasiones que se le pidió escribir un número, Carmen argumentaba que no sabía cómo escribirlo pero lo identificaba rápido en la tira numérica.

Otra de las más visibles dificultades es la que tiene que ver con el diseño gráfico de los numerales de la tira: los numerales, puestos al centro de cada cuadro con letra bold y esto hizo que, cuando Carmen quiso copiar el numeral [3] en el [13], lo intentó siguiendo el borde del número para después rellenarlo, lo cual se le complicó mucho y desistió argumentando que no sabía escribir los números.

La tipografía de los números usados para un material de adultos requiere de un análisis más cuidadoso, pues con facilidad dan lugar a dificultades. Mas adelanté daré propuestas de tipografía cuyo uso puede ser adecuado para estos fines.

3.5.4 Progresos

El dispositivo de "El cheque" pretende ser una opción para una enseñanza del número haciendo una descomposición en su escritura desarrollada (2 de cien, 1 de diez y 2 de uno). Para Carmen, resultó útil en dos sentidos: uno, logró consolidar la tira numérica como herramienta fundamental de apropiación y traducción de los numerales, y dos, logró un avance en la escritura de números de dos y tres cifras.

Una de las expresiones de avance fue cuando Carmen, en sólo la segunda oportunidad de codificación con "El cheque" logra escribir $381 en él.

> En la quinta sesión, se le dan $381 y se le pide que lo escriba. Carmen cuenta los billetes de mayor a menor denominación y dice: son trescientos ochenta y uno. Se le pidió acomodar los billetes y monedas arriba de los cuadros que les corresponden y luego anotar el número de billetes/monedas que hay. Se le pregunta: -¿cuántos billetes de $100 tenemos?- ella nos dice: tres y anota 3 (lo reconoce rápido en la tira numérica) debajo del $100 en la tabla. Después ella nos dice que va el ocho. Lo apunta (sin ver la tira) debajo del $10.

> Después de preguntarle cuántas monedas de $1 tenemos, Carmen apunta un 1 debajo del $1.

Desde ese momento y hasta finalizar la última sesión, Carmen logra codificar, aunque lentamente, diferentes números dentro de “El cheque”.

Otra manifestación de los logros de Carmen ocurrió cuando introdujimos la calculadora. El avance que aquí presento incluye una apropiación de la herramienta “El cheque” utilizado en una nueva actividad para escribir números de tres cifras. Un aspecto interesante de la calculadora es que la forma de digitar un número, de la cifra de mayor valor a la de menor valor, coincide con la forma usual de conteo oral de los billetes: de mayor a menor denominación.

> En la séptima sesión, cuando se introdujo la calculadora se le explicó que para escribir el 185 primero se escribe el número de mayor “denominación” (traduciéndolo desde “El cheque”). Se le explicó que se pone el número de billetes/monedas de cada denominación en orden de mayor a menor. Ella apretó el 1, después el ocho y dice -sólo nos falta el cero-. Le pregunté qué número quería escribir y nos repite –ciento ochenta y cinco- y ella misma nos dice -para 185 hay que apretar el 5-. Carmen aprieta el 5 y se le dice –el número que aparece en la pantalla es el ciento ochenta y cinco-.

Al pedirle, en esta nueva actividad, que “escriba” el trescientos veinticuatro, Carmen optó por primero escribirlo en la tabla sin marco y luego apretar cada dígito en la calculadora de izquierda a derecha (sin usar la tira). Podemos ver en esta decisión un indicio de una apropiación de la herramienta de “El cheque”, ya lo utiliza espontáneamente para codificar el número y luego lo vuelve a codificar en la calculadora.

Un ejemplo de los logros que Carmen fue teniendo, y también de sus limitaciones, ocurrió al final de la séptima sesión cuando salimos a la tienda más cercana y nos encontramos un reloj de manecillas. Carmen pudo leer los numerales, comparándolos con los de la tira numérica. Le intenté explicar la manera de leer la hora en el reloj pero resultado muy complicado, sólo logré transmitir que la aguja pequeña apunta la hora.

En la última sesión se le pidió escribir veinticinco en una hoja en blanco y en la calculadora:

> Ella lo escribió en una hoja, copiando sólo el 5 de la tira, diciendo: dos de diez y cinco de a peso, y escribe 25. Luego Carmen lo escribió en la calculadora, primero apretó el 2 y luego el 5.

Notemos cómo Carmen traduce su conocimiento oral de la suma de veinte pesos más cinco pesos y logra, con ayuda de la descomposición propiciada por el "El cheque", escribir [25].

Mirando en retrospectiva el avance que Carmen logra desde no diferenciar los números y los dibujos hasta escribir números de tres cifras en la calculadora, constituye una mejora clara de entrada a la escritura de los números. El reconocer los números con o sin el uso de la tira numérica brinda un acceso a la cultura escrita. Esto no quiere decir que previamente no tuviera algún alcance, ya que, como pudimos registrar, Carmen había logrado relacionarse con los números gracias a la intermediación de sus familiares.

Capítulo 5. Conclusiones

En este estudio se partió de la premisa de que, dado el importante conocimiento sobre la numeración y el cálculo orales que los adultos no alfabetizados suelen tener, es pertinente y deseable seguir explorando formas de facilitar el acceso a la escritura de los números que recuperen en la mayor medida posible esos conocimientos.

Se encontró que en los materiales actuales para la enseñanza de la numeración escrita, se tienden a retomar los *contextos* en los que los adultos utilizan los números pero las secuencias didácticas no retoman de manera importante los conocimientos que los adultos suelen tener sobre numeración y cálculo orales. Incluso, frente al propósito de enseñar a los adultos los algoritmos convencionales, estudios recientes destacan el carácter de obstáculo de sus conocimientos previos.

En el presente estudio considero que ese hecho, el que los conocimientos previos de los adultos constituyan un obstáculo para el aprendizaje de los algoritmos convencionales, se suma a una lista de argumentos, entre ellos la presencia generalizada de la calculadora, que cuestionan la pertinencia de enseñar esos algoritmos a los adultos.

Así, se emprendió una búsqueda de alternativas didácticas que crearan un puente entre dos tipos de registros semióticos de la numeración, el oral y el escrito, con la mayor recuperación posible de los conocimientos previos. Con esto en mente se revisaron estudios preliminares que sentaron la base para la construcción de dos secuencias didácticas para la enseñanza de la numeración escrita, mediante la metodología de la ingeniería didáctica.

La primera secuencia didáctica se organizó en torno a una serie numérica escrita del uno al 20 (la “tira numérica”). Esta secuencia funcionó de manera muy satisfactoria: se logró que, conforme a lo planeado, el adulto con quien se trabajó, Carmen -quien no distinguía letras de números- identificara y escribiera números hasta 20, en un plazo relativamente breve. Carmen accedió a la escritura utilizando su conocimiento previo del conteo de una manera que resultó tan simple como eficaz: identificaba el numeral que necesitaba contando sobre la tira.

Los resultados obtenidos con Carmen permiten afirmar que la tira numérica constituye herramienta muy útil en el proceso de aprender a escribir los números hasta 20, poniendo en juego de manera significativa el conocimiento del conteo de los adultos no alfabetizados.

La segunda secuencia de situaciones buscó facilitar el tránsito del registro oral de una cantidad de dinero hasta de tres cifras, al registro escrito. Se organizó en torno al dispositivo de “El Cheque” el cual da lugar a una descomposición de una cantidad en cierto número de billetes de cien y de monedas de 10 y de uno. La secuencia fue aplicada con dos adultos, Rocío y Carmen, quienes tuvieron distinto desempeño. Rocío ya conocía el registro escrito de algunos números. Al parecer, ese conocimiento le dificultó aceptar que un número como 500 se pudiera representar solo con solo dígito en la tercera posición del cheque (5 referido a billetes de cien). Rocío tendió sistemáticamente a escribir en cada casilla del cheque, la cantidad global (escribía “500” en la casilla de billetes de cien, en lugar de “5”).

Al requerirse que las cantidades se expresen a la manera de la notación desarrollada (por ejemplo 5 de 100 + 3 de 10 + 2), los dígitos adquieren, en el dispositivo de el Cheque, dos valencias, 5, por ejemplo, expresa cinco cosas (es su valor absoluto) y la vez 500 (es su valor relativo). Trabajar con esta doble valencia resultó difícil para Rocío.

Carmen en cambio, quien no sabía escribir los números, pudo superar la dificultad y empezó gradualmente a usar el cheque tanto para escribir números como para interpretarlos[68]. Como previsto, utilizó para ello de manera sistemática su conocimiento previo sobre la numeración y la operatoria orales: para escribir el numeral correspondiente a “quinientos treinta y dos”, por ejemplo, identificó y escribió la cantidad de billetes de cien, de monedas de 10 y de monedas de uno. Para interpretar y leer una escritura como 532, consideró que el 5 representa billetes de cien y por lo tanto 500, el 3 representa 30 y el 2 representa 2, sumó mentalmente y obtuvo el número oral.

Advierto también a los diseñadores didáctico que puedan poner en práctica “El cheque”, o cualquier situación para acceder a la representación escrita de los números que pase por un análisis de las cantidades desarrolladas (unidades, decenas y centenas) que atravesará por la ambivalencia de los valores absolutos y relativos del número.

[68] Cabe señalar que en ambos casos se pudo constar que las actividades que consistieron en interpretar numerales fueron considerablemente más accesibles que las consistieron en crearlos, por lo que conviene empezar con aquellas.

El contraste en los resultados de la aplicación de la segunda secuencia confirma la observación de Delprato (2002) acerca que distintos conocimientos previos de los adultos pueden hacer necesarios distintos acercamientos didácticos. Considerando el propósito de partida del presente estudio de buscar las opciones didácticas que mejor aprovechen los conocimientos previos de los adultos, es posible afirmar que la secuencia didáctica organizada con el dispositivo de el Cheque puede resultar funcional sobre todo para los adultos que no tengan conocimientos previos sobre la escritura de números grandes (mayores que 100). Pero, en el caso de estos últimos, es necesario explorar otro camino *que recupere ese conocimiento y no lo convierta en obstáculo*. Dicho camino debería, probablemente, proponer una introducción directa de los numerales en su forma "global", sin descomponerlos. Probablemente los adultos puedan ir identificando el algoritmo generador de la serie escrita y, mediante una retroalimentación adecuada, puedan ir corrigiendo hipótesis incorrectas como la que da lugar al error típico de la traducción literal (que consiste en escribir por ejemplo 235 como 200305). El conocimiento previo de Rocío sobre algunos números y sus hipótesis de escritura (por ejemplo, a mayor cantidad de cifras más grande es el número) hace pensar que esto es factible. La utilización de tarjetas "superponibles" como las que se muestran, también podría ser una ayuda.

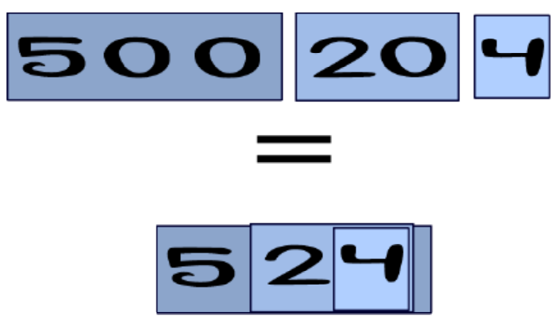


Figura 9. Tarjetas "superponibles".

Estas son ideas que será necesario explorar en otros estudios. Considero también que debe explorarse de manera más sistemática de lo que se pudo hacer aquí el potencial de la calculadora en una secuencia para la enseñanza de la numeración escrita.

Considerando los hallazgos anteriores, así como los de otros estudios, es posible afirmar que 1) el camino de la recuperación de conocimientos previos de los adultos no escolarizados, en particular, los de las aritmética oral, constituye una vía prometedora para brindar un acceso sencillo, eficiente y significativo a los adultos a la aritmética escrita, y 2) Un reto en la enseñanza para los adultos consiste en brindar más de un camino de acceso, al menos en los cuestiones más álgidas, como la del aprendizaje del sistema de numeración, de manera que si una vía no resulta idónea para un adulto en particular, por su experiencia y sus conocimientos previos, tenga al menos una segunda opción. Para quienes las dos o más opciones funcionen bien, el conjunto de las opciones brindaría de todas formas una ocasión para profundizar. Recordemos que una característica de las situaciones matemáticas es justamente la diversidad de formas de abordar las cuestiones. Se asoman aquí también grandes retos para los diseñadores de propuestas didácticas para los adultos.

Otro resultado interesante del estudio fue la relación de Carmen con las grafías. Carmen no había tenido ninguna experiencia con la escritura, por lo que hacer trazos le representó una gran dificultad. También fue difícil para ella reconocer las variantes gráficas que hacen que un numeral sea distinto de otro. Una secuencia didáctica debe considerar este aspecto, tanto en la elección de la tipografía más clara, como en la propuesta de ejercicios que ayuden a superar dificultades, por ejemplo, la clasificación de numerales que corresponden al mismo número, pero hechos con grafías de distinto tipo, y también ejercicios de trazo.

Por otra parte, durante el estudio de las grafías, Carmen dejó ver que a pesar de su desconocimiento de la escritura, tenía algunas hipótesis sobre las reglas de escritura los números tales como: números diferentes se escriben con grafías diferentes; a dos trazos diferentes les corresponden dos numerales diferentes; a cada trazo gráfico le corresponde un número (por lo tanto en “10” hay dos números). Estas hipótesis se fueron precisando y corrigiendo, como resultado de la utilización de la tira numérica.

Para terminar, presentaré el relato de un momento en una de las clases con Carmen, en el que se asoma de manera singular la socialización del conocimiento en la adquisición de la representación de números. Las nietas de Carmen estaban en la misma mesa coloreando dibujos y oían todo lo que se decían el maestro y Carmen.

> En cierta actividad se le escribió a Carmen el [85] en el cheque sin marco y se le pidió que lo leyera. Carmen reconoce el ocho, se tardó un poco en decodificarlo en la tira y una nieta le “sopla”: -¡es un ocho!-. Se le pregunta a Carmen: -¿cuánto serían ocho monedas de diez y cinco de a peso?-. Para este momento las nietas estaban muy

> involucradas con la actividad e intentaban contestar también, mientras que las nietas suman más lentamente, sumando uno por uno: -diez, veinte, treinta…-. Carmen contesta rápidamente: ochenta y cinco-. Se les pregunta a la nieta y a Carmen: ¿cuánto es 85 más 25? La niña no supo responder al instante, en cambio comenzó a escribir en un papel la suma por columnas. El método mental de Carmen es más rápido que el de la nieta y responde 110.

Una diferencia entre los adultos y los niños que están en proceso de aprender la numeración radica en que los primeros cuentan con una herramienta fundamental: el cálculo mental. Esta diferencia es el fundamento de la postura asumida en este estudio, de utilizar ese conocimiento para potenciar el aprendizaje de la representación escrita de los números. Sabemos que estamos todavía lejos de conseguirlo, pero espero haber contribuido en esa dirección.

Referencias

Acioly N.; Schliemann A. (1986), *Intuitive mathematics and schooling in a lottery game*, Proceedings of the 10th PME Conference 1, London, pp. 223-228.

Alvarado, Mónica (2002) “La construcción del sistema gráfico numérico en los momentos iniciales de la adquisición del sistema gráfico alfabético”, Tesis de doctorado, México. Departamento de Investigaciones Educativas (DIE).

Alvarado, Mónica (2005) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*, México, Paidós Educador.

Artigue, M. (1995) "Ingeniería didáctica" en Gómez P. (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 33-59.Gálvez, Grecia (1994). “La didáctica de las matemáticas” en *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones*, Cecilia Parra e Irma Saiz (comps.). Ed. Paidós Educador. Buenos Aires, Argentina.

Ávila, Alicia (1989) "Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados", Tesis de maestría, México, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Ávila, Alicia. (1990), "El saber matemático de los adultos analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo". *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, Vol. XX No. 3. pp. 55-95, Centro de Estudios Educativos. Ciudad de México.

Ávila, Alicia. (1993), “El saber matemático extraescolar en los Libros para la Educación de Adultos”. *Educación Matemática* Vol 5, No 3 págs. 60-77 México (DF):Grupo Editorial Iberoamérica

Ávila, Alicia (2005), “El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo”. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 3er-4to trimestres, año/vol. XXXV, números 3-4. Centro de Estudios Educativos, Distrito Federal, México, pp.179-219.

Ávila, Alicia (2007) "Del cálculo oral al cálculo escrito", *Recherches en Didactique des Mathêmatiques*, Vol. 27 (3): 313-348.

Ávila, Alicia y Guillermina Waldegg (1997) *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*, México, Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA).

Baker, D., B. Street, A. Tomlin (2003), "Mathematics as social: undestanding relationships between home and school numeracy practices", *For the Learning of Mathematics*, Vol. 23 (3), Ontario, FLM Publishing Association, pp. 11-15.

Block, David y Miriam Nemirovsky (1988) *Algunos procedimientos y representaciones matemáticos de adultos no alfabetizados* en “Memorias de la segunda reunión centroamericana y del caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa”, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV del IPN. México.

Block, David y Álvarez, Ána María (1999) "Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas", *Educación Matemática*, Vol. 11 (1): 57-76, México. Ed. Iberoamerica.

Block, D. (2006). “La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico”, Tesis de Doctorado, México, DIE.

Brousseau, Guy (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Brousseau, Guy (2007b). *Le calcul <<À la Plume >> Des Multiplications et des Divisions Élémentaires.* Disponible en http://www.ardm.eu/contenu/guy-brousseau-le-calcul-%C2%AB-%C3%A0-la-plume-%C2%BB-des-multiplications-et-des-divisions-%C3%A9l%C3%A9mentaires (Visitado 16 de diciembre del 2010)

Bujanda, Jauregui, M.P. (1981). "Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática", Madrid, Disponible en: www.utpl.edu.ec/eva/descargas/material/184/G27702.2.pdf (Visitado 16 de dicembre del 2010).

Carraher, T., D. Carraher, y A. Schliemann (1997). *En la vida diez, en la escuela cero*, 4a. ed., México. Siglo XXI.

Colomb, J. (ed.) (1978). *Apprentissages mathématiques à l`ècole èlèmentaire*, Paris, ERMEL, Institut National de Recherche Pèdagogique.

Colomb, J. (ed.) (1991), *Apprentissages numériques*, París, ERMEL, Institut National de Recherche Pédagogique. Hatier.

Corominas, Joan (2008). *Breve diccionario etimológico de la lengua castellana*. 4ª edición. Madrid: Editorial Gredos.

De Agüero, M. (2006) *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matematizables de la vida cotidiana*, México, Centro de Cooperación Regional, para la Educación de Adultos en América Latina y el Caribe (CREFAL) y Universidad Iberoamericana (UIA).

Delprato, Fernanda (2002). "Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización escrita", Tesis de Maestría, México, DIE.

Delprato, Ma. F. (2005) "Educación de Adultos: ¿Saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? Revista *Latinoamericana en Matemática Educativa*, Julio, Año/vol. 8, número 002: 129-144

Delprato, Ma. F. y Fuenlabrada, I. (2003) “El cajero. Un recurso didáctico que favorece el acceso de los adultos analfabetos a la simbolización de los números y las operaciones de suma y de resta”, *Decisio*. *Saberes para la acción en educación de adultos*, Vol. Primavera 2003: 37-40.

Delprato, Ma. F. e I. Fuenlabrada (2008) “Así le hacemos nosotros: prácticas de numeración escrita en organizaciones productivas de mujeres con baja escolaridad”, *Cuadernos de Educación*, Año VI - Número 6 – (pp. 337-349) ISSN: 1515-3959. Córdoba Julio de 2008.

Duval, Raymond (1993) "Semiosos y Noesis" en Sánchez y Zubieta (comp.), *Didáctica de las Matemáticas*, México, Departamento de Matemática Educativa (DME)-Cinvestav.

Ferreiro, Emilia, *et al*. (1983), "Los adultos no alfabetizados y sus conceptualizaciones del sistema de escritura" en *Cuadernos de Investigación Educativa, Nº 10*, México, DIE.

Ferreiro, Emilia y M. Gómez (1982) *Análisis de las perturbaciones de aprendizaje de la lectoescritura*. México, Secretaría de Educación Pública (SEP) -Dirección General de Evaluación Educativa (DGEE).

Ferreiro, Emilia y Ana Teberosky (1999) *Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño.* Siglo Veintiuno Editores.

Gálvez, Grecia (1994). "Didáctica de las matemáticas" en Parra, Saiz (comp.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y Reflexiones*, Buenos Aires, Paidós Educador.

Gelman, R y Gallistel, C.R. (1978). *The child´s understanding of Lumber,* Cambridge, MA: Harvard Press.

Ifrah, Georges. (2002) *Histoire universelle des chiffres*, París, Laffont.

INEA (2000a) *Guía del asesor del Módulo Matemáticas para Empezar*, México, INEA.

INEA (2000b) *Libro del Adulto del Módulo Matemáticas para Empezar*, México, INEA.

INEA (2000c) *Guía y fichas del asesor del Módulo Matemáticas para Empezar*, México, INEA.

INEA (2000d) *Fichas y guía del asesor del Módulo Los números*, México, INEA.

INEA (2000e) *Libro del Adulto del Módulo Los números*, México, INEA.

INEA (2006). *Alfabetización en México*, México, Instituto Nacional para la Educación de Adultos.

Kalman, Judith (2004) *Saber lo que es la letra. Una experiencia de lectoescritura con mujeres de Mixquic*, México, SEP.

Knijnik, Gelsa (1997). "Conocimiento matemático en la educación de jóvenes adultos" en *Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación*. Santiago, Organización de las Naciones (UNESCO).

Lerner, D., P. Sadovsky y S. Wolman (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico, en C. Parra e I. Saiz (comp.), "Didáctica de las matemáticas", Ed. Paidós. Buenos Aires.

Mariño, G. (1983). ¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Constataciones y propuestas, Bogota, Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1997). "Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos". En: Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación. Brasil, Río de Janeiro 1995; Unesco-Santiago, pp. 77-100

Mariño, G, (2003). "La Educación matemática de jóvenes y adultos. Influencias y Trayectos", *Decisio*, pág. 27-32 Primavera 2003:

Menninger, Karl (1969). *Number words and number symbols: a cultural history of numbers*, Cambridge, Mass.:MIT Press.

Ramirez, Ligia (2003). "La enseñanza de los primeros números en preescolar". *Tesis de Maestría*, México, DIE.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in Thinking. Cognitive Development in Social Context*. New York & Oxford: Oxford University Press.

SEP (1994). *El fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer Grado*. México, SEP.

SEP (1992). *El fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer Grado*. México, SEP

SEP (2002). *Matemáticas Primer Grado*, México, SEP.

SEP (2003) *Libro para el Maestro* “Matemáticas Primer Grado”*,* México, pp. 27.

Vargas, Isabel M. (2000). Didáctica de la Matemática. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile.

Willerding, Margaret F. (1969) *Conceptos matemáticos. Un enfoque histórico.* Ed. CECSA.